

doi: 10.5862/MCE.53.3

Экспериментальные исследования работы балок двутаврового сечения при действии изгиба и кручения

*Д.т.н., заведующий кафедрой А.Р. Туснин;
аспирант М. Прокич,*

Московский государственный строительный университет

Аннотация. В статье представлены результаты теоретических и экспериментальных исследований работы двутавровой балки при кручении с изгибом. Рассмотрены симметричные двутавровые балки прокатные или сварные при размерах стенки и полки, исключающих потерю местной устойчивости. Параметры испытываемых конструкций и величины прикладываемых нагрузок обоснованы предварительным численным расчетом, который выполнен с учетом физической и геометрической нелинейности.

Проведены испытания при действии изгиба и кручения нескольких балок вплоть до полной потери несущей способности. Выполнен сравнительный анализ экспериментальных, теоретических и численных результатов.

Установлено соответствие теоретических и экспериментальных данных (отличие, как правило, не более 15 %), подтверждена достоверность примененных численных методик для расчета конструкций, испытывающих изгиб и кручение, с учетом развития пластических деформаций, что позволяет использовать их для разработки инженерной методики расчета.

Ключевые слова: двутавровая балка; стесненное кручение; изгиб; эксперимент; численный расчет; несущая способность

Введение

Тонкостенные стальные стержни в строительных конструкциях могут работать в условиях изгиба с кручением. Для обоснованного выбора параметров конструкции в этом случае необходимо подробное изучение ее поведения при загрузке и точное определение ее несущей способности [1–6]. Поведение симметричных двутавров в условиях изгиба изучено хорошо, вплоть до образования пластического шарнира и потери несущей способности элемента. В тонкостенных стержнях открытого профиля при стесненном кручении возникают дополнительные секториальные напряжения, которые могут вносить значительный вклад в суммарные нормальные напряжения и приводят к раннему достижению предела текучести [7]. Учет пластических деформаций позволяет увеличить несущую способность профиля [8–9].

В российских нормах отсутствуют рекомендации по учету пластических деформаций при расчете балок, испытывающих одновременно изгиб и кручение. Проектирование с учетом развития пластических деформаций позволяет уменьшить расход металла по сравнению с расчетом в упругой стадии. Выявление всех резервов несущей способности конструкции является актуальной задачей.

Экспериментальные исследования несущей способности тонкостенных стержней открытого профиля, в частности, испытания балок при кручении показали, что при упругопластическом кручении предельные моменты были значительно выше, чем предсказывалось теорией [10–16]. Ранее выполненные исследования показали, что несущая способность двутаврового сечения из-за развития пластических деформаций при действии бимоента увеличивается в 1,5 раза [17]. Последующие численные расчеты показали, что если к действию бимоента прибавить изгибающий момент, то резервы несущей способности за счет пластических деформаций при стесненном кручении уменьшаются. Коэффициент, учитывающий пластические деформации стали, уменьшается в зависимости от доли изгибающего момента в нормальных напряжениях [18]. Для выявления действительной работы тонкостенных стержней открытого профиля при действии изгиба и кручения в пластической стадии работы необходимо проведение экспериментальных исследований. В данной статье приводятся результаты испытаний симметричных двутавров при одновременном изгибе и кручении. Экспериментальные результаты получены для профилей, местная устойчивость стенки и полок которых обеспечена.

Описание исследования

Цель экспериментально-теоретического исследования – изучение напряженно-деформированного состояния двутавровой балки при совместном действии изгиба и стесненного кручения с учетом развития пластических деформаций. Параметры экспериментальной модели определены предварительными численными расчетами балок с учетом физической и геометрической нелинейности [19–20]. При выборе профилей для эксперимента, высоты сечения и расчетных пролетов учитывались характеристики применяемого оборудования для испытаний и особенности исследуемого напряженного состояния. Размеры полки и стенки испытываемого профиля подобраны так, чтобы исключить потерю местной устойчивости до полного исчерпания прочности сечения.

Расчетная схема испытываемой конструкции показана на рисунке 1. Рассмотрена шарнирно опертая балка, на опорах которой исключен поворот сечений, но допускается свободная деформация сечений. В середине пролета балка нагружена силой, действующей в вертикальной плоскости с эксцентриситетом относительно продольной оси, что создает одновременно крутящий и изгибающий моменты в балке.

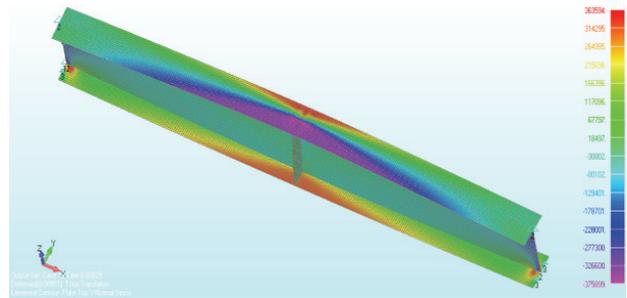
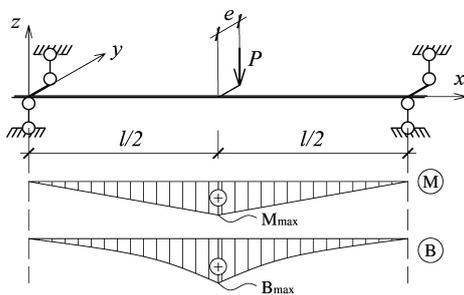


Рисунок 1. Расчетная схема экспериментальной модели и распределение нормальных напряжений, полученное в программном комплексе

Работу тонкостенного стержня открытого профиля при кручении характеризует безразмерный параметр (безразмерное характеристическое число [22]), равный произведению изгибно-крутильной характеристики стержня на его пролет:

$$kl = \sqrt{\frac{GI_t}{EI_\omega}} l . \quad (1)$$

Исходя из доступного оборудования в лаборатории (испытательная машина Instron 3382) сделан выбор профиля балки и подобраны пролеты таким образом, чтобы охватить диапазон параметра kl , близкий к практическому. С учетом этого была выбрана балка из прокатного профиля 12Б1 по СТО АСЧМ 20-93 пролетами в диапазоне 600...1200 мм. В качестве материала балок была принята сталь класса С345, что позволило проводить испытания в среднем диапазоне нагрузки, создаваемой прессом, и уменьшило погрешность прикладываемой нагрузки.

Предварительные расчеты проведены с использованием известных теоретических зависимостей, полученных для данной расчетной схемы [21].

$$B_{\omega(l/2)} = \frac{M_t}{2k} \cdot \frac{sh(kl/2)}{ch(kl/2)} ; \quad (2)$$

$$M_{y(l/2)} = \frac{P \cdot l}{4} ; \quad (3)$$

$$\theta_{(l/2)} = \frac{M_t}{2k^3 EI_\omega} \cdot \left(\frac{kl}{2} - \frac{sh(kl/2)}{ch(kl/2)} \right) , \quad (4)$$

где $B_{\omega(l/2)}$ – бимомент; M_t – крутящий момент; $M_{y(l/2)}$ – изгибающий момент; $\theta_{(l/2)}$ – угол поворота сечения.

По приведенным формулам вычислены значения нормальных напряжений от стесненного кручения и изгиба, которые использовались при определении суммарных нормальных напряжений и перемещений. Для выбранных пролетов проведены расчеты, позволившие определить

Туснин А.Р., Прокич М. Экспериментальные исследования работы балок двутаврового сечения при действии изгиба и кручения

эксцентриситеты приложения нагрузки. Соотношение секториальных и изгибных нормальных напряжений σ_B / σ_M находится в диапазоне (1,9...1,5).

Проведены испытания плоских образцов на растяжение для определения предела текучести, модуля упругости и диаграммы работы материала испытываемых образцов.

По усредненным данным испытаний определены искомые параметры и получен график работы стали. Результаты испытаний материала представлены в таблице 1 и на графике (рис. 2).

Таблица 1. Результаты испытаний материала

Ширина образца, мм	Толщина образца, мм	Площадь сечения, мм ²	Расчетная длина, мм	Длина после разрыва, мм	Относительное удлинение, (%)	Модуль упругости при растяжении, МПа	Предел текучести, МПа	Временное сопротивление, МПа
9.4	3.8	35.72	60	80	33.33	253978	329.46	482.93

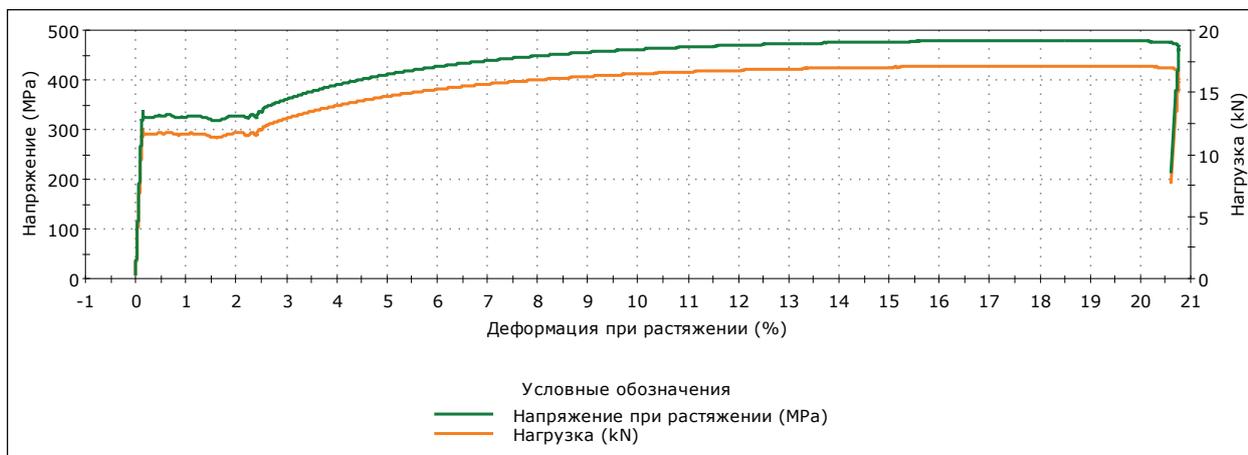


Рисунок 2. Диаграмма работы материала испытываемых образцов

Численный расчет балок выполнен с использованием вычислительного комплекса Nastran с учетом геометрической и физической нелинейности. В расчетах использована фактическая диаграмма работы материала. Стержень моделировался конечными элементами оболочки типа «plate». Сетка разбиения и способ задания диаграммы работы стали обоснованы ранее выполненными исследованиями [23]. На основании проведенного расчета определены параметры испытываемых конструкций. В таблице 2 представлены основные параметры рассчитываемых балок и величины предельных нагрузок, при которых происходит потеря несущей способности.

Таблица 2. Параметры испытываемых образцов

Тип сечения	12 Б1					
h, см	11.76	11.76	11.76	11.76	11.76	11.76
b _f , см	6.40	6.40	6.40	6.40	6.40	6.40
G·I _t , кН·м ²	0.745	0.745	0.745	0.745	0.745	0.745
E·I _w , кН·м ⁴	0.179	0.179	0.179	0.179	0.179	0.179
l, м	0.6	0.7	0.8	0.9	1.0	1.2
kl	1.224	1.428	1.632	1.836	2.040	2.447
Предельная нагрузка [Nastran], кН	52.94	44.84	38.91	34.06	30.31	24.53
Эксцентриситет, см	2.00	2.00	2.00	2.00	2.00	2.00
Изгибающий момент M _y , кН·см	794.10	784.70	778.20	766.35	757.81	731.25
Крутящий момент, кН·см	105.88	89.68	77.82	68.12	60.62	48.76
Бимомент B, кН·см ²	1415.8	1347.9	1283.5	1210.5	1144.1	1004.8
Соотношение напряжений $\sigma(B)/\sigma(M)$	1.90	1.83	1.76	1.69	1.54	1.47

Расчетами установлена величина предельной нагрузки, при которой происходит потеря несущей способности профиля, она находится в диапазоне 2,5...5,3 т и соответствует мощности доступного в лаборатории пресса Instron 3382 (10 т). При этом эксцентриситет приложения нагрузки принят постоянным и равным 2 см, поскольку соотношение изгибных и секториальных напряжений будет варьироваться с изменением пролета испытываемых балок. Также расчетами определена требуемая толщина ребра жесткости (3 мм), устанавливаемого в середине пролета балки, в месте приложения нагрузки. Его задача – обеспечить неизменяемость контура поперечного сечения согласно положениям теории В.З. Власова [22].

После определения основных параметров расчетной схемы, величин нагрузки и эксцентриситетов были разработаны опорные узлы, способ передачи нагрузки и выбраны точки для установки тензорезисторов. На рисунке 3 представлена соответствующая экспериментальная установка, а также деформированная балка в момент потери несущей способности.



Рисунок 3. Испытания двутавровой балки на изгиб со стесненным кручением

Экспериментальная установка состоит из траверсы, установленной на прессе. Опорами балок служили цилиндрические шарниры, обеспечивающие свободу угла поворота в вертикальной плоскости. Пролет балок варьировался от 600 до 1200 мм. На опорах полки балок фиксировались вертикальными пластинами в горизонтальном направлении, что исключало поворот опорных сечений относительно продольной оси и обеспечивало свободу деформации сечений. Нагрузка передавалась на верхнюю полку балки цилиндром через пластину, фиксирующую ее заданный эксцентриситет, с возможностью перемещения в горизонтальной плоскости.

В процессе испытаний нагрузка прикладывалась шагами, величина нагрузки контролировалась датчиком перемещений испытательной машины. Для измерения деформаций образцов применялись тензорезисторы японской компании «Токуо Sokki Kenkyujo», типа FLA-5-11 с базой длиной 5 мм и шириной 1,5 мм. Рабочая температура данных датчиков находится в диапазоне от -20 до $+80$ °С. На каждом образце было установлено как минимум 4 тензометрических датчика. Тензорезисторы были установлены на расстоянии 2,5 см от середины пролета балки на краях полки, поскольку там ожидалось близкие к максимальным нормальные напряжения в сечении. На образце длиной 90 см они были продублированы симметрично относительно середины балки, а на образцах длиной 60 и 90 см установлено еще 4 дополнительных датчика на полках поперечного сечения. При обработке показаний датчиков для получения напряжений, соответствующих деформациям, была использована диаграмма работы стали, полученная в ходе предварительных испытаний материала. Кроме деформаций, в процессе нагружения измерялись угол поворота сечения с помощью двух электронных индикаторов (рис. 4, а) и прогиб балки по измерениям испытательной машины.

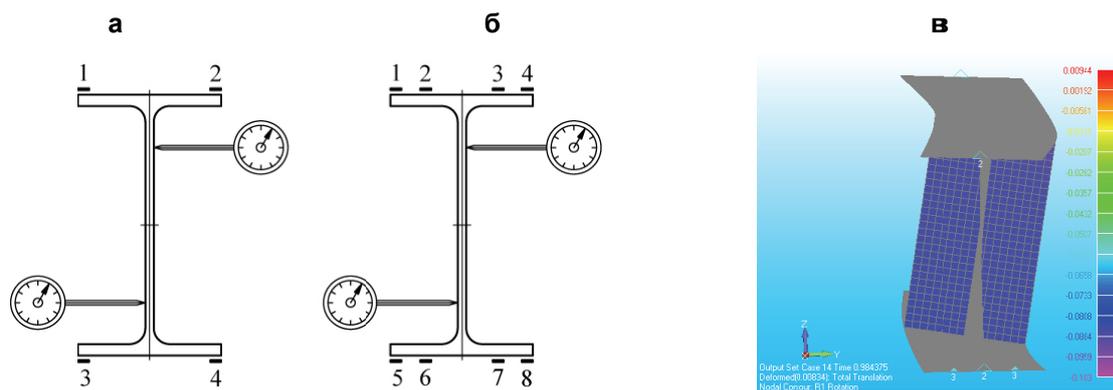


Рисунок 4: а, б – схемы устанавливаемых тензорезисторов и индикаторов на образцах длиной 70, 80, 100, 120 см и образцах длиной 60, 90 см соответственно; в – угол поворота при потере несущей способности в Nastran

Сравнение результатов

Зависимости угла поворота от нагрузки для шести образцов, полученные численным расчетом (сплошная линия) и экспериментально (штриховая линия), представлены на рисунке 5.

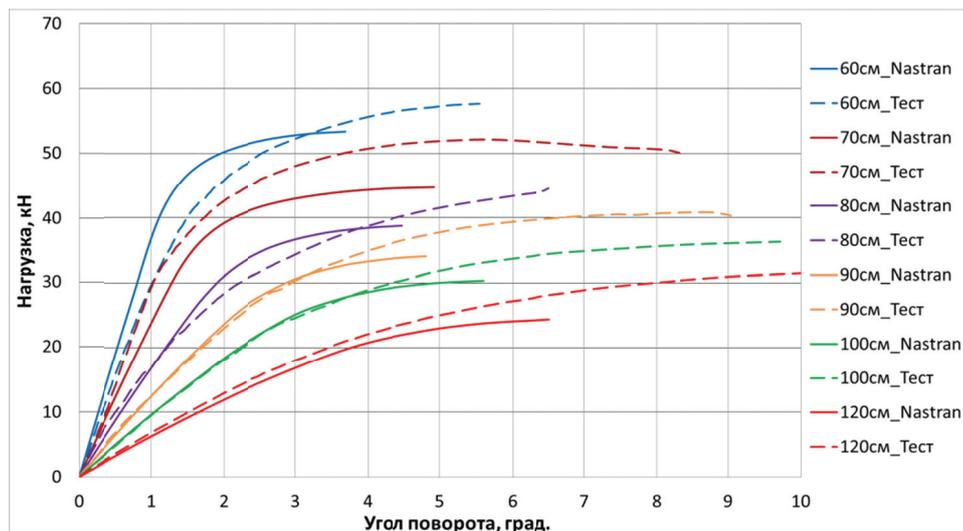


Рисунок 5. Зависимости угла поворота от нагрузки

На рисунках 6 и 7 представлены графики изменения напряжений с ростом нагрузки, полученные экспериментально (штриховая линия) и численным расчетом (сплошная линия). Зависимости, полученные расчетом, приведены для точек сечения, совпадающих с местами установки тензорезисторов.

По результатам испытаний следует отметить, что картины деформирования, полученные расчетом и экспериментальным путем, качественно совпадают. Суммарные нормальные напряжения достигают предела текучести раньше всего в датчиках 1, 3 (1, 5), где напряжения от изгибающего момента и бимоменты имеют одинаковые знаки. Пластические деформации дальше распространяются по сечению, при этом углы поворота незначительно отклоняются от упругих значений. После того как на другом конце полки в датчиках 2 (4) появляется текучесть, углы поворота начинают резко увеличиваться, и образование пластического шарнира в полке приводит к потере несущей способности элемента. Следовательно, появление текучести в крайней волокне вовсе не означает потерю несущей способности балки при стесненном кручении, и имеющиеся резервы следует учесть при разработке соответствующей инженерной методики расчета.

Сравнение численных и экспериментальных результатов представлено в таблице 3. Внутренние усилия, изгибающий момент M_u и бимомент B определены теоретически (согласно положениям теории В.З. Власова), численно и по показаниям четырех датчиков обратным путем в соответствии с распределением напряжений в упругой стадии работы.

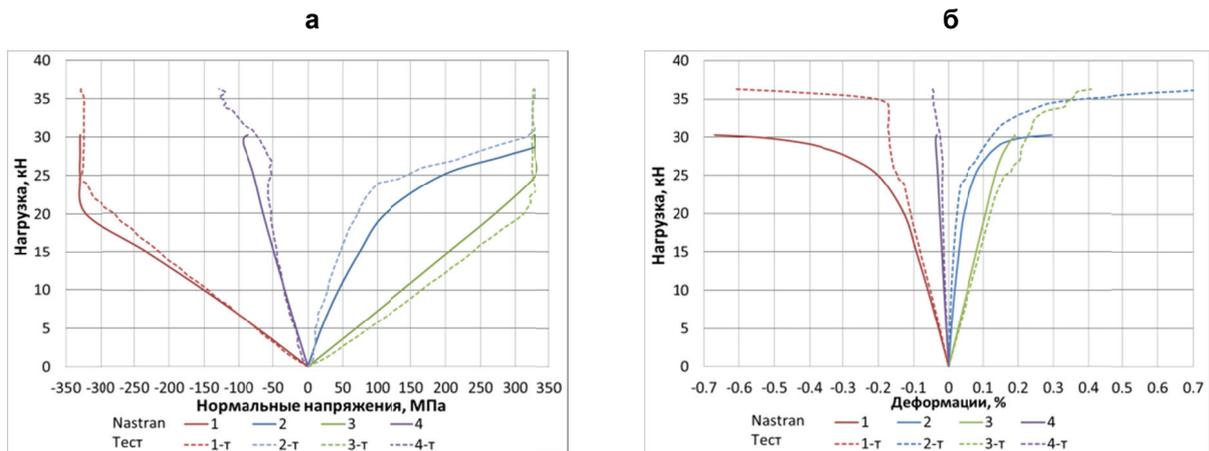


Рисунок 6. Диаграммы для датчиков образца длиной 100 см: а) нагрузка – напряжения; б) нагрузка – деформации

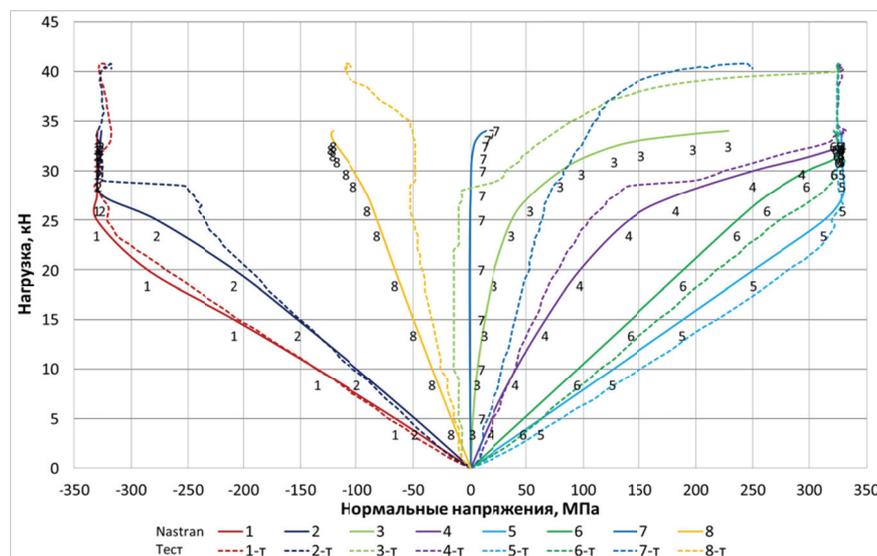


Рисунок 7. Диаграмма нагрузка – напряжения для образца длиной 90 см

Таблица 3. Сравнение результатов исследований

Тип сечения	12 Б1	12 Б1	12 Б1	12 Б1	12 Б1	12 Б1	
I, м	0.6	0.7	0.8	0.9	1.0	1.2	
Предельная нагрузка, Nastran $N_{cr}[n]$, кН	52.94	44.84	38.91	34.06	30.31	24.53	
Предельная нагрузка, Тест $N_{cr}[t]$, кН	57.70	52.08	44.50	40.50	36.30	31.00	
$N_{cr}[t] / N_{cr}[n]$, %	108.99	116.15	114.37	118.91	119.75	126.37	
Угол поворота, Nastran $\varphi[n]$, град	3.69	5.45	4.49	4.81	4.99	6.52	
Угол поворота, Тест $\varphi[t]$, град	3.32	4.92	4.00	3.77	4.35	4.79	
$\varphi[n] / \varphi[t]$, %	111.14	110.66	112.08	127.59	114.64	136.00	
Nastran	M_y , кН·см	395.76	431.93	427.89	390.17	435.15	425.08
	B , кН·см ²	754.04	828.30	783.21	685.10	752.46	842.82
Тест	M_y , кН·см	342.31	526.54	478.62	450.73	487.79	559.87
	B , кН·см ²	732.24	736.72	622.61	657.57	700.72	717.08
Теория	M_y , кН·см	472.50	525.00	500.00	450.00	500.00	600.00
	B , кН·см ²	842.41	901.79	824.68	710.80	754.85	824.46
Nastran / Тест, %	M_y	115.62	82.03	89.40	86.56	89.21	75.92
	B	102.98	112.43	125.80	104.19	107.38	117.54
Теория / Тест, %	M_y	138.03	99.71	104.47	99.84	102.50	107.17
	B	115.05	122.41	132.46	108.09	107.73	114.97

Туснин А.Р., Прокич М. Экспериментальные исследования работы балок двутаврового сечения при действии изгиба и кручения

Заключение

1. Выполнены экспериментальные и численные исследования работы балок двутаврового профиля при совместном действии изгиба и кручения вплоть до потери несущей способности элемента. Анализ поведения экспериментальных образцов подтвердил, что балки при изгибе и кручении имеют значительные резервы несущей способности по сравнению с упругой стадией работы стали. Текучесть в крайнем волокне элемента не означает потерю несущей способности балки. Специфика распределения секториальных напряжений от стесненного кручения обуславливает характер полной потери несущей способности, происходящей вследствие образования пластического шарнира в полке. Углы поворота начинают резко увеличиваться только после появления текучести на обоих краях одной полки. До того момента они незначительно отклоняются от малых значений, рассматриваемых в классической теории упругого кручения.

2. Сравнение экспериментальных и численных результатов показало, что в большинстве случаев их отличие не превышает 15 %, в одном случае максимальное отличие составило 36 %. При этом следует учитывать, что это обусловлено более ранним исчерпанием несущей способности, полученным в численном расчете, по сравнению с испытываемой конструкцией. Для всех образцов предельная нагрузка, при которой происходит потеря несущей способности, определенная экспериментально, превышает расчетное значение на 9–26 %.

3. Экспериментально установлены значительные резервы несущей способности симметричных двутавровых балок при развитии пластических деформаций и отсутствии потери местной устойчивости стенки и полок, что обосновывает необходимость более точного определения величины этих резервов. Подтверждена достоверность численных методов расчета, что дает возможность их использования, при более широком спектре параметров и соотношений действующих усилий, для разработки инженерной методики расчета балок при действии изгиба и кручения и включения этой методики в нормы по проектированию стальных конструкций.

Литература

1. Boulton N.S. Plastic twisting and bending of an I-section in which warp is restricted // *International Journal of Mechanical Sciences*. 1962. Vol. 4, Pp. 491–502.
2. Айрумян Э.Л. Особенности расчета конструкций из тонкостенных гнутых профилей // *Монтажные и специальные работы в строительстве*. 2008. №3. С. 2–7.
3. Айрумян Э.Л., Белый Г.И. Исследование работы стальной фермы из холодногнутых профилей с учетом их местной и общей устойчивости // *Промышленное и гражданское строительство*. 2010. №5. С. 41–44.
4. Рыбаков В.А., Гамаюнова О.С. Напряженно-деформированное состояние элементов каркасных сооружений из тонкостенных стержней // *Строительство уникальных зданий и сооружений*. 2013. №7(12) С. 79–123.
5. Vatin N.I., Havula J., Martikainen L., Sinelnikov A., Orlova A., Salamakhin S. Thin-walled cross-sections and their joints: tests and FEM-modelling // *Advanced Materials Research*. 2014, Vol. 945–949. Pp. 1211–1215.
6. Vatin N.I., Sinelnikov A.S. Strength and Durability of Thin-Walled Cross-Sections // *Design, Fabrication and Economy of Metal Structures: International Conference Proceedings*. 2013. Pp. 165–170.
7. Pi Y., Bradford M., Trahair N. Inelastic Analysis and Behavior of Steel I-Beams Curved in Plan // *Journal of Structural Engineering (ASCE)*. 2000. Vol. 126(7). Pp. 772–779.
8. Dinno K.S., Gill S.S. The plastic torsion of I-sections with warping restraint // *International Journal of Mechanical Sciences*. 1964. Vol. 6. Pp. 27–43.
9. Dinno K.S., Merchant W. A procedure for calculating the plastic collapse of I-sections under bending and torsion // *The Structural Engineer*. 1965. Vol. 43(7). Pp. 219–221.
10. Aalberg A. An experimental study of beam-columns subjected to combined torsion, bending, and axial actions. Dr.ing. thesis. Trondheim, 1995.
11. Becque J., Rasmussen K.J.R. Experimental investigation of local-overall interaction buckling of stainless steel lipped channel columns // *Journal of Constructional Steel Research*. 2009. Vol. 65. Issues 8–9. Pp. 1677–1684.

12. Недвига П.Н., Рыбаков В.А. Эмпирические методы оценки несущей способности стальных тонкостенных просечно-перфорированных балок и балок со сплошной стенкой // Инженерно-строительный журнал. 2009. №8(10). С. 27–30.
13. Назмеева Т.В. Несущая способность сжатых стальных тонкостенных элементов сплошного и перфорированного сечения из холодногнутого С-профиля // Инженерно-строительный журнал. 2013. №5. С. 44–51.
14. Данилов А.И., Туснина О.А. Экспериментально-теоретические исследования напряженно-деформированного состояния прогона покрытия из сэндвич-панелей // Вестник МГСУ. 2014. №11. С. 26–36.
15. Синельников А.С., Орлова А.В. Прочность просечно-растяжного профиля: испытания и математическое моделирование // Вестник МГСУ. 2013. №12. С. 41–54.
16. Ungermann, D., Lübke, S. and Brune, B. Tests and design approach for plain channels in local and coupled local-flexural buckling based on eurocode 3 // Thin-Walled Structures. 2013. Vol. 81. Pp. 108–120.
17. Туснин А.Р., Прокич М. Прочность двутавровых профилей при стесненном кручении с учетом развития пластических деформаций // Вестник МГСУ. 2014. №1. С. 75–82.
18. Туснин А.Р., Прокич М. Работа симметричных двутавровых сечений при развитии пластических деформаций и действии изгибающего момента и бимоента // Инженерно-строительный журнал. 2014. №5(49). С. 44–53.
19. Лалин В.В., Рыбаков В.А., Морозов С.А. Исследование конечных элементов для расчета тонкостенных стержневых систем // Инженерно-строительный журнал. 2011. №1(27). С. 53–73.
20. Li Z., Ádány S. Schafer B.W. Modal identification for shell finite element models of thin-walled members in nonlinear collapse analysis // Thin-Walled Structures. 2013. Vol. 67. Pp. 15–24.
21. Бычков Д.В. Строительная механика стержневых тонкостенных конструкций. М.: Госстройиздат, 1962. 475 с.
22. Власов В.З. Тонкостенные упругие стержни. М.: Физматгиз, 1959. 568 с.
23. Прокич М. Учет пластической работы материала в численных расчетах стальных двутавровых балок на кручение // Научное обозрение. №7. 2014. С. 201–205.

*Александр Романович Туснин, Москва, Россия
Тел. раб.: +7(495)2874914; эл. почта: valeksol@mail.ru*

*Милан Прокич, Москва, Россия
Тел. моб.: +7(925)1751964; эл. почта: prokic@mail.ru*

© Туснин А.Р., Прокич М., 2015

doi: 10.5862/MCE.53.3

Experimental research of I-beams under bending and torsion actions

A.R. Tusnin*Moscow State Civil Engineering University, Moscow, Russia*

+74952874914; e-mail: valeksol@mail.ru

M. Prokic*Moscow State Civil Engineering University, Moscow, Russia*

+79251751964; e-mail: prokic@mail.ru

Key words

I-beam; warping torsion; bending; tests; numerical calculations; bearing capacity

Abstract

The article presents the results of the theoretical and experimental research of I-beam behavior under combined bending and torsion. The analysis of numerical models was carried out, including calculations in which the physical and geometrical nonlinearity was taken into account. Based on the calculations, the parameters of experimental models and the value of the applied loads were determined.

The samples were tested under the bending and torsion actions up to moment the element lost its bearing capacity completely. The experimental results were compared to the theoretical and numerical calculations.

Correspondence between theoretical and experimental results was established (as a rule, the difference does not exceed 15%). The accuracy of the applied numerical methods for the analysis of beams under bending and torsion with due consideration of plastic deformation development was confirmed, which allows using them for developing engineering methods of beam calculating.

References

1. Boulton N.S. Plastic twisting and bending of an I-section in which warp is restricted. *International Journal of Mechanical Sciences*. 1962. Vol. 4, Pp. 491–502.
2. Airumyan, E.L. Osobennosti rascheta konstruksiy iz tonkostennykh gnutnykh profiley [Features of structural analysis of thin-walled cold-formed sections]. *Montazhnye i spetsialnyye raboty v stroitelstve*. 2008. No. 3. Pp. 2–7. (rus)
3. Airumyan, E. L., Belyj G. I. Issledovanie raboty stalnoy fermy iz holodnognutnykh profiley s uchetom ih mestnoy i obshhey ustoychivosti [Investigation of Operation of a Steel Truss Made of Cold-Formed Sections Taking into Account Their Local and General Stability]. *Industrial and Civil Engineering*. 2010. No. 5. Pp. 41–44. (rus)
4. Rybakov V.A., Gamayunova O.S. Napryazhenno-deformirovannoye sostoyaniye elementov karkasnykh sooruzheniy iz tonkostennykh sterzhney [The stress-strain state of frame constructions' elements from thin-walled cores]. *Journal of Construction of Unique Buildings and Structures*. 2013. No. 7(12). Pp. 79–123. (rus)
5. Vatin N.I., Havula J., Martikainen L., Sinelnikov A., Orlova A., Salamakhin S. Thin-walled cross-sections and their joints: tests and FEM-modelling. *Advanced Materials Research*. 2014. Vol. 945–949. Pp. 1211–1215.
6. Vatin N.I., Sinelnikov A.S. Strength and Durability of Thin-Walled Cross-Sections. *Design, Fabrication and Economy of Metal Structures: International Conference Proceedings*. 2013. Pp. 165–170.
7. Pi Y., Bradford M., Trahair N. Inelastic Analysis and Behavior of Steel I-Beams Curved in Plan. *Journal of Structural Engineering (ASCE)*. 2000. Vol. 126(7). Pp. 772–779.
8. Dinno K.S., Gill S.S. The plastic torsion of I-sections with warping restraint. *International Journal of Mechanical Sciences*. 1964. Vol. 6. Pp. 27–43.
9. Dinno K.S., Merchant W. A procedure for calculating the plastic collapse of I-sections under bending and torsion. *The Structural Engineer*. 1965. Vol. 43(7). Pp. 219–221.
10. Aalberg A. *An experimental study of beam-columns subjected to combined torsion, bending, and axial actions*. Dr.ing. thesis. Trondheim, 1995.

11. Becque J., Rasmussen K.J.R. Experimental investigation of local-overall interaction buckling of stainless steel lipped channel columns. *Journal of Constructional Steel Research*. 2009. Vol. 65. Issues 8–9. Pp. 1677–1684.
12. Nedviga P.N., Rybakov V.A. Empiricheskiye metody otsenki nesushchey sposobnosti stalnykh tonkostennykh prosechno-perforirovannykh balok i balok so sploshnoy stenкой [Estimation of load carrying capacity of the steel thin-walled dinking punched beams and beams with a continuous wall by empirical methods]. *Magazine of Civil Engineering*. 2009. No. 8(10). Pp. 27–30. (rus)
13. Nazmeeva T.V. Nesushchaya sposobnost szhatykh stalnykh tonkostennykh elementov sploshnogo i perforirovannogo secheniya iz kholodnognutogo S-profilya [Bearing capacity of compressed continuous and perforated thin-walled steel members of C-shaped cold-formed profiles]. *Magazine of Civil Engineering*. 2013. No. 5(40). Pp. 44–51. (rus)
14. Danilov A.I., Tusnina O.A. Eksperimentalno-teoreticheskiye issledovaniya napryazhenno-deformirovannogo sostoyaniya progona pokrytiya iz sendvich-paneley [Experimental and theoretical studies into the stress-strain state of the purlin supported by sandwich panels]. *Proceedings of Moscow State University of Civil Engineering*. 2014. No.11. Pp. 26–36. (rus)
15. Sinelnikov A.S., Orlova A.V. Prochnost prosechno-rastyazhnogo profilya: ispytaniya i matematicheskoye modelirovaniye [Strength of the expandedstretching profile: tests and mathematical modeling]. *Proceedings of Moscow State University of Civil Engineering*. 2013. No.12. Pp. 41–54. (rus)
16. Ungermann, D., Lübke, S. and Brune, B. Tests and design approach for plain channels in local and coupled local-flexural buckling based on eurocode 3. *Thin-Walled Structures*. 2013. Vol. 81. Pp. 108–120.
17. Tusnin A.R., Prokic M. Prochnost dvutavrovnykh profiley pri stesennom kruchenii s uchetom razvitiya plasticheskikh deformatsiy [Resistance of i-beams in warping torsion with account for the development of plastic deformations]. *Proceedings of Moscow State University of Civil Engineering*. 2014. No.1. Pp. 75–82. (rus)
18. Tusnin A.R., Prokic M. Rabota simmetrichnykh dvutavrovnykh secheniy pri razvitiy plasticheskikh deformatsiy i deystvii izgibayushchego momenta i bimomenta [Behavior of symmetric steel I-sections under combined bending and torsion actions allowing for plastic deformations]. *Magazine of Civil Engineering*. 2014. No.5(49). Pp. 44–53. (rus)
19. Lalin V.V., Rybakov V.A., Morozov S.A. Issledovaniye konechnykh elementov dlya rascheta tonkostennykh sterzhnevnykh sistem [The finite elements research for calculation of thin-walled bar systems]. *Magazine of Civil Engineering*. 2012. No. 1(27). Pp. 53–73. (rus)
20. Li Z., Ádány S. Schafer B.W. Modal identification for shell finite element models of thin-walled members in nonlinear collapse analysis. *Thin-Walled Structures*. 2013. Vol. 67. Pp. 15–24.
21. Bychkov D.V. *Stroitel'naya mekhanika sterzhnevnykh tonkostennykh konstruktsiy* [Structural Mechanics core thin-walled structures]. Moscow: Gosstroyizdat, 1962. 475 p. (rus)
22. Vlasov V.Z. *Tonkostennyye uprugiyе sterzhni* [Thin-walled elastic rods]. Moscow: Fizmatgiz, 1959. 568 p. (rus)
23. Prokic M. Uchet plasticheskoy raboty materiala v chislennykh raschetakh stalnykh dvutavrovnykh balok na krucheniiye [Accounting plastic material works in the numerical calculations of steel I-beams in torsion]. *Science Review*. 2014. No. 7. Pp. 201–205. (rus)

Full text of this article in English: pp. 24–31