

На правах рукописи



Фролов Максим Евгеньевич

**Функциональные методы и их реализация для
апостериорного контроля точности в задачах линейной
теории упругости**

05.13.18 – Математическое моделирование, численные методы и комплексы программ

АВТОРЕФЕРАТ

диссертации на соискание ученой степени
доктора физико-математических наук

Санкт-Петербург – 2015

Работа выполнена в Федеральном государственном автономном образовательном учреждении высшего образования «Санкт-Петербургский политехнический университет Петра Великого» на кафедре «Прикладная математика»

Научный консультант: **Репин Сергей Игоревич**

доктор физико-математических наук, профессор

Официальные оппоненты: **Матвеев Валерий Павлович**

доктор технических наук, профессор, академик РАН, директор Института механики сплошных сред УрО РАН, заведующий кафедрой «Динамика и прочность машин» ФГБОУ ВПО «Пермский национальный исследовательский политехнический университет»

Баничук Николай Владимирович

доктор физико-математических наук, профессор, заведующий лабораторией ФГБУН «Институт проблем механики им. А.Ю. Ишлинского РАН»

Макаров Антон Александрович

доктор физико-математических наук, профессор кафедры параллельных алгоритмов ФГБОУ ВПО «Санкт-Петербургский государственный университет»

Ведущая организация: ФГБУН «Институт проблем машиноведения РАН»

г. Санкт-Петербург

Защита состоится 28 октября 2015 года в 16-00 часов на заседании диссертационного совета Д 212.229.13 в ФГАОУ ВО «Санкт-Петербургский политехнический университет Петра Великого», расположенном по адресу: 195251, Санкт-Петербург, ул. Политехническая, д. 29, I корпус, аудитория ____.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке и на сайте ФГАОУ ВО «Санкт-Петербургский политехнический университет Петра Великого» по адресу www.spbstu.ru.

Автореферат разослан « ____ » _____ 2015 года.

Ученый секретарь

диссертационного совета Д 212.229.13
доктор технических наук, профессор



Григорьев Борис Семёнович

Общая характеристика работы

В диссертации развит современный подход, который позволяет вычислять надежные апостериорные оценки, контролируемые точность приближенных решений практически важных краевых задач механики и математической физики. Такой контроль является неотъемлемой частью современного математического моделирования. В ней рассмотрены задача Дирихле для уравнения Пуассона и стационарного уравнения диффузии, задачи теории изгиба пластин Рейсснера–Миндлина, изгиба прямолинейных балок Тимошенко и Бернулли–Эйлера, плоские задачи классической теории упругости и моментной теории упругости Коссера. Предложены новые теоретические оценки, а также разработаны и применены методики их численной реализации в виде комплексов программ.

Актуальность темы исследования. В XXI веке уровень развития вычислительной математики и мощностей технических ресурсов достиг рубежа, который позволяет решать значимые задачи в рамках различных направлений математического моделирования. Разработаны эффективные подходы к построению решения многих классов задач, дошедшие до широкого применения и подробно описанные в литературе. При изучении различных вычислительных схем помимо анализа устойчивости и аппроксимационных свойств важным оказывается вопрос о надежном контроле точности приближенного решения. Он тесно связан с фундаментальным вопросом о доверии к результатам моделирования, основанном на возможности их явной проверки. Хорошо известны асимптотические оценки скорости сходимости, наличие которых является основанием для применения того или иного метода, поскольку такие оценки при определенных условиях гарантируют сходимость аппроксимации \tilde{u} , полученной на конечномерном подпространстве, к точному решению u при стремлении размерности подпространства к бесконечности. Часто подобные результаты получены в предположении о повышенной гладкости точного решения u , которая на практике встречается довольно редко. Другой практический недостаток применения априорных оценок для контроля точности приближенных решений заключается в том, что они не предоставляют никакой информации о распределении ошибки по области в каждой конкретной ситуации. Необходимость в такой информации была осознана с началом быстрого развития адаптивных методов, в которых процесс вычисления приближенного решения желаемого качества реализуется при помощи рассмотрения дискретных задач на сетках, последовательно сгущающихся к особенностям исходной краевой задачи, что позволяет уменьшить вычислительную трудоемкость и повысить точность расчетов. В 70–80-е годы XX века это послужило толчком для начала интенсивных исследований, направленных на развитие методов построения

апостериорных оценок погрешности. Перед соответствующей теорией возникли две основные задачи: вычисление верхних границ отклонения приближенного решения от точного и получение информации о локальном распределении ошибки по области, которая служит основой для построения эффективных адаптивных алгоритмов.

Степень разработанности темы. К настоящему моменту в рамках метода конечных элементов (МКЭ) сформировалось несколько крупных направлений развития методов апостериорного контроля погрешности. Первые из них были предложены в работах I. Babuška, W.C. Rheinboldt (1978–1981 гг.) и вызвали интерес многих авторов, что привело к появлению большого количества публикаций по данной тематике и смежным вопросам. К середине 80-х годов были выделены некоторые основные требования к оценкам, по своей сути, определившие вектор дальнейшего развития всей теории: 1) оценка погрешности должна быть основана только на локальных вычислениях; 2) глобальная оценка должна при этом получаться как результат расчета локальных величин по совокупности конечных элементов; 3) оценка не должна слишком сильно недооценивать или переоценивать истинную величину ошибки. Последний пункт означает, что индикатор не обязательно должен быть надежным в строгом понимании. Как следствие, подавляющее большинство методов, предложенных для краевых задач различных типов за эти десятилетия, данным свойством не обладают. Наиболее полное описание стандартных методов и ссылки на соответствующую литературу можно найти в известных монографиях: R. Verfürth (1996, 2013), M. Ainsworth, J.T. Oden (2000), I. Babuška, T. Strouboulis (2001), W. Bangerth, R. Rannacher (2003), P. Neittaanmäki, S. Repin (2004), S. Repin (2008), I. Babuška, J.R. Whiteman, T. Strouboulis (2011), O. Mali, P. Neittaanmäki, S. Repin (2014). Необходимо особо подчеркнуть, что все они основаны на том факте, что рассматриваемое приближенное решение совпадает с галеркинской аппроксимацией — точным решением соответствующей конечномерной задачи. Тогда как вопрос надежного контроля точности приближенных решений требует построения апостериорных оценок, удовлетворяющих ряду более жестких требований. Необходимы неравенства, которые i) дают гарантированные и вычисляемые оценки точности; ii) подходят для приближенных решений, полученных широким классом методов; iii) не содержат локальных постоянных и других данных, зависящих от сетки и второстепенных особенностей построения приближенного решения. На рубеже XX–XXI веков С.И. Репиным и коллегами был предложен функциональный подход, позволяющий строить апостериорные оценки точности, удовлетворяющие этим требованиям (S. Repin, L.S. Xanthis, *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.*, 1996; С.И. Репин, *Зан. научн. семинаров ПОМИ*, 1997; S. Repin, *Math. Comput.*, 2000). В настоящее время он требует интенсивного развития, в том числе в применении к задачам механики деформируемого твердого

тела, особенно в прикладных аспектах, касающихся эффективной реализации.

Целями работы являются разработка новых и развитие известных функциональных методов контроля точности приближенных решений краевых задач в рамках линейной теории упругости, а также создание эффективного подхода к реализации теоретических результатов для плоских задач на основе смешанных аппроксимаций МКЭ.

Основные задачи исследования включают: 1) проведение сравнительного анализа методов построения и методик вычисления апостериорных оценок для классических уравнений математической физики с использованием различных типов аппроксимаций МКЭ; 2) обобщение результатов и перенос полученного опыта на задачи линейной теории упругости: задачи об изгибе прямолинейных балок и пластин, задачу о плоской деформации для классических сред и краевые задачи для среды Коссера; 3) получение новых классов функциональных апостериорных оценок, допускающих применение методик расчета верхних границ энергетической нормы ошибки, основанных на привлечении смешанных аппроксимаций; 4) реализацию алгоритмов, выполненную в виде комплексов программ; 5) анализ возможностей функционального подхода, основанный на вычислительном эксперименте, в том числе с привлечением коммерческих программных продуктов для инженерных расчетов.

Научная новизна. Развита методика постановки вычислительного эксперимента для классических скалярных эллиптических краевых задач второго порядка, направленного на сравнительный анализ различных групп методов, выявление их достоинств и недостатков, а также на сравнение качества работы адаптивных алгоритмов, основанных на соответствующих апостериорных оценках и индикаторах. Предложен новый класс оценок функционального типа для контроля точности решений задач об изгибе пластин Рейсснера–Миндлина, применимый для любого конформного приближенного решения и нескольких типов краевых условий: жесткая заделка, свободно опертый край, свободный край. Для задачи об изгибе балок Тимошенко впервые получена гарантированная верхняя оценка ошибки в глобальной норме, которая реализована и численно исследована на примере серии задач, решение которых обеспечивает пакет ANSYS. Для плоских задач классической линейной теории упругости создана новая методика реализации вычислений известной апостериорной оценки со слабым учетом условия симметрии тензора напряжений, основанная на использовании смешанных аппроксимаций. Впервые выполнена реализация вычислительных процедур для четырехугольных сеток, основанная на тройке билинейных аппроксимаций, а также парах аппроксимаций Арнольда–Боффи–Фалка и Равьяра–Тома минимального порядка, и проведен их сравнительный анализ. Опыт обобщен на случай неклассических сплошных сред с микроструктурой, где впервые построен и численно исследован класс функциональных апо-

стериорных оценок точности решений плоских краевых задач, граничные условия в которых могут включать как заданные перемещения и независимый поворот, так и поверхностные силы и момент.

Теоретическая и практическая значимость работы. Разработанные и реализованные функциональные методы дают возможность явно контролировать точность приближенных решений известных краевых задач механики в рамках классической и неклассической линейной теории упругости. Проведенные теоретические исследования могут послужить основой для распространения подхода на неклассические пространственные задачи. Помимо научной ценности и новизны, полученные теоретические результаты и опыт, накопленный автором при их реализации, могут найти свое применение при промышленной разработке отечественного программного обеспечения для инженерных расчетов, а также могут быть использованы в научных исследованиях в области разработки новых методов вычислений.

Методология и методы исследования, степень достоверности результатов. Достоверность полученных в диссертации теоретических результатов обеспечивается тем фактом, что они опираются на строгие математические методы теории двойственности вариационного исчисления, методы математической физики, теории уравнений в частных производных и функционального анализа. Прикладная часть исследования основана на широко применяющемся в научной и инженерной практике методе — МКЭ. Методология обоснования эффективности функционального подхода включает сравнение с результатами работы известных коммерческих пакетов, а также с данными, взятыми из работ других авторов.

Апробация результатов. Представленный материал прошел апробацию на следующих конференциях и семинарах, в том числе всероссийских и международных: Workshop on Advanced Computer Simulation Methods (Международный математический институт им. Леонарда Эйлера, Санкт-Петербург, 2009 г.); VI Всероссийский форум «Наука и инновации в технических университетах» (Санкт-Петербург, 2012 г.); 1st joint LUN-SPbSPU Workshop on Computational Methods and Modeling in Engineering (Ганновер, Германия, 2012 г.); Городской семинар по механике (Институт проблем машиноведения РАН, Санкт-Петербург, 2013 г.); The 6th Workshop on Reliable Methods of Mathematical Modeling (Ювяскуля, Финляндия, 2013 г.); The European Conference on Numerical Mathematics and Advanced Applications (Лозанна, Швейцария, 2013 г.); 6th International Conference on Advanced Computational Methods in Engineering (Гент, Бельгия, 2014 г.); X Международная конференция «Сеточные методы для краевых задач и приложения» (Казань, 2014 г.); XIX Зимняя школа по механике сплошных сред (Институт механики сплошных сред УрО РАН, Пермь, 2015 г.).

Основная часть представленных результатов получена при поддержке грантов РФФИ

№ 08-01-00655-а, № 11-01-00531-а, № 14-01-00162-а и № 14-01-31273-мол_а, при поддержке Правительства Санкт-Петербурга в рамках конкурсов 2010 и 2012 годов для молодых кандидатов наук и Министерства образования и науки РФ в рамках государственного задания 2013 года.

Положения, выносимые на защиту: 1. Построены надежные функциональные методы, позволяющие контролировать энергетическую норму погрешности в задачах об изгибе пластин Рейсснера–Миндлина, прямолинейных балок Тимошенко и балок Бернулли–Эйлера. 2. Создана методика расчета апостериорных оценок отклонения от точного решения в задачах об изгибе балок Тимошенко. 3. Получен уникальный класс надежных апостериорных оценок функционального типа для плоских задач теории упругости Коссера. 4. Созданы методики расчета оценок точности приближенных решений в плоских задачах классической и моментной теории упругости и выполнена их реализация в виде соответствующих комплексов программ на языке FORTRAN. 5. Обоснован вывод о преимуществе смешанных аппроксимаций как результат сравнительного анализа эффективности методик расчета апостериорных оценок функционального типа на базе стандартных и смешанных конечных элементов для классической линейной упругости. 6. Обоснован вывод о надежности и более высокой эффективности функциональных методов по сравнению с классическими, который базируется на представленной в работе оценке применимости функционального подхода к контролю точности приближенных решений, полученных при помощи пакетов прикладных программ для инженерного анализа — ANSYS и MATLAB. 7. Создан метод построения и расчета оценок погрешности на основе пары аппроксимаций Арнольда–Боффи–Фалка в плоских задачах механики деформируемого твердого тела, эффективность которого подтверждена результатами вычислительного эксперимента.

Публикации. По теме диссертации опубликовано 18 работ (из них 12 работ входят в число основных).

Структура и объем диссертации. Диссертация состоит из введения, пяти глав, заключения и списка литературы. Ее объем составляет 298 страниц. Текст включает 41 рисунок и 30 таблиц, а список литературы — 504 источника.

Содержание работы

Во **введении** дана общая характеристика диссертационной работы, в частности, обоснован выбор темы исследования, показана ее актуальность. В нем представлен обзор основных направлений развития теории апостериорного контроля точности, отражающий современный уровень достижений в этой области и указывающий на теоретическую и практическую

значимость проведенного диссертационного исследования, а также изложено краткое содержание и описана структура работы.

Первая глава посвящена более подробному анализу основных методов построения апостериорных оценок энергетической нормы погрешности. Также затронуты некоторые смежные разделы теории. В *первом параграфе* описана связь погрешности приближенного решения с нормой невязки соответствующего дифференциального уравнения. Следующие разделы посвящены классическим методам: во *втором параграфе* изложен явный метод невязок, в *третьем* — метод невязок с использованием решения сопряженной задачи, в *четвертом* — метод невязок с решением локальных задач, в *пятом* — иерархический метод, *шестой параграф* содержит описание индикаторов ошибки, построенных на основе сглаживания градиента приближенного решения. Далее представлены более общие фундаментальные подходы к построению гарантированных верхних оценок ошибки (мажорант). *Седьмой параграф* посвящен вариационному подходу С.Г. Михлина и его связи с методом гиперокружностей, с практической реализацией которого связан метод оценки погрешности через определяющее соотношение, изложенный в *восьмом параграфе*. *Девятый параграф* включает описание функционального подхода. Именно его развитию посвящена диссертационная работа. Для полноты изложения, глава содержит несколько параграфов, касающихся других актуальных направлений. В *десятом параграфе* обсуждаются оценки в терминах специальных проблемно-ориентированных величин. *Одиннадцатый параграф* посвящен оценке погрешности моделей. Наконец, заключительный *двенадцатый параграф* включает описание различных свойств оценок и критериев их сравнения, а также обзор литературы, в которой можно найти результаты сопоставления разных групп методов.

Вторая глава посвящена классической задаче математической физики, заключающейся в поиске скалярного поля u , удовлетворяющего системе

$$\begin{cases} -\operatorname{div}(A\nabla u) = f & \text{в } \Omega, \\ u = 0 & \text{на } \Gamma, \end{cases} \quad (1)$$

где $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ — ограниченная связная область с непрерывной по Липшицу границей Γ и правая часть $f \in \mathbb{L}_2(\Omega)$, то есть она принадлежит пространству суммируемых с квадратом функций в смысле интеграла Лебега, $A = \{a_{ij}\}_{i,j=1,2}$ — симметричная матрица, $a_{ij} \in \mathbb{L}_\infty(\Omega)$, $i, j = 1, 2$. Также предполагается, что существуют положительные константы α_1 и α_2 , такие что $\alpha_1|\xi|^2 \leq A\xi \cdot \xi \leq \alpha_2|\xi|^2$, $\forall \xi \in \mathbb{R}^2$. Хорошо известно, что данная задача допускает следующую обобщенную формулировку: найти элемент $u \in U_0$, удовлетворяющий интегральному тождеству $\int_{\Omega} A\nabla u \cdot \nabla w \, d\Omega = \int_{\Omega} fw \, d\Omega$, $\forall w \in U_0$, где $U_0 := \overset{\circ}{\mathbb{W}}_2^1(\Omega)$ обозначает подпростран-

ство функций из пространства $\mathbb{W}_2^1(\Omega)$, обращающихся в ноль на границе области, а $\mathbb{W}_2^1(\Omega)$ — пространство Соболева, состоящее из функций, принадлежащих вместе со своими обобщенными производными первого порядка пространству $\mathbb{L}_2(\Omega)$. Акцент сделан на аспекты практического применения функционального подхода и на сравнение с классическими подходами МКЭ, реализованными в программных пакетах для инженерного анализа. Материал главы включает небольшую часть кандидатской диссертации автора, расширяя ее новыми исследованиями, касающимися применения смешанных аппроксимаций МКЭ, и некоторыми другими результатами. Развита методика постановки вычислительного эксперимента для классических скалярных эллиптических краевых задач второго порядка, направленного на сравнительный анализ различных групп методов, выявление их достоинств и недостатков. Ключевым для всей диссертации является сопоставление возможностей стандартных непрерывных и специальных смешанных аппроксимаций МКЭ и вывод об общем преимуществе последних при реализации функционального подхода. В публикациях [1], [13] и [2] автору принадлежит постановка вычислительного эксперимента и, совместно, анализ его результатов, а непосредственная разработка кода выполнена М.А. Чуриловой в среде MATLAB в рамках написания кандидатской диссертации под его научным руководством.

Для задачи (1) оценка энергетической нормы ошибки хорошо известна (S. Repin, *Math. Comput.*, 2000) и имеет вид $\|u - \tilde{u}\|^2 = \int_{\Omega} A \nabla(u - \tilde{u}) \cdot \nabla(u - \tilde{u}) \, d\Omega \leq \mathcal{M}^2(\tilde{u}, \beta, \tilde{y})$, где

$$\mathcal{M}^2(\tilde{u}, \beta, \tilde{y}) := (1 + \beta) \int_{\Omega} (A \nabla \tilde{u} - \tilde{y}) \cdot (\nabla \tilde{u} - A^{-1} \tilde{y}) \, d\Omega + \left(1 + \frac{1}{\beta}\right) \frac{c_I^2}{\alpha_1} \int_{\Omega} (\operatorname{div} \tilde{y} + f)^2 \, d\Omega,$$

u — точное решение задачи, \tilde{u} — приближенное решение, полученное любым из методов, обеспечивающих его принадлежность пространству U_0 , β — произвольный положительный параметр. Произвольный элемент $\tilde{y} \in \mathbb{H}(\Omega, \operatorname{div}) := \{y \in \mathbb{L}_2(\Omega, \mathbb{R}^2) \mid \operatorname{div} y \in \mathbb{L}_2(\Omega)\}$ рассматривается как аппроксимация точного решения двойственной вариационной задачи. Обозначение с волнами вводится, чтобы это подчеркнуть, но отличать от аппроксимации \tilde{u} решения прямой задачи u . Постоянная c_I — константа в неравенстве Фридрикса.

В *первом параграфе* изложены методики вычисления функциональных мажорант погрешности. Лучший способ заключается в минимизации значения функционала \mathcal{M}^2 , которая выполняется итерационным методом при периодическом пересчете значения параметра β на оптимальное для текущего \tilde{y} . Как показывает практика, достаточно эффективным оказывается алгоритм с трехкратным пересчетом параметра β (С. Carstensen, С. Merdon, *Numer. Math.*, 2013; М. Frolov, Р. Neittaanmäki, S. Repin, *Barcelona: CIMNE*, 2003). Приведенные в главе примеры это подтверждают.

Во *втором параграфе* описаны два способа построения свободной переменной и связанные с этим аппроксимации. Пусть $\tilde{u} = u_h$ — приближенное решение, полученное МКЭ с кусочно-линейной непрерывной аппроксимацией на сетке с характерным размером h . В этом случае u_h можно записать в виде суммы $u_h = \sum_{i=1}^N u_i \varphi_i$, где N — количество узлов расчетной сетки, u_i — значения решения в соответствующих узлах, а φ_i — непрерывные, линейные на каждом элементе функции формы, обращающиеся в ноль во всех узлах, кроме i -го. Те же аппроксимации можно использовать для переменной $\tilde{y} = \sum_{i=1}^N \begin{pmatrix} y_{1i} \varphi_i \\ y_{2i} \varphi_i \end{pmatrix}$, где y_{1i} и y_{2i} — значения в узлах расчетной сетки. Таким образом, при заданном начальном значении параметра β необходимо решить задачу минимизации $\min_{(y_{11}, \dots, y_{1N}, y_{21}, \dots, y_{2N})} \mathcal{M}^2(u_h, \beta, \tilde{y})$ и вычислить его заново. Соответствующий индикатор локальной ошибки на элементе триангуляции T обозначен $\eta_T^{CA} := \left(\int_T (A \nabla u_h - \tilde{y}) \cdot (\nabla u_h - A^{-1} \tilde{y}) d\Omega \right)^{1/2}$. Однако у этого способа есть существенный недостаток, поскольку векторные поля из пространства $\mathbb{H}(\Omega, \text{div})$ допускают разрыв касательной составляющей вдоль линии разрыва коэффициентов исходного дифференциального уравнения, а непрерывные — нет. Возникающая проблема решается путем привлечения аппроксимаций в пространстве $\mathbb{H}(\Omega, \text{div})$, характерных для теории смешанных МКЭ. К настоящему моменту существует широкий спектр таких аппроксимаций — в главе использован треугольный элемент Равьяра–Тома нулевого порядка с тремя степенями свободы по числу ребер (P.A. Raviart, J.M. Thomas, *Lecture Notes in Mathematics 606*, 1977). Во всей области поле определяется формулой $\tilde{y} = \sum_{i=1}^{N_{ed}} y_i \psi_i$, где N_{ed} — количество ребер всех элементов в триангуляции \mathcal{T}_h , y_i — значения на ребрах, а ψ_i — соответствующие базисные функции. Таким образом, при данном типе аппроксимации нужно решить задачу минимизации $\min_{(y_1, \dots, y_{N_{ed}})} \mathcal{M}^2(u_h, \beta, \tilde{y})$, причем необходимое условие минимума приводит к системе линейных алгебраических уравнений, общая сборка которой происходит с учетом выбранного направления нормали к ребру. Соответствующий локальный индикатор обозначен $\eta_T^{RT} := \left(\int_T (A \nabla u_h - \tilde{y}) \cdot (\nabla u_h - A^{-1} \tilde{y}) d\Omega \right)^{1/2}$.

В *третьем параграфе* кратко представлены результаты сравнения функциональной мажоранты с классическими методами на фиксированных сетках, которые подробно обсуждались в кандидатской диссертации автора. Основной вывод из вычислительного эксперимента заключается в следующем: при отклонении от галеркинских аппроксимаций стандартные алгоритмы не обеспечивают качественной индикации элементов с большой погрешностью. Функциональный подход демонстрирует надежность при возникающих отклонениях в распределении локальных ошибок, а оценка глобальной (энергетической) нормы погрешности не теряет эффективности. При сравнении используется общепринятая характеристика — ин-

декс эффективности $I_{eff} := \mathcal{M}(\tilde{u}, \dots) / \|u - \tilde{u}\|$.

В *четвертом параграфе* рассмотрена реализация адаптивных алгоритмов с использованием пары кусочно-линейных непрерывных аппроксимаций МКЭ. В примерах метод сравнивается в процессе адаптации со стандартным индикатором, используемым в пакете MATLAB (К. Eriksson, С. Johnson, *SIAM J. Numer. Anal.*, 1991), а также с классическим индикатором по методу осреднения (О.С. Zienkiewicz, J.Z. Zhu, *Int. J. Numer. Methods Eng.*, 1987). Также сравниваются два алгоритма вычисления мажоранты. В первом из них \tilde{y} берется как осреднение на мелкой сетке $A\nabla u_{h/4}$ без минимизации функционала. Второй способ основан на решении системы для расчета \tilde{y} . Из приведенных в параграфе данных можно сделать вывод о том, что только полноценная минимизация квадратичного функционала достаточно уменьшает вклад второго слагаемого функционала \mathcal{M}^2 в итоговую оценку.

В *пятом параграфе* обсуждаются преимущества и недостатки аппроксимации Равьяра–Тома наименьшего порядка как альтернативы непрерывным. Из приведенных примеров сделан вывод, что при использовании индикатора η_T^{RT} не происходит сгущения сетки вблизи границы разрыва коэффициентов, что соответствует сетке, полученной при помощи «эталонного решения» (reference solution). К числу недостатков простейшей аппроксимации Равьяра–Тома следует отнести худшие аппроксимационные свойства внутри элемента по сравнению с парой стандартных непрерывных аппроксимаций МКЭ.

В *шестом параграфе* собраны основные выводы из результатов, представленных во второй главе: 1) для стандартных индикаторов качество результатов не только в теории, но и на практике существенно зависит от того, насколько приближенное решение близко к галеркинской аппроксимации; 2) функциональный подход является универсальным и позволяет контролировать погрешности разной природы; 3) из сравнения двух методик вычисления функциональных мажорант можно сделать вывод о том, что только минимизация квадратичного функционала достаточно уменьшает вклад второго слагаемого в итоговую оценку; 4) в случае возникновения нежелательных сгущений узлов при использовании непрерывных аппроксимаций в функционалах, хорошей альтернативой в адаптивных алгоритмах может быть смешанная аппроксимация — представленные результаты свидетельствуют о преимуществе такого подхода и служат основанием для его распространения на краевые задачи механики деформируемого твердого тела.

Третья глава посвящена развитию функционального подхода для задач теории пластин и стержней. Основной результат, относящийся к теории пластин — автором предложен новый класс оценок функционального типа для контроля точности решений задач об изгибе пластин Рейсснера–Миндлина, применимый для любого конформного приближенного

решения и нескольких типов краевых условий: жесткая заделка, свободно опертый край, свободный край [14]. Он обобщает результаты для пластин, жестко закрепленных по всей границе расчетной области, опубликованные в соавторстве с С.И. Репиным (*Зап. научн. семинаров ПОМИ*, 2004), С.И. Репиным и П. Нейтгаанмяки [3]. Для задачи об изгибе прямолинейной балки Тимошенко впервые получена гарантированная верхняя оценка ошибки в глобальной норме, которая реализована и численно исследована на примере серии задач, решение которых обеспечивает пакет ANSYS ([4], [15]). Оценка остается справедливой вне зависимости от того, каким методом было построено конформное приближенное решение. Это оказывается особенно важно, когда речь идет о контроле точности решений, полученных коммерческими пакетами. В главе приведена аналогичная оценка для прямолинейной балки Бернулли–Эйлера, также полученная автором [5].

Первый параграф включает обзор публикаций по современным методам конечных элементов и апостериорным оценкам для пластин Рейсснера–Миндлина. В нем отмечено, что проблеме построения методов контроля точности вычисленных аппроксимаций посвящено относительно небольшое количество публикаций, поэтому ее исследование особенно актуально в настоящее время.

Во *втором параграфе* приведены классическая и обобщенная постановка задачи в рамках линейной теории упругости. Модель Рейсснера–Миндлина описывает деформацию пластины толщины t в терминах двух переменных: скалярной функции u и векторной функции θ , которые представляют собой прогиб срединной плоскости пластины и поворот вектора нормали к ней при деформировании. Уравнения, входящие в классическую постановку рассматриваемой задачи, имеют следующий вид: найти такую пару (u, θ) , что

$$\begin{cases} -\operatorname{Div}(C\varepsilon(\theta)) = \gamma & \text{в } \Omega, \\ -\operatorname{div} \gamma = g & \text{в } \Omega, \end{cases} \quad (2)$$

где $\gamma = \lambda t^{-2}(\nabla u - \theta)$, Div — дивергенция тензора, $\lambda = Ek/(2 + 2\nu)$, $\varepsilon(\theta) = (\nabla\theta + (\nabla\theta)^T)/2$; функция gt^3 соответствует распределенной поперечной нагрузке, действующей на пластину; тензор C — тензор четвертого ранга, определяемый ниже; E и ν — модуль Юнга и коэффициент Пуассона соответственно, а k — корректировочный коэффициент. Предполагается, что $g \in L_2(\Omega)$, тензор C обладает свойством симметрии и существуют такие положительные константы α_1 и α_2 , что $\alpha_1|\varkappa|^2 \leq C\varkappa : \varkappa \leq \alpha_2|\varkappa|^2, \forall \varkappa \in \mathbb{M}_{sym}^{2 \times 2}, |\varkappa|^2 = \varkappa : \varkappa$ почти всюду в Ω , где $\mathbb{M}_{sym}^{2 \times 2}$ — пространство симметричных тензоров второго ранга размерности два. В частном случае, когда пластина сделана из однородного изотропного материала, имеем $C\varkappa = E/(12 - 12\nu^2)((1 - \nu)\varkappa + \nu \operatorname{tr} \varkappa \mathbb{I})$, где \mathbb{I} — единичный тензор второго ранга, а $\operatorname{tr} \varkappa$ —

след тензора \varkappa .

Рассмотрены однородные граничные условия $u = 0$ и $\theta = 0$ на Γ . Тогда функционал энергии имеет вид $\mathcal{J}(u, \theta) = 1/2 \int_{\Omega} (C\varepsilon(\theta) : \varepsilon(\theta) + \lambda t^{-2} |\nabla u - \theta|^2 - 2gu) d\Omega$. Существование пары элементов, на которой достигается минимум функционала \mathcal{J} на множестве $S := \overset{\circ}{\mathbb{W}}_2^1(\Omega) \times \overset{\circ}{\mathbb{W}}_2^1(\Omega, \mathbb{R}^2)$, следует из известных результатов вариационного исчисления для выпуклых коэрцитивных функционалов (I. Ekeland, R. Temam, *Elsevier*, 1976). Обобщенная постановка задачи об изгибе пластины Рейсснера–Миндлина в одном из возможных вариантов записи имеет вид: найти тройку элементов $(u, \theta, \gamma) \in U_0 \times \Theta_0 \times Q$, удовлетворяющую соотношениям

$$\begin{cases} \int_{\Omega} C\varepsilon(\theta) : \varepsilon(\varphi) d\Omega - \int_{\Omega} \gamma \cdot \varphi d\Omega = 0, & \forall \varphi \in \Theta_0 := \overset{\circ}{\mathbb{W}}_2^1(\Omega, \mathbb{R}^2), \\ \int_{\Omega} \gamma \cdot \nabla w d\Omega = \int_{\Omega} gw d\Omega, & \forall w \in U_0 := \overset{\circ}{\mathbb{W}}_2^1(\Omega), \\ \int_{\Omega} (\lambda^{-1} t^2 \gamma - (\nabla u - \theta)) \cdot \tau d\Omega = 0, & \forall \tau \in Q := \mathbb{L}_2(\Omega, \mathbb{R}^2). \end{cases} \quad (3)$$

Теперь предположим, не конкретизируя метод, что рассматриваемая система решена приближенно, то есть имеется некоторая произвольная пара конформных аппроксимаций $(\tilde{u}, \tilde{\theta})$ точного решения задачи (u, θ) в S . Тогда элемент γ аппроксимируется в Q элементом $\tilde{\gamma} = \lambda t^{-2} (\nabla \tilde{u} - \tilde{\theta})$. Определяя соответствующие погрешности, то есть отклонения от точных значений, $e_{\tilde{u}} := u - \tilde{u}$, $e_{\tilde{\theta}} := \theta - \tilde{\theta}$, $e_{\tilde{\gamma}} := \gamma - \tilde{\gamma}$, а также квадрат ошибки в терминах введенного функционала $\epsilon^2 := \mathcal{J}(\tilde{u}, \tilde{\theta}) - \mathcal{J}(u, \theta)$, доказано следующее вспомогательное утверждение: для произвольной аппроксимации $(\tilde{u}, \tilde{\theta}) \in S$ имеет место соотношение $\epsilon^2 = 1/2 (\|e_{\tilde{\theta}}\|^2 + \lambda^{-1} t^2 \|e_{\tilde{\gamma}}\|^2)$, где $\|e_{\tilde{\gamma}}\|_{\Omega}^2 := \int_{\Omega} |e_{\tilde{\gamma}}|^2 d\Omega$ и $\|e_{\tilde{\theta}}\|^2 := \int_{\Omega} C\varepsilon(e_{\tilde{\theta}}) : \varepsilon(e_{\tilde{\theta}}) d\Omega$.

Третий параграф содержит материал, основанный на кандидатской диссертации автора, приведенный для полноты изложения и описывающий построение апостериорных оценок с привлечением методов теории двойственности вариационного исчисления.

В *четвертом параграфе* аналогичный результат получен при помощи преобразования интегральных тождеств. Этот способ изложен в работе М.Е. Фролова, П. Нейттанмяки и С.И. Репина (*Пробл. матем. анализа*, 2005), переведенной в [3]. Для построения функционала, оценивающего погрешность, введены в рассмотрение свободные элементы \tilde{y} и $\tilde{\varkappa}$, где $\tilde{y} \in \mathbb{H}(\Omega, \text{div})$ и $\tilde{\varkappa} \in \mathbb{N}_{sym}(\Omega, \text{Div}) := \{\varkappa \in \mathbb{L}_2(\Omega, \mathbb{M}_{sym}^{2 \times 2}) \mid \text{Div } \varkappa \in \mathbb{L}_2(\Omega, \mathbb{R}^2)\}$.

Пятый параграф содержит пример применения методики оценки погрешности, содержащий характерные особенности — входящие углы и отверстие. Результаты показывают, что предлагаемый метод остается надежным, но демонстрирует рост переоценки истинной величины ошибки с измельчением сетки при использовании стандартных МКЭ.

В *шестом параграфе* автором получен результат, обобщающий метод на другие виды

краевых условий и вносящий изменения в структуру оценок и типы аппроксимаций, важные для потенциальной эффективной реализации. Изложение опирается на работу [14].

Пусть одна из кромок пластины жестко заделана, а остальные свободны. Предположим, что граница области Γ состоит из двух непересекающихся частей — Γ_D и Γ_S , где Γ_D — часть с условием заделки. Система соотношений (2) сохраняется, а слабая постановка выглядит аналогично (3). Меняются только пространства, которым должны принадлежать элементы

$$\begin{cases} \int_{\Omega} C\varepsilon(\theta) : \varepsilon(\varphi) d\Omega - \int_{\Omega} \gamma \cdot \varphi d\Omega = 0, & \forall \varphi \in \Theta := \{\varphi \in \mathbb{W}_2^1(\Omega, \mathbb{R}^2) \mid \varphi = 0 \text{ на } \Gamma_D\}, \\ \int_{\Omega} \gamma \cdot \nabla w d\Omega = \int_{\Omega} gw d\Omega, & \forall w \in U := \{w \in \mathbb{W}_2^1(\Omega) \mid w = 0 \text{ на } \Gamma_D\}, \\ \int_{\Omega} (\lambda^{-1}t^2\gamma - (\nabla u - \theta)) \cdot \tau d\Omega = 0, & \forall \tau \in Q. \end{cases}$$

Функционал \mathcal{J} также сохраняет приведенный ранее вид. Разделим свободный тензор $\tilde{\varkappa}$ на две составляющие $\tilde{\varkappa} = [\tilde{\varkappa}^1 \quad \tilde{\varkappa}^2]$, где $\tilde{\varkappa}^1, \tilde{\varkappa}^2 \in \mathbb{H}(\Omega, \text{div})$. Подробнее такое преобразование рассмотрено в четвертой главе, поскольку хронологически первым оно было успешно использовано автором для задачи о плоской деформации. Далее доказана теорема.

Теорема 1. *Для произвольного приближенного решения $(\tilde{u}, \tilde{\theta}) \in U \times \Theta$ задачи об изгибе пластины Рейсснера–Миндлина справедлива следующая апостериорная оценка:*

$$\begin{aligned} \|e_{\tilde{\theta}}\|^2 + \lambda^{-1}t^2 \|e_{\tilde{\gamma}}\|_{\Omega}^2 &\leq \hat{a}^2 + \lambda^{-1}t^2 \hat{b}^2, \quad \text{где } \hat{a} := \|C^{-1} \text{sym}(\tilde{\varkappa}) - \varepsilon(\tilde{\theta})\| + \mathbf{c}_K \|\text{skew}(\tilde{\varkappa})\|_{\Omega} + \\ &+ \mathbf{c}_{IV} \sqrt{|\Omega| \|\tilde{y} + [\text{div} \tilde{\varkappa}^1 \quad \text{div} \tilde{\varkappa}^2]\|_{\Omega}^2 + |\Gamma_S| \|[\tilde{\varkappa}^1 \cdot n \quad \tilde{\varkappa}^2 \cdot n]\|_{\Gamma_S}^2} + \\ &+ \mathbf{c}_{II} \mathbf{c}_{III} \sqrt{|\Omega| \|g + \text{div} \tilde{y}\|_{\Omega}^2 + |\Gamma_S| \|\tilde{y} \cdot n\|_{\Gamma_S}^2}, \\ \hat{b} &:= \|\tilde{y} - \tilde{\gamma}\|_{\Omega} + \mathbf{c}_{III} \sqrt{|\Omega| \|g + \text{div} \tilde{y}\|_{\Omega}^2 + |\Gamma_S| \|\tilde{y} \cdot n\|_{\Gamma_S}^2}, \end{aligned}$$

где $|\cdot|$ — обозначение для мер соответствующих множеств, $\mathbf{c}_{II}, \mathbf{c}_{III}, \mathbf{c}_{IV}, \mathbf{c}_K$ — константы, не зависящие от способа дискретизации и выбранных аппроксимаций, $\text{sym}(\tilde{\varkappa}), \text{skew}(\tilde{\varkappa})$ — симметричная и антисимметричная части тензора.

Такая апостериорная оценка точна, поскольку для $\tilde{y} = \gamma$ и $\tilde{\varkappa} = C\varepsilon(\theta)$ правая часть неравенства совпадает с левой. Она является гарантированной — при практическом применении неравенство не может нарушаться. Отличия от результатов, полученных ранее в главе, заключаются в учете различных граничных условий, ослаблении ограничений на класс допустимых свободных элементов и удобном с практической точки зрения единообразии типов аппроксимаций, которые могут быть использованы для построения этих элементов. Можно рассматривать полученный результат не как одну оценку, а как целый класс функциональных апостериорных оценок, поскольку он допускает различные модификации в зависимости

от граничных условий, подходит для разных типов условий и их комбинаций, а также позволяет привлекать при реализации любые МКЭ, обеспечивающие конформность аппроксимации в гильбертовом пространстве $\mathbb{H}(\Omega, \text{div})$. Например, если край пластины не свободен, а находится на опоре, то вместо естественного условия $\partial u / \partial n = \theta \cdot n$ на Γ_S на этой части границы возникает условие $u = 0$, которое приводит к обращению в нуль интеграла $\int_{\Gamma_S} \tilde{y} \cdot n e_{\tilde{u}} d\Gamma$ и исчезновению соответствующего слагаемого из мажоранты.

Седьмой параграф посвящен надежному контролю точности для задачи об изгибе прямолинейной балки Тимошенко. Классическая постановка задачи выглядит следующим образом: найти пару элементов (u, θ) , удовлетворяющую на интервале $I := (0, l)$ системе уравнений

$$\begin{cases} (C_S(u' - \theta))' + f = 0, \\ (C_B\theta')' + C_S(u' - \theta) = 0, \end{cases}$$

где $'$ означает дифференцирование по единственной пространственной координате x , l — длина балки, $u = u(x)$ — прогиб балки, $\theta = \theta(x)$ — поворот поперечного сечения, $f = f(x)$ — распределенная поперечная нагрузка, $C_B = C_B(x)$ и $C_S = C_S(x)$ — изгибная и сдвиговая жесткость, соответственно. Для упрощения выкладок предполагается, что материал балки изотропен и поперечное сечение не меняется. Следовательно, C_B и C_S постоянны и систему можно переписать в виде $\gamma' + g = 0$, $\theta'' + \gamma = 0$, где $g = C_B^{-1}f$, $\gamma = d^{-2}(u' - \theta)$, $d^2 = C_B/C_S$. Предполагается, что балка жестко заделана на концах: $u(0) = u(l) = \theta(0) = \theta(l) = 0$. Тогда слабая (обобщенная) формулировка задачи следующая: для заданной функции $g \in \mathbb{L}_2(I)$ найти тройку функций $(u, \theta, \gamma) \in U_0 \times \Theta_0 \times Q$ таких, что

$$\begin{cases} \int_I \theta' \varphi' dx - \int_I \gamma \varphi dx = 0, & \forall \varphi \in \Theta_0 := \mathring{\mathbb{W}}_2^1(I), \\ \int_I \gamma w' dx = \int_I g w dx, & \forall w \in U_0 := \mathring{\mathbb{W}}_2^1(I), \\ \int_I (d^2 \gamma - (u' - \theta)) \tau dx = 0, & \forall \tau \in Q := \mathbb{L}_2(I). \end{cases} \quad (4)$$

Рассмотрим произвольную пару элементов $(\tilde{u}, \tilde{\theta})$, которая обеспечивает конформную аппроксимацию (u, θ) в $U_0 \times \Theta_0$. Тогда поле $\tilde{\gamma} := d^{-2}(\tilde{u}' - \tilde{\theta})$ аппроксимирует элемент γ в Q . Вводя соответствующие отклонения от точных значений $e_{\tilde{u}} := u - \tilde{u}$, $e_{\tilde{\theta}} := \theta - \tilde{\theta}$, $e_{\tilde{\gamma}} := \gamma - \tilde{\gamma}$, рассматривается норма ошибки $\epsilon := \left(\|e_{\tilde{\theta}}'\|_I^2 + d^2 \|e_{\tilde{\gamma}}\|_I^2 \right)^{1/2}$. Дальнейшие построения основаны на прямой модификации слабой постановки задачи (4). Для того, чтобы получить функциональную оценку погрешности, вводится пара дополнительных переменных, которые являются произвольными элементами \tilde{y} и \tilde{z} пространства Соболева $\mathbb{W}_2^1(I)$. Доказана теорема.

Теорема 2. *Точность любого конформного приближенного решения задачи об изгибе балки Тимошенко в случае жесткой заделки на концах может быть оценена при помощи следу-*

ющего неравенства: $\epsilon^2 \leq \mathcal{M}^2 := \mathcal{M}_1^2 + \mathcal{M}_2^2$, где

$$\mathcal{M}_1(\tilde{y}, \tilde{\chi}) := \|\tilde{\chi} - \tilde{\theta}'\|_I + \mathbf{c}_I \|\tilde{\chi}' + \tilde{y}\|_I + \mathbf{c}_I^2 \|g + \tilde{y}'\|_I, \quad \mathcal{M}_2(\tilde{y}) := d(\|\tilde{y} - \tilde{\gamma}\|_I + \mathbf{c}_I \|g + \tilde{y}'\|_I).$$

Эта оценка является надежной, поскольку всегда обеспечивает верхнюю границу погрешности, и точной, поскольку для $\tilde{y} = \gamma$ и $\tilde{\chi} = \theta'$ достигается равенство $\mathcal{M} = \epsilon$. Следовательно для любого типа конформных приближенных решений оценка может быть получена с любой наперед заданной точностью — это только вопрос вычислительных затрат.

В *восьмом параграфе* изложены численные результаты для балок Тимошенко, которые опубликованы в [4] и [15]. Они основаны на привлечении пакета ANSYS. Показано, что соответствующий функционал обеспечивает надежные оценки погрешности даже без полной информации о внутренних вычислительных процедурах, использованных в пакете для получения приближенного решения. В этом случае данное достоинство функционального подхода становится не просто важным, а решающим. Приведем один из примеров.

Пример 1. Балка под действием нагружения переменного направления

Рассматривается балка квадратного сечения сравнительно малого размера — длина равна 1.0 м при стороне поперечного сечения, равной 0.02 м. Первая четверть балки нагружена в положительном направлении — ей соответствует $g = 19.2 \text{ м}^{-3}$. Более длинная часть нагружена в отрицательном направлении, но сама нагрузка в пять раз меньше ($g = -3.84 \text{ м}^{-3}$). Соответствующие численные результаты представлены в Таблице 1, где N_{el} обозначает число элементов сетки. Они показывают, что мажоранта \mathcal{M} обеспечивает точный контроль глобальной величины погрешности в энергетической норме.

Таблица 1: Эффективность и надежность оценки погрешности для балки Тимошенко

N_{el}	ϵ	\mathcal{M}	I_{eff}
100	2.69×10^{-2}	2.98×10^{-2}	1.1
200	1.35×10^{-2}	1.48×10^{-2}	1.1
400	0.67×10^{-2}	0.74×10^{-2}	1.1
800	0.33×10^{-2}	0.37×10^{-2}	1.1

В *девятом параграфе* получены оценки для балки Бернулли–Эйлера. В *десятом параграфе* для полноты изложения кратко описаны известные результаты, касающиеся бигармонической задачи, также имеющей отношение к теории тонких пластин.

Одиннадцатый параграф содержит основные выводы главы: 1) все представленные оценки являются гарантированными и точными; 2) построенный класс оценок для пластины

Рейсснера–Миндлина подходит для нескольких видов граничных условий и отличается единообразием аппроксимаций, которые могут быть использованы для построения свободных элементов; 3) вопрос эффективной реализации функционального подхода и ее проверки посредством вычислительного эксперимента для пластин остается открытым; 4) основные численные результаты посвящены анализу точности решений для модели Тимошенко, полученных в пакете ANSYS; 5) технология оказывается пригодной для независимой проверки приближенных решений, полученных коммерческими программными продуктами для инженерных расчетов, демонстрируя не только надежность, но и высокую эффективность.

В **четвертой главе** рассматриваются задачи классической теории упругости. Показано, что для этого класса задач могут возникать существенные трудности с применением стандартных аппроксимаций МКЭ при вычислении оценок погрешности. Степень переоценки истинной величины ошибки даже при равномерном измельчении сетки растет до значений, которые делают бессмысленным применение подхода на практике. Преодолеть недостаток удается за счет привлечения появившегося относительно недавно варианта смешанных аппроксимаций МКЭ. В итоге создана новая методика реализации вычислений известных апостериорных оценок для плоских задач классической линейной теории упругости со слабым учетом условия симметрии тензора напряжений, основанная на использовании аппроксимации Арнольда–Бюффи–Фалка (D.N. Arnold, D. Boffi, R.S. Falk, *SIAM J. Numer. Anal.*, 2005) минимального порядка, которая изначально разрабатывалась для смешанных МКЭ как улучшенный аналог соответствующей аппроксимации Равьяра–Тома (P.A. Raviart, J.M. Thomas, *Lecture Notes in Mathematics 606*, 1977). Сама мажоранта, позволяющая контролировать точность вычислений на основе несимметричного свободного элемента, была предложена в монографии С.И. Репина (*de Gruyter*, 2008). Представление функционала несколько модифицировано для явного согласования размерностей физических величин и более удобной реализации при помощи предлагаемой методики. Также впервые представлен вычислительный эксперимент, направленный на сравнение непрерывных и смешанных аппроксимаций, по результатам которого сделан вывод о преимуществе второго типа, особенно проявляющемся в процессе измельчения сетки [6] (см. также [16]). Отметим, что стандартные непрерывные кусочно-линейные функции применялись при вычислении функциональных апостериорных оценок в процессе измельчения сетки А.В. Музалевским и С.И. Репиным (*Russ. J. Numer. Anal. Math. Model.*, 2003), тогда как конечные элементы Равьяра–Тома и Арнольда–Бюффи–Фалка для этих целей использованы впервые. На примере решений, которые предоставляет пакет ANSYS, проведен сравнительный анализ функциональных апостериорных оценок и стандартной методики пакета, основанной на сглаживании поля напряжений. Реализация подхода на

основе аппроксимации Арнольда–Боффи–Фалка превосходит ее возможности для случая задач с несколькими материалами в модели [7]. Также кратко рассмотрен вопрос о сравнении адаптивных алгоритмов, основанных на разных методиках, изученный совместно с М.А. Чуриловой [8], где автору принадлежит постановка вычислительного эксперимента. Отправной точкой для той работы, которая в итоге легла в основу данной и следующей глав диссертации, а также оказала существенное влияние на теоретическую часть предыдущей, стала публикация автора [9], относящаяся к пространственным задачам линейной теории упругости.

Глава содержит одиннадцать разделов. В *первом параграфе* приведена математическая постановка задачи — классическая и обобщенная. Известная задача механики деформируемого твердого тела заключается в определении в области $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ ($d=2$ или 3) поля перемещений u , поля напряжений σ и поля деформаций ε , которые связаны системой соотношений

$$\begin{cases} \operatorname{Div} \sigma + f = 0 & \text{в } \Omega, \\ \sigma = L\varepsilon & \text{в } \Omega, \\ \varepsilon(u) = (\nabla u + (\nabla u)^T)/2 & \text{в } \Omega, \end{cases} \quad (5)$$

где f — плотность объемных сил, а L — тензор упругих констант. Будем предполагать, что среда однородна и изотропна. К системе уравнений (5), рассматриваемой в занимаемой упругим телом области, добавляются граничные условия в терминах перемещений и напряжений $u = u_D$ на Γ_D и $\sigma n = g$ на Γ_S , где Γ_D и Γ_S — две непересекающиеся части границы, объединение которых представляет собой всю границу области Ω , причем мера Γ_D предполагается отличной от нуля; u_D , g и n обозначают, соответственно, заданные на первой части границы перемещения, заданные на второй части границы поверхностные силы и внешнюю нормаль к поверхности тела. Основой для вывода апостериорной оценки для данной краевой задачи, как и для применения МКЭ, является ее обобщенная постановка. При этом рассматривается решение прямой задачи, в которой основной неизвестной характеристикой является поле перемещений, а деформации и напряжения определяются по нему. Эта задача выглядит следующим образом: найти элемент $u \in U := \{w \in \mathbb{W}_2^1(\Omega, \mathbb{R}^d) \mid w = u_D \text{ на } \Gamma_D\}$ такой, что

$$\int_{\Omega} L\varepsilon(u) : \varepsilon(w) d\Omega = \int_{\Omega} f \cdot w d\Omega + \int_{\Gamma_S} g \cdot w d\Gamma, \quad \forall w \in U_0 := \{w \in \mathbb{W}_2^1(\Omega, \mathbb{R}^d) \mid w = 0 \text{ на } \Gamma_D\}, \quad (6)$$

где $\mathbb{W}_2^1(\Omega, \mathbb{R}^d) := \underbrace{\mathbb{W}_2^1(\Omega) \times \dots \times \mathbb{W}_2^1(\Omega)}_d$. Предполагается, что $f \in L_2(\Omega, \mathbb{R}^d)$, $g \in L_2(\Gamma_S, \mathbb{R}^d)$, $u_D \in \mathbb{W}_2^1(\Omega, \mathbb{R}^d)$, $L_{ijks} = L_{ksij} = L_{jiks}$, а также $L_{ijks} \in L_{\infty}(\Omega)$ при $i, j, k, s = 1, \dots, d$ и справедлива оценка $\alpha_1 \int_{\Omega} |\tau|^2 d\Omega \leq \int_{\Omega} L\tau : \tau d\Omega \leq \alpha_2 \int_{\Omega} |\tau|^2 d\Omega$, $\forall \tau \in L_2(\Omega, \mathbb{M}_{sym}^{d \times d})$ при $\alpha_1 > 0$ и $\alpha_2 > 0$,

где $\mathbb{M}_{sym}^{d \times d}$ — пространство симметричных тензоров второго ранга размерности d . Исходя из допущений, естественным пространством для поиска поля напряжений является

$$\mathbb{H}_{sym}(\Omega, \Gamma_S, \text{Div}) := \left\{ \tau \in \mathbb{L}_2(\Omega, \mathbb{M}_{sym}^{d \times d}) \mid \text{Div } \tau \in \mathbb{L}_2(\Omega, \mathbb{R}^d), \tau n \in \mathbb{L}_2(\Gamma_S, \mathbb{R}^d) \right\}.$$

Отметим, что условие симметрии тензора напряжений учитывается в сильном смысле только в том случае, если речь идет о стандартных аппроксимациях МКЭ, иначе рассматривается пространство $\mathbb{H}(\Omega, \Gamma_S, \text{Div})$, для которого вместо $\mathbb{M}_{sym}^{d \times d}$ используется $\mathbb{M}^{d \times d}$ — пространство произвольных тензоров второго ранга размерности d .

Соответствующий задаче функционал энергии выглядит следующим образом:

$$\mathcal{J}(u) = \frac{1}{2} \int_{\Omega} \mathbb{L}\varepsilon(u) : \varepsilon(u) d\Omega - \int_{\Omega} f \cdot u d\Omega - \int_{\Gamma_S} g \cdot u d\Gamma.$$

Если рассмотреть произвольное приближенное решение $\tilde{u} \in U$ задачи (6), то несложно показать, что энергетическая норма погрешности этого решения выражается через разность значений функционала на приближенном и точном решениях, а именно

$$\|\tilde{u} - u\|^2 = 2(\mathcal{J}(\tilde{u}) - \mathcal{J}(u)), \quad \|\tilde{u} - u\| := \left(\int_{\Omega} \mathbb{L}\varepsilon(\tilde{u} - u) : \varepsilon(\tilde{u} - u) d\Omega \right)^{1/2}.$$

Это соотношение позволяет расширить круг рассматриваемых в вычислительном эксперименте задач и выйти за рамки тех задач, в которых известно точное аналитическое решение.

Во *втором параграфе* приведен обзор применения методов апостериорного контроля точности приближенных решений в теории упругости, который необходим, поскольку для рассматриваемого класса задач существует широкий спектр публикаций по тематике исследования, чего нельзя сказать о предыдущей и заключительной главах диссертации.

В *третьем параграфе* показано, как можно получить функциональную оценку погрешности с симметричным тензором напряжений. Вводя обозначение для погрешности $e := u - \tilde{u}$, имеем для любого $w \in U_0$

$$\int_{\Omega} \mathbb{L}\varepsilon(e) : \varepsilon(w) d\Omega = \int_{\Omega} f \cdot w d\Omega + \int_{\Gamma_S} g \cdot w d\Gamma - \int_{\Omega} \mathbb{L}\varepsilon(\tilde{u}) : \varepsilon(w) d\Omega. \quad (7)$$

Рассмотрим произвольный тензор $\tilde{\sigma} \in \mathbb{H}_{sym}(\Omega, \Gamma_S, \text{Div})$. Имеет место представление

$$\|e\|^2 = \int_{\Omega} \mathbb{L}\varepsilon(e) : \varepsilon(e) d\Omega = \int_{\Omega} (\text{Div } \tilde{\sigma} + f) \cdot e d\Omega + \int_{\Omega} (\tilde{\sigma} - \mathbb{L}\varepsilon(\tilde{u})) : \varepsilon(e) d\Omega + \int_{\Gamma_S} (g - \tilde{\sigma}n) \cdot e d\Gamma.$$

Если ввести обозначения для соответствующих невязок $R(\tilde{\sigma}) := \text{Div } \tilde{\sigma} + f$ в Ω , $r(\tilde{\sigma}) := \tilde{\sigma}n - g$ на Γ_S , то оценка погрешности может быть преобразована к виду $\|e\| \leq \mathcal{D}(\tilde{u}, \tilde{\sigma}) + \mathcal{R}(\tilde{\sigma})$,

$\mathcal{D}(\tilde{u}, \tilde{\sigma}) := \left(\int_{\Omega} L^{-1}(\tilde{\sigma} - L\varepsilon(\tilde{u})) : (\tilde{\sigma} - L\varepsilon(\tilde{u})) d\Omega \right)^{1/2}$, $\mathcal{R}(\tilde{\sigma}) := \mathbf{c}_V (|\Omega| \|R(\tilde{\sigma})\|_{\Omega}^2 + |\Gamma_S| \|r(\tilde{\sigma})\|_{\Gamma_S}^2)^{1/2}$,
 где $\|\cdot\|_{\Omega}$ и $\|\cdot\|_{\Gamma_S}$ — стандартные нормы в соответствующих пространствах Лебега, а \mathbf{c}_V — константа, не зависящая от разбиения области конечными элементами, которая удовлетворяет неравенству $\|w\|_{\Omega}^2/|\Omega| + \|w\|_{\Gamma_S}^2/|\Gamma_S| \leq \mathbf{c}_V^2 \|w\|^2$ для всех элементов $w \in U_0$. Более удобным является представление с квадратами норм

$$\|e\|^2 \leq \mathcal{M}^2(\tilde{u}, \beta, \tilde{\sigma}) := (1 + \beta)\mathcal{D}^2(\tilde{u}, \tilde{\sigma}) + \left(1 + \frac{1}{\beta}\right) \mathcal{R}^2(\tilde{\sigma}) \quad \forall \beta > 0. \quad (8)$$

Четвертый параграф посвящен реализации вычисления мажоранты на основе стандартной билинейной аппроксимации МКЭ. Описанный ранее функционал был впервые применен А.В. Музалевским и С.И. Репиным для плоских задач в случае триангуляций расчетной области. Ими представлены примеры вычисления оценки типа (8) для задачи о плоской деформации, а эффективность методики реализации на основе стандартной кусочно-линейной аппроксимации исследована в процессе работы основанного на ней адаптивного алгоритма. Полученные численные результаты указывают на явные преимущества предлагаемого авторами адаптивного подхода по сравнению с равномерным разбиением сеток, но индексы эффективности самих апостериорных оценок заметно возрастают с измельчением сетки. В исследовании автора эффект существенного роста индекса эффективности наблюдается также на сетках с четырехугольными элементами. Такой тип элемента связан с функциями формы из пространства $\mathcal{Q}_1(\hat{\mathcal{K}})$ — пространства полиномов не более чем первой степени по каждой координате над эталонным элементом $\hat{\mathcal{K}} := (-1, 1) \times (-1, 1)$, которое дает классическую кусочно-билинейную непрерывную аппроксимацию для каждой из компонент тензора напряжений — σ_{11} , σ_{22} и σ_{12} . Приведем пример.

Пример 2. *Задача о плоской деформации в полигональной области с отверстием*

Рассматривается задача в области, изображенной на Рисунке 1, где отображена форма области и ее начальное разбиение. Последующие сетки получены из предыдущих путем равномерного измельчения элементов по каждой стороне в два раза. В постановке одновременно присутствуют условия в перемещениях (левая сторона закреплена), а также условия в напряжениях (на верхнюю кромку приложено давление). Остальные части границы свободны. Для анализа эффективности методики вычисляется решение на мелкой сетке, содержащей 263552 узла и 262144 элемента, и оценка ошибки снизу, полученная при помощи этого решения. Данные для рассматриваемой задачи следующие: модуль Юнга $E = 207 \times 10^9$ Па; коэффициент Пуассона $\nu = 0.3$; плотность $\rho = 7830$ кг/м³; объемная сила f отсутствует; давление, определяющее функцию g , равно 10^6 Па.

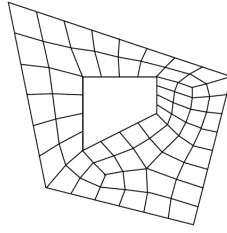


Рис. 1: Форма области и начальное разбиение для примера 2.

Таблица 2: Данные для непрерывных аппроксимаций в примере 2

N_{el}	$\ e\ $	$e\%$	\mathcal{M}	I_{eff}	β
64	9.00	40.1%	53.3	5.3	1.8
256	6.16	27.4%	49.5	7.3	1.5
1024	4.06	18.1%	43.7	9.7	1.4

Число элементов сеток N_{el} , абсолютная и относительная погрешность связанных с ними приближенных решений, измеряемая в энергетической норме, верхняя оценка нормы ошибки, индекс эффективности и получившееся значение параметра β указаны в соответствующих столбцах Таблицы 2. Данные демонстрируют значительный рост индекса эффективности, что является существенным недостатком, поскольку фактически делает бесполезным применение апостериорной оценки в качестве критерия остановки вычислений, оставляя ее лишь как средство локальной индикации элементов с большой погрешностью.

Пятый параграф посвящен функциональной мажоранте погрешности с учетом условия симметрии тензора в форме дополнительного штрафного слагаемого. Конечно, существуют варианты смешанных методов, которые учитывают симметрию в сильной форме, но они содержат большое число степеней свободы и сильно усложняются при переходе к трехмерным задачам, что неоправданно увеличило бы размерность решаемых при оценке погрешности систем уравнений. Более выгодным видится учет этого условия в слабой форме, которая позволяет использовать простейшие смешанные аппроксимации. По аналогии с изложением в монографии С.И. Рещина (2008), можно получить апостериорную оценку в том виде, который подходит для применения смешанных аппроксимаций, обычно используемых для решения уравнения Пуассона. Для практической реализации удобной является не тензорная форма записи, которая использовалась ранее, а развернутая запись по компонентам

$$\tilde{\sigma} = \begin{bmatrix} \tilde{\sigma}_{11} & \tilde{\sigma}_{12} \\ \tilde{\sigma}_{21} & \tilde{\sigma}_{22} \end{bmatrix}, \quad \tilde{\sigma}n = \begin{bmatrix} \tilde{\sigma}_{11}n_1 + \tilde{\sigma}_{21}n_2 \\ \tilde{\sigma}_{12}n_1 + \tilde{\sigma}_{22}n_2 \end{bmatrix}, \quad \text{Div } \tilde{\sigma} = \begin{bmatrix} \tilde{\sigma}_{11,1} + \tilde{\sigma}_{21,2} \\ \tilde{\sigma}_{12,1} + \tilde{\sigma}_{22,2} \end{bmatrix},$$

где $\tilde{\sigma}_{ij,k} := \partial \tilde{\sigma}_{ij} / \partial x_k$, $i, j, k = 1, 2$. Здесь и далее, хотя обозначение сохранено, уже не пред-

полагается равенство $\tilde{\sigma}_{12} = \tilde{\sigma}_{21}$. Такое представление подсказывает разделение тензора напряжений на две составляющие, для каждой из которых можно использовать смешанные аппроксимации $\tilde{\sigma} = \begin{bmatrix} S^1 & S^2 \end{bmatrix}$, $S^1, S^2 \in \mathbb{H}(\Omega, \text{div})$. Это позволяет предположить, что подход, успешно примененный во второй главе, может оказаться эффективным для рассматриваемого класса задач. Чтобы преобразовать (6) к виду (7), тензор напряжений $\tilde{\sigma}$ предлагается разбить на симметричную $\text{sym}(\tilde{\sigma})$ и антисимметричную $\text{skew}(\tilde{\sigma})$ части

$$\text{sym}(\tilde{\sigma}) := (\tilde{\sigma} + \tilde{\sigma}^T)/2, \quad \text{skew}(\tilde{\sigma}) := (\tilde{\sigma} - \tilde{\sigma}^T)/2 = \begin{bmatrix} 0 & (S_1^2 - S_2^1)/2 \\ (S_2^1 - S_1^2)/2 & 0 \end{bmatrix}.$$

Для простоты рассмотрен случай, когда граничное условие $u_D = 0$ задано на всей границе, то есть $\Gamma = \Gamma_D$. Тогда, повторяя преобразования, аналогичные третьему разделу главы, приходим к соотношению, в котором появляется дополнительное слагаемое, представляющее собой штраф за невыполнение условия симметрии $\|e\| \leq \mathcal{D}(\tilde{u}, \text{sym}(\tilde{\sigma})) + \mathbf{c}_{VI} \|R(\tilde{\sigma})\|_{\Omega} + \mathbf{c}_K \|\text{skew}(\tilde{\sigma})\|_{\Omega}$, где $\mathbf{c}_{VI} = \mathbf{c}_V \sqrt{|\Omega|}$, а \mathbf{c}_K — константа, связанная с неравенством Корна и константой α_1 . Для преобразования к виду, аналогичному (8), необходимо использовать два свободных параметра

$$\|e\|^2 \leq (1 + \beta_1) \mathcal{D}^2(\tilde{u}, \text{sym}(\tilde{\sigma})) + \left(1 + \frac{1}{\beta_1}\right) (1 + \beta_2) \mathbf{c}_{VI}^2 \|R(\tilde{\sigma})\|_{\Omega}^2 + \left(1 + \frac{1}{\beta_1}\right) \left(1 + \frac{1}{\beta_2}\right) \mathbf{c}_K^2 \|\text{skew}(\tilde{\sigma})\|_{\Omega}^2, \quad (9)$$

где β_1 и β_2 — произвольные положительные параметры. При практической реализации на первой итерации удобно положить параметры равными единице, а после определения поля напряжений пересчитать их по формулам, дающим оптимальные значения:

$$\beta_2 = (\mathbf{c}_K \|\text{skew}(\tilde{\sigma})\|_{\Omega}) / (\mathbf{c}_{VI} \|R(\tilde{\sigma})\|_{\Omega}), \quad \beta_1 = (1 + 1/\beta_2) \mathbf{c}_K \|\text{skew}(\tilde{\sigma})\|_{\Omega} / \mathcal{D}(\tilde{u}, \text{sym}(\tilde{\sigma})).$$

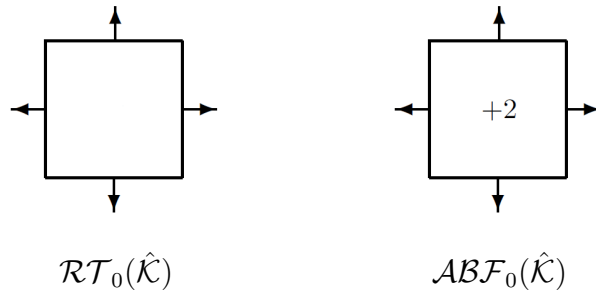


Рис. 2: Степени свободы для рассматриваемых элементов.

В шестом параграфе описаны важные детали реализации аппроксимаций Равьяра–Тома и Арнольда–Бюффи–Фалка минимального порядка для четырехугольников. Степени сво-

боды для простейшего элемента Равьяра–Тома являются нормальные составляющие вектор-функции, далее обозначенной $\hat{\psi}$, в центрах ребер, то есть $\hat{\psi} \cdot \hat{n}_i, i = 1, \dots, 4$, где \hat{n}_i — внешняя нормаль к i -ой стороне. Соответствующее пространство $\mathcal{RT}_0(\hat{\mathcal{K}}) := \mathcal{P}_{1,0}(\hat{\mathcal{K}}) \times \mathcal{P}_{0,1}(\hat{\mathcal{K}})$, где $\mathcal{P}_{i,j}(\hat{\mathcal{K}})$ — это пространство полиномов над эталонным элементом $\hat{\mathcal{K}}$ степени не выше i по \hat{x}_1 и j — по \hat{x}_2 , а за \hat{x}_1 и \hat{x}_2 обозначены координаты в локальной системе координат на элементе $\hat{\mathcal{K}}$. Имеем четыре функции формы:

$$\begin{aligned} \hat{\varphi}_1(\hat{x}) &= \begin{bmatrix} 0 \\ (\hat{x}_2 - 1)/2 \end{bmatrix}, & \hat{\varphi}_2(\hat{x}) &= \begin{bmatrix} (\hat{x}_1 + 1)/2 \\ 0 \end{bmatrix}, \\ \hat{\varphi}_3(\hat{x}) &= \begin{bmatrix} 0 \\ (\hat{x}_2 + 1)/2 \end{bmatrix}, & \hat{\varphi}_4(\hat{x}) &= \begin{bmatrix} (\hat{x}_1 - 1)/2 \\ 0 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

В указанной ранее работе 2005 года на примере решения уравнения Пуассона смешанным методом и методом наименьших квадратов показано, что при применении для четырехугольных элементов пары пространств $\mathcal{Q}_1(\hat{\mathcal{K}}) \times \mathcal{RT}_0(\hat{\mathcal{K}})$, где первое пространство соответствует билинейной аппроксимации скалярной переменной, а второе — аппроксимации Равьяра–Тома наименьшего порядка для векторной переменной (градиента), могут возникать проблемы со сходимостью на разбиениях, отличных от равномерного разбиения области на квадраты. Эти трудности, однако, удается преодолеть при использовании другой пары пространств $\mathcal{Q}_1(\hat{\mathcal{K}}) \times \mathcal{ABF}_0(\hat{\mathcal{K}})$, где $\mathcal{ABF}_0(\hat{\mathcal{K}}) := \mathcal{P}_{2,0}(\hat{\mathcal{K}}) \times \mathcal{P}_{0,2}(\hat{\mathcal{K}})$ — предложенное в статье расширенное пространство, содержащее помимо исходных четырех степеней свободы на ребрах еще две степени свободы внутри элемента (Рисунок 2). Дополнительной парой параметров для элемента Арнольда–Боффи–Фалка являются следующие интегралы: $\int_{\hat{\mathcal{K}}} \operatorname{div} \hat{\psi} \hat{x}_1 d\hat{x}$, $\int_{\hat{\mathcal{K}}} \operatorname{div} \hat{\psi} \hat{x}_2 d\hat{x}$.

Соответствующие функции формы выглядят следующим образом: $\hat{\phi}_1(\hat{x}) = \begin{bmatrix} 3(\hat{x}_1^2 - 1)/8 \\ 0 \end{bmatrix}$,

$$\hat{\phi}_2(\hat{x}) = \begin{bmatrix} 0 \\ 3(\hat{x}_2^2 - 1)/8 \end{bmatrix}.$$

Дальнейшая процедура формирования системы линейных алгебраических уравнений, соответствующей функционалу в правой части оценки (9), отличается от стандартной тем, что при обходе по элементам вклады от интегралов привязываются к степеням свободы, относящимся к ребрам элемента или самому элементу, а не его вершинам.

В *седьмом параграфе* представлены численные результаты работы одного из двух основных комплексов программ, разработанных лично автором, который предназначается для оценки точности приближенных решений в плоских задачах классической теории упругости. Чтобы не рассматривать проблему оценки константы в неравенстве Корна, не относящуюся напрямую к теме исследования, примеры параграфа ограничены случаем, когда присутству-

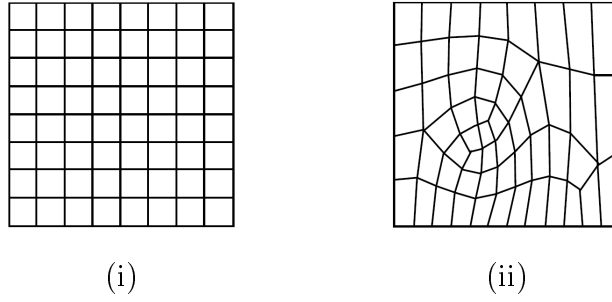


Рис. 3: Варианты начальных разбиений области для примера 3.

Таблица 3: Данные для различных аппроксимаций в примере 3 для сетки типа (i)

N_{el}	$\ e\ $	$e\%$	$I_{eff}(1)$	$I_{eff}(2)$	$I_{eff}(3)$
64	0.60×10^{-3}	16.9%	1.5	1.7	1.6 (1.2)
256	0.31×10^{-3}	8.6%	1.7	1.6	1.6 (1.2)
1024	0.15×10^{-3}	4.3%	1.8	1.6	1.6 (1.2)

ют только граничные условия в перемещениях. Рассмотрим один из примеров главы.

Пример 3. Квадратная область с разными начальными разбиениями

Рассматривается задача о плоской деформации в квадратной области. Объемная сила f задается через ускорение $[-1.0 \ 0.0] \text{ м/с}^2$. Сравниваются индексы эффективности для трех методик, связанных с (1) тройкой непрерывных аппроксимаций, (2) парой аппроксимаций Равьяра–Тома и (3) парой аппроксимаций Арнольда–Боффи–Фалка. Решения вычисляются на сетках, состоящих из квадратов и из четырехугольников общего вида (см. Рисунок 3).

Согласно теории, можно ожидать, что аппроксимации Равьяра–Тома будут давать приемлемый результат только в первом случае и существенно проигрывать во втором. Это предположение подтверждают данные, которые представлены в Таблице 3 и Таблице 4. Эффективность третьего варианта остается постоянной, а для второго наблюдается ухудшение качества оценок при переходе к неструктурированным разбиениям. Таким образом, разработан эффективный способ реализации функциональных апостериорных оценок для плоских задач

Таблица 4: Данные для различных аппроксимаций в примере 3 для сетки типа (ii)

N_{el}	$\ e\ $	$e\%$	$I_{eff}(1)$	$I_{eff}(2)$	$I_{eff}(3)$
55	0.89×10^{-3}	24.9%	1.5	2.0	1.7 (1.2)
220	0.45×10^{-3}	12.7%	1.6	2.1	1.7 (1.2)
880	0.23×10^{-3}	6.5%	1.8	2.2	1.7 (1.2)

линейной теории упругости. Методика применена к приближенным решениям, вычисленным в пакете ANSYS. Вычислительный эксперимент показал, что лучший результат достигается на аппроксимациях Арнольда–Боффи–Фалка. Представленные результаты опубликованы автором в [6] и [16].

В *восьмом параграфе* рассмотрена серия из трех задач из работы автора [7], объединенная в один пример с несколькими материалами в модели. Упор сделан не только на анализ эффективности функционального подхода, но и на сравнение с результатами работы стандартной методики пакета ANSYS. Геометрия области, свойства материалов и условия нагружения взяты из работы V. Manet (*Composites Science and Technology*, 1998), посвященной расчетам трехслойных структур в пакете. Из представленных результатов можно сделать вывод, что стандартная процедура дает в случае однородного материала приемлемый результат. В случае, если материалы разные, индексы эффективности для нее демонстрируют существенный рост при измельчении сетки. Это делает методику пакета практически бесполезной. С другой стороны, индексы эффективности для функционального подхода не демонстрируют существенного роста ни в одном из вариантов серии.

В *девятом параграфе* кратко представлены результаты, включенные в кандидатскую диссертацию М.А. Чуриловой (*Санкт-Петербург*, 2014), выполненную под научным руководством автора. В ней наряду с совместной работой [8] можно найти еще несколько примеров сравнения адаптивных алгоритмов с функциональными мажорантами, вычисленными на основе тройки непрерывных аппроксимаций или пары аппроксимаций Равьяра–Тома нулевого порядка на триангуляциях. В данном случае сравнение производится со встроенным индикатором пакета MATLAB, вычисленным на основе явного метода невязок. Он дает приемлемый результат с точки зрения сгущения сетки, но не может использоваться в качестве критерия остановки вычислительного процесса, поскольку завышает истинное значение ошибки на несколько порядков. Данные для функциональной мажоранты полностью согласуются с теми выводами, которые были сделаны ранее. Это исследование дополняют другие результаты М.А. Чуриловой, которые обеспечивают теоретическое обоснование эффективности функционального подхода для данного класса задач.

В *десятом параграфе* приведены результаты [9], которые также относятся к задачам линейной теории упругости, но в трехмерном случае. Используются непрерывные трилинейные аппроксимации. Вопрос реализации смешанных аппроксимаций и анализа эффективности гарантированных оценок остается открытым.

Заключительный *одинадцатый параграф* содержит основные выводы. В главе исследованы две мажоранты функционального типа и три методики их реализации для контроля

точности решений задач линейной теории упругости. Вычислительные алгоритмы основаны на конечных элементах, характерных для стандартной обобщенной и двойственной смешанной формулировок задачи. На примере плоской деформации проведен их сравнительный анализ для разных случаев — в вычислительном эксперименте варьируется геометрия области, в том числе присутствуют примеры в областях с входящими углами и отверстиями, а также рассматриваются разные типы краевых условий. Для части задач выполнен сравнительный анализ с аналогичными процедурами пакетов ANSYS и MATLAB. По материалу главы сделаны следующие заключения: 1) из анализа публикаций следует вывод о том, что простые и не трудоемкие с вычислительной точки зрения методы не являются ни надежными, ни эффективными, что подтверждается численными результатами, изложенными в главе; 2) реализация функциональной апостериорной оценки с явным учетом условия симметрии присутствующего в ней тензора на основе стандартных непрерывных аппроксимаций МКЭ может приводить к быстрому росту индекса эффективности — недостаток является существенным, поскольку лишает смысла применение апостериорной оценки в качестве критерия остановки вычислений; 3) ситуация исправляется за счет привлечения смешанных аппроксимаций и функциональной апостериорной оценки с учетом условия симметрии при помощи дополнительного штрафного слагаемого, причем, вычисление функционала реализовано таким образом, чтобы использовать простейшие смешанные аппроксимации, обычно возникающие при решении уравнения Пуассона; 4) вычислительный эксперимент показал, что лучший результат достигается на аппроксимациях Арнольда–Бюффи–Фалка — в этом случае индекс эффективности оценок не демонстрирует существенного роста с увеличением числа элементов разбиения, что является одним из необходимых условий применения методики в инженерной практике. В итоге разработана эффективная процедура реализации вычисления функциональных апостериорных оценок для плоских задач линейной теории упругости, которая применена к приближенным решениям, полученным в пакете ANSYS. Сравнение с результатами работы стандартной процедуры контроля точности, встроенной в пакет, говорит об общем преимуществе функционального подхода и его более широких возможностях. Аналогичное заключение можно сделать относительно пакета MATLAB.

Завершающая **пятая глава** диссертации посвящена плоским задачам моментной теории упругости Коссера и апостериорным оценкам в них. Соответствующие среды обладают расширенным по сравнению с классическими сплошными средами спектром свойств. В настоящее время библиография, относящаяся к данной тематике и смежным проблемам, достаточно обширна. Глава содержит необходимый обзор литературных источников. В последнее десятилетие начали более интенсивно развиваться методы численного решения задач, связанных

с континуумом Коссера. Однако, практически отсутствуют работы, посвященные надежным методам апостериорного контроля точности вычисляемых аппроксимаций. Автору известно лишь несколько таких публикации. В главе на примере плоских задач для континуума Коссера впервые получены апостериорные оценки функционального типа. Предыдущий опыт, изложенный в четвертой главе, обобщен на случай неклассических сплошных сред с микроструктурой. Для плоских краевых задач с граничным условием типа Дирихле, заданным на всей границе области, в соавторстве с С.И. Репиным ([10], оригинал — *Пробл. мат. анализа*, 2011) использован подход, основанный на привлечении методов теории двойственности вариационного исчисления. Результат обобщен автором на задачи, граничные условия в которых могут включать как заданные перемещения и независимый поворот, так и поверхностные силы и момент [11]. Предложен и впервые численно исследован класс функциональных апостериорных оценок, ориентированный на реализацию с использованием аппроксимаций для смешанных МКЭ [12], [17], [18].

В *первом параграфе* обсуждаются плоские задачи с граничным условием на перемещения и поворот. Классическая постановка задачи заключается в нахождении в каждой внутренней точке сплошной среды векторной функции $u := (u_1, u_2)$ — перемещения вдоль осей Ox_1 и Ox_2 , и скалярной функции $\omega := \omega_3$ — поворота вокруг оси Ox_3 , связанных уравнениями

$$(\lambda + 2\mu)(\operatorname{div} u)_{,1} + (\mu + \mu_c)(u_{1,22} - u_{2,12}) + 2\mu_c\omega_{,2} + f_1 = 0, \quad (10)$$

$$(\lambda + 2\mu)(\operatorname{div} u)_{,2} + (\mu + \mu_c)(u_{2,11} - u_{1,21}) - 2\mu_c\omega_{,1} + f_2 = 0, \quad (11)$$

$$4B\Delta\omega - 4\mu_c\omega + 2\mu_c(u_{2,1} - u_{1,2}) + g = 0, \quad (12)$$

$f := (f_1, f_2) \in \mathbb{L}_2(\Omega, \mathbb{R}^2)$ и $g \in \mathbb{L}_2(\Omega)$ — это функции, характеризующие заданные внутри области силовые и моментные внешние воздействия; λ, μ — классические константы Ляме для материала; μ_c, B — постоянные, характеризующие среду Коссера. На Γ заданы перемещения $u = u^\Gamma \in \mathbb{W}_2^{1/2}(\Gamma, \mathbb{R}^2)$ и поворот $\omega = \omega^\Gamma \in \mathbb{W}_2^{1/2}(\Gamma)$. Система приведена в монографии Н.Ф. Морозова, посвященной математическим вопросам теории трещин (1984). Функционал энергии для рассматриваемой задачи, определенный на паре элементов $(u, \omega) \in \mathcal{Y} \times \Theta$, где $\mathcal{Y} := \mathcal{Y}^0 + u^\Gamma$, $\mathcal{Y}^0 := \mathring{\mathbb{W}}_2^1(\Omega, \mathbb{R}^2)$, $\Theta := \Theta^0 + \omega^\Gamma$, $\Theta^0 := \mathring{\mathbb{W}}_2^1(\Omega)$, имеет вид

$$\mathcal{J}(u, \omega) = \int_{\Omega} \frac{1}{2} \mathbb{L}\varepsilon(u) : \varepsilon(u) d\Omega + \int_{\Omega} \left(\frac{\mu_c}{2} (u_{2,1} - u_{1,2} - 2\omega)^2 + 2B|\nabla\omega|^2 \right) d\Omega - \int_{\Omega} (f \cdot u + g\omega) d\Omega,$$

где $\varepsilon(u) = (\nabla u + (\nabla u)^T)/2$, $\mathbb{L}\varepsilon = \lambda \operatorname{tr} \varepsilon \mathbb{I} + 2\mu\varepsilon$. Эта постановка соответствует случаю малых деформаций. Условия стационарности дают определение обобщенного решения задачи, для

которого соотношения (10)–(12) понимаются в слабой форме, а именно

$$\int_{\Omega} (\mathbb{L}\varepsilon(u) : \varepsilon(v^0) + p(v_{2,1}^0 - v_{1,2}^0) - f \cdot v^0) d\Omega = 0, \quad \forall v^0 \in \mathcal{V}^0; \quad (13)$$

$$\int_{\Omega} (4B\nabla\omega \cdot \nabla\theta^0 - 2p\theta^0 - g\theta^0) d\Omega = 0, \quad \forall\theta^0 \in \Theta^0, \quad \text{где } p := \mu_c(u_{2,1} - u_{1,2} - 2\omega). \quad (14)$$

Во *втором параграфе* получено представление энергетической нормы отклонения от точного решения. Пусть элементы $(\tilde{u}_1, \tilde{u}_2)$ и $\tilde{\omega}$ — некоторое приближение к точному решению. Ему соответствует элемент $\tilde{p} := \mu_c(\tilde{u}_{2,1} - \tilde{u}_{1,2} - 2\tilde{\omega})$. Тогда, вводя отклонения компонент приближенного решения от точного $e_{\tilde{u}} := (u_1, u_2) - (\tilde{u}_1, \tilde{u}_2)$, $e_{\tilde{\omega}} := \omega - \tilde{\omega}$ и $e_{\tilde{p}} := p - \tilde{p}$, норма погрешности определяется выражением

$$\|(e_{\tilde{u}}; e_{\tilde{p}}; e_{\tilde{\omega}})\| := \left(\int_{\Omega} \left(\frac{1}{2} \mathbb{L}\varepsilon(e_{\tilde{u}}) : \varepsilon(e_{\tilde{u}}) + \frac{1}{2\mu_c} e_{\tilde{p}}^2 + 2B|\nabla e_{\tilde{\omega}}|^2 \right) d\Omega \right)^{1/2}.$$

Само представление имеет вид $\|(e_{\tilde{u}}; e_{\tilde{p}}; e_{\tilde{\omega}})\|^2 = \mathcal{J}(\tilde{u}, \tilde{\omega}) - \mathcal{J}(u, \omega)$. Из него получается обобщение известной оценки С.Г. Михлина.

В *третьем параграфе* получен аналог оценки Прагера–Синжа. Результат является промежуточным этапом на пути построения функциональной апостериорной оценки, которая вместе с ее вычислительных свойствами обсуждается в *четвертом параграфе*. При этом вводится тройка элементов из разных гильбертовых пространств $(\tilde{\tau}, \tilde{q}, \tilde{s}) \in \tilde{\mathcal{H}}(\Omega)$, где $\tilde{\mathcal{H}}(\Omega) := \mathbb{H}_{sym}(\Omega, \text{Div}) \times \mathbb{W}_2^1(\Omega) \times \mathbb{H}(\Omega, \text{div})$, получают необходимые функционалы, дающие верхнюю оценку погрешности

$$\begin{aligned} \mathcal{D}^2(\tilde{u}, \tilde{\omega}, \tilde{p}; \tilde{\tau}, \tilde{q}, \tilde{s}) &:= \frac{1}{2} \int_{\Omega} (\varepsilon(\tilde{u}) - \mathbb{L}^{-1}\tilde{\tau}) : (\mathbb{L}\varepsilon(\tilde{u}) - \tilde{\tau}) d\Omega + \frac{1}{2\mu_c} \|\tilde{p} - \tilde{q}\|_{\Omega}^2 + \frac{1}{8B} \|4B\nabla\tilde{\omega} - \tilde{s}\|_{\Omega}^2, \\ \mathcal{R}^2(\tilde{\tau}, \tilde{q}, \tilde{s}) &:= \frac{\mathbf{c}_{VII}^2}{4} (\|f_1 + \tilde{\tau}_{11,1} + \tilde{\tau}_{21,2} - \tilde{q}_{,2}\|_{\Omega}^2 + \|f_2 + \tilde{\tau}_{12,1} + \tilde{\tau}_{22,2} + \tilde{q}_{,1}\|_{\Omega}^2 + \|g + 2\tilde{q} + \text{div } \tilde{s}\|_{\Omega}^2), \end{aligned}$$

где константа \mathbf{c}_{VII} связана с постоянной \mathbf{c}_I и свойствами тензора \mathbb{L} .

Теорема 3. *Погрешность конформного приближенного решения задачи (10)–(12) с граничными условиями на перемещения и поворот, рассматриваемой в обобщенной постановке (13)–(14), контролируется при помощи апостериорной оценки следующего вида:*

$$\|(e_{\tilde{u}}; e_{\tilde{p}}; e_{\tilde{\omega}})\|^2 \leq (1 + \beta) \mathcal{D}^2(\dots; \tilde{\tau}, \tilde{q}, \tilde{s}) + (1 + \beta^{-1}) \mathcal{R}^2(\tilde{\tau}, \tilde{q}, \tilde{s}),$$

содержащей свободные поля $(\tilde{\tau}, \tilde{q}, \tilde{s}) \in \tilde{\mathcal{H}}(\Omega)$, произвольный положительный параметр β и константу, не зависящую от способа дискретизации исходной задачи.

Далее полученный результат обобщается на плоские задачи со смешанными краевыми условиями. С *пятого параграфа* главы несколько модифицируется система обозначений —

(x_1, x_2, x_3) меняется на (x, y, z) , а индексы 1, 2, 3 на x, y, z в обозначении полей и дифференцирования по пространственной координате. Это сделано для того, чтобы избежать возможных противоречий, связанных с использованием в дальнейшем числовой индексации для вспомогательных переменных, смысл которой отличается от установления соответствия между компонентами и пространственными координатами. Введены обозначения $u := (u_x, u_y)$ — это перемещения вдоль осей Ox и Oy , ω_z — поворот вокруг оси Oz . Предполагается, что вся граница области Γ состоит из двух непересекающихся частей Γ_D и Γ_S . Функции $f := (f_x, f_y)$ и g_z характеризуют заданные внутри Ω распределенные внешние воздействия (силы и момент), а функции $t := (t_x, t_y)$ и m_z — заданные на части границы Γ_S поверхностные силы и момент. На части Γ_D известны перемещения $u = u_D \in \mathbb{W}_2^{1/2}(\Gamma_D, \mathbb{R}^2)$ и поворот $\omega_z = \omega_D \in \mathbb{W}_2^{1/2}(\Gamma_D)$. Предполагается, что $f_x, f_y, g_z \in \mathbb{L}_2(\Omega)$, $t_x, t_y, m_z \in \mathbb{L}_2(\Gamma_S)$.

В *шестом параграфе* получено другое представление погрешности и предложен класс ее мажорант. Пусть элементы $(\tilde{u}_x, \tilde{u}_y)$ и $\tilde{\omega}_z$ — некоторое приближение к точному решению, построенное любым из методов, обеспечивающих конформность полученной аппроксимации в $\mathcal{Y} \times \Theta$, где $\mathcal{Y} := \mathcal{Y}^0 + u_D$, $\Theta := \Theta^0 + \omega_D$, $\mathcal{Y}^0 := \{v^0 \in \mathbb{W}_2^1(\Omega, \mathbb{R}^2) \mid v^0 = 0 \text{ на } \Gamma_D\}$, $\Theta^0 := \{\theta^0 \in \mathbb{W}_2^1(\Omega) \mid \theta^0 = 0 \text{ на } \Gamma_D\}$. Введены отклонения компонент приближенного решения от точного $e_x := u_x - \tilde{u}_x$, $e_y := u_y - \tilde{u}_y$ и $e_z := \omega_z - \tilde{\omega}_z$, а также рассматриваются свободные элементы $\tilde{\tau} := (\tilde{\tau}_1, \tilde{\tau}_2)$ и \tilde{s} , где

$$\tilde{\tau}_1, \tilde{\tau}_2, \tilde{s} \in \mathbb{H}(\Omega, \Gamma_S, \text{div}) := \{\eta \in \mathbb{L}_2(\Omega, \mathbb{R}^2) \mid \text{div } \eta \in \mathbb{L}_2(\Omega), \eta \cdot n \in \mathbb{L}_2(\Gamma_S)\},$$

то есть $\tilde{\tau}_1 = [\tilde{\tau}_{xx} \quad \tilde{\tau}_{yx}]^T$, $\tilde{\tau}_2 = [\tilde{\tau}_{xy} \quad \tilde{\tau}_{yy}]^T$, $\tilde{s} = [\tilde{s}_x \quad \tilde{s}_y]^T$. Апостериорную оценку необходимо строить так, чтобы явно сохранять корректное соотношение размерностей физических величин каждой части. Для этого вводится в рассмотрение набор констант $c_x = c_y = \mu/|\Omega|$, $c_z = B/|\Omega|$, $d_x = c_x|\Gamma_S|$, $d_y = c_y|\Gamma_S|$, $d_z = c_z|\Gamma_S|$ и используется вспомогательное неравенство

$$\frac{1}{\mathfrak{c}_{VII}^2} \leq \inf_{(v_x^0, v_y^0, \theta_z^0) \in \mathcal{Y}^0 \times \Theta^0} \frac{\|(v_x^0, v_y^0, \theta_z^0)\|^2}{\Delta^2(v_x^0, v_y^0, \theta_z^0)},$$

где $\Delta^2(v_x^0, v_y^0, \theta_z^0) := \|c_x^{1/2} v_x^0\|_\Omega^2 + \|c_y^{1/2} v_y^0\|_\Omega^2 + \|c_z^{1/2} \theta_z^0\|_\Omega^2 + \|d_x^{1/2} v_x^0\|_{\Gamma_S}^2 + \|d_y^{1/2} v_y^0\|_{\Gamma_S}^2 + \|d_z^{1/2} \theta_z^0\|_{\Gamma_S}^2$. Неравенство Коши–Шварца и преобразования обобщенной постановки задачи дают апостериорную оценку $\|(e_x, e_y, e_z)\| \leq \mathcal{D}(\tilde{\sigma}, \tilde{p}, \tilde{M}; \tilde{\tau}_1, \tilde{\tau}_2, \tilde{s}) + \mathcal{R}(\tilde{\tau}_1, \tilde{\tau}_2, \tilde{s})$, где

$$\begin{aligned} \|(e_x, e_y, e_z)\|^2 &:= \int_{\Omega} \left(\mu e_{x,x}^2 + \frac{\mu}{2} (e_{y,x} + e_{x,y})^2 + \mu e_{y,y}^2 + \frac{\lambda}{2} (e_{x,x} + e_{y,y})^2 \right) d\Omega + \\ &+ \int_{\Omega} \left(\frac{\mu_c}{2} (e_{y,x} - e_{x,y} - 2e_z)^2 + 2B|\nabla e_z|^2 \right) d\Omega, \end{aligned}$$

$\tilde{\sigma}$, \tilde{p} , \tilde{M} — поля, вычисленные по приближенному решению, например, $\tilde{\sigma}_{xx} = (2\mu + \lambda)\tilde{u}_{x,x} + \lambda\tilde{u}_{y,y}$, $\tilde{p} = \mu_c(\tilde{u}_{y,x} - \tilde{u}_{x,y} - 2\tilde{\omega}_z)$, $\tilde{M} = 4B\nabla\tilde{\omega}_z$;

$$\begin{aligned} \mathcal{D}^2(\tilde{\sigma}, \tilde{p}; \tilde{\tau}_1, \tilde{\tau}_2, \tilde{s}) &:= \int_{\Omega} \frac{1}{2} \mathbf{L}^{-1}(\tilde{\tau} - \text{sym}(\tilde{\sigma})) : (\tilde{\tau} - \text{sym}(\tilde{\sigma})) \, d\Omega + \int_{\Omega} \frac{1}{2\mu_c} \left(\frac{\tilde{\tau}_{xy} - \tilde{\tau}_{yx}}{2} - \tilde{p} \right)^2 \, d\Omega + \\ &+ \int_{\Omega} \frac{1}{8B} |\tilde{s} - \tilde{M}|^2 \, d\Omega; \quad \mathcal{R}^2(\tilde{\tau}_1, \tilde{\tau}_2, \tilde{s}) := \frac{c_{\text{VM}}^2}{4} \times (\|c_x^{-1/2}(\tilde{\tau}_{xx,x} + \tilde{\tau}_{yy,y} + f_x)\|_{\Omega}^2 + \\ &+ \|c_y^{-1/2}(\tilde{\tau}_{xy,x} + \tilde{\tau}_{yy,y} + f_y)\|_{\Omega}^2 + \|c_z^{-1/2}(\text{div} \tilde{s} + \tilde{\tau}_{xy} - \tilde{\tau}_{yx} + g_z)\|_{\Omega}^2 + \|d_x^{-1/2}(t_x - \tilde{\tau}_{xx}n_x - \tilde{\tau}_{yx}n_y)\|_{\Gamma_S}^2 + \\ &+ \|d_y^{-1/2}(t_y - \tilde{\tau}_{xy}n_x - \tilde{\tau}_{yy}n_y)\|_{\Gamma_S}^2 + \|d_z^{-1/2}(m_z - \tilde{s} \cdot n)\|_{\Gamma_S}^2). \end{aligned}$$

Следствием применения неравенства Коши с параметром является требуемый результат.

Теорема 4. *Для плоских задач в теории упругости Коссера с граничными условиями смешанного типа справедливо обобщение апостериорной оценки, представленной в Теореме 3, содержащее тройку свободных элементов пространства $\mathbb{H}(\Omega, \Gamma_S, \text{div})$*

$$\|(e_x, e_y, e_z)\|^2 \leq (1 + \beta)\mathcal{D}^2(\dots; \tilde{\tau}_1, \tilde{\tau}_2, \tilde{s}) + (1 + \beta^{-1})\mathcal{R}^2(\tilde{\tau}_1, \tilde{\tau}_2, \tilde{s}). \quad (15)$$

Обе полученные апостериорные оценки помимо аппроксимаций \tilde{u}_x , \tilde{u}_y и $\tilde{\omega}_z$, точность которых мы контролируем через силовые характеристики $\tilde{\sigma}$, \tilde{p} и \tilde{M} , включают в себя свободные элементы $\tilde{\tau}_1$, $\tilde{\tau}_2$ и \tilde{s} . Близость этих элементов к точным полям силовых и моментных напряжений дает эффективную оценку погрешности. Действительно, функционал \mathcal{R}^2 представляет собой взвешенную сумму квадратов норм невязок соответствующих уравнений равновесия для среды Коссера. В свою очередь, значение функционала \mathcal{D}^2 на точных значениях полей совпадает с квадратом нормы погрешности. Функционал в правой части (15) более удобен с практической точки зрения, поскольку имеет квадратичную структуру, следовательно, среди прочего, может быть представлен в виде суммы локальных вкладов и использован в качестве локального индикатора распределения погрешности.

В *седьмом параграфе* перед описанием вычислительного эксперимента говорится об одном аналитическом решении, которое получил в своей кандидатской диссертации М.А. Кулеш (Пермь, 2001) — обсуждается задача о деформировании бесконечного слоя.

Восьмой параграф содержит численные результаты и оценку области эффективного применения авторского комплекса программ для анализа погрешности приближенных решений в плоских задачах теории упругости Коссера. В параграфе рассматриваются плоские задачи, решение которых реализовано через стандартные аппроксимации МКЭ, а оценка погрешности вычисляется с привлечением аппроксимации Арнольда–Боффи–Фалка нулевого порядка.

Таблица 5: Результаты для примера 4

Сетка	0	1	2	3
Число ст. свободы	504	1872	7200	28224
Погрешность, %	15.8	11.1	7.3	4.0
I_{eff}	1.23	1.20	1.21	1.34
β	0.158	0.122	0.087	0.056

Показано, что предлагаемая методика всегда является надежной, но для определенного класса задач может оказаться неэффективной. В этом случае, однако, отклонение решения от классического настолько мало, что разумным оказывается выбор «несимметричной» мажоранты из предыдущей главы. Изложенные в параграфе численные результаты опубликованы в работах автора [12], [17] и [18]. Приведем один пример.

Пример 4. Квадратная область с круглым отверстием малого радиуса

Рассматривается каноническая область — квадрат. Его левая сторона закреплена, а к правой приложена растягивающая распределенная нагрузка. Параметры задачи взяты из статьи H.W. Zhang et al. (*Comput. Mech.*, 2005): сторона 16.2 мм, радиус отверстия 0.216 мм, $\lambda = 0.11538 \times 10^{10}$ Н/м², $\mu = 0.76923 \times 10^9$ Н/м², $B = 31.762$ Н, $\mu_c = 0.25638 \times 10^{11}$ Н/м², нагружение 1 МПа. Результаты оценки погрешности для нескольких шагов равномерного дробления сетки собраны в Таблице 5. Из данных можно сделать вывод, что индекс эффективности остается стабильным и верхние оценки энергетической нормы погрешности всегда гарантированные.

В *девятом параграфе* содержатся основные выводы: 1) функциональный подход является надежным — получены гарантированные оценки, которые сохраняют это свойство при практической реализации; 2) методика его применения с привлечением аппроксимации Арнольда–Бюффи–Фалка эффективна для широкого класса задач; 3) исключение составляют некоторые ситуации, в которых пренебрежимо мало влияние микроструктуры на вид решения и разумно использовать оценку, исследованную в предыдущей главе.

Заключение. В диссертации исследованы надежные апостериорные оценки, применение которых гарантирует точность приближенных решений известных краевых задач механики и математической физики. В работе предложены новые теоретические оценки, разработаны и применены методики численной реализации мажорант погрешности. Большое внимание уделено вычислительному эксперименту, по результатам которого можно рекомендовать

функциональный подход к применению при оценке точности приближенных решений различных краевых задач, в том числе как независимую надстройку к коммерческим пакетам для инженерного анализа, поскольку его возможности превосходят возможности классических методов в теории апостериорного контроля точности. Проведенное исследование может быть развито в рамках нескольких направлений. Во-первых, класс оценок для пластин Рейсснера–Миндлина получен в форме, допускающей применение вычислительного алгоритма, который основан на привлечении аппроксимации Арнольда–Боффи–Фалка. Во-вторых, важным представляется переход к анализу пространственных задач теории упругости, чему в диссертации посвящена относительно небольшая часть. Наконец, необходимым этапом последующей разработки темы является параллельная реализация подхода и глубокий анализ вопросов, связанных с решением возникающих систем линейных алгебраических уравнений, в частности, их эффективное преобуславливание. Можно указать и другие направления.

Публикации в журналах перечня ВАК, а также изданиях, включенных хотя бы в одну из баз данных или систем цитирования Web Of Science, Scopus, MathSciNet, zbMath, Springer

1. Фролов, М.Е. Адаптация сеток на основе функциональных апостериорных оценок с аппроксимацией Равьяра-Тома / М.Е. Фролов, М.А. Чурилова // Журнал вычислительной математики и математической физики. — 2012. — Т. 52, № 7. — С. 1277–1288.
2. Churilova, M.A. MATLAB implementation of functional type a posteriori error estimates with Raviart-Thomas approximation / M.A. Churilova, M.E. Frolov // Progress in Industrial Mathematics at ECMI 2012, Mathematics in Industry 19. The European Consortium for Mathematics in Industry. — Springer, 2014. — P. 379–383.
3. Frolov, M.E. Guaranteed functional error estimates for the Reissner-Mindlin plate problem / M.E. Frolov, P. Neittaanmäki, S.I. Repin // Journal of Mathematical Sciences. — 2006. — Vol. 132, № 4. — P. 553–561.
4. Frolov, M.E. Functional a posteriori error estimates for certain models of plates and beams / M.E. Frolov // Russ. J. Numer. Anal. Math. Model. — 2010. — Vol. 25, № 2. — P. 117–129.
5. Фролов, М.Е. Функциональная апостериорная оценка погрешности решения задачи об изгибе стержня Эйлера-Бернулли / М.Е. Фролов // Научно-технические ведомости СПбГПУ. — 2010. — Т. 3 (104). — С. 81–84.
6. Фролов, М.Е. Применение функциональных оценок погрешности со смешанными аппроксимациями к плоским задачам линейной теории упругости / М.Е. Фролов // Жур-

нал вычислительной математики и математической физики. — 2013. — Т. 53, № 7. — С. 1178–1191.

7. Фролов, М.Е. О реализации контроля точности решений плоских задач теории упругости при помощи смешанных конечных элементов / М.Е. Фролов // Вычислительная механика сплошных сред. — 2014. — Т. 7, № 1. — С. 73–81.
8. Churilova, M.A. Functional a posteriori error estimates for linear elasticity: computational properties and adaptive algorithms / M.A. Churilova, M.E. Frolov // Университетский научный журнал. — 2014. — № 10. — С. 23–36.
9. Фролов, М.Е. Реализация функционального подхода к апостериорному контролю точности решений трехмерных задач теории упругости / М.Е. Фролов // Научно-технические ведомости СПбГПУ. — 2011. — № 2 (122). — С. 137–142.
10. Repin, S. Estimates for deviations from exact solutions to plane problems in the Cosserat theory of elasticity / S. Repin, M. Frolov // Journal of Mathematical Sciences. — 2012. — Vol. 181, № 2. — P. 281–291.
11. Фролов, М.Е. Функциональные апостериорные оценки погрешности решений плоских задач в теории упругости Коссера / М.Е. Фролов // Прикладная математика и механика. — 2014. — Т. 78, № 4. — С. 595–603.
12. Frolov, M. Reliable a posteriori error estimation for plane problems in Cosserat elasticity / M. Frolov // Numerical Mathematics and Advanced Applications – ENUMATH 2013, Lecture Notes in Computational Science and Engineering 103. — Springer International Publishing, 2015. — P. 225–232.

Публикации в других научных изданиях

13. Чурилова, М.А. Применение функциональных апостериорных оценок в адаптивных алгоритмах решения эллиптических краевых задач / М.А. Чурилова, М.Е. Фролов // XL Неделя науки СПбГПУ: материалы международной научно-практической конференции. Ч. V. — СПб.: Изд-во Политехнического университета, 2011. — С. 114–116.
14. Фролов, М.Е. Надежный апостериорный контроль точности решений задач об изгибе пластин Рейсснера–Миндлина / М.Е. Фролов // Сеточные методы для краевых задач и приложения. Материалы Десятой Международной конференции. — Казань: Казанский университет. — 2014. — С. 610–615.
15. Фролов, М.Е. О проблеме контроля точности решений, полученных инженерными пакетами / М.Е. Фролов // Материалы научно-практической конференции «Научные исследо-

вания и инновационная деятельность». — СПб: Изд-во Политехнического университета, 2009. — С. 236–240.

16. Фролов, М.Е. Функциональные апостериорные оценки со смешанными аппроксимациями для плоских задач теории упругости / М.Е. Фролов // Материалы Шестого Всероссийского форума «Наука и инновации в технических университетах». — СПб.: Изд-во Политехнического университета, 2012. — С. 41–42.
17. Фролов, М.Е. Апостериорные оценки для контроля точности решений плоских задач в теории упругости Коссера / М.Е. Фролов // XIX Зимняя школа по механике сплошных сред. Сборник статей. — Екатеринбург: РИО УрО РАН. — 2015. — С. 313–318.
18. Frolov, M. Accuracy verification for computed solutions in Cosserat elasticity / M. Frolov // Book of abstracts of the 6th International Conference on Advanced Computational Methods in Engineering, ACOMEN 2014. Ghent, Belgium, 23-28 June 2014. — 2014. — P. 87–88.