

На правах рукописи



Чурилова Мария Александровна

**Применение функционального подхода для
надёжного апостериорного контроля точности
при адаптивном решении эллиптических задач**

05.13.18 – Математическое моделирование, численные методы и комплексы
программ

ДИССЕРТАЦИЯ

на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Научный руководитель

к.ф.-м.н., доц. Фролов М.Е.

Оглавление

Введение	3
Глава 1. Функциональные апостериорные оценки для задачи Пуассона и задачи диффузии и их реализация	23
1.1. Вариационный подход к построению апостериорных оценок	24
1.2. Метод интегральных преобразований	28
1.3. Вычислительные свойства оценки для задачи Пуассона	28
1.4. Мажоранта ошибки для стационарной задачи диффузии	33
1.5. Примеры вычисления оценок с адаптацией сеток	36
Глава 2. Обоснование функционального подхода к контролю точности для стационарной задачи реакции-диффузии	72
2.1. Три мажоранты погрешности для различных диапазонов значений параметра реакции	72
2.2. Вычислительные свойства комбинированной оценки	77
2.3. Сравнение мажорант и примеры работы адаптивных алгоритмов	85
Глава 3. Исследование мажорант ошибки для задач линейной теории упругости	97
3.1. Две функциональные апостериорные оценки	97
3.2. Вычислительные свойства оценок	103
3.3. Мажоранта для задачи о плоской деформации	108
3.4. Выбор аппроксимации свободного тензора	109
3.5. Численные результаты	110
Заключение	122
Список литературы	123

Введение

Современную инженерную практику невозможно представить без специализированных программных комплексов, предназначенных для вычисления приближённых решений различных краевых задач. Полученные данные используются для предсказания физических явлений, разработки и конструирования изделий, для последующего принятия решений. Например, в механике это может быть оценка геометрических или физических параметров конструкции, анализ надёжности, прочности и функциональных свойств. Современное развитие вычислительных мощностей позволяет моделировать всё более сложные явления. При этом, использование грубых и уточнённых математических моделей может приводить к различным решениям одной и той же задачи. Для обоснования выбора модели принято использовать физический эксперимент. В связи с этим возникает вопрос: насколько близко приближённое решение к точному решению в рамках выбранной математической модели. Появляется необходимость в гарантированных оценках погрешности вычисляемых решений, без которых некорректно сравнивать результат эксперимента и приближённое решение.

Большинство современных инженерных программных комплексов реализуют метод конечных элементов, который основан на дискретизации задачи путём разбиения расчётной области на многоугольники, на каждом из которых решение аппроксимируется функцией заданного вида (см., например, Сьярле [1], Зенкевич и Морган [2], Марчук [3], Шайдуров [4], Axelsson и Barker [5], Brenner и Scott [6] и др.). Для обоснования выбора того или иного способа аппроксимации используются априорные оценки скорости сходимости, которые хорошо развиты теоретически и численно исследованы для различных типов конечных элементов (см., например, Михлин [7], Сьярле [1], Larson и Bengzon [8]). В априорную оценку входит норма неизвестного точного решения задачи и характерный размер расчётной сетки. Также при выводе этих оценок используются дополнительные предположения о повышенной гладкости решения и ре-

гулярности конечноэлементного разбиения. В связи с этим, априорные оценки не могут использоваться в полной мере для анализа погрешности конкретного приближённого решения для конкретной задачи.

Появление основных групп подходов к апостериорному контролю точности связано с появлением численных методов решения краевых задач для уравнений в частных производных, а также с началом интенсивной реализации этих методов на ЭВМ. Работами, давшими существенный толчок развитию рассматриваемой теории, принято считать работы Babuška и Rheinboldt [9],[10], хотя хорошо известны и более ранние публикации, в которых рассматриваются близкие проблемы, например, работы Prager и Synge [11], Михлин [7] и Synge [12]. С середины 80х годов XX века начинают также развиваться основанные на апостериорных оценках адаптивные алгоритмы, направленные на уменьшение размерности дискретной задачи, необходимой для достижения желаемого уровня погрешности, что позволяет сократить как время расчёта, так и задействованные для него аппаратные ресурсы. Для адаптации расчётной сетки важно знать примерное локальное распределение ошибки внутри расчётной области — так называемый индикатор погрешности, в качестве которого могут выступать локальные вклады в апостериорную оценку на каждом элементе разбиения. Среди первых работ, посвященных адаптации расчётной сетки, можно выделить работы Babuška и Rheinboldt [9], Zienkiewicz и Zhu [13], Rank и Zienkiewicz [14], Szymczak и Babuška [15], Ainsworth et al. [16].

Основная идея адаптивного алгоритма состоит в следующем: при наличии числовой характеристики величины ошибки на каждом элементе (индикатора погрешности), начиная с достаточно грубой сетки производится отбор элементов для последующего их разбиения. Критерии отбора могут быть различными, один из наиболее широко используемых — это измельчение тех элементов, для которых величина индикатора превосходит его среднее значение по области. Критерием остановки процесса адаптации может служить достижение желаемого количества расчётных узлов или элементов. При наличии глобальной

апостериорной оценки, в качестве критерия выбирается достижение желаемого уровня погрешности.

Таким образом, основной задачей эффективного контроля точности является построение индикатора погрешности, а также вычисление гарантированной апостериорной верхней оценки некоторой нормы погрешности, зависящей от рассматриваемого класса задач. Формально, такая оценка выглядит как неравенство вида

$$|||u - u_h||| \leq M(u_h, D),$$

где u — точное решение задачи, u_h — приближённое решение, полученное методом конечных элементов на сетке с характерным размером h , M — верхняя оценка (мажоранта), а D — данные задачи (коэффициенты уравнения, правая часть и пр.). В качестве характеристики качества оценки используется индекс эффективности

$$I_{eff} = \frac{M(u_h, D)}{|||u - u_h|||},$$

представляющий собой отношение оценивающей величины к оцениваемой. В терминах индекса эффективности *гарантированной* является оценка, для которой этот индекс всегда больше либо равен единице. Ещё одно важное свойство оценки — её *точность*, отражающая тот факт, что при правильном выборе свободных переменных, входящих в оценку, теоретически достижим индекс эффективности равный единице. Под *вычислимостью* оценки понимается наличие в ней только известных величин, а также отсутствие констант, зависящих от расчётной сетки, которые обычно присутствуют в асимптотических оценках.

Подходы к созданию методов апостериорного контроля точности изучаются уже более тридцати лет. К настоящему моменту число публикаций по данной тематике исчисляется сотнями и продолжает увеличиваться. Большинство работ развивают и дополняют уже сформировавшиеся подходы. Достаточно полные обзоры по тематике исследования можно найти, например, в монографиях Verfürth [17], Ainsworth и Oden [18], Neittaanmäki и Repin [19], Ladevèze и

Pelle [20], Repin [21], Mali, Neittaanmäki и Repin [22] и ряда других. Описание методов, приведённое ниже, опирается на перечисленные работы, а также на диссертацию Фролова [23].

Один из первых методов апостериорного контроля точности был предложен в 40х годах XX века в работе Prager и Synge [11]. В основе этого метода, называемого методом гиперокружностей, лежали геометрические построения, которые можно формализовать при помощи ортогонального разложения Гельмгольца. Для пространства суммируемых с квадратом в смысле интеграла Лебега векторных функций $L^2(\Omega, \mathbb{R}^2)$ оно выглядит следующим образом:

$$\forall q \in L^2(\Omega, \mathbb{R}^2) \quad \exists \psi \in V_0 \text{ и } q_0 \in Q_0 : \quad q = q_0 + \nabla \psi \text{ и } \operatorname{div} q_0 = 0,$$

где $V_0 = \mathring{W}_2^1(\Omega)$ — подпространство функций из пространства Соболева $W_2^1(\Omega)$, обращающихся в ноль на границе области в смысле оператора следа. Множество Q_0 определяется как

$$Q_0 := \left\{ \eta \in H(\Omega, \operatorname{div}) \mid \int_{\Omega} \eta \cdot \nabla w \, dx = 0, \quad \forall w \in V_0 \right\},$$

где

$$H(\Omega, \operatorname{div}) = \left\{ q \in L^2(\Omega, \mathbb{R}^2) \mid \operatorname{div} q \in L^2(\Omega) \right\}.$$

Пространство $H(\Omega, \operatorname{div})$ является гильбертовым с нормой

$$\|q\|_{H \operatorname{div}} = \left(\|q\|^2 + \|\operatorname{div} q\|^2 \right)^{1/2},$$

порождённой соответствующим скалярным произведением. Условие ортогональности имеет вид

$$\int_{\Omega} q_0 \cdot \nabla w \, dx = 0, \quad \forall w \in V_0.$$

Рассмотрим модельную задачу

$$\begin{cases} -\Delta u = f & \text{в } \Omega, \\ u = 0 & \text{на } \partial\Omega, \end{cases} \quad (1)$$

где Ω — ограниченная связная область в $\mathbb{R}^2$ с границей $\partial\Omega$, непрерывной по Липшицу, $f \in L^2(\Omega)$. За $u \in V_0$ обозначим обобщенное решение задачи (1), которое по определению удовлетворяет интегральному соотношению

$$\int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla w \, dx = \int_{\Omega} f w \, dx, \quad \forall w \in V_0,$$

а за u_h обозначим приближённое решение, полученное на конечноэлементной сетке $\mathcal{T}_h$ с характерным размером элемента h . Для задачи (1) оцениваемая энергетическая норма погрешности определяется по формуле

$$|||u - u_h||| := \|\nabla(u - u_h)\|,$$

где в правой части стоит стандартная норма в пространстве $L^2(\Omega, \mathbb{R}^2)$. Оценка, полученная по методу гиперокружностей, имеет вид

$$\|\nabla(u - u_h)\|^2 \leq \|\nabla u_h - q\|^2, \quad \forall q \in Q_f,$$

где

$$Q_f := \left\{ \eta \in H(\Omega, \operatorname{div}) \mid \int_{\Omega} \eta \cdot \nabla w \, dx = \int_{\Omega} f w \, dx, \quad \forall w \in V_0 \right\}.$$

Аналогичная апостериорная оценка для более широкого класса задач была получена позднее Михлиным в работе [7] с помощью вариационного метода. Затруднение в практической реализации вычисления такой оценки состоит в необходимости минимизировать норму $\|\nabla u_h - q\|^2$ по множеству функций специального вида, построение которых в общем случае является нетривиальной задачей.

Другой подход, получивший в дальнейшем широкое распространение, носит название «явный метод невязок» (explicit residual method). Впервые он был предложен в статье Babuška и Rheinboldt [10] и подробно описан, например, в монографии Verfürth [17]. При теоретическом обосновании метода существенную роль играет оператор интерполирования Клемана для конечноэлементного

разбиения области, действующий из энергетического пространства в соответствующее конечномерное подпространство. Сам оператор и оценки его аппроксимационных свойств описаны в работе Clement [24]. Оценка для задачи (1), полученная с помощью явного метода невязок, имеет вид

$$\|\nabla(u - u_h)\| \leq \left(\sum_{T \in \mathcal{T}_h} \tilde{C}_{1T} h_T^2 \|f + \Delta u_h\|_T^2 \right)^{1/2} + \left(\sum_{E \in \varepsilon_h} \tilde{C}_{2E} h_E \|j(\nabla u_h \cdot n_E)\|_E^2 \right)^{1/2},$$

где $\mathcal{T}_h$ — совокупность всех конечных элементов разбиения области Ω , ε_h — объединение всех граней, не лежащих на границе области, h_T — характерный размер элемента T , n_E — нормаль к ребру E , h_E — его длина, нормы $\|f + \Delta u_h\|_T$ и $\|j(\nabla u_h \cdot n_E)\|_E$ — стандартные нормы в пространстве L^2 , вычисленные по элементу T и ребру E , соответственно, $\tilde{C}_{1T}$ и $\tilde{C}_{2E}$ — некоторые константы, зависящие от геометрии элемента, а $j(\nabla u_h \cdot n_E)$ — скачок нормальной составляющей вектора ∇u_h при переходе через межэлементную границу. Последний определяется как разность

$$j(\nabla u_h \cdot n_E) = (\nabla u_h|_{T_+} - \nabla u_h|_{T_-}) \cdot n_E,$$

где T_+ и T_- — два смежных элемента, имеющих общую грань E , а нормаль n_E направлена от элемента T_- к T_+ .

Явный метод невязок применим только для случая, когда u_h — галеркинская аппроксимация точного решения, принадлежащая конечномерному подпространству $V_h \subset V_0$, то есть

$$\int_{\Omega} \nabla u_h \cdot \nabla w_h \, dx = \int_{\Omega} f w_h \, dx, \quad \forall w_h \in V_{0h}.$$

Наборы констант $\{\tilde{C}_{1T}\}$ и $\{\tilde{C}_{2E}\}$, входящие в оценку, зависят от локальной конфигурации расчётной сетки и, строго говоря, требуют пересчёта при её изменении. При численной реализации константы оцениваются сверху, но это может привести к сильно завышенной оценке нормы погрешности (см., например,

Carstensen и Funken [25]). В связи с этим, на практике данную оценку используют в качестве индикатора погрешности, вычисляя на каждом элементе локальные вклады всего выражения или только второго слагаемого, содержащего скачки, при фиксированном наборе констант.

Так как для вычисления оценки явным методом невязок не требуется решения дополнительных задач, метод получил широкое распространение и развивается многими авторами. Например, этому методу посвящена серия статей Eriksson и Johnson. В работе [26] рассматривается оценка для решения, полученного разрывным методом Галеркина. В статье Johnson и Hansbo [27] получены оценки явным методом невязок для задачи линейной теории упругости, нелинейной задачи с учётом пластичности, для гиперболических задач, имеются примеры численной реализации оценок. В работе [28] оценки выводятся для модифицированного метода конечных элементов, специально адаптированного под эллиптические задачи, а в [29] и [30] для получения оценок применяется теория двойственности. Явному методу невязок посвящены также следующие работы: Stewart и Hughes [31], Carstensen и Verfürth [32], глава 2 в монографии Ainsworth и Oden [18], Carstensen, Orlando и Valdman [33], Ainsworth и Rankin [34] и др. Многие примеры реализации явного метода невязок показали, что он позволяет получить индикатор погрешности для адаптации расчётных сеток, но если оценивать с его помощью глобальную норму погрешности, может возникнуть переоценка на порядок или несколько даже для модельной задачи, о чём говорилось ранее.

Ещё одна модификация метода невязок — это «неявный метод невязок» (implicit residual method), предложенный Bank и Weiser в работе [35]. Различные варианты данного метода также описаны в монографиях Verfürth [17], Babuška и Strouboulis [36] и цитируемой там литературе. Рассмотрим основную идею этого метода на модельной задаче (1).

Приближённое решение, полученное методом конечных элементов, как правило, удовлетворяет исходному уравнению лишь приближённо, в связи с чем

возникает невязка $\mathcal{R}$, определяемая соотношением

$$\Delta u_h + f = \mathcal{R} \quad \text{в } \Omega. \quad (2)$$

Вычитая из исходного уравнения выражение (2), получаем краевую задачу для нахождения ошибки $e = u - u_h$

$$\begin{cases} -\Delta e = \mathcal{R} & \text{в } \Omega, \\ e = 0 & \text{на } \partial\Omega, \end{cases} \quad (3)$$

считая что приближённое решение точно удовлетворяет заданному граничному условию типа Дирихле. На практике задача (3) не решается, вместо этого она разделяется на более простые локальные подзадачи, рассматриваемые на отдельных элементах. При этом используются аппроксимации более высокого порядка, чем для нахождения исходного приближённого решения. Этот подход является более трудоёмким по сравнению с явным методом невязок, но он не требует привлечения дополнительных констант. Также, в некоторых вариантах локальные подзадачи включают граничные условия типа Неймана. При этом привлекаются дополнительные функции формы на элементе и накладывается условие «уравновешенности невязок» (equilibrated residual method), чтобы обеспечить единственность решения.

Апостериорные оценки Bank и Weiser [35], основанные на неявном методе невязок, были исследованы Durán и Rodríguez [37]. В своей работе авторы показали, что предложенная ранее оценка асимптотически точна лишь на «параллельных» конечноэлементных сетках (два соседних треугольных элемента составляют параллелограмм, в литературе такие сетки ещё называют периодическими). Асимптотическая точность несколько слабее, чем свойство точности, поскольку подразумевает стремление индекса эффективности к единице только при $h \rightarrow 0$. В работе Babuška et al. [38] рассматриваются разные варианты уравновешивания невязок, показана зависимость индекса эффективности оценки от структуры сетки для плоской задачи линейной теории упругости. Адаптация

расчётной сетки исследовалась для различных эллиптических задач, например, в работе Carstensen и Funken [25], где наблюдался рост индекса эффективности с измельчением сетки, в работе Díez, Parés и Huerta [39], в частности, была реализована одна из оценок [35], в работе El Sheikh, Smith и Chidiac [40] и в работе Achchab et al. [41]. Также неявный метод невязок подробно рассмотрен в монографии [18]. Отметим, что основным недостатком метода является то, что апостериорная оценка погрешности является гарантированной верхней оценкой, то есть мажорантой, только при условии, что локальные подзадачи содержат условие типа Неймана и решаются точно, что трудно выполнимо при численной реализации.

Ещё один метод апостериорного контроля точности основан на сглаживании (также можно встретить термины «восстановление», «осреднение», «пост-обработка») градиента приближённого решения, который при решении стандартным методом конечных элементов не обладает необходимой гладкостью. Идея метода состоит в следующем: градиент уже полученного приближённого решения сглаживается с помощью некоторого оператора, который приближает его к градиенту точного решения. Тогда в качестве индикатора ошибки можно использовать разность градиента приближённого решения до и после пост-обработки.

Действительно, предположим, что имеется оператор G , для которого справедлива оценка

$$\|\nabla u - G\nabla u_h\| \leq \delta \|\nabla u - \nabla u_h\|,$$

где $\delta < 1$. Тогда

$$\|\nabla u_h - \nabla u\| \leq \|G\nabla u_h - \nabla u_h\| + \delta \|\nabla u_h - \nabla u\|,$$

а также

$$\|G\nabla u_h - \nabla u_h\| \leq \|\nabla u_h - \nabla u\| + \delta \|\nabla u_h - \nabla u\|.$$

Из этих двух соотношений получаем двустороннюю оценку

$$(1 - \delta)\|\nabla u_h - \nabla u\| \leq \|G\nabla u_h - \nabla u_h\| \leq (1 + \delta)\|\nabla u_h - \nabla u\|.$$

Если $\delta \ll 1$, то

$$\|\nabla u_h - \nabla u\| \simeq \|G\nabla u_h - \nabla u_h\|,$$

и легко вычисляемая норма $\|\nabla u_h - G\nabla u_h\|$ может быть использована для оценки погрешности, а также для индикации её локального распределения.

Один из самых простых способов сглаживания градиента — вычисление его значения в узлах сетки как среднего значения по соседним элементам с весами. Этот подход получил распространение в инженерной практике. Одной из первых работ, в которой он использовался, была работа Křížek и Neittaanmäki [42]. Авторы показали, что осреднённый градиент $G\nabla u_h$ на равномерной «параллельной» конечноэлементной сетке при наличии повышенной гладкости точного решения $u \in W_2^3(\Omega)$ имеет скорость сходимости на порядок выше, чем исходный кусочно-постоянный, то есть вместо известной асимптотики

$$\|\nabla u - \nabla u_h\| = O(h),$$

имеем

$$\|\nabla u - G\nabla u_h\| \leq Ch^2\|u\|_{3,\Omega}.$$

Тогда при малых h норма $\|\nabla u_h - G\nabla u_h\|$ близка к энергетической норме ошибки. Этот эффект носит название «суперсходимости» (superconvergence). В работах Křížek и Neittaanmäki [42] и [43] приводятся численные примеры исследования задач с известным точным решением, подтверждающие наличие этого эффекта.

Термином «суперсходимость» в литературе также принято называть увеличение скорости сходимости приближённого решения. Например, в работе Оганесяна и Руховца [44] показана суперсходимость при наличии повышенной гладкости точного решения и регулярности расчётной сетки. В работах Zlamal [45]

(четырёхугольные элементы) и [46] (треугольные элементы) доказана суперсходимость для серендипных (serendipity) конечных элементов при вычислении интегралов по точкам Гаусса. При этом накладывается жёсткое ограничение на регулярность сетки. В работе [46] приведен пример отсутствия суперсходимости при нарушении данного условия. В статье Křížek и Neittaanmäki [47] приведён обзор статей по суперсходимости для различных уравнений, решаемых методом конечных элементов с интегрированием по точкам Гаусса, Якоби, Лобатто и т.п., а также упоминается суперсходимость сглаженного градиента во всей области (глобальная суперсходимость) или в подобластях (локальная суперсходимость). В работе Levine [48] показана суперсходимость градиента приближённого решения, восстановленного по серединам ребёр для стандартных треугольных элементов, приведены примеры глобальной и локальной суперсходимости. Эффект суперсходимости для различных задач также подробно исследован в монографии Wahlbin [49].

Несмотря на очевидное достоинство — простоту реализации, метод оценки погрешности с помощью сглаженного градиента имеет ряд недостатков. Во-первых, точное решение далеко не всегда имеет повышенную гладкость, например, даже для простых эллиптических краевых задач в случае, когда область имеет негладкие границы. Во-вторых, данный подход, как и метод невязок, может строго обоснованно применяться только к аппроксимациям специального вида. Тем не менее, в литературе описано много примеров, когда методы данной группы позволяют получить качественную индикацию погрешности даже в тех случаях, когда для его применения нет математического обоснования. Предпринимались также попытки обосновать применимость метода, снимая часть ограничений на свойства решения и сетки. Например, Wheeler и Whiteman [50] показали наличие локальной суперсходимости внутри области, вдали от возможных сингулярностей на границе. В работе Du и Yan [51] рассмотрено применение метода на неоднородной сетке при отсутствии ограничения на повышенную гладкость точного решения.

Первым индикатором погрешности, основанным на сглаживании градиента, был индикатор, предложенный в работах Zienkiewicz и Zhu [13], Rank и Zienkiewicz [52]. Для двумерного случая он имеет вид

$$\eta_T^{ZZ} = \|\nabla u_h - G\nabla u_h\|_T, \quad (4)$$

где $G\nabla u_h$ — кусочно-линейное непрерывное векторное поле, значение которого в узле X определяется по формуле

$$(G\nabla u_h)_X = \sum_{T \in \Omega_X} \frac{|T|}{|\Omega_X|} (\nabla u_h)_T, \quad (5)$$

а Ω_X — совокупность элементов, содержащих узел сетки X (см., например, Verfürth [17]). Такой индикатор прост в вычислении, универсален относительно близких классов задач и легко адаптируется под различные типы конечных элементов. В работе [13] также показана эквивалентность предложенного подхода и оценки явным методом невязок. Однако, приведены численные примеры, подтверждающие, что оценка ошибки с помощью нормы $\|\nabla u_h - G\nabla u_h\|$ не является гарантированной. Продолжением исследования является работа Zienkiewicz и Zhu [53], в которой рассматривается скорость сходимости нормы ошибки на различных задачах при равномерном разбиении сетки и при её адаптации. Также, численные примеры использования ZZ-индикатора можно найти в статье Ainsworth et al. [16].

Метод нахождения градиента в виде полинома по значениям в точках суперсходимости соседних элементов получил название SPR (superconvergence patch recovery). Ряд работ был посвящен его модификациям и теоретическому обоснованию. Так, например, в работах Zienkiewicz и Zhu [54] и [55] предлагается восстановление градиента в виде полинома на совокупности соседних элементов методом наименьших квадратов по точкам Гаусса. Обнаружен случай ультрасходимости (повышение скорости сходимости на 2 порядка), но теоретического обоснования этого эффекта получено не было. Приведены численные примеры оценки погрешности и адаптации сетки для различных нестандарт-

ных конечных элементов. В [56] авторы рекомендуют использовать технологию восстановления градиента на границах подобластей, в особенности при наличии разрывов в коэффициентах (например, стыковка различных материалов в задачах линейной теории упругости). Примеры адаптации сеток для шести модификаций метода SPR приведены в работе Kvamsdal и Okstad [57]. Метод SPR был также адаптирован Ródenas et al. [58], [59], [60] для задач линейной теории упругости с моделированием трещин специальными конечными элементами.

Ещё один классический подход к апостериорному контролю точности — это иерархические оценки. Впервые подобная идея была предложена Рунге для оценки точности приближённых решений обыкновенных дифференциальных уравнений. Оценка была основана на сравнении приближённых решений, вычисленных на «грубой» и «мелкой» сетке. Предположим, что решение u_h получено на сетке $\mathcal{T}_h$, а решение $u_{h_{ref}}$ на более мелкой сетке $\mathcal{T}_{h_{ref}}$. В качестве индикатора ошибки предлагалось использовать величину

$$\eta_R(x) = u_h(x) - u_{h_{ref}}(x).$$

Заметим, что при переходе от сетки $\mathcal{T}_h$ к более мелкой сетке $\mathcal{T}_{h_{ref}}$, новые узлы могут не отражать истинное локальное распределение погрешности. Тогда решения u_h и $u_{h_{ref}}$ будут близки друг к другу, но не к точному решению задачи u , поэтому данную оценку сложно считать надёжной.

Для построения иерархических индикаторов погрешности используется вспомогательная задача на конечноэлементном подпространстве, более широком, чем V_h . Это подпространство $V_{h_{ref}}$ может быть получено путем измельчения исходной сетки — так называемый h -метод, или за счёт использования конечных элементов более высокого порядка — p -метод. Также, в качестве приближённых решений рассматриваются только галеркинские аппроксимации. Приведём основную идею иерархического метода на модельной задаче (1), следуя Mali, Neittaanmäki и Repin [22].

Предположим, что подпространство $V_{h_{ref}}$ строится в виде прямой суммы

$$V_{h_{ref}} = V_h \oplus W_h,$$

где W_h — некоторое подпространство V_0 , причём

$$\dim V_{h_{ref}} > \dim V_h.$$

Рассмотрим оцениваемую норму ошибки

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} |\nabla(u - u_h)|^2 dx &= \int_{\Omega} |\nabla(u - u_{h_{ref}})|^2 dx + \int_{\Omega} |\nabla(u_h - u_{h_{ref}})|^2 dx + \\ &+ 2 \int_{\Omega} \nabla(u - u_{h_{ref}}) \cdot \nabla(u_{h_{ref}} - u_h) dx. \end{aligned} \quad (6)$$

Так как u — обобщённое решение задачи, а u_h и $u_{h_{ref}}$ — галеркинские аппроксимации, удовлетворяющие по определению соотношениям

$$\int_{\Omega} \nabla u_h \cdot \nabla w_h dx = \int_{\Omega} f w_h dx \quad \forall w_h \in V_h,$$

$$\int_{\Omega} \nabla u_{h_{ref}} \cdot \nabla w_{h_{ref}} dx = \int_{\Omega} f w_{h_{ref}} dx \quad \forall w_{h_{ref}} \in V_{h_{ref}},$$

а также $V_h \subset V_{h_{ref}}$, третье слагаемое в правой части (6) обращается в ноль.

Действительно,

$$\int_{\Omega} \nabla(u - u_{h_{ref}}) \cdot \nabla(u_{h_{ref}} - u_h) dx = \int_{\Omega} f(u_{h_{ref}} - u_h) dx - \int_{\Omega} f u_{h_{ref}} dx + \int_{\Omega} f u_h dx = 0.$$

Таким образом, получаем равенство

$$\|\nabla(u - u_h)\|^2 = \|\nabla(u - u_{h_{ref}})\|^2 + \|\nabla(u_h - u_{h_{ref}})\|^2. \quad (7)$$

Далее вводится так называемое «предположение о насыщении» (saturation assumption): существует такая константа $\lambda \in (0; 1)$ что

$$\|\nabla(u - u_{h_{ref}})\| \leq \lambda \|\nabla(u - u_h)\|. \quad (8)$$

Это неравенство означает, что в смысле энергетической нормы приближённое решение $u_{h_{ref}}$ гарантированно оказывается ближе к точному решению u , чем u_h . Используя (7) и (8), получаем оценку

$$(1 - \lambda^2) \|\nabla(u - u_h)\|^2 = \|\nabla(u_h - u_{h_{ref}})\|^2 \leq \|\nabla(u - u_h)\|^2.$$

На практике нахождение приближённого решения $u_{h_{ref}}$ может потребовать больше вычислительных ресурсов, чем решение основной задачи, поэтому будем искать его в виде

$$u_{h_{ref}} = u_h + \tilde{w}_h,$$

где $\tilde{w}_h \in W_h$ должен удовлетворять соотношению

$$\int_{\Omega} \nabla \tilde{w}_h \cdot \nabla w_h \, dx = \int_{\Omega} f w_h \, dx - \int_{\Omega} \nabla u_h \cdot \nabla w_h \, dx \quad \forall w_h \in W_h. \quad (9)$$

В [22] показано, что эта задача эквивалентна задаче на поиск элемента $\tilde{w}_h \in W_h$, минимизирующего функционал

$$\inf_{w_h \in W_h} \int_{\Omega} |\nabla(u - (u_h + w_h))|^2 \, dx.$$

Также имеет место неравенство

$$\|\nabla(u - u_h)\|^2 \leq C(\lambda) \|\nabla \tilde{w}_h\|^2,$$

где константа $C(\lambda)$ не зависит от h . Таким образом, решив задачу (9), можно использовать норму $\|\nabla \tilde{w}_h\|$ в качестве индикатора погрешности.

Помимо [22], описание иерархических методов представлено в монографии [17]. Там же теоретически обоснован выбор подпространства W_h для h и p версии метода конечных элементов. В статье Dörfler и Nochetto [61] доказано, что при переходе от кусочно-линейных аппроксимаций в V_h к кусочно-квадратичным и наличии незначительных осцилляций в правой части уравнения, выполняется предположение о насыщении, и справедлива иерархическая апостериорная оценка.

Несмотря на существенное развитие различных подходов к апостериорному контролю точности, ни один из широко распространённых методов не удовлетворяет одновременно трём достаточно разумным требованиям, предъявляемым к оценке: гарантированность, вычислимость, универсальность (возможность применения к любому конформному приближённому решению, отсутствие избыточных ограничений на гладкость точного решения или данные задачи, а также на регулярность расчётной сетки).

Начиная со второй половины 90х годов XX века, разрабатывается фундаментальный подход к построению апостериорных оценок погрешности, обладающий всеми перечисленными выше достоинствами. Первые оценки были получены с помощью вариационных методов и элементов теории двойственности (Repin и Xanthis [62] и Repin [63], [64], [65]), поэтому изначально этот подход назывался «методом двойственных мажорант». В более поздних работах те же оценки были получены с помощью интегральных преобразований, а подход стал называться «функциональным». Подробно он описан в упомянутых ранее монографиях [19], [21] и [22]. Подход имеет некоторую общность с предложенным Михлиным в [7], а также с известным инженерным подходом оценки через определяющие соотношения, где неравенства типа оценки Прагера-Синжа-Михлина используются с полями, точно удовлетворяющими уравнению равновесия (см., например, Ladevèze и Pelle [20], Boisse et al. [66], Gallimard [67], Pled et al. [68], Корнеев [69] и цитируемую там литературу).

В функциональных мажорантах возникает одна или несколько свободных переменных, правильный выбор которых позволяет получить точную гарантированную верхнюю оценку погрешности. Функциональный подход не накладывает жёстких ограничений (например, удовлетворение уравнениям равновесия) на свободную переменную. Оценка погрешности является универсальной — она применима к произвольному приближённому решению из соответствующего задаче энергетического пространства и остается справедливой вне зависимости от подхода, который применялся при вычислении аппроксимации, таким обра-

зом, позволяя учитывать все источники погрешности в приближённом решении. Кроме того, оценка содержит только постоянные, не зависящие от конфигурации расчётной сетки. Помимо глобального оценивания погрешности, функциональную мажоранту можно использовать в качестве индикатора локального распределения ошибки, рассматривая вклады в неё на каждом элементе.

Целью данной диссертации является проведение исследования вычислительных свойств и аспектов практического применения известных функциональных апостериорных оценок для различных эллиптических задач, рассматриваемых в обобщённой постановке. Работа существенно дополняет и расширяет другие подобные исследования, встречающиеся в литературе, делая упор на анализе адаптивных алгоритмов с надёжным контролем точности приближённых решений, реализованных на базе смешанных аппроксимаций метода конечных элементов. Подробный обзор этих исследований приведён в основной части диссертации. Под надёжностью оценок в самом широком смысле понимается их универсальность и гарантированность.

В диссертационной работе поставлены и решены следующие *задачи*:

1. Представлено теоретическое обоснование вычислительных свойств функциональных мажорант для стационарной задачи реакции-диффузии и задач линейной теории упругости.
2. В программном комплексе MATLAB реализованы адаптивные алгоритмы, основанные на функциональных апостериорных оценках для стационарной задачи диффузии, задачи реакции-диффузии и плоских задач линейной теории упругости.
3. Численным экспериментом обоснована методика реализации — выбор аппроксимаций свободных переменных и способ вычисления мажорант.
4. Подтверждена эффективность адаптивных алгоритмов на серии краевых задач, включающих задачи с разрывами первого рода в коэффициентах

уравнения, а также задачи с геометрическими особенностями (входящие углы, отверстия).

Отметим, что доказательства утверждений о вычислительных свойствах исследуемых мажорант основаны на методах функционального анализа и вариационного исчисления. При численной реализации привлекается стандартный метод конечных элементов с кусочно-линейными аппроксимациями, а также конечный элемент Равьяра-Тома нулевого порядка. Расчётные процедуры реализованы в программном комплексе MATLAB с привлечением MATLAB PDE Toolbox. Для контроля погрешности производимых вычислений используются задачи с известным точным решением, сравнение с ранее опубликованными близкими по тематике результатами других авторов, а также сравнение между собой различных подходов в рамках одной задачи. Проведённые теоретические и численные исследования подтверждают эффективность предлагаемого подхода.

Остановимся на кратком содержании работы. В **первой главе** описаны известные способы получения функциональной апостериорной оценки для уравнения Пуассона, а также обоснование вычислительных свойств этой оценки, представленное в литературе. Рассмотрена также более общая оценка для задачи диффузии. Подробно обсуждаются вопросы о выборе аппроксимаций свободной переменной, присутствующей в мажорантах, а также о способах вычисления оценок. Реализован новый подход к вычислению функциональных мажорант. Представлены результаты численных экспериментов, включающие задачи с разрывами в коэффициентах уравнения и правой части. Упор делается на анализ работы адаптивных алгоритмов и сравнение нескольких подходов.

Вторая глава диссертации посвящена функциональным апостериорным оценкам для стационарной задачи реакции-диффузии. В ней обсуждаются три типа мажорант, получено теоретическое обоснование вычислительных свойств наиболее универсальной оценки и индикатора погрешности, основанного на ней.

Исследована зависимость индекса эффективности апостериорных оценок от величины коэффициента реакции. Представлены примеры работы соответствующих адаптивных алгоритмов с непрерывной и смешанной аппроксимацией.

В третьей главе диссертации рассматриваются две функциональные оценки для задачи линейной упругости (общие для пространственного и плоских случаев). Приводятся доказательства их вычислительных свойств. Рассмотрен вопрос об особенностях практической реализации оценок применительно к плоским задачам. Приводятся примеры работы адаптивных алгоритмов, подтверждающие эффективность исследуемого подхода. Выводы из проделанной работы представлены в **заключении**.

Положения, выносимые на защиту:

1. В программном комплексе MATLAB впервые реализован функциональный подход к апостериорному контролю точности при адаптивном решении эллиптических краевых задач: стационарной задачи диффузии, задачи реакции-диффузии и задачи о плоской деформации, основанный на привлечении аппроксимации Равьяра-Тома на триангуляциях;
2. На базе вычислительного эксперимента для всех трех классов задач проведен сравнительный анализ предложенного подхода с функциональным подходом, основанным на использовании стандартной для метода конечных элементов непрерывной кусочно-линейной аппроксимации, которая достаточно подробно исследовалась в работах других авторов. Показано, что конечный элемент для смешанных методов обладает рядом достоинств при реализации апостериорного контроля и адаптивных алгоритмов, позволяя получить адаптивные сетки лучшего качества и сохранить высокую эффективность надёжного контроля энергетической нормы погрешности;
3. Сформулирована и доказана серия утверждений о вычислительных свойствах мажорант для задач реакции-диффузии и линейной упругости, ко-

торая обеспечивает теоретическое обоснование высокого качества численных результатов работы соответствующих адаптивных алгоритмов.

Диссертация состоит из введения, трех глав, заключения и списка литературы. Объем работы составляет 132 страницы. В тексте содержится 39 рисунков, 18 таблиц. Список литературы включает 97 наименований.

Функциональные апостериорные оценки для задачи Пуассона и задачи диффузии и их реализация

В первой части главы представлены два способа получения апостериорной оценки для задачи Пуассона, описанные в монографии [21]: с помощью привлечения теории двойственности вариационного исчисления и с помощью преобразования интегральных соотношений. Также приводятся основные вычислительные свойства функциональной мажоранты и основанного на ней индикатора погрешности, рассмотренные в работах Repin [21], Frolov, Neittaanmäki и Repin [70] и Repin, Sauter и Smolanski [71]. Рассматривается обобщение оценки для задачи диффузии из работы Repin [64].

Вторая часть главы полностью посвящена вычислительному эксперименту. Обсуждается выбор аппроксимации свободной переменной в мажорантах, представлены примеры работы адаптивных алгоритмов, в том числе, содержащие сравнение с результатами, полученными с помощью наиболее распространённых стандартных подходов. Предложено использование смешанной аппроксимации Равьяра-Томе нулевого порядка и представлены результаты, указывающие на эффективность такого подхода.

Рассмотрим уравнение Пуассона с граничным условием типа Дирихле, которое имеет вид (1) и соответствующую задачу об апостериорном контроле энергетической нормы погрешности $|||u - v|||$ для произвольного приближённого решения $v \in V_0$. Функциональная мажоранта для данной задачи впервые была получена в работе Repin [63] с помощью вариационного подхода, основанного на теории двойственности. Позднее, эта же оценка была получена с помощью интегральных преобразований в [72]. Описание обоих подходов приведено в мо-

нографии [21].

1.1. Вариационный подход к построению апостериорных оценок

Вариационная постановка рассматриваемой задачи выглядит следующим образом:

$$\text{Задача } \mathcal{P} : \text{ найти элемент } u \in V_0 \text{ такой что } J(u) = \inf_{v \in V_0} J(v), \quad (1.1)$$

где

$$J(v) = \int_{\Omega} \left(\frac{1}{2} |\nabla v|^2 - f v \right) dx.$$

Из известных результатов (см., например, Ладыженская [73]) следует, что решение данной задачи существует и единственно. В силу поточечного выполняющегося для почти всех $x \in \Omega$ соотношения

$$\sup_{\xi \in \mathbb{R}^2} \left(\nabla v(x) \cdot \xi - \frac{1}{2} |\xi|^2 \right) = \frac{1}{2} |\nabla v(x)|^2,$$

можно записать

$$J(v) = \sup_{y \in L^2(\Omega, \mathbb{R}^2)} \mathcal{L}(v, y),$$

где

$$\mathcal{L}(v, y) = \int_{\Omega} \left(\nabla v \cdot y - \frac{1}{2} |y|^2 - f v \right) dx$$

— лагранжиан задачи. Таким образом, задача $\mathcal{P}$ и двойственная к ней задача $\mathcal{P}^*$ записываются в форме

$$(\mathcal{P}) \quad \inf_{v \in V_0} \sup_{y \in L^2(\Omega, \mathbb{R}^2)} \mathcal{L}(v, y) \quad (1.2)$$

$$(\mathcal{P}^*) \quad \sup_{y \in L^2(\Omega, \mathbb{R}^2)} \inf_{v \in V_0} \mathcal{L}(v, y). \quad (1.3)$$

Заметим, что

$$\begin{aligned} \inf_{v \in V_0} \mathcal{L}(v, y) &= \inf_{v \in V_0} \int_{\Omega} \left(\nabla v \cdot y - \frac{1}{2} |y|^2 - f v \right) dx = \\ &= -\frac{1}{2} \|y\|^2 + \inf_{v \in V_0} \int_{\Omega} (\nabla v \cdot y - f v) dx = \begin{cases} -\frac{1}{2} \|y\|^2 & \text{если } y \in Q_f; \\ -\infty & \text{если } y \notin Q_f, \end{cases} \end{aligned}$$

где множество Q_f определено во введении. Таким образом, двойственную задачу (1.3) можно записать в виде

$$\text{Задача } \mathcal{P}^* : \text{ найти элемент } p \in Q_f \text{ такой что } I^*(p) = \sup_{y \in Q_f} I^*(y), \quad (1.4)$$

где

$$I^*(y) = -\frac{1}{2} \|y\|^2.$$

Можно показать (см., например, Экеланд и Темам [74]), что $I^*(p) = J(u)$, где u и p — решения задач $\mathcal{P}$ и $\mathcal{P}^*$, соответственно, причём $p = \nabla u$. Нетрудно убедиться, что

$$\frac{1}{2} \|\nabla(v - u)\|^2 = J(v) - J(u), \quad \forall v \in V_0, \quad (1.5)$$

из чего получается неравенство

$$\frac{1}{2} \|\nabla(v - u)\|^2 = J(v) - I^*(p) \leq J(v) - I^*(q) = \frac{1}{2} \|\nabla v - q\|^2, \quad \forall q \in Q_f,$$

а следовательно справедлива оценка Прагера-Синжа-Михлина

$$\|\nabla(v - u)\| \leq \|\nabla v - q\|, \quad \forall q \in Q_f. \quad (1.6)$$

Далее неравенство преобразуется так, чтобы ослабить ограничение на свободную переменную. Для этого вводится новая свободная переменная $y \in L^2(\Omega, \mathbb{R}^2)$.

Тогда по неравенству треугольника имеем

$$\|\nabla(v - u)\| \leq \|\nabla v - y\| + \|y - q\|.$$

Возводя обе части в квадрат и применяя алгебраическое неравенство Коши со свободным параметром

$$2|ab| \leq \beta a^2 + \frac{1}{\beta} b^2, \quad \forall \beta > 0,$$

получаем

$$\|\nabla(v - u)\|^2 \leq (1 + \beta)\|\nabla v - y\|^2 + (1 + \frac{1}{\beta})\|y - q\|^2. \quad (1.7)$$

Далее используется ортогональное разложение Гельмгольца

$$\forall y \in L^2(\Omega, \mathbb{R}^2) \quad \exists w_0 \in V_0 \text{ и } q_0 \in Q_0 : \quad y = q_0 + \nabla w_0, \quad (1.8)$$

чтобы оценить последнее слагаемое (1.7). Сначала предположим, что $f \equiv 0$ и $q = q_0$. Из (1.8) имеем

$$\|y - q_0\|^2 = \|\nabla w_0\|^2.$$

Рассмотрим норму элемента $\operatorname{div} y$, эквивалентную стандартной норме в пространстве $W_2^{-1}(\Omega)$:

$$|\operatorname{div} y|_{-1} = \sup_{\substack{w \in V_0 \\ w \neq 0}} \frac{-\int_{\Omega} y \cdot \nabla w \, dx}{\|\nabla w\|} \geq \frac{\int_{\Omega} y \cdot \nabla w_0 \, dx}{\|\nabla w_0\|}.$$

Из разложения (1.8) имеем

$$\int_{\Omega} y \cdot \nabla w_0 \, dx = \int_{\Omega} (q_0 + \nabla w_0) \cdot \nabla w_0 \, dx = \|\nabla w_0\|^2.$$

Следовательно,

$$\|y - q_0\| = \|\nabla w_0\| \leq |\operatorname{div} y|_{-1}, \quad \forall y \in L^2(\Omega, \mathbb{R}^2).$$

Теперь рассмотрим случай, когда $f \neq 0$. Элемент q должен принадлежать множеству Q_f . Так как $(y - \nabla u) \in L^2(\Omega, \mathbb{R}^2)$, то можно применить разложение Гельмгольца

$$y - \nabla u = q_0 + \nabla w_0.$$

Элемент $q = q_0 + \nabla u$ принадлежит Q_f , поскольку u удовлетворяет соотношению

$$\int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla w \, dx = \int_{\Omega} f w \, dx, \quad \forall w \in V_0.$$

Отсюда получаем оценку

$$\|y - q\| = \|\nabla w_0\| \leq |\operatorname{div}(y - \nabla u)|_{-1} = |\operatorname{div} y + f|_{-1},$$

из которой получается первая форма мажоранты для задачи (1), а именно

$$\|\nabla(u - v)\|^2 \leq (1 + \beta)\|\nabla v - y\|^2 + (1 + \frac{1}{\beta})|\operatorname{div} y + f|_{-1}^2. \quad (1.9)$$

При выводе оценки (1.9) не накладывалось никаких дополнительных ограничений на свободную переменную y . Пусть $y \in Y := H(\Omega, \operatorname{div})$, тогда верно соотношение

$$-\int_{\Omega} y \cdot \nabla w \, dx = \int_{\Omega} \operatorname{div} y w \, dx, \quad \forall w \in V_0. \quad (1.10)$$

Воспользовавшись неравенством Фридрихса

$$\|w\| \leq \mathbb{C}_{F\Omega} \|\nabla w\|, \quad \forall w \in V_0,$$

приходим к оценке

$$|\operatorname{div} y + f|_{-1} = \sup_{\substack{w \in V_0 \\ w \neq 0}} \frac{\int_{\Omega} (\operatorname{div} y + f) w \, dx}{\|\nabla w\|} \leq \mathbb{C}_{F\Omega} \|\operatorname{div} y + f\|.$$

В результате, имеем следующее неравенство:

$$\|\nabla(u - v)\|^2 \leq M_{IP}^2(v, y, \beta), \quad (1.11)$$

где мажоранта погрешности

$$M_{IP}^2(v, y, \beta) := (1 + \beta)\|\nabla v - y\|^2 + (1 + \frac{1}{\beta})\mathbb{C}_{F\Omega}^2 \|\operatorname{div} y + f\|^2, \quad (1.12)$$

$\forall y \in Y$ и $\forall \beta > 0$. Неравенство (1.12) может быть записано и без параметра β

$$\|\nabla(u - v)\| \leq M_{IP}(v, y) := \|\nabla v - y\| + \mathbb{C}_{F\Omega} \|\operatorname{div} y + f\|. \quad (1.13)$$

Мажоранта (1.12) с параметром более удобна для вычислений, так как представляет собой квадратичный функционал относительно y .

Отметим, что из равенства (1.5) можно получить нижнюю оценку энергетической нормы погрешности, если подставить вместо точного решения u решение, полученное на достаточно мелкой сетке, например $u_{h/4}$. Такая подстановка является общепринятой и часто используется в дальнейшем в вычислительных экспериментах.

1.2. Метод интегральных преобразований

Оценки (1.11) и (1.13) могут быть получены без привлечения теории двойственности. Из обобщённой постановки задачи следует, что

$$\int_{\Omega} \nabla(u - v) \cdot \nabla w \, dx = \int_{\Omega} (fw - \nabla v \cdot \nabla w) \, dx, \quad \forall w \in V_0. \quad (1.14)$$

Если взять произвольный элемент $y \in Y$ для которого верно (1.10), то сложив (1.10) и (1.14), имеем

$$\int_{\Omega} \nabla(u - v) \cdot \nabla w \, dx = \int_{\Omega} ((y - \nabla v) \cdot \nabla w + (\operatorname{div} y + f)w) \, dx, \quad \forall w \in V_0.$$

Положив $w = u - v$ и оценив правую часть с помощью неравенства Гёльдера

$$\|\nabla(u - v)\|^2 \leq \|\nabla v - y\| \|\nabla(u - v)\| + \|f + \operatorname{div} y\| \|u - v\|$$

и применив к правой части неравенство Фридрихса, получаем оценку (1.13). Далее, применив неравенство Коши с параметром $\beta > 0$, получаем оценку (1.11).

1.3. Вычислительные свойства оценки для задачи

Пуассона

Отметим, что слагаемые в мажорантах $M_{IP}(v, y)$ и $M_{IIP}^2(v, \beta, y)$ связаны с невязками обоих уравнений

$$p = \nabla u,$$

$$\operatorname{div} p + f = 0,$$

которые формируют исходную систему физических соотношений, лежащих в основе (1). Элемент p принадлежит пространству Y , поскольку $\operatorname{div} p = -f \in L^2(\Omega)$. Если в правой части оценки (1.13) положить $y = p$, то она превращается в равенство. Оценка (1.11) превращается в равенство при $y = p$, константу β можно положить равной нулю. Таким образом, обе мажоранты точны и для

эффективной оценки погрешности необходимо построить последовательность элементов y_h , сходящуюся к p в пространстве Y .

Обсудим вычислительные свойства мажорант, доказанные в работах Repin [21], Frolov, Neittaanmäki и Repin [70] и Repin, Sauter и Smolanski [71]. Сначала рассмотрим функционал M_{IP} . Для любого $v \in V_0$ — он выпуклый, непрерывный и коэрцитивный, следовательно существует элемент $\bar{y}(v)$, сообщающий минимум функционалу (см. Экеланд и Темам [74], Ладыженская [73]), такой что

$$M_{IP}(v, \bar{y}) = \inf_{y \in Y} M_{IP}(v, y).$$

Лемма 1.1. *Если $\bar{y}$ минимизирует мажоранту $M_{IP}(v, y)$, то существует элемент $\bar{w} \in V_0$ такой что $\bar{y} = \nabla \bar{w}$.*

Доказательство леммы и следующей ниже теоремы представлено в монографии [21].

Предположим, что y_k — последовательность элементов, сообщающих минимум функционалу $M_{IP}(v, y)$ на последовательности конечномерных подпространств $\{Y_k\}_{k=1}^{\infty}$, предельно плотной в Y . Тогда

$$\lim_{k \rightarrow \infty} M_{IP}(v, y_k) = \|\nabla(u - v)\|.$$

Отсюда следует ограниченность числовой последовательности мажорант $\{M_{IP}(v, y_k)\}_{k=1}^{\infty}$, а, следовательно, и последовательности y_k в Y . Из неё можно выделить слабосходящуюся подпоследовательность

$$y_k \rightharpoonup \tilde{y} \in Y.$$

Таким образом,

$$\begin{aligned} \|\nabla(u - v)\| &= \lim_{k \rightarrow \infty} M_{IP}(v, y_k) \geq M_{IP}(v, \tilde{y}) = \\ &= \|\nabla v - \tilde{y}\| + \mathbb{C}_{F\Omega} \|\operatorname{div} \tilde{y} + f\| \geq \|\nabla(u - v)\|, \end{aligned}$$

то есть $\tilde{y}$ минимизирует мажоранту $M_{IP}(v, y)$ на Y и $M_{IP}(v, \tilde{y}) = \|\nabla(u - v)\|$.

Теорема 1.1. Если $\nabla v \notin H(\Omega, \text{div})$, то $\tilde{y} = \nabla u$.

Заметим, что условие $\nabla v \notin H(\Omega, \text{div})$ выполняется для аппроксимаций, построенных стандартным методом конечных элементов и не является сильным ограничением общности.

Как показано в работе Репина, Саутера и Смолянского [71], аналогичное утверждение справедливо и для мажоранты с параметром $M_{IP}^2(u_h, y, \beta)$. Рассмотренный в [71] подход применяется для задачи Пуассона с ненулевым условием Дирихле на границе

$$\begin{cases} -\Delta u = f & \text{в } \Omega; \\ u = u_0 & \text{на } \partial\Omega, \end{cases} \quad (1.15)$$

где $u_0 \in W_2^1(\Omega)$. Обобщённое решение u данной задачи принадлежит множеству $V = u_0 + V_0$. Вариационная постановка задачи (1.15) аналогична (1.1) и имеет вид

$$\text{Задача } \mathcal{P} : \text{ найти элемент } u \in V \text{ такой что } J(u) = \inf_{v \in V} J(v). \quad (1.16)$$

Двойственная задача отличается дополнительным слагаемым

$$\text{Задача } \mathcal{P}^* : \text{ найти элемент } p \in Q_f \text{ такой что } I^*(p) = \sup_{y \in Q_f} I^*(y), \quad (1.17)$$

где

$$I^*(y) = -\frac{1}{2}\|y\|^2 + \int_{\Omega} (\nabla u_0 \cdot y - f u_0) dx.$$

Решения задач $\mathcal{P}$ и $\mathcal{P}^*$ существуют и единственны. Мажоранта для задачи (1.15) совпадает с мажорантой (1.13) или (1.11) (с параметром), если приближённое решение точно удовлетворяет условию Дирихле на границе. В случае, если это не так, используется оценка, предложенная в работе [71]. Также верна и Лемма 1.1.

Теорема 1.2. *Обозначим за y_β элемент, сообщающий минимум мажоранте $M_{IIP}^2(v, y, \beta)$ при фиксированном $v \in V$ и $\beta > 0$, тогда справедливы асимптотические оценки*

$$\|y_\beta - p\| \leq C\sqrt{\beta}, \quad \|\operatorname{div}(y_\beta - p)\| \leq C\beta,$$

(см. [71]).

Для конечномерных подпространств справедлива следующая теорема, доказанная в работе Frolov, Neittaanmäki и Repin [70].

Теорема 1.3. *Пусть последовательность конечномерных подпространств $\{Y_k\}_{k=1}^\infty$ предельно плотна в Y . Последовательность пар (β_k, y_k) , минимизирующих $M_{IIP}^2(v, y, \beta)$ на $\mathbb{R}^+ \times Y_k$, удовлетворяет условию*

$$\beta_k \xrightarrow[k \rightarrow \infty]{} 0.$$

Тогда

$$y_k \xrightarrow[k \rightarrow \infty]{} p \quad \text{в } Y.$$

Чтобы найти последовательность аппроксимаций, сходящуюся к точному решению, необходимо решить последовательность конечномерных задач на конечноэлементных разбиениях, например триангуляциях $\mathcal{T}_h$ области Ω . Обозначим за V_{0h} конечномерные подпространства V_0 , состоящие из непрерывных кусочно-аффинных функций

$$V_{0h} = \{v_h \in C(\Omega) \cap V_0 \mid v_h \in P^1(T), \quad \forall T \in \mathcal{T}_h\}.$$

Таким образом, для каждой триангуляции $\mathcal{T}_h$ необходимо решить задачу

$$\text{Задача } \mathcal{P}_h : \quad \text{найти элемент } u_h \in V_{0h} \text{ такой что } J(u_h) = \inf_{v_h \in V_{0h}} J(v_h),$$

где

$$J(v_h) = \int_{\Omega} \left(\frac{1}{2} |\nabla v_h|^2 - f v_h \right) dx.$$

Известно, что последовательность галеркинских аппроксимаций u_h сходится к точному решению задачи u в V_0 при стремящемся к нулю характерном размере элементов сетки h , в предположении что сетка регулярна. Априорная оценка скорости сходимости (см., например, Сьярле [1]) может быть получена при наличии у решения дополнительной гладкости.

Помимо глобальной оценки энергетической нормы погрешности, нас интересует локальное распределение ошибки по области — индикатор погрешности, который будет использоваться при адаптации сетки. Обозначим за $\varepsilon(x)$ подынтегральное выражение в определении энергетической нормы ошибки, возведённой в квадрат

$$\varepsilon(x) = |\nabla(u(x) - v(x))|^2.$$

Будем рассматривать мажоранту (1.11), так как она более удобна для практической реализации. Она состоит из двух слагаемых

$$M_{IP}^2(v, y, \beta) = (1 + \beta)m_{IP1}^2 + \left(1 + \frac{1}{\beta}\right)m_{IP2}^2,$$

где

$$m_{IP1}^2 = \|\nabla v - y\|^2, \quad m_{IP2}^2 = \mathbb{C}_{F\Omega}^2 \|\operatorname{div} y + f\|^2.$$

В предположениях Теоремы 1.3

$$m_{IP1}^2 \xrightarrow[k \rightarrow \infty]{} \|\nabla(u - v)\|^2, \quad m_{IP2}^2 \xrightarrow[k \rightarrow \infty]{} 0.$$

Поэтому в качестве индикатора погрешности можно использовать только первое слагаемое, разбитое на сумму вкладов по элементам. Действительно, обозначим его подынтегральное выражение

$$\mu(x) = |\nabla v(x) - y(x)|^2.$$

Для любого $\delta > 0$ определим множество

$$\Omega_\delta = \{x \in \Omega \mid |\mu(x) - \varepsilon(x)| \geq \delta\}. \quad (1.18)$$

Множество Ω_δ содержит все точки области Ω , в которых локальная величина индикатора погрешности отличается от самой погрешности более чем на δ .

Теорема 1.4. *В предположениях Теоремы 1.3*

$$\text{meas}(\Omega_\delta) \xrightarrow[k \rightarrow \infty]{} 0,$$

где $\text{meas}(\Omega_\delta)$ — мера Лебега данного множества.

Отметим, что подобного рода утверждение о локальных свойствах функциональных мажорант впервые доказано в работе Repin, Sauter и Smolianski [71].

Из Теоремы 1.4 следует, что если поле y близко к ∇u , то мажоранта $M_{IP}^2(v, y, \beta)$ дает не только гарантированную верхнюю оценку глобальной величины погрешности достаточно высокого качества, но и позволяет получить достоверную информацию о её локальном распределении по области для адаптации расчётной сетки.

1.4. Мажоранта ошибки для стационарной задачи диффузии

Рассмотрим более общую задачу, иногда называемую в вычислительной литературе стационарной задачей диффузии со смешанными краевыми условиями

$$\begin{cases} -\operatorname{div}(A\nabla u) = f & \text{в } \Omega, \\ u = u_0 & \text{на } \Gamma_1, \\ n \cdot A\nabla u = F & \text{на } \Gamma_2, \end{cases} \quad (1.19)$$

где правая часть $f \in L^2(\Omega)$, $F \in L^2(\Gamma_2)$, за n обозначена единичная нормаль к границе, а граница области $\partial\Omega$ состоит из двух непересекающихся частей $\Gamma_1 \neq \{\emptyset\}$ и Γ_2 . Матрица A — симметричная, её коэффициенты могут терпеть разрыв первого рода в области Ω . Предполагается, что существуют положительные постоянные c_1 и c_2 , такие что

$$c_1^2 |\eta|^2 \leq A\eta \cdot \eta \leq c_2^2 |\eta|^2, \quad \forall \eta \in \mathbb{R}^2. \quad (1.20)$$

Обобщённая формулировка задачи (1.19) выглядит следующим образом:
найти элемент $u \in V = u_0 + V_0$, такой что

$$\int_{\Omega} A \nabla u \cdot \nabla w \, dx = \int_{\Omega} f w \, dx + \int_{\Gamma_2} F w \, ds, \quad \forall w \in V_0, \quad (1.21)$$

где

$$V_0 = \{w \in W_2^1(\Omega) \mid w = 0 \text{ на } \Gamma_1\}.$$

Обобщённое решение существует и единственно по лемме Лакса-Мильграма.

Энергетическая норма погрешности имеет вид

$$|||u - v|||^2 := \int_{\Omega} A \nabla(u - v) \cdot \nabla(u - v) \, dx.$$

Функциональная апостериорная оценка для задачи (1.19) получена в статье Repin [64] и также подробно описана в монографии [21].

Пусть $v \in V$ — приближённое решение задачи (1.21), тогда

$$\int_{\Omega} A \nabla(u - v) \cdot \nabla w \, dx = \int_{\Omega} f w \, dx - \int_{\Omega} A \nabla v \cdot \nabla w \, dx + \int_{\Gamma_2} F w \, ds, \quad \forall w \in V_0 \quad (1.22)$$

Возьмём произвольный элемент $y \in H(\Omega, \Gamma_2, \text{div})$, где

$$H(\Omega, \Gamma_2, \text{div}) = \{y \in L^2(\Omega, \mathbb{R}^2) \mid \text{div } y \in L^2(\Omega), y \cdot n \in L^2(\Gamma_2)\}.$$

Для него выполняется равенство

$$\int_{\Omega} (\text{div } y w + \nabla w \cdot y) \, dx = \int_{\Gamma_2} y \cdot n w \, ds. \quad (1.23)$$

Прибавив (1.23) к (1.22), получим

$$\int_{\Omega} A \nabla(u - v) \cdot \nabla w \, dx = \int_{\Omega} (f + \text{div } y) w \, dx + \int_{\Omega} (y - A \nabla v) \cdot \nabla w \, dx + \int_{\Gamma_2} (F - y \cdot n) w \, ds. \quad (1.24)$$

Правая часть оценивается с помощью неравенства Фридрихса

$$\|w\| \leq C_{F\Gamma_1} \|\nabla w\|, \quad \forall w \in V_0$$

и неравенства следа

$$\|w\|_{\Gamma_2} \leq \mathbb{C}_{T\Gamma_2} \|\nabla w\|, \quad \forall w \in V_0.$$

Обозначим за $\lambda(\Omega, \Gamma_2)$ константу, определяемую соотношением

$$\lambda^2(\Omega, \Gamma_2) = \inf_{w \in V_0} \frac{|||w|||^2}{\|w\|^2 + \|w\|_{\Gamma_2}^2}.$$

С помощью неравенства Коши-Буняковского-Шварца, получается оценка

$$\begin{aligned} & \left| \int_{\Omega} (f + \operatorname{div} y) w \, dx + \int_{\Gamma_2} (F - y \cdot n) w \, ds \right| \leq \\ & \leq (\|f + \operatorname{div} y\|^2 + \|F - y \cdot n\|_{\Gamma_2}^2)^{1/2} \mathbb{C} |||w|||, \end{aligned}$$

где $\mathbb{C}$ — любая константа, удовлетворяющая неравенству

$$\mathbb{C} \geq \frac{1}{\lambda(\Omega, \Gamma_2)},$$

например,

$$\mathbb{C} = \frac{\sqrt{\mathbb{C}_{F\Gamma_1}^2 + \mathbb{C}_{T\Gamma_2}^2}}{c_1}.$$

Таким образом, из (1.24) следует

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} A \nabla(u - v) \cdot \nabla w \, dx \leq |||A \nabla v - y|||_* |||w||| + \\ & + (\|f + \operatorname{div} y\|^2 + \|F - y \cdot n\|_{\Gamma_2}^2)^{1/2} \mathbb{C} |||w|||, \end{aligned}$$

где используется вспомогательная норма

$$|||y|||_*^2 := \int_{\Omega} A^{-1} y \cdot y \, dx.$$

Подставив в последнем неравенстве $w = u - v$, приходим к мажоранте для задачи диффузии

$$\begin{aligned} & |||u - v||| \leq M_{IDF}(v, y) := \\ & := |||A \nabla v - y|||_* + \mathbb{C} (\|f + \operatorname{div} y\|^2 + \|F - y \cdot n\|_{\Gamma_2}^2)^{1/2}. \end{aligned} \tag{1.25}$$

Или в более удобном для вычислений виде — с параметром $\beta > 0$

$$\begin{aligned} |||u - v|||^2 &\leq M_{IDF}^2(v, y, \beta) := \\ &:= (1 + \beta) |||A\nabla v - y|||_*^2 + \left(1 + \frac{1}{\beta}\right) \mathbb{C}^2 (\|f + \operatorname{div} y\|^2 + \|F - y \cdot n\|_{\Gamma_2}^2). \end{aligned} \quad (1.26)$$

Все утверждения, сформулированные в пункте 1.3 можно обобщить для мажорант $M_{IDF}(v, y)$ и $M_{IDF}^2(v, y, \beta)$. Минимум мажоранты в данном случае достигается при $y = A\nabla u$.

1.5. Примеры вычисления оценок с адаптацией сеток

Рассмотрим примеры работы адаптивных алгоритмов для задачи (1.19), приближённое решение u_h которой вычисляется с помощью стандартного метода конечных элементов с кусочно-линейными аппроксимациями на триангуляции $\mathcal{T}_h$. В этом случае u_h можно записать в виде суммы

$$u_h(x) = \sum_{i=1}^N u_i \varphi_i(x),$$

где N — количество узлов расчётной сетки, $\varphi_i(x) \in P^1$ на каждом элементе разбиения T — кусочно-линейные функции формы в $\mathbb{R}^2$, а индекс i соответствует номеру узла. Считаем, что приближённое решение u_h является галеркинской аппроксимацией, поскольку только в этом случае применимы стандартные подходы, которые используются далее для сравнительного анализа. Исследование апостериорных оценок для негалеркинских аппроксимаций можно найти в диссертации Фролова [23]. Приведённые там результаты подтверждают универсальность функционального подхода.

Для вычисления функциональной апостериорной оценки погрешности необходимо выбрать тип аппроксимации свободной переменной y . В последнее десятилетие было опубликовано несколько статей, в которых проводились близкие по направленности исследования. Например, в работах Repin, Sauter и

Smolanski рассматриваются примеры, в том числе, с адаптацией сеток для уравнения Пуассона с граничными условиями типа Дирихле [71] и условиями смешанного типа [75]. Используются стандартные непрерывные аппроксимации для свободной переменной. В работе [71] исследуется проблема выбора порядка полиномиальной аппроксимации, а также количества итераций при вычислении мажоранты. В работе Репина и Фролова [76] рассмотрены примеры вычисления функциональной апостериорной оценки для уравнения Лапласа на равномерных сетках. Исследуется влияние наличия входящего угла в области на результат. Работы Frolov, Neittaanmäki и Repin [70] и [77] (а также [23]) содержат примеры адаптации сеток с индикацией на основе функциональных апостериорных оценок для уравнения Пуассона и уравнения диффузии (в том числе, с разрывами коэффициентов и правой части уравнения), а также сравнение с некоторыми классическими индикаторами. Для свободной переменной также используются стандартные непрерывные аппроксимации МКЭ.

Результаты, представленные в этом разделе, описаны в работах Чуриловой и Фролова [78] и [79], а также в работе автора [80].

1.5.1. Стандартные аппроксимации МКЭ для свободной переменной

Рассмотрим первый способ вычисления функциональной апостериорной оценки (1.26). Поскольку в мажоранте оптимальное значение свободного поля есть $y = A\nabla u$, можно воспользоваться простым методом, идея которого схожа с методом сглаживания градиента. Усредним кусочно-постоянное поле $A\nabla u_h$ по формуле (5). Полученное поле $G(A\nabla u_h)$ подставим в мажоранту M_{IDF} в качестве y . Такой способ не требует существенных вычислительных затрат.

Другой, более вычислительно ресурсоемкий, но надёжный подход — минимизация мажоранты. Выберем для каждой компоненты переменной y кусочно-

линейные аппроксимации

$$y(x) = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \sum_{i=1}^N \begin{pmatrix} y_{1i} \\ y_{2i} \end{pmatrix} \varphi_i(x), \quad (1.27)$$

где y_{1i} и y_{2i} — неизвестные значения в узлах расчётной сетки, а $\varphi_i(x)$ — кусочно-линейные функции формы. Для нахождения y решим задачу минимизации

$$\min_{(y_{11}, \dots, y_{1N}, y_{21}, \dots, y_{2N})} M_{IIF}^2(u_h, y, \beta).$$

При использовании аппроксимации (1.27) и при фиксированном $\beta > 0$, необходимое условие минимума

$$\frac{\partial M_{IIF}^2(y_{11}, \dots, y_{1N}, y_{21}, \dots, y_{2N})}{\partial y_{ji}} = 0, \quad \forall i = \overline{1, N}, j = 1, 2 \quad (1.28)$$

представляет собой систему линейных алгебраических уравнений для $2N$ неизвестных с положительно определённой симметричной матрицей.

Для нахождения β и y воспользуемся процедурой, описанной в монографии [21]:

Шаг 0. Положим начальное значение $y_{(0)} = G(A\nabla u_h)$, $k = 1$.

Шаг 1. Вычислим β_k , минимизирующее функционал

$$\min_{\beta > 0} M_{IIF}^2(u_h, y_{(k-1)}, \beta).$$

Эта задача решается аналитически

$$\beta_k = \left(\frac{\mathbb{C}^2 (\|f + \operatorname{div} y_{(k-1)}\|^2 + \|F - y_{(k-1)} \cdot n\|_{\Gamma_2}^2)}{\|A\nabla u_h - y_{(k-1)}\|_*^2} \right)^{1/2}.$$

Шаг 2. Для фиксированного β_k найдём $y_{(k)}$, решив систему (1.28), и вычислим мажоранту $M_{IIF(k)} = M_{IIF}(u_h, y_{(k)}, \beta_k)$. Положим $k = k + 1$ и перейдём к шагу 1.

Нижний индекс в круглых скобках обозначает номер итерации. Таким образом, получаем последовательность монотонно убывающих верхних оценок $\{M_{IIDF(k)}\}$. Критерием завершения процесса может быть малость величины $|M_{IIDF(k)} - M_{IIDF(k-1)}|$ или достижение желаемого значения погрешности $M_{IIDF(k)} < \varepsilon$. Перейдём к численным результатам.

Пример 1. Рассмотрим задачу Пуассона на квадрате $\Omega = [-1; 1] \times [-1; 1]$

$$\begin{cases} -\Delta u = 0 & \text{в } \Omega, \\ u = u_0 & \text{на } \partial\Omega, \end{cases}$$

с точным решением $u = 2x_1 - x_1x_2 + 5x_2 - 1$. В таблице 1.1 приведены значения мажоранты и индекса эффективности, для которых поле y вычислено тремя способами: сглаживанием градиента приближённого решения $A\nabla u_h$, сглаживанием градиента решения на равномерно измельчённой сетке $A\nabla u_{h/4}$ и с помощью решения системы (1.28) для нахождения непрерывной аппроксимации. Исходя из представленных данных, можно заключить, что даже в случае простой модельной задачи, использование сглаженного градиента без последующей минимизации приводит к росту индекса эффективности мажоранты с измельчением сетки. Если использовать решение системы, то индекс эффективности остаётся постоянным и близким к единице. Таким образом, в дальнейших расчётах, мы будем использовать решение системы для нахождения y .

Рассмотрим теперь задачу адаптации расчётной сетки. Индикатор погрешности, основанный на функциональной мажоранте, имеет вид

$$\eta_T = \left(\int_T (A\nabla u_h - y) \cdot (\nabla u_h - A^{-1}y) dx \right)^{1/2}. \quad (1.29)$$

Обозначим его η_T^{con} для случая, когда y аппроксимируется кусочно-линейным непрерывным полем. Для оценки эффективности индикатора, будем сравнивать картину локального распределения ошибки с её истинным распределением для случая, когда известно точное решение задачи. Если точное решение неизвестно, вместо него используется аппроксимация, полученная на более мелкой сетке,

Таблица 1.1: Пример 1. Три способа вычисления мажоранты

N	$ u - u_h $	$y = G(\nabla u_h)$		$y = G(\nabla u_{h/4})$		решение системы	
		M_{IIDF}	I_{eff}	M_{IIDF}	I_{eff}	M_{IIDF}	I_{eff}
25	0.559	0.927	1.66	0.726	1.30	0.577	1.03
81	0.279	0.518	1.85	0.395	1.41	0.289	1.03
289	0.140	0.300	2.15	0.220	1.57	0.144	1.03
1089	0.070	0.180	2.58	0.125	1.79	0.072	1.03
4225	0.035	0.112	3.20	0.074	2.11	0.036	1.03
16641	0.017	0.071	4.08	0.044	2.55	0.018	1.03

например, $u_{ref} = u_{h/4}$. В англоязычной литературе такое решение называется «reference solution», далее мы будем называть его «эталонным». Соответствующий индикатор погрешности обозначим за

$$\eta_T^{ref} = \left(\int_T A \nabla \tilde{e} \cdot \nabla \tilde{e} dx \right)^{1/2},$$

где $\tilde{e} = u_{ref} - u_h$. Эталонное решение применяется также при вычислении индекса эффективности оценок и относительной погрешности

$$e\% = \frac{|||u_{ref} - u_h|||}{|||u_{ref}|||} \times 100\%$$

для задач, в которых точное решение неизвестно.

Адаптивные алгоритмы были реализованы в пакете MATLAB, в котором также имеется встроенный стандартный индикатор

$$\eta_T^{MATLAB} = \|h_T f\|_T + \left(\frac{1}{2} \sum_{E \in \varepsilon_T} h_E^2 |j(A \nabla u_h \cdot n_E)|^2 \right)^{1/2},$$

основанный на явном методе невязок. За ε_T обозначены грани элемента T , не лежащие на границе области $\partial\Omega$, h_T и h_E — характерные размеры элемента T и ребра E , соответственно. Также был рассмотрен классический индикатор η_T^{ZZ} .

Адаптивный алгоритм состоит из следующих шагов:

Шаг 0. Построение начального разбиения области и выбор индикатора погрешности.

Шаг 1. Вычисление приближённого решения задачи u_h методом конечных элементов при помощи стандартных средств MATLAB PDE Toolbox.

Шаг 2. Вычисление глобальной оценки погрешности и её локального распределения. Отбор элементов для измельчения с помощью выбранного индикатора.

Шаг 3. Измельчение сетки в выбранных зонах и переход к шагу 1.

Для остановки процесса адаптации сетки было выбрано условие достижения желаемого уровня относительной погрешности (2–3% для различных задач). Также критерием остановки может служить достижение фиксированного количества конечных элементов или степеней свободы. В результате, для каждого из индикаторов получается последовательность сеток и соответствующих им приближённых решений. Начальное разбиение сетки выбиралось одинаковым для всех подходов и равномерным там, где это возможно. Последовательность сеток, полученная для индикатора η_T^{ref} , считается ориентиром — с ней производится сравнение результатов, полученных для других индикаторов.

Пример 2. Рассмотрим следующую задачу:

$$\begin{cases} -\Delta u = f & \text{в } \Omega, \\ u = 0 & \text{на } \partial\Omega, \end{cases}$$

где область Ω приведена на рисунке 1.1, а правая часть внутри области терпит разрыв

$$f = \begin{cases} 1 & \text{в подобластях I и III,} \\ 0 & \text{в подобласти II.} \end{cases}$$

Также, на рисунке 1.1 представлено приближённое решение задачи и компоненты его градиента, вычисленные на равномерной сетке. В таблице 1.2 приведены результаты для нескольких шагов адаптации сетки. За N обозначается количество узлов, $e\%$ — относительная погрешность приближённого решения, I_{eff} — индекс эффективности оценок. В качестве глобальной оценки для метода невязок и сглаживания градиента берётся корень из суммы квадратов значений соответствующего индикатора по всем конечным элементам. Для сравнения, в таблице 1.3 приведены аналогичные результаты для последовательности равномерно измельчённых сеток. При сравнении данных в таблицах 1.2 и 1.3 подтверждается очевидное преимущество использования адаптивного алгоритма — для достижения уровня относительной погрешности менее 2% при равномерном разбиении требуется в четыре раза больше расчетных узлов.

На рисунках 1.2–1.3 представлено распределение значений различных индикаторов по области, а на рисунке 1.4 — расчётные сетки, получившиеся на последнем шаге адаптации. Для последующего разбиения выбирались элементы с уровнем погрешности больше, чем среднее значение по области.

Таблица 1.2: Пример 2. Сравнение шагов адаптации сетки

η_T^{ref}		η_T^{con}			η_T^{MATLAB}			η_T^{ZZ}		
N	$e\%$	N	$e\%$	I_{eff}	N	$e\%$	I_{eff}	N	$e\%$	I_{eff}
51	33.20	51	33.20	1.17	51	33.20	1.18	51	33.20	1.04
110	20.68	115	20.30	1.12	133	20.24	1.05	120	20.33	1.06
394	10.55	413	10.40	1.09	492	10.94	1.00	465	10.04	1.04
924	6.92	961	6.75	1.08	1077	7.01	1.05	1157	6.14	1.04
1401	5.48	1451	5.40	1.08	1779	5.79	0.99	1757	4.99	1.04
3154	3.71	3234	3.67	1.07	3889	3.73	1.03	4195	3.17	1.04
7034	2.45	7161	2.44	1.07	7929	2.64	1.03	10055	2.10	1.04
10840	1.98	10986	1.97	1.06	12107	2.24	1.01			

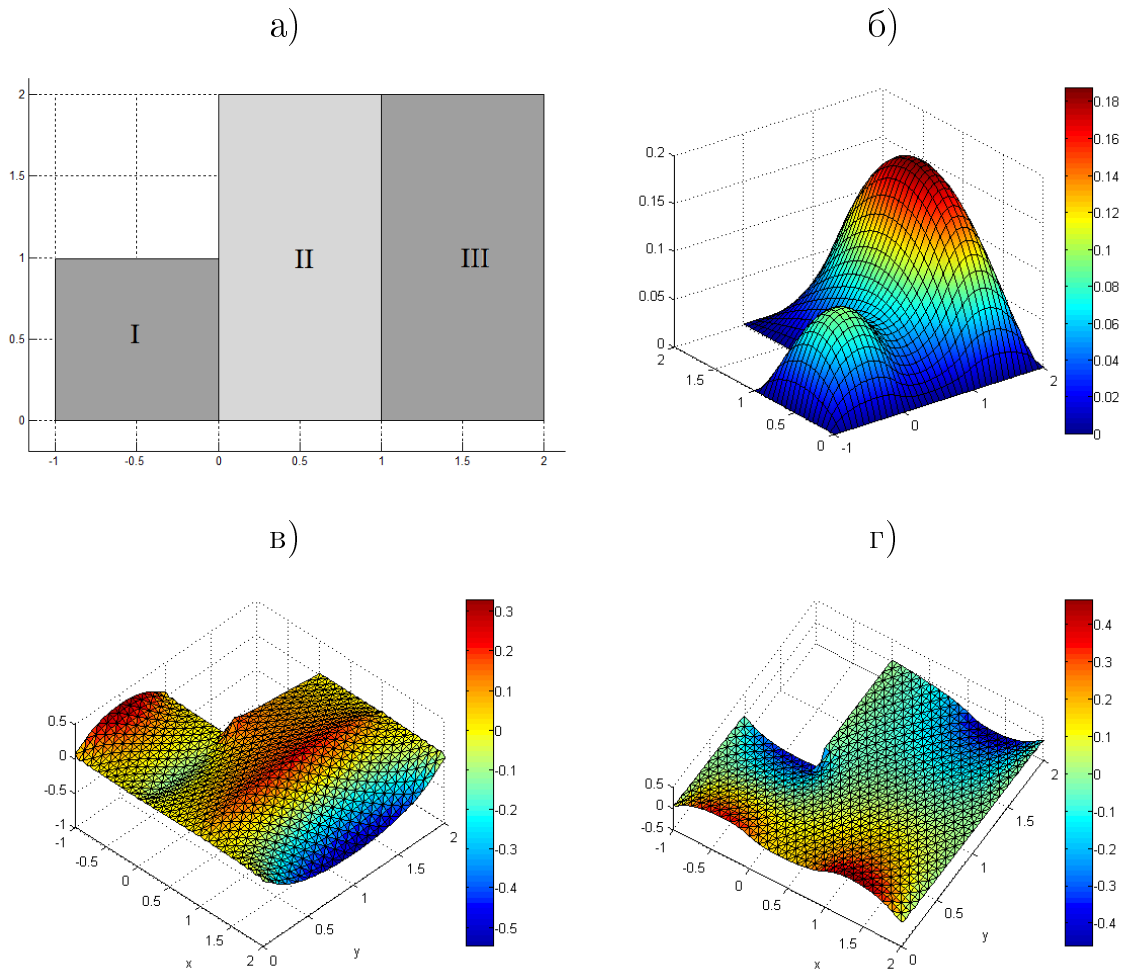


Рис. 1.1: Область для примера 2 (а); приближённое решение u_h на равномерной сетке (б); градиент приближённого решения $(A\nabla u_h)_1$ (в) и $(A\nabla u_h)_2$ (г)

Из полученных результатов можно сделать вывод, что мажоранта достаточно точно воспроизводит как глобальную величину (индекс эффективности близок к единице), так и локальное распределение погрешности в области. Индикатор, основанный на сглаживании градиента, также даёт хороший результат. Индикатор пакета MATLAB для данной задачи показывает отличную от эталонной картину распределения погрешности по области, что приводит к сетке, отличающийся от эталонной по структуре и заметно превышающей её по числу узлов по сравнению с другими подходами.

Таблица 1.3: Пример 2. Глобальные оценки нормы погрешности на равномерных сетках

N	$e\%$	I_{eff}, η_T^{con}	I_{eff}, η_T^{MATLAB}	I_{eff}, η_T^{ZZ}
51	33.20	1.17	1.18	1.04
181	17.60	1.13	1.16	1.04
681	9.13	1.13	1.15	1.04
10401	2.49	1.21	1.09	1.06
41281	1.33	1.26	1.04	1.07

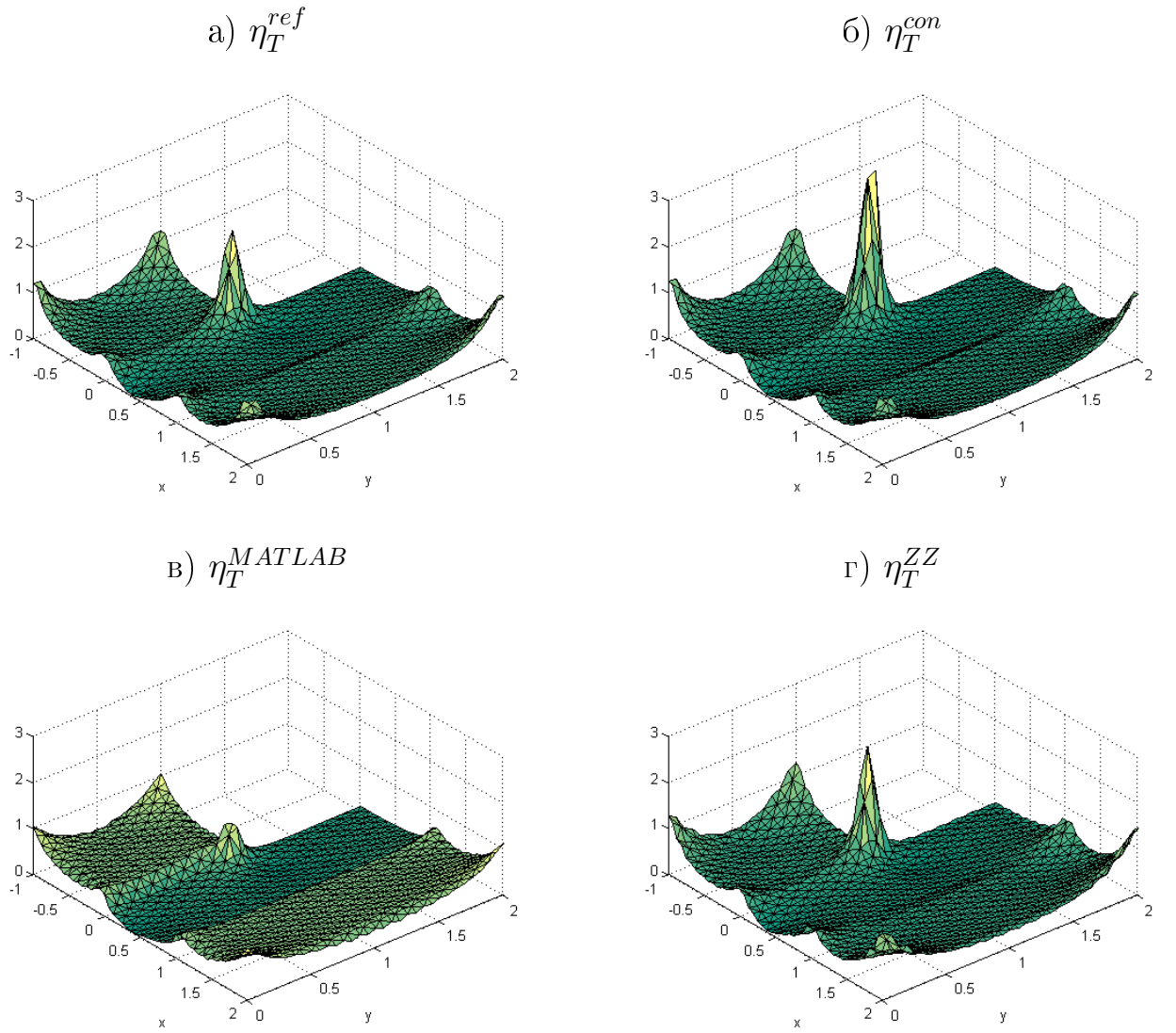


Рис. 1.2: Пример 2. Значения различных индикаторов на равномерной сетке

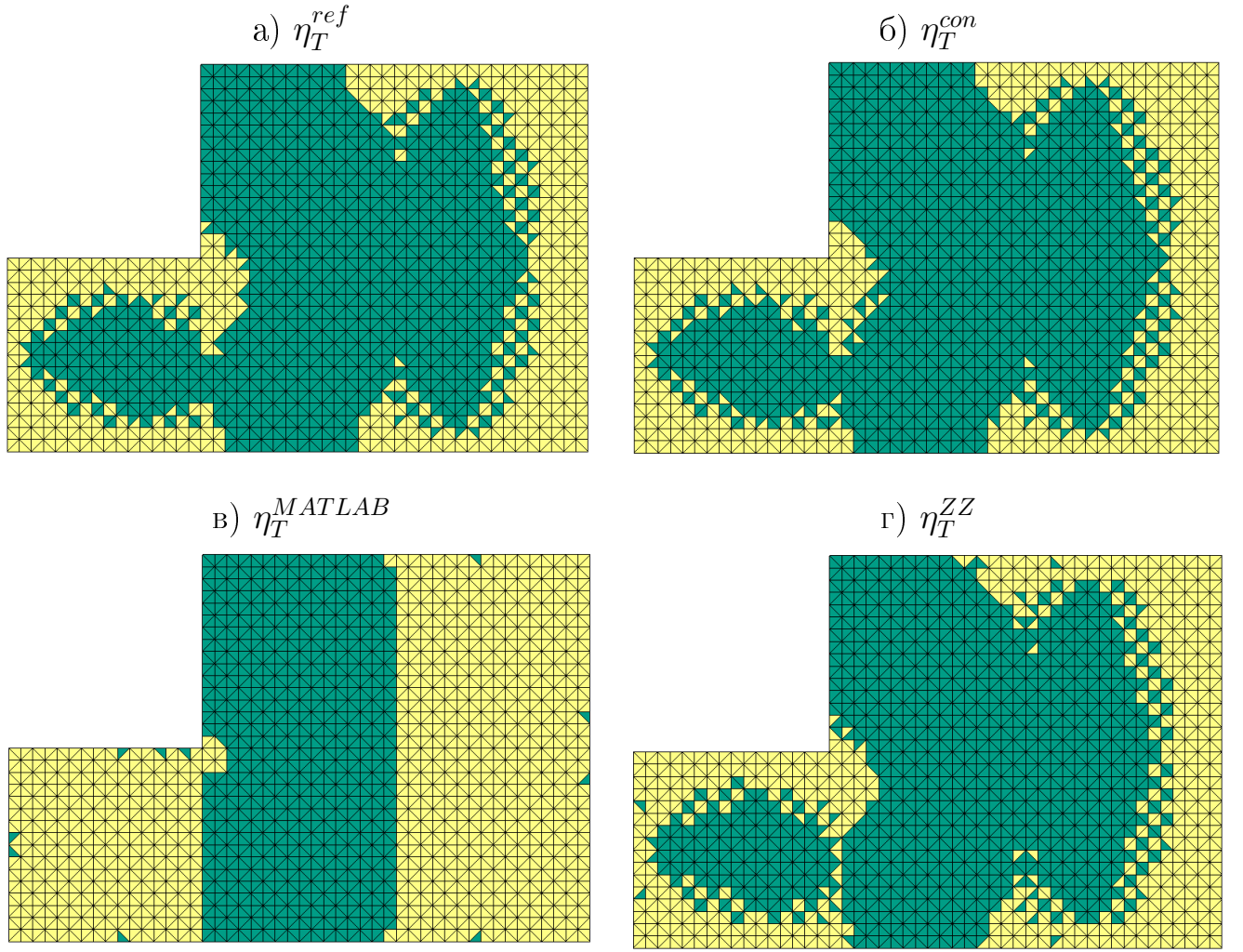


Рис. 1.3: Пример 2. Элементы, отобранные для разбиения на равномерной сетке для различных индикаторов, отмечены светлым

Пример 3. Рассмотрим задачу

$$\begin{cases} -\operatorname{div}(A\nabla u) = f & \text{в } \Omega, \\ u = 0 & \text{на } \Gamma_1, \\ n \cdot A\nabla u = 0 & \text{на } \Gamma_2, \end{cases}$$

где область Ω , границы Γ_1 и Γ_2 приведены на рисунке 1.5, коэффициент матрицы a_{11} терпит разрыв

$$a_{11} = \begin{cases} 1 & \text{в подобластях II и V,} \\ 5 & \text{в подобластях I, III, IV и VI,} \end{cases}$$

$a_{12} = a_{21} = 0$, $a_{22} = 1$. Правая часть уравнения

$$f = \begin{cases} 0 & \text{в подобластях I, II и III} \\ 1 & \text{в подобластях IV, V и VI.} \end{cases}$$

На рисунке 1.5 также представлено приближённое решение задачи и компоненты его градиента. В таблице 1.4 приведены результаты для нескольких шагов работы адаптивных алгоритмов. На рисунке 1.6 представлены отобранные с помощью различных индикаторов элементы для разбиения, а на рисунке 1.7 — расчётные сетки, получившиеся на последнем шаге алгоритма адаптации.

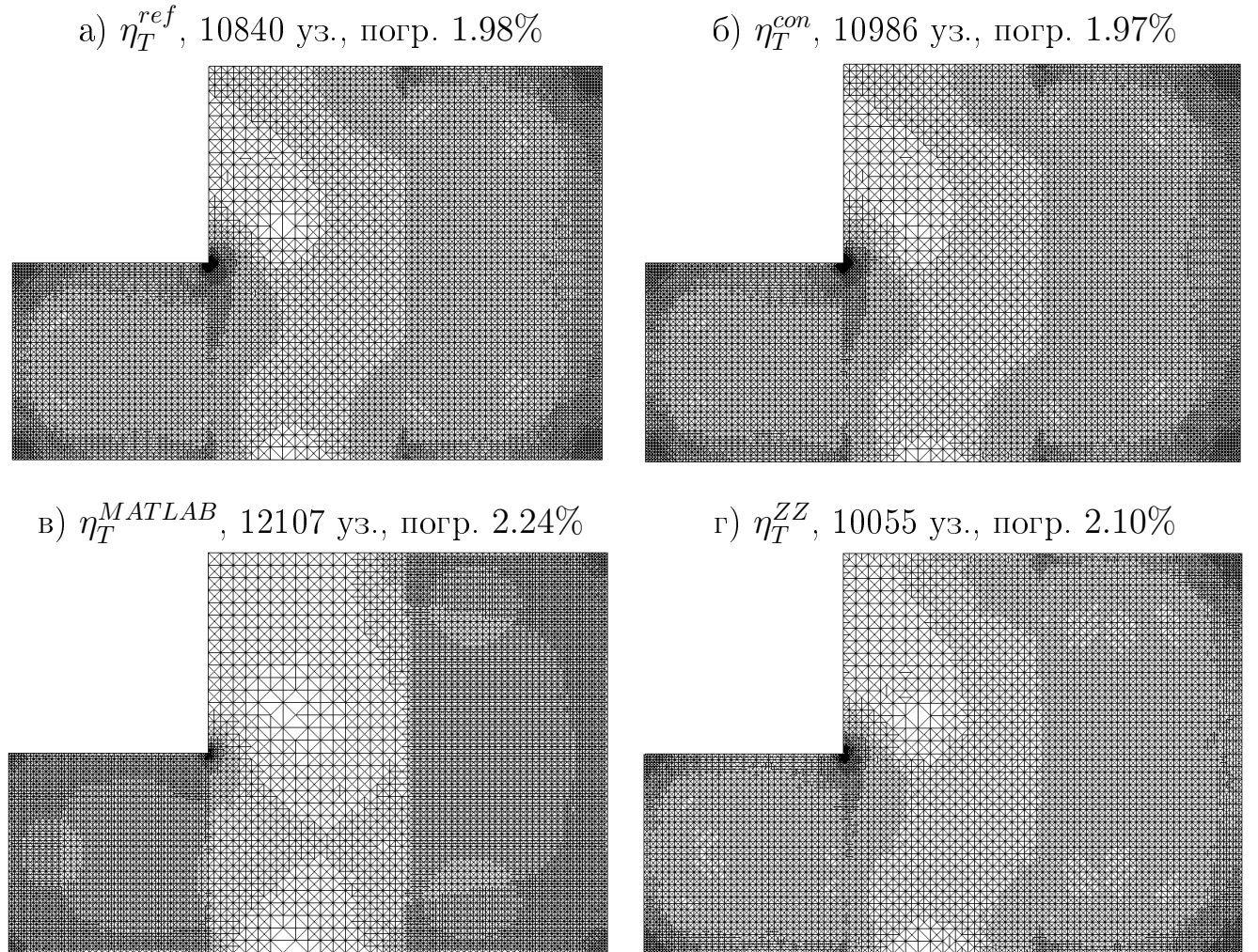


Рис. 1.4: Пример 2. Конечноэлементные сетки, полученные в результате адаптации с различными индикаторами

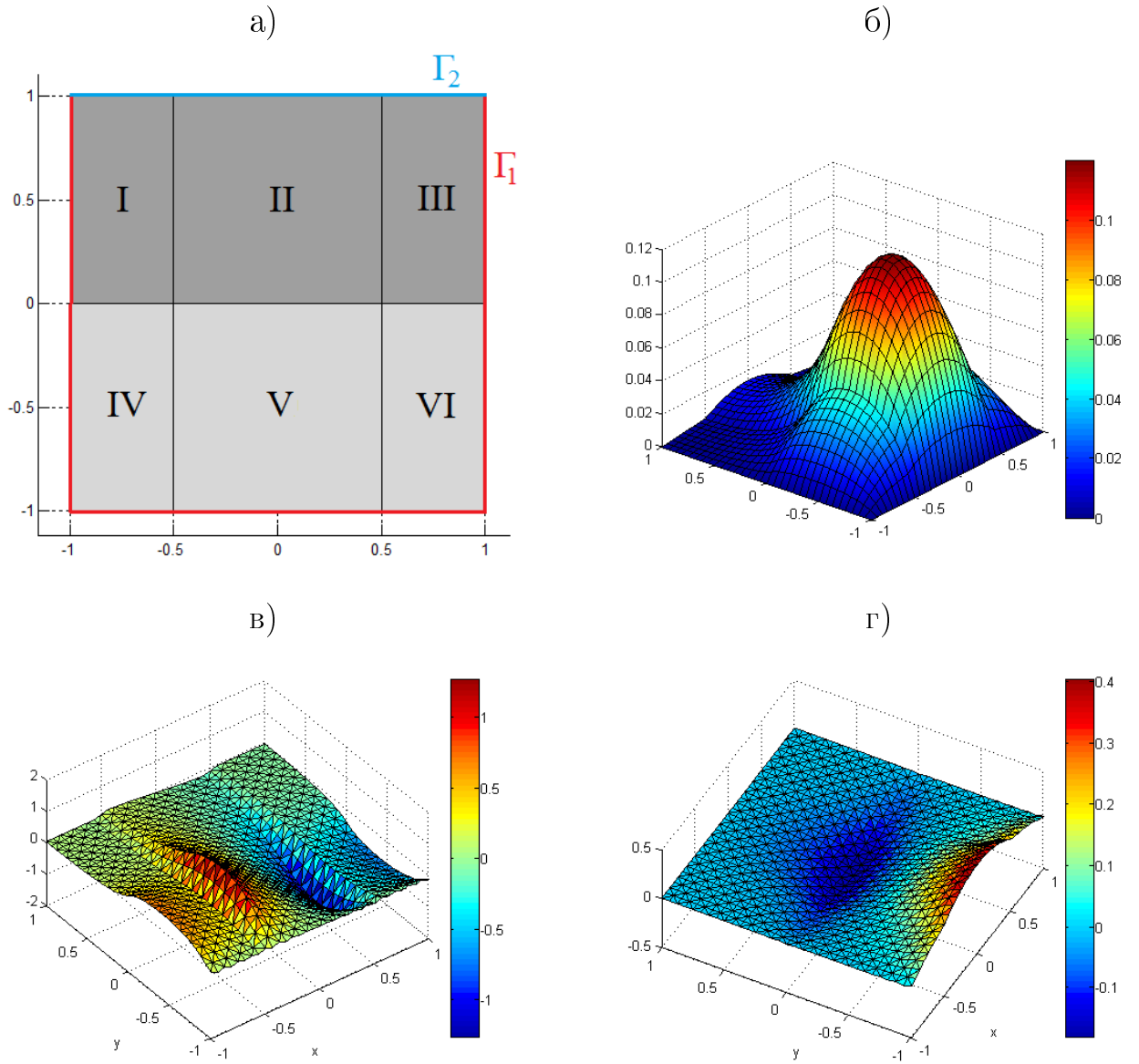


Рис. 1.5: Область для примера 3 (а); приближённое решение u_h на равномерной сетке (б); градиент приближённого решения $(A\nabla u_h)_1$ (в) и $(A\nabla u_h)_2$ (г)

Для данного примера и индикатор η_T^{MATLAB} , и индикатор η_T^{ZZ} дают сетки, которые по своей структуре далеки от эталонной. Сетка, полученная с индикатором η_T^{MATLAB} , сгущена по линии разрыва правой части уравнения, а сетка, полученная с η_T^{ZZ} , сгущена по линиям разрыва коэффициента матрицы A . В свою очередь для индикатора η_T^{con} , основанного на функциональной мажоранте, сетка близка к эталонной как по количеству узлов, так и по расположению зон их сгущений.

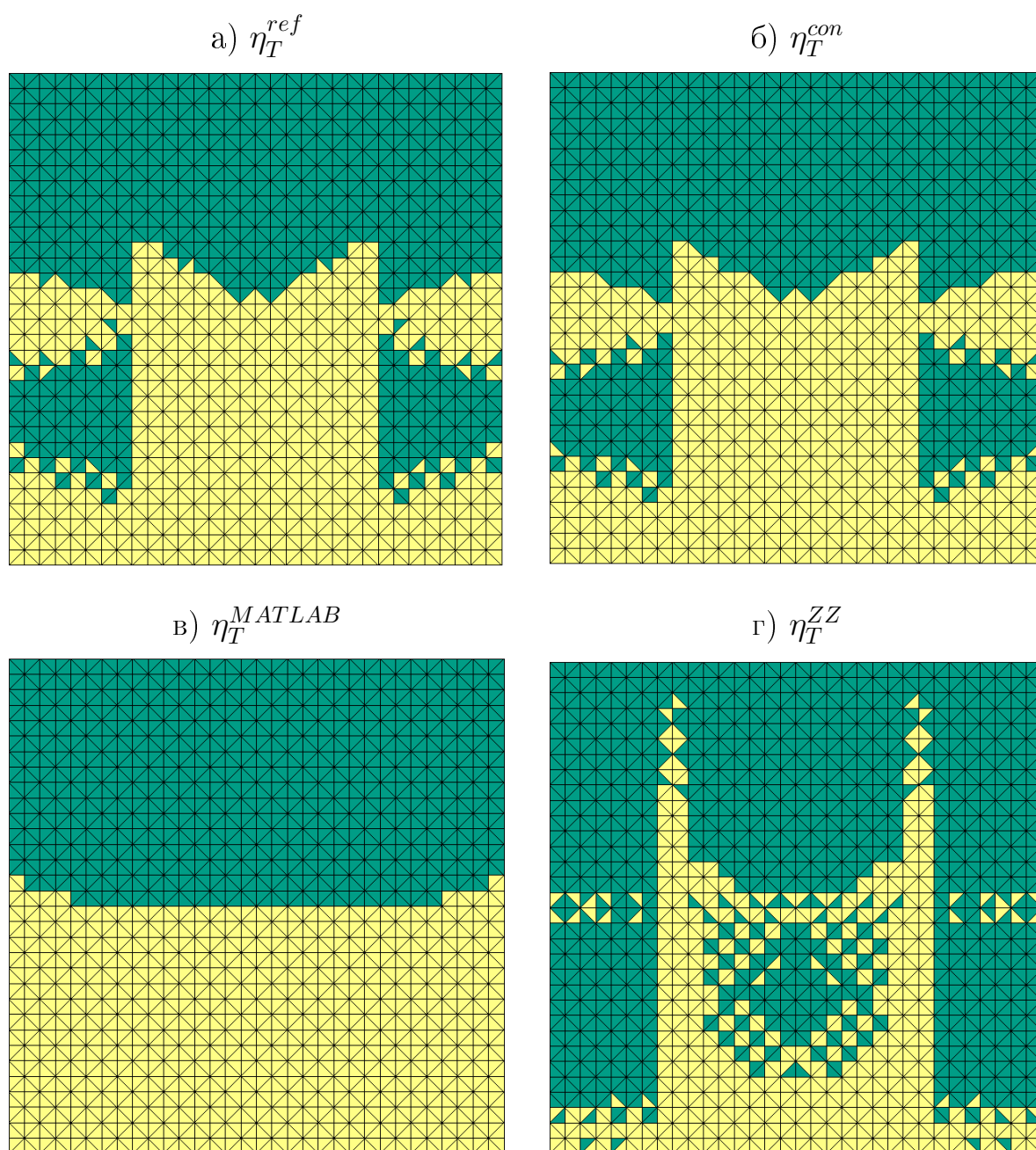
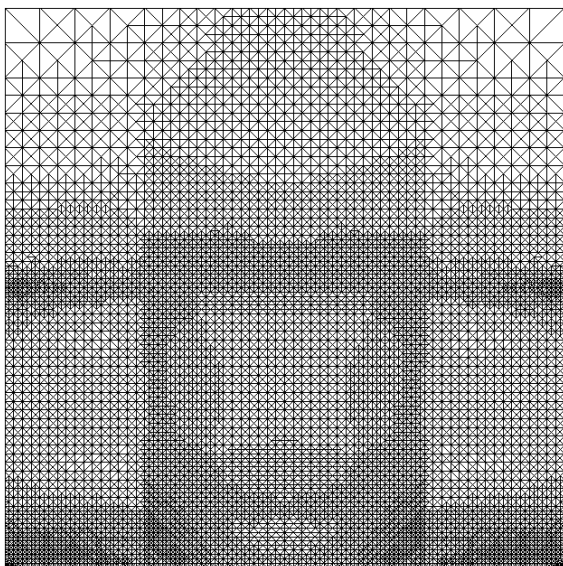
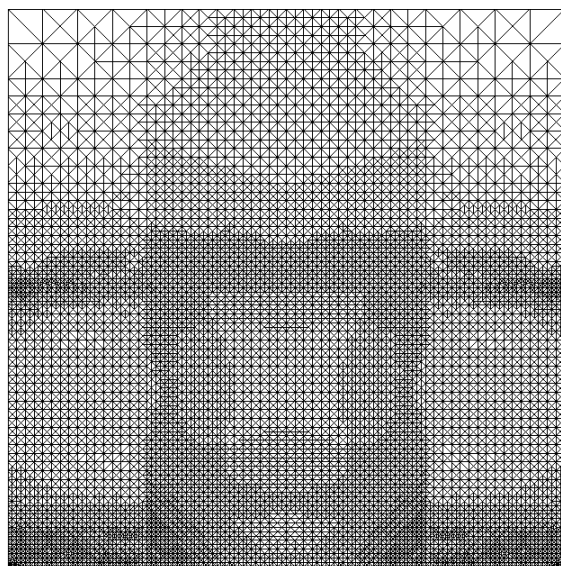


Рис. 1.6: Пример 3. Элементы, отобранные для разбиения на равномерной сетке для различных индикаторов

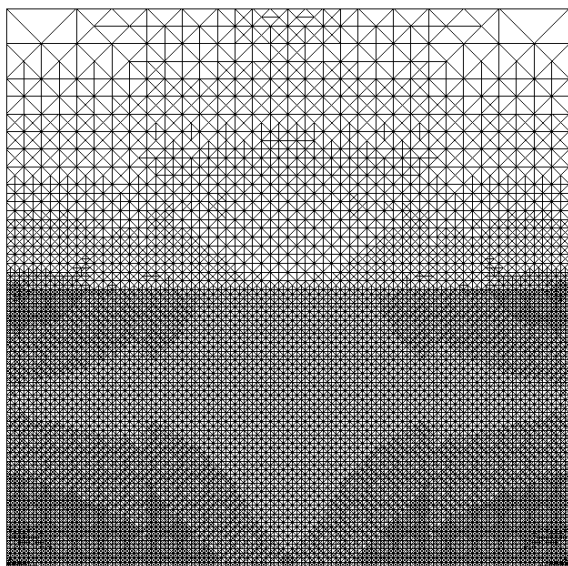
а) η_T^{ref} , 9762 уз., погр. 1.73%



б) η_T^{con} , 10087 уз., погр. 1.71%



в) η_T^{MATLAB} , 13634 уз., погр. 1.71%



г) η_T^{ZZ} , 14423 уз., погр. 1.76%

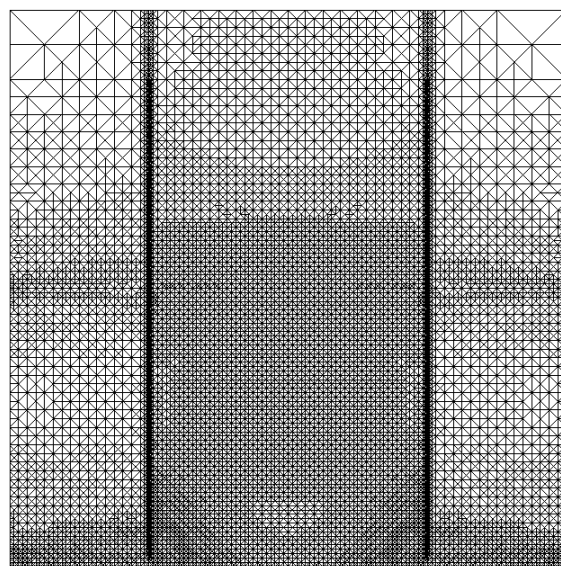


Рис. 1.7: Пример 3. Конечноэлементные сетки, полученные в результате адаптации с различными индикаторами

Таблица 1.4: Пример 3. Сравнение шагов адаптации сетки

η_T^{ref}		η_T^{con}			η_T^{MATLAB}			η_T^{ZZ}		
N	$e\%$	N	$e\%$	I_{eff}	N	$e\%$	I_{eff}	N	$e\%$	I_{eff}
145	17.44	145	17.44	1.07	145	17.44	1.54	145	17.44	1.12
313	10.03	327	9.91	1.06	351	10.81	1.32	290	11.45	1.21
474	8.32	498	8.29	1.05	583	8.69	1.33	438	9.32	1.30
1163	5.04	1189	5.02	1.05	1280	5.66	1.27	940	6.48	1.34
1752	4.12	1793	4.09	1.04	1910	4.62	1.33	1372	5.57	1.28
2800	3.23	2892	3.18	1.04	2741	3.82	1.30	2051	4.55	1.36
6347	2.14	6521	2.13	1.04	5849	2.57	1.33	4467	3.12	1.39
9762	1.73	10087	1.71	1.04	9798	2.07	1.27	6520	2.62	1.34
					13634	1.71	1.31	9525	2.15	1.42
								14423	1.76	1.38

Пример 4. В четвертом примере рассмотрим задачу (1.19) для случая, когда коэффициент матрицы a_{11} терпит разрыв

$$a_{11} = \begin{cases} 1 & \text{в подобластях I и IV,} \\ 2 & \text{в подобластях II и III,} \end{cases}$$

$a_{12} = a_{21} = 0$, $a_{22} = 1$, правая часть постоянна и равна единице во всей области Ω , которая приведена на рис. 1.8. Граница области $\Gamma_1 = \partial\Omega$, $u_0 = 0$.

В таблице 1.5 приведены результаты для нескольких шагов адаптации сетки, на рисунках 1.9 и 1.11 представлены элементы, отобранные для разбиения и значения в области различных индикаторов на равномерной сетке, а на рисунке 1.10 — расчётные сетки, получившиеся на последнем шаге работы адаптивных алгоритмов. Как видно из данных таблицы и рисунков, теперь уже структура сетки для η_T^{con} значительно отличается и от эталонной, и от полученной с помощью других индикаторов. Причина возникающего эффекта объясняется ниже.

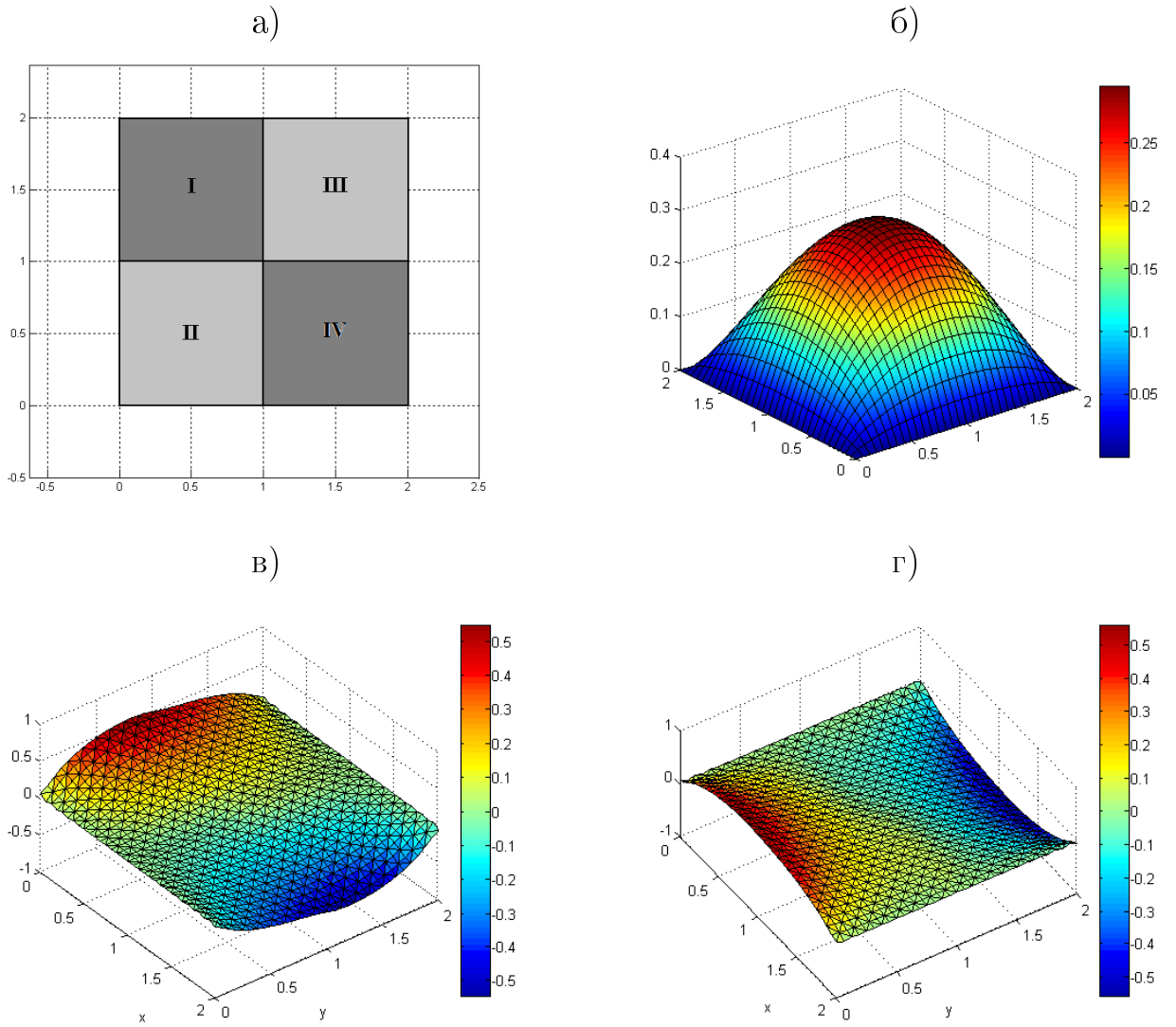


Рис. 1.8: Область для примера 4 (а); приближённое решение u_h на равномерной сетке (б); градиент приближённого решения $(A\nabla u_h)_1$ (в) и $(A\nabla u_h)_2$ (г)

1.5.2. Недостаток непрерывной аппроксимации

Рассмотрим область Ω , состоящую из двух частей — Ω_1 и Ω_2 , как показано на рисунке 1.12. Пусть матрица A имеет вид

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & 0 \\ 0 & a_{22} \end{bmatrix}$$

и коэффициент a_{11} терпит разрыв на внутренней границе Γ .

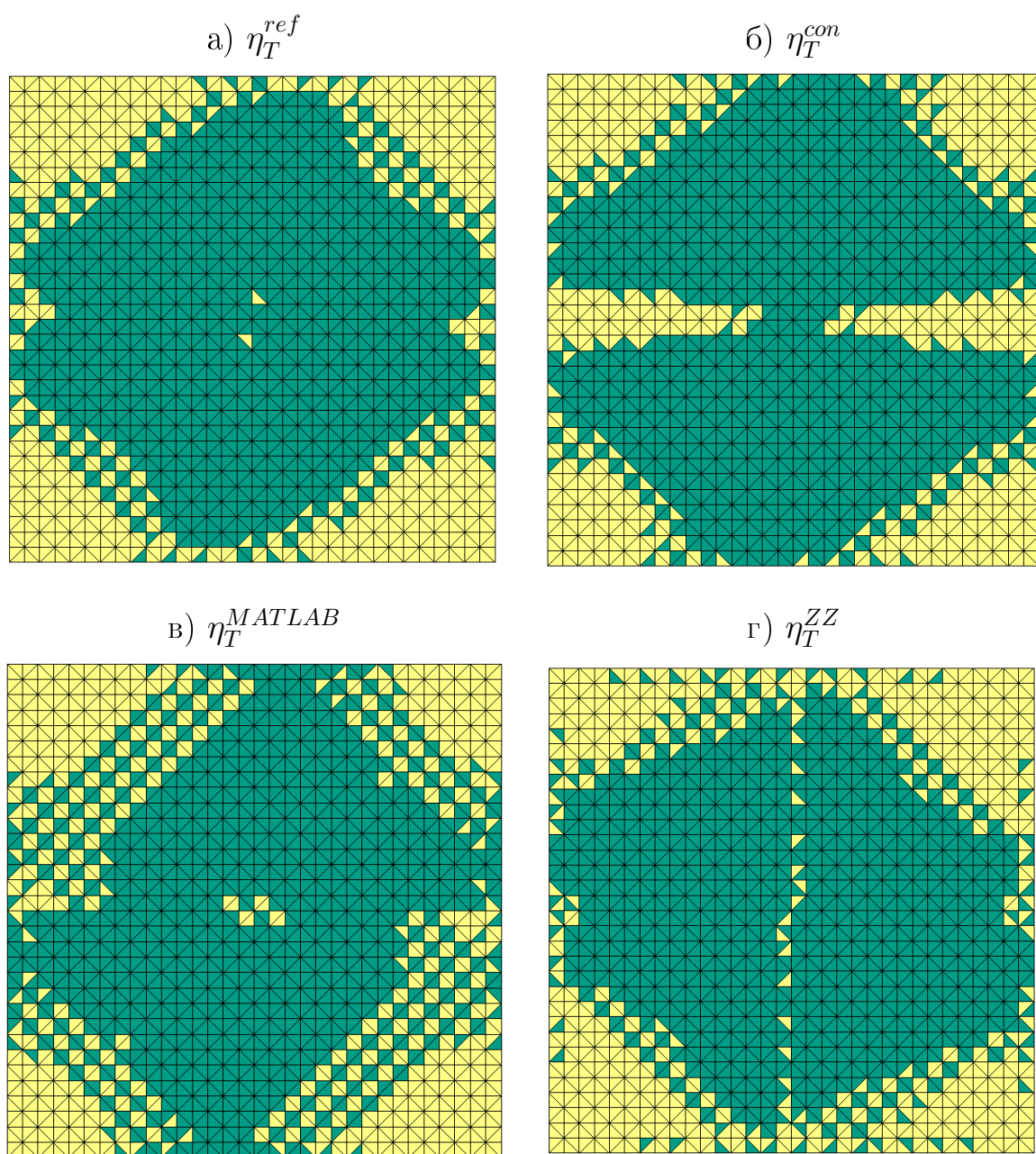


Рис. 1.9: Пример 4. Элементы, отобранные для разбиения на равномерной сетке для различных индикаторов

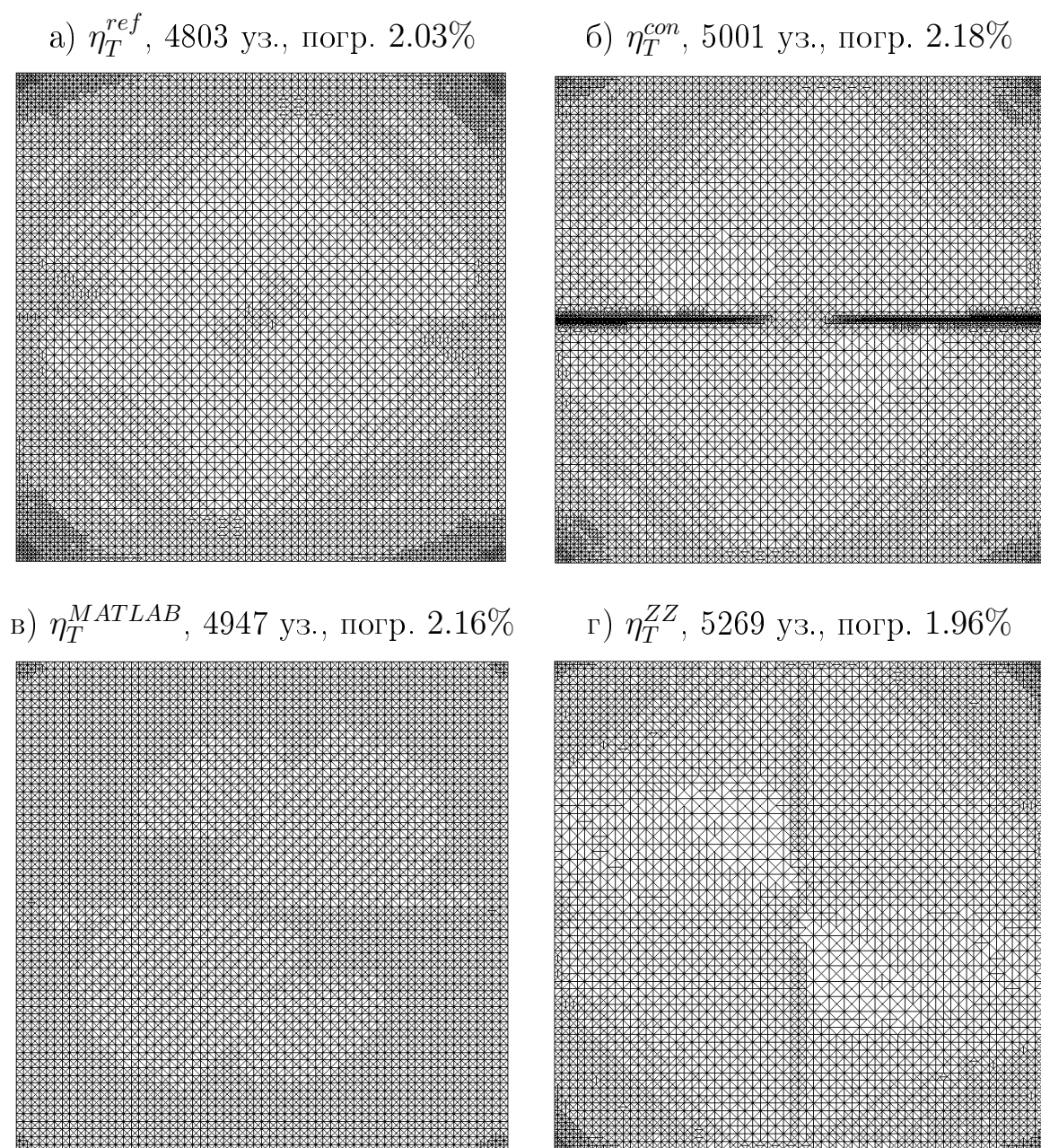


Рис. 1.10: Пример 4. Конечноэлементные сетки, полученные в результате адаптации с различными индикаторами

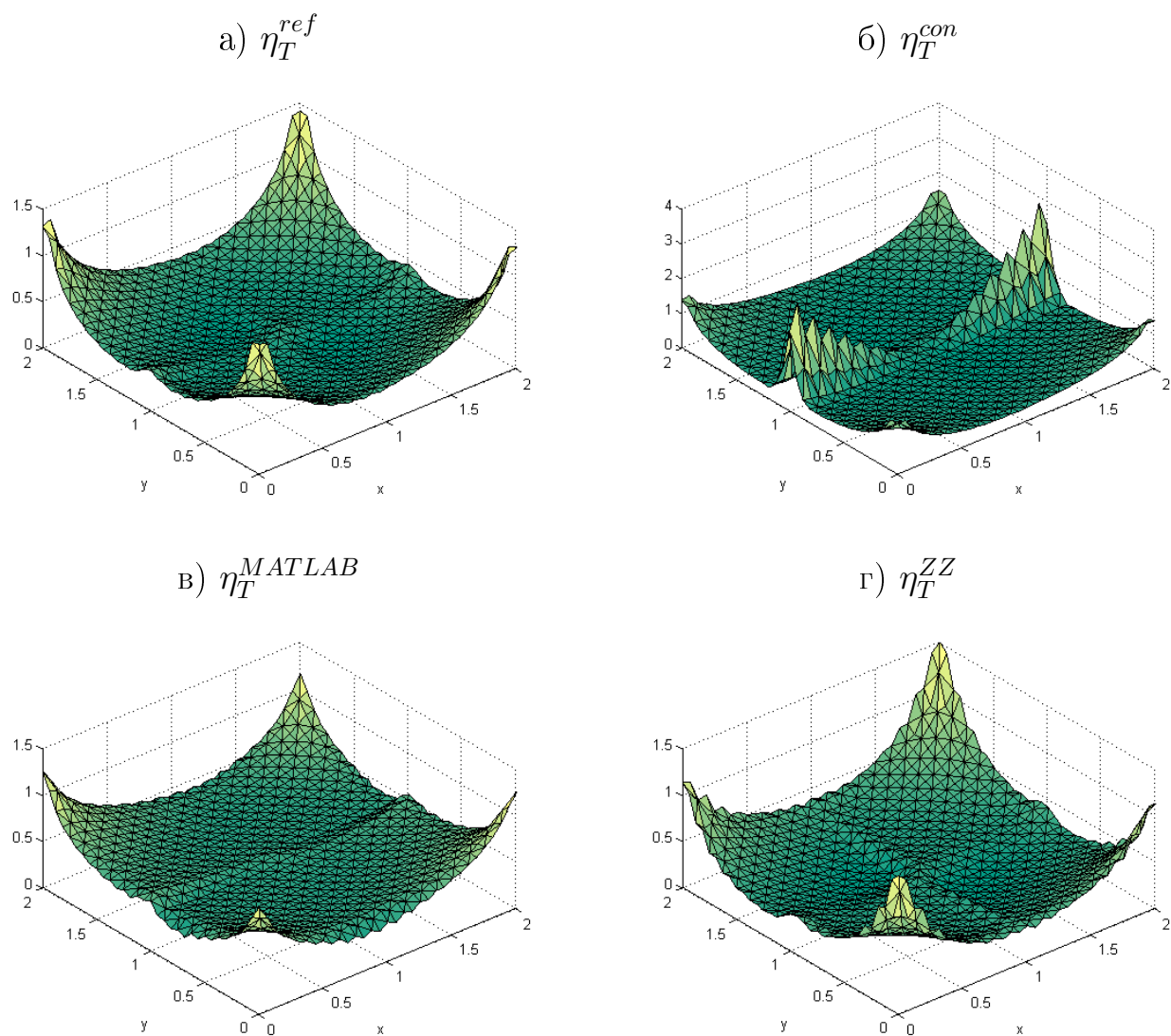


Рис. 1.11: Пример 4. Значения различных индикаторов на равномерной сетке

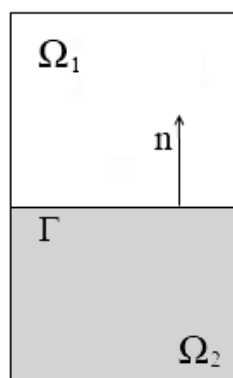


Рис. 1.12: Область, состоящая из двух частей

Таблица 1.5: Пример 4. Сравнение шагов адаптации сетки

η_T^{ref}		η_T^{con}			η_T^{MATLAB}			η_T^{ZZ}		
N	$e\%$	N	$e\%$	I_{eff}	N	$e\%$	I_{eff}	N	$e\%$	I_{eff}
289	10.32	289	10.32	1.21	289	10.32	1.30	289	10.32	0.95
383	7.46	383	7.50	1.34	397	7.89	1.41	393	7.42	0.96
577	6.29	537	6.64	1.26	579	6.52	1.38	619	6.23	0.94
867	4.86	793	5.46	1.33	845	5.72	1.35	933	4.72	0.95
1999	3.23	1653	3.72	1.36	1773	3.74	1.39	2221	3.10	0.95
4803	2.03	3541	2.61	1.36	3647	2.72	1.36	5269	1.96	0.96
		5001	2.18	1.30	4947	2.16	1.42			

Поскольку $\operatorname{div}(A\nabla u) \in L^2(\Omega)$, то для любой пробной функции $w \in V_0$ с помощью формулы Грина можно записать

$$-\int_{\Omega} \operatorname{div}(A\nabla u)w \, dx = \int_{\Omega} A\nabla u \cdot \nabla w \, dx.$$

С другой стороны, эту же формулу можно записать для областей Ω_1 и Ω_2 по отдельности

$$\begin{aligned} -\int_{\Omega_1} \operatorname{div}(A\nabla u)w \, dx &= \int_{\Omega_1} A\nabla u \cdot \nabla w \, dx - \int_{\Gamma} A\nabla u \cdot n_1 w \, dx; \\ -\int_{\Omega_2} \operatorname{div}(A\nabla u)w \, dx &= \int_{\Omega_2} A\nabla u \cdot \nabla w \, dx - \int_{\Gamma} A\nabla u \cdot n_2 w \, dx. \end{aligned}$$

Если n — нормаль, направленная от Ω_2 к Ω_1 , то $n_1 = -n$ и $n_2 = n$. Таким образом, сложив оба выражения, получаем что

$$-\int_{\Omega} \operatorname{div}(A\nabla u)w \, dx = \int_{\Omega} A\nabla u \cdot \nabla w \, dx - \int_{\Gamma} ((A\nabla u)_{\Omega_2} - (A\nabla u)_{\Omega_1}) \cdot n w \, dx.$$

Следовательно, должно выполняться равенство

$$\int_{\Gamma} ((A\nabla u)_{\Omega_2} - (A\nabla u)_{\Omega_1}) \cdot n w \, dx = 0.$$

Для данной задачи $n = (0; 1)$, поэтому последнее условие примет вид

$$\left(a_{22} \frac{\partial u}{\partial y}\right)_{\Omega_1} = \left(a_{22} \frac{\partial u}{\partial y}\right)_{\Omega_2}.$$

Таким образом, непрерывной обязана быть только нормальная составляющая потока, а касательная составляющая $a_{11} \frac{\partial u}{\partial x}$ может терпеть разрыв при переходе через границу Γ . Для $y_1 \approx a_{11} \frac{\partial u}{\partial x}$ непрерывная аппроксимация в данном случае не подходит.

Пример 4 показывает, что существуют ситуации, в которых использование стандартных непрерывных аппроксимаций МКЭ для компонент переменной y приводит к некорректной адаптации сетки. Поэтому при дальнейшем исследовании для y также использовалась аппроксимация с помощью элемента Равьяра-Тома нулевого порядка, допускающая разрыв касательных составляющих на гранях элементов.

1.5.3. Аппроксимация Равьяра-Тома для свободной переменной

Отметим, что смешанные аппроксимации и, в частности, аппроксимация Равьяра-Тома использовались в некоторых исследованиях, посвященных апостериорному контролю точности. Например, в работе Luce и Wohlmuth [81] получена апостериорная оценка для задачи диффузии на основе уравновешенного поля, построенного с использованием аппроксимации Равьяра-Тома нулевого порядка. На примерах с известным точным решением, в том числе для случая разрыва в коэффициентах уравнения, проведено сравнение адаптации сетки с предложенным индикатором и с индикатором, основанным на методе невязок. В статье Bahriawati и Carstensen [82] описана реализация в пакете MATLAB оценки с помощью сглаживания градиента для уравнения Пуассона со смешанными граничными условиями. Авторы статьи также используют эту аппроксимацию и приводят примеры с адаптацией расчётной сетки. Работа Valdman [83] содержит пример решения этого уравнения с функциональной оценкой погрешности. Рассматривается последовательность вложенных сеток без адаптации.

Исследование ориентировано на анализ эффективности использования метода сопряжённых градиентов и многосеточного метода с предобуславливанием при вычислении функциональных апостериорных оценок. В статье Lazarov, Repin и Tomaš [84] исследуется применение подхода к приближённым решениям уравнения диффузии, полученным при помощи разрывного метода Галеркина. Для свободной переменной уже используется аппроксимация Равьяра-Тома первого порядка. Рассматриваются задачи на последовательности равномерных разбиений без адаптации в квадратной области, в том числе, в случае скачка в коэффициентах матрицы.

Остановимся подробнее на применении смешанных аппроксимаций свободной переменной y . Решаемая задача на поиск векторного поля, минимизирующего мажоранту, схожа с задачей, возникающей в теории смешанных методов. Поэтому, для построения аппроксимаций векторного поля $y \in H(\Omega, \text{div})$ разумно воспользоваться подходами, используемыми в ней. Существует достаточно широкий спектр возможных аппроксимаций, как для треугольных, так и для четырёхугольных элементов (см., например, Brenner и Scott [6], Boffi et al. [85], Brezzi и Fortin [86]).

Рассмотрим аппроксимации векторных полей из пространства $H(\Omega, \text{div})$ для триангуляции $\mathcal{T}_h$. Нормальные составляющие $y \in [H(\Omega, \text{div})]_h$ должны быть непрерывны при переходе через грани элементов, то есть $y \cdot n_{T_1} = -y \cdot n_{T_2}$ на грани E , смежной для двух элементов T_1 и T_2 , где n_{T_1} и n_{T_2} — внешние нормали к E для элементов T_1 и T_2 , соответственно. Одна из аппроксимаций, удовлетворяющих данному требованию — аппроксимация с помощью элементов Равьяра-Тома. На рисунке 1.13 приведены элементы нулевого и первого порядков.

В процессе проведения исследования в программном комплексе MATLAB численно были реализованы элементы Равьяра-Тома нулевого порядка (RT0), содержащие три степени свободы — нормальные составляющие потока y в серединах сторон. Элемент первого порядка содержит восемь степеней свободы — шесть нормальных составляющих на сторонах и значение векторного поля в

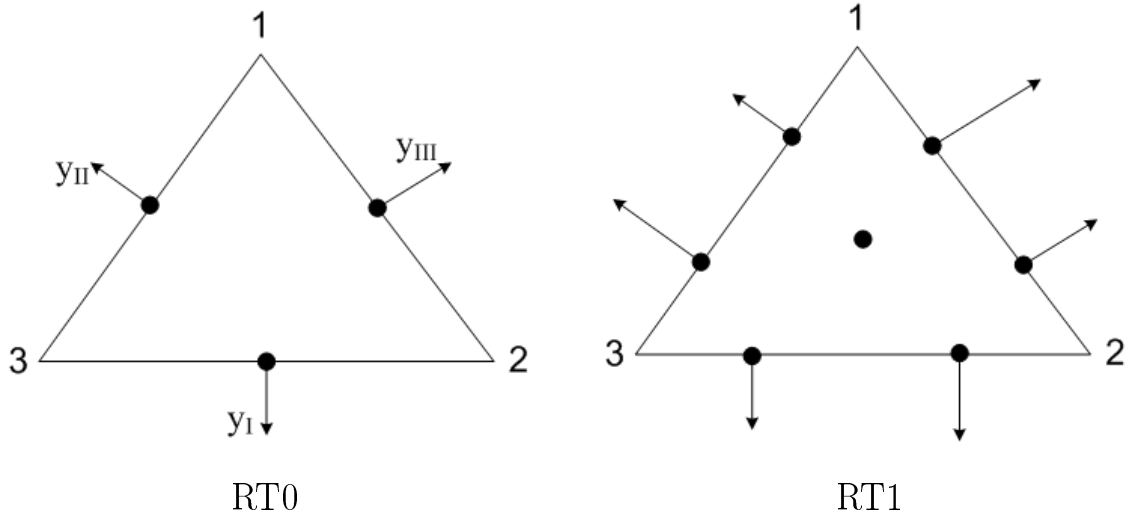


Рис. 1.13: Элементы Равьяра-Тома нулевого и первого порядков

центре масс. На каждом элементе аппроксимация RT0 выражается формулой

$$y_T(x) = y_I\psi_1(x) + y_{II}\psi_2(x) + y_{III}\psi_3(x) = \begin{pmatrix} y_I\psi_{11} + y_{II}\psi_{21} + y_{III}\psi_{31} \\ y_I\psi_{12} + y_{II}\psi_{22} + y_{III}\psi_{32} \end{pmatrix},$$

где $y_I = y_T \cdot n_1$, $y_{II} = y_T \cdot n_2$, $y_{III} = y_T \cdot n_3$, а векторные функции формы ψ_1 , ψ_2 и ψ_3 имеют вид

$$\psi_i(x) = \begin{pmatrix} \psi_{i1}(x) \\ \psi_{i2}(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C_{ai} + C_{ci}x_1 \\ C_{bi} + C_{ci}x_2 \end{pmatrix}.$$

Коэффициенты C_{ai} , C_{bi} и C_{ci} для каждой из функций формы можно найти из условий

$$\psi_1 \cdot n_1 = 1, \quad \psi_2 \cdot n_1 = 0, \quad \psi_3 \cdot n_1 = 0, \quad \text{в точке } (x_{1m1}, x_{2m1}),$$

$$\psi_1 \cdot n_2 = 0, \quad \psi_2 \cdot n_2 = 1, \quad \psi_3 \cdot n_2 = 0, \quad \text{в точке } (x_{1m2}, x_{2m2}),$$

$$\psi_1 \cdot n_3 = 0, \quad \psi_2 \cdot n_3 = 0, \quad \psi_3 \cdot n_3 = 1, \quad \text{в точке } (x_{1m3}, x_{2m3}),$$

в которых (x_{1mi}, x_{2mi}) — координаты середин сторон элемента. Дивергенция на элементе постоянна и имеет вид

$$\operatorname{div} y_T = 2(y_IC_{c1} + y_{II}C_{c2} + y_{III}C_{c3}).$$

Во всей области поле определяется формулой

$$y(x) = \sum_{i=1}^{N_e} y_i \psi_i(x), \quad (1.30)$$

где N_e — количество рёбер элементов в триангуляции $\mathcal{T}_h$. Таким образом, при использовании аппроксимации (1.30), нужно решить задачу минимизации

$$\min_{(y_1, \dots, y_{N_e})} M_{IDF}^2(u_h, \beta, y),$$

причём, необходимое условие минимума

$$\frac{\partial M_{IDF}^2(y_1, \dots, y_{N_e})}{\partial y_i} = 0, \quad \forall i = \overline{1, N_e}$$

представляет собой систему линейных алгебраических уравнений для N_e неизвестных с положительно определённой симметричной матрицей. Общая сборка системы происходит с учётом выбранного направления нормали к грани, а степени свободы относятся теперь к граням, а не к узлам. Это незначительно уменьшает размер получаемой системы линейных алгебраических уравнений по сравнению со стандартной аппроксимацией. Индикатор погрешности, основанный на функциональной мажоранте и вычисляемый по формуле (1.29) с аппроксимацией Равьяра-Тома нулевого порядка для y , обозначим за η_T^{RT} .

В монографии [21] в качестве альтернативы решению системы предложена итерационная процедура локальной минимизации, описанная ниже. Рассмотрим два элемента T_1 и T_2 , приведённые на рисунке 1.14. Нормальные компоненты вектора y на рёбрах E_{ij} обозначены за $q_{ij} = n_{ij} \cdot y$, на общем ребре E нормальная компонента $q = n \cdot y$. Так как дивергенция y постоянна на каждом элементе, имеем

$$\begin{aligned} \int_{T_1} \operatorname{div} y \, dx &= |T_1|(\operatorname{div} y)_{T_1} = q_{12}|E_{12}| + q_{11}|E_{11}| + q|E|, \\ \int_{T_2} \operatorname{div} y \, dx &= |T_2|(\operatorname{div} y)_{T_2} = q_{22}|E_{22}| + q_{21}|E_{21}| - q|E|, \end{aligned}$$

где $|T_i|$ — площадь треугольника T_i , а $|E_{ij}|$ — длина соответствующего ребра.

Найдём значение переменной q из условия

$$\min \int_{T_1 \cup T_2} (\operatorname{div} y + f)^2 \, dx.$$

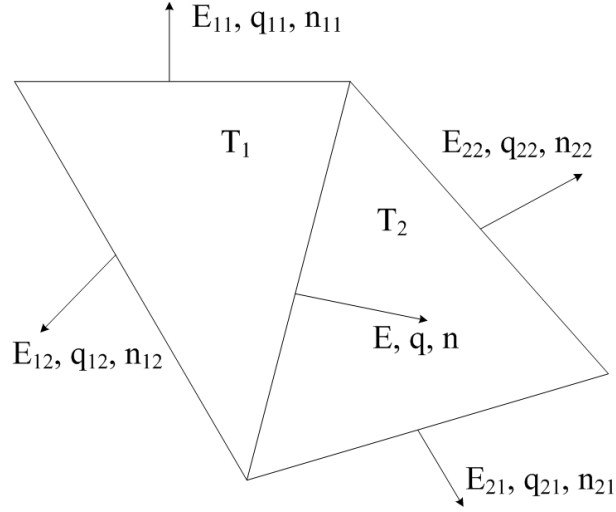


Рис. 1.14: Иллюстрация для процедуры локальной минимизации

Будем считать, что правая часть f постоянна на каждом элементе. Введём обозначения

$$\alpha_1 = \frac{|E|}{|T_1|}, \quad \gamma_1 = \frac{q_{12}|E_{12}| + q_{11}|E_{11}|}{|T_1|} + f_{T_1},$$

$$\alpha_2 = \frac{|E|}{|T_2|}, \quad \gamma_2 = \frac{q_{22}|E_{22}| + q_{21}|E_{21}|}{|T_2|} + f_{T_2}.$$

Тогда

$$\int_{T_1 \cup T_2} (\operatorname{div} y + f)^2 dx = |T_1| (\gamma_1 + q\alpha_1)^2 + |T_2| (\gamma_2 - q\alpha_2)^2,$$

и необходимое условие минимума по q есть

$$(|T_1|\alpha_1^2 + |T_2|\alpha_2^2) q + |T_1|\alpha_1\gamma_1 - |T_2|\alpha_2\gamma_2 = 0.$$

Таким образом,

$$q = \frac{|T_2|\alpha_2\gamma_2 - |T_1|\alpha_1\gamma_1}{|T_1|\alpha_1^2 + |T_2|\alpha_2^2}. \quad (1.31)$$

В случае, когда $E \subset \partial\Omega$ и треугольник T_2 отсутствует, выражение (1.31) принимает вид

$$q = -\frac{\gamma_1}{\alpha_1}. \quad (1.32)$$

Процедура локальной минимизации состоит в следующем: задав начальное значение $y = y_{(0)}$, обходим все рёбра и пересчитываем y по формуле (1.31) для внутренних рёбер или (1.32) для внешних, таким образом уменьшая вклад

слагаемого $\mathbb{C}^2 \|\operatorname{div} y + f\|^2$ в мажоранту. Обход рёбер продолжается до тех пор, пока не будет выполнено условие

$$\mathbb{C}M_2 < M_1 \quad (1.33)$$

или, например,

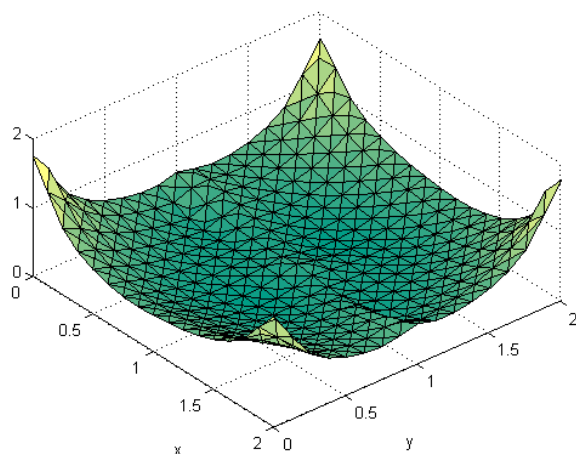
$$10\mathbb{C}M_2 < M_1, \quad (1.34)$$

где

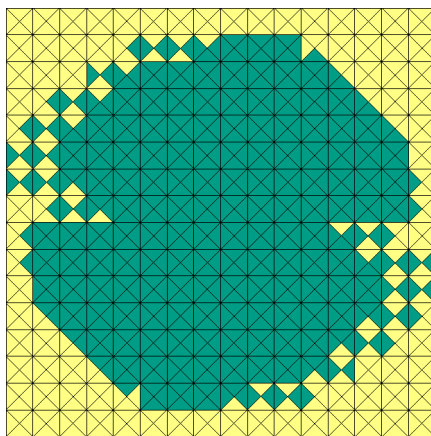
$$M_1 = |||A\nabla v - y|||_*, \quad M_2 = (\|f + \operatorname{div} y\|^2 + \|F - y \cdot n\|_{\Gamma_2}^2)^{1/2}.$$

Пример 4. (продолжение) Применим описанный выше подход к рассмотренному ранее примеру 4, в котором при адаптации сетки возникали зоны излишнего сгущения узлов. Ниже в таблице 1.6 приведены результаты. На рисунке 1.15 представлено распределение погрешности, отобранные для разбиения элементы и финальная сетка для индикатора η_T^{RT} . Из данных можно сделать вывод, что сгущения сетки в зонах границ подобластей не происходит, что совпадает с эталонной сеткой. Помимо этого, количество узлов, необходимое для достижения заданной точности, лишь незначительно превосходит число узлов для η_T^{ref} . Конечно, аппроксимация Равьяра-Тома нулевого порядка обладает худшими аппроксимационными свойствами внутри области, чем пара кусочно-линейных непрерывных аппроксимаций, но этот недостаток становится менее существенным при наличии в задаче разрыва в коэффициентах матрицы. Качество индикации погрешности внутри области можно повысить за счёт привлечения аппроксимации RT1, но в данном исследовании был сделан выбор в пользу простоты реализации и экономии вычислительных ресурсов. Была поставлена цель устранить некорректные сгущения сетки вблизи зоны разрыва коэффициентов.

а)



б)



в) 5179 уз., погр. 2.11%

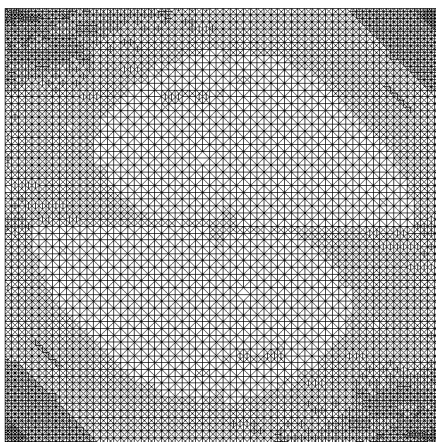


Рис. 1.15: Пример 4 (продолжение). Значения индикатора на равномерной сетке (а); элементы, отобранные для разбиения (б) и финальная сетка для η_T^{RT} (в)

Таблица 1.6: Пример 4 (продолжение). Сравнение шагов адаптации сетки

η_T^{ref}		η_T^{con}			η_T^{RT}		
N	$e\%$	N	$e\%$	I_{eff}	N	$e\%$	I_{eff}
289	10.32	289	10.32	1.22	289	10.32	1.30
383	7.46	383	7.50	1.36	401	7.43	1.40
577	6.29	537	6.64	1.28	577	6.74	1.28
867	4.86	793	5.46	1.34	897	5.07	1.35
4803	2.03	3541	2.61	1.36	5179	2.11	1.33
		5001	2.18	1.34			

Дополнительно в таблицах 1.7 и 1.8 приведены значения функциональных мажорант и индексов эффективности для последовательности равномерных сеток, где переменная y находится с помощью процедуры локальной минимизации с условиями остановки (1.33) и (1.34), соответственно. За N_e обозначено количество рёбер сетки, а за N_c — количество циклов с обходом всех рёбер. В таблице 1.9 приведены аналогичные результаты для нахождения y с помощью решения системы. В таблицах также указано время в секундах, затрачиваемое на расчёт на каждой сетке и среднее время, приходящееся на одно ребро. Из приведённых данных видно, что при условии окончания итерационного процесса (1.33), второе слагаемое вносит существенный вклад в мажоранту — на самой подробной сетке индекс эффективности всей мажоранты равен 3.96, тогда как для первого слагаемого он составляет 2.15. Также можно отметить заметное ухудшение качества оценок с измельчением сетки. Использование условия (1.34) позволяет понизить индекс эффективности, но оно приводит к большему количеству итераций, а, соответственно, к большему на порядок времени расчёта. Прямое решение системы по затраченному времени сравнимо с итерационной процедурой с условием остановки (1.33). Полученная оценка имеет индекс эффективности, который практически не меняется от сетки к сетке.

Таблица 1.7: Пример 4, где y находится с помощью локальной минимизации (условие остановки $\mathbb{C}M_2 < M_1$)

N	$e\%$	I_{eff}	$I_{eff}(M_1)$	N_e	t , сек	N_c	$t/N_e(\times 10^{-4})$, сек
289	10.32	2.69	1.42	800	0.02	1	0.19
1089	5.20	2.72	1.56	3136	0.09	2	0.30
4225	2.61	3.44	1.78	12416	0.30	2	0.24
16641	1.30	3.96	2.15	49408	3.10	3	0.63

Таблица 1.8: Пример 4, где y находится с помощью локальной минимизации (условие остановки $10\mathbb{C}M_2 < M_1$)

N	$e\%$	I_{eff}	$I_{eff}(M_1)$	N_e	t , сек	N_c	$t/N_e(\times 10^{-4})$, сек
289	10.32	1.62	1.47	800	0.25	25	3.12
1089	5.20	1.73	1.57	3136	1.29	35	4.11
4225	2.61	1.96	1.78	12416	6.55	46	5.27
16641	1.30	2.37	2.16	49408	54.46	56	11.02

Таблица 1.9: Пример 4, где y находится из решения системы

N	$e\%$	I_{eff}	$I_{eff}(M_1)$	N_e	t , сек	$t/N_e (\times 10^{-4})$, сек
289	10.32	1.31	1.31	800	0.06	0.77
1089	5.20	1.30	1.30	3136	0.12	0.40
4225	2.61	1.29	1.29	12416	0.47	0.38
16641	1.30	1.30	1.30	49408	3.28	0.66

Пример 5. Рассмотрим ещё один пример с разрывом в коэффициенте матрицы A . На этот раз, область Ω , представленная на рисунке (1.16), содержит квадратное отверстие. Коэффициенты в матрице A

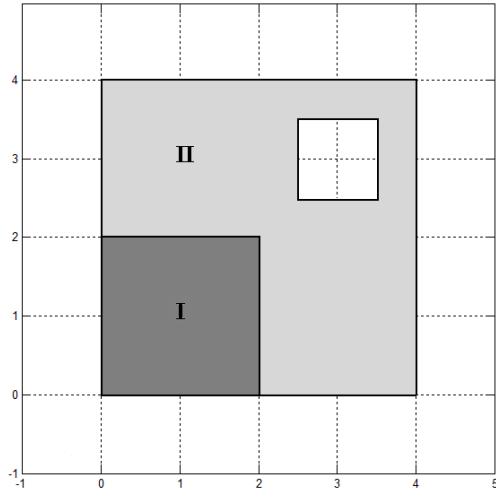
$$a_{11} = \begin{cases} 5 & \text{в подобласти I,} \\ 1 & \text{в подобласти II,} \end{cases} \quad a_{22} = \begin{cases} 5 & \text{в подобласти I,} \\ 1 & \text{в подобласти II,} \end{cases}$$

$a_{12} = a_{21} = 0$, правая часть постоянна и равна 1 во всей области Ω , $\Gamma_1 = \partial\Omega$, $u_0 = 0$. В таблице 1.10 представлены результаты для нескольких шагов адаптации сетки.

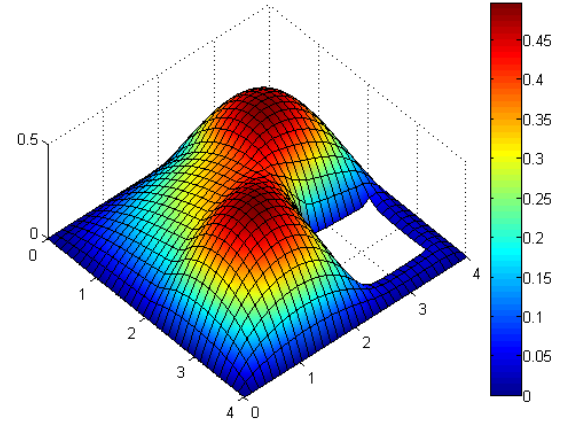
Таблица 1.10: Пример 5. Сравнение шагов адаптации сетки

η_T^{ref}		η_T^{con}			η_T^{RT}		
N	$e\%$	N	$e\%$	I_{eff}	N	$e\%$	I_{eff}
280	17.48	280	17.48	1.40	280	17.48	1.40
654	9.45	706	9.90	1.52	721	9.66	1.38
2847	4.27	3496	4.45	1.42	3562	4.08	1.38
5156	3.16	6630	3.27	1.40	6486	3.01	1.35
9120	2.33	12458	2.40	1.39	11679	2.22	1.36
12142	2.01	17042	2.05	1.32	15549	1.90	1.36
16227	1.73	23610	1.75	1.37	20723	1.66	1.35

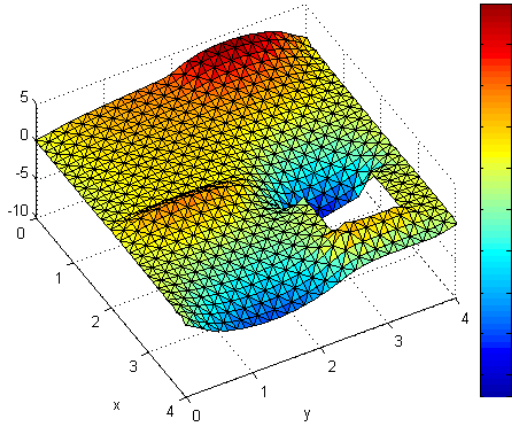
На рисунке 1.17 приводятся узлы расчётных сеток на последнем шаге работы адаптивного алгоритма и индикаторы погрешности на равномерной сетке. Из полученных результатов можно сделать вывод, что при использовании индикатора η_T^{con} из-за наличия зон сгущения вдоль линии разрыва коэффициентов для достижения необходимой точности потребовалось примерно в полтора раза больше узлов расчётной сетки, чем для эталонного индикатора η_T^{ref} , что приводит к увеличению времени расчёта. Сетка, полученная с помощью индикатора η_T^{RT} по своей структуре близка к эталонной. Заметим также, что картина, получающаяся во всех случаях, отражает симметрию относительно оси $x_1 = x_2$, которой обладает исходная задача.



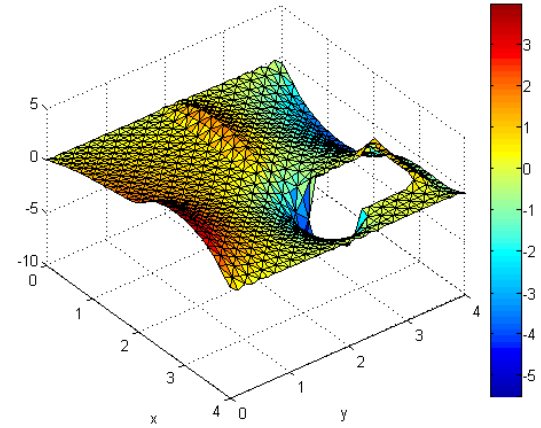
а)



б)



в)

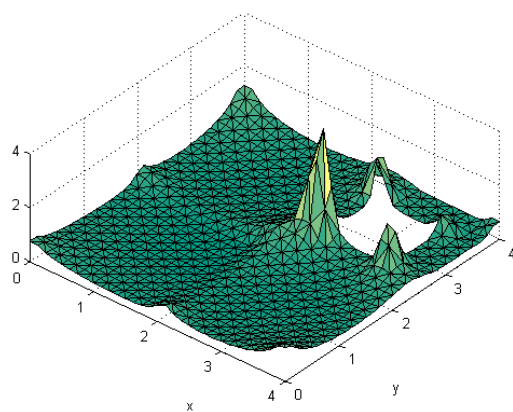


г)

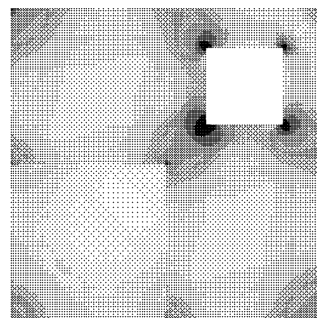
Рис. 1.16: Область для примера 5 (а); приближённое решение u_h на равномерной сетке (б); градиент приближённого решения $(A\nabla u_h)_1$ (в) и $(A\nabla u_h)_2$ (г)

Пример 6. В завершение главы рассмотрим пример работы адаптивного алгоритма для задачи со смешанными краевыми условиями, предложенной в работе Rüter и Stenberg [87]. Решаемая задача имеет вид

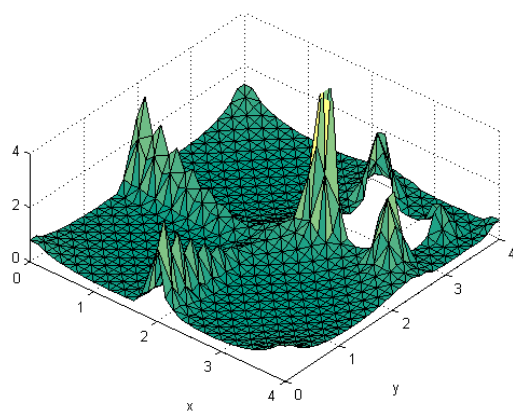
$$\begin{cases} -\Delta u = 0.5 & \text{в } \Omega, \\ u = 0 & \text{на } \Gamma_1, \\ n \cdot (\nabla u) = F & \text{на } \Gamma_2. \end{cases}$$



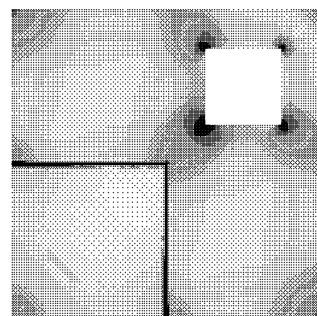
$$\eta_T^{ref}$$



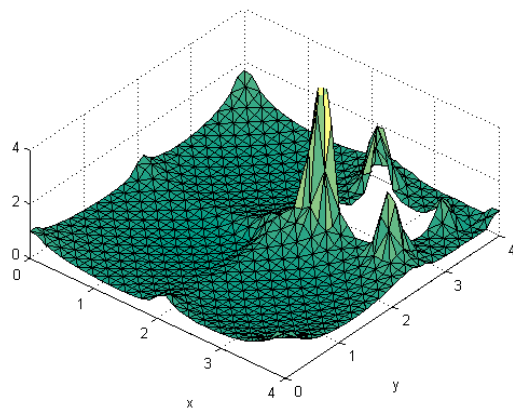
16227 уз., погр. 1.73%



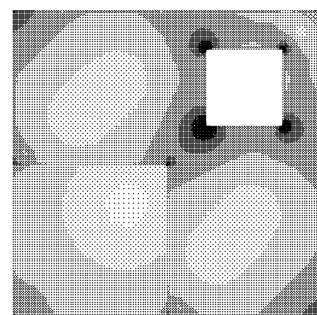
$$\eta_T^{con}$$



23610 уз., погр. 1.75%



$$\eta_T^{RT}$$



20723 уз., погр. 1.66%

Рис. 1.17: Пример 5. Значения различных индикаторов на равномерной сетке (слева) и соответствующие конечноэлементные сетки (узлы), полученные в результате адаптации (справа)

На частях границы области, обозначенных штриховкой задано нулевое условие типа Дирихле, на остальных частях — условие типа Неймана, соответствующие значения функции F указаны на рисунке 1.18. Начальная конечно-элементная сетка совпадает с использованной авторами статьи. На каждом шаге адаптации производится вычисление мажоранты погрешности, локальная индикация ошибки и измельчение сетки — результаты приведены в таблице 1.11. Эта процедура продолжается до достижения желаемого количества узлов сетки для сравнения с [87].

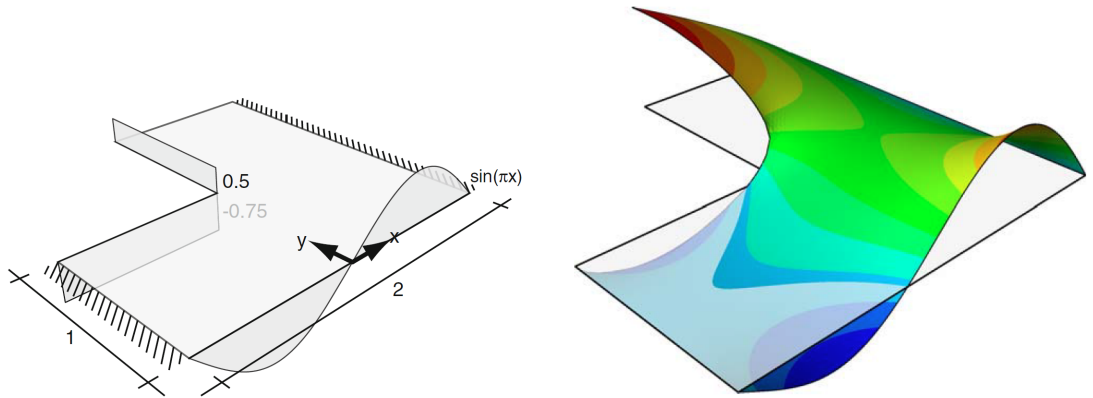


Рис. 1.18: Пример 6. Постановка задачи и её приближённое решение [87]

Таблица 1.11: Пример 6. Сравнение шагов адаптации сетки

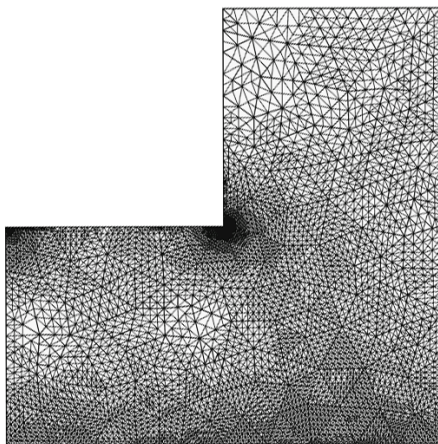
η_T^{ref}		η_T^{RT}		
N	$e\%$	N	$e\%$	I_{eff}
150	20.69	150	20.69	3.14
430	10.01	468	9.89	2.88
1623	4.93	1774	4.94	2.70
4029	3.09	4372	3.14	2.63
7179	2.30	8673	2.23	2.54
11408	1.81	13824	1.77	2.63
15461	1.55	18193	1.54	2.63

Финальные расчетные сетки приведены на рисунке 1.19. Видно, что по

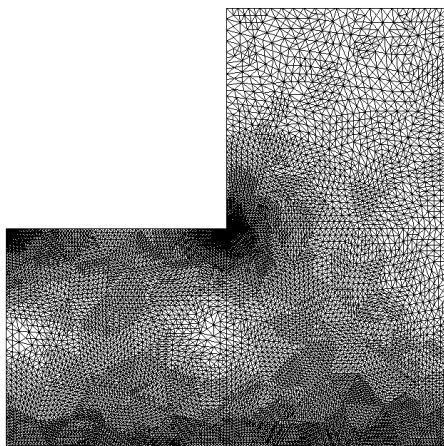
своей структуре они близки, поскольку у них совпадают зоны сгущения узлов. В работе [87] авторы решают задачу в смешанной постановке с использованием элементов RT0. Затем приближённое решение и его градиент используются для вычисления апостериорного индикатора погрешности η , строящегося по принципу явного метода невязок. Модифицированный индикатор $\bar{\eta}$ вычисляется с помощью сглаженного градиента приближённого решения. На рисунке 1.20 представлены зависимости глобальной оценки погрешности для индикаторов η и $\bar{\eta}$ от количества степеней свободы для адаптивного и равномерного разбиения сетки из [87]. Также, на рисунке отражены аналогичные результаты для индикатора η_T^{RT} и эталонного индикатора η_T^{ref} . Углы наклона кривых для оценок, вычисленных различными способами, совпадают.

Приведённые в данной главе примеры показывают, что в случае наличия разрыва первого рода в коэффициентах уравнения, использование аппроксимации Равьяра-Тома для свободной переменной в функциональной мажоранте успешно решает проблему искажения картины распределения узлов при адаптации расчётной сетки. В общем, функциональный подход работает надёжнее и, как правило, обеспечивает лучший результат по сравнению с классическими подходами, что согласуется с выводами других подобных исследований.

(a) [87], ~ 13000 уз.



(б) η_T^{ref} , 15461 уз., погр. 1.55%



(в) η_T^{RT} , 13824 уз., погр. 1.77%

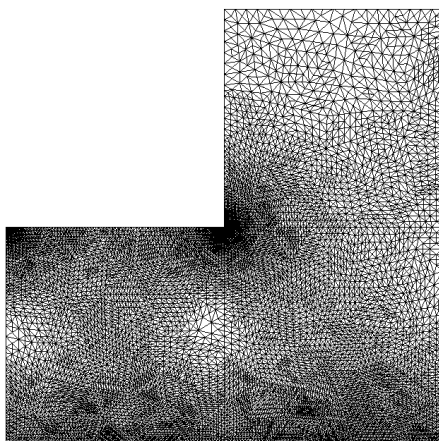


Рис. 1.19: Пример 6. Конечноэлементные сетки, полученные в результате адаптации с различными индикаторами

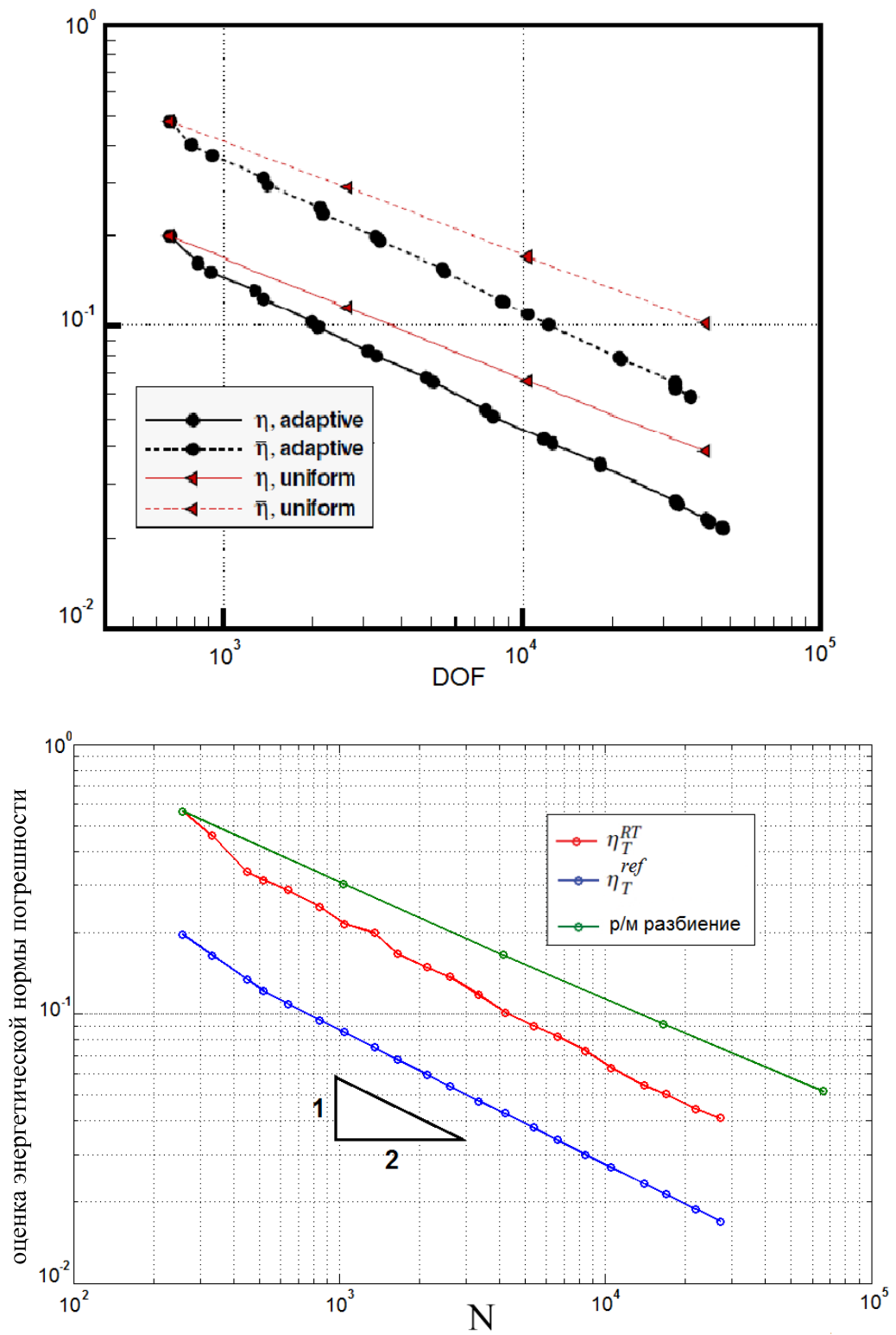


Рис. 1.20: Пример 6. Асимптотическое поведение индикаторов [87] (сверху) и функциональных мажорант (снизу) с ростом числа узлов расчётной сетки

Обоснование функционального подхода к контролю точности для стационарной задачи реакции-диффузии

В главе рассмотрены функциональные апостериорные оценки для стационарной задачи реакции-диффузии. Обсуждаются три вида мажорант, два из которых получены относительно недавно (см. [21]). Доказаны утверждения о вычислительных свойствах для наиболее универсальной из них. Изложены численные результаты работы соответствующих адаптивных алгоритмов и их сравнительный анализ, развивающий исследования первой главы.

2.1. Три мажоранты погрешности для различных диапазонов значений параметра реакции

Рассматриваемая задача с условием Дирихле на границе имеет вид

$$\begin{cases} -\operatorname{div}(A\nabla u) + \rho^2 u = f & \text{в } \Omega, \\ u = u_0 & \text{на } \partial\Omega, \end{cases} \quad (2.1)$$

где $\rho(x) > 0$ — коэффициент реакции, матрица A симметричная и удовлетворяет условию (1.20). Обобщенное решение $u \in V = u_0 + V_0$ определяется соотношением

$$\int_{\Omega} (A\nabla u \cdot \nabla w + \rho^2 u w) dx = \int_{\Omega} f w dx, \quad \forall w \in V_0. \quad (2.2)$$

Вариационная постановка задачи (2.2) и двойственной к ней выглядят следующим образом:

Задача $\mathcal{P}$: найти элемент $u \in V$ такой, что

$$J(u) = \inf_{v \in V} J(v), \quad (2.3)$$

где

$$J(v) = \int_{\Omega} \left(\frac{1}{2} A \nabla v \cdot \nabla v + \frac{1}{2} \rho^2 v^2 - f v \right) dx.$$

Задача $\mathcal{P}^*$: найти элемент $p \in H(\Omega, \operatorname{div})$ такой, что

$$I^*(p) = \sup_{q \in H(\Omega, \operatorname{div})} I^*(q), \quad (2.4)$$

где

$$I^*(q) = \int_{\Omega} \left(-\frac{1}{2} A^{-1} q \cdot q + q \cdot \nabla u_0 - \frac{1}{2\rho^2} (\operatorname{div} q + f)^2 + \operatorname{div} q u_0 \right) dx.$$

Известно, что решения задач $\mathcal{P}$ и $\mathcal{P}^*$ существуют и единственны (см. [74]), причём $p = A \nabla u$ и $J(u) = I^*(p)$. Действительно,

$$\begin{aligned} I^*(A \nabla u) &= \int_{\Omega} \left(-\frac{1}{2} A \nabla u \cdot \nabla u + A \nabla u \cdot \nabla u_0 - \frac{1}{2\rho^2} (\operatorname{div}(A \nabla u) + f)^2 + \right. \\ &\quad \left. + \operatorname{div}(A \nabla u) u_0 \right) dx = \int_{\Omega} \left(-\frac{1}{2} A \nabla u \cdot \nabla u - \frac{1}{2} \rho^2 u^2 \right) dx. \end{aligned}$$

С другой стороны,

$$\begin{aligned} J(u) &= \int_{\Omega} \left(\frac{1}{2} A \nabla u \cdot \nabla u + \frac{1}{2} \rho^2 u^2 - A \nabla u \cdot \nabla u - \rho^2 u^2 \right) dx = \\ &= \int_{\Omega} \left(-\frac{1}{2} A \nabla u \cdot \nabla u - \frac{1}{2} \rho^2 u^2 \right) dx. \end{aligned}$$

Энергетическая норма погрешности

$$||[u - v]|| := (|||u - v|||^2 + \|\rho(u - v)\|^2)^{1/2}.$$

Наиболее универсальная мажоранта для задачи (2.1) была получена в работе Repin и Sauter [88] (см. также [21]) и обсуждается ниже. Как показано в настоящей главе, удаётся по аналогии с задачей диффузии доказать утверждения, которые служат теоретическим обоснованием соответствующих вычислительных свойств оценки.

Пусть $v \in V$ — приближённое решение задачи, тогда из (2.2) для любого $y \in Y = H(\Omega, \text{div})$ и $\forall w \in V_0$ можно записать

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} (A \nabla(u - v) \cdot \nabla w + \rho^2(u - v)w) dx &= \int_{\Omega} (y - A \nabla v) \cdot \nabla w dx + \\ &+ \int_{\Omega} (f - \rho^2 v + \text{div } y)w dx. \end{aligned} \quad (2.5)$$

Первое слагаемое в правой части (2.5) уже оценивалось для задачи диффузии

$$\int_{\Omega} (y - A \nabla v) \cdot \nabla w dx \leq \|A \nabla v - y\|_* \|w\|. \quad (2.6)$$

Второе слагаемое можно оценить двумя способами. Во-первых,

$$\int_{\Omega} (f - \rho^2 v + \text{div } y)w dx \leq \left\| \frac{1}{\rho} (f - \rho^2 v + \text{div } y) \right\| \|\rho w\|, \quad (2.7)$$

а во-вторых,

$$\int_{\Omega} (f - \rho^2 v + \text{div } y)w dx \leq \mathbb{C} \|f - \rho^2 v + \text{div } y\| \|w\|. \quad (2.8)$$

Если положить в (2.5) $w = u - v$ и оценить правую часть с помощью (2.6) и (2.7), получается первая оценка

$$|[u - v]|^2 \leq M_{RD1}^2(v, y) := \|A \nabla v - y\|_*^2 + \left\| \frac{1}{\rho} r_{\Omega}(v, y) \right\|^2, \quad (2.9)$$

где $r_{\Omega}(v, y) = f - \rho^2 v + \text{div } y$. Из (2.6) и (2.8) следует вторая оценка

$$|[u - v]| \leq M_{RD0}(v, y) := \|A \nabla v - y\|_* + \mathbb{C} \|r_{\Omega}(v, y)\|. \quad (2.10)$$

Мажоранты M_{RD0} и M_{RD1} являются частными случаями мажоранты с параметром, которая рассматривается далее.

Если в M_{RD1} положить $y = p$, то получается равенство

$$M_{RD1}(v, A \nabla u) = |[u - v]|,$$

то есть оценка является точной. Оценка (2.10), напротив, имеет «зазор» между левой и правой частью. С другой стороны, если коэффициент реакции мал,

то в функционале M_{RD1} при втором слагаемом стоит большой множитель, а значит, оценка будет чувствительна к величине невязки $r_\Omega(v, y)$. Мажоранта M_{RD0} , в свою очередь, к величине ρ не чувствительна. Таким образом, мажоранты имеют по параметру разные диапазоны эффективного применения. В связи с этим, в работе Repin и Sauter [88] получена третья оценка, сочетающая в себе преимущества первых двух. Рассмотрим её вывод.

Второе слагаемое в правой части (2.5) можно записать в виде суммы

$$\int_{\Omega} r_\Omega(v, y) w \, dx = \int_{\Omega} \frac{\alpha}{\rho} r_\Omega(v, y) \rho w \, dx + \int_{\Omega} (1 - \alpha) r_\Omega(v, y) w \, dx,$$

где функция $\alpha(x) \in L^\infty_{[0,1]} := \{\alpha \in L^\infty(\Omega) \mid 0 \leq \alpha(x) \leq 1\}$ произвольна. Тогда

$$\left| \int_{\Omega} r_\Omega(v, y) w \, dx \right| \leq \left\| \frac{\alpha}{\rho} r_\Omega(v, y) \right\| \|\rho w\| + \mathbb{C} \|(1 - \alpha) r_\Omega(v, y)\| \|w\|.$$

Используя (2.6) и применяя неравенство Коши-Буняковского-Шварца, приходим к соотношению

$$\begin{aligned} |[u - v]|^2 &\leq \|A\nabla v - y\|_* \|u - v\| + \mathbb{C} \|(1 - \alpha) r_\Omega(v, y)\| \|u - v\| + \\ &+ \left\| \frac{\alpha}{\rho} r_\Omega(v, y) \right\| \|\rho(u - v)\| \leq \\ &\leq \left((\|A\nabla v - y\|_* + \mathbb{C} \|(1 - \alpha) r_\Omega(v, y)\|)^2 + \left\| \frac{\alpha}{\rho} r_\Omega(v, y) \right\|^2 \right)^{1/2} \|u - v\|. \end{aligned}$$

Таким образом, третья оценка имеет вид

$$|[u - v]|^2 \leq M_{RD\alpha}^2(v, y) := (\|A\nabla v - y\|_* + \mathbb{C} \|(1 - \alpha) r_\Omega(v, y)\|)^2 + \left\| \frac{\alpha}{\rho} r_\Omega(v, y) \right\|^2.$$

Мажоранты $M_{RD0}(v, y)$ и $M_{RD1}(v, y)$ являются частными случаями $M_{RD\alpha}(v, y)$ при $\alpha = 0$ и $\alpha = 1$, соответственно. Запишем комбинированную мажоранту $M_{RD\alpha}$ в более удобной для реализации вычислений форме, используя неравенство Коши с произвольным параметром $\beta > 0$

$$\begin{aligned} |[u - v]|^2 &\leq (1 + \beta) \|A\nabla v - y\|_*^2 + \\ &+ \left(1 + \frac{1}{\beta}\right) \mathbb{C}^2 \|(1 - \alpha) r_\Omega(v, y)\|^2 + \left\| \frac{\alpha}{\rho} r_\Omega(v, y) \right\|^2. \end{aligned} \tag{2.11}$$

Минимум правой части (2.11) по α можно определить аналитически как решение задачи:

$$\text{Найти элемент } \tilde{\alpha} \in L_{[0,1]}^\infty(\Omega) \text{ такой что } g(\tilde{\alpha}) = \inf_{\alpha \in L_{[0,1]}^\infty(\Omega)} g(\alpha),$$

где

$$g(\alpha) := \int_{\Omega} (\alpha(x)^2 S(x) + (1 - \alpha(x))^2 T(x)) \, dx, \quad S(x), T(x) \geq 0, \quad S(x) + T(x) \neq 0.$$

Таким решением является функция

$$\tilde{\alpha}(x) = \frac{T(x)}{S(x) + T(x)}, \text{ для которой } g(\tilde{\alpha}) = \int_{\Omega} \frac{S(x)T(x)}{S(x) + T(x)} \, dx.$$

В нашем случае

$$S = \frac{1}{\rho^2} r_{\Omega}^2(v, y), \quad T = \mathbb{C}^2 \left(1 + \frac{1}{\beta}\right) r_{\Omega}^2(v, y),$$

и оценка (2.11) принимает вид

$$\begin{aligned} |[u - v]|^2 &\leq M_{RD}^2(v, y, \beta) := \\ &:= (1 + \beta) \|A \nabla v - y\|_*^2 + \int_{\Omega} \frac{\mathbb{C}^2(1 + \beta)}{\mathbb{C}^2 \rho^2(1 + \beta) + \beta} r_{\Omega}^2(v, y) \, dx. \end{aligned} \quad (2.12)$$

В данном случае требование $S(x) + T(x) \neq 0$ не является существенным ограничением, так как при численной реализации получить невязку $r_{\Omega}^2(v, y)$ в точности равную нулю практически невозможно. Заметим также, что

$$|[u - v]|^2 \leq \inf_{\substack{y \in Y \\ \beta > 0}} M_{RD}^2(v, y, \beta) \leq \inf_{\beta > 0} M_{RD}^2(v, A \nabla u, \beta) = |[u - v]|^2,$$

то есть у оценки (2.12) нет «зазора». Помимо этого, мажоранта $M_{RD}^2(v, y, \beta)$ не чувствительна к уменьшению значения параметра реакции ρ , а при $\rho = 0$ оценка (2.12) превращается в оценку (1.26) для уравнения диффузии.

2.2. Вычислительные свойства комбинированной оценки

Докажем ряд утверждений относительно вычислительных свойств комбинированной мажоранты $M_{RD}^2(v, y, \beta)$, предполагая что для коэффициента реакции справедлива двусторонняя оценка

$$0 < \rho_1 \leq \rho(x) \leq \rho_2, \quad \forall x \in \Omega.$$

Полученные в данном разделе результаты опубликованы в работе автора [89]. Численные результаты см. Чурилова и Фролов [90], Чурилова [91].

Так как для любого $v \in V$ и $\beta > 0$ мажоранта $M_{RD}^2(v, y, \beta)$ — выпуклый, непрерывный и коэрцитивный функционал, следовательно существует элемент y_β , зависящий от приближенного решения v и параметра β и сообщающий минимум функционалу (см. Ладыженская [73]), такой что

$$M_{RD}^2(v, y_\beta, \beta) = \inf_{y \in Y} M_{RD}^2(v, y, \beta).$$

Теорема 2.1. *Существует элемент $\bar{w} \in V_0$ такой, что*

$$y_\beta = A\nabla(\bar{w} + u_0).$$

Доказательство. Введем обозначение

$$\tilde{\mathbb{C}}(\rho, \beta) = \frac{\mathbb{C}^2(1 + \beta)}{\mathbb{C}^2\rho^2(1 + \beta) + \beta} = \frac{1}{\rho^2} \left(1 - \frac{\beta}{\mathbb{C}^2\rho^2(1 + \beta) + \beta} \right).$$

Рассмотрим произвольный элемент $y_0 \in Q_0$. Тогда для мажоранты справедливо неравенство

$$\begin{aligned} M_{RD}^2(v, y_\beta, \beta) &\leq M_{RD}^2(v, y_\beta + y_0, \beta) = \\ &= (1 + \beta) |||A\nabla v - (y_\beta + y_0)|||_*^2 + \int_{\Omega} \tilde{\mathbb{C}}(\rho, \beta) (f - \rho^2 v + \operatorname{div} y_\beta)^2 dx, \end{aligned}$$

следовательно

$$|||A\nabla v - y_\beta|||_*^2 \leq |||(A\nabla v - y_\beta) - y_0|||_*^2.$$

Раскрыв выражения для норм и приведя подобные слагаемые, получаем

$$\frac{1}{2}|||y_0|||_*^2 - \int_{\Omega} A^{-1}(A\nabla v - y_{\beta}) \cdot y_0 \, dx \geq 0, \quad \forall y_0 \in Q_0.$$

Таким образом,

$$\int_{\Omega} A^{-1}(y_{\beta} - A\nabla v) \cdot y_0 \, dx = 0, \quad \forall y_0 \in Q_0. \quad (2.13)$$

Разложим элемент $A^{-1}(y_{\beta} - A\nabla v) \in L^2(\Omega, \mathbb{R}^2)$ по Гельмгольцу

$$A^{-1}y_{\beta} - \nabla v = \nabla w_0 + \tau_0, \quad \text{где } w_0 \in V_0, \quad \tau_0 \in Q_0.$$

Положив $y_0 = \tau_0$ в (2.13), получим

$$\int_{\Omega} (\nabla w_0 + \tau_0) \cdot \tau_0 \, dx = \|\tau_0\|^2 = 0,$$

следовательно $\tau_0 = 0$ почти всюду в Ω , таким образом $y_{\beta} = A\nabla(w_0 + v)$. Так как $v - u_0$ принадлежит пространству V_0 , то вводя обозначение $\bar{w} = w_0 + v - u_0$, получаем требуемое. $\square$

Теорема 2.2. *Справедливы оценки*

$$|||y_{\beta} - p|||_* \leq C\beta, \quad \|\operatorname{div}(y_{\beta} - p)\| \leq C\beta,$$

где C — некоторая постоянная, не зависящая от β .

Доказательство. Элемент y_{β} удовлетворяет уравнению Эйлера-Лагранжа

$$(1 + \beta) \int_{\Omega} (A^{-1}y_{\beta} - \nabla v) \cdot z \, dx + \int_{\Omega} \tilde{\mathbb{C}}(\rho, \beta)(\operatorname{div} y_{\beta} + f - \rho^2 v) \operatorname{div} z \, dx = 0, \quad (2.14)$$

для произвольного $z \in H(\Omega, \operatorname{div})$. Несложно показать, что для любого элемента $v \in V$

$$\begin{aligned} J(v) - J(u) &= \int_{\Omega} \left(\frac{1}{2} A \nabla v \cdot \nabla v + \frac{1}{2} \rho^2 v^2 - f v \right) dx - \\ &\quad - \int_{\Omega} \left(\frac{1}{2} A \nabla u \cdot \nabla u + \frac{1}{2} \rho^2 u^2 - f u \right) dx = \frac{1}{2} |u - v|^2. \end{aligned}$$

Распишем разность, учитывая что $(v - u_0) \in V_0$

$$\begin{aligned} J(v) - J(u) &= J(v) - I^*(p) = J(v) - \sup_{q \in Y} I^*(q) = \\ &= \inf_{q \in Y} (J(v) - I^*(q)), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} J(v) - I^*(q) &= \frac{1}{2} \int_{\Omega} \left(A(\nabla v - A^{-1}q) \cdot (\nabla v - A^{-1}q) + 2\nabla v \cdot q \right) dx + \\ &+ \frac{1}{2} \int_{\Omega} \left(\frac{1}{\rho^2} (\operatorname{div} q + f)^2 + \rho^2 v^2 - 2v(\operatorname{div} q + f) \right) dx + \\ &+ \int_{\Omega} (v \cdot \operatorname{div} q - q \cdot \nabla u_0 - \operatorname{div} q \cdot u_0) dx = \\ &= \frac{1}{2} \|A\nabla v - q\|_*^2 + \frac{1}{2} \int_{\Omega} \frac{1}{\rho^2} (\operatorname{div} q + f - \rho^2 v)^2 dx + \\ &+ \int_{\Omega} (\operatorname{div} q(v - u_0) + q \cdot \nabla(v - u_0)) dx = \\ &= \frac{1}{2} \left(\|A\nabla v - q\|_*^2 + \left\| \frac{1}{\rho} (\operatorname{div} q + f - \rho^2 v) \right\|^2 \right). \end{aligned}$$

Таким образом,

$$[u - v]^2 = \inf_{q \in Y} \left(\|A\nabla v - q\|_*^2 + \left\| \frac{1}{\rho} (\operatorname{div} q + f - \rho^2 v) \right\|^2 \right),$$

то есть $q = p$ минимизирует функционал

$$F(q) = \|A\nabla v - q\|_*^2 + \left\| \frac{1}{\rho} (\operatorname{div} q + f - \rho^2 v) \right\|^2.$$

Запишем уравнение Эйлера-Лагранжа для функционала F

$$\int_{\Omega} (A^{-1}p - \nabla v) \cdot q \, dx + \int_{\Omega} (\operatorname{div} p + f - \rho^2 v) \frac{1}{\rho^2} \operatorname{div} q \, dx = 0, \quad \forall q \in Y. \quad (2.15)$$

Положим $q = y_{\beta} - p$ и $z = y_{\beta} - p$ и вычтем из (2.14) выражение (2.15), умноженное на $(1 + \beta)$. В результате получим равенство

$$(1 + \beta) \|y_{\beta} - p\|_*^2 + \left\| \frac{1}{\rho} \operatorname{div}(y_{\beta} - p) \right\|^2 =$$

$$= \int_{\Omega} \left(\frac{1}{\rho^2} - \tilde{\mathbb{C}}(\rho, \beta) \right) \left(\operatorname{div}(y_{\beta} - p) \operatorname{div}(y_{\beta} - p) + (f - \rho^2 v + \operatorname{div} p) \operatorname{div}(y_{\beta} - p) \right) dx.$$

Оценив последнее слагаемое с помощью неравенства Гёльдера

$$\begin{aligned} (1 + \beta) |||y_{\beta} - p|||_*^2 + \left\| \frac{1}{\rho} \operatorname{div}(y_{\beta} - p) \right\|^2 &\leq \\ &\leq \left(1 - \rho_1^2 \tilde{\mathbb{C}}(\rho_1, \beta) \right) \left(\left\| \frac{1}{\rho} \operatorname{div}(y_{\beta} - p) \right\|^2 + \|\rho(u - v)\| \left\| \frac{1}{\rho} \operatorname{div}(y_{\beta} - p) \right\| \right), \end{aligned} \quad (2.16)$$

получаем

$$\left\| \frac{1}{\rho} \operatorname{div}(y_{\beta} - p) \right\| \leq \left(\frac{1}{\rho_1^2 \tilde{\mathbb{C}}(\rho_1, \beta)} - 1 \right) \|\rho(u - v)\|,$$

то есть

$$\left\| \frac{1}{\rho} \operatorname{div}(y_{\beta} - p) \right\| \leq \frac{\beta}{\rho_1^2 \mathbb{C}^2 (1 + \beta)} \|\rho(u - v)\| \leq \frac{\beta}{\rho_1^2 \mathbb{C}^2} \|\rho(u - v)\|.$$

С помощью последнего неравенства и (2.16) приходим к оценке

$$\begin{aligned} |||y_{\beta} - p|||_*^2 &\leq \frac{1 - \rho_1^2 \tilde{\mathbb{C}}(\rho_1, \beta)}{1 + \beta} \|\rho(u - v)\| \left\| \frac{1}{\rho} \operatorname{div}(y_{\beta} - p) \right\| \leq \\ &\leq \frac{\beta^2}{\rho_1^4 \mathbb{C}^4} \|\rho(u - v)\|^2, \end{aligned}$$

таким образом,

$$|||y_{\beta} - p|||_* \leq \frac{\beta}{\rho_1^2 \mathbb{C}^2} \|\rho(u - v)\|.$$

Положив $C = \|\rho(u - v)\|/(\rho_1^2 \mathbb{C}^2)$, получаем требуемое. $\square$

Рассмотрим индикатор погрешности, основанный на мажоранте (2.12), обозначив за $\varepsilon(x)$ подынтегральное выражение энергетической нормы ошибки

$$\varepsilon(x) = A \nabla(u(x) - v(x)) \cdot \nabla(u(x) - v(x)) + \rho^2(u(x) - v(x))^2.$$

Мажоранту можно разбить на два слагаемых

$$M_{RD}^2(v, y_{\beta}, \beta) = m_{RD_i}^2 + m_{RD_r}^2,$$

где

$$m_{RD_i}^2 = |||A \nabla v - y_{\beta}|||_*^2 + \int_{\Omega} \frac{1}{\rho^2} r_{\Omega}^2(v, y_{\beta}) dx,$$

$$m_{RD}^2 = \beta \left(|||A\nabla v - y_\beta|||_*^2 - \int_{\Omega} \frac{1}{\rho^2(\mathbb{C}^2 \rho^2(1 + \beta) + \beta)} r_{\Omega}^2(v, y_\beta) dx \right).$$

Из Теоремы 2.2 следует, что

$$m_{RD}^2 \xrightarrow{\beta \rightarrow 0} |[u - v]|^2, \quad m_{RD}^2 \xrightarrow{\beta \rightarrow 0} 0,$$

поэтому в качестве индикатора погрешности можно использовать первое слагаемое. Обозначим за μ_β его подынтегральное выражение

$$\mu_\beta(x) = A^{-1}(A\nabla v(x) - y_\beta(x)) \cdot (A\nabla v(x) - y_\beta(x)) + \frac{1}{\rho^2}(\operatorname{div} y_\beta(x) + f(x) - \rho^2(x)v(x))^2.$$

Для заданных μ_β и ε и любого положительного δ определим множество Ω_δ по формуле (1.18).

Теорема 2.3. *Имеет место сходимость*

$$\operatorname{meas}(\Omega_\delta) \xrightarrow{\beta \rightarrow 0} 0,$$

где $\operatorname{meas}(\Omega_\delta)$ — мера Лебега множества Ω_δ .

Доказательство. Оценим модуль разности

$$\begin{aligned} \mu_\beta(x) - \varepsilon(x) &= A^{-1}(A\nabla v - y_\beta) \cdot (A\nabla v - y_\beta) + \frac{1}{\rho^2}(\operatorname{div} y_\beta + f - \rho^2 v)^2 - \\ &- A\nabla(u - v) \cdot \nabla(u - v) - \rho^2(u - v)^2 = A^{-1}y_\beta \cdot y_\beta - 2\nabla v \cdot y_\beta + A\nabla v \cdot \nabla v + \\ &+ \frac{1}{\rho^2}(\operatorname{div} y_\beta + f - \rho^2 v)^2 - A\nabla u \cdot \nabla u + 2A\nabla u \cdot \nabla v - A\nabla v \cdot \nabla v - \rho^2(u - v)^2 = \\ &= A^{-1}y_\beta \cdot y_\beta - A^{-1}p \cdot p + 2(p - y_\beta) \cdot \nabla v + \frac{1}{\rho^2}(\operatorname{div}(y_\beta - p) + \rho^2(u - v))^2 - \\ &- \rho^2(u - v)^2 = A^{-1}(y_\beta - p) \cdot (y_\beta - p) + 2A^{-1}p \cdot (y_\beta - p) + 2(p - y_\beta) \cdot \nabla v + \\ &+ \frac{1}{\rho^2}(\operatorname{div}(y_\beta - p))^2 + 2\operatorname{div}(y_\beta - p)(u - v) = A^{-1}(y_\beta - p) \cdot (y_\beta - p) + \\ &+ 2(y_\beta - p) \cdot \nabla(u - v) + 2\operatorname{div}(y_\beta - p)(u - v) + \frac{1}{\rho^2}(\operatorname{div}(y_\beta - p))^2, \end{aligned}$$

следовательно

$$\begin{aligned} |\mu_\beta(x) - \varepsilon(x)| &\leq |A^{-1}(y_\beta - p) \cdot (y_\beta - p)| + 2|(y_\beta - p) \cdot \nabla(u - v)| + \\ &+ 2|\operatorname{div}(y_\beta - p)| |u - v| + \frac{1}{\rho^2}(\operatorname{div}(y_\beta - p))^2. \end{aligned}$$

по Теореме 2.2 получаем

$$\int_{\Omega} |\mu_{\beta}(x) - \varepsilon(x)| dx \xrightarrow{\beta \rightarrow 0} 0.$$

Таким образом,

$$\int_{\Omega} |\mu_{\beta}(x) - \varepsilon(x)| dx \geq \int_{\Omega_{\delta}} |\mu_{\beta}(x) - \varepsilon(x)| dx \geq \delta \operatorname{meas}(\Omega_{\delta}),$$

следовательно $\operatorname{meas}(\Omega_{\delta}) \xrightarrow{\beta \rightarrow 0} 0$. $\square$

При реализации вычисления апостериорной оценки (2.12) необходима дискретизация соответствующей задачи, которая строится на основе выбора конечномерных подпространств гильбертова пространства $H(\Omega, \operatorname{div})$.

Теорема 2.4. *Если последовательность конечномерных подпространств $\{Y_k\}_{k=1}^{\infty}$ предельно плотна в Y , то*

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \inf_{\substack{y_k \in Y_k \\ \beta > 0}} M_{RD}^2(v, y_k, \beta) = \|u - v\|^2. \quad (2.17)$$

Доказательство. По определению предельной плотности для любого положительного δ существует натуральное k_{δ} , такое что для всех $k > k_{\delta}$ найдётся $p_k \in Y_k$, удовлетворяющее неравенству $\|p - p_k\|_Y \leq \delta$. Подставим в мажоранту $y_k = p_k$ и получим

$$\begin{aligned} \inf_{\substack{y_k \in Y_k \\ \beta > 0}} M_{RD}^2(v, y_k, \beta) &\leq M_{RD}^2(v, p_k, \delta) = \\ &= (1 + \delta) \|A \nabla v - p_k\|_*^2 + \int_{\Omega} \tilde{\mathbb{C}}(\rho, \delta) r_{\Omega}^2(v, p_k) dx. \end{aligned} \quad (2.18)$$

Сначала оценим первое слагаемое в правой части (2.18)

$$\|A \nabla v - p_k\|_*^2 = \|A \nabla v + p - A \nabla u - p_k\|_*^2 \leq (\|u - v\| + \|p - p_k\|_*)^2,$$

так как

$$\|p - p_k\|_*^2 = \int_{\Omega} A^{-1}(p - p_k) \cdot (p - p_k) dx \leq \frac{1}{c_1^2} \delta^2,$$

получаем

$$\begin{aligned} |||A\nabla v - p_k|||_*^2 &\leq |||u - v|||^2 + \frac{1}{c_1^2}\delta^2 + \frac{2}{c_1}|||u - v|||\delta = \\ &= |||u - v|||^2 + \delta \left(\frac{1}{c_1^2}\delta + \frac{2}{c_1}|||u - v||| \right). \end{aligned} \quad (2.19)$$

Для второго слагаемого из правой части (2.18) имеем

$$\begin{aligned} &\int_{\Omega} \tilde{\mathbb{C}}(\rho, \delta) (-\operatorname{div} p + \rho^2 u - \rho^2 v + \operatorname{div} p_k)^2 dx \leq \\ &\leq \int_{\Omega} \frac{1}{\rho^2} (\rho^4(u - v)^2 + (\operatorname{div}(p_k - p))^2 + 2\rho^2(u - v) \operatorname{div}(p_k - p)) dx \leq \\ &\leq \|\rho(u - v)\|^2 + \frac{1}{\rho_1^2}\delta^2 + 2\|u - v\|\delta. \end{aligned} \quad (2.20)$$

Объединив (2.19) и (2.20), получим

$$\begin{aligned} M_{RD}^2(v, p_k, \delta) &\leq (1 + \delta) \left(|||u - v|||^2 + \delta \left(\frac{1}{c_1^2}\delta + \frac{2}{c_1}|||u - v||| \right) \right) + \|\rho(u - v)\|^2 + \\ &+ \frac{\delta^2}{\rho_1^2} + 2\delta\|u - v\| = |[u - v]|^2 + O(\delta). \end{aligned}$$

Таким образом, имеет место двусторонняя оценка

$$|[u - v]|^2 \leq \inf_{\substack{y_k \in Y_k \\ \beta > 0}} M_{RD}^2(v, y_k, \beta) \leq |[u - v]|^2 + O(\delta),$$

что доказывает утверждение (2.17). $\square$

Теорема 2.5. Пусть в условиях Теоремы 2.4 последовательность пар (β_k, y_k) , минимизирующих $M_{RD}^2(v, y, \beta)$ на $\mathbb{R}^+ \times Y_k$, такова, что

$$\beta_k \rightarrow 0 \text{ при } k \rightarrow \infty,$$

тогда

$$y_k \rightharpoonup A\nabla u \text{ в } Y \text{ при } k \rightarrow \infty.$$

Доказательство. Обозначим $M_{RDk}(v) := M_{RD}(v, y_k, \beta_k)$. По Теореме 2.4

$$\lim_{k \rightarrow \infty} M_{RDk}^2(v) = |[u - v]|^2$$

и последовательность $\{M_{RDk}^2(v)\}_{k=1}^\infty$ ограничена, следовательно

$$\|y_k\| \leq C \text{ и } \|\operatorname{div} y_k\| \leq C, \quad \forall k = 1, 2, \dots$$

а также

$$\|y_k\|_Y = (\|y_k\|^2 + \|\operatorname{div} y_k\|^2)^{1/2} \leq C,$$

где за C обозначена некая положительная константа. Поэтому можно выделить из $\{y_k\}_{k=1}^\infty$ слабоходящуюся подпоследовательность

$$y_k \rightharpoonup \bar{y} \text{ в } Y \quad \text{при } k \rightarrow \infty.$$

Оценим энергетическую норму ошибки снизу

$$\begin{aligned} |[u - v]|^2 &= |||u - v|||^2 + \|\rho(u - v)\|^2 = \lim_{k \rightarrow \infty} M_{RDk}^2 \geq \\ &\geq \lim_{k \rightarrow \infty} \left(|||A\nabla v - y_k|||_*^2 + \int_{\Omega} \frac{1}{\rho^2} (f - \rho^2 v + \operatorname{div} y_k)^2 dx \right) \geq \\ &\geq |||A\nabla v|||_*^2 - 2 \int_{\Omega} \nabla v \cdot \bar{y} dx + |||\bar{y}|||_*^2 + \|\rho v\|^2 + \left\| \frac{1}{\rho} (\operatorname{div} \bar{y} + f) \right\|^2 - \\ &- 2 \int_{\Omega} v (f + \operatorname{div} \bar{y}) dx. \end{aligned}$$

Последнее соотношение преобразуется в неравенство

$$\begin{aligned} |||A\nabla u|||_*^2 - 2 \int_{\Omega} A\nabla u \cdot \nabla v dx + \int_{\Omega} \rho^2 u^2 dx - 2 \int_{\Omega} (\rho^2 u - f)v dx &\geq \\ &\geq \left\| \frac{1}{\rho} (\operatorname{div} \bar{y} + f) \right\|^2 + |||\bar{y}|||_*^2 - 2 \int_{\Omega} (\nabla v \cdot \bar{y} + \operatorname{div} \bar{y} v) dx. \end{aligned}$$

Используя связь между точными решениями прямой и двойственной задач

$A\nabla u = p$ и $\rho u = (\operatorname{div} p + f)/\rho$, получаем

$$\begin{aligned} -\frac{1}{2} |||p|||_*^2 + \int_{\Omega} p \cdot \nabla v dx - \frac{1}{2} \left\| \frac{1}{\rho} (\operatorname{div} p + f) \right\|^2 + \int_{\Omega} \operatorname{div} p v dx &\leq \\ \leq -\frac{1}{2} |||\bar{y}|||_*^2 + \int_{\Omega} \bar{y} \cdot \nabla v dx - \frac{1}{2} \left\| \frac{1}{\rho} (\operatorname{div} \bar{y} + f) \right\|^2 + \int_{\Omega} \operatorname{div} \bar{y} v dx. \end{aligned} \tag{2.21}$$

Так как $(v - u_0) \in V_0$

$$\int_{\Omega} (\nabla v \cdot \bar{y} + \operatorname{div} \bar{y} v) dx = \int_{\Omega} (\nabla u_0 \cdot \bar{y} + \operatorname{div} \bar{y} u_0) dx,$$

поэтому (2.21) преобразуется в

$$\begin{aligned} & -\frac{1}{2} \|p\|_*^2 - \frac{1}{2} \left\| \frac{1}{\rho} (\operatorname{div} p + f) \right\|^2 + \int_{\Omega} (\nabla u_0 \cdot p + \operatorname{div} p u_0) dx \leq \\ & \leq -\frac{1}{2} \|\bar{y}\|_*^2 - \frac{1}{2} \left\| \frac{1}{\rho} (\operatorname{div} \bar{y} + f) \right\|^2 + \int_{\Omega} (\nabla u_0 \cdot \bar{y} + \operatorname{div} \bar{y} u_0) dx, \end{aligned}$$

то есть в терминах функционала для двойственной вариационной задачи

$$I^*(p) \leq I^*(\bar{y}).$$

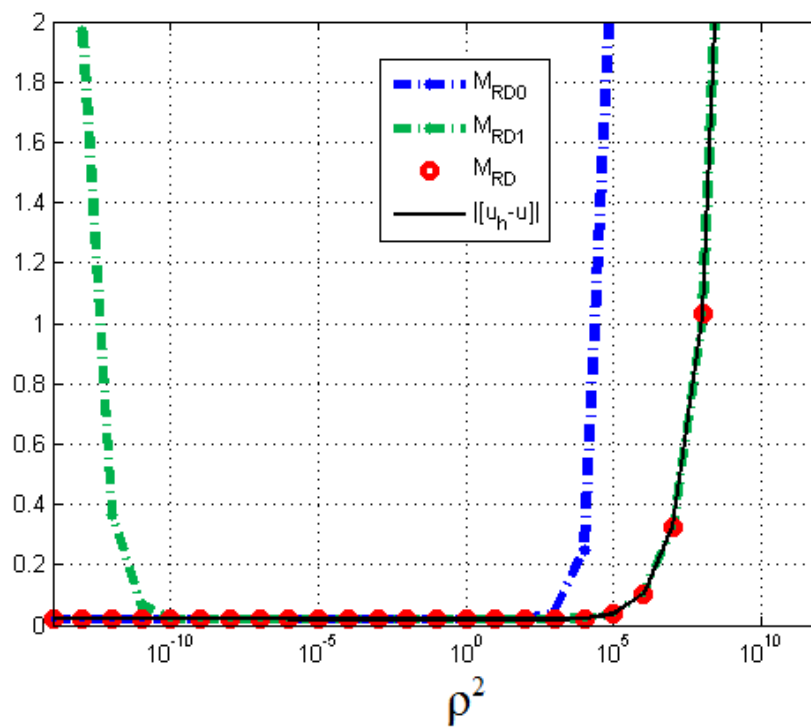
Так как решение задачи $\mathcal{P}^*$ единственно, следовательно $\bar{y} = p$. $\square$

2.3. Сравнение мажорант и примеры работы адаптивных алгоритмов

Рассмотрим несколько примеров вычисления мажорант (2.9), (2.10) и (2.12), а также работу адаптивных алгоритмов, соответствующих последней из них (универсальной). Приближённое решение u_h вычисляется с помощью стандартного метода конечных элементов и является галеркинской аппроксимацией. Для вычисления функциональной апостериорной оценки, как и в параграфе 1.5, используются непрерывные аппроксимации и аппроксимация Равьяра-Тома для свободной переменной y .

Пример 7. Сначала рассмотрим задачу реакции-диффузии с известным точным решением $u = 0.7x_1 + 1.3x_2 + x_1x_2$ на квадрате $\Omega = [0; 1] \times [0; 1]$ (на границе области заданы соответствующие условия Дирихле, $f = \rho^2 u$). Значения ρ^2 меняются в диапазоне от 10^{-12} до 10^{12} . Три функциональные мажоранты вычисляются на равномерной сетке. Для свободной переменной y используются непрерывные аппроксимации.

(a)



(б)

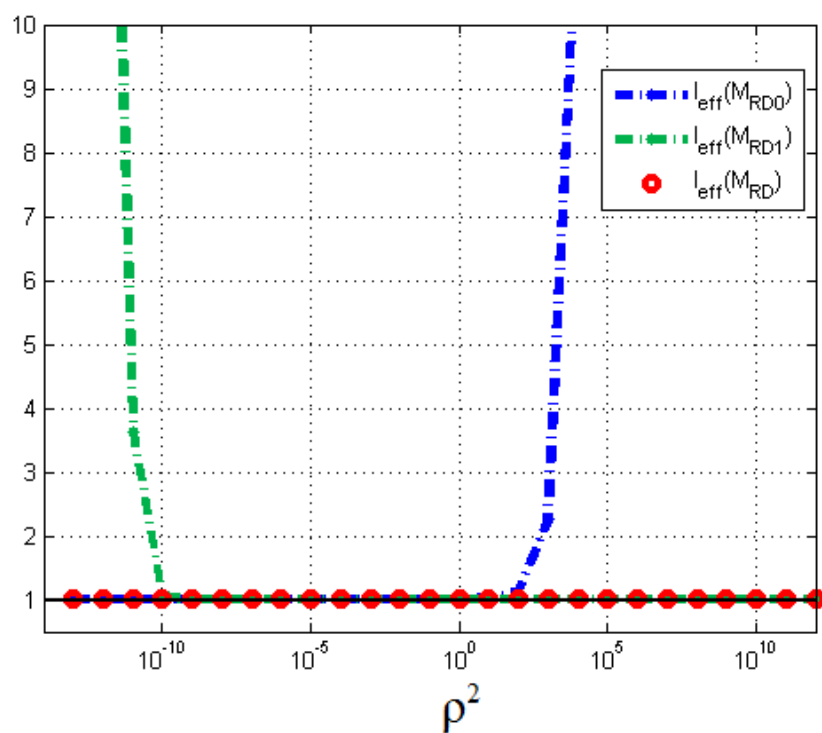


Рис. 2.1: Пример 7. Мажоранты погрешности (а) и индексы эффективности (б)

На рисунке 2.1 представлены графики зависимости мажорант M_{RD0} , M_{RD1} и M_{RD} , а также соответствующих индексов эффективности от коэффициента реакции. В таблице 2.1 приведены значения мажорант и индексов эффективности. Видно, что с увеличением ρ^2 растёт энергетическая норма погрешности, поскольку точное решение фиксировано. Несмотря на это, комбинированная мажоранта M_{RD} эффективно оценивает норму погрешности на всём рассмотренном диапазоне изменения значений ρ^2 . Как и ожидалось, при малых значениях коэффициента реакции мажоранта M_{RD0} эффективна, M_{RD1} начинает расти, а при больших значениях — наоборот.

Таблица 2.1: Пример 7. Мажоранты погрешности и индексы эффективности

ρ^2	$ [u - u_h] $	M_{RD0}	I_{eff} (M_{RD0})	M_{RD1}	I_{eff} (M_{RD1})	M_{RD}	I_{eff} (M_{RD})
10^{-12}	0.018	0.018	1.002	0.366	20.321	0.018	1.002
10^{-5}	0.018	0.018	1.002	0.018	1.002	0.018	1.002
1	0.018	0.018	1.003	0.018	1.002	0.018	1.002
10^5	0.037	2.337	62.937	0.037	1.004	0.037	1.004
10^{12}	102.687	2.32×10^7	2.26×10^5	102.939	1.002	102.939	1.002

Пример 8. Рассмотрим ещё один пример с различными значениями коэффициента реакции. Матрица A — единичная, правая часть $f \equiv 1$. Область Ω и приближённое решение для нескольких значений ρ представлены на рисунке 2.2. На границе задано нулевое условие Дирихле. В данном примере решение задачи существенно зависит от ρ . На рисунке 2.3 представлены графики зависимости трёх мажорант и индексов эффективности от коэффициента реакции. Как и в предыдущем примере, мажоранта M_{RD} эффективно оценивает погрешность на широком диапазоне значений ρ .

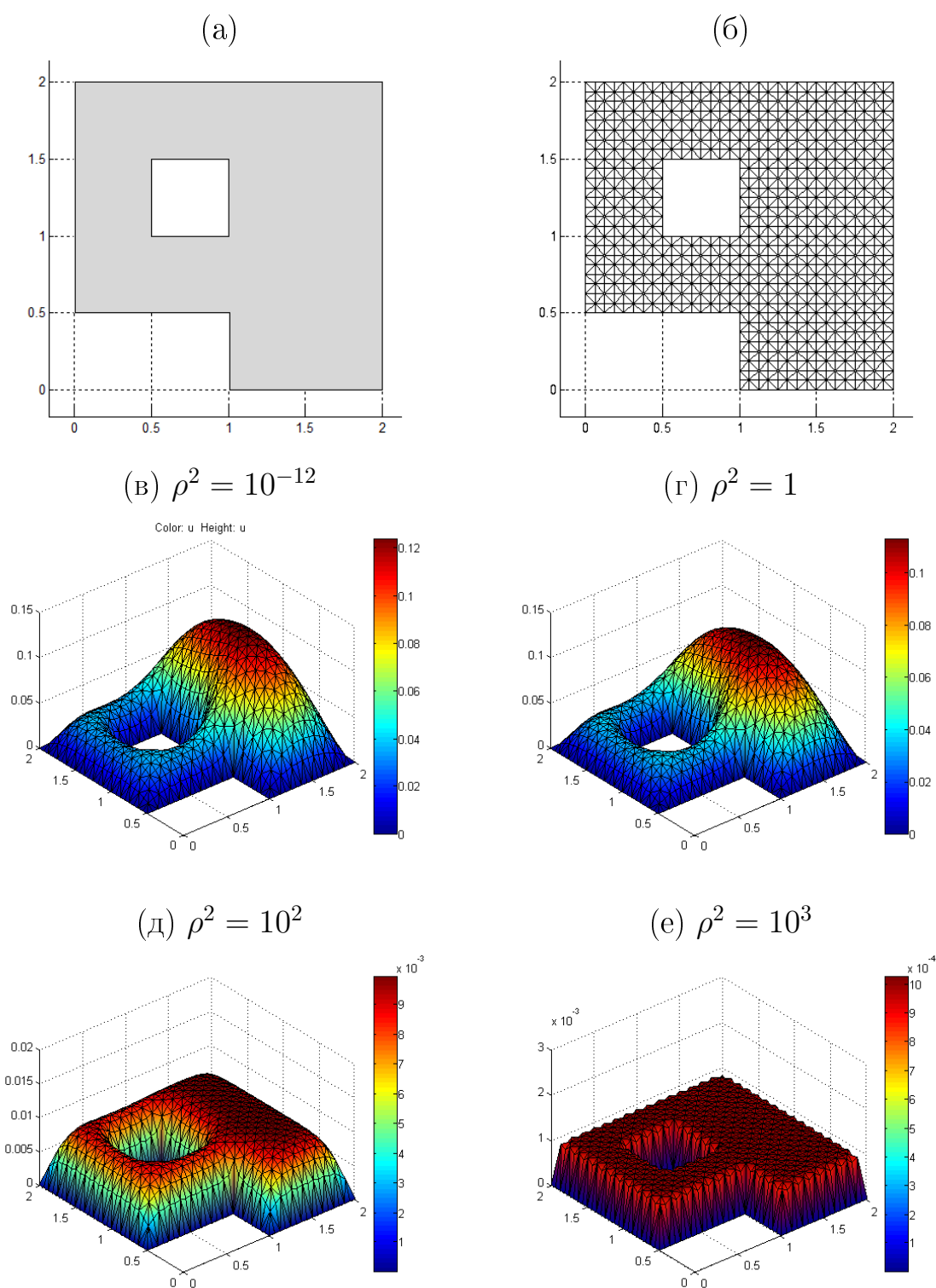
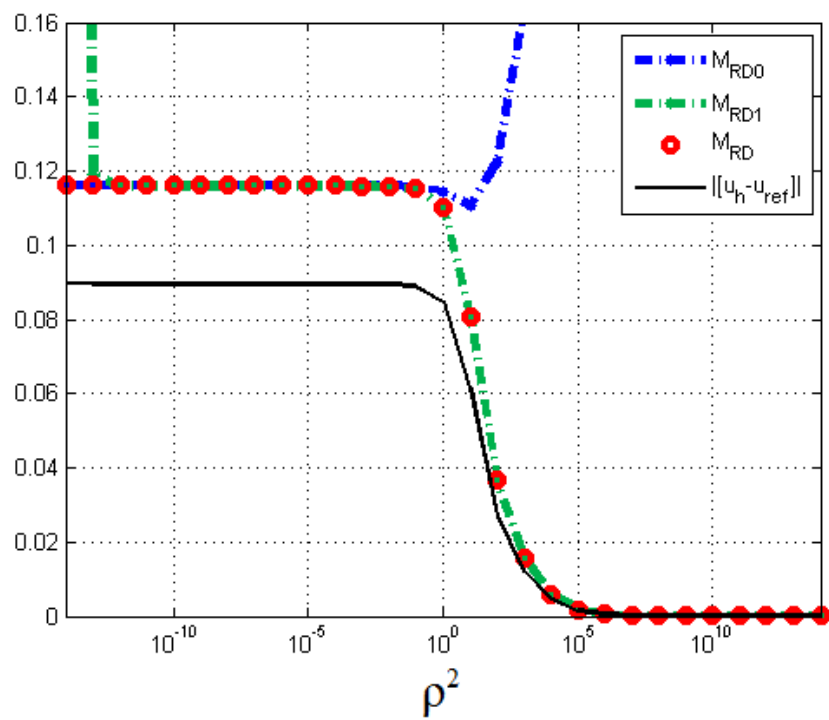


Рис. 2.2: Пример 8. Геометрия области (а); сетка (б); приближённое решение для различных значений ρ (в)–(е)

(a)



(б)

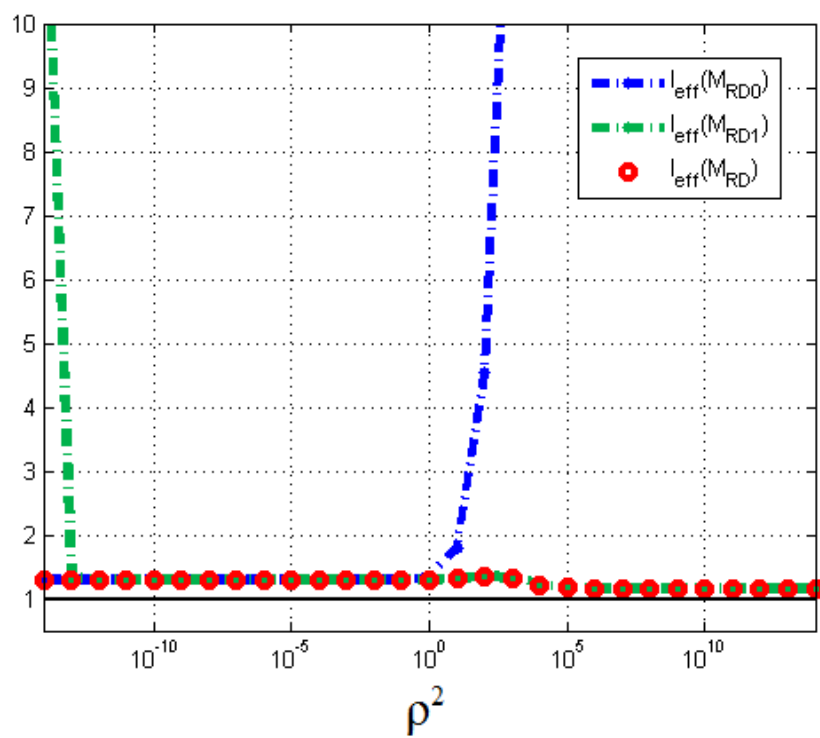


Рис. 2.3: Пример 8. Мажоранты погрешности (а) и индексы эффективности (б)

Пример 9. Перейдём к исследованию работы адаптивных алгоритмов. В этом примере и далее используется мажоранта M_{RD} и основанный на ней индикатор с разными типами аппроксимаций. Сначала рассмотрим случай, когда коэффициент реакции терпит разрыв

$$\rho^2 = \begin{cases} 100 & \text{в подобласти I,} \\ 0.01 & \text{в подобласти II,} \end{cases}$$

A — единичная матрица, правая часть $f = 1$. Область Ω и приближённое решение задачи на равномерной сетке представлены на рисунке 2.4. В таблице 2.2 приведены результаты нескольких шагов адаптации. Из полученных результатов можно сделать вывод, что в случае наличия разрыва коэффициента реакции в области непрерывные аппроксимации позволяют эффективно вычислить апостериорную оценку, а также получить индикатор локального распределения погрешности, близкий к эталонному, как показывают рисунки 2.5 и 2.6. Использование смешанной аппроксимации Равьяра-Тома нулевого порядка в данном случае даёт чуть более завышенную оценку, так как внутри области её аппроксимационные свойства хуже, чем у пары стандартных.

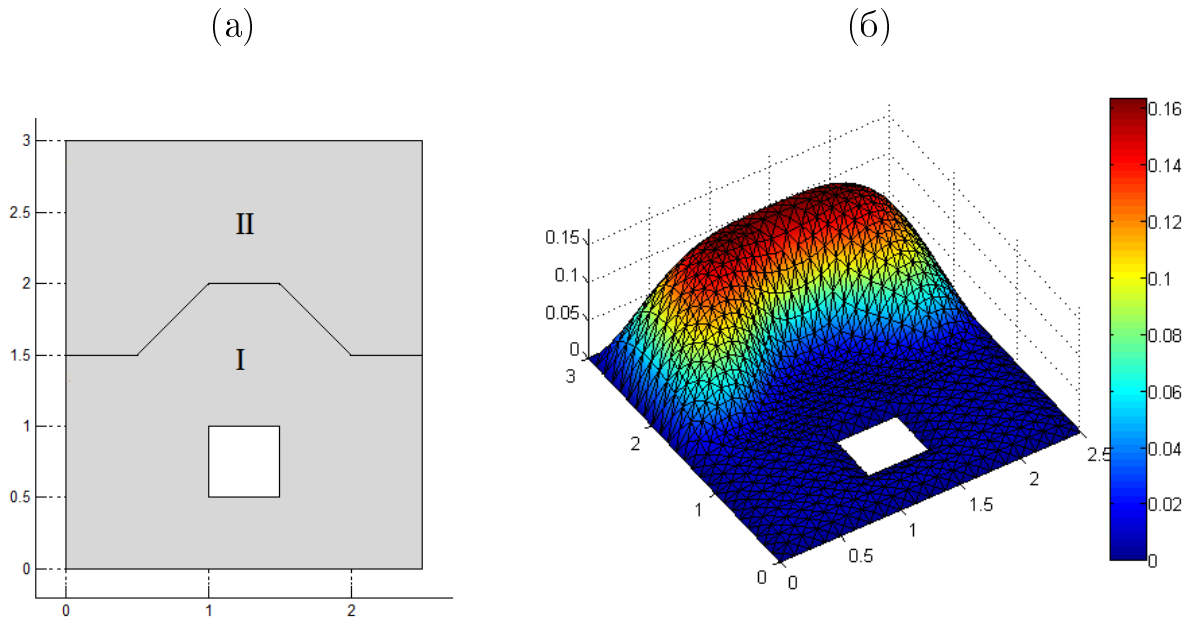


Рис. 2.4: Пример 9. Геометрия области (а) и приближённое решение задачи (б)

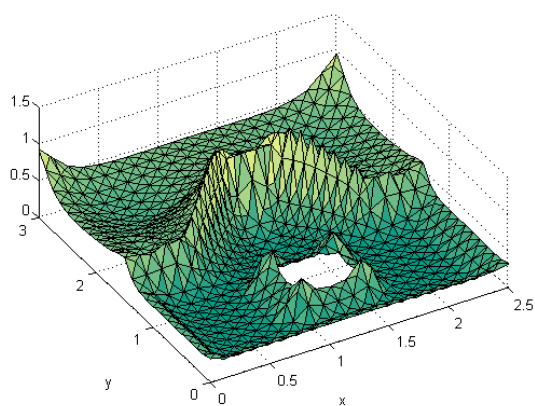
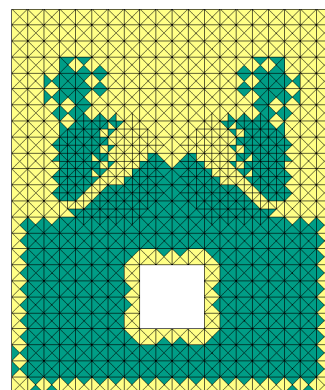
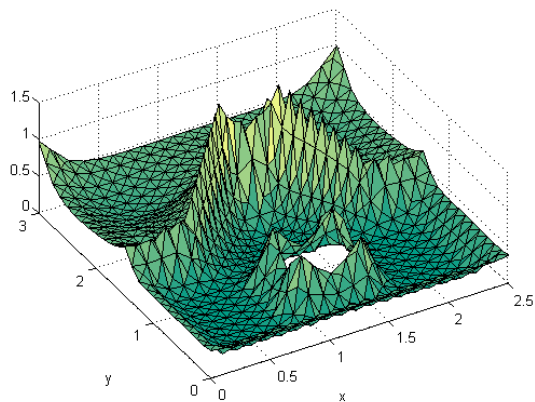
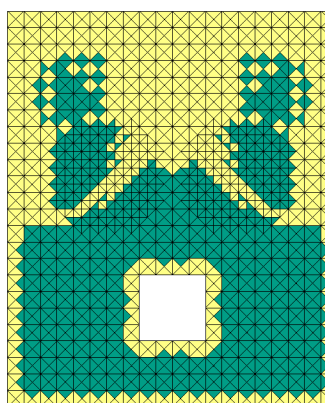
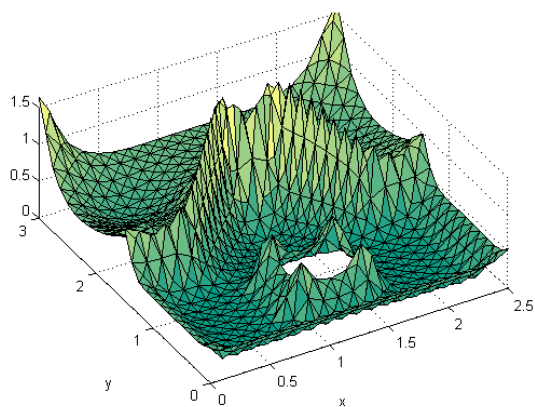
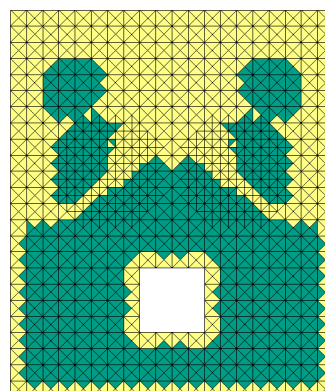
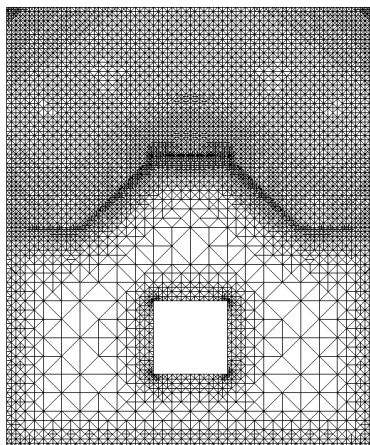
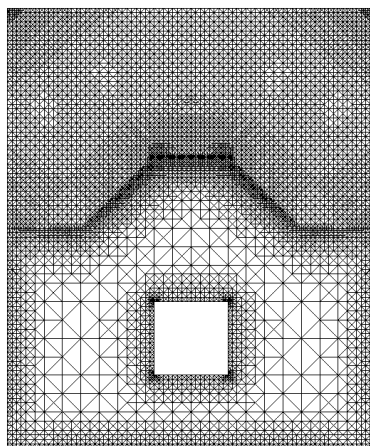
(a) η_T^{ref} (б) η_T^{ref} (в) η_T^{con} (г) η_T^{con} (д) η_T^{RT} (е) η_T^{RT} 

Рис. 2.5: Пример 9. Значения сравниваемых индикаторов на равномерной сетке (слева) и элементы, отмеченные для разбиения (справа)

(а) η_T^{ref} , 7219 уз., погр. 2.76%



(б) η_T^{con} , 7927 уз., погр. 2.69%



(в) η_T^{RT} , 8592 уз., погр. 2.74%

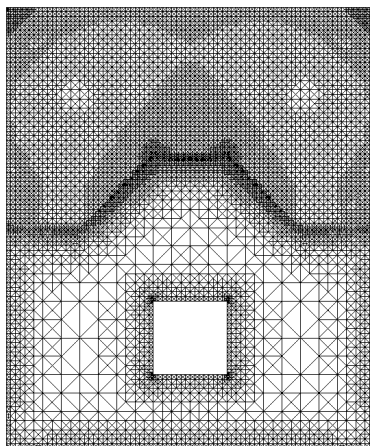


Рис. 2.6: Пример 9. Конечноэлементные сетки, полученные в результате адаптации

Таблица 2.2: Пример 9. Сравнение шагов адаптации сетки

η_T^{ref}		η_T^{con}			η_T^{RT}		
N	$e\%$	N	$e\%$	I_{eff}	N	$e\%$	I_{eff}
282	19.46	282	19.46	1.18	282	19.46	1.37
501	11.82	522	11.63	1.16	521	12.07	1.41
907	8.37	981	8.44	1.13	1006	8.61	1.36
1659	5.87	1803	5.74	1.14	1872	5.86	1.44
2987	4.50	3299	4.39	1.13	3510	4.44	1.38
5395	3.18	5962	3.07	1.14	6304	3.15	1.43
7219	2.76	7927	2.69	1.13	8592	2.74	1.41

Пример 10. В заключение главы рассмотрим пример с разрывом в коэффициентах матрицы

$$a_{11} = a_{22} = \begin{cases} 1 & \text{в подобластях I и IV,} \\ 10 & \text{в подобластях II и III,} \end{cases}$$

$a_{12} = a_{21} = 0$, $\rho^2 = 1$, $f = 1$, $u_0 = 0$. В данном примере область Ω , представленная на рисунке 2.7, представляет собой квадрат с отверстием. В таблице 2.3 приведены результаты нескольких шагов адаптации сетки. На рисунке 2.8 изображены значения различных индикаторов в исследуемой области при равномерном разбиении, а на рисунке 2.9 — итоговые сетки, получившиеся в результате адаптации. Из полученных результатов можно сделать вывод, что применение аппроксимации RT0 в случае наличия разрыва в коэффициенте матрицы позволяет более эффективно использовать функциональную апостериорную оценку для контроля точности приближённого решения, что полностью согласуется с выводами первой главы.

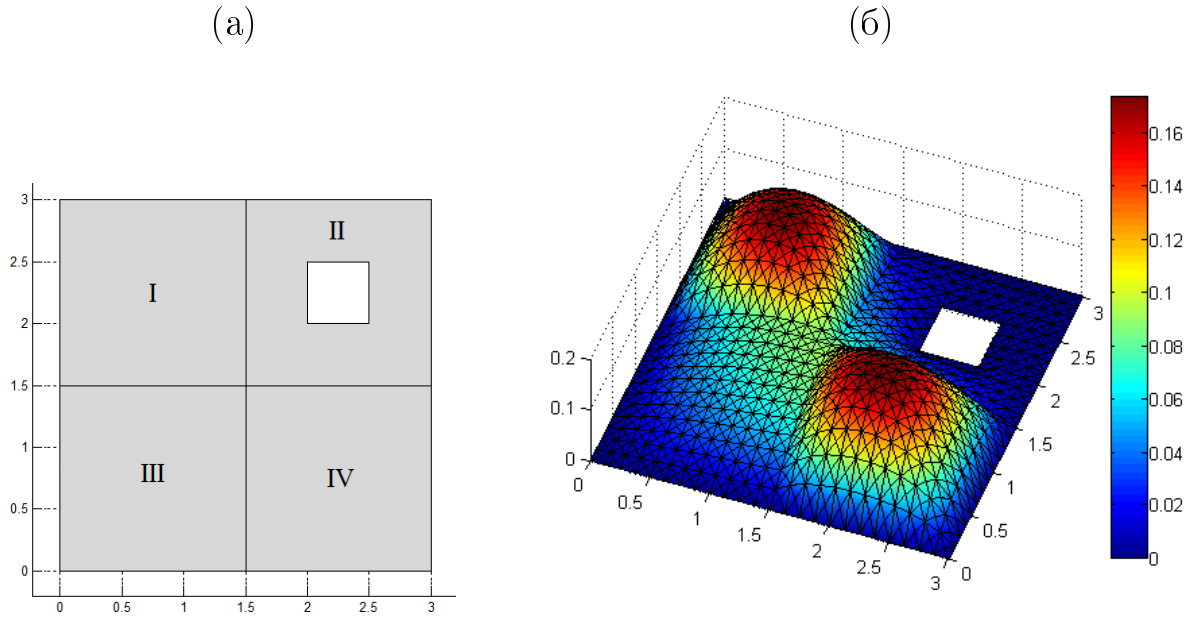


Рис. 2.7: Пример 10. Геометрия области (а) и приближённое решение задачи (б)

Таблица 2.3: Пример 10. Сравнение шагов адаптации сетки

η_T^{ref}		η_T^{con}			η_T^{RT}		
N	$e\%$	N	$e\%$	I_{eff}	N	$e\%$	I_{eff}
308	15.78	308	15.78	1.62	308	15.78	1.46
569	10.71	597	11.22	1.61	600	10.88	1.43
781	9.20	843	9.66	1.62	846	9.29	1.41
1071	7.79	1175	8.34	1.59	1189	7.82	1.41
1433	6.57	1681	7.06	1.62	1681	6.62	1.41
1966	5.67	2337	6.01	1.56	2373	5.53	1.42
2657	4.88	3424	5.12	1.62	3298	4.73	1.41
4826	3.62	6964	3.75	1.59	6285	3.43	1.42
6515	3.09	9655	3.15	1.54	8620	2.90	1.43
8783	2.66	14055	2.69	1.59	11745	2.51	1.42

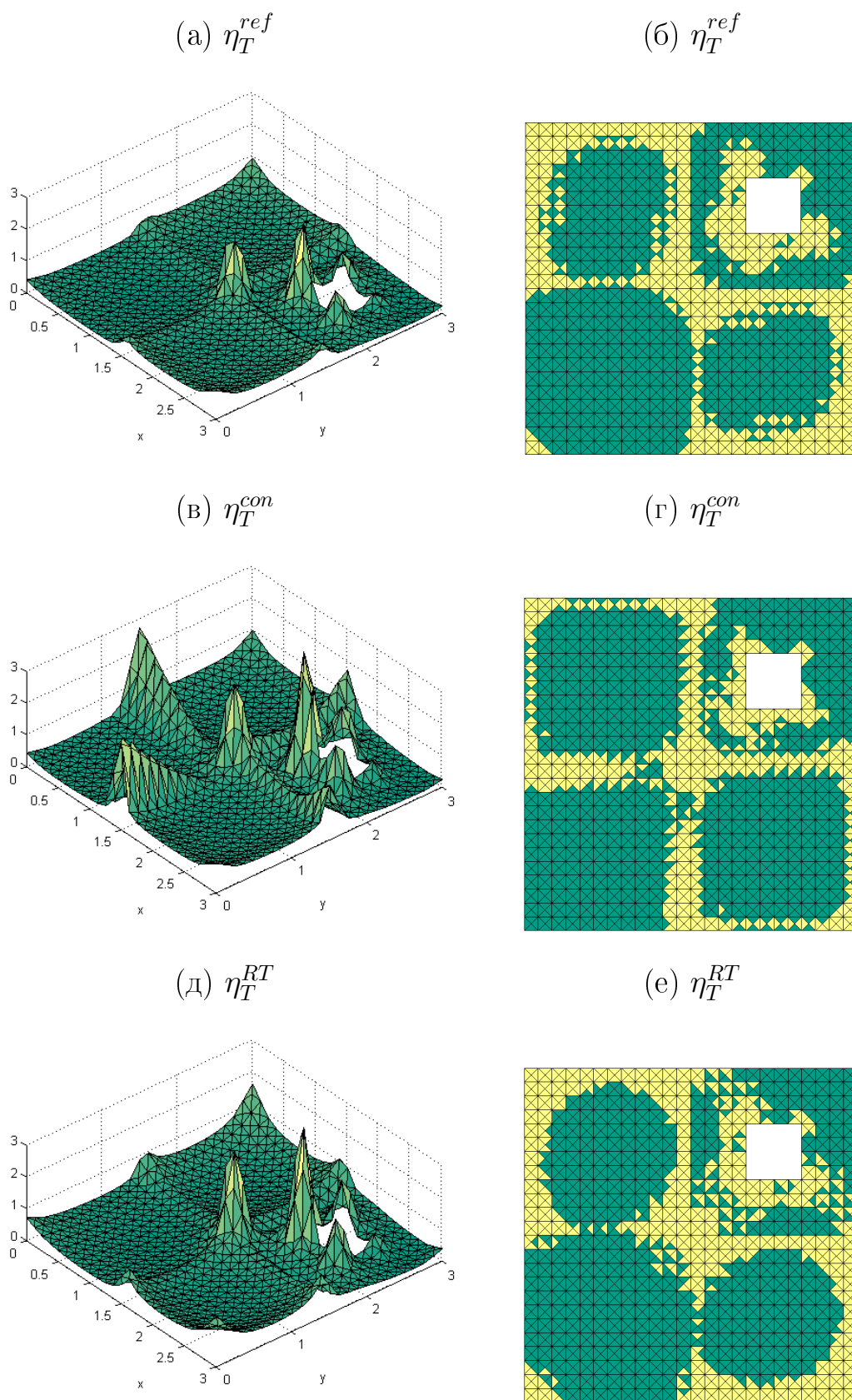
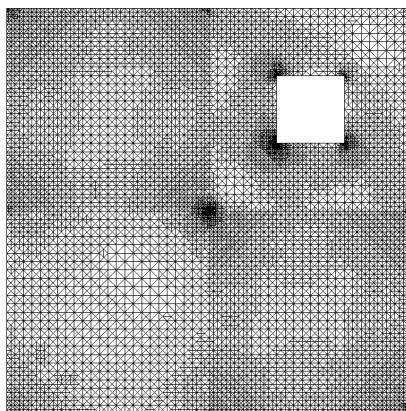
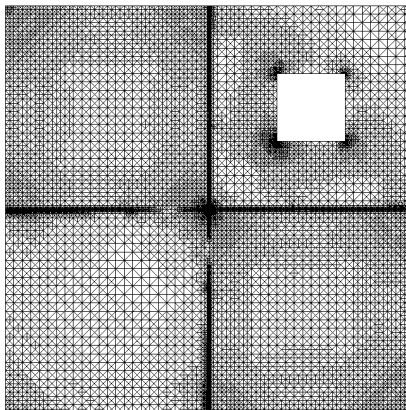


Рис. 2.8: Пример 10. Значения сравниваемых индикаторов на равномерной сетке (слева) и элементы, отмеченные для разбиения (справа)

(a) η_T^{ref} , 8783 уз., погр. 2.31%



(б) η_T^{con} , 14055 уз., погр. 2.69%



(в) η_T^{RT} , 11745 уз., погр. 2.51%

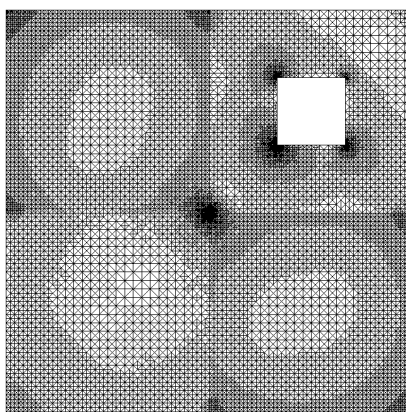


Рис. 2.9: Пример 10. Конечноэлементные сетки, полученные в результате адаптации

Исследование мажорант ошибки для задач линейной теории упругости

В главе рассматриваются функциональные апостериорные оценки для пространственных задач линейной теории упругости и их плоских аналогов. Доказан ряд утверждений о вычислительных свойствах оценок и основанных на них индикаторов погрешности. Изучены особенности реализации этих оценок применительно к задачам о плоской деформации. Приводятся примеры работы соответствующих адаптивных алгоритмов.

Полученные в данном разделе результаты частично опубликованы в работе автора [92].

3.1. Две функциональные апостериорные оценки

Исследуемая задача имеет следующую формулировку: пусть упругое тело занимает область $\Omega \in \mathbb{R}^3$, его граница Γ состоит из двух непересекающихся частей $\Gamma_1 \neq \{\emptyset\}$ и Γ_2 . Нужно найти тензорные поля деформаций ε и напряжений σ , а также векторное поле перемещений u , удовлетворяющие системе соотношений

$$\left\{ \begin{array}{l} \sigma = \mathbb{L} \varepsilon(u) \text{ в } \Omega, \\ \operatorname{Div} \sigma + f = 0 \text{ в } \Omega, \\ u = u_0 \text{ на } \Gamma_1, \\ \sigma n = F \text{ на } \Gamma_2, \end{array} \right. \quad (3.1)$$

где $\varepsilon(u) = \frac{1}{2} (\nabla u + \nabla u^T)$, $f \in L^2(\Omega, \mathbb{R}^3)$ — плотность объемных сил, $F \in L^2(\Gamma_2, \mathbb{R}^3)$ — заданные на части границы Γ_2 поверхностные силы, $u_0 \in W_2^1(\Omega, \mathbb{R}^3)$ — заданные на части границы Γ_1 перемещения, $\mathbb{L}$ — тензор упругих констант, имеющий четвёртый ранг. Предполагается, что существуют положительные по-

стоянные l_1 и l_2 , такие что

$$|l_1^2 \varepsilon|^2 \leq \mathbb{L} \varepsilon : \varepsilon \leq |l_2^2 \varepsilon|^2, \quad \forall \varepsilon \in \mathbb{M}_{sym}^{3 \times 3}, \quad (3.2)$$

где $\mathbb{M}_{sym}^{3 \times 3}$ — пространство симметричных тензоров второго ранга. Также, предполагается, что компоненты тензора ограничены и удовлетворяют условиям симметрии, то есть

$$\mathbb{L}_{ijkl} = \mathbb{L}_{jikl} = \mathbb{L}_{klij}, \quad \mathbb{L}_{ijkl} \in L^\infty(\Omega), \quad i, j, k, l = \overline{1, 3}.$$

Основой для получения апостериорной оценки является обобщённая постановка задачи (3.1): найти функцию $u \in V = u_0 + V_0$, где

$$V_0 = \{w \in W_2^1(\Omega, \mathbb{R}^3) \mid w = 0 \text{ на } \Gamma_1\},$$

удовлетворяющую интегральному тождеству

$$\int_{\Omega} \mathbb{L} \varepsilon(u) : \varepsilon(w) dx = \int_{\Omega} f \cdot w dx + \int_{\Gamma_2} F \cdot w ds, \quad \forall w \in V_0. \quad (3.3)$$

Функционал энергии для этой задачи имеет известный вид

$$J(u) = \frac{1}{2} \int_{\Omega} \mathbb{L} \varepsilon(u) : \varepsilon(u) dx - \int_{\Omega} f \cdot u dx - \int_{\Gamma_2} F \cdot u ds.$$

Вариационная постановка задачи (3.1) и двойственной к ней выглядят следующим образом:

Задача $\mathcal{P}$: найти элемент $u \in V$ такой, что

$$J(u) = \inf_{v \in V} J(v). \quad (3.4)$$

Задача $\mathcal{P}^*$: найти элемент $q \in \mathbb{Q}_f$ такой, что

$$I^*(q) = \sup_{\eta \in \mathbb{Q}_f} I^*(\eta), \quad (3.5)$$

где

$$I^*(\eta) = \int_{\Omega} \left(-\frac{1}{2} \mathbb{L}^{-1} \eta : \eta + \eta : \varepsilon(u_0) \right) dx - \int_{\Omega} f \cdot u_0 dx - \int_{\Gamma_2} F \cdot u_0 ds,$$

$$\mathbb{Q}_f = \left\{ \eta \in L^2(\Omega, \mathbb{M}_{sym}^{3 \times 3}) \mid \int_{\Omega} \eta : \varepsilon(w) dx = \int_{\Omega} f \cdot w dx + \int_{\Gamma_2} F \cdot w ds, \quad \forall w \in V_0 \right\}.$$

Известно, что решения задач $\mathcal{P}$ и $\mathcal{P}^*$ существуют и единственны, причем $q = \sigma$ и $J(u) = I^*(\sigma)$. Рассмотрим произвольное приближённое решение $v \in V$. Энергетическая норма для задачи (3.1) определяется формулой

$$|||u - v|||^2 := \int_{\Omega} \mathbb{L} \varepsilon(u - v) : \varepsilon(u - v) dx.$$

Функциональные апостериорные оценки для задач линейной упругости были впервые получены в работе Музалевского и Репина [93] с помощью вариационного подхода, а затем в монографии [21] с помощью интегральных преобразований. В работе [93], в частности, предложены оценки для случаев, когда трёхмерная задача может быть сведена к плоской — плоское напряжённое состояние, плоская деформация или осесимметричная задача.

Рассмотрим контроль погрешности в перемещениях, следуя подходу, предложенному в [21]. Для получения верхней оценки используется следующая лемма:

Лемма 3.1. *Существует константа C , удовлетворяющая неравенству*

$$\int_{\Omega} |w|^2 dx + \int_{\Gamma_2} |w|^2 ds \leq C^2 |||w|||^2 \quad \forall w \in V_0,$$

Эта константа может быть грубо оценена из соотношения

$$\frac{1}{C^2} = \inf_{w \in V_0} \frac{|||w|||^2}{\int_{\Omega} |w|^2 dx + \int_{\Gamma_2} |w|^2 ds}$$

с помощью минимизации выражения в правой части по конечномерному подпространству V_{0h} .

Соотношение (3.3) можно переписать в виде

$$\int_{\Omega} \mathbb{L} \varepsilon(u - v) : \varepsilon(w) dx = \int_{\Omega} (f \cdot w - \mathbb{L} \varepsilon(v) : \varepsilon(w)) dx + \int_{\Gamma_2} F \cdot w ds, \quad \forall w \in V_0. \quad (3.6)$$

Введём обозначения:

$$\Sigma(\Omega) = L^2(\Omega, \mathbb{M}^{3 \times 3}), \quad \Sigma_s(\Omega) = L^2(\Omega, \mathbb{M}_{sym}^{3 \times 3}),$$

а также рассмотрим произвольный, но симметричный тензор $\tau \in H(\Omega, \Gamma_2, \text{Div})$.

Это пространство определяется следующим образом:

$$H(\Omega, \Gamma_2, \text{Div}) = \{ \tau \in \Sigma(\Omega) \mid \text{Div } \tau \in L^2(\Omega, \mathbb{R}^3), \tau n \in L^2(\Gamma_2, \mathbb{R}^3) \}.$$

Так как для симметричного тензора $\tau \in \Sigma_s(\Omega)$ имеет место равенство

$$\int_{\Omega} (w \cdot \text{Div } \tau + \tau : \varepsilon(w)) \, dx = \int_{\Gamma_2} \tau n \cdot w \, ds, \quad (3.7)$$

то сложив (3.6) и (3.7), получаем

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \mathbb{L} \varepsilon(u - v) : \varepsilon(w) \, dx &= \int_{\Omega} (f + \text{Div } \tau) \cdot w \, dx + \int_{\Omega} (\tau - \mathbb{L} \varepsilon(v)) : \varepsilon(w) \, dx + \\ &+ \int_{\Gamma_2} (F - \tau n) \cdot w \, ds, \end{aligned} \quad (3.8)$$

для любого $w \in V_0$. Выбрав $w = u - v$ и воспользовавшись Леммой 3.1, приходим к оценке

$$|||u - v||| \leq |||\tau - \mathbb{L} \varepsilon(v)|||_* + C \left(\|\text{Div } \tau + f\|^2 + \|F - \tau n\|_{\Gamma_2}^2 \right)^{1/2}, \quad (3.9)$$

которая аналогична рассмотренной ранее в параграфе 1.4 оценке для задачи диффузии, где

$$|||\tau|||_*^2 = \int_{\Omega} \mathbb{L}^{-1} \tau : \tau \, dx.$$

Применив неравенство Коши с параметром $\beta > 0$, оценку можно преобразовать к виду

$$\begin{aligned} |||u - v|||^2 &\leq M_{LE}^2(v, \tau, \beta) := \\ &:= (1 + \beta) |||\tau - \mathbb{L} \varepsilon(v)|||_*^2 + \left(1 + \frac{1}{\beta} \right) C^2 \left(\|\text{Div } \tau + f\|^2 + \|F - \tau n\|_{\Gamma_2}^2 \right). \end{aligned} \quad (3.10)$$

Оценка (3.10) является аналогом оценки (1.26). Первое слагаемое функционала M_{LE}^2 выражает погрешность, возникающую из-за неточного соответствия полей определяющему соотношению (закон Гука), второе включает невязку в уравнениях равновесия, а третье — невязку в граничных условиях.

Вычисление мажоранты погрешности требует построения симметричного тензора τ . Условию симметрии легко можно удовлетворить, если для аппроксимации свободного тензора используются конечные элементы со степенями свободы в узлах (стандартные). Как показывают результаты работ Музалевского и Репина [93] и Фролова [94], такие аппроксимации не всегда позволяют получить качественные оценки погрешности, не обеспечивая стабильного поведения индекса эффективности в процессе измельчения сеток.

В [21] была предложена другая мажоранта, не требующая явного учёта условия симметрии свободного тензора и позволяющая использовать смешанные аппроксимации. Рассмотрим произвольный тензор $\hat{\tau} \in H(\Omega, \Gamma_2, \text{Div})$. Для него равенство, аналогичное (3.8), будет иметь вид

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \mathbb{L} \varepsilon(u - v) : \varepsilon(w) dx = \int_{\Omega} (f + \text{Div} \hat{\tau}) \cdot w dx + \int_{\Omega} (\hat{\tau} - \mathbb{L} \varepsilon(v)) : \nabla w dx + \\ + \int_{\Gamma_2} (F - \hat{\tau} n) \cdot w ds, \end{aligned} \quad (3.11)$$

для любого $w \in V_0$, так как для произвольного $\hat{\tau} \in H(\Omega, \Gamma_2, \text{Div})$ имеет место известная формула (см., например, Лурье [95])

$$\int_{\Omega} (w \cdot \text{Div} \hat{\tau} + \hat{\tau} : \nabla w) dx = \int_{\Gamma_2} \hat{\tau} n \cdot w ds,$$

где $(\nabla w)_{ij} = \partial w_j / \partial x_i$. Разложим $\hat{\tau}$ на симметричную и кососимметричную части

$$\hat{\tau} = \hat{\tau}_{\text{sm}} + \hat{\tau}_{\text{sk}}.$$

Тогда

$$\hat{\tau} : \nabla w = \hat{\tau}_{\text{sm}} : \varepsilon(w) + \hat{\tau}_{\text{sk}} : \nabla w,$$

и из (3.11) следует оценка

$$\begin{aligned}
\int_{\Omega} \mathbb{L} \varepsilon(u - v) : \varepsilon(w) dx &\leq \| \operatorname{Div} \hat{\tau} + f \| \|w\| + \|\hat{\tau}n - F\|_{\Gamma_2} \|w\|_{\Gamma_2} + \\
&+ ||| \hat{\tau}_{\text{sm}} - \mathbb{L} \varepsilon(v) |||_* |||w||| + \|\hat{\tau}_{\text{sk}}\| \|\nabla w\| \leq \\
&\leq C \left(\| \operatorname{Div} \hat{\tau} + f \|^2 + \|\hat{\tau}n - F\|_{\Gamma_2}^2 \right)^{1/2} |||w||| + \\
&+ ||| \hat{\tau}_{\text{sm}} - \mathbb{L} \varepsilon(v) |||_* |||w||| + \frac{C_{\Omega\Gamma_1}}{l_1} \|\hat{\tau}_{\text{sk}}\| |||w|||,
\end{aligned}$$

где $C_{\Omega\Gamma_1}$ — константа в неравенстве Корна. В случае, когда $\partial\Omega = \Gamma_1$ и $\Gamma_2 = \{\emptyset\}$, нетрудно показать, что $C_{\Omega\Gamma_1} = \sqrt{2}$.

Таким образом, апостериорная оценка имеет вид

$$\begin{aligned}
|||u - v||| &\leq C \left(\| \operatorname{Div} \hat{\tau} + f \|^2 + \|\hat{\tau}n - F\|_{\Gamma_2}^2 \right)^{1/2} + \\
&+ ||| \hat{\tau}_{\text{sm}} - \mathbb{L} \varepsilon(v) |||_* + \frac{C_{\Omega\Gamma_1}}{l_1} \|\hat{\tau}_{\text{sk}}\|.
\end{aligned} \tag{3.12}$$

Дважды применив неравенство Коши с параметром, её можно представить так, чтобы функционал в правой части имел квадратичную структуру

$$\begin{aligned}
|||u - v|||^2 &\leq \widehat{M}_{LE}^2(v, \hat{\tau}, \beta_1, \beta_2) := \\
&:= (1 + \beta_1) ||| \hat{\tau}_{\text{sm}} - \mathbb{L} \varepsilon(v) |||_*^2 + \\
&+ \left(1 + \frac{1}{\beta_1} \right) (1 + \beta_2) C^2 \left(\| \operatorname{Div} \hat{\tau} + f \|^2 + \|\hat{\tau}n - F\|_{\Gamma_2}^2 \right) + \\
&+ \left(1 + \frac{1}{\beta_1} \right) \left(1 + \frac{1}{\beta_2} \right) \left(\frac{C_{\Omega\Gamma_1}}{l_1} \right)^2 \|\hat{\tau}_{\text{sk}}\|^2,
\end{aligned} \tag{3.13}$$

где $\beta_1 > 0$ и $\beta_2 > 0$ — свободные параметры. При фиксированном $\hat{\tau}$ оптимальные значения констант вычисляются по формулам

$$\beta_1 = \frac{C \sqrt{\| \operatorname{Div} \hat{\tau} + f \|^2 + \|\hat{\tau}n - F\|_{\Gamma_2}^2} + C_{\Omega\Gamma_1} \|\hat{\tau}_{\text{sk}}\| / l_1}{||| \hat{\tau} - \mathbb{L} \varepsilon(v) |||_*}, \tag{3.14}$$

$$\beta_2 = \frac{C_{\Omega\Gamma_1} \|\hat{\tau}_{\text{sk}}\| / l_1}{C \sqrt{\| \operatorname{Div} \hat{\tau} + f \|^2 + \|\hat{\tau}n - F\|_{\Gamma_2}^2}}. \tag{3.15}$$

Заметим, что оценка (3.12) совпадает с (3.9), если тензор τ симметричен. Дополнительное слагаемое в (3.12), содержащее кососимметричную часть тен-

зора, играет роль штрафа. Также, обе оценки точны, поскольку совпадают с нормой погрешности на точных значениях поля напряжений.

3.2. Вычислительные свойства оценок

Покажем асимптотическую точность полученных оценок, вычисленных на последовательности конечномерных подпространств. Для краткости введём обозначение $\mathcal{H} := \mathbf{H}(\Omega, \Gamma_2, \text{Div})$.

Теорема 3.1. *Если последовательность конечномерных подпространств $\{\mathcal{H}_s^i\}_{i=1}^\infty$ предельно плотна в $\mathcal{H}_s = \mathcal{H} \cap \Sigma_s(\Omega)$, то*

$$\lim_{i \rightarrow \infty} \inf_{\substack{\tau_i \in \mathcal{H}_s^i \\ \beta > 0}} M_{LE}^2(v, \tau_i, \beta) = |||u - v|||^2. \quad (3.16)$$

Аналогично, если последовательность $\{\mathcal{H}^i\}_{i=1}^\infty$ предельно плотна в $\mathcal{H}$, то

$$\lim_{i \rightarrow \infty} \inf_{\substack{\hat{\tau}_i \in \mathcal{H}^i \\ \beta_1 > 0, \beta_2 > 0}} \widehat{M}_{LE}^2(v, \hat{\tau}_i, \beta_1, \beta_2) = |||u - v|||^2. \quad (3.17)$$

Доказательство. Сначала докажем утверждение (3.16). По определению предельной плотности для любого положительного δ существует натуральное i_δ , такое что для всех $i > i_\delta$ найдётся $\sigma_i \in \mathcal{H}_s^i$, удовлетворяющее неравенству $|||\sigma - \sigma_i|||_{\mathcal{H}} \leq \delta$, где

$$|||\sigma|||_{\mathcal{H}}^2 = \left(\int_{\Omega} \sigma : \sigma \, dx + \|\text{Div } \sigma\|^2 + \|\sigma n\|_{\Gamma_2}^2 \right)^{1/2}.$$

Подставим в мажоранту $\tau_i = \sigma_i$, $\beta = \delta$ и получим

$$\begin{aligned} \inf_{\substack{\tau_i \in \mathcal{H}_s^i \\ \beta > 0}} M_{LE}^2(v, \tau_i, \beta) &\leq M_{LE}^2(v, \sigma_i, \delta) = (1 + \delta) |||\sigma_i - \mathbb{L} \varepsilon(v)|||_*^2 + \\ &+ \left(1 + \frac{1}{\delta}\right) C^2 (\|\text{Div } \sigma_i + f\|^2 + \|F - \sigma_i n\|_{\Gamma_2}^2). \end{aligned} \quad (3.18)$$

Первое слагаемое в правой части (3.18) оценивается через неравенство треугольника

$$|||\sigma_i - \mathbb{L} \varepsilon(v)|||_*^2 = |||\sigma_i - \sigma + \mathbb{L} \varepsilon(u) - \mathbb{L} \varepsilon(v)|||_*^2 \leq (|||u - v||| + |||\sigma - \sigma_i|||_*)^2,$$

а так как

$$|||\sigma - \sigma_i|||_*^2 = \int_{\Omega} \mathbb{L}^{-1}(\sigma - \sigma_i) : (\sigma - \sigma_i) dx \leq \frac{1}{l_1^2} \delta^2,$$

получаем

$$\begin{aligned} |||\sigma_i - \mathbb{L} \varepsilon(v)|||_*^2 &\leq |||u - v|||^2 + \left(\frac{1}{l_1^2} \delta + \frac{2}{l_1} |||u - v||| \right) \delta = \\ &= |||u - v|||^2 + \delta \left(\frac{1}{l_1^2} \delta + \frac{2}{l_1} |||u - v||| \right). \end{aligned} \quad (3.19)$$

Для второго слагаемого из правой части (3.18) имеем

$$\|\operatorname{Div} \sigma_i + f\|^2 + \|F - \sigma_i n\|_{\Gamma_2}^2 = \|\operatorname{Div}(\sigma - \sigma_i)\|^2 + \|(\sigma - \sigma_i)n\|_{\Gamma_2}^2 \leq \delta^2. \quad (3.20)$$

Объединив (3.19) и (3.20), получим

$$\begin{aligned} M_{LE}^2(v, \sigma_i, \delta) &\leq (1 + \delta) \left(|||u - v|||^2 + \delta \left(\frac{1}{l_1^2} \delta + \frac{2}{l_1} |||u - v||| \right) \right) + \\ &+ \left(1 + \frac{1}{\delta} \right) C^2 \delta^2 = |||u - v|||^2 + O(\delta). \end{aligned}$$

Таким образом, верна двусторонняя оценка

$$|||u - v|||^2 \leq \inf_{\substack{\tau_i \in \mathcal{H}_s^i \\ \beta > 0}} M_{LE}^2(v, \tau_i, \beta) \leq |||u - v|||^2 + O(\delta),$$

что доказывает утверждение (3.16).

Теперь докажем утверждение (3.17), для которого на тензор σ_i не накладывается ограничение симметрии. Подставим в мажоранту $\hat{\tau} = \sigma_i$, $\beta_1 = \delta$, $\beta_2 = 1/\sqrt{\delta}$ и получим

$$\begin{aligned} \inf_{\substack{\hat{\tau}_i \in \mathcal{H}^i \\ \beta_1 > 0, \beta_2 > 0}} \widehat{M}_{LE}^2(v, \hat{\tau}_i, \beta_1, \beta_2) &\leq \widehat{M}_{LE}^2(v, \sigma_i, \delta, 1/\sqrt{\delta}) = \\ &= (1 + \delta) |||\sigma_{\text{smi}} - \mathbb{L} \varepsilon(v)|||_*^2 + \left(1 + \frac{1}{\delta} \right) (1 + \sqrt{\delta}) \left(\frac{C_{\Omega \Gamma_1}}{l_1} \right)^2 \|\sigma_{\text{ski}}\|^2 + \\ &+ \left(1 + \frac{1}{\delta} \right) C^2 (1 + \frac{1}{\sqrt{\delta}}) (\|\operatorname{Div} \sigma_i + f\|^2 + \|F - \sigma_i n\|_{\Gamma_2}^2). \end{aligned} \quad (3.21)$$

Первое слагаемое в (3.21) можно оценить, используя неравенство треугольника

$$|||\sigma_{\text{smi}} - \mathbb{L} \varepsilon(v)|||_*^2 = |||\sigma_{\text{smi}} - \sigma + \mathbb{L} \varepsilon(u) - \mathbb{L} \varepsilon(v)|||_*^2 \leq (|||u - v||| + |||\sigma - \sigma_{\text{smi}}|||_*)^2.$$

Так как $\sigma = \mathbb{L} \varepsilon(u)$ — симметричный тензор, то

$$|||\sigma - \sigma_i|||_*^2 = |||\sigma - \sigma_{\text{smi}}|||_*^2 + |||\sigma_{\text{ski}}|||_*^2 \leq \frac{1}{l_1^2} \delta^2,$$

следовательно

$$|||\sigma - \sigma_{\text{smi}}|||_*^2 \leq \frac{1}{l_1^2} \delta^2 \text{ и } |||\sigma_{\text{ski}}|||_*^2 \leq \frac{1}{l_1^2} \delta^2.$$

Третье слагаемое из правой части (3.21) оценивается с помощью (3.20). Таким образом, для всей мажоранты

$$\begin{aligned} \widehat{M}_{LE}^2(v, \sigma_i, \delta, 1/\sqrt{\delta}) &\leq \\ &\leq |||u - v|||^2 + \delta \left(|||u - v|||^2 + 2 \frac{1 + \delta}{l_1} |||u - v||| + \frac{\delta(1 + \delta)}{l_1^2} \right) + \\ &+ (1 + \delta)(1 + \sqrt{\delta})\delta C^2 + (1 + \delta)(1 + \sqrt{\delta})\sqrt{\delta} \left(\frac{C_{\Omega \Gamma_1}}{l_1} \right)^2 \left(\frac{l_2}{l_1} \right)^2 = \\ &= |||u - v|||^2 + O(\sqrt{\delta}) \end{aligned}$$

и верна двусторонняя оценка

$$|||u - v|||^2 \leq \inf_{\substack{\widehat{\tau}_i \in \mathcal{H}^i \\ \beta_1 > 0, \beta_2 > 0}} \widehat{M}_{LE}^2(v, \widehat{\tau}_i, \beta_1, \beta_2) \leq |||u - v|||^2 + O(\sqrt{\delta}),$$

что доказывает утверждение (3.17). $\square$

Теорема 3.2. Пусть в условиях Теоремы 3.1 последовательность пар (τ_i, β_i) , минимизирующих $M_{LE}^2(v, \tau, \beta)$ на $\mathcal{H}_s^i \times \mathbb{R}^+$, такова, что

$$\beta_i \rightarrow 0 \text{ при } i \rightarrow \infty,$$

тогда

$$\tau_i \rightarrow \sigma \text{ в } \mathcal{H}_s \text{ при } i \rightarrow \infty. \quad (3.22)$$

Доказательство. Обозначим $M_i(v) = M_{LE}(v, \tau_i, \beta_i)$. По Теореме 3.1

$$\lim_{i \rightarrow \infty} M_i^2(v) = |||u - v|||^2,$$

то есть последовательность $\{M_i^2(v)\}_{i=1}^\infty$ ограничена, следовательно, существует такая положительная постоянная, что

$$\|\tau_i\| \leq \tilde{C}, \quad \|\text{Div } \tau_i + f\| \leq \tilde{C} \sqrt{\beta_i} \text{ и } \|F - \tau_i n\| \leq \tilde{C} \sqrt{\beta_i},$$

а также

$$\|\tau_i\|_{\mathcal{H}} \leq \tilde{C}.$$

Отсюда следует, что

$$\operatorname{Div} \tau_i \xrightarrow{i \rightarrow \infty} \operatorname{Div} \sigma \text{ в } L^2(\Omega, \mathbb{R}^3)$$

и можно выделить из $\{\tau_i\}_{i=1}^{\infty}$ слабосходящуюся подпоследовательность

$$\tau_i \rightharpoonup \bar{\tau} \text{ в } \mathcal{H}_s \quad \text{при } i \rightarrow \infty.$$

Получаем, что

$$\operatorname{Div} \bar{\tau} = \operatorname{Div} \sigma \text{ и } \bar{\tau} \in \mathbb{Q}_f.$$

Покажем, что $\bar{\tau} = \sigma$. Оценим

$$\begin{aligned} \lim_{i \rightarrow \infty} M_i^2(v) &\geq \lim_{i \rightarrow \infty} |||\tau_i - \mathbb{L} \varepsilon(v)|||_*^2 = |||v|||^2 - 2 \int_{\Omega} \varepsilon(v) : \bar{\tau} dx + \lim_{i \rightarrow \infty} |||\tau_i|||_*^2 \geq \\ &\geq |||v|||^2 - 2 \int_{\Omega} \varepsilon(v) : \bar{\tau} dx + |||\bar{\tau}|||_*^2. \end{aligned}$$

Таким образом, приходим к неравенству

$$|||v - u|||^2 \geq |||v|||^2 - 2 \int_{\Omega} \varepsilon(v) : \bar{\tau} dx + |||\bar{\tau}|||_*^2.$$

Из последнего получаем

$$- \int_{\Omega} \varepsilon(v) : \sigma dx + \frac{1}{2} |||\sigma|||_*^2 \geq - \int_{\Omega} \varepsilon(v) : \bar{\tau} dx + \frac{1}{2} |||\bar{\tau}|||_*^2. \quad (3.23)$$

Приближённое решение задачи v можно записать в виде суммы $v = w + u_0$, где $w \in V_0$. Подставим эту сумму в (3.23) и получим

$$\int_{\Omega} \varepsilon(u_0) : \sigma dx - \frac{1}{2} |||\sigma|||_*^2 \leq \int_{\Omega} \varepsilon(u_0) : \bar{\tau} dx - \frac{1}{2} |||\bar{\tau}|||_*^2,$$

что эквивалентно неравенству

$$I^*(\sigma) \leq I^*(\bar{\tau}).$$

Так как решение двойственной задачи (3.5) единственно, следовательно $\bar{\tau} = \sigma$.

□ Аналогичное утверждение верно и для мажоранты $\widehat{M}_{LE}(v, \widehat{\tau}, \beta_1, \beta_2)$, в предположении что $\beta_{1i} \rightarrow 0$ при $i \rightarrow \infty$.

Перейдём к краткому анализу локальных свойств функционалов. Обозначим за $\theta(x)$ подынтегральное выражение энергетической нормы ошибки

$$\theta(x) = \mathbb{L} \varepsilon(u(x) - v(x)) : \varepsilon(u(x) - v(x)).$$

Мажоранту M_{LE} можно представить в виде суммы двух слагаемых

$$M_{LE}^2(v, \tau, \beta) = (1 + \beta) m_{LE1}^2 + \left(1 + \frac{1}{\beta}\right) m_{LE2}^2,$$

где

$$m_{LE1}^2 = |||\tau - \mathbb{L} \varepsilon(v)|||_*^2, \quad m_{LE2}^2 = C^2 (\|\operatorname{Div} \tau + f\|^2 + \|F - \tau n\|_{\Gamma_2}^2).$$

Мажоранту $\widehat{M}_{LE}$ также можно записать в виде суммы

$$\widehat{M}_{LE}^2(v, \widehat{\tau}, \beta_1, \beta_2) = (1 + \beta_1) \widehat{m}_{LE1}^2 + \left(1 + \frac{1}{\beta_1}\right) \widehat{m}_{LE2}^2,$$

где

$$\begin{aligned} \widehat{m}_{LE1}^2 &= |||\widehat{\tau}_{\text{sm}} - \mathbb{L} \varepsilon(v)|||_*^2, \\ \widehat{m}_{LE2}^2 &= (1 + \beta_2) C^2 (\|\operatorname{Div} \widehat{\tau} + f\|^2 + \|\widehat{\tau} n - F\|_{\Gamma_2}^2) + \left(1 + \frac{1}{\beta_2}\right) \left(\frac{C_{\Omega \Gamma_1}}{l_1}\right)^2 \|\widehat{\tau}_{\text{sk}}\|^2. \end{aligned}$$

В предположениях Теоремы 3.2

$$\begin{aligned} m_{LE1}^2 &\xrightarrow{i \rightarrow \infty} |||u - v|||^2, & m_{LE2}^2 &\xrightarrow{i \rightarrow \infty} 0, \\ \widehat{m}_{LE1}^2 &\xrightarrow{i \rightarrow \infty} |||u - v|||^2, & \widehat{m}_{LE2}^2 &\xrightarrow{i \rightarrow \infty} 0. \end{aligned}$$

Поэтому в качестве индикатора погрешности, как в случае симметричного тензора τ , так и при отсутствии ограничения симметрии, можно использовать только первое слагаемое мажоранты. Обозначим его подынтегральное выражение

$$\mu_{LEs}(x) = (\mathbb{L}^{-1} \tau - \varepsilon(v)) : (\tau - \mathbb{L} \varepsilon(v)) \text{ для } \tau \in \Sigma_s(\Omega),$$

$$\mu_{LE}(x) = (\mathbb{L}^{-1}\widehat{\tau}_{\text{sm}} - \varepsilon(v)) : (\widehat{\tau}_{\text{sm}} - \mathbb{L}\varepsilon(v)) \text{ для } \widehat{\tau} \in \Sigma(\Omega).$$

Для произвольного $\delta > 0$ определим множества

$$\Omega_{\delta s} = \{x \in \Omega \mid |\mu_{LEs}(x) - \theta(x)| \geq \delta\}, \quad (3.24)$$

$$\Omega_{\delta} = \{x \in \Omega \mid |\mu_{LE}(x) - \theta(x)| \geq \delta\}. \quad (3.25)$$

Множества $\Omega_{\delta s}$ и Ω_{δ} содержат все точки области Ω , в которых локальная величина соответствующего индикатора погрешности превосходит саму погрешность более чем на δ . По аналогии с параграфом 1.3, верна следующая теорема:

Теорема 3.3. *В предположениях Теоремы 3.2*

$$\text{meas}(\Omega_{\delta s}) \xrightarrow{i \rightarrow \infty} 0, \quad \text{meas}(\Omega_{\delta}) \xrightarrow{i \rightarrow \infty} 0,$$

где meas — мера Лебега соответствующего множества.

3.3. Мажоранта для задачи о плоской деформации

Рассмотрим изотропные и однородные упругие среды, для которых компоненты тензора $\mathbb{L}$ зависят только от двух параметров материала, например, от модуля Юнга E и коэффициента Пуассона ν

$$\mathbb{L}\varepsilon = \frac{E}{1+\nu} \left(\frac{\nu}{1-2\nu} \text{tr} \varepsilon \mathbb{I} + \varepsilon \right),$$

$$\mathbb{L}^{-1}\tau = \frac{1+\nu}{E} \tau - \frac{\nu}{E} \text{tr} \tau \mathbb{I},$$

где $\mathbb{I}$ — единичный тензор второго ранга. В этом случае, введённые ранее нормы определяются соотношениями

$$|||u|||^2 = \int_{\Omega} \frac{E}{1+\nu} \left(\frac{\nu}{1-2\nu} (\text{div} u)^2 + |\varepsilon(u)|^2 \right) dx,$$

$$|||\tau|||_*^2 = \int_{\Omega} \left(\frac{1+\nu}{E} |\tau|^2 - \frac{\nu}{E} (\text{tr} \tau)^2 \right) dx.$$

Таким образом, например, оценка (3.10) для изотропного тела будет выглядеть так:

$$\begin{aligned}
|||u - v|||^2 &= \int_{\Omega} \frac{E}{1 + \nu} \left(\frac{\nu}{1 - 2\nu} (\operatorname{div}(u - v))^2 + |\varepsilon(u - v)|^2 \right) dx \leq \\
&\leq (1 + \beta) \int_{\Omega} \frac{E}{3(1 - 2\nu)} \left(\operatorname{div} v - \frac{1 - 2\nu}{E} \operatorname{tr} \tau \right)^2 dx + \\
&+ (1 + \beta) \int_{\Omega} \frac{E}{1 + \nu} \left| \varepsilon(v) - \frac{1}{3} \operatorname{tr} \varepsilon(v) \mathbb{I} - \frac{1 + \nu}{E} \operatorname{tr} \tau \mathbb{I} \right|^2 dx + \\
&+ \left(1 + \frac{1}{\beta} \right) C^2 \left(\|\operatorname{Div} \tau + f\|^2 + \|F - \tau n\|_{\Gamma_2}^2 \right).
\end{aligned}$$

В дальнейшем для численного исследования выбрана задача о плоской деформации, которая является упрощением исходной трёхмерной постановки при изложенных ниже предположениях: перемещения зависят только от двух координат: $u_1 = u_1(x_1, x_2)$, $u_2 = u_2(x_1, x_2)$, $u_3 = 0$, тогда $\varepsilon_{33} = \varepsilon_{23} = \varepsilon_{13} = 0$; $\varepsilon_{11} = \frac{\partial u_1}{\partial x_1}$, $\varepsilon_{22} = \frac{\partial u_2}{\partial x_2}$ и $\varepsilon_{12} = \frac{\partial u_1}{\partial x_2} + \frac{\partial u_2}{\partial x_1}$ также зависят только от x_1 и x_2 . Помимо этого, $\sigma_{13} = \sigma_{23} = 0$, а

$$\sigma_{33} = \nu(\sigma_{11} + \sigma_{22})$$

и компоненты тензора напряжений $\sigma_{11}, \sigma_{22}, \sigma_{12}$ не зависят от координаты x_3 . Далее, чтобы не усложнять систему обозначений, будем считать, что за ε , σ и $\mathbb{I}$ обозначаются плоские составляющие соответствующих тензоров. Тогда связь между напряжениями и деформациями будет выглядеть следующим образом:

$$\sigma = \mathbb{L} \varepsilon = \frac{E}{1 + \nu} \left(\frac{\nu}{1 - 2\nu} \operatorname{tr} \varepsilon \mathbb{I} + \varepsilon \right),$$

$$\varepsilon = \frac{1 + \nu}{E} (\sigma - \nu \operatorname{tr} \sigma \mathbb{I}).$$

3.4. Выбор аппроксимации свободного тензора

Для вычисления оценки (3.10) необходимо использовать только аппроксимации компонент тензора τ , позволяющие точно удовлетворить условию сим-

метрии, например, непрерывные кусочно-линейные аппроксимации каждой компоненты

$$\tau_h = \begin{pmatrix} \tau_{11} & \tau_{12} \\ \tau_{12} & \tau_{22} \end{pmatrix},$$

являющиеся стандартными для метода конечных элементов. Тогда необходимое условие минимума

$$\min_{\tau_h} M_{LE}^2(v, \tau_h, \beta)$$

при фиксированном β представляет собой систему линейных алгебраических уравнений относительно $3N$ неизвестных, где N — количество узлов расчётной сетки. Для найденного в результате решения системы поля τ_h константа β , минимизирующая мажоранту, находится по формуле

$$\beta = \frac{C \sqrt{\|\operatorname{Div} \tau_h + f\|^2 + \|F - \tau_h n\|_{\Gamma_2}^2}}{\|\tau_h - \mathbb{L} \varepsilon(v)\|_*}.$$

При использовании оценки (3.13) для компонент тензора $\hat{\tau}$ разумно брать специальные аппроксимации, как это впервые сделано в работах Фролова [94] и [96]. При этом, тензор разделяется на две части

$$\hat{\tau}_h = \begin{pmatrix} \hat{\tau}_{11h} & \hat{\tau}_{12h} \\ \hat{\tau}_{21h} & \hat{\tau}_{22h} \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} \hat{\tau}_{1h} & \hat{\tau}_{2h} \end{bmatrix}.$$

Для векторов $\hat{\tau}_{1h} = (\hat{\tau}_{11} \quad \hat{\tau}_{21})^T$ и $\hat{\tau}_{2h} = (\hat{\tau}_{12} \quad \hat{\tau}_{22})^T$ будем использовать аппроксимации Равьяра-Тома нулевого порядка, получая таким образом систему для $2N_e$ неизвестных, где N_e — число ребер в конечноэлементном разбиении. Константы β_1 и β_2 затем вычисляются по формулам (3.14) и (3.15).

3.5. Численные результаты

В работе Музалевского и Репина [93], в которой исследуется оценка со свободным симметричным тензором (3.10), приведены два примера работы адаптивного алгоритма для задачи о плоской деформации в областях сложной формы. Реализованные на триангуляциях непрерывные аппроксимации позволяют

вычислить гарантированную мажоранту погрешности, но приводят к росту индекса эффективности оценки. Для случая четырёхугольных сеток переоценка истинной погрешности усиливается (см. [94]) — индексы эффективности для некоторых примеров достигают десятка на сетке размером чуть более тысячи узлов. Для решения этой проблемы на четырёхугольных сетках в работе [94] были реализованы аппроксимации Равьяра-Тома нулевого порядка, а также аппроксимации Арнольда-Бюффи-Фалка, имеющие две дополнительные степени свободы на элементе, что существенно улучшило ситуацию.

В настоящем параграфе приведены некоторые характерные примеры с мажорантами погрешности (3.10) и (3.13), реализованными с непрерывными аппроксимациями и, впервые, аппроксимациями Равьяра-Тома нулевого порядка на триангуляциях, а также результаты работы адаптивных алгоритмов. В полном соответствии с ранее изложенной теорией, индикация погрешности производится по величине локальных вкладов первого слагаемого мажоранты без учёта множителя. Сохраняются обозначения η_T^{con} и η_T^{RT} для индикаторов погрешности, основанных на функциональных мажорантах (3.10) и (3.13), соответственно, за η_T^{ref} обозначается эталонный индикатор, а за η_T^{MATLAB} — стандартный индикатор пакета MATLAB, основанный на явном методе невязок.

Пример 11. Сначала проведём сравнение результатов расчёта с результатами, полученными в работе Фролова [94]. Геометрия и начальная конечноэлементная сетка представлена на рисунке 3.1(а), сетка состоит из 205 узлов и 358 треугольных элементов. В статье [94] использовалась сетка с 202 узлами и 173 четырёхугольными элементами (рисунок 3.1(б)). Область полностью закреплена по границе, то есть $\Gamma_1 = \partial\Omega$; модуль Юнга $E = 207 \times 10^9$ Па; коэффициент Пуассона $\nu = 0.3$; плотность материала $\rho = 7830$ кг/м³; объемная сила задается через ускорение $a = \begin{pmatrix} -5 & 3 \end{pmatrix}^T$ м/с².

Результаты для четырёхугольных элементов из статьи [94] представлены в таблице 3.1 для трех сеток: начальной и полученной из неё равномерным разбиением. Индекс эффективности I_{eff1} относится к непрерывным аппроксимациям

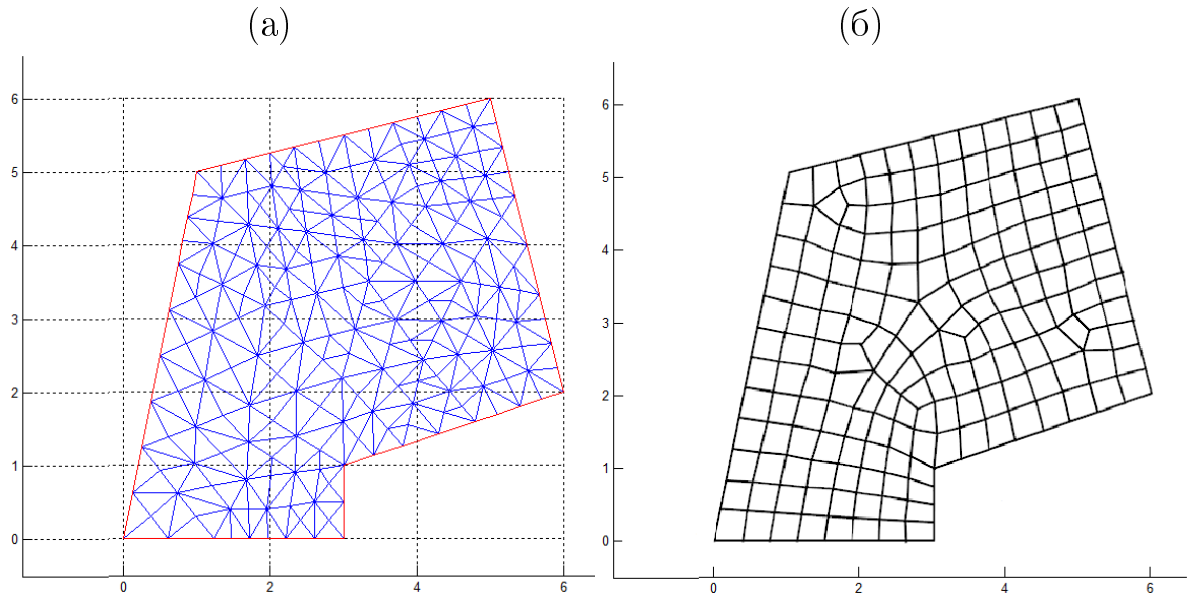


Рис. 3.1: Пример 11. Геометрия и конечноэлементные сетки

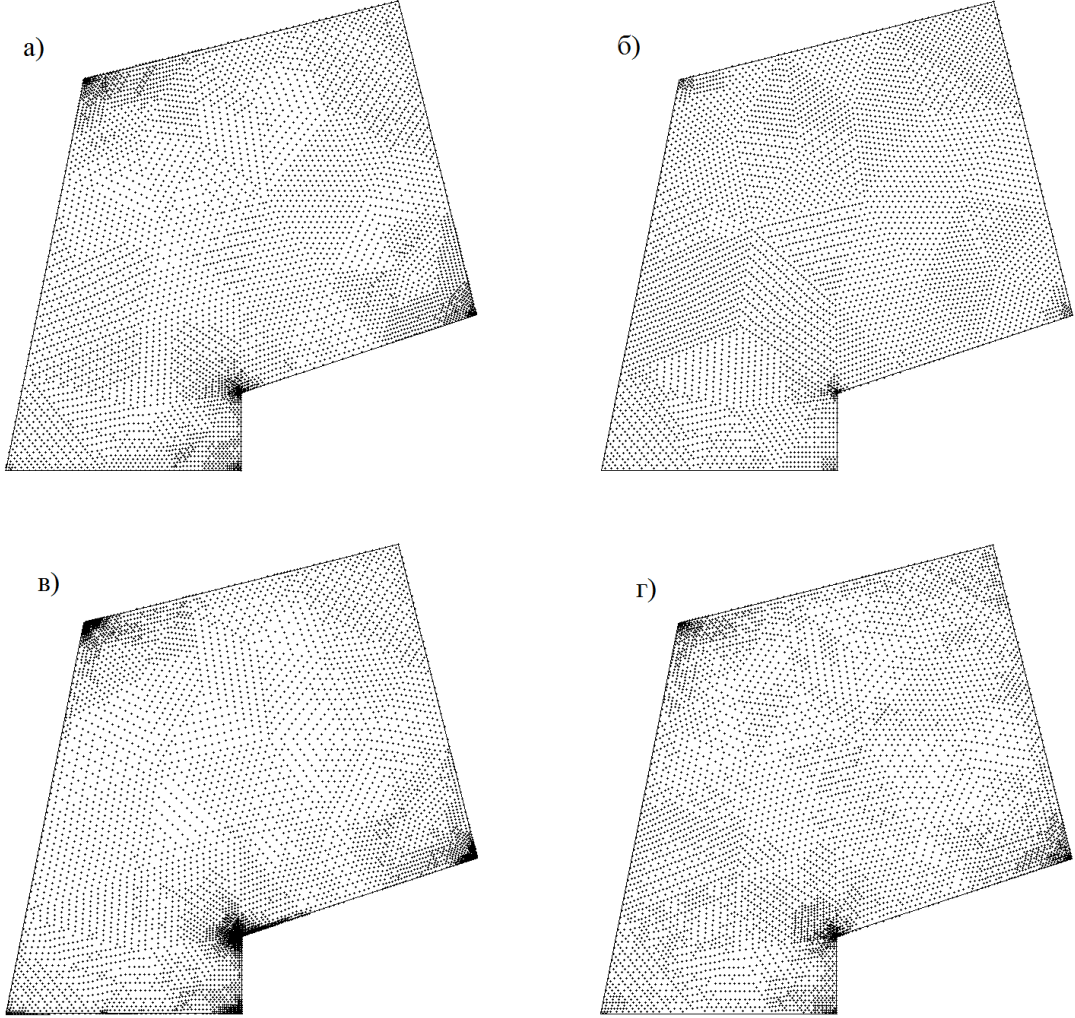
и оценке для симметричного τ , I_{eff2} и I_{eff3} к оценке для несимметричного $\hat{\tau}$ и аппроксимациям Равьяра-Тома и Арнольда-Бюффи-Фалка, соответственно. За N_{el} обозначается число конечных элементов в расчётной сетке. В таблице 3.2 приведены результаты аналогичного расчёта, полученные с помощью программного кода автора, реализованного в MATLAB. Тенденция роста индекса эффективности для мажоранты M_{LE} на треугольных элементах сохраняется, что также соответствует результатам работы Музалевского и Репина [93]. В случае использования аппроксимаций Равьяра-Тома, индекс эффективности мажоранты $\widehat{M}_{LE}$ остаётся практически постоянным. Финальные сетки (узлы), получившиеся после адаптации приведены на рисунке 3.2.

Таблица 3.1: Пример 11. Результаты расчета на четырехугольных сетках [94]

N_{el}	$ e $	$e\%$	I_{eff1}	I_{eff2}	I_{eff3}
173	0.0537	12.1	1.76	2.29	1.37
692	0.0277	6.2	1.99	2.33	1.37
2768	0.0141	3.2	2.36	2.43	1.39

Таблица 3.2: Пример 11. Результаты расчета на треугольных сетках

N_{el}	$ e $	$e\%$	$I_{eff}(M_{LE})$	$I_{eff}(\widehat{M}_{LE})$
358	0.0591	13.33	1.54	1.86
1432	0.0331	7.46	1.76	1.87
5728	0.0178	4.00	2.06	1.88

Рис. 3.2: Пример 11. Результат работы адаптивных алгоритмов с индикаторами η_T^{ref} (а), η_T^{MATLAB} (б), η_T^{con} (в), η_T^{RT} (г)

Встроенный индикатор MATLAB дает неплохой результат (близкий к эталонному), но не может использоваться в качестве критерия остановки вычислительного процесса, поскольку переоценивает истинное значение ошибки примерно в десять тысяч раз. Индикаторы, основанные на мажоранте с непрерывными

аппроксимациями и аппроксимациями Равьяра-Тома также дают адаптивную сетку, близкую к эталонной.

Пример 12. Рассмотрим теперь пример с областью, состоящей из трех частей. Геометрия представлена на рисунке 3.3. Вся область закреплена по границе, объемная сила $f = \begin{pmatrix} 0 & -1 \times 10^6 \end{pmatrix}^T$ Н/м³. Модуль Юнга для первого материала $E_I = 70 \times 10^9$ Па, коэффициент Пуассона $\nu_I = 0.34$, для второго материала $E_{II} = 210 \times 10^9$ Па, $\nu_{II} = 0.28$, для третьего материала $E_{III} = 110 \times 10^9$ Па, $\nu_{III} = 0.35$.

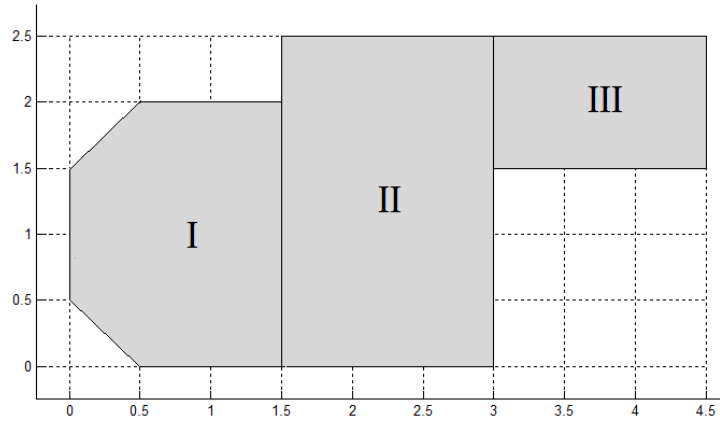


Рис. 3.3: Пример 12. Геометрия области

Таблица 3.3: Пример 12. Сравнение шагов адаптации сетки

η_T^{ref}		η_T^{MATLAB}		η_T^{con}			η_T^{RT}		
N	$e\%$	N	$e\%$	N	$e\%$	I_{eff}	N	$e\%$	I_{eff}
155	21.26	155	21.26	155	21.26	1.83	155	21.26	2.00
405	11.16	404	11.89	528	11.62	2.27	406	11.51	2.14
1672	5.38	2080	5.30	2812	5.34	2.96	1904	5.18	2.18
3579	3.59	4432	3.60	6183	3.71	3.36	4013	3.59	2.16
7113	2.55	9429	2.37	17849	2.40	3.79	8891	2.37	2.20

В таблице 3.3 приведены индексы эффективности для нескольких шагов работы адаптивных алгоритмов. Как и в предыдущем примере, индекс эффективности для мажоранты M_{LE} растёт, а для $\widehat{M}_{LE}$ практически не меняется.

Узлы сеток, получившихся на последнем шаге адаптации, приведены на рисунке 3.4. Индикатор с непрерывными аппроксимациями даёт нежелательное сгущение узлов на границе разрыва коэффициентов, которое отсутствует при использовании аппроксимаций Равьяра-Тома.

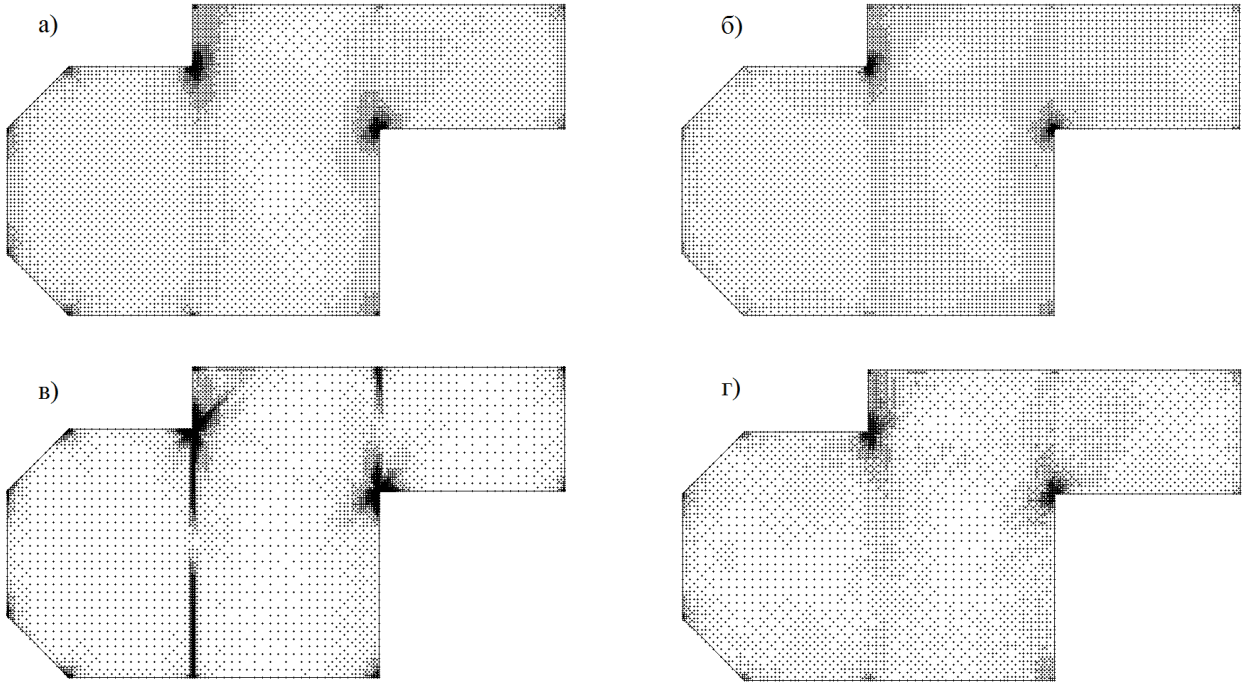


Рис. 3.4: Пример 12. Результат работы адаптивного алгоритма с индикаторами η_T^{ref} (а), η_T^{MATLAB} (б), η_T^{con} (в), η_T^{RT} (г)

Пример 13. В работе Carstensen и Rabus [97] рассмотрена тестовая задача в L-образной области, представленной на рисунке 3.5. Исследуется индикатор погрешности η_l , основанный на явном методе невязок, а также η_{av} , основанный на методе сглаживания градиента, с различными критериями отбора элементов для разбиения (за критерий отбора отвечает параметр, обозначенный авторами θ). В работе помимо классических конечных элементов с кусочно-линейными аппроксимациями были использованы неконформные элементы Крузей-Равьяра, в которых степени свободы на элементе привязаны к серединам сторон. Апостериорные оценки погрешности для различных значений коэффициента Пуассона ν представлены на рисунке 3.6. Авторы статьи отмечают повышение скорости сходимости оценок при использовании адаптивного алгоритма и элементов Кру-

зей-Равьяра. В случае, когда приближённое решение вычислялось стандартным способом с помощью конформных конечных элементов, наблюдается сильная зависимость оценки от коэффициента Пуассона, а также значительная разница между η_l и η_{av} для материала, близкого к несжимаемому.

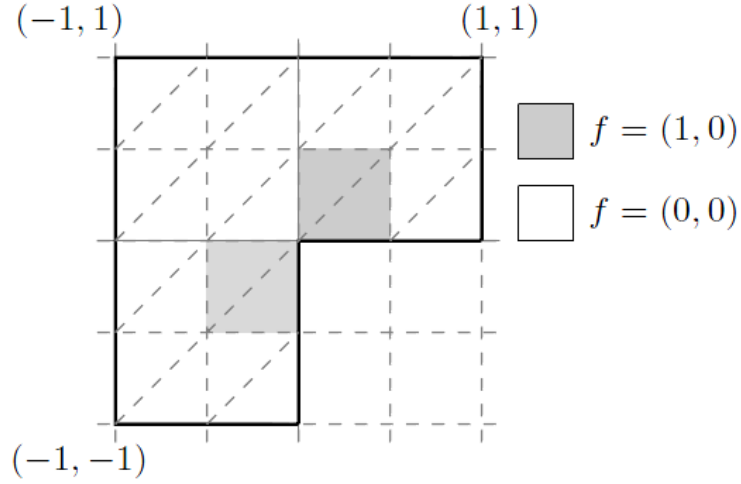


Рис. 3.5: Пример 13. Область, её начальное разбиение и правая часть уравнения, согласно [97]

Аналогичное исследование было проведено с использованием мажорант M_{LE} и $\widehat{M}_{LE}$. Зависимость индексов эффективности, а также мажорант для различных параметров материала от числа узлов расчётной сетки приведена на рисунках 3.7 и 3.9. При использовании непрерывных аппроксимаций для всех рассмотренных значений ν индекс эффективности растёт с измельчением сетки, а в случае использования аппроксимаций RT0, остаётся практически постоянным. Также важно отметить, что обе функциональные апостериорные оценки не имеют такой сильной зависимости от значения ν , как оценки, исследованные в работе [97] для стандартных конечных элементов. Таким образом, функциональная апостериорная оценка с аппроксимациями RT0 эффективна для кусочно-линейных аппроксимаций u_h в более широком диапазоне изменения значений параметров материала.

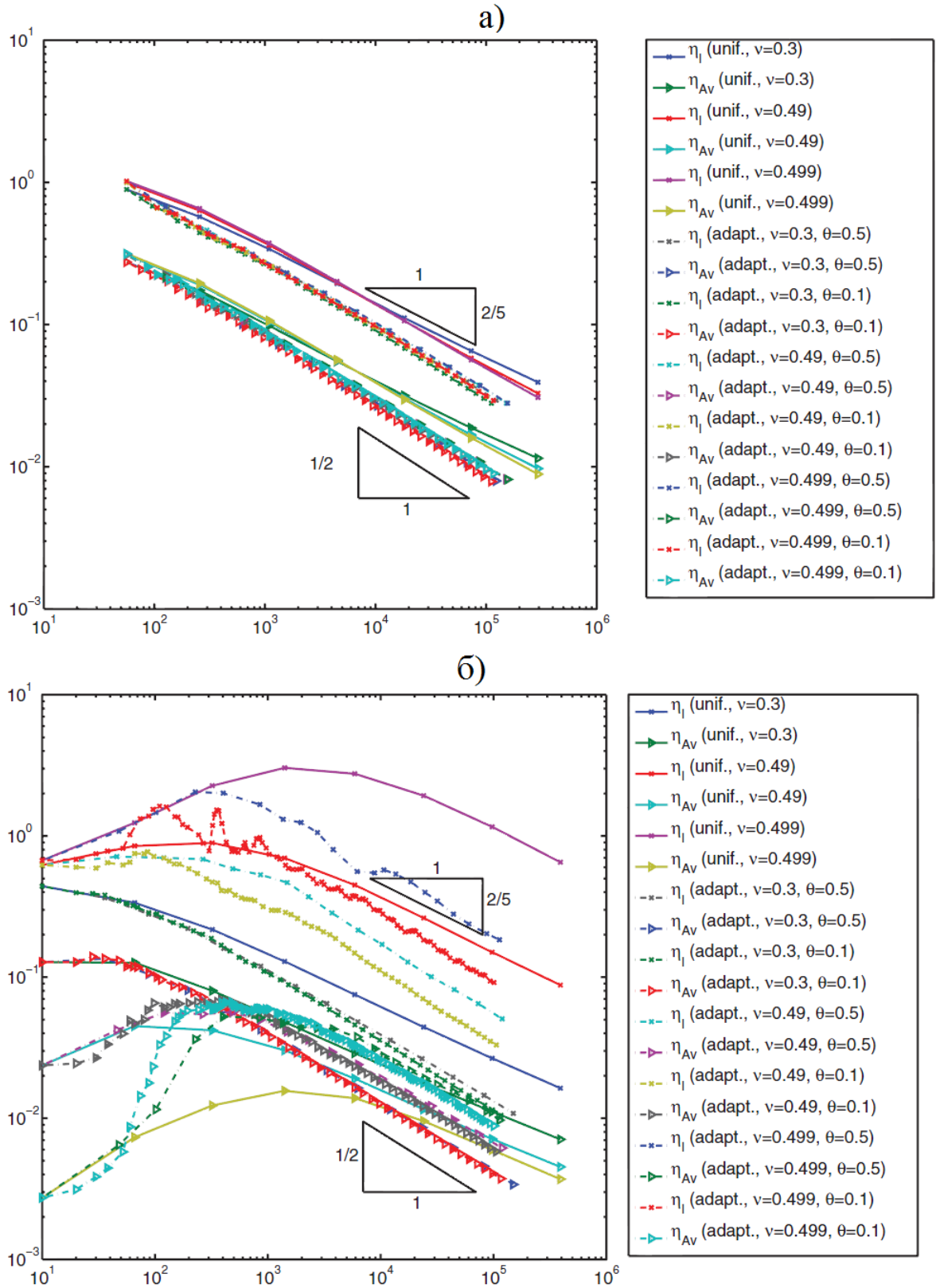


Рис. 3.6: Пример 13. Зависимость оценки погрешности с элементами Крузей-Равьяра (а) и классическими конечными элементами (б) от числа степеней свободы [97]

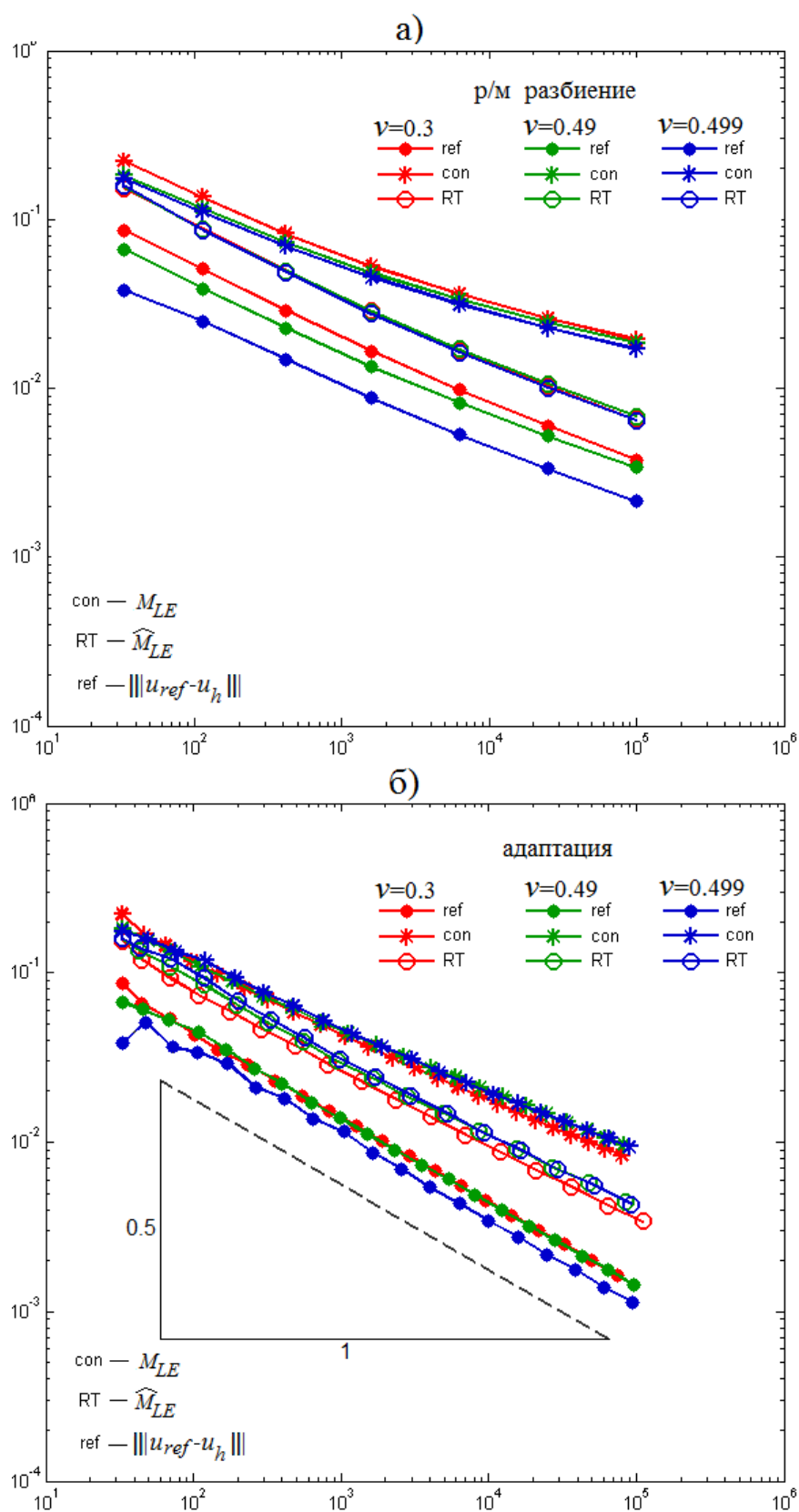


Рис. 3.7: Пример 13. Зависимость нормы погрешности и её мажоранты от числа узлов расчётной сетки для равномерного (а) и адаптивного (б) разбиения

Пример 14. Геометрия области для заключительного примера представлена на рисунке 3.8. Область состоит из двух частей и имеет отверстие сложной формы. Выделенная красным часть границы закреплена, а к части, выделенной синим, приложено давление 1×10^6 Па. Остальная часть границы свободна. Объемная сила отсутствует. Модуль Юнга для первого материала равен $E_I = 210 \times 10^9$ Па, коэффициент Пуассона $\nu_I = 0.28$, для второго материала — $E_{II} = 70 \times 10^9$ Па, $\nu_{II} = 0.34$.

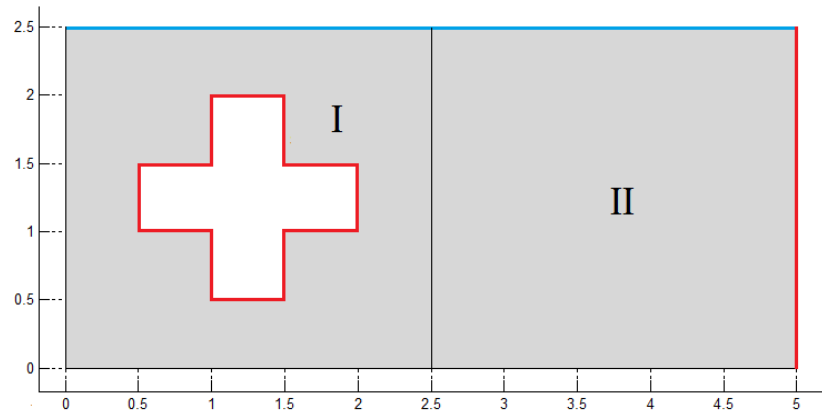


Рис. 3.8: Пример 14. Геометрия области

В таблице 3.4 отражены несколько шагов работы адаптивных алгоритмов, а на рисунке 3.10 узлы получившихся сеток. Стандартный индикатор пакета MATLAB позволяет получить сетку, близкую к эталонной, но при этом переоценивает норму погрешности в сотни раз. Сетка полученная для индикатора с непрерывными аппроксимациями η_T^{con} далека от эталонной по своей структуре. Также, для соответствующей глобальной оценки (3.10) индекс эффективности растёт с измельчением расчетной сетки. В свою очередь, оценка (3.13) и индикатор η_T^{RT} позволяют получить как более точную глобальную оценку нормы погрешности, так и близкую к эталонной адаптивную расчётную сетку.

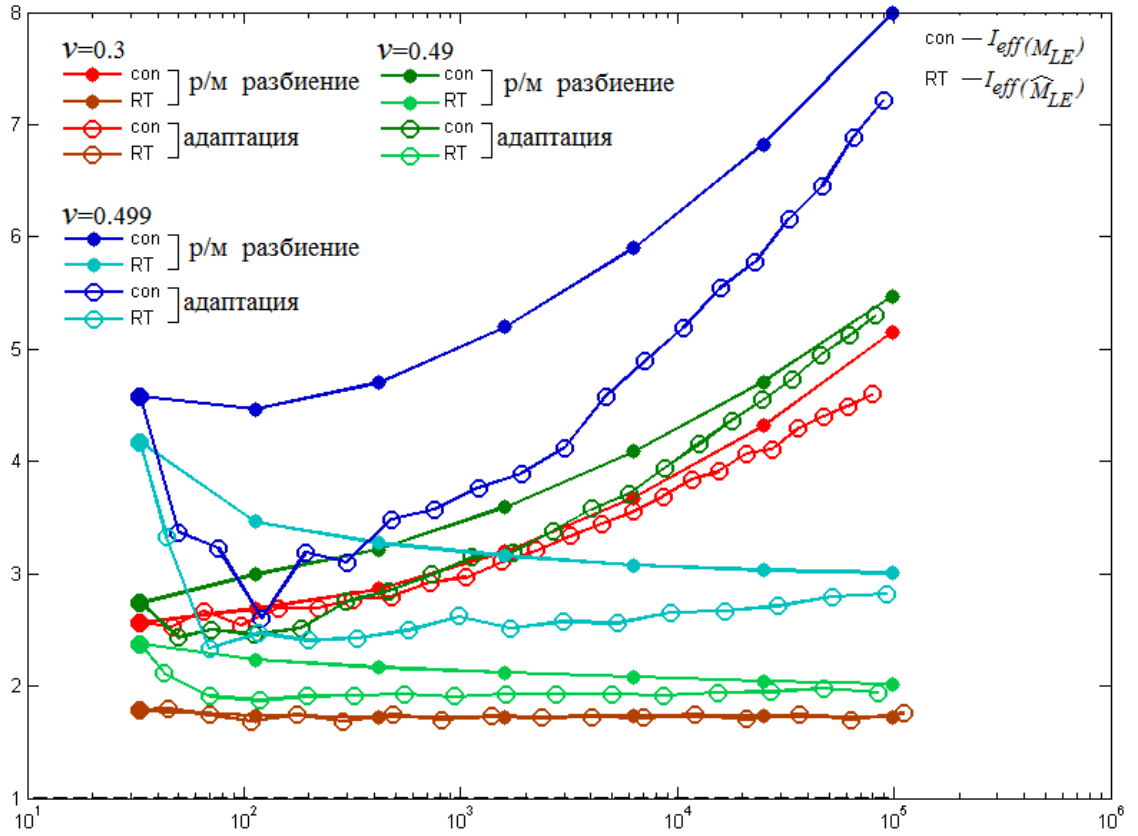


Рис. 3.9: Пример 13. Зависимость индексов эффективности от числа узлов расчётной сетки

Таблица 3.4: Пример 14. Сравнение шагов адаптации сетки

η_T^{ref}		η_T^{MATLAB}		η_T^{con}			η_T^{RT}		
N	$e\%$	N	$e\%$	N	$e\%$	I_{eff}	N	$e\%$	I_{eff}
222	19.71	222	19.71	222	19.71	8.93	222	19.71	1.70
767	10.60	718	11.01	670	12.65	13.92	961	10.08	1.61
2875	5.39	2647	5.62	2177	8.84	19.89	5339	4.38	1.64
5478	3.74	4965	3.95	3898	7.00	25.12	12541	2.94	1.60
10183	2.80	9223	2.91	6876	5.61	31.33			
		12481	2.55	9108	5.07	34.62			
				12055	4.58	38.37			

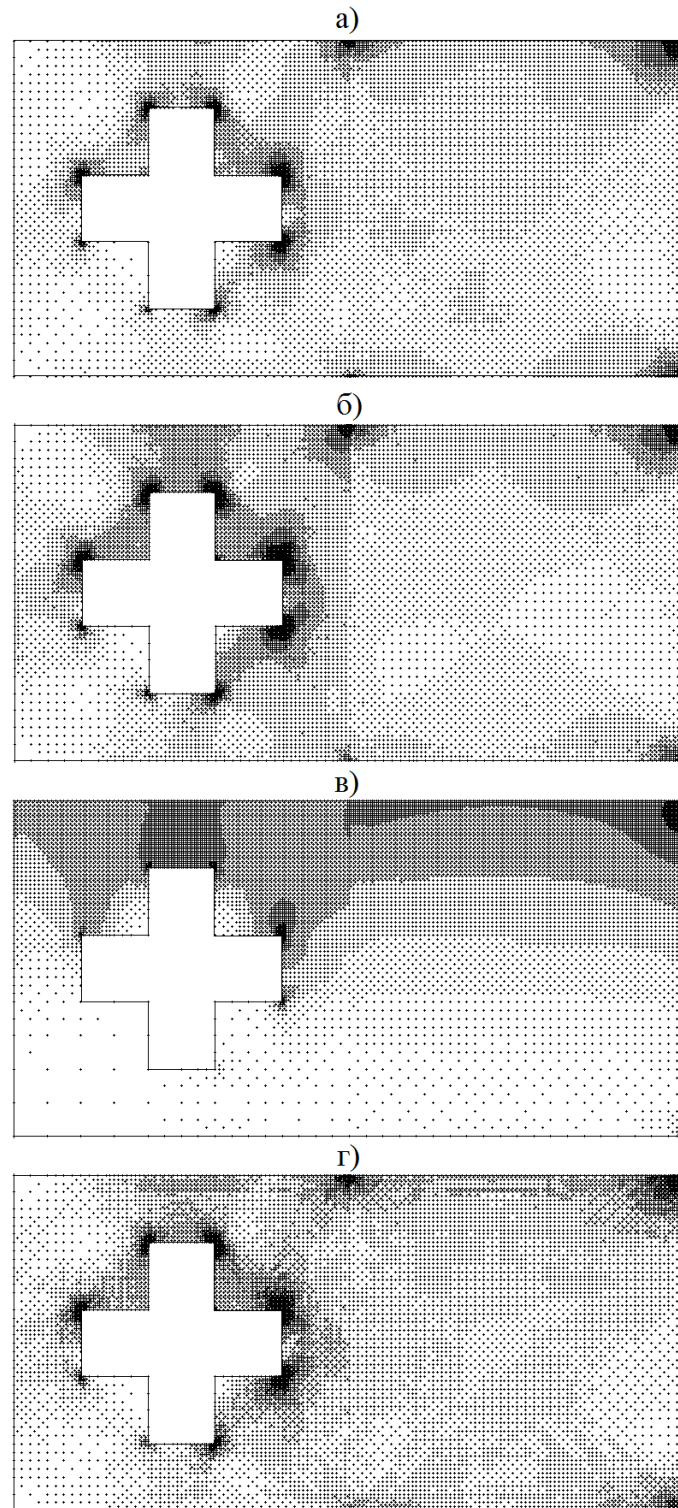


Рис. 3.10: Пример 14. Результат работы адаптивных алгоритмов с индикаторами η_T^{ref} (а), η_T^{MATLAB} (б), η_T^{con} (в), η_T^{RT} (г)

Заключение

В диссертации представлено исследование функционального подхода к апостериорному контролю точности приближённых решений эллиптических задач. Доказан ряд утверждений о вычислительных свойствах мажорант погрешности и основанных на них индикаторов для задачи реакции-диффузии и задач линейной теории упругости. Значительная часть работы посвящена вычислительному эксперименту и анализу применимости функционального подхода к построению адаптивных алгоритмов. Рассмотрены примеры для двумерных задач диффузии, реакции-диффузии и задачи о плоском деформировании упругого тела.

По результатам проведённых исследований можно заключить, что функциональный подход позволяет эффективно оценить энергетическую норму погрешности приближённых решений, полученных классическим методом конечных элементов, а также построить адаптивные расчётные сетки достаточно высокого качества с привлечением аппроксимаций, характерных для смешанных методов.

Благодарности.

Представленные результаты получены при частичной поддержке грантов РФФИ № 11-01-00531-а и № 14-01-31273-мол_а, при поддержке Правительства Санкт-Петербурга (конкурсы 2012 и 2013 годов для студентов и аспирантов) и в рамках государственного задания Министерства образования и науки Российской Федерации в 2013 году, а также при поддержке стипендии Правительства Российской Федерации на 2013-2014 уч. год.

Список литературы

1. Сьярле Ф. Метод конечных элементов для эллиптических задач. М.: Мир, 1980. 511 с.
2. Зенкевич О., Морган К. Конечные элементы и аппроксимация. М.: Мир, 1986. 318 с.
3. Марчук Г.И. Методы вычислительной математики. М.: Наука, 1989. 608 с.
4. Шайдуров В.В. Многосеточные методы конечных элементов. М.: Наука, 1989. 288 с.
5. Axelsson O., Barker V.A. Finite Element Solution of Boundary Value Problems: Theory and Computation. Classics in Applied Mathematics. Society for Industrial and Applied Mathematics, 2001. 432 p.
6. Brenner S., Scott R. The Mathematical Theory of Finite Element Methods. Springer, 2008. Vol. 15 of Texts in Applied Mathematics. 397 p.
7. Михлин С.Г. Вариационные методы в математической физике. М.: Мир, 1970. 512 с.
8. Larson M.G., Bengzon F. The Finite Element Method: Theory, Implementation, and Applications. Springer, 2013. Vol. 10 of Texts in Computational Science and Engineering. 420 p.
9. Babuška I., Rheinboldt W.C. Error estimates for adaptive finite element computations // SIAM J. Numer. Anal. 1978. Vol. 15. P. 736–754.
10. Babuška I., Rheinboldt W.C. A-posteriori error estimates for the finite element method // Int. J. Numer. Methods Eng. 1978. Vol. 12. P. 1597–1615.
11. Prager W., Synge J.L. Approximations in elasticity based on the concept of function space // Quart. Appl. Math. 1947. Vol. 5. P. 241–269.
12. Synge J.L. The hypercircle method // Studies in numerical analysis. 1974. P. 201—217.
13. Zienkiewicz O.C., Zhu J.Z. A simple error estimator and adaptive procedure for practical engineering analysis // Int. J. Numer. Methods Eng. 1987. Vol. 24.

- P. 337–357.
14. Rank E., Zienkiewicz O.C. A simple error estimator in the finite element method // Commun. Appl. Numer. Methods. 1987. Vol. 3. P. 243–249.
 15. Szymczak W.G., Babuška I. Adaptivity and error estimation for the finite element method applied to convection diffusion problems // SIAM J. Numer. Anal. 1984. Vol. 21. P. 910–954.
 16. Ainsworth M., Zhu J.Z., Craig A.W., Zienkiewicz O.C. Analysis of the Zienkiewicz-Zhu a-posteriori error estimator in the finite element method // Int. J. Numer. Methods Eng. 1989. Vol. 28, no. 9. P. 2161–2174.
 17. Verfürth R. A review of a posteriori error estimation and adaptive mesh-refinement techniques. Chichester: John Wiley & Sons; Stuttgart: B. G. Teubner, 1996. P. vi + 127.
 18. Ainsworth M., Oden J.T. A posteriori error estimation in finite element analysis. Chichester: Wiley, 2000. P. xx + 240.
 19. Neittaanmäki P., Repin S. Reliable methods for computer simulation. Error control and a posteriori estimates. Amsterdam: Elsevier, 2004. P. x + 305.
 20. Ladevèze P., Pelle J.P. Mastering calculations in linear and nonlinear mechanics. Mechanical Engineering Series. New York, NY: Springer, 2005. P. xi, 413.
 21. Repin S.I. A Posteriori Estimates for Partial Differential Equations. Berlin, New York: Walter de Gruyter, 2008. 316 p.
 22. Mali O., Neittaanmäki P., Repin S. Accuracy verification methods. Theory and algorithms. Dordrecht: Springer, 2014. P. xiii + 355.
 23. Фролов М.Е. Апостериорные оценки точности приближённых решений вариационных задач для эллиптических уравнений дивергентного типа.: Кандидатская диссертация / СПбГПУ. 2004.
 24. Clement Ph. Approximation by finite element functions using local regularization // Rev. Franc. Automat. Inform. Rech. Operat., R. 1975. Vol. 9, no. 2. P. 77–84.
 25. Carstensen C., Funken S.A. Fully reliable localized error control in the FEM //

- SIAM J. Sci. Comput. 2000. Vol. 21, no. 4. P. 1465–1484.
26. Eriksson K., Johnson C. Adaptive finite element methods for parabolic problems. I: A linear model problem // SIAM J. Numer. Anal. 1991. Vol. 28, no. 1. P. 43–77.
 27. Johnson C., Hansbo P. Adaptive finite element methods in computational mechanics // Comput. Methods Appl. Mech. Eng. 1992. Vol. 101, no. 1-3. P. 143–181.
 28. Eriksson K., Johnson C. Adaptive streamline diffusion finite element methods for stationary convection-diffusion problems // Math. Comput. 1993. Vol. 60, no. 201. P. 167–188, s1–s2.
 29. Eriksson K., Estep D., Hansbo P., Johnson C. Introduction to computational methods for differential equations // Advances in numerical analysis. Vol. IV. Theory and numerics of ordinary and partial differential equations. Proceedings of the sixth SERC summer school in numerical analysis, Leicester, UK, July 18-29, 1994. Oxford: Clarendon Press, 1995. P. 77–122.
 30. Eriksson K., Johnson C. Adaptive finite element methods for parabolic problems. IV: Nonlinear Problems // SIAM J. Numer. Anal. 1995. Vol. 32, no. 6. P. 1729–1749.
 31. Stewart J.R., Hughes T.J.R. An a posteriori error estimator and hp-adaptive strategy for finite element discretizations of the Helmholtz equation in exterior domains // Finite Elem. Anal. Des. 1997. Vol. 25, no. 1-2. P. 1–26.
 32. Carstensen C., Verfürth R. Edge residuals dominate a posteriori error estimates for low order finite element methods // SIAM J. Numer. Anal. 1999. Vol. 36, no. 5. P. 1571–1587.
 33. Carstensen C., Orlando A., Valdman J. A convergent adaptive finite element method for the primal problem of elastoplasticity // Int. J. Numer. Methods Eng. 2006. Vol. 67, no. 13. P. 1851–1887.
 34. Ainsworth M., Rankin R. Guaranteed computable error bounds for conforming and nonconforming finite element analyses in planar elasticity // Int. J. Numer.

- Methods Eng. 2010. Vol. 82, no. 9. P. 1114–1157.
35. Bank R.E., Weiser A. Some a posteriori error estimators for elliptic partial differential equations // Math. Comput. 1985. Vol. 44. P. 283–301.
 36. Babuška I., Strouboulis T. The finite element methods and its reliability. Oxford: Clarendon Press, 2001. P. xii + 802.
 37. Durán R., Rodríguez R. On the asymptotic exactness of Bank-Weiser's estimator // Numer. Math. 1992. Vol. 62, no. 3. P. 297–303.
 38. Babuška I., Strouboulis T., Upadhyay C.S. A model study of the quality of a posteriori error estimators for finite element solutions of linear elliptic problems, with particular reference to the behavior near the boundary // Int. J. Numer. Methods Eng. 1997. Vol. 40, no. 14. P. 2521–2577.
 39. Díez P., Parés N., Huerta A. Recovering lower bounds of the error by postprocessing implicit residual a posteriori error estimates // Int. J. Numer. Methods Eng. 2003. Vol. 56, no. 10. P. 1465–1488.
 40. El Sheikh A.H., Smith S., Chidiac S.E. Numerical investigation of the reliability of a posteriori error estimation for advection-diffusion equations // Commun. Numer. Methods Eng. 2008. Vol. 24, no. 9. P. 711–726.
 41. Achchab B., Agouzal A., El Fatini M., Souissi A. Robust hierarchical a posteriori error estimators for stabilized convection-diffusion problems // Numer. Methods Partial Differ. Equations. 2012. Vol. 28, no. 5. P. 1717–1728.
 42. Křížek M., Neittaanmäki P. Superconvergence phenomenon in the finite element method arising from averaging gradients // Numer. Math. 1984. Vol. 45. P. 105–116.
 43. Křížek M., Neittaanmäki P. On a global superconvergence of the gradient of linear triangular elements // J. Comput. Appl. Math. 1987. Vol. 18. P. 221–233.
 44. Оганесян Л.А., Руховец Л.А. Исследование скорости сходимости вариационно-разностных схем для эллиптических уравнений второго порядка в двумерной области с гладкой границей // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 1969. Т. 9, № 5. С. 1102–1120.

45. Zlamal M. Some superconvergence results in the finite element method. *Math. Aspects Finite Elem. Mech., Proc. Conf. Rome 1975, Lect. Notes Math.* 606, 353–362. 1977.
46. Zlamal M. Superconvergence and reduced integration in the finite element method // *Math. Comput.* 1978. Vol. 32. P. 663–685.
47. Krížek M., Neittaanmäki P. On superconvergence techniques // *Acta Appl. Math.* 1987. Vol. 9. P. 175–198.
48. Levine N. Superconvergent recovery of the gradient from piecewise linear finite-element approximations // *IMA J. Numer. Anal.* 1985. Vol. 5. P. 407–427.
49. Wahlbin L.B. Superconvergence in Galerkin finite element methods. Berlin: Springer Verlag, 1995. P. xi + 166.
50. Wheeler M.F., Whiteman J.R. Superconvergent recovery of gradients on subdomains from piecewise linear finite-element approximants // *Numer. Methods Partial Differ. Equations.* 1987. Vol. 3, no. 1. P. 65–82.
51. Du L., Yan N. Gradient recovery type a posteriori error estimate for finite element approximation on non-uniform meshes // *Adv. Comput. Math.* 2001. Vol. 14, no. 2. P. 175–193.
52. Rank E., Zienkiewicz O.C. A simple error estimator in the finite element method // *Commun. Appl. Numer. Methods.* 1987. Vol. 3. P. 243–249.
53. Zhu J.Z., Zienkiewicz O.C. Adaptive techniques in the finite element method // *Commun. Appl. Numer. Methods.* 1988. Vol. 4, no. 2. P. 197–204.
54. Zienkiewicz O.C., Zhu J.Z. The superconvergent patch recovery and a posteriori error estimates. I: The recovery technique // *Int. J. Numer. Methods Eng.* 1992. Vol. 33, no. 7. P. 1331–1364.
55. Zienkiewicz O.C., Zhu J.Z. The superconvergent patch recovery and a posteriori error estimates. II: Error estimates and adaptivity // *Int. J. Numer. Methods Eng.* 1992. Vol. 33, no. 7. P. 1365–1382.
56. Zienkiewicz O.C., Zhu J.Z. The superconvergent patch recovery (SPR) and adaptive finite element refinement // *Comput. Methods Appl. Mech. Eng.* 1992. Vol.

- 101, no. 1-3. P. 207–224.
57. Kvamsdal T., Okstad K.M. Error estimation based on superconvergent patch recovery using statically admissible stress fields // *Int. J. Numer. Methods Eng.* 1998. Vol. 42, no. 3. P. 443–472.
 58. Ródenas J.J., González-Estrada O.A., Tarancón J.E., Fuenmayor F.J. A recovery-type error estimator for the extended finite element method based on singular + smooth stress field splitting // *Int. J. Numer. Methods Eng.* 2008. Vol. 76, no. 4. P. 545–571.
 59. Ródenas J.J., González-Estrada O.A., Fuenmayor F.J., Chinesta F. Enhanced error estimator based on a nearly equilibrated moving least squares recovery technique for FEM and XFEM // *Comput. Mech.* 2013. Vol. 52, no. 2. P. 321–344.
 60. González-Estrada O.A., Natarajan S., Ródenas J.J. et al. Efficient recovery-based error estimation for the smoothed finite element method for smooth and singular linear elasticity // *Comput. Mech.* 2013. Vol. 52, no. 1. P. 37–52.
 61. Dörfler W., Nochetto R.H. Small data oscillation implies the saturation assumption // *Numer. Math.* 2002. Vol. 91, no. 1. P. 1–12.
 62. Repin S.I., Xanthis L.S. A posteriori error estimation for elasto-plastic problems based on duality theory // *Comput. Methods Appl. Mech. Eng.* 1996. Vol. 138, no. 1-4. P. 317–339.
 63. Repin S.I. A unified approach to a posteriori error estimation based on duality error majorants // *Math. Comput. Simulation.* 1999. Vol. 50, no. 1-4. P. 305–321.
 64. Repin S.I. A posteriori error estimation for variational problems with uniformly convex functionals // *Math. Comp.* 2000. Vol. 69, no. 230. P. 481–500.
 65. Repin S.I. Estimates for errors in two-dimensional models of elasticity theory // *Probl. Mat. Anal.* 2001. Vol. 22. P. 178–196.
 66. Boisse P., Perrin S., Coffignal G., Hadjeb K. Error estimation through the constitutive relation for Reissner-Mindlin plate bending finite elements // *Comput. Struct.* 1999. Vol. 73, no. 6. P. 615–627.

67. Gallimard L. A constitutive relation error estimator based on traction-free recovery of the equilibrated stress // *Int. J. Numer. Methods Eng.* 2009. Vol. 78, no. 4. P. 460–482.
68. Pled F., Chamoin L., Ladevèze P. On the techniques for constructing admissible stress fields in model verification: performances on engineering examples // *Int. J. Numer. Methods Eng.* 2011. Vol. 88, no. 5. P. 409–441.
69. Корнеев В.Г. Простые алгоритмы вычисления классических апостериорных оценок погрешности численных решений эллиптических уравнений // *Учен. зап. Казан. гос. ун-та., Сер. Физ.-матем. науки.* 2011. Т. 153, № 4. С. 11–27.
70. Frolov M., Neittaanmäki P., Repin S. On the reliability, effectivity and robustness of a posteriori error estimation methods // *Numerical methods for scientific computing. Variational problems and applications / CIMNE.* 2003. P. 153–175.
71. Repin S., Sauter S., Smolianski A. A posteriori error estimation for the Dirichlet problem with account of the error in the approximation of boundary conditions // *Computing.* 2003. Vol. 70, no. 3. P. 205–233.
72. Repin S.I. Estimates of deviations from exact solutions of elliptic variational inequalities // *Записки научн. сем. ПОМИ.* 2000. no. 271. P. 188–203.
73. Ладыженская О.А. Краевые задачи математической физики. М.: Наука, 1973. 407 с.
74. Экланд И., Темам Р. Выпуклый анализ и вариационные проблемы. М.: Мир, 1979. 400 с.
75. Repin S., Sauter S., Smolianski A. A posteriori error estimation for the Poisson equation with mixed Dirichlet/Neumann boundary conditions // *J. Comput. Appl. Math.* 2004. Vol. 164-165. P. 601–612.
76. Репин С.И., Фролов М.Е. Об апостериорных оценках точности приближенных решений краевых задач для уравнений эллиптического типа // *Журн. выч. мат. и матем. физики.* 2002. Т. 42, № 12. С. 1774–1787.
77. Frolov M., Neittaanmäki P., Repin S. On computational properties of a posteriori error estimates based upon the method of duality error majorants //

- Numerical mathematics and advanced applications. Proceedings of ENUMATH 2003, the 5th European conference on numerical mathematics and advanced applications. Berlin: Springer, 2004. P. 346–357.
78. Чурилова М.А., Фролов М.Е. Применение функциональных апостериорных оценок в адаптивных алгоритмах решения эллиптических краевых задач // XL Неделя Науки СПбГПУ: материалы международной научно-практической конференции. 2011. № 5. С. 114–116.
 79. Фролов М.Е., Чурилова М.А. Адаптация сеток на основе функциональных апостериорных оценок с аппроксимацией Равьяра-Тома // Журн. Вычисл. Матем. и Математ. Физ. 2012. Т. 52, № 7. С. 1277–1288.
 80. Чурилова М.А. Применение функционального подхода к адаптивному решению эллиптических задач // Научно-технические ведомости СПбГПУ. Сер. Физико-математические науки. 2012. № 4(158). С. 64–69.
 81. Luce R., Wohlmuth B.I. A local a posteriori error estimator based on equilibrated fluxes // SIAM J. Numer. Anal. 2004. Vol. 42, no. 4. P. 1394–1414.
 82. Bahriawati C., Carstensen C. Three Matlab implementations of the lowest-order Raviart-Thomas MFEM with a posteriori error control // Comput. Methods Appl. Math. 2005. Vol. 5, no. 4. P. 333–361.
 83. Valdman J. Minimization of functional majorant in a posteriori error analysis based on $H(\text{div})$ multigrid-preconditioned CG method // Adv. Numer. Anal. 2009. Vol. 2009. P. 15.
 84. Lazarov R., Repin S., Tomar S.K. Functional a posteriori error estimates for discontinuous Galerkin approximations of elliptic problems // Numer. Methods Partial Differ. Equations. 2009. Vol. 25, no. 4. P. 952–971.
 85. Boffi D., Brezzi F., Demkowicz L.F. et al. Mixed finite elements, compatibility conditions, and applications. Lectures given at the C.I.M.E. summer school, Cetraro, Italy, June 26–July 1, 2006. / Ed. by D. Boffi, L. Gastaldi. Berlin: Springer; Florenz: Fondazione CIME Roberto Conti, 2008. P. x + 235.
 86. Brezzi F., Fortin M. Mixed and hybrid finite element methods. New York etc.:

- Springer-Verlag, 1991. P. ix + 350.
87. Rüter M., Stenberg R. Error-controlled adaptive mixed finite element methods for second-order elliptic equations // *Comput. Mech.* 2008. Vol. 42, no. 3. P. 447–456.
 88. Repin S., Sauter S. Functional a posteriori estimates for the reaction-diffusion problem // *C. R., Math., Acad. Sci. Paris.* 2006. Vol. 343, no. 5. P. 349–354.
 89. Чурилова М.А. Вычислительные свойства функциональных апостериорных оценок для стационарной задачи реакции-диффузии // *Вестник СПбГУ. Серия 1: Математика. Механика. Астрономия.* 2014. Т. 1, № 1. С. 68–78.
 90. Churilova M.A., Frolov M.E. MATLAB implementation of functional type a posteriori error estimates with Raviart-Thomas approximation // *Progress in Industrial Mathematics at ECMI 2012.* 2014. Vol. 19. P. 379–383.
 91. Чурилова М.А. Функциональные апостериорные оценки для стационарной задачи реакции-диффузии и их вычислительные свойства // *Труды СПбГТУ.* 2013. № 515. С. 56–61.
 92. Чурилова М.А. Некоторые адаптивные алгоритмы решения задач плоской деформации и их сравнительный анализ // *Наука и инновации в технических университетах: материалы Седьмого Всероссийского форума студентов, аспирантов и молодых ученых.* 2013. С. 52–54.
 93. Muzalevsky A.V., Repin S.I. On two-sided error estimates for approximate solutions of problems in the linear theory of elasticity // *Russ. J. Numer. Anal. Math. Model.* 2003. Vol. 18, no. 1. P. 65–85.
 94. Фролов М.Е. Применение функциональных оценок погрешности со смешанными аппроксимациями к плоским задачам линейной теории упругости // *Журн. Вычисл. Матем. и Математ. Физ.* 2013. Т. 53, № 7. С. 1178–1191.
 95. Лурье А.И. Теория упругости. М.: Наука, 1970. 940 с.
 96. Фролов М.Е. О реализации контроля точности решений плоских задач теории упругости при помощи смешанных конечных элементов // *Вычислительная механика сплошных сред.* 2014. Т. 7, № 1. С. 73–81.

97. Carstensen C., Rabus H. The adaptive nonconforming FEM for the pure displacement problem in linear elasticity is optimal and robust // SIAM J. Numer. Anal. 2012. Vol. 50, no. 3. P. 1264–1283.