doi: 10.5862/MCE.53.8

Изгиб ортотропных пластин с учетом бимоментов

К.ф.-м.н., старший научный сотрудник М.К. Усаров,
Институт механики и сейсмостойкости сооружений Академии Наук Республики Узбекистан

Аннотация. Статья посвящена усовершенствованию теории пластин с целью учета сил, моментов и бимоментов, порождаемых за счет нелинейного закона распределения перемещений в поперечном сечении пластины. Приведены интегральные соотношения для определения сил, моментов и бимоментов.

Разработанная бимоментная теория пластины описывается двумя несвязанными двумерными системами по девять в каждой системе уравнений. На каждом краю пластины в зависимости от вида закрепления задаются по девять граничных условий. Методика построения бимоментной теории основана на законе Гука, трехмерных уравнениях теории упругости и методе разложения перемещений в ряд Маклорена.

В качестве примера приведено решение задачи изгиба толстой ортотропной пластины под действием поперечной синусоидальной нагрузки. Получены численные результаты перемещений, сил, моментов, бимоментов и напряжений, сопровождаемые анализом.

Ключевые слова: закон Гука; ортотропность; теория упругости; трехмерная задача; толстая пластина; двумерная задача; сила; момент; бимомент; бимоментная теория

Изученность вопроса

Теория толстых пластин широко освещена в работах многих российских и зарубежных авторов. Подробный обзор литературы по данному направлению приведен в работах [1–4]. На современном этапе развития теории пластин динамическими задачами пластин с анизотропными свойствами занимаются авторы работ [5–8]. Задачами колебаний пластин занимались M.R. Karamooz Ravari, M.R. Forouzan [9], ими получены частотные уравнения ортотропной круговой кольцевой пластины для общих граничных условий в плоскости вибрации. В работе [10] рассматриваются решения переходных колебаний прямоугольной вязкоупругой ортотропной пластины для конкретных деформационных моделей по теориям Флюгге и Тимошенко – Миндлина. Статья [11] посвящена аналитическому решению проблемы вынужденных установившихся колебаний ортотропной пластины. Методом суперпозиции задача сводится к квазирегулярной бесконечной системе линейных уравнений. В [12] разрабатывается пространственный подход для трехмерного анализа прямоугольных ортотропных упругих пластин, подвергнутых внешним нагрузкам на верхней и нижней гранях. В. Бирман [13] разработал теорию более высокого порядка для толстой многослойной ламинированной композитной плиты, подчеркивая роль нормальных и поперечных деформаций сдвига. В [14] рассмотрена задача изгиба ортотропной прямоугольной пластины, лежащей на двупараметрическом упругом основании. Статья [15] посвящена нелинейной теории пластин.

Теоретические исследования В.З. Власова [16] показали, что при нарушении гипотезы плоских сечений, кроме растягивающих и перерезывающих сил, изгибающих и крутящих моментов, появляются еще дополнительные силовые факторы, так называемые бимоменты. Автором статей [17–20] решены задачи изгиба и колебаний толстых пластин на основе теории пластин, построенной в рамках трехмерной теории упругости, с помощью метода разложения перемещения по одной из пространственных координат в бесконечный ряд Маклорена.

В данной работе приводится методика построения теории пластин с учетом бимоментов, порождаемых за счет распределения перемещений точек поперечного сечения по нелинейному закону. Предлагаемая теория пластин, кроме растягивающих и перерезывающих сил, изгибающих и крутящих моментов, включает еще и бимоменты. При построении бимоментной теории учитываются все компоненты тензора напряжения и деформации: σ_{ij}, ε_{ij}, $(i, j = 1,3)$. Компоненты вектора перемещения являются функциями трех пространственных координат: $u_1(x_1, x_2, z)$, $u_2(x_1, x_2, z)$, $u_3(x_1, x_2, z)$. В работе приводятся определяющие соотношения сил, моментов, бимоментов и уравнения равновесия относительно этих силовых факторов.

Постановка и метод решения задачи

Рассмотрим ортотропную толстую пластину постоянной толщины $H = 2h$ и размерами $a,\ b$ в плане. Введем обозначения: $E_1,\ E_2,\ E_3$ – модули упругости; G_{12}, G_{13}, G_{23} – модули сдвига; $\nu_{12}, \nu_{13}, \nu_{23}$ – коэффициенты Пуассона материала пластины. Пластину рассмотрим как трехмерное тело, материал которого подчиняется обобщенному закону Гука:

$$\sigma_{11} = E_{11}\varepsilon_{11} + E_{12}\varepsilon_{22} + E_{13}\varepsilon_{33}, \tag{1.а}$$

$$\sigma_{22} = E_{21}\varepsilon_{11} + E_{22}\varepsilon_{22} + E_{23}\varepsilon_{33}, \tag{1.б}$$

$$\sigma_{33} = E_{31}\varepsilon_{11} + E_{32}\varepsilon_{22} + E_{33}\varepsilon_{33}, \tag{1.в}$$

$$\sigma_{12} = G_{12}\varepsilon_{12}, \quad \sigma_{13} = G_{13}\varepsilon_{13}, \quad \sigma_{23} = G_{23}\varepsilon_{23}. \tag{1.г}$$

Здесь:

$$E_{11} = E_1 g_{11},\ E_{22} = E_2 g_{22},\ E_{33} = E_3 g_{33},\ E_{12} = E_{21} = E_1 g_{12} = E_{12} g_{21},$$

$$E_{12} = E_{21} = E_1 g_{12} = E_{12} g_{21},\ E_{13} = E_{31} = E_1 g_{13} = E_3 g_{31},\ E_{23} = E_{32} = E_2 g_{23} = E_3 g_{32},$$

$$g_{11} = \frac{1-\nu_{23}\nu_{32}}{1-\mu^2},\ g_{22} = \frac{1-\nu_{13}\nu_{31}}{1-\mu^2},\ g_{22} = \frac{1-\nu_{12}\nu_{21}}{1-\mu^2},$$

$$g_{12} = g_{21} = \frac{\nu_{12}+\nu_{13}\nu_{32}}{1-\mu^2} = \frac{\nu_{21}+\nu_{31}\nu_{23}}{1-\mu^2},\ g_{13} = g_{31} = \frac{\nu_{13}+\nu_{21}\nu_{32}}{1-\mu^2} = \frac{\nu_{31}+\nu_{12}\nu_{23}}{1-\mu^2},$$

$$g_{23} = g_{32} = \frac{\nu_{23}+\nu_{13}\nu_{12}}{1-\mu^2} = \frac{\nu_{32}+\nu_{31}\nu_{21}}{1-\mu^2},\ \mu^2 = \nu_{12}\nu_{21} + \nu_{23}\nu_{32} + \nu_{13}\nu_{31} + 2\nu_{12}\nu_{23}\nu_{31}.$$

Введем декартову систему координат $x_1,\ x_2$ и z. Ось oz направим вертикально вниз. Пусть по нижней $z = h$ и верхней $z = -h$ лицевым поверхностям пластины приложены распределенные поверхностные, нормальные и касательные нагрузки. Нормальные нагрузки в направлении оси oz обозначим $q_3^{(+)},\ q_3^{(-)}$. Касательные нагрузки, приложенные в направлении $ox_1,\ ox_2$, обозначим $q_k^{(+)},\ q_k^{(-)},\ (k = \overline{1,2})$. Перемещения точек верхних $z = -h$ и нижних $z = h$ волокон пластины обозначим $u_i^{(-)},\ u_i^{(+)},\ (i = 1{,}3)$.

Воспользуемся трехмерными уравнениями равновесия теории упругости:

$$\frac{\partial\sigma_{11}}{\partial x_1} + \frac{\partial\sigma_{12}}{\partial x_2} + \frac{\partial\sigma_{13}}{\partial x_3} = 0, \tag{2.а}$$

$$\frac{\partial\sigma_{12}}{\partial x_1} + \frac{\partial\sigma_{22}}{\partial x_2} + \frac{\partial\sigma_{23}}{\partial x_3} = 0, \tag{2.б}$$

$$\frac{\partial\sigma_{13}}{\partial x_1} + \frac{\partial\sigma_{23}}{\partial x_2} + \frac{\partial\sigma_{33}}{\partial x_3} = 0. \tag{2.в}$$

Граничные условия на нижней $z = h$ и верхней $z = -h$ поверхностях пластины и имеют вид:

$$\sigma_{33} = q_3^{(+)}, \quad \sigma_{31} = q_1^{(+)},\ \sigma_{32} = q_2^{(+)} \text{ при } z = h; \tag{3.а}$$

$$\sigma_{33} = q_3^{(-)}, \quad \sigma_{31} = q_1^{(-)},\ \sigma_{32} = q_2^{(-)} \text{ при } z = -h. \tag{3.б}$$

Методика построения бимоментной теории пластин основана на обобщенном законе Гука (1), трехмерных уравнениях теории упругости (2), граничных условиях на лицевых поверхностях (3) и разложении перемещений в ряд Маклорена в виде:

$$u_k = B_0^{(k)} + B_1^{(k)} \frac{z}{h} + B_2^{(k)} \left(\frac{z}{h}\right)^2 + B_3^{(k)} \left(\frac{z}{h}\right)^3 + \ldots + B_i^{(k)} \left(\frac{z}{h}\right)^i +, \quad (k=1,2), \tag{4.а}$$

$$u_3 = A_0 + A_1 \frac{z}{h} + A_2 \left(\frac{z}{h}\right)^2 + A_3 \left(\frac{z}{h}\right)^3 + \ldots + A_i \left(\frac{z}{h}\right)^i + \tag{4.б}$$

Здесь $B_i^{(k)}$, A_i – неизвестные функции двух пространственных координат $B_i^{(k)} = B_i^{(k)}(x_1, x_2)$, $A_i = A_i(x_1, x_2)$:

$$B_i^{(k)} = \frac{1}{i!} h^i \left(\frac{\partial^i u_k}{\partial z^i}\right)_{z=0}, \quad (k=1,2), \qquad A_i = \frac{1}{i!} h^i \left(\frac{\partial^i u_3}{\partial z^i}\right)_{z=0}.$$

Предлагаемая бимоментная теория пластин описывается двумя несвязанными задачами, каждая из которых формулируется на основе девяти двумерных уравнений с соответствующими краевыми условиями.

Первая задача состоит из двух уравнений относительно продольных и тангенциальных усилий и четырех дополнительно построенных уравнений бимоментов относительно девяти неизвестных кинематических функций:

$$\overline{W} = \frac{u_3^{(+)} - u_3^{(-)}}{2}, \quad \bar{r} = \frac{1}{2h^2} \int_{-h}^{h} u_3 z dz, \quad \bar{\gamma} = \frac{1}{2h^4} \int_{-h}^{h} u_3 z^3 dz, \tag{5.а}$$

$$\bar{u}_k = \frac{u_k^{(+)} + u_k^{(-)}}{2}, \quad \overline{\psi}_k = \frac{1}{2h} \int_{-h}^{h} u_k dz, \quad \overline{\beta}_k = \frac{1}{2h^3} \int_{-h}^{h} u_k z^2 dz, \quad (k=1,2). \tag{5.б}$$

Уравнения равновесия относительно продольных и тангенциальных усилий, действующих в плоскости пластины, получаются интегрированием двух первых уравнений теории упругости (2) по координате z:

$$\frac{\partial N_{11}}{\partial x_1} + \frac{\partial N_{12}}{\partial x_2} + 2\bar{q}_1 = 0, \tag{6.а}$$

$$\frac{\partial N_{21}}{\partial x_1} + \frac{\partial N_{22}}{\partial x_2} + 2\bar{q}_2 = 0, \tag{6.б}$$

где N_{11}, N_{12}, N_{22} – усилия, определяемые из соотношений

$$N_{11} = \int_{-h}^{h} \sigma_{11} dz = E_{11} H \frac{\partial \overline{\psi}_1}{\partial x_1} + E_{12} H \frac{\partial \overline{\psi}_2}{\partial x_2} + 2E_{13} \overline{W}, \tag{7.а}$$

$$N_{22} = \int_{-h}^{h} \sigma_{22} dz = E_{12} H \frac{\partial \overline{\psi}_1}{\partial x_1} + E_{22} H \frac{\partial \overline{\psi}_2}{\partial x_2} + 2E_{23} \overline{W}, \tag{7.б}$$

$$N_{12} = N_{21} = \int_{-h}^{h} \sigma_{12} dz = G_{12} \left(H \frac{\partial \overline{\psi}_2}{\partial x_1} + H \frac{\partial \overline{\psi}_2}{\partial x_1} \right), \tag{7.в}$$

$\bar{q}_k, (k=1,2)$, $\bar{q}_3$ – грузовые члены уравнения, которые определяются по формулам:

$$\bar{q}_k = \frac{q_k^{(+)} - q_k^{(-)}}{2}, \ (k=1,2), \quad \bar{q}_3 = \frac{q_3^{(+)} + q_3^{(-)}}{2}. \tag{7.г}$$

Как видим, в двух уравнениях (6) содержатся три неизвестные функции $\overline{\psi}_1$, $\overline{\psi}_2$, $\overline{W}$. Чтобы дополнить систему, построим уравнения бимоментов. Сначала введем продольные и тангенциальные бимоменты T_{11}, T_{22}, T_{12}:

$$T_{11}=\frac{1}{h^2}\int_{-h}^{h}\sigma_{11}z^2dz=H\left(E_{11}\frac{\partial\overline{\beta}_1}{\partial x_1}+E_{12}\frac{\partial\overline{\beta}_2}{\partial x_2}+E_{13}\frac{2\overline{W}-4\overline{r}}{H}\right), \quad (8.а)$$

$$T_{22}=\frac{1}{h^2}\int_{-h}^{h}\sigma_{22}z^2dz=H\left(E_{12}\frac{\partial\overline{\beta}_1}{\partial x_1}+E_{22}\frac{\partial\overline{\beta}_2}{\partial x_2}+E_{23}\frac{2\overline{W}-4\overline{r}}{H}\right), \quad (8.б)$$

$$T_{12}=T_{21}=\frac{1}{h^2}\int_{-h}^{h}\sigma_{12}z^2dz=HG_{12}\left(\frac{\partial\overline{\beta}_2}{\partial x_1}+\frac{\partial\overline{\beta}_1}{\partial x_2}\right). \quad (8.в)$$

Введем интенсивности поперечных бимоментов $\overline{p}_{13}$, $\overline{p}_{23}$ и $\overline{\tau}_{13}$, $\overline{\tau}_{23}$ от касательных напряжений σ_{13}, σ_{23}:

$$\overline{p}_{k3}=\frac{1}{2h^2}\int_{-h}^{h}\sigma_{k3}zdz=G_{k3}\left(\frac{\partial\overline{r}}{\partial x_k}+\frac{2(\overline{u}_k-\overline{\psi}_k)}{H}\right), \quad (k=1,2), \quad (9.а)$$

$$\overline{\tau}_{k3}=\frac{1}{2h^4}\int_{-h}^{h}\sigma_{k3}z^3dz=G_{k3}\left(\frac{\partial\overline{\gamma}}{\partial x_k}+\frac{2(\overline{u}_k-3\overline{\beta}_k)}{H}\right), \quad (k=1,2) . \quad (9.б)$$

Введем интенсивности нормальных бимоментов $\overline{p}_{33}$ и $\overline{\tau}_{33}$ от нормального напряжения σ_{33} в виде соотношений:

$$\overline{p}_{33}=\frac{1}{2h}\int_{-h}^{h}\sigma_{33}dz=E_{31}\frac{\partial\overline{\psi}_1}{\partial x_1}+E_{32}\frac{\partial\overline{\psi}_2}{\partial x_2}+E_{33}\frac{2\overline{W}}{H}, \quad (10.а)$$

$$\overline{\tau}_{33}=\frac{1}{2h^3}\int_{-h}^{h}\sigma_{33}z^2dz=E_{31}\frac{\partial\overline{\beta}_1}{\partial x_1}+E_{32}\frac{\partial\overline{\beta}_2}{\partial x_2}+E_{33}\frac{2\overline{W}-4\overline{r}}{H}. \quad (10.б)$$

Уравнения относительно продольных бимоментов, действующих в плоскости пластины, получаются из двух первых уравнений теории упругости (2). Умножив их на z^2, а после проинтегрировав их по координате z, получим:

$$\frac{\partial T_{11}}{\partial x_1}+\frac{\partial T_{12}}{\partial x_2}-4\overline{p}_{13}+2\overline{q}_1=0, \quad (11.а)$$

$$\frac{\partial T_{12}}{\partial x_1}+\frac{\partial T_{22}}{\partial x_2}-4\overline{p}_{23}+2\overline{q}_2=0 . \quad (11.б)$$

Умножим третье уравнение теории упругости на z и проинтегрируем по координате z, затем умножим его на z^3 и проинтегрируем по координате z, получим пятое и шестое уравнения в интенсивности поперечных бимоментов:

$$\frac{\partial\overline{p}_{13}}{\partial x_1}+\frac{\partial\overline{p}_{23}}{\partial x_2}-\frac{2\overline{p}_{33}}{H}+\frac{2\overline{q}_3}{H}=0, \quad (12.а)$$

$$\frac{\partial\overline{\tau}_{13}}{\partial x_1}+\frac{\partial\overline{\tau}_{23}}{\partial x_2}-\frac{6\overline{\tau}_{33}}{H}+\frac{2\overline{q}_3}{H}=0. \quad (12.б)$$

Используя граничные условия (3), ряды Маклорона (4) и соотношения (5), построим еще три уравнения, которые имеют вид:

$$\bar{u}_k = \frac{1}{4}\left(21\bar{\beta}_k - 3\bar{\psi}_k\right) - \frac{1}{20}H\frac{\partial\bar{W}}{\partial x_k} + \frac{1}{20}\frac{H\bar{q}_k}{G_{k3}}, \quad (k=1,2), \tag{13.а}$$

$$\bar{W} = \frac{1}{2}\left(21\bar{\gamma} - 7\bar{r}\right) - \frac{1}{30}H\left(\frac{E_{31}}{E_{33}}\frac{\partial\bar{u}_1}{\partial x_1} + \frac{E_{32}}{E_{33}}\frac{\partial\bar{u}_2}{\partial x_2}\right) + \frac{H\bar{q}_3}{30E_{33}}. \tag{13.б}$$

Уравнения равновесия (6), (11), (12) и (13) составляют совместную систему дифференциальных уравнений, состоящую из девяти уравнений относительно девяти неизвестных функций: $\bar{\psi}_1,\ \bar{\psi}_2,\ \bar{\beta}_1,\ \bar{\beta}_1,\ \bar{u}_1,\ \bar{u}_2,\ \bar{r},\ \bar{\gamma},\ \bar{W}$.

Если на границе пластины перемещения равны нулю, то граничные условия для уравнений (6), (11), (12) и (13) на краях $x_1 = const$ и $x_2 = const$ имеют вид:

$$\bar{\psi}_1 = 0,\ \bar{\psi}_2 = 0,\ \bar{\beta}_1 = 0,\ \bar{\beta}_2 = 0,\ \bar{r} = 0,\ \bar{\gamma} = 0,\ \bar{u}_1 = 0,\ \bar{u}_2 = 0,\ \bar{W} = 0. \tag{14}$$

Если край оперт, то на краю $x_1 = const$:

$$N_{11} = 0,\ T_{11} = 0,\ \bar{\psi}_2 = 0,\ \bar{\beta}_2 = 0,\ \bar{\sigma}_{11} = 0,\ \bar{u}_2 = 0,\ \bar{r} = 0,\ \bar{\gamma} = 0,\ \bar{W} = 0. \tag{15}$$

На краю $x_2 = const$:

$$N_{22} = 0,\ T_{22} = 0,\ \bar{\psi}_1 = 0,\ \bar{\beta}_1 = 0,\ \bar{\sigma}_{22} = 0,\ \bar{u}_1 = 0,\ \bar{r} = 0,\ \bar{\gamma} = 0,\ \bar{W} = 0, \tag{16}$$

где $\bar{\sigma}_{11},\ \bar{\sigma}_{22},\ \bar{\sigma}_{12}$ определяются по формулам:

$$\bar{\sigma}_{11} = \left(E_{11} - \frac{E_{13}}{E_{33}}E_{31}\right)\frac{\partial\bar{u}_1}{\partial x_1} + \left(E_{12} - \frac{E_{13}}{E_{33}}E_{32}\right)\frac{\partial\bar{u}_2}{\partial x_2} + \frac{E_{13}}{E_{33}}\bar{q}_3, \tag{17.а}$$

$$\bar{\sigma}_{22} = \left(E_{21} - \frac{E_{23}}{E_{33}}E_{31}\right)\frac{\partial\bar{u}_1}{\partial x_1} + \left(E_{22} - \frac{E_{23}}{E_{33}}E_{32}\right)\frac{\partial\bar{u}_2}{\partial x_2} + \frac{E_{23}}{E_{33}}\bar{q}_3, \tag{17.б}$$

$$\bar{\sigma}_{12} = G_{12}\left(\frac{\partial\bar{u}_1}{\partial x_2} + \frac{\partial\bar{u}_2}{\partial x_1}\right). \tag{17.в}$$

Вторая задача состоит из уравнений относительно изгибающих моментов, крутящего момента, перерезывающих сил и бимоментов относительно девяти неизвестных кинематических функций:

$$\tilde{W} = \frac{u_3^{(+)} + u_3^{(-)}}{2}, \quad \tilde{r} = \frac{1}{2h}\int_{-h}^{h} u_3 dz, \quad \tilde{\gamma} = \frac{1}{2h^3}\int_{-h}^{h} u_3 z^2 dz, \tag{18.а}$$

$$\tilde{u}_k = \frac{u_k^{(+)} - u_k^{(-)}}{2}, \quad \tilde{\psi}_k = \frac{1}{2h^2}\int_{-h}^{h} u_k z dz, \quad \tilde{\beta}_k = \frac{1}{2h^4}\int_{-h}^{h} u_k z^3 dz, \ (k=1,2). \tag{18.б}$$

Выражения (18.а) включают два уравнения относительно изгибающих и крутящих моментов и одно уравнение относительно перерезывающих сил. Умножим первое и второе уравнения теории упругости на координату z и проинтегрируем по z, получим уравнения равновесия пластины в моментах и силах:

$$\frac{\partial M_{11}}{\partial x_1}+\frac{\partial M_{12}}{\partial x_2}-Q_{13}+2\tilde{q}_1=0, \qquad (19.а)$$

$$\frac{\partial M_{21}}{\partial x_1}+\frac{\partial M_{22}}{\partial x_2}-Q_{23}+2\tilde{q}_2=0. \qquad (19.б)$$

Интегрируя по координате z третье уравнение теории упругости (2), получим уравнение равновесия в силах:

$$\frac{\partial Q_{13}}{\partial x_1}+\frac{\partial Q_{23}}{\partial x_2}+2\tilde{q}_3=0. \qquad (20)$$

Здесь $\tilde{q}_k,(k=1,2)$, $\tilde{q}_3$ – грузовые члены уравнения, определяемые соотношениями:

$$\tilde{q}_k=\frac{q_k^{(+)}+q_k^{(-)}}{2},\ (k=1,2),\quad \tilde{q}_3=\frac{q_3^{(+)}-q_3^{(-)}}{2}. \qquad (21)$$

Здесь изгибающие и крутящие моменты запишутся в виде:

$$M_{11}=\int_{-h}^{h}\sigma_{11}zdz=\frac{H^2}{2}\left(E_{11}H\frac{\partial\tilde{\psi}_1}{\partial x_1}+E_{12}H\frac{\partial\tilde{\psi}_2}{\partial x_2}-E_{13}\frac{2(\tilde{r}-\tilde{W})}{H}\right), \qquad (22.а)$$

$$M_{22}=\int_{-h}^{h}\sigma_{22}zdz=\frac{H^2}{2}\left(E_{12}H\frac{\partial\tilde{\psi}_1}{\partial x_1}+E_{22}H\frac{\partial\tilde{\psi}_2}{\partial x_2}-E_{23}\frac{2(\tilde{r}-\tilde{W})}{H}\right), \qquad (22.б)$$

$$M_{12}=M_{21}=\int_{-h}^{h}\sigma_{12}zdz=G_{12}\frac{H^2}{2}\left(\frac{\partial\tilde{\psi}_1}{\partial x_2}+\frac{\partial\tilde{\psi}_2}{\partial x_1}\right). \qquad (22.в)$$

Выражения для определения перерезывающих сил имеют вид:

$$Q_{13}=\int_{-h}^{h}\sigma_{13}dz=G_{13}(2\tilde{u}_1+H\frac{\partial\tilde{r}}{\partial x_1}),\quad Q_{23}=\int_{-h}^{h}\sigma_{23}dz=G_{23}(2\tilde{u}_2+H\frac{\partial\tilde{r}}{\partial x_2}). \qquad (23)$$

Уравнения равновесия пластины относительно бимоментов получаются умножением двух первых уравнений теории упругости (2) на z^3 и интегрированием их по координате z:

$$\frac{\partial P_{11}}{\partial x_1}+\frac{\partial P_{12}}{\partial x_2}-3H\tilde{p}_{13}+H\tilde{q}_1=0, \qquad (24.а)$$

$$\frac{\partial P_{21}}{\partial x_1}+\frac{\partial P_{22}}{\partial x_2}-3H\tilde{p}_{23}+H\tilde{q}_2=0. \qquad (24.б)$$

Уравнение равновесия пластины относительно интенсивности поперечных бимоментов получится умножением третьего уравнения теории упругости (2) на z^2 и интегрированием его по координате z:

$$H\frac{\partial\tilde{p}_{13}}{\partial x_1}+H\frac{\partial\tilde{p}_{23}}{\partial x_2}-4\tilde{p}_{33}+2\tilde{q}_3=0. \qquad (25)$$

В уравнениях (24) бимоменты P_{11}, P_{22} P_{12} определяются по следующим выражениям:

$$P_{11}=\frac{1}{h^2}\int_{-h}^{h}\sigma_{11}z^3dz=\frac{H^2}{2}\left(E_{11}\frac{\partial\widetilde{\beta}_1}{\partial x_1}+E_{12}\frac{\partial\widetilde{\beta}_2}{\partial x_2}-E_{13}\frac{2(3\widetilde{\gamma}-\widetilde{W})}{H}\right), \tag{26.а}$$

$$P_{22}=\frac{1}{h^2}\int_{-h}^{h}\sigma_{22}z^3dz=\frac{H^2}{2}\left(E_{12}\frac{\partial\widetilde{\beta}_1}{\partial x_1}+E_{22}\frac{\partial\widetilde{\beta}_2}{\partial x_2}-E_{23}\frac{2(3\widetilde{\gamma}-\widetilde{W})}{H}\right), \tag{26.б}$$

$$P_{12}=P_{21}=\frac{1}{h^2}\int_{-h}^{h}\sigma_{12}z^3dz=\frac{H^2}{2}G_{12}\left(\frac{\partial\widetilde{\beta}_1}{\partial x_2}+\frac{\partial\widetilde{\beta}_2}{\partial x_1}\right). \tag{26.в}$$

Интенсивности поперечных и нормальных бимоментов $\widetilde{p}_{13}$, $\widetilde{p}_{23}$ и $\widetilde{p}_{33}$ определяются выражениями

$$\widetilde{p}_{k3}=\frac{1}{2h^3}\int_{-h}^{h}\sigma_{k3}z^2dz=G_{k3}\left(\frac{2\widetilde{u}_k-4\widetilde{\psi}_k}{H}+\frac{\partial\widetilde{\gamma}}{\partial x_k}\right),\quad (k=1,2), \tag{27.а}$$

$$\widetilde{p}_{33}=\frac{1}{2h^2}\int_{-h}^{h}\sigma_{33}zdz=E_{31}\frac{\partial\widetilde{\psi}_1}{\partial x_1}+E_{31}\frac{\partial\widetilde{\psi}_1}{\partial x_1}-E_{33}\frac{2(\widetilde{r}-\widetilde{W})}{H}. \tag{27.б}$$

Используя граничные условия (3), ряд Маклорона (4) и соотношения (5), построим еще два уравнения:

$$\widetilde{u}_k=\frac{1}{2}\left(21\widetilde{\beta}_k-7\widetilde{\psi}_k\right)-\frac{1}{30}H\frac{\partial\widetilde{W}}{\partial x_k}+\frac{1}{30}\frac{H\widetilde{q}_k}{G_{k3}},\quad (k=1,2), \tag{28.а}$$

$$\widetilde{W}=\frac{1}{4}\left(21\widetilde{\gamma}-3\widetilde{r}\right)-\frac{1}{20}H\left(\frac{E_{31}}{E_{33}}\frac{\partial\widetilde{u}_1}{\partial x_1}+\frac{E_{32}}{E_{33}}\frac{\partial\widetilde{u}_2}{\partial x_2}\right)+\frac{H\widetilde{q}_3}{20E_{33}}. \tag{28.б}$$

Системы дифференциальных уравнений равновесия (19), (20), (24), (25) и (28) составляют совместную систему из девяти уравнений относительно девяти неизвестных функций $\widetilde{\psi}_1,\ \widetilde{\psi}_2,\ \widetilde{u}_1,\ \widetilde{u}_2,\ \widetilde{\beta}_1,\ \widetilde{\beta}_1,\ \widetilde{r},\ \widetilde{\gamma},\ \widetilde{W}$.

Если на границе пластины перемещения равны нулю, то граничные условия для уравнений (19), (20), (24), (25) и (28) на краях $x_1=const$ и $x_2=const$ имеют вид:

$$\widetilde{\psi}_1=0,\quad \widetilde{\psi}_2=0,\ \widetilde{\beta}_1=0,\ \widetilde{\beta}_2=0,\ \widetilde{r}=0,\ \widetilde{\gamma}=0,\ \widetilde{u}_1=0;\ \widetilde{u}_2=0,\quad \widetilde{W}=0. \tag{29.а}$$

Если края пластины оперты, то на краях $x_1=const$ и $x_2=const$

$$M_{11}=0,\quad P_{11}=0,\quad \widetilde{\psi}_2=0,\quad \widetilde{\beta}_2=0,\quad \widetilde{\sigma}_{11}=0,\quad \widetilde{u}_2=0,\quad \widetilde{r}=0,\quad \widetilde{\gamma}=0,\quad \widetilde{W}=0, \tag{29.б}$$

$$M_{22}=0,\quad P_{22}=0,\quad \widetilde{\psi}_1=0,\quad \widetilde{\beta}_1=0,\quad \widetilde{\sigma}_{22}=0,\quad \widetilde{u}_1=0,\quad \widetilde{r}=0,\quad \widetilde{\gamma}=0,\quad \widetilde{W}=0, \tag{29.в}$$

где величины $\widetilde{\sigma}_{11},\widetilde{\sigma}_{12},\widetilde{\sigma}_{22}$ определяются по следующим формулам:

$$\widetilde{\sigma}_{11}=\left(E_{11}-\frac{E_{13}}{E_{33}}E_{31}\right)\frac{\partial\widetilde{u}_1}{\partial x_1}+\left(E_{12}-\frac{E_{13}}{E_{33}}E_{32}\right)\frac{\partial\widetilde{u}_2}{\partial x_2}+\frac{E_{13}}{E_{33}}\widetilde{q}_3, \tag{30.а}$$

$$\widetilde{\sigma}_{22}=\left(E_{21}-\frac{E_{23}}{E_{33}}E_{31}\right)\frac{\partial\widetilde{u}_1}{\partial x_1}+\left(E_{22}-\frac{E_{23}}{E_{33}}E_{32}\right)\frac{\partial\widetilde{u}_2}{\partial x_2}+\frac{E_{23}}{E_{33}}\widetilde{q}_3, \tag{30.б}$$

$$\widetilde{\sigma}_{12}=G_{12}\left(\frac{\partial\widetilde{u}_1}{\partial x_2}+\frac{\partial\widetilde{u}_2}{\partial x_1}\right). \tag{30.в}$$

Итак, сформулирована задача изгиба пластины на основе бимоментной теории толстых пластин. Преимущество бимоментной теории перед существующими теориями заключается в высокой точности и в хорошей применимости ее в решении практических задач определения напряжений и перемещений ортотропных пластин.

Пример расчета

В качестве примера рассмотрим изгиб пластины, нагруженной только по верхней лицевой поверхности $z=-h$ нормальной нагрузкой:

$$q_3^{(-)}=-q_0\sin\frac{\pi x_1}{a}\sin\frac{\pi x_2}{b},$$

где q_0 – параметр нагрузки.

Решение системы уравнений (6), (11), (12) и (13) при граничных условиях (15) и (16) имеет вид:

$$\overline{\psi}_1=C_1\cos(\frac{\pi x_1}{a})\sin(\frac{\pi x_2}{b}),\ \overline{\psi}_2=C_2\sin(\frac{\pi x_1}{a})\cos(\frac{\pi x_2}{b}),\quad \overline{r}=C_3\sin(\frac{\pi x_1}{a})\sin(\frac{\pi x_2}{b});\tag{32.а}$$

$$\overline{\beta}_1=C_4\cos(\frac{\pi x_1}{a})\sin(\frac{\pi x_2}{b}),\ \overline{\beta}_2=C_5\sin(\frac{\pi x_1}{a})\cos(\frac{\pi x_2}{b}),\ \overline{\gamma}=C_6\sin(\frac{\pi x_1}{a})\sin(\frac{\pi x_2}{b});\tag{32.б}$$

$$\overline{u}_1=C_7\cos(\frac{\pi x_1}{a})\sin(\frac{\pi x_2}{b}),\ \overline{u}_2=C_8\sin(\frac{\pi x_1}{a})\cos(\frac{\pi x_2}{b}),\ \overline{W}=C_9\sin(\frac{\pi x_1}{a})\sin(\frac{\pi x_2}{b}).\tag{32.в}$$

Подставляя решения (32) в системы уравнений (6), (11), (12) и (13), получим систему линейных алгебраических уравнений относительно девяти постоянных неизвестных $C_1,C_2,...,C_9$. Решение системы уравнений (19), (20), (24), (25) и (28), удовлетворяющее граничным условиям (29.б) и (29.в), имеет вид:

$$\widetilde{\psi}_1=D_1\cos(\frac{\pi x_1}{a})\sin(\frac{\pi x_2}{b}),\ \widetilde{\psi}_2=D_2\sin(\frac{\pi x_1}{a})\cos(\frac{\pi x_2}{b}),\ \widetilde{r}=D_3\sin(\frac{\pi x_1}{a})\sin(\frac{\pi x_2}{b});\tag{33.а}$$

$$\widetilde{\beta}_1=D_4\cos(\frac{\pi x_1}{a})\sin(\frac{\pi x_2}{b}),\ \widetilde{\beta}_2=D_5\sin(\frac{\pi x_1}{a})\cos(\frac{\pi x_2}{b}),\ \widetilde{\gamma}=D_6\sin(\frac{\pi x_1}{a})\sin(\frac{\pi x_2}{b});\tag{33.б}$$

$$\widetilde{u}_1=D_7\cos(\frac{\pi x_1}{a})\sin(\frac{\pi x_2}{b}),\ \widetilde{u}_2=D_8\sin(\frac{\pi x_1}{a})\cos(\frac{\pi x_2}{b}),\ \widetilde{W}=D_9\sin(\frac{\pi x_1}{a})\sin(\frac{\pi x_2}{b}).\tag{33.в}$$

Подставляя решения (33) в системы уравнений (19), (20), (24), (25) и (28), получим систему линейных алгебраических уравнений относительно девяти постоянных неизвестных $D_1,\ D_2,...,\ D_9$.

С помощью решений алгебраических систем уравнений получены численные значения перемещений и напряжений для прямоугольной изотропной пластины с относительной толщиной $\frac{H}{b}=\frac{1}{4}$ при различных значениях отношения $\frac{H}{a}$. Значения коэффициентов Пуассона принимались $\nu_1=\nu_2=\nu_3=0.3$.

В таблицах 1–3 приведены численные значения, полученные при решении первой задачи. В таблице 1 представлены численные результаты расчета обобщенных перемещений $\frac{E_1\overline{\psi}_1}{Hq_0}$, $\frac{E_1\overline{\psi}_2}{Hq_0}$, $\frac{E_1\overline{\beta}_1}{Hq_0}$, $\frac{E_1\overline{\beta}_2}{Hq_0}$, $\frac{E_1\overline{r}}{Hq_0}$, $\frac{E_1\overline{\gamma}}{Hq_0}$. Расчеты показывают, что с увеличением размера пластины уменьшаются значения перемещений $\overline{\psi}_2$, $\overline{\beta}_2$, а перемещения $\overline{\psi}_1$, $\overline{\beta}_1$ в другом направлении, наоборот, увеличиваются. С увеличением этого размера пластины значения нормальных перемещений $\overline{r}$, $\overline{\gamma}$ практически не меняются.

Таблица 1. Значения кинематических функций первой задачи

H/b	$E_1\overline{\psi}_1/Hq_0$	$E_1\overline{\psi}_2/Hq_0$	$E_1\overline{\beta}_1/Hq_0$	$E_1\overline{\beta}_2/Hq_0$	$E_1\overline{r}/Hq_0$	$E_1\overline{\gamma}/Hq_0$
1/4	−0.1239	−0.1239	−0.0376	−0.0376	−0.0763	−0.0456
1/6	−0.1717	−0.1145	−0.0535	−0.0356	−0.0761	−0.0456
1/10	−0.2139	−0.0856	−0.0675	−0.0270	−0.0761	−0.0456

В таблице 2 приведены численные результаты расчета безразмерных продольных сил $n_{11}=\dfrac{N_{11}}{H}$, $n_{22}=\dfrac{N_{22}}{H}$, $n_{12}=\dfrac{N_{12}}{H}$ и бимоментов $t_{11}=\dfrac{2T_{11}}{H^2}$, $t_{22}=\dfrac{2T_{22}}{H^2}$, $t_{12}=\dfrac{2T_{12}}{H^2}$. Как видим, при увеличении размера пластины b значения силы и бимомента пластины N_{22}, T_{22} увеличиваются, а значения сил N_{11}, N_{12} и бимоментов T_{11}, T_{12} уменьшаются.

Таблица 2. Значения продольных сил и бимоментов первой задачи

H/b	n_{11}/q_0	n_{22}/q_0	n_{12}/q_0	t_{11}/q_0	t_{22}/q_0	t_{12}/q_0
1/4	−0.0748	−0.0748	−0.0748	−0.0998	−0.0998	−0.0227
1/6	−0.0461	−0.1034	−0.0692	−0.0896	−0.1075	−0.0215
1/10	−0.0207	−0.1292	−0.0517	−0.0808	−0.1150	−0.0163

В таблице 3 приведены безразмерные численные результаты расчета кинематических функций $\overline{u}_1$, $\overline{u}_2$, $\overline{W}$ и безразмерных обобщенных напряжений $\overline{\sigma}_{11}$, $\overline{\sigma}_{22}$, $\overline{\sigma}_{12}$. С увеличением размера пластины b значения перемещения $\overline{u}_2$ и напряжений $\overline{\sigma}_{11},\overline{\sigma}_{12}$ уменьшаются, а значения перемещения $\overline{u}_1$ и напряжения $\overline{\sigma}_{22}$ увеличиваются. Отметим, что увеличение этого параметра практически не влияет на значение нормального перемещения $\overline{W}$.

Таблица 3. Значения перемещений и напряжений первой задачи

H/b	$E_1\overline{u}_1/Hq_0$	$E_1\overline{u}_2/Hq_0$	$E_1\overline{W}_1/Hq_0$	$\overline{\sigma}_{11}/q_0$	$\overline{\sigma}_{22}/q_0$	$\overline{\sigma}_{12}/q_0$
1/4	−0.0956	−0.0956	−0.2270	−0.1070	−0.1070	−0.0577
1/6	−0.1430	−0.0953	−0.2273	−0.0744	−0.1224	−0.0576
1/10	−0.1850	−0.0740	−0.2273	−0.0470	−0.1408	−0.0447

В таблицах 4–6 приведены численные результаты, полученные при решении второй задачи. В таблице 4 приводятся безразмерные результаты расчета кинематических функций $\dfrac{E_1\tilde{\psi}_1}{Hq_0}$, $\dfrac{E_1\tilde{\psi}_2}{Hq_0}$, $\dfrac{E_1\tilde{\beta}_1}{Hq_0}$, $\dfrac{E_1\tilde{\beta}_2}{Hq_0}$, $\dfrac{E_1\tilde{r}}{Hq_0}$, $\dfrac{E_1\tilde{\gamma}}{Hq_0}$. Отметим, что с увеличением размера пластины b увеличиваются значения перемещений $\tilde{\psi}_1$, $\tilde{\beta}_1$, а в другом направлении пластины размером a перемещения нормального направления пластины $\tilde{r}$, $\tilde{\gamma}$ также увеличиваются. Перемещения $\tilde{\psi}_2$, $\tilde{\beta}_2$ в направлении размера b сначала увеличиваются, а потом уменьшаются.

Таблица 4. Значения кинематических функций второй задачи

H/b	$E_1\tilde{\psi}_1/Hq_0$	$E_1\tilde{\psi}_2/Hq_0$	$E_1\tilde{\beta}_1/Hq_0$	$E_1\tilde{\beta}_2/Hq_0$	$E_1\tilde{r}/Hq_0$	$E_1\tilde{\gamma}/Hq_0$
1/4	−0.8897	−0.8897	−0.5420	−0.5420	9.2752	3.0633
1/6	−1.7319	−1.1546	−1.0505	−0.7002	16.6581	5.5081
1/10	−2.7063	−1.0825	−1.6378	−0.6552	24.9393	8.2541

В таблице 5 приведены безразмерные численные результаты расчета изгибающих моментов сил $m_{11} = \frac{2M_{11}}{H^2}$, $m_{22} = \frac{2M_{22}}{H^2}$, продольных изгибающих бимоментов $p_{11} = \frac{2P_{11}}{H^2}$, $p_{22} = \frac{2P_{22}}{H^2}$ и перерезывающих сил Q_{13} / Hq_0, Q_{23} / Hq_0. При увеличении размера пластины b значения момента, силы и бимомента m_{11}, Q_{13}, P_{11} увеличиваются, а значения момента, силы и бимомента m_{22}, Q_{23}, P_{22} увеличиваются, а потом уменьшаются.

Таблица 5. Значения моментов, бимоментов и перерезывающих сил второй задачи

H/b	m_{11}/q_0	m_{22}/q_0	p_{11}/q_0	p_{22}/q_0	Q_{13}/Hq_0	Q_{23}/Hq_0
1/4	1.0836	1.0836	0.6570	0.6570	0.6366	0.6366
1/6	1.7796	1.1983	1.0764	0.7238	0.8815	0.5876
1/10	2.5335	1.1600	1.5304	0.6992	1.0976	0.4390

По таблицам 6–8 можно сделать аналогичные выводы по анализу результатов расчетов. В таблице 6 приведены безразмерные численные результаты расчета кинематических функций $\tilde{u}_1$, $\tilde{u}_2$, $\tilde{W}$ и обобщенных напряжений $\tilde{\sigma}_{11}$, $\tilde{\sigma}_{22}$, $\tilde{\sigma}_{12}$.

Таблица 6. Значения перемещений и напряжений для второй задачи

H/b	$E_1\tilde{u}_1/Hq_0$	$E_1\tilde{u}_2/Hq_0$	$E_1\tilde{W}/Hq_0$	$\tilde{\sigma}_{11}/q_0$	$\tilde{\sigma}_{22}/q_0$	$\tilde{\sigma}_{12}/q_0$
1/4	−2.8147	−2.8147	9.0498	3.3724	3.3724	−1.7005
1/6	−5.3957	−3.5971	16.3112	5.4921	3.6811	−2.1732
1/10	−8.3667	−3.3467	24.4851	7.7820	3.5360	−2.0219

Максимальные значения перемещений и напряжений пластины достигаются на лицевых поверхностях пластины и определяются решениями первой и второй задачи. Ниже приводим формулы для определения перемещений и напряжений на лицевых поверхностях пластины $z = -h$ и $z = h$:

$$u_i^{(-)} = \bar{u}_i - \tilde{u}_i, \quad u_i^{(+)} = \bar{u}_i + \tilde{u}_i, \ (i = 1,2), \quad u_3^{(-)} = \tilde{W} - \overline{W}, \quad u_3^{(+)} = \tilde{W} + \overline{W}$$

$$\sigma_{ij}^{(-)} = \bar{\sigma}_{ij} - \tilde{\sigma}_{ij}, \quad \sigma_{ij}^{(+)} = \bar{\sigma}_{ij} + \tilde{\sigma}_{ij}, \quad (i = 1,2;\ j = 1,2).$$

В таблицах 7 и 8 приведены безразмерные численные результаты расчета перемещений $\frac{E_1 u_1}{Hq_0}$, $\frac{E_1 u_2}{Hq_0}$, $\frac{E_1 u_3}{Hq_0}$ и напряжений σ_{11}, σ_{22}, σ_{12} на верхнем (таблица 7) и нижнем (таблица 8) слоях пластины.

Таблица 7. Значения перемещений и напряжений на верхнем слое пластины

H/b	$E_1u_1^{(-)}/Hq_0$	$E_1u_2^{(-)}/Hq_0$	$E_1u_3^{(-)}/Hq_0$	$\sigma_{11}^{(-)}/q_0$	$\sigma_{22}^{(-)}/q_0$	$\sigma_{12}^{(-)}/q_0$
1/4	2.7192	2.7192	9.2764	−3.4794	−3.4794	1.6428
1/6	5.2527	3.5018	16.5384	−5.5665	−3.8035	2.1156
1/10	8.1818	3.2727	24.7125	−7.8290	−3.6768	1.9772

Таблица 8. Значения перемещений и напряжений на нижнем слое пластины

H/b	$E_1u_1^{(+)}/Hq_0$	$E_1u_2^{(+)}/Hq_0$	$E_1u_3^{(+)}/Hq_0$	$\sigma_{11}^{(+)}/q_0$	$\sigma_{22}^{(+)}/q_0$	$\sigma_{12}^{(+)}/q_0$
1/4	−2.9103	−2.9103	8.8227	3.2654	3.2654	−1.7583
1/6	−5.5388	−3.6924	16.0839	5.4177	3.5587	−2.2308
1/10	−8.5517	−3.4207	24.2588	7.7350	3.3951	−2.0666

Заключение

В ходе исследования были получены следующие результаты:

- сформулирована задача изгиба толстых ортотропных пластин с учетом бимоментов;
- построено аналитическое решение задачи изгиба толстой ортотропной пластины;
- получены численные результаты, представляющие кинематические функции обобщенных перемещений, сил, моментов, бимоментов и напряжений.

Литература

1. Амбарцумян А.С. Теория анизотропных пластин: Прочность, устойчивость и колебания. М.: Наука, 1987. 360 с.
2. Вольмир А.С. Нелинейная динамика оболочек и пластин. М.: Наука, 1972. 432 с.
3. Бутенко Ю.И. Вариационно-асимптотические методы построения неклассических моделей расчета однослойных и многослойных стержней и пластин: дис.. д-ра физ.-мат наук. Казань, 2003. 402 с.
4. Карпов В.В. Геометрически нелинейные задачи для пластин и оболочек и методы их решения. М.: АСВ, 1999. 154 с.
5. Абдикаримов Р.А., Жгутов В.М. Математические модели задач нелинейной динамики вязкоупругих ортотропных пластин и оболочек переменной толщины // Инженерно-строительный журнал. 2010. №6. С. 38–47.
6. Жгутов В.М. Математические модели и алгоритмы исследования устойчивости пологих ребристых оболочек при учете различных свойств материала // Известия Орловского гос. техн. ун-та. Серия «Строительство, транспорт». 2007. №4. С. 20–23.
7. Жгутов В.М. Математическая модель деформирования ортотропных и изотропных ребристых оболочек при учете ползучести материала // Инженерно-строительный журнал. 2009. №7. С.46–54.
8. Агаловян Л.А., Геворкян Р.С, Хачатрян Г.Г. Асимптотическое решение смешанных краевых задач двухслойных анизотропных пластин переменной толщины // Изв. нац. АН Армении. Сер. мех. 1998. Т.51. №2. С. 27–36.
9. Karamooz Ravari M.R., Forouzan M.R. Frequency equations for the in-plane vibration of orthotropic circular annular plate // Archive of Applied Mechanics. 2011. Vol. 81. No.9. Pp. 1307–1322.
10. Soukup J., Valeš F., Volek J., Skočilas J. Transient vibration of thin viscoelastic orthotropic plates // Acta Mechanica Sinica. 2011. Vol. 27. No.1. Pp. 98–107.
11. Papkov S.O. Steady-state forced vibrations of a rectangular orthotropic plate // Journal of Mathematical Sciences. 2013. Vol. 192. No.6. Pp. 691–702.
12. Hsi-Hung Chang, Jiann-Quo Tarn. Three-Dimensional Elasticity Solutions for Rectangular Orthotropic Plates // Journal of Elasticity. 2012. Vol. 108. No.1. Pp. 49–66.
13. Birman V. Mechanics of Composite Plates // Solid Mechanics and Its Applications. 2011. Vol. 178. Pp. 173–223.
14. Zenkour A.M., Allam M.N.M., Shaker M.O., Radwan A.F. On the simple and mixed first-order theories for plates resting on elastic foundations // Acta Mechanica. 2011. Vol. 220. No.1–4. Pp. 33–46.
15. Lacarbonara W. Nonlinear Structural Mechanics: Theory, Dynamical Phenomena and Modeling. 2013. 879 p.
16. Власов В.З. Тонкостенные пространственные системы. М.: Гостстройиздат, 1958. 503 с.
17. Усаров М.К. Задача изгиба для толстой ортотропной пластины в трехмерной постановке // Инженерно-строительный журнал. 2011. №4. С.40–47.
18. Усаров М.К. Изгиб толстых пластин // Вестник ТашИИТ. 2008. №2. С.30–35.
19. Усаров М.К. Изгиб анизотропной пластины // Проблемы механики. 2009. №2–3. С.34–37
20. Усаров М.К. Вынужденные колебания толстых пластин // Проблемы механики. 2010. №3. С.15–18.

Махамаtали Корабоевич Усаров, г. Ташкент, Узбекистан
Тел. раб.: +7(871)2627132; эл. почта: umakhamatali@mail.ru

doi: 10.5862/MCE.53.8

Buckling of orthotropic plates with bimoments

M.K. Usarov,
Institute of Mechanics and Seysmic Stability of Structures, Tashkent, Uzbekistan
+78712627132; e-mail: umakhamatali@mail.ru

Key words

Hooke's law; orthotropy; theory of elasticity; 3D problem; thick plate; planar problem; force; moment; bimoment; bimoment theory

Abstract

The paper is dedicated to improvement of plate theory in order to take into account forces, moments and bimoments, generated by nonlinear law of displacement distribution in plate cross-sections. Integral correlations for defining forces, moments and bimoments were given.

The developed bimoment plate theory is described with two independent two-dimensional systems with nine equations in each. On each edge of plate nine boundary conditions were set. The approach to building the bimoment theory is based on the Hook law, three-dimensional equations of elasticity and decomposition of displacements in Maclaurin series.

As an example, the solution of the problem of thick orthotropic plate buckling under action of transverse harmonic sinusoidal load was described. Numerical results were obtained for displacement, force, moments, bimoments and stresses, accompanied by analysis.

References

1. Ambartsumyan S. A. *Teoriya anizotropnykh plastin: Prochnost, ustoychivost i kolebaniya* [The theory of anisotropic plates: strength, stability and vibrations]. Moscow: Nauka, 1987. 360 p. (rus)
2. Volmir A.S. *Nelineynaya dinamika plastin I obolochek* [Nonlinear Dynamics of Plates and Shell]. Moscow: Nauka, 1972. 432 p. (rus)
3. Butenko Yu.I. *Variatsionno-asimptoticheskie metody postroeniya neklassicheskikh modeley rascheta odnosloynykh i mnogosloynykh sterzhney i plastin* [A variational-asymptotic method of construction the nonclassical models for calculation of the single-layer and multilayer bars and plates]. Doctoral dissertation. Kazan, 2003. 402 p. (rus)
4. Karpov V.V. *Geometricheski nelineynyye zadachi dlya plastin i obolochek i metody ikh resheniya* [Geometrical nonlinear problems for plates and shells and methods of their decision]. Moscow: Izd-vo ASV, 1999. 154 p. (rus)
5. Abdikarimov R.A., Zhgutov V.M. Matematicheskiye modeli zadach nelineynoy dinamiki vyazkouprugikh ortotropnykh plastin i obolochek peremennoy tolshchiny [Mathematic models of nonlinear dynamics problems of viscoelastic orthotropic plates and shells of variable thickness]. *Magazine of Civil Engineering*. 2010. No.6. Pp. 38–47. (rus)
6. Zhgutov V.M. Matematicheskiye modeli i algoritmy issledovaniya ustoychivosti pologikh rebristykh obolochek pri uchete razlichnykh svoystv materiala [Mathematical models and algorithms for studying the stability of shallow ribbed shells, taking into account the different properties of the material]. *Reports of State Technical University of Oryol. Series «Building, transport».* 2007. No.4. Pp.20–23. (rus)
7. Zhgutov V.M. Matematicheskaya model deformirovaniya ortotropnykh i izotropnykh rebristykh obolochek pri uchete polzuchesti materiala [Mathematical modelling of orthotropic and isotropic ribbed shells deformation taking into account the creep of material]. *Magazine of Civil Engineering*. 2009. No. 7. Pp. 46–54. (rus)
8. Agalovjan L.A., Gevorkyan R.S., Khachatrjan G.G. Asimptoticheskoye resheniye smeshannykh krayevykh zadach dvukhsloynykh anizotropnykh plastin peremennoy tolshchiny [The asymptotic solution of the mixed boundary-value problems of two-layer anisotropic plates with variable thickness]. *Report of National Ac. of Sci. of Armenia.* 1998. Vol. 51. No. 2. Pp. 27–36. (rus)
9. Karamooz Ravari M.R., Forouzan M.R. Frequency equations for the in-plane vibration of orthotropic circular annular plate. *Archive of Applied Mechanics*. 2011. Vol.81. No.9. Pp.1307–1322.
10. Soukup J., Valeš F., Volek J., Skočilas J. Transient vibration of thin viscoelastic orthotropic plates. *Acta Mechanica Sinica*. 2011. Vol.27. No.1. Pp. 98–107.

11. Papkov S.O. Steady-state forced vibrations of a rectangular orthotropic plate. *Journal of Mathematical Sciences*. 2013. Vol. 192. No. 6. Pp. 691–702.
12. Hsi-Hung Chang, Jiann-Quo Tarn. Three-Dimensional Elasticity Solutions for Rectangular Orthotropic Plates. *Journal of Elasticity*. 2012. Vol. 108. No.1. Pp 49–66.
13. Birman V. Mechanics of Composite Plates. *Solid Mechanics and Its Applications*. 2011. Vol. 178. Pp.173–223.
14. Zenkour A.M., Allam M.N.M., Shaker M.O., Radwan A.F. On the simple and mixed first-order theories for plates resting on elastic foundations. *Acta Mechanica*. 2011. Vol.220. No.1–4. Pp. 33–46.
15. Lacarbonara W. The Nonlinear Theory of Plates. *Nonlinear Structural Mechanics*. 2013. Pp. 497–592.
16. Vlasov V.Z. *Tonkostennye prostransvennye sistemy* [Thin-walled spatial system]. Moscow: Gosstroyizdat, 1958. 503 p. (rus)
17. Usarov M.K. Zadacha izgiba dlya tolstoy ortotropnoy plastiny v trekhmernoy postanovke [The problem of bending the thick orthotropic plate of three-dimensional formulation]. *Magazine of Civil Engineering*. 2011. No.4. Pp.40–47. (rus)
18. Usarov M.K. Izgib tolstykh plastin [Bending of thick plates]. *Vestnik TashIIT*. 2010. No.4. Pp.10–14. (rus)
19. Usarov M.K. Izgib anizotropnoy plastiny [Bending of anisotropic plate]. *Problemy mekhaniki*. 2009. No.2–3. Pp.34–37. (rus)
20. Usarov M.K. Vynuzhdennyye kolebaniya tolstykh plastin [Forced vibrations of thick plates]. *Problemy mekhaniki.* 2010. No.3. Pp.15–18. (rus)

Full text of this article in Russian: pp. 80–90