



DOI 10.5862/JHSS.215.17
УДК 1/14

М.Л. Лезгина, В.Г. Иванов

ЭПИСТЕМОЛОГИЯ СТАНОВЛЕНИЯ МАТЕМАТИЧЕСКИХ АБСТРАКЦИЙ

ЛЕЗГИНА Марина Львовна — доктор философских наук, профессор Российского государственного педагогического университета им. А.И. Герцена.

Россия, 191186, Санкт-Петербург, наб. р. Мойки, 48
e-mail: lezgina@mail.ru

ИВАНОВ Вячеслав Григорьевич — доктор философских наук, профессор института философии Санкт-Петербургского государственного университета.

Россия, 199034, Санкт-Петербург, Менделеевская линия, 5
e-mail: lezgina@mail.ru

В статье показано, что математические абстракции берут свое начало на самых ранних стадиях первобытности. Их эволюция состоит в восхождении от конкретно-чувственных образов ко всё более общим понятийным структурам в ходе становления идеи континуума через преодоление ограниченности методов дискретной математики.

МАТЕМАТИЧЕСКИЕ АБСТРАКЦИИ; МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ИДЕЯ; ДИСКРЕТНАЯ МАТЕМАТИКА; КОНТИНУАЛЬНАЯ МАТЕМАТИКА; КОНКРЕТНО-ЧУВСТВЕННЫЕ ОБРАЗЫ; ОБЩИЕ ПОНЯТИЯ; ИДЕАЛИЗАЦИЯ.

Формирование абстрактного мышления, начиная с Галилея и Декарта, коррелируется прежде всего с проблемой становления абстракций в математике. Определение сути математических идей занимает ключевое место у Платона и Аристотеля, у Лейбница и Спинозы, у Канта и Уэвелла, у историков и методологов науки XX века. С учетом того, что математизация является одной из главных закономерностей развития современной науки и что новые направления научного поиска во всех отраслях исследований, включая гуманитарные, осуществляются, как правило, в тех проблемах, на которые распространяется математизация, нам представляется целесообразным проследить развитие математической идеи как детерминации познавательных возможностей человека.

Но прежде необходимо обратиться к философскому смыслу более фундаментального понятия «идея». Первоначально идеи воспринимались как итоги идеации, т. е. интуитивно-созерцательного усмотрения сущности без применения каких бы то ни было логических операций. Исходной формой генезиса идей яв-

ляется идеализация, которая осуществляется двояко: с одной стороны, это многоступенчатое абстрагирование и обобщение, с другой — мысленный переход к предельному случаю. В целом под идеализацией в наше время понимается мысленное конструирование объектов, которые не существуют и не могут быть осуществлены в действительности, но имеют в реальном мире прообразы. Развитие идеи происходит в следующих отношениях: в форме идей фиксируются основополагающие элементы теории, ее «начала», теоретические или идеальные объекты. Они представляют собой конструкты, образующие узлы необходимых и достаточных для соответствующей теории свойств и отношений, которые освобождены от всего случайного и привходящего. Это абстрактные объекты, которым в реальности соответствуют лишь отдаленные прообразы.

Кроме этого, идея в концентрированном виде выражает степени прогресса познания. Она сама проходит три ступени (обозначены Гегелем терминами «жизнь», «познание» и «абсолютная идея»), условно определяющие этапы развертывания идеи. Пройдя через стадии подспудно

развивающейся тенденции (фундаментальной идеи, порождающей поколения производных идей), идея находит свое выражение в предмете теории (науки), обращается в смысловое ядро свода знаний и в таком виде смыкает научное знание с такими его обобщениями, как картина мира, миропонимание, мировоззрение.

Имея своим содержанием узел необходимых связей, доступных на данном этапе познания и обеспечивающих целокупность имеющихся и формируемых знаний, идея выражает целевую установку познания.

И наконец, идея, будучи обнаруженной мышлением как особая форма познания, сама становится предметом рефлексии. От онтологического истолкования идеи рефлексия ведет к тезису о единстве онтологии, гносеологии и логики, восходит к идее априорности и т. д. На путях этого прогрессирующего восхождения идея вызревает из состояния, в котором она претендовала на констатацию абсолютной истины, к осознанию себя как условного допущения на базе сложно опосредованного отношения к действительности. В ней можно усмотреть синтез трех элементов – объективного эталона, сопряженной с эталоном схемы практического или умственного действия и субъективной способности человека адекватным образом оперировать содержанием идеи.

В качестве координатного каркаса динамики развертывания порядка идей в математике можно принять классификацию А.Н. Колмогорова, подразделявшего историю математики на четыре качественно определенных периода: 1) период зарождения математики, 2) математика постоянных величин, 3) математика переменных величин и 4) современная математика, или математика абстрактных структур [1; см. также: 2, с. 34]. В.Я. Перминов, приняв за основу схему Колмогорова, внес уточнения в определение первых двух периодов и выделил период первичной математики, период абстрактной дедуктивной математики (Египет и Вавилон) и период теоретической, дедуктивной математики постоянных величин (Древняя Греция, Средние века) [3, с. 71].

В целом указанная периодизация вполне соответствует структуре внутренней истории науки и членению ее на стадии, в той или иной степени коррелированные с периодами развития математики.

В истории науки можно выделить следующие стадии:

- *пранаука*, или период первичного накопления знаний в процессе трудовой повседневности;

- *протонаука* как период организованного и социально контролируемого с помощью особых служб хранения и ретрансляции в смене поколений накопленных знаний, имеющих в глазах общества особую ценность (письменности как средства фиксации сведений и коммуникации измерительно-вычислительных процедур, астрономических и календарных наблюдений, религиозных догматов и т. п.);

- *преднаука* как период, когда общество от хранения и ретрансляции знаний переходит к производству нового знания; научный поиск входит в круг задач ученых, но еще не составляет атрибута научной деятельности;

- *наука нового времени* как период, когда научный поиск превращается в главное занятие институализирующейся по всему фронту своего становления науки; наука обретает определенную завершенность организации; научный поиск становится атрибутом науки;

- *классическая наука*, или наука принципов, как период, когда научно-поисковая деятельность требует собственной развивающейся и совершенствующейся технологии познания, научной методологии;

- *современная наука*, при которой темпы ее роста требуют постоянно самообновляющейся методологии и формирования метанауки – философии науки.

Историки математической мысли обычно начинают с египетских папирусов и месопотамских табличек. При этом допускается, что исходные математические понятия, такие как «целое положительное число», «расстояния между точками», возникшие в доисторические времена, позже получили свое дальнейшее развитие в математике. Предполагается, что наши первоначальные представления о числе и форме относятся к очень отдаленной эпохе каменного века – палеолиту.

Все это позволяет рассматривать математические идеи как результат опыта предшествующих поколений. Более того, как в свое время отметил Г.И. Челпанов, это идеи, «не выводимые непосредственно из индивидуального опыта, но относительно которых, тем не менее, следует



предположить, что они возникают в конце концов... как продукты опыта целого ряда поколений» [4, с. 143–144].

Какова природа такого явления, как «опыт ряда поколений», исчисляемого тысячами лет? Его результаты непосредственно не вытекают из индивидуального опыта, не являются они и суммарным итогом множества таких опытов. В таком случае напрашивается вывод, что здесь мы имеем дело с разновидностью функционального априоризма. Однако можно ли отсюда заключить, что арифметические понятия прогрессивно структурируются под влиянием развития требований сохранения, или же следует считать, что сохранение предшествует любой числовой и даже количественной организации и составляет не только функцию, но также и априорную структуру, особую разновидность врожденной идеи, с необходимостью возникающей с первых актов интеллекта и первых контактов с опытом.

Ссылка на априоризм применительно к математике требует от нас уточнения, в каком смысле в данном контексте о нем может идти речь. Впервые Аристотель говорил об априоризме как о знании следствий, полученном в результате вывода из такого знания причин (в отличие от апостериорного знания), как опосредованный вывод об отдаленных следствиях этих причин. Позднее проблема априорности оказалась сопряженной с вопросами о природе универсалий и статусе «вечных истин». По мнению Н. Мальбранша, душа наделена способностью познания посредством чистого рассудка, минуя воображение и чувство. Она воспринимает чистым рассудком: духовные предметы, универсалии, общие понятия и вообще все свои мысли, когда познает их при помощи рефлексии, обращенной на самое себя, а также протяженность с ее свойствами, ибо ведь только чистым рассудком можно познать совершенный круг или квадрат, фигуру с тысячью сторон и тому подобные предметы. Такого рода перцепции называют «чистыми постижениями» или чистыми перцепциями, так как, чтобы представить себе все эти предметы, «духу нет необходимости вызывать в мозгу их телесные образы» [5, с. 443].

Идея «чистых постижений» входит в самую ткань философии Г. Лейбница. В них заключается тайна связи материи и духа. Они — «прин-

ципы познания» [6, с. 92]. В душе человека они запечатлены от природы. К такого рода идеям или принципам Лейбниц относил, в частности, протяженность, длительность и число. При этом числовые идеи более точны и различимы одна от другой, чем идеи протяжения, в которых не так легко подметить и измерить всякое равенство и неравенство, ибо в пространстве наша мысль не может найти определенной малой величины, подобной единице среди чисел. Характеризуя априорность такого рода как умозрительное, беспредпосылочное, самоочевидное для разума знание, Лейбниц вместе с тем выдвигал в неявной форме проблему первичности дискретной или континуальной математики в ее ранних предпосылках.

Концепция априоризма, получившая широкое признание в немецкой философии, нашла свое дальнейшее развитие у И. Канта, который с самого начала связывал вопрос об априоризме с проблемой основоположения науки. По его мнению, математика и физика суть две теоретические науки разума, которые должны определять свои объекты априори: первая вполне чисто, а вторая, по крайней мере отчасти, из разума. «Чистое априори» мыслилось им как чистое от всякой эмпирии, всеобщее и необходимое. Основоположение необходимости в научных построениях объясняется просто. Разум усматривает только то, что сам производит по собственному плану. Он, соотнося их с принципами своих суждений, «сообразными постоянным законам, должен идти впереди и заставлять природу отвечать на его вопросы, а не тащиться за нею на поводу» [7, с. 19], так как в противном случае наблюдения, произведенные наудачу, не будут объединены «постоянным законом», между тем как разум ищет и требует такого закона.

Поясняя эту мысль Канта, Н. Гартман полагал, что в поле реального познания априорный элемент не встречается изолированно. Там, где он изолируется искусственно, что, конечно же, имеет место в известных теориях, он теряет отличительную черту познания — объективную значимость, переходя в спекуляцию или в свободную комбинаторную игру. Априорное знание существует лишь постольку, поскольку «апостериорному знанию доступно вот-бытие познаваемых случаев» [8, с. 252–253].

Априори придает связность и упорядоченность переживаниям чувственного опыта,

входит в ткань научного мышления, нормирующего научные понятия, наделяя их качествами всеобщности и необходимости. Кант ввел различие априорных форм чувственности (чистое априори — пространство и время) и априорных форм рассудка (категории четырех классов: количества, качества, модальности и отношения). Априори обнаруживается только тогда, когда восприятия трансформируются с помощью априорных форм в понятия, прежде всего в понятия научные.

Но наука имеет свое начало и свою историю. И тогда возникает вопрос о ее начале, о том времени, когда появились научные понятия. С самых ранних времен, до каких простирается история человеческого разума, математика пошла надежным путем науки. И это был подлинно революционный переворот, но переворот только *в направлении* развития математики как науки, и он еще не был началом чистой математической мысли. Переворот касался доказательств и обоснований математической необходимости, а не источника этой необходимости. Априоризм, понимаемый в то время как врожденность, оставлял открытым вопрос, на какой стадии своего формирования разум приобретает атрибут априорности.

Явным образом проблема математического познания существует в истории, будучи тесно связанной с проблемой категорий. Всюду, где речь идет об априорности, эти проблемы сближаются. Это сближение как раз и состоит в том, что вопрос об априорности уводит нас к началам математической науки и еще дальше. Более того, необходим учет различия между дискретной и континуальной математикой, что ведет к доисторическим временам. Первым методом дискретной математики был счет, континуальная же математика (математика непрерывного) занималась измерением таких разных величин, как расстояние, площадь, время, вес и объем.

Насколько глубоко в прошлое уходит этот ряд? Не подлежит сомнению, что способность человека к счету зависит от владения речью. Древнейшие предпосылки математического мышления связаны с формированием неких тончайших структур нашего думанья в процессе эволюции центральной нервной системы. Эти предпосылки зарождаются на довербальном уровне, но реализуются с переходом от животного способа существования к челове-

ческому, под влиянием формирующейся общественной практики.

Известно, что язык современного типа сформировался довольно поздно, в эпоху неолитической революции. Мы практически ничего не можем сказать о языке более раннем, кроме того, что уровень развития мозга и гортани допускали его существование. За пределы неолита, в эпоху палеолита в области формирования человеческой психики впервые удалось проникнуть Ж. Буше де Перту. Собирая древности палеолита, он обратил внимание на насечки на камне и кости, определив их как метки на память, знаки и символы, напоминающие примитивные иероглифы. Буше де Перт считал, что в отличие от инструментов, вызванных к жизни материальной необходимостью, здесь речь идет о порождениях необходимости духовной. Исходя из этого предположения, он высказал догадку, что размещение насечек имело некий «символический» смысл.

Это была блестящая догадка, оценить всю глубину которой не мог еще ни ее автор, ни его современники. Насечки, как было доказано позднее, действительно были обозначениями определенных количеств, воплощающих в примитивной форме идею числа. Впервые такое предположение высказали А. Ларге и Г. Кристи. В насечках они заподозрили счетные таблицы или календарные записи. В первом случае насечки могли выступать как знаки, выполняющие функции памятных отметок охотника, знаки нумерации, знаки для распознавания или знаки собственности, а во втором случае насечки приобретают знаково-символический характер, предполагающий какую-то систему чисел, служащую для выражения жизненно важных количественных отношений.

Интересно, что приобщение к счету у детей проходит в три этапа: во-первых, достигается способность распознавать множества разной природы по признаку «больше — меньше»; во-вторых, достигается распознавание множеств по числу элементов в нем; в-третьих, наконец, «истинный счет» с помощью символов-числительных. Последний этап связан уже с вербальным абстрактно-логическим мышлением и в чистом виде доступен только человеку. Его отдаленные предпосылки обнаруживают у некоторых животных (обезьян, ворон, попугаев), но истинного счета они не достигают. Истинный



счет становится возможным лишь с освоением языка и речи.

Конечно, язык современного типа сложился далеко не сразу, он уходит корнями в эпоху неолитической революции. Чтобы подняться до уровня идеализированного объекта, каковым является число, т. е. до уровня универсалий, человеческий ум должен был — пусть в самой примитивной форме — угадать, обнаружить, постичь множество общностей более частного характера. Но на этом пути человеку приходилось преодолевать бесконечные трудности, связанные не только с «неподатливостью» природного материала, но и с неподготовленностью, слабой инструментальной вооруженностью его собственного ума. Конечно, формирование числа коррелирует с развитием самой логики — предлогическому уровню соответствует предчисловой.

За этим стоит развитие языка. Даже простейшие понятия должны были выкристаллизоваться, закрепиться в найденной или созданной для этого языковой форме, и именно в таком виде они представляют в сознании предметы внешнего мира. Исходные для этих понятий предпонятия были чрезвычайно неопределенными, поскольку лежали в сфере инстинктивного. Объяснение же *осознанных* природных явлений было в значительной степени интуитивным, так как слишком слабы были логические связи и мал объем благоприобретенных опытных знаний. В силу этого существовала своеобразная асимметрия ума по отношению к конкретно-чувственно-образному и абстрактно-общему. Именно конкретно-чувственное, связанное с непосредственным жизнеобеспечением повседневных нужд человека, раньше и быстрее всего получало словесно-понятийное оформление. Представления же об общем пробивали себе дорогу иначе, стихийно. Не находя опоры в слове, они требовали иной формы фиксации, закрепления, при которой их общность сочеталась бы с той заземленностью, которая только и была доступна уму, что реализовалось в развитии счета. При этом в качестве предмета счета всегда избирается конечно конкретное множество.

В самом деле, еще Ларге и Кристи подметили весьма характерную деталь, сопряженную с насечками, — соседство с ними на ряде пластин и костей гравированных изображений животных. В наши дни, в частности в трудах

А.П. Окладникова и его последователей, доказано: 1) древность пластин с насечками уходит в глубину тысячелетий, превышая древность иных форм, таких как «макароны» (волнистые линии) или отпечатки, «следы» рук; 2) с помощью расчетов, насечки — это не произвольные орнаменты, они действительно связаны со счетом, определяя циклы жизнедеятельности промысловых животных, сроков внутриутробного развития плода и т. п. Эти исследования были продолжены как в нашей стране, так и за рубежом. При сравнении и сопоставлении пластинок с насечками было обнаружено, что происходит постепенное содержательное обогащение изображения, обрастание его новыми деталями, разнообразятся и в то же время стандартизируются форма лунок в насечке («лунка», «серпик», «угол», «крестик»), их размещение на плоскости пластины, соотнесение изображения с краем и центром пластины, отверстием в ней. Изображение из простой счетной записи перерастает в нечто знаково-символическое, связанное с мифом.

Простейшие операции имели место еще в эпоху палеолита (находка на стоянке Бильценгелебен, Германия). Они становятся значительно сложнее в эпоху, непосредственно предшествующую мустьерской (например, каменная плитка из грота Ля Ферасси). Интересно в связи с этим отметить, что «очень часто слова со значением „считать” и „число” этимологически оказываются связанными с глаголами, означающими „рубить, резать”, как, кстати, и глаголы „читать” и „писать”» [9, с. 69–70]. Серия насечек, «резов», представляла собой эквивалент числового ряда, сопоставляемого с рядом или последовательностью реальных предметов или событий, а возможно, параллельно этому, с пальцами конечностей в качестве натурального ряда, принятого за эталон.

Несомненно также, что пластины с насечками как счетные устройства имели коммуникативный характер. Благодаря им психическая операция счета оказывалась транслируемой и ретранслируемой среди тех, кто посвящен в ее предназначение. Праобщина складывалась как информационная система, т. е. система, способная опознавать сигналы, относящиеся к счету определенных множеств, хранить их в памяти, передавать и использовать в качестве высокоценного сообщения. Таким образом, мы

обнаруживаем на стадии нижнего палеолита зарождение первобытной графики как особого, ранее не известного способа коммуникации.

В целом можно выделить три стадии формирования зачатков математического мышления. На первой счет еще неотделим от объектов счёта. На этой стадии предстает в чистом виде тот факт, что «математическая экзистенция... всегда дана вместе с так-бытием, а именно — и априори тоже. Мнимое разделение в области реального познания опиралось на то, что познание вот-бытия существует лишь апостериорно, а познание априори схватывает лишь так-бытие. Однако следует обратить внимание, что и тот, и другой тезисы не являются обратимыми» [8, с. 253]. Во всяком случае, на этой стадии пересчет как таковой отсутствует и имеет место лишь общая оценка размеров множества. На второй стадии развития первобытного математического мышления совокупность может быть расчленена на элементы, которые могут быть соотнесены с качественно иным элементом из иной совокупности так, чтобы число замененных элементов было равно числу заменивших (что имело место в практике межгруппового обмена по принципу «предмет

за предмет»). На третьей стадии развития счёта в эту операцию вводится некое стандартное материальное множество, помогающее определить количественно некую совокупность. Эту функцию выполняли прежде всего пальцы рук и ног. Отсюда в счёте особо выделяются такие числа, как «пять» и «дважды пять». По аналогии со счётом на пальцах могут быть использованы камешки, раковины, кости и т. д.

Эти три стадии формирования способностей к счёту подготавливают условия для перехода от естественных посредников при счёте к искусственным: бусинкам, узелкам на шнурах, полосам краски и пр. Если пальцы были посредниками в счёте, то заменяющие их искусственные средства явились отвлечением, абстрагированием от прежних посредников, своего рода «посредниками посредников». Следующий шаг в эволюции навыков счёта состоит уже в освобождении его от прежней привязки к искусственным или естественным материальным совокупностям, что, в свою очередь, ведет к оперированию абстрактными числами вообще в любых пределах и созданию специальных приборов для счёта и измерения.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Колмогоров А.Н. Математика // БСЭ. Изд. 2-е. Т. 26. М., 1954. С. 464–483.
2. Яшин Б.Л. Математическое знание и его история // Философия науки. М., 2007.
3. Перминов В.Я. Закономерности развития математики // Философия математики и технических наук. М., 2006.
4. Челпанов Г.И. Психология. Философия. Образование. М.; Воронеж, 1999.
5. Мальбранш Н. О разыскании истины // Антология мировой философии. В 4 т. Т. 2. М., 1970.
6. Лейбниц Г. Сочинения. В 4 т. Т. 2. М., 1983.
7. Кант И. Критика чистого разума. СПб., 1983.
8. Гартман И. К основоположению онтологии. СПб., 2003.
9. Откупщиков Ю.В. К истокам слова. М., 1973.

M.L. Lezgina, V.G. Ivanov

EPISTEMOLOGY OF EMERGING OF MATHEMATICAL ABSTRACTIONS

LEZGINA Marina L. — *Herzen State Pedagogical University of Russia.*

Nab. Moyki, 48, St. Petersburg, 191186, Russia
e-mail: lezgina@mail.ru

IVANOV Vyacheslav G. — *The Institute of Philosophy of the St. Petersburg State University.*

Mendeleyevskaya liniya, 5, St. Petersburg, 199034, Russia
e-mail: lezgina@mail.ru



It is shown that mathematical abstractions have their origin in the earliest stages of prehistory. The evolution of them is the process of their raising from concrete-perceptual images to general conceptual structures during emerging of idea of continuum by its going out from the narrow frames of methods of discrete mathematics.

MATHEMATICAL ABSTRACTIONS; MATHEMATICAL IDEA; DISCRETE MATHEMATICS; CONTINUAL MATHEMATICS; CONCRETE-PERCEPTUAL IMAGES; GENERAL CONCEPTS; IDEALOGIZATION.

REFERENCES

1. Kolmogorov A.N. Matematika. *Bol'shaya sovet-skaya entsiklopediya*. Iss. 2. Of vol. 26. Moscow, 1954. Pp. 464–483. (In Russ.)
2. Yashin B.L. Matematicheskoye znaniye i yego istoriya. *Filosofiya nauki*. Moscow, 2007. (In Russ.)
3. Perminov V.Ya. Zakonomernosti razvitiya matematiki. *Filosofiya matematiki i tekhnicheskikh nauk*. Moscow, 2006. (In Russ.)
4. Chelpanov G.I. Psikhologiya. *Filosofiya. Obrazovaniye*. Moscow, Voronezh, 1999. (In Russ.)
5. Malbransh N. O razyskanii istiny. *Antologiya mirovoy filosofii*. In 4 vol. Of vol. 2. Moscow, 1970. (In Russ.)
6. Leybnits G. Sochineniya. In 4 vol. Of vol. 2. Moscow, 1983. (In Russ.)
7. Kant I. *Kritika chistogo razuma*. St. Petersburg, 1983. (In Russ.)
8. Gartman I. *K osnovopolozheniyu ontologii*. St. Petersburg, 2003. (In Russ.)
9. Otkupshchikov Yu.V. *K istokam slova*. Moscow, 1973. (In Russ.)