

doi: 10.5862/MCE.53.6

## Конечноэлементные модели исследования нелинейного деформирования оболочек ступенчато-переменной толщины с отверстиями, каналами и выемками

**Д.т.н., профессор Н.А. Соловей;**  
**к.т.н., докторант О.П. Кривенко;**  
**ассистент О.А. Малыгина,**

*Киевский национальный университет строительства и архитектуры*

**Аннотация.** Метод решения статических задач нелинейного деформирования, устойчивости и закритического поведения тонких упругих неоднородных оболочек основан на геометрически нелинейных соотношениях трехмерной теории термоупругости и использовании моментной схемы конечных элементов (МСКЭ).

На базе универсального пространственного конечного элемента с дополнительными переменными параметрами разработана единая расчетная модель, учитывающая многослойную структуру материала и геометрические особенности конструктивных элементов неоднородной оболочки: обшивку переменной толщины, ребра и накладки, выемки, каналы и отверстия, изломы срединной поверхности.

В данной работе проведен сравнительный анализ конечноэлементных моделей и результатов расчета тонких упругих оболочек с использованием МСКЭ, программных комплексов ЛИРА и SCAD. На примере пологих изотропных панелей, нагруженных равномерным давлением, изучалось влияние различных ослаблений на их нелинейное деформирование и потерю устойчивости.

**Ключевые слова:** гибкая оболочка; моментная схема конечных элементов; нелинейное деформирование; потеря устойчивости; ступенчато-переменная толщина; ослабление

### Введение

Оболочки, ослабленные каналами, выемками или отверстиями, широко применяются в различных отраслях техники. Наличие в тонких оболочках подобных ослаблений обычно приводит к повышению деформативности, качественному изменению напряженно-деформированного состояния и уменьшению критической нагрузки конструкции [1, 2]. К настоящему времени имеется множество публикаций, посвященных расчету гибких оболочечных систем. За последнее десятилетие количество работ по тематике значительно возросло [1–22]. В них большое внимание уделяется изучению упругих оболочек ступенчато-переменной толщины, в частности тонких оболочек, подкрепленных ребрами [1, 2, 4, 12–15]. Значительно меньше работ посвящено рассмотрению оболочек с различными ослаблениями [1, 2, 22, 23]. В связи с этим вопросы, связанные с разработкой моделей нелинейного деформирования упругих тонких оболочек с каналами и выемками, и проведение на их основе расчетов представляются актуальными и важными.

Следует отметить, что в известных программных комплексах (ПК) недостаточно разработаны общие алгоритмы исследования нелинейного деформирования и устойчивости оболочечных конструкций ступенчато-переменной толщины. Изучение такого класса задач ввиду их сложности и возможной неоднозначности получаемых решений трудно реализовать в виде стандартной вычислительной процедуры. В связи с недостаточностью эталонных нелинейных решений для оболочек ступенчато-переменной толщины также проблемным является подтверждение достоверности и точности получаемых нелинейных решений. В цикле работ [24–27] представлен сравнительный анализ результатов исследования задач нелинейного деформирования и устойчивости различных классов тонких упругих неоднородных оболочек при действии термосиловых нагрузок с использованием моментной схемы конечных элементов (МСКЭ) и с помощью ПК ЛИРА.

## 1. Постановка задачи

Расчеты оболочек как систем с усложненной структурой вызывают не только вычислительные, но и принципиальные методические трудности. Современное развитие вычислительной техники стимулирует разработку новых уточненных методов исследования оболочек, которые имеют более широкий круг использования, чем традиционные методы расчета отдельных классов оболочек [1–6, 8, 10, 17–22]. Наиболее успешно эта проблема может быть решена методом конечных элементов на основе разработки и применения для неоднородных оболочек универсальных пространственных конечных элементов. Задачами работы являются:

- разработка численного метода решения статических задач геометрически нелинейного деформирования, устойчивости и закритического поведения широкого класса упругих неоднородных оболочек сложной формы и структуры;
- изучение и оценка возможности использования комплексов ЛИРА и SCAD для решения сложных задач нелинейного деформирования и потери устойчивости тонких оболочек ступенчато-переменной толщины;
- сравнительный анализ результатов исследований нелинейного деформирования и устойчивости упругих оболочек при использовании трех ПК, основанных на МКЭ: разработанный авторами и реализующий МКЭ, ЛИРА 9.6 и SCAD 11.5, с целью дальнейшего обоснования достоверности решений, получаемых по конечноэлементной методике [1, 2].

### 1.1. Методика решения геометрически нелинейных задач деформирования и потери устойчивости неоднородных оболочек с использованием МКЭ

С единых позиций пространственной геометрически нелинейной теории термоупругости в [1, 2] разработана конечноэлементная методика исследования геометрически нелинейного деформирования, устойчивости и закритического поведения упругих оболочек различной формы и структуры при статическом действии силовых и температурных нагрузок. Использована модель линейно-упругой сплошной среды, свойства которой отвечают обобщенному закону Дюамеля – Неймана, при больших перемещениях и малых деформациях. Применена моментная схема конечных элементов, которая распространена на задачи термоупругого деформирования тонких неоднородных оболочек. Под неоднородностью оболочки понимаются ее геометрические особенности в виде гладко-переменной и ступенчато-переменной толщины, изломы, отверстия и неоднородность материала вдоль толщины и в плане (рис. 1).

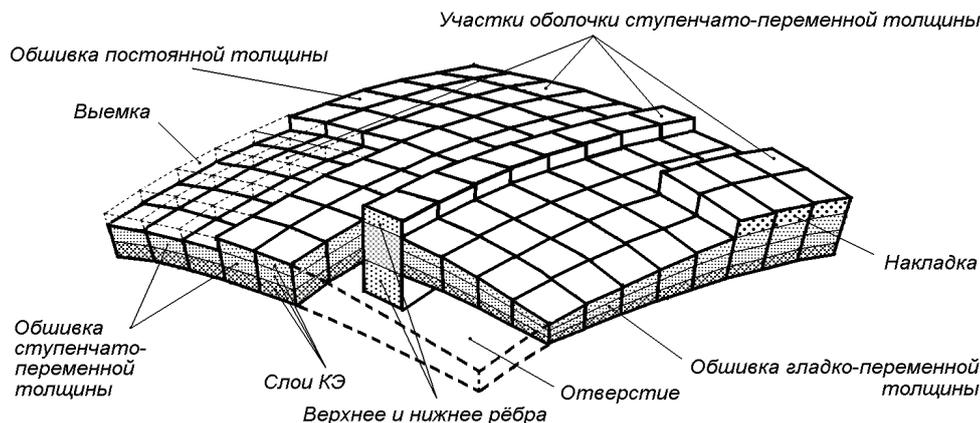
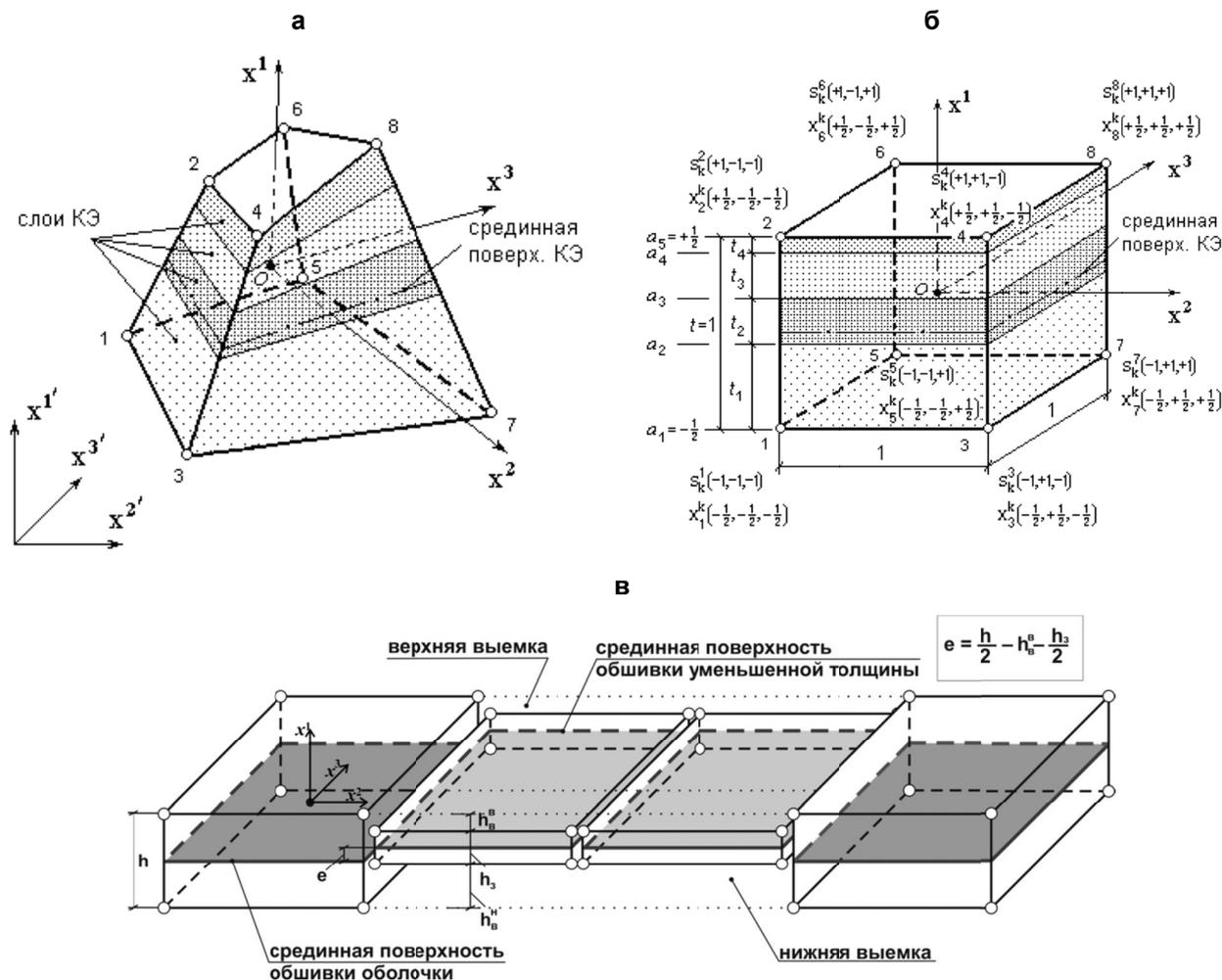


Рисунок 1. Фрагмент конечноэлементной модели оболочки неоднородной структуры

Разработан универсальный пространственный изопараметрический конечный элемент (КЭ) с полилинейными функциями формы (рис. 2, а, б; где  $s_k$  и  $x^k$  – сеточные и местные координаты узлов, ось  $x^1$  местной системы координат направлена по толщине и необязательно по нормали к срединной поверхности). Тонкая оболочка по толщине аппроксимируется одним пространственным КЭ. Универсальность КЭ заключается в возможности моделирования геометрических особенностей оболочки через непрерывно-переменную и ступенчато-переменную толщину, изломы срединной поверхности, отверстия, многослойную структуру материала. Особенности НДС тонкой неоднородной оболочки учтены применением двух гипотез: о постоянстве нормальных напряжений обжатия волокон слоев в направлении толщины (более

слабая, чем классическая гипотеза) и о деформируемой прямой. Последняя гипотеза позволяет выполнять стыковку элементов без нарушения совместности по перемещениям и координатам в процессе деформирования. Возможности элемента расширены за счет введения дополнительных переменных параметров. Благодаря такому подходу точно моделируется объем эксцентрично расположенных относительно срединной поверхности оболочки ребер, накладок, каналов и выемок. На рисунке 2, в на примере участка оболочки с выемками схематически показано моделирование оболочки ступенчато-переменной толщины универсальным КЭ.



**Рисунок 2. Универсальный пространственный КЭ оболочки (МСКЭ)**  
**(а) геометрическая форма; (б) топологическая модель; (в) моделирование участка с выемками**

Обычно в МКЭ искомыми неизвестными являются перемещения узлов КЭ  $u_{s_1 s_2 s_3}^i$  в глобальной декартовой системе координат  $x^i$ . Для улучшения сходимости для тонких оболочек в качестве разрешающих функций принимается совокупность перемещений узловых точек на срединной поверхности  $v_{s_2 s_3}^i$  и разницы узловых перемещений на ограничивающих поверхностях КЭ  $v_{s_2 s_3}^i$

$$v_{s_2 s_3}^i = \frac{u_{s_1=+1s_2s_3}^i + u_{s_1=-1s_2s_3}^i}{2}, \quad v_{s_2 s_3}^i = u_{s_1=+1s_2s_3}^i - u_{s_1=-1s_2s_3}^i.$$

Введенная таким образом замена переменных может трактоваться как переход от 8-узлового пространственного КЭ с 3 узловыми перемещениями к 4-узловому оболочечному КЭ с 6 обобщенными перемещениями, отнесенными к узлам на срединной поверхности КЭ.

При получении соотношений для коэффициентов матриц реакции, жесткости, геометрической жесткости и эквивалентных температурных нагрузок универсального КЭ необходимым образом учитываются его дополнительные переменные параметры. При вычислении коэффициентов указанных матриц в соответствующие соотношения подаются исходные данные либо для КЭ обшивки, либо для модифицированного КЭ. При этом учитывается, что при получении матриц для КЭ обшивки и модифицированного КЭ в качестве поверхностей отсчета приняты их срединные поверхности, которые могут между собой не совпадать. Поэтому при численном построении системы разрешающих уравнений для конечноэлементной модели оболочки ступенчато-переменной толщины всегда выполняется корректирование матриц модифицированного КЭ относительно принятой единой поверхности отсчета – срединной поверхности обшивки оболочки.

Решение нелинейной задачи устойчивости выполняется комбинированным шаговым алгоритмом, сочетающим метод продолжения решения по параметру и итерационную процедуру Ньютона – Канторовича. Разработаны автоматизированные процедуры расчета задач нелинейного деформирования, потери устойчивости и закритического поведения неоднородных оболочек с определением точек бифуркации, верхней и нижней критической нагрузок.

### 1.2. Методика расчета геометрически нелинейных задач в ПК ЛИРА и SCAD

Для решения геометрически нелинейных задач устойчивости и определения напряженно-деформированного состояния тонких оболочек и пластин в ПК ЛИРА [28, 29] и SCAD [30, 31] применяются два типа плоских КЭ постоянной толщины: треугольный трехузловой №342 (рис. 3, а) и четырехугольный четырехузловой №344 (рис. 3, б). Узлы КЭ, расположенные на его срединной поверхности, имеют по 6 степеней свободы: три перемещения  $u_1, u_2, u_3$  и три угла поворота  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$  относительно местных декартовых осей  $x_i$ .

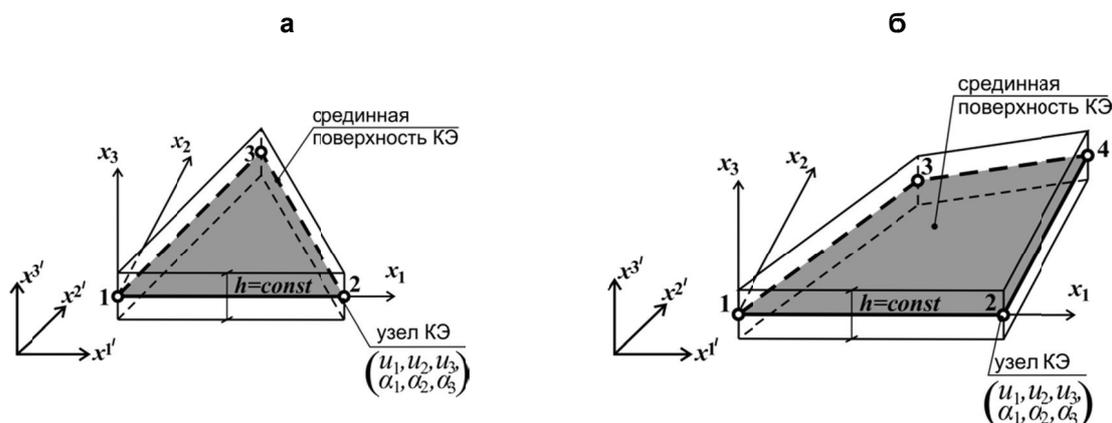


Рисунок 3. Треугольный КЭ №342 (а), четырехугольный КЭ №344 (б), ПК ЛИРА и SCAD

При моделировании геометрических особенностей оболочек ступенчато-переменной толщины в виде эксцентрично расположенных ребер, каналов и выемок в ПК ЛИРА и SCAD применяются специальные элементы. В ПК ЛИРА – это так называемые абсолютно жесткие вставки и абсолютно жесткие тела [28, 29], а в ПК SCAD – абсолютно жесткие (твердые) тела [30, 31]. Во всех случаях это искусственный прием, который применяется для аппроксимации в расчетной модели неоднородной оболочки ступенчатого изменения ее толщины с учетом эксцентриситета. Целью введения этих специальных элементов является задание кинематической связи для соответствующих узловых перемещений. На рисунках 4–5 на примере участка оболочки с выемками схематически показано применение абсолютно жестких вставок и абсолютно жестких тел в расчетных моделях ПК ЛИРА и SCAD.

Абсолютно жесткие вставки ПК ЛИРА служат для присоединения узлов КЭ на участках ступенчато-переменной толщины к основным узлам конструкции, размещенным на ее срединной поверхности. С помощью абсолютно жестких вставок происходит моделирование смещения (эксцентриситета) упругой части КЭ (срединной поверхности ребра или участка с выемкой) (рис. 4). Под упругой частью вставки понимается оболочечный КЭ соответствующей толщины, смещенный относительно срединной поверхности конструкции, в котором узлы (узлы вставки) с помощью кинематических соотношений привязаны к срединной поверхности исходной оболочки.

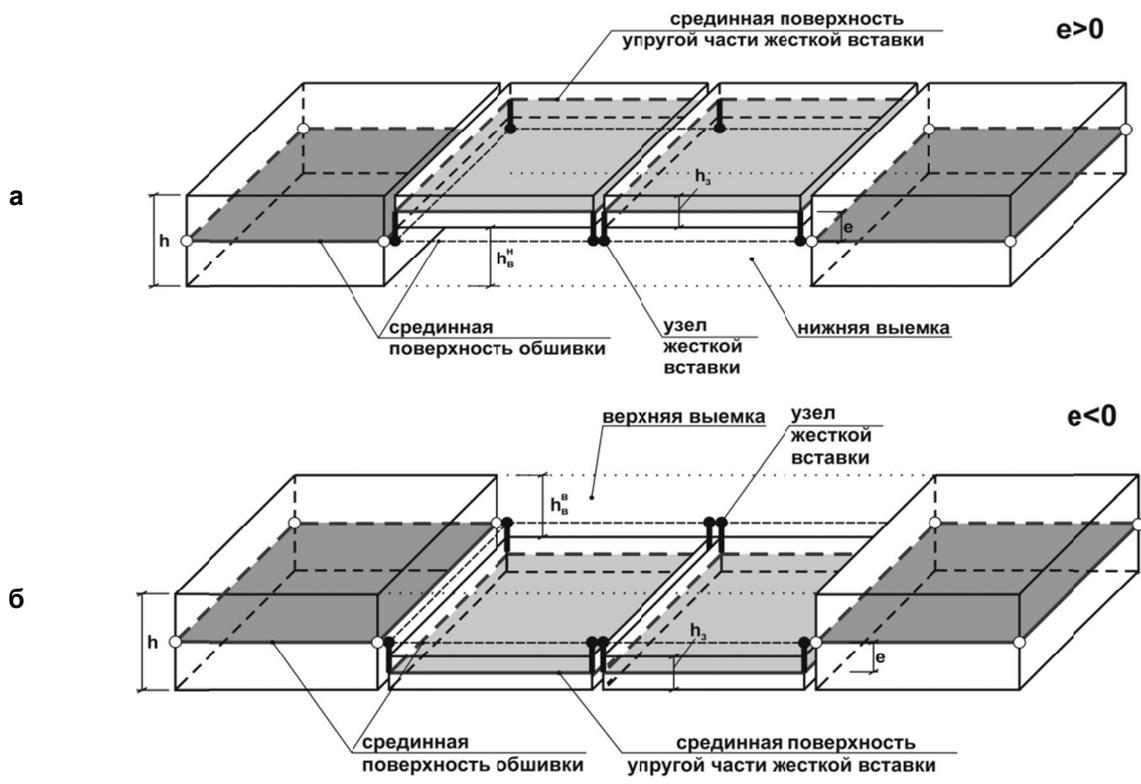


Рисунок 4. Моделирование ступенчато-переменной толщины оболочки абсолютно жесткими вставками в ПК ЛИРА  
(а) на участке с нижней выемкой; (б) на участке с верхней выемкой

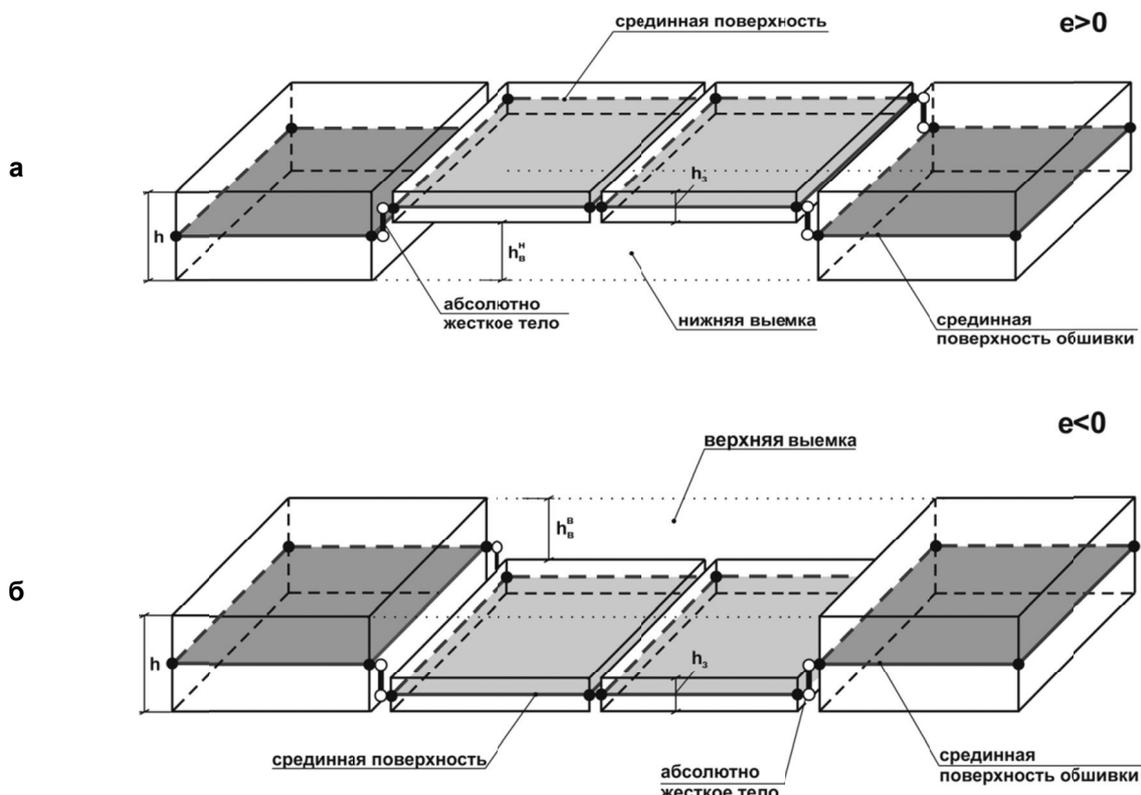


Рисунок 5. Моделирование ступенчато-переменной толщины оболочки абсолютно жесткими телами в ПК ЛИРА и ПК SCAD  
(а) на участке с нижней выемкой; (б) на участке с верхней выемкой

Абсолютно жесткие тела ПК ЛИРА и ПК SCAD представляют собой специальные (условные) КЭ большой жесткости, которые дополнительно вводятся в расчетную модель для соединения узлов срединных поверхностей обшивки и эксцентричного элемента (рис. 5). В целом абсолютно жесткое тело можно лишь условно отнести к понятию конечный элемент, поскольку оно собственно не имеет классических атрибутов КЭ (базисные функции, область конечного элемента и т. п.) [28]. Однако с точки зрения реализации абсолютно жесткое тело вписывается в конечноэлементную процедуру. При моделировании смещений КЭ абсолютно жесткое тело является жесткой связью между узлами эксцентрично расположенных элементов. Абсолютно жесткие тела используются для моделирования несоосной стыковки колонн, капителей, ребристых плит перекрытия и т. д. В ПК ЛИРА этот КЭ не имеет номера. В ПК SCAD он находится под номером 100.

Аналогичные приемы используются при моделировании ребер и накладок.

В ПК ЛИРА реализовано три шаговых алгоритма решения геометрически нелинейной задачи [29]:

- 1) простой – количество шагов и величина каждого шага нагрузки задаются пользователем;
- 2) с автоматическим выбором шага – количество шагов и их величина автоматически подбираются алгоритмом;
- 3) шаговый с поиском новых форм равновесия – реализует метод компенсирующих нагрузок, при котором фиксируется момент потери устойчивости и выполняется переход на новую устойчивую ветвь равновесия.

Первые два алгоритма используют простую модификацию метода последовательных нагрузок, где расчет выполняется до момента вырождения матрицы жесткости системы. Точки ветвления и критическая нагрузка не различаются. Таким образом, решение задачи нелинейного деформирования реализуется либо до точки ветвления ( $\bar{q}^*$ ), либо до точки верхней критической нагрузки ( $\bar{q}_{кр}^e$ ). Третий алгоритм реализует переход на новую устойчивую ветвь (как показали исследования [26]) с существенной погрешностью.

В ПК SCAD реализовано также три шаговых алгоритма решения геометрически нелинейной задачи [31].

1. Простой шаговый (реализует метод последовательных нагрузок). Пользователь задает количество шагов и размер каждого шага нагрузки. На каждом шаге решается линейаризованная задача, в предположении, что решение является достаточно точным, реализуется переход к следующему шагу нелинейного расчета.

2. Шаговый с уточнением (реализует метод Ньютона – Канторовича). Пользователь задает количество шагов, величину каждого шага, число итераций. На текущем шаге нагрузки реализовано итерационное уточнение нелинейного решения на основе анализа невязки уравнений равновесия. Итерации выполняются с неизменными коэффициентами линейаризованной матрицы жесткости системы, вычисленными в начале текущего шага.

3. Шагово-итерационный (реализует метод Ньютона – Рафсона). Пользователь задает количество шагов, величину каждого шага, число итераций. На каждом шаге выполняется итерационное уточнение решения с пересчетом коэффициентов линейаризованной матрицы жесткости системы на каждой итерации.

В ПК SCAD не анализируется возможное появление точки ветвления.

Недостаточно полное описание нелинейных алгоритмов в инструкциях ПК ЛИРА и SCAD потребовало решения задач в этих программных комплексах тремя методами. На примере квадратной в плане гладкой сферической панели постоянной толщины, приведенной в работах [26, 27], были исследованы все алгоритмы нелинейного расчета с целью их оценки и выбора наиболее подходящего. Решения по диаграммам нагрузка – прогиб ( $\bar{q}-\bar{u}^{-1}$ ) сравнивались с решениями работ [4, 23] и МСКЭ. Анализ решений показал следующее [26].

В ПК ЛИРА оба варианта метода последовательных нагружений дают хорошее совпадение по величине верхней критической нагрузки  $\bar{q}_{кр}^B$ , где решение задачи и заканчивается. Выявлено, что для данной задачи шаговый алгоритм с поиском новых форм равновесия (ПК ЛИРА) реализует переход на новую устойчивую ветвь равновесия с большой погрешностью. Приемлемым является алгоритм с автоматическим выбором шага.

Все три алгоритма ПК SCAD позволяют переходить на новую устойчивую ветвь равновесия. Простой шаговый алгоритм выполняет переход на закритическую ветвь с большой погрешностью по величине верхней критической нагрузки. Эта проблема решается достаточно точно двумя алгоритмами: шаговым с уточнением и шагово-итерационным.

Равновесные формы деформированных панелей в докритической и в закритической областях имеют простой вид и хорошо совпадают во всех трех способах решения – ПК ЛИРА, ПК SCAD и МСКЭ.

## 2. Численные примеры

В работе рассматриваются квадратные в плане сферические панели с различными типами ослаблений. Панель шарнирно опирается по контуру и нагружается равномерным нормальным давлением интенсивностью  $q$  [1, 2]. Результаты исследований представлены с использованием безразмерных параметров  $\bar{q} = a^4 q / (Eh^4)$ ,  $\bar{u}^1 = u^1 / h$ . Кривизна оболочки определяется параметром  $K = 2a^2 / (Rh) = 32$ . Принято:  $a = 60h$  – размер панели в плане,  $R = 225h$  – радиус,  $h = 1$  см – толщина, модуль упругости  $E = 2.1 \cdot 10^6$  кг/см<sup>2</sup>, коэффициент Пуассона  $\nu = 0.3$ . Расчетный фрагмент – четверть панели, для которой с учетом возможных сложных закритических форм деформирования для всех ПК принята густая сетка  $30 \times 30$  КЭ. Сходимость решений, получаемых по МСКЭ, исследована в [1], где для каждой задачи определена достаточная сетка.

При расчете в ПК ЛИРА использовался алгоритм с автоматическим выбором шага, в ПК SCAD – шагово-итерационный. На графиках  $\bar{q} - \bar{u}^1$  значком \* обозначена конечная точка проведения расчета в ПК ЛИРА.

### 2.1. Оболочки со сквозными ослаблениями

Исследуются панели с двумя видами отверстий, имеющими одинаковую общую площадь  $144h^2$ :

- 1) центральное квадратное отверстие шириной  $b_0 = 12h$  (рис. 6, а);
- 2) равномерно расположенные четыре одинаковые квадратные отверстия шириной  $b_0 = 6h$  (рис. 6, б).

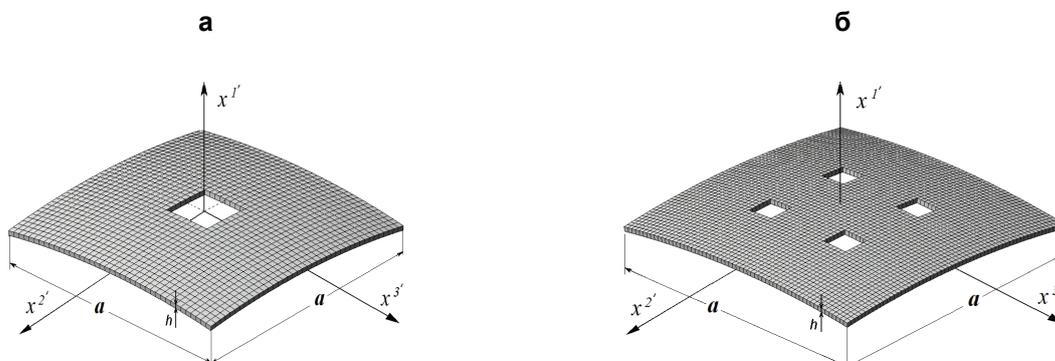


Рисунок 6. Оболочки с центральным отверстием (а) и с четырьмя отверстиями (б)

Для панели с центральным отверстием имеем хорошее совпадение диаграмм  $\bar{q}-\bar{u}^{1'}$  МСКЭ, ПК ЛИРА и ПК SCAD с решением [23] в докритической области и постепенное их расхождение в закритической (рис. 7, а). В верхней критической точке расхождения с решением [23] по величине  $\bar{q}_{кр}^6$  составляет соответственно 10.92, 11.13, 9.79 %, а по прогибу в точке А  $\bar{u}_{кр}^{1'6}$  имеем 15.65, 34.0, 17.88 % (табл. 1). Диаграммы МСКЭ, ПК ЛИРА и ПК SCAD между собой практически совпадают. Формы деформирования ослабленной центральным отверстием панели имеют похожий вид (рис. 7, б) и хорошо между собой согласуются.

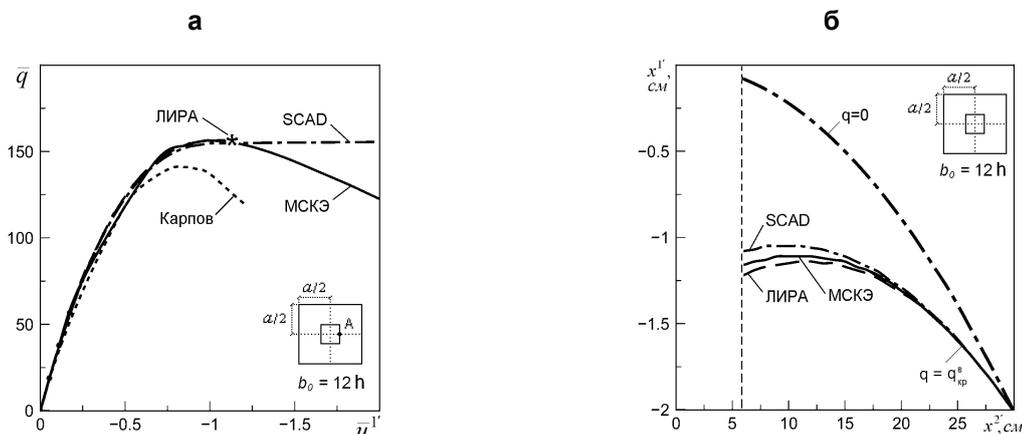


Рисунок 7. Диаграммы «нагрузка – прогиб» в точке А (а); форма потери устойчивости (б)

Таблица 1. Сравнительные результаты критических точек и величин прогибов диаграмм P – U для панелей с центральным отверстием, полученные разными методами

Вариант расчета	$\bar{q}_{кр}^6$	$\Delta, \%$	$\bar{u}_{кр}^{1'6}$	$\Delta, \%$
<b>Одно отверстие</b>				
Карпов, [23]	141.0	–	-0.850	–
МСКЭ	156.0	+10.6	-1.007	+18.5
ПК ЛИРА	156.7	+11.1	-1.139	+34.0
ПК SCAD	154.8	+9.8	-1.002	+17.9
<b>Четыре отверстия</b>				
Карпов, [23]	177.1	–	-0.870	–
МСКЭ	171.6	-3.1	-0.873	+0.3
ПК ЛИРА	173.1	-2.3	-0.946	+8.7
ПК SCAD	171.6	-3.1	-1.027	+18.1

Для панели с четырьмя отверстиями наблюдается хорошее совпадение диаграмм (рис. 8, а). В верхней критической точке различие по величине  $\bar{q}_{кр}^6$  с решением [23] составляет -3.11, -2.28, -3.13 %, а по прогибу центра панели  $\bar{u}_{кр}^{1'6}$  - 0.35, 8.74, 18.05 % (табл. 1). Форма потери устойчивости этой оболочки имеет простой вид, который соответствует общей потере устойчивости панели с прощелкиванием ее центральной части (рис. 8, б).

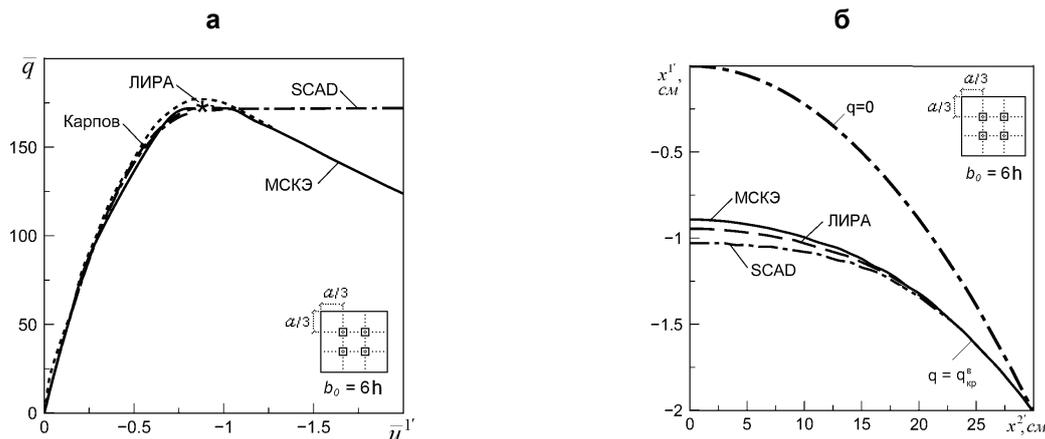


Рисунок 8. Диаграммы  $\bar{q} - \bar{u}^1$  в центре панели (а) и форма потери устойчивости (б)

Ослабление гладкой панели, для которой  $\bar{q}_{кр}^6 = 193.7$  [1], одним отверстием приводит к большому снижению  $\bar{q}_{кр}^6$  по сравнению с вариантом четырех отверстий. Для панели, ослабленной одним центральным отверстием, величина  $\bar{q}_{кр}^6$  уменьшается на 9.5 %, а для панели с четырьмя отверстиями – на 11.4 %. Этот факт объясняется тем, что одно большое отверстие, сосредоточенное в наиболее деформативной центральной части панели, сильнее уменьшает ее жесткость, чем это делают равномерно распределенные четыре отверстия того же суммарного объема.

### 2.2. Оболочки с каналами и выемками

Рассматривается оболочка с тремя вариантами несквозных ослаблений (рис. 9):

- 1) четыре узких перекрестных канала одинаковых размеров: длиной  $a$ , шириной  $b_k = 2h$  и глубиной  $h_k = 0.3h$  (а);
- 2) четыре широких перекрестных канала одинаковых размеров: длиной  $a$ , шириной  $b_k = 6h$  и глубиной  $h_k = 0.7h$  (а);
- 3) четыре квадратных выемки одинаковых размеров: шириной  $b_g = 6h$  и глубиной  $h_g = 0.7h$  (б).

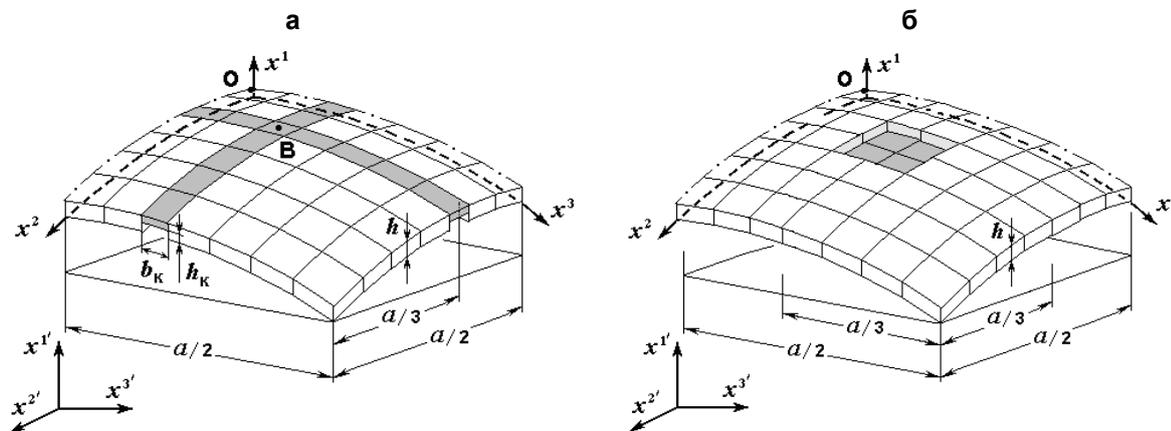
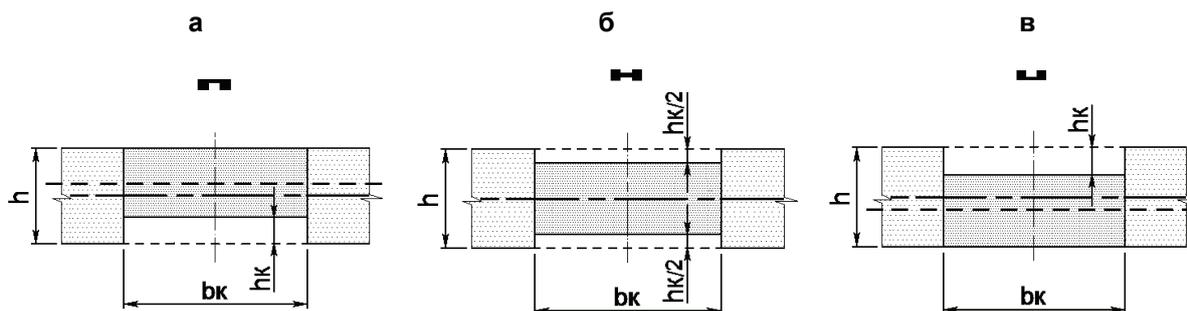


Рисунок 9. Фрагмент четверти оболочки с перекрестными каналами (а) и с четырьмя выемками (б)



**Рисунок 10. Варианты эксцентрического расположения каналов и выемок**

Выполнено сравнение трех способов эксцентрического расположения каналов и выемок относительно срединной поверхности обшивки оболочки, где способы ослаблений обозначены соответствующими значками (рис. 10):

- 1) с внутренней стороны (■) (а);
- 2) с внутренней и внешней сторон симметрично относительно срединной поверхности (■) (б);
- 3) с внешней стороны (■) (в).

Для всех способов расположения каналов и выемок величины объемов ослаблений были одинаковыми.

При аппроксимации участков панели с эксцентрично расположенными каналами и выемками в ПК ЛИРА использовались абсолютно жесткие вставки пластин, а в ПК SCAD – абсолютно жесткие тела.

Для оболочек с ослаблением, расположенным со стороны вогнутости панели (с ее внутренней стороны – ■; рис. 11, а, г, ж;), выполнено сравнение с решениями работы [23]. При этом способе расположения ослаблений для панелей с узкими каналами и квадратными выемками наблюдается хорошее совпадение диаграмм МСКЭ и ПК ЛИРА с решением [23] и некоторое расхождение для ПК SCAD (рис. 11, а, ж; табл. 2). При ослаблении панели широкими каналами (рис. 11, г) наблюдается существенное расхождение диаграмм  $\bar{q} - \bar{u}^{-1}$ , полученных по МСКЭ, ПК ЛИРА и SCAD, с решениями работы [23]. Это объясняется сложной формой деформирования оболочки [1]. В таблице 2 приведено сравнение ( $\Delta, \%$ ) с решением [23] (первый столбец) и решением по МСКЭ (второй столбец).

Для всех панелей с широкими каналами (рис. 11, г–е) наблюдается хорошее совпадение решений ПК ЛИРА с решением по МСКЭ. Результат, полученный в ПК SCAD для оболочки с широкими каналами, расположенными на внешней стороне обшивки (рис. 11, е), по сравнению с результатом МСКЭ дает погрешность 4.5 % по величине верхней критической нагрузки.

Для оболочек без эксцентричного расположения каналов (узких и широких) и выемок (■; рис. 11, б, д, з) при всех вариантах симметричных ослаблений наблюдается хорошее совпадение диаграмм  $\bar{q} - \bar{u}^{-1}$ , полученных по МСКЭ, ПК ЛИРА и SCAD.

Для панели с широкими симметричными каналами (■; рис. 11, д; табл. 2) решение задачи в ПК ЛИРА остановилось в точке ветвления \*, также обнаруженной по МСКЭ. ПК ЛИРА определил точку ветвления решения  $\bar{q}^* = 64.79$  ( $\bar{u}^* = -0.2451$ ), как критическую. По МСКЭ точке ветвления отвечает величина  $\bar{q}^* = 66.00$  ( $\bar{u}^* = -0.2467$ ), при этом величина верхней критической нагрузки  $\bar{q}_{кр}^* = 72.94$  ( $\bar{u}_{кр}^{-1} = -0.2876$ ). В точке ветвления расхождение решений по величинам нагрузки  $\bar{q}^*$  и перемещения  $\bar{u}^*$  центра панели составляет – 1.83 и – 0.65 % соответственно. В этом случае в ПК ЛИРА точка ветвления принимается за верхнюю критическую ( $\Delta = -11.2\%$ ).

Среди панелей одинакового объема наименьшее значение величины верхней критической нагрузки имеют оболочки с ослаблением, расположенным на внешней стороне обшивки (■; рис. 11, в, е, к). При увеличении ширины и глубины каналов уменьшается значение верхней критической нагрузки и увеличивается прогиб в центре панели.

Практически полное совпадение решений в докритической области подтверждает возможность применения ПК ЛИРА и SCAD при решении геометрически нелинейной задачи устойчивости пологих сферических оболочек с разными ослаблениями. ПК ЛИРА и SCAD могут использоваться в качестве инструмента для сопоставления решений при проведении подобных исследований.

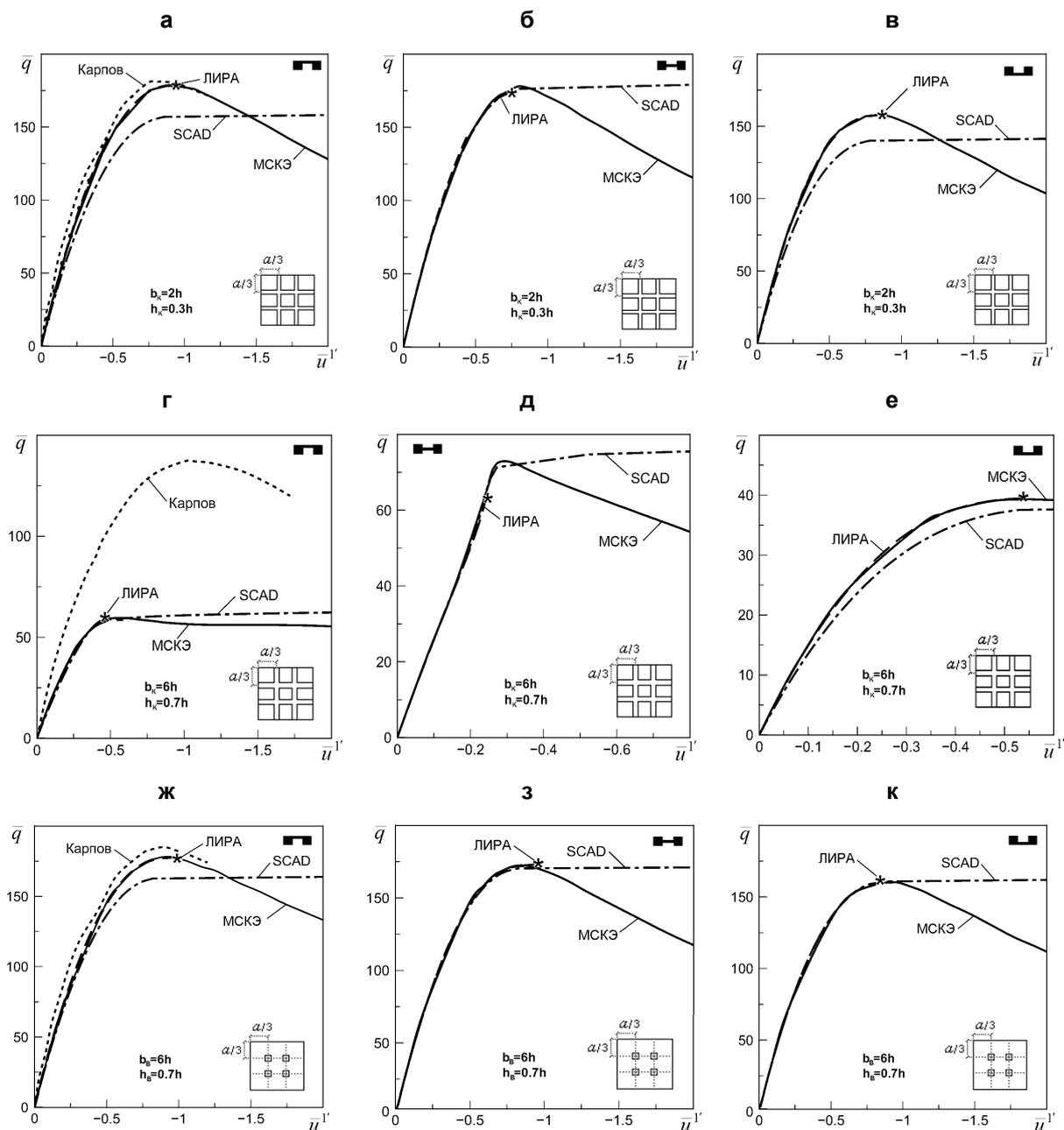


Рисунок 11. Диаграммы  $\bar{q} - \bar{u}^{-1}$  для панелей с узкими (а-в) и широкими (г-е) каналами, с выемками (ж-к)

**Таблица 2. Сравнительные результаты критических точек и величин прогибов диаграмм  $P-U$  для панелей с эксцентричным расположением каналов и выемок, полученные разными методами**

Вариант расчета	$\bar{q}_{кр}^e$	$\Delta, \%$		$\bar{u}_{кр}^{1'e}$	$\Delta, \%$	
		[23]	МСКЭ		[23]	МСКЭ
<b>Узкие каналы <math>\blacksquare</math></b>						
Карпов, [23]	181.20	–		-0.8600	–	
МСКЭ	178.40	-1.55	–	-0.8684	+0.98	–
ПК ЛИРА	178.98	-1.23	+0.33	-0.9347	+8.69	+7.63
ПК SCAD	156.93	-13.39	-12.03	-0.8542	-0.67	-1.64
<b>Узкие каналы <math>\blacksquare</math></b>						
МСКЭ	177.50		–	-0.8050		–
ПК ЛИРА	176.71		-0.45	-0.8810		+9.44
ПК SCAD	176.21		-0.73	-0.7834		-2.68
<b>Узкие каналы <math>\blacksquare</math></b>						
МСКЭ	157.80		–	-0.8321		–
ПК ЛИРА	157.83		+0.02	-0.8688		+4.41
ПК SCAD	140.02		-11.27	-0.7743		-6.95
<b>Широкие каналы <math>\blacksquare</math></b>						
Карпов, [23]	137.40	–		-1.080	–	
МСКЭ	59.58	-56.64	–	-0.5539	-48.71	–
ПК ЛИРА	58.65	-57.31	-1.56	-0.5854	-45.83	+5.69
ПК SCAD	59.39	-56.78	-0.32	-0.5970	-44.72	+7.78
<b>Широкие каналы <math>\blacksquare</math></b>						
МСКЭ	72.94 ( $\bar{q}^* = 66.00$ )		– (–)	-0.2876 ( $\bar{u}^* = -0.2467$ )		– (–)
ПК ЛИРА	– ( $\bar{q}^* = 64.79$ )		-11.20 (-1.83)	– ( $\bar{u}^* = -0.2407$ )		– (-0.65)
ПК SCAD	71.32		-2.22	-0.2653		-7.75
<b>Широкие каналы <math>\blacksquare</math></b>						
МСКЭ	39.31		–	-0.5444		–
ПК ЛИРА	39.52		+0.53	-0.5577		+2.50
ПК SCAD	37.54		-4.50	-0.5301		-2.65
<b>Выемки <math>\blacksquare</math></b>						
Карпов, [23]	184.80	–		-0.900	–	
МСКЭ	178.00	-3.68	–	-0.9581	+6.46	–
ПК ЛИРА	177.84	-3.77	-0.09	-1.0541	+17.11	+10.01
ПК SCAD	162.67	-11.98	-8.61	-0.8190	-9.00	-14.52
<b>Выемки <math>\blacksquare</math></b>						
МСКЭ	171.60		–	-0.7980		–
ПК ЛИРА	172.37		+0.45	-0.9523		+19.34
ПК SCAD	170.39		-0.71	-0.8261		+3.52
<b>Выемки <math>\blacksquare</math></b>						
МСКЭ	160.20		–	-0.9085		–
ПК ЛИРА	160.85		+0.41	-0.9299		+2.36
ПК SCAD	160.76		+0.35	-0.8767		-3.50

## Выводы

1. На базе метода конечных элементов разработан метод исследования тонкостенных оболочечных конструкций, который основан на использовании для всех конструктивных элементов неоднородной оболочки геометрически нелинейных соотношений пространственной теории термоупругости. В основу методики заложены гипотеза недеформированной прямой и закон Дюамеля – Неймана. Применена моментная схема конечных элементов, которая распространена на задачи нелинейного термоупругого деформирования тонких неоднородных оболочек.

На базе универсального пространственного КЭ разработана единая расчетная модель, учитывающая геометрические особенности конструктивных элементов неоднородной оболочки: обшивку переменной толщины, ребра и накладки, выемки, каналы и отверстия, изломы срединной поверхности.

Построен эффективный шаговый алгоритм решения задач нелинейного деформирования, устойчивости и закритического поведения тонких неоднородных оболочек.

2. Проанализированы и исследованы возможности применения современных программных комплексов ЛИРА и SCAD к решению задач нелинейного деформирования и потери устойчивости оболочек ступенчато-переменной толщины.

3. Проведенные для неоднородных оболочек исследования нелинейного деформирования и потери устойчивости подтверждают достоверность решений, полученных по МКЭ, в ПК ЛИРА и SCAD. При этом в ходе решения нелинейных задач были выявлены некоторые особенности расчета по ПК ЛИРА и SCAD. Выявленные особенности могут быть полезны для пользователей комплексов при проведении расчетов панелей ступенчато-переменной толщины.

Для решения геометрически нелинейной задачи устойчивости можно рекомендовать в ПК ЛИРА использовать алгоритм с автоматическим выбором шага, в ПК SCAD – шагово-итерационный.

При моделировании геометрических особенностей оболочек ступенчато-переменной толщины в виде эксцентрично расположенных ребер, каналов и выемок можно рекомендовать в ПК ЛИРА применять абсолютно жесткие вставки пластин, а в ПК SCAD – абсолютно жесткие тела.

Отметим, что рассмотренные результаты решений нелинейных задач подтверждают недостаточную разработку алгоритмов исследования нелинейного деформирования и устойчивости неоднородных оболочек. В частности, это касается стратегии выбора начальных и текущих шагов нагружения, точности решения задачи и ряда других параметров.

## Литература

1. Баженов В.А., Кривенко О.П., Соловей Н.А. Нелинейное деформирование и устойчивость упругих оболочек неоднородной структуры: Модели, методы, алгоритмы, малоизученные и новые задачи. М.: Книжный дом «ЛИБРИКОМ», 2013. 336 с.
2. Bazhenov V.A., Solovei N.A. Nonlinear Deformation and Buckling of Elastic Inhomogeneous Shells under Thermomechanical Loads // International Applied Mechanics. 2009. Vol. 45. №9. Pp. 923–953.
3. Голованов А.И., Тюленева О.Н., Шигабутдинов А.Ф. Метод конечных элементов в статике и динамике тонкостенных конструкций. М.: ФИЗМАТЛИТ, 2006. 392 с.
4. Карпов В.В. Прочность и устойчивость подкрепленных оболочек вращения. В 2-х ч. Ч.1. Модели и алгоритмы исследования прочности и устойчивости подкрепленных оболочек вращения. М.: ФИЗМАТЛИТ, 2010. 288 с.; Ч.2. Вычислительный эксперимент при статическом механическом воздействии. М.: ФИЗМАТЛИТ, 2011. 248 с.
5. Николаев А.П., Клочков Ю.В., Киселев А.П., Гуреева Н.А. Векторная интерполяция полей перемещений в конечно-элементных расчетах оболочек: монография. Волгоград: ФГБОУ ВПО Волгоградский ГАУ, 2012. 264 с.
6. Якушев В.Л. Нелинейные деформации и устойчивость тонких оболочек. М.: Наука, 2004. 276 с.
7. Ivanova J., Pastrone F. Geometric method for stability of non-linear elastic thin shells. Boston, Mass. [u.a.] Kluwer Academic, 2002. 245 p.
8. Reddy J.N. Theory and Analysis of Elastic Plates and Shells, Second Edition. CRC Press, 2006. 568 p.
9. Jones R.M. Buckling of bars, plates, and shells. Blacksburg, Va.: Bull Ridge Publ., 2006. 815 p.

10. Chapelle D., Bathe K.J. The finite element analysis of shells – Fundamentals. Series: Computational fluid and solid mechanics. Berlin; Heidelberg: Springer, 2011. 410 p.
11. Якушев В.Л. Устойчивость тонкостенных конструкций с учетом начальных несовершенств // Строительная механика и расчет сооружений. 2010. №1. С. 43–46.
12. Gavrilenko G.D., Matsner V.I., Kutenkova O.A.. Dent and thickness effects on the critical loads of stiffened shells // Strength of Materials. 2011. Vol. 43. No. 3. Pp. 347–351.
13. Москаленко Л.П. Методика исследования устойчивости пологих ребристых оболочек на основе метода продолжения решения по наилучшему параметру // Вестник гражданских инженеров, 2011. №4. С. 161–164.
14. Карпов В.В., Семенов А.А. Математическая модель деформирования подкрепленных ортотропных оболочек вращения // Инженерно-строительный журнал. 2013. №5. С. 100–146.
15. Жгутов В.М. Математические модели деформирования оболочек переменной толщины с учетом различных свойств материалов // Инженерно-строительный журнал, 2012. №1. С. 79–90.
16. Ghanbari Ghazijahani T., Showkati H. Locally imperfect conical shells under uniform external pressure // Strength of Materials. 2013. Vol. 45. No. 3. Pp. 369–377.
17. Голованов А.И., Сагдатуллин М.К. Трехмерный конечный элемент для расчета тонкостенных конструкций // Учен. зап. Казан. гос. ун-та. Сер. Физ.-матем. науки, 2009. Т. 151, кн. 3. С. 121–129.
18. Клочков Ю. В., Николаев А. П., Киселева Т. А. Сравнение вариантов интерполяций перемещений на примере произвольной оболочки в форме эллипсоида // Вестн. Волгоград. гос. архит.-строит. ун-та. Сер. Строительство и архитектура. 2011. Вып. 23(42). С. 54–59.
19. Dumir P.C., Dube G.P., Mallick A. Axisymmetric buckling of laminated thick annular spherical cap // Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation. 2005. Vol. 10. No.2. Pp. 191–204.
20. Arciniega R.A., Reddy J.N. Tensor-based finite element formulation for geometrically nonlinear analysis of shell structures // Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering. 2007. Vol. 196. No. 4–6. Pp. 1048–1073.
21. Zarutskii V.A., Lugovoi P.Z., Meish V.F. Dynamic problems for and stress–strain state of inhomogeneous shell structures under stationary and nonstationary loads // International Applied Mechanics. 2009. Vol. 45. No. 3. Pp. 245–271.
22. Nie G.H., Chan C.K., Yao J.C., He X.Q. Asymptotic Solution for Nonlinear Buckling of Orthotropic Shells on Elastic Foundation // AIAA Journal. 2009. Vol. 47. No. 7. Pp. 1772–1783.
23. Ильин В.П., Карпов В.В. Устойчивость ребристых оболочек при больших перемещениях. Л.: Стройиздат, 1986. 168 с.
24. Соловей М.О., Кривенко О.П., Калашников О.Б., Тамілко О.А. Порівняльний аналіз стійкості осесиметричних оболонок лінійно-змінної товщини // Опір матеріалів і теорія споруд: наук.-тех. збірн. К.: КНУБА, 2009. Вип. 84. С. 89–95.
25. Соловей М.О., Кривенко О.П., Міщенко О.О. Порівняльний аналіз нелінійного деформування та стійкості гранованих оболонок ступінчато-змінної товщини // Опір матеріалів і теорія споруд: наук.-тех. збірн. К.: КНУБА, 2010. Вип. 86. С. 131–139.
26. Баженов В.А., Соловей Н.А., Кривенко О.П., Калашников А.Б., Мищенко О.А. Анализ моделирования нелинейного деформирования и устойчивости упругих неоднородных оболочек в некоторых программных комплексах // Труды VI Международной научно-практической конференции «Инженерные системы – 2013». Москва, 24–26 апреля 2013 г. М.: РУДН, 2013. С. 96–102.
27. Баженов В.А., Соловей Н.А., Кривенко О.П., Мищенко О.А. Моделирование нелинейного деформирования и потери устойчивости упругих неоднородных оболочек // Строительная механика инженерных конструкций и сооружений, 2014. №5. С. 14–33.
28. Городецкий А.С., Евзеров И.Д. Компьютерные модели конструкций. К: Факт, 2007. 394 с.
29. Стрелец-Стрелецкий Е.Б., Боговис В.Е., Гензерский Ю.В., Гераймович Ю.Д. [и др.] Лира 9.4 Руководство пользователя. Основы. К.: Факт, 2008. 164 с.
30. Перельмутер А.В., Сливкер В.И. Расчетные модели сооружений и возможность их анализа. М.: ДМК Пресс, 2007. 600 с.
31. Карпиловский В.С., Криксунов Э.З., Перельмутер А.В., Перельмутер М.А. Вычислительный комплекс SCAD. М.: СКАД СОФТ, 2009. 656 с.

*Николай Александрович Соловей, г. Киев, Украина*

*Ольга Петровна Кривенко, г. Киев, Украина  
Тел. раб.: +38(066)0483277; эл. почта: olakor@ukr.net*

*Оксана Александровна Малыгина, г. Киев, Украина  
Тел. раб.: +38(098)2912918; эл. почта: oksalita@mail.ru*

© Соловей Н.А., Кривенко О.П., Малыгина О.А., 2015

Соловей Н.А., Кривенко О.П., Малыгина О.А. Конечноэлементные модели исследования нелинейного деформирования оболочек ступенчато-переменной толщины с отверстиями, каналами и выемками

doi: 10.5862/MCE.53.6

# Finite element models for the analysis of nonlinear deformation of shells stepwise-variable thickness with holes, channels and cavities

**N.A. Solovei,***Kyiv National University of Construction and Architecture, Kyiv, Ukraine***O.P. Krivenko,***Kyiv National University of Construction and Architecture, Kyiv, Ukraine*

+380660483277; e-mail: olakop@ukr.net

**O.A. Malygina,***Kyiv National University of Construction and Architecture, Kyiv, Ukraine*

+380982912918; e-mail: oksalita@mail.ru

## Key words

flexible shell; moment finite-element scheme; nonlinear deformation; buckling; stepwise-varying thickness; weakening

## Abstract

The method of solving static problems of nonlinear deformation, buckling, and postbuckling behavior of thin elastic inhomogeneous shells is based on the geometrically nonlinear equations of the 3D thermoelasticity theory and use of the moment finite-element scheme.

A unified model has been created based on the universal spatial finite element with additional variable parameters. The model considers the multilayer structure of a material and geometrical features of structural elements of an inhomogeneous shell: casing of varying thickness, ribs, cover plates, cavities, channels, holes and sharp bends of the mid-surface. In a number of the authors' works the reliability of linear and nonlinear solutions for a wide class of inhomogeneous shells has been numerically justified by analyzing their convergence and comparing them with those obtained by other authors.

This paper is devoted to the comparative analysis of finite-element models and results of calculation of thin elastic shells using the moment finite-element scheme, and LIRA and SCAD program complexes. The effect of different types of weakening on nonlinear deformation and buckling of shells was studied on the example of isotropic panels under uniform pressure.

## References

1. Bazhenov V.A., Krivenko O.P., Solovei N.A. *Nelineynoye deformirovaniye i ustoychivost uprugih obolochek neodnorodnoy struktury: Modeli, metody, algoritmy, maloizuchennyye i novye zadachi* [Nonlinear Deformation and Buckling of Elastic Shells with Inhomogeneous Structure: Models, Methods, Algorithms, Poorly Studied and New Problems]. Moscow: Book House "LIBRIKOM", 2013. 336 p. (rus)
2. Bazhenov V.A., Solovei N.A. Nonlinear Deformation and Buckling of Elastic Inhomogeneous Shells under Thermomechanical Loads. *International Applied Mechanics*. 2009. Vol. 45. No. 9. Pp. 923–953.
3. Golovanov A.I., Tuleneva O.N., Shigabutdinov A.F. *Metod konechnykh elementov v statike i dinamike tonkostennykh konstruktsiy* [The finite element method in statics and dynamics of thin-walled structures]. Moscow: FIZMATLIT, 2006. 392 p. (rus)
4. Karpov V.V. *Prochnost i ustoychivost podkreplennykh obolochek vrashheniya. Ch.2. Vychislitelnyy eksperiment pri staticheskom mehanicheskom vozdeystvii* [Strength and stability of reinforced shells of revolution. Part 2. Computer experiment in static mechanical action]. Moscow: FIZMATLIT 2011. 248 p. (rus)
5. Nikolaev A.P., Klochkov Y.V., Kiselev A.P., Gureeva N.A. *Vektornaya interpolyaciya poley peremeshheniy v konechno-elementnykh raschetah obolochek* [Vector interpolation displacement fields in finite-element calculations of shells]. Volgograd: VPO GAU, 2012. 264 p. (rus)
6. Yakushev V.L. *Nelineynyye deformatsii i ustoychivost tonkiy obolochek* [Nonlinear deformation and stability of thin shells]. Moscow: Nauka, 2004. 276 p. (rus)
7. Ivanova J., Pastrone F. *Geometric method for stability of non-linear elastic thin shells*. Boston, Mass. [u.a.] Kluwer Academic, 2002. 245 p.

Solovei N.A., Krivenko O.P., Malygina O.A. Finite element models for the analysis of nonlinear deformation of shells stepwise-variable thickness with holes, channels and cavities

8. Reddy J.N. *Theory and Analysis of Elastic Plates and Shells*. Second Edition. CRC Press, 2006. 568 p.
9. Jones R.M. *Buckling of bars, plates, and shells*. Blacksburg, Va.: Bull Ridge Publ., 2006. 815 p.
10. Chapelle D., Bathe K.J. *The finite element analysis of shells – Fundamentals. Series: Computational fluid and solid mechanics*. Berlin; Heidelberg: Springer, 2011. 410 p.
11. Yakushev V.L. Ustoychivost tonkostennykh konstruktsey s uchetom nachalnykh nesovershenstv [Stability of thin-walled structures with the initial imperfections]. *Stroitel'naya mekhanika i raschet sooruzheniy*. 2010. Pp. 43–46. (rus)
12. Gavrilenko G.D., Matsner V.I., Kutenkova O.A. Dent and thickness effects on the critical loads of stiffened shells. *Strength of Materials*. 2011. Vol. 43. No. 3. Pp. 347–351.
13. Moskalenko L.P. Metodika issledovaniya ustoychivosti pologikh rebristyykh obolochek na osnove metoda prodolzheniya resheniya po nailuchshemu parametru [Technique for the shallow ribbed shells stability analysis with the best parameter continuation method]. *Bulletin of Civil Engineers*. 2011. No. 4. Pp. 161–164. (rus)
14. Karpov V.V., Semenov A.A. Matematicheskaya model deformirovaniya podkreplennykh ortotropnykh obolochek vrashcheniya [The mathematical model of reinforced orthotropic shells of revolution deformation]. *Magazine of Civil Engineering*. 2013. No. 5. Pp. 100–146. (rus)
15. Zhgutov V.M. Matematicheskiye modeli deformirovaniya obolochek peremennoy tolshchiny s uchetom razlichnykh svoystv materialov [Mathematical models of deformation of the shell with variable thickness according to different properties of the materials]. *Magazine of Civil Engineering*. 2012. No. 1. Pp. 79–90. (rus)
16. Ghanbari Ghazijahani T., Showkati H. Locally imperfect conical shells under uniform external pressure. *Strength of Materials*. 2013. Vol. 45. No. 3. Pp. 369–377.
17. Golovanov A.I., Sagdatullin M.K. Trekhmernyy konechnyy element dlya rascheta tonkostennykh konstruktsey [Three-dimensional finite element calculation of thin-walled structures]. *Uchen. zap. Kazan. gos. un-ta. Ser. Fiz.-matem. nauki*. 2009. Vol. 151. No. 3. Pp. 121–129. (rus)
18. Klochkov Yu. V., Nikolayev A. P., Kiseleva T. A. Svravneniye variantov interpolatsiy peremeshcheniy na primere proizvolnoy obolochki v forme ellipsoida [Comparison of the displacements interpolation mode on the example of arbitrary ellipsoidal shell]. *Vestnik Volgogradskogo gosudarstvennogo arkhitekturno-stroitel'nogo universiteta. Seriya: stroitelstvo i arkhitektura*. 2011. Vol. 23(42). Pp. 54–59. (rus)
19. Dumir P.C., Dube G.P., Mallick A. Axisymmetric buckling of laminated thick annular spherical cap. *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*. 2005. Vol. 10. No. 2. Pp. 191–204.
20. Arciniega R.A., Reddy J.N. Tensor-based finite element formulation for geometrically nonlinear analysis of shell structures. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*. 2007. Vol. 196. No. 4–6. Pp. 1048–1073.
21. Zarutskii V.A., Lugovoi P.Z., Meish V.F. Dynamic problems for and stress–strain state of inhomogeneous shell structures under stationary and nonstationary loads. *International Applied Mechanics*. 2009. Vol. 45. No. 3. Pp. 245–271.
22. Nie G.H., Chan C.K., Yao J.C., He X.Q. Asymptotic Solution for Nonlinear Buckling of Orthotropic Shells on Elastic Foundation. *AIAA Journal*. 2009. Vol. 47. No. 7. Pp. 1772–1783.
23. Ilyin V.P., Karpov V.V. *Ustoychivost rebristyykh obolochek pri bolshih peremeshheniyah* [Stability of Ribbed Shells against Large Displacements]. Leningrad: Stroyizdat, 1986. 168 p. (rus)
24. Solovei N.A., Krivenko O.P., Kalashnikov A.B., Tamilkko O.A. Porivnyalnyi analiz stiykosti osetrichnykh obolonok liniynno-zminnoi tovshchiny [Comparative analysis of stability of axisymmetric shells with the linearly-variable thicknesses]. *Opir. Mater. Teor. Sporud: nauk.-tekh. zbirn.* [Strength of materials and structures theory: Scientific and Engineering Collection]. 2009. No. 84. Pp. 89–95. (ukr)
25. Solovei N.A., Krivenko O.P., Mishchenko O.A. Porivnyalnyi analiz nelineynogo deformuvannya ta stiykosti granovanih obolonok stupinchasto-zminnoi tovshchiny [Comparative analysis of a nonlinear deformation and stability of shallow shells with the stepwise -variable thicknesses]. *Opir. Mater. Teor. Sporud: nauk.-tekh. zbirn.* [Strength of materials and structures theory: Scientific and Engineering Collection]. 2010. No. 86. Pp. 131–139. (ukr)
26. Bazhenov V.A., Solovei N.A., Krivenko O.P., Kalashnikov A.B., Mishchenko O.A. Analiz modelirovaniya nelineynogo deformirovaniya i ustoychivosti uprugih neodnorodnykh obolochek v nekotorykh programmnykh kompleksah [Simulation analysis of nonlinear deformation and stability of elastic shells in some heterogeneous software systems]. *Trudy VI Megdunarodnoy nauchno-prakticheskoy konferentsii "Ingenernii sistemi – 2013"* [Proceedings of the VI International Scientific and Practical Conference "Engineering Systems – 2013"]. Moscow, April 24–26, 2013. Moscow: RUDN, 2013. Pp. 96–102. (rus)
27. Bazhenov V.A., Solovei N.A., Krivenko O.P., Mishchenko O.A. Modelirovaniye nelineynogo deformirovaniya i poteri ustoychivosti uprugikh neodnorodnykh obolochek [Modeling of nonlinear deformation of shells stepwise-variable thickness with holes, channels and cavities]

- deformation and buckling of elastic inhomogeneous shells]. Structural Mechanics of Engineering Constructions and Buildings. 2014. No. 5. Pp. 14–33.
28. Gorodetskiy A.S., Evzerov I.D. *Kompyuternyye modeli konstruksiy* [Computer models of structures]. Kyiv: Fact, 2007. 394 p. (rus)
  29. Strelets-Streletskiy E.B., Bogovis V.E., Genzersky Y.V., Geraymovich Y.D. [et al.]. LIRA 9.4. *Rukovodstvo polzovatelya. Osnovy. Uchebnoe posobie* [LIRA 9.4. User Guide. Basics. Textbook]. Kyiv: Fact, 2008. 164 p. (rus)
  30. Perelmuter A.V., Slivker V.I. *Raschetnye modeli sooruzheniy i vozmozhnost ih analiza* [Design Models of Structures and Possibility to Analyze them]. Moscow: DMK Press, 2007. 600 p. (rus)
  31. Karpilovsky V.S., Kriksunov E.Z., Perelmuter A.V., Perelmuter M.A. *Vychislitelnyy kompleks SCAD* [Software SCAD]. Moscow: SCAD SOFT, 2009. 656 p. (rus)

**Full text of this article in Russian: pp. 56–69**