

УДК 531(075)

В.В. Котов, Д.Г. Арсеньев, В.А. Полянский

КВАЗИОПТИМАЛЬНОЕ БИОМОРФНОЕ ПОДАВЛЕНИЕ СЛУЧАЙНЫХ КОЛЕБАНИЙ УПРУГИХ ОБЪЕКТОВ

Рассмотрена модельная задача о подавлении случайных колебаний шарнирно опертой балки с помощью равномерно распределенных по ней активных гасителей. Предложено синтезировать регуляторы на основе модальной декомпозиции управляемого объекта с использованием линейно-квадратичного критерия качества. Предложен квазиоптимальный подход с минимизацией множества линейно-квадратичных критериев последовательно, начиная с первой собственной формы. Проведено математическое моделирование как самих вынужденных случайных колебаний, так и различных алгоритмов подавления. Проведено исследование робастности модальных регуляторов путем изменения точности задания их параметров.

ОПТИМАЛЬНОЕ УПРАВЛЕНИЕ; РОБАСТНОСТЬ; КОЛЕБАНИЯ; ДЕКОМПОЗИЦИЯ.

V.V. Kotov, D.G. Arseniev, V.A. Polyanskiy

QUASIOPTIMAL BIOMORPHIC MITIGATION IN RANDOM VIBRATION OF ELASTIC OBJECTS

The given paper investigates the model problem of mitigating random vibrations of a hinged beam using evenly distributed actuators on it. It has been proposed to synthesize the regulators based on the modal decomposition of a controlled object using the linear-quadratic criterion of quality. We have also proposed a quasioptimal method with the minimisation of multiplicity linear-quadratic criteria successively starting with the first eigenform. The mathematical modeling of forced random vibrations and various algorithms of mitigation has been conducted. The robustness of modal regulators has been investigated by varying their parameters. The results have demonstrated a very good degree of mitigation forced random vibrations of a modeling object, especially in the modal control case in comparison with other strategies to solve control problems.

OPTIMAL CONTROL; ROBUSTNESS; VIBRATIONS; DECOMPOSITION.

Применение оптимальных алгоритмов управления при активном подавлении вынужденных колебаний упругих систем имеет глубокий физический смысл, т. к. большинство критериев оптимальности носят «энергетический» характер. Низкая энергия вынужденных колебаний соответствует минимуму критерия. Этот подход широко применяется [1–5].

Вместе с тем известные результаты относятся к упругим системам с относительно небольшим количеством датчиков обратной связи и актуаторов. По механическим соображениям эти датчики не позволяют с достаточной точностью контролировать больше двух-трех собственных частот колебаний упругого объекта (например, восемь датчиков и восемь актуаторов на квадратной упругой пластине). Это приводит к

фактической ненаблюдаемости управляемого объекта. Увеличение количества датчиков приводит в случае распределенных упругих систем к плохо обусловленным нелинейным системам уравнений большой размерности для определения величины управляющих сигналов.

В [6] для преодоления плохой обусловленности предложен декомпозиционный подход. Но его применение эффективно только при проведении параллельной оптимизации расположения датчиков и актуаторов системы управления на распределенном объекте. Применение декомпозиционного подхода к задачам синтеза оптимальных систем управления по линейно-квадратичному критерию не дает однозначного результата, т. к. для поиска коэффициентов усиления в контурах обратной связи необходимо ре-

шать систему связанных нелинейных уравнений большой размерности.

Вместе с тем оптимизационный подход позволяет автоматически получать устойчивые системы управления. Несмотря на отдельные проблемы, в среднем качество переходных процессов и степень подавления вынужденных колебаний в таких системах – оптимальные, что важно для практики. Из-за большого количества переменных состояния (теоретически бесконечного) и другие методы синтеза устойчивой системы управления являются очень трудоемкими.

Большие преимущества модального управления и декомпозиционного подхода позволяют искать решения задачи синтеза регуляторов системы управления распределенными объектами с помощью квазиоптимальных алгоритмов.

Недостаток многих оптимальных алгоритмов – большая чувствительность принимаемых решений к изменению параметров распределенного объекта. Поэтому исследование робастности модального управления является критически важным для их применения на практике.

Постановка задачи оптимального управления колебаниями распределенного объекта

За исключением специальных случаев автоколебаний и параметрического резонанса можно считать колебания упругих систем малыми по амплитуде. В этом случае уравнения управляемого механического объекта можно рассматривать в линейном приближении:

$$\begin{aligned} \dot{X} &= AX + BU + Gf, \\ Y &= CX, \\ X(0) &= X_0, \end{aligned} \quad (1)$$

где X – вектор переменных состояния объекта размерности $[n]$; Y – вектор наблюдений размерности $[m]$; U – вектор управлений размерности $[l]$; f – вектор внешних воздействий размерности $[q]$; X_0 – вектор начальных условий; A – матрица линеаризованной системы уравнений, описывающей объект управления, размерности $[n \times n]$; G – матрица внешних воздействий линеаризованной системы уравнений раз-

мерности $[n \times l]$; B – матрица управления линеаризованной системы уравнений размерности $[n \times q]$; C – матрица наблюдателя размерности $[m \times n]$.

Требуется найти вектор управляющих воздействий U , обеспечивающий снижение амплитуд упругих колебаний переменных состояния X для широкого класса внешних гармонических воздействий f .

Задача состоит в минимизации функционала $J(U) = \int_0^{\infty} \|X(\omega)\|^2 \chi(\omega) d\omega$, где ω – частота внешнего гармонического воздействия; $\chi(\omega)$ – весовая функция; $X(\omega)$ – вектор амплитуды гармонических колебаний переменных состояния.

Решение этой задачи в случае упругого объекта с сосредоточенными актуаторами и датчиками, измеряющими текущее состояние системы [6], приводит к линейным уравнениям относительно величины управляющих воздействий вида $AU = B$, где A – матрица податливости объекта по отношению к воздействию актуаторов.

Полученное оптимальное управление требует измерения всего вектора состояния и хорошей обусловленности матрицы A . И то и другое требование в упругих распределенных системах не выполняется. Ввиду бесконечного числа собственных форм, у них формально нарушено условие наблюдаемости, а обусловленность матрицы A зависит от соотношения размеров и в случае стержней, плоских объектов или оболочек в принципе не может быть хорошей.

Еще одним недостатком данной оптимальной постановки является программный характер оптимального управления, что в случае неточной идентификации модели распределенного объекта автоматически приведет к дополнительным ошибкам регулирования. К аналогичным результатам приводит использование H_2 и H_{∞} критериев.

Поэтому более подходящей постановкой задачи представляется линейно-квадратичный критерий качества, учитывающий затраты на управление и автоматически обеспечивающий устойчивую систему управления линейной отрицательной обратной связью, статические ошибки

регулирования в которой зависят только от величины коэффициентов обратных связей и в первом приближении не связаны с точностью идентификации. Прямое использование критерия приводит к системе нелинейных уравнений Лурье–Риккати.

Для преодоления вычислительных проблем предлагается использовать квазиоптимальный декомпозиционный подход. Помимо упрощения оптимизационных процедур он позволяет решить ряд других проблем при проектировании систем управления распределенными объектами.

Стандартный подход предполагает, что датчики обратных связей расположены в местах приложения управляющих воздействий. Таким образом, числа m и l совпадают, и можно построить m контуров локальной обратной связи, в каждом из которых организовать управление вида

$$U_j = -H_j Y_j, \quad (2)$$

где U_j – компонента вектора управления; Y_j – компонента вектора наблюдения; H_j – оператор системы управления в j -м контуре обратной связи.

Как правило, в контурах обратной связи используются ПИД-регуляторы, т. е. в пространстве переменных Лапласа $H_j(p)$ является дробной рациональной функцией со знаменателем и числителем второго порядка. При таком подходе часть объекта, управление которым производится в локальном контуре обратной связи, моделируется в виде сосредоточенной массы и упругих связей, что приближенно отражает реальное положение.

В данном случае появляется ряд проблем:

- Отсутствие учета взаимовлияния приводов, установленных на одном распределенном объекте, друг на друга и связанные с этим затраты дополнительной мощности и ошибки регулирования.

- Большое количество изолированных контуров обратных связей снижает помехозащищенность всей системы управления, т. к. контуры управления связаны через сам упругий объект, и влияние помех может нарастать с ростом числа контуров. Более того, возможны эффекты типа «само-

синхронизации вибраторов». Уменьшение количества обратных связей автоматически приведет к увеличению ошибок, т. к. часть приводов окажется не задействованной.

- Не разработан общий подход в случае, когда количество датчиков обратных связей не совпадает с количеством приводов.

Проведем декомпозицию. Собственные формы движения упругого объекта задают матрицу неособого преобразования S , такого, что SAS^{-1} имеет диагональный вид. Умножим правую и левую части системы (3) на матрицу S и сделаем замену вида $SX = q$, тогда получим систему

$$\begin{aligned} \dot{q} &= SAS^{-1}q + SBU + SGf, \\ Y &= CS^{-1}q, \\ q(0) &= SX_0, \end{aligned} \quad (3)$$

где q – вектор коэффициентов собственных форм движения упругого объекта размерности $[n]$, который заменит вектор переменных состояния.

Некоторые сложности могут возникнуть при определении вектора q по данным датчиков Y . Однако мы полагаем, что количества датчиков достаточно для невырожденности информационной матрицы $(C^T C)$. Тогда для определения вектора q воспользуемся обобщенной процедурой обращения матрицы C :

$$q = S(C^T C)^{-1} C^T Y, \quad (4)$$

где $S(C^T C)^{-1} C^T$ – матрица пересчета вектора наблюдений в модули собственных форм упругого объекта.

Управление будем выбирать в виде $U = kF(q^* - q)$, где q^* – задание на значение модулей формы; k – коэффициент усиления, который может быть в общем случае оператором (например, ПИД-регулятором); F – матрица такая, что SBF имеет диагональную структуру.

Допустим, что выбор такой матрицы F возможен. Тогда из системы (1) получим:

$$\begin{aligned} \dot{q} &= \Lambda_A q + k\Lambda_B(q^* - q) + SGf, \\ q &= S(C^T C)^{-1} C^T Y, \\ q(0) &= SX_0, \end{aligned} \quad (5)$$

где $\Lambda_A = SAS^{-1}$ и $\Lambda_B = SBF$ – диагональные матрицы.

Уравнения (5) в отличие от уравнений (1) являются несвязанными, что позволяет при синтезе управления использовать только часть переменных вектора q , варьируя число переменных в зависимости от требований к качеству подавления вибраций. Для использования преимуществ декомпозиции проведем оптимизацию по каждому уравнению системы (5) отдельно. Это приведет к системе критериев вида

$$J_k\{U_k\} = \int_0^{\infty} (q_k^2 Q_k + U_k^2 R_k) dt, \quad k = 1, \dots, n,$$

где U_k, q_k – компоненты соответствующих векторов q, U ; Q_k, R_k – весовые коэффициенты критерия, соответствующие номеру собственной формы распределенного упругого объекта. Минимизация критериев может быть проведена последовательно и позволяет получить динамические регуляторы первого порядка для каждой моды колебаний. Весовые коэффициенты позволяют учитывать жесткость каждой собственной формы, и их выбор возможен как по стандартным для линейно-квадратичного критерия правилам, так и с учетом ограничений на величину и частотный диапазон управляющих сигналов.

Сравнение различных подходов к подавлению вынужденных колебаний на модельном объекте

В качестве модельного объекта выбрана балка Бернулли, шарнирно опертая по концам. Колебания балки возбуждаются приложением в ее середине изгибающего момента M_B , изменяющегося случайным образом. Угол поворота касательной к средней линии балки $\varphi_j = \varphi(x_j, t)$ в каждый момент времени измеряется в десяти поперечных сечениях, выбранных равномерно по длине балки, исключая концы. В этих же сечениях могут быть приложены управляющие моменты M_j , с целью уменьшения амплитуды изгибных колебаний балки. Уравнения движения подробно описаны в [7].

Оптимизируем управление в нашей системе с помощью известного в литературе подхода: линейно-квадратичного регулятора [8].

Рассмотрим уравнение для главных координат:

$$\ddot{\beta} + N\dot{\beta} + \Omega^2\beta = M_B u' \left(\frac{l}{2} \right) + \sum_{j=1}^{10} M_j(x_j) u'(x_j), \quad (6)$$

где N – коэффициент демпфирования; $\Omega^2 = \frac{EI}{\rho A} \left(\frac{k\pi}{l} \right)^4$ – квадрат собственной частоты изгибных колебаний балки; M_B – внешний изгибающий момент.

Преобразуем (8) к динамической системе первого порядка:

$$\begin{aligned} \dot{X} &= AX + BU + Gf, \\ Y &= CX, \end{aligned} \quad (7)$$

где $X(t) = \begin{bmatrix} \beta \\ \dot{\beta} \end{bmatrix}$ – вектор состояния;

$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\Omega^2 & -N \end{bmatrix}$ – матрица системы;

$B = \begin{bmatrix} 0 \\ u'(x) \end{bmatrix}$ – матрица управления.

В случае равномерного состояния закон управления, основанный на обратной связи, является линейным временным инвариантом состояний и может быть записан в следующей форме $U = -KX$, где K – регулятор, который нужно определить.

В рамках классического управления с помощью линейного-квадратичного регулятора (LQR) минимизируется следующий функционал:

$$J = \frac{1}{2} \int_0^{\infty} (X^T Q X + U^T R U) dt \rightarrow \min,$$

где Q и R представляют весовые коэффициенты на различных каналах состояния и управления. Соответствуя задаче оптимального управления, матрица Q должна быть симметричной и неотрицательной, а матрица R симметричной и положительно определенной.

Закон управления дается следующим выражением $U = -K_{LQR} X$, с коэффициентом усиления $K_{LQR} = R^{-1} B^T P$.

Постоянная матрица P является решением уравнения Лурье–Риккати

$$A^T P + PA + Q - PBR^{-1}B^T P = 0.$$

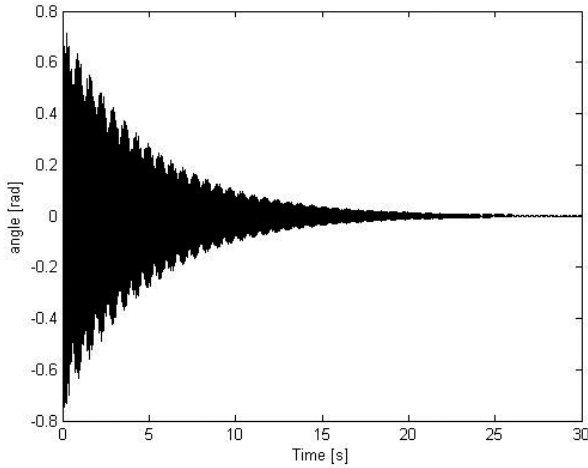


Рис. 1. Осциллограмма сигнала с датчика 2 при управлении с помощью линейно-квадратичного регулятора

Тогда уравнение состояния из системы (9) преобразуется к следующему виду:

$$\dot{X} = (A - BK_{LQR})X + Gf.$$

Результат управления колебаниями модельного объекта можно увидеть на рис. 1.

Необходимым условием применения квазиоптимальных подходов является низкая чувствительность результатов подавления колебаний с помощью синтезированных регуляторов к изменениям параметров объекта и точности задания коэффициентов регуляторов. Аналитическое исследование требует в случае нашего модельного объекта громоздких вычислений, поэтому целесообразно провести численное моделирование работы системы управления, построенной по принципу модальной декомпозиции, и сравнить результаты с применяемыми для этой цели локальными регуляторами. Тем более что в целом ряде источников [1–5] локальное управление рассматривается как более точное и робастное.

Для подавления случайных колебаний балки применим два других алгоритма управления.

Первый соответствует мехатронному подходу [9, 10] (рис. 2), в рамках которого организуется управление с обратной связью по измерениям углов:

$$M_j = -K_j \varphi(x_j, t), \quad (8)$$

где K_j – коэффициент обратной связи в j -м сечении.

Второй алгоритм отражает суть модального контроля (рис. 3, 4), в котором управляющий момент в каждом сечении сформируем в виде

$$M_j(t) = -K_j \sum_{k=1}^m s_{k,j} p_k(t), \quad (9)$$

где $p_k(t) = \sum_{j=1}^{10} \varphi(x_j, t) \vartheta_k(x_j)$ – скалярное

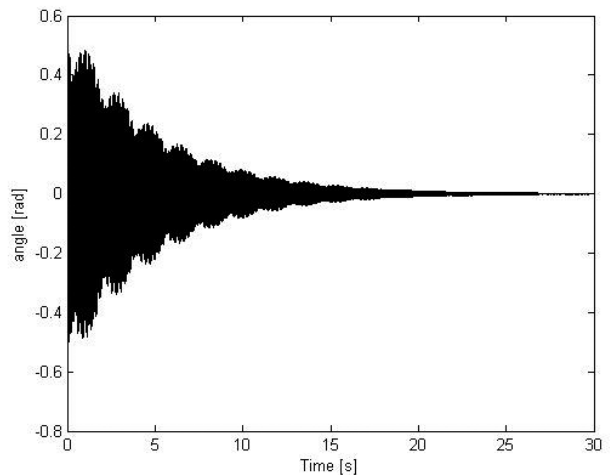


Рис. 2. Осциллограмма сигнала с датчика 2 под управлением при локальном замыкании десяти контуров обратной связи

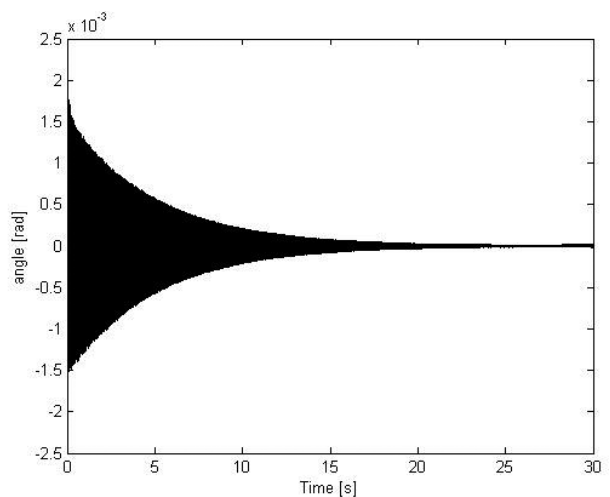


Рис. 3. Осциллограмма сигнала с датчика 2 при модальном управлении по четырем формам (четыре контура обратной связи)

Весовые коэффициенты $s_{k,j}$ заданы с точностью до четырех значащих цифр после запятой

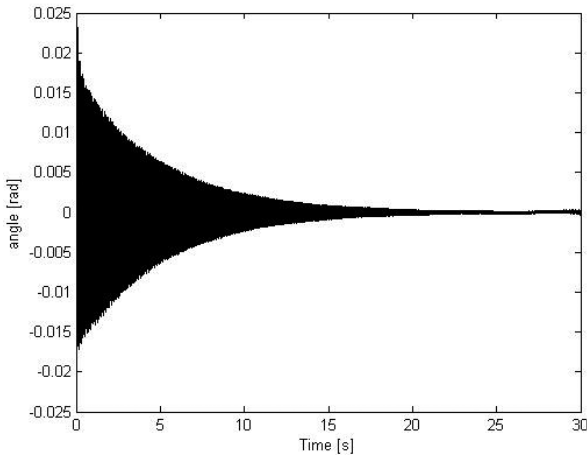


Рис. 4. Оциллограмма сигнала с датчика 2 при модальном управлении по четырём формам (четыре контура обратной связи) Весовые коэффициенты $s_{k,j}$ заданы с точностью до знака

произведение вектора, образованного значениями углов в сечениях, где установлены датчики, и вектора k -й формы колебаний, составленного из значений, вычисленных в тех же сечениях; $s_{k,j}$ — весовые коэффициенты; $m \leq 10$.

Коэффициенты обратной связи как в случае локального, так и в случае модального управления будем брать одинаковыми во всех сечениях и равными $K_j = 100$ Нм/рад.

Рассмотрим результаты применения предлагаемого квазиоптимального подхода. На рис. 5, 6 представлены результаты подавления широкополосных случайных колебаний при последовательной LQR оптимизации по различному числу собственных форм колебаний.

Результаты моделирования показывают значительные преимущества модального управления по сравнению с классическим подходом, основанном на использовании линейно-квадратичного регулятора. В свою очередь модальное управление при меньшем числе контуров обратной связи четыре против десяти оказывается эффективнее локального управления. Даже в том случае, когда коэффициенты распределения усилий актуаторов по формам заданы с точностью до знака, удастся получить более высокую степень подавления колебаний, чем при локальном управлении по десяти контурам с обратной связью.

Проведено исследование различных подходов подавления колебаний упругой балки, вызванных приложением внешнего изгибающего момента, изменяющегося по случайному закону.

Полученные результаты моделирования показали, что применение разработанных квазиоптимальных алгоритмов модального контроля способствует более точному управлению системой по сравнению с клас-

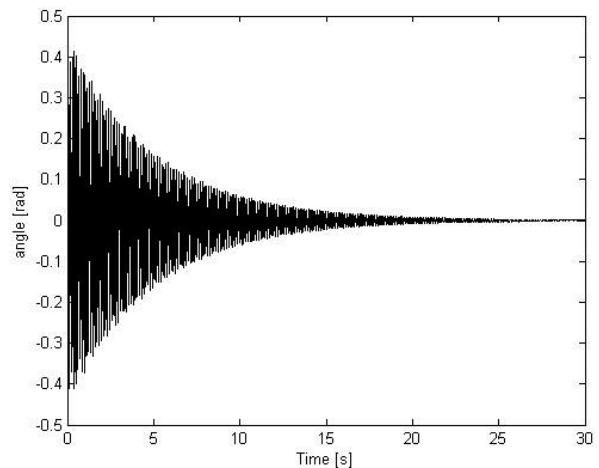


Рис. 5. Оциллограмма сигнала с датчика 2 при модальном управлении по одной форме (один контур обратной связи) Весовые коэффициенты $s_{k,j}$ заданы с точностью до знака

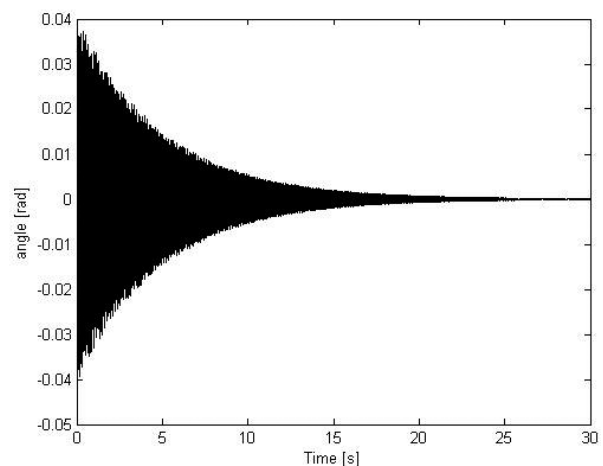


Рис. 6. Оциллограмма сигнала с датчика 2 при модальном управлении по трем формам (три контура обратной связи) Весовые коэффициенты $s_{k,j}$ заданы с точностью до знака

сическим оптимальным подходом на базе линейно-квадратичного регулятора. Также выяснено, что при сопоставимом числе обратных связей и тех же коэффициентах усиления K_j эффективность модального управления на порядок выше эффективности управления с локальными обратными связями.

На модельном объекте удалось также установить робастность модального управления.

Высокая степень подавления вибраций была достигнута с помощью модаль-

ного управления даже в том случае, когда весовые коэффициенты $s_{k,j}$ задавались с точностью до знака, доказывая тем самым робастность предложенного оптимального алгоритма.

Предложен квазиоптимальный алгоритм последовательной настройки контуров модального управления. Применение такого алгоритма на практике позволяет экспериментальным путем определить количество собственных форм, необходимое для подавления вынужденных случайных колебаний с заданной точностью.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Stavroulakis G.E., Foutsitzi G., Hadjigeorgiou E., Marinova D., Baniotopoulos C.C. Design and robust optimal control of smart beams with application on vibrations suppression // *Advances in Engineering Software*. 2005. Vol. 36. Pp. 806–813.
2. Shia W., Alsarheed M., Schuster E., Walker M.L., Leuer J., Humphreys D.A., Gates D.A. Multivariable model-based shape control for the National Spherical Torus Experiment (NSTX) // *Fusion Engineering and Design*. 2011. Vol. 86. Pp. 1107–1111.
3. Stavroulakis G.E., Marinova D.G., Hadjigeorgiou E., Foutsitzi G., Baniotopoulos C.C. Robust active control against wind-induced structural vibrations // *J. Wind Eng. Ind. Aerodyn.* 2006. Vol. 94. Pp. 895–907.
4. Fisco N.R., Adeli H. Smart structures: Part 2. Hybrid control systems and control strategies *Scientia Iranica // Transactions A: Civil Engineering*. 2011. Vol. 18. Pp. 285–295.
5. Kucuk I. et al. Optimal control of a distributed parameter system with applications to beam

- vibrations using piezoelectric actuators // *J. of the Franklin Institute* [электронный ресурс] / URL: <http://dx.doi.org/10.1016/j.jfranklin.2012.10.008>
6. Захаров М.Г., Первозванский А.А. Особенности построений высокоточных систем управления полем перемещения упругих тел // *Машиноведение*. 1988. № 4. С. 84–89.
7. Беляев А.К., Котов В.В., Полянский В.А., Смирнова Н.А. Биоморфное управление в задаче об активном подавлении колебаний // *Вестник СПбГУ. Математика. Механика. Астрономия*. 2014. Т. 1. № 1. С. 96–106.
8. Первозванский А.А. Курс теории автоматического управления: учеб. пособ. М.: Наука. Гл. ред. физматлит, 1986. 616 с.
9. Nguyen Q., Tong L. Shape control of smart composite plate with non-rectangular piezoelectric actuators // *Composite Structures*. 2004. Vol. 66. Pp. 207–214.
10. Kekana M. A static shape control model for piezo-elastic composite structures // *Composite Structures*. 2003. Vol. 59. Pp. 129–135.

REFERENCES

1. Stavroulakis G.E., Foutsitzi G., Hadjigeorgiou E., Marinova D., Baniotopoulos C.C. Design and robust optimal control of smart beams with application on vibrations suppression, *Advances in Engineering Software*, 2005, Vol. 36, Pp. 806–813.
2. Shia W., Alsarheed M., Schuster E., Walker M.L., Leuer J., Humphreys D.A., Gates D.A. Multivariable model-based shape control for the National Spherical Torus Experiment (NSTX), *Fusion Engineering and Design*, 2011, Vol. 86, Pp. 1107–1111.
3. Stavroulakis G.E., Marinova D.G., Hadjigeorgiou E., Foutsitzi G., Baniotopoulos C.C. Robust active control against wind-induced structural vibrations, *Journal Wind Eng. Ind. Aerodyn*, 2006,

- Vol. 94, Pp. 895–907.
4. Fisco N.R., Adeli H. Smart structures: Part 2. Hybrid control systems and control strategies *Scientia Iranica, Transactions A: Civil Engineering*, 2011, Vol. 18, Pp. 285–295.
5. Kucuk I. et al. Optimal control of a distributed parameter system with applications to beam vibrations using piezoelectric actuators, *Journal of the Franklin Institute*. Available: <http://dx.doi.org/10.1016/j.jfranklin.2012.10.008>
6. Zakharov M.G., Pervozvanskiy A.A. Osobennosti postroyeniya vysokotochnykh sistem upravleniya polem peremeshcheniya uprugikh tel, *Mashinovedeniye*, 1988, No. 4, Pp. 84–89. (rus)
7. Belyayev A.K., Kotov V.V., Polyanskiy V.A.,



Smirnova N.A. Biomorfnoye upravleniye v zadache ob aktivnom podavlenii kolebaniy, *Vestnik Sankt-Peterburgskogo universiteta. Matematika. Mekhanika. Astronomiya*, 2014, Vol. 1. No. 1. Pp. 96–106. (rus)

8. **Pervozvanskiy A.A.** *Kurs teorii avtomaticheskogo upravleniya*. Moscow: Nauka Gl. red. fizmatlit Publ., 1986, 616 p. (rus)

9. **Nguyen Q., Tong L.** Shape control of smart composite plate with non-rectangular piezoelectric actuators, *Composite Structures*, 2004, Vol. 66, Pp. 207–214.

10. **Kekana M.** A static shape control model for piezo-elastic composite structures, *Composite Structures*, 2003, Vol. 59, Pp. 129–135.

КОТОВ Виталий Владимирович – аспирант кафедры физики и математического моделирования в механике Санкт-Петербургского государственного политехнического университета.

195251, Россия, Санкт-Петербург, ул. Политехническая, д. 29.

E-mail: kotov.vitaliy@gmail.com

KOTOV, Vitaly V. *St. Petersburg Polytechnic University.*

195251, Politekhnikeskaya Str. 29, St. Petersburg, Russia.

E-mail: kotov.vitaliy@gmail.com

АРСЕНЬЕВ Дмитрий Германович – проректор Санкт-Петербургского государственного политехнического университета, доктор технических наук.

195251, Россия, Санкт-Петербург, ул. Политехническая, д. 29.

E-mail: imop@imop.spbstu.ru

ARSENIEV, Dmitriy G. *St. Petersburg Polytechnic University.*

195251, Politekhnikeskaya Str. 29, St. Petersburg, Russia.

E-mail: imop@imop.spbstu.ru

ПОЛЯНСКИЙ Владимир Анатольевич – профессор кафедры физики и математического моделирования в механике Санкт-Петербургского государственного политехнического университета, доктор технических наук.

195251, Россия, Санкт-Петербург, ул. Политехническая, д. 29.

E-mail: vapol@mail.ru

POLYANSKIY, Vladimir A. *St. Petersburg Polytechnic University.*

195251, Politekhnikeskaya Str. 29, St. Petersburg, Russia.

E-mail: vapol@mail.ru