Минобрнауки России
Санкт-Петербургский политехнический университет Петра Великого
Институт физики, нанотехнологий и телекоммуникаций
**Кафедра «Экспериментальная ядерная физика»**

Работа допущена к защите

Заведующий кафедрой

_______________ Я.А. Бердников

«___» ___________ 2015 г.

# ВЫПУСКНАЯ РАБОТА БАКАЛАВРА

## ТЕНЗОР ЭНЕРГИИ-ИМПУЛЬСА ЭЛЕКТРОМАГНИТНОГО ПОЛЯ В СРЕДАХ С ДИСПЕРСИЕЙ

направление 03.03.02 – Физика

профиль подготовки «Физика атомного ядра и элементарных частиц»

Выполнил
студент гр. 43414/1 К. Левина

Научный руководитель
профессор, д.ф.-м.н. И.Н. Топтыгин

Санкт-Петербург

2015

# РЕФЕРАТ

36 с., 17 источников, 4 прил.

УРАВНЕНИЯ МАКСВЕЛЛА, СРЕДА С ДИСПЕРСИЕЙ, ГРУППОВАЯ СКОРОСТЬ КВАЗИМОНОХРОМАТИЧЕСКИХ ВОЛН, ТЕНЗОР ЭНЕРГИИ-ИМПУЛЬСА ЭЛЕКТРОМАГНИТНОГО ПОЛЯ, ВОЗМОЖНОСТЬ ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНОЙ ПРОВЕРКИ.

Получены уравнения Максвелла в среде с дисперсией из принципа наименьшего действия. Получен тензор энергии-импульса электромагнитного поля из уравнений Максвелла. Рассмотрена связь данного тензора с групповой скоростью квазимонохроматических волн в непоглощающем и изотропном диэлектрике с временной и пространственной дисперсиями.

Показано, что в отсутствие сторонних зарядов и токов в диэлектрике и при использовании плотности импульса, определённой по Абрагаму, для выполнения закона сохранения импульса не нужно вводить силу Абрагама, приложенную к веществу. Элементы тензора существенно зависят от производных по частоте и волновому вектору от проницаемостей среды, сам тензор является симметричным.

Произведено сравнение полученных результатов с результатами других авторов. Вычислено давление волн на границу раздела двух сред, и приведена возможность экспериментальной проверки полученных соотношений.

Намечены подходы к квантовому описанию электромагнитных явлений в средах с дисперсией.

Содержание

**Введение**

Тензор энергии-импульса является фундаментальным понятием, характеризующим электромагнитное поле в вакууме и средах. При записи тензора энергии-импульса в четырёхмерной форме его временные компоненты определяют плотность энергии и плотность импульса электромагнитного поля. Пространственные компоненты данного тензора представляют собой плотность потока импульса. Перечисленные величины являются важными для описания всех электродинамических явлений. Многие авторы изучали данный тензор и смежные с ним вопросы в различных аспектах. ([1]-[9]). Данный тензор можно получить, используя уравнения Максвелла и математический аппарат Фурье-анализа. Уравнения Максвелла в свою очередь можно получить из принципа наименьшего действия.

Однако в среде с дисперсией тензор энергии-импульса пока что удаётся построить только для таких спектральных интервалов, которые соответствуют так называемым «окнам прозрачности». В таком случае полностью пренебрегаем диссипацией энергии. Выражения, описывающие электромагнитное поле, будут относиться к пакету волн с гармониками, частоты и волновые векторы которых заключены в интервалах $\frac{\Delta\omega}{\omega} << 1$, $\frac{\Delta k}{k} << 1$. Рассматриваемую среду считаем изотропной, равновесной, несжимаемой, отклики на поле - линейными. В таком случае плотность энергии электромагнитного поля описывается формулой Бриллюэна

$$w = \frac{1}{16\pi}\left(\frac{\partial}{\partial\omega}(\omega \in_{\alpha\beta}(\boldsymbol{k},\omega))\mathcal{E}_\alpha^*\mathcal{E}_\beta + \boldsymbol{\mathcal{B}}^*\boldsymbol{\mathcal{B}}\right), \qquad (1)$$

которая записана здесь через тензор $\in_{\alpha\beta}(\boldsymbol{k},\omega)$ диэлектрической проницаемости, связывающий Фурье-гармоники векторов макроскопического электрического поля: электрической напряжённости $\boldsymbol{E}$ и обобщённой индукции $\tilde{\boldsymbol{D}}$. Частота и волновой вектор в формуле (1) фиксированы. Произведения амплитуд напряжённостей поля $\mathcal{E}_\alpha^*\mathcal{E}_\beta$, $\boldsymbol{\mathcal{B}}^*\boldsymbol{\mathcal{B}}$, входящих в формулу Бриллюэна, усреднены по основному периоду $T = 2\pi / \omega$.

Формула (1) встречается во всех источниках ([1]-[9]). Но уже с написанием плотности импульса $\boldsymbol{g}$ возникают затруднения. Существуют два выражения для определения этой величины, принадлежащие Минковскому и Абрагаму ([7], [9]).

Плотность импульса по Минковскому:

$$\boldsymbol{g} = \frac{1}{16\pi c}\left( \tilde{\boldsymbol{\mathcal{D}}} \times \boldsymbol{\mathcal{B}}^* + \tilde{\boldsymbol{\mathcal{D}}}^* \times \boldsymbol{\mathcal{B}} + \boldsymbol{n} ck \frac{\partial \in_t}{\partial \omega} \boldsymbol{\mathcal{E}}^* \boldsymbol{\mathcal{E}} \right). \qquad (2)$$

Плотность импульса по Абрагаму:

$$\boldsymbol{g} = \frac{1}{16\pi c}\left( \boldsymbol{\mathcal{E}} \times \boldsymbol{\mathcal{B}}^* + \boldsymbol{\mathcal{E}}^* \times \boldsymbol{\mathcal{B}} - \frac{\omega}{c} \frac{\partial \in_{\alpha\beta}}{\partial \boldsymbol{k}} \mathcal{E}_\alpha^* \mathcal{E}_\beta \right). \qquad (3)$$

Выражение плотности импульса по Абрагаму приводит к симметричному тензору энергии-импульса. Симметричность тензора энергии-импульса является необходимым условием сохранения момента импульса в изотропной среде [2].

Запись плотности потока импульса представляет собой наиболее трудную задачу. В работе Питаевского [10] автор приходит к выводу, что плотность потока импульса в переменном электромагнитном поле при наличии дисперсии выражается так же, как в статических полях, с заменой статических проницаемостей $\varepsilon, \mu$ величинами $\varepsilon(\omega), \mu(\omega)$ и заменой произведений напряжённостей поля такими же произведениями, усреднёнными по основному периоду поля.

Это приводит к тензору напряжений (плотности потока импульса с обратным знаком) для жидкого диэлектрика

$$\sigma_{\alpha\beta}^{Pit} = -\frac{\varepsilon(\omega)}{8\pi}\left( \boldsymbol{\mathcal{E}}^* \boldsymbol{\mathcal{E}} \right) n_\alpha n_\beta . \qquad (4)$$

Такой же тензор напряжений используют Макаров и Рухадзе [11].

В данном выражении отсутствует групповая скорость $\boldsymbol{u}=\frac{d\omega}{d\boldsymbol{k}}$, с которой при наличии дисперсии в среде переносятся волновые пакеты вместе со своими энергиями и импульсами. В случае отсутствия пространственной дисперсии выражение для групповой скорости можно записать через производные от электрической и магнитной проницаемостей по частоте:

$$\boldsymbol{u}=\frac{c}{\frac{d}{d\omega}\left(\omega\sqrt{\varepsilon(\omega)\mu(\omega)}\right)}\frac{\boldsymbol{k}}{k}. \tag{5}$$

Важная роль групповой скорости в построении тензора энергии-импульса указывалась в обзоре [12]. В этой же работе обсуждалось релятивистское обобщение для групповой скорости.

Отсутствие групповой скорости в формуле (4) вызывает подозрения. Автор работы [10] при получении выражения (4) использовал квазистационарную модель с конденсатором, на обкладки которого подаётся переменное напряжение. В таком приближении волны в конденсаторе не распространяются, и групповая скорость не может проявиться. При выходе за рамки данного приближения отсутствие групповой скорости не удаётся обосновать разумными физическими соображениями. В качестве доказательства будет приведено невыполнение уравнения неразрывности при использовании выражения (4).

По указанным причинам целесообразно вернуться к уточнению тензора энергии-импульса в среде с дисперсией. Полученные выражения можно будет экспериментально проверить, измерив силу, действующую на границу сред. Имеется в виду световое давление, впервые измеренное Лебедевым [13].

Данная проблема является актуальной из-за возникшего в последнее время интереса к метаматериалам, для которых временная и пространственная дисперсии играют первостепенную роль [14].

## 1. Базовые выражения для получения тензора энергии-импульса

*1.1 Описание электромагнитного поля с помощью 4-х векторов поля*

Среду полагаем несжимаемой, непоглощающей, изотропной, равновесной, её отклики на внешние воздействия - линейными.

Из проекций векторов электромагнитного поля составляются тензоры поля, из которых в свою очередь можно получить релятивистски инвариантные величины. Тензор электромагнитного поля в вакууме [2]:

$$F_{ik} = \frac{\partial A_k}{\partial x^i} - \frac{\partial A_i}{\partial x^k} = \begin{pmatrix} 0 & E_x & E_y & E_z \\ -E_x & 0 & -B_z & B_x \\ -E_y & B_z & 0 & -B_y \\ -E_z & -B_x & B_y & 0 \end{pmatrix}. \tag{6}$$

В среде появляются ещё два вектора поля - $\boldsymbol{D}, \boldsymbol{H}$, которые связаны с векторами $\boldsymbol{E}, \boldsymbol{B}$ интегральными уравнениями связи:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{D}(x) &= \int \varepsilon(x-x')\boldsymbol{E}(x')d^4x', \\ \boldsymbol{B}(x) &= \int \mu(x-x')\boldsymbol{H}(x')d^4x', \end{aligned} \tag{7}$$

здесь $x' = (ct, \boldsymbol{r})$ - 4-х вектор координат.

С помощью $\boldsymbol{D}, \boldsymbol{H}$ также составляется тензор поля [4]:

$$H_{ik} = \begin{pmatrix} 0 & D_x & D_y & D_z \\ -D_x & 0 & -H_z & H_x \\ -D_y & H_z & 0 & -H_y \\ -D_z & -H_x & H_y & 0 \end{pmatrix}. \tag{8}$$

Ввиду того, что компоненты тензоров поля связаны между собой интегральными уравнениями связи, можно выразить $H_{ik}$ через $F_{ik}$ с помощью общего интегрального уравнения связи, включающего тензор 4-го ранга, характеризующий отклик среды на электромагнитное воздействие:

$$H_{ik}(x) = \int \varepsilon_{ik}{}^{\mu\eta}(x-x')F_{\mu\eta}(x')d^4x'. \tag{9}$$

Компоненты тензоров электромагнитного поля связаны между собой уравнениями Максвелла.

Первая пара уравнений Максвелла [1]:

$$\boldsymbol{rot}\,\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r},t) = -\frac{1}{c}\frac{\partial \boldsymbol{B}(\boldsymbol{r},t)}{\partial t},$$
$$div\,\boldsymbol{B}(\boldsymbol{r},t) = 0, \qquad (10)$$

получается с помощью выражения (6) так же как и в вакууме [2] (см. Приложение 1).

Чтобы получить вторую пару уравнений Максвелла, необходимо проварьировать действие, учитывая определённость внешних зарядов $\rho_{ext}$ и токов $\boldsymbol{j}_{ext}$.

Действие, записанное для поля, будет состоять из двух частей. Первая часть будет отвечать самому полю, вторая – взаимодействию поля с внешними токами и зарядами [2]. Часть, описывающая взаимодействие внешних токов и зарядов с полем, не будет отличаться от соответствующего выражения в вакууме [2]:

$$S_{field-part} = -\frac{1}{c^2}\int j^l A_l d\Omega, d\Omega = d^4x = cdtdxdydz,$$
$$j^l = (c\rho_{ext}, \boldsymbol{j}_{ext}). \qquad (11)$$

Здесь $j^l$ - 4-хмерная плотность внешнего тока, $A_l = (\varphi, -\boldsymbol{A})$ - 4-хмерный потенциал поля, $dx^4$ - 4-хмерный объём.

Действие самого поля в диэлектрике записывается естественным обобщением данного выражения, записанного для вакуума [4]:

$$S_{field} = -\frac{1}{16\pi c}\int F_{ik}H^{ik}d\Omega. \qquad (12)$$

Суммируя (11) и (12), получаем:

$$S = -\frac{1}{c^2}\int j^l A_l d\Omega - \frac{1}{16\pi c}\int F_{ik}H^{ik}d\Omega. \qquad (13)$$

Вариация формулы (13):

$$\delta S = -\frac{1}{c}\int\left(\frac{1}{c}j^l\delta A_l + \frac{1}{16\pi}\delta F_{ik}H^{ik} + \frac{1}{16\pi}F_{ik}\delta H^{ik}\right)d\Omega = 0. \qquad (14)$$

Из (14) получаем (см. Приложение 2):

$$-\frac{4\pi}{c}j^l = \frac{\partial H^{li}}{\partial x^i}, \qquad (15)$$

Учитывая, что временные компоненты $H^{li}$ соответствуют компонентам $H_{li}$, записанным с обратным знаком, вторая пара уравнений Максвелла (см. Приложение 2):

$$\begin{aligned} &\boldsymbol{rot}\,\boldsymbol{H}(\boldsymbol{r},t) = \frac{1}{c}\frac{\partial \boldsymbol{D}(\boldsymbol{r},t)}{\partial t} + \frac{4\pi}{c}\boldsymbol{j}_{ext}(\boldsymbol{r},t),\\ &div\,\boldsymbol{D}(\boldsymbol{r},t) = 4\pi\rho_{ext}(\boldsymbol{r},t). \end{aligned} \tag{16}$$

1.1.1 *Вывод уравнений Максвелла в Фурье-пространстве*

Фурье-пространство имеет преимущество, так как в нём интегральные уравнения связи и дифференциальные уравнения Максвелла становится алгебраическими (см. [4]). Уравнения Максвелла являются фундаментальными следствиями принципа наименьшего действия. Поэтому для полноты картины повторим вывод уравнений Максвелла из принципа наименьшего действия в Фурье-пространстве.

Первая пара уравнений Максвелла [4]:

$$\begin{aligned} &\boldsymbol{k}\times\boldsymbol{E} = \frac{\omega}{c}\boldsymbol{B},\\ &\boldsymbol{kB} = 0, \end{aligned} \tag{17}$$

получается с помощью тензора поля (6) так же как и в вакууме [2] (см. Приложение 3).

При выполнении преобразования Фурье в интеграле действия (13) будем предполагать, что четырёхмерная область интегрирования значительно превышает размеры рассматриваемого волнового пакета и все интегралы сходятся.

Действие в Фурье-пространстве запишется таким образом:

$$\begin{aligned} &S = -\frac{1}{c^2}\int j^l(\boldsymbol{k},\omega)A_l(\boldsymbol{k},\omega)d^4k - \frac{1}{16\pi c}\int F_{ik}(\boldsymbol{k},\omega)H^{ik}(\boldsymbol{k},\omega)d^4k,\\ &d^4k = \frac{d\omega}{c}dk_x dk_y dk_z. \end{aligned} \tag{18}$$

Вариация действия:

$$\delta S = -\frac{1}{c}\int\left(\frac{1}{c}j^l\delta A_l + \frac{1}{16\pi}\delta F_{ik}H^{ik} + \frac{1}{16\pi}F_{ik}\delta H^{ik}\right)d^4k = 0\,. \tag{19}$$

Из формулы (18) можно получить аналог выражения (15) в Фурье-пространстве (см. Приложение 3):

$$\frac{4\pi}{c} j^l = ik_i H^{li}. \qquad (20)$$

Подставим компоненты тензора (8) и 4-хмерного тока в выражение (20), учитывая, что временные компоненты тензора $H^{li}$ соответствуют компонентам $H_{li}$, записанным с обратным знаком. Получаем вторую пару уравнений Максвелла (см. Приложение 3):

$$\begin{aligned} &\boldsymbol{k} \times \boldsymbol{H}(\boldsymbol{k},\omega) = -\boldsymbol{D}(\boldsymbol{k},\omega)\frac{\omega}{c} - \frac{i4\pi}{c}\boldsymbol{j}_{ext}(\boldsymbol{k},\omega), \\ &\boldsymbol{k}\boldsymbol{D}(\boldsymbol{k},\omega) = -i4\pi\rho_{ext}(\boldsymbol{k},\omega). \end{aligned} \qquad (21)$$

Уравнения (17) и (21) соответствуют уравнениям в учебном пособии [4].

*1.2 Описание электромагнитного поля с помощью 3-х векторов поля*

При описании поля с помощью 4-х векторов ток $\boldsymbol{j}(\boldsymbol{k},\omega) = \boldsymbol{j}_{ext}(\boldsymbol{k},\omega) + \boldsymbol{j}_{\text{int}}(\boldsymbol{k},\omega)$ состоит из тока, созданного внешними зарядами $\rho_{ext}(\boldsymbol{k},\omega)$ и зарядами внутренними $\rho_{\text{int}}(\boldsymbol{k},\omega)$. Напряжённость магнитного поля и индукция электрического поля вводятся из предположения, что ток внутренний разделяется на ток намагниченности и поляризации. Однако в случае поля высокой частоты нельзя корректно разделить внутренний ток на составляющие. Вводится вектор обобщённой индукции [4], выражающийся через полный ток, созданный частицами среды:

$$\tilde{\boldsymbol{D}} = \boldsymbol{E} + 4\pi\int_{-\infty}^{t} \boldsymbol{j}_{\text{int}}(\boldsymbol{r},t')dt'. \qquad (22)$$

Уравнения Максвелла для трёх векторов поля принимают вид:

$$\begin{aligned} &\boldsymbol{rot}\ \boldsymbol{E}(\boldsymbol{r},t) = -\frac{1}{c}\frac{\partial \boldsymbol{B}(\boldsymbol{r},t)}{\partial t}, \\ &\boldsymbol{rot}\ \boldsymbol{B}(\boldsymbol{r},t) = \frac{1}{c}\frac{\partial \tilde{\boldsymbol{D}}(\boldsymbol{r},t)}{\partial t} + \frac{4\pi}{c}\boldsymbol{j}_{ext}(\boldsymbol{r},t), \\ &div\,\tilde{\boldsymbol{D}}(\boldsymbol{r},t) = 4\pi\rho_{ext}(\boldsymbol{r},t), \\ &div\,\boldsymbol{B}(\boldsymbol{r},t) = 0. \end{aligned} \qquad (23)$$

Вектор обобщённой индукции можно записать через линейное интегральное уравнение связи:

$$\tilde{D}_\alpha(\boldsymbol{r},t)=\int_{-\infty}^{t}dt'\int d^3r\in_{\alpha\beta}(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}',t-t')E_\beta(\boldsymbol{r}',t'), \tag{24}$$

где $\in_{\alpha\beta}$ - функция линейного отклика, являющаяся симметричной.

В Фурье-пространстве данные величины выразятся таким образом [4]:

$$\tilde{D}_\alpha(\boldsymbol{k},\omega)=\in_{\alpha\beta}(\boldsymbol{k},\omega)E_\beta(\boldsymbol{k},\omega), \tag{25}$$

$$\in_{\alpha\beta}(\boldsymbol{k},\omega)=\varepsilon_l(k,\omega)\frac{k_\alpha k_\beta}{k^2}+\varepsilon_t(k,\omega)\left(\delta_{\alpha\beta}-\frac{k_\alpha k_\beta}{k^2}\right). \tag{26}$$

Введённые функции $\varepsilon_l(k,\omega)$ и $\varepsilon_t(k,\omega)$ - продольная и поперечная проницаемости, не зависящие от направления волнового вектора ввиду предполагаемой изотропии среды.

В случае отсутствия пространственной дисперсии связь между проницаемостями $\varepsilon,\mu$, введёнными в уравнении (7), с функциями $\varepsilon_l(k,\omega)$ и $\varepsilon_t(k,\omega)$ можно получить из сравнения уравнений Максвелла, записанных в Фурье пространстве, для трёх векторов поля (23)и четырёх векторов поля (10), (16):

$$\begin{aligned}&\varepsilon_l(\omega)=\varepsilon(\omega),\\&\varepsilon_t(k,\omega)=\varepsilon(\omega)+\left(\frac{ck}{\omega}\right)^2\left(1-\frac{1}{\mu(\omega)}\right).\end{aligned} \tag{27}$$

*1.3 Волновой пакет в диспергирующей среде*

В среде с дисперсией поле рассматривается в виде узкого волнового пакета. Векторы электромагнитного поля можно записать в виде интегралов Фурье по малым интервалам частоты $\alpha\le\Delta\omega<<\omega$ и волнового вектора $q\le\Delta k<<k$.

$$\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r},t)=\int\left[\boldsymbol{\mathcal{E}}(\boldsymbol{q},\alpha)\exp\left(i\boldsymbol{qr}-i\alpha t\right)\right]\frac{d^3qd\alpha}{(2\pi)^4}e^{i\boldsymbol{kr}-i\omega t}=\boldsymbol{\mathcal{E}}\left(\boldsymbol{r},t\right)e^{i\varphi}. \tag{28}$$

Амплитуда $\boldsymbol{\mathcal{E}}(\boldsymbol{r},t)$ изменяется медленно по сравнению с фазовым множителем $e^{i\varphi}$. Поэтому при дифференцировании векторов поля производные от фазового множителя дают члены нулевого порядка, а производные от амплитуды – члены первого порядка малости по параметрам $q/k, \alpha/\omega$.

Вектор обобщённой индукции выражается через гармоники Фурье линейного отклика и напряжённость электрического поля:

$$\tilde{\mathcal{D}}_\alpha(\boldsymbol{r},t)e^{i\varphi} = \int\left[\epsilon_{\alpha\beta}(\boldsymbol{q},\alpha)\boldsymbol{\mathcal{E}}(\boldsymbol{q},\alpha)\exp\left(i\boldsymbol{qr}-i\omega t\right)\right]\frac{d^3q\,d\alpha}{(2\pi)^4}e^{i\boldsymbol{kr}-i\omega t}. \tag{29}$$

Вычислив интеграл (29), находим обобщённую индукцию с точностью до членов первого порядка малости по параметрам $\frac{\Delta\omega}{\omega} \ll 1,\ \frac{\Delta k}{k} \ll 1$.

$$\tilde{\mathcal{D}}_\alpha(\boldsymbol{r},t)e^{i\varphi} = \epsilon_{\alpha\beta}(\boldsymbol{k},\omega)\mathcal{E}_\beta(\boldsymbol{r},t)e^{i\varphi} - ie^{i\varphi}\left(\frac{\partial\epsilon_{\alpha\beta}}{\partial\boldsymbol{k}}\nabla - \frac{\partial\epsilon_{\alpha\beta}}{\partial\omega}\frac{\partial}{\partial t}\right)\mathcal{E}_\beta(\boldsymbol{r},t). \tag{30}$$

Магнитная индукция связана с вектором напряжённости электрического поля линейным образом. С учётом поправки первого порядка можем получить следующее выражение:

$$\boldsymbol{B} = \left(\frac{c}{\omega}\boldsymbol{k}\times\boldsymbol{\mathcal{E}} - i\frac{c}{\omega}\left(\frac{\boldsymbol{k}\times\nabla\boldsymbol{\mathcal{E}}}{k} + \frac{\boldsymbol{k}}{\omega}\times\frac{\partial\boldsymbol{\mathcal{E}}}{\partial t}\right)\right)e^{i\varphi} \tag{31}$$

Выражения (30) и (31) получены в Приложении 4.

Рассмотрим область, в которой отсутствуют внешние заряды и токи. В данном случае Фурье-гармоники могут быть только собственными модами диэлектрика. Следовательно, величины $\boldsymbol{k},\omega$ связаны уравнением дисперсии, которое для поперечных волн имеет вид:

$$\omega^2(k)\,\varepsilon_t(k,\omega) = c^2k^2. \tag{32}$$

Интегралы (28), (29) в таком случае становятся трёхмерными, так как интегрирование по частоте исключается, ибо частота связана с волновым числом. Частота раскладывается с точностью до первого порядка:

$$\omega(\boldsymbol{k}+\boldsymbol{q}) = \omega(k) + \boldsymbol{uq} + o(q), \tag{33}$$

где $\boldsymbol{u} = \frac{d\omega}{d\boldsymbol{k}}$ - групповая скорость. Получаем следующую зависимость:

$$\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r},t) = \int\left[\boldsymbol{\mathcal{E}}(\boldsymbol{q})\exp\left(i\boldsymbol{qr}-i\boldsymbol{qu}t\right)\right]\frac{d^3q}{(2\pi)^3}e^{i\boldsymbol{kr}-i\omega t} = \boldsymbol{\mathcal{E}}\left(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{u}t\right)e^{i\varphi}. \tag{34}$$

Аналогичные выражения записываются и для вектора обобщённой индукции и для вектора магнитной индукции:

$$\begin{aligned}&\boldsymbol{B}(\boldsymbol{r},t)=\boldsymbol{\mathcal{B}}\left(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{u}t\right)e^{i\varphi},\\&\tilde{\boldsymbol{D}}(\boldsymbol{r},t)=\tilde{\boldsymbol{\mathcal{D}}}\left(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{u}t\right)e^{i\varphi}.\end{aligned}\tag{35}$$

Этот важный результат означает, что некоторые фиксированные значения векторов электромагнитного поля перемещаются в пространстве с групповой скоростью.

## 2. Построение тензора энергии импульса на базе уравнений Максвелла и требований законов сохранения

### *2.1 Получение плотности импульса и плотности потока импульса электромагнитного поля*

Из уравнений Максвелла для трёх векторов поля можем получить плотность силы $\boldsymbol{f}_{ext}$, действующую на сторонние заряды и токи:

$$\begin{aligned}&\boldsymbol{f}_{ext}=\rho_{ext}\boldsymbol{E}+\frac{1}{c}\boldsymbol{j}_{ext}\times\boldsymbol{B}=\\&=-\frac{1}{4\pi c}\left(\frac{\partial\tilde{\boldsymbol{D}}}{\partial t}\times\boldsymbol{B}\right)+\frac{1}{4\pi}(\nabla\times\boldsymbol{B})\times\boldsymbol{B}+\frac{1}{4\pi}\boldsymbol{E}\left(\nabla\tilde{\boldsymbol{D}}\right)-\\&-\frac{1}{4\pi c}\left(\tilde{\boldsymbol{D}}\times\frac{\partial\boldsymbol{B}}{\partial t}\right)-\frac{1}{4\pi}\tilde{\boldsymbol{D}}\times\left(\nabla\times\boldsymbol{E}\right).\end{aligned}\tag{36}$$

Последние два слагаемых дают в сумме нуль – они добавлены для симметрии.

Данное уравнение билинейно относительно векторов поля. Сила является действительной величиной, поэтому выражение, стоящее справа в формуле (36), должно быть записано через действительные части векторов поля. Это делается с помощью формулы [2]

$$\operatorname{Re}\left(AB\right)=\frac{1}{4}\left(A^{*}B+AB^{*}\right).$$

Получаем:

$$
\boldsymbol{f}_{ext} = -\frac{1}{16\pi c}\left(\frac{\partial \tilde{\boldsymbol{D}}^*}{\partial t}\times\boldsymbol{B} + \frac{\partial \tilde{\boldsymbol{D}}}{\partial t}\times\boldsymbol{B}^* + \tilde{\boldsymbol{D}}^*\times\frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t} + \tilde{\boldsymbol{D}}\times\frac{\partial \boldsymbol{B}^*}{\partial t}\right) -
$$

$$
-\frac{1}{16\pi}(\tilde{\boldsymbol{D}}^*\times(\nabla\times\boldsymbol{E}) + \tilde{\boldsymbol{D}}\times(\nabla\times\boldsymbol{E}^*) + \boldsymbol{B}\times(\nabla\times\boldsymbol{B}^*) + \boldsymbol{B}^*\times(\nabla\times\boldsymbol{B}) - \qquad (37)
$$

$$
-\boldsymbol{E}^*(\nabla\tilde{\boldsymbol{D}}) - \boldsymbol{E}(\nabla\tilde{\boldsymbol{D}}^*).
$$

Здесь уже опущены члены, содержащие множители $e^{2i\varphi}$, дающие пренебрежимо малый вклад при дальнейшем усреднении силы по основному периоду $T$ поля.

Далее необходимо выполнить усреднение по основному периоду поля, то есть исключить фазовые множители.

Усреднение членов с производной по времени приводит к результату:

$$
\frac{1}{T}\int_t^{t+T}\frac{\partial}{\partial t'}\left(\tilde{\boldsymbol{D}}^*\times\boldsymbol{B} + \tilde{\boldsymbol{D}}\times\boldsymbol{B}^*\right)dt' = \frac{1}{T}\left[\tilde{\boldsymbol{\mathcal{D}}}^*\times\boldsymbol{\mathcal{B}} + \tilde{\boldsymbol{\mathcal{D}}}\times\boldsymbol{\mathcal{B}}^*\right]_t^{t+T} \approx
$$

$$
\approx \frac{\partial}{\partial t}\left[\tilde{\boldsymbol{\mathcal{D}}}^*\times\boldsymbol{\mathcal{B}} + \tilde{\boldsymbol{\mathcal{D}}}\times\boldsymbol{\mathcal{B}}^*\right]. \qquad (38)
$$

При усреднении слагаемых, содержащих производные по координатам, следует учесть, что дифференцирование фазового множителя будет давать члены и нулевого и первого порядка малости.

$$
\frac{1}{T}\int_t^{t+T}\frac{\partial}{\partial t'}\left(\tilde{\boldsymbol{D}}^*\times(\nabla\times\boldsymbol{E}) + \tilde{\boldsymbol{D}}\times(\nabla\times\boldsymbol{E}^*) - \boldsymbol{E}^*(\nabla\tilde{\boldsymbol{D}}) - \boldsymbol{E}(\nabla\tilde{\boldsymbol{D}}^*)\right)dt' =
$$

$$
= -\varepsilon_t(k,\omega)\left[\nabla\left(\boldsymbol{\mathcal{E}}^*\boldsymbol{\mathcal{E}}\right) - \left(\boldsymbol{\mathcal{E}}^*\nabla\right)\boldsymbol{\mathcal{E}} - (\boldsymbol{\mathcal{E}}\nabla)\boldsymbol{\mathcal{E}}^* - \boldsymbol{\mathcal{E}}\left(\nabla\boldsymbol{\mathcal{E}}^*\right) - \boldsymbol{\mathcal{E}}^*(\nabla\boldsymbol{\mathcal{E}})\right] -
$$

$$
-i\varepsilon_t(k,\omega)\left[\boldsymbol{\mathcal{E}}^*(\boldsymbol{k}\boldsymbol{\mathcal{E}}) - \boldsymbol{\mathcal{E}}\left(\boldsymbol{k}\boldsymbol{\mathcal{E}}^*\right) - \boldsymbol{\mathcal{E}}^*\left(\nabla\tilde{\boldsymbol{\mathcal{D}}}\right) - \boldsymbol{\mathcal{E}}\left(\nabla\tilde{\boldsymbol{\mathcal{D}}}^*\right)\right] -
$$

$$
-\boldsymbol{k}\left[\frac{\partial\varepsilon_t}{\partial k}\frac{1}{k}\left(\boldsymbol{\mathcal{E}}^*(\boldsymbol{k}\nabla)\boldsymbol{\mathcal{E}} + \boldsymbol{\mathcal{E}}(\boldsymbol{k}\nabla)\boldsymbol{\mathcal{E}}^*\right) - \frac{\partial\varepsilon_t}{\partial\omega}\left(\boldsymbol{\mathcal{E}}\frac{\partial\boldsymbol{\mathcal{E}}^*}{\partial t} + \boldsymbol{\mathcal{E}}^*\frac{\partial\boldsymbol{\mathcal{E}}}{\partial t}\right)\right]. \qquad (39)
$$

Слагаемые, содержащие магнитную индукцию, образуют более простую структуру:

$$
\frac{1}{T}\int_t^{t+T}\frac{\partial}{\partial t'}\left(\boldsymbol{B}^*\times(\nabla\times\boldsymbol{B})_\alpha + \boldsymbol{B}\times\left(\nabla\times\boldsymbol{B}^*\right)_\alpha\right)dt' = \frac{\partial}{\partial x_\beta}\left(\boldsymbol{B}\boldsymbol{B}^*\delta_{\alpha\beta} - \boldsymbol{B}_\alpha\boldsymbol{B}^*_\beta - \boldsymbol{B}^*_\alpha\boldsymbol{B}_\beta\right). \qquad (40)
$$

Используя результаты (38)-(40), переписываем формулу (37).

Слагаемые под знаком производной по времени после усреднения приобрели вид:

$$\boldsymbol{g}^{M} = \frac{1}{16\pi c}\left(\tilde{\mathcal{D}}\times\mathcal{B}^{*} + \tilde{\mathcal{D}}^{*}\times\mathcal{B} + \boldsymbol{n}ck\frac{\partial\varepsilon_t}{\partial\omega}\mathcal{E}\mathcal{E}^{*}\right). \tag{41}$$

Данное выражение является обобщением плотности импульса Минковского на случай диспергирующей среды.

Чтобы в этом убедиться, запишем выражение (41) в отсутствие дисперсии. Из формул (25), (26), (27) можем получить, что для поперечных волн

$$\begin{gathered}\tilde{\mathcal{D}} = \varepsilon\mu\mathcal{E} = \mu\mathcal{D},\\ \boldsymbol{n}ck\frac{\partial\varepsilon_t}{\partial\omega}\mathcal{E}\mathcal{E}^{*} = -(\mu-1)\left(\mathcal{D}^{*}\times\boldsymbol{B} + \mathcal{D}\times\boldsymbol{B}^{*}\right).\end{gathered} \tag{42}$$

Подставив (42) в (41), получаем:

$$\boldsymbol{g}^{M} = \frac{1}{16\pi c}\left(\mathcal{D}\times\mathcal{B}^{*} + \mathcal{D}^{*}\times\mathcal{B}\right). \tag{43}$$

Уравнение (43) – плотность импульса, записанная по Минковскому. Здесь $\mathcal{D}$ - амплитуда вектора электрической индукции [4].

Пусть внешние токи и заряды отсутствуют в области рассмотрения. Исключим $\tilde{\mathcal{D}},\mathcal{B}$ из формулы (41) с помощью (30), (31).

$$\boldsymbol{g}^{M} = \frac{\boldsymbol{n}}{8\pi c}\left(\mathcal{E}\mathcal{E}^{*}\right)\varepsilon_t^{3/2}\left(1 + \frac{\omega}{2\varepsilon_t}\frac{\partial\varepsilon_t}{\partial\omega}\right),\ \boldsymbol{n} = \frac{\boldsymbol{k}}{k}. \tag{44}$$

Переходя к проницаемостям $\varepsilon(\omega),\mu(\omega)$, получаем:

$$\boldsymbol{g}^{M} = \frac{\boldsymbol{n}}{8\pi c}\left(\mathcal{E}\mathcal{E}^{*}\right)\varepsilon(\omega)\sqrt{\varepsilon\mu}\left(1 + \frac{\omega}{2\varepsilon}\frac{\partial\varepsilon}{\partial\omega} + \frac{\omega}{2\mu}\frac{\partial\mu}{\partial\omega}\right). \tag{45}$$

При переходе к вакууму представление Минковского плотности импульса переходит в плотность потока импульса волнового пакета:

$$\boldsymbol{g}^{M} = \frac{1}{16\pi c}\left(\mathcal{E}\times\mathcal{H}^{*} + \mathcal{E}^{*}\times\mathcal{H}\right). \tag{46}$$

Для дальнейшего рассмотрения существенно, что все производные по координатам в правой части уравнения (37) записываются в виде дивергенции симметричного тензора второго ранга:

$$\begin{gathered}\sigma_{\alpha\beta}^{M} = \frac{1}{16\pi}(\mathcal{E}_{\alpha}\mathcal{E}_{\beta}^{*} + \mathcal{E}_{\alpha}^{*}\mathcal{E}_{\beta} - \left[\varepsilon_t\delta_{\alpha\beta} - n_{\alpha}n_{\beta}k\frac{\partial\varepsilon_t}{\partial k}\right]\mathcal{E}^{*}\mathcal{E} +\\ +B_{\alpha}^{*}B_{\beta} + B_{\alpha}B_{\beta}^{*} - \left(\boldsymbol{B}\boldsymbol{B}^{*}\right)\delta_{\alpha\beta}).\end{gathered} \tag{47}$$

Данный тензор отличается от трёхмерного тензора плотности потока импульса знаком.

Следовательно, уравнение неразрывности в случае отсутствия сторонних зарядов в области рассмотрения:

$$\frac{\partial \boldsymbol{g}_\alpha^M}{\partial t} - \frac{\partial \sigma_{\alpha\beta}^M}{\partial x_\beta} = 0. \qquad (48)$$

Однако в случае рассмотрения области, в которой присутствуют сторонние заряды, уравнение непрерывности не выполняется:

$$\frac{\partial \boldsymbol{g}_\alpha^M}{\partial t} - \frac{\partial \sigma_{\alpha\beta}^M}{\partial x_\beta} = -\overline{\boldsymbol{f}}_{ext}. \qquad (49)$$

При этом вид величин $\boldsymbol{g}_\alpha^M, \sigma_{\alpha\beta}^M$ усложняется, они могут быть вычислены только при конкретизации источников поля $\boldsymbol{j}_{ext}, \rho_{ext}$.

Уравнение непрерывности для плотности импульса являет собой закон сохранения полного импульса системы.

Не смотря на то, что полученные выражения для плотности импульса и для плотности потока импульса имеют правильные размерности, и для них выполняется уравнение непрерывности (48), как мы увидим далее, данные выражения требуют уточнения в связи с проблемами выполнения уравнения неразрывности для энергии.

### *2.2 Роль групповой скорости в полученных выражениях (41), (47)*

Воспользовавшись связью между векторами $\boldsymbol{E}, \boldsymbol{B}$, можем упростить формулу (47):

$$\sigma_{\alpha\beta}^M = -\frac{n_\alpha n_\beta}{16\pi}\left(2\varepsilon_t - k\frac{\partial \varepsilon_t}{\partial k} - ku\frac{\partial \varepsilon_t}{\partial \omega}\right)\boldsymbol{\mathcal{E}}^*\boldsymbol{\mathcal{E}}. \qquad (50)$$

Во всех равенствах, начиная с (37), произведено усреднение по периоду поля. Диэлектрик считался изотропным, несжимаемым, с постоянной температурой, но учитывалась временная и пространственная дисперсии.

Согласно уравнениям (35) в случае отсутствия сторонних зарядов в области рассмотрения амплитуды векторов поля зависят от разности $\boldsymbol{r}-\boldsymbol{u}t$. Выражение (41) билинейно по амплитудам векторов электромагнитного поля. Это же можно сказать о выражении (50). Это означает, что можно записать следующим образом производную по времени от плотности импульса:

$$\frac{\partial g_\alpha^M}{\partial t} = -\boldsymbol{u}\nabla g_\alpha^M = \frac{\partial \sigma'_{\alpha\beta}}{\partial x^\beta},$$
$$\sigma'_{\alpha\beta} = -g_\alpha^M u_\beta = -\frac{\boldsymbol{u}\boldsymbol{n}\varepsilon_t}{8\pi c} n_\alpha n_\beta \boldsymbol{\mathcal{E}}^* \boldsymbol{\mathcal{E}}. \tag{51}$$

Приравнивая $\frac{\partial \sigma'_{\alpha\beta}}{\partial x^\beta}$ и $\frac{\partial \sigma_{\alpha\beta}^M}{\partial x_\beta}$, получаем выражение для групповой скорости:

$$\boldsymbol{u} = \frac{c}{\sqrt{\varepsilon_t}} \left( \frac{\varepsilon_t - \frac{k}{2}\frac{\partial \varepsilon_t}{\partial k}}{\varepsilon_t + \frac{\omega}{2}\frac{\partial \varepsilon_t}{\partial \omega}} \right) \frac{\boldsymbol{k}}{k}. \tag{52}$$

Точно такое же выражение для групповой скорости можно получить из соотношения дисперсии (32):

$$\boldsymbol{u} = \frac{d}{d\boldsymbol{k}} \left( \frac{ck}{\sqrt{\varepsilon_t(k,\omega)}} \right) = \frac{c\boldsymbol{k}}{\sqrt{\varepsilon_t} k} - \frac{ck}{2\varepsilon_t \sqrt{\varepsilon_t}} \left( \frac{\partial \varepsilon_t}{\partial k}\frac{\boldsymbol{k}}{k} + \frac{\partial \varepsilon_t}{\partial \omega}\boldsymbol{u} \right),$$
$$\boldsymbol{u} = \frac{c}{\sqrt{\varepsilon_t}} \left( \frac{\varepsilon_t - \frac{k}{2}\frac{\partial \varepsilon_t}{\partial k}}{\varepsilon_t + \frac{\omega}{2}\frac{\partial \varepsilon_t}{\partial \omega}} \right) \frac{\boldsymbol{k}}{k}.$$

Можем записать тензор плотности потока импульса в наглядной симметричной форме:

$$\sigma_{\alpha\beta}^M = -g_\alpha^M u_\beta = g_\beta^M u_\alpha = -\frac{u\varepsilon_t}{8\pi c} (\boldsymbol{\mathcal{E}}^* \boldsymbol{\mathcal{E}}) n_\alpha n_\beta. \tag{53}$$

Необходимо отметить, что тензор, стоящий под знаком дивергенции, определён неоднозначно, ибо к нему можно добавить произвольный тензор второго ранга $\tilde{\sigma}_{\alpha\beta}$, имеющий нулевую дивергенцию $\frac{\partial \tilde{\sigma}_{\alpha\beta}}{\partial x_\beta} = 0$. Наиболее общая форма такого тензора: $\frac{\partial \tilde{\sigma}_{\alpha\beta}}{\partial x_\beta} = \frac{\partial \lambda_{\alpha\beta\psi}}{\partial x_\psi}$ - дивергенция некоего антисимметричного по индексам $\beta, \psi$ тензора третьего ранга $\lambda_{\alpha\beta\psi}$, билинейного по векторам поля. Однако Фок указывает, что подобный тензор может быть билинейным по векторам поля, только если в него войдут производные от векторов поля [15]. Также он постулирует принцип, согласно которому тензор энергии-импульса должен быть функцией состояния поля, но не функцией производных от векторов поля. Следовательно, можно положить $\lambda_{\alpha\beta\psi}$ равным нулю.

### *2.3 Баланс импульса в диспергирующей среде и симметрия 4-х тензора энергии-импульса*

В отсутствие дисперсии, как уже было показано, выражение (41) переходит в плотность импульса по Минковскому. При этом четырёхмерный тензор энергии-импульса оказывается несимметричным:

$$T_{ik}^M = \begin{pmatrix} w & -c\boldsymbol{g}^M \\ \frac{-\gamma}{c} & -\sigma_{\alpha\beta}^M \end{pmatrix}. \qquad (54)$$

Здесь $i,k = 0,1,2,3; \alpha,\beta = 1,2,3; w-$ плотность энергии (формула Бриллюэна (1)), которая при использовании тензора (26) записывается следующим образом:

$$w = \frac{1}{16\pi}\left(\frac{\partial}{\partial\omega}(\omega\varepsilon_t(\boldsymbol{k},\omega))\boldsymbol{\mathcal{E}}^*\boldsymbol{\mathcal{E}} + \boldsymbol{\mathcal{B}}^*\boldsymbol{\mathcal{B}}\right). \qquad (55)$$

Если же исключить вектор $\boldsymbol{\mathcal{B}}$ с помощью уравнения Максвелла, то получим следующее выражение:

$$w = \frac{1}{16\pi}\boldsymbol{\mathcal{E}}^*\boldsymbol{\mathcal{E}}\left(\varepsilon_t + \frac{\partial}{\partial\omega}(\omega\varepsilon_t)\right). \qquad (56)$$

В случае отсутствия пространственной дисперсии формула Бриллюэна (1) принимает следующий вид:

$$w = \frac{\varepsilon(\omega)}{8\pi}\boldsymbol{\mathcal{E}}^*\boldsymbol{\mathcal{E}}\left(1 + \frac{\omega}{2}\left(\frac{1}{\varepsilon(\omega)}\frac{\partial\varepsilon(\omega)}{\partial\omega} + \frac{1}{\mu(\omega)}\frac{\partial\mu(\omega)}{\partial\omega}\right)\right). \qquad (57)$$

Обобщённый вектор Пойтинга (плотность потока энергии) записывается таким образом ([1], [4]):

$$\gamma = \frac{c}{16\pi}\left( \boldsymbol{\mathcal{E}} \times \boldsymbol{\mathcal{B}}^* + \boldsymbol{\mathcal{E}}^* \times \boldsymbol{\mathcal{B}} - \frac{\omega}{c}\frac{\partial \in_{\alpha\beta}}{\partial \boldsymbol{k}} \mathcal{E}_\alpha \mathcal{E}_\beta^* \right). \tag{58}$$

В случае пакета поперечных волн выражение (58) приобретает вид:

$$\gamma = \frac{c}{16\pi} \boldsymbol{\mathcal{E}}^* \boldsymbol{\mathcal{E}} \sqrt{\varepsilon_t} \left( 1 - \frac{k}{2\varepsilon_t}\frac{\partial \varepsilon_t}{\partial k} \right) \boldsymbol{n}. \tag{59}$$

Отношение выражения (59) к (56) соответствует групповой скорости (52).

Если пространственную дисперсию не учитывать, то вектор Пойнтинга принимает вид:

$$\gamma = \frac{c}{16\pi}\left( \boldsymbol{\mathcal{E}} \times \boldsymbol{\mathcal{H}}^* + \boldsymbol{\mathcal{E}}^* \times \boldsymbol{\mathcal{H}} \right), \ \ \boldsymbol{\mathcal{H}} = \frac{\boldsymbol{\mathcal{B}}}{\mu(\omega)}. \tag{60}$$

Исключая вектор магнитной индукции из выражения (60) с помощью уравнений Максвелла, получаем:

$$\gamma = \frac{c\sqrt{\varepsilon\mu}}{8\pi\mu}\left( \boldsymbol{\mathcal{E}}^* \boldsymbol{\mathcal{E}} \right) \boldsymbol{n}. \tag{61}$$

Заметим, что $\frac{\sqrt{\varepsilon\mu}}{\mu} \neq \sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}}$ в случае метаматериалов ($\mu < 0, \varepsilon < 0$). Вектор Пойнтинга, так же как и плотность импульса, может быть направлен в изотропной среде только вдоль или против волнового вектора $\boldsymbol{k}$.

Вернёмся к тензору (54). Сравнивая выражения для плотности импульса по Минковскому (41) с вектором Пойнтинга (58), заключаем, что $T_{\alpha 0}^M \neq T_{0\alpha}^M$. Следовательно, тензор симметричным не является. Многие авторы, включая Абрагама, считают несимметричность тензора существенным недостатком трактовки Минковского и принимают для плотности импульса формулу, предложенную Абрагамом:

$$\boldsymbol{g}^A = \frac{1}{16\pi c}\left( \boldsymbol{\mathcal{E}} \times \boldsymbol{\mathcal{H}}^* + \boldsymbol{\mathcal{E}}^* \times \boldsymbol{\mathcal{H}} \right), \ \ \boldsymbol{\mathcal{H}} = \frac{\boldsymbol{\mathcal{B}}}{\mu(\omega)}. \tag{62}$$

При этом появляется дополнительное слагаемое в уравнении баланса импульса – сила Абрагама. Однако при использовании тензора натяжений (53) для выполнения уравнения непрерывности не нужно вводить силу Абрагама.

Симметрия тензора энергии-импульса требуется для сохранения момента импульса замкнутой системы вещество + поле [2]. Ведь главные свойства симметрии диэлектрической среды, необходимые для сохранения момента импульса – однородность и изотропия, сохраняются в рассматриваемом случае. Этими свойствами обладает пространство, заполненное однородным непоглощающим диэлектриком, который рассматривается как макроскопическая «сплошная среда». Следовательно, нет оснований отказываться от симметрии тензора энергии-импульса. К тому же в нашем случае возникает дополнительное соображение в пользу симметрии тензора энергии-импульса. Любой вектор $\boldsymbol{G}(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{u}t)$, который представляет собой билинейную комбинацию векторов поля и направлен вдоль волнового вектора, будет зависеть от разности $\boldsymbol{r}-\boldsymbol{u}t$, и поэтому удовлетворять уравнению непрерывности

$$\frac{\partial G_\alpha}{\partial t}-\frac{\partial \Xi_{\alpha\beta}}{\partial x_\beta}=0,\ \Xi_{\alpha\beta}=-G_\alpha u_\beta=-G\left(\boldsymbol{un}\right)n_\alpha n_\beta. \qquad (63)$$

В таком случае интеграл по объёму от вектора $G_\alpha$ представляет собой интеграл движения. При этом трёхмерный тензор плотности потока данного вектора является симметричным. Это показывает, что использование только уравнения непрерывности приводит к неопределённому результату. Требование симметрии тензора энергии-импульса позволяет связать плотность импульса с плотностью потока энергии и записать его следующим образом:

$$\boldsymbol{g}=\frac{\boldsymbol{n}}{16\pi c}\boldsymbol{\mathcal{E}}^*\boldsymbol{\mathcal{E}}\sqrt{\varepsilon_t}\left(1-\frac{k}{2\varepsilon_t}\frac{\partial\varepsilon_t}{\partial k}\right), \qquad (64)$$

избавившись тем самым от неопределённости.

В случае отсутствия пространственной дисперсии:

$$\boldsymbol{g} = \frac{\sqrt{\varepsilon\mu}}{8\pi\mu c}\left(\boldsymbol{\mathcal{E}}^*\boldsymbol{\mathcal{E}}\right)\boldsymbol{n}. \qquad (65)$$

Направление плотности импульса совпадает с направлением групповой скорости, проекция которой на волновой вектор может иметь оба знака.

Тензор натяжений в соответствии с выражениями (64) и (65) запишется:

$$\sigma_{\alpha\beta} = -n_\alpha n_\beta \frac{\boldsymbol{nu}}{16\pi c}\boldsymbol{\mathcal{E}}^*\boldsymbol{\mathcal{E}}\sqrt{\varepsilon_t}\left(1 - \frac{k}{2\varepsilon_t}\frac{\partial\varepsilon_t}{\partial k}\right), \sigma_{\alpha\beta} = -n_\alpha n_\beta \frac{\sqrt{\varepsilon\mu}}{8\pi\mu c}\left(\boldsymbol{\mathcal{E}}^*\boldsymbol{\mathcal{E}}\right)\boldsymbol{nu}. \qquad (66)$$

Поскольку $g_\alpha = \gamma_\alpha / c^2 = wu_\alpha / c^2$, то из (66) получаем симметричное выражение:

$$\sigma_{\alpha\beta} = -wu_\alpha u_\beta / c^2, \qquad (67)$$

где плотность энергии задаётся формулой Бриллюэна (1).

Вводя 4-х скорость $u_\alpha = \left(c\gamma, -\boldsymbol{u}\gamma\right)$ [12], где $\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\left(\boldsymbol{u}/c\right)^2}}$ - релятивистский фактор, можем записать тензор энергии-импульса следующим образом:

$$T^{ik} = wu^i u^k / \gamma^2 c^2. \qquad (68)$$

### 3. Сравнение с предшествующими результатами

Вернёмся к тензору напряжений Питаевского (4):

$$\sigma_{\alpha\beta}^{Pit} = -\frac{\varepsilon(\omega)}{8\pi}\left(\boldsymbol{\mathcal{E}}^*\boldsymbol{\mathcal{E}}\right)n_\alpha n_\beta \qquad (69)$$

Сравнивая с тензором (66), видим, что тензор натяжений Питаевского отличается:

$$\sigma_{\alpha\beta}^{Pit} / \sigma_{\alpha\beta} = c / u\sqrt{\varepsilon\mu} \neq 1. \qquad (70)$$

Тензор напряжений в диспергирующей среде, как и плотность энергии (1), содержит производные по частоте и волновому вектору, которые вносит в теорию групповая скорость. Уравнение непрерывности с тензором Питаевского нарушается:

$$\frac{\partial g_\alpha}{\partial t} \neq \frac{\partial \sigma^{Pit}_{\alpha\beta}}{\partial x_\beta}. \tag{71}$$

Равенство можно восстановить, либо подставив тензор (66), либо в правую часть добавив плотность некой силы (Абрагама). В этом случае импульс, являющий собой интеграл по объёму от плотности импульса, не сохраняется. Следовательно, получающийся импульс является лишь частью полного импульса системы. Плотность импульса, как и его поток, создаётся совместными колебаниями поля и заряженных частиц, поэтому вряд ли возможно корректное разделения импульса на две части, принадлежащих полю и веществу.

Так же необходимо сравнить полученные результаты с соответствующими результатами в вакууме [2], [5]. Для монохроматического поля в вакууме имеем усреднённый по периоду тензор:

$$\sigma^{v}_{\alpha\beta} = \frac{1}{16\pi}(\mathcal{E}_\alpha \mathcal{E}^*_\beta + \mathcal{E}^*_\alpha \mathcal{E}_\beta + \mathcal{H}^*_\alpha \mathcal{H}_\beta + \mathcal{H}_\alpha \mathcal{H}^*_\beta - (\boldsymbol{\mathcal{E}}^* \boldsymbol{\mathcal{E}} + \boldsymbol{\mathcal{H}} \boldsymbol{\mathcal{H}}^* \delta_{\alpha\beta})). \tag{72}$$

Соотношения между векторами поля:

$$\boldsymbol{n} \times \boldsymbol{\mathcal{E}} = \boldsymbol{\mathcal{H}},\ |\boldsymbol{\mathcal{E}}| = |\boldsymbol{\mathcal{H}}|,\ \boldsymbol{n} = \boldsymbol{k}/k,\ u_\alpha = cn_\alpha. \tag{73}$$

Плотность энергии поля:

$$w = \frac{1}{16\pi}\left(\boldsymbol{\mathcal{E}}^* \boldsymbol{\mathcal{E}} + \boldsymbol{\mathcal{H}}^* \boldsymbol{\mathcal{H}}\right). \tag{74}$$

С помощью (72), (73), (74) находим:

$$\sigma^{v}_{\alpha\beta} = -w n_\alpha n_\beta. \tag{75}$$

Полученное ранее выражение (67) переходит в формулу (75) в вакууме.

## 4. Возможность экспериментальной проверки полученных соотношений

Наиболее прямая экспериментальная проверка различных соотношений, характеризующих импульс электромагнитного поля, может быть выполнена путём измерения силы. По-видимому, наиболее подходящим объектом для этой цели выступает «световое давление», измеренное впервые в 1899-1907 годы П.Н. Лебедевым [8]. Вычислим силу, приложенную к плоской границе между средами, одна из которых (либо обе) является прозрачным диэлектриком. Эта процедура была проделана авторами статей [11], [13] с использованием тензора напряжений Питаевского, недостатки которого были уже указаны ранее. Они выяснили, что «световое давление» заменяется «световым притяжением» для сред, имеющих отрицательные проницаемости, – метаматериалов.

Будем рассматривать взаимодействие волны с границей сред в приближении геометрической оптики, как это делается при выводе формул Френеля [16]. Исключим из рассмотрения пространственную дисперсию. Волна на границу будет падать нормально.

1. Пусть падает плоская квазимонохроматическая волна на плоскую границу двух прозрачных диэлектриков с положительными проницаемостями в отсутствие временной дисперсии.

В таком случае коэффициент отражения вычисляется с помощью формул Френеля и имеет вид:

$$R=\left(\frac{\sqrt{\varepsilon_1\mu_2}-\sqrt{\varepsilon_2\mu_1}}{\sqrt{\varepsilon_1\mu_2}+\sqrt{\varepsilon_2\mu_1}}\right)^2. \quad (76)$$

Рассмотрим случай, когда $R=0$. Это имеет место при $\varepsilon_1/\varepsilon_2=\mu_1/\mu_2$. На границе раздела векторы $\boldsymbol{E},\boldsymbol{H}$ непрерывны, поэтому плотность импульса $g=g_1=g_2$ тоже непрерывна, но групповая скорость испытывает скачок: $u_1/u_2=\varepsilon_1/\varepsilon_2=\mu_1/\mu_2$. Поэтому испытывает скачок и плотность потока импульса. Давление на границу создаётся разностью потоков импульса с двух сторон от границы:

$$P_{rad} = g\left(u_1 - u_2\right) = gu_1\left(1 - \varepsilon_1 / \varepsilon_2\right) \tag{77}$$

Здесь $gu_1 > 0$ - плотность потока импульса. Получаем, что при $\varepsilon_2 > \varepsilon_1$ волна оказывает давление на границу, в противном случае волна «притягивает» границу. Таким образом, «световое притяжение» возможно и на границах обычных прозрачных диэлектриков с положительными проницаемостями среды. Для метаматериалов формула (76) непригодна, поскольку не учитывает дисперсии.

2. Пусть $\varepsilon_1 < 0, \mu_1 < 0$, квазимонохроматическая волна падает из этой среды на границу с другой средой.

Вектор Пойнтинга, плотность импульса и групповая скорость направлены в сторону границы. Волновой вектор и фазовая скорость имеют противоположное направление – от границы. Соображения по поводу направлений фазовой и групповой скоростей изложены в учебном пособии [6]. Плотность потока импульса $g_1u_1$ положительна.

Давление в случае полного поглощения второй средой:

$$P_{rad} = g_1u_1 > 0, \tag{78}$$

при полном отражении результат удваивается.

Получаем, что использование метаматериалов в качестве первой среды не означает замену «светового давления» «световым притяжением». По-видимому, ошибка авторов статей [11], [13] заключается в использовании тензора Питаевского. Тензор Питаевского меняет знак при использовании отрицательных проницаемостей, а тензор (66) знака не меняет:

$$\begin{aligned} \sigma_{\alpha\beta} &= -\frac{\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{n}}{8\pi c\mu}\sqrt{\varepsilon\mu}\left(\boldsymbol{\mathcal{E}}^*\boldsymbol{\mathcal{E}}\right)n_\alpha n_\beta, \\ \sigma_{\alpha\beta}^{Pit} &= -\frac{\varepsilon(\omega)}{8\pi}\left(\boldsymbol{\mathcal{E}}^*\boldsymbol{\mathcal{E}}\right)n_\alpha n_\beta. \end{aligned} \tag{79}$$

$$\begin{aligned} \sigma_{\alpha\beta}^{Pit}(\varepsilon,\mu) &= -\sigma_{\alpha\beta}^{Pit}(-\varepsilon,-\mu), \\ \sigma_{\alpha\beta}(\varepsilon,\mu) &= \sigma_{\alpha\beta}(-\varepsilon,-\mu). \end{aligned} \tag{80}$$

При нормальном падении квазимонохроматических волн на границу двух прозрачных сред, из которых одна среда левая, а вторая – обычная, световое давление на границу можно вычислить как разность плотностей потоков импульса на этой границе с учётом падающей, отражённой и прошедшей во вторую среду волн:

$$P_{rad} = g_1 u_1 (1+R) - g_2 u_2 (1-R), \tag{81}$$

где $R$ - коэффициент отражения:

$$R = \left| \frac{\sqrt{|\varepsilon_1| \mu_2} - \sqrt{\varepsilon_2 |\mu_1|}}{\sqrt{|\varepsilon_1| \mu_2} + \sqrt{\varepsilon_2 |\mu_1|}} \right|^2 . \tag{82}$$

В формуле (81) давление может иметь и положительный и отрицательный знак в зависимости от параметров сред, поэтому возможно и «световое давление» и «световое притяжение».

## 5. Схема перехода к квантовому описанию радиационных процессов в средах с дисперсией

Зачем использовался классический канонический формализм для вывода уравнений Максвелла? Развитие теории в данном направлении является основой для квантового описания процессов. Пример того, как это делается в вакууме, можно найти в учебниках ([4], [17]). Конечной целью является, используя аппарат квантовой механики, получить решения таких радиационных задач, как эффект Комптона, фотоэффект и многих других в среде с дисперсией. Для этого необходимо проквантовать поле. Этого пока не сделано. Однако мы можем выявить связь между наблюдаемыми величинами и собственными значениями операторов, которые вводятся в квантовой механике для описания поля ([4], [17]).

Глауберовские когерентные состояния являются наиболее подходящими для описания поля ([4], [17]). Когерентные состояния являются промежуточными между состояниями с определённой фазой плоской волны и определённым числом фотонов. Это означает, что ни амплитуда, ни фаза точно не заданы, однако произведение их неопределённостей является минимальным, что и является залогом для наиболее приближённого к реальности описания поля.

Векторы электромагнитного поля становятся операторами в квантовой механике и выражаются через операторы рождения и уничтожения фотонов $\hat{a}_s^\dagger, \hat{a}_s$. Оператор поперечного векторного потенциала:

$$\hat{\boldsymbol{A}}(\boldsymbol{r}) = \sum_s \left\{ \hat{a}_s \boldsymbol{A}_s(\boldsymbol{r}) + \hat{a}_s^\dagger \boldsymbol{A}_s^*(\boldsymbol{r}) \right\}, \tag{83}$$

где суммирование проводится по всем модам поля.

Оператор напряжённости электрического поля для одной моды:

$$\hat{E} = i\left(\frac{2\pi\hbar\omega}{V}\right)^{1/2} \left\{ \hat{a}_s e^{-i\omega t + i\boldsymbol{kr} + i\varphi} - \hat{a}_s^\dagger e^{i\omega t - i\boldsymbol{kr} - i\varphi} \right\}, \tag{84}$$

где $V$ - объём квантования.

Когерентное состояние – собственное состояние оператора уничтожения фотонов:

$$\hat{a}_s \left| z_s \right\rangle = z_s \left| z_s \right\rangle . \tag{85}$$

Учитывая (85), записываем средние значения операторов рождения и уничтожения:

$$\left\langle z \right| \hat{a}_s \left| z \right\rangle = \left\langle z | z | z \right\rangle = z, \left\langle z \right| \hat{a}_s^\dagger \left| z \right\rangle = \left\langle z \right| \hat{a}_s \left| z \right\rangle^* = z^*. \tag{86}$$

В таком случае модель вектора напряжённости электрического поля:

$$\begin{aligned} \left\langle z \right| \hat{E} \left| z \right\rangle &= i\left(\frac{2\pi\hbar\omega}{V}\right)^{1/2} \left\{ \left\langle z \right| \hat{a}_s \left| z \right\rangle e^{-i\omega t + i\boldsymbol{kr} + i\varphi} - \left\langle z \right| \hat{a}_s^\dagger \left| z \right\rangle e^{i\omega t - i\boldsymbol{kr} - i\varphi} \right\} = \\ &= -2\left(\frac{2\pi\hbar\omega}{V}\right)^{1/2} |z| \sin\left(\boldsymbol{kr} - \omega t + \varphi\right), \end{aligned} \tag{87}$$

где $|z|$- модуль комплексного числа $z$ , $\varphi$- его фаза.

При классическом описании

$$A = A_0 \left\{ e^{-i\omega t + i\boldsymbol{kr} + i\varphi} + e^{i\omega t - i\boldsymbol{kr} - i\varphi} \right\}; \tag{88}$$

модуль вектора напряжённости электрического поля:

$$E = -\frac{\partial A}{\partial t} = -2A_0 \sin\left(\boldsymbol{kr} - \omega t + \varphi\right), \tag{89}$$

где $A_0$ - амплитуда векторного потенциала поля.

Сравнивая формулы (87) и (89), записываем связь $|z|$ и $A_0$:

$$A_0 = |z|\left(\frac{2\pi\hbar}{\omega}\right)^{1/2}. \qquad (90)$$

Таким образом, собственные значения операторных величин в квантовой механике можем связать с экспериментально измеряемыми величинами.

**Заключение**

Получены уравнения Максвелла из принципа наименьшего действия в Фурье-пространстве и пространстве координат-времени. В учебной литературе не упоминается вывода этих фундаментальных соотношений в среде с дисперсией на основе классического канонического формализма. Из уравнений Максвелла получены компоненты тензора энергии-импульса, который сам оказывается несимметричным. Однако уравнения Максвелла не определяют однозначно интегралы движения. Изотропия рассматриваемой среды накладывает на тензор энергии-импульса свойство симметрии, так как только в этом случае момент импульса системы будет сохраняться. Полученный тензор записывается в компактной форме:

$$T^{ik} = wu_i u_k / \gamma^2 c^2.$$

Его компоненты удовлетворяют уравнению непрерывности. Сохраняется полный импульс системы поле + среда без введения силы Абрагама. Данное выражение, полученное для электромагнитного поля, похоже на выражение для тензора энергии-импульса классических частиц. Аналогом скорости частицы здесь выступает групповая скорость, которая существенно зависит от первых производных по частоте и волновому вектору от проницаемостей среды.

Предложена возможность экспериментальной проверки полученных соотношений, которые применимы и для обычных и для левых сред. Было показано, что теоретически возможно и «световое давление» и «световое притяжение», что можно измерить экспериментально.

Все полученные соотношения применимы к среде с дисперсией, несжимаемой, равновесной, изотропной, с линейными откликами на взаимодействия и без диссипации энергии и требуют уточнения в случае изменения свойств среды.

Намечен подход к квантовому описанию поля в среде с дисперсией для того, чтобы решать в ней радиационные задачи. Показана связь между экспериментально измеряемыми характеристиками поля и собственными значениями оператора уничтожения фотонов.

**Литература**


1. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Электродинамика сплошных сред. Наука ФМ 1982.
2. Ландау Л.Д. Лифшиц Е.М. Теория поля. Наука ФМ 1988.
3. Гинзбург В.Л. Теоретическая физика и астрофизика. Дополнительные главы. Наука ФМ 1981.
4. Топтыгин И.Н. Современная электродинамика. Теория электромагнитных явлений в веществе. Москва 2005.
5. Топтыгин И.Н. Современная электродинамика. Микроскопическая теория. Москва 2002.
6. Мандельштам Л.И. Лекции по оптике, теории относительности и квантовой механике. Наука 1972.
7. Минковский Г. Основные уравнения электромагнитных процессов в движущихся телах. Наука 1983.
8. Лебедев П.Н. Собрание сочинений. Москва 1963.
9. Abraham M. Rc. Circ. Mat. Palerrno 28, 1 1909: 31, 527 1910.
10. Питаевский Л.П. ЖЭТФ 39 1450, 1960.
11. Макаров В.П., Рухадзе А.А. УФН 181 1357, 2011.
12. Полевой В.Г. Рытов С.М. УФН 125 549, 1978.
13. Веселаго В.Г. УФН 173, 2003.
14. Агранович В.М., Гартштейн Ю.Н. УФН 176 1051 2006.
15. Фок В.А. Теория пространства, времени и тяготения. М. ГИТТЛ, 1955.
16. Борн М., Вольф Э. Основы оптики. М. Наука 1970.
17. Лоудон Р. Квантовая теория света. М. 1976.

## Приложение 1. Получение первой пары уравнений Максвелла (10)

Используя выражения (6), можно составить тензор третьего ранга, равный 0:

$$\frac{\partial F_{ik}}{\partial x^l}+\frac{\partial F_{kl}}{\partial x^i}+\frac{\partial F_{li}}{\partial x^k}=0. \qquad (1)$$

Данный тензор является антисимметричным по трём индексам. Компоненты данного тензора равны тождественно нулю в случае равенства любых из трёх индексов между собой. Тождественного равенства нулю не наблюдается только в случае, когда все три индекса не равны между собой. Таких возможностей четыре.

1. $i=1, k=2, l=3$

$$\frac{\partial F_{12}}{\partial x^3}+\frac{\partial F_{23}}{\partial x^1}+\frac{\partial F_{31}}{\partial x^2}=-\frac{\partial B_z}{\partial z}-\frac{\partial B_x}{\partial x}-\frac{\partial B_y}{\partial y}=0,$$

$$div\,\boldsymbol{B}=0. \qquad (2)$$

Это и есть 1-ое уравнение 1-ой пары уравнений Максвелла.

2. $i=0, k=1, l=2 \ => \dfrac{\partial F_{01}}{\partial x^2}+\dfrac{\partial F_{12}}{\partial x^0}+\dfrac{\partial F_{20}}{\partial x^1}=0 => \dfrac{\partial E_x}{\partial y}-\dfrac{\partial E_y}{\partial x}=\dfrac{\partial B_z}{c\partial t};$

3. $i=0, k=2, l=3 => \dfrac{\partial F_{02}}{\partial x^3}+\dfrac{\partial F_{23}}{\partial x^0}+\dfrac{\partial F_{30}}{\partial x^2}=0 => \dfrac{\partial E_y}{\partial y}-\dfrac{\partial E_z}{\partial x}=\dfrac{\partial B_x}{c\partial t};$

4. $i=0, k=3, l=1 => \dfrac{\partial F_{01}}{\partial x^3}+\dfrac{\partial F_{13}}{\partial x^0}+\dfrac{\partial F_{30}}{\partial x^1}=0 => \dfrac{\partial E_z}{\partial y}-\dfrac{\partial E_x}{\partial x}=\dfrac{\partial B_y}{c\partial t}.$

Получилось векторное уравнение

$$\boldsymbol{rot}\,\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r},t)=-\frac{1}{c}\frac{\partial \boldsymbol{B}(\boldsymbol{r},t)}{\partial t}. \qquad (3)$$

Это и есть второе уравнение первой пары уравнений Максвелла.

**Приложение 2. Получение второй пары уравнений Максвелла (16)**

Перепишем выражение (14)

$$\delta S=-\frac{1}{c}\int\left(\frac{1}{c}j^l\delta A_l+\frac{1}{16\pi}\delta F_{ik}H^{ik}+\frac{1}{16\pi}F_{ik}\delta H^{ik}\right)d\Omega=0. \quad (1)$$

Рассмотрим выражение $\int\left(\delta F_{ik}H^{ik}+F_{ik}\delta H^{ik}\right)d^4x$.

$$\int\left(\delta F_{ik}H^{ik}+F_{ik}\delta H^{ik}\right)d^4x=\int\left(\delta F_{ik}H^{ik}+F_{ik}(x)\int\varepsilon^{ik\mu\eta}(x-x')\delta F_{\mu\eta}(x')d^4x'\right)d^4x,$$

$$\int F_{ik}(x)\int\varepsilon^{ik\mu\eta}(x-x')\delta F_{\mu\eta}(x')d^4x'd^4x=\int F_{\mu\eta}(x)\int\varepsilon^{\mu\eta ik}(x-x')\delta F_{ik}(x')d^4x'd^4x,$$

$$\int\delta F_{ik}H^{ik}d^4x=\int\delta F_{ik}(x')\int\varepsilon^{ik\mu\eta}(x'-x)F_{\mu\eta}(x)d^4xd^4x',$$

Оба интеграла являются интегралами по четырёхмерному пространству, интегралы аналитичны, следовательно, можно поменять порядок интегрирования.

$$\int F_{\mu\eta}(x)\int\varepsilon^{\mu\eta ik}(x-x')\delta F_{ik}(x')d^4x'd^4x=\int\delta F_{ik}(x')\int\varepsilon^{\mu\eta ik}(x-x')F_{\mu\eta}(x)d^4xd^4x',$$

$$\varepsilon^{\mu\eta ik}(x-x')=\varepsilon^{ik\mu\eta}(x-x')=\varepsilon^{ik\mu\eta}(x'-x),$$

$$=>\int\delta F_{ik}(x')\int\varepsilon^{ik\mu\eta}(x'-x)F_{\mu\eta}(x)d^4xd^4x'=\int\delta F_{ik}(x')\int\varepsilon^{\mu\eta ik}(x-x')F_{\mu\eta}(x)d^4xd^4x'.$$

Получили, что интегралы равны. Функция электромагнитного отклика среды является симметричной чётной функцией [6].

Следовательно, вариацию действия можем переписать таким образом:

$$\delta S=-\frac{1}{c}\int\left(\frac{1}{c}j^l\delta A_l+\frac{1}{8\pi}H^{ik}\delta F_{ik}\right)d\Omega=-\frac{1}{c}\int\left(\frac{1}{c}j^l\delta A_l+\frac{1}{8\pi}H^{ik}\left(\frac{\partial(\delta A_k)}{\partial x^i}-\frac{\partial(\delta A_i)}{\partial x^k}\right)\right)d\Omega.$$

Учитывая антисимметричность тензора $H^{ik}$, получаем

$$H^{ik}\frac{\partial(\delta A_k)}{\partial x^i}=-H^{ki}\frac{\partial(\delta A_k)}{\partial x^i}=-H^{ik}\frac{\partial(\delta A_i)}{\partial x^k}=-H^{lk}\frac{\partial(\delta A_l)}{\partial x^k},$$

$$\delta S=-\frac{1}{c}\int\left(\frac{1}{c}j^l\delta A_l-\frac{1}{4\pi}H^{lk}\left(\frac{\partial(\delta A_l)}{\partial x^k}\right)\right)d\Omega. \quad (2)$$

Полученное выражение интегрируем по частям:

$$\delta S=-\frac{1}{c}\int\left(\frac{1}{c}j^l+\frac{1}{4\pi}\frac{\partial\left(H^{lk}\right)}{\partial x^k}\right)\delta A_l d\Omega+\frac{1}{4\pi c}\int\frac{\partial\left(H^{lk}\delta A_l\right)}{\partial x^k}\mathrm{d}\Omega. \quad (3)$$

Второе слагаемое стремится к нулю в силу того, что полученная дивергенция под интегралом по объёму в 4-хмерном пространстве сводится по теореме Гаусса-Остроградского к интегралу по поверхности, охватывающей данный объём. Векторы поля равны нулю на бесконечности, поэтому интеграл по поверхности стремится к нулю.

Окончательно получаем:

$$\delta S = -\frac{1}{c}\int\left(\frac{1}{c}j^l + \frac{1}{4\pi}\frac{\partial\left(H^{lk}\right)}{\partial x^k}\right)\delta A_l d\Omega = 0,$$

$$-\frac{1}{c}j^l = \frac{1}{4\pi}\frac{\partial\left(H^{lk}\right)}{\partial x^k}. \qquad (4)$$

Получили уравнение (14). Легко показать, что данное уравнение является записью 2-ой пары уравнений Максвелла.

1. $$l = 0,\ \ -4\pi\rho = \frac{\partial\left(-D_x\right)}{\partial x} + \frac{\partial\left(-D_y\right)}{\partial y} + \frac{\partial\left(-D_z\right)}{\partial z},$$
$$div\, D = 4\pi\rho. \qquad (5)$$

Это первое уравнение второй пары уравнений Максвелла.

2. $$l = 1,\ \ -\frac{4\pi j_x}{c} = \frac{\partial\left(D_x\right)}{c\partial t} - \frac{\partial\left(H_z\right)}{\partial y} + \frac{\partial\left(H_y\right)}{\partial z};$$

3. $$l = 2,\ \ -\frac{4\pi j_y}{c} = \frac{\partial\left(D_y\right)}{c\partial t} + \frac{\partial\left(H_z\right)}{\partial x} - \frac{\partial\left(H_x\right)}{\partial z};$$

4. $$l = 3,\ \ -\frac{4\pi j_z}{c} = \frac{\partial\left(D_z\right)}{c\partial t} - \frac{\partial\left(H_y\right)}{\partial x} + \frac{\partial\left(H_x\right)}{\partial y}.$$

Получилось векторное уравнение

$$\boldsymbol{rot}\, \boldsymbol{H}(\boldsymbol{r},t) = \frac{1}{c}\frac{\partial \boldsymbol{D}(\boldsymbol{r},t)}{\partial t} + \frac{4\pi}{c}\boldsymbol{j}_{ext}(\boldsymbol{r},t). \qquad (6)$$

Это второе уравнение второй пары уравнений Максвелла.

**Приложение 3. Получение уравнений Максвелла в Фурье-пространстве**

Используя выражения (6), можно составить тензор третьего ранга, равный 0:

$$k_l F_{ik} + k_i F_{kl} + k_k F_{li} = 0. \qquad (1)$$

Этот антисимметричный по 3-м индексам тензор сохраняет все свойства, изложенные в приложении 1 для данного тензора, записанного в обычном 4-хмерном пространстве координат-времени.

1. $i = 1, k = 2, l = 3$

$$k_l F_{ik} + k_i F_{kl} + k_k F_{li} = -zB_z - xB_x - yB_y = 0,$$
$$\boldsymbol{kB} = 0. \qquad (2)$$

Это и есть 1-ое уравнение 1-ой пары уравнений Максвелла.

2. $i = 0, k = 1, l = 2 \ => k_2 F_{01} + k_0 F_{12} + k_1 F_{20} = 0 => k_y E_x - k_x E_y = -\frac{\omega}{c} B_z;$

3. $i = 0, k = 2, l = 3 => k_3 F_{02} + k_0 F_{23} + k_2 F_{30} = 0 => k_z E_y - k_y E_z = -\frac{\omega}{c} B_x;$

4. $i = 0, k = 3, l = 1 => k_3 F_{01} + k_0 F_{13} + k_1 F_{30} = 0 => k_z E_x - k_x E_z = \frac{\omega}{c} B_y.$

Получилось векторное уравнение

$$\boldsymbol{k} \times \boldsymbol{E} = \frac{\omega}{c} \boldsymbol{B}. \qquad (3)$$

Это и есть второе уравнение первой пары уравнений Максвелла.

Получим вторую пару уравнений Максвелла.

Вариация действия запишется таким образом:

$$\delta S = -\frac{1}{c} \int \left( \frac{1}{c} j^l \delta A_l + \frac{1}{16\pi} \delta F_{ik} H^{ik} + \frac{1}{16\pi} F_{ik} \delta H^{ik} \right) d^4 k = 0\,. \qquad (4)$$

В Фурье-пространстве тензоры $H^{ik}$ и $F_{ik}$ связаны следующим линейным уравнением связи:

$$H^{ik}(\boldsymbol{k}, \omega) = \varepsilon^{ik\mu\eta}(\boldsymbol{k}, \omega) F_{\mu\eta}(\boldsymbol{k}, \omega). \qquad (5)$$

Учитывая уравнение связи между тензорами, несимметричность тензора $H^{ik}$, а также расписывая вариацию тензора $F_{ik}$:

$$\delta F_{ik}(\boldsymbol{k},\omega) = -ik_i \delta A_k(\boldsymbol{k},\omega) + \mathrm{i}\, k_k \delta A_i(\boldsymbol{k},\omega),$$
$$\int F_{ik}\delta H^{ik} d^4k = \int F_{ik}\varepsilon^{ik\mu\eta}\delta F_{\mu\eta} d^4k = \int F_{\mu\eta}\varepsilon^{\mu\eta ik}\delta F_{ik} d^4k = \int \delta F_{ik} H^{ik} d^4k,$$
$$H^{ik}k_i\delta A_k = H^{kl}k_k\delta A_l = -H^{lk}k_k\delta A_l,$$

получаем следующее выражение для вариации действия:

$$\delta S = -\frac{1}{c}\int\left(\frac{1}{c}j^l(\boldsymbol{k},\omega)\delta A_l(\boldsymbol{k},\omega) - \frac{1}{4\pi}H^{lk}\,\mathrm{i}\,k_k\delta A_l(\boldsymbol{k},\omega)\right)d^4k = 0. \tag{6}$$

Таким образом, получили аналог выражения (15) в Фурье-пространстве:

$$\frac{4\pi}{c}j^l = ik_i H^{li}. \tag{7}$$

Расписывая четыре полученных уравнения:

5. $l = 0,\ \ -i4\pi\rho = k_x D_x + k_y D_y + k_z D_z,\quad \boldsymbol{kD} = -i4\pi\rho.$ (8)

Это первое уравнение второй пары уравнений Максвелла, записанное в Фурье-пространстве.

6. $l = 1,\ \ -\dfrac{i4\pi j_x}{c} = (D_x)\dfrac{\omega}{c} - (-k_y)H_z + (-k_z)H_y;$

7. $l = 2,\ \ -\dfrac{i4\pi j_y}{c} = (D_y)\dfrac{\omega}{c} + (-k_x)H_z - (-k_z)H_x;$

8. $l = 3,\ \ -\dfrac{i4\pi j_z}{c} = (D_x)\dfrac{\omega}{c} - (-k_x)H_y + (-k_y)H_x.$

Получилось векторное уравнение:

$$\boldsymbol{k}\times\boldsymbol{H}(\boldsymbol{k},\omega) = -\boldsymbol{D}(\boldsymbol{k},\omega)\frac{\omega}{c} - \frac{i4\pi}{c}\boldsymbol{j}_{ext}(\boldsymbol{k},\omega). \tag{9}$$

Это второе уравнение второй пары уравнений Максвелла, записанное в Фурье-пространстве.

**Приложение 4. Запись векторов поля с учётом поправки первого порядка.**

В выражении

$$\tilde{\mathcal{D}}_\alpha(\boldsymbol{r},t)e^{i\varphi} = \int\left[\epsilon_{\alpha\beta}\,(\boldsymbol{q},\alpha)\boldsymbol{\mathcal{E}}(\boldsymbol{q},\alpha)\exp\left(\boldsymbol{iqr}-i\alpha t\right)\right]\frac{d^3qd\alpha}{(2\pi)^4}e^{\boldsymbol{ikr}-i\omega t} \tag{1}$$

необходимо указать, что частота вместе с волновым вектором фиксирована:

$$\tilde{\mathcal{D}}_\alpha(\boldsymbol{r},t)e^{i\varphi} = \int\left[\epsilon_{\alpha\beta}\,(\boldsymbol{q}+\boldsymbol{k},\alpha+\omega)\boldsymbol{\mathcal{E}}(\boldsymbol{q}+\boldsymbol{k},\alpha+\omega)\exp\left(\boldsymbol{iqr}-i\alpha t\right)\right]\frac{d^3(q)d(\alpha)}{(2\pi)^4}e^{\boldsymbol{ikr}-i\omega t}. \tag{2}$$

Разложим гармонику амплитуды вектора напряжённости электрического поля:

$$\int\left[\epsilon_{\alpha\beta}\,(\boldsymbol{q}+\boldsymbol{k},\alpha+\omega)(\int\boldsymbol{\mathcal{E}}(\boldsymbol{r}',t')\exp\left(-i(\boldsymbol{k}+\boldsymbol{q})\boldsymbol{r}'+i(\omega+\alpha)t'\right)\mathrm{d^3r'dt'})\exp\left(\boldsymbol{iqr}-i\alpha t\right)\right]\frac{d^3(q)d(\alpha)}{(2\pi)^4}.$$

Далее можем изменить порядок интегрирования.

$$\int\boldsymbol{\mathcal{E}}(\boldsymbol{r}',t')\left[\int\epsilon_{\alpha\beta}\,(\boldsymbol{q}+\boldsymbol{k},\alpha+\omega)\exp\left(-i(\boldsymbol{k}+\boldsymbol{q})\boldsymbol{r}'+i(\omega+\alpha)t'\right)\exp\left(\boldsymbol{iqr}-i\alpha t\right)\frac{d^3(q)d(\alpha)}{(2\pi)^4}\right]\mathrm{d^3r'dt'} =$$

$$=\int\boldsymbol{\mathcal{E}}(\boldsymbol{r}',t')\left[\int\epsilon_{\alpha\beta}\,(\boldsymbol{q}+\boldsymbol{k},\alpha+\omega)\exp\left(\boldsymbol{iq}\left(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'\right)-\mathrm{i}\,\alpha\left(t-t'\right)\right)\frac{d^3(q)d(\alpha)}{(2\pi)^4}\exp\left(-i(\boldsymbol{k})\boldsymbol{r}'+i(\omega)t'\right)\right]\mathrm{d^3r'dt'} =$$

$$=\int\boldsymbol{\mathcal{E}}(\boldsymbol{r}',t')\,\epsilon_{\alpha\beta}\left(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}',t-t'\right)\exp\left(-i(\boldsymbol{k})\boldsymbol{r}'+i(\omega)t'\right)\mathrm{d^3r'dt'}.$$

Необходимо подставить в получившееся выражение разложение амплитуды вектора напряжённости электрического поля:

$$\boldsymbol{\mathcal{E}}(\boldsymbol{r}',t') = \boldsymbol{\mathcal{E}}\left(\boldsymbol{r},t\right)+\left(\boldsymbol{r}'-\boldsymbol{r}\right)\nabla'\boldsymbol{\mathcal{E}}\left(\boldsymbol{r},t\right)+\left(t'-t\right)\frac{\partial\boldsymbol{\mathcal{E}}\left(\boldsymbol{r},t\right)}{\partial t'}. \tag{3}$$

Получаем 3 интеграла:

$$\int\boldsymbol{\mathcal{E}}(\boldsymbol{r},t)\,\epsilon_{\alpha\beta}\left(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}',t-t'\right)\exp\left(-i(\boldsymbol{k})\boldsymbol{r}'+i(\omega)t'\right)\mathrm{d^3r'dt'} = \epsilon_{\alpha\beta}\left(\boldsymbol{k},\omega\right)\boldsymbol{\mathcal{E}}(\boldsymbol{r},t);$$

$$\int\left(t'-t\right)\frac{\partial}{\partial t'}\boldsymbol{\mathcal{E}}(\boldsymbol{r},t)\,\epsilon_{\alpha\beta}\left(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}',t-t'\right)\exp\left(-i(\boldsymbol{k})\boldsymbol{r}'+i(\omega)t'\right)\mathrm{d^3r'dt'} =$$

$$=-\int\frac{\partial}{\partial t'}\epsilon_{\alpha\beta}\left(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}',t-t'\right)\exp\left(-i(\boldsymbol{k})\boldsymbol{r}'+i(\omega)t'\right)\left(t'-t\right)\boldsymbol{\mathcal{E}}(\boldsymbol{r},t)\,\mathrm{d^3r'dt'} =$$

$$=-(i\omega)\frac{\partial}{\partial\omega}\epsilon_{\alpha\beta}\left(\boldsymbol{k},\omega\right)\boldsymbol{\mathcal{E}}(\boldsymbol{r},t) = i\frac{\partial}{\partial\omega}\epsilon_{\alpha\beta}\left(\boldsymbol{k},\omega\right)\frac{\partial}{\partial t}\boldsymbol{\mathcal{E}}(\boldsymbol{r},t).$$

$$\int\left(\boldsymbol{r}'-\boldsymbol{r}\right)\nabla'\boldsymbol{\mathcal{E}}(\boldsymbol{r},t)\,\epsilon_{\alpha\beta}\left(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}',t-t'\right)\exp\left(-i(\boldsymbol{k})\boldsymbol{r}'+i(\omega)t'\right)\mathrm{d^3r'dt'} =$$

$$=-\int\nabla'\epsilon_{\alpha\beta}\left(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}',t-t'\right)\exp\left(-i(\boldsymbol{k})\boldsymbol{r}'+i(\omega)t'\right)\left(\boldsymbol{r}'-\boldsymbol{r}\right)\boldsymbol{\mathcal{E}}(\boldsymbol{r},t)\,\mathrm{d^3r'dt'} =$$

$$=-(i)\frac{\partial}{\partial\boldsymbol{k}}\epsilon_{\alpha\beta}\left(\boldsymbol{k},\omega\right)\boldsymbol{k}\boldsymbol{\mathcal{E}}(\boldsymbol{r},t) = -i\frac{\partial}{\partial\boldsymbol{k}}\epsilon_{\alpha\beta}\left(\boldsymbol{k},\omega\right)\nabla\boldsymbol{\mathcal{E}}(\boldsymbol{r},t).$$

Суммируя полученные выражения, приходим к формуле $\tilde{\mathcal{D}}_{\alpha}(\mathbf{r},t)e^{i\varphi} = \epsilon_{\alpha\beta}(\boldsymbol{k},\omega)\mathcal{E}_{\beta}(\mathbf{r},t)e^{i\varphi} - ie^{i\varphi}\left(\frac{\partial \epsilon_{\alpha\beta}}{\partial \boldsymbol{k}}\nabla - \frac{\partial \epsilon_{\alpha\beta}}{\partial \omega}\frac{\partial}{\partial t}\right)\mathcal{E}_{\beta}(\mathbf{r},t).$

(4)

Формула $\boldsymbol{B} = \left(\frac{c}{\omega}\boldsymbol{k}\times\boldsymbol{\mathcal{E}} - i\frac{c}{\omega}\left(\frac{\boldsymbol{k}\times\nabla\boldsymbol{\mathcal{E}}}{k} + \frac{\boldsymbol{k}}{\omega}\times\frac{\partial\boldsymbol{\mathcal{E}}}{\partial t}\right)\right)e^{i\varphi}$ получается таким же образом.