

doi: 10.5862/MCE.53.5

Изгиб геометрически нелинейного консольного стержня. Решение по теориям Кирхгофа и Коссера – Тимошенко

*Д.т.н., заведующий кафедрой В.В. Лалин;
студент М.О. Беляев,*

Санкт-Петербургский государственный политехнический университет

Аннотация. Проблема верификации программных комплексов для расчета конструкций в последнее время стала важной составляющей общего комплекса строительной науки. Одной из широко используемых верификационных задач является геометрически нелинейная задача об изгибе консольного стержня силой.

При этом в качестве аналитического решения используется решение, полученное для частного случая стержня Кирхгофа (без учета податливости стержня на растяжение и сдвиг), в то время как в большинстве современных программных комплексов используется стержень Коссера – Тимошенко, в котором учитываются все жесткости: на изгиб, на сдвиг и на растяжение. В связи с этим представляет интерес получение модельного решения для стержня Коссера – Тимошенко, которое можно было бы использовать в процедуре верификации программных комплексов.

В данной работе приведено решение задачи об изгибе геометрически нелинейного консольного стержня по теориям Кирхгофа и Коссера – Тимошенко с последующим сравнением полученных результатов. Полученные решения могут быть использованы в верификационных тестах различных программных комплексов.

Ключевые слова: теория Коссера – Тимошенко; теория Кирхгофа; геометрически нелинейный стержень; метод продолжения по параметру; верификационный тест

Введение

Проблема верификации программных комплексов для расчета конструкций в последнее время стала важной составляющей общего комплекса строительной науки. Ведущие мировые компании, разрабатывающие промышленные программные комплексы для расчета конструкций, публикуют отчеты, содержащие постановку и решение верификационных задач [1–3].

В 2009 году Научный совет РААСН «Программные средства в строительстве и архитектуре» принял «Положение о верификации программных средств, применяемых при определении напряженно-деформированного состояния, оценке прочности и деформативности конструкций и сооружений». За прошедшие годы несколько программных комплексов прошли процедуру верификации и получили свидетельство РААСН.

В качестве верификационного теста широко используется геометрически нелинейная задача об изгибе консольного стержня силой. В настоящее время существует только аналитическое решение, полученное для частного случая стержня Кирхгофа, когда пренебрегают податливостью стержня на растяжение и сдвиг [5–10]. Однако в современных программных комплексах используется (особенно в геометрически нелинейных задачах) стержень Коссера – Тимошенко, в котором учитываются все жесткости: на изгиб, на сдвиг и на растяжение [10–20]. Это обуславливает необходимость получения модельного решения для стержня Коссера – Тимошенко, которое можно было бы использовать в процедуре верификации программных комплексов.

В цели данного исследования входит сравнение результатов, полученных по двум теориям: Кирхгофа и Коссера – Тимошенко. На основании численных результатов были установлены расхождения в решениях, полученных по разным теориям. Также были получены решения, которые могут быть использованы в верификационных тестах различных программных комплексов.

Постановка задачи

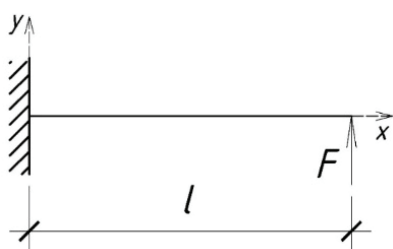


Рисунок 1. Расчетная схема

В работе рассматривается плоская геометрически нелинейная задача деформирования упругих стержней [17, 21] с учетом деформаций растяжения, сдвига и изгиба. Изгиб первоначально прямолинейного стержня, вдоль недеформированной оси которого направлена ось X , проходит в плоскости XY . Консольная балка нагружена «мертвой» силой F , приложенной к свободному концу и направленной вдоль оси Y (рис. 1). Понятие «мертвая сила» означает, что сила сохраняет направление и величину при любых деформациях стержня. Положение каждой точки стержня задается лагранжевой координатой s , стержень в отсчетной конфигурации занимает отрезок $0 \leq s \leq l$, где l – длина недеформированного стержня.

В теории Коссера – Тимошенко с каждой точкой стержня связан ортогональный триэдр единичных векторов (репер) D_i ($i = 1, 2, 3$), изображенный на рисунке 2. В плоской задаче вектор \underline{D}_3 , сонаправленный с осью Z , сохраняет свое положение, а поворот векторов $\underline{D}_1, \underline{D}_2$ определяется углом поворота (φ), который имеет смысл угла поворота сечения стержня. В отсчетной конфигурации векторы $\underline{D}_1, \underline{D}_2$ сонаправлены с осями координат X, Y соответственно. Повернутые вектора $\underline{D}_1, \underline{D}_2$ показаны на рисунке 3 векторами $\underline{d}_1, \underline{d}_2$.

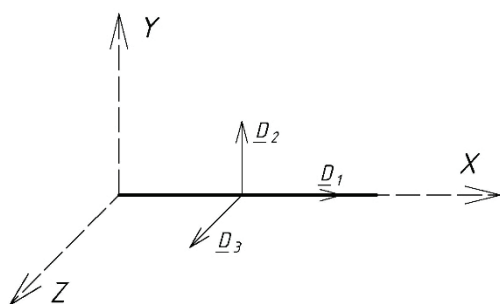


Рисунок 2. Отсчетная ненапряженная конфигурация стержня

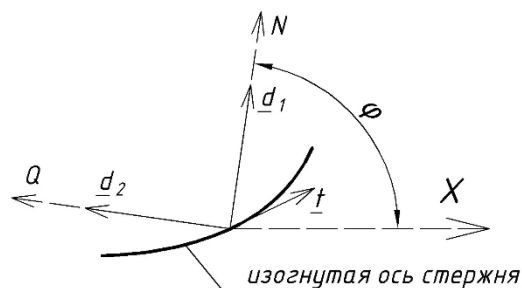


Рисунок 3. Актуальная (деформированная) конфигурация стержня

Положение точек стержня в деформированном положении (актуальная конфигурация) определяется функциями $x(s), y(s)$. Тангенс угла наклона касательной к изогнутой оси стержня равен $\frac{dy}{dx} = \frac{y'}{x'}$, $()'$ здесь и далее обозначает производную по s . В теории Коссера – Тимошенко $\frac{y'}{x'} \neq \operatorname{tg} \varphi$, что означает учет деформаций сдвига, т. е. угол поворота сечения не совпадает с углом поворота касательной к деформированной оси стержня.

Напряженное состояние стержня определяется функциями: $N(s)$ – продольная сила, $Q(s)$ – поперечная сила, $M(s)$ – изгибающий момент. В актуальной конфигурации стержня сила Q направлена вдоль сечения стержня, сила N – перпендикулярно сечению (рис. 3). В теории Коссера – Тимошенко направление силы N не совпадает с направлением касательной к деформированной оси стержня.

Уравнения задачи имеют следующий вид [15]:

а) уравнения равновесия (при отсутствии распределенной силовой и моментной нагрузки):

$$\begin{cases} (N \cdot \cos \varphi - Q \cdot \sin \varphi)' = 0 \\ (N \cdot \sin \varphi + Q \cdot \cos \varphi)' = 0 \\ M' + x' \cdot (N \cdot \sin \varphi + Q \cdot \cos \varphi) - y' \cdot (N \cdot \cos \varphi - Q \cdot \sin \varphi) = 0 \end{cases}; \quad (1)$$

b) выражения деформаций через кинематические неизвестные $x(s), y(s), \varphi(s)$:

$$\begin{cases} \varepsilon = x' \cdot \cos \varphi + y' \cdot \sin \varphi - 1 \\ \gamma = -x' \cdot \sin \varphi + y' \cdot \cos \varphi \\ \chi = \varphi' \end{cases}, \quad (2)$$

где ε – деформация растяжения, γ – деформация сдвига, χ – деформация изгиба;

с) физические уравнения (для линейно упругого материала):

$$N = k_1 \cdot \varepsilon, \quad Q = k_2 \cdot \gamma, \quad M = k_3 \cdot \chi, \quad (3)$$

где $k_1 = E \cdot A$ – жесткость при растяжении; $k_2 = \eta \cdot G \cdot A$ – жесткость при сдвиге; $k_3 = E \cdot I$ – жесткость при изгибе; E – модуль Юнга материала стержня; A – площадь поперечного сечения стержня, $G = \frac{E}{2(1+\nu)}$ – модуль сдвига; ν – коэффициент Пуассона; I – момент инерции поперечного сечения стержня; η – коэффициент, зависящий от формы поперечного сечения стержня (для круглого и квадратного сечения $\eta = 1$).

В работе [15] доказано, что внутренние усилия N , Q , M и деформации ε , γ , χ являются энергетически сопряженными.

В этой задаче граничные условия имеют следующий вид:

$$x(0) = 0, \quad y(0) = 0, \quad \varphi(0) = 0 \quad (4)$$

$$\begin{cases} (N \cdot \cos \varphi - Q \cdot \sin \varphi)|_{s=l} = 0 \\ (N \cdot \sin \varphi + Q \cdot \cos \varphi)|_{s=l} = F \\ M(l) = 0 \end{cases} \quad (5)$$

Далее сведем задачу (1)–(5) к трем уравнениям относительно трех функций: $x(s)$, $y(s)$, $\varphi(s)$. Интегрируя первое и второе уравнения (1) с учетом первого и второго условий системы (5), получим для всех $s \in [0, l]$:

$$\begin{cases} N(s) \cdot \cos \varphi(s) - Q(s) \cdot \sin \varphi(s) = 0 \\ N(s) \cdot \sin \varphi(s) + Q(s) \cdot \cos \varphi(s) = F \end{cases} \quad (6)$$

Теперь из третьего уравнения системы (1) следует: $M' = -x' \cdot F$. Интегрируя последнее уравнение с учетом третьего условия системы (5), получим:

$$M(s) = (x(l) - x(s)) \cdot F. \quad (7)$$

Откуда с учетом (2) и (3) следует:

$$\varphi'(s) = (x(l) - x(s)) \cdot \frac{F}{k_3}. \quad (8)$$

Далее из системы (6) выразим N и Q :

$$N = F \cdot \sin \varphi, \quad Q = F \cdot \cos \varphi. \quad (9)$$

Откуда с учетом (2) и (3) получим:

$$\begin{cases} x' \cos \varphi + y' \sin \varphi = 1 + \frac{F}{k_1} \sin \varphi \\ -x' \sin \varphi + y' \cos \varphi = \frac{F}{k_2} \cos \varphi \end{cases}. \quad (10)$$

Выражая из последних двух уравнений x' и y' и добавляя уравнение (8), получим разрешающую систему нелинейных дифференциальных уравнений:

$$\begin{cases} x'(s) = \left[1 + \frac{F}{k_1} \cdot \sin \varphi(s) \right] \cdot \cos \varphi(s) - \frac{F}{k_2} \cdot \sin \varphi(s) \cdot \cos \varphi(s) \\ y'(s) = \left[1 + \frac{F}{k_1} \cdot \sin \varphi(s) \right] \cdot \sin \varphi(s) + \frac{F}{k_2} \cdot \cos^2 \varphi(s) \\ \varphi'(s) = [x(l) - x(s)] \cdot \frac{F}{k_3} \end{cases}. \quad (11)$$

В теории Кирхгофа, в отличие от теории Коссера – Тимошенко, стержень считается нерастяжимым и деформация сдвига полагается равной нулю. В этом случае из второго уравнения системы (2) при условии $\gamma = 0$ следует: $\frac{y'}{x'} = \operatorname{tg} \varphi$, т. е. угол поворота сечения равен углу поворота касательной к деформированной оси стержня и направление продольной силы N совпадает с направлением этой касательной.

Разрешающие уравнения теории Кирхгофа можно получить из уравнений (11), устремляя жесткости на растяжение и сдвиг к бесконечности ($k_1 \rightarrow \infty, k_2 \rightarrow \infty$):

$$\begin{cases} x'(s) = \cos \varphi(s) \\ y'(s) = \sin \varphi(s) \\ \varphi'(s) = [x(l) - x(s)] \cdot \frac{F}{k_3} \end{cases}. \quad (12)$$

Система уравнений (12) хорошо известна [3–5]. Так как она является частным случаем системы (11), то метод решения будет излагаться для более общей системы (11).

Система (11) должна решаться с учетом граничных условий (4). Первые два граничных условия системы (5) были уже использованы, третье граничное условие, выраженное через функцию $\varphi(s)$, имеет вид $\varphi'(l) = 0$. Это условие следует автоматически из третьего уравнения системы (8).

В работе представлено решение более общей задачи (11), (4). Решение по теории Кирхгофа может быть получено при обнулении слагаемых, включающих в знаменателе жесткости на растяжение и на сдвиг, т. к. в данной теории они принимаются стремящимися к бесконечности. Задача (11), (4) очень похожа на задачу Коши, но таковой не является, так как правая часть третьего уравнения системы (11) содержит неизвестную величину $x(l)$.

Численное решение

Перейдем к безразмерным величинам. Введем безразмерные величины s_0 , x_0 , y_0 :

$$s_0 = \frac{s}{l}, x_0 = \frac{x}{l}, y_0 = \frac{y}{l}. \quad (13)$$

Введем безразмерный параметр нагрузки:

$$\omega = \frac{F}{k_3}. \quad (14)$$

Из системы уравнений (11) после перехода к безразмерным параметрам получим систему уравнений (15), где $(\quad)'$ обозначает производную по безразмерной величине s_0 :

$$\begin{cases} x_0'(s_0) = \left[1 + \frac{\omega}{\lambda^2} \cdot \sin \varphi(s_0) \right] \cdot \cos \varphi(s_0) - 2 \cdot (1 + \nu) \cdot \frac{\omega}{\lambda^2} \cdot \sin \varphi(s_0) \cdot \cos \varphi(s_0) \\ y_0'(s_0) = \left[1 + \frac{\omega}{\lambda^2} \cdot \sin \varphi(s_0) \right] \cdot \sin \varphi(s_0) + 2 \cdot (1 + \nu) \cdot \frac{\omega}{\lambda^2} \cdot \cos^2 \varphi(s_0) \\ \varphi'(s_0) = [x_0(1) - x_0(s_0)] \cdot \omega \end{cases}, \quad (15)$$

где ν – коэффициент Пуассона; λ – гибкость стержня:

$$\lambda = \frac{l}{r}, \quad (16)$$

где r – радиус инерции сечения стержня.

Решение нелинейной системы уравнений (15) сводится к решению одного нелинейного дифференциального уравнения, получаемого путем дифференцирования третьего уравнения системы по s_0 , и подстановки первого уравнения в получившееся равенство:

$$\varphi''(s_0) = A_1 \cdot \cos \varphi(s_0) + A_2 \cdot \sin \varphi(s_0) \cdot \cos \varphi(s_0), \quad (17)$$

где $A_1 = -\omega$; $A_2 = (1 + 2 \cdot \nu) \cdot \frac{\omega^2}{\lambda^2}$.

Из граничных условий (4), (5) после перехода к безразмерным параметрам получим граничные условия:

$$\varphi(0) = 0, \quad \varphi'(1) = 0. \quad (18)$$

Нелинейная краевая задача (17), (18) решается методом продолжения по параметру [23–26]. Введем параметр ξ . Уравнение (17) запишем в виде:

$$\varphi''(s_0) = \xi \cdot [A_1 \cdot \cos \varphi(s_0) + A_2 \cdot \sin \varphi(s_0) \cdot \cos \varphi(s_0)]. \quad (19)$$

Из уравнения (19) следует, что функция φ становится функцией двух переменных s_0 и ξ :

$$\varphi \equiv \varphi(s_0, \xi). \quad (20)$$

Значение ξ меняется от 0 до 1 ($0 \leq \xi \leq 1$). При $\xi = 1$ функция (20) очевидно является решением исходного уравнения (17). При $\xi = 0$ решение уравнения (19) легко найти прямым интегрированием:

$$\varphi''(s_0, 0) = 0. \quad (21)$$

После интегрирования уравнения (21) выражение для функции φ принимает вид:

$$\varphi(s_0, 0) = C_1 + C_2 \cdot s_0, \quad (22)$$

где C_1, C_2 – константы интегрирования.

Из граничных условий (18) получаем:

$$C_1 = 0, \quad C_2 = 0. \quad (23)$$

При учете (23) выражение (22) принимает вид:

$$\varphi(s_0, 0) = 0. \quad (24)$$

Т. е. при $\xi = 0$ решение уравнения (19) тождественно равно 0.

Таким образом, нам нужно исходя из известного нулевого решения при $\xi = 0$ найти решение уравнения (19) при $\xi = 1$. Интервал $0 \leq \xi \leq 1$ разбивается на некоторое число промежутков с шагом Δ , таких что:

$$\xi_{i+1} - \xi_i = \Delta, \quad (25)$$

где i – номер узла:

$$0 \leq i \leq M, \quad (26)$$

где M – число разбиений по ξ .

Множество значений ξ_i запишется в виде:

$$\xi_0 \leq \xi_i \leq \xi_M, \quad (27)$$

при этом:

$$\xi_0 = 0, \quad \xi_M = 1. \quad (28)$$

Для каждого узла i находим функцию $\varphi(s_0, \xi_i)$. Искомое значение функции $\varphi(s_0, \xi)$ соответствует $\xi_M = 1$, т. е. необходимо найти значение $\varphi(s_0, 1)$. Для нахождения решений в интервале $0 < \xi_i \leq 1$ введем функцию $z(s_0, \xi)$ такую, чтобы

$$\frac{d\varphi(s_0, \xi)}{d\xi} \equiv z(s_0, \xi); \quad \left(\frac{d\varphi(s_0, \xi)}{d\xi} \right)' = z''(s_0, \xi). \quad (29)$$

Дифференцируя (19) по ξ и учитывая (29), найдем уравнение для $z(s_0, \xi)$:

$$z''_{s_0}(s_0, \xi) = B(s_0) + \xi \cdot z \cdot D(s_0), \quad (30)$$

где

$$\begin{aligned} B(s_0) &= A_1 \cdot \cos \varphi(s_0) + A_2 \cdot \sin \varphi(s_0) \cdot \cos \varphi(s_0) \\ D(s_0) &= -A_1 \cdot \sin \varphi(s_0) + A_2 \cdot \cos^2 \varphi(s_0) - A_2 \cdot \sin^2 \varphi(s_0) \end{aligned} \quad (31)$$

Найдем граничные условия для функции $z(s_0, \xi)$ с учетом (18):

$$\begin{cases} \varphi(0, \xi) = 0 \Rightarrow \frac{d\varphi(0, \xi)}{d\xi} = 0 \Rightarrow z(0, \xi) = 0 \\ \varphi'_{s_0}(1, \xi) = 0 \Rightarrow \frac{d\varphi'_{s_0}(1, \xi)}{d\xi} = 0 \Rightarrow z'(1, \xi) = 0 \end{cases} \quad (32)$$

Во втором уравнении системы (32) производная $z'(1, \xi)$ берется по s_0 .

Краевая задача (30), (32) для каждого значения ξ решается методом конечных разностей [12, 27]. Разбиваем отрезок $0 \leq s_0 \leq 1$ на некоторое число промежутков с шагом h таким, что

$$s_{0_{j+1}} - s_{0_j} = h, \tag{33}$$

где j – номер узла:

$$0 \leq j \leq N, \tag{34}$$

где N – число разбиений по s_0 .

Получим систему уравнений для нахождения значений $z(s_{0_j}, \xi)$ в каждом j -м узле. Далее будем записывать обозначения функций сокращенно:

$$z(s_{0_j}, \xi) \equiv z_j, \quad B(s_{0_j}) \equiv B_j, \quad D(s_{0_j}) \equiv D_j. \tag{35}$$

Используем конечно-разностные выражения для производных [20]:

$$z_j'' = \frac{z_{j-1} - 2 \cdot z_j + z_{j+1}}{h^2}, \quad z_j' = \frac{z_{j+1} - z_{j-1}}{2 \cdot h}. \tag{36}$$

Запишем уравнение (30) с учетом (36):

$$z_{j-1} - (2 + \xi \cdot h^2 \cdot D_j) \cdot z_j + z_{j+1} = h^2 \cdot B_j. \tag{37}$$

В выражении (37) появляется законтурная точка $j = N + 1$, не имеющая физического смысла. Эта точка будет исключена при учете граничных условий. Запишем систему уравнений (37) для произвольного числа разбиений по s_0 :

$$\begin{cases} j = 1 & \left\{ \begin{array}{l} z_0 - (2 + \xi_i \cdot h^2 \cdot D_1) \cdot z_1 + z_2 = h^2 \cdot B_1 \\ j = 2 & z_1 - (2 + \xi_i \cdot h^2 \cdot D_1) \cdot z_2 + z_3 = h^2 \cdot B_2 \\ \dots & \dots \\ j = N & z_{N-1} - (2 + \xi_i \cdot h^2 \cdot D_N) \cdot z_N + z_{N+1} = h^2 \cdot B_N \end{array} \right. \end{cases} \tag{38}$$

Учитывая граничные условия (32), упростим систему уравнений (38):

$$\begin{cases} z(0, \xi_i) = 0 \Rightarrow z_0 = 0 \\ z'(1, \xi_i) = 0 \Rightarrow z'_N = \frac{z_{N+1} - z_{N-1}}{2 \cdot h} = 0 \Rightarrow z_{N+1} = z_{N-1} \end{cases} \tag{39}$$

Подставляя выражения (39), запишем систему (38) в новом виде:

$$\begin{cases} j = 1 & \left\{ \begin{array}{l} -(2 + \xi_i \cdot h^2 \cdot D_1) \cdot z_1 + z_2 = h^2 \cdot B_1 \\ j = 2 & z_1 - (2 + \xi_i \cdot h^2 \cdot D_1) \cdot z_2 + z_3 = h^2 \cdot B_2 \\ \dots & \dots \\ j = N & 2 \cdot z_{N-1} - (2 + \xi_i \cdot h^2 \cdot D_N) \cdot z_N = h^2 \cdot B_N \end{array} \right. \end{cases} \tag{40}$$

Решаем систему уравнений (40) для каждого значения ξ_i с учетом (26). По найденным значениям z_i , пользуясь определением (29), находим приближенные значения искомой функции $\varphi(s_0, \xi)$:

Лалин В.В., Беляев М.О. Изгиб геометрически нелинейного консольного стержня. Решение по теориям Кирхгофа и Коссера – Тимошенко

$$\varphi(s_{0j}, \xi_{i+1}) \cong \varphi(s_{0j}, \xi_i) + z(s_{0j}, \xi_i) \cdot \Delta. \quad (41)$$

На первом шаге при $i = 0$ известно решение (24) для $\varphi(s_{0j}, \xi_0)$. Имея значения функции $\varphi(s_{0j}, \xi_0)$, найдем выражения $B(s_{0j})$, $D(s_{0j})$ из формул (31). Зная данные значения и подставив их в систему (40), найдем решения данной системы $z(s_{0j}, \xi_0)$. Используя выражение (41), найдем значение функции $\varphi(s_{0j}, \xi_1)$. Теперь нам известны значения функции для второго шага при $i = 1$: $\varphi(s_{0j}, \xi_1)$. Повторяем выше описанные действия для второго шага при $i = 1$. Используя полученные значения, находим значения выражений $B(s_{0j})$, $D(s_{0j})$ из формул (31). Подставляем полученные значения в систему (40) и находим ее решения $z(s_{0j}, \xi_1)$. Из выражения (41) находим значения функции $\varphi(s_{0j}, \xi_2)$. Теперь нам известны значения функции для второго шага при $i = 2$: $\varphi(s_{0j}, \xi_2)$. Имея данные значения и используя приведенный выше алгоритм, находим значения функции $\varphi(s_{0j}, \xi_i)$ для каждого шага i при заданном числе разбиений по ξ (т. е. для $0 \leq i \leq M$). Искомое решение для угла поворота φ будет найдено при $i = M$:

$$\varphi(s_{0j}) \equiv \varphi(s_{0j}, \xi_M). \quad (42)$$

Координаты точек стержня в деформированном состоянии после перехода к безразмерным величинам $x_0(s_0)$, $y_0(s_0)$ определяются из первых двух дифференциальных уравнений системы (15) по методу Рунге – Кутты [21, 25] по имеющимся значениям угла поворота φ (42):

$$\begin{aligned} x_0(s_{0j+2}) &= x_0(s_{0j}) + \frac{h}{6} \cdot [t_1(s_{0j}) + 2 \cdot [t_2(s_{0j+1}) + t_3(s_{0j+1})] + t_4(s_{0j+2})] \\ y_0(s_{0j+2}) &= y_0(s_{0j}) + \frac{h}{6} \cdot [t_1(s_{0j}) + 2 \cdot [t_2(s_{0j+1}) + t_3(s_{0j+1})] + t_4(s_{0j+2})] \end{aligned} \quad (44)$$

где значения параметров $t_1(s_{0j})$, $t_2(s_{0j+1})$, $t_3(s_{0j+1})$, $t_4(s_{0j+2})$ определяются из системы (15) как функции $x'_0(s_0)$, $y'_0(s_0)$ для различных значений s_0 . Для функции $x_0(s_0)$ они примут вид:

$$t_1(s_{0j}) = x'_0(s_{0j}), \quad t_2(s_{0j+1}) = t_3(s_{0j+1}) = x'_0(s_{0j+1}), \quad t_4(s_{0j+2}) = x'_0(s_{0j+2}). \quad (45)$$

Аналогично для функции $y_0(s_0)$:

$$t_1(s_{0j}) = y'_0(s_{0j}), \quad t_2(s_{0j+1}) = t_3(s_{0j+1}) = y'_0(s_{0j+1}), \quad t_4(s_{0j+2}) = y'_0(s_{0j+2}). \quad (46)$$

Имея значения угла поворота φ в каждой точке s_{0j} (42), можем найти значения параметров t_1 , t_2 , t_3 , t_4 для каждого шага по s_0 , используя формулы (45), (46). Далее, подставив полученные значения в уравнения (44), находим искомые значения $x_0(s_{0j})$, $y_0(s_{0j})$. Данный способ позволяет определить $x_0(s_0)$, $y_0(s_0)$ для каждого второго узла, т. е. можно найти $x_0(s_{0j+2})$, $y_0(s_{0j+2})$.

Точность получаемых результатов зависит от выбранного шага Δ , определяющего число разбиений M интервала $0 \leq \xi \leq 1$, и от выбранного шага h , определяющего число разбиений N интервала $0 \leq s_0 \leq 1$.

Для достижения достаточной точности задача многократно решалась с уменьшением шагов Δ и h до получения устойчивых результатов вычислений (четыре значащих цифры).

Сначала проводились сгущения шагов по ξ с уменьшением величины Δ . Анализировались полученные значения угла поворота $\varphi(s_0, \xi)$. Число разбиений принималось равным M , когда расхождение полученных значений начиналось с пятой значащей цифры. Затем по приведенному выше алгоритму сгущались шаги по s_0 с уменьшением величины h и анализировались значения угла поворота $\varphi(s_0, \xi)$ и координаты $x_0(s_0)$, $y_0(s_0)$. Число разбиений принималось равным N , когда расхождение полученных значений начиналось с пятой значащей цифры.

В результате проведенных численных экспериментов было установлено, что для обеспечения требуемой точности при максимальном значении параметра нагрузки ω необходимо принять:

$$M = 4500, \quad N = 1000. \quad (47)$$

В ходе исследования были получены результаты по двум теориям: теории Коссера – Тимошенко и теории Кирхгофа. Для теории Кирхгофа задача решалась так же, как и для теории Коссера – Тимошенко, но без учета слагаемых, включающих жесткости на растяжение и сдвиг.

Результаты

Для сравнения существующих решений по теории Кирхгофа с решениями, полученными в данном исследовании по этой же теории, была решена тестовая задача [7]: длина стержня $l = 10$ м, площадь сечения $A = 0,05$ м², момент инерции $I = 5 \cdot 10^{-6}$ м⁴, модуль упругости $E = 2 \cdot 10^7$ Т/м². Нагрузка, приложенная на конце стержня, $F = 4$ Т. Сравнивались значения перемещений концевой точки стержня $y(s)$ и $x(s)$. Значения перемещений и погрешности сведены в таблицу 1.

Таблица 1. Сравнение результатов решений по теории Кирхгофа

Искомая величина	Существующее решение	Значение, полученное в исследовании	Погрешность, %
$x(L), м$	3,29	3,289	0,0305
$y(L), м$	6,7	6,699	0,01493

Полученные погрешности малы, что говорит о точности метода решения, использованного в исследовании.

Задача об изгибе консольного стержня «мертвой» силой, приложенной к свободному концу стержня, решалась по двум теориям: теории Коссера – Тимошенко и теории Кирхгофа. В задаче рассматривался стальной стержень круглого сечения диаметром $D = 2$ см и длиной $l = 1$ м. Модуль упругости для стали был принят $E = 196,2 \cdot 10^9$ Па, коэффициент Пуассона – $\nu = 0,28$. На рисунке 4 представлен вид изогнутой оси стержня при различных значениях безразмерного параметра нагрузки ω .

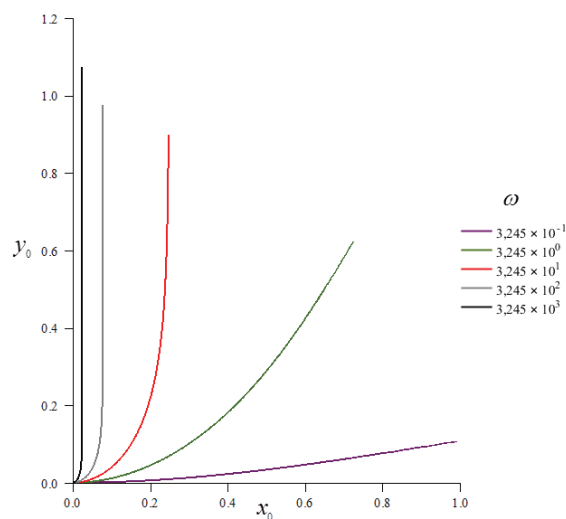


Рисунок 4. Изогнутая ось

На рисунке 5 представлен график изменения углов поворота φ по длине стержня при различных значениях безразмерного параметра нагрузки ω .

На рисунках 6–8 представлены соответственно графики зависимостей деформации растяжения ε , деформации сдвига γ и деформации изгиба χ от s_0 при различных значениях безразмерного параметра нагрузки ω .

При относительно малых значениях ω деформации сдвига и растяжения малы. Для $\omega = 3,245 \cdot 10^1$ значение деформации растяжения ε составляет 0,000811, а деформации сдвига γ – 0,002077. При $\omega = 3,245 \cdot 10^3$ максимальные значения деформаций составляют $\varepsilon_{\max} = 0,08111$, $\gamma_{\max} = 0,2077$.

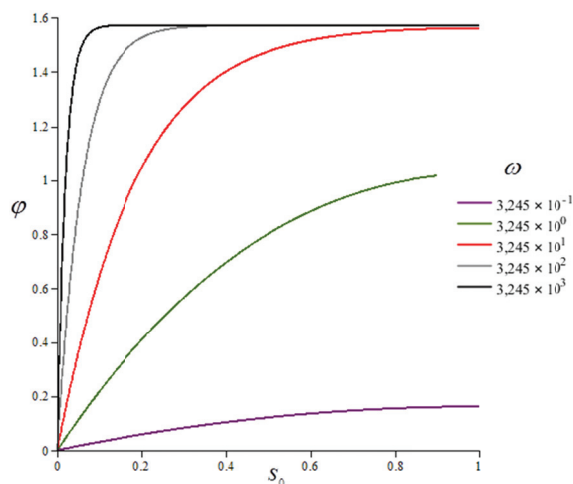


Рисунок 5. Углы поворота сечения φ

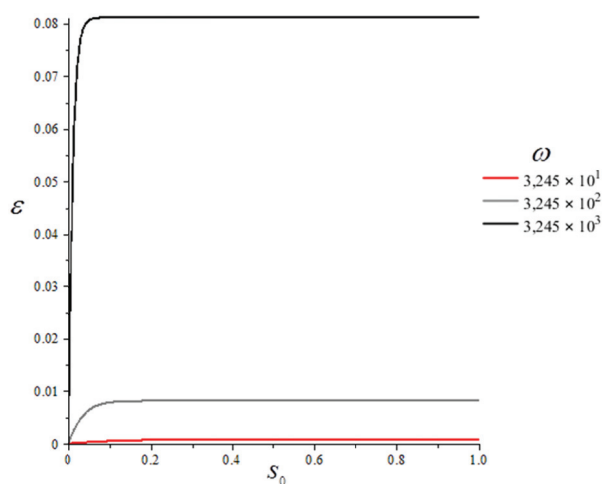


Рисунок 6. Деформация растяжения ε

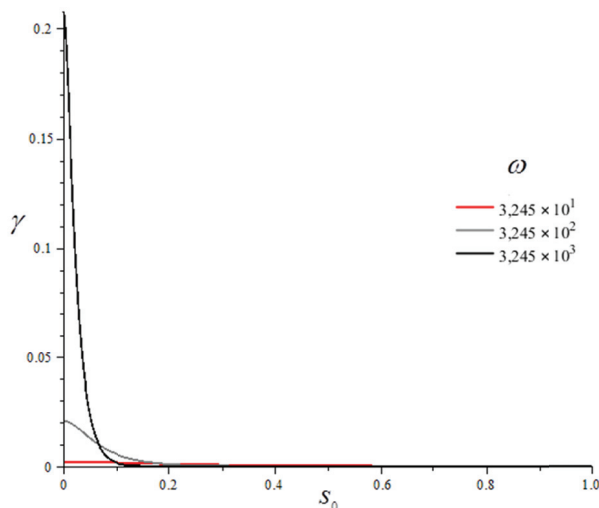


Рисунок 7. Деформация сдвига γ

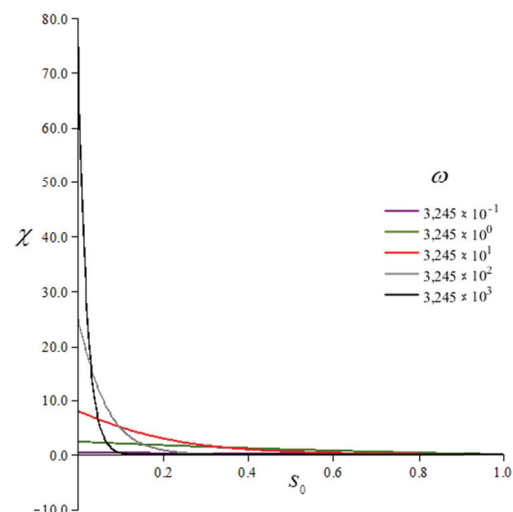


Рисунок 8. Деформация изгиба χ

Приведенные результаты показывают, что резкое изменение НДС происходит на участке стержня вблизи заделки. На участке от $0,1l$ до l стержень находится практически в однородном НДС: деформация растяжения постоянна, деформации сдвига и изгиба практически равны нулю.

Было проведено сравнение результатов, полученных для теорий Коссера и Кирхгофа. В качестве характеристики расхождения J было взято процентное отношение между координатами точек $y_0(s_0)$, найденными по теории Коссера $y_{K0}(s_0)$ и теории Кирхгофа $y_{П0}(s_0)$ (табл. 2):

Лалин В.В., Беляев М.О. Изгиб геометрически нелинейного консольного стержня. Решение по теориям Кирхгофа и Коссера – Тимошенко

$$J = \frac{y_{K0}(s_0) - y_{П0}(s_0)}{y_{K0}(s_0)} \cdot 100\% \quad (48)$$

Аналогично были вычислены расхождения между координатами точек $x_0(s_0)$. Абсолютные значения расхождений B приведены в таблице 3.

$$B = \frac{x_{K0}(s_0) - x_{П0}(s_0)}{y_{K0}(s_0)} \cdot 100\% \quad (49)$$

Таблица 2. Зависимость J от s_0 и ω

s_0	ω				
	$3,245 \cdot 10^{-1}$	$3,245 \cdot 10^0$	$3,245 \cdot 10^1$	$3,245 \cdot 10^2$	$3,245 \cdot 10^3$
$J, \%$					
0,001	6,058	8,112	20,54	45,19	73,20
0,01	1,277	1,741	4,964	14,50	36,84
0,1	0,1331	0,1834	0,5588	1,996	10,20
0,2	0,06900	0,09489	0,2958	1,315	8,792
0,4	0,03714	0,05019	0,1716	1,038	8,134
0,6	0,02680	0,03536	0,1362	0,9559	7,921
0,8	0,02191	0,02824	0,1204	0,9165	7,816
1,0	0,01926	0,02429	0,1117	0,8934	7,753

Таблица 3. Зависимость B от s_0 и ω

s_0	ω				
	$3,245 \cdot 10^{-1}$	$3,245 \cdot 10^0$	$3,245 \cdot 10^1$	$3,245 \cdot 10^2$	$3,245 \cdot 10^3$
$B, \%$					
0,001	$4,075 \cdot 10^{-7}$	$2,977 \cdot 10^{-5}$	$1,016 \cdot 10^{-3}$	0,03186	0,9651
0,01	$2,032 \cdot 10^{-6}$	$1,483 \cdot 10^{-4}$	$5,021 \cdot 10^{-3}$	0,1526	4,167
0,1	$1,970 \cdot 10^{-5}$	$1,410 \cdot 10^{-3}$	0,04121	0,7517	9,232
0,4	$7,048 \cdot 10^{-5}$	$4,505 \cdot 10^{-3}$	0,07876	0,8508	9,259
0,8	$1,189 \cdot 10^{-4}$	$6,605 \cdot 10^{-3}$	0,08396	0,8511	9,256
1,0	$1,350 \cdot 10^{-4}$	$7,207 \cdot 10^{-3}$	0,08443	0,8510	9,2547

При значениях $\omega \leq 3,245 \cdot 10^{-1}$ расхождения между вертикальными перемещениями становятся меньше 1 % для сечений, удаленных от заделки более чем на $s = 0,056$. Так, для $\omega = 3,245 \cdot 10^{-1}$ $J \leq 1$ % уже при $s = 0,014$. При $\omega = 3,245 \cdot 10^3$ расхождение превышает 7 % по всей длине стержня.

Расхождения между горизонтальными перемещениями малы и не превышают 1 % при $\omega \leq 3,245 \cdot 10^2$ по всей длине стержня.

Также задача решалась для стержня длиной $l = 1$ м при заданных значениях жесткостей на растяжение k_1 , на сдвиг k_2 и на изгиб k_3 :

$$k_1 = 1.25 \cdot 10^5 (H), \quad k_2 = 4.3 \cdot 10^4 (H), \quad k_3 = 1.25 \cdot 10^3 (H \cdot m^2) \quad (50)$$

На рисунке 9 представлены виды изогнутых осей при различных значениях безразмерного параметра нагрузки ω . Сплошной линией изображены оси, построенные по результатам решения по теории Коссера – Тимошенко. Пунктирной линией изображены оси, построенные по результатам решения по теории Кирхгофа.

На рисунке 10 представлен график изменения углов поворота φ и угла наклона касательной $\left(\frac{dy}{dx}\right)$ по длине стержня при различных значениях безразмерного параметра нагрузки ω . Углы поворота сечения φ изображены сплошной линией, углы наклона касательной – пунктирной.

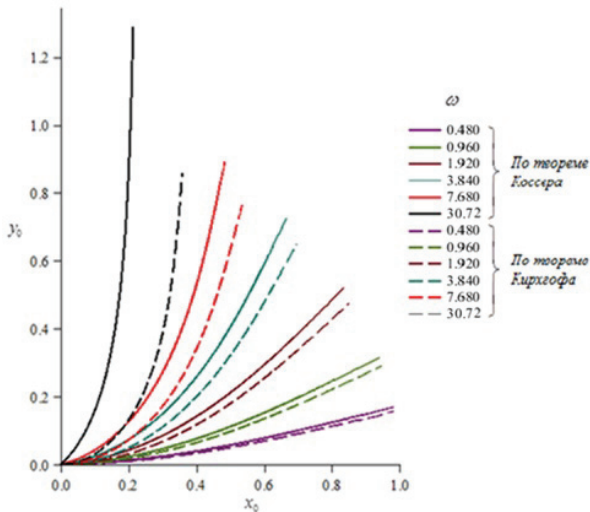


Рисунок 9. Изогнутая ось балки

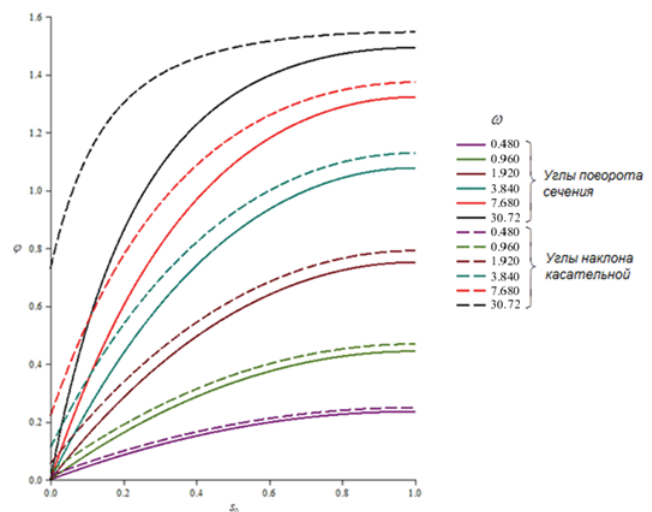


Рисунок 10. Углы поворота сечения φ и углы наклона касательной

При данных жесткостях результаты, полученные по точной теории, значительно отличаются от результатов, полученных по теории Кирхгофа. Значения расхождений J между координатами точек $y_0(s_0)$, полученными по двум теориям, представлены в таблице 4. Значения расхождений B между координатами точек $x_0(s_0)$ представлены в таблице 5.

Таблица 4. Зависимость J от s_0 и ω

s_0	ω					
	0,0048	0,0096	0,0192	0,0384	0,0768	0,3072
$J, \%$						
0,002	96,73	96,86	97,20	97,76	98,36	99,27
0,02	74,84	75,64	77,77	81,50	85,88	93,31
0,1	37,94	38,97	41,88	47,68	55,89	75,15
0,2	24,22	25,01	27,33	32,21	39,82	61,88
0,4	14,60	15,09	16,58	19,90	25,68	47,25
0,6	10,95	11,28	12,32	14,79	19,54	40,03
0,8	9,113	9,346	10,10	12,09	16,29	36,01
1,0	8,079	8,245	8,826	10,51	14,37	33,51

Таблица 5. Зависимость B от s_0 и ω

s_0	ω					
	0,0048	0,0096	0,0192	0,0384	0,0768	0,3072
	$B, \%$					
0,002	$4,320 \cdot 10^{-4}$	$1,656 \cdot 10^{-3}$	$5,883 \cdot 10^{-3}$	0,01872	0,05442	0,3860
0,02	$4,293 \cdot 10^{-3}$	0,01646	0,05843	0,1857	-0,5396	3,875
0,2	0,04027	0,1536	0,5378	1,663	4,655	34,09
0,4	0,07453	0,2817	0,9624	2,838	7,472	52,50
0,6	0,1028	0,3851	1,282	3,613	9,018	60,96
0,8	0,1253	0,4658	1,520	4,132	9,911	65,07
1,0	0,1421	0,5259	1,694	4,501	10,51	67,57

Из результатов сравнения видно, что разница между вертикальными перемещениями, найденными по разным теориям, превышает 8 % по всей длине стержня.

Различия между горизонтальными перемещениями малы при небольших значениях ω . Для $\omega \leq 0,0384$ они составляют меньше 5 % по всей длине стержня.

Для выявления зависимости расхождений от размеров поперечного сечения стержня задача решалась для стального стержня длиной $l = 1$ м и круглого сечения диаметром $D = 10$ см. Модуль упругости был принят $E = 196,2 \cdot 10^9$ Па, коэффициент Пуассона – $\nu = 0,28$.

На рисунке 11 представлены виды изогнутых осей при различных значениях безразмерного параметра нагрузки ω . Сплошной линией изображены оси, построенные по результатам решения по теории Коссера – Тимошенко. Пунктирной линией изображены оси, построенные по результатам решения по теории Кирхгофа.

На рисунке 12 представлен график изменения углов поворота φ и угла наклона касательной $\left(\frac{dy}{dx}\right)$ по длине стержня при различных значениях безразмерного параметра нагрузки ω . Углы поворота сечения φ изображены сплошной линией, углы наклона касательной – пунктирной.

В таблицах 6 и 7 приведены значения расхождений между вертикальными перемещениями J и горизонтальными перемещениями B соответственно.

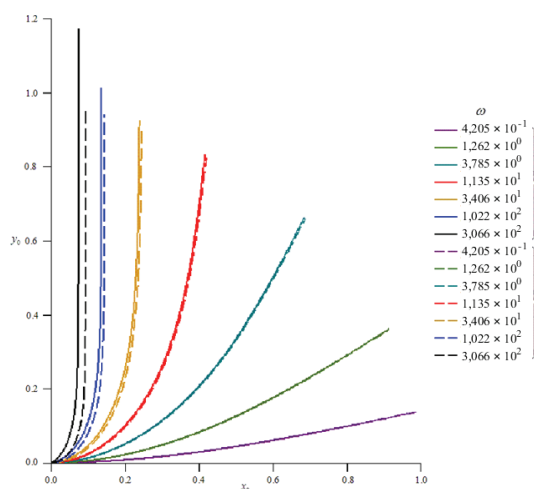


Рисунок 11. Изогнутая ось балки

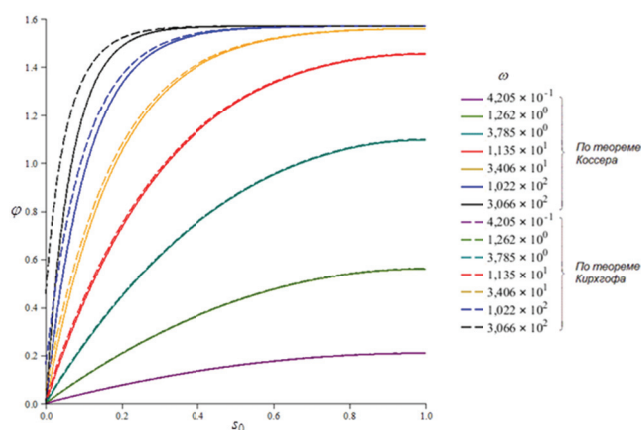


Рисунок 12. Углы поворота сечения φ и углы наклона касательной

Таблица 6. Зависимость J от s_0 и ω

s_0	ω						
	$4,205 \cdot 10^{-1}$	$1,262 \cdot 10^0$	$3,785 \cdot 10^0$	$1,135 \cdot 10^1$	$3,406 \cdot 10^1$	$1,022 \cdot 10^2$	$3,066 \cdot 10^2$
$J, \%$							
0,002	61,83	63,57	70,05	79,35	86,97	92,18	95,59
0,02	14,01	14,95	19,08	28,02	40,57	55,01	69,72
0,1	3,241	3,490	4,649	7,534	12,70	21,13	35,01
0,2	1,705	1,837	2,458	4,056	7,145	13,11	25,33
0,4	0,9244	0,9910	1,313	2,213	4,283	9,187	20,51
0,6	0,6683	0,7104	0,9282	1,622	3,435	8,034	18,99
0,8	0,5465	0,5755	0,7426	3,054	2,541	7,494	18,24
1,0	0,4805	0,5015	0,6396	1,201	2,840	7,181	17,80

Таблица 7. Зависимость B от s_0 и ω

s_0	ω						
	$4,205 \cdot 10^{-1}$	$1,262 \cdot 10^0$	$3,785 \cdot 10^0$	$1,135 \cdot 10^1$	$3,406 \cdot 10^1$	$1,022 \cdot 10^2$	$3,066 \cdot 10^2$
$B, \%$							
0,002	$1,703 \cdot 10^{-5}$	$1,422 \cdot 10^{-4}$	$9,555 \cdot 10^{-4}$	$5,234 \cdot 10^{-3}$	0,0271	0,1383	0,6809
0,02	$1,693 \cdot 10^{-4}$	$1,412 \cdot 10^{-3}$	$9,468 \cdot 10^{-3}$	0,05155	0,2639	1,324	6,467
0,1	$8,233 \cdot 10^{-4}$	$6,842 \cdot 10^{-3}$	0,04508	0,2350	1,105	4,822	20,43
0,4	$2,941 \cdot 10^{-3}$	0,02382	0,1411	0,5951	2,115	7,045	25,24
0,6	$4,060 \cdot 10^{-3}$	0,03224	0,1790	0,6766	2,222	7,128	25,28
0,8	$4,950 \cdot 10^{-3}$	0,03873	0,2022	0,7154	2,254	7,140	25,29
1,0	$5,616 \cdot 10^{-3}$	0,0435	0,2192	0,7387	2,267	7,142	25,29

Значительные расхождения между вертикальными перемещениями, превышающие 5 %, для $\omega = 4,205 \cdot 10^{-1}$ сохраняются при $s_0 \leq 0,064$, а для $\omega = 3,406 \cdot 10^1$ сохраняются при $s_0 \leq 0,32$.

При значении безразмерного параметра нагрузки $\omega \geq 1,022 \cdot 10^2$ расхождения превышают 7 % по всей длине стержня.

Значительные различия между вертикальными перемещениями вблизи заделки объясняются тем, что значение угла поворота φ мало и значение $\cos \varphi(s)$ во втором уравнении системы (11) близко к 1. Вследствие этого вклад слагаемого, включающего жесткость на сдвиг, оказывается значительным по сравнению с малым значением координаты $y(s)$. При увеличении s значение координаты $y(s)$ резко возрастает и вклад слагаемого с жесткостью k_2 становится незначительным.

На нагруженном конце балки отличия значений координаты $y(s)$, найденных по двум теориям, объясняются в основном влиянием деформации растяжения, которая не учитывается в теории Кирхгофа; причем это отличие появляется только при больших значениях нагрузки.

Расхождения между горизонтальными перемещениями малы и превышают 5 % только при значительных нагрузках $\omega \geq 1,022 \cdot 10^2$.

На основании сравнения решений двух задач для стальных стержней $D = 2$ см (табл. 2, 3) и $D = 10$ см (табл. 6, 7) можно сделать вывод о том, что при близких значениях вертикальных перемещений различия между решениями, найденными по теории Кирхгофа и теории Коссера, возрастают при увеличении поперечного сечения стержня.

Для сравнения результатов, полученных в ходе исследования, с результатами расчетов существующих программных комплексов было проведено решение верификационной задачи, представленной в [15, 16]: круглая труба, внешний диаметр $D = 0,2$ м, толщина стенки $t = 0,01$ м, длина $l = 10$ м, модуль упругости $E = 100$ МПа. Вертикальная нагрузка, приложенная на конце стержня, $F = 269,35$ Н. Сравнение проводилось с тремя программными комплексами конечно-элементного анализа: ANSYS, Abaqus, SOFiSTiK. Значения полученных перемещений, а также величины расхождений представлены в таблице 8.

Таблица 8. Сравнение результатов

	$x(l)$, м			Относительная разница, %	$y(l)$, м			Относительная разница, %
	МКЭ	Точное решение			МКЭ	Точное решение		
		Теория Кирхгофа	Теория Коссера			Теория Кирхгофа	Теория Коссера	
ANSYS	4,449	4,457	4,455	0,1349	8,114	8,103	8,109	0,06162
Abaqus	4,448			0,1574	8,114			0,06162
SOFiSTiK	4,446			0,2024	8,113			0,04930

Полученные результаты подтверждают, что программные комплексы в геометрически нелинейных задачах не реализуют стержень теории Кирхгофа. В рамках теории Коссера – Тимошенко протестированные программные комплексы дают достаточно точные результаты с допустимой при решении инженерных задач погрешностью.

Для проверки результатов и определения точности расчетов различных программных комплексов были составлены таблицы с результатами решений, найденными по теории Кирхгофа и теории Коссера, для двух задач при различных значениях нагрузки. В таблицах приведены значения горизонтальных перемещений $x(l)$, вертикальных перемещений $y(l)$, углов поворота $\varphi(l)$ и растягивающей силы $N(l)$ в концевой точке стержня. Также приведены значения изгибающего момента $M(0)$ и перерезывающей силы $Q(0)$ в заделке.

В двух задачах были заданы следующие параметры: а) $D = 2$ см, $E = 196,2 \cdot 10^9$ Па, $\nu = 0,28$, $l = 1$ м; б) $D = 10$ см, $E = 196,2 \cdot 10^9$ Па, $\nu = 0,28$, $l = 1$ м.

В таблицах 9–12 приведены значения, полученные по теории Кирхгофа и Коссера – Тимошенко для двух различных задач.

Таблица 9. Задача а): результаты расчетов по теории Кирхгофа

Нагрузка, Н	$x(l)$	$y(l)$	$\varphi(l)$	$M(0)$	$Q(0)$	$N(l)$
5×10^2	0,9931	0,1069	0,1607	496,6	500,0	80,01
5×10^3	0,7257	0,6225	1,024	3628	5000	4271
5×10^4	0,07889	0,9673	1,571	$12,42 \cdot 10^3$	$5 \cdot 10^4$	$5 \cdot 10^4$
5×10^6	0,02622	0,9892	1,571	$1,311 \cdot 10^5$	$5 \cdot 10^6$	$5 \cdot 10^6$

Таблица 10. Задача а): результаты расчетов по теории Коссера

Нагрузка, Н	$x(l)$	$y(l)$	$\varphi(l)$	$M(0)$	$Q(0)$	$N(l)$
5×10^2	0,9931	0,1069	0,1607	496,6	500,0	80,01
5×10^3	0,7256	0,6227	1,024	3628	5000	4271
5×10^4	0,07823	0,9760	1,571	$12,41 \cdot 10^3$	$5 \cdot 10^4$	$5 \cdot 10^4$
5×10^6	0,02400	1,072	1,571	$1,2 \cdot 10^5$	$5 \cdot 10^6$	$5 \cdot 10^6$

Таблица 11. Задача б): результаты расчетов по теории Кирхгофа

Нагрузка, Н	$x(l)$	$y(l)$	$\varphi(l)$	$M(0)$	$Q(0)$	$N(l)$
$4,05 \times 10^5$	0,9886	0,1374	0,2070	$4,004 \cdot 10^5$	$4,05 \cdot 10^5$	$8,322 \cdot 10^4$
$1,093 \times 10^7$	0,4202	0,8226	1,455	$4,595 \cdot 10^6$	$1,094 \cdot 10^7$	$1,086 \cdot 10^7$
$3,281 \times 10^7$	0,2457	0,8984	1,560	$8,061 \cdot 10^6$	$3,280 \cdot 10^7$	$3,280 \cdot 10^7$
$2,953 \times 10^8$	0,09331	0,9621	1,571	$2,755 \cdot 10^5$	$2,952 \cdot 10^8$	$2,952 \cdot 10^8$

Таблица 12. Задача б): результаты расчетов по теории Коссера

Нагрузка, Н	$x(l)$	$y(l)$	$\varphi(l)$	$M(0)$	$Q(0)$	$N(l)$
$4,05 \times 10^5$	0,9885	0,1381	0,2070	$4,004 \cdot 10^5$	$4,050 \cdot 10^5$	$8,322 \cdot 10^4$
$1,093 \times 10^7$	0,4171	0,8326	1,455	$4,561 \cdot 10^6$	$1,094 \cdot 10^7$	$1,086 \cdot 10^7$
$3,281 \times 10^7$	0,2403	0,9246	1,560	$7,882 \cdot 10^6$	$3,280 \cdot 10^7$	$3,280 \cdot 10^7$
$2,953 \times 10^8$	0,07448	1,170	1,571	$2,199 \cdot 10^5$	$2,952 \cdot 10^8$	$2,952 \cdot 10^8$

В приведенных таблицах вертикальные и горизонтальные перемещения, найденные по теориям Коссера – Тимошенко и Кирхгофа, отличаются, тогда как угол поворота φ одинаков для двух теорий. При этом для оценки результатов необходимо помнить, что в теории Кирхгофа угол φ – это угол поворота касательной к оси балки, а в теории Коссера – Тимошенко это угол поворота сечения, отличающийся от угла поворота касательной к оси балки на величину деформации сдвига.

Выводы

В ходе анализа результатов было установлено, что значительные расхождения между вертикальными перемещениями, найденными по теории Коссера и теории Кирхгофа, наблюдаются вблизи заделки и уменьшаются при удалении от нее.

Для всех решаемых задач различия между вертикальными перемещениями, найденными по двум теориям, в точках вблизи заделки значительны и превышают 5 %.

Расхождения между горизонтальными перемещениями имеют обратную тенденцию. Максимальные значения наблюдаются на конце стержня и уменьшаются по мере приближения к заделке.

Расхождения результатов решений, найденных по теории Коссера и теории Кирхгофа, зависят от размера поперечного сечения стержня. При увеличении поперечного сечения происходит возрастание расхождений, что подтверждает применимость теории Кирхгофа только для тонких стержней. Также расхождения зависят от величины нагрузки. При возрастании нагрузки расхождения увеличиваются.

Величина расхождения практически не зависит от материала стержня.

Приведенные в таблицах 9–12 результаты решения двух задач могут быть использованы в качестве тестовых задач при верификации программных комплексов.

Литература

1. Verification Manual. SOFiSTiK AG. Oberschleissheim, 2014. 344 p.
2. Abaqus Benchmarks Manual 6.12. Dassault Systmes Simulia Corp. Providence, 2012. 1738 p.
3. Verification Manual for the Mechanical APDL Application. ANSYS, Inc. Canonsburg, 2009. 1924 p.
4. Попов Е.П. Теория и расчет гибких упругих стержней. М.: Наука, 1986. 296 с.
5. Frisch-Fay R. Flexible bars. Butterworth & Co. Sussex, 1962. 220 p.
6. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Теория упругости. М.: Наука, 1987. 248 с.
7. Городецкий А.С., Евзеров И.Д. Компьютерные модели конструкций. М.: АСВ, 2009. 394 с.

8. Zienkiewicz O.C., Fox D., Taylor R.L. The Finite Element Method for Solid and Structural Mechanics: Seventh Edition. Butterworth–Heinemann: Oxford, 2014. 672 p.
9. Jung P., Leyendecker S., Linn J., Ortiz M. A discrete mechanics approach to the Cosserat rod theory – Part 1: static equilibria // International journal for numerical methods in engineering. 2010. Vol. 85. No. 1. Pp. 31–60.
10. Bishopp K.E., Drucker D.C. Large Deflection of Cantilever Beams // Quarterly of Applied Mathematics. 1945. No. 3. Pp. 272–275.
11. Jung P., Leyendecker S., Linn J., Ortiz M. A discrete mechanics approach to the Cosserat rod theory – Part 1: static equilibria // International journal for numerical methods in engineering. 2010. Vol. 85. No. 1. Pp. 31–60.
12. Nayfeh A.H., Pai P.F. Linear and nonlinear structural mechanics. John Wiley & Sons Inc. Mörlenbach, 2004. 754 p.
13. Levy R., Spillers W.R. Analysis of Geometrically nonlinear structures: Second Edition. Dordrecht: Kluwer academic publishers, 2003. 272 p.
14. Pai P.F. Geometrically exact beam theory without Euler angles // International Journal of Solids and Structures. 2011. No. 48. Pp. 3075–3090.
15. Лалин В.В. Различные формы уравнений нелинейной динамики упругих стержней // Труды СПбГПУ. 2004. №489. С. 121–128.
16. Лалин В.В., Яваров А.В. Построение и тестирование конечного элемента геометрически нелинейного стержня Бернулли-Эйлера // Жилищное строительство. 2013. №5. С. 51–54.
17. Pai P.F. Problems in geometrically exact modeling of highly flexible beams // Thin-walled structures. 2014. Vol. 76. Pp. 66–76.
18. Borse K.N., Dubey S. Geometric Linear And Nonlinear Analysis Of Beam // International Journal of Engineering Research & Technology. 2013. No. 2(7). Pp. 415–423.
19. Auricchio F., Carotenuto P., Reali A. On the geometrically exact beam model: A consistent, effective and simple derivation from three-dimensional finite-elasticity // International Journal of Solids and Structures. 2008. No. 45. Pp. 4766–4781.
20. Pai P.F., Chapman R.D., Feng Z. Geometrically exact displacement-based shell theory // Thin-walled structures. 2013. No. 70. Pp. 1–18.
21. Zwillinger D. Handbook of Differential Equations: Third Edition. New York: Academic Press, 1997. 801 p.
22. Ардентов А. А. Интерфейс для моделирования эластик Эйлера в программной среде Mathematica // Программные системы: теория и приложения. 2012. № 1(10). С. 31–50.
23. Na T.Y. Computational methods in engineering boundary value problems. New York: Academic press, 1979. 320 p.
24. Fung Y.C., Tong P. Classical and Computational solid mechanics. Singapore: World Scientific Pub Co Inc., 2001. 930 p.
25. Grigolyuk E.I., Shalashilin V.I. Problems of Nonlinear Deformation: The Continuation Method Applied to Nonlinear Problems in Solid Mechanics. Dordrecht: Kluwer academic publishers, 1991. 262 p.
26. Temam R., Miranville A. Mathematical Modeling in Continuum Mechanics. Cambridge: Cambridge University Press, 2005. 356 p.
27. Randall J. LeVeque Finite Difference Methods for Ordinary and Partial Differential Equations: Steady-State and Time-Dependent Problems. Philadelphia: SIAM, 2007. 357 p.

*Владимир Владимирович Лалин, Санкт-Петербург, Россия
Тел. моб.: +7(921)3199878; эл. почта: vllalin@yandex.ru*

*Михаил Олегович Беляев, Санкт-Петербург, Россия
Тел. моб.: +7(911)7338709; эл. почта: belyaev-m-o@yandex.ru*

© Лалин В.В., Беляев М.О., 2015

doi: 10.5862/MCE.53.5

Bending of geometrically nonlinear cantilever beam. Results obtained by Cosserat – Timoshenko and Kirchhoff's rod theories

V.V. Lalin*St. Petersburg Polytechnic University, Saint-Petersburg, Russia
+79213199878; e-mail: vllalin@yandex.ru***M.O. Beliaev***St. Petersburg Polytechnic University, Saint-Petersburg, Russia
+79117338709; e-mail: belyaev-m-o@yandex.ru*

Key words

Cosserat – Timoshenko rod theory; Kirchhoff's rod theory; geometrically nonlinear rods; parameter differentiation method; benchmark problem

Abstract

The problem of verification of different program suites for structural analysis has recently become an important component of the construction science. One of the most extensively used benchmark problem is a classical geometrically nonlinear problem of deflection of the cantilever beam of linear elastic material, under the action of external vertical concentrated load at the free end.

In fact, the solution for Kirchhoff's rod is used as an analytical result. This rod is inextensible and Kirchhoff's rod theory disregards flexibility of the rod in tension and shear. But in modern program suites Cosserat-Timoshenko rod is often used because Cosserat-Timoshenko rod theory is a geometrically exact theory. It considers not only bending strain but also shear and tensile strain. This means that it is necessary to get a model solution for Cosserat – Timoshenko rod, which can be used for verification of different software suites.

This paper presents solutions of the geometrically nonlinear problem obtained by Cosserat – Timoshenko and Kirchhoff's rod theory with comparison of those results. The findings can be used as a benchmark problem for verification of software suites.

References

1. *Verification Manual. SOFiSTiK AG.* Oberschleissheim, 2014. 344 p.
2. *Abaqus Benchmarks Manual 6.12.* Dassault Systems Simulia Corp. Providence, 2012. 1738 p.
3. *Verification Manual for the Mechanical APDL Application.* ANSYS, Inc. Canonsburg, 2009. 1924 p.
4. Popov E.P. *Teoriya i raschet gibkikh uprugih sterzhney* [Theory and computation of flexible elastic rods]. Moscow: Nauka, 1986. 296 p. (rus)
5. Frisch-Fay R. *Flexible bars.* Butterworth & Co. Sussex, 1962. 220 p.
6. Landau L.D., Lifshits E.M. *Teoriya uprugosti* [Theory of Elasticity]. Moscow: Nauka, 1987. 248 p. (rus)
7. Gorodetskiy A.S., Evzerov I.D. *Kompyuternyye modeli konstruksii* [Computer models of tructures]. Moscow: ASV, 2009. 394 p. (rus)
8. Zienkiewicz O.C., Fox D., Taylor R.L. *The Finite Element Method for Solid and Structural Mechanics: Seventh Edition.* Butterworth-Heinemann: Oxford, 2014. 672 p.
9. Jung P., Leyendecker S., Linn J., Ortiz M. A discrete mechanics approach to the Cosserat rod theory – Part 1: static equilibria. *International journal for numerical methods in engineering.* 2010. Vol. 85. No. 1. Pp. 31–60.
10. Bisshopp K.E., Drucker D.C. Large Deflection of Cantilever Beams. *Quarterly of Applied Mathematics.* 1945. No.3. Pp. 272–275.
11. Jung P., Leyendecker S., Linn J., Ortiz M. A discrete mechanics approach to the Cosserat rod theory – Part 1: static equilibria. *International journal for numerical methods in engineering.* 2010. Vol. 85. No. 1. Pp. 31–60.
12. Nayfeh A.H., Pai P.F. *Linear and nonlinear structural mechanics.* John Wiley & Sons Inc. Mörlenbach, 2004. 754 p.
13. Levy R., Spillers W.R. *Analysis of Geometrically nonlinear structures: Second Edition.* Dordrecht: Kluwer academic publishers, 2003. 272 p.

Lalin V.V., Beliaev M.O. Bending of geometrically nonlinear cantilever beam. Results obtained by Cosserat – Timoshenko and Kirchhoff's rod theories

14. Pai P.F. Geometrically exact beam theory without Euler angles. *International Journal of Solids and Structures*. 2011. No. 48. Pp. 3075–3090.
15. Lalin V.V. *Razlichnye formy uravneniy nelineynoy dinamiki uprugih sterzhney* [Different forms of equations of the dynamics of elastic rods]. Trudy SPbGPU. 2004. No. 489. Pp. 121–128. (rus)
16. Lalin V.V., Javarov A.V. Postroeniye i testirovaniye konechnogo elementa geometricheski nelineynogo sterzhnya Bernulli-Eylera [Construction and testing of a finite element of (a) the geometrically non-linear bar of Bernoulli-Euler]. *Housing Construction*. 2013. No. 5. Pp 51–54. (rus)
17. Pai P.F. Problems in geometrically exact modeling of highly flexible beams. *Thin-walled structures*. 2014. Vol. 76. Pp. 66–76.
18. Borse K.N., Dubey S. Geometric Linear And Nonlinear Analysis Of Beam. *International Journal of Engineering Research & Technology*. 2013. No. 2(7). Pp. 415–423.
19. Auricchio F., Carotenuto P., Reali A. On the geometrically exact beam model: A consistent, effective and simple derivation from three-dimensional finite-elasticity. *International Journal of Solids and Structures*. 2008. No. 45. Pp. 4766–4781.
20. Pai P.F., Chapman R.D., Feng Z. Geometrically exact displacement-based shell theory. *Thin-walled structures*. 2013. No. 70. Pp. 1–18.
21. Zwillinger D. *Handbook of Differential Equations: Third Edition*. New York: Academic Press, 1997. 801 p.
22. Ardentov A. A. Euler's elasticae interface in Mathematica. *Program Systems: Theory and Applications*. 2012. No. 1(10). Pp. 31–50. (rus)
23. Na T.Y. *Computational methods in engineering boundary value problems*. New York: Academic press, 1979. 320 p.
24. Fung Y.C., Tong P. *Classical and Computational solid mechanics*. Singapore: World Scientific Pub Co Inc., 2001. 930 p.
25. Grigolyuk E.I., Shalashilin V.I. *Problems of Nonlinear Deformation: The Continuation Method Applied to Nonlinear Problems in Solid Mechanics*. Dordrecht: Kluwer academic publishers, 1991. 262 p.
26. Temam R., Miranville A. *Mathematical Modeling in Continuum Mechanics*. Cambridge: Cambridge University Press, 2005. 356 p.
27. Randall J. *LeVeque Finite Difference Methods for Ordinary and Partial Differential Equations: Steady-State and Time-Dependent Problems*. Philadelphia: SIAM, 2007. 357 p.

Full text of this article in Russian: pp. 39–55