# Федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего образования САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКИЙ ПОЛИТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ ПЕТРА ВЕЛИКОГО

На правах рукописи

#### Котов Виталий Владимирович

### АКТИВНОЕ ПОДАВЛЕНИЕ КОЛЕБАНИЙ УПРУГИХ СИСТЕМ НА ОСНОВЕ БИОМОРФНОГО ПОДХОДА

Специальность 05.13.18 Математическое моделирование, численные методы и комплексы программ

ДИССЕРТАЦИЯ

на соискание учёной степени кандидата технических наук

Научный руководитель Арсеньев Дмитрий Германович

доктор тех. наук, профессор

## Содержание

Введение	•••••••••••••••••••••••••••••••••••••••	4
Глава 1. С	Обзор технологий подавления колебаний распределённ	ых объектов
•••••	•••••••••••••••••••••••••••••••••••••••	14
1.1 Осно	овные цели и принципы теории автоматического управлен	ия 14
1.2 Сист	гемы управления распределёнными объектами	15
1.2.1	Пассивные системы управления	15
1.2.2	Активные системы управления	18
1.2.3	Полуактивные системы управления	20
1.2.4	Гибридные системы управления	26
1.3 Опти	имальные и робастные алгоритмы управления	29
1.4 Пода	авление колебаний упругих систем с помощью модального	управления
		41
1.5 Вы	воды	45
Глава 2. N	Моделирование и анализ случайных процессов	48
2.1 Крат	гкое описание физических процессов	49
2.2 Осно	овные характеристики случайных процессов	52
2.3 Мето	оды моделирования случайных процессов	54
2.4 Анал	пиз физических процессов	62
2.5 Выво	ОДЫ	74
Глава 3. У	Управление упругим механическим объектом на основе	•
использов	вания биоморфных алгоритмов	76
3.1 Опи	исание системы управления	76

3.2 Биоморфное подавление колебаний упругой балки вызвання	ых внешним
гармоническим воздействием	84
3.3 Биоморфное подавление колебаний упругой балки вызванны	х внешним
стохастических воздействием	108
3.4 Реализация алгоритма биоморфного управления	118
3.5 Биоморфное управление вращением привода с упругой кинет	матической
цепью	120
3.6 Практическая реализация биоморфного управления на учебн	ой
экспериментальной установке	127
3.7 Выводы	134
Глава 4. Влияние параметров биоморфных алгоритмов на качо	ество
управления случайными колебаниями шарнирно опёртой баль	си 136
4.1 Поиск оптимального критерия качества управления колебани	ИМК
модельного объекта	136
4.2 Оптимизация с помощью линейно-квадратичного регулятора	
4.3 Синтез оптимальных и квазиоптимальных алгоритмов на осн	юве
биоморфного подхода	146
4.4 Выводы	155
Заключительные выводы	157
Список литературы	159

#### Введение

**Актуальность темы.** Постоянное увеличение количества строительных конструкций, находящихся в эксплуатации и применение новых материалов приводит к усложнению технологий строительства. Как отмечал архитектор Канчелия - единственным надёжным инженерным сооружением является пирамида. Решить эту фундаментальную проблему техники и технологии можно с помощью управляемых конструкций, где надёжность будет обеспечиваться за счёт непрерывного управления состоянием конструкции.

При управлении распределёнными объектами сложной структуры мехатронике применяется подход, связанный с анализом собственных частот и форм колебаний и последующей расстановкой приводов в узлах и пучностях таким образом, чтобы можно было обеспечить максимум снижение амплитуды колебаний в заданном частотном диапазоне. Такой подход является одним из основных в мехатронике. Вместе с тем он не позволяет решать задачи мехатроники как типовые, так как для каждого конкретного объекта требуется проведение длительного численного и экспериментального исследования для определения мест расположения приводов и датчиков. Это мешает широкому внедрению методов управления распределёнными объектами. Вместе с тем задача борьбы случайными колебаниями co широкополосными механических строительных конструкций в связи с увеличением внешнего воздействия на них, требует более точного управления. В этой связи актуальным является разработка нового подхода к управлению распределёнными механическими объектами, с использованием современных методов теории управления, основанных на управляемых систем. проведении декомпозиции Эти методы существенное развитие в работах М. Г. Захарова, Т. Ю. Захаровой, А. А. Первозванского и других учёных.

Идеология разделения управления упругим объектом на управление отдельными модами была сформулирована как модальный контроль еще в 60-х

годах 20 века в работе L. A. Gould и M. A. Murray-Lasso и развита такими учёными как В. Porter, T. R. Crossley и L. Meirowitch. Были проведены успешные эксперименты по реализации такого подхода с помощью активных электронных систем управления.

Между тем, робастность модального управления не исследовалась. Более того в статьях U. Stöbener и L. Gaul, G.E. Stavroulakis, G. Foutsitzi, E. Hadjigeorgiou, D. Marinova, C.C. Baniotopoulos, посвященных управлению упругими объектами, оптимизация коэффициентов усиления и структуры обратных связей на основании  $H_2$  и  $H_\infty$  критериев указана как наиболее робастная. Сравнение с результатами модального контроля показывает, что применение уменьшить оптимальных критериев позволяет ошибку стабилизации конструкций. При этом сравнение проводится для систем с относительно небольшим числом датчиков и возбудителей. Эти результаты привели к тому, что при синтезе систем управления упругими объектами, в основном, используется оптимальное управление с локальными обратными связями. Производится оптимизация параметров регуляторов, соединяющих каждый датчик со своим возбудителем. Расположение датчиков оптимизируется, чтобы ДЛЯ ΤΟΓΟ, минимизировать их количество. С другой стороны, в результате такой минимизации любой отказ датчиков или зашумление их сигналов могут приводить к существенным нарушениям в системе виброзащиты, поэтому для практических задач необходимы именно робастные алгоритмы управления, устойчивые к помехам, изменениям параметров управляемого объекта и системы управления.

В качестве такого робастного алгоритма предлагается биоморфный подход, при котором поведение механического объекта представляется подобным поведению биологического объекта с учётом всех его преимуществ с точки зрения теории управления. Реализация алгоритма биоморфного управления происходит в несколько этапов. Как правило, модель объекта неизвестна. Для ее построения необходимо провести идентификацию объекта. Расстановку датчиков

и приводов можно проводить в соответствии с мехатронными соображениями, это позволит экономить как на самой системе управления, так и на энергозатратах при регулировании. Таким образом, первый этап — построение моделей и проектирование системы управления. Вторым этапом должно стать определение собственных форм движения. На третьем этапе необходимо построить матрицу, столбцами которой является комбинация управляющих воздействий, создающая в управляемом объекте собственную форму с номером, равным номеру столбца.

После определения всех параметров можно вести управление по произвольному числу модулей форм (обратных связей), ориентируясь, например, на точность управления. Причем подключать и отключать дополнительные обратные связи можно динамически в процессе управления, что позволяет получать новые эффекты. Например, при увеличении уровня шумов можно отключить высокочастотные формы для большей устойчивости системы.

В диссертационной работе приводятся результаты моделирования биоморфного управления при гашении гармонических И стохастических колебаний шарнирно опёртой балки. Для моделирования случайных колебаний были проанализированы современные математической подходы теории случайных процессов, описание которой можно найти в работах А. С. Шалыгина, Ю. И. Палагина, М. Ф. Диментберга, В.С. Пугачева, Марпла, Дж. Бендата и А. Пирсола.

Цель и задачи исследования. Цель диссертационной работы состоит в эффективных математической модели биоморфных создании алгоритмов активного управления упругими механическими системами, а также в разработке обеспечения вычислительных методов И программного ДЛЯ получения количественных характеристик рассматриваемых явлений и процессов. Для достижения этой цели необходимо решить ряд важных задач механики, теории управления и вычислительной математики. Одна из таких задач связана с моделированием широкополосных математическим колебаний рассматриваемых механических систем. В общем случае их движение описывается системами нелинейных обыкновенных дифференциальных уравнений и уравнений с частными производными. Другая задача работы состоит в построении оптимальных робастных алгоритмов подавления случайных колебаний и исследовании влияния параметров построенных алгоритмов на качество управления.

**Научная новизна полученных результатов** определяется следующими положениями:

- 1. Для активного подавления случайных колебаний упругого объекта предложен биоморфный алгоритм на базе модального подхода.
- 2. Разработан комплекс программ для проведения вычислительного эксперимента, основанный на реализации биоморфного алгоритма.
- 3. Исследована и показана робастность биоморфного алгоритма подавления случайных колебаний механического объекта, в качестве которого была взята математическая модель балки Бернулли.
- 4. Создана математическая модель робастного квазиоптимального управления колебаниями распределённых систем на базе биоморфного подхода.
- 5. В ходе исследования были выявлены преимущества последовательной оптимизации при биоморфном контроле по сравнению с другими методами синтеза оптимального управления.

**Практическое значение полученных результатов.** Разработанная в данной диссертационной работе математическая модель активного управления упругими механическими системами была использована при создании экспериментальной установки по активному гашению вибраций упругой балки, которая впоследствии была внедрена в учебный процесс университета Иоганна Кеплера в г. Линц (Австрия).

Помимо этого одной из интересных прикладных задач, в которой могут быть использованы результаты работы, является сейсмическая защита стратегических и гражданских строительных объектов от сильных землетрясений. Длительный

период возвращения сильных землетрясений ставит вопрос о надёжности системы и вообще ограничивает применимость стратегии управления сейсмической защиты структур и инфраструктур. Действительно, система управления требует идеальной работы в (непредсказуемый) момент, когда сейсмические события продолжаются в течение длительного времени. Кроме того, сильные сейсмические события влекут за собой серьезные требования контроля, которые система не всегда в состоянии удовлетворить.

Другой актуальной задачей применения исследуемых подходов является управление случайными колебаниями различного вида кабелей и тросов, которые, например, имеют широкое применению в конструкции подвесных мостов. Эффективный подход к управлению динамикой кабеля до сих пор отсутствует. Кабели показывают сложное поведение в основном благодаря внутренним резонансам и нелинейным связям. Они не только поддерживают вес основной части моста и движущихся по ней транспортных средств, но также подвергаются динамическим нагрузкам из-за ветра или дождя. Вибрации кабеля в вантовых мостах, особенно с большой амплитудой, спровоцированные ветром и дождём, приводили к серьёзным проблемам таким, как разрушение стальных проводов, повреждения мест поддержки кабеля или неисправности систем защиты от его коррозии, приводящие к уменьшению срока службы работы кабеля, как поддерживающей структура. Снижение колебаний кабеля из стальной проволоки является важным фактором, способствующим повышению безопасности и надёжности мостов вантового типа.

Существует целый ряд задач, приложение в которых может найти предлагаемый в данной работе подход, посвящённых управлению программируемыми роботами и различного рода манипуляторами. Манипулятор, с точки зрения механики и теории механизмов, - это сложный пространственный управляемый объект с несколькими степенями свободы, содержащий жёсткие и упругие звенья, передачи и приводы. Специфика задач механики роботов состоит в том, что роботы являются управляемыми системами и к ним предъявляются

требования быстродействию при высокие ПО точности И реализации исполнительным механизмом самых различных условий движения объекта. Первой задачей такого рода является определение статических ошибок робота, то есть ошибок позиционирования, вызываемых деформациями упругих звеньев под действием статических нагрузок, в первую очередь сил тяжести. При решении траекторных задач и задач контурного управления становится необходимым определением динамических ошибок, возникающих в процессе движения робота и вызванных упругостью его звеньев. Что является очень важным фактором при управлении подобными механическими системами.

Если рассматривать морскую тематику, то здесь отличным примером может служить задача подавления случайных широкополосных колебаний нефте- и газодобывающих платформ, находящихся в открытом море. Эти платформы, как правило, испытывают различные возмущения, приходящие от волн, подводных течений, ветра, льда и землетрясений. Эти внешние нагрузки неизбежно вызывают большие непрерывные вибрации, которые создают в платформах деформации, усталостные повреждения и даже потерю устойчивости. Для предотвращения усталостных повреждений и сохранения безопасности и продуктивной эффективности, колебания платформ должны быть сильно ограничены. Для этой цели в настоящее время было исследовано и применено большое количество различных подходов активного управления.

Построенные в данной диссертационной работе квазиоптимальные биоморфные алгоритмы подавления широкополосных случайных колебаний помимо того, что могут быть использованы в вышеописанных прикладных задачах, также имеют большое практическое значение с точки зрения математического моделирования, численных методов и комплексов программ.

**Личный вклад соискателя.** Все результаты, которые выносятся на защиту, получены соискателем лично. Статья [3] опубликована в соавторстве с Д. Г. Арсеньевым, В. А. Полянским и Н. А. Смирновой, статьи [6, 7] - в соавторстве с А. К. Беляевым, В. А. Полянским и Н. А. Смирновой, а статья [9] опубликована в

соавторстве с Д. Г. Арсеньевым, В. А. Полянским. Автором диссертационной работы проведён корреляционный анализ математической модели внешнего воздействия, приложенного к рассматриваемому модельному объекту, разработан алгоритм применения математической модели классического подхода поиска оптимального регулятора для случая локального и биоморфного управлений колебаниями упругого объекта и исследовано влияние параметров построенных алгоритмов на качество управления рассматриваемой системы. Автором диссертации также был проведён сравнительный анализ результатов моделирования подавления вибраций механического объекта различными подходами управления.

#### На защиту выносятся следующие положения:

- 1. Математическая модель биоморфных алгоритмов управления и описание численного метода проведения декомпозиции системы управления;
- 2. Результаты моделирования подавления гармонических колебаний механического объекта с помощью биоморфных алгоритмов управления, реализованных в программном комплексе Matlab;
- 3. Сравнение результатов моделирования биоморфного управления с результатами управления при использовании стандартного мехатронного подхода;
- 4. Результаты моделирования подавления случайных колебаний модельного объекта с помощью биоморфных алгоритмов управления и их сравнение с результатами управления при использовании стандартного мехатронного подхода;
- 5. Результаты исследования робастности биоморфных алгоритмов управления при неточности задания параметров системы управления;
- 6. Математическая модель алгоритма синтеза оптимального (линейный квадратичный регулятор) и квазиоптимального (биоморфное управление) подходов управления и результаты её применения для

подавления случайных широкополосных колебаний модельного объекта.

Достоверность всех полученных в диссертации результатов подтверждается строгой математической постановкой задачи с использованием общепринятых обыкновенных дифференциальных уравнений из теории колебаний упругих тел, соотношений теории автоматического управления, методов анализа из теории случайных процессов.

**Апробация результатов диссертации.** Основные результаты диссертационной работы были представлены на следующих конференция и научных форумах:

- Шестой всероссийский форум студентов, аспирантов и молодых учёных «Наука и инновации в технических университетах», Санкт-Петербург (Россия), 09-12.10.2012;
- Научно-практическая конференция с международным участием «XLI Неделя науки СПбГПУ», Санкт-Петербург (Россия), 03-08.12.2012;
- International Summer School-Conference «Advanced Problems in Mechanics», Saint-Petersburg (Russia), 01-06.07.2013;
- Научно-практическая конференция с международным участием «XLII Неделя науки СПбГПУ», Санкт-Петербург (Россия), 02-07.12.2013. Было представлено два доклада на двух разных секциях;
- Международный молодёжный научный форум «Ломоносов». XXI Международная конференция студентов, аспирантов и молодых учёных «Ломоносов», Москва (Россия), 07-11.04.2014.
- 7-я Российская мультиконференция по проблемам управления, Санкт-Петербург (Россия), 07-09.10.2014.

**Публикации.** По теме диссертации опубликовано 9 работ [1-9], из которых 3 [3, 6, 9] в виде статей в ведущих специализированных научных журналах, рекомендованных ВАК.

**Объём и структура работы.** Диссертация состоит из введения, четырёх глав, заключительных выводов и списка литературы. Объём диссертации составляет 177 страниц машинописного текста с 87 рисунками. Список литературы содержит 175 наименований.

Во **введении** кратко сформулированы актуальность темы, цели и задачи исследования, а также практическое значение полученных результатов. Приводится обзор структуры разделов диссертации.

**Первая глава** диссертационной работы посвящена обзору существующих методик подавления широкополосных случайных колебаний распределённых объектов. Приводится краткое описание систем и стратегий управления с примерами их применения на практике и ссылками на соответствующие научные статьи, монографии и учебники.

Во второй главе даётся описание моделирования случайных процессов и методов их оценивания с помощью спектрального и корреляционного анализа. Указываются недостатки современных приближённых методов моделирования случайных процессов, и приводится моделирования процесса в виде суммы большого числа гармонических функций с Далее разными частотами. обосновывается его пригодность в качестве широкополосного случайного внешнего воздействия с помощью стандартных функций программного комплекса Matlab.

Постановка задачи, определение основы биоморфных алгоритмов управления и описание модельного объекта приводится в **третьей главе**. В ней рассказывается о проведении декомпозиции рассматриваемой системы с целью улучшения её обусловленности и тем самым упрощения её решения. Вводится понятие биоморфного алгоритма управления и приводятся результаты его применения на модельном объекте. Для выявления эффективности данного алгоритма, производится сравнение результатов его применения с результатами применения стандартного мехатронного подхода, основанного на замыкании контуров обратной связи. Сравнение происходит как для случая внешнего

воздействия на модельный упругий механический объект в виде одиночной гармонической функции, так и для случая суммы гармонических функции, отражающих приближённую картину реального внешнего случайного широкополосного Также робастности шума. проводится исследование биоморфного алгоритма управления при моделировании неточности идентификации системы управления.

четвёртой главы составляет описание методов оптимизации управления и наиболее параметров систем выявление пригодных ДЛЯ биоморфных алгоритмов. Выбранный метод, основанный на применении линейно-квадратичного регулятора, также используется ДЛЯ подавления случайных вибраций модельного объекта. Результаты последовательной оптимизации в дальнейшем анализируются для установления количества форм колебаний, которые можно подавлять с помощью рассматриваемого оптимального (линейный квадратичный регулятор) И квазиоптимального (биоморфное управление) подходов управления.

В заключении сформулированы основные выводы по результатам диссертационной работы.

# Глава 1. Обзор технологий подавления колебаний распределенных объектов

#### 1.1 Основные цели и принципы теории автоматического управления

Управление состоит в том, чтобы, на какой-либо объект оказывая воздействие, изменять протекающие В нём процессы ДЛЯ достижения определённой цели. Управление является автоматическим, если оно осуществляется без вмешательства человека cпомощью специальных технических устройств. Разработка общих принципов создания этих устройств и является основной задачей теории автоматического управления. Теория должна давать единую базу для решения задач управления объектами различной физической, химической или биологической природы.

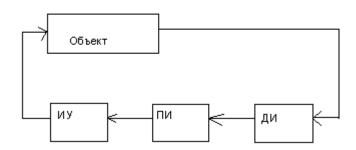


Рисунок 1.1Типичная схема систем управления

В соответствии с этим любая система управления строится на основе трёх функциональных блоков (рисунок 1.1). Первый блок состоит из устройств, позволяющих получать информацию о текущих значениях управляемых процессов (или других процессов в объекте, связанных с управлением). Этот блок называют измерительным или блоком датчиков информации (ДИ). В ходе функционирования этого блока выдаются информационные сигналы. Эти сигналы поступают во второй блок - преобразования и хранения информации (ПИ), где на

их основе, а также на основе заранее заложенных сведений (априорной информации) вырабатываются сигналы управления. Правило (алгоритм) преобразования информационных сигналов в сигналы управления называется законом управления. Сигнал управления показывает, каким должно быть управляющее воздействие в текущий момент времени. Чтобы выработать это воздействие, превратить сигнал в механическое усилие или поток тепла, или поток вещества, требуется ещё один блок – исполнительное устройство (ИУ).

Как видно из рисунка 1.1, совокупность перечисленных блоков образует замкнутый контур, охватывающий объект управления. Поэтому систему, где присутствуют все эти блоки, часто называют замкнутой системой, или системой управления с обратной связью от управляемых процессов к управляющим воздействиям. Иногда, однако, используются и более простые разомкнутые системы, где отсутствуют датчики информации, а функции преобразователя информации сводятся лишь к хранению и выдаче выработанной программы управления с требуемыми в каждый момент времени значениями сигнала управления.

#### 1.2 Системы управления распределёнными объектами

Современные системы управления распределёнными объектами можно условно разделить на пассивные, активные, полуактивные и гибридные [10, 11].

#### 1.2.1 Пассивные системы управления

Пассивный контроль относится к системам, которые не требуют внешнего источника питания. Типичным примером такого контроля может служить изоляция основания управляемой конструкции, дополнительные амортизаторы конструкций или системы настраиваемых массовых амортизаторов (Tuned Mass

Dampers, TMD) [12]. На рисунке 1.2 схематично представлены примеры данных систем.

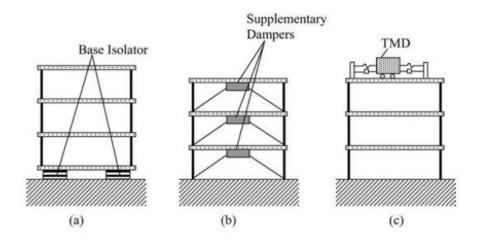


Рисунок 1.2 Примеры пассивных систем управления: изоляция основания управляемой конструкции (а), дополнительные амортизаторы конструкций (b), TMD (c)

При помощи изоляции основания от поверхности земли, подверженной сейсмическим возбуждениям, пытаются сократить вибрации строительной Сейсмическая обычно конструкции. изоляция систем применяется относительно массивных строений, имеющих различное чувствительное оборудование внутри. Например, компьютерные центры, операторные центры службы спасения, больницы, помещения с установками, использующие атомную энергию и различные исторические сооружения. Однако эти системы изоляции обычно огромные, тяжёлые и, конечно же, очень дорогие.

Настраиваемые массовые амортизаторы (Tuned Mass Dampers, TMD) имеют фиксированную частоту и демпфирующие характеристики и могут быть использованы для настройки только заданной фиксированной частоты колебаний, обычно основной частоты колебаний конструкций [13]. ТМD системы были разработаны как инновационные системы пассивного управления колебаниями строительных конструкций в 1970-х годах. С тех пор, они встраиваются во многие высотные здания. Первым зданием в соединённых штатах, которое было

спроектировано с изначальной установкой в него TMD, является 70-ти этажная башня в Чикаго, строительство которой было завершено в 2000 году. Второе по высоте в мире здание, Таіреі 101, также использует TMD систему с 660 метровым стальным маятником, предотвращающим боковые смещения здания, возникающие из-за сильных порывов ветра.

Оптимальное управление с помощью нерегулярной установки массовых амортизаторов для управления вибрациями моста исследовано в работе [14] с учётом надёжности управляющих устройств. Результатом моделирования процессов является определение параметров пассивных устройств, которые налагают некоторые устойчивые требования к нарушению настройки частоты и максимизируют процентное увеличение определённых вполне характеристических значений критической скорости вибраций. В статье [15] с помощью численного моделирования и экспериментального исследования оценивается эффективность амортизаторов, имеющих возможность запоминать свою форму при определённых условиях (shape memory alloy, SMA), которые располагают на кабелях для гашения их колебаний.

Несмотря на 25 летнюю практику применения, ТМD системы всё же имеют несколько недостатков. Во-первых, невозможно точно вычислить основную частоту колебаний конструкции. Во-вторых, эта частота меняется в течение динамического воздействия. ТМD системы могут быть частично эффективны, когда основная частота конструкции доминирует над откликом на колебания от простых (упорядоченных) нагрузок. ТМD системы не являются эффективными для нерегулярных конструкций, находящихся под действием движения земли, когда несколько разных форм колебаний могут быть значительными для динамического отклика конструкции.

Таким образом, пассивные системы способны автономно гасить вибрации конструкций, но только определённой частоты. Поэтому многие инженеры и

исследователи занялись разработкой других систем управления, исключающих недостатки пассивного контроля.

#### 1.2.2 Активные системы управления

Одним из ранних подходов в области активного управления колебаниями конструкций является система активных настраиваемых массовых амортизаторов (Active Tuned Mass Dampers, ATMD). Также известных, как активные массовые Mass В **ATMD** (Active Drivers. AMD). приводы системе актуатор, TMD устанавливаемый между конструкцией и системой, прикладывает спрограммированное воздействие в режиме реального времени. Wu и Yang [16] обсуждали использование ATMD системы, состоящей из трёх актуаторов, для управления движением 310 метровой телебашни в Китае, спровоцированного порывами ветра. Үап и его соавторы [17] представили выражения для требуемого силового управляющего воздействия, которое нужно приложить к ATMD системе в высотном прямоугольном здании, колеблющимся из-за ветровой нагрузки.

Уататото [18] представил результаты управления с помощью ATMD систем, установленных в четырёх стальных рамках в реальном высотном здании в Японии, примерно на высоте от 58 до 190 метров (11-34 этажи). Для проверки систем управления, он провёл вибрационные тесты здания ещё до завершения его строительства, используя ATMD систему в качестве возбудителя вибраций здания. Автор также наблюдал за реакцией зданий подверженных небольшой сейсмической и ветровой нагрузкам. Его результаты показали эффективность работы установленных ATMD в качестве гасителей колебаний зданий.

Li и др. [19] исследовали управление двумерной моделью оффшорной платформы, снабжённой ATMD и подверженной нагрузкам со стороны волн. Они обнаружили, что ATMD система работает лучше, чем пассивная TMD система. Lee и Wang [20] тестировали эффективность ATMD системы при работе

сервомотора и пропеллера для управления 2D пятиэтажной конструкцией. Ikeda и др. [21] обсуждали ATMD систему, непосредственно установленную в 10-ти этажное здание со стальным каркасом в Токио в 1989 году. С момента установки данной системы, здание было подвержено нагрузкам со стороны реального землетрясения и тайфуна. На 26% и 11% были сокращены продольные и поперечные вибрации в течение землетрясения, и на 33% сокращёна амплитуда пиковой реакции на ветровую нагрузку.

Adeli и Saleh [22, 23, 24] представили численную модель для активного различным управления большими конструкциями, подверженных типам динамических нагрузок таких, как взрыв, ветер или землетрясение, используя распределённые актуаторы. Hanagan и Murray [25] использовали актуаторы для подавления напольных вибраций зданий, спровоцированных передвижениями людей. Они взяли полномасштабную модель типичного пола в здании офиса и выяснили, что численные и физические эксперименты показывают, что вибрации пола могут быть эффективно погашены. Соответственно, Hanagan [26] представил метод оптимального расположения актуаторов и сенсоров для сокращения вибраций в напольных системах. В течение нескольких воздействий, актуатор перестаёт производить достаточную силу для противодействия движению конструкции. В таком случае говорят, что актуатор насыщен. В работах [27, 28, 29] изучали эффект насыщения актуатора на примере 2D шести этажного здания и насыщенные стабильности выяснили, что актуаторы не наносят вреда конструкции здания.

Bossens и Preumont [30] применяли систему активного сухожилия, используя либо гидравлические или пьезоэлектрические актуаторы для управления колебаниями двух разных по масштабу моделей подвесного моста, находящегося под ветровой нагрузкой [31]. Активные сухожилия представляют собой предварительно растянутые нитями, устанавливаемые между основаниями конструкции или на концах тросов подвесных мостов или опорах. Актуаторы

используются для регулирования уровня натяжения тросов, таким образом, контролируя амплитуду управляющего воздействия, приложенного к конструкции. Rodellar [32] представил схему управления активным сухожилием для 143 метрового подвесного пешеходного моста, подверженного землетрясению. Система активного сухожилия была вполне пригодна для подавления колебаний моста.

Многие исследователи предлагали метол управления, активного использующий актуаторы связанных зданий. В этом подходе два здания соединены между собой и соответствующая жёсткость одного помогает управлять реакцией другого. В добавление к актуаторам, этот уровень контроля может быть усилен. Christenson и др. [33] исследовали эффект активной связи двух высотных строительных сооружений разной высоты и формы, используя гидравлический актуатор, соединённый с конструкциями в одной точке. Ying и др. [34] используя устройство активного управления, выяснили, что при соединении 10 этажей конструкций управление эффективнее, чем при соединении 8 или 6 этажей. Song [35, 36] анализировал два 20 этажных здания соединённые через актуаторы и подверженные случайной нагрузке со стороны землетрясения. Он выяснил, что связь между зданиями сократила на 69% перемещения верхних этажей.

В итоге активные системы типа ATMD, распределённых актуаторов, систем активного сухожилия и связанных зданий на практике показали эффективность своей работы в качестве гасителей колебаний различных строительных сооружений, однако для их работы необходим постоянный источник энергии извне.

#### 1.2.3 Полуактивные системы управления

Как было сказано выше, недостатком активных систем управления является требуемый для него значительный источник энергии. Полуактивные системы

управления нуждаются в ограниченной энергии и вполне нормально могут питаться от аккумулятора.

Один из подходов полуактивного управления основан на использовании амортизаторов с магнитореологической жидкостью (Magnetorheological, MR). Эти амортизаторы используют MR жидкости, которые производят большие демпфирующие силы в системах типа поршень-цилиндр, которые могут контролироваться изменением потока к амортизатору в режиме реального времени. В случае потери энергии, амортизатор с MR жидкостью действует, как пассивный амортизатор, таким образом, поддерживая некоторую виброзащиту.

Jung и др. [37] использовали MR амортизаторы для управления колебаниями подвесных мостов, подверженных землетрясению. Модель моста в штате Миссури была исследованного в работе [38]. Реальный мост длиной 633 м имеет две подвесные башни. Двадцать четыре амортизатора с MR жидкостью, каждый с производительностью в 1000 кН, были установлены в четырёх разных местах между полотном моста, пирсами и внешними поддержками вдоль моста. После приложения к мосту нагрузок в виде трёх разных землетрясений, авторы заключили, что MR амортизаторы являются жизнеспособным вариантом для управления вибрациями моста. Moon и др. [39] применили конечно-элементный анализ к стандартному подвесному мосту, снабжённому 24 MR амортизаторами. Авторы также заключили после серии испытаний с приложением нагрузки к мосту в виде землетрясения, что данный вид полуактивного управления вполне эффективен и может сравниться с активными системами гидравлических приводов. Hiemenz и др. [40] использовали MR амортизаторы в активных креплениях для подавления вибраций 2D масштабной модели 60 метровой 3-х этажной конструкции, подверженной землетрясению. Sodeyama и др. [41] построили два MR амортизатора мощностью 20 и 200 кH, которые использовали механизм с отверстием типа байпас, и определили их демпфирующие свойства экспериментально и аналитически. В работах [42-45] также подтверждают

эффективность полуактивных MR амортизаторов по сравнению с их пассивными аналогами в своей работе, посвященной исследованию подавления колебаний масштабных моделей зданий с возвышающейся структурой. Установка MR управляющих устройств также обсуждается в работах [46-56].

Помимо амортизаторами с MR жидкостью широкое применение также получили полуактивные амортизаторы жёсткости (Semi-Active Stiffness Dampers, SASD), которые состоят из заполненного жидкостью цилиндра, поршня и управляемого мотором клапана. Мотор регулирует открывание клапана, таким образом, контролируя поток вязкой жидкости (обычно масло) и регулируя коэффициент демпфирования в режиме реального времени. Patten и др. [57] представил своего рода пособие по SASD, а Jabbari и Bobrow [58] использовали восстанавливающиеся полуактивные амортизаторы жёсткости (Resetting Semi-Active Stiffness Dampers, RSASD) для управления 2D 3-х этажной конструкции, подверженной случайным воздействиям. Эта система работает с помощью добавления жёсткости системе, когда клапан закрыт и рассеивания поглощённой энергии, когда клапан открыт (периодически восстанавливая позицию поршня, пока на систему не оказывается никакое воздействие извне). Авторы выяснили, что RSASD система, используя децентрализованный алгоритм управления, приводит к адекватному структурному управлению.

Аgrawal и др.[59] использовали полуактивные амортизаторы жёсткости с возможностью переключения (Switching Semi-Active Stiffness Dampers, SSASD), RSASD с линейными пружинами, а также линейные и нелинейные вязкожидкостные амортизаторы для управления колебаниями подвесного моста. Также как и RSASD, SSASD система работает по средствам периодического открытия и закрытия клапана цилиндра. Когда клапан полностью открыт, демпфирование не происходит, но когда клапан закрыт, SSASD ведёт себя как обычная SASD система. Авторы использовали линейный полуактивный регулятор трения пограничного слоя для обоих типов полуактивных амортизаторов

жёсткости. Использование SASD и RSASD для подавления вибраций стальных конструкций, подверженных землетрясениям приводится в [60-64].

Система на основе настраиваемого амортизатора со столбом жидкости (Tuned Liquid Column Damper, TLCD) была представлена Sakai и др. [65, 66] как иной тип системы пассивного демпфирования. В TLCD системе твёрдая масса заменена жидкой (обычно водой) и управляющие воздействия, базирующиеся на движении столба жидкости через отверстие в U-образном (рисунок 1.3) контейнере, противодействуют силам, действующим на структуру [67, 68]. Пассивная TLCD система была использована в 48 этажном здании в Ванкувере, Канада, построенном в 2001 году (она состояла из двух 227 литровых ёмкостей с водой). Плескание воды в ёмкостях противодействует боковым вибрациям здания. Самая огромная пассивная TLCD система в мире была использована в 57 этажном здании в Филадельфии.

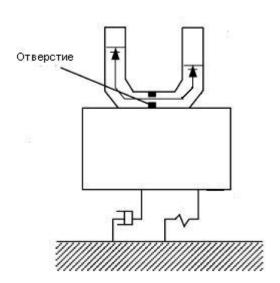


Рисунок 1.3 Схема типичной TLCD системы

В оригинальной пассивной TLCD размер отверстия фиксирован, а в полуактивной TLCD системе – меняется в режиме реального времени для управления уровнем потерь жидкости. Yalla и Kareem [69] исследовали использование полуактивные

настраиваемые амортизаторы со столбом жидкости в качестве управляющего механизма. Они провели серию тестов, используя вибрационный стенд на масштабной модели 60 этажного здания с квадратным основанием, колебания которого были спровоцированы ветром, для того, чтобы определить оптимальные параметры поглощения вибраций таких, как демпфирующее отношение и **U**-образном отношение регулировки трубы. Результаты показали, полуактивные TLCD, расположенные на крыше с этими оптимальными параметрами уменьшили амплитуду реакции здания на 15%-25% по сравнению с пассивными системами, в которых жидкость свободно перемешалась между двумя столбами в течение приложения внешнего возмущения. Chen и Ко [70] использовали полуактивные TLCD с пропеллерами для изменения высоты жидкости в столбе вместо изменения отверстия. Они представили лабораторные модели типа маятник, используя пропеллерную TLCD систему и оптимальный регулятор с обратной связью для сокращения амплитуды вибраций, вызванных землетрясением.

Довольно часто применяют в качестве полуактивной системы управления пьезоэлектрические (Piezoelectric, PZT) амортизаторы [71-74]которые используют PZT материалы (в большинстве случаев керамическую или кристаллическую структуру) и реагируют на приложенное электрическое напряжение, генерируя значительное количество напряжений/растяжений, уровень которых может быть отрегулирован через уровень приложенного напряжения. Эти материалы используются как стек актуаторов (актуатор состоит из стека PZT материала, который производит перемещение, когда приложено напряжение) или в активных стойках (линейные актуаторы с переменной жёсткостью). Kamada и др. [75] использовали PZT стек актуаторов для подавления вибраций через управление изгибающими моментами в колоннах для масштабной 4 этажной стальной прямоугольной конструкции. Udwadia и др. [76] использовали полуактивные элементы, содержащие PZT стек актуаторов, для

управления простой системой с несколькими степенями свободы. Хи [77] использовал РZТ актуаторы для сокращения больших смещений верха машинного зала, подверженного сейсмическим воздействиям. Chen [78] представил систему управления с PZT актуаторами. Preumont [79] обсуждал управление колебаниями масштабной башни космической фермы, управляемой двумя PZT стойками, используя интегральный регулятор с обратной связью. Он установил, что PZT актуаторы представляют наилучшее управление по сравнению с резисторным шунтированием (которое переводит PZT актуатор в пассивный поглотитель вибраций). Результаты полуактивного управления с помощью пьезодвижущихся амортизаторов переменного трения также были представлены в [80-83].

Существует также иной подход полуактивного управления, в котором переменное амортизирующее устройство такое, как MR амортизатор, добавлено к TMD системе для регулирования её способности настройки в режиме реального времени. Lin и др. [84] исследовал TMD-MR систему для управления 2D 12 этажной конструкцией, подверженной нагрузке со стороны землетрясений. Setareh и др.[85] исследовал использование TMD-MR системы для подавления вибраций пола здания. Так же как и предыдущий автор при сравнении TMD-MR с пассивной системой, показал, что первая значительно эффективнее по сравнению со второй.

В общем, полуактивные системы представляют собой такие устройства, которые при наличии источника энергии ведут себя как активные гасители колебаний, а когда энергия перестаёт к ним поступать, начинают осуществлять пассивное управление.

#### 1.2.4 Гибридные системы управления

Гибридные системы управления содержат в себе различные пассивные, активные и полуактивные системы с целью достижения более высокого уровня подавления колебаний распределённых объектов.

Типичной гибридной системой управления являются гибридные массовые амортизаторы (Hybrid Mass Dampers, HMD), которые использует активные настраиваемые массовые амортизаторы (ATMD) вместе с амортизаторами [86]. Nagashima и др. [87] обсуждали действие HMD системы, содержащей электрический линейный актуатор и шестерённый маятник. Они установили два таких устройства в реальную 36 этажную стальную конструкцию высотного здания в Токио, используя регулятор обратной связи с переменным коэффициентом усиления. Fujinami и др. [88] представил результаты силовых вибрационных тестов реальной 23 этажной стальной конструкции офисного здания в Токио, снабжённого двумя HMD системами, содержащими приводимый движение мотором маятник AMD (Active Mass Driver) и пружины, расположенные на верхнем этаже. Авторы заключили, что HMD система достаточно эффективна в плане управления изгибающими и поперечными колебаниями здания. Watakabe и др. [89] описали действенность HMD системы, содержащей АМD, линейные пружины и вязкие демпферы, установленной в 39 этажную стальную конструкцию здания тоже в одном из районов Токио. Авторы изучали реакцию здания на силовое воздействие со стороны самой HMD системы, ветра и небольшого землетрясения. HMD система смогла сократить вибрации верхнего этажа здания на треть. Описание управления с помощью HMD систем ещё можно найти в [90, 91].

Основная идея другого гибридного подхода состоит в усовершенствовании пассивных систем изоляции основания сооружения, которые появились и были запатентованы одним немецким инженером ещё в 1906 году. А практическое решение систем изоляции основания было усовершенствовано 70-е годы 20 века,

сначала в Новой Зеландии, а затем в Калифорнии и Японии [92]. Первые системы изоляции основания в Новой Зеландии в основном применялись в мостах. А в зданиях они впервые появились в Соединённых Штатах в 4-х этажном здании с 98 изоляторами, построенном в Южной Калифорнии в 1985 году. Подобное сооружение появилось и в Японии годом позднее [93]. Многие исследователи пропагандировали гибридные системы управления, интегрирую системы изоляции основания с активными или полуактивными системами [94].

В работах [95-97] была выявлена эффективность гибридного подхода при использовании полуактивных электромагнитных амортизаторов трения и оценено [98] действие трёх разных систем управления на примере 3D 6-ти этажного здания с изолированным основанием: только резиновые подшипники, резиновые подшипники с добавлением вязких демпферов и резиновые подшипники с четырьмя полуактивными амортизаторами жёсткости.

Madden и др. [99] использовали систему полуактивного амортизатора жёсткости [100], называемую авторами «адаптивный жидкий амортизатор», для сокращения перемещения опор 2D скользящей конструкции с изолированным основанием, подверженной землетрясению. Wongprasert и Symans [101] экспериментального гибридного представили результаты исследования управления теоретической 2D модели стального сооружения в масштабе 1:4, установленной на вибрационный стенд с системой изоляции основания, включающей четыре низко-демпфирующие резиновые подшипники. Авторы [102-108] заключили, что гибридная система изоляции основания показывает лучшие результаты управления сейсмическим возмущением по сравнению с пассивной системой изоляции.

Lee и Kawashima [109] использовали актуаторы для подавления воздействий в изолированных мостах. Исследование гибридных систем изоляции основания было проделано Jalihal и Utku [110], Gavin Aldemir [111]. Gavin и Zaicenco [112] исследовали эффективность изолированных систем полуактивного управления

для защиты оборудования при сейсмических событиях. Они сообщают, что гибридные системы эффективнее на 30%, а иногда и на 60%, чем пассивные системы изоляции.

Кигата и др. [113, 114] впервые оборудовали реальное здание актуаторами, создав новую гибридную систему типа актуатор-амортизатор. Офисное 5-и этажное здание было оборудовано восьмью гидравлическими актуаторами в стальных перекрытиях (по два на этаж) и дополнительный пассивный упругопластичный амортизатор на ещё одном этаже. Результаты показали, что гибридная система актуатор-амортизатор эффективно подавляют вибрации здания при землетрясении. Позднее в работе [115] авторы тестировали данную систему в случае потери энергии питания и выяснили, что актуаторы в пассивном режиме частично эффективны для подавления сейсмических нагрузок, а гибридная система даже в безопасном режиме при отсутствии питания всё равно является надёжным подходом в подавлении сейсмических воздействий.

Kim и Adeli [116] представили иную гибридную систему управления, включающую пассивную дополнительную демпфирующую систему и систему полуактивного настраиваемого амортизатора со столбом жидкости (TLCD). Эта включает достоинства обоих систем управления (пассивной система полуактивной), тем улучшая общее действие, надёжность самым работоспособность системы управления в течение не только стабильной работы, но при отключении электроэнергии. Авторы подтвердили эффективность и робастность данной гибридной системы при подавлении вибраций 8-и этажной конструкции, вызванных различными сейсмическими воздействиями. В работе [117] авторы исследовали управление колебаниями 76 этажного здания, подверженного ветровой нагрузке, с использованием гибрида полуактивной TLCD системы и пассивной управляющей системы на основе вязкого демпфера, расположенной на крыше. Они показали, что гибридная TLCD система сравнима с ATMD системой в терминах вибрационной защиты и более надёжна, благодаря

своим минимальным требованиям. Кроме того, гибридная система более эффективна в контролировании вибраций высотных сооружений, подверженных ветровым нагрузкам, чем просто полуактивная TLCD.

Симбиоз пассивных, активных и полуактивных подходов является мощным средством для подавления колебаний строительных сооружений, но зачастую дорогостоящим и сложным в реализации. В связи с чем многие специалисты в области управления предпочитают оптимизировать не системы управления, а алгоритмы их работы.

#### 1.3 Оптимальные и робастные алгоритмы управления

В конце 1950-х годов происходит очередное обновление в теории управления. Возникает фундаментальная идея оптимальности – выбор управления должен оптимизировать некоторый показатель качества. В такой постановке задача управления имеет много общего с классическими задачами вариационного исчисления. Новым результатом в исследовании систем управления явилась разработка «принципа максимума Понтрягина» - необходимое условие оптимальности управляемой системы. Работы многих специалистов в области управления (Калман, Беллман, Летов) помогли инженерам осознать важность и продуктивность созданной теории оптимального управления. В то же время постепенно выяснилось, ЧТО такая теория адекватно описывает сравнительно узкий круг практических задач, таких как управление космическим полётом или наведение ракет. В остальных ситуациях имеется масса факторов, препятствующих применению красивой математической теории оптимального управления. Во-первых, в каждой задаче имеется неизбежная неопределённость, связанная либо с наличием внешних возмущений, либо с невозможностью точно определить параметры модели. Во-вторых, в теории оптимального управления решение ищется в виде функции от времени (программное управление). Ясно, что

необходимость строить стратегию управления заранее является крайне нежелательной. Для инженера гораздо более естественно выбирать управление в форме обратной связи, как функцию от выхода системы в текущий момент (задача синтеза).

Подобное критическое отношение вызвало ревизию теории управления в 1970-е годы. В инженерной практике происходит возврат к классическим способам регулирования с помощью простых регуляторов (типа ПИД) [118] и к простым методам их настройки. В теории восстанавливается интерес к частотным методам; они обобщаются на случай многомерных систем. Однако подлинная революция произошла в 1980-е годы. Возникла так называемая Н∞ -теория, основоположниками которой являются Зеймс, Френсис, Дойл, Гловер [119-123]; она позволила объединить частотные методы и методы пространства состояния и по-новому ставить оптимизационные задачи. Эта же постановка позволила рассматривать задачи с неопределённостью (робастное управление), именно задачи, в которых частотная характеристика объекта имеет неопределённость, ограниченную в Н∞ - норме. Появились и другие постановки задач робастного управления, в которых неопределённость может быть задана иначе – либо как параметрическая, либо как ограниченная в матричной норме при описании в пространстве состояний. При этом были найдены многие красивые решения отдельных задач; например, задача о робастной устойчивости интервального полинома допускает очень простой ответ (теорема Харитонова). Помимо Н∞ теории и робастности, новое решение получил ряд других разделов теории управления.

Хорошим примером теории оптимальности и робастности является расчёт колебаниями механизма управления стержня cустановленными пьезоэлектрическими сенсорами и приводами, а также применение развитой колебаний, представленные [124]. структуры подавления работе ДЛЯ Механическое моделирование структуры и соответствующее конечно-элементное

приближение базируются на принципе Гамильтона и классической инженерной теории изгиба стержней, связанных c упрощённым моделированием пьезоэлектрических сенсоров и приводов. Компоненты вектора перемещения Бернулли-Эйлера, базируются a на модели уравнения динамики пьезоэлектрического континиума получены из принципа Гамильтона. Конечноэлементная модель имеет две механические степени свободы на каждом узле: сдвиг в направлении оси z и поворот.

Используя классические функции интерполяции конечного элемента и формулы, полученные из принципа Гамильтона, уравнения движения дискретизированной структуры имеют вид

$$M\ddot{X} + D\dot{X} + KX = F_m + F_e, \qquad (1.1)$$

где вектор X представляет собой состояние системы (вертикальное поперечное отклонение и вращения узлов), M - матрица массы, K - матрица жёсткости, D - матрица вязкого демпфирования,  $F_m$  - вектор механического точечного воздействия, действующий как внешнее возмущение,  $F_e$  - вектор обобщённой электрической нагрузки, спровоцированной приложенными напряжениями и пропорциональной им, действующая в качестве управляющей силы. Уравнения (1.1) приводятся к динамической системе первого порядка

$$\dot{x} = Ax + Bu + F_m, \tag{1.2}$$

где 
$$x(t) = \begin{bmatrix} X \\ \dot{X} \end{bmatrix}$$
 - вектор состояния,  $A = \begin{bmatrix} 0 & \mathbf{I} \\ -M^{-1}K & -\mathbf{M}^{-1}D \end{bmatrix}$  - матрица системы,  $B = \begin{bmatrix} 0 \\ M^{-1}F_e^* \end{bmatrix}$ 

- матрица положения с вектором электрической нагрузки, *u* - управляющее воздействие. Рассматриваются измерения, включённые в уравнение наблюдения

$$y = Cx + Du$$

В случае равномерного состояния закон управления, основанный на обратной связи, является линейным временным инвариантом состояний и может быть записан в следующей форме

$$u = Ky$$

где K - регулятор, который нужно определить.

Рассматриваются две стратегии управления — LQR и  $H_2$ . В рамках классического управления с помощью линейного квадратичного регулятора (Linear Quadratic Regulator, LQR) минимизируется следующий функционал

$$J = \frac{1}{2} \int_{0}^{\infty} \left( x^{T} Q x + u^{T} R u \right) dt \rightarrow \min$$

Q и R - представляют весовые коэффициенты на различных каналах состояния и управления. Соответствуя задачи оптимального управления, матрица Q должна быть симметричной и неотрицательной, а матрица R - симметричной и положительно определённой. Закон управления даётся следующим выражением

$$u = -K_{LOR}x$$
,

с коэффициентом усиления

$$K_{LOR} = R^{-1}B^T P$$

Постоянная матрица P является решением уравнения Риккати

$$A^T P + PA + Q - PBR^{-1}B^T P = 0$$

Тогда уравнение динамики системы (2) преобразуется к следующему виду

$$\dot{x} = (A - BK_{LQR})x + F_m$$

Главной проблемой вышеописанного классического подхода является отсутствие робастности. В связи, с чем авторы статьи предлагают другой подход к управлению, основанный на модели неопределённой системы. Входы системы делятся на две группы: внешний вход w и командные сигналы u, которые находятся на выходе регулятора и одновременно становятся входными для актуаторов экспериментальной установки. Выходы установки также разделены на две группы: измерения y, которые соединены обратной связью с регулятором и регулируемые выходы z, которые потребуются для управления. Уравнения системы можно представить теперь в более общей форме

$$\dot{x} = Ax + B_1 w + B_2 u$$
  $z = C_1 x + D_{12} u$ 

$$y = C_2 x + D_{21} w$$

 $T_{zw}$  - обозначает линейный временной инвариант системы при переходе от w к Z и  $\widetilde{T}_{zw}$  - функция перехода. Критерием предлагаемого подхода является минимизация  $H_2$  нормы  $\widetilde{T}_{zw}$ :

$$\left\|\widetilde{T}_{zw}\right\|_{2} = \left(\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty} trace\left[\widetilde{T}_{zw}(j\omega) \times \widetilde{T}_{zw}(j\omega)\right]d\omega\right)^{1/2}.$$

Принимая некоторые предположения, может быть найден уникальный регулятор  $K_2$ , который минимизирует  $\tilde{T}_{zw}$  и имеет следующее матричное представление:

$$K_2 = \left[ \frac{A - B_2 B_2^T X - Y C_2^T C_2}{-B_2^T X} \frac{Y C_2^T}{0} \right]$$

где Х и У - решения двух уравнений Риккати:

$$A^{T}X + XA - XB_{2}B_{2}^{T}X + C_{1}^{T}C_{1} = 0$$

$$AY + YA^{T} - YC_{2}^{T}C_{2}T + B_{1}B_{1}^{T} = 0$$

Численные результаты конечно-элементной модели реализованы в программе Matlab. В качестве теста представленных подходов был взят тонкий консольный стержень дискретизированный четырьмя конечными элементами, подверженный окружающим колебаниям и синусоидальной нагрузке ветряного типа.

Другая теория робастного оптимального управления, основанная на Н∞ норме, обсуждается в [125]. Данная работа посвящена устойчивому активному управлению структурными колебаниями, вызванными действием ветра. Поведение структуры описывается упрощёнными линейными уравнениями. В дополнении к линейному квадратичному регулятору и Н₂ норме в данном случае для получения наиболее возможного представления в лице неопределённостей применяется устойчивое Н∞ оптимальное управление.

Описание  $H^{\infty}$  оптимального управления можно найти в книге [126]. В ней рассматривается устойчивая система

$$\dot{x} = Ax + Bw,$$

$$y = Cx$$

на вход которой подаётся гармонический сигнал

$$w(t) = ae^{j\omega t}$$
.

Тогда установившийся сигнал на выходе будет равен

$$\overline{y}(t) = H(j\omega)w(t), \quad H(s) = C(sI - A)^{-1}B.$$

Чтобы амплитуда этого сигнала была достаточно мала для всех частот  $\omega$  , то мерой этого может служить величина

$$\sup_{\omega} |H(j\omega)| = ||H(s)||_{\infty},$$

т.е.  $H\infty$  - норма передаточной функции. Несколько более общая задача возникает, когда желательна малость выхода в какой-нибудь полосе частот или при наличии весовой функции W(s), и критерий качества процесса имеет вид

$$\sup_{\omega} |W(j\omega)H(j\omega)| = ||W(s)H(s)||_{\infty}.$$

Иначе, пусть на вход той же системы поступает любое возмущение, ограниченное в  $L_2$  -норме:

$$\|w\|_{2}^{2} = \int_{0}^{\infty} w^{T}(t)w(t)dt \le 1.$$
 (1.3)

Тогда

$$\sup \|y\|_2 = \|H(s)\|_{\infty}$$

где супремум берётся по всем входным возмущениям, удовлетворяющим (1.3). Итак, в обеих постановках задачи естественным показателем качества процесса является величина

$$J = ||H(s)||_{\infty}$$
.

Пусть теперь в системе присутствует управление:

$$\dot{x} = Ax + Bu + Dw,$$
  
$$y = Cx$$

Тогда задача  $H^{\infty}$  - оптимизации заключается в выборе регулятора в форме обратной связи по состоянию

$$u = Kx$$

Который минимизирует  $H\infty$  - норму передаточной функции H(s) замкнутой системы, т.е.

$$\min_{K} ||H(s)||_{\infty}, \ H(s) = C(sI - (A + BK))^{-1}D,$$

в предположении, что K - стабилизирующий регулятор. Данная задача имеет два различных решения. Одно проводится в пространстве состояний с использованием уравнения Риккати, а второе — связано с описанием исходной системы с помощью передаточных функций и дано в частотной области.

В работе [125] как раз даётся решение задачи с помощью второго подхода. Авторы рассматривают систему, в которой реальные возмущения представлены в виде

$$\Delta_M = \delta_M I, \ \Delta_C = \delta_C I, \ \Delta_E = \delta_E I,$$

которые предполагаются неизвестными, но ограниченными

$$(-1 \le \delta_M, \delta_C, \delta_E \le 1),$$

Действительные физические параметры системы можно записать в следующей форме:

$$M = \overline{M} \big( I + p_M \Delta_M \big), \quad C = \overline{C} \big( I + p_C \Delta_C \big), \quad E = \overline{E} \big( I + p_E \Delta_E \big).$$

Где M, C, E представляют собой массу, значение амортизатора и жёсткость пружины соответственно. Они находятся в  $p_M$ ,  $p_C$ ,  $p_E$  процентном соотношении c номинальными значениями, обозначенными чёрточкой наверху. ИХ Неопределённость в матрицах  $M^{-1}$ , C, E может быть представлена матричными фрактального преобразования функциями линейного (Linear. Fractional. Transformation, LFT):

$$M^{-1} = F_{U} \begin{pmatrix} -p_{M}I & \overline{M}^{-1} \\ -p_{M}I & \overline{M}^{-1} \end{pmatrix}, \Delta_{M} \quad C = F_{U} \begin{pmatrix} 0 & \overline{C} \\ p_{C}I & \overline{C} \end{pmatrix}, \Delta_{C}$$

$$E = F_{U} \begin{pmatrix} 0 & \overline{E} \\ p_{E}I & \overline{E} \end{pmatrix}, \Delta_{E}$$

Выходные сигналы  $u_{\Delta} = [u_M u_C u_E]^T$ , взятые из возмущений, добавлены к входным сигналам системы. Входные сигналы  $y_{\Delta} = [y_M y_C y_E]^T$ , также взятые из возмущений, добавлены к выходным сигналам системы. Модель неопределённой системы получена в следующей матричной форме:

$$\begin{bmatrix} x' \\ y_{\Delta} \\ y \end{bmatrix} = G \begin{bmatrix} x \\ u_{\Delta} \\ u \end{bmatrix} \quad \mathbf{u}_{\Delta} = \Delta y_{\Delta},$$

где G - установка возмущённой системы:

$$G = \begin{bmatrix} A & B_1 & B_2 \\ C_1 & D_{11} & D_{12} \\ C_2 & D_{21} & D_{22} \end{bmatrix}, \quad B_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -p_M I & -p_C \overline{M}^{-1} & -p_E \overline{M}^{-1} \end{bmatrix},$$

$$C_1 = \begin{bmatrix} -\overline{EM}^{-1} & -\overline{CM}^{-1} \\ 0 & \overline{C} \\ \overline{E} & 0 \end{bmatrix},$$

$$D_{11} = \begin{bmatrix} -p_M I & -p_C \overline{M}^{-1} & -p_E \overline{M}^{-1} \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad D_{12} = \begin{bmatrix} H\overline{M}^{-1} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad D_{21} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Диаграмма системы показана на рисунке 1.4.

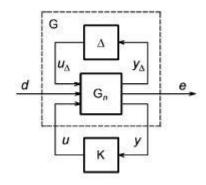


Рисунок 1.4. Диаграмма возмущённой системы.

Для стабильности робастного анализа регулятор K является известным компонентом системы. Все внешние входные сигналы системы выражаются через  $w = [u_{\Delta}d]^T$ , а все сигналы, характеризующие поведение системы, выражают  $z = [y_{\Delta}e]^T$ . Тогда система преобразуется к виду

$$\begin{bmatrix} z \\ y \end{bmatrix} = G \begin{bmatrix} w \\ u \end{bmatrix} \quad u = K(s)y.$$

Матрица перехода G содержит весовые функции для неопределённостей, которые зависят от метода управления. Матрица перехода от W к Z замкнутой системы даётся нижним LFT

$$z = F_L(G, K)w$$
.

Задача управления состоит в определении регулятора  $K_{\inf}$ , который гарантирует внутреннюю стабильность системы и сохраняет минимальное значение матрицы перехода  $F_L(G,K)$  в смысле  $H\infty$  нормы.

$$||F_L(G, K_{\mathrm{inf}})||_{\infty} = \max\{\overline{\sigma}(F(G, K)(j\omega))\} \rightarrow \min.$$

Для заданного параметра  $\gamma > 0$  находится приемлемый субоптимальный регулятор  $K_{sub}(s)$  такой, что  $H\infty$  норма замкнутая матрица перехода от w к z системы остаётся меньше, чем  $\gamma$  :

$$\|F_L(G,K_{sub})\|_{\infty} < \gamma.$$

Робастное  $H\infty$  управление также применялось для затухания колебаний платформ, находящихся в открытом море, подверженных силовым воздействиям со стороны волн [127]. Известно, что отсутствие измерений в таких задачах неизбежно в виду разных причин таких, как устаревание или временный выход из строя сенсоров, которые могут разрушать систему управления или даже приводить к нестабильности. Для активного управления колебаниями морских платформ с дискретными измерениями наиболее эффективно робастное  $H\infty$  управление, которое решает проблему отсутствия измерений. При таком подходе регулятор обратной связи по состоянию получен в терминах разрешимости

определённых линейных матричных неравенств. Наконец, моделирование платформ применяется для демонстрации эффективности предложенного подхода. Результаты моделирования показывают, что спроектированная схема робастного Н∞ управления эффективна для подавления внешних сил со стороны волн в случае неполных измерений. Подобная тематика, кстати, затронута во многих исследованиях [128-130], говоря об актуальности задачи подавления колебаний морских платформ.

LQR алгоритм один из наиболее часто используемых методов для решения проблем оптимального управления [131]. LQR был самым популярным алгоритмом управления, когда началось исследование в области структурного управления и продолжилось до недавнего времени [132, 133]. Большое количество модификаций традиционного LQR алгоритма было предложено для увеличения его эффективности для гражданских структур.

Guoping и Jinzhi [134] обсуждали LQR алгоритм для управления активной системой креплений 2D 3-x этажной конструкции, подверженной землетрясению. Ма и Yang [135] представили адаптивный регулятор обратной связи с прогнозированием на базе LQR, который непрерывно модифицирует усиление управления во время сейсмического события, используя случайные величины из набора уже вычисленный усилений в качестве начальной точки. Каждое случайное усиление, хранимое в системе управления, тестируется для нахождения того, которое даёт наименьший вес, который потом модифицируется на входной величине от события, затем этот процесс повторяется. Авторы применяли данный подход к активным системам управления 2D 5-ти этажной конструкции и сообщали об улучшенном действии, сравнимый с традиционным LQR алгоритмом.

Помимо LQR алгоритма часто в литературе можно встретить LQG регулятор, который содержит линейно квадратичную функцию оценки с линейно квадратичным регулятором. Изначально он был предназначен для систем,

белым Гауссовым Wang [136] возмущённых шумом. использовал модифицированный LQG алгоритм управления с регулируемой относительной стабильностью И параметром усиления ДЛЯ управления стандартным землетрясением и ветром, действующими на строительное сооружение.

Wu и Yang [16] использовали в качестве закона управления актуаторами LQG и  $H\infty$  алгоритмы для подавления вибраций телебашни в Китае, спровоцированных порывами ветра. Оба алгоритма показали свою эффективность. Li и др. [19] использовали  $H_2$  алгоритм для управления реакцией оффшорной платформы на воздействия со стороны волн. Также применение алгоритмов типа LQG,  $H\infty$  и  $H_2$  обсуждалось в работах [37, 71, 88, 91].

Из-за того, что стандартные алгоритмы управления (типа LQR и LQG) имеют фундаментальные недостатки некоторые такие, как чувствительность неопределённостям ошибкам параметров моделирования, И также неспособность подавить вибрации, когда частота внешнего воздействия отличается даже слегка от собственных частот структуры, большинство исследователей переключилось на модифицирование существующих алгоритмов управления и разработку новых алгоритмов для соответствия сложной природе управляемых структур.

Многие авторы сообщали о разработке и приложении алгоритмов управления на базе нейронных сетей [137] или других адаптивных/интеллектуальных алгоритмов для активного линейного/нелинейного управления простыми и небольшими по размеру системами такими, как например модель стержня с сосредоточенной массой.

Широкое распространение получили регуляторы с нечёткой логикой (Fuzzy Logic Controller, FLC), использующие математический метод применения логических переменных с непрерывными величинами, как противоположность классической логике, которая оперирует дискретными величинами либо 0 (ложь)

или 1 (истина). Данный алгоритм часто применяют к системам управления с MR амортизаторами [138-140].

Кіт и Adeli [141] разработали новые алгоритмы управления для преодоления ограничений классических алгоритмов управления с обратной связью. Они представили гибридную обратную связь с алгоритмом на основе Метода наименьших квадратов (Least Mean Square, LMS) для управления колебаниями структур через интегрирование алгоритма управления с обратной связью такого, как LQR или LQG алгоритма и фильтрование LMS алгоритма. Было показано, что гибридный алгоритм с обратной связью минимизирует вибрации во всём диапазоне частот, тем самым менее чувствителен к ошибкам моделирования и по существу более стабильный.

Kim и Adeli [142] также впервые представили концепцию вейвлетов для управления колебаниями. Вейвлеты используются во многих областях таких, как обработка сигнала при землетрясении [143], интеллектуальная транспортировка [144], мониторинг состояния структуры [145, 146], обработка изображений [147] и биомедицинская инженерия [148]. Они разработали новый гибридный-вейвлет LMS алгоритм с обратной связью через искусное интегрирование алгоритма управления с обратной связью такого, как LQR или LQG алгоритма, отфильтрованный LMS алгоритм и вейвлеты. Новый алгоритм имеет несколько преимуществ: ОН включает слагаемое внешнего возмущения формулировке, он может подавлять вибрации на всем диапазоне частот входного воздействия, он менее чувствителен к ошибкам и приближениям структурного моделирование, чем классические алгоритмы с обратной связью, он эффективен для управления обоих установившихся и временных вибраций, он использует вейвлет переход для устойчивого обновления коэффициентов адаптивного фильтра в алгоритме управления. В большинстве статей про активное управление предполагается, что структуры ведут себя линейно. Jiang и Adeli [149] представили новую нелинейную модель управления для активного управления 3D

строительными структурами, через искусное интегрирование двух мягких вычислительных техник: нейтронные сети и нечёткая логика и вейвлеты.

Судя по приведённым научным работам, разработанные модификации существующих стандартных алгоритмов и абсолютно новые подходы позволяют добиться очень точного управления распределёнными системами, но эта точность достигается лишь при использовании значительных вычислительных ресурсов. Этой проблемы лишён модальный подход, так как в те года, когда он разрабатывался и развивался, вычислительная техника была ещё далека от нынешнего уровня сложности и производительности.

# 1.4 Подавление колебаний упругих систем с помощью модального управления

Исследование колебаний упругих тел восходит к работам Даниила Бернулли и Леонарда Эйлера. По имеющимся сведениям [150], Даниил Бернулли в своём письме к Леонарду Эйлеру в 1742 году сообщил, что задача об изгибе упругих пластин или стержней может быть решена методом максимумов и минимумов. В знаменитом трактате Эйлера «Метод нахождения кривых линий, обладающих свойствами максимума или минимума», впервые опубликованном в 1744 году, приведено линейное дифференциальное уравнение четвёртого порядка, которое описывает колебательное движение упругой пластины [150]. Эйлер исследовал интегральные кривые этого уравнения при различных краевых условиях. Подобное уравнение описывает поперечные колебания призматического стержня в плоскости, которая является плоскостью симметрии для его поперечных сечений [151]:

$$\rho F \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} + \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left( EI \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \right) = 0.$$
 (1.4)

Здесь y = y(x,t) обозначает поперечное перемещение малого элемента стержня, расположенного на расстоянии x от его левого конца, t - время,  $\rho$  - плотность материала, F - площадь поперечного сечения, E - модуль Юнга, I - момент инерции сечения, EI - жёсткость при изгибе. Уравнение (1.1) называется общим уравнением поперечных свободных колебаний стержней или уравнением балки Эйлера — Бернулли. Нелинейная теория упругих стержней была развита работами  $\Gamma$ . Кирхгофа [152] и других учёных.

В одной из ранних публикаций, посвящённых исследованию решений уравнения колебаний балки Эйлера — Бернулли вида (1.1) с переменными коэффициентами, относится работа Н. М. Крылова [153]. При достаточно общих предположениях относительно коэффициентов уравнения и граничных условий доказано, что собственные функции задачи о колебаниях балки Эйлера — Бернулли образуют полную систему функций в  $L_2(0,l)$  (т.е. в пространстве измеримых функций, суммируемых с квадратом на промежутке [0,l]). Этот результат использован для обоснования представления решений уравнений вынужденных колебаний балки в виде рядов по собственным функциям, соответствующим свободным колебаниям.

Как отмечалось [154], распространённый подход к математическому моделированию движения твёрдого тела с присоединёнными упругими элементами связан с представлением упругих деформаций в виде конечных линейных комбинаций по собственным формам упругих колебаний. Если исходная механическая система подвержена управляющим воздействиям, то под модальным подходом понимается синтез управления, который обеспечивает требуемые характеристики поведения отдельных тонов (гармоник) упругих деформаций [155].

При использовании модального метода на практике выбираются несколько первых N тонов упругих колебаний, и решается задача синтеза управления для

полученной конечномерной обыкновенных дифференциальных системы уравнений. Модальный подход позволяет использовать хорошо развитые методы теории управления конечномерными системами для синтеза функций управления с заданными свойствами. Для широкого класса нелинейных конечномерных систем условия управляемости ΜΟΓΥΤ быть исследованы помощью разработанного А. М. Ковалёвым метода ориентированных многообразий. Эффективные подходы к решению прямых и обратных задач управления нелинейными системами описаны в монографии А. М. Ковалёва и В. Ф. Щербака [157].

В монографии Г. Л. Дегтярёва и Т. К. Сиразетдинова [155] рассмотрена колебаниями модального управления балки Эйлера-Бернулли задача незакреплёнными концами под действием распределённой по длине балки управляющей силы. При разложении деформации балки по собственным функциям соответствующей краевой задачи получена бесконечная система обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка относительно координат. В ходе решения задачи модального модальных предполагается, что синтезированное для первых N модальных координат управление не возбуждает неуправляемые гармоники с номером N+1 и выше, которые затухают за счёт диссипации энергии колебаний. Такое предположение связано с условием квазистатичности по терминологии работы [158].

Статья Ohkami [159] посвящена исследованию собственных частот и собственных форм колебаний модели спутника с присоединёнными упругими элементами. Для систем с N модальными координатами задача о собственных колебаниях описывается краевой задачей для системы дифференциальных уравнений порядка 2N+6. Показано, что для модели без демпфирования решение такой задачи сводится к поиску собственных элементов симметричной положительно-определённой матрицы размера N× N.

В работе В.В. Новицкого [160] исследованы задачи управления линейными неавтономными системами обыкновенных дифференциальных уравнений. Для линейных систем в блочной форме обобщены результаты метода модального управления. Такой подход позволил также решить класс обратных задач управления и задачу линейной фильтрации для моделей механических систем.

При использовании модального метода остаётся открытым вопрос о сходимости решений конечномерной системы к решениям распределённой системы с ростом N. Кроме того, для выбора приемлемого числа мод N необходимо иметь априорную оценку энергии остаточной подсистемы (соответствующей частотам с номером выше N), в зависимости от начальных условий и числа N.

В работе А. Е. Закржевского [161] приведён обзор результатов, связанных с обобщением математических моделей объектов космической техники путём обоснованного учёта упругости их конструкций. В статье [162] рассмотрена аппарата, состоящего модель космического ИЗ жёсткого корпуса присоединённых к нему симметрично расположенных упругих Записаны уравнения движения упругих элементов с батарей. солнечных конечного числа N форм колебаний. Для рассмотрения системы уравнений движения поставлена задача оптимального управления следующего вида: найти закон управления разворотом тела вокруг эйлеровой оси на заданный угол за заданное время, при котором выполняются краевые условия для фазовых переменных и минимизируются динамические перегрузки упругих элементов. Отмечено, что в общем случае решение краевой задачи для соответствующих нелинейных уравнений принципа максимума может быть получено только численно.

В монографии [163] рассмотрена модель вращающейся балки Эйлера-Бернулли с управлением в виде момента сил. Для уравнения движения с частными производными записана линейная конечномерная система обыкновенных дифференциальных уравнений с модальными координатами и поставлена задача управления с обратной связью в терминах нечёткой логики (fuzzy logic). Эффективность такого управления проиллюстрирована компьютерными вычислениями для системы с четырьмя модами упругих колебаний.

По приведённым примерам можно заключить, что модальное управление не требует больших вычислительных затрат в виду того, что управление производится по отдельным нескольким модам колебаний системы, тем самым сильно ограничив число решаемых обыкновенных дифференциальных уравнений.

#### 1.5 Выводы

Современные подходы управления колебаниями упругих систем основаны на установке датчиков, которые регистрируют сигнал входного воздействия, и приводов (в частности пьезоэлектрических), формирующих управляющие воздействия. Как видно из приведённого выше обзора литературных источников, наибольшую популярность и дальнейшее развитие получили активные, полуактивные и гибридные системы управления, так как пассивные обладают рядом существенных недостатков:

- Например, настраиваемые массовые амортизаторы (Tuned Mass Dampers, TMD), которые часто используют для управления, не способны настроиться на основную частоту колебаний системы точно, особенно при случайном или широкополосном внешнем воздействии, так как она меняется во время динамического воздействия.
- Системы пассивного управления в виде устройств поглощения энергии имеют ограниченную эффективность своего действия.

• Классический пассивный подход базируется на соответствующем выборе материалов и размеров управляющих структур. В случае распределенных упругих объектов со множеством собственных частот этот консервативный подход не может достигать истинной цели поставленной задачи управления.

Активные системы управления также не идеальны, так как требуют значительную энергию для своей работы. Полуактивные системы управления нуждаются в ограниченной энергии и вполне нормально могут питаться от аккумулятора. А гибридные системы управления, содержащие в себе различные пассивные, активные и полуактивные системы, не смотря на их вышеперечисленные недостатки, позволяют достигать очень высокого уровня подавления колебаний распределённых объектов.

В связи с большим количеством собственных частот и широкополосным внешним воздействием, основным подходом при подавлении случайных колебаний в распределённых системах является синтез оптимальных систем управления. Среди методов синтеза оптимальных систем управления, описанных в литературе, можно выделить три основных:

- Классический подход оптимизации системы управления базируется на использовании линейно-квадратичного регулятора
- Робастные Н∞ и Н₂ подходы, учитывающие неопределённости в системе.
- Модальный подход, под которым понимается синтез управления, обеспечивающий требуемые характеристики поведения отдельных форм колебаний.

Из-за того, что стандартные алгоритмы управления (типа LQR и LQG) чувствительны к неопределённостям параметров и ошибкам моделирования, большинство исследователей переключилось на модифицирование

существующих алгоритмов управления и разработку новых, более сложных по своей структуре и реализации алгоритмов. Усложнение систем управления неминуемо приводит к увеличению энергозатрат, что для больших и сложных распределённых объектов является значительным недостатком. Поэтому в данном случае является целесообразным проведение декомпозиции системы и управление только теми подсистемами, которые вносят наибольший вклад в колебания всей системы в целом. Этого можно добиться с помощью модального подхода.

Данная диссертационная работа как раз посвящена использованию модального управления стохастическими колебаниями упругого механического объекта с использованием биоморфных алгоритмов. А точнее его преимуществам по сравнению с другими подходами активного управления.

## Глава 2. Моделирование и анализ случайных процессов

В настоящее время наблюдается постоянный рост сложности разрабатываемой аппаратуры и средств автоматизации исследований, систем формирования и обработки первичной информации. Одновременно повышаются требования к эффективности систем управления, применяемых в различных отраслях машиностроения, к сокращению сроков исследования и разработки автоматизированных систем управления.

Всё это определяет необходимость применения методов моделирования на всех этапах разработки и испытаний сложных технических систем. Проведение математического моделирования позволяет во многих случаях проводить комплексное исследование систем, невозможное при натурных испытаниях, решать задачи исключительной сложности, недоступные аналитическим методам.

Методы моделирования находят применения в различных отраслях машиностроения: станкостроение, сельскохозяйственном и транспортном машиностроении, приборостроении, создании автоматизированных систем управления производством. Моделирование используют при исследовании точности и эффективности систем автоматического управления, контроле качества выпускаемой продукции, оценке надёжности изделий, расчётах нагрузок в машиностроительных конструкциях.

Еще одной трудностью, которую в середине XX века успешно преодолели исследователи систем автоматического управления, был учет случайного характера возмущающих воздействий на большинство систем управления. Было опубликовано множество работ про управление системами, возмущенными стохастическими воздействиями. Характерный пример — это морские суда, их рулевые установки и системы судовой автоматики, системы автоматического управления рулями и другими судовыми устройствами. Возмущающие

воздействия на суда порождаются, прежде всего, морским волнением, но волнение моря — это случайный процесс, который принципиально не может быть полностью предсказуем. Рассмотрим подробнее описание случайных процессов.

#### 2.1 Краткое описание физических процессов

Все наблюдаемые процессы, характеризующие физические явления, можно классифицировать самом общем детерминированные В виде как недетерминированные. К детерминированным относятся процессы, которые могут быть описаны точными математическими соотношениями. На практике встречается много подобных физических явлений. Например, движение спутника по околоземной орбите, изменение потенциала на пластинах конденсатора, который разряжается через сопротивление, вибрации несбалансированного ротора или изменение температуры воды при нагревании – все эти явления носят по существу детерминированный характер. Однако существует множество других физических процессов, имеющих недетерминированный характер. Например, изменение высоты волн на взволнованной поверхности моря, подводные течения, колебания акустического давления, создаваемые движущимся в трубе воздушным потоком, или изменения напряжения на выходе генератора шума – процессы, которые нельзя описать точными математическими соотношениями. Точное значение такого процесса в некоторый момент времени в будущем предсказать невозможно. Эти процессы случайны по своей природе и должны описываться не точными уравнениями, а при помощи осреднённых статистических характеристик [164].

Во многих случаях трудно решить, относится ли рассматриваемый физический процесс к детерминированным или к случайным. Можно, например, утверждать, что в действительности ни один физический процесс нельзя считать строго детерминированным, поскольку всегда существует возможность того, что в будущем какое-либо непредвиденное событие изменит течение процесса таким

образом, что полученные данные будут носить характер совершенно иной, чем предполагалось ранее. другой стороны, онжом утверждать, что действительности ни один физический процесс не имеет строго случайной природы, так как при условии достаточно полного знания механизма изучаемого процесса его можно описать точными математическими соотношениями. Практически решение о детерминированном или случайном характере процесса принимается обычно исходя ИЗ возможности или невозможности воспроизведения его при заданных условиях. Если многократное повторение опыта даёт одинаковые результаты (с точностью до ошибки измерения), то можно, вообще говоря, считать процесс детерминированным. Если же повторение опыта в идентичных условиях приводит к разным исходам, то природа процесса полагается случайной.

Процессы, описывающие детерминированные явления, могут быть периодическими или непериодическими. В свою очередь периодические процессы можно разделить на гармонические и полигармонические. К непериодическим относятся «почти периодические» и переходные процессы.

Функция случайное времени, описывающая явление, называется выборочной функцией (или при конечном интервале времени - реализацией). Множество всех выборочных функций, которые могут быть получены при регистрации данного случайного явления, называется случайным, стохастическим процессом. Следовательно, реализация, полученная в результате наблюдений над случайным физическим явлением, может рассматриваться как элемент множества возможных физических реализаций случайного процесса. Случайные процессы можно разделить на стационарные и нестационарные. В свою очередь стационарные случайные процессы могут быть эргодическими или неэргодическими.

Физическое явление при рассмотрении с позиции теории случайных процессов можно описать в любой момент времени путём осреднения величин по

множеству выборочных функций, представляющих данный случайный процесс. Рассмотрим, например, множество выборочных функций (называемое также ансамблем), образующее случайный процесс. Среднее значение (первый момент распределения) случайного процесса в момент времени  $t_1$  может быть найдено путём суммирования мгновенных значений каждой выборочной функции ансамбля в момент  $t_1$  и деления этой суммы на число выборочных функций. Аналогичным образом корреляция между значениями случайного процесса в два различных момента времени (смешанный момент, называемый автокорреляционной функцией) определяется путём осреднения по ансамблю произведений мгновенных значений процесса в моменты  $t_1$  и  $t_1 + \tau$ . Иначе говоря, среднее значение  $\mu_x(t_1)$  и автокорреляционная функция  $R_x(t_1, t_1 + \tau)$ случайного процесса x(t) определяются из соотношений

$$\mu_{x}\left(t_{1}\right) = \lim_{N \to \infty} \frac{1}{N} \sum_{k=1}^{N} x_{k}\left(t_{1}\right);$$

$$R_x(t_1, t_1 + \tau) = \lim_{N \to \infty} \frac{1}{N} \sum_{k=1}^{N} x_k(t_1) x_k(t_1, t_1 + \tau),$$

Причём при суммировании предполагается, что появление всех выборочных функций равновероятно.

В общем случае, когда функции  $\mu_x(t_1)$  и  $R_x(t_1,t_1+\tau)$  меняются с изменением времени, случайный процесс x(t) называется нестационарным. В частном случае независимости  $\mu_x(t_1)$  и  $R_x(t_1,t_1+\tau)$  от  $t_1$  случайный процесс x(t) называется слабо стационарным, или стационарным в широком смысле. Среднее значение слабо стационарных процессов постоянно, а автокорреляционная функция зависит только от величины сдвига  $\tau$ ,  $\tau$ . е.  $\mu_x(t_1) = \mu_x$  и  $R_x(t_1,t_1+\tau) = R_x(\tau)$ . Для случайного процесса x(t) можно рассчитать бесконечное множество начальных и смешанных

моментов более высоких порядков; их совокупность полностью описывает плотности распределения значений процесса. Когда все начальные и смешанные моменты распределения не зависят от времени, случайный процесс называется строго стационарным или стационарным в узком смысле. Для многих практических приложений доказательства слабой стационарности процесса вполне достаточно, чтобы оправдать справедливость предположения о строгой стационарности.

Рассмотрим k - ю выборочную функцию случайного процесса x(t). Среднее значение  $\mu_x(k)$  и автокорреляционная функция  $R_x(\tau, k)$  этой выборочной функции определяются выражениями

$$\mu_{x}(k) = \lim_{N \to \infty} \frac{1}{N} \int_{0}^{T} x_{k}(t) dt,$$

$$R_{x}\left(\tau, k\right) = \lim_{N \to \infty} \frac{1}{N} \int_{0}^{T} x_{k}\left(t\right) x_{k}\left(t + \tau\right) dt.$$

Если случайный процесс x(t) стационарен и  $\mu_x(k)$  и  $R_x(\tau, k)$  одинаковы для различных выборочных функций, то такой случайный процесс называется эргодическим.

## 2.2 Основные характеристики случайных процессов

Для описания основных свойств случайных процессов используются четыре статистические функции: среднее значение квадрата случайного процесса, плотность распределения, автокорреляционная функция и спектральная плотность. Среднее значение квадрата даёт элементарное представление об интенсивности процесса. Плотность распределения характеризует распределение значений процесса в фиксированных точках. Автокорреляционная функция и спектральная плотность дают аналогичную информацию о процессе во временной

и частотной областях соответственно. При последующем анализе различных процессов нас будут интересовать только автокорреляционная функция и спектральная плотность, которые, кстати, связаны взаимным преобразованием Фурье.

Автокорреляционная функция случайного процесса характеризует общую зависимость значений процесса в некоторый данный момент времени от значений в другой момент. Она определяется выражением

$$R_{x}(\tau) = \lim_{N \to \infty} \frac{1}{N} \int_{0}^{T} x(t)x(t+\tau)dt.$$

Величина  $R_x(\tau)$  - всегда действительная чётная функция с максимумом в точке  $\tau = 0$ ; она может быть как положительной, так и отрицательной:

$$R_{r}(-\tau) = R_{r}(\tau)$$
,

$$R_{x}(0) \ge |R_{x}(\tau)|$$
 при любых  $\tau$ .

Спектральная плотность мощности случайного процесса описывает общую частотную структуру процесса через спектральную плотность среднего значения квадрата его значений. Среднее значение квадрата значений реализаций в интервале частот от f до  $f+\Delta f$  можно получить, подавая эту реализацию на вход полосового фильтра с узкой полосой пропускания и осредняя возведённую в квадрат функцию на выходе фильтра. Это осреднённое значение квадрата приближается к точному его значению при стремлении T к бесконечности. Спектральная плотность даётся следующей формулой:

$$S_{x}(f) = \lim_{\Delta f \to 0} \lim_{T \to \infty} \frac{1}{(\Delta f)T} \int_{0}^{T} x^{2}(t, f, \Delta f) dt.$$

Для стационарного процесса она связана с автокорреляционной функцией преобразованием Фурье

$$S_{x}(f) = 2\int_{-\infty}^{\infty} R_{x}(\tau)e^{-2\pi i f \tau} d\tau = 4\int_{0}^{\infty} R_{x}(\tau)\cos 2\pi f \tau d\tau.$$

Переход к последнему выражению возможен потому, что  $R_x(\tau)$  есть чётная функция аргумента  $\tau$ . Спектральная плотность характеризует распределение энергии процесса по его компонентам с различными частотами.

### 2.3 Методы моделирования случайных процессов

В настоящее время разработан ряд методов моделирования гауссовских стационарных случайных процессов x(t) с заданными характеристиками: математическим ожиданием  $m_x$ , корреляционной функцией  $R_x(\tau)$  или спектральной плотностью  $S_x(\omega)$  [165]. В задачах моделирования можно считать математическое ожидание нулевым, а дисперсию  $\sigma_x^2$  - единичной.

Используя преобразование

$$x(t) = m_x + \sigma_x^2 x(t) \tag{2.1}$$

можно получить процессы с требуемыми значениями этих характеристик. Здесь  $Mx(t)=0, \ \sigma^2\big[x(t)\big]=1$ . Как известно, любая из функций  $R_x(\tau)$  или  $S_x(\omega)$  описывает полностью рассматриваемый класс процессов.

Обычно задача формулируется следующим образом. По известным характеристикам процесса (математическому ожиданию, дисперсии и корреляционной функции или спектральной плотности) требуется построить вычислительный алгоритм, позволяющий получать на ЭВМ реализации случайных процессов x(t) или последовательностей  $x_k$  (k = 0,1,2,...). В гауссовом случае модель процесса, заданная математическим ожиданием и корреляционной

функцией, является полностью определённой. Шаг дискретизации  $\Delta t$  может быть не равен шагу интегрирования h системы (2.1).

Известные методы можно разбить группы: точные на две (метод рекуррентных алгоритмов, дискретизации) И приближённые (методы формирующего фильтра, скользящего суммирования и т.д.). В точных методах методическая ошибка корреляционной отсутствует ПО функции, корреляционная функция  $R_x[l] = Mx_{h+l}x_k$  последовательности  $X_k$  равна дискретным значениям  $R_x\left(j\Delta t\right)$  корреляционной функции  $R_x\left(\tau\right)$  моделируемого процесса с непрерывным временем.

Для приближённых методов равенство заданных и воспроизводимых на ЭВМ характеристик выдерживается не точно, с некоторой погрешностью. В настоящее время практически отсутствуют работы по анализу погрешностей приближённых методов моделирования, поэтому основным и наиболее надёжным способом контроля приближённых алгоритмов является статистическая обработка моделируемых реализаций.

**Метод формирующего фильтра.** Формирующим фильтром называют динамическую систему, преобразующую случайный процесс  $\eta(t)$  вида белого шума в случайный процесс x(t) с заданными статистическими характеристиками. Полагаем процесс  $\eta(t)$  - гауссовым, нормированным условием  $S_0 = 1/2\pi$ ,  $M\eta(t) = 0$ . Чтобы найти передаточную функцию формирующего фильтра  $\Phi(p)$ , спектральную плотность процесса x(t) представляют в виде произведения двух комплексно сопряжённых сомножителей:

$$S_x(\omega) = S(i\omega)S(-i\omega)$$
.

Тогда передаточная функция

$$\Phi(p) = S(p) / \sqrt{S_0}.$$

Формирующий фильтр с передаточной функцией  $\Phi(p)$  должен быть устойчивым. Отметим, что моделируемый процесс является стационарным с заданной спектральной плотностью лишь при  $t \to \infty$ . Для дробно-рациональной спектральной плотности  $S_x(\omega)$  функция  $\Phi(p)$  имеет вид

$$\Phi(p) = \frac{1}{\sqrt{S_0}} \frac{F_m(p)}{H_n(p)},$$

где  $F_m(p)$ ,  $H_n(p)$  - полиномы степени m, n, m < n. Ей соответствует дифференциальное уравнение, записанное в операторной форме,

$$H_n(D)x(t) = \sqrt{S_0}F_m(D)\eta(t), \quad D = d/dt.$$
 (2.2)

От этого уравнения с помощью известных преобразований легко перейти к системе дифференциальных уравнений первого порядка. Стационарный случайный процесс x(t) может быть представлен первой компонентой п-мерного марковского процесса  $X(t) = \left(X_1(t),...,X_n(t)\right)^T, \ X_1(t) = x(t),$  удовлетворяющего уравнению

$$\dot{X} = AX + B\eta(t). \tag{2.3}$$

Приведём приближённый и достаточно простой метод интегрирования на цифровой ЭВМ уравнений формирующего фильтра. На ЭВМ моделируется дискретный белый шум  $\varepsilon_k \sim N(0,1), \, k=0,1,2,...,\varepsilon_k$  - некоррелированы. Рассмотрим ступенчатый процесс  $\varepsilon_h(t)$  с шагом h , порождаемый дискретным белым шумом

$$\varepsilon_h(t) = \varepsilon_k, \ t \in \lceil kh, \ (k+1)h \rceil.$$

Спектральная плотность процесса  $\varepsilon_h(t)$  равна

$$S_h(\omega) = \frac{h}{2\pi} \left[ \frac{\sin(\omega h/2)}{\omega h/2} \right]^2. \tag{2.4}$$

Уравнение формирующего фильтра при моделировании на ЭВМ, получается из формулы (2.2) при  $S_0 = h/2\pi$  и имеет вид

$$H_n(D)x(t) = \sqrt{\frac{2\pi}{h}}F_m(D)\varepsilon_h(t).$$

3десь h - шаг интегрирования дифференциального уравнения формирующего фильтра.

При моделировании на ЭВМ от этого уравнения следует перейти к системе дифференциальных уравнений первого порядка.

Векторному уравнению (2.3) соответствует уравнение

$$\dot{X} = AX + \frac{1}{\sqrt{h}} B\varepsilon_h(t). \tag{2.5}$$

Приведённый метод, основанный на моделировании на цифровой ЭВМ формирующего фильтра, обладает методической ошибкой, величина которой уменьшается при  $h \to 0$ .

**Метод скользящего суммирования.** Дискретные значения моделируемого процесса формируются в виде скользящей суммы

$$\xi_k = \sum_{i=-M}^{M} a_i \varepsilon_{k-j}, \ \varepsilon_k \sim N(0,1), \tag{2.6}$$

с весовыми коэффициентами  $a_j$ . Существует ряд способов определения  $a_j$ . Один из них основан на применении интеграла свёртки

$$\xi(t) = \int_{-\infty}^{\infty} g(\tau) \eta(t - \tau) d\tau, \qquad (2.7)$$

где  $\eta(t)$ - нормированный белый шум;  $g(\tau)$ - весовая функция формирующего фильтра. Функция g(t) определяется формулой

$$g(t) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_{0}^{\infty} \sqrt{S_{\xi}(\omega)} e^{it\omega} d\omega.$$
 (2.8)

Формирующий фильтр с весовой функцией (2.7) имеет вещественную частотную характеристику

$$G(\omega) = \sqrt{2\pi S_{\xi}(\omega)}$$
.

Соответствующая весовая функция (2.8) чётна, поэтому непрерывный линейный фильтр с такой весовой функцией физически не реализуем. Однако это свойство не является препятствием для цифрового моделирования. Дискретизация интеграла (2.7) с шагом  $\Delta t$  даёт следующие значения весовых коэффициентов:

$$a_{j} = \sqrt{\Delta t} g(j\Delta t), \quad j = 0, \pm 1, ..., \pm M.$$

Значения  $g(j\Delta t)$  вычисляются, как правило, численными методами. При этом бесконечный верхний предел интегрирования в формуле (2.8) заменяют на конечный. Генерируемая последовательность  $\xi_k$  имеет корреляционную функцию  $R_{\epsilon}[l] = M\xi_{k+l}\xi_k$ , равную

$$R_{\xi}[l] = \sum_{j=-M}^{M-l} a_j a_{l+j} = \sum_{j=-M}^{M-l} g(j\Delta t) g((j+l)\Delta t) \Delta t$$
(2.9)

Истинная корреляционная функция

$$R_{\xi}(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} g(t)g(t+\tau)dt. \qquad (2.10)$$

Функция  $R_{\xi}[l]$  является интегральной суммой для интеграла (2.10). При условиях  $\Delta t \to 0$ ,  $l\Delta t = \tau = const$  корреляционная функция последовательности  $\xi_k$  стремится к требуемой  $R_{\xi}(\tau)$ .

Метод скользящего суммирования пригоден для моделирования гауссовых процессов с произвольными спектральными плотностями. Однако он имеет методическую погрешность по корреляционной функции: для последовательности  $\xi_k$  при |l| > 2M  $R_{\epsilon}[l] = 0$ .

**Рекуррентные алгоритмы типа авторегрессии – скользящее среднее.** Метод моделирования основан на уравнении типа авторегрессии – скользящее среднее

$$\xi_k = \sum_{j=0}^{l} a_j \varepsilon_{k-j} - \sum_{j=1}^{m} b_j \xi_{k-j}, \quad k = m, \ m+1, \dots$$
 (2.11)

Здесь  $l,m,a_j,b_j$  - параметры, определяемые по корреляционной функции  $R_\xi(\tau)$  процесса  $\xi(t)$ . Для  $R_\xi(\tau)$  вида

$$R_{\xi}(\tau) = \sum_{j=1}^{n} \left[ A_{j}(\tau) \cos \beta_{j} \tau + B_{j}(\tau) \sin \beta_{j} |\tau| \right] e^{-\alpha_{j}|\tau|}$$
 (2.12)

параметры уравнения (2.11) могут быть найдены методом факторизации. Здесь  $A_j(\tau)$ ,  $B_j(\tau)$  - многочлены относительно  $\tau$ . Корреляционной функции (2.12) соответствует дробно-рациональная спектральная плотность.

Данный метод даёт простые алгоритмы моделирования, лишённые методической ошибки. Однако подготовительная работа, необходимая для расчётов коэффициентов  $a_j$ ,  $b_j$ , довольно трудоёмка. Это затрудняет использование алгоритма (2.11) для моделирования процессов с корреляционными функциями, отличающимися от типовых.

Метол канонических представлений. Канонические представления представлении модели случайного процесса  $\xi(t)$ основаны виде детерминированной функции случайных величин. В таких разложениях обеспечивается равенство математических ожиданий и корреляционных функций заданным значениям этих характеристик.

Всякий стационарный (в широком смысле) случайный процесс представляется спектральным разложением:

$$\xi(t) = m_{\xi} + \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega t} d\Phi_{\xi}(\omega),$$

где  $\Phi_{\xi}(\omega)$  - случайная функция с некоррелированными приращениями, для которой  $Md\Phi_{\xi}(\omega)=0,\ Md\Phi_{\xi}(\omega)\overline{d\Phi_{\xi}}(\omega_1)=S_{\xi}(\omega)\delta(\omega-\omega_1)d\omega d\omega_1,\ \overline{d\Phi_{\xi}}(\omega)$ - комплексносопряжённая величина. На конечном интервале  $[0,\ T]$  процесс  $\xi(t)$  задаётся разложением по системе гармонических функций:

$$\xi(t) = m_{\xi} + \sum_{k=1}^{\infty} v_k \cos \omega_k t + u_k \sin \omega_k t , \qquad (2.13)$$

где  $v_k$  ,  $u_k$  - некоррелированные случайные величины ,  $\omega_k = k\omega_1$  - частоты , кратные основной частоте  $\omega_1 = \pi/T$  .

Представление случайного процесса (как стационарного, так и нестационарного) более общего вида

$$\xi(t) = m_{\xi}(t) + \sum_{k=1}^{\infty} v_k \varphi_k(t)$$
 (2.14)

называют каноническим разложением. Здесь  $v_k$  - некоррелированные величины;  $\phi_k(t)$  - координатные (детерминированные) функции, определяемые по корреляционной функции процессов с помощью известных алгоритмов. Аппарат канонических разложений разработан В. С. Пугачёвым [166].

Данный метод имеет методическую ошибку, величина которой зависит от принятого числа членов в разложениях (2.13) и (2.14).

**Моделирование векторных случайных процессов.** Гауссовый n-мерный стационарный случайный процесс  $\xi(t) = (\xi_1(t),...,\xi_n(t))^T$ , как известно, полностью описывается своим математическим ожиданием

$$M\xi(t) = (M\xi_1(t), ..., M\xi_n(t))^T = m_{\xi} = const$$

и матричной корреляционной функцией

$$R_{\xi}(\tau) = M(\xi(t) - m_{\xi})(\xi(t+\tau) - m_{\xi})^{T} = [R_{ij}(\tau)],$$

где  $R_{ij}(\tau) = M(\xi_i(t) - M\xi_i(t))(\xi_j(t+\tau) - M\xi_j(t+\tau))$ , или матричной спектральной плотностью

$$S_{\xi}(\omega) = [S_{ij}(\omega)] = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} R_{\xi}(\tau) e^{-i\omega\tau} d\tau.$$

Большинство методов моделирования основано на сведении заданного процесса к m-мерному белому шуму  $\eta(t) = \left(\eta_1(t),...,\eta_m(t)\right)^T$ . Такое преобразование осуществляется с помощью интеграла свёртки

$$\xi(t) = \int_{-\infty}^{\infty} g(\tau) \eta(t-\tau) d\tau + m_{\xi}, \qquad (2.15)$$

где  $g(\tau) = [g_{ij}(\tau)]$  - матричная весовая функция формирующего фильтра размера  $n \times m$ . Случайный процесс  $\eta(t)$  имеет нулевое среднее и матричную корреляционную функцию, равную  $R_{\eta}(\tau) = I_m \delta(\tau)$ ;  $I_m$  - единичная матрица;  $\delta(\tau) - \delta$  - функция. Временному фильтру (2.15) соответствует частотное представление

$$S_{\varepsilon}(\omega) = G(\omega)G^{*}(\omega)/2\pi, \qquad (2.16)$$

где  $G(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} g(\tau)e^{-i\tau\omega}d\tau$  - матричная частотная характеристика фильтра (2.15);  $G^*(\omega) = \overline{G}^T(\omega)$  - матрица, сопряжённая по Эрмиту к  $G(\omega)$  (черта — знак комплексного сопряжения). Представление (2.16) называется факторизацией функции  $S_{\xi}(\omega)$ . Если факторизация заданной матричной спектральной плотности осуществлена, то по  $G(\omega)$  с помощью формул обратного преобразования Фурье восстанавливается весовая функция  $g(\tau)$ . Для физической осуществимости фильтра (2.15) необходимо, чтобы  $g(\tau) = 0$  при  $\tau < 0$ . Интеграл (2.15) подвергается дискретизации аналогично скалярному случаю. Существенные трудности встречаются при факторизации матричных функций дробно-рационального вида. Известные алгоритмы достаточно трудоёмки.

## 2.4 Анализ физических процессов

В виду вышеописанных трудностей, которые возникают при моделировании случайных процессов с помощью приближённых методов, воспользуемся встроенной функцией программного комплекса Matlab [167, 168] для моделирования случайного процесса.

В качестве случайного процесса возьмём белый шум с гауссовым распределением по амплитуде. Зададим длительность процессов  $T_{max}$ =30, дискрет по времени  $T_s$ =0.004, диапазон частот  $F_{max}$ =1/  $T_s$  , дискрет частоты df=1/  $T_{max}$  , интервал времени t=[0,  $T_{max}$ ] с шагом  $T_s$  и интервал частоты f= $\left[\frac{-F_{max}}{2}, \frac{F_{max}}{2}\right] \left(\frac{F_{max}}{2} - \text{так}\right)$  называемая частота Найквиста) с шагом df. График моделируемого процесса представлен на рисунке 2.1.

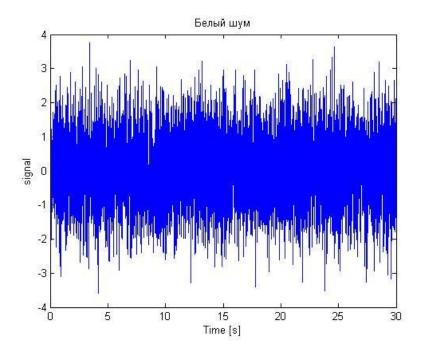


Рисунок 2.1 Случайный процесс в виде белого шума.

Построим графики автокорреляционной функции (n — ограничивает область значений данной функции) и спектральной плотности моделируемого процесса (рисунки 2.2 и 2.3).

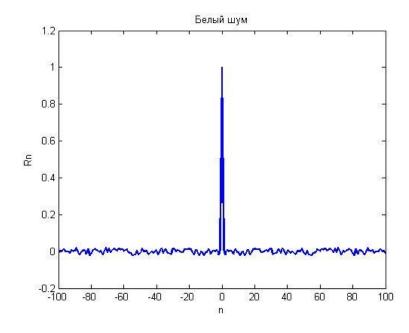


Рисунок 2.2 Автокорреляционная функция случайного процесса.

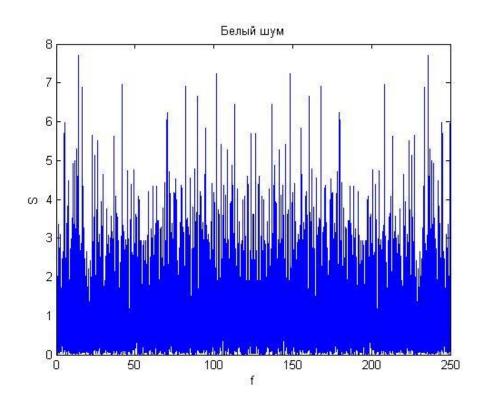


Рисунок 2.3 Спектральная плотность случайного процесса.

Из рисунков 2.2 видно, что представленная автокоррелограмма, имеющая вид крутого пика с быстрым спаданием к нулю, типична для широкополосного случайного процесса с нулевым средним значением (если среднее значение не равно нулю, автокорреляционная функция стремится к квадрату среднего значения процесса). График спектральной плотности (рисунок 2.3) показывает, что энергетический спектр случайного процесса достаточно широкий и имеет большое количество пиков разной величины.

Как известно, при разложении белого шума на элементарные гармонические колебания, гармоники всех частот оказываются одинаковыми по интенсивности, то есть энергетический спектр белого шума, по определению, должен быть одинаков на всём диапазоне частот. Модель белого шума играет в статистической динамике чрезвычайно важную роль. Дело в том, что любая инерционная колебательная система может реагировать лишь на ограниченный диапазон частот случайных воздействий; воздействия с очень высокими частотами не будут

оказывать практически никакого влияния на поведение системы. Поэтому, если спектральная плотность случайного воздействия близка к постоянной в пределах этого диапазона существенных для данной колебательной системы частот возбуждения (такой случайный процесс называется широкополосным), то система будет реагировать на такое возбуждение так же, как и на возбуждение типа белого шума[169]. Однако энергия процесса типа белого шума так же, как и его дисперсия бесконечно велика. Следовательно, такой процесс, строго говоря, физически нереален, и может рассматриваться лишь как некоторая абстрактная модель. Поэтому возникает потребность в моделировании случайного шумового воздействия, схожего по своим свойствам с белым шумом, в виду того, что в реальном мире внешние воздействия на механические объекты в основном имеют случайный характер.

Для этого возьмём сумму большого количества гармонических функций разной частоты и проведём корреляционный и спектральный анализ полученного процесса, который имеет вид (рисунки 2.4-2.8):

$$x(t) = \sum_{i=1}^{1000} \sin((k_0 + 0.0401ki)t),$$

где с помощью параметров  $k_0$ , k можно управлять частотным диапазоном процесса. Меняя  $k_0$ , его можно сдвинуть на величину равную значению данного параметра. А при варьировании k можно значительно расширить диапазон частот процесса x(t).

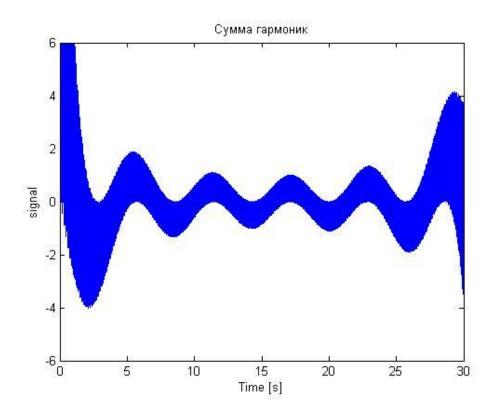


Рисунок 2.4 Процесс в виде суммы гармоник ( $k_0 = 1, k = 5$ ).

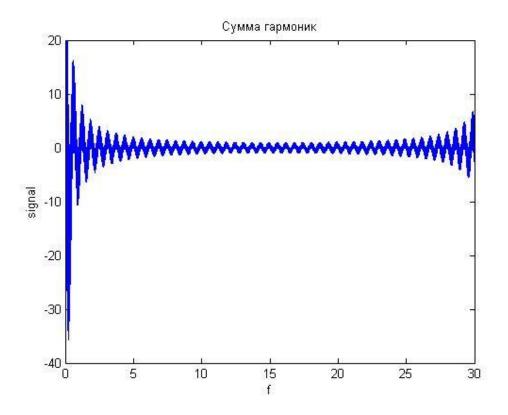


Рисунок 2.5 Процесс в виде суммы гармоник (  $k_0 = 10$ , k = 5 ).

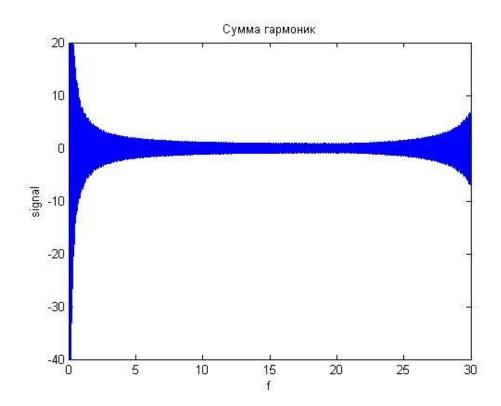


Рисунок 2.6 Процесс в виде суммы гармоник (  $k_0 = 100, k = 5$  ).

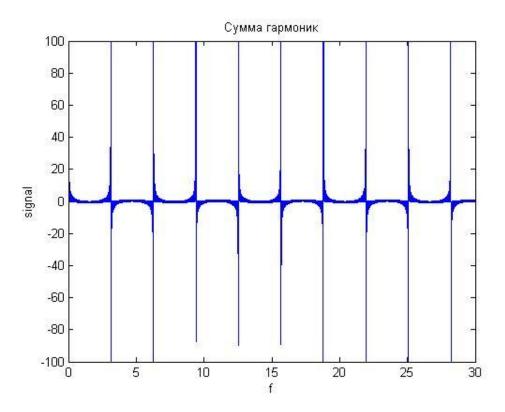


Рисунок 2.7 Процесс в виде суммы гармоник ( $k_0 = 1, k = 50$ ).

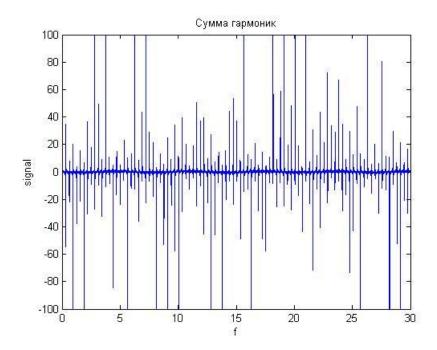


Рисунок 2.8 Процесс в виде суммы гармоник (  $k_0 = 1, k = 500$  ).

Добавим для сравнения графики автокорреляционной функции исследуемого процесса к аналогичным графикам белого шума, а также построим графики его спектральной плотности (рисунки 2.9-2.18).

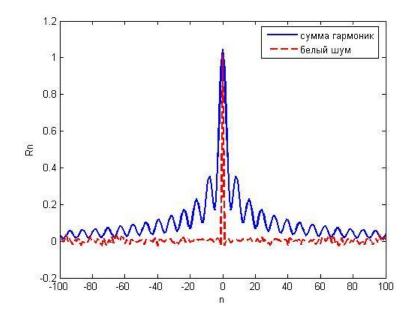


Рисунок 2.9 Автокорреляционные функции белого шума и процесса в виде суммы гармоник (  $k_0$  =1, k =5 ).

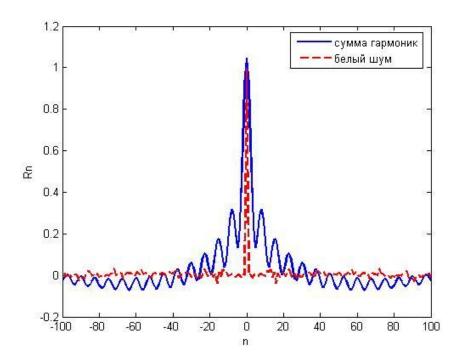


Рисунок 2.10 Автокорреляционные функции белого шума и процесса в виде суммы гармоник (  $k_0$  =10, k =5 ).

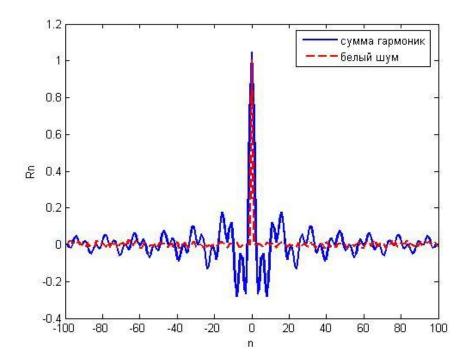


Рисунок 2.11 Автокорреляционные функции белого шума и процесса в виде суммы гармоник (  $k_0$  = 100, k = 5 ).

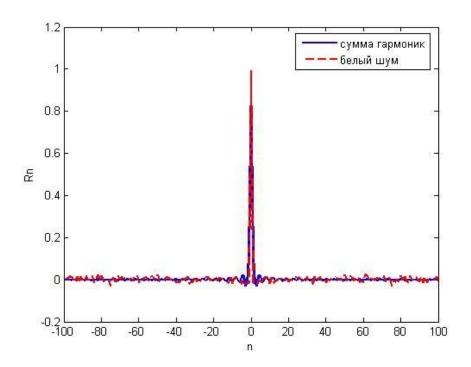


Рисунок 2.12 Автокорреляционные функции белого шума и процесса в виде суммы гармоник (  $k_0 = 1, \ k = 50$  ).

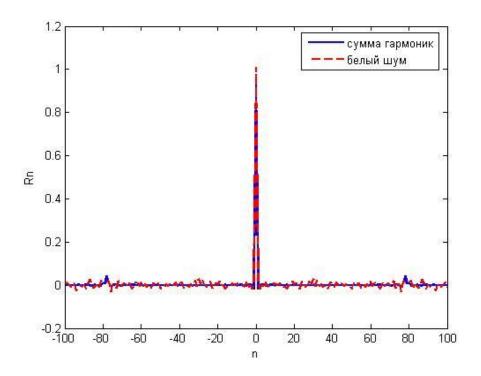


Рисунок 2.13 Автокорреляционные функции белого шума и процесса в виде суммы гармоник (  $k_0$  =1, k =500 ).

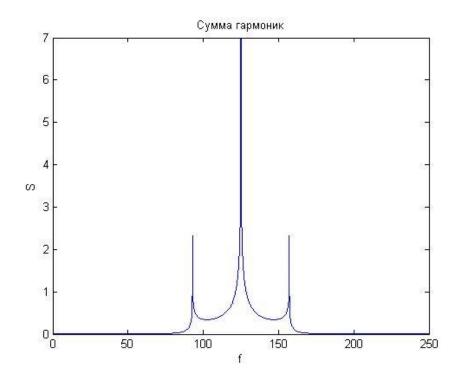


Рисунок 2.14 Спектральная плотность процесса в виде суммы гармоник  $(\mathit{k}_{\scriptscriptstyle 0}=1,\;\mathit{k}=5\,).$ 

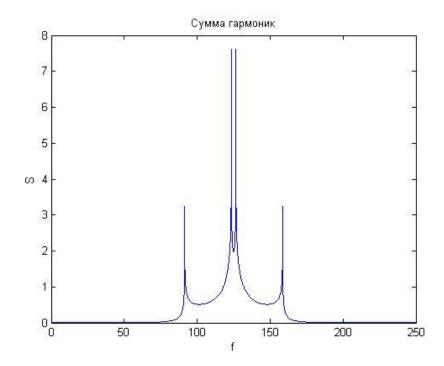


Рисунок 2.15 Спектральная плотность процесса в виде суммы гармоник  $(k_{\scriptscriptstyle 0}=10,\ k=5\,).$ 

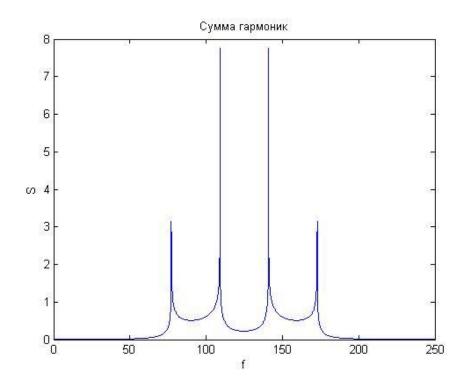


Рисунок 2.16 Спектральная плотность процесса в виде суммы гармоник  $(k_0 = 100, \ k = 5).$ 

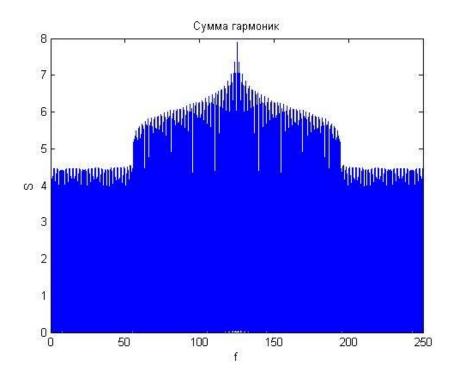


Рисунок 2.17 Спектральная плотность процесса в виде суммы гармоник  $(k_0 = 1, \ k = 50).$ 

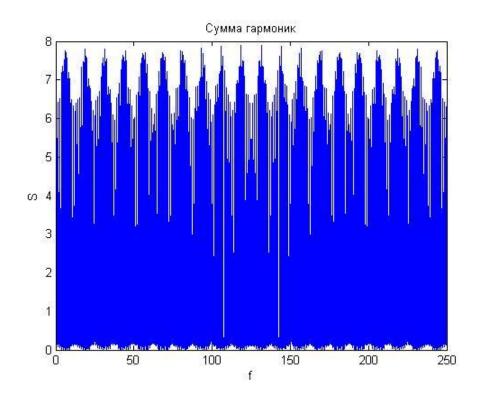


Рисунок 2.18 Спектральная плотность процесса в виде суммы гармоник  $(k_0 = 1, k = 500)$ .

Практический критерий случайности полученного нового процесса в виде суммы большого числа гармоник может быть получен при использовании методов анализа, которые применяются в предположении случайности процессов. В частности, наличие гармонических составляющих в случайном в прочих отношениях процессе часто можно обнаружить при просмотре графиком спектральной плотности или автокорреляционной функции. Из рисунка 2.14 видно, что в спектре ярко выражены три периодические составляющие, которые проявляются в виде трёх острых пиков. Это говорит о том, что данные три имеют наибольшее значение энергии по сравнению с другими. гармоники Однако узкополосный случайный процесс в некоторой своей реализации также имеет характерный острый пик в энергетическом спектре, но этого ещё не достаточно, чтобы считать наше воздействие в виде суммы гармоник случайным процессом. При значительном расширении частотного диапазона исследуемого квазислучайного процесса (рисунок 2.18), его энергетический спектр начинает приобретать равномерный характер, а гармоники всех его частот выравниваются по интенсивности. Анализ графиков на рисунках 2.9-2.13 показывает, что автокорреляционная функция данного процесса, особенно при определённых значениях параметров  $k_0$ , k (рисунки 2.12 и 2.12), имеет схожий характер с автокорреляционной функцией белого шума (рисунок 2.2), а именно наличие одиночного острого пика и ниспадающие к нулю осцилляции, которые у последнего процесса более чётко проявляются, как и полагается для суммы гармоник. Поэтому можно утверждать, что процесс, представляющий собой сумму большого числа гармоник близок по своим свойствам к широкополосному случайному шуму.

#### 2.5 Выводы

В разделе 2 даётся описание различного рода физических процессов, существующих в природе. Их можно условно разделить на два класса: детерминированные и случайные (или стохастические). В свою очередь детерминированные делятся периодические (гармонические на полигармонические) и непериодические (почти периодические и переходные). Случайные же процессы бывают нестационарные и стационарные. Наибольший интерес среди последних представляют процессы, обладающие свойством эргодичности, так как для определения их характеристик достаточно всего лишь одной выборочной реализации. В отличие от детерминированных процессов, которые можно описать с помощью точных математических соотношений, случайные процессы только с помощью осреднённых ОНЖОМ оценить статистических характеристик таких, как, например, автокорреляционная функция и спектральная плотность, которые для стационарных процессов связаны взаимным преобразованием Фурье.

Наиболее упоминаемым своего рода частным случаем стохастических процессов является так называемый белый шум. Данный процесс примечателен тем, что он обладает постоянной спектральной плотностью на всём диапазоне частот, а его автокорреляционная функция имеет вид дельта-функции Дирака. Энергия и дисперсия такого процесса бесконечны, поэтому физически он нереализуем. Существует ряд методов моделирования случайных процессов (в частности и типа белый шум) по их характеристикам - математическому ожиданию, дисперсии и корреляционной функции или спектральной плотности. Они делятся на две группы: точные (метод рекуррентных алгоритмов, дискретизации) и приближённые (методы формирующего фильтра, скользящего суммирования и т.д.). В виду своей простоты и возможности реализации на практике наиболее применимы приближённые методы, которые, правда, обладают некоторой погрешностью.

Дабы исключить эту погрешность можно смоделировать процесс в виде суммы большого числа гармоник, у которого график автокорреляционной функции будет иметь вид, схожий с графиком автокорреляционной функции широкополосного случайного шума, в частности белого шума. Тем самым отразить в виде модели случайное воздействие, которое может иметь место в реальном мире.

Смоделированный процесс в виде суммы большого числа гармоник будет использоваться в следующем разделе в качестве внешнего случайного воздействия, приложенного к рассматриваемому механическому объекту управления.

# Глава 3. Управление упругим механическим объектом на основе использования биоморфных алгоритмов

#### 3.1 Описание системы управления

Идеальной целью синтеза любой системы управления механическим объектом является получение инвариантного управления. То есть, объект управления вместе с системой управления должны образовывать управляемую систему, с единичным коэффициентом преобразования управляющего входа u в управляемый выход y.

Если передаточная функция такого управляемого объекта  $H_y(p)$ , то  $H_v(p) \equiv 1$ 

Существует только два способа добиться этой цели:

1. Последовательно на входы объекта (с передаточной функцией  $H_o(p)$ ) подавать сигнал  $H_o^{-1}u$  (Рисунок 3.1);

Рисунок 3.1 Последовательное (программное) управление

2. Установить отрицательную обратную связь с единичным коэффициентом усиления в обратной связи, то есть подавать на объект управление  $H_w(p)(u-y)$  (Рисунок 3.2)

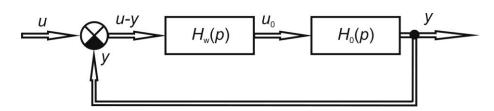


Рисунок 3.2 Управление с единичной отрицательной обратной связью

В первом случае необходимо построить антиобъект, что для механических систем физически не реализуемо как из-за проблем с идентификацией параметров объекта, так и из-за некорректности обращения оператора. Поэтому, первый метод не применяется на практике.

Во втором случае, передаточная функция управляемого объекта, замкнутого обратной связью будет равна

$$\frac{H_o(p)}{1 + H_w(p)H_o(p)} \tag{3.1}$$

Получить единицу невозможно, но к ней можно приблизиться сколь угодно близко. Ошибка, очевидно, пропорциональна

$$\frac{1}{1 + H_w(p)H_o(p)} \tag{3.2}$$

или

$$\|\Delta\| \approx \frac{\|u\|}{\|H_w H_o\|} \tag{3.3}$$

То есть, чем больше значение передаточной функции объекта (коэффициент усиления разомкнутого контура), тем меньше ошибка. На этом пути встречаются три проблемы:

- 1. Максимальный коэффициент усиления разомкнутого контура ограничен требованием устойчивости. Причем, когда речь идёт о механических объектах, то чем ниже податливость кинематической цепи такого объекта, тем при меньших значениях коэффициента усиления наблюдается неустойчивость.
- 2. В случае механических объектов количество независимых переменных может быть столь велико, что сам выбор выходных переменных для организации обратной связи может представлять собой формально неразрешимую проблему.

3. Так как, источник питания системы управления всегда ограничен, то физически невозможно обеспечить сколь угодно большой коэффициент усиления  $\|H_wH_o\|$ .

Современные технологии решают третью проблему за счет увеличения установленной мощности приводов управляемого объекта. За 20 лет единичные мощности управляемых устройств существенно увеличились. Даже бытовые приборы, исполняющие одни и те же функции стали мощнее в 5-6 раз. Но первые две проблемы эффективно не решаются.

В решении первой, например, мешает ограниченная жёсткость кинематических цепей, и самих управляемых объектов. Эффективные подходы к решению второй проблемы предлагает мехатроника [170]. Она позволяет правильно выбрать расположение датчиков обратных связей и приводов на упругом теле, но согласованное управление не рассматривается. Система делится на множество локальных контуров обратных связей, когда каждому датчику соответствует свой возбудитель. При таком подходе неизбежно взаимовлияние приводов и связанные с этим ошибки раздельного управления.

Одним из перспективных направлений долгое время считался Learning control [163]. Суть этого подхода заключается в том, что во время многократного движения по одной и той же траектории объект запоминает свои ошибки в виде функции времени и добавляет эти функции к сигналу обратной связи при очередном проезде по траектории. В этом случае величина ошибки при движении оказывается не связанной с коэффициентами усиления, а зависит от числа повторов. Проведенные исследования показывают, что в случае даже небольших сингулярностей траектории движения типа «прямой угол», алгоритм теряет сходимость, и итеративный процесс запоминания ошибок начинает раскачивать управляемый объект, что приводит к резкому увеличению ошибок управления.

Вместе с тем, наблюдения за биологическими объектами показывают, что при очень низкой жёсткости скелета (несопоставимой, например, с жёсткостью стальных механизмов), они в состоянии совершать движения быстро и точно. То есть, каким-то образом обходят вышеописанную проблему управления.

Отличия биологических объектов от механических, можно свести к двум аспектам: во-первых, коэффициенты усиления в обратных связях могут легко изменяться; а во-вторых, процесс обучения, в отличие от механических объектов сопровождается не только запоминанием, но и ростом нервной ткани, что было клинически зафиксировано на лабораторных мышах. В свою очередь нервная ткань играет роль проводника нервных импульсов (сигналов обратных связей, сигналов управления), следовательно, в биологических организмах во время обучения вырастают дополнительные обратные связи.

Первый механизм приводит к тому, что биологический объект при выполнении нового для себя движения находится, как правило, на грани устойчивости («дрожат коленки»). Для уменьшения ошибок коэффициенты усиления в контурах управления выставляются максимально возможными. Второй механизм, напротив, позволяет добиться уменьшения ошибок с минимальными значениями коэффициентов усиления. Именно он представляет основной интерес как база для биоморфного управления.

Существует еще одно отличие, заключающееся в явной избыточности датчиков обратных связей у биологической системы. В отличие от обыкновенных механических управляемых объектов — это целые поля датчиков (например, осязание) да еще и зрение, хотя обученный объект может запросто «печатать вслепую». При управлении механическим объектом формальные критерии управляемости и наблюдаемости системы не выполняются, так как количество степеней свободы у упругого тела бесконечно. Но с достаточной для практики точностью, можно считать, что есть достаточное количество сенсоров и приводов. Необходимо организовать управление, таким образом, чтобы минимально

использовать модельные представления и идентификацию параметров, предусмотреть возможность изменения числа контуров обратных связей и обеспечить максимальную точность при минимальных значениях коэффициентов усиления в контурах обратных связей.

Рассмотрим управляемый механический объект в линейном приближении. Уравнения такого объекта имеют вид

$$\dot{X} = AX + BU + Gf 
Y = CX 
X(0) = X_0$$
(3.4)

где X - вектор переменных состояния объекта размерности [n], Y - вектор наблюдений размерности [m], U - вектор управлений размерности [l], f - вектор внешних воздействий размерности  $[\tilde{n}]$ ,  $X_0$  - вектор начальных условий, A - матрица линеаризованной системы уравнений, описывающей объект управления, размерности  $[n \times n]$ , G - матрица внешних воздействий линеаризованной системы уравнений размерности  $[n \times \tilde{n}]$ , B - матрица управления линеаризованной системы уравнений размерности  $[n \times l]$ , C - матрица наблюдателя размерности  $[m \times n]$ .

Стандартный мехатронный подход [170] предполагает, что датчики обратных связей расположены в местах приложения управляющих воздействий, таким образом, числа m и l совпадают и можно построить m контуров обратной связи в каждом из которых организовать управление вида

$$u_i = -H_i y_i \tag{3.5}$$

Где  $u_i$  - компонента вектора управления,  $y_i$  - компонента вектора наблюдения,  $H_i$  - оператор системы управления в i - том контуре обратной связи. Как правило, используются ПИД — регуляторы, то есть в пространстве переменных Лапласа  $H_i(p)$  является дробно рациональной функцией со знаменателем и числителем второго порядка.

Такой подход аппроксимирует часть объекта, управление которым производится в данном контуре обратной связи в виде сосредоточенной массы и упругих связей, что приближенно отражает реальное положение.

Недостатками такого подхода является:

- 1. Большое коэффициентов операторов количество  $H_{i}$ которые необходимо основании параметров объекта, вычислять на (следовательно, необходимо провести его идентификацию), либо настраивать на готовом объекте, что при  $m \ge 3$ практически мало реально.
- 2. Отсутствие учета естественного взаимовлияния приводов друг на друга и связанные с этим затраты дополнительной мощности и ошибки регулирования.
- 3. Большое количество изолированных контуров обратных связей снижает помехозащищенность всей системы управления, так как контуры управления связаны через упругий объект и влияние помех будет нарастать с ростом числа контуров.
- 4. Уменьшение количества обратных связей автоматически приведет к увеличению ошибок, так как часть приводов окажется не задействованной.
- 5. Не разработан общий подход в случае, когда количество датчиков обратных связей не совпадает с количеством приводов.

Для управления упругими объектами применяется также декомпозиционный подход [171]. Собственные формы движения упругого объекта задают матрицу неособого преобразования S, такую, что  $SAS^{-1}$  имеет диагональный вид. Домножим правую и левую части системы (3.4) на матрицу S и сделаем замену вида SX = q, тогда получим систему

$$\dot{q} = SAS^{-1}q + SBU + SGf$$

$$Y = CS^{-1}q$$

$$q(0) = SX_0$$
(3.6)

где Q - вектор коэффициентов собственных форм движения упругого объекта размерности [N], который заменит вектор переменных состояния. Некоторой проблемой может являться определение вектора Q по данным датчиков Y, но с самого начала мы полагаем, что датчиков достаточно, то есть информационная матрица  $(C^TC)$  - не вырождена, поэтому для восстановления воспользуемся обобщенной процедурой обращения матрицы  $C: C^{-1} = (C^TC)^{-1}C^T$ , тогда

$$q = S(C^{T}C)^{-1}C^{T}Y (3.7)$$

где  $S(C^TC)^{-1}C^T$  - матрица пересчета вектора наблюдений в модули собственных форм движения.

Уравнения системы (3.6) являются связными, что мешает ограничивать количество переменных вектора q и осуществлять управление с изменяемым числом переменных. В рамках биоморфного подхода предлагается выбирать управления u в виде  $u = KF(q^* - q)$ , где  $q^*$  - внешнее задание на значение модулей формы, K - коэффициент усиления, который может быть в общем случае оператором (например, ПИД - регулятором), F - матрица, такая, что SBF имеет диагональную структуру. Выбор матрицы F - отдельный вопрос. Допустим, что такой выбор возможен. Тогда из системы (3.6) получим

$$\dot{q} = \Lambda_A q + K \Lambda_B (q^* - q) + SGf$$

$$q = S(C^T C)^{-1} C^T Y$$

$$q(0) = SX_0$$
(3.8)

где  $\Lambda_{\scriptscriptstyle A}$  и  $\Lambda_{\scriptscriptstyle B}$  - диагональные матрицы.

Полученная система обладает целым рядом преимуществ:

1. Все контуры обратных связей независимы. И эта независимость имеет физический смысл, так как в каждом контуре идёт управление по собственной

форме движения, а такие формы для упругих тел ортогональны, то есть движение по одной форме не влияет на все остальные. Естественно в реальности, за счёт трения и нелинейности такая независимость — неполная, но, по крайней мере, она может быть определена с точностью до сил трения, которые при нерезонансных режимах невелики по сравнению с силами упругости и инерции.

- 2. Появляется возможность выбрать несколько форм и управлять только ими, не тратя силы и время системы управления на обработку всех остальных сигналов обратной связи. Очевидно, что при симметричных или кососимметричных нагрузках понадобится только половина форм. Кроме того, жёсткость форм собственных быстро нарастает с увеличением их номера, поэтому для описания движения упругого объекта достаточно 3-8 форм. Этот факт можно использовать при управлении. Помимо снижения объёма обрабатываемой в системе управления информации возрастет помехозащищенность системы управления, так как помехи будут осредняться на ограниченном числе форм колебаний.
- 3. Появляется возможность динамически в процессе управления объектом увеличивать число форм, по которым производится управление, опираясь, например, на информацию о величине ошибки. В сочетании с возможностью менять коэффициент усиления K это преимущество позволяет назвать управление биоморфным.
- 4. Появляется возможность обеспечить не колебательные движения, по крайне мере по конечному числу собственных форм, как это хорошо видно по уравнениям системы (3.3). Изменения коэффициента усиления K не имеют естественного ограничения сверху даже в случае, если датчики и приводы находятся в разных частях упругой системы.
- 5. Можно предположить, что предлагаемая система управления будет мало чувствительна к точности задания форм и коэффициентов матрицы F, кроме того при большом количестве датчиков резко упадёт чувствительность к ошибкам

и отказам части датчиков, так как их показания будут осредняться на собственных формах.

- 6. Экономия энергии при управлении, возникающая вследствие ортогональности собственных форм.
- 7. Появляется возможность сэкономить на обработке сигналов обратных связей за счёт задания стандартных воздействий, например для подавления вибраций генерируется сигнал той же частоты, при этом система управления может следить лишь за медленным изменением фазы и амплитуды этого сигнала, что значительно снижает требования к её быстродействию (разделение быстрых и медленных движений)

Вместе с тем, в рамках биоморфного подхода остаётся несколько неисследованных вопросов:

- 1. Синтез матрицы F управления приводами по каждой форме.
- 2. Оптимальное соотношение между количеством обратных связей или собственных форм, учитываемых при управлении и величиной коэффициента усиления K. Которое в живой природе меняется в процессе обучения в сторону снижения коэффициента усиления и роста числа обратных связей.
- 3. Чувствительность биоморфного управления к нелинейности объекта.

## 3.2 Биоморфное подавление колебаний упругой балки вызванных внешним гармоническим воздействием

Прежде, чем приступить к задаче об управлении многомерным объектом необходимо понять, возможно ли найти матрицу F, которая превратит произведение SBF в диагональную матрицу? Простые преобразования показывают, что это возможно. Возьмем матрицу F в виде

$$F = B^{T} (BB^{T})^{-1} S^{-1}$$
 (3.14)

Матрицу  $(BB^T)$  будем считать невырожденной в силу большого количества приводов, матрица  $S^{-1}$  существует по определению неособого преобразования, тогда

$$SBF = SBB^{T}(BB^{T})^{-1}S^{-1}$$
 (3.15)

Эта матрица является диагональной вследствие ортогональности векторов собственных форм, составляющих матрицу S. Таким образом, возможен, по крайней мере, один вариант выбора матрицы F.

Возникает вопрос относительно достаточности управления (вырожденности  $(BB^T)$ ). Приводы в живом организме конечны, новые мышцы и связки не отрастают при обучении. Следовательно, живой природе достаточно имеющихся мышц для решения практически любых задач.

По физическом смыслу столбцами матрицы F является комбинация управляющих воздействий, создающая в управляемом объекте собственную форму с номером, равным номеру столбца. В силу дискретности приложения управляющих воздействий и ограниченности числа приводов, точное выполнение этого условия, да еще и для произвольного числа собственных форм — невозможно. С другой стороны, любая матрица F может быть использована, вопрос только будет ли управление устойчивым и какие будут при этом ошибки управления. На следующем примере мы выясним, насколько чувствителен упругий объект к выбору F.

В качестве модельного объекта выбрана балка Бернулли, шарнирно опертая по концам. Модель балки изображена на Рисунке 3.12.

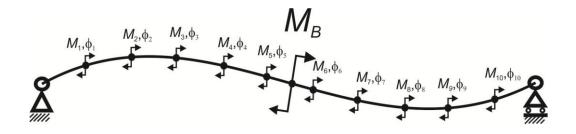


Рисунок 3.12 Модель управляемой балки с десятью приводами

Колебания балки возбуждаются приложением в ее середине изгибающего момента  $M_B$ , изменяющегося по заданному закону. Угол поворота касательной к средней линии балки  $\varphi_l = \varphi(\mathbf{z}_l,t), \quad l=1,...,N$  в каждый момент времени измеряется в десяти поперечных сечениях (N=10), выбранных равномерно по длине балки, исключая концы. В этих же сечениях могут быть приложены управляющие моменты  $M_l$ , с целью уменьшить амплитуду изгибных колебаний балки.

Математическая модель балки постоянного сечения была выбрана в виде системы дифференциальных уравнений

$$\frac{\partial Q}{\partial z} + \rho \ddot{w} = 0$$

$$Q - \frac{\partial M}{\partial z} = \mu$$

$$\frac{\partial w}{\partial z} + \vartheta = 0$$

$$\frac{\partial \vartheta}{\partial z} - \frac{1}{EI} M = 0$$
(3.16)

где w - поперечное перемещение,  $\vartheta$  - угол поворота касательной к средней линии балки, Q - поперечная сила, M - изгибающий момент, z - продольная координата, отсчитываемая от левого конца балки,  $\rho$  - масса единицы длины балки, I - момент инерции поперечного сечения, E - модуль Юнга материала,  $\mu$  - распределенный внешний момент.

Граничные условия отражают способ закрепления концов балки длины L

$$w_{z=0} = 0$$

$$M_{z=0} = 0$$

$$w_{z=L} = 0$$

$$M_{z=L} = 0$$

Начальное состояние соответствует прямолинейной конфигурации

$$w_{t=0} = 0$$
$$\dot{w}_{t=0} = 0$$

В операторном виде система (3.16) имеет вид

$$D\xi + R\ddot{\eta} = f$$

$$D^*\eta - B\xi = 0$$
(3.17)

Здесь введены операторы

$$D = \begin{bmatrix} -\frac{\partial}{\partial z} & 0 \\ 1 & -\frac{\partial}{\partial z} \end{bmatrix}, \ D^* = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial z} & 10 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial z} \end{bmatrix}, \ R = \begin{bmatrix} \rho & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \ B = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{EI} \end{bmatrix}$$

и вектора  $\eta = \begin{bmatrix} w \\ \vartheta \end{bmatrix}, \ \xi = \begin{bmatrix} Q \\ M \end{bmatrix}, \ f = \begin{bmatrix} 0 \\ \mu \end{bmatrix}.$ 

Решение системы (3.16) будем искать в виде ряда по формам свободных колебаний балки

$$\eta(z,t) = \sum_{k=1}^{\infty} \beta_k(t) \eta_k(z) 
\xi(z,t) = \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k(t) \xi_k(z)$$
(3.18)

где  $\eta_{_k}(\mathbf{z}) = \begin{bmatrix} w_{_k}(\mathbf{z}) \\ \vartheta_{_k}(\mathbf{z}) \end{bmatrix}$ ,  $\xi_{_k}(\mathbf{z}) = \begin{bmatrix} Q_{_k}(\mathbf{z}) \\ M_{_k}(\mathbf{z}) \end{bmatrix}$  - формы свободных колебаний при изгибе,  $\beta_{_k}(t)$ ,

 $\alpha_{\scriptscriptstyle k}(t)$  - главные координаты, k – число форм колебаний.

Определим формы свободных колебаний балки. Уравнение свободных изгибных колебаний балки имеет вид

$$EIw^{(IV)} + \rho \ddot{w} = 0 \tag{3.19}$$

Будем искать решение в виде

$$w(z,t) = w(z)\sin(\lambda t + \phi), \qquad (3.20)$$

где w(z) - форма,  $\lambda$  - угловая частота колебаний

Подставляя (3.20) в (3.19), получаем обыкновенное дифференциальное уравнение для форм

$$w^{(IV)}(z) - a^4 w(z) = 0$$

где 
$$a^4 = \frac{\rho \lambda^2}{EI}$$
.

Решение этого уравнения находим с помощью функций Крылова

$$w(z) = C_1 K_1(az) + C_2 K_2(az) + C_3 K_3(az) + C_4 K_4(az),$$
(3.21)

где  $C_1,...,C_4$  - постоянные,

$$K_{1}(az) = \frac{1}{2}(ch(az) + \cos(az))$$

$$K_{2}(az) = \frac{1}{2}(sh(az) + \sin(az))$$

$$K_{3}(az) = \frac{1}{2}(ch(az) - \cos(az))$$

$$K_{4}(az) = \frac{1}{2}(sh(az) - \sin(az))$$

Подставив решение (3.21) в граничные условия, получим выражения для k - ой частоты свободных колебаний балки

$$\lambda_k = k^2 \pi^2 \sqrt{\frac{EI}{\rho L^4}}$$

и k - ой формы поперечного перемещения при нормировке  $\int_{0}^{L} \rho w_{k}^{2}(z) dz = 1$ 

$$w_k(z) = \sqrt{\frac{2}{\rho L}} \sin \frac{k\pi z}{L}.$$
 (3.22)

Используя связь между перемещением и углом поворота в (3.16), найдем k - ю форму угла поворота при свободных колебаниях балки

$$\vartheta_k(z) = -\frac{k\pi}{L} \sqrt{\frac{2}{\rho L}} \cos \frac{k\pi z}{L}$$
 (3.23)

Аналогично можно найти формы силы и момента.

Выведем уравнения для определения главных координат в разложении (3.18). Для этого запишем уравнения для форм свободных колебаний в операторном виде

$$D\xi_k - \lambda_k^2 R \eta_k = 0$$

$$D^* \eta_k - B\xi_k = 0$$
(3.24)

Домножим первое уравнение из (3.17) на форму  $\eta_k$ , второе на форму  $\xi_k$  и проинтегрируем оба уравнения по длине балки

$$\int_{0}^{L} D\xi \eta_{k} dz + \int_{0}^{L} R \ddot{\eta} \eta_{k} dz = \int_{0}^{L} f \eta_{k} dz$$
$$\int_{0}^{L} D^{*} \eta \xi_{k} dz - \int_{0}^{L} B \xi \xi_{k} dz = 0$$

Подставим сюда разложение (18) и проведем преобразования с учетом свойства самосопряженности операторов D и  $D^*$  и свойства ортогональности форм свободных колебаний с весом R. В результате получим уравнение для определения главных координат в разложениях (3.18)

$$\ddot{\beta}_k(t) + \lambda_k^2 \beta_k(t) = f_k 
\alpha_k(t) = \beta_k(t)$$
(3.25)

где 
$$f_k = \int_0^L \mu \vartheta_k(\mathbf{z}) d\mathbf{z}$$

В компьютерной модели балки длиной L=1470 i i , моментом инерции  $I=\frac{bh^3}{12},\ b=0.048,\ h=0.003$  , массой  $\rho=7.8 \cdot bh \cdot 1000$  и модулем Юнга для стали  $E=2 \cdot 10^{11}$  , низшая собственная частота изгибных колебаний которой составляет  $\lambda_1=20\frac{pa\partial}{c}$  , было реализовано разложение (3.18) по четырём формам. Формы свободных колебаний вычислялись аналитически по формулам (3.22), (3.23).

Главные координаты находились путём численного интегрирования уравнений (3.25) при нулевых начальных условиях. В процедуре численного интегрирования было учтено демпфирование, коэффициент демпфирования принимался равным  $\gamma_k = \frac{2}{\omega}$ . Уравнение второго порядка для главных координат

$$\ddot{\beta}_k(t) + \lambda_k^2 \beta_k(t) + \gamma_k \dot{\beta}_k(t) = f_k$$

приводилось к системе уравнений первого порядка:

$$\dot{X} = A_{rs}X + f_d, \tag{3.26}$$

где 
$$X = \begin{bmatrix} \beta_k(t) \\ \dot{\beta}_k(t) \end{bmatrix}$$
,  $A_{rs} = \begin{bmatrix} 0_{k \times k} & I_{k \times k} \\ -\Lambda_{eg_{-}v} & -N_d \end{bmatrix}$ ,  $0_{k \times k}$ ,  $I_{k \times k}$  - нулевая и единичная матрицы

размерности 
$$[k \times k]$$
,  $\Lambda_{eg_{v}} = diag\left\{\lambda_{k}^{2}\right\}$ ,  $N_{d} = diag\left\{\gamma_{k}\right\}$ ,  $f_{d} = \begin{bmatrix} 0_{k} \\ f_{k} \end{bmatrix}$ .

Далее проводилось численное интегрирование системы (3.26) с помощью явного p-этапного метода Рунге-Кутты 5-го порядка с дополнительно встроенной в процедуру интегрирования схемой 4-го порядка (метод пары Dormand-Prince [172]). Реализация данного метода в течение шага по времени  $\Delta t$ , от временного уровня  $t^{(n)}$  до уровня  $t^{(n+1)}$  представлена как

$$\tilde{F}^{(i)} = \tilde{F}^{(i)} \left( t^{(i)}, X^{(i)} \right), \quad X^{(i)} = X^{(n)} + \Delta t \sum_{j=1}^{i-1} \tilde{a}_{ij} \tilde{F}^{(j)}, \quad t^{(i)} = t^{(n)} + c_i \Delta t,$$

$$X^{(n+1)} = X^{(n)} + \Delta t \sum_{j=1}^{p} \tilde{b}_{j} \tilde{F}^{(j)}, \quad \hat{X}^{(n+1)} = X^{(n)} + \Delta t \sum_{j=1}^{p} \hat{b}_{j} \tilde{F}^{(j)},$$

где i — шаг интегрирования,  $\tilde{F} = A_{rs}X + f_d$ ,  $X^{(n)} = X\left(t^{(n)}\right)$ ,  $X^{(n+1)} = X\left(t^{(n)} + \Delta t\right)$  - решения 5-го порядка точности на временных уровнях n и n+1 соответственно,  $\hat{X}^{(n+1)}$  - вектор, ассоциированный со встроенной схемой 4-го порядка. Коэффициенты  $\tilde{a}_{ij}$ ,  $\tilde{b}_i$ ,  $\hat{b}_i$ ,  $c_i$  ограничены уравнениями состояния [172].

Для проверки эффективности предложенного биоморфного алгоритма, реализованного в программном комплексе Matlab, распределённый внешний момент принимался в виде одиночной гармоники  $\mu = \cos \omega t \delta(z - \frac{L}{2}), \ \omega = 5 \frac{pad}{c}, \ \delta$ -дельта-функция. При этом  $f_k = 9_k(\frac{L}{2})\cos \omega t$ . Модели датчиков (далее просто «датчики»), измеряющие угол 9(x,t), располагались в десяти сечениях вдоль балки равномерно, исключая концы. Нумерация датчиков велась, начиная с левого конца балки.

На Рисунке 3.13 представлены показания второго и четвертого датчиков.

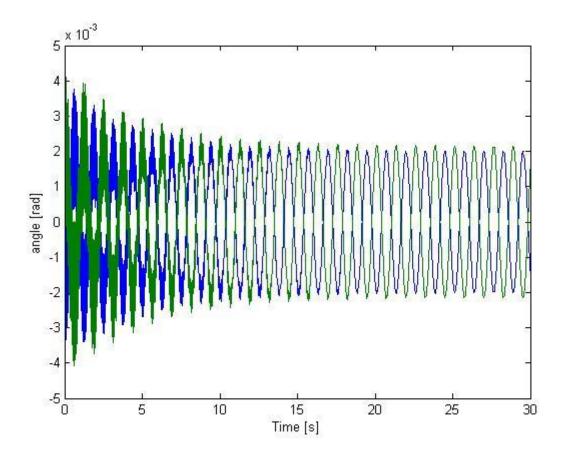


Рисунок 3.13 Осциллограммы сигналов обратной связи с датчиков №2 и №4 при вынужденных колебаниях балки без управления

Управляющие моменты  $\mu_l(t)$  приложим в тех же сечениях, где расположены датчики углов поворота. Организуем управление с обратной связью по измерениям углов

$$\mu_l = K_l \vartheta(\mathbf{z}_l, t) ,$$

где  $K_l$  - коэффициент обратной связи в l - ом сечении,  $z_l = \frac{l}{N+1}$  .

В этом случае интенсивность внешней нагрузки принимает вид

$$\mu = \cos \omega t \delta(z - \frac{l}{2}) - \sum_{l=1}^{10} \mu_l(t) \delta(z - z_l)$$

На Рисунке 3.14 представлены показания второго и четвертого датчиков при управлении с обратной связью. Коэффициенты обратной связи взяты одинаковыми во всех сечениях и равными  $K_l = 100 \frac{H}{pa\partial}$ .

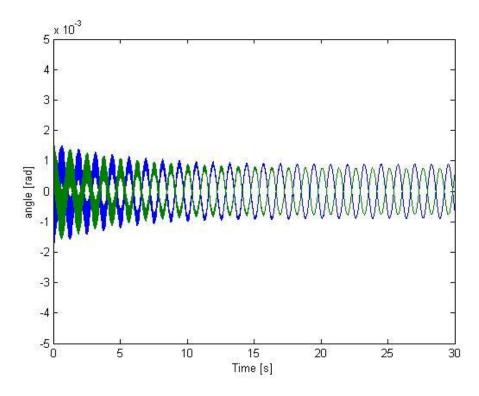


Рисунок 3.14 Осциллограммы датчиков обратных связей №2 и №4 при локальном замыкании десяти контуров обратной связи с одинаковыми коэффициентами усиления.

Модифицируем управление с обратной связью с учётом предлагаемой концепции биоморфного управления.

Вычислим скалярное произведение вектора, образованного значениями углов в сечениях, где установлены датчики, и вектора k - ой формы колебаний, составленного из значений, вычисленных в тех же сечениях

$$q_k(t) = \sum_{l=1}^{10} \vartheta(\mathbf{z}_l, t) \vartheta_k(\mathbf{z}_l).$$

Пусть вычислено m таких скалярных произведений. Управляющий момент в каждом сечении сформируем в виде линейной комбинации вычисленных  $q_k$ :

$$\mu_{l}(t) = K_{l} \sum_{k=1}^{m} s_{k,l} q_{k}(t).$$

Весовые коэффициенты  $S_{k,l}$  будем подбирать индивидуально для каждого сечения. Как очевидно для данной задачи они должны быть пропорциональны собственным формам  $\vartheta_k(\mathbf{z}_l)$ .

<u>Математическая модель биоморфного алгоритма выглядит следующим</u> образом:

После задания всех необходимых параметров касательно характеристик управляемого объекта (в данном случае — модель балки) и определения свободных форм колебаний объекта, происходит заполнение соответствующими элементами матрицы F и S:

$$F = \vartheta_k \left( z_l \right) \left( \vartheta_k \left( z_l \right) \right)^T$$

$$S = \vartheta_k \left( z_l \right)$$

Далее происходит заполнение матрицы управления U с учётом сформированного управляющего момента  $\mu_t(t)$ :

$$U = \vartheta_k(z_l) K M^T,$$

где 
$$K = diag\{K_l\}, M = FS$$

и вычитание её из матрицы  $A_{rs}$ :

$$A_{rs} = \begin{bmatrix} 0_{k \times k} & I_{k \times k} \\ -\left(\Lambda_{eg_{v}} + U\right) & -N_{d} \end{bmatrix}.$$

В итоге получаем новую систему уравнений, которую необходимо численно проинтегрировать:

$$\dot{X} = A_{rs}X + f_{d}$$

где по-прежнему  $X = \begin{bmatrix} \beta_k(t) \\ \dot{\beta}_k(t) \end{bmatrix}$ .

Выводим измерения датчиков углов:

$$\varphi(z,t) = \sum_{k=1}^{m} \beta_k(t) \vartheta_k(z_l)$$

На Рисунке 3.15 представлен результат управления в случае, когда управляющие моменты сформированы на основе второго и четвёртого скалярного произведения

$$\mu_l(t) = K_l(s_{2,l}q_2(t) + s_{4,l}q_4(t)).$$
 (3.27)

Весовые коэффициенты  $S_{2,l}$  принимали значения -1 и +1, в зависимости от знака формы  $9_2(\mathbf{z}_l)$  в рассматриваемом сечении. Весовые коэффициенты  $S_{4,l}$  принимали значения -1 и +1, в зависимости от знака формы  $9_4(\mathbf{z}_l)$  в рассматриваемом сечении. Коэффициенты обратной связи оставались равными  $K_l = 100 \frac{H}{pad}$ . Таким образом, коэффициенты матрицы F определены с точностью до знака!

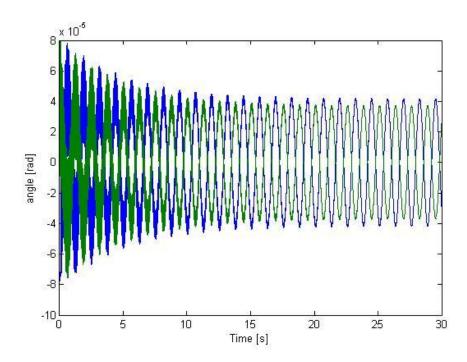


Рисунок 3.15 Результат биоморфного управления по двум собственным формам

Совершенно очевидно, что приводы в этом случае мешают друг другу. Одновременно с реакцией на первую форму, возбуждаются и все остальные. Кроме того, используется всего два контура обратной связи (по двум формам). Не смотря на это, качество управления, судя по уменьшению величины амплитуды колебаний, лучше, чем при локальном управлении по 10 контурам.

На рисунке 3.16 представлен результат управления в случае, когда управляющие моменты сформированы на основе четырёх скалярных произведений

$$\mu_l(t) = K_l \sum_{k=1}^4 s_{k,l} q_k(t)$$
 (3.28)

Весовые коэффициенты назначались следующим образом  $s_{k,l} = \widehat{\vartheta}_k(\mathbf{z}_l)$ . Оценка  $\widehat{\vartheta}_k(\mathbf{z}_l)$  производилась до первой значащей цифры. Коэффициенты обратной связи оставались равными  $K_l = 100 \frac{H}{pad}$ .

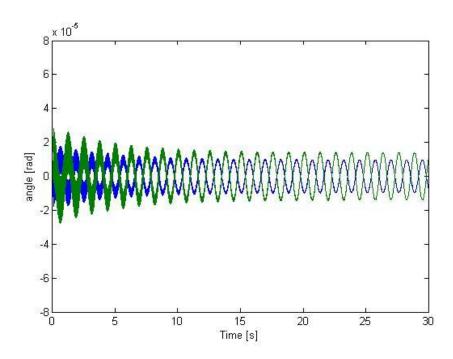


Рисунок 3.16 Результат управления в случае, когда управляющие моменты сформированы на основе четырёх собственных форм. Весовые коэффициенты  $s_{k,l} = \hat{\theta}_k(\mathbf{z}_l)$ . Оценка  $\hat{\theta}_k(\mathbf{z}_l)$  производилась до первой значащей цифры.

На рисунке 3.17 представлены показания второго датчика. Зелёным цветом выделен результат управления с обратной связью по показаниям датчиков. Синяя кривая соответствует случаю, когда управляющие моменты сформированы по формуле (3.27) с округлением коэффициентов  $s_{k,l} = \hat{9}_k(\mathbf{z}_l)$  до первого знака.

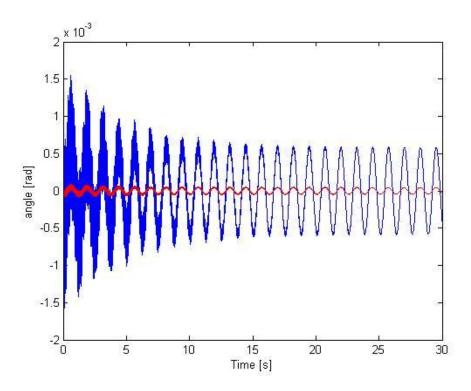


Рисунок 3.17 Осциллограмма сигала датчика №2. Результаты управления по десяти локальным контурам (синий) и биоморфного по двум формам (два контура ОС) с округлением коэффициентов матрицы F до первой значащей цифры (красный).

На рисунке 18 представлены показания второго датчика. Зелёным цветом выделен результат управления с обратной связью по показаниям датчиков. Синяя кривая соответствует случаю, когда управляющие моменты сформированы по формуле (3.28).

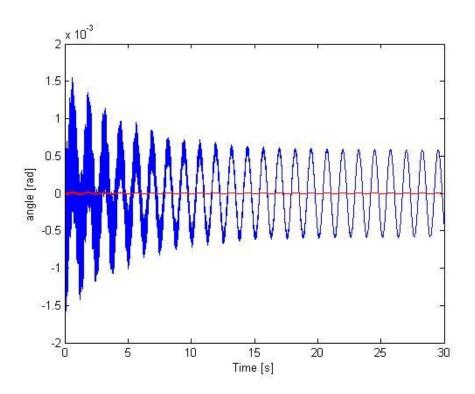


Рисунок 3.18 Осциллограмма сигала датчика №2. Результаты управления по десяти локальным контурам (синий) и биоморфного по четырём формам (четыре контура ОС) с округлением коэффициентов матрицы *F* до первой значащей цифры (красный).

Полученный результат — очень хороший. Необходимо проверить, что изменится, если в модели балки учесть больше форм. В компьютерной модели балки было реализовано разложение (3.18) по восьми формам.

На рисунке 3.19 представлены показания второго и четвёртого датчиков при отсутствии управления.

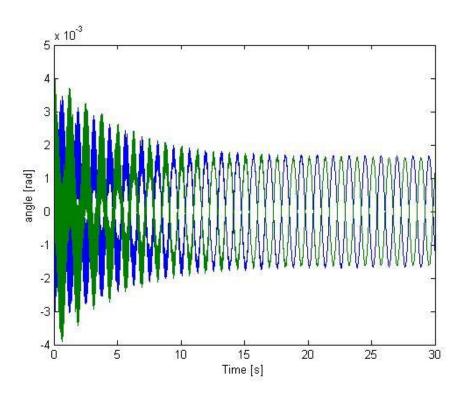


Рисунок 3.19 Осциллограммы сигналов обратной связи с датчиков №2 и №4 при вынужденных колебаниях балки без управления (моделирование по восьми собственным формам).

На рисунке 3.20 представлены показания второго и четвёртого датчиков при управлении с обратной связью  $\mu_l = K_l \vartheta(\mathbf{z}_l,t)$ . Коэффициенты обратной связи взяты одинаковыми во всех сечениях и равными  $K_l = 100 \frac{H}{pad}$ .

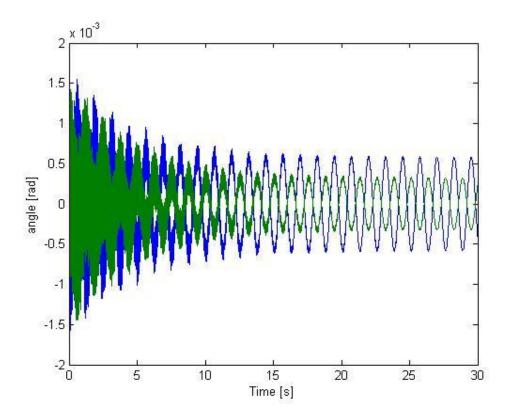


Рисунок 3.20 Осциллограммы датчиков обратных связей №2 и №4 при локальном замыкании десяти контуров обратной связи с одинаковыми коэффициентами усиления (моделирование по восьми собственным формам).

Очевидно, что кроме быстро затухающих высокочастотных колебаний в начале осциллограммы нет никакой разницы рисунков 3.19 и 3.20 с рисунками 3.13 и 3.14 соответственно.

Следующие рисунки представляют результат биоморфного управления с модифицированной обратной связью и одинаковыми коэффициентами усиления  $K_{\scriptscriptstyle I} = 100 \frac{H}{pa\partial} \,.$ 

На рисунке 3.21 представлен результат управления в случае, когда управляющие моменты сформированы на основе второго и четвёртого скалярного произведения

$$\mu_{I}(t) = K_{I}(s_{2I}q_{2}(t) + s_{4I}q_{4}(t)).$$

Весовые коэффициенты  $s_{2,l}$  принимали значения -1 и +1, в зависимости от знака формы  $9_2(\mathbf{z}_l)$  в рассматриваемом сечении. Весовые коэффициенты  $s_{4,l}$  принимали значения -1 и +1, в зависимости от знака формы  $9_4(\mathbf{z}_l)$  в рассматриваемом сечении.

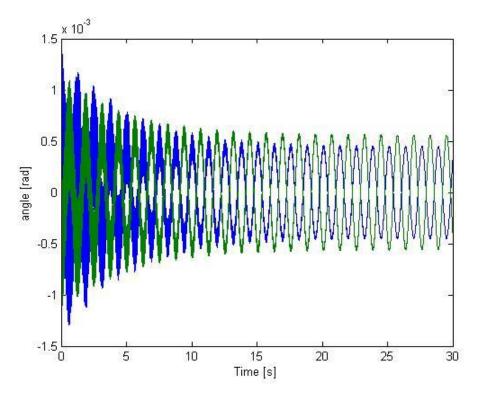


Рисунок 3.21 Результат биоморфного управления по двум собственным формам, коэффициенты матрицы *F* определены с точностью до знака (моделирование по восьми собственным формам).

Очевидно, что большой разницы с рисунком 3.15 здесь также нет.

На рисунке 3.22 представлен результат управления в случае, когда управляющие моменты сформированы на основе второго, четвёртого и шестого скалярного произведения

$$\mu_l(t) = K_l(s_{2,l}q_2(t) + s_{4,l}q_4(t) + s_{6,l}q_6(t)).$$

Весовые коэффициенты  $s_{k,l}$  принимали значения -1 и +1, в зависимости от знака формы  $\vartheta_k(\mathbf{z}_l)$  в рассматриваемом сечении.

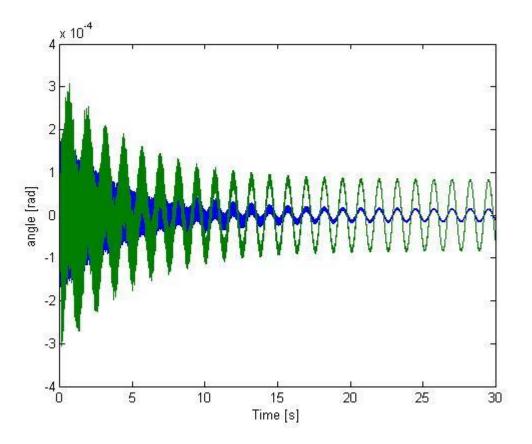


Рисунок 3.22 Результат биоморфного управления по трём собственным формам, коэффициенты матрицы F определены с точностью до знака (моделирование по восьми собственным формам).

На Рисунке 3.23 представлен результат управления в случае, когда управляющие моменты сформированы на основе второго, четвёртого, шестого и восьмого скалярных произведений

$$\mu_l(t) = K_l(s_{2,l}q_2(t) + s_{4,l}q_4(t) + s_{6,l}q_6(t) + s_{8,l}q_8(t)).$$

Весовые коэффициенты  $s_{k,l}$  принимали значения -1 и +1, в зависимости от знака формы  $\vartheta_k(\mathbf{z}_l)$  в рассматриваемом сечении.

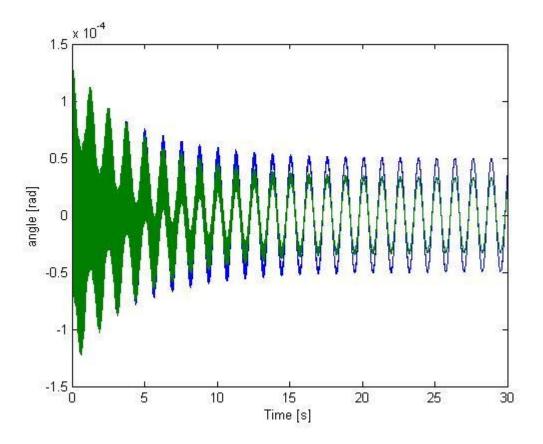


Рисунок 3.23 Результат биоморфного управления по четырём собственным формам, коэффициенты матрицы F определены с точностью до знака (моделирование по восьми собственным формам).

На рисунке 3.24 представлен результат управления в случае, когда управляющие моменты сформированы на основе четырёх скалярных произведений

$$\mu_l(t) = K_l \sum_{k=1}^4 s_{k,l} q_k(t)$$

Весовые коэффициенты назначались следующим образом  $s_{k,l} = \widehat{\vartheta}_k(\mathbf{z}_l)$ . Оценка  $\widehat{\vartheta}_k(\mathbf{z}_l)$  производилась до первой значащей цифры.

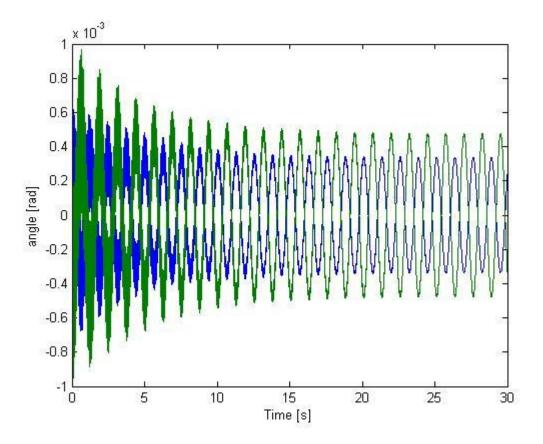


Рисунок 3.24 Результат биоморфного управления по четырём собственным формам, коэффициенты матрицы F определены с точностью до первой значащей цифры (моделирование по восьми собственным формам).

На рисунке 3.25 представлен результат управления в случае, когда управляющие моменты сформированы на основе шести скалярных произведений

$$\mu_l(t) = K_l \sum_{k=1}^{6} s_{k,l} q_k(t)$$

Весовые коэффициенты назначались следующим образом  $s_{k,l} = \widehat{\vartheta}_k(\mathbf{z}_l)$ . Оценка  $\widehat{\vartheta}_k(\mathbf{z}_l)$  производилась до первой значащей цифры.

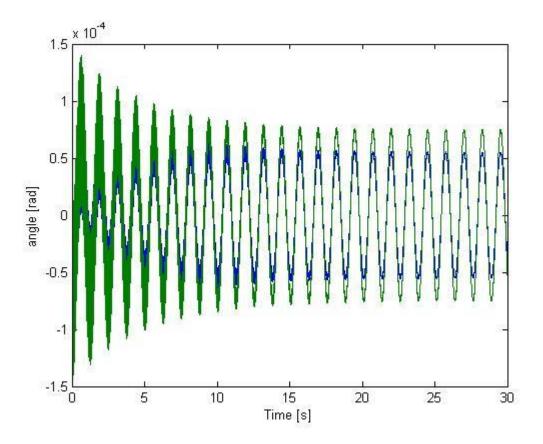


Рисунок 3.25 Результат биоморфного управления по шести собственным формам, коэффициенты матрицы F определены с точностью до первой значащей цифры (моделирование по восьми собственным формам).

На рисунке 3.26 представлен результат управления в случае, когда управляющие моменты сформированы на основе восьми скалярных произведений

$$\mu_l(t) = K_l \sum_{k=1}^{8} s_{k,l} q_k(t)$$

Весовые коэффициенты назначались следующим образом  $s_{k,l} = \widehat{\vartheta}_k(\mathbf{z}_l)$ . Оценка  $\widehat{\vartheta}_k(\mathbf{z}_l)$  производилась до первой значащей цифры.

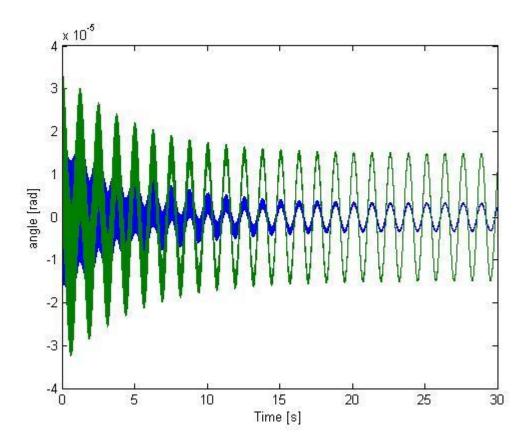


Рисунок 3.26 Результат биоморфного управления по восьми собственным формам, коэффициенты матрицы F определены с точностью до первой значащей цифры (моделирование по восьми собственным формам).

Как видно из представленных результатов, биоморфный алгоритм управления довольно хорошо справляется с задачей подавления гармонических колебаний упругой балки. В этом можно также убедиться, посмотрев на рисунок 3.27, на котором показан уровень значение амплитуды колебаний.

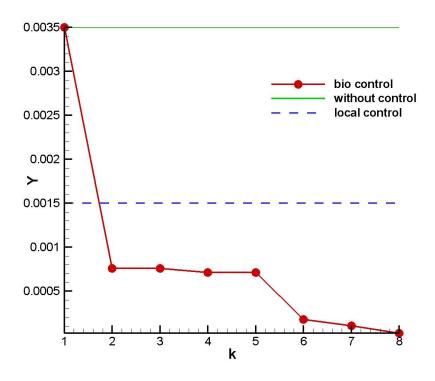


Рисунок 3.27 Уровень амплитуды колебаний (без управления, при локальном и биоморфном управлении) в зависимости от количества форм, по которым производится управление.

Из рисунка видно, что биоморфное управление намного эффективнее подавляет колебания по сравнению с локальным управлением уже при двух формах. Дальнейшее увеличение форм колебаний, по которым производится управление, приводит ещё к большему снижению уровня амплитуды колебаний упругого объекта.

Проверим теперь его эффективность в случае, когда распределённый внешний момент, изгибающий балку, изменяется по квазислучайному закону в виде суммы большого числа гармоник, смоделированному в предыдущей главе.

### 3.3 Биоморфное подавление колебаний упругой балки вызванных внешним стохастических воздействием

На рисунке 3.28 представлены показания второго и четвёртого датчиков.

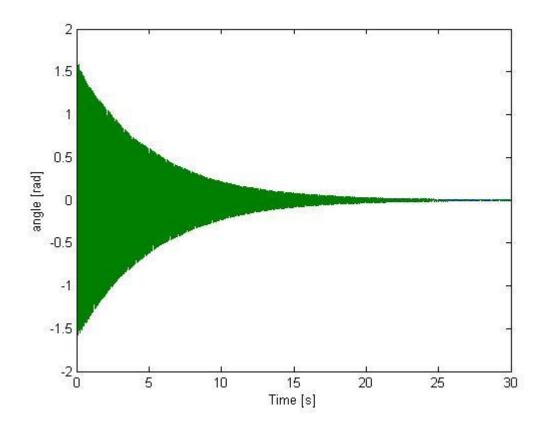


Рисунок 3.28 Осциллограммы сигналов обратной связи с датчиков №2 и №4 при вынужденных колебаниях балки без управления

На рисунке 3.29 представлены показания второго и четвёртого датчиков при управлении с обратной связью. Коэффициенты обратной связи взяты одинаковыми во всех сечениях и равными  $K_I = 100 \frac{H}{pao}$ .

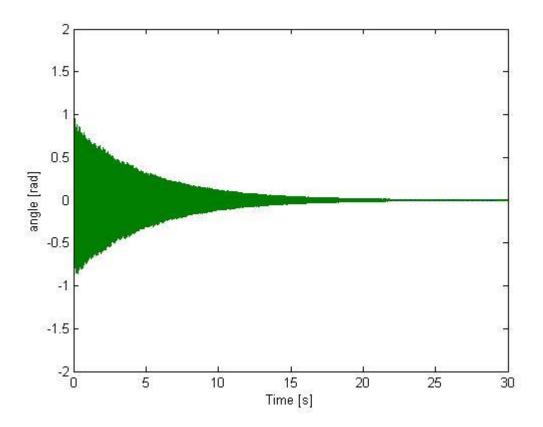


Рисунок 3.29 Осциллограммы сигналов датчиков обратных связей №2 и №4 при локальном замыкании десяти контуров обратной связи с одинаковыми коэффициентами усиления.

На рисунке 3.30 представлены показания второго датчика. Зелёным цветом выделен результат управления с обратной связью по показаниям датчиков. Красная кривая соответствует случаю управления по двум собственным формам с округлением коэффициентов  $s_{k,l} = \widehat{\vartheta}_k(\mathbf{z}_l)$  до первого знака.

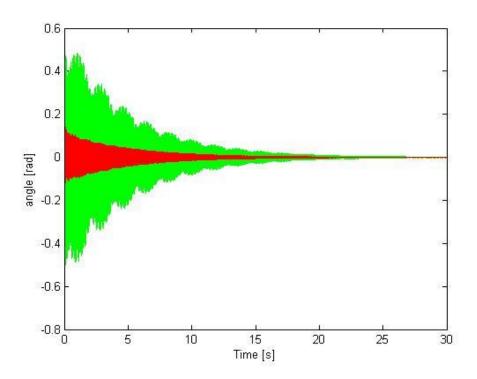


Рисунок 3.30 Осциллограмма сигнала датчика №2. Результаты управления по десяти локальным контурам (зелёный) и биоморфного по двум формам (два контура ОС) с округлением коэффициентов матрицы F до первой значащей цифры (красный).

Так же, как и в случае гармонических колебаний были получены очень хорошие результаты, которые нужно проверить при учёте в модели балки большего количества форм. В компьютерной модели балки было реализовано разложение (3.18) по восьми формам.

Посмотрим, как влияет последовательное добавление форм колебаний на качество управления (рисунки 3.31-3.38).

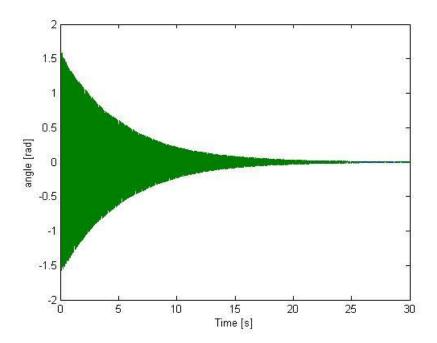


Рисунок 3.31 Результат биоморфного управления по одной собственной форме (моделирование по восьми собственным формам).

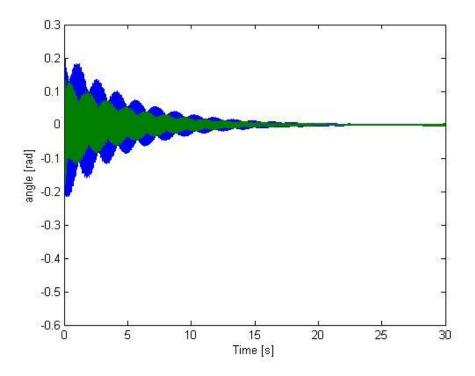


Рисунок 3.32 Результат биоморфного управления по двум собственным формам (моделирование по восьми собственным формам).

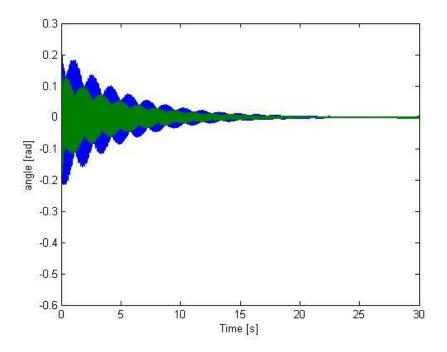


Рисунок 3.33 Результат биоморфного управления по трём собственным формам (моделирование по восьми собственным формам).

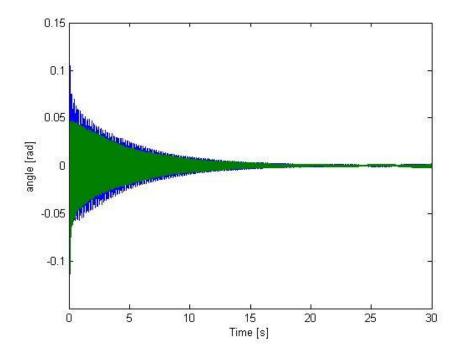


Рисунок 3.34 Результат биоморфного управления по четырём собственным формам (моделирование по восьми собственным формам).

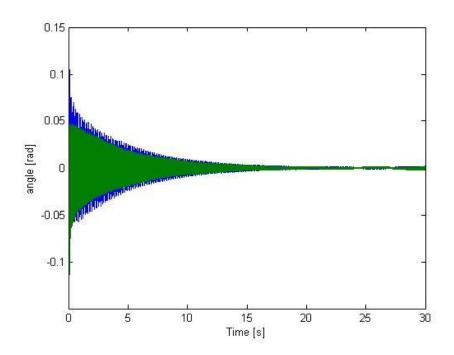


Рисунок 3.35 Результат биоморфного управления по пяти собственным формам (моделирование по восьми собственным формам).

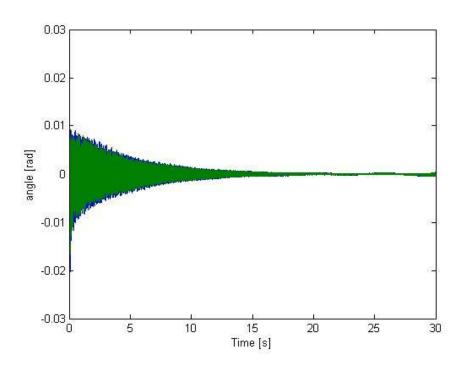


Рисунок 3.36 Результат биоморфного управления по шести собственным формам (моделирование по восьми собственным формам).

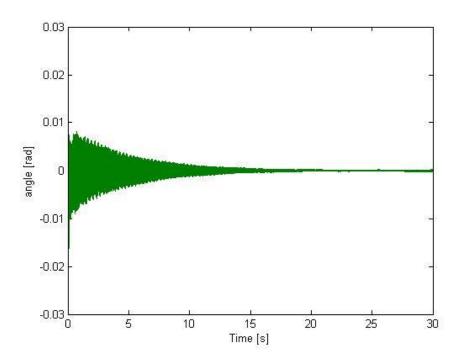


Рисунок 3.37 Результат биоморфного управления по семи собственным формам (моделирование по восьми собственным формам).

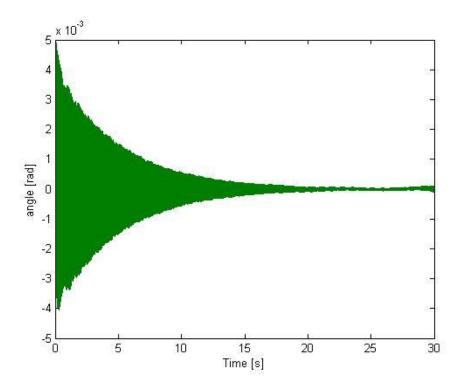


Рисунок 3.38 Результат биоморфного управления по восьми собственным формам (моделирование по восьми собственным формам).

Анализ полученных результатов показывает, что при сопоставимом числе обратных связей и тех же коэффициентах усиления точность биоморфного управления на два порядка выше, чем у стандартного способа с набором локальных контуров управления. В этом можно опять же убедиться, построив зависимость уровня значение амплитуды колебаний от количества форм, по которым производится управление (рисунок 3.39).

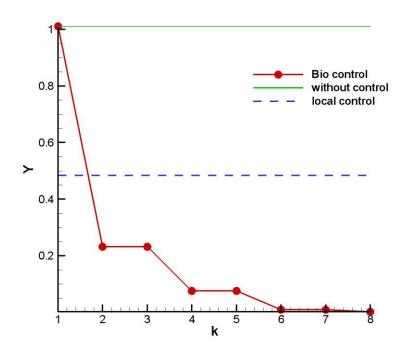


Рисунок 3.39 Уровень амплитуды колебаний (без управления, при локальном и биоморфном управлении) в зависимости от количества форм, по которым производится управление.

Из рисунка видно, что биоморфное управление намного эффективнее подавляет колебания по сравнению с локальным управлением уже при двух формах. Дальнейшее увеличение форм колебаний, по которым производится управление, приводит ещё к большему снижению уровня амплитуды колебаний упругого объекта, а точнее при добавлении двух форм значение амплитуды уменьшается на порядок.

Варьирование весовых коэффициентов  $S_{k,l}$  позволит определить, насколько робастными являются биоморфные алгоритмы управления. Рассмотрим четыре первом весовые коэффициенты возьмём, равными собственных форм  $\vartheta_k(\mathbf{z}_l)$ В каждом сечении с точностью до четырёх цифр после запятой, во втором – с точностью до одной цифры после запятой, в третьем - до целых значений собственных форм, а в четвёртом случае — с точностью до знака формы  $\theta_k(z_i)$  в рассматриваемом сечении. Коэффициенты обратной связи будем брать одинаковыми во всех сечениях и равными  $K_l = 100 \frac{H}{pad}$ .

Соответствующие результаты моделирования представлены на рисунках 3.40, 3.41, 3.42 и 3.43 соответственно.

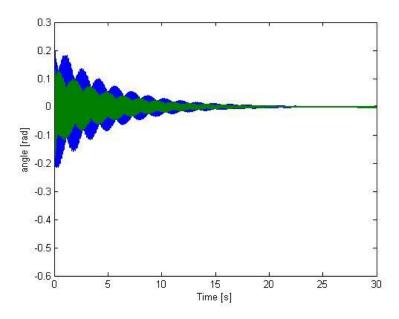


Рисунок 3.40 Осциллограммы сигналов с датчиков №2 и №4 при биоморфном управлении по 2-м формам. Весовые коэффициенты  $s_{k,l}$  равны значениям собственных форм с точностью до четырёх цифр после запятой

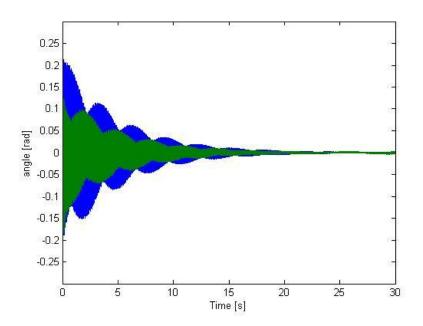


Рисунок 3.41 Осциллограммы сигналов с датчиков №2 и №4 при биоморфном управлении по 2-м формам. Весовые коэффициенты  $s_{k,l}$  равны значениям собственных форм с точностью до одной цифры после запятой

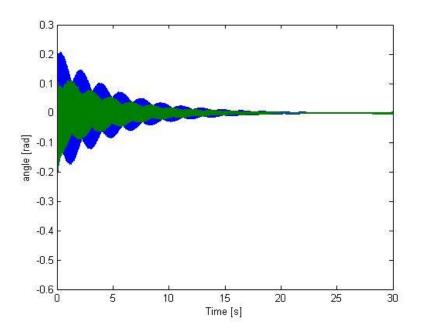


Рисунок 3.42 Осциллограммы сигналов с датчиков №2 и №4 при биоморфном управлении по 2-м формам. Весовые коэффициенты  $s_{k,l}$  равны целым значениям собственных форм

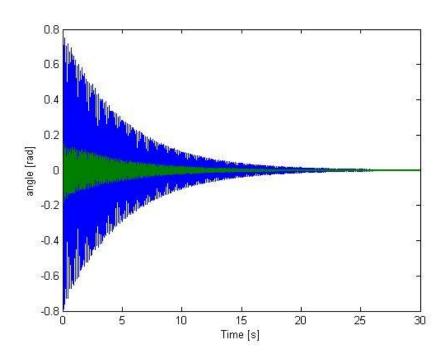


Рисунок 3.43 Осциллограммы сигналов с датчиков №2 и №4 по 2-м формам. Весовые коэффициенты  $s_{k,l}$  принимали значения -1 и +1, в зависимости от знака формы в рассматриваемом сечении

Из данных осциллограмм видно, что существенного ухудшения управления при уменьшении точности задания параметров системы управления, не происходит. Это доказывает робастность построенных алгоритмов управления.

### 3.4 Реализация алгоритма биоморфного управления

Как правило, модель объекта неизвестна. Для её построения необходимо провести идентификацию объекта. Расстановку датчиков и приводов можно проводить в соответствии с мехатронными соображениями, это позволит экономить как на самой системе управления, так и на энергозатратах при регулировании.

Таким образом, первый этап – построение моделей и проектирование системы управления. Вторым этапом должно стать определение собственных

форм движения. На третьем этапе необходимо построить матрицу *F* . После определения всех параметров можно вести управление по произвольному числу модулей форм (обратных связей), ориентируясь, например, на точность управления. Причём подключать и отключать дополнительные ОС можно динамически в процессе управления, что позволяет получать новые эффекты. Например, при увеличении уровня шумов можно отключить высокочастотные формы для большей устойчивости системы.

Робастность, показанная на примере, позволяет проводить управление и для нелинейных объектов с использованием, например, линеаризации относительно рабочей точки.

В приведенном алгоритме важен первый этап. Именно уравнения движения позволяют вычислить и собственные формы и компоненты матрицы F. Обучение, как правило, сводится к последовательному всё более точному воспроизведению форм. Во время такого воспроизведения организм вырабатывает матрицу F. Сами формы либо навязываются извне, либо определяются организмом по методу минимальных прилагаемых усилий.

Эти соображения позволяют вообще отказаться от моделирования и идентификации.

Действительно, допустим, что объект за счёт некоторого вектора управляющих воздействий  $u_1$  смог занять положение собственной формы  $S_1$ . Допустим также, что он делает это довольно медленно, то есть  $\dot{X}\approx 0$  (как это и происходит при обучении). Тогда из уравнений объекта:

$$AS_1 + Bu_1 \approx 0 \tag{3.29}$$

Так как  $AS_1 = \lambda_A^1 S_1$ , по определению собственного вектора, то

$$Bu_1=-\lambda_A^1S_1,$$

то есть вектор, ортогональный всем формам  $S_i$ , кроме первой. Следовательно, из набора соответствующих векторов управлений  $u_1, u_2, ...., u_m$  можно составить матрицу F, которая сделает скалярное произведение SBF - диагональной матрицей. Причём абсолютно точно знать F необязательно, как показали результаты моделирования — достаточно знать первый знак

Следовательно, при биоморфном управлении достаточно знать формы, движения. Алгоритм идентификации сведётся к, выработке сигналов управления, позволяющих объекту воспроизводить эти формы.

# 3.5 Биоморфное управление вращением привода с упругой кинематической цепью

Проверим эффективность биоморфных алгоритмов управления на примере другой простейшей упругой системы.

Рассмотрим упругую систему, модель которой показана на рисунке 3.43.

$$M, \phi_1$$

Рисунок 3.43 Схема управляемой двух-массовой системы

Уравнения движения имеют вид:

$$J_{1}\ddot{\varphi}_{1} = b(\dot{\varphi}_{2} - \dot{\varphi}_{1}) + C(\varphi_{2} - \varphi_{1}) + M$$

$$J_{2}\ddot{\varphi}_{2} = -b(\dot{\varphi}_{2} - \dot{\varphi}_{1}) - C(\varphi_{2} - \varphi_{1})$$
(3.30)

Здесь  $J_1$ ,  $J_2$  - моменты инерции ротора привода и нагрузки (будем считать их для простоты единичными), C и b - жёсткость и внутренне демпфирование в кинематической цепи,  $\varphi_1$ ,  $\varphi_2$  - углы поворота первой и второй массы, M - момент, действующий со стороны привода.

Задачей управления для таких систем часто является разгон и поддержание постоянной скорости вращения. Как правило, для этого применяют управления с датчиком обратной связи, закреплённом на роторе привода. Общая формула такого управления имеет вид

$$M = k(\dot{\varphi}^* - \dot{\varphi}_1) \tag{3.10}$$

где k - коэффициент усиления,  $\dot{\phi}^*$  - заданная угловая скорость. Необходимо отметить, что и условие управляемости и условие наблюдаемости в этом случае выполняются. Вся система уравнений в пространстве состояний имеет вид

$$\dot{X}_{1} = b(X_{2} - X_{1}) + CX_{3} + u$$

$$\dot{X}_{2} = -b(X_{2} - X_{1}) - CX_{3}$$

$$\dot{X}_{3} = X_{2} - X_{1}$$

$$u = k(\dot{\phi}^{*} - X_{1})$$

$$X(0) = X_{0}$$
(3.31)

Характеристический полином системы имеет вид

$$\lambda^{3} + (2b+k)\lambda^{2} + (2c+kb)\lambda + kc = 0$$
(3.32)

Положение корней характеристического полинома в зависимости коэффициента усиления k приведено на корневом годографе рисунок 3.44.

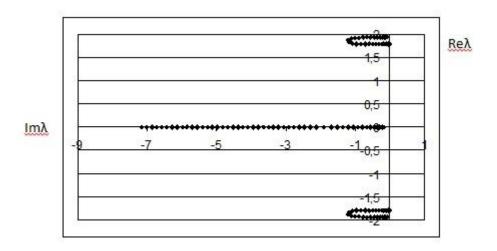


Рисунок 3.44 Корневые годографы в случае управления по угловой скорости ротора двигателя

Начальное положение корней определяется естественным демпфированием, увеличение коэффициента усиления сначала вносит дополнительное демпфирование, но затем частота собственных колебаний начинает уменьшаться вместе с демпфированием, которое при больших коэффициентах усиления становится меньше естественного. Точке максимального демпфирования соответствует переходный процесс, изображенный на рисунке 3.45.

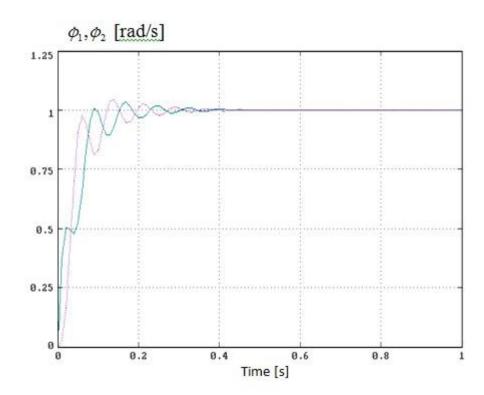


Рисунок 3.45 Переходный процесс при k = 50, соответствующий максимальному демпфированию в системе управления

Переходные процессы при меньших и больших коэффициентах обратной связи представлены на рисунках 3.46 и 3.47.

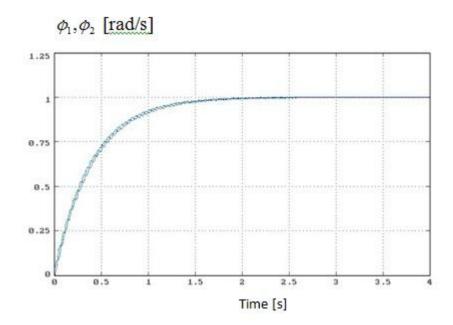


Рисунок 3.46 Переходный процесс при k=5, меньше, чем соответствующий максимальному демпфированию в системе управления

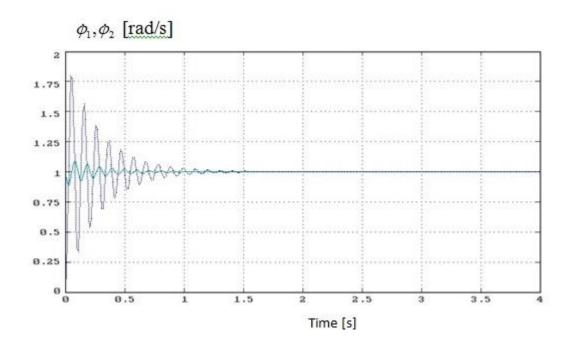


Рисунок 3.47 Переходный процесс при k = 200, больше, чем соответствующий максимальному демпфированию в системе управления

Сравним полученные результаты с биоморфным подходом, будем учитывать только данные датчиков скорости. Очевидно, что первой собственной формой будет вращение как жёсткого целого, то есть вектор (1;1), а не вектор (1;-1).

Пусть управление формируется в виде

$$u = k_1(2\dot{\phi}^* - (X_1 + X_2)) - k_2(X_1 - X_2)$$
(3.33)

Корневой годограф при  $k_2 = 0$  изображен на рисунке 3.48

$$q_1 = X_1 + X_2$$
  
 $q_2 = X_1 - X_2$ 

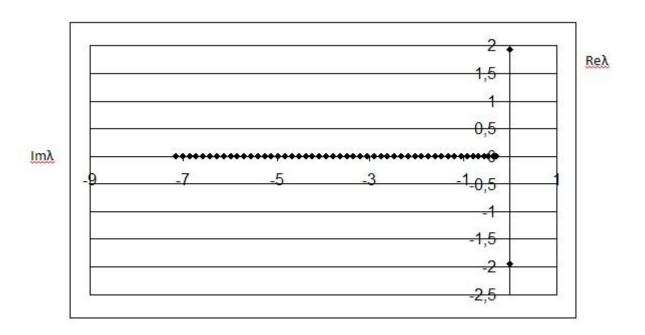


Рисунок 3.48. Корневой годограф  $k_1,\,k_2\!\!=\!\!0$ 

Отличительной особенностью является то, что положение корней с мнимой частью не зависит от коэффициента усиления, следовательно, можно разделить точность стабилизации скорости (коэффициент  $k_1$ ) и демпфирование колебаний (коэффициент  $k_2$ ).

Корневой годограф для случая ненулевых коэффициентов  $k_1$  и  $k_2$  приведен на рисунке 3.49. Анализ корневого годографа при  $k_2 > 0$  колебательного процесса показывает, что возможно получение не колебательных режимов.

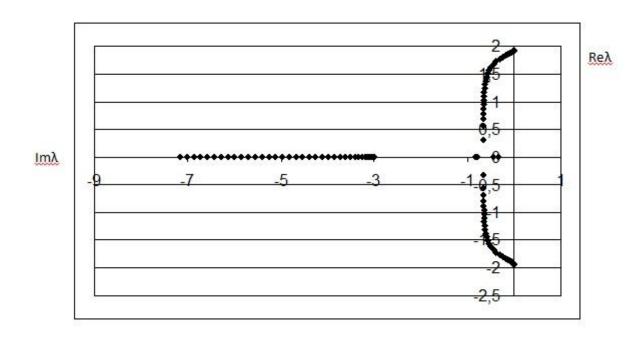


Рисунок 3.49 Корневой годограф  $k_1$ ,  $k_2=1000$ 

Преимущества биоморфного управления подтверждаются графиками переходных процессов, представленными на рисунках 3.50-3.52 как для оптимального соотношения коэффициентов  $k_1$ ,  $k_2$ , так и для отличающихся в два раза от оптимальных значений.

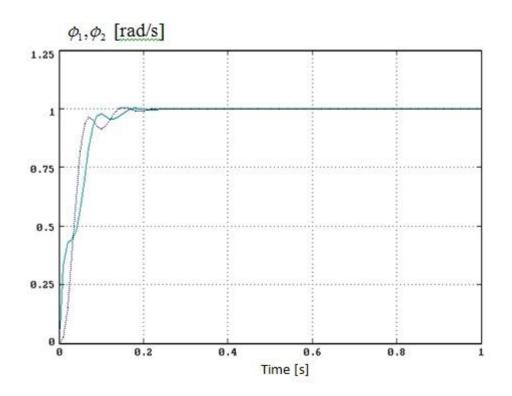


Рисунок 3.50 Оптимальный переходный процесс  $k_1$ =25,  $k_2$ =50

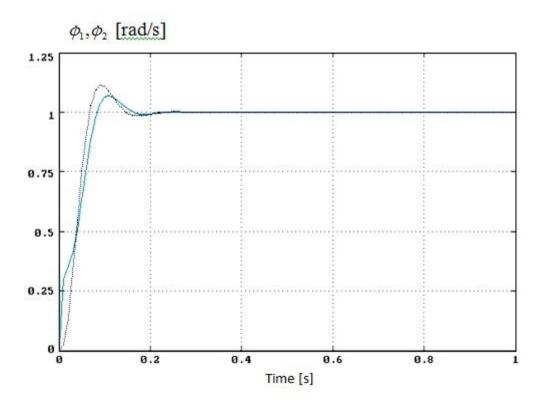


Рисунок 3.51. Близкий к оптимальному переходный процесс  $k_1$ =30,  $k_2$ =120

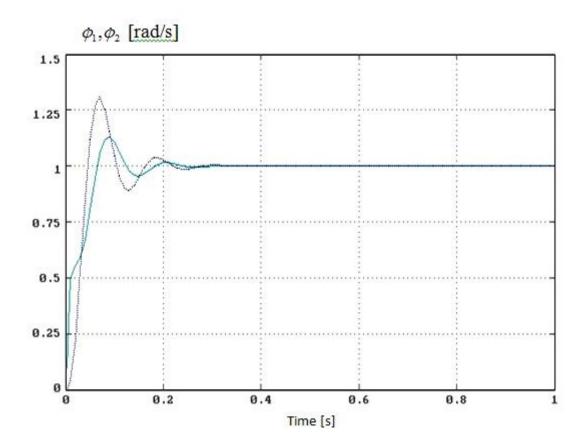


Рисунок 3.52. Близкий к оптимальному переходный процесс  $k_1$ =50,  $k_2$ =100

Анализ переходных процессов показывает, что они короче и менее колебательные, чем стандартный процесс при управлении по одной переменной. Кроме того, наблюдается нечувствительность переходного процесса к изменению настроек регуляторов. Появляется возможность отдельно решать задачу точности и задачу подавления колебаний.

## 3.6 Практическая реализация биоморфного управления на учебной экспериментальной установке

Реализация модального подхода, использующего биоморфный алгоритм управления, была выполнена в 2014 году в Университете имени Иоганна Кеплера (г. Линц, Австрия) в институте мехатроники А. Федотовым под руководством профессора ФГАОУ ВО «СПбПУ» А. К. Беляева.

Объектом управления является алюминиевая балка (1) длиной 70 см, с прямоугольным сечением 3х35 мм (рисунок 3.53). Балка в вертикальном положении закреплена на опоре с помощью болтов (2). Точка закрепления находится на расстоянии 10 см от нижнего конца балки.

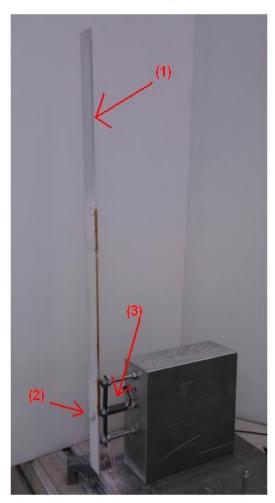


Рисунок 3.53 Экспериментальная установка

В состав конструкции опоры балки входит специальный пьезоэлектрический элемент (3). С помощью данного элемента на балку оказывается возмущающее При воздействие, приводящее eë колебаниям. приложении К пьезоэлектрическому стержню переменного электрического напряжения начинает вибрировать в продольном направлении, изменяя свою длину; вибрации передаются точке закрепления балки, что приводит к колебаниям всей балки. пьезоэлектрический Сигнал, подаваемый на стержень, предварительно усиливался с помощью усилителя, который увеличивает подаваемое напряжение в 100 раз. В конструкции опоры используются также дополнительные элементы (болты, металлическая пластина) — они нужны для того, чтобы воспринимать вес балки и таким образом освободить пьезостержень от излишней нагрузки, которая может привести к его повреждению.

Для измерения амплитуды колебаний точек балки в работе использовался лазерный виброметр. Действие этого оптического прибора основано на эффекте Доплера: длина волны отражённого от поверхности балки лазерного луча изменяется в зависимости от скорости той точки балки, на которую падает луч. Таким образом, данный прибор позволяет измерять и записывать значение скорости нужной точки балки в зависимости от времени.

Измерительная система позволяет получать амплитудно-частотную фазочастотную характеристики упругого объекта. Для ЭТОГО вход механической системы подается так называемый сигнал с линейной частотной модуляцией (ЛЧМ): данный сигнал напоминает гармонический, однако его частота не постоянна, а меняется в заданных пределах. Как приложенное воздействие, так и сигнал, измеренный виброметром, записываются, а затем к ним применяется преобразование Фурье, что позволяет получить реакцию системы на внешнее воздействие в зависимости от частоты. Измеренная эксперименте скорость точек балки для каждого значения частоты может быть пересчитана в амплитуду колебаний.

Помимо этого, данная измерительная система позволяет выполнить сканирование, то есть измерить величину колебаний для целой группы точек балки при одинаковом внешнем воздействии. Такой эксперимент позволяет получить формы колебаний балки. Если измерить реакцию на внешнее возбуждение в виде ЛЧМ-сигнала для группы точек по всей длине балки, то можно увидеть как собственные частоты колебаний балки, так и соответствующие им собственные формы, причем данный анализ позволяет получить как изгибные, так и крутильные формы колебаний.

Схема системы управления, с помощью которой осуществлялась компенсация вибраций балки, изображена на рисунке 3.54.



Рисунок 3.54 Схема системы управления колебаниями балки

Для осуществления управления необходимы сенсоры и возбудители колебаний (актуаторы). Сенсоры преобразуют механические колебания упругого объекта в электрические сигналы, воспринимаемые системой управления. Измеренные сигналы обрабатываются дискретным контроллером, и на их основе контроллер генерирует управляющие сигналы, которые подаются на возбудители колебаний, прикладывающие к объекту управления механическое воздействие.

В схеме управления также присутствуют усилитель напряжения, увеличивающий управляющее напряжение в 25 раз, и фильтры нижних частот (ФНЧ), фильтрующие высокочастотные составляющие сигнала и таким образом улучшая устойчивость системы, при этом слабо влияя на работу системы управления в области низких частот. Для задания алгоритма работы контроллера, соединённого с компьютером, используется программный пакет МАТLAB Simulink.

На первом этапе работы тестировались системы управления с пропорциональной зависимостью между управляющим воздействием и измеренным сигналом:

$$u = Ky$$

Здесь u — напряжение, подаваемое на актуатор, y — показание пьезосенсора, K — коэффициент усиления сигнала в системе управления, или коэффициент

управления. В случае такого управления передаточная функция контроллера является константой и не зависит от частоты сигнала:

$$H = K$$

В рамках данного этапа исследования осуществлялось локальное управление, то есть когда сигнал, подаваемый на каждый актуатор, зависел только от показаний соответствующего ему сенсора. Пропорциональный закон управления был опробован для систем как с одним, так и с двумя контурами управления: в первом случае в управлении задействован только один сенсор и соответствующий ему актуатор, во втором — оба сенсора и актуатора. Проведено сравнение работы данных вариантов системы управления при разных настройках фильтров нижних частот (ФНЧ), входящих в состав схемы управления, а также разных значениях коэффициентов управления K.

На втором этапе была создана система управления, работающая по модальному принципу. Производилась настройка контуров управления таким образом, чтобы каждый из них соответствовал своей форме колебаний балки. И для каждого из контуров управления создавался свой контроллер, обеспечивающий наиболее эффективную работу контура.

Идея модального подхода состоит в том, что он предполагает раздельное управление разными формами колебаний балки. В данной работе создавалась система модального управления, состоящая из двух контуров: первый должен снижать колебания балки по первой собственной форме, а второй – по второй форме.

Система управления воспринимает два сигнала с пьезоэлектрических сенсоров:  $y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$ . Далее из этих двух сигналов с помощью линейного преобразования вычисляются входные сигналы на каждый контур управления:

$$\tilde{q} = Ty$$
,

где  $\tilde{q} = \begin{pmatrix} \tilde{q}_1 \\ \tilde{q}_2 \end{pmatrix}$  — вектор входных сигналов для каждого контура управления;

$$T = egin{pmatrix} T_{11} & T_{12} \ T_{21} & T_{22} \end{pmatrix}$$
 — матрица наблюдения.

Сигнал  $\tilde{q}_i$  в каждом из контуров управления преобразуется в соответствии с законом управления, определяемым передаточной функцией контроллера данного контура  $R_i(s)$ :

$$p_i(s) = R_i(s)\tilde{q}_i(s)$$

Сигнал обозначает величину управляющего воздействия, которое должно быть приложено к балке для подавления i-й формы колебаний. Вектор данных сигналов  $p = \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \end{pmatrix}$  преобразуется с помощью линейного преобразования, и затем полученные сигналы прикладываются к пьезоэлектрическим актуаторам:

$$u = Fp$$
,

где  $u = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}$  — вектор управляющих воздействий, прикладываемых на

актуаторы;  $F = \begin{pmatrix} F_{11} & F_{12} \\ F_{21} & F_{22} \end{pmatrix}$  — матрица управления, которая должна быть задана так,

чтобы каждый контур управления оказывал нужное воздействие на балку, которое бы соответствовало необходимой собственной форме.

Первый контур должен включаться только тогда, когда активна первая форма колебаний балки, и не реагировать на активизацию второй формы. (Требование ко второму контуру аналогично). Для этого нужным образом была задана матрица T. А для того, чтобы воздействие, оказываемое первым контуром управления на балку, возбуждало первую форму колебаний балки и не возбуждало вторую

форму (аналогичное требование — ко второму контуру), необходимым образом была задана матрица F .

В ходе эксперимента было выяснено, что наибольшее снижение резонансных амплитуд колебаний балки происходит при использовании коэффициента усиления равного 0.2 в первом контуре управления и 0.04 — во втором контуре. Высота первого резонансного пика снижается на 84%, а второго — на 87%, что позволяет считать такое управление эффективным на обоих резонансах.

На рисунке 3.55 представлены AЧX экспериментальных данных и результатов моделирования биоморфного управления (A — амплитуда колебаний балки). Из данного рисунка видно, что результаты моделирования хорошо согласуются с экспериментальными данными, что подтверждает правильность реализации математической модели биоморфных алгоритмов.

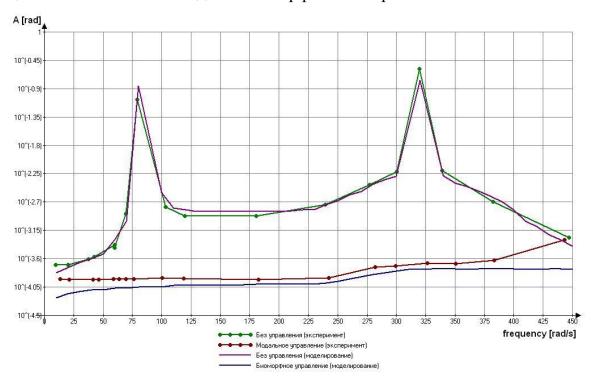


Рисунок 3.55 АЧХ системы в области первого и второго резонансов

Авторы эксперимента заключили, что выгода использования модальной системы управления состоит в том, что она способна одновременно эффективно бороться с резонансными колебаниями балки как на первой, так и на второй резонансной частоте, что также было получено и при моделировании.

#### 3.7 Выводы

Проведена декомпозиция системы уравнений, описывающих механический объект в линейном приближении, и организовано управление объектом в рамках биоморфного подхода. Было произведено исследование биоморфного управления моделью балки Бернулли, шарнирно опёртой по концам. Рассматривалось два типа внешнего воздействия, прилагаемого к модельному объекту – гармоническое и случайное, а также проводилось сравнение результатов биоморфного управления и стандартного мехатронного подхода. Результаты данного раздела опубликованы в статьях [3, 6] и докладывались на международных конференциях [1, 2, 4, 5, 7, 8].

По данным исследованиям раздела 3 можно сделать ряд выводов:

- Полученные результаты моделирования показывают, что при сопоставимом числе обратных связей и тех же коэффициентах усиления *K*<sub>1</sub> эффективность модального управления на два порядка выше эффективности управления с локальными обратными связями.
- Высокое качество виброизоляции было достигнуто с помощью модального управления даже в том случае, когда весовые коэффициенты  $s_{k,l}$  задавались с точностью до знака, доказывая тем самым робастность предложенного алгоритма.
- Было выяснено, что последовательное добавление одной формы колебания не сильно влияет на качество управления, а при добавлении двух форм, качество подавления случайных колебаний может улучшиться даже на порядок.
- Показаны преимущества биоморфного подхода на примере управление вращением привода с упругой кинематической цепью для разных значений коэффициентов обратной связи.

• Результаты моделирования биоморфного управления колебаниями упругой балки хорошо согласуются с экспериментальными данными, полученными на учебной установке.

Осталось лишь выяснить, как будет влиять на качество управления изменение параметров биоморфных алгоритмов.

На защиту выносятся следующие положения данной главы:

- 1. Математическая модель биоморфных алгоритмов управления и описание метода проведения декомпозиции системы управления;
- 2. Результаты моделирования подавления гармонических колебаний модельного объекта с помощью биоморфных алгоритмов управления;
- 3. Сравнение результатов моделирования биоморфного управления с результатами управления при использовании стандартного мехатронного подхода;
- 4. Результаты моделирования подавления случайных колебаний модельного объекта с помощью биоморфных алгоритмов управления и их сравнение с результатами управления при использовании стандартного мехатронного подхода;
- 5. Результаты исследования робастности биоморфных алгоритмов управления при неточности задания параметров управляемого объекта;

# Глава 4. Влияние параметров биоморфных алгоритмов на качество управления случайными колебаниями шарнирно опёртой балки

# 4.1 Поиск оптимального критерия качества управления колебаниями модельного объекта

Обычно оптимизация модального разложения системы используется для улучшения сходимости решения. Вот, например, Захаров в своей работе [173] предлагает проводить декомпозицию системы с целью улучшить её обусловленность за счёт уменьшения её размерности. В своей задаче он сформировал поле перемещений упругого тела под действием внешней нагрузки с квадратичным критерием качества.

Задача о гармонических колебаниях упругого тела сводится к решению системы операторных уравнений

$$D\xi - \omega^2 R\eta - p = 0,$$

$$D^* \eta - B\xi = 0$$
(4.1)

справедливых в области  $\Omega$ , занимаемой упругим телом. Здесь  $\eta(\varsigma)$ ,  $\xi(\varsigma)$ -величины, характеризующие напряжённое состояние и перемещения в точке  $\varsigma \in \Omega$ ;  $\omega$  - частота колебаний;  $p(\varsigma)$  - распределённая в области  $\Omega$  внешняя нагрузка; D,  $D^*$  - дифференциальные операторы; R, B- алгебраические, положительные, самосопряжённые операторы, определяющие инерционные и упругие свойства тела. Первое из уравнений представляет собой уравнение динамического равновесия, второе — соотношения упругости. Предполагается, что на границе в области  $\Omega$  заданы однородные граничные условия. Конкретный вид уравнений и граничных условий для нашего модельного объекта (балки Бернулли) будет схож с уравнениями (3.17).

Задача управления состояла в нахождении функции  $p(\varsigma)$ , минимизирующей функционал

$$J\{p\} = \int_{0}^{\infty} \int_{\Omega} \|\eta^{0}(\varsigma,\omega) - \eta(\varsigma,\omega)\|^{2} \rho(\varsigma)\chi(\omega)d\varsigma d\omega,$$

где  $\eta^0(\varsigma,\omega)$ - задаёт желаемое деформированное состояние упругого тела;  $\rho(\varsigma)$ ,  $\chi(\omega)$ - весовые функции.

Приняв некоторые допущения, взяв случай, когда решается задача формирования статического поля перемещений, т.е.  $\omega = 0$ , тогда в качестве весовой функции берётся обобщённая дельта-функция  $\chi(\omega) = \delta(\omega)$ . Решение уравнений (4.1) может быть представлено в виде

$$\eta(\varsigma,\omega) = \sum_{i=1}^{I} \alpha_i(\varsigma,\omega) p_i, \quad \varsigma \in \Omega,$$

где  $p_i$ , i=1,...,I- параметры управляющей нагрузки,  $\alpha_i(\varsigma,\omega)$ - соответствующие им функции податливости.

Критерий оптимальности является квадратичным и условия оптимальности записываются в виде системы линейных уравнений

$$AP = B, (4.2)$$

где  $P = \begin{bmatrix} p_1, ..., p_I \end{bmatrix}^T$ ;  $A - I \times I$  - матрица с элементами

$$A_{ij} = \int_{0}^{\infty} \int_{\Omega} \alpha_{i}^{T}(\varsigma, \omega) \alpha_{j}(\varsigma, \omega) \rho(\varsigma) \chi(\omega) d\varsigma d\omega; B - \text{ вектор с элементами}$$

$$B_{i} = \int_{0}^{\infty} \int_{\Omega} \alpha_{i}^{T} (\varsigma, \omega) \eta^{0} (\varsigma, \omega) \rho(\varsigma) \chi(\omega) d\varsigma d\omega.$$

В том случае, когда интерес представляют значения прогибов лишь для заданного множества точек  $\varsigma_n$ , n=1,...,N и угловых скоростей  $\omega_l$ , l=1,...,L,

весовые функции  $\rho(\varsigma)$ ,  $\chi(\omega)$  берутся в виде соответствующей суммы обобщённых  $\delta$  - функций и

$$A_{ij} = \sum_{i=1}^{L} \sum_{n=1}^{N} \alpha_i^T \left( \varsigma_n, \omega_l \right) \alpha_j \left( \varsigma_n, \omega_l \right), \quad B_i = \sum_{i=1}^{L} \sum_{n=1}^{N} \alpha_i^T \left( \varsigma_n, \omega_l \right) \eta^0 \left( \varsigma_n, \omega_l \right), \quad i,j = 1, ..., I.$$

Таким образом, определение оптимального управления свелось к классической задаче вычислительной линейной алгебры — решению системы линейных уравнений. Вместе с тем высокие требования к точности решения и плохая обусловленность матрицы A делают эту задачу практически трудно разрешимой.

Для решения плохо обусловленных задач применяются методы, использующие, в той или иной форме, процедуры декомпозиции и агрегирования. В работе также давались примеры применения данных процедур.

В первом примере решалась задача уравновешивание гибких роторов, в которой цель уравновешивания состояла в снижении уровня вибрации, вызываемой начальным технологическим дисбалансом. В данном случае система (4.2) имеет вид

$$AP = B$$
,  $A = C^T C$ ,  $B = C^T U$ , (4.3)

где U-2LN - вектор, элементами которого являются проекции прогибов, измеренных в N сечениях на L скоростях вращения;  $C-2LN\times I$  - матрица коэффициентов податливости.

При большом числе плоскостей балансировки матрица A является плохо обусловленной, так как близко расположенные грузы вызывают практически неразличимые реакции. Поэтому при решении задачи проводится декомпозиция системы (4.3). Имеется два способа проведения данной процедуры. Первый основан на представлении симметричной неотрицательно определённой матрицы A в виде разложения по собственным векторам  $w_i$ , i=1,...,I

$$A = \sum_{i=1}^{I} \mu_i w_i w_i^T,$$
 (4.4)

Где  $\mu_i \ge 0$  - собственные числа матрицы A,  $w_i^T w_i = 1$ , решение системы (4.3) разыскивается в подпространстве  $R^m$ , натянутом на собственные векторы  $w_i$ , i = 1,...,m, которые могут быть вычислены с достаточной точностью, то есть  $P = \sum_{i=1}^m v_i w_i$ , где  $v_i$  - коэффициенты разложения. При этом обеспечивается устойчивость решения к ошибкам задания параметров системы (4.3).

Второй способ реализован на практике в методе балансировки по формам свободных колебаний [173]. Там уравновешивающая нагрузка задаётся в виде комбинации k < K системы грузов, каждая из которых ориентирована на создание прогиба по одной из форм свободных колебаний. При этом значения вектора параметров  $P_f$  искомой нагрузки, характеризующие интенсивность и фазу систем грузов, определяется из системы уравнений меньшей размерности

$$A_f P_f = B_f$$
,  $P_f \in \mathbb{R}^{2k}$ ,  $B_f \in \mathbb{R}^{2k}$ ,

имеющей лучшую обусловленность.

Другой пример описывает задачу коррекции волнового фронта с помощью упругого отражателя, в которой цель управления состоит в придании отражающей поверхности заданной формы с высокой точностью. Изменения формы отражающей поверхности описывается функцией нормального прогиба  $\eta(\varsigma)$ ,  $\varsigma \in \Omega$ , зависимость которого от управляющих усилий  $p_i$ , i=1,...,I в силу малости перемещений даётся соотношением при  $\omega=0$ 

$$\eta(\varsigma) = \sum_{i=1}^{I} \alpha_i(\varsigma) p_i,$$

где  $\alpha_i(\varsigma)$  - функция влияния, представляющая собой нормальный прогиб поверхности в точке  $\varsigma$  от действия единичного і-го управляющего усилия, а  $\eta^0(\varsigma)$  задаёт форму отражающей поверхности, которая обеспечивает необходимую коррекцию волнового фронта.

Благодаря симметрии отражателя и «равновероятности» коррекции различных участков волнового фронта удаётся найти симметричный способ точек  $\zeta_n$ , n = 1,...,N, где заданы  $\eta^0(\zeta)$ ,  $\alpha(\zeta)$ . размещения приводов И Предположение о симметрии позволяет построить процедуру декомпозиции, существенно упрощающую численное решение системы (4.2). Будем считать, что приводы расположены на q концентрических окружностях по t приводов равномерно на каждом, при этом I=qt. Расположение точек  $\varsigma_n$ , n=1,...,N имеет аналогичную радиально-кольцевую структуру. Тогда система (4.2) линейным ортогональным преобразованием с матрицей T:  $TAT^{T}TP = TB$  может быть приведена к t изолированным подсистемам

$$A_s P_s = B_s, \quad P_s B_s \in \mathbb{R}^q, \quad s = 1,...,t,$$
 (4.5)

где  $diag[A_s]_{s=1}^t = TAT^T$ ,  $[B_1^T,...,B_t^T]^T = TB$ ,  $[P_1^T,...,P_t^T]^T = TP$ .

Матрица T, имеющая размерность  $qt \times qt$ , задаётся соотношениями

$$T = \begin{bmatrix} T_{11} & T_{12}, \dots, T_{1q} \\ T_{21} & T_{22}, \dots, T_{2q} \\ \dots \\ T_{t1} & T_{t2}, \dots, T_{tq} \end{bmatrix}, \quad T_{ij} = e_j V_i^T, \quad e_j \in R^q, \quad V_i \in R^t, \quad i = 1, \dots, t, j = 1, \dots, q.$$

Где  $e_j = \left[\delta_{js}\right]_{s=1}^q$ ,  $\delta_{js}$  - символ Кронекера;  $V_i = \left[\cos\frac{2\pi s}{t}\left\{\frac{i}{2}\right\}\right]_{s=1}^t$ , i - нечётно,  $V_i = \left[\sin\frac{2\pi s}{t}\left\{\frac{i}{2}\right\}\right]_{s=1}^t$ , i - чётно;  $\{\}$  - символ целой части числа. Элементы вектора  $P_s$ 

характеризуют интенсивность системы усилий в виде векторов  $V_s$  на каждой окружности нагружения. Полученные системы линейных уравнений (4.5) имеют меньшую размерность и лучше обусловлены по сравнению с исходной.

Полученное оптимальное управление требует измерения всего вектора состояния и хорошей обусловленности матрицы A. И то и другое требование в упругих распределённых системах не выполняется. Ввиду бесконечного числа собственных форм, у них формально нарушено условие наблюдаемости, а обусловленность матрицы A зависит от соотношения размеров и в случае стержней, плоских объектов или оболочек, в принципе не может быть хорошей.

Еще одним недостатком данной оптимальной постановки является программный характер оптимального управления, что в случае не точной идентификации модели распределённого объекта автоматически приведёт к дополнительным ошибкам регулирования. К аналогичным результатам приводит использование  $H_2$  и  $H_\infty$  критериев.

Поэтому более подходящей постановкой задачи представляется линейноквадратичный критерий качества, который учитывает затраты на управление и автоматически обеспечивает устойчивую систему управления линейной отрицательной обратной связью, статические ошибки регулирования в которой зависят только от величины коэффициентов обратных связей и в первом приближении не связаны с точностью идентификации.

Прямое использование критерия приводит к системе нелинейных уравнений Лурье-Риккати.

Для преодоления вычислительных проблем предлагается использовать квазиоптимальный декомпозиционный подход. Помимо упрощения оптимизационных процедур он позволяет решить ряд других проблем при проектировании систем управления распределёнными объектами. Для использования преимуществ декомпозиции будем проводить оптимизацию отдельно по каждому уравнению полученной в предыдущем разделе системы:

$$\dot{q} = \Lambda_A q + k \Lambda_B (q^* - q) + SGf$$

$$q = S(C^T C)^{-1} C^T Y$$

$$q(0) = SX_0$$

где  $\Lambda_{\scriptscriptstyle A} = SAS^{\scriptscriptstyle -1}$  и  $\Lambda_{\scriptscriptstyle B} = SBF$  - диагональные матрицы.

Это приводит к системе критериев вида

$$J_k\{U_k\} = \int_0^\infty (q_k^2 Q_k + U_k^2 R_k) dt, \ k = 1,...,n,$$

где  $U_k, q_k$  - компоненты соответствующих векторов q, U, а  $Q_k, R_k$  весовые коэффициенты критерия, соответствующие номеру собственной формы распределённого упругого объекта. Минимизация критериев может быть проведена последовательно и позволяет получить динамические регуляторы первого порядка для каждой моды колебаний. Весовые коэффициенты позволяют учитывать жесткость каждой собственной формы и их выбор возможен как по стандартным для линейно-квадратичного критерия правилам, так и с учётом ограничений на величину и частотный диапазон управляющих сигналов.

#### 4.2 Оптимизация с помощью линейно-квадратичного регулятора

Дан объект, описываемый матричным уравнением

$$\dot{X} = AX + BU 
X(0) = X_0$$
(4.6)

Требуется выбрать обратную связь U = -KX, а точнее матрицу коэффициентов обратной связи K так, чтобы обеспечить устойчивость замкнутой системы

$$\dot{X} = (A - BK)X$$

и минимизировать следующий интегральный (энергетический) [126] показатель качества оптимальной стабилизации обратной связи

$$J = \sum_{i=1}^{n} q_{i} \int_{0}^{\infty} x_{i}^{2}(t) dt + \sum_{k=1}^{m} r_{k} \int_{0}^{\infty} u_{k}^{2}(t) dt,$$

где  $q_i \ge 0$ ,  $r_k > 0$ - заданные коэффициенты. Слагаемые вида  $\int\limits_0^\infty x_i^2 dt$  характеризуют «энергию» i-ой компоненты вектора состояния (норму её отклонения от нуля), слагаемые  $\int\limits_0^\infty u_k^2 dt$  характеризуют «энергию» k-ой компоненты вектора управления.

Коэффициенты  $q_i$  задают относительную важность отклонений по каждой координате (некоторые из них могут быть несущественны и тогда  $q_i = 0$ ), коэффициенты  $r_k$  определяют важность «энергетических затрат» по различным управляющим воздействиям.

Установим, при какой стабилизирующей обратной связи достигается минимальное значение энергетического показателя. Перепишем его в матричной форме:

$$J = \int_{0}^{\infty} X^{T} Q X dt + \int_{0}^{\infty} U^{T} R U dt, \qquad (4.7)$$

где  $Q = diag\{q_i, i = 1,..., n\}$ ,  $R = diag\{r_k, k = 1,..., m\}$ . Поскольку дальнейшее лишь несущественно усложняется, если считать Q произвольной неотрицательно определённой матрицей, а R произвольной положительно определённой, то анализ будет проводиться именно в таких предположениях. Сформулированную проблему принято именовать задачей оптимальной стабилизации, или линейноквадратичной проблемой оптимального управления (в зарубежной литературе — Linear Quadratic Regulator, LQR). Замечательной особенностью задачи оптимальной стабилизации является то, что в ней удаётся указать вид обратной связи, дающей наилучший результат при любых начальных условиях.

В [174] была сформулирована теорема, согласно которой существует положительно определённая матрица  $P^*$ , являющаяся решением матричного квадратного уравнения Лурье - Риккати:

$$A^{T}P + PA - PBR^{-1}B^{T}P + O = 0$$
, (4.8)

и матрица  $K^*$ , связанная с  $P^*$  соотношением

$$K^* = R^{-1}B^T P^*. (4.9)$$

Тогда при любых начальных условиях  $X_0$  оптимальная стабилизация обеспечивается управлением

$$U = -K^*X , \qquad (4.10)$$

причём минимальное значение показателя качества равно

$$J_{opt} = X_0^T P^* X_0.$$

Доказательство. Рассмотрим, как изменяется квадратичная форма

$$V(t) = X^{T}(t)P^{*}X(t),$$

если X(t) изменяется в силу уравнений (4.6), а U(t)- произвольно. Имеем

$$\frac{dV}{dt} = \dot{X}^T P^* X + X^T P^* \dot{X} = \left(AX + BU\right)^T P^* X + X^T P^* \left(AX + BU\right).$$

Интегрируя это соотношение, получаем

$$\int_{0}^{t} \frac{dV}{dt} dt = V(t) - V(0) = X^{T}(t) P^{*}X(t) - X_{0}^{T} P^{*}X_{0} = \int_{0}^{t} \left[ X^{T} (A^{T} P^{*} + P^{*}A) X + 2X^{T} P^{*}BU \right] dt.$$

При любой стабилизирующей обратной связи

$$X(t) \to 0$$
 при  $t \to \infty$ ,

так что

$$\int_{0}^{\infty} \left[ X^{T} \left( A^{T} P^{*} + P^{*} A \right) X + 2 X^{T} P^{*} B U \right] dt = -X_{0}^{T} P^{*} X_{0},$$

или, с учётом (4.8), (4.9),

$$\int_{0}^{\infty} \left[ -X^{T}QX + 2X^{T} \left( K^{*} \right)^{T} RU \right] dt = -X_{0}^{T} P^{*} X_{0}.$$

Добавляя и вычитая слагаемые  $U^T R U$ , получаем

$$-\int_{0}^{\infty} \left[ X^{T} Q X + U^{T} R U \right] dt + \int_{0}^{\infty} \left[ U^{T} R U + X^{T} \left( K^{*} \right) R K^{*} X + 2 X^{T} \left( K^{*} \right)^{T} U \right] dt = -X_{0}^{T} P^{*} X_{0}.$$

Таким образом, зависимость интегрального показателя от произвольного стабилизирующего управления представима в виде

$$J = \int_{0}^{\infty} (U + K^*X)^T R(U + K^*X) dt + X_0^T P^*X_0,$$

откуда сразу следует, что минимальное значение достигается при

$$U = -K^*X.$$

поскольку R — положительно определённая матрица. Доказательство завершено. Согласно другой теореме в [174] для существования единственного положительно определённого решения матричного квадратного уравнения (4.8) достаточно, чтобы пара A, B была невырожденной, R>0 и, кроме того, выполнено одно из двух условий: либо 1) Q положительно определена, либо 2)  $Q \ge 0$  и представима в виде  $Q = C^T C$ , причём так, что невырожденна пара матриц  $A^T$ ,  $C^T$ .

Описанная теория сводит задачу оптимальной стабилизации к чисто алгебраической задаче поиска решения матричного квадратного уравнения Лурье-Риккати. Отметим, что если размерность вектора состояния X равна n, то размер искомой матрицы  $P^*$  равен  $n \times n$ . В силу симметрии  $P^*$  число неизвестных элементов равно n(n+1)/2, для определения которых имеем систему такого же числа скалярных квадратных уравнений. Ясно, что решение этой системы само по себе является сложной вычислительной задачей. Лишь при n=2 её можно попытаться решать «в лоб».

Вид оптимальной обратной связи зависит от выбора коэффициентов матриц Q и R, входящих в интегральный показатель качества (4.7) и определяющих характер «соизмерения» энергии различных компонент векторов состояния и управления. Проблема сведения различных требований, предъявляемых к системе, в единый показатель качества, имеющий к тому же специальную форму (4.7), не допускает однозначного решения. На практике обычно используют приём приведения к относительным величинам. Пусть известны величины  $\overline{x_i}$ ,  $\overline{u_i}$ , превышение которых соответствующими компонентами векторов состояния и

управления нежелательно. Тогда рекомендуется составлять критерий качества в виде

$$\int_{0}^{\infty} \left[ \sum_{i} \left( \frac{x_{i}}{x_{i}} \right)^{2} + \sum_{k} \left( \frac{u_{k}}{u_{k}} \right)^{2} \right] dt,$$

то есть принимать

$$Q = diag \left\{ \frac{1}{x_i^2} \right\}, \ R = diag \left\{ \frac{1}{u_k} \right\}.$$

## 4.3 Синтез оптимальных и квазиоптимальных алгоритмов на основе биоморфного подхода

Вернемся к уравнению для главных координат, полученному в предыдущей главе

$$\ddot{\beta}_{k}(t) + \gamma_{k}\dot{\beta}_{k}(t) + \lambda_{k}^{2}\beta_{k}(t) = M_{B}\vartheta_{k}\left(\frac{L}{2}\right) + \sum_{l=1}^{10}\mu_{l}(z_{l})\vartheta_{k}(z_{l}) \qquad k = 1, 2, ..., 8,$$
(4.11)

где  $\alpha_k$  - коэффициенты демпфирования (равные 0,4 для всех k),

 $M_B = \sum_{i=1}^{1000} \sin \left( (\omega_0 + ki) t \right)$  - внешний изгибающий момент,  $\lambda_k^2$  - квадрат собственной частоты изгибных колебаний балки,  $\mu_l$  - управляющие моменты,  $\vartheta_k$  - угол поворота при свободных колебаниях балки,  $z_l$  - продольная координата.

Преобразуем уравнение (4.11) к динамической системе первого порядка

$$\dot{X} = AX + BU + Gf$$

где 
$$X\left(t\right) = \begin{bmatrix} \beta \\ \dot{\beta} \end{bmatrix}$$
 - вектор состояния,  $A = \begin{bmatrix} 0_{k \times k} & I_{k \times k} \\ -\lambda_k^2 & -\gamma_k \end{bmatrix}$  - матрица системы,  $1_{k \times k}$  —

единичная матрица,  $B = \begin{bmatrix} 0_{k \times l} \\ 9_k \left( z_l \right) \end{bmatrix}$  - матрица управления,  $G = 1_{k \times k}$  - матрица

внешнего воздействия, f – внешнее воздействие.

С учётом выражения (4.5) получаем

$$\dot{X} = (A - BK^*)X + Gf$$

где коэффициент усиления

$$K^* = R^{-1}B^TP^*$$
,

а матрица  $P^*$  является решением матричного квадратного уравнения Лурье - Риккати:

$$A^T P + PA - PBR^{-1}B^T P + Q = 0$$

Весовые матрицы были выбраны следующим образом:

$$Q = 1_{k \times k}$$
,  $R = diag\{r_l = 0.0001, l = 1,..., 10\}$ .

Существует множество алгоритмов решения алгебраического уравнения Лурье – Риккати. Все они приводят к идентичным результатам, поэтому воспользуемся наиболее часто упоминаемом в литературе методом, который предложил Potter [175].

Задаём сначала матрицы A и B, входящие в уравнение Лурье - Риккати:

$$A = \begin{bmatrix} 0_{k \times k} & I_{k \times k} \\ -\left(\Lambda_{eg_{-v}}\right) & 0_{k \times k} \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 0_{k \times l} \\ \vartheta_{k}(z_{l}) \end{bmatrix}$$

Строим Гамильтониан:

$$H = \begin{bmatrix} A & -BR^{-1}B^T \\ -Q & -A^T \end{bmatrix}$$

С его помощью решим задачу нахождения собственных чисел:

$$HV = V\tilde{\lambda}$$

где V – собственные векторы H,  $\tilde{\lambda}$  - собственные числа H, n – размер матрицы A,

 $t_{won}\,$  - максимальный размер H.

Произведём нормирование собственных векторов:

$$a_{v} = |V|$$

$$m = a_{v}^{T} a_{v}$$

$$\tilde{m} = diag\{m\}$$

$$m_{1} = diag\{\tilde{m}\}$$

$$V = V\sqrt{m_{1}^{-1}}$$

Сортируем собственные числа по их устойчивым действительным частям:

$$r_{el} = \text{Re}\left(diag\left\{\tilde{\lambda}\right\}\right) \tag{4.12}$$

С учётом (4.12) отсортируем собственные вектора таким образом, чтобы первый столбец V соответствовал собственным числам с положительной действительной частью, а второй – с отрицательной:

$$V = \begin{bmatrix} V_{11} & V_{12} \\ V_{21} & V_{22} \end{bmatrix}$$

Решение алгебраического уравнения Лурье – Риккати в таком случае является функцией собственных векторов:

$$P^* = \text{Re}(V_{k1,k1}V_{k2,k1}^{-1}), \quad k1 = n+1 \div t_{won}, \ k2 = 1 \div n$$

А матрица коэффициентов усиления

$$K^* = \operatorname{Re}\left(R^{-1}B^TP^*\right)$$

<u>Математическая модель алгоритма синтеза линейно-квадратичного</u> регулятора и биоморфного подхода имеет вид:

Определив свободные формы колебаний объекта, заполняются матрицы F и S:

$$F_{1} = \vartheta_{k}\left(z_{l}\right)\left(\vartheta_{k}\left(z_{l}\right)\right)^{T}$$

$$F = \begin{bmatrix} 0_{k \times k} & 0_{k \times k} \\ F_1 & F_1 \end{bmatrix}$$

$$S = \begin{bmatrix} 0_{k \times l} \\ 9_k \left( z_l \right) \end{bmatrix}$$

Происходит формирование матрицы управляющих воздействий:

$$U = M \cdot K^* \cdot D,$$

где 
$$M=FS$$
 ,  $D=egin{bmatrix} I_{k imes k} & O_{k imes k} \ 1_{k imes k} & O_{k imes k} \end{bmatrix}$ 

и вычитание её из матрицы A:

$$A_{rs} = \begin{bmatrix} 0_{k \times k} & I_{k \times k} \\ -\Lambda_{eg_{-v}} & -N_{d} \end{bmatrix} - U$$

необходимой для численного решения системы:

$$\dot{X} = A_{rs}X + f_{d}$$

где по-прежнему 
$$X = \begin{bmatrix} \beta_k(t) \\ \dot{\beta}_k(t) \end{bmatrix}$$
.

Выводим измерения датчиков углов:

$$\varphi(\mathbf{z},t) = \sum_{k=1}^{m} \beta_k(t) \vartheta_k(z_l).$$

Результаты моделирования, локального и биоморфного управления представлены на рисунках 4.1 - 4.3.

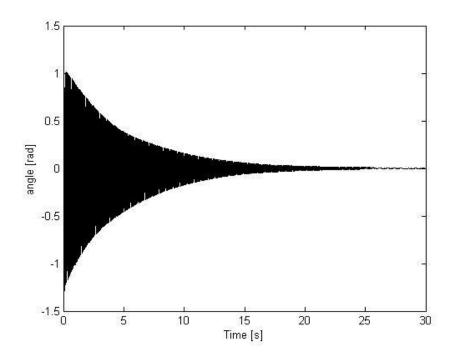


Рисунок 4.1 Осциллограмма сигнала обратной связи с датчика №2 при вынужденных колебаниях балки без управления

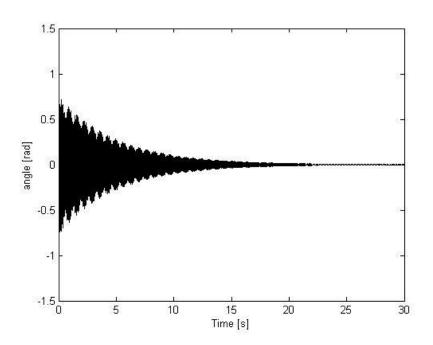


Рисунок 4.2 Осциллограмма сигнала обратной связи с датчика №2 при локальном замыкании десяти контуров обратной связи с использованием оптимальных значений коэффициентов усиления ( $U = B \cdot K^* \cdot D$ ).

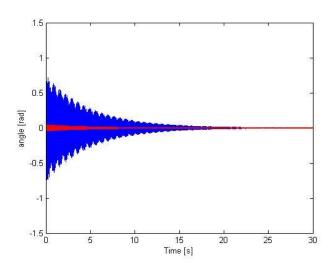


Рисунок 4.3 Осциллограмма сигала датчика №2. Результаты управления по десяти локальным контурам (синий) и биоморфного по четырём формам (четыре контура ОС) с использованием оптимальных значений коэффициентов усиления (красный).

Проведём теперь анализ качества синтеза LQR и биоморфного управления, последовательно добавляя по одной форме колебаний (рисунки 4.4-4.9). А также построим зависимость уровня значение амплитуды колебаний от количества форм, по которым производится управление (рисунок 4.10).

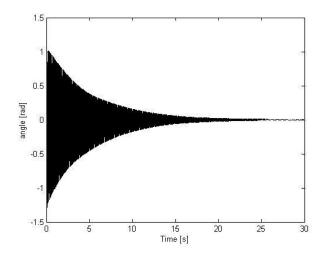


Рисунок 4.4 Осциллограмма сигнала обратной связи с датчика №2 при вынужденных колебаниях при биоморфном управлении по одной форме колебаний

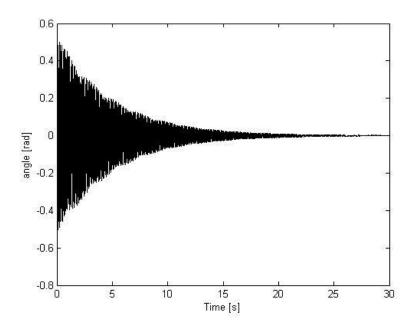


Рисунок 4.5 Осциллограмма сигнала обратной связи с датчика №2 при вынужденных колебаниях при биоморфном управлении по двум формам колебаний

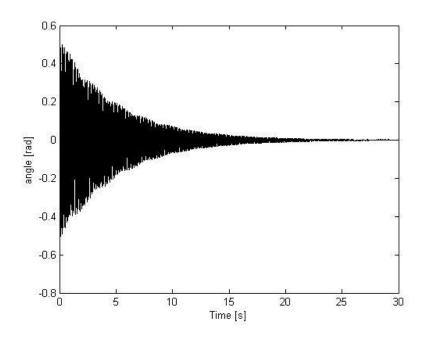


Рисунок 4.6 Осциллограмма сигнала обратной связи с датчика №2 при вынужденных колебаниях при биоморфном управлении по трём формам колебаний

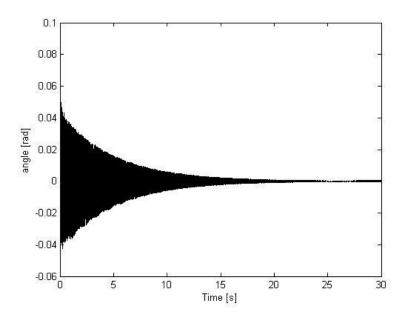


Рисунок 4.7 Осциллограмма сигнала обратной связи с датчика №2 при вынужденных колебаниях при биоморфном управлении по четырём формам колебаний

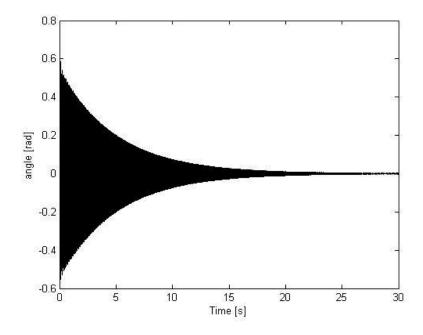


Рисунок 4.8 Осциллограмма сигнала обратной связи с датчика №2 при вынужденных колебаниях при биоморфном управлении по семи формам колебаний

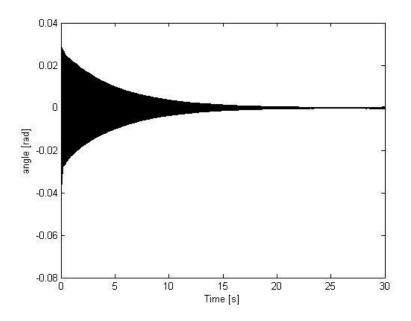


Рисунок 4.9 Осциллограмма сигнала обратной связи с датчика №2 при вынужденных колебаниях при биоморфном управлении по восьми формам колебаний.

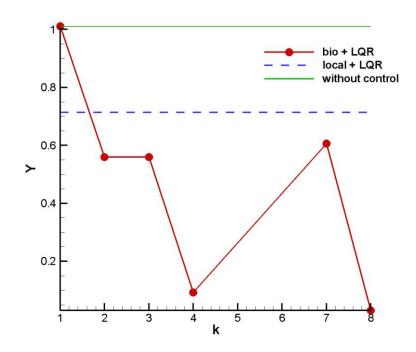


Рисунок 4.10 Уровень амплитуды колебаний (без управления, при локальном и биоморфном управлении) в зависимости от количества форм, по которым производится управление.

Приведённые осциллограммы и график на последнем рисунке показывают, (линейный при синтезе оптимального квадратичный регулятор) что квазиоптимального (биоморфное управление) подходов можно также получить более эффективное подавление случайных колебания модели упругого объекта по сравнению c локальным управлением c оптимальными значениями коэффициентов связей. Однако обратных дальнейшее добавление колебаний, по которым производится управление, может не только увеличить значение амплитуды колебаний, а значит, и ухудшить качество управления, но и вовсе привести к потере вычислительной устойчивости. Поэтому можно производить эффективное управление системой только по ограниченному количеству форм колебаний.

## 4.4 Выволы

Проанализировав способ оптимизации системы управления, проделанный в работе Захарова, было выяснено, что для данной динамической системы синтез управления лучше проводить при совместном использовании биоморфного подхода и классического в литературе метода, основанного на линейно-квадратичном регуляторе. Изменение параметров биоморфных алгоритмов при этом сильно повлияло на качество управления. По результатам моделирования можно сделать некоторые выводы:

- Применение синтеза оптимального (линейный квадратичный регулятор) и квазиоптимального (биоморфное управление) подходов управления позволяет получить высококачественные системы подавления вибраций, вызванных широкополосным случайным воздействием.
- В данном случае существует определённое количество форм, для которых можно проводить оптимизацию. Дальнейшее добавление форм колебаний

может не только ухудшить качество управления, но и вовсе привести к потере вычислительной устойчивости.

Результаты раздела опубликованы в статье [9] и прошли апробацию на международной научной конференции [8].

На защиту выносятся следующие положения данной главы:

- 1. Был проведен поиск и анализ критерия качества для оптимизации алгоритма управления;
- 2. В ходе исследования были выявлены преимущества последовательной оптимизации при биоморфном контроле по сравнению с другими методами синтеза оптимального управления.

## Заключительные выводы

В данной диссертационной работе решена задача моделирования подавления механического упругого объекта, вызванных широкополосным случайным воздействием, с помощью биоморфных алгоритмов управления. Для этого изначально был смоделирован процесс в виде суммы большого числа гармоник, который по своим корреляционным характеристикам схож с широкополосным случайным шумом. В качестве модельного упругого управляемого механического объекта была взята балка Бернулли, шарнирно опёртая по концам. Математическая модель балки постоянного сечения была выбрана в виде системы дифференциальных уравнений, решение которой разыскивалось в виде ряда по формам свободных колебаний балки. Для колебаний применялось алгоритма управления. подавления два соответствует мехатронному подходу, в рамках которого было организовано управление с обратной связью по измерениям углов. А второй алгоритм отражает суть модального контроля с использованием биоморфных алгоритмов. Также линейнопроведена оптимизация модального управления c помощью квадратичного критерия. Представлены результаты моделирования подавления вибраций балки с помощью данных подходов. В итоге резюмировать проделанное исследование можно в виде следующих положений:

- Предложен биоморфный алгоритм активного подавления случайных колебаний упругого объекта на базе модального подхода.
- При сопоставимом числе обратных связей и тех же коэффициентах усиления эффективность биоморфного подавления случайных колебаний на два порядка выше эффективности управления с локальными обратными связями (подраздел 3.2).

- Робастность биоморфных алгоритмов подавления колебаний была показана при моделировании неточности параметров системы управления (подраздел 3.2).
- Последовательное добавление одной формы колебания не сильно влияет на качество управления, а при добавлении двух форм, качество подавления случайных колебаний может улучшиться даже на порядок (подраздел 3.2).
- Применение синтеза оптимального (линейный квадратичный регулятор) и квазиоптимального (биоморфное управление) подходов позволяет получить высококачественные системы подавления вибраций, вызванных широкополосным случайным воздействием, но только при ограниченном количестве форм колебаний (подраздел 4.3).

Результаты диссертационной работы могут быть рекомендованы к применению в инженерной практике при проектировании систем подавления колебаний упругих механических объектов, вызванных гармоническим или стохастическим внешним воздействием. Разработанный в разделе 3 биоморфный алгоритм может быть использован при создании программного обеспечения современных систем активного управления.

## Список литературы

- 1. Котов В. В. «Активные системы подавления колебаний строительных конструкций» / В. В. Котов // Материалы шестого всероссийского форума студентов, аспирантов и молодых учёных, 09-12 октября 2012 г.: тезисы доклада. Санкт-Петербург (Россия), 2012 г. с. 26-27.
- 2. Котов В. В., Арсеньев Д. Г. «Подавление колебаний свободно опёртого стержня» / Д. Г. Арсеньев, В. В. Котов // Материалы научно-практической конференции с международным участием, часть XIII, 03-08 декабря 2012 г.: тезисы доклада.Санкт-Петербург (Россия), 2012 г. с. 256-257.
- 3. Арсеньев Д. Г., Котов В. В., Полянский В. А., Смирнова Н. А. «Биоморфное управление в задаче о виброизоляции случайных колебаний» / Д. Г. Арсеньев, В. В. Котов, В. А. Полянский, Н. А. Смирнова // Научно-технические ведомости СПбГПУ, Информатика. Телекоммуникации. Управление, 2(169), (2013) с. 112-117.
- 4. Arseniev D. G., Kotov V. V., Polyanskii V. A., Smirnova N. A. «Biomorphic Control of stochastic vibrations», / D. G. Arseniev, V. V. Kotov, V. A. Polyanskii, N. A. Smirnova // Proceedings of the XLI Summer School Conference Advanced Problems in Mechanics, 01-06 июля 2013 г.: материалы конференции. Санкт-Петербург (Россия), 2013 г. с. 449-456.
- 5. Котов В. В., Арсеньев Д. Г. «Робастное управление стохастическими колебаниями шарнирно опёртой балки» / Д. Г. Арсеньев, В. В. Котов // Материалы научно-практической конференции с международным участием, 02-07 декабря 2013 г.: тезисы доклада. Санкт-Петербург (Россия), 2013 г. с. 124-126.
- 6. Беляев А. К., Котов В. В. Полянский В. А., Смирнова Н. А. «Биоморфное управление в задаче об активном подавлении колебаний» / А. К. Беляев, В. В. Котов, В. А. Полянский, Н. А. Смирнова // Вестник Санкт-Петербургского

- Университета. Серия 1: Математика. Механика. Астрономия. 2014. Том. 1, №1, с. 96-106.
- 7. Belyaev A. K., Kotov V. V., Polyanskii V. A., and Smirnova N. A. «Biomorphic Control in Problem on Active Suppression of Vibrations», / A. K. Belyaev, V. V. Kotov, V. A. Polyanskii, N. A. Smirnova // Vestnik St. Petersburg University. Mathematics, 2014, Vol. 47, No. 1, pp. 39-46.
- 8. Арсеньев Д.Г., Котов В.В., Полянский В.А. «Робастные оптимальные алгоритмы подавления случайных колебаний распределённых систем» / Д. Г. Арсеньев, В. В. Котов, В. А. Полянский // Материалы конференции «Информационные технологии в управлении (ИТУ-2014)», 7-9 октября 2014г. ГНЦ РФ ОАО «Концерн ЦНИИ Электроприбор», Санкт-Петербург (Россия), 2014 г. с. 453-460.
- 9. Арсеньев Д. Г., Котов В. В., Полянский В. А. «Квазиоптимальное биоморфное подавление случайных колебаний упругих объектов» / Д. Г. Арсеньев, В. В. Котов, В. А. Полянский // Научно-технические ведомости СПбГПУ, Информатика. Телекоммуникации. Управление, 5(205), (2014) с. 102-109.
- 10. Fisco N.R., Adeli H. Smart structures: Part I Active and semi-active control / N.R. Fisco, H. Adeli // Scientia Iranica, Transactions A: Civil Engineering 18 (3), (2011) 275–284.
- 11. Fisco N.R., Adeli H. Smart structures: Part II Hybrid control systems and control strategies / N.R. Fisco, H. Adeli // Scientia Iranica, Transactions A: Civil Engineering 18 (3), (2011) 285–295.
- 12. Kim H., Adeli H. Hybrid Control of Smart Structures Using a Novel Wavelet-Based Algorithm // Computer-Aided Civil and Infrastructure Engineering 20 (2005) 7-22.
- 13. Lin, C.C., Chen, C.L. and Wang, J.F. Vibration control of structures with initially accelerated passive tuned mass dampers under nearfault earthquake excitation // Computer-Aided Civil and Infrastructure

- Engineering, 25(1), pp. 69–75 (2010).
- 14. Ubertini F., Materazzi A. L. Reliability of multiple tuned mass dampers for bridge flutter control / F. Ubertini, A. L. Materazzi // EACWE 5, Florence, Italy, 2009.
- 15. Zuo Xiao-Bao, Li Ai-Qun Numerical and experimental investigation on cable vibration mitigation using shape memory alloy damper / Xiao-Bao Zuo, Ai-Qun Li // Structural control and health monitoring. 2011; 18:20-39.
- 16. Wu, J.C. and Yang, J.N. Active control of transmission tower under stochastic wind // Journal of Structural Engineering, 124(11), pp. 1302–1312 (1998).
- 17. Yan, N., Wang, C.M. and Balendra, T. Optimal damper characteristics of ATMD for buildings under wind loads // Journal of Structural Engineering, 125(12), pp. 1376–1383 (1999).
- 18. Yamamoto, M., Aizawa, S., Higashino, M. and Toyama, K. Practical application of active mass dampers with hydraulic actuator // Earthquake Engineering and Structural Dynamics, 30(11), pp. 1697–1717 (2001).
- 19. Li, H.J., Hu, S.L.J. and Jakubiak, C. H2 active vibration control of offshore platform subjected to wave loading // Journal of Sound and Vibration, 263(4), pp. 709–724 (2003).
- 20. Lee, C.L. and Wang, Y.P. Seismic structural control using an electric servomotor active mass driver system // Earthquake Engineering and Structural Dynamics, 33(6), pp. 737–754 (2004).
- 21. Ikeda, Y., Sasaki, M., Sakamoto, M. and Kobori, T. Active mass driver system as the first application of active structural control // Earthquake Engineering and Structural Dynamics, 30(11), pp. 1575–1595 (2001).
- 22. Adeli, H. and Saleh, A. Optimal control of adaptive/smart bridge Structures // Journal of Structural Engineering, ASCE, 123(2), pp. 218–226 (1997).
- 23. Saleh, A. and Adeli, H. Optimal control of adaptive/smart building Structures // Computer-Aided Civil and Infrastructure Engineering, 13(6),

- pp. 389-403 (1998).
- 24. Saleh, A. and Adeli, H. Optimal control of adaptive building structures under blast loading // Mechatronics, 8(8), pp. 821–844 (1998).
- 25. Hanagan, L.M. and Murray, T.M. Active control approach for reducing floor vibrations // Journal of Structural Engineering, 123(11), pp. 1497–1505 (1997).
- 26. Hanagan, L.M., Kulasekere, E.C., Walgama, K.S. and Premaratne, K. Optimal placement of actuators and sensors for floor vibration control // Journal of Structural Engineering, 126(12), pp. 1380–1387 (2000).
- 27. Agrawal, A.K., Yang, J.N., Schmitendorf, W.E. and Jabbari, F. Stability of actively controlled structures with actuator saturation // Journal of Structural Engineering, 123(11), pp. 1497–1505 (1997).
- 28. Djouadi, S., Motro, R., Pons, J.C. and Crosnier, B. Active control of tensegrity systems // Journal of Aerospace Engineering, 11(2), pp. 37–44 (1998).
- 29. Asano, K. and Nakagawa, H. Active saturation control of hysteresis Structures // Computer-Aided Civil and Infrastructure Engineering, 13(6), pp. 425–432 (1998).
- 30. Bossens, F. and Preumont, A. Active tendon control of cable-stayed bridges: a large-scale demonstration // Earthquake Engineering and Structural Dynamics, 30(7), pp. 961–979 (2001).
- 31. Less, T. and Adeli, H. Computational earthquake engineering of bridges // Scientia Iranica, Transaction A: Civil Engineering, 17(5), pp. 325–338 (2010).
- 32. Rodellar, J., Manosa, V. and Monroy, C. An active tendon control scheme for cable-stayed bridges with model uncertainties and seismic excitation // Structural Control and Health Monitoring, 9(1), pp. 75–94 (2002).
- 33. Christenson, R.E., Spencer Jr., B.F., Hori, N. and Seto, K. Coupled building control using acceleration feedback // Computer-Aided Civil and

- Infrastructure Engineering, 18(1), pp. 4–18 (2003).
- 34. Ying, Z.G., Ni, Y.Q. and Ko, J.M. Stochastic optimal coupling-control of adjacent building structures // Computers & Structures, 81(30–31), pp. 2775–2787 (2003).
- 35. Song, G., Lin, J., Williams, F.W. and Wu, Z. Precise integration strategy for a seismic LQG control of structures // International Journal for Numerical Methods in Engineering, 68(12), pp. 1281–1300 (2006).
- 36. Cundumi, O. and Suarez, L. Numerical investigation of a variable damping semi-active device for the mitigation of the seismic response of adjacent structures // Computer-Aided Civil and Infrastructure Engineering, 23(4), pp. 291–308 (2008).
- 37. Jung, H., Spencer Jr., B.F. and Lee, I. Control of seismically excited cablestayed bridge employing magnetorheological fluid dampers // Journal of Structural Engineering, 129(7), pp. 873–883 (2003).
- 38. Dyke, S.J., Caicedo, J.M., Turan, G., Bergman, L.A. and Hague, S. Phase I benchmark control problem for seismic response of cable-stayed Bridges // Journal of Structural Engineering, 129(7), pp. 857–872 (2003).
- 39. Moon, S.J., Bergman, L.A. and Voulgaris, P.G. Model predictive control of wind-excited building: benchmark study // Journal of Engineering Mechanics, 129(1), pp. 71–78 (2003).
- 40. Hiemenz, G.J., Choi, Y.T. and Wereley, N.M. Seismic control of civil structures utilizing semi-active MR braces // Computer-Aided Civil and Infrastructure Engineering, 18(1), pp. 31–44 (2003).
- 41. Sodeyama, H., Sunakoda, K., Fujitani, H., Soda, S., Iwata, N. and Hata, K. Dynamic tests and simulations of magneto-rheological dampers // Computer-Aided Civil and Infrastructure Engineering, 18(1), pp. 45–57 (2003).
- 42. Liu, Y., Gordaninejad, F., Evrensel, C., Wang, X. and Hitchcock, G. Comparative study on vibration control of a scaled bridge using fail-safe

- magneto-rheological fluid dampers // Journal of Structural Engineering, 137(5), pp. 743–751 (2005).
- 43. Renzi, E. and Serino, G. Testing and modeling a semi-actively controlled steel frame structure equipped with MR dampers // Structural Control and Health Monitoring, 11(3), pp. 189–221 (2004).
- 44. Xu, Y.L., Chen, J., Ng, C.L. and Qu, W.L. Semi-active seismic response control of buildings with podium structure // Journal of Structural Engineering, 131(6), pp. 890–899 (2005).
- 45. Yoshida, O. and Dyke, S.J. Response control of full-scale irregular buildings using magnetorheological dampers // Journal of Structural Engineering, 131(5), pp. 734–742 (2005).
- 46. Adeli, H. and Cheng, N.T. Augmented Lagrangian genetic algorithm for structural optimization // Journal of Aerospace Engineering, ASCE, 7(1), pp. 104–118 (1994).
- 47. Adeli, H. and Cheng, N.T. Concurrent genetic algorithms for optimization of large structures // Journal of Aerospace Engineering, ASCE, 7(3), pp. 276–296 (1994).
- 48. Kang, M.W., Schonfeld, P. and Yang, N. Prescreening and repairing in a genetic algorithm for highway alignment optimization // Computer-Aided Civil and Infrastructure Engineering, 24(2), pp. 109–119 (2009).
- 49. Al-Bazi, A. and Dawood, N. Developing crew allocation system for precast industry using genetic algorithms // Computer-Aided Civil and Infrastructure Engineering, 25(8), pp. 581–595 (2010).
- 50. Lee, Y. and Wei, C.H. A computerized feature selection using genetic algorithms to forecast freeway accident duration times // Computer-Aided Civil and Infrastructure Engineering, 25(2), pp. 132–148 (2010).
- 51. Cheng, T.M. and Yan, R.Z. Integrating messy genetic algorithms and simulation to optimize resource utilization // Computer-Aided Civil and Infrastructure Engineering, 24(6), pp. 401–415 (2009).

- 52. Kim, H. and Adeli, H. Discrete cost optimization of composite floors using a floating point genetic algorithm // Engineering Optimization, 33(4), pp. 485–501 (2001).
- 53. Jiang, X. and Adeli, H. Neuro-genetic algorithm for nonlinear active control of highrise buildings // International Journal for Numerical Methods in Engineering, 75(8), pp. 770–786 (2008).
- 54. Loh, C.H., Lynch, J.P., Lu, K.C., Wang, Y., Chang, C.M., Lin, P.Y. and Yeh, T.H. Experimental verification of a wireless sensing and control system for structural control using MR dampers // Earthquake Engineering and Structural Dynamics, 36(10), pp. 1303–1328 (2007).
- 55. Christenson, R., Lin, Y.Z., Emmons, A. and Bass, B. Large-scale experimental verification of semi-active control through real-time hybrid simulation // Journal of Structural Engineering, 134(4), pp. 522–534 (2008).
- 56. Patten, W.N., Mo, C., Kuehn, J. and Lee, J. A primer on design of semiactive vibration absorbers (SAVA) // Journal of Engineering Mechanics, 124(1), pp. 61–68 (1998).
- 57. Jabbari, F. and Bobrow, J.E. Vibration suppression with resettable Device // Journal of Engineering Mechanics, 128(9), pp. 916–924 (2002).
- 58. Agrawal, A.K., Yang, J.N. and He, W.L. Applications of some semi-active control systems to benchmark cable-stayed bridge // Journal of Structural Engineering, 129(7), pp. 884–894 (2003).
- 59. Kurino, H., Tagami, J., Shimzu, K. and Kobori, T. Switching oil damper with built-in controller for structural control // Journal of Structural Engineering, 129(7), pp. 895–904 (2003).
- 60. Nishitani, A., Nitta, Y. and Ikeda, Y. Semi-active structural-control based on variable slip-force level dampers // Journal of Structural Engineering, 129(7), pp. 933–940 (2003).
- 61. Fukukita, A., Saito, T. and Shiba, K. Control effect for 20-story benchmark

- building using passive semiactive device // Journal of Engineering Mechanics, 130(4), pp. 430–436 (2004).
- 62. Bhardwaj, M.K. and Datta, T.K. Semi-active fuzzy control of seismic response of building frame // Journal of Structural Engineering, 132(5), pp. 791–799 (2006).
- 63. Kurata, N., Kobori, T., Takahashi, M., Niwa, N. and Midorikawa, H. Actual seismic response controlled building with semi-active damper system // Earthquake Engineering and Structural Dynamics, 28(11), pp. 1427–1447 (1999).
- 64. Yang, J.N., Bobrow, J., Jabbari, F., Leavitt, J., Cheng, C.P. and Lin, Y.P. Fullscale experimentation verification of resettable semi-active stiffness dampers // Earthquake Engineering and Structural Dynamics, 36(9), pp. 1255–1273 (2007).
- 65. Sakai, F., Takaeda, S. and Tamaki, T. Tuned liquid column damper—new type device for suppression of building vibrations // Proceedings of International Conference on Highrise Buildings, Nanjing, China, pp. 926–931 (1989).
- 66. Sakai, F., Takaeda, S. and Tamaki, T. Tuned liquid damper (TLCD) for cable-stayed bridges // Proceedings of Specialty Conf. Invitation in Cable-Stayed Bridges, Fukuoka, Japan, pp. 197–205 (1991).
- 67. Yalla, S.K., Kareem, A. and Kantor, J.C. Semi-active tuned liquid column dampers for vibration control of structures // Engineering Structures, 23(11), pp. 1469–1479 (2001).
- 68. Kim, H. and Adeli, H. Hybrid control of smart structures using a novel wavelet-based algorithm // Computer-Aided Civil and Infrastructure Engineering, 20(1), pp. 7–22 (2005).
- 69. Yalla, S.K. and Kareem, A. Semi-active tuned liquid column dampers: experimental study // Journal of Structural Engineering, 129(7), pp. 960–971 (2003).
- 70. Chen, Y.H. and Ko, C.H. Active tuned liquid column damper with Propellers // Earthquake Engineering and Structural Dynamics, 32, pp. 1627–1638 (2003).

- 71. Nguyen Q., Tong L. Shape control of smart composite plate with non-rectangular piezoelectric actuators / Q. Nguyen, L. Tong //Composite Structures 66 (2004) 207–214.
- 72. Kekana M. A static shape control model for piezo-elastic composite structures / M. Kekana // Composite Structures 59 (2003) 129–135.
- 73. Kumar Rajiv, Singh S.P., Chandrawat H.N. MIMO adaptive vibration control of smart structures with quickly varying parameters: Neural networks vs classical control approach / Rajiv Kumar, S.P. Singh, H.N. Chandrawat //Journal of Sound and Vibration 307 (2007) 639–661.
- 74. Shia W., Alsarheed M., Schuster E., Walker M.L., Leuer J., Humphreys D.A., Gates D.A. Multivariable model-based shape control for the National Spherical Torus Experiment (NSTX) / W. Shia, M. Alsarheed, E. Schuster, M.L. Walker, J. Leuer, D.A. Humphreys, D.A. Gates // Fusion Engineering and Design 86 (2011) 1107–1111.
- 75. Kamada, T., Fujita, T., Hatayama, T., Arikabe, T., Murai, N., Aizama, S. and Tohyama, K. Active vibration control of frame structures with smart structures using piezoelectric actuators (vibration control by control of bending moment of columns) // Smart Materials and Structures, 6(4), pp. 448–456 (1997).
- 76. Udwadia, F.E., Hosseini, M. and Wada, B. Distributed control of large-scale structural systems // Computer-Aided Civil and Infrastructure Engineering, 13(6), pp. 377–387 (1998).
- 77. Xu, Y.L., Qu, W.L. and Chen, B. Active/robust moment controllers for seismic response control of a large span building on top of ship lift towers // Journal of Sound and Vibration, 261(2), pp. 277–296 (2003).
- 78. Chen, G. and Chen, C. Semiactive control of the 20-story benchmark building with piezoelectric friction dampers // Journal of Engineering Mechanics, 130(4), pp. 393–400 (2004).
- 79. Preumont, A., de Marneffe, B., Deraemaeker, A. and Bossen, F. The damping of a truss structure with a piezoelectric transducer // Computers

- and Structures, 86(3–5), pp. 227–239 (2008).
- 80. Muanke, P.B., Masson, P. and Micheau, P. Determination of normal force for optimal energy dissipation of harmonic disturbance in a semi-active device // Journal of Sound and Vibration, 311(3–5), pp. 633–651 (2008).
- 81. Xu, Y.L. and Ng, C.L. Seismic protection of a building complex using variable friction damper: experimental investigation // Journal of Engineering Mechanics, 134(8), pp. 637–649 (2008).
- 82. Hadjigeorgiou E.P., Stavroulakis G.E., Massalas C.V. Shape control and damage identification of beams using piezoelectric actuation and genetic optimization / E.P. Hadjigeorgiou, G.E. Stavroulakis, C.V. Massalas // International Journal of Engineering Science 44 (2006) 409–421.
- 83. Krommer M. Dynamic shape control of sub-sections of moderately thick beams / M. Krommer // Computers and Structures 83 (2005) 1330–1339.
- 84. Lin, P.Y., Chung, L.L. and Loh, C.H. Semiactive control of building structures with semiactive tuned mass damper // Computer-Aided Civil and Infrastructure Engineering, 20(1), pp. 35–51 (2005).
- 85. Setareh, M., Ritchey, J.K., Murray, T.M., Koo, J.H. and Ahmadian, M. Semi-active tuned mass damper for floor vibration control // Journal of Structural Engineering, 133(2), pp. 242–250 (2007).
- 86. Lu, L.Y., Lin, G.L. and Lin, C.H. A unified analysis model for energy dissipation devices used in seismic-resistant structures // Computer-Aided Civil and Infrastructure Engineering, 24(1), pp. 41–61 (2009).
- 87. Nagashima, I., Maseki, R., Asami, Y., Hirai, J. and Abiru, H. Performance of hybrid mass damper system applied to a 36-story high-rise building // Earthquake Engineering and Structural Dynamics, 30(11), pp. 1615–1637 (2001).
- 88. Fujinami, T., Saito, Y., Masayuki, M., Koike, Y. and Tanida, K. A hybrid

- mass damper system controlled by  $H\infty$  control theory for reducing bending-torsion vibration of an actual building // Earthquake Engineering and Structural Dynamics, 30(11), pp. 1639-1653 (2001).
- 89. Watakabe, M., Tohdo, M., Chiba, O., Izumi, N., Ebisawa, H. and Fujita, T. Response control performance of a hybrid mass damper applied to a tall building // Earthquake Engineering and Structural Dynamics, 30(11), pp. 1655–1676 (2001).
- 90. Saito, T., Shiba, K. and Tamura, K. Vibration control characteristic of a hybrid mass damper system installed in tall buildings // Earthquake Engineering and Structural Dynamics, 30(11), pp. 1677–1696 (2001).
- 91. Nakamura, Y., Tanaka, K., Nakayama, M. and Fujita, T. Hybrid mass dampers using two types of electric servomotors: AC servomotors and linear-induction servomotors // Earthquake Engineering and Structural Dynamics, 30, pp. 1719–1743 (2001).
- 92. Buckle, I.G. and Mayes, R.L. Seismic isolation: history, application and performance a world view // Earthquake Spectra, 6(2), pp. 161–201 (1990).
- 93. Kelly, J.M., Earthquake-Resistant Design with Rubber, 2nd ed. / Springer-Verlag, Berlin, New York (1997).
- 94. Lee-Glauser, G.J., Ahmadi, G. and Horta, L.G. Integrated passive/active vibration absorber for multistory buildings // Journal of Structural Engineering, 123(4), pp. 499–504 (1997).
- 95. Zhang, Y. and Iwan, W.D. Protecting base-isolated structures from nearfield ground motion by tuned interaction damper // Journal of Engineering Mechanics, 128(3), pp. 287–295 (2002).
- 96. Iemura, H. and Pradono, M.H. Passive and semi-active seismic response control of a cable-stayed bridge // Structural Control and Health Monitoring, 9(3), pp. 189–204 (2002).
- 97. He, W.L., Agrawal, A.K. and Yang, J.N. Novel semi-active friction controller for linear structures against earthquakes // Journal of Structural Engineering, 129(7), pp. 941–950 (2003).

- 98. Gavin, H., Alhan, C. and Oka, N. Fault tolerance of semi-active seismic Isolation // Journal of Structural Engineering, 129(7), pp. 922–932 (2003).
- 99. Madden, G.J., Wongprasert, N. and Symans, M.D. Analytical and numerical study of a smart sliding base isolation system for seismic protection of buildings // Computer-Aided Civil and Infrastructure Engineering, 18(1), pp. 19–30 (2003).
- 100. Cundumi, O. and Suarez, L.E. Numerical investigation of a variable damping semi active device for the mitigation of the seismic response of adjacent structures // Computer-Aided Civil and Infrastructure Engineering, 23(4), pp. 291–308 (2008).
- 101. Wongprasert, N. and Symans, M.D. Experimental evaluation of adaptive elastomeric base-isolated structures using variable-orifice fluid dampers // Journal of Structural Engineering, 131(6), pp. 867–877 (2005).
- 102. Sarma, K. and Adeli, H. Fuzzy genetic algorithm for optimization of steel Structures // Journal of Structural Engineering, 126(5), pp. 596–604 (2000).
- 103. Sarma, K. and Adeli, H. Fuzzy discrete multicriteria cost optimization of steel structures // Journal of Structural Engineering, 126(11), pp. 1339–1347 (2000).
- 104. Adeli, H. and Karim, A. Fuzzy-wavelet RBFNN model for freeway incident Detection // Journal of Transportation Engineering, 126(6), pp. 464–471 (2000).
- 105. Karim, A. and Adeli, H. Comparison of the fuzzy wavelet rbfnn freeway incident detection model with the California algorithm // Journal of Transportation Engineering, 128(1), pp. 21–30 (2002).
- 106. Jiang, X. and Adeli, H. Fuzzy clustering approach for accurate embedding dimension identification in chaotic time series // Integrated Computer-Aided Engineering, 10(3), pp. 287–302 (2003).
- 107. Smith, J.F. and Nguyen, T.H. Autonomous and cooperative robotic behavior based on fuzzy logic and genetic programming // Integrated Computer-Aided Engineering, 14(2), pp. 141–159 (2007).
- 108. Sahasrabudhe, S. and Nagarajaiah, S. Experimental study of sliding

- base-isolated buildings with magnetorheological dampers in near-fault earthquakes // Journal of Structural Engineering, 131(7), pp. 1025–1034 (2005).
- 109. Lee, T.Y. and Kawashima Semi-active control of nonlinear isolated bridges with time delay // Journal of Structural Engineering, 133(2), pp. 235–241 (2007).
- 110. Jalihal, P. and Utka, S. Active control in passively base isolated building subjected to low power excitations // Computer & Structures, 66(2–3), pp. 211–224 (1998).
- 111. Gavin, H.P. and Aldemir, U. Optimal control of earthquake response using semiactive isolation // Journal of Engineering Mechanics, 131(8), pp. 769–776 (2005).
- 112. Gavin, H.P. and Zaicenco, A. Performance and reliability of semi-active equipment isolation // Journal of Sound and Vibration, 306(1–2), pp. 74–90 (2008).
- 113. Kurata, N., Kobori, T., Takahashi, M., Niwa, N. and Midorikawa, H. Actual seismic response controlled building with semi-active damper system // Earthquake Engineering and Structural Dynamics, 28(11), pp. 1427–1447 (1999).
- 114. Kurata, N., Kobori, T., Takahashi, M., Ishibashi, T., Niwa, N., Tagami, J. and Midorikawa, H. Forced vibration test of a building with semi-active damper system // Earthquake Engineering and Structural Dynamics, 29(5), pp. 629–645 (2000).
- 115. Kurata, N. and Kobori, T. Reliability of applied semi-active structural control system // Journal of Structural Engineering, 129(7), pp. 914–921 (2003). 116. Kim, H. and Adeli, H. Hybrid control of smart structures using a novel wavelet-based algorithm // Computer-Aided Civil and Infrastructure Engineering, 20(1), pp. 7–22 (2005).

- 117. Kim, H. and Adeli, H. Wind-induced motion control of 76-story benchmark building using the hybrid damper-TLCD system // Journal of Structural Engineering, 131(12), pp. 1794–1802 (2005).
- 118. Visioli A. Practical PID Control // Springer-Verlag London Limited, 2006.
- 119. Doyle J. C. Analysis of feedback systems with structured uncertainties / J. C. Doyle // IEE Proc. 1982. Pt. D. V.129. P.242-250.
- 120. Doyle J. C., Francis B. A., Tannenbaum A. R. Feedback control theory // Englewood Cliffs, NJ: MacMillan, 1992.
- 121. Doyle J. C., Glover R., Khargonekar P. P., Francis B. A. State-space solutions to standart  $H_2$  and  $H_\infty$  control problems // IEEE Trans. Autom. Control. 1989. V.34, No 8. P. 831-847.
- 122. Francis B. A. A course in  $H_{\infty}$  control theory // Berlin: Springer-Verlag, 1987.
- 123. Glover K. Robust stabilization of linear multivariable systems: relations to approximation // Intern J. Control. 1096. V.43, No. 3. P. 741-766.
- 124. Stavroulakis G.E., Foutsitzi G., Hadjigeorgiou E., Marinova D., Baniotopoulos C.C., Design and robust optimal control of smart beams with application vibrations suppression / G.E. Stavroulakis, G. Foutsitzi, E. Hadjigeorgiou, D. Marinova, C.C. Baniotopoulos //Advances in Engineering Software 36 (2005) 806–813.
- 125. Stavroulakis G.E., Hadjigeorgiou E., Marinova D., Baniotopoulos C.C. Robust active control against wind-induced structural vibrations / G.E. Stavroulakis, D.G. Marinova, E. Hadjigeorgiou, G. Foutsitzi, C.C. Baniotopoulos // J. Wind Eng. Ind. Aerodyn. 94 (2006) 895–907.
- 126. Поляк Б. Т. Робастная устойчивость и управление / Б. Т. Поляк, П. С. Щербаков. М.: Наука, 2002. 303 с.
- 127. Cai Mingjie, Xiang Zhengrong, and Karimi Hamid Reza Robust Sampled-Data  $H\infty$  Control for Vibration Mitigation of Offshore Platforms with Missing Measurements /

- Mingjie Cai, Zhengrong Xiang, and Hamid Reza Karimi // Mathematical Problems in Engineering, Volume 2014, 2014, 10 pages.
- 128. Sarma K. and Adeli H. Fuzzy discrete multicriteria cost optimization of steel structures / K. Sarma and H. Adeli // Journal of Structural Engineering, 126(11), pp. 1339–1347 (2000).
- 129. Zhang B.-L., Han Q.-L., Zhang X.-M., and Yu X. Integral sliding mode control for offshore steel jacket platforms / B.-L. Zhang, Q.-L. Han, X.-M. Zhang, and X. Yu // Journal of Sound and Vibration, vol. 331, no. 14, pp. 3271–3285, 2012.
- 130. Zhang B.-L., Ma L., and Han Q.-L. Sliding mode *H*∞ control for offshore steel jacket platforms subject to nonlinear selfexcitedwave force and external disturbance / B.-L. Zhang, L. Ma and Q.-L.Han // Nonlinear Analysis: RealWorld Applications, vol. 14, no. 1, pp. 163–178, 2013.
- 131. Adeli, H. and Saleh, A. Control, Optimization and Smart Structures High-Performance Bridges and Buildings of the Future // John Wiley and Sons, New York (1999).
- 132. Duan, Y.F., Ni, Y.Q. and Ko, J.M. State-derivative feedback control of cable vibration using semiactive magnetorheological dampers // Computer-Aided Civil and Infrastructure Engineering, 20(6), pp. 431–449 (2005).
- 133. Aldemir, U. Evaluation of disturbance weighting parameter of minimax attenuation problems // Computer-Aided Civil and Infrastructure Engineering, 24(4), pp. 302–308 (2009).
- 134. Guoping, C. and Jinzhi, H. Optimal control method for seismically excited building structures with time-delay in control // Journal of Engineering Mechanics, 128(6), pp. 602–612 (2002).
- 135. Ma, T.W. and Yang, T.Y. Adaptive feedback–feedforward control of building structures // Journal of Engineering Mechanics, 130(7), pp. 786–793 (2004).
- 136. Wang, S.G. Linear quadratic Gaussian-alpha control with relative

- stability and gain parameter for the structural benchmark problems // Journal of Engineering Mechanics, 130(4), pp. 511–517 (2004).
- 137. Adeli, H. and Hung, S.L. A concurrent adaptive conjugate gradient learning algorithm on MIMD machines // Journal of Supercomputer Applications, 7(2), pp. 155–166 (1993).
- 138. Hung, S.L and Adeli, H. Parallel backpropagation learning algorithms on Cray Y-MP8/864 supercomputer // Neurocomputing, 5(6), pp. 287–302 (1993).
- 139. Hung, S.L. and Adeli, H. A parallel genetic/neural network learning algorithm for MIMD shared memory machines // IEEE Transactions on Neural Networks, 5(6), pp. 900–909 (1994).
- 140. Adeli, H. and Cheng, N.T. Augmented Lagrangian genetic algorithm for structural optimization // Journal of Aerospace Engineering, ASCE, 7(1), pp. 104–118 (1994).
- 141. Adeli, H. and Cheng, N.-T. Concurrent genetic algorithms for optimization of large structures // Journal of Aerospace Engineering, ASCE, 7(3), pp. 276–296 (1994).
- 142. Adeli, H. and Kumar, S. Distributed genetic algorithms for structural Optimization // Journal of Aerospace Engineering, 8(3), pp. 156–163 (1995).
- 151. Kim, H. and Adeli, H. Hybrid feedback-least mean square algorithm for structural control // Journal of Structural Engineering, ASCE, 130(1), pp. 120–127 (2004).
- 143. Zhou, Z. and Adeli, H. Time-frequency signal analysis of earthquake records using Mexican hat wavelets // Computer-Aided Civil and Infrastructure Engineering, 18(5), pp. 379–389 (2003).
- 144. Samant, A. and Adeli, H. Feature extraction for traffic incident detection using wavelet transform and linear discriminant analysis // Computer-Aided Civil and Infrastructure Engineering, 15(4), pp. 241–250 (2000).
- 145. Umesha, P.K., Ravichandran, R. and Sivasubramanian, K. Crack detection and quantification in beams using wavelets // Computer-Aided Civil and Infrastructure Engineering, 24(8), pp. 593–607 (2009).

- 146. Jiang, X. and Adeli, H. Pseudospectra, music and dynamic wavelet neural network for damage detection of highrise buildings // International Journal for Numerical Methods in Engineering, 71(5), pp. 606–629 (2007).
- 147. He, Z., You, X., Zhou, L., Cheung, Y. and Tang, Y.Y. Writer identification using fractal dimension of wavelet subbands in Gabor domain // Integrated Computer-Aided Engineering, 17(2), pp. 157–165 (2010).
- 148. Rizzi, M., D'Aloia, M. and Castagnolo, B. Computer aided detection of microcalcifications in digital mammograms adopting a wavelet decomposition // Integrated Computer-Aided Engineering, 16(2), pp. 91–103 (2009).
- 149. Jiang, X. and Adeli, H. Dynamic fuzzy wavelet neuroemulator for nonlinear control of irregular highrise building structures // International Journal for Numerical Methods in Engineering, 74(7), pp. 1045–1066 (2008).
- 150. Эйлер Л. Метод нахождения кривых, обладающих свойствами максимума и минимума, или решение изопериметрической задачи, принимаемой в самом широком смысле / Леонард Эйлер. М.-Л.: Гостехтеориздат, 1934. 600 с.
- 151. Докучаев Л. В. Нелинейная динамика летательных аппаратов с деформируемыми элементами / Лев Викторович Докучаев. М.: Машиностроение, 1987—232с.
- 152. Кирхгоф Г. Механика / Густав Роберт Кирхгоф. М.: Изд-во АН СССР. 1962. 402 с.
- 153. Pekelman D. Simultaneous price-production decisions / D. Pekelman // Operations Research, 22, (1974), 788-794.
- 154. Лурье А. И. Аналитическая механика / Анатолий Исаакович Лурье. М.: Физматгиз, 1961. 824 с.
- 155. Дегтярёв Г. Л. Теоретические основы оптимального управления упругими космическими аппаратами / Г. Л. Дегтярёв, Т.К. Сиразетдинов. М.: Машиностроение, 1986. 216 с.

- 156. Stöbener Uwe and Gaul Lothar Modal Vibration Control for PVDF Coated Plates / Uwe Stöbener and Lothar Gaul // Journal of Intelligent Material Systems and Structures (2000) 11: p. 283-293.
- 157. Ковалёв А. М. Управляемость, наблюдаемость, идентификация динамических систем / А. М. Ковалёв, В. Ф. Щербак. К.: Наукова думка, 1993. 236 с.
- 158. Закржевский А. Е. Программные движения систем твёрдых и упругих тел / А. Е. Закржевский // Прикладная механика. 1993. Т. 29, № 6. С. 3 21.
- 159. Ohkami Y. Eigenvalues and eigenvectors for hybrid coordinate equations of motion for flexible spacecraft / Y. Ohkami, P. Likins // Celestial Mech. 1979. V. 19, № 4. P. 359 390.
- 160. Новицкий В. В. Построение обратной связи и функции Ляпунова для линейных нестационарных систем / В. В. Новицкий // Автоматика. 1990 № 4. С. 16 23.
- 161. Закржевский А. Е. Об оптимальном развороте упругого космического аппарата / А. Е. Закржевский // Прикладная механика. 2003. Т. 39, № 10. С. 106 113.
- 162. Закржевский А. Е. Анализ погрешностей конечномерного моделирования динамики твёрдого тела с упругими элементами / А. Е. Закржевский // Прикладная механика. 1994. Т. 30, № 7. С. 79 84.
- 163. Li H. X. Fuzzy Neural Intelligent Systems: Mathematical Background and Application to Engineering / H.X. Li, C.L.P. Chen, H.-P. Huang. Boca Raton: CRC Press, 2000. 392 p.
- 164. Бендат Дж. Прикладной анализ случайных процессов / Дж. Бендат, А. Пирсол. М.: Мир, 1989. 464 с.
- 165. Шалыгин А. С. Прикладные модели статистического моделирования / А.С. Шалыгин, Ю.И. Палагин. Л.: Машиностроение, 1986. 320 с.

- 166. Пугачёв В.С. Теория случайных функций и её применение к задачам автоматического управления. М.: Гос. Изд-во физ.-мат. Лит-ры, 1963. 884 с.
- 167. Дьяконов В. П. Справочник по применению системы PC MatLaB. М.: Физматлит, 1993. 113с.
- 168. Matlab. The Language of Technical Computing. Mathworks Inc.: Natick, MA, 2001.
- 169. Диментберг М. Ф. Нелинейные стохастические задачи механических колебаний. М.: Наука. Главная редакция физико-математической литературы, 1980. 368 с.
- 170. Kucuk I., et al., Optimal control of a distributed parameter system with applications to beam vibrations using piezoelectric actuators, / I. Kucuk // Journal of the Franklin Institute. (2012), Режим доступа: http://dx.doi.org/ 10.1016/j.jfranklin. 2012.10.008.
- 171. Захаров М. Г., Первозванский А. А. Особенности построения высокоточных систем управления полем перемещений упругих тел / М. Г. Захаров, А. А. Первозванский // Машиноведение.-1988, №4.- с. 84-89.
- 172. Dormand, J. R.; Prince, P. J. (1980), A family of embedded Runge-Kutta formulae // Journal of Computational and Applied Mathematics 6 (1): 19–26.
- 173. Захаров М. Г. Решение прикладных задач управления упруго деформируемыми системами на основе декомпозиционного подхода: дис. ... д-ра техн. наук: 05.13.16 / М. Г. Захаров // Санкт-Петербургский государственный университет. СПб., 1992. 364 с.: ил. Библиогр.: с. 329-350.
- 174. Первозвансий А. А. Курс теории автоматического управления: Учеб. пособ. М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1986. 616 с.

175. Potter, J. E. Matrix Quadratic Solutions // Journal of SIAM, Applied Mathematics, Vol. 14, No. 3, 1966, pp. 496-501.