УДК 519.854

В.И. Хохлюк

Институт математики им. С.Л. Соболева СО РАН

ГРУППОВАЯ ЗАДАЧА МИНИМИЗАЦИИ

Данная статья продолжает исследование групповой задачи минимизации (ранее было показано, как она возникает). Рассматриваются следующие вопросы: постановка задачи; ее численное решение; рекуррентные соотношения; вычисление коэффициентов неравенства, задающего грань многовершинника группового уравнения. Формулируется и доказывается теорема об оценке числа шагов.

КОНЕЧНАЯ АБЕЛЕВА ГРУППА, ЦИКЛИЧЕСКАЯ ГРУППА, ПРЯМАЯ СУММА, МИНИМИЗАЦИЯ, ГРУППОВОЕ УРАВНЕНИЕ, ГРУППОВАЯ ЗАДАЧА МИНИМИЗАЦИИ, РЕКУРРЕНТНОЕ СООТНОШЕНИЕ, ОЦЕНКА ЧИСЛА ШАГОВ, МНОГОВЕРШИННИК, ГРАНЬ МНОГОВЕРШИННИКА.

Введение

Групповая задача минимизации содержится в классе дискретных задач оптимизации с одним основным ограничением. Для нас представляет интерес один из вариантов указанной задачи, когда таким ограничением является групповое уравнение.

Настоящая работа посвящена постановке групповой задачи минимизации в сформулированном варианте и численному методу ее решения.

Доказательства утверждений линейной алгебры, теории групп и теории оптимизации, используемых далее в тексте статьи, можно найти в работах [1 – 5], а также в других литературных источниках.

Постановка задачи

Рассмотрим групповую задачу минимизации

$$\min\left\{\sum_{j=1}^{n} c_j t_j \mid \sum_{j=1}^{n} g_{i_j} t_j = h, t_j \in Z_+^1, \; j = 1, 2, \ldots, n\right\}, \tag{1}$$

где $c_j \geq 0$, $g_{i_j} \in G_d$, $i_j \in \{1, 2, \ldots, d-1\}$, $h \in G_d$; t_j – неотрицательная целочисленная переменная (j = 1, 2, ..., n). Все элементы g_{i_j}, $j = 1, 2, \ldots, n$, принадлежащие к группе G_d и выступающие в качестве коэффициентов в групповом уравнении (1), предполагаются различными. Через G_d обозначена конечная абелева группа порядка d. В рамках данной статьи это будет либо просто циклическая группа, либо прямая сумма нескольких циклических групп.

Допустимое множество задачи (1) является либо пустым, либо дискретным неограниченным n-мерным (полномерным), состоящим из целочисленных точек.

Выпуклую оболочку всех допустимых целочисленных решений задачи (1) будем называть многовершинником группового уравнения (групповой задачи минимизации). Многовершинник задачи (1) также является неограниченным n-мерным множеством, но уже многогранником, который можно задать конечной системой линейных неравенств. Все вершины многовершинника группового уравнения (1) являются целочисленными, поэтому его часто называют целочисленным многогранником.

Далее будет показано, как вычислить коэффициенты неравенства, задающего (n – 1)-мерную грань многовершинника группового уравнения (1), и как найти n точек, определяющих соответствующую гиперплоскость.

Отметим следующий факт [4]. Если неравенство

$$\sum_{j=1}^{n} \pi_j t_j \geq \pi_0 (\pi t \geq \pi_0)$$

задает (n – 1)-мерную грань многовершинника группового уравнения (1), то выполняются следующие соотношения:

$a)\ (\pi, \pi_0) \ge 0;\ b)\ \pi_0 = 0$ влечет $t_j \ge 0$,

$$j = 1, 2, \ldots, n.$$

Рекуррентные соотношения

Обозначим через $P(G_d, N, h)$ выпуклую оболочку всех неотрицательных целочисленных решений $(t_1, t_2, \ldots, t_n)$ группового уравнения

$$\sum_{j=1}^{n} g_{i_j} t_j = h, \qquad (2)$$

где $N = \{g_{i_1}, g_{i_2}, \ldots, g_{i_n}\}$ — заданное множество, состоящее из n различных ненулевых элементов конечной абелевой группы G_d, $g_{i_j} \in G_d$, $h \in G_d$ $(n = |N|)$.

В прямом методе справедливы, например, неравенства вида

$$1 \le n \le \min\{d - 1, l\}$$

(l — число небазисных столбцов). Множество $P(G_d, N, h)$ будем также называть многовершинником группового уравнения (2).

Требуется вычислить коэффициенты неравенства

$$\sum_{j=1}^{n} \pi_j t_j \ge \pi_0,\ \pi_0 \ne 0, \qquad (3)$$

которое задает $(n - 1)$-мерную грань n-мерного многовершинника $P(G_d, N, h)$, проходящую через его вершину $(t'_1, 0, \ldots, 0)$, причем $t'_1 \ne 0$.

Сначала определим функции $\psi_s(g)$, $g \in G_d$, $s = 1, 2, \ldots, n$, а затем покажем, как вычисляются значения этих функций с помощью рекуррентного соотношения.

Пусть заданы действительные неотрицательные числа π_j, $j = 1, 2, \ldots, n$. Определяем функции

$$\psi_s(g) = \begin{cases} \min\left\{\sum_{j=1}^{s} \pi_j t_j \mid (t_1, t_2, \ldots, t_s) \in T_s\right\}, \\ \text{если } T_s \ne \varnothing; \\ +\infty, \text{ если } T_s = \varnothing, \end{cases} \qquad (4)$$

где

$$T_s = \{(t_1, t_2, \ldots, t_s) \mid \sum_{j=1}^{s} g_{i_j} t_j = g,$$
$$t_j \in Z_{+}^{1}, j = 1, 2, \ldots, s\}$$
$$(g \in G_d;\ s = 1, 2, \ldots, n).$$

Другими словами, значение $\psi_s(g)$ есть оптимальное для линейной целевой функции, когда в представлении элемента g могут участвовать только s первых элементов из набора $g_{i_1}, g_{i_2}, \ldots, g_{i_n}$.

В оптимальном решении $(t^*_1, t^*_2, \ldots, t^*_s)$ либо $t^*_s = 0$ (элемент g_{i_s} не используется), либо $t^*_s \ge 1$ (элемент g_{i_s} используется, по крайней мере, один раз). Поэтому имеет место рекуррентное соотношение

$$\psi_s(g) = \min\{\psi_{s-1}(g), \psi_s(g - g_{i_s}) + \pi_s\},$$
$$g \in G_d, s = 1, 2, \ldots, n. \qquad (5)$$

Чтобы проследить за значениями переменных t_j, принявших участие в вычислении значения функции $\psi_s(g)$, вводится функция $i_s(g)$, называемая индексной. Она указывает индекс последней переменной, ставшей равной единице, и определяется следующим образом:

$$i_s(g) = \begin{cases} i_{s-1}(g), \text{ если } \psi_{s-1}(g) < \\ < \psi_s(g - g_{i_s}) + \pi_s; \\ s, \qquad \text{если иначе.} \end{cases} \qquad (6)$$

Полагаем $\psi_0(g_0) = 0$, $\psi_0(g) = +\infty$, $i_0(g) = 0$ $(g \in G_d \setminus \{g_0\})$. Легко показать, что $\psi_s(g_0) = 0$ для всех $s = 1, 2, \ldots, n$.

Тогда рекуррентные соотношения (5) и (6) позволяют вычислить значения функций $\psi_s(g)$ и $i_s(g)$ для всех $g \in G_d$ и для всех $s = 1, 2, \ldots, n$, используя $\psi_s(g_0) = 0$, только тогда, когда каждый элемент g_{i_s} порождает всю группу G_d. В этом случае порядок d_s элемента g_{i_s} равен порядку d группы G_d $(d = |G_d|)$, а значения функций $\psi_s(g)$ и $i_s(g)$ последовательно вычисляются для аргументов $g_{i_s}, 2g_{i_s}, \ldots, (d - 1)g_{i_s}$.

Здесь и в дальнейшем для чисел и элементов группы используются одни и те же символы «плюс» и «минус», что не должно вызывать затруднений. Напомним, что через g_0 обозначен нулевой элемент конечной абелевой группы G_d порядка d (нуль группы).

Теорема об оценке числа шагов

Теперь рассмотрим случай, когда элемент g_{i_s} имеет порядок d_s, отличный от порядка d группы G_d. Из теории групп известно, что порядок элемента является делителем порядка группы [1]. В этом случае $d_s g_{i_s} = g_0$ и все элементы группы G_d нельзя получить как кратные элемента g_{i_s}. Будем рассматривать смежные классы группы G_d по подгруппе, порожденной элементом g_{i_s} [1].

Пусть g' – элемент группы, не являющийся кратным элементу g_{i_s}. Тогда значение $\psi_s(g')$ – это неизвестное. Предварительно полагаем

$$\psi'_s(g') = \psi_{s-1}(g'). \qquad (7)$$

Затем для всех элементов смежного класса, определяемого элементом g', последовательно вычисляем значения $\psi'_s(g'+rg_{i_s})$, рассматривая их как предварительные значения функции ψ_s:

$$\begin{gathered}\psi'_s(g'+rg_{i_s}) = \min\{\psi_{s-1}(g'+rg_{i_s});\\ \psi'_s(g'+rg_{i_s}-g_{i_s})+\pi_s\}, r = 1, 2, ..., d_s.\end{gathered} \qquad (8)$$

После d_s шагов получаем $d_s g_{i_s} = g_0$ и значение $\psi'_s(g'+d_s g_{i_s})$. Если $\psi'_s(g'+d_s g_{i_s}) \neq \psi_{s-1}(g')$, то полагаем

$$\psi''_s(g') = \psi'_s(g'+d_s g_{i_s}) \qquad (9)$$

и последовательно вычисляем значения

$$\begin{gathered}\psi''_s(g'+rg_{i_s}) = \min\{\psi_{s-1}(g'+rg_{i_s});\\ \psi''_s(g'+rg_{i_s}-g_{i_s})+\pi_s\}, r = 1, 2, ...\end{gathered} \qquad (10)$$

Как только вычисленное значение $\psi''_s(g'+rg_{i_s})$ станет равным значению $\psi'_s(g'+rg_{i_s})$, процесс прекращается.

Чтобы получить значения функции $\psi_s(g)$ для всех $g \in G_d$, процедура, описанная в двух последних абзацах, повторяется для $(d/d_s - 1)$ начальных элементов, задающих различные смежные классы.

Теорема об оценке числа шагов. *Вычисления остановятся через q шагов,* $d_s \le q \le 2d_s$, *и вычисленные значения функций* ψ'_s *и* ψ''_s *дадут истинные значения* $\psi_s(g'+rg_{i_s})$, *r = 1, 2, ...,* d_s.

Доказательство. Из равенства $\psi'_s(g') = \psi_{s-1}(g')$ следует, что $\psi'_s(g') \ge \psi_s(g')$ (минимум из двух величин всегда меньше или равен каждой из этих величин), а также

$$\psi'_s(g'+rg_{i_s}) \ge \psi_s(g'+rg_{i_s}),\ r = 1, 2, ..., d_s \qquad (11)$$

(следует расписать левую и правую части последнего неравенства). При этом возможны два случая.

Случай 1. Для некоторого значения r', $1 \le r' \le d_s$, имеет место равенство

$$\psi_s(g'+r'g_{i_s}) = \psi_{s-1}(g'+r'g_{i_s}).$$

Тогда

$$\psi'_s(g'+qg_{i_s}) = \psi_s(g'+qg_{i_s}),\ r' \le q \le d_s,$$

и

$$\psi''_s(g'+qg_{i_s}) = \psi_s(g'+qg_{i_s}),$$
$$q = 1, 2, ..., r'-1.$$

Для указанного значения r' имеем

$$\begin{gathered}\psi'_s(g'+r'g_{i_s}) \le \psi_{s-1}(g'+r'g_{i_s}) =\\ = \psi_s(g'+r'g_{i_s}),\end{gathered}$$

а также

$$\psi'_s(g'+qg_{i_s}) \le \psi_s(g'+qg_{i_s}),\ r' \le q \le d_s. \qquad (12)$$

Сопоставляя неравенства (12) и (11), получаем, что для последующих q вычисленные значения $\psi'_s(g'+qg_{i_s})$ совпадают со значениями $\psi_s(g'+qg_{i_s})$.

Ход рассуждений для функции $\psi''_s(g'+qg_{i_s})$ аналогичен (q = 1, 2, ..., r' – 1).

Случай 2. Для всех r = 1, 2, ..., d_s выполняются неравенства

$$\psi_s(g'+rg_{i_s}) \neq \psi_{s-1}(g'+rg_{i_s}).$$

Тогда

$$\psi_s(g'+rg_{i_s}) = \psi_s(g'+rg_{i_s}-g_{i_s})+\pi_s;$$

также для всех r и

$$\begin{gathered}\psi_s(g') = \psi_s(g'+d_s g_{i_s}) =\\ = \psi_s(g'+(d_s-1)g_{i_s})+\pi_s = ... = \psi_s(g')+d_s\pi_s.\end{gathered}$$

Полученное равенство $\psi_s(g') = \psi_s(g') + d_s\pi_s$ приводит к противоречию, если $\pi_s \neq 0$.

Пусть $\pi_s = 0$, а $g = g'+rg_{i_s}$ – произвольный элемент из смежного класса, определяемого элементом g'. Из определения функции $\psi_s(g)$ следует, что

$$\begin{gathered}\psi_s(g) = \psi_s(g'+rg_{i_s}) =\\ = \min\nolimits_{t_s=0}^{d_s-1} \psi_{s-1}(g'+(r-t_s)g_{i_s}) =\\ = \psi_{s-1}(g'+r'g_{i_s})\end{gathered}$$

для некоторых r и r' ($1 \le r \le d_s$, $1 \le r' \le d_s$). Заметим, что когда t_s пробегает значения 0, 1, 2, ..., $d_s - 1$, аргумент $g' + (r - t_s)g_{i_s}$ дает все элементы рассматриваемого смежного класса. Поскольку r выбиралось произвольно, получаем в частности, что

$$\psi_s(g' + r' g_{i_s}) = \psi_{s-1}(g' + r' g_{i_s}).$$

Следовательно, и для $\pi_s = 0$ имеет место случай 1.

Теорема доказана.

Покажем, как вычислить коэффициенты неравенства, задающего ($n - 1$)-мерную грань n-мерного многовершинника $P(G_d, N, h)$. Будем искать это неравенство в нормированном виде:

$$\sum_{j=1}^{n} \pi_j t_j \geq 1 \qquad (13)$$

(в неравенстве (3) всегда $\pi_0 > 0$, поэтому нормируем его путем деления на π_0).

Сначала все коэффициенты π_j, $j = 1, 2, ..., n$ неизвестны. Предположим, что уже вычислены коэффициенты π_j и функции $\psi_j(g)$ для $j = 1, 2, ..., s - 1$; $s - 1 < n$. Тогда

$$\pi_s = \begin{cases} \max_{r=1}^{d_s}(1 - \psi_{s-1}(h - rg_{i_s})) / r, \\ \text{если } \psi_{s-1}(h - rg_{i_s}) < 1; \\ 0, \text{ если не существует} \\ \text{значения } r_s, \text{ на котором} \\ \text{достигается максимум,} \end{cases} \qquad (14)$$

где d_s — порядок элемента g_{i_s} ($d_s \leq d$; $s = 1, 2, ..., n$).

Теперь уже можно вычислить и значения функции $\psi_s(g)$, $g \in G_d$.

Представленные вычисления дают именно такие коэффициенты линейного неравенства, при которых соответствующее неравенству уравнение задает грань многовершинника группового уравнения; эта грань проходит через фиксированную точку. Чтобы в этом убедиться, рассмотрим n целочисленных точек, лежащих в гиперплоскости $\pi t = 1$, и докажем, что эти точки линейно независимы.

В качестве первой следует взять целочисленную точку (t'_1, 0, ..., 0), $t'_1 > 0$ (напомним, что эта точка задается). Если $\pi_s = 0$, то в качестве точки с индексом s возьмем точку $v_{s-1} + d_s e_s$, где d_s — порядок элемента g_{i_s}, e_s — s-й единичный вектор ($s \geq 2$). Если же $\pi_s \neq 0$, то в качестве s-й берем точку, координаты которой определяются следующим образом:

s-я координата равна положительному целому числу r_s, найденному при вычислении π_s в равенствах (14);

координаты с номерами $s - 1$, $s - 2$, ..., 2, 1 находятся с помощью индексной функции $i_s(g)$ из равенств (6);

остальные координаты равны нулю.

Записав координаты точек в строку и расположив строки в порядке их построения, получим целочисленную нижнюю треугольную матрицу, на главной диагонали которой находятся положительные целые числа. Определитель такой матрицы, очевидно, не равен нулю, что и доказывает линейную независимость точек.

Заключение

Представленные в статье рекуррентные соотношения и теорема об оценке числа шагов служат теоретической основой для конструирования алгоритма заполнения стандартной таблицы. Этот алгоритм предназначен для решения практических и теоретических задач с помощью реализующей его программы на компьютере.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Курош А.Г.** Курс высшей алгебры. М.: Наука, 1975. 432 с.
2. **Хохлюк В.И.** Параллельные алгоритмы целочисленной оптимизации: Монография. М.: Радио и связь, 1987. 224 с.
3. **Хохлюк В.И.** Методы дискретной оптимизации: Учеб. пособие. Новосибирск: Изд-во Новосиб. гос. ун-та, 2013. Ч. 1. 154 с.
4. **Ху Т.** Целочисленное программирование и потоки в сетях: Пер. с англ. М.: Мир, 1974. 519 с.
5. **Gomory R.E.** Some polyhedra related to combinatorial problems. *Journal of Linear Algebra and its Applications.* 1969. Vol. 2, pp. 451-558.

СВЕДЕНИЯ ОБ АВТОРЕ

ХОХЛЮК Виталий Иванович – *доктор физико-математических наук, старший научный сотрудник Института математики им. С.Л. Соболева СО РАН.*
630090, Россия, г. Новосибирск, ул. Коптюга, 4
vit@academ.org

Khokhlyuk V.I. THE GROUP PROBLEM OF MINIMIZATION.

The present article continues an investigation of the group problem of minimization. The appearance of this problem was shown previously. The algorithm for reduction of an integer basic matrix to a normal form was used in the process. The speedup of calculations in this algorithm is gained due to the Euclidian algorithm.

The following questions are considered in this article: (*i*) the statement of the group problem of minimization for a finite Abelian group; (*ii*) the numerical solution of this problem; (*iii*) the representation of the group elements is given for a cyclic group and for a direct sum of cyclic groups; (*iiii*) recurrence relations for the value function and the index function; (*iiiii*) calculation of the coefficients of the inequation, giving the facet of the polytope of the group equation; (*iiiiii*) a statement and a proof of the theorem on the steps number estimation.

The recurrence relations and the theorem mentioned are the theoretical basis for the validation of the computational schemes.

FINITE ABELIAN GROUP, CYCLIC GROUP, DIRECT SUM, MINIMIZATION, GROUP EQUATION, GROUP MINIMIZATION PROBLEM, RECURRENCE RELATION, ESTIMATION OF STEPS NUMBER, POLYTOPE, POLYTOPE FACET.

REFERENCES

1. **Kurosh A.G.** *The course of the higher algebra.* Moscow, Nauka, 1975. 432 p. (rus)
2. **Khokhlyuk V.I.** *Parallel algorithms of integer optimization.* Moscow, Radio i svyaz, 1987. 224 p. (rus)
3. **Khokhlyuk V.I.** *Discrete optimization methods.* Novosibirsk, Novosibirsk State University, 2013. 154 p. (rus)
4. **Hu T.** *Integer Programming and Network Flows.* Moscow, Mir, 1974. 519 p. (rus)
5. **Gomory R.E.** Some polyhedra related to combinatorial problems. *Journal of Linear Algebra and its Applications*, 1969, Vol. 2, pp. 451-558.

THE AUTHOR

KHOKHLYUK Vitaly I.
Sobolev Institute of Mathematics
4 Acad. Koptyug Ave., Novosibirsk, 630090, Russia
vit@academ.org