МАТЕМАТИКА

УДК517.2 + 512.8

М.Р. Петриченко

Санкт-Петербургский государственный политехнический университет

АДДИТИВНОЕ И МУЛЬТИПЛИКАТИВНОЕ УДВОЕНИЕ ПЕРЕМЕННЫХ В АВТОНОМНЫХ УРАВНЕНИЯХ

Для нетривиального погружения характеристики исходной задачи Коши в поле экстремалей используются процедуры различного удвоения переменных: аддитивного и мультипликативного, внешнего и внутреннего.

ДИНАМИЧЕСКАЯ СИСТЕМА, ПОТОК, ПОЛЕ ЭКСТРЕМАЛЕЙ, РАССЛОЕНИЕ, БАЗИС РАССЛОЕНИЯ, ДИФФЕОМОРФИЗМ, ГАМИЛЬТОНИАН, УРАВНЕНИЯ ЛАГРАНЖА.

Введение

Процедура канонического погружения известна для системы вида

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \vec{\mathfrak{F}}(t, \mathbf{x}),\ \mathbf{x}(0) - \mathbf{x}_0 = 0, \qquad (1)$$

где

$$\mathfrak{D}(\mathbf{x}) = \mathfrak{T},\ \mathfrak{X} \subset \mathfrak{R}^{m=\dim(\mathfrak{X})},\ \mathbf{x} \in \mathfrak{X},$$
$$\mathfrak{F} : \mathfrak{T} \times \mathfrak{X} \to \mathfrak{T}_x,$$

или в скалярном виде:

$$\frac{dx_s}{dt} = \mathfrak{F}_s(t, x_1, ..., x_m),\ x_s(0) - x_{s0} = 0,$$
$$s = 1(1)\dim(x).$$

Для указанной процедуры известна следующая теорема (см., например, работу [1]).

Теорема. *Погружение характеристики системы (1) в поле возможно тогда и только тогда, если выполняются следующие условия:*

1. импульсы $y_{sr} := \dfrac{\partial \mathfrak{F}_s}{\partial x_r}$ *самосопряжены, т. е.*

$$\frac{\partial y_{sr}}{\partial x_t} = \frac{\partial y_{st}}{\partial x_r}$$

(отображение $\mathfrak{F}$ *— это дважды непрерывно дифференцируемый в X диффеоморфизм);*

2. уравнения (1) согласованы; это означает, что они выполняются в каждой точке графика T × X, включая концы.

Например, для системы порядка m выполняются $2m$ условий самосопряженности и m условий согласованности. Поэтому естественно интерпретировать условия теоремы как ограничения на систему порядка $4m$ на m неизвестных. Действительно, если

$$\frac{d^2\mathbf{x}}{dt^2} = \Lambda\left(t,\ \mathbf{x},\ \frac{d\mathbf{x}}{dt}\right),$$

где

$$\mathfrak{D}(\mathbf{x}) = \mathfrak{T}, x \in \mathfrak{X}, \frac{dx}{dt} \in \mathfrak{T}_x,$$
$$\Lambda{:}\mathfrak{T} \times \mathfrak{X} \times \mathfrak{T}_x \to \mathfrak{C}^{(2)}(\mathfrak{T}),$$

то вдоль слоя T_x выполняется уравнение

$$\frac{\partial \mathfrak{F}_s}{\partial t} + \vec{\mathfrak{F}}\nabla\mathfrak{F}_s = \Lambda_s,\ s = 1(1)m,\ \vec{\mathfrak{F}} = \mathrm{str}(\mathfrak{F}_s) \qquad (2)$$

и можно интерпретировать эти равенства (2) как уравнения Якоби на действие F_s с координатами x_s, импульсами y_{sr}.

Тогда условия самосопряженности имеют вид

$$\frac{\partial^2 \mathfrak{F}_s}{\partial x_r \partial x_t} = \frac{\partial^2 \mathfrak{F}_s}{\partial x_t \partial x_r},$$

а условия согласованности —

$$\frac{\partial}{\partial x_r}\left(\frac{\partial \mathfrak{F}_s}{\partial t} + \vec{\mathfrak{F}}\nabla\mathfrak{F}_s - \Lambda_s\right) = \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial \mathfrak{F}_s}{\partial x_r}\right) +$$

$$+\frac{\partial}{\partial x_r}\left(\vec{\mathfrak{F}}\nabla\mathfrak{F}_s - \Lambda_s\right) = 0,$$

где

$$\vec{\mathfrak{F}}\nabla\mathfrak{F}_s - \Lambda_s := \mathcal{E}_s(t, \vec{x}, \vec{y})$$

— гамильтониан, или «энергия» системы (1),

$$\mathcal{E}_s : \mathfrak{T} \times \mathfrak{X} \times \mathfrak{Y} \to \mathfrak{R}^1.$$

Кроме того, вдоль характеристики решаемой задачи выполняются $2m$ уравнений Лагранжа второго порядка:

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial\Lambda_s}{\partial\dot{x}_r} = \frac{\partial\Lambda_s}{\partial x_r},$$

т. е. система имеет порядок $4m$.

Очевидно, что в условиях, когда система (1) удовлетворяет условиям ослабленной теоремы существования и единственности решения (с достаточно гладким отображением в правой части) условия самосопряженности выполняются тождественно, а в скалярном случае ($m = 1$) отсутствуют. Условия согласованности нетривиальны и совпадают с каноническим уравнением на импульс.

В задачах с физическим содержанием равенства (2) рассматриваются как уравнения движения, а условия (1) — как предельные условия на координаты и импульсы.

Постановка задачи

Рассматривается задача Коши для уравнения или системы уравнений (1). Тем самым задается поток (отображение базы X на слой или тривиальное касательное расслоение) и T_x — касательное пространство. При этом ставится задача — выяснить возможность погрузить это расслоение в пучок (поле) экстремалей. Для решения задачи необходимо установить, совпадает ли характеристика исходной задачи Коши с экстремалью и, если совпадает, то для какого именно пучка.

Традиционное решение задачи

Пусть уравнений (2) не существует, а они выполняются просто как тождества на производные от $\mathfrak{F}_i$ вдоль поля:

$$\frac{d\mathfrak{F}_i}{dt} := \Lambda_i.$$

Тогда, очевидно, что энергия системы $E_s = 0$.

Погружение, в котором условия (2) выполняются тождественно, естественно назвать тривиальным. Покажем, что тривиальное погружение приводит к невырожденному лагранжиану.

Пример тривиального погружения. Положим $m = 1$. Пусть рассматривается уравнение

$$\frac{dx}{dt} = f(x), \mathfrak{D}(x) = \mathfrak{T}.$$

Вдоль характеристики этого уравнения справедливо выражение

$$\mathfrak{Z}(\mathfrak{T}) = \int_{\mathfrak{T}}\left(\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + f^2(x)\right)dt \to \inf \geq 0.$$

Первый интеграл уравнения Лагранжа имеет вид

$$v = \sqrt[\pm]{f^2(x) + C}.$$

Пусть $C = 0$. Тогда одна из ветвей этого интеграла совпадает с исходным уравнением. Далее, пусть $v(x_0) = v_0$. Если $v_0 \neq \pm f(x_0), C \neq 0$, то очевидно, что задача на минимум $Z(T)$ равносильна задаче на поиск минимума среднеквадратичного отклонения

$$\int_{\mathfrak{T}}\left(\frac{dx}{dt} - f(x)\right)^2 dt := \|x - f\|^2.$$

Следовательно, тривиальное погружение характеристики задачи (1), когда $m = 1$, приводит к пучку экстремалей, обеспечивающих минимум среднеквадратичного отклонения. Далее условие согласованности уже выполняется:

$$y = \dot{x}, \mathcal{E} = \frac{y^2 - \mathfrak{F}^2(x)}{2}, \frac{\partial y}{\partial t} = -\frac{\partial\mathcal{E}}{\partial x} = \mathfrak{F}\mathfrak{F}'.$$

Действие $\mathfrak{Z}$ удовлетворяет уравнению

$$\frac{\partial\mathfrak{Z}}{\partial t} + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial\mathfrak{Z}}{\partial x}\right)^2 - \frac{1}{2}\mathfrak{F}^2(x) = 0,$$

откуда получаем его полный интеграл:

$$\mathfrak{Z} = -\frac{at}{2} + \int_{x_0}^{x}\sqrt[\pm]{\mathfrak{F}^2(z) + a}dz.$$

Огибающая (каустика) решений, очевидно, совпадает с решением уравнения Лагранжа.

Обобщение случая тривиального погружения. Рассмотрим простейший случай, когда $m = 2$ (поток на плоскости):

$$\frac{dx_1}{dt} = f_1(x_1, x_2); \quad \frac{dx_2}{dt} = f_2(x_1, x_2). \tag{1а}$$

Вдоль характеристик этой системы следует записать:

$$\frac{d^2 x_i}{dt^2} = f_1 \frac{\partial f_i}{\partial x_1} + f_2 \frac{\partial f_i}{\partial x_2} = \mathbf{f}\nabla f_i, \ i = 1,\ 2,$$

или (в другой записи)

$$v_1 \frac{\partial v_1}{\partial x_1} + v_2 \frac{\partial v_1}{\partial x_2} = f_1 \frac{\partial f_1}{\partial x_1} + f_2 \frac{\partial f_1}{\partial x_2}; \quad v_1 \frac{\partial v_2}{\partial x_1} + v_2 \frac{\partial v_2}{\partial x_2} = f_1 \frac{\partial f_2}{\partial x_1} + f_2 \frac{\partial f_2}{\partial x_2}. \tag{1б}$$

В векторной нотации представленная система имеет вид

$$\mathbf{v}\nabla v_i = \mathbf{f}\nabla f_i, \ i = 1, 2.$$

Пусть

$$v_i = \frac{dx_i}{dt}, i = 1, 2.$$

Тогда равенства (1б) принимают следующий вид:

$$v_1 \frac{\partial v_1}{\partial x_1} + v_2 \frac{\partial v_1}{\partial x_2} = v_1 \frac{\partial f_1}{\partial x_1} + v_2 \frac{\partial f_1}{\partial x_2};$$

$$v_1 \frac{\partial v_2}{\partial x_1} + v_2 \frac{\partial v_2}{\partial x_2} = v_1 \frac{\partial f_2}{\partial x_1} + v_2 \frac{\partial f_2}{\partial x_2},$$

откуда сразу же можно получить, что

$$\forall i = 1, 2 : v_i = f_i + C_i.$$

Можно видеть, что тривиальное погружение содержит характеристику исходного уравнения, когда $\mathbf{C} = (C_1,\ C_2) = 0$.

Но если $\mathbf{C} = 0$, то тождественно выполняются равенства

$$v_s(x_1, x_2) = f_s(x_1, x_2), \ s = 1, 2,$$

которые совпадают с исходной системой (1). Кроме того, при этих же предположениях необходимо выполнение двух условий, равносильных условиям согласованности:

$$v_1 \frac{\partial v_1}{\partial x_2} = f_1 \frac{\partial f_1}{\partial x_2}, \ v_2 \frac{\partial v_2}{\partial x_1} = f_2 \frac{\partial f_2}{\partial x_1},$$

что приводит к равенству

$$\frac{\partial}{\partial x_1}\left(\frac{v^2}{2}\right) + \frac{\partial}{\partial x_2}\left(\frac{v^2}{2}\right) = \frac{\partial}{\partial x_1}\left(\frac{f^2}{2}\right) + \frac{\partial}{\partial x_2}\left(\frac{f^2}{2}\right) + f_2 \frac{\partial f_1}{\partial x_2} + f_1 \frac{\partial f_2}{\partial x_1}, \tag{1в}$$

где $v := \sqrt{v_1^2 + v_2^2}$, $f := \sqrt{f_1^2 + f_2^2}$ — евклидовы нормы.

Если же

$$f_2 \frac{\partial f_1}{\partial x_2} + f_1 \frac{\partial f_2}{\partial x_1} = 0,$$

то из равенства (1в) получается, что

$$v^2 = f^2 + C, \ v = \pm\sqrt{f^2 + C}.$$

Пусть $v(0) \mp f(0) = 0$, тогда $C = 0$.

Далее, пусть теперь задана система четвертого порядка:

$$\frac{d^2 x_i}{dt^2} := \Lambda_i(\mathbf{x}, \mathbf{v}), \ i = 1, 2, \tag{3}$$

причем система (1а) рассматривается как совокупность согласованных предельных условий для системы (3).

Функция Гамильтона определяется в данном случае как

$$\mathcal{E}_1(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}) = f_r \frac{\partial f_i}{\partial x_s} - \Lambda_i, \ i = 1, 2$$

где

$$z_i := \frac{\partial f_2}{\partial x_i}, \ i = 1, 2, \ \mathbf{z} = (z_1, z_2).$$

В случае тривиального погружения $\Lambda_1 = 0$. При этом справедливы равенства:

$$y_i = \frac{\partial \Lambda_1}{\partial \dot{x}_i}, \ z_i = \frac{\partial \Lambda_2}{\partial \dot{x}_i},$$

или в векторной нотации —

$$\mathbf{y} = \nabla_v \Lambda_1, \ \mathbf{z} = \nabla_v \Lambda_2.$$

Условия согласованности дают следующие равенства:

$$\frac{\partial y_i}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial f_1}{\partial x_i}\right) = \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{\partial f_1}{\partial t}\right) = -\frac{\partial \mathcal{E}_1}{\partial x_i} = \frac{\partial \Lambda_1}{\partial x_i},$$

и аналогично по второму набору импульсов —

$$\frac{\partial z_i}{\partial t} = \frac{\partial \Lambda_2}{\partial x_i}.$$

Таким образом, выполняется система из четырех уравнений Лагранжа второго рода на компоненты импульсов:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \Lambda_s}{\partial \dot{x}_i}\right) = \frac{\partial \Lambda_s}{\partial x_i},\ \ i, s = 1, 2.$$

Это система восьмого порядка, и предельные условия на координаты x_i связаны четырьмя предельными условиями (1а) и еще четырьмя условиями вида

$$\frac{df_i}{dt} = \left(\frac{\partial}{\partial t} + f_s\frac{\partial}{\partial x_s}\right) f_i = \Lambda_i;$$

$$\frac{\partial f_i}{\partial x_s} = \frac{\partial \Lambda_i}{\partial \dot{x}_s},\ \ i, s = 1, 2.$$

Далее, пусть

$$\mathfrak{T} \subset \Re^1, \mathfrak{X} \subset \Re^1, \mathfrak{F} : \mathfrak{X} \to$$

$$\to \mathfrak{T}_x, \mathfrak{D}(x) = \mathfrak{T}, \mathbf{x} \in \mathfrak{C}^{(1)}(\mathfrak{T}).$$

Тем самым задан поток на прямой (тривиальное расслоение) с базой $X \subset \Re^1$ и слоем $\Re^1$:

$$\frac{dx}{dt} = \mathfrak{F}(x),\ \ x(0) - x_0 = 0. \tag{4}$$

Система, ассоциированная с потоком (4), которую получают внутренним аддитивным удвоением, представлена в статье [1].

В следующих разделах приводятся два варианта мультипликативного удвоения переменных, связанных с группами сдвигов и вращений, которые позволяют, оставаясь в условиях тривиального погружения, погрузить поток (4) в поле экстремалей некоторого знакоопределенного функционала путем искусственного «навязывания» условия согласованности. Гамильтонианы некоторых физических задач с применением групповых методов построены в работах [2 – 5].

Внешнее мультипликативное удвоение переменных

Пусть $y \in Y \subset \Re^m$. Рассмотрим поток (тривиальное расслоение) $X \times Y \to \Re^m$, $m = 1$:

$$\frac{dx}{dt} = yf(x);$$

$$\frac{dy}{dt} = -\frac{y^2-1}{2}\frac{df(x)}{dx}; \tag{5}$$

$$x(0) - x_0 = y(0) - y_0 = 0,\ \ y_0 \neq 1.$$

Тогда справедливы следующие утверждения:

1. Система (5) обеспечивает необходимые условия минимума ($f > 0$) и максимума ($f < 0$) распределению

$$\mathfrak{Z}(T, x) = \frac{1}{2}\int_T \frac{1}{f(x)}\left(\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + f^2(x)\right)dt.$$

Плотность распределения $\mathfrak{Z}(T, x)$ имеет вид

$$\Lambda\left(x, \frac{dx}{dt}\right) = \frac{1}{2f(x)}\left(\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + f^2(x)\right)$$

и равносильна плотности распределения для среднеквадратичного отклонения с весом $1/f(x)$:

$$\Lambda^*\left(x, \frac{dx}{dt}\right) = \frac{1}{2f(x)}\left(\frac{dx}{dt} \pm f(x)\right)^2.$$

Другими словами, минимизация распределения $\mathfrak{Z}(T,x)$ равносильна минимизации среднего квадратичного отклонения

$$\|\dot{x} - f\|_{L_2(T)}$$

с весом $1/f(x)$;

2. Вдоль экстремалей $\mathfrak{Z}(x)$ линейный элемент выражается как

$$u = \sqrt[\pm]{f(x)(f(x)+\alpha)},\ \ u := \frac{dx}{dt},$$

где α – постоянная интегрирования.

Например, пусть $u(x_0) = 0$. Тогда $\alpha = -f(x_0)$. Если $u = \pm f(x_0)$, то $\alpha = 0$;

3. Полный интеграл системы (5) имеет вид

$$\mathfrak{Z}(t, x) = -\frac{at}{2} \pm \int_{x_0}^{x}\sqrt{\frac{f(z)}{f(z)+a}}dz,$$

где a – постоянная величина.

Можно видеть, что особое решение (каустика) совпадает с решением уравнения Лагранжа.

Наглядный пример. Рассмотрим задачу Коши:

$$\frac{dx}{dt} = -\frac{1}{x}, \; D(x) = T = (0, \tau), \; x(0) - 1 = 0.$$

Она имеет следующее решение:

$$x(t) = \sqrt{1-2t}, \; t = \frac{1-x^2}{2}.$$

Очевидно, что $x = 0, \tau = 1/2$.

Удвоенная система имеет вид

$$\frac{dx}{dt} = -\frac{y}{x}, \; \frac{dy}{dt} = \frac{y^2-1}{2x}, \; x(0) - 1 = y(0) = 0$$

и имеет следующее решение:

$$t = 2\sqrt{1-x} - \frac{2}{3}\sqrt{(1-x)^3}.$$

Положим $t = \tau = 1/2$. Тогда $x(\tau) > 0$. Вдоль характеристики удвоенной системы выполняется условие

$$S(\tau, x) = \frac{1}{2}\int_0^{\tau}\left(x\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \frac{1}{x}\right)dt \to \inf \geq 0.$$

Приведенный пример связан с известной задачей Дюпюи [6] о форме депрессионной кривой (x – глубина, t – координата, $x(\tau) > 0$ – высота ступеньки «высачивания»). Таким образом, существует экстремаль с нулевой касательной в «сечении» $t = 0$, пересекающей «сечение» $t = \tau$ выше оси абсцисс.

Внутреннее мультипликативное удвоение переменных

Указанное удвоение связано с системой, ассоциированной с системой (1):

$$\frac{dx}{dt} = f(yx);$$

$$\frac{dy}{dt} = \frac{f(x)}{x} + \frac{1}{x^2}\int_x^{yx} f(z)dz - \frac{yf(x)}{x};$$

которая порождена гамильтонианом

$$E(x, y) = \frac{1}{x}\int_x^{yx} f(z)dz.$$

Первый интеграл ассоциированной системы имеет вид

$$\frac{1}{x}\int_x^{xy} f(z)dz = \frac{1}{x_0}\int_{x_0}^{x_0y_0} f(z)dz = \alpha = \text{const}. \quad (6)$$

Пусть $\varphi = f^{-1}$, а $T_x \to X$. Плотность распределения функционала (действия) $\mathfrak{J}$, а именно $\Lambda : (X \times T_x) \to \Re^1$, следует выражению

$$\Lambda\left(x, \frac{dx}{dt}\right) = \frac{\dot{x}\varphi(\dot{x})}{x} - \frac{1}{x}\int_x^{\varphi(\dot{x})} f(z)dz.$$

Тогда можно записать, что

$$y := \frac{\partial\Lambda}{\partial\dot{x}} = \frac{\varphi\dot{x}}{x}, \; y_1 := \frac{\partial\Lambda}{\partial x} =$$

$$= -\frac{\dot{x}\varphi(\dot{x})}{x^2} + \frac{1}{x^2}\int_x^{\varphi(\dot{x})} f(z)dz + \frac{f(x)}{x}.$$

В этом случае уравнение Лагранжа принимает вид

$$u\frac{du}{dx}\varphi'(u) = f(x) + \frac{1}{x}\int_x^{\varphi(u)} f(z)dz,$$

где

$$u := \frac{dx}{dt}, \; u = u(x), \; u(x_0) - u_0 = 0.$$

Следовательно, с учетом вида первого интеграла (6), частное решение уравнения Лагранжа выражается как

$$u\varphi(u) - u_0\varphi(u_0) - \int_{u_0}^{u}\varphi(v)dv =$$

$$= \int_{x_0}^{x} f(z)dz + \alpha(x - x_0).$$

Например, пусть $y_0 = 1$. Тогда выполняются равенства

$$\alpha = 0, \; u_0 = f(x_0), \; u = f(x), \; \varphi(f(z)) = z,$$

и решение уравнения Лагранжа превращается в трюизм:

$$xf(x) - x_0f(x_0) = \int_{x_0}^{x} f(z)dz + \int_{x_0}^{x} zdf(z).$$

Сопоставление мультипликативного и аддитивного удвоения

Внешнее аддитивное удвоение. Данное удвоение порождает гамильтониан вида

$$E_a^{ex}(x, y) = yf(x) + \frac{y^2}{2}$$

и ассоциированную систему уравнений:

$$\frac{dx}{dt} = f(x) + y;$$

$$\frac{dy}{dt} = -yf'(x).$$

Условие минимума гамильтониана имеет вид

$$\mathfrak{I}_a^{ex}(T,x)=\int_T\left(\frac{dx}{dt}-f(x)\right)^2dt\to\inf\geq 0$$

и не зависит от знака функции $f(x)$. Роль нейтрального элемента группы сдвигов играет переменная $y = 0$, а обратный элемент – это $-y$. Итак, внешнее аддитивное удвоение реализует тривиальное погружение характеристики в пучок экстремалей.

Легко доказать, что экстремаль совпадает с огибающей полного интеграла уравнения на действие:

$$\frac{\partial\mathfrak{I}_a^{ex}}{\partial t}+\frac{1}{2}\left(\frac{\partial\mathfrak{I}_a^{ex}}{\partial x}\right)^2+f(x)\frac{\partial\mathfrak{I}_a^{ex}}{\partial x}=0.$$

Внешнее мультипликативное удвоение. Указанное удвоение порождает гамильтониан вида

$$E_m^{ex}(x,y)=\frac{y^2-1}{2}f(x)$$

и соответствующую ассоциированную систему уравнений:

$$\frac{dx}{dt}=yf(x);$$
$$\frac{dy}{dt}=-\frac{y^2-1}{2}f(x).$$

Условие экстремума гамильтониана имеет вид

$$\mathfrak{I}_m^{ex}(T,x)=\int_T\frac{(\dot{x}-f(x))^2}{f(x)}dt\to\operatorname{sgn}f\cdot\inf\geq 0.$$

Роль нейтрального элемента полугруппы играет величина $y = 1$. При этом обратный элемент y^{-1} не определен. Например, пусть $y\in X$, $X\subset\Re^1$ – компакт. Тогда малые по норме элементы y не имеют обратных элементов. Множитель y^{-1} сингулярно возмущает систему (1).

Так же, как и при внешнем аддитивном удвоении, решение вариационной задачи совпадает с каустикой полного интеграла уравнения Якоби на действие, т. е.

$$\frac{\partial\mathfrak{I}_m^{ex}}{\partial t}-\frac{1}{2}\left(\frac{\partial\mathfrak{I}_m^{ex}}{\partial x}\right)^2+\frac{f(x)}{2}=0.$$

Внутреннее аддитивное удвоение. Данное удвоение (оно описано в работе [1]) порождает гамильтониан вида

$$E_a^{in}(x,y)=\int_x^{x+y}f(z)dz,$$

полугруппу сдвигов с нейтральным элементом $y = 0$ и со следующей ассоциированной системой уравнений:

$$\frac{dx}{dt}=f(x+y);$$
$$\frac{dy}{dt}=f(x)-f(x+y).$$

Плотность распределения функционала выражается как

$$\frac{d\mathfrak{I}_a^{in}}{dt}=\dot{x}(\varphi(\dot{x})-x)-\int_x^{\varphi(\dot{x})}f(z)dz.$$

Вдоль экстремалей выполняется условие

$$S_a^{in}(T,x)\to\inf\geq 0.$$

Предельная задача для уравнения Лагранжа имеет следующий вид:

$$u\frac{du}{dx}\varphi'(u)=f(x),\ u:=\frac{dx}{dt}=u(x),\quad u(x_0)-u_0=0 \tag{7}$$

и имеет решение, которое выражается как

$$(u\varphi(u))_{u_0}^{u}=\int_{u_0}^{u}\varphi(v)dv+\int_{x_0}^{x}f(z)dz.$$

Пусть $y = 0$, тогда $u_0 = f(x_0)$ и равенство (7) превращается в формулу Ньютона. Обратным элементом служит величина $-y$.

Внутреннее мультипликативное удвоение. Данное удвоение порождает гамильтониан вида

$$E(x,y)=\frac{1}{x}\int_x^{yx}f(z)dz$$

и каноническую систему уравнений:

$$\frac{dx}{dt}=f(yx);$$
$$\frac{dy}{dt}=\frac{f(x)}{x}+\frac{1}{x^2}\int_x^{yx}f(z)dz-\frac{yf(x)}{x}.$$

Вдоль экстремалей выполняются следующие условия:

$$\frac{d\mathfrak{I}_a^{in}}{dt}=\Lambda\left(x,\frac{dx}{dt}\right)=\frac{\dot{x}\varphi(\dot{x})}{x}-\frac{1}{x}\int_x^{\varphi(\dot{x})}f(z)dz,$$
$$\mathfrak{I}_a^{in}(T,x)\to\inf\geq 0.$$

Если же $y = 1$, $u = f(x)$, $\Lambda = dx/dt$, то уравнение Лагранжа превращается в тривиальное тождество.

Заключение

Для нетривиального погружения характеристики исходной задачи Коши в поле экстремалей в данной работе впервые используются разные процедуры удвоения переменных: аддитивного и мультипликативного, внешнего и внутреннего. Мультипликативное удвоение – это вариант определения интегрирующего множителя и представления полугруппы (моноида) аффинных преобразований базы $\mathfrak{X} \subset \mathcal{E}_m$ с нейтральным элементом $y = 1$. Аддитивное удвоение есть расширение метода вариации постоянных на конечные сдвиги и представления группы сдвигов (трансляций) с нейтральным элементом $y = 0$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Павленко Ю.Г., Зеленский С.И.** Интегрирование негамильтоновых систем методом удвоения переменных // Вестник МГУ. Сер. «Физика. Астрономия». 1987. Т. 28. № 1. С. 1–25.

2. **Tarasov V.** Irreducible monodromy matrices for the *R*-matrix of the *XXZ*-model and lattice local quantum Hamiltonians. *Theoretical and Mathematical Physics.* 1985. Vol. 63, pp. 440–444.

3. **Tarasov V., Varchenko A.** Selberg-type integrals associated with *S*-fraktur sign *L*-fraktur sign 3. *Letters in Mathematical Physics.* 2003, Vol. 65, No. 3, pp. 173-185.

4. **Mukhin E., Tarasov V., Varchenko A.** Bispectral and (GLn, GLm) dualities, discrete versus differential. *Advances in Mathematics.* 2008, Vol. 218, No. 1, pp. 121-124.

5. **Арнольд В.И.** Математические методы классической механики. М.: Едиториал УРСС, 2003. 416 с.

6. **Полубаринова-Кочина П.Я.** Теория движения грунтовых вод. М.: Наука, 1978, 676 с.

СВЕДЕНИЯ ОБ АВТОРЕ

ПЕТРИЧЕНКО Михаил Романович – *доктор технических наук, заведующий кафедрой гидравлики Санкт-Петербургского государственного политехнического университета.*

195251, Россия, г. Санкт-Петербург, Политехническая ул., 29.

fonpetrich@mail.ru

Petrichenko M.R. ADDITIVE AND MULTIPLICATIVE DOUBLING VARIABLES IN AUTONOMOUS EQUATIONS.

The paper analyzes the Cauchy problem for a dynamic equation or for a dynamic system (1) of equations. In doing so, we take a flow and a tangential space $\mathfrak{T}_x$, the flow being the dynamic system or mapping $\mathfrak{X}$ basis of segregation of $\mathcal{E}_m$ subset on the $\mathfrak{T}_x$ layer or a trivial tangential segregation. The segregation is given by diffeomorphism from $\mathfrak{X}$ on $\mathcal{E}_1$, of $\mathcal{C}^r(\mathfrak{T})$ class, $r \geq 1$.

The aim of this work is to elucidate the possibility of embedding this segregation into the field of extremals.

A necessary and a sufficient condition for a trivial embedding is formulated as the intensification of Liouville's condition in order to keep the phase volume or a condition of existence of invariant measure. The application of this condition allows to construct the dynamic system energy. The distribution which is a dual of Hamiltonian gives the Lagrangian density. In this manner a variational problem is obtained, in which the initial system plays the role of an intermediate integral and of coordination conditions for LaGrange's system of equations.

Procedures of different types of doubling variables (additive and multiplicative, external and internal) have been used in non-trivial embedding of the initial Cauchy problem characteristic into the field of extremals. Multiplicative doubling is analogous to the application of the integrating factor, and the additive one is identical to the addition of equations in variations to the initial system.

DYNAMIC SYSTEM, FLOW, FIELD OF EXTREMALS, SEGREGATION, BASIS OF SEGREGATION, DIFFEOMORPHISM, HAMILTONIAN, LAGRANGE EQUATIONS.

REFERENCES

1. **Pavlenko Yu.G., Zelenskiy S.I.** Integrirovanie negamil'tonovykh sistem metodom udvoeniya peremennykh. *Vestnik MGU, seriya Fizika, Astronomiya*, 1987, Vol. 28, No. 1, pp. 1-25. (rus)

2. **Tarasov V.** Irreducible monodromy matrices for the *R*-matrix of the *XXZ*-model and lattice local quantum Hamiltonians. *Theoretical and Mathematical Physics,* 1985, Vol. 63, pp. 440-444.

3. **Tarasov V., Varchenko A.** Selberg-type integrals associated with *S*-fraktur sign *L*-fraktur sign 3. *Letters in Mathematical Physics*, 2003, Vol. 65, No. 3, pp. 173-185.

4. **Mukhin E., Tarasov V., Varchenko A.** Bispectral and (GLn, GLm) dualities, discrete versus differential. *Advances in Mathematics*, 2008, Vol. 218, No. 1, pp. 121-124.

5. **Arnol'd V.I.** *Matematicheskie metody klassicheskoy mekhaniki.* Moscow, Editorial URSS, 2003, 416 p. (rus)

6. **Polubarinova-Cochina P.Ya.** *Teoriya dvizheniya gruntovykh vod,* Moscow, 1978, 676 p. (rus)

THE AUTHOR

PETRITCHENKO Mikhail R.
St. Petersburg State Polytechnical University
29, Politechnicheskaya St., St. Petersburg, 195251, Russia.
fonpetrich@mail.ru