УДК 519.3

М.Р. Петриченко

Санкт-Петербургский государственный политехнический университет

ТИПИЧНЫЕ И НЕТИПИЧНЫЕ ПРЕДЕЛЬНЫЕ ЗАДАЧИ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ КРОККО

Традиционная формулировка предельной задачи Крокко предполагает зависимость коэффициента переноса от плотности распределения концентрации. В этом случае предельная задача для уравнения Крокко связана с условием минимума положительного распределения, а само уравнение Крокко равносильно канонической системе двух уравнений. Доказывается возможность погружения потока предельной задачи в поле экстремалей, монотонность и выпуклость потенциала Крокко. В ряде задач распределение коэффициента переноса зависит от плотности потока консервативной примеси, т.е. от градиента плотности распределения концентрации. В этом случае существуют простые решения предельной задачи Крокко с компактным носителем. Иначе, решения сосредоточены на множестве конечной меры.

УРАВНЕНИЕ КРОККО, ПРЕДЕЛЬНАЯ ЗАДАЧА, КАНОНИЧЕСКАЯ СИСТЕМА УРАВНЕНИЙ, МИНИМУМ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ, ПОЛЕ ЭКСТРЕМАЛЕЙ, ПОТОК.

Введение

Уравнение Крокко (Луиджи Крокко (L. Crocco), 1909–1986, – выдающийся итальянский ученый) возникает в нелинейной предельной задаче переноса на компакте. Исторически уравнение Крокко впервые появляется в предельной задаче для скоростного поля потока вязкого газа [1, 2]. И до сих пор большинство работ по уравнению Крокко так или иначе связано с динамикой вязкой жидкости. Например, на порталах ВИНИТИ РАН и e-library.ru приводятся ссылки примерно на 250 работ, опубликованных в 1990–2014 гг.; приблизительно три четверти из них так или иначе связаны с гидродинамической и прикладной тематикой (см., например, [3, 4–9]). Изучению же собственно предельных задач посвящено относительно небольшое число ключевых работ [5, 10–13].

Существуют явные преимущества предельной задачи Крокко перед другими известными предельными задачами. Предельная задача для уравнения Крокко возникает в результате простого преобразования предельной задачи параболического типа, например, в задаче о диффузии консервативной примеси на полуограниченном промежутке.

Постановка задачи

Если $\theta(\zeta)$ – плотность распределения примеси, $f(\theta)$ – коэффициент переноса примеси, ζ – безразмерная координата, причем

$$\zeta := \frac{x}{2\sqrt{a_0 t}}, \zeta \in (0, \infty),$$

то уравнение переноса имеет вид

$$\frac{d}{d\zeta}\left(f(\theta)\frac{d\theta}{d\zeta}\right) + 2\zeta\frac{d\theta}{d\zeta} = 0. \qquad (1)$$

Пусть предельные условия для уравнения (1) имеют вид

$$\theta(0) - 1 = \theta(\infty) = 0. \qquad (2)$$

Предельная задача (1), (2) приводится к

виду Крокко подстановкой

$$j := \frac{d\theta}{d\zeta} = j(\theta).$$

Тогда

$$\frac{d}{d\theta}(f(\theta)j) + 2\zeta = 0. \tag{1a}$$

Пусть

$$\varphi := \int_0^\theta \zeta(t)dt = \varphi(\theta)$$

– потенциал Крокко; по определению, $\varphi(0) = 0$. Тогда

$$\zeta = \frac{d\varphi}{d\theta},\ j = \left(\frac{d^2\varphi}{d\zeta^2}\right)^{-1},$$

и вместо (1a) получается уравнение

$$2\varphi\frac{d^2\varphi}{d\theta^2} + f(\theta) = 0. \tag{3}$$

Предельные условия для уравнения (3) имеют вид

$$\varphi(0) = \left(\frac{d\varphi}{d\theta}\right)_{\theta=1} = 0. \tag{4}$$

Мотивировка такой замены – переход от полубесконечного промежутка к компакту.

Итак, пусть

$$\mathcal{D}(\varphi) = (0,1), \varphi \in \mathcal{C}^{(2)}(0,1),\ f(\theta) \in \mathcal{L}_1(0,1)$$

и поставлена предельная задача (3) и (4).

Лемма 1. *Предельная задача (3), (4) имеет решение тогда и только тогда, если почти всюду $f(z) > 0$.*

Доказательство. Действительно, в силу (3), (4) выполняется равенство

$$\int_0^1 \left(\frac{d\varphi}{dz}\right)^2 dz = \frac{1}{2}\int_0^1 f(z)dz > 0.$$

Лемма 1 доказана.

Тогда, если f (=) 0 на интервале (0, 1), то $\varphi = 0$, что очевидно.

Лемма 2. *Уравнение предельной задачи (3), (4) порождено гамильтонианом*

$$\mathcal{H}(\theta; \varphi, \psi) := \frac{\psi^2}{2} - f(z)\ln\frac{\varphi(1)}{\varphi}.$$

Доказательство. Уравнение предельной задачи (3), (4) можно записать в виде (канонической) системы:

$$\frac{d}{d\theta}\begin{Bmatrix}\varphi\\ \psi\end{Bmatrix} = J\begin{Bmatrix}\dfrac{\partial}{\partial\varphi}\\ \dfrac{\partial}{\partial\psi}\end{Bmatrix}\mathcal{H},$$

где J – симплектическая матрица.

Лемма 2 доказана.

Лемма 3. *Пусть f – положительный гомоморфизм из (0, 1) в (0, 1). Тогда решение предельной задачи (1) – это 2-диффеоморфизм из $\theta \in (0,1)$ в $\varphi \in (0, \varphi(1) = \varphi_0)$.*

Доказательство. В силу леммы 1, φ и φ'' имеют противоположные знаки почти всюду на промежутке $0 < \theta < 1$.

Пусть $\varphi > 0$ почти всюду на промежутке $0 < \theta < 1$, $\varphi(0) = 0$ и $\varphi'(1) = 0$. Если в точке $0 < \theta = \theta_0 < 1$ достигается положительный локальный минимум, то существует окрестность точки $\theta = \theta_0$, в которой $\varphi'' > 0$, что невозможно. Если же в точке $\theta = \theta_0$ достигается положительный локальный максимум, то в левой окрестности точки $\theta = 1$ существует множество значений θ, таких, что $\varphi''(\theta) > 0$. Снова противоречие.

Следовательно, решения уравнения (1) – суть монотонные распределения, либо монотонно возрастающие ($\varphi > 0$, $\varphi'' < 0$), либо монотонно убывающие ($\varphi < 0$, $\varphi'' > 0$). В данной задаче для положительной вещественной полуоси выполняются неравенства

$$\zeta = \frac{d\varphi}{d\theta} > 0, \varphi(1) > \varphi(0) = 0;$$
$$\varphi(\theta) > 0,\ \varphi''(\theta) < 0.$$

Лемма 3 доказана.

Основная теорема и ее следствия

Основная теорема. *Вдоль характеристики (вдоль решения) предельной задачи (1) выполняется следующее условие:*

$$S(\varphi,1) = \int_0^1 \left(\left(\frac{d\varphi}{dz}\right)^2 + f(z)\ln\frac{\varphi(1)}{\varphi}\right)dz \to \inf \geq 0. \tag{5}$$

Доказательство. Оно очевидно: уравнение Крокко совпадает с необходимым условием минимума распределения $S(z)$.

Основная теорема доказана.

Следствие 1. Для реализации условия минимума (2) достаточно, чтобы

$$\varphi \in \mathcal{W}_2^1(0,1).$$

Происходит ослабление топологии решения до *-слабой. Косвенным подтверждением этого факта ослабления топологии служит равенство из леммы 1.

Следствие 2. В силу леммы 1 справедливо выражение

$$S(\varphi,1) = \int_0^1 f(z)\left(\frac{1}{2} + \ln\frac{\varphi(1)}{\varphi}\right)dz. \qquad (6)$$

Применим к правой части (6) неравенство Коши:

$$S(\varphi,1) \le \sqrt{\int_0^1 f^2(z)dz} \cdot \sqrt{\int_0^1 \left(\frac{1}{2} + \ln\frac{\varphi(1)}{\varphi}\right)^2 dz} \qquad (7)$$

и ослабим условие минимума (5) до минимума правой части неравенства (7).

Если

$$\sqrt{\int_0^1 f^2(z)dz} \cdot \sqrt{\int_0^1 \left(\frac{1}{2} + \ln\frac{\varphi(1)}{\varphi}\right)^2 dz} \to \inf \ge 0, \qquad (5а)$$

т. е. при ограниченном значении коэффициента переноса (речь идет о L_2- норме), то величина

$$\sqrt{\int_0^1 \left(\frac{1}{2} + \ln\frac{\varphi(1)}{\varphi}\right)^2 dz} \to \inf \ge 0,$$

т. е. $\varphi \to \sqrt{e}\varphi(1) = \sup$.

Но величина потенциала Крокко связана с потоком плотности тождеством

$$j(\theta) f(\theta) = -2\varphi(\theta),$$

причем в предельной задаче (3), (4) $j < 0$.

Итак, при ограниченном значении коэффициента переноса поток плотности максимален.

Теперь пусть ограничена величина потока плотности, т. е. ограничен второй множитель в правой части условия (5а):

$$\sqrt{\int_0^1 \left(\frac{1}{2} + \ln\frac{\varphi(1)}{\varphi}\right)^2 dz} = O(1).$$

Тогда $\sqrt{\int_0^1 f^2(z)\, dz} \to \inf \ge 0.$

Следовательно, при ограниченном значении потока плотности концентрации коэффициент переноса минимален.

Видоизменение предельной задачи Крокко

Пусть существует гомеоморфизм $f = f(j)$. Иначе говоря, коэффициент переноса зависит от плотности потока концентрации. Уравнение переноса можно записать следующим образом:

$$\frac{d}{d\theta}(f(j)j) + 2\zeta = 0,$$

и, как видно, уравнение (3) и предельные условия (4) не изменятся. Итак,

$$2\varphi\frac{d^2\varphi}{d\theta^2} + f\left(\frac{1}{\varphi''}\right) = 0. \qquad (3а)$$

Предполагается (см. лемму 3), что

$$\varphi'' := \frac{d^2\varphi}{d\theta^2} < 0, \varphi > 0, f(j) = f\left(\frac{1}{\varphi''}\right) > 0.$$

Пример 1. Рассмотрим случай степенного отображения $f(j)$.

Пусть

$$f\left(\frac{1}{\varphi''}\right) = \frac{(-1)^m}{\varphi''^m}.$$

Тогда в уравнении (3) происходит разделение переменных:

$$\zeta\frac{d\zeta}{d\varphi} = -\frac{1}{(2\varphi)^\alpha},$$

и

$$\zeta = \sqrt{\frac{2^{1-\alpha}}{1-\alpha}\varphi_0^{1-\alpha}\left(1 - \left(\frac{\varphi}{\varphi_0}\right)^{1-\alpha}\right)}, \qquad (8)$$

или

$$\frac{d\bar{\varphi}}{d\theta} = \sqrt{\frac{2^{1-\alpha}}{\varphi_0^{1+\alpha}(1-\alpha)}\left(1 - \bar{\varphi}^{1-\alpha}\right)} \qquad (8а)$$

(здесь $\alpha = (1 + m)^{-1}$).

Пусть $m \ne 0$, $\alpha \ne 1$.

Интегрируем (8а) еще раз:

$$\sqrt{\frac{2^{1-\alpha}}{\varphi_0^{1+\alpha}(1-\alpha)}}\theta = \int_0^{\bar{\varphi}} \frac{dt}{\sqrt{1 - t^{1-\alpha}}};$$

$$\sqrt{\frac{2^{1-\alpha}(1-\alpha)}{\varphi_0^{1+\alpha}}}\theta = \mathrm{B}\left(\bar{\varphi}^{1-\alpha}, \frac{1}{1-\alpha}, \frac{1}{2}\right),$$

где

$$\mathrm{B}(z;a,b) := \int_0^z t^{a-1}(1-t)^{b-1}dt, 0 < z < 1,$$

– неполная B-функция Барнса [15].

При $\theta = 1$ получаем следующее равенство:

$$\sqrt{\frac{2^{1-\alpha}(1-\alpha)}{\varphi_0^{1+\alpha}}} = \frac{\sqrt{\pi}\Gamma\left(\frac{1}{1-\alpha}\right)}{\Gamma\left(\frac{3-\alpha}{2(1-\alpha)}\right)};$$

$$\varphi_0 := \varphi_0(\alpha) = \left(\frac{\Gamma\left(\frac{3-\alpha}{2(1-\alpha)}\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{1-\alpha}\right)}\right)^{\frac{2}{1+\alpha}} \times \tag{9}$$

$$\times 2^{\frac{1-\alpha}{1+\alpha}}((1-\alpha)/\pi)^{\frac{1}{1+\alpha}}.$$

Пусть в (9) $\alpha \to +0$ ($m\to\infty$). Тогда $\varphi_0(0) = 1/2$.

Теперь пусть в (9) $\alpha \to 1-0$ ($m \to 0$).

Тогда, используя асимптотическую оценку для $\Gamma(z)$ (формула Стирлинга), получим:

$$\lim_{\alpha\to 1-0} \frac{\Gamma\left(\frac{1}{1-\alpha}\right)}{\sqrt{1-\alpha}\Gamma\left(\frac{3-\alpha}{2(1-\alpha)}\right)} = 1,$$

откуда следует, что

$$\varphi_0(1) = \frac{1}{\sqrt{\pi}}.$$

Получается, что $\varphi_0(\alpha)$ – медленно изменяющаяся функция параметра α.

Если в формуле (8а) $\varphi = 0$, то

$$\zeta = \zeta_0 = \sqrt{\frac{2^{1-\alpha}}{1-\alpha}\varphi_0^{1-\alpha}}, \tag{10}$$

т. е. $\zeta_0(\alpha)$ – быстро изменяющаяся функция от α.

Формулы (9), (10) служат для определения констант

$$\varphi_0(\alpha) := \varphi(1;\alpha) \text{ и } \zeta_0(\alpha) := \zeta(0;\alpha).$$

Результаты вычисления указанных констант приведены в таблице.

В частности, ввиду ограниченности φ_0, распределение θ сосредоточено на компакте:

Таблица

Результаты вычисления констант для случая степенного отображения *f*(*j*)

m	α	$\varphi_0(\alpha)$	$\zeta_0(\alpha)$
0	1,0	0,5642	∞
0,4	0,7143	0,5523	1,8946
0,5	0,6(6)	0,5497	1,7596
1,0	0,5000	0,5407	1,4421
2,0	0,3(3)	0,5299	1,2415
3,0	0,2500	0,5315	1,1814
4,0	0,2000	0,5195	1,1352
5,0	0,1(6)	0,5145	1,1085
10	0,0909	0,5136	1,0612
100	0,0091	0,5174	1,0183
∞	0,0	0,5000	1,0000

Обозначения: m, α – параметры; $\varphi_0(\alpha)$ – граничное значение потенциала Крокко $\varphi(1)$; $\zeta_0(\alpha)$ – длина носителя (см. формулы (9), (10)).

$$\mathrm{supp}\theta = (0, \zeta_0).$$

Наличие компактных носителей для распределений – отличительная особенность нелинейных предельных задач. Действительно, линейный случай получается, когда $\alpha = 1$. Тогда

$$\zeta\frac{d\zeta}{d\varphi} = -\frac{1}{2\varphi}, \quad \zeta = \sqrt{\ln\frac{\varphi_0}{\varphi}},$$

и, интегрируя еще раз, получим известное решение Рэлея:

$$\theta = \sqrt{\pi}\varphi_0 \mathrm{erfc}\left(\sqrt{\ln\frac{\varphi_0}{\varphi}}\right) = \sqrt{\pi}\varphi_0\mathrm{erfc}(\zeta).$$

Очевидно, решение Рэлея не имеет компактного носителя для θ-распределения.

Пример 2. Рассмотрим случай, когда

$$f(j) = 1 + \frac{\varepsilon}{\varphi''},$$

где ε – параметр задачи.

Тогда уравнение переноса Крокко принимает вид

$$2\varphi\varphi''^2 + \varphi'' + \varepsilon = 0, \tag{3б}$$

причем предельные условия прежние

(см. формулу (4)). Тогда из уравнения (3б) получается, что

$$\varphi'' = -\frac{1}{4\varphi} \pm \sqrt{\frac{1}{16\varphi''^2} - \frac{\varepsilon}{2\varphi}}. \qquad (3в)$$

В уравнении (3в) понижается порядок и переменные разделяются подстановкой $d\varphi / d\theta = \zeta(\varphi)$, и тогда

$$\zeta^2 = \left(\frac{d\varphi}{d\theta}\right)^2 = \frac{1}{2}\int_{\varphi}^{\varphi_0} \frac{1 \mp \sqrt{1 - 8\varepsilon\varphi}}{\varphi} d\varphi.$$

Пусть ε = 0. Тогда для согласования этого решения с решением Рэлея необходимо взять нижний знак, а значит, при любом значении $\varepsilon < 1/(8\varphi_0)$:

$$\zeta^2 = \frac{1}{2}\ln\frac{\varphi_0}{\varphi} + \frac{1}{2}\left(\ln\frac{1+\sqrt{1-8\varepsilon\varphi}}{1-\sqrt{1-8\varepsilon\varphi}} - \right.$$

$$\left. - \ln\frac{1+\sqrt{1-8\varepsilon\varphi_0}}{1-\sqrt{1-8\varepsilon\varphi_0}}\right).$$

Следовательно,

$$\theta = \int_0^{\varphi} \left\{ 2 \Big/ \left[\ln\frac{\varphi_0}{\varphi} \cdot \frac{1+\sqrt{1-8\varepsilon\varphi}}{1-\sqrt{1-8\varepsilon\varphi}} \times \right.\right.$$

$$\left.\left. \times \frac{1-\sqrt{1-8\varepsilon\varphi_0}}{1+\sqrt{1-8\varepsilon\varphi_0}} \right] \right\}^{1/2} d\varphi. \qquad (11)$$

Формула (11) выражает решение предельной задачи Крокко (3), (4) для «квазилинейного» распределения коэффициента переноса *f*(*j*).

Легко видеть, что предположение о виде коэффициента *f* = *f*(*j*) не изменяет канонической (гамильтоновской) структуры уравнения Крокко. Например, уравнение (3в) равносильно системе

$$\frac{d\varphi}{d\theta} = \zeta = \frac{\partial E}{\partial \zeta};$$

$$\frac{d\zeta}{d\theta} = -\frac{1}{4\varphi} \pm \sqrt{\frac{1}{16\varphi''^2} - \frac{\varepsilon}{2\varphi}} = -\frac{\partial E}{\partial \varphi},$$

с гамильтонианом

$$E(\varphi, \zeta) = \frac{\zeta^2}{2} - \int_{\varphi}^{\varphi_0} \frac{1 \mp \sqrt{1-8\varepsilon\varphi}}{4\varphi} d\varphi.$$

Очевидна каноничность системы в случае степенного отображения *f*(*j*).

Выводы

Среди многих достоинств метода Крокко следует выделить три его основных преимущества:

решение предельной задачи Крокко ищется на компакте. Более того, дальнейшими исследованиями будет показано, что решения имеют компактный носитель;

уравнение Крокко равносильно канонической системе с 1-инвариантом;

предельная задача Крокко связана с условием минимума положительной величины (распределения). Это позволяет расширить топологию решения уравнения Крокко до *-слабой.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Гимранов Э.Г.** Развитие метода Крокко для решения обобщенных уравнений движения газа в каналах ДЛА и ЭУ // Вестник Уфимского государственного авиационного технического университета. 2007. Т. 9. № 1. С. 2–9.

2. **Полянин А.Д.** Преобразования типа Мизеса и Крокко: понижение порядка нелинейных уравнений, RF-пары и преобразования Беклунда // Докл. РАН. 2010. Т. 430. № 2. С. 160–165.

3. **Полянин А.Д., Аристов С.Н.** Системы уравнений гидродинамического типа: точные решения, преобразования, нелинейная устойчивость // Докл. РАН. 2009. Т. 428. № 2. С. 180–185.

4. **Павлов В.Г., Якимов Е.И.** Переменные Крокко и уравнения пограничного слоя на поверхности при неравномерном внешнем потоке // Вестник Казанского гос. техн. ун-та им. А.Н. Туполева. 2004. № 2. С. 30–33.

5. **Varin V.P.** A solution of the Blasius problem // Препринты ИПМ им. М.В. Келдыша. 2013. № 40. С. 1–21.

6. 05.01-19И.56 подобные решения для задачи ламинарного пограничного слоя в жидкости со степенным законом РЖ 19И // Общие вопросы химической технологии. 2005. № 1.

7. **Немова Д.В., Емельянова В.А., Мифтахова Ф.Р.** Экстремальные задачи расчета свободноконвективных движений в навесных вентилируемых фасадах // Инженерно-строительный журнал. 2013. № 8 (43). С. 46–53.

8. **Животов С.Д., Николаев В.С.** Крыло максимального качества в сверхзвуковом потоке на режиме вязко-невязкого взаимодействия //

Ученые записки ЦАГИ. 2002. Т. XXXIII. № 1-2. С. 45–53.

9. **Башкин В.А., Диканский Е.А.** Решение уравнений Прандтля при нулевом градиенте давления на неизотермической поверхности // Ученые записки ЦАГИ. 2000. Т. XXXI. № 3-4. С. 47–59.

10. **Дьяченко В.Ф., Воскобойникова О.И., Демидович В.Б., Кочуров А.С., Силаев Д.А.** Численные методы в задачах математической физики и задачах теории аппроксимации. Отчет о НИР № 97-01-01007 (Российский фонд фундаментальных исследований).

11. **Баренблатт Г.И.** Подобие, автомодельность, промежуточная асимптотика. М.: Гидрометеоиздат, 1978, 204 с.; М.: УРСС, 2008, 204 с.

12. **Отелбаев М.** Существование сильных решений уравнений Навье – Стокса // Математический журнал. 2013. Т. 13. № 4 (50). С. 5 –104.

13. **Фаиз А.** Применение уравнения Крокко – Ванга для решения уравнения Блазиуса // Техническая акустика. 2007. Т. 7. № 7. Электронный ресурс. Режим доступа: http://cyberleninka.ru/article/n/primenenie-uravneniya-krokko-vanga-k-resheniyu-zadachi-blasiusa#ixzz38ed1AsyD.

14. **Акилов Г.П., Дятлов В.Н.** Основы математического анализа. Новосибирск: Наука, 1980. 336 с.

15. **Уиттекер Е.Т., Ватсон Дж.Н.** Современный анализ. Ч. 2. М.: Физматгиз, 1963. С. 40–44, 56–57.

СВЕДЕНИЯ ОБ АВТОРЕ

ПЕТРИЧЕНКО Михаил Романович – *доктор технических наук, заведующий кафедрой гидравлики Санкт-Петербургского государственного политехнического университета.*

195251, Россия, г. Санкт-Петербург, Политехническая ул., 29

fonpetrich@mail.ru

Petritchenko M.R. TYPICAL AND ATYPICAL BOUNDARY PROBLEMS FOR THE CROCCO EQUATION.

The traditional formulation of the boundary Crocco problem involves the dependence of a transfer coefficient on the density distribution of the concentration. In this case the boundary problem for the Crocco equation is associated with the condition of the minimum for a positive distribution, and the equation itself is equivalent to the canonical system of two equations. The possibility of immersion of flow of boundary problem in the field of extremals, monotony and convexity of the Crocco potential have been proved. In a number of physical problems, the distribution of the transfer coefficient depends on the flux density of conservative tracer, that is, on density gradient of concentration distribution. In this case, there are simple solutions of the boundary Crocco problem with a compact supporter. In other words, the solutions are grouped on a set of the finite measure.

CROCCO EQUATION, BOUNDARY PROBLEM, CANONICAL SYSTEM OF EQUATIONS, DISTRIBUTION MINIMUM, FIELD OF EXTREMALS, STREAM.

REFERENCES

1. **Gimranov E.G.** Razvitie metoda Krokko dlya resheniya obobshchennykh uravnenij dvizheniya gaza v kanalakh DLA i EU. *Vestnik Ufimskogo gosudarstvennogo aviatsionnogo tekhnicheskogo universiteta*, 2007, Vol. 9. No. 1, pp. 2-9. (rus)

2. **Polyanin A.D.** Preobrazovaniya tipa Mizesa i Krokko: ponizhenie poryadka nelinejnykh uravnenij, RF-pary i preobrazovaniya Beklunda. *Doklady Rossiyskoy Akademii nauk*, 2010, Vol. 430, No. 2, pp. 160-165. (rus)

3. **Polyanin A.D., Aristov S.N.** Sistemy uravnenij gidrodinamicheskogo tipa: tochnye resheniya, preobrazovaniya, nelinejnaya ustojchivost'. *Doklady Rossiyskoy Akademii nauk*, 2009, Vol. 428, No. 2, pp. 180-185. (rus)

4. **Pavlov V.G., Yakimov E.I.** Peremennye Krokko i uravneniya pogranichnogo sloya na poverkhnosti pri neravnomernom vneshnem potoke. *Vestnik Kazanskogo gosudarstvennogo tekhnicheskogo universiteta im. A.N. Tupoleva*, 2004, No. 2, pp. 30-33. (rus)

5. **Varin V.P.** A solution of the Blasius problem. *Preprinty IPM im. M.V. Keldysha*, 2013, No. 40, pp. 1-21. (rus)

6. 05.01-19I.56 podobnye resheniya dlya zadachi laminarnogo pogranichnogo sloya v zhidkosti so stepennym zakonom RZh 19I. *Obshchie voprosy khimicheskoj tekhnologii*, 2005, No. 1. (rus)

7. **Nemova D.V., Emel'yanova V.A., Miftakhova F.R.** Ekstremal'nye zadachi rascheta svobodnokonvektivnykh dvizhenij v navesnykh ventiliruemykh fasadakh. *Inzhenerno-stroitel'nyj*

zhurnal, 2013, No. 8 (43), pp. 46-53. (rus)

8. **Zhivotov S.D., Nikolaev V.S.** Krylo maksimal'nogo kachestva v sverkhzvukovom potoke na rezhime vyazko-nevyazkogo vzaimodejstviya. *Uchenye zapiski TsAGI*, 2002, Vol. 23, No. 1-2, pp. 45-53. (rus)

9. **Bashkin V.A., Dikanskij E.A.** Reshenie uravnenij Prandtlya pri nulevom gradiente davleniya na neizotermicheskoj poverkhnosti. *Uchenye zapiski TsAGI*, 2000, Vol. 31, No. 3-4, pp. 47-59. (rus)

10. **D'yachenko V.F., Voskobojnikova O.I., Demidovich V.B., Kochurov A.S., Silaev D.A.** Chislennye metody v zadachakh matematicheskoj fiziki i zadachakh teorii approksimatsii. Otchet o NIR № 97-01-01007 (Rossijskij fond fundamental'nykh issledovanij). (rus)

11. **Barenblatt G.I.** *Podobie, avtomodel'nost', promezhutochnaya asimptotika*. Moscow, Gidrometeoizdat, 1978. 204 p. (rus)

12. **Otelbaev M.** Sushchestvovanie sil'nykh reshenij uravnenij Nav'e-Stoksa. *Matematicheskij zhurnal*, 2013, Vol. 13, No. 4 (50), pp. 5-104. (rus)

13. **Faiz A.** Primenenie uravneniya Krokko-Vanga dlya resheniya uravneniya Blaziusa. *Tekhnicheskaya akustika*, 2007, Vol. 7, No. 7. Available at: http://cyberleninka.ru/article/n/primenenie-uravneniya-krokko-vanga-k-resheniyu-zadachi-blasiusa#ixzz38ed1AsyD. (rus)

14. **Akilov G.P., Dyatlov V.N.** *Osnovy matematicheskogo analiza*. Novosibirsk: Nauka, 1980. 336 p. (rus)

15. **Uitteker E.T., Vatson Dzh.N.** *Sovremennyj analiz, Ch.2.* Moscow, Fizmatgiz, 1963, pp. 40-44, 56-57. (rus)

THE AUTHOR

PETRITCHENKO Mikhail R.
St. Petersburg State Polytechnical University
29 Politechnicheskaya St., St. Petersburg, 195251, Russia
fonpetrich@mail.ru