Федеральное государственное автономное образовательное учреждение
высшего образования «Санкт-Петербургский политехнический университет
Петра Великого»

На правах рукописи

Фролов Максим Евгеньевич

Функциональные методы и их реализация для апостериорного контроля точности в задачах линейной теории упругости

05.13.18 – Математическое моделирование, численные методы и комплексы программ

ДИССЕРТАЦИЯ

на соискание ученой степени доктора физико-математических наук

Научный консультант: Репин Сергей Игоревич, д.ф.-м.н., профессор

Санкт-Петербург – 2015

Оглавление

Введение

За период с начала 80-х годов XX века до наших дней мировой уровень развития вычислительной математики и мощностей технических ресурсов достиг рубежа, который позволяет решать многие интересные и важные задачи в рамках как фундаментальных направлений математического моделирования, так и более прикладных проблем инженерного анализа. Для многих классов задач разработаны эффективные подходы к построению решения, дошедшие, в том числе, и до широкого промышленного применения, а также подробно описанные и в отечественной, и в зарубежной литературе — Ф. Сьярле [1], Г.И. Марчук, В.И. Агошков [2], М.А. Колтунов, А.С. Кравчук, В.П. Майборода [3], К. Ректорис [4], А.А. Самарский [5], С. Крауч, А. Старфилд [6], К. Васидзу [7], В.М. Мирсалимов [8], А.Б. Фадеев [9], Ю.Н. Работнов [10], Г.И. Марчук [11], Е.Г. Дьяконов [12], В.В. Шайдуров [13], F. Brezzi, M. Fortin [14], M.A. Crisfield [15], Р.П. Федоренко [16], J. Bonet, R.D. Wood [17], S. Moaveni [18], O.C. Zienkiewicz, R.L. Taylor [19], [20], С.Н. Коробейников [21], В.В. Воеводин, Вл.В. Воеводин [22], A. Ern, J.-L. Guermond [23], М.А. Ольшанский [24], Н.С. Бахвалов, Г.М. Кобельков, Ю.А. Кузнецов, В.И. Лебедев, И.К. Лифанов, Е.М. Нечепуренко, В.В. Шайдуров [25], А.А. Самарский, А.П. Михайлов [26], M.H. Sadd [27], P. Solin [28], D. Braess [29], Н.С. Бахвалов, Н.П. Жидков, Г.М. Кобельков [30], И.Б. Бадриев, О.А. Задворнов [31], V. Slivker [32], И.Г. Бурова, Ю.К. Демьянович [33], S.C. Brenner, R.L. Scott [34], Th.-P. Fries, T. Belytschko [35], B. Szabó, I. Babuška [36], Р.З. Даутов, М.М. Карчевский [37], V.G. Korneev, U. Langer [38][1] и многотомное издание под общей редакцией Ф. Сьярле и Ж.-Л. Лионса, например, [39], [40], [41], [42], насчитывающее с продолжением уже почти два десятка томов, и многие другие источники, посвященные как развитию общей теории построения аналитических и численных методов решения краевых задач, так и особенностям их приложения к задачам механики деформируемого твердого

[1] ссылки даны в хронологическом порядке

тела.

При изучении различных вычислительных схем помимо анализа устойчивости и аппроксимационных свойств важным оказывается вопрос о надежном контроле точности приближенного решения. Он может рассматриваться в прикладном ключе, но тесно связан с более фундаментальным вопросом о доверии к результатам моделирования, основанном на возможности их явной проверки. Классическая теория позволяет строить асимптотические оценки скорости сходимости, наличие которых в некоторой степени свидетельствует об обоснованности применения того или иного метода, поскольку такие оценки при определенных условиях гарантируют сходимость аппроксимации $\tilde{u}$, полученной на конечномерном подпространстве, к точному решению u при стремлении размерности подпространства к бесконечности. Для многих классов задач и различных типов аппроксимаций априорные оценки получены в предположении о повышенной гладкости точного решения u, которая на практике встречается довольно редко. Другой практический недостаток применения априорных оценок для контроля точности приближенных решений заключается в том, что они не предоставляют никакой информации о распределении ошибки по области в каждой конкретной ситуации. Именно этот существенный изъян проявился с началом быстрого развития адаптивных методов. В них процесс вычисления приближенного решения желаемого качества реализуется при помощи рассмотрения дискретных задач на сетках, последовательно сгущающихся к особенностям исходной краевой задачи, что позволяет уменьшить вычислительную трудоемкость и повысить точность расчетов. В 70–80-е годы XX века сказанное выше послужило толчком для начала интенсивных исследований, направленных на развитие методов построения апостериорных оценок погрешности. Перед соответствующей теорией возникли две основные задачи: вычисление верхних границ отклонения приближенного решения от точного и получение информации о локальном распределении ошибки по области. Последнее как раз и служит основой для построения эффективных адаптивных алгоритмов.

В абстрактной форме апостериорную оценку можно представить как неравенство следующего вида:

$$\|u - \tilde{u}\| \leq \mathcal{M}(\tilde{u}, D),$$

где $\mathcal{M}$ — мажорирующий ошибку функционал, u есть точное решение рассматриваемой задачи, $\tilde{u}$ — его аппроксимация, построенная при помощи одного из численных или аналитических методов, а D — это совокупность всех известных исходных данных краевой задачи (геометрия области, краевые условия, коэффициенты, правая часть и прочее). Норма $\|\cdot\|$, при помощи которой измеряется величина отклонения приближенного решения от точного, выбирается исходя из практических требований. Отметим существенное отличие апостериорных оценок от априорных — они не включают в себя в явном виде информации о точном решении и вычисляются лишь по тем данным, которыми мы располагаем в процессе расчета. Вследствие этого, величина, контролирующая точность полученной аппроксимации, всегда может быть вычислена непосредственно. Отметим, что приведенное выше неравенство отражает строгое понимание того, что такое апостериорная оценка. В первой главе также отражены и другие достаточно распространенные трактовки, которые, однако, размывают четкую грань между надежными оценками и индикаторами погрешности.

Как правило, мажоранта $\mathcal{M}$ — это интегральный функционал, который может быть представлен как сумма локальных вкладов, полученных на каждом элементе разбиения области, в общий интеграл. В этом случае можно также рассматривать данный набор величин в качестве индикатора локального распределения погрешности, который обеспечивает возможность адаптации сетки к особенностям задачи. Такой адаптивный алгоритм принято схематично представлять как последовательность шагов:

1. решить (задачу);
2. оценить (погрешность);
3. отметить (элементы с большой погрешностью);

4. улучшить (сетку, дискретизацию, аппроксимацию...) $\to$ 1.

Или SOLVE $\to$ ESTIMATE $\to$ MARK $\to$ REFINE; см., например, W. Dörfler [43], A. Veeser [44], K. Mekchay, R.H. Nochetto [45], C. Carstensen, A. Orlando, J. Valdman [46], A. Demlow [47], K.G. Siebert [48], а также W.F. Mitchell [49, с. 328] и по смежным вопросам R. Stevenson [50] и цитируемую там литературу. Подробнее алгоритм описан ниже:

Шаг 0(а) Выбор желаемого значения погрешности ϵ.

Шаг 0(б) Построение начального разбиения области.

Шаг 1 Вычисление приближенного решения задачи $\tilde{u}$.

Шаг 2 Оценка глобальной нормы погрешности приближенного решения $\|u - \tilde{u}\|$ при помощи выбранного метода; если $\mathcal{M}(\tilde{u}, D) \leq \epsilon$, то процесс адаптации прерывается, поскольку полученное решение обладает необходимой точностью.

Шаг 3 Индикация локального распределения погрешности и определение зон области, в которых локальные ошибки относительно велики.

Шаг 4 Адаптация сетки и повторение процесса, начиная с Шага 1.

В литературе можно встретить и другие алгоритмы адаптации, не основанные на апостериорных оценках, в частности — использующие градиент приближенного решения (см., например, E. Stein, W. Rust [51]). При этом заведомо предполагается, что резкие изменения значения поля решения (большие градиенты) требуют сгущения сетки в таких зонах. Очевидно, что этот простой подход не позволяет отметить те локальные области, в которых ошибка велика, но решение имеет достаточную гладкость и меняется медленно, то есть он определяет только часть зон, где необходимо измельчение конечных элементов, и по этой причине далее не рассматривается. Также не обсуждается задача построения «оптимальной сетки», дающей приближенное решение заданного порога точности при минимальном возможном числе степеней свободы. Исключительная сложность прямого решения такой задачи была осознана уже к началу 90-х годов XX века (см., например, C. Johnson, P. Hansbo [52]).

К настоящему моменту в рамках метода конечных элементов сформировалось несколько крупных направлений развития методов апостериорного контроля погрешности. Первые из них были предложены на рубеже 70–80-х годов XX века в работах I. Babuška, W.C. Rheinboldt [53], [54], [55] и вызвали интерес многих авторов, что привело к появлению большого количества публикаций по данной тематике и смежным вопросам. К середине 80-х годов, согласно I. Babuška [56], общая теория все еще не была разработана, не были сформулированы соответствующие цели и задачи, не установились четкие критерии сравнения подходов. Однако уже тогда был осознан тот факт, что этот новый раздел вычислительной математики имеет большое практическое значение, в том числе в приложении к инженерным расчетам. За первые несколько лет были выделены некоторые основные требования к оценкам, по своей сути предопределившие вектор дальнейшего развития всей теории: 1) оценка погрешности должна быть основана только на локальных вычислениях; 2) глобальная оценка должна при этом получаться как результат расчета локальных индикаторов по совокупности конечных элементов; 3) оценка не должна слишком сильно недооценивать или переоценивать истинную величину ошибки (см. R.E. Bank [57]). Обратим внимание на пункты 1) и 3) — они фактически означают, что любая глобальная вычислительная процедура лежит за рамками общего подхода, и что индикатор не обязательно должен быть надежным в строгом понимании, поскольку допустима «не слишком сильная» недооценка погрешности, то есть нарушение неравенства. Как следствие, подавляющее большинство методов, предложенных для краевых задач различных типов за эти более чем тридцать пять лет, находится в указанных выше рамках. Наиболее полное описание методов и ссылки на соответствующую литературу можно найти в следующих монографиях: R. Verfürth [58], [59], M. Ainsworth, J.T. Oden [60], I. Babuška, T. Strouboulis [61], W. Bangerth, R. Rannacher [62], P. Neittaanmäki, S. Repin [63], S. Repin [64], I. Babuška, J.R. Whiteman, T. Strouboulis [65], O. Mali, P. Neittaanmäki, S. Repin [66][2].

В отечественной литературе исследования данного направления для краевых задач для обыкновенных дифференциальных уравнений и уравнений в частных производных представлены, хотя и не так широко — публикаций на русском языке сравнительно немного. Помимо ряда статей С.И. Репина без соавторов [67], [68], а также в соавторстве с Б.Н. Четверушкиным [69], А.В. Музалевским [70], М.Е. Фроловым [71], [72], [73] и А.В. Гаевской [74], [75], часть из которых обсуждается далее, можно упомянуть следующие работы и цитируемую там литературу: А.К. Алексеев, И.Н. Махнев [76], А.Б. Бакушинский, А.С. Леонов [77], А.Н. Боголюбов, А.А. Панин [78], М.Е. Фролов, М.А. Чурилова [79], М.Е. Фролов [80], [81], [82], [83], М.А. Чурилова [84], [85], [86], В.Г. Корнеев [87], [88], Н.Д. Золотарёва, Е.С. Николаев [89], [90], Б.М. Багаев, Е.Д. Карепова, В.В. Шайдуров [91], А.С. Караваев, С.П. Копысов [92], А.С. Караваев, С.П. Копысов, А.Б. Пономарёв [93], С.П. Копысов, А.К. Новиков [94], М.Р. Тимербаев [95].

Одним из первых методов, получивших широкое распространение, является метод невязок, который основан на оценке нормы невязки уравнения в пространстве образов оператора соответствующей краевой задачи. Он был предложен в упомянутых выше работах [54], [53], [55] и в дальнейшем развивался и обобщался многими авторами (см., например, R.E. Bank, A. Weiser [96], I. Babuška, A. Miller [97], E. Rank, O.C. Zienkiewicz [98], R. Verfürth [99], [100], K. Eriksson, C. Johnson [101], C. Johnson, P. Hansbo [52], R. Durán, R. Rodríguez [102], I. Babuška, R. Durán, R. Rodríguez [103], R. Rodríguez [104], R. Becker, C. Johnson, R. Rannacher [105], R. Becker, R. Rannacher [106], K.G. Siebert [107], J.R. Stewart, T.J.R. Hughes [108], B. Wohlmuth, R. Hoppe [109], R. Beck, R. Hipt-

[2] более полный список литературных источников приводится при обсуждении конкретных методов

mair, R. Hoppe, B. Wohlmuth [110], C. Carstensen, R. Verfürth [111], Z. Chen, R. Nochetto [112], J.M. Melenk, B. Wohlmuth [113], C. Carstensen [114], [115], L. Formaggia, S. Perotto [116], D. Braess, C. Carstensen, B.D. Reddy [117], L. Beirão da Veiga, G. Manzini [118], C. Carstensen, R.H.W. Hoppe [119], X. Ye [120], S. Weißer [121], T.L. Horváth, F. Izsák [122], C. Carstensen, C. Merdon [123], J. Zhao, S. Chen [124] и указанные ранее монографии [58], [60], [61], [62] и цитируемую в работах литературу). Первый из методов данной группы носит название явного метода невязок[3]. Его обоснование базируется на специальной конструкции оператора интерполирования, предложенной Ф. Клеманом (см. Ph. Clément [125]). Для полноценного применения подход требует вычисления постоянных в интерполяционных неравенствах, зависящих от дискретизации области задачи. Как следствие возникает необходимость либо находить точные значения этих констант в процессе адаптации сетки, что сопряжено с серьезными затруднениями в теоретическом плане и дополнительными вычислительными затратами на практике, либо иметь метод, обеспечивающий верхнюю оценку констант. Попытки практического применения таких методов могут привести к существенному завышению истинной величины погрешности. В частности, в статье C. Carstensen, S.A. Funken [126] приведены достаточно простые примеры, для которых переоценка истинного значения нормы ошибки достигает 30–70 раз. Проблеме вычисления весовых множителей в явном методе невязок также посвящена работа A. Veeser, R. Verfürth [127] и ряд других работ, упомянутых в главе 1 данной диссертации. Тем не менее, следует особо подчеркнуть, что без учета баланса локальных констант явный метод невязок нашел широкое практическое применение при индикации распределения погрешности по области. В частности, подход реализован в модуле PDE Toolbox коммерческого программного комплекса MATLAB для адаптивного решения ряда классических задач, хотя индикаторы[4] такого типа и не могут обеспечить гарантированных верхних оценок нормы

[3] оригинальная терминология указана в сносках в первой главе

[4] под индикатором в литературе может пониматься и глобальная характеристика

ошибки.

Другая группа индикаторов и мажорант погрешности, построенных на основе неявного метода невязок, связана с решением последовательности локальных задач с граничными условиями типа Дирихле или Неймана. Ему посвящены, например, уже упомянутые работы [53], [96], [102]. Методы этой группы являются более трудоемкими, но не требуют оценки констант. Индикаторы такого типа с различным подбором граничных условий для локальных задач также достаточно хорошо исследованы — см., например, M. Ainsworth, J.T. Oden [128], [60], U. Brink, E. Stein [129], P. Díez, N. Parés, A. Huerta [130], I. Babuška, T. Strouboulis и коллеги [131], [132], [133], P. Dörsek, J.M. Melenk [134]. Из результатов этих и других работ следует, что алгоритмы, включающие в себя специальный подбор граничных условий — с процедурой уравновешивания — оказываются предпочтительнее с точки зрения качества оценок погрешности и их надежности. Результаты, приведенные в [96] и [129], указывают на эффективность подхода, но позволяют также сделать заключение, что гарантированные оценки точности приближенных решений удается получить не всегда. Как показано D.W. Kelly [135], само по себе уравновешивание элементарно может быть выполнено лишь в одномерном случае. Подробнее этот класс методов описан, в частности, в указанной выше монографии [60]. Достаточно полный обзор работ по тематике также можно найти в появившихся относительно недавно статьях N. Parés, H. Santos, P. Díez [136], Z. Cai, S. Zhang [137].

Еще один метод построения индикаторов погрешности основан на так называемом эффекте суперсходимости (см. отечественную работу Л.А. Оганесяна и Л.А. Руховца [138], а также работы зарубежных авторов: M. Křížek, P. Neittaanmäki [139], [140], L.B. Wahlbin [141], M.F. Wheeler, J.R. Whiteman [142], J.H. Bramble, A.H. Schatz [143], M. Zlámal [144], [145], I. Babuška, U. Banerjee, J.E. Osborn [146]) и различного рода процедурах осреднения градиента приближенного решения. В случае задач механики в постановке «в перемещениях» речь идет о постобработке поля напряжений, полученного по вычисленной аппроксимации поля перемещений. Впервые такой индикатор ошибки, часто называемый ZZ или Z^2, описали O.C. Zienkiewicz, J.Z. Zhu [147]. Метод получил широкое распространение в силу своей исключительной простоты и незначительной вычислительной трудоемкости реализации. Различные процедуры осреднения градиента приближенного решения описаны, например, в работах M. Ainsworth, J.T. Oden [60], R. Durán, M.A. Muschietti, R. Rodríguez [148], [149], O.C. Zienkiewicz, J.Z. Zhu [150]. В литературе можно найти достаточное количество примеров того, что метод позволяет получать качественную индикацию погрешности даже в тех случаях, когда его применение не имеет строгого математического обоснования, которое изначально ограничивалось случаем равномерных разбиений конечными элементами и решений достаточно высокой регулярности. На его эффективность, в частности, указывают результаты численных экспериментов, приведенные в упомянутой работе [131], а также O.C. Zienkiewicz, J.Z. Zhu [147], [150], [151]. Определенная часть исследований XXI века посвящена анализу поведения индикаторов такого типа на анизотропных разбиениях — в частности, M. Picasso [152], S. Micheletti, S. Perotto [153], а также W. Cao [154] и цитируемая там литература. Например, в статье [152] показано, что классический ZZ-индикатор дает на анизотропных сетках результат неожиданно высокого качества и значительно превосходит классический явный метод невязок. Метод осреднения нашел применение в инженерной практике и включен, в частности, в коммерческий пакет ANSYS с некоторыми модификациями. Алгоритм основан на концепции «уравновешивания ошибок», изложенной в работе I. Babuška, W.C. Rheinboldt [155]. Некоторые подробности можно найти в теоретической части руководства к пакету ([156, параграф 19.7]). Однако, как показано далее, поведение индикатора, реализованного в пакете, отличается от индикатора [147]. Оригинальная методика часто недооценивает истинную величину ошибки (см., например, J.O. Dow [157]), а реализованная в ANSYS, наоборот, ее переоценивает. Методы, основанные на осреднении градиента приближенного решения, достаточно подробно описаны в монографиях [58] и [60]. В литературе встречаются и более сложные процедуры, в том числе, использующие метод наименьших квадратов. Связь между отдельными индикаторами, полученными при помощи методов невязок и осреднения обсуждается, например, в работе J.Z. Zhu [158] и цитируемой там литературе. В частности, обобщается опыт других авторов и делается вывод о том, что использование модификации метода позволяет повысить надежность индикации погрешности при помощи осреднения как в сравнении с исходным, так и с методами невязок. Библиографические обзоры, касающиеся развития данной группы алгоритмов можно найти, например, в работах M. Ainsworth, J.T. Oden [60], Z. Cai, S. Zhang [159], P. Díez, J.J. Ródenas, O.C. Zienkiewicz [160], A. Benedetti, S. de Miranda, F. Ubertini [161]. Следует также упомянуть R.E. Bank, J. Xu [162], [163], S. Bartels, C. Carstensen [164], [165], C. Carstensen [166], F. Fierro, A. Veeser [167], P.E. Farrell, S. Micheletti, S. Perotto [168] и цитируемую там литературу.

Необходимо особо подчеркнуть, что все описанные выше группы методов объединяются в подход, основанный на том факте, что рассматриваемое приближенное решение совпадает с галеркинской аппроксимацией — точным решением соответствующей конечномерной задачи. Тогда как вопрос надежного контроля точности приближенных решений требует построения апостериорных оценок, удовлетворяющих ряду более жестких требований: необходимы неравенства, которые 1) дают гарантированные[5] и вычисляемые оценки точности; 2) подходят для приближенных решений, полученных широким классом методов; 3) не содержат локальных постоянных и других данных, зависящих от сетки и второстепенных особенностей построения приближенного решения. Далее мы будем называть надежными именно методы, гарантирующие выполнение 1–3.

Исторически первые попытки построения общих подходов к апостериор-

---

[5] именно так термин «надежность» понимался два десятилетия назад [52] (гарантированными называются те оценки, для которых практическая реализация не влечет нарушение теоретического неравенства, что имеет место далеко не всегда)

ному контролю точности решений задач механики и математической физики были предприняты даже раньше, чем вышли упомянутые работы [53] и [54]. Апостериорные оценки, которые позволяют контролировать погрешность произвольного конформного приближенного решения исходной задачи, а не только галеркинской аппроксимации, были описаны в статьях W. Prager, J.L. Synge [169], J.L. Synge [170], а также монографии С.Г. Михлина [171]. В основе подхода [169], названного методом гиперокружностей, лежат геометрические аналогии, тогда как Михлин в своей работе привлек к построению апостериорной оценки методы вариационного исчисления. Тем не менее, в случае задачи Дирихле для уравнения Пуассона обе идеи приводят к одной и той же оценке энергетической нормы ошибки. Она, однако, оказывается трудно применимой на практике из-за специальных построений, необходимых при ее вычислении. На рубеже XX-XXI веков С.И. Репиным был разработан подход, позволяющий строить апостериорные оценки точности, удовлетворяющие всем изложенным выше требованиям 1–3 — см. S. Repin, L.S. Xanthis [172], С.И. Репин [173], [174] и ряд других работ, ссылки на которые можно найти в монографиях [63], [64], [66], а также статьях [67], [175] и [176]. Оценки справедливы для любого приближенного решения из соответствующего рассматриваемой задаче энергетического пространства. Они содержат только глобальные константы, возникающие в интегральных неравенствах (теоремах вложения) для рассматриваемой области. В силу этих свойств и тех методов, которые привлечены для получения неравенств, позднее они были названы апостериорными оценками функционального типа, или оценками отклонения от точного решения. Отметим, что изначально основываясь на привлечении методов теории двойственности вариационного исчисления (см., например, R.T. Rockafellar [177], I. Ekeland, R. Temam [178], П.П Мосолов, В.П. Мясников [179], Р. Темам [180], П. Панагиотопулос [181]), соответствующие функционалы назывались «двойственными мажорантами». Абстрактно, неравенства имеют следующую общую форму:

$$\|u - \tilde{u}\| \leq \mathcal{M}(\tilde{u}, D, \tilde{\tilde{y}}_1, \tilde{\tilde{y}}_2, ..., C_1, C_2, ...),$$

где в левой части неравенства стоит значение меры отклонения приближенного решения $\tilde{u}$ из функционального класса U от точного решения u, а в правой — функционал $\mathcal{M}$, который принято называть мажорантой отклонения. В правую часть оценки явным образом входят приближенное решение, данные задачи D, одна или несколько постоянных, определяемых формой области, в которой решается исходная задача $(C_1, C_2, ...)$, а также одно или несколько свободных полей $(\tilde{\tilde{y}}_1, \tilde{\tilde{y}}_2, ...)$ и произвольные положительные постоянные, разумный подбор которых позволяет влиять на качество вычисляемых мажорант погрешности. Функционал должен удовлетворять естественному требованию — непрерывно зависеть от $\tilde{u}$, обращаясь в ноль лишь в том случае, когда приближенное решение совпадает с точным. Источником погрешности, которую в силу своей общности позволяет контролировать функциональный подход, может быть итерационная схема вычисления приближенного решения и даже недостатки программного кода. Тем не менее, в определенной степени он коррелирует с фундаментальным подходом, предложенным в монографии С.Г. Михлина. С точки зрения реализации вычислительных процедур также можно провести параллель с известным инженерным методом оценки через определяющее соотношение, развивающим [169] (см., например, P. Ladevèze, J.-P. Pelle [182] с обзором, посвященным прикладным аспектам). Методы теории двойственности для построения апостериорных оценок привлекались не только отечественными, но и зарубежными авторами — в частности, в монографии W. Han [183] отчетливо прослеживается влияние ранних работ С.И. Репина [172] и [176].

В последние пятнадцать лет подход интенсивно развивается и обобщается. Исследования проводятся по нескольким направлениям. Первое из них сфокусировано на различных аспектах применения метода в классических эллиптических задачах, например, краевых задачах для уравнения Пуассона и задаче диффузии. В частности, в работах S. Repin [175], С.И. Репин, М.Е. Фролов [71], M. Frolov, P. Neittaanmäki, S. Repin [184], [185], а также М.Е. Фролов, М.А. Чурилова [79] и М.А. Чурилова [84] теоретически обоснована и практически подтверждена эффективность данного подхода и проведено сравнение с другими методами. Сравнению с классическими результатами также посвящена работа C. Carstensen, C. Merdon [186]. В статьях S. Repin, S. Sauter, A. Smolianski [187], [188] получены и исследованы оценки, которые позволяют учитывать возможное несоответствие приближенного решения заданным граничным условиям. Исследования авторов продолжены в работе [189], где предложены двусторонние оценки погрешности для смешанной формулировки задачи диффузии. Задаче реакции–диффузии посвящена часть монографии [64], а также статьи: S. Repin, S. Sauter [190], S. Repin [191], S. Korotov [192], М.А. Чурилова [84], [85], а задаче реакции–конвекции–диффузии — публикация S. Nicaise, S. Repin [193]. Разработанные методы успешно применены к некоторым другим классам задач, в том числе нелинейных — S. Repin, L.S. Xanthis [172], С.И. Репин [173], [174], [176], [194], [195], [196], [197], M. Bildhauer, S. Repin [198], S. Repin, J. Valdman [199], S.I. Repin [200], P. Neittaanmäki, S. Repin, J. Valdman [201], а также вариационным неравенствам — С.И. Репин [202], [203], [204], S. Repin, J. Valdman [205], P. Harasim, J. Valdman [206], [207], некоторым начально-краевым задачам — S. Repin [208], [209], P. Neittaanmäki, S. Repin [210], S. Repin, S. Tomar [211], S. Matculevich, S. Repin [212], S. Matculevich, P. Neittaanmäki, S. Repin [213], внешним краевым задачам — D. Pauly, S. Repin [214], O. Mali, A. Muzalevskiy, D. Pauly [215] и уравнениям Максвелла — D. Pauly, S. Repin [216].

Второе направление исследований связано с построением апостериорных оценок для различных моделей механики деформируемого твердого тела, в большинстве случаев — в рамках линейной теории. Такие оценки можно найти в публикациях S. Repin [175], [176], [217], [218], P. Neittaanmäki, S. Repin [219], A. Muzalevsky, S. Repin [220], [221], S. Repin, S. Sauter, A. Smolianski [189] и ряде других работ. Численное исследование подхода для плоских задач приводится в упомянутой выше работе [220], а также работе автора [80] с привлечением смешанных аппроксимаций метода конечных элементов. Относительно недавно — С.И. Репин, М.Е. Фролов [72], M. Frolov, P. Neittaanmäki, S. Repin [222] — при помощи методов теории двойственности или прямой модификации обобщенной постановки задачи была получена вычисляемая оценка погрешности приближенных решений задач, возникающих в теории пластин Рейсснера–Миндлина. Эта теория является интересным с практической точки зрения обобщением классической теории тонких пластин Кирхгоффа–Лява, функциональные оценки для которой получены полтора десятилетия назад (P. Neittaanmäki, S. Repin [219]). Более простой вариант оценки для бигармонической задачи предложен и численно исследован позднее в работе автора [223]. В [224] построена и реализована аналогичная оценка для балок Тимошенко.

Наконец, последняя серия работ, связанная с темой диссертации, относится к исследованию функционального подхода применительно к теории упругости Коссера. За последние годы вышли публикации: С.И. Репин, М.Е. Фролов [73] и М.Е. Фролов [82], в которых методами теории двойственности и модификацией интегральных тождеств впервые построены надежные оценки, предназначенные для апостериорного контроля точности приближенных решений плоских задач. Более общая оценка [82] численно исследована автором в статьях [225] и [226]. Отметим, что за рамками обзора остались работы, связанные с задачами механики жидкости и газа (см. [64], [66], а также M. Fuchs, S. Repin [227], [228], A. Mikhaylov, S. Repin [229], E. Gorshkova, P. Neittaanmäki, S. Repin [230], E. Gorshkova, A. Mahalov, P. Neittaanmäki, S. Repin [231], S.I. Repin [232] и цитируемую там литературу).

В отличие от стандартных групп методов, численному анализу функционального подхода посвящено не столь значительное количество работ. Хотя уже в [172] С.И. Репиным изложена не только идея, связанная с построением апостериорных оценок на основе методов теории двойственности, но и приведен один пример численного расчета, первой работой с полноценным вычислительным экспериментом скорее следует считать [175]. В дальнейшем прикладные исследования стали более интенсивными, постепенно расширился как круг авторов, так и диапазон рассматриваемых краевых задач, а также спектр обсуждаемых вопросов. Необходимо упомянуть следующие из ранее указанных публикаций в хронологическом порядке: [71], [220], [187], [188], [185], [223], [74], [70], [75], [199], [224], [84], [79], [80], [186], [66], а также M. Frolov, P. Neittaanmäki, S. Repin [233], A. Gaevskaya, R.H.W. Hoppe, S. Repin [234], I. Anjam et al. [235], J. Valdman [236], R. Lazarov, S. Repin, S.K. Tomar [237], А.Н. Боголюбов, М.Д. Малых, А.А. Панин [238], J.K. Kraus, S.K. Tomar [239], S. Repin, T. Samrowski [240], O. Mali [241], S. Kleiss, S.K. Tomar [242] и цитируемую там литературу. Следует подчеркнуть, что численные исследования, касающиеся задач механики деформируемого твердого тела, в литературе представлены недостаточно широко, что делает приведенный в работе анализ особенно актуальным.

Перейдем к обсуждению содержания диссертации. *Целями работы* являются разработка новых и развитие существующих функциональных методов контроля точности приближенных решений краевых задач в рамках линейной теории упругости, а также создание эффективного подхода к реализации теоретических результатов для плоских задач на основе смешанных аппроксимаций метода конечных элементов. *Основные задачи* исследования включают: 1) сравнительный анализ методов построения и методик вычисления апостериорных оценок для классических уравнений математической физики с использованием различных типов аппроксимаций, характерных для метода конечных элементов; 2) обобщение известных результатов и перенос полученного опыта на плоские задачи линейной теории упругости — пластины Рейсснера–Миндлина, задачу о плоской деформации для классических сред и краевые задачи для среды Коссера; 3) получение новых классов функциональных апостериорных оценок, допускающих применение методик расчета верхних границ энергетической нормы ошибки, основанных на привлечении смешанных аппроксимаций; 4) реализацию алгоритмов, выполненную в виде комплексов программ на языке FORTRAN; 5) анализ возможностей функционального подхода, основанный на вычислительном эксперименте, в том числе, с привлечением коммерческих программных продуктов для инженерных расчетов.

Основная часть работы состоит из пяти глав.

Первая глава содержит описание основных методов апостериорного контроля погрешности. При этом переработан и существенно дополнен материал кандидатской диссертации автора [243], использована более поздняя обзорная статья [244], опубликованная в соавторстве с С.И. Репиным, а также учтены статьи и монографии, вышедшие за последнее десятилетие.

Вторая глава целиком посвящена одной из классических задач математической физики, часто называемой в вычислительной литературе «стационарной задачей диффузии». Хотя реальный процесс диффузии связан с уравнениями параболического типа, эта модельная эллиптическая краевая задача второго порядка, требующая определения одного скалярного поля в качестве основной неизвестной величины, нередко выбирается разными авторами для постановки вычислительного эксперимента. Акцент в главе сделан на аспекты практического применения функционального подхода и на сравнение с классическими подходами метода конечных элементов, реализованными в программных пакетах для инженерного анализа. Материал главы также включает часть диссертации [243], в значительной мере расширяя ее новыми исследованиями, касающимися применения смешанных аппроксимаций метода конечных элементов, и некоторыми другими результатами. Таким образом, развита методика постановки вычислительного эксперимента для классических скалярных эллиптических краевых задач второго порядка, направленного на сравнительный анализ различных групп методов, выявление их достоинств и недостатков, а также на сравнение качества работы адаптивных алгоритмов, основанных на соответствующих апостериорных оценках и индикаторах. При этом, относительно функционального подхода, ключевым для всей диссертации является сопоставление возможностей стандартных непрерывных и специальных смешанных аппроксимаций метода конечных элементов и вывод об общем преимуществе смешанных аппроксимаций перед стандартными. Непосредственная реализация вычислительных алгоритмов в пакете MATLAB опирается на опыт автора, полученный им при работе над кандидатской диссертацией, но выполнена М.А. Чуриловой в совместных публикациях [79] и [245], а также в рамках написания кандидатской диссертации [246] под научным руководством автора.

Третья глава связана с развитием функционального подхода для задач теории пластин и стержней. В ней рассматриваются задачи об изгибе пластин Рейсснера–Миндлина, прямолинейных балок Тимошенко, а также балок Бернулли–Эйлера и упомянута бигармоническая задача. Получены теоретические результаты, существенно дополняющие и обобщающие [243]. Основной результат, относящийся к теории пластин — в диссертации предложен новый класс оценок функционального типа для контроля точности решений задач об изгибе пластин Рейсснера–Миндлина, применимый для любого конформного приближенного решения и нескольких типов краевых условий: жесткая заделка, свободно опертый край, свободный край. Он включает в себя в качестве частного случая результаты для пластин, жестко закрепленных по всей границе расчетной области, опубликованные в соавторстве с С.И. Репиным [72], [247], С.И. Репиным и П. Нейттаанмяки [248], [222] в 2004–2006 гг. Оценки опираются на методы теории двойственности вариационного исчисления, а также методы математической физики и функционального анализа. Для задачи об изгибе балки Тимошенко впервые получена гарантированная верхняя оценка ошибки в глобальной норме, которая реализована и численно исследована на примере серии задач, решение которых обеспечивает пакет ANSYS [224]. Поскольку функциональный подход позволяет оценить точность любой конформной аппроксимации решения задачи, оценка остается справедливой вне зависимости от того, каким методом было построено приближенное решение. Это оказывается особенно важно, когда речь идет о контроле точности решений, полученных коммерческими пакетами. Приведем цитату из работы C. Carstensen, R. Klose [249], в полной мере объясняющую ту мотивацию, которая возникает при разработке независимой контролирующей точность надстройки к коммерческим пакетам для инженерного анализа[6]: «Аргументация держать коммерческие секреты скрытыми внутри черного ящика оставляет обычного пользователя иногда даже без намека на то, что в точности происходит за ширмой дружественного пользователю этой программы интерфейса. Разница между математической и вычислительной моделью не обозначена четко. Часто пользователь даже не особо интересуется отталкивающими[7] деталями». Из представленных в главе результатов можно сделать вывод, что функциональный подход обеспечивает надежный контроль погрешности. Несмотря на то, что создание программного модуля для проверки погрешности требует некоторых усилий, технология оказывается пригодной для анализа приближенных решений, полученных коммерческими программными продуктами для инженерных расчетов. В главе приведена и аналогичная оценка для балки Бернулли–Эйлера, также полученная автором [250]. Задача построения гарантированных апостериорных оценок функционального типа для криволинейной балки Бернулли–Эйлера независимо исследовалась O. Mali в 2009–2011 гг.

В **четвертой главе** рассматриваются задачи классической теории упругости. Показано, что для этого класса задач могут возникать существенные проблемы с применением стандартных аппроксимаций метода конечных элементов при вычислении оценок погрешности на последовательности вложенных сеток. Степень переоценки истинной величины ошибки растет до значений, которые делают бессмысленным применение подхода на практике. Преодолеть недостаток удается за счет привлечения появившихся относительно недавно смешанных аппроксимаций метода конечных элементов. В итоге создана новая методика реализации вычисления известных апостериорных оценок для плоских задач классической линейной теории упругости со слабым учетом условия

[6] перевод с оригинала выполнен автором

[7] в оригинале использовано прилагательное «nasty»

симметрии тензора напряжений, основанная на использовании аппроксимации Арнольда–Боффи–Фалка минимального порядка [251], которая изначально разрабатывалась для смешанных методов конечных элементов как улучшенный аналог соответствующей аппроксимации Равьяра–Тома [252]. Сама мажоранта, позволяющая контролировать точность вычислений на основе несимметричного свободного элемента, была предложена в монографии С.И. Репина [64]. Представление функционала лишь незначительно модифицировано для явного согласования размерностей физических величин и более удобной реализации при помощи предлагаемой методики. Также впервые представлен вычислительный эксперимент, направленный на сравнение непрерывных и смешанных аппроксимаций, по результатам которого сделан вывод о преимуществе второго типа, особенно проявляющемся в процессе измельчения сетки [80]. Отметим, что стандартные непрерывные кусочно-линейные функции применялись при вычислении функциональных апостериорных оценок в процессе измельчения сетки А.В. Музалевским и С.И. Репиным [220], тогда как конечные элементы Равьяра–Тома и Арнольда–Боффи–Фалка для этих целей использованы впервые. На примере решений, которые предоставляет пакет ANSYS, проведен сравнительный анализ функциональных апостериорных оценок и стандартной методики пакета, основанной на сглаживании поля напряжений. Сделан вывод о том, что реализация подхода на основе аппроксимации Арнольда–Боффи–Фалка превосходит возможности стандартной методики пакета для случая задач с несколькими материалами в модели [81]. Также рассмотрен вопрос о сравнении адаптивных алгоритмов, основанных на разных методиках, изученный в работе M.A. Churilova, M.E. Frolov [253] и публикациях М.А. Чуриловой [246] и [86]. Последние также обеспечивают теоретическое обоснование эффективности функционального подхода для данного класса задач.

Завершающая **пятая глава** диссертации посвящена моментной (неклассической) теории упругости. На примере плоских задач для континуума Коссера впервые получены и численно исследованы апостериорные оценки функционального типа. Таким образом, предыдущий опыт, изложенный в четвертой главе, обобщен на случай неклассических сплошных сред с микроструктурой. Подход, основанный на привлечении методов теории двойственности вариационного исчисления к построению функциональных апостериорных оценок точности решений плоских краевых задач с граничным условием типа Дирихле, заданным на всей границе области, использован в соавторстве с С.И. Репиным в 2011 году [73] (перевод [254]). В 2013–2014 гг. результат обобщен автором на задачи, граничные условия в которых могут включать как заданные перемещения и независимый поворот, так и поверхностные силы и момент [82]. Предложен и впервые численно исследован класс апостериорных оценок, ориентированный на реализацию с использованием аппроксимаций для смешанных методов конечных элементов [225], [226], [255]. Исследование, в частности, представленные для моментных континуумов вычислительные эксперименты в области контроля точности, не имеет аналогов в мировой литературе.

Заключение содержит общие выводы из полученных теоретических и численных результатов, рекомендации по их использованию, а также возможные направления дальнейшей разработки темы.

Положения, выносимые на защиту:

1. Построены надежные функциональные методы, позволяющие контролировать энергетическую норму погрешности в задачах об изгибе пластин Рейсснера–Миндлина, прямолинейных балок Тимошенко и балок Бернулли–Эйлера.

2. Создана методика расчета апостериорных оценок отклонения от точного решения в задачах об изгибе балок Тимошенко.

3. Получен уникальный класс надежных апостериорных оценок функционального типа для плоских задач теории упругости Коссера.

4. Созданы методики расчета оценок точности приближенных решений в

плоских задачах классической и моментной теории упругости и выполнена их реализация в виде соответствующих комплексов программ на языке FORTRAN.

5. Обоснован вывод о преимуществе смешанных аппроксимаций как результат сравнительного анализа эффективности методик расчета апостериорных оценок функционального типа на базе стандартных и смешанных конечных элементов для классической линейной упругости.

6. Обоснован вывод о надежности и более высокой эффективности функциональных методов по сравнению с классическими, который базируется на представленной в работе оценке применимости функционального подхода к контролю точности приближенных решений, полученных при помощи пакетов прикладных программ для инженерного анализа — ANSYS и MATLAB.

7. Создан метод построения и расчета оценок погрешности на основе пары аппроксимаций Арнольда–Боффи–Фалка в плоских задачах механики деформируемого твердого тела, эффективность которого подтверждена результатами вычислительного эксперимента.

Разработанные и реализованные в диссертации функциональные методы дают возможность явно контролировать точность приближенных решений известных краевых задач механики в рамках классической и неклассической линейной теории упругости. Такой контроль является одной из ключевых проблем современного математического моделирования. Проведенные теоретические исследования могут послужить основой для распространения подхода на неклассические пространственные задачи. Вычислительные методики могут оказаться полезны при проверке качества инженерных расчетов, а также могут быть использованы в научных исследованиях в области разработки новых методов вычислений.

Достоверность полученных в диссертации теоретических результатов обеспечивается тем фактом, что они опираются на строгие математические методы теории двойственности вариационного исчисления, методы математической физики, теории уравнений в частных производных и функционального анализа. Прикладная часть исследования основана на широко применяющемся в научной и инженерной практике методе конечных элементов. Методология обоснования эффективности функционального подхода включает сравнение с результатами работы известных коммерческих пакетов, а также с данными, взятыми из работ других авторов. Для большинства расчетов приближенных решений и графического отображения результатов использовались пакеты ANSYS и MATLAB, а комплексы программ для оценки точности решений в плоских задачах теории упругости реализованы лично автором на основе современных версий компилятора компании INTEL языка FORTRAN стандарта 2003/2008 со встроенной IMSL-библиотекой.

Представленный материал прошел апробацию на следующих конференциях и семинарах, в том числе всероссийских и международных: Workshop on Advanced Computer Simulation Methods (Международный математический институт им. Л. Эйлера, Санкт-Петербург, 2009 г.); VI Всероссийский форум «Наука и инновации в технических университетах» (Санкт-Петербург, 2012 г.); 1st joint LUH-SPbSPU Workshop on Computational Methods and Modeling in Engineering (Ганновер, Германия, 2012 г.); Городской семинар по механике (Институт проблем машиноведения РАН, Санкт-Петербург, 2013 г.); The 6th Workshop on Reliable Methods of Mathematical Modeling (Ювяскуля, Финляндия, 2013 г.); The European Conference on Numerical Mathematics and Advanced Applications (Лозанна, Швейцария, 2013 г.); 6th International Conference on Advanced Computational Methods in Engineering (Гент, Бельгия, 2014 г.); X Международная конференция «Сеточные методы для краевых задач и приложения» (Казань, 2014 г.); XIX Зимняя школа по механике сплошных сред (Институт механики сплошных сред УрО РАН, Пермь, 2015 г.).

В число основных работ по теме диссертации входят 12 статей[8], а общее количество — 18 публикаций[9].

Основная часть представленных результатов получена при поддержке грантов РФФИ № 08-01-00655-а, № 11-01-00531-а и № 14-01-00162-а в качестве исполнителя, гранта РФФИ № 14-01-31273-мол_а в качестве руководителя, при поддержке Правительства Санкт-Петербурга в рамках конкурсов 2010 и 2012 годов для молодых кандидатов наук, а также в рамках государственного задания Министерства образования и науки Российской Федерации в 2013 году.

Диссертация состоит из введения, пяти глав, заключения и списка литературы. Ее объем составляет 298 страниц. Текст включает 41 рисунок и 30 таблиц, а список литературы — 504 источника.

---

[8] публикации [79], [80], [81], [82], [222], [224], [225], [245], [250], [253], [254], [256], входящие в перечень ВАК и/или Web of Science, Scopus, MathSciNet, zbMATH, Springer, и их соответствие приведенным выше положениям, выносимым на защиту: **1.** [222] (оригинальная версия — [248]), [224], [250]; **2.** [224]; **3.** [82], [254] (оригинальная версия — [73]); **4.** [80], [225]; **5.** [80], [253]; **6.** [79], [80], [81], [245], [253], [256]; **7.** [80], [81], [225]

[9] другие публикации: [83], [226], [255], [257], [258], [259]

Глава 1

Основные подходы к апостериорному контролю погрешности решений эллиптических краевых задач

Данная глава содержит более подробное описание тех подходов к построению апостериорных оценок и индикаторов погрешности, о которых шла речь во введении. Качественное изложение той части, которая относится к контролю точности в рамках метода конечных элементов, приводится, например, в монографиях R. Verfürth [58], M. Ainsworth, J.T. Oden [60]. Описание функционального подхода в достаточно полном объеме можно найти в работе С.И. Репина [196] и в монографиях P. Neittaanmäki, S. Repin [63], S. Repin [64], O. Mali, P. Neittaanmäki, S. Repin [66].

Поскольку библиография, прямо или косвенно затрагивающая вопросы построения апостериорных оценок погрешности и адаптивных алгоритмов, чрезвычайно обширна и насчитывает тысячи источников, ниже ограничимся только теми результатами, которые наиболее близко относятся к рассмотренным в диссертации классам краевых задач и обсуждаемым в ней проблемам. В первой главе методы излагаются на примере классической краевой задачи — задачи Дирихле для уравнения Пуассона. В дальнейшем, где это необходимо, приводятся отдельные дополнительные обзоры литературы и результатов, полученных для рассматриваемых в других главах задач: балки и пластины, плоская деформация и, наконец, континуум Коссера. При написании главы переработан и дополнен материал кандидатской диссертации автора [243] — в частности, включены результаты, полученные за последнее десятилетие. Названия групп методов и некоторая смежная терминология даются на русском языке с указанием оригинального английского названия или термина, чтобы максимально избежать возможных разночтений в трактовке понятий.

1.1. Связь погрешности приближенного решения с нормой невязки соответствующего дифференциального уравнения

Рассмотрим следующую классическую задачу:
найти скалярное поле u, удовлетворяющее системе

$$\begin{cases} -\Delta u = f & \text{в } \Omega, \\ u = 0 & \text{на } \Gamma, \end{cases} \tag{1.1}$$

где Ω — ограниченная связная область с непрерывной по Липшицу границей Γ и правая часть $f \in \mathbb{L}_2(\Omega)$, где $\mathbb{L}_2(\Omega)$ означает пространство Лебега суммируемых с квадратом функций в смысле соответствующего интеграла. Как известно, данная задача допускает следующую обобщенную формулировку:
найти такой элемент $u \in U_0$, что

$$\int\limits_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla w \, d\Omega = \int\limits_{\Omega} f w \, d\Omega, \quad \forall w \in U_0, \tag{1.2}$$

где $U_0 := \overset{\circ}{\mathbb{W}}{}_2^1(\Omega)$ — обозначает подпространство функций из пространства $\mathbb{W}_2^1(\Omega)$, обращающихся в ноль на границе области, а $\mathbb{W}_2^1(\Omega)$ — классическое пространство Соболева, состоящее из функций, принадлежащих вместе со своими обобщенными производными первого порядка пространству $\mathbb{L}_2(\Omega)$. Символ $:=$ означает равенство по определению, а скалярное произведение стандартно обозначается точкой.

Пусть вычислена некоторая аппроксимация $\tilde{u} \in U_0$ точного решения краевой задачи. Контроль ее точности в этом случае сводится к оценке интересующей нас нормы отклонения $e = u - \tilde{u}$. В диссертации речь пойдет об апостериорных оценках энергетической нормы, для которой будет использовано специальное обозначение — $\| \cdot \|$. В данном случае

$$\|e\|^2 := \|\nabla e\|_\Omega^2 = \int\limits_\Omega |\nabla e|^2 \, d\Omega.$$

Отметим, что для различных $\mathbb{L}_2$-норм далее введено единое обозначение — $\| \cdot \|_\omega$, в котором индекс ω конкретизирует область.

Легко видеть, что для приближенного решения $\tilde{u}$ задачи (1.2) ошибка e является решением аналогичной задачи, но с менее гладкой правой частью, а именно

$$\int\limits_\Omega \nabla e \cdot \nabla w \, d\Omega = \int\limits_\Omega (fw - \nabla \tilde{u} \cdot \nabla w) \, d\Omega, \quad \forall w \in U_0. \tag{1.3}$$

Можно показать (см., например, I. Babuška, W.C. Rheinboldt [53], R. Verfürth [58], K. Eriksson, C. Johnson [101]), что в этом случае энергетическая норма ошибки контролируется через норму невязки $f + \Delta \tilde{u}$ исходного дифференциального уравнения в пространстве $\mathbb{W}_2^{-1}(\Omega)$. Эта норма имеет вид

$$\sup_{w \in U_0, w \neq 0} \frac{\int\limits_\Omega (fw - \nabla \tilde{u} \cdot \nabla w) \, d\Omega}{\|w\|_{1,\Omega}},$$

где

$$\|w\|_{1,\Omega}^2 := \|w\|_\Omega^2 + \|\nabla w\|_\Omega^2.$$

В действительности, если ввести другую (эквивалентную) норму

$$[\![f + \Delta \tilde{u}]\!]_{(-1)} := \sup_{w \in U_0, w \neq 0} \frac{\int\limits_\Omega (fw - \nabla \tilde{u} \cdot \nabla w) \, d\Omega}{\|\nabla w\|_\Omega}, \tag{1.4}$$

в которой в знаменателе стоит не полная норма в рассматриваемом соболевском пространстве, а старшая норма, то мы получим соотношение

$$\|\nabla u - \nabla \tilde{u}\|_\Omega \; = \; [\![f + \Delta \tilde{u}]\!]_{(-1)}, \quad \forall \tilde{u} \in U_0. \tag{1.5}$$

Покажем справедливость данного утверждения. Действительно, из соотношения (1.3), положив $w = e$, имеем

$$\|\nabla e\|_\Omega \; = \; \frac{\int\limits_\Omega (fe - \nabla \tilde{u} \cdot \nabla e) \, d\Omega}{\|\nabla e\|_\Omega} \; \leq \; [\![f + \Delta \tilde{u}]\!]_{(-1)}.$$

С другой стороны, используя (1.3), по неравенству Гёльдера получаем обратную оценку

$$\int\limits_{\Omega} (fw - \nabla\tilde{u} \cdot \nabla w)\, d\Omega \;\le\; \|\nabla e\|_{\Omega} \|\nabla w\|_{\Omega}, \quad \forall w \in U_0,$$

или

$$\|f + \Delta v\|_{(-1)} \;\le\; \|\nabla e\|_{\Omega}.$$

Отсюда следует, что значения двух норм совпадают.

На факте, что «негативная» норма невязки позволяет контролировать погрешность приближенных решений рассматриваемой задачи, основано крупное направление в теории апостериорного контроля точности, начало которому положили классические работы I. Babuška, W.C. Rheinboldt [54] и [53]. Методы этой группы носят название методов невязок — явных и неявных.

1.2. Явный метод невязок

Суть явного метода[1] заключается в построении вычисляемой верхней оценки для выражения в правой части соотношения (1.5). Важную роль при ее выводе сыграл оператор интерполирования специального вида, речь о котором идет ниже. Поскольку именно эта конструкция легла в основу теоретического обоснования соответствующих неравенств, то ограничимся ее описанием без обсуждения других подобных результатов, обзор которых выходит за рамки основной темы диссертации.

Оператор, предложенный Ф. Клеманом в работе [125], позволяет интерполировать функции, не имеющие необходимой гладкости. Известно, что в плоской области Ω классическая схема построения оператора интерполирования не может быть использована для произвольного элемента u, который имеет лишь первые обобщенные производные. Такая ситуация возникает по причине того, то значения функции u в отдельных точках могут быть не определены. В рабо-

[1] в англоязычной терминологии — explicit residual method

те [125] рассмотрен один из возможных способов интерполяции функций из пространств Соболева, аналогичных классическому. Построение носит локальный характер и основывается на разбиении области Ω на элементы и привлечении стандартных аппроксимаций метода конечных элементов. Опишем, как это делается, на примере конечномерного подпространства $U_h \subset U_0$, полученного на основе триангуляции области и использования простейших кусочно-линейных аппроксимаций. В данном случае индекс h обозначает характерный размер элементов сетки.

Предположим, что Ω — ограниченная связная область в $\mathbb{R}^2$ с полигональной границей. Рассмотрим разбиение области на треугольные элементы (триангуляцию). С каждым узлом сетки X свяжем совокупность прилегающих к нему элементов T, обозначаемую Ω_X (см. Рисунок 1.1). В дальнейшем для краткости будет также использоваться термин «патч»[2]. Рассмотрим произвольную функ-

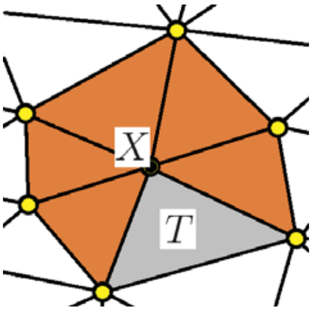


Рисунок 1.1: Совокупность элементов Ω_X, включающих X в качестве вершины.

цию $u \in U_0$ и построим ее локальную проекцию на пространство $\mathcal{P}_k(\Omega_X)$ — пространство полиномов степени не выше k. Обозначая полученный полином $\Pi_X u$, имеем

$$\int\limits_{\Omega_X} u\, p\, d\Omega = \int\limits_{\Omega_X} (\Pi_X u)\, p\, d\Omega, \quad \forall p \in \mathcal{P}_k(\Omega_X).$$

В отличие от самой функции, значение полинома $\Pi_X u$ в узле сетки X всегда определено и, следовательно, может быть использовано для построения стандартного кусочно-линейного восполнения на элементах сетки. В результате мы

[2] от англ. patch

получаем оператор интерполирования $I_h : U_0 \to U_h$, для которого значение $I_h u$ в узле X определяется следующим образом: $(I_h u)(X) = (\Pi_X u)(X)$. В случае необходимости учета нулевого краевого условия, для граничных узлов значение $(I_h u)(X)$ полагается равным нулю.

Основной результат работы [125] — это неравенства, устанавливающие необходимые аппроксимационные свойства оператора интерполирования Клемана, а именно, для каждого элемента T и каждой его стороны E справедливы следующие оценки:

$$\|u - I_h u\|_T \leq \tilde{C}_{\Omega_T}\, h_T\, \|\nabla u\|_{\Omega_T}, \tag{1.6}$$

$$\|u - I_h u\|_E \leq \tilde{C}_{\Omega_E} \sqrt{h_E}\, \|\nabla u\|_{\Omega_E}, \tag{1.7}$$

где Ω_T и Ω_E — объединения элементов триангуляции, имеющих общие вершины с T и E, соответственно; h_T — длина наибольшей стороны элемента, h_E — длина E. Постоянные $\tilde{C}_{\Omega_T}$ и $\tilde{C}_{\Omega_E}$ не зависят от h_T и h_E, но зависят от величины углов элементов, которые формируют области Ω_T и Ω_E. На Рисунке 1.2 в качестве иллюстрации изображена только совокупность элементов Ω_T, поскольку множество Ω_E имеет аналогичную структуру. Позднее были предложены

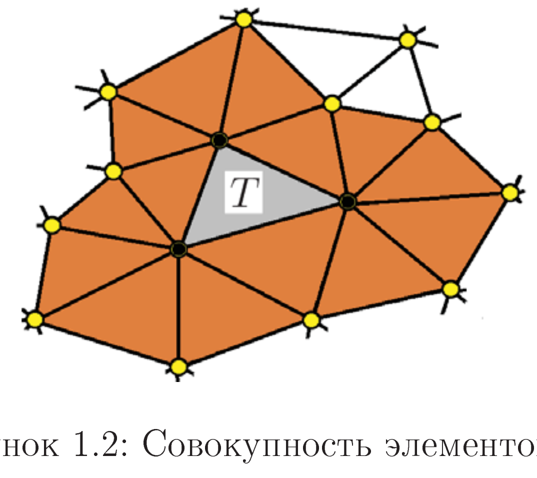


Рисунок 1.2: Совокупность элементов Ω_T.

различные модификации оператора интерполирования Клемана, подобные по свойствам рассмотренному выше (см., например, C. Bernardi, V. Girault [260], C. Carstensen, R. Verfürth [111]).

С помощью оператора интерполирования Клемана удается оценить правую часть (1.4), входящую в соотношение (1.5). Это возможно сделать в случае, когда приближенное решение $\tilde{u}$ является галеркинской аппроксимацией u_h, то есть точным решением соответствующей конечномерной задачи, которое удовлетворяет следующему соотношению:

$$\int\limits_{\Omega} \nabla u_h \cdot \nabla w_h \, d\Omega = \int\limits_{\Omega} f w_h \, d\Omega, \quad \forall w_h \in U_h.$$

Отсюда следует, что для произвольного элемента $w \in U_0$ имеет место равенство

$$\int\limits_{\Omega} \nabla u_h \cdot \nabla (I_h w) \, d\Omega - \int\limits_{\Omega} f \, (I_h w) \, d\Omega = 0.$$

Таким образом

$$\int\limits_{\Omega} (f w - \nabla u_h \cdot \nabla w) \, d\Omega = \int\limits_{\Omega} (f \bar{w} - \nabla u_h \cdot \nabla \bar{w}) \, d\Omega,$$

где $\bar{w} = w - I_h w$. С другой стороны, представляя интеграл по области в виде суммы интегралов по элементам и применяя формулу интегрирования по частям, получаем

$$\int\limits_{\Omega} (f \bar{w} - \nabla u_h \cdot \nabla \bar{w}) \, d\Omega = \sum_{T \in \mathcal{T}_h} \left(\int\limits_{T} (f + \Delta u_h) \bar{w} \, d\Omega - \int\limits_{\partial T \setminus \Gamma} (\nabla u_h \cdot n_T) \bar{w} \, dE \right),$$

где $\mathcal{T}_h$ — совокупность всех элементов разбиения, а n_T — внешняя нормаль к границе элемента T. В сумму входят только те стороны треугольников, которые не попадают на границу области Γ. Учитывая тот факт, что каждое внутреннее ребро является общим для пары элементов и обходится дважды, второе слагаемое можно переписать как сумму по множеству $\mathcal{E}_h$ — множеству всех ребер с исключением тех, которые лежат на границе области Ω. А именно

$$\sum_{T \in \mathcal{T}_h} \left(- \int\limits_{\partial T \setminus \Gamma} (\nabla u_h \cdot n_T) \bar{w} \, dE \right) = \sum_{E \in \mathcal{E}_h} \int\limits_{E} j(\nabla u_h \cdot n_E) \bar{w} \, dE,$$

где n_E — нормаль к соответствующей стороне, а $j()$ — функция, дающая скачок нормальной составляющей векторного поля ∇u_h. Для каждого ребра E в качестве основного может быть выбрано любое из двух направлений нормали. При этом скачок определен как разность

$$j(\nabla u_h \cdot n_E) := (\nabla u_h\,|_{T_1} - \nabla u_h\,|_{T_2}) \cdot n_E,$$

где локальная нумерация элементов с общей стороной E выбрана так, что нормаль n_E направлена от T_2 к T_1.

Оценим слагаемые под знаком суммы по неравенству Гёльдера и используем локальные свойства оператора интерполирования Клемана

$$\sum_{T \in \mathcal{T}_h} \int\limits_T (f + \Delta u_h)\bar{w}\, d\Omega + \sum_{E \in \mathcal{E}_h} \int\limits_E j(\nabla u_h \cdot n_E)\bar{w}\, dE \leq$$

$$\leq \sum_{T \in \mathcal{T}_h} \|f + \Delta u_h\|_T \, \|\bar{w}\|_T + \sum_{E \in \mathcal{E}_h} \|j(\nabla u_h \cdot n_E)\|_E \, \|\bar{w}\|_E \leq$$

$$\leq \sum_{T \in \mathcal{T}_h} h_T \tilde{C}_{\Omega_T} \|f + \Delta u_h\|_T \, \|\nabla w\|_{\Omega_T} + \sum_{E \in \mathcal{E}_h} \sqrt{h_E}\, \tilde{C}_{\Omega_E} \|j(\nabla u_h \cdot n_E)\|_E \, \|\nabla w\|_{\Omega_E}.$$

Применяя неравенство Коши–Шварца, объединяя начало и конец вывода и подставляя элемент $e_h := u - u_h$, получаем следующую оценку:

$$\|\nabla e_h\|_\Omega = \sup_{w \in U_0, w \neq 0} \frac{\int\limits_\Omega (fw - \nabla u_h \cdot \nabla w)\, d\Omega}{\|\nabla w\|_\Omega} \leq$$

$$\leq \tilde{C}_1 \left(\sum_{T \in \mathcal{T}_h} h_T^2 \|f + \Delta u_h\|_T^2 \right)^{1/2} + \tilde{C}_2 \left(\sum_{E \in \mathcal{E}_h} h_E \|j(\nabla u_h \cdot n_E)\|_E^2 \right)^{1/2}, \quad (1.8)$$

где $\tilde{C}_1$ и $\tilde{C}_2$ — постоянные, существенно зависящие от структуры разбиения и от всего набора локальных постоянных $\tilde{C}_{\Omega_T}$ и $\tilde{C}_{\Omega_E}$. Это значит, вообще говоря, что при адаптации сетки в процессе решения задачи значения констант необходимо пересчитывать, что влечет за собой серьезные затруднения при практическом применении метода невязок для получения гарантированных верхних оценок нормы ошибки. В частности, в работе R.E. Bank [57, с. 127] упомянуто, что явный метод невязок был реализован в ранней версии программного пакета PLTMG[3] и был подвергнут интенсивному тестированию. Уже тогда было выявлено решающее влияние весовых множителей в оценке на качество результата. Эксперименты проводились с различными наборами констант, но ни один из них не позволил получить глобальных оценок достаточной точности для широкого класса задач на неравномерных разбиениях. Чтобы избежать проблем с оценкой постоянных, часто говорят о том, что конечная цель заключается лишь в индикации зон, где погрешности велики относительно среднего значения по всей области. В этом случае значения множителей условно можно положить равными единице или из каких-то соображений предложить другой баланс между ними.

В литературе известны различные индикаторы, основанные на оценке (1.8). В частности — это модификация (1.9), содержащая исключительно скачки. Подобные варианты обсуждаются, например, в работах R. Verfürth [58], M. Ainsworth, J.T. Oden [60], C. Carstensen, R. Verfürth [111], E. Rank, O.C. Zienkiewicz [98]

$$\eta_T^j := \left(\frac{1}{2} \sum_{E \in \mathcal{E}_T} h_E \| j(\nabla u_h \cdot n_E) \|_E^2 \right)^{1/2}, \tag{1.9}$$

где $\mathcal{E}_T$ — совокупность ребер элемента T, не попадающих на границу области Γ.

Другим частным случаем является известный индикатор I. Babuška, A. Miller [97] (см., также, R. Rodríguez [104])

$$\eta_T^{BM} := \left(|T| \, \| f + \Delta u_h \|_T^2 + \frac{1}{2} \sum_{E \in \mathcal{E}_T} h_E \| j(\nabla u_h \cdot n_E) \|_E^2 \right)^{1/2}, \tag{1.10}$$

где $|T|$ — площадь элемента. В работе I. Babuška, R. Durán, R. Rodríguez [103] также рассмотрена незначительная модификация данного индикатора для слу-

[3] описание одной из поздних версий можно найти в [261]

чая линейных конечных элементов

$$\eta_T^{BDR} := \left(|T|^2 (f_T)^2 + \frac{1}{2} \sum_{E \in \mathcal{E}_T} h_E^2 |j(\nabla u_h \cdot n_E)|^2 \right)^{1/2}, \tag{1.11}$$

где $f_T := \frac{1}{|T|} \int\limits_T f \, d\Omega$. В статье доказывается, что индикатор эквивалентен ошибке. Другими словами, существуют такие положительные постоянные c_1 и c_2, что

$$c_1 \leq \frac{\left(\sum_{T \in \mathcal{T}_h} \left(\eta_T^{BDR} \right)^2 \right)^{1/2}}{\|\nabla(u - u_h)\|_\Omega} \leq c_2.$$

При этом важно отметить основной вывод [103] о том, что значение констант эквивалентности c_1 и c_2 существенно зависит от геометрии сетки и, в меньшей степени, от гладкости точного решения u. Определяющую роль при локальной индикации погрешности в этом случае играет величина минимального угла в элементах триангуляции. Следует заметить, что без знания значения постоянной c_1 индикаторы типа (1.10) или (1.11) не могут обеспечить гарантированных верхних оценок нормы ошибки. Например, об этом свидетельствуют результаты, приведенные в работе F.A. Bornemann, B. Erdmann, R. Kornhuber [262]. Тем не менее, в некоторых ранних работах этот подход рассматривался как надежный и дающий гарантированные верхние оценки погрешности в энергетической норме при наличии упрощенной методики расчета констант (см. C. Johnson, P. Hansbo [52]). Еще более нетривиальной ситуация выглядит, если речь идет о hp-версии метода конечных элементов. Обзор литературы, касающейся применения классических методов апостериорного контроля погрешности для этого случая можно найти, например, в работе J.M. Melenk, B.I. Wohlmuth [113]. В ней рассмотрено обобщение операторов типа Клемана на случай hp-версии для решения задачи Дирихле для уравнения Пуассона в $\mathbb{R}^2$, а также получены необходимые технические оценки. Численные результаты показывают, что без учета весов индикатор, построенный при помощи явного метода невязок для p-версии, может недооценивать погрешность, имея другое асимптотическое поведение с ростом значения параметра p даже при решении задачи на фиксированных разбиениях.

1.3. Метод невязок с использованием сопряженной задачи

В книге W. Bangerth, R. Rannacher [62] изложен способ модификации метода невязок с весами, определяемыми через решение сопряженной задачи специального вида[4]. Он опирается на результаты более ранней работы R. Becker, R. Rannacher [106]. Этот метод также применим только к галеркинским аппроксимациям, то есть точным решениям соответствующих конечномерных задач. Покажем основные идеи построения.

Вновь, начиная с преобразования соотношения

$$\int\limits_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla w \, d\Omega = \int\limits_{\Omega} f w \, d\Omega, \quad \forall w \in U_0,$$

имеем

$$\int\limits_{\Omega} \nabla e_h \cdot \nabla w \, d\Omega = \int\limits_{\Omega} f w \, d\Omega - \int\limits_{\Omega} \nabla u_h \cdot \nabla w \, d\Omega, \quad \forall w \in U_0,$$

где $e_h = u - u_h$. Рассмотрим сопряженную задачу следующего вида, которая в данном случае также связана с уравнением Пуассона:
найти элемент $u^c \in U_0$ такой, что

$$\int\limits_{\Omega} \nabla u^c \cdot \nabla w \, d\Omega = \|\nabla e_h\|_{\Omega}^{-1} \int\limits_{\Omega} \nabla e_h \cdot \nabla w \, d\Omega, \quad \forall w \in U_0$$

при фиксированном элементе e_h. Тогда, подставляя $w = e_h$, имеем

$$\int\limits_{\Omega} \nabla u^c \cdot \nabla e_h \, d\Omega = \|\nabla e_h\|_{\Omega} = \int\limits_{\Omega} f u^c \, d\Omega - \int\limits_{\Omega} \nabla u_h \cdot \nabla u^c \, d\Omega.$$

Используем галеркинскую ортогональность

$$\int\limits_{\Omega} \nabla (u - u_h) \cdot \nabla w_h \, d\Omega = 0 = \int\limits_{\Omega} f w_h \, d\Omega - \int\limits_{\Omega} \nabla u_h \cdot \nabla w_h \, d\Omega, \quad \forall w_h \in U_h.$$

[4] DWR — Dual Weighted Residual method

Объединяя два последних соотношения, получаем

$$\|\nabla e_h\|_\Omega = \int\limits_\Omega f(u^c - w_h)\, d\Omega - \int\limits_\Omega \nabla u_h \cdot \nabla(u^c - w_h)\, d\Omega =$$

$$= \sum_{T\in\mathcal{T}_h} \left(\int\limits_T (f + \Delta u_h)(u^c - w_h)\, d\Omega - \int\limits_{\partial T\setminus\Gamma} (\nabla u_h \cdot n_T)(u^c - w_h)\, dE \right) \le$$

$$\le \sum_{T\in\mathcal{T}_h} \left(\|f + \Delta u_h\|_T \|u^c - w_h\|_T + \sum_{E\in\mathcal{E}_T} \|\frac{1}{2} j(\nabla u_h \cdot n_E)\|_E \|u^c - w_h\|_E \right)$$

и применяя неравенство Коши–Шварца, приходим к желаемому результату [62, с. 28–29]

$$\|\nabla e_h\|_\Omega \le \sum_{T\in\mathcal{T}_h} \omega_T \rho_T \le \left(\sum_{T\in\mathcal{T}_h} h_T^2 \rho_T^2 \right)^{1/2} \left(\sum_{T\in\mathcal{T}_h} h_T^{-2} \omega_T^2 \right)^{1/2};$$

$$\rho_T := \left(\|f + \Delta u_h\|_T^2 + h_T^{-1} \sum_{E\in\mathcal{E}_T} \|\frac{1}{2} j(\nabla u_h \cdot n_E)\|_E^2 \right)^{1/2};$$

$$\omega_T := \left(\|u^c - w_h\|_T^2 + h_T \sum_{E\in\mathcal{E}_T} \|u^c - w_h\|_E^2 \right)^{1/2}.$$

Таким образом, весовые множители в явном методе невязок теоретически могут быть найдены через решение сопряженной задачи. Однако при практическом применении возникает вопрос, связанный с погрешностью самого этого решения и ее влиянием на оценку для исходной задачи. Также получается, что при такой процедуре теряется основное достоинство явного метода невязок — низкая вычислительная трудоемкость получения индикатора. У данной группы методов, однако, есть еще одно применение — подход используется при построении оценок в терминах проблемно-ориентированных величин, о которых речь пойдет во второй части главы.

1.4. Метод невязок с решением локальных задач

Другая группа оценок в литературе часто носит название неявного метода невязок[5]. Эти оценки являются более трудоемкими в реализации, но лишены основного недостатка явного метода невязок, поскольку не содержат мультипликативных постоянных. Ключевая идея метода заключается в решении последовательности локальных задач вида (1.3), включающих в себя невязку дифференциального уравнения на заданном приближенном решении в качестве правой части. При этом используются аппроксимации более высокого порядка, чем при рассмотрении исходной задачи. Нормы решений локальных задач для ошибки естественно рассматривать как индикатор локальной точности исходного приближенного решения.

В работе I. Babuška, W.C. Rheinboldt [53] впервые рассматривался индикатор такого типа, основанный на построении локальных задач с граничным условием типа Дирихле. Такие индикаторы обеспечивают нижние оценки энергетической нормы погрешности. Для того, чтобы получить ее оценку сверху, необходимо строить задачи с условием типа Неймана — приведем пример из работы R.E. Bank, A. Weiser [96]. Используя (1.3) и интегрируя по частям, разделим исходную задачу следующим образом:

$$\int\limits_{\Omega} \nabla e_h \cdot \nabla w \, d\Omega = \sum_{T \in \mathcal{T}_h} \int\limits_{T} \nabla(u - u_h) \cdot \nabla w \, d\Omega,$$

$$\int\limits_{\Omega} (fw - \nabla u_h \cdot \nabla w) \, d\Omega = \sum_{T \in \mathcal{T}_h} \int\limits_{T} (f + \Delta u_h) w \, d\Omega + \sum_{E \in \mathcal{E}_h} \int\limits_{E} j(\nabla u_h \cdot n_E) w \, dE.$$

Для кусочно-линейной аппроксимации u_h значение Δu_h на каждом элементе равно нулю.

Основываясь на приведенном выше разложении, сформулируем задачи следующего вида:

---

[5] implicit residual method

найти элемент $e_T \in \mathcal{P}_2^0(T)$, удовлетворяющий соотношению

$$\int\limits_T \nabla e_T \cdot \nabla w_T \, d\Omega = \int\limits_T f w_T \, d\Omega + \frac{1}{2} \sum_{E \in \mathcal{E}_T} \int\limits_E j(\nabla u_h \cdot n_E) w_T \, dE$$

для любой пробной функции $w_T \in \mathcal{P}_2^0(T)$, где $\mathcal{P}_2^0(T)$ обозначает пространство квадратичных полиномов, обращающихся в ноль в вершинах элемента T. Величина $\eta_T := \|\nabla e_T\|_T$ дает нам локальный индикатор погрешности $\|\nabla e_h\|_T$, а корень из суммы квадратов этих величин обеспечивает глобальную оценку погрешности во всей области.

Дальнейшие исследования, например, R.E. Bank [57] привели не только к развитию метода, но и его более полному математическому обоснованию. В частности, асимптотическая точность индикатора, полученного в [96], установлена в работе R. Durán, R. Rodríguez [102][6]. Авторами также доказывается, что соответствующая апостериорная оценка локально точна в тех частях исходной области, в которых решение обладает повышенной гладкостью и выполнены довольно жесткие дополнительные требования на структуру сетки. При этом используется подход к доказательству, который применялся в работе R. Durán, M.A. Muschietti, R. Rodríguez [148]. Оно опирается на локально возникающий эффект суперсходимости, условия которого установлены M.F. Wheeler, J.R. Whiteman [142]. Работа [102] также содержит важный контрпример, который показывает, что даже при наличии у решения повышенной гладкости в случае структурированной сетки, но со структурой, отличающейся от необходимой, данная оценка уже не будет являться асимптотически точной.

В общем виде правая часть локальных задач для методов такого типа включает в себя величину невязки дифференциального уравнения на элементе и аппроксимацию нормальной составляющей потока ∇u на его ребрах. Это следует из представления, полученного после интегрирования по частям

$$\sum_{T \in \mathcal{T}_h} \int\limits_T \nabla(u - u_h) \cdot \nabla w \, d\Omega =$$

[6] определение этого и нескольких других понятий см. в параграфе 1.12

$$= \sum_{T \in \mathcal{T}_h} \left(\int_T (fw - \nabla u_h \cdot \nabla w)\, d\Omega + \sum_{E \in \mathcal{E}_T} \int_E (\nabla u \cdot n_E) w\, dE \right).$$

Второе слагаемое в правой части на самом деле равно нулю, если считать общий вклад по всей области. Однако при разбиении общей задачи на локальные оно должно быть учтено. Мы приходим к постановке вида

$$\int_T \nabla e_T \cdot \nabla w_T \, d\Omega = \int_T (f w_T - \nabla u_h \cdot \nabla w_T)\, d\Omega + \sum_{E \in \mathcal{E}_T} \int_E g_T^E w_T \, dE,$$

где граничное условие типа Неймана задается той величиной g_T^E, которую мы используем на каждом элементе в качестве аппроксимации неизвестного значения $\nabla u \cdot n_E$ на его ребрах. Известно, что составляющие g_T^E должны быть «приведены к равновесию»[7] по всей совокупности элементов T. Это влечет за собой улучшение качества оценок погрешности и необходимо, в частности, для обоснования разрешимости локальных задач. Условия равновесия имеют следующий вид:

$$g_{T_1}^E = -g_{T_2}^E, \quad \forall E \in \mathcal{E}_h,$$

$$\int_T f\, d\Omega + \sum_{E \in \mathcal{E}_T} \int_E g_T^E \, dE = 0, \quad \forall T \in \mathcal{T}_h,$$

где T_1 и T_2 — элементы, для которых сторона E является общей.

В обзорной работе Z. Zhang, N. Yan [263] говорится, что неявные методы невязок должны предположительно работать лучше, чем явные, и в каких-то случаях это действительно так. Однако, согласно M. Ainsworth [264], их эффективность в значительной степени зависит от выбора локальных подпространств для построения метода конечных элементов, а по результатам M. Ainsworth, J.T. Oden [265] — она также зависит от способа построения граничных условий. Индикаторы данного типа с различным подбором граничных условий для локальных задач исследованы, например, в работах U. Brink, E. Stein [129], P. Díez, N. Parés, A. Huerta [130], I. Babuška, T. Strouboulis, C.S. Upadhyay, S.K. Gangaraj,

[7] equilibrated residual method

K. Copps [131]. В них рассмотрены способы как с приведением к равновесию, так и без него, а также оценена степень влияния конечномерного подпространства для поиска элемента e_T на качество получаемых оценок. Последняя из указанных работ посвящена вопросу сравнения устойчивости методов данной группы при различных процедурах приведения к равновесию. Из результатов следует, что алгоритмы, включающие в себя специальный подбор граничных условий, оказываются предпочтительнее с точки зрения качества оценок погрешности и их надежности. Результаты численных экспериментов [96] и [129], с одной стороны, также указывают на эффективность неявного метода невязок, с другой, позволяют сделать заключение, что оценки не являются гарантированными — индекс эффективности для них может быть как больше, так и меньше единицы. Этот вывод подтверждается результатами R.E. Bank, B.D. Welfert [266], R. Verfürth [99], которые обобщают [96] на случай задачи Стокса, а также вычислительным экспериментом в работе X. Wan [267], направленным на анализ чувствительности индикаторов такого типа к структуре конечно-элементных разбиений при различной гладкости решения. В статье рассмотрены примеры для уравнений $\Delta u = 0$ и $\Delta u + u = 0$ со смешанными краевыми условиями на триангуляциях, построенных при помощи как прямоугольных элементов, так и тупоугольных с малыми острыми углами. Улучшена классическая процедура уравновешивания M. Ainsworth, J.T. Oden [268] для локальных задач с граничным условием типа Неймана и показано, что даже для элементов с существенно «деформированной» геометрией удается получить индексы эффективности в диапазоне 0.9–2.1. Сравнительный анализ различных индикаторов также можно найти в работе I. Babuška, T. Strouboulis , C.S. Upadhyay, S.K. Gangaraj [132].

1.5. Иерархический метод

Еще один способ построения апостериорных оценок, опирающийся на соотношение (1.3), основан на использовании иерархических базисов. Следуя известной классической работе R.E. Bank, R.K. Smith [269], опишем его для рассматриваемой задачи. Введем обозначения для соответствующих билинейной и линейной форм, входящих в обобщенную постановку задачи, а именно

$$a(u,w) := \int\limits_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla w \, d\Omega, \quad l(w) := \int\limits_{\Omega} f w \, d\Omega,$$

тогда исходная задача может быть записана в виде:
найти элемент $u \in U_0$ такой, что

$$a(u,w) = l(w), \forall w \in U_0,$$

а энергетическая норма выражена соотношением

$$\|u\| := (a(u,u))^{1/2}.$$

Аналогичным образом выглядит определение галеркинского приближения u_h на конечномерном подпространстве U_h

$$a(u_h, w_h) = l(w_h), \quad u_h \in U_h, \forall w_h \in U_h.$$

Имеет место следующее свойство:

$$\|u - u_h\| = \inf_{v_h \in U_h} \|u - v_h\|. \tag{1.12}$$

Действительно,

$$\|u - v_h\|^2 = \|u - u_h + u_h - v_h\|^2 = \|u - u_h\|^2 +$$
$$+ \|u_h - v_h\|^2 + 2 \int\limits_{\Omega} \nabla(u - u_h) \cdot \nabla(u_h - v_h) \, d\Omega.$$

Поскольку последний интеграл равен нулю в силу галеркинской ортогональности, имеем неравенство

$$\|u - v_h\| \geq \|u - u_h\|, \quad \forall v_h \in U_h,$$

которое доказывает (1.12). Пусть теперь имеется более широкое конечномерное подпространство $\bar{U}_h$

$$U_h \subset \bar{U}_h \subset U_0,$$

галеркинская аппроксимация на котором обозначается $\bar{u}_h$, и справедливо предположение о насыщении[8]

$$\|u - \bar{u}_h\| \leq \beta \|u - u_h\|, \tag{1.13}$$

где $\beta < 1$ — константа, не зависящая от характерного размера сетки h. Отметим, что неравенство $\beta \leq 1$ очевидно — оно следует из (1.12), но нам требуется более сильное условие.

Заменяя v_h на u_h, u_h на $\bar{u}_h$ и U_h на $\bar{U}_h$, по аналогии с (1.12) несложно показать равенство

$$\|u - u_h\|^2 = \|u - \bar{u}_h\|^2 + \|\bar{u}_h - u_h\|^2.$$

Как следствие, используя свойство (1.13), получаем двустороннее неравенство

$$(1 - \beta^2)\|u - u_h\|^2 \leq \|\bar{u}_h - u_h\|^2 \leq \|u - u_h\|^2.$$

Тем самым построена апостериорная оценка. Однако ее применение требует нахождения решения задачи на подпространстве $\bar{U}_h$ большей размерности, чем исходное. Таким образом, вычислительная трудоемкость контроля погрешности будет заведомо выше, чем трудоемкость решения исходной задачи, но при этом получится лишь оценка ошибки снизу, то есть результат не будет обладать надежностью.

Предположим, что справедливо следующее представление $\bar{U}_h$ в виде иерархической декомпозиции:

$$\bar{U}_h = U_h \bigoplus \bar{W}_h,$$

где $\bigoplus$ обозначает прямую сумму подпространств исходного линейного пространства. Пусть также справедливо неравенство

$$|a(v_h, \bar{w}_h)| \leq \bar{\beta}\ \|v_h\|\ \|\bar{w}_h\|, \quad \bar{\beta} < 1, \quad \forall v_h \in U_h, \forall \bar{w}_h \in \bar{W}_h. \tag{1.14}$$

[8] в англоязычной терминологии — saturation assumption

Вместо поиска решения на всем подпространстве предлагается решать следующую задачу на подпространстве $\bar{W}_h$ существенно меньшей размерности: найти такой элемент $\bar{e}_h \in \bar{W}_h$, что

$$\int_{\Omega} \nabla \bar{e}_h \cdot \nabla \bar{w}_h \, d\Omega = \int_{\Omega} (f \bar{w}_h - \nabla u_h \cdot \nabla \bar{w}_h) \, d\Omega, \quad \forall \bar{w}_h \in \bar{W}_h.$$

В работе [269] доказана теорема о том, что в изложенных выше предположениях справедлива двусторонняя оценка

$$(1-\beta^2)(1-\bar{\beta}^2)|\!|\!|u-u_h|\!|\!|^2 \le |\!|\!|\bar{e}_h|\!|\!|^2 \le |\!|\!|u-u_h|\!|\!|^2. \tag{1.15}$$

Таким образом, элемент $\bar{e}_h$ обеспечивает апостериорный индикатор величины погрешности исходного приближенного решения, измеряемой в энергетической норме. В [269] рассматривается общий вид билинейной формы $a(\cdot,\cdot)$, но в качестве одного из примеров приведена задача Дирихле для уравнения Пуассона. Способ является достаточно простым и общим, но из оценки (1.15) следует, что такой индикатор может сильно недооценивать погрешность при близких к единице значениях β и/или $\bar{\beta}$. На возможность занижения реальной величины ошибки до двух раз, например, указывают численные результаты, приведенные в работе P.F. Antonietti, L. Beirão da Veiga, C. Lovadina, M. Verani [270]. А для сложных инженерных задач недооценка уже может составлять от десятков раз до сотен тысяч раз в зависимости от того, какие величины оцениваются и как построен индикатор, о чем свидетельствуют данные C. Domínguez, E.P. Stephan, M. Maischak [271].

Отметим еще раз, что ключевую роль в строгом математическом обосновании метода играет условие насыщения, которое рассматривается, в частности, в работах W. Dörfler, R.H. Nochetto [272], R. Bank, A. Parsania, S. Sauter [273]. В первой из указанных работ показано, что даже для уравнения Пуассона существуют простые контрпримеры, в которых условие может не выполняться. Дальнейшие исследования показали, что проблема анализа условий, при которых справедливо предположение о насыщении, нетривиальна с математической точки зрения и требует существенных технических усилий при анализе, особенно в случае hp-версии метода конечных элементов [273].

В заключение параграфа отметим, что работа [269] не является первой по данному направлению. Более подробный обзор литературы можно найти в указанной статье, а также работе B. Achchab, A. Agouzal, M. El Fatini, A. Souissi [274], упомянутых во введении монографиях [58], [60] и статье [270].

1.6. Индикаторы ошибки на основе сглаживания градиента приближенного решения

Принципиально иная идея лежит в основе группы методов, описанной в данном параграфе. Ее суть заключается в том, что при наличии вычислительной процедуры, которая приближает поле градиента аппроксимации к полю градиента точного решения, разница между исходным и уточненным полем может быть использована в качестве индикатора ошибки. Другими словами, если построен некий оператор осреднения G, обеспечивающий выполнение неравенства

$$\|\nabla u - G\nabla u_h\|_\Omega \leq \ \beta \ \|\nabla u - \nabla u_h\|_\Omega \tag{1.16}$$

при некотором $\beta < 1$, то справедлива двусторонняя оценка

$$\frac{1}{1+\beta}\|\nabla u_h - G\nabla u_h\|_\Omega \ \leq \ \|\nabla u - \nabla u_h\|_\Omega \ \leq \ \frac{1}{1-\beta}\|\nabla u_h - G\nabla u_h\|_\Omega.$$

Таким образом, если неравенство (1.16) выполняется при малом значении β, то норма разности $\nabla u_h - G\nabla u_h$ дает достаточно точное представление о неизвестном истинном значении энергетической нормы ошибки.

Первый подобный метод был изложен во второй половине 80-х годов XX века в работе O.C. Zienkiewicz, J.Z. Zhu [147]. Процедура построения уточненного, более гладкого поля получила название «осреднение» или «восстановление» градиента — в англоязычной литературе можно встретить различные термины[9]. Многочисленные дальнейшие исследования показали, что разница между градиентом приближенного решения и его осреднением действительно может быть хорошим индикатором ошибки. Очевидным преимуществом такого подхода является исключительная простота и малая вычислительная трудоемкость. Естественно, что для того, чтобы имела место оценка (1.16), оператор осреднения G должен удовлетворять ряду формальных требований. Они приведены, например, в работах M. Křížek, P. Neittaanmäki [139], M. Ainsworth, A. Craig [275].

Как математическое обоснование метода, так и конструктивное построение оператора G в большинстве случаев основано на эффекте суперсходимости[10]. Его исследованию посвящено большое количество работ, среди которых пионерской была отечественная работа Л.А. Оганесяна и Л.А. Руховца [138] (см., например, M. Křížek, P. Neittaanmäki [140], L.B. Wahlbin [141], R. Lin, Z. Zhang [276], M.F. Wheeler, J.R. Whiteman [142], M. Zlámal [144] и цитируемую там литературу). Основываясь на данном эффекте, устанавливается, что при наличии у точного решения повышенной гладкости, например, если $u \in \mathbb{W}_2^3(\Omega)$, процедура осреднения повышает асимптотическую скорость сходимости последовательности аппроксимаций с уменьшением характерного размера сетки h, и имеет место оценка

$$\|\nabla u - G\nabla u_h\|_\Omega \leq Ch^2 \|u\|_{3,\Omega}$$

вместо хорошо известной асимптотики

$$\|\nabla u - \nabla u_h\|_\Omega \simeq O(h),$$

где $\|\cdot\|_{3,\Omega}$ — полная норма в указанном выше соболевском пространстве. Подобная оценка была получена в работе [139], являющейся обобщением работы тех же авторов [277]. В этом случае неравенство типа (1.16) выполняется, и при достаточно малых h величина $\|\nabla u_h - G\nabla u_h\|_\Omega$ близка к значению нормы ошибки. Однако на эти работы не принято ссылаться в контексте апостериорно-

[9] gradient averaging, postprocessing, recovery

[10] superconvergence

го контроля точности, поскольку авторы рассматривали осреднение лишь как средство улучшения аппроксимации градиента точного решения, а не индикации погрешности. Отметим, что эффект суперсходимости может наблюдаться не во всей области, а лишь в некоторой ее части ω, с замыканием содержащейся в Ω (см., например, [142]). Тогда речь может идти исключительно о качестве локальной индикации погрешности по области ω.

Как уже говорилось, первым индикатором, основанным на восстановлении градиента, был индикатор, предложенный в работе [147]. В ней рассматривалась процедура осреднения кусочно-постоянного поля напряжений в простом одномерном случае. При этом значение в узле сетки получалось как полусумма значений на соседних интервалах. В плоском случае аналогичная процедура приводит на каждом элементе разбиения T к следующему локальному индикатору:

$$\eta_T^{ZZ} := \|\nabla u_h - G\nabla u_h\|_T,$$

где $G\nabla u_h$ — кусочно-линейное непрерывное векторное поле, значение которого в узле X определяется по формуле (см. Рисунок 1.1)

$$G\nabla u_h|_X = \sum_{T\in\Omega_X} \frac{|T|}{|\Omega_X|}\ \nabla u_h|_T.$$

Глобальный индикатор получается естественным образом и имеет вид

$$\eta^{ZZ} := \|\nabla u_h - G\nabla u_h\|_\Omega.$$

Следует отметить, что для одномерного случая в работе I. Babuška, W.C. Rheinboldt [55] (определение 6.3) был в точности получен индикатор, позднее предложенный в [147]. Однако в основе его определения лежала совсем другая идея, связанная с локальным воспроизведением ошибки на каждом интервале при помощи квадратичного полинома, обращающегося в ноль на одном из концов.

Оригинальный метод получил аббревиатуру ZZ по первым буквам фамилий авторов. Он нашел дальнейшее развитие во многих последующих публикациях. Например, в работах R. Durán, M.A. Muschietti, R. Rodríguez [148] и [149] рассматриваются индикаторы, для которых процедура осреднения градиента приближенного решения основана на локальной интерполяции. Для построенных таким образом индикаторов доказывается, что они асимптотически точны в случае, если точное решение обладает повышенной гладкостью. Доказательство основано на эффекте суперсходимости. В работе R. Rodríguez [104] установлена эквивалентность индикатора, полученного в [148], и классического индикатора η_T^{ZZ}. В работе E. Rank, O.C. Zienkiewicz [98] в одномерном случае и случае разбиения области прямоугольными элементами показана связь между рассматриваемым типом индикаторов и индикаторами, включающими скачки нормальной составляющей градиента приближенного решения. Результаты упомянутых ранее работ [148], [104], [58] и [98], указывают на связь с индикаторами типа (1.9) или (1.10), полученными на основе метода невязок (см. также J.Z. Zhu [158], R. Rodríguez [278]). В дополнение, обзоры новых и классических результатов, связанных с методами восстановления градиента, можно найти, например, в работах V. Carey, G.F. Carey [279], Z. Zhang, N. Yan [263].

Другая процедура восстановления значений градиента приближенного решения в узлах сетки была предложена в работах O.C. Zienkiewicz, J.Z. Zhu [150], [280] и [281]. Данный метод получил аббревиатуру SPR[11]. Его идея заключается в следующем. Для каждого узла сетки X рассматривается совокупность элементов Ω_X (см. Рисунок 1.1). На всех элементах вычисляются значения производных приближенного решения в центрах масс, которые являются точками суперсходимости. Далее по ним строится полином над Ω_X, значения которого в этих точках приближают заданные в смысле метода наименьших квадратов. Значение полученного полинома в центральном узле X дает нам необходимое осреднение. Получив осредненные производные во всех узлах сетки, мы можем построить по ним кусочно-линейное поле $G\nabla u_h$. Такая процедура является универсальной и может быть легко адаптирована под различные типы конечных элементов, если только для них известно положение точек суперсходимо-

[11] SPR — Superconvergent Patch Recovery

сти. Ее реализация не требует существенных вычислительных затрат. Известны также многочисленные модификации метода, включающие в себя дополнительно в различных формах учет уравнений равновесия и граничных условий «в напряжениях» (см., например, B. Boroomand, O.C. Zienkiewicz [282], [283], O.C. Zienkiewicz, R.L. Taylor [19] — REP-метод[12], а также P. Díez, J.J. Ródenas, O.C. Zienkiewicz [160], J.J. Ródenas, M. Tur, F.J. Fuenmayor, A. Vercher [284] — SPR-C-метод[13] — и цитируемую там литературу). Известен также RCP-метод[14], основная идея которого заключается в восстановлении поля напряжений посредством локальной минимизации двойственного функционала, то есть использования принципа Кастильяно. При этом в качестве областей рассматриваются патчи элементов, а граничные условия в перемещениях устанавливаются по контролируемому приближенному решению. Такой способ реализован, например, A. Benedetti, S. de Miranda, F. Ubertini [161], где в качестве патчей предлагается использовать не совокупности элементов вокруг выбранного узла, а совокупности вокруг выбранного элемента. Это позволяет напрямую восстановить напряжения на каждом элементе при помощи одношаговой процедуры без осреднения. Как следствие — получившееся поле не является непрерывным.

Отметим также, что когда речь идет о вычислении глобальной характеристики — процента относительной погрешности приближенного решения, часто используется следующая формула:

$$\frac{\eta^{ZZ}}{\sqrt{(\eta^{ZZ})^2 + \|\nabla u_h\|_\Omega^2}} \times 100\%$$

(например, [147], [161]). В силу неравенства $\|\nabla u_h\|_\Omega \leq \|\nabla u\|_\Omega$, на грубых сетках она несколько компенсирует заменой неизвестного точного решения на галеркинскую аппроксимацию одновременно и возможную сильную недооценку, и переоценку погрешности. Если числитель больше, чем истинная погрешность,

---

[12] REP — Recovery by Equilibrium in Patches, Recovery by Equilibration of Patches

[13] Constrained SPR

[14] RCP — Recovery by Compatibility in Patches

то и знаменатель больше нормы точного решения, если числитель меньше, чем истинная погрешность, то и знаменатель меньше. Эта компенсация уходит с уменьшением значения параметра h, и на мелких сетках предполагается, что уже начинает работать асимптотический эффект суперсходимости. Также в литературе предлагается использовать эмпирический корректирующий коэффициент для разных типов конечных элементов: 1.1 — для билинейной аппроксимации, 1.3 — для линейной аппроксимации на триангуляциях, 1.4 — для квадратичной, 1.6 — для 9-ти узловых элементов с биквадратичной аппроксимацией.

Однако наряду с достоинствами, метод имеет и ряд существенных недостатков. Прежде всего, наличие суперсходимости связано с повышенной гладкостью решения, которая имеет место не так часто. Даже для простых эллиптических краевых задач решение может не иметь обобщенных производных порядка выше первого, например, в случае областей с негладкими границами. Решения же нелинейных краевых задач, в частности, вариационных неравенств, во многих случаях имеют предельную регулярность, которая не зависит от гладкости внешних данных. Второе существенное предположение, почти всегда возникающее при рассмотрении эффекта суперсходимости — это равномерность разбиения конечными элементами, то есть его строгая структура. С другой стороны, процесс адаптивного построения сеток подразумевает произвольность структуры сетки. По крайней мере, предполагается нарушение этой структуры вследствие появления сгущений, даже если начальная сетка была построена структурированной. Кроме того, данная технология, как и метод невязок, может быть применена только к аппроксимациям специального вида. Тем не менее в литературе можно найти достаточно много примеров, когда метод осреднения/восстановления градиента позволяет получать качественную индикацию погрешности даже в тех случаях, когда его применение не имеет строгого математического обоснования. На эффективность данного подхода, в частности, указывают результаты численных экспериментов, приведенные в работах J.Z. Zhu, O.C. Zienkiewicz [151], [147] и [150]. В упомянутой работе [131] в числе прочих исследовались различные индикаторы, полученные при помощи SPR-алгоритма. В ней показано, что метод может обеспечивать качественную индикацию погрешности даже в том случае, когда эффект суперсходимости не наблюдается или для восстановления значений в узле используются не те точки, в которых он имеет место. Численные результаты, приведенные в работе L. Du, N. Yan [285] для уравнения Пуассона с условием Дирихле на границе, также указывают на то, что область применения данной группы методов может быть несколько шире, чем та, для которой имеет место эффект суперсходимости. Там же можно найти другой подход к обоснованию эффективности методов восстановления, использованный рядом авторов, и ссылки на соответствующую библиографию. При этом для обобщения на неравномерные разбиения была привлечена специальная конструкция операторов интерполирования, близких по свойствам к описанному ранее оператору Клемана. Однако в этом случае авторам статьи удалось лишь показать эквивалентность предлагаемого индикатора и погрешности, а доказательство асимптотической точности все равно потребовало дополнительного предположения о равномерности разбиения. Как следует из работы [147], индекс эффективности оценок, получаемых при помощи метода, может быть меньше единицы. Таким образом, подход не дает надежного критерия достижения необходимой точности. На это указывают и результаты части экспериментов, представленных в диссертации. Отметим еще раз, что для полноты изложения упомянутые выше характеристики — индекс эффективности, эквивалентность, асимптотическая точность и некоторые другие — обсуждаются в параграфе 1.12.

В заключение параграфа скажем, что не все подходы к восстановлению градиента носят локальный характер, хотя их и подавляющее большинство. Например, в вышедшей недавно работе B. Pouliot, M. Fortin, A. Fortin, E. Chamberland [286] сравниваются несколько стандартных способов, в частности, основанный на классическом SPR-методе, с методикой авторов, требующей решения глобальной системы линейных алгебраических уравнений. Построение системы привязано к совокупности ребер конечно-элементного разбиения и не требует особого рассмотрения зон вблизи границы области. Численные эксперименты показывают, что такой подход имеет существенное преимущество перед локальными процедурами по качеству получаемых результатов, то есть по величине отклонения от точных значений градиента решения. Наиболее заметного улучшения удается достичь именно в приграничных слоях разбиения, где классические локальные методы могут приводить к осцилляциям. Авторами продемонстрировано, что даже для сильно анизотропных сеток метод работает. Недостаток процедуры видится в том, что для построения системы вновь используются точки суперсходимости, но с единственным отличием — они выбираются на каждой стороне, а не внутри элементов.

1.7. Вариационный подход и его связь с методом гиперокружностей

Опишем метод, который был изложен С.Г. Михлиным в главе «Встречные методы и апостериорная оценка погрешности» монографии [171]. Для этого рассмотрим вариационную формулировку задачи (1.1), которая приведена ниже и связана с минимизацией соответствующего функционала энергии. Задача носит название прямой задачи или задачи $\mathfrak{P}$ (см., например, I. Ekeland, R. Temam [178]).

Задача $\mathfrak{P}$. Найти такой элемент $u \in U_0$, что

$$\mathcal{J}(u) = \inf \mathfrak{P} := \inf_{w \in U_0} \mathcal{J}(w),$$

где функционал имеет вид

$$\mathcal{J}(w) = \int\limits_{\Omega} \left(\frac{1}{2} |\nabla w|^2 - fw \right) \, d\Omega.$$

Преобразуем разность между значением $\mathcal{J}$ на произвольном приближенном решении $\tilde{u} \in U_0$ и на точном решении u

$$\mathcal{J}(\tilde{u}) - \inf \mathfrak{P} = \int\limits_{\Omega} \left(\frac{1}{2} |\nabla \tilde{u}|^2 - f\tilde{u} \right) d\Omega - \int\limits_{\Omega} \left(\frac{1}{2} |\nabla u|^2 - fu \right) d\Omega =$$
$$= \frac{1}{2} \|\nabla \tilde{u} - \nabla u\|^2_{\Omega} + \int\limits_{\Omega} (\nabla u \cdot \nabla(\tilde{u} - u) - f(\tilde{u} - u)) \, d\Omega.$$

С учетом соотношения (1.2) для $w = \tilde{u} - u$ имеем следующее представление квадрата нормы ошибки:

$$\|\nabla \tilde{u} - \nabla u\|^2_{\Omega} = 2(\mathcal{J}(\tilde{u}) - \inf \mathfrak{P}).$$

В книге [171] предложен способ получения сколь угодно точной оценки величины $(-\inf \mathfrak{P})$ сверху. Она строится при помощи векторных полей $q \in \mathbb{L}_2(\Omega, \mathbb{R}^2)$, удовлетворяющих в обобщенном смысле соотношению $\operatorname{div} q + f = 0$, то есть элементов, принадлежащих множеству

$$\mathbb{Q}_f := \left\{ q \in \mathbb{L}_2(\Omega, \mathbb{R}^2) \middle| \int\limits_{\Omega} q \cdot \nabla w \, d\Omega = \int\limits_{\Omega} fw \, d\Omega, \quad \forall w \in U_0 \right\},$$

где $\operatorname{div} q$ обозначает дивергенцию векторного поля q. Оценка имеет вид

$$-2 \inf \mathfrak{P} \; = \; \|\nabla u\|^2_{\Omega} \; \leq \; \|q\|^2_{\Omega}$$

и справедлива она для любого $q \in \mathbb{Q}_f$, что приводит к неравенству

$$\|\nabla \tilde{u} - \nabla u\|^2_{\Omega} \; \leq \; \int\limits_{\Omega} \left(|\nabla \tilde{u}|^2 - 2f\tilde{u} + |q|^2 \right) d\Omega$$

или в другом представлении

$$\|\nabla \tilde{u} - \nabla u\|_{\Omega} \; \leq \; \|\nabla \tilde{u} - q\|_{\Omega}, \quad \forall q \in \mathbb{Q}_f.$$

Далее речь идет о методе гиперокружностей, предложенном еще в конце 40-х годов в работе W. Prager, J.L. Synge [169], которая посвящена оценке точности приближенных решений краевых задач линейной теории упругости. Основой подхода являются интуитивные рассуждения, опирающиеся на геометрические аналогии. Позднее та же идея была использована в работе J.L. Synge [170] для получения оценки расстояния между точным решением и любым приближенным решением задачи (1.1).

Итак, рассмотрим две прямые L_1 и L_2, пересекающиеся под прямым углом (см. Рисунок 1.3) в точке S.

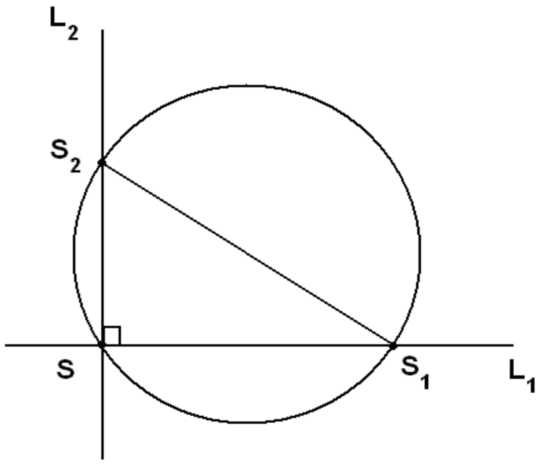


Рисунок 1.3: Геометрическая интерпретация метода гиперокружностей.

Пусть известны координаты двух точек $\mathrm{S}_1 \in \mathrm{L}_1$ и $\mathrm{S}_2 \in \mathrm{L}_2$. Возможно ли оценить местоположение пересечения прямых и расстояние от этих точек до него? Легко видеть, что точка S будет лежать на окружности, центром которой является середина отрезка $\mathrm{S}_1\mathrm{S}_2$, а радиусом — половина длины этого отрезка. С другой стороны, расстояние между точками S_1 и S_2 даст нам гарантированную оценку сверху для расстояния между S_1 и неизвестной точкой пересечения S, а именно

$$| \mathrm{S}_1\mathrm{S} | \leq | \mathrm{S}_1\mathrm{S}_2 |, \quad \forall \mathrm{S}_2 \in \mathrm{L}_2. \tag{1.17}$$

Проведем аналогию с рассматриваемой задачей. В данном случае «плоскостью» является пространство $\mathbb{L}_2(\Omega, \mathbb{R}^2)$. Прямая L_1 состоит из векторных полей ∇w, где $w \in U_0$. Точки на прямой L_2 — это элементы q введенного ранее множества $\mathbb{Q}_f$. Легко видеть, что в силу (1.2) точкой пересечения этих двух прямых как раз является градиент обобщенного решения задачи (1.1). В качестве точки S_1 выберем градиент приближенного решения $\nabla \tilde{u}$. Покажем выполнение необходимого условия ортогональности. Действительно,

$$\int\limits_{\Omega} (q - \nabla u) \cdot (\nabla \tilde{u} - \nabla u)\, d\Omega = \int\limits_{\Omega} (q \cdot \nabla(\tilde{u} - u) - \nabla u \cdot \nabla(\tilde{u} - u))\, d\Omega =$$
$$= \int\limits_{\Omega} (f(\tilde{u} - u) - f(\tilde{u} - u))\, d\Omega = 0.$$

Таким образом, метод гиперокружностей приводит к аналогу оценки (1.17) следующего вида:

$$\|\nabla \tilde{u} - \nabla u\|_{\Omega} \leq \|\nabla \tilde{u} - q\|_{\Omega}, \quad \forall q \in \mathbb{Q}_f. \tag{1.18}$$

Легко заметить, что проводя аналогию с простыми геометрическими построениями, мы приходим к той же самой оценке, что и при помощи вариационного подхода Михлина. Оценка (1.18) содержит свободную переменную, подчиненную сильному ограничению. Чтобы получить даже грубую индикацию погрешности при помощи данного неравенства, необходимо построить элемент q, который в точности удовлетворяет соотношению $\operatorname{div} q + f = 0$, пусть даже и в обобщенном смысле. Для правой части f произвольного вида такое построение выполнить заведомо невозможно. Даже при разумных ограничениях на класс рассматриваемых правых частей оно требует вычислительных затрат, что делает подход не столь эффективным с практической точки зрения при его прямом применении (об этом см. M. Ainsworth, A. Craig [275, с. 439–440]). Идея, однако, используется в группе современных методов, о которых речь идет в следующем параграфе, а также нашла свое применение в комбинации с методами невязок с уравновешиванием (T. Vejchodský [287], D. Braess, J. Schöberl [288]).

1.8. Метод оценки погрешности через определяющее соотношение

Еще одно близкое направление в теории апостериорного контроля погрешности разрабатывается, в основном, представителями французской научной школы, начиная с работ П. Ладевеза середины 70-х годов. Рассматриваемому в данной главе классу задач посвящена работа P. Ladevèze, D. Leguillon [289]. Обзор применения метода к другим задачам можно найти в монографии P. Ladevèze, J.-P. Pelle [182], статьях P. Ladevèze, Ph. Rougeot [290] и P. Boisse, S. Perrin, G. Coffignal, K. Hadjeb [291]. Несмотря на иную формулировку и терминологию, для рассматриваемого класса задач он использует ту же самую оценку Прагера–Синжа–Михлина.

Получение верхних границ погрешности основано на следующих соображениях: с точки зрения механики кинематические ограничения и уравнения равновесия заслуживают большего доверия и могут рассматриваться как «точные» соотношения, тогда как определяющее соотношение существенно зависит от выбранной модели и точности определения в ней констант, связанных со свойствами материала. Следовательно, именно ошибка в определяющем соотношении должна быть мерой неточности решения и должна быть минимизирована (CRE-метод[15], см. P. Ladevèze [292]). Таким образом, предлагается разделить все соотношения в постановке задачи на три категории: кинематические ограничения, уравнения равновесия и определяющие соотношения. Если приближенное решение точно удовлетворяет последним, то это означает, как правило, что нарушаются уравнения равновесия. Идея метода — контролировать точность приближенного решения посредством специальных дополнительных полей, точно удовлетворяющих всем кинематическим ограничениям и уравнениям равновесия. В определенном смысле, такой способ можно считать специальным вариантом постобработки.

В [289] эти поля названы «допустимыми расширениями» и при рассматриваемых граничных условиях находятся как элементы множеств

$$\hat{U} := \left\{ v \in U_0 \,\middle|\, \int\limits_{\mathcal{E}_h} (v - u_h)\varphi_i \, dE = 0, \quad \forall i \in \mathcal{N}_h \right\},$$

[15] CRE — Constitutive Relation Error estimators

$$\hat{Q} := \left\{ q \in \mathbb{Q}_f \left| \int\limits_T (q - \nabla u_h) \cdot \nabla \lambda_T^\alpha \, d\Omega = 0, \ \forall T \in \mathcal{T}_h, \forall \alpha - \text{индекс вершины } T \right. \right\},$$

где $\mathcal{E}_h$ — множество ребер разбиения, $\mathcal{N}_h$ — множество всех вершин (узлов) сетки, φ_i — соответствующие им базисные функции, а λ_T^α — функция, дающая барицентрические координаты внутри элемента T, связанные с одной из его вершин с индексом α. Таким образом, при построении ключевое значение имеют не сами приближенные поля u_h и ∇u_h, а среднее значение первого поля по сторонам элементов и второго поля — по самому элементу, соответственно. Рассматривая систему соотношений

$$\int\limits_T \nabla u_h \cdot \nabla \lambda_T^\alpha \, d\Omega = \int\limits_T f \lambda_T^\alpha \, d\Omega + \sum_{E \in \mathcal{E}_T} \int\limits_E \lambda_T^\alpha q \cdot n_E \, dE,$$
$$\forall q \in \hat{Q}, \quad \forall T \in \mathcal{T}_h, \quad \alpha - \text{индекс вершины } T,$$

авторы [289] отмечают, что определение $q \in \hat{Q}$ эквивалентно определению для каждой стороны E величины потока $q \cdot n_E$. Далее ставится задача поиска «оптимального допустимого расширения» $(\hat{u}, \hat{q})$ как решения следующей задачи: найти пару $(\hat{u}, \hat{q}) \in \hat{U} \times \hat{Q}$ такую что

$$\|\hat{q} - q(\hat{u})\|^2 \leq \|q - q(u)\|^2, \quad \forall (u, q) \in \hat{U} \times \hat{Q},$$

то есть пару, которая наиболее точно удовлетворяет определяющему соотношению.

В одномерном случае такая процедура упрощается, поскольку узловые значения полей $\hat{u}$ и $\hat{q}$ вычисляются по готовым формулам ([289, с. 490]), а задача оптимизации распадается на локальные задачи на интервалах. При этом предполагается, что правая часть исходного уравнения является кусочно-линейной функцией. В итоге поля $\hat{u}$ и $\hat{q}$ представляют собой полиномиальные аппроксимации третьего и второго порядка соответственно, тогда как для построения исходного приближенного решения u_h предполагается привлечение стандартной для метода конечных элементов кусочно-линейной аппроксимации. Аналогичное построение для плоского случая нетривиально и также связано с разбиением исходной глобальной задачи на локальные задачи по элементам, решение которых может быть явно выписано в случае, если правая часть является кусочно-постоянной ([289, с. 497]). Даже из приведенного выше схематичного изложения можно заметить, что процедура основана на предположениях о простом виде правой части уравнения равновесия, и даже в этом случае — технически достаточно сложна. К ее достоинствам можно отнести лишь надежность получаемых оценок.

Дальнейшие исследования несколько упростили построения, связанные с применением метода. Реализация разделена на два этапа — глобальный (первый) и локальный (второй), причем первый этап коррелирует с уравновешиванием в неявном методе невязок, выполняемым перед решением локальных задач. Заключается он в одновременном построении на всей совокупности ребер элементов разбиения набора скалярных величин $\left\{g^E\right\}_{E\in\mathcal{E}_h}$, аппроксимирующих неизвестные точные значения нормальной составляющей потока через ребро. Этот шаг алгоритма является наиболее сложным с математической точки зрения и ресурсоемким с вычислительной. На втором этапе поэлементно решаются задачи построения полей $\hat{q}_h(T)$, локально уравновешенных с правой частью уравнения и найденными на первом этапе граничными условиями для каждого элемента

$$\operatorname{div}\hat{q}_h(T)+f=0 \text{ внутри элемента } T,$$
$$\hat{q}_h(T)\cdot n_E=c_T^E g^E,\quad \forall E\in\mathcal{E}_T,$$

где $\mathcal{E}_T$ — совокупность ребер элемента T, нижний индекс h отражает существенную зависимость построенного элемента от структуры сетки, $c_T^E=\pm 1$, причем $c_{T_1}^E+c_{T_2}^E=0$ для любого внутреннего ребра E, которое делят два смежных треугольника T_1 и T_2. Глобальное поле $\hat{q}$ восстанавливается из набора $\left\{\hat{q}_h(T)\right\}_{T\in\mathcal{T}_h}$.

Недостатки метода довольно очевидны — хотя сама оценка Прагера–Синжа–Михлина имеет очень простой вид, реализация вычислений по методу оценки погрешности через определяющее соотношение выглядит довольно запутанной, существенно зависит от предположений о форме правой части уравнения и от того какую задачу (одномерную, двумерную или пространственную) мы рассматриваем. Если приближенное решение u_h содержит погрешности специфической природы, связанные с ошибками кодирования, то любые вспомогательные поля будут найдены неверно. Согласно [182], в численных экспериментах индекс эффективности оценок через определяющее соотношение обычно лежит в диапазоне от 1.0 до 2.5. Однако если сетка содержит заметное количество элементов с большим отношением описанной и вписанной окружности, значение индекса эффективности может значительно возрасти.

Авторы [182] также указывают на связь с существующими подходами и некоторые отличия от них. В частности, в работе B. Fraeijs de Veubeke [293] для оценки погрешности предлагалось приближенно решать прямую и двойственную задачи, что является чрезвычайно трудоемким. Оценка Прагера–Синжа и метод гиперокружностей также упоминаются, но геометрические соображения, связанные с линейными задачами, называются существенно менее общими, чем концепция анализа ошибки в определяющем соотношении, которая также полностью отличается по своей механической природе, следовательно, обобщается на нелинейные задачи. Однако даже в [182] отмечается, что конструирование допустимых полей по исходному приближенному решению связано с «определенными техническими затруднениями». Тем не менее, идея B. Fraeijs de Veubeke нашла свое дальнейшее развитие, например, в современной работе одного из его коллег — P. Beckers [294]. Подробнее о ней будет сказано в параграфе 4.2.

К этой же группе можно отнести результаты работ I. Anufriev, V. Korneev, V. Kostylev [295], В.Г. Корнеев [87], [88] и несколько цитируемых в них публикаций тех же авторов. Например, в [88] обсуждается как задача Дирихле для уравнения Пуассона, так и линейная упругость. Численные результаты касаются уравнения Пуассона и задачи о плоской деформации. Рассматриваются два способа построения равновесных полей — постобработка на основе производных приближенного решения в точках суперсходимости или решение двойственной вариационной задачи при помощи метода конечных элементов, связанное с необходимостью решать систему линейных алгебраических уравнений. Утверждается, что полученные алгоритмы вычисления апостериорных оценок для плоских задач теории упругости оптимальны с точки зрения вычислительной трудоемкости относительно числа неизвестных, но оценки на основе постобработки «чувствительны к способу их вычисления» (разница в индексах эффективности для одной и той же модельной задачи достигает 2 раз).

1.9. Мажоранты ошибки на основе функционального подхода

Первый результат, относящийся к альтернативной группе методов, появился в середине 90-х годов прошлого века и некоторое время был известен в литературе как метод двойственных мажорант или DEM[16]. В работе S. Repin, L.S. Xanthis [172] сразу на примере достаточно сложной в математическом плане нелинейной задачи, возникающей в деформационной теории пластичности, была предложена апостериорная оценка, вывод которой был основан на привлечении теории двойственности вариационного исчисления. В дальнейшем подход был значительно обобщен (см., например, S. Repin [176], [196] и цитируемую там литературу).

Для рассматриваемой в главе задачи, используя полученное в параграфе 1.7 соотношение

$$\frac{1}{2}|\!|\!| u - \tilde{u} |\!|\!|^2 = \mathcal{J}(\tilde{u}) - \inf \mathfrak{P},$$

заменим точную нижнюю грань прямой задачи на точную верхнюю грань двойственной к ней. Последнюю можно построить, связав прямую задачу с лагран-

[16] DEM — Duality Error Majorant

жианом $\mathcal{L}$, а именно

$$\mathcal{J}(u) = \inf_{w \in U_0} \left\{ \sup_{q \in \mathbb{L}_2(\Omega, \mathbb{R}^2)} \mathcal{L}(w, q) \right\},$$

где

$$\mathcal{L}(w, q) := \int\limits_\Omega \left(q \cdot \nabla w - \frac{1}{2}|q|^2 - fw \right) d\Omega.$$

Двойственная задача или задача $\mathfrak{P}^*$ получается заменой последовательности взятия инфимума и супремума на обратную, то есть $\inf\sup$ на $\sup\inf$.
Задача $\mathfrak{P}^*$. Найти такой элемент $p \in \mathbb{Q}_f$, что

$$I^*(p) = \sup \mathfrak{P}^* := \sup_{q \in \mathbb{Q}_f} I^*(q),$$

где

$$I^*(q) = -\int\limits_\Omega \frac{1}{2}|q|^2 \, d\Omega.$$

Далее, используя систему соотношений

$$\inf \mathfrak{P} = \sup \mathfrak{P}^* \geq I^*(q), \quad \forall q \in \mathbb{Q}_f,$$

снова приходим к (1.18).

В настоящее время подход носит название функционального, поскольку результаты, полученные при помощи теории двойственности вариационного исчисления позднее были достигнуты другими способами, в частности, преобразованием обобщенной постановки задачи. Такие математические построения носят более универсальный характер и могут быть выполнены даже в том случае, когда мы находимся за рамками применимости теории двойственности.

Преобразуем неравенство (1.18) таким образом, чтобы свободная переменная в нем была подчинена более слабому ограничению. Введем для этого вторую свободную переменную $y \in \mathbb{L}_2(\Omega, \mathbb{R}^2)$. Тогда по неравенству треугольника имеем

$$\|\nabla \tilde{u} - \nabla u\|_\Omega \leq \|\nabla \tilde{u} - y\|_\Omega + \|y - q\|_\Omega, \qquad \forall q \in \mathbb{Q}_f.$$

Возведя обе части в квадрат и применив известное алгебраическое неравенство Коши со свободным параметром (см., например, О.А. Ладыженская [296, с. 33])

$$2|a_1 a_2| \leq \beta a_1^2 + \beta^{-1} a_2^2, \quad \forall \beta > 0,$$

получаем

$$\|\nabla \tilde{u} - \nabla u\|_\Omega^2 \leq (1+\beta)\|\nabla \tilde{u} - y\|_\Omega^2 + (1+\beta^{-1})\|y - q\|_\Omega^2. \tag{1.19}$$

Дальнейшие преобразования основаны на работе S. Repin, S. Sauter, A. Smolianski [187], в которой использовано ортогональное разложение Гельмгольца для элементов пространства $\mathbb{L}_2(\Omega, \mathbb{R}^2)$, приведенное в книге С.Г. Михлина [171]. А именно, для любого элемента $y \in \mathbb{L}_2(\Omega, \mathbb{R}^2)$ справедливо следующее представление:

$$y = \nabla w_0 + q_0, \qquad w_0 \in U_0,\ q_0 \in \mathbb{Q}_0, \tag{1.20}$$

где

$$\mathbb{Q}_0 := \left\{ q \in \mathbb{L}_2(\Omega, \mathbb{R}^2) \left| \int\limits_\Omega q \cdot \nabla w \, d\Omega = 0 \,, \quad \forall w \in U_0 \right. \right\}.$$

Получим сначала оценку второго слагаемого в правой части (1.19) для тривиального случая, когда $f \equiv 0$ и q — элемент множества $\mathbb{Q}_0$, то есть $q = q_0$. В силу представления (1.20) имеем $y - q_0 = \nabla w_0$ и, следовательно,

$$\|y - q_0\|_\Omega^2 = \|\nabla w_0\|_\Omega^2.$$

Рассмотрим «негативную» норму элемента $\operatorname{div} y$, определенную аналогично соотношению (1.4)

$$\|\operatorname{div} y\|_{(-1)} := \sup_{w \in U_0, w \neq 0} \frac{-\int\limits_\Omega y \cdot \nabla w \, d\Omega}{\|\nabla w\|_\Omega} \geq \frac{\int\limits_\Omega y \cdot \nabla w_0 \, d\Omega}{\|\nabla w_0\|_\Omega}.$$

Используя разложение (1.20) и учитывая, что $q_0 \in \mathbb{Q}_0$, имеем

$$\int\limits_\Omega y \cdot \nabla w_0 \, d\Omega = \int\limits_\Omega (\nabla w_0 + q_0) \cdot \nabla w_0 \, d\Omega = \|\nabla w_0\|_\Omega^2.$$

Отсюда следует необходимое неравенство

$$\|y - q_0\|_\Omega \;=\; \|\nabla w_0\|_\Omega \;\leq\; [\![\operatorname{div} y]\!]_{(-1)},$$

которое справедливо для произвольного элемента $y \in \mathbb{L}_2(\Omega, \mathbb{R}^2)$.

Предположим теперь, что $f \not\equiv 0$. В этом случае элемент q должен принадлежать не множеству $\mathbb{Q}_0$, а множеству $\mathbb{Q}_f$. Чтобы воспользоваться предыдущим результатом, заметим, что $y - \nabla u$ есть элемент пространства $\mathbb{L}_2(\Omega, \mathbb{R}^2)$, для которого верно разложение Гельмгольца

$$y - \nabla u = q_0 + \nabla w_0$$

или

$$y = q_0 + \nabla u + \nabla w_0.$$

В силу интегрального тождества (1.2) и определения $\mathbb{Q}_0$, элемент $q = q_0 + \nabla u$ принадлежит множеству $\mathbb{Q}_f$. Отсюда получаем оценку

$$\|y - q\|_\Omega = \|\nabla w_0\|_\Omega \leq [\![\operatorname{div}(y - \nabla u)]\!]_{(-1)} = [\![\operatorname{div} y + f]\!]_{(-1)},$$

которая приводит к первой форме функциональной мажоранты для задачи (1.1)

$$\|\nabla \tilde{u} - \nabla u\|^2_\Omega \;\leq\; (1 + \beta)\|\nabla \tilde{u} - y\|^2_\Omega + (1 + \beta^{-1})[\![\operatorname{div} y + f]\!]^2_{(-1)}. \tag{1.21}$$

Ограничим допустимый класс вводимых дополнительно переменных элементами пространства

$$\mathbb{H}(\Omega, \operatorname{div}) := \left\{ y \in \mathbb{L}_2(\Omega, \mathbb{R}^2) \mid \operatorname{div} y \in \mathbb{L}_2(\Omega) \right\}.$$

Поскольку в дальнейшем элемент y рассматривается по смыслу как аппроксимация точного решения двойственной вариационной задачи — p, то обозначение меняется на $\tilde{\tilde{y}}$, чтобы это подчеркнуть, но отличать от аппроксимации $\tilde{u}$ решения прямой задачи — u. Такая логика сохраняется далее всюду и оказывается особенно важной в трех последних главах диссертации, в которых рассматриваются более сложные краевые задачи, что приводит к существенному увеличению количества элементов функциональных пространств и необходимых обозначений. Аппроксимации полей, точность которых контролируется, обозначаются тем же символом, но снабжаются волной, а свободные элементы в апостериорных оценках отмечаются двойной волной.

Итак, для элементов $\mathbb{H}(\Omega, \mathrm{div})$ в силу соотношения

$$-\int\limits_{\Omega} \tilde{\tilde{y}} \cdot \nabla w \, d\Omega = \int\limits_{\Omega} \mathrm{div}\, \tilde{\tilde{y}} \;\; w \, d\Omega,$$

имеем

$$\|\mathrm{div}\, \tilde{\tilde{y}} + f\|_{(-1)} = \sup_{w \in U_0, w \neq 0} \frac{\int\limits_{\Omega} (\mathrm{div}\, \tilde{\tilde{y}} + f) w \, d\Omega}{\|\nabla w\|_{\Omega}} \leq \mathfrak{c}_I \|\mathrm{div}\, \tilde{\tilde{y}} + f\|_{\Omega},$$

где $\mathfrak{c}_I$ — константа в неравенстве Фридрихса, которое имеет вид

$$\|w\|_{\Omega} \leq \mathfrak{c}_I \|\nabla w\|_{\Omega}, \quad \forall w \in U_0.$$

Так мы приходим к следующей апостериорной оценке точности, справедливой для любого приближенного решения $\tilde{u} \in U_0$:

$$\|\nabla(\tilde{u} - u)\|^2_{\Omega} \leq \mathcal{M}^2(\tilde{u}, \beta, \tilde{\tilde{y}}), \tag{1.22}$$

где

$$\mathcal{M}^2(\tilde{u}, \beta, \tilde{\tilde{y}}) := (1 + \beta) \|\nabla \tilde{u} - \tilde{\tilde{y}}\|^2_{\Omega} + (1 + \beta^{-1}) \mathfrak{c}_I^2 \|\mathrm{div}\, \tilde{\tilde{y}} + f\|^2_{\Omega}, \tag{1.23}$$

$\tilde{\tilde{y}}$ — произвольный элемент множества $\mathbb{H}(\Omega, \mathrm{div})$ и β — произвольный положительный параметр. Отметим, что в работе [187] оценка (1.22) получена непосредственно без промежуточной оценки (1.21), для вывода которой первоначально привлекались методы теории двойственности вариационного исчисления (см., например, S. Repin [176]).

Заметим, что в оценку (1.21) можно подставить в качестве свободной переменной $\tilde{\tilde{y}}$ градиент приближенного решения $\nabla \tilde{u}$, который является элементом пространства $\mathbb{L}_2(\Omega, \mathbb{R}^2)$. Тогда, выбирая значение параметра β сколь угодно большим, получаем

$$\|\nabla \tilde{u} - \nabla u\|_\Omega \leq [\![\operatorname{div} \nabla \tilde{u} + f]\!]_{(-1)} = [\![f + \Delta \tilde{u}]\!]_{(-1)}.$$

Таким образом, из данной формы мажоранты мы в качестве частного случая приходим к неравенству, которое является основой метода невязок.

В заключение параграфа остановимся подробнее на вопросе вычисления постоянной $\mathfrak{c}_I$ для случая первой краевой задачи. Как следует из вида мажоранты (1.23), чтобы обеспечить надежность контроля погрешности, необходимо получить для $\mathfrak{c}_I$ оценку сверху. В общем случае эта константа определяется через наименьшее собственное значение λ_Ω оператора Лапласа для области Ω, а именно

$$\mathfrak{c}_I = 1/\sqrt{\lambda_\Omega},$$

где

$$\lambda_\Omega := \inf_{w \in U_0} \frac{\int\limits_\Omega |\nabla w|^2 \, d\Omega}{\int\limits_\Omega |w|^2 \, d\Omega}.$$

Отметим, что для первой краевой задачи имеет место неравенство

$$\lambda_{\bar{\Omega}} \leq \lambda_\Omega, \quad \forall \bar{\Omega} \supset \Omega, \tag{1.24}$$

которое позволяет достаточно легко строить оценки сверху для $\mathfrak{c}_I$. Действительно, если $\bar{\Omega}$ — какая-либо каноническая область (например, прямоугольник или круг), то $\lambda_{\bar{\Omega}}$ находится аналитически. В качестве оценки снизу для λ_Ω, используя соотношение (1.24), можно взять значение для квадрата со стороной α, которое равно $2\pi^2/\alpha^2$. Также, если $\bar{\Omega}$ — это прямоугольная область со сторонами α_1 и α_2, то

$$\lambda_{\bar{\Omega}} = \frac{\pi^2(\alpha_1^2 + \alpha_2^2)}{\alpha_1^2 \alpha_2^2}.$$

Строго говоря, в общем случае в дополнение к самим мажорантам необходимо иметь метод вычисления гарантированных верхних оценок констант, входящих в них, в частности — константы в неравенстве Фридрихса в областях различной геометрии при условии, что лишь на части границы задано условие типа Дирихле. Этот вопрос обсуждается, например, в работе S. Repin [297]. Компромиссным вариантом является минимизация по конечномерному подпространству, дающая достаточно точную оценку интересующей нас константы снизу, с последующим увеличением ее значения в полтора-два раза.

1.10. Проблемно-ориентированные оценки

В процессе анализа результатов расчета инженеру часто оказывается недостаточно той информации, которую можно получить при помощи апостериорных оценок энергетической нормы. Еще одно направление развития теории апостериорного контроля погрешности — построение оценок в терминах специальных проблемно-ориентированных[17] величин. Часто такая величина[18] может быть представлена через линейный функционал l, который контролирует поведение решения в некоторых зонах исходной области, вдоль линий или в окрестности интересующих нас точек. Таким образом возникает задача оценки неизвестной величины $l(u - \tilde{u})$. В литературе распространены методы (см., например, M. Ainsworth, J.T. Oden [60], R. Becker, R. Rannacher [106], J.T. Oden, S. Prudhomme [298], H. Steeb, A. Maute, E. Ramm [299], W. Bangerth, R. Rannacher [62], A.K. Alekseev, I.M. Navon [300]), позволяющие найти оценку величины $l(u - u_h)$ при помощи решения на той же самой сетке сопряженной задачи, правая часть которой связана с заданным линейным функционалом. В рамках функционального подхода существует альтернативный способ построения оценок в терминах линейных функционалов, имеющий две отличительные особенности: исходная и сопряженная задачи решаются на разных сетках; слагаемое, которое представляет собой произведение градиентов ошибок для ис-

[17] goal-oriented error estimation

[18] в литературе часто используется термин «quantities of interest»

ходной и сопряженной задачи, оценивается при помощи методов осреднения. Результаты численных экспериментов, опубликованные в работе S. Korotov, P. Neittaanmäki, S. Repin [301], подтверждают эффективность подхода. Она, к тому же, существенно возрастает в случае, если нас интересует не одно решение исходной задачи при выбранных данных, а серия таковых для разных краевых условий и приложенных нагрузок, поскольку в этом случае решение сопряженной задачи необходимо получить только один раз. Такая ситуация может возникнуть, в частности, в задачах, связанных с оптимизацией механических конструкций — см., например, N.V. Banichuk [302], N.V. Banichuk, F.-J. Barthold, A. Falk, E. Stein [303], H. Eschenauer, N. Olhoff, W. Schnell [304] и цитируемую там литературу. Отметим, что за последние годы был предложен и другой метод получения локальных оценок погрешности и оценок в терминах линейных функционалов (см. S. Repin [305]). Обзор литературы по методам построения проблемно-ориентированных оценок погрешности можно найти, например, в работах M. Ainsworth, R. Rankin [306], S. Prudhomme, J.T. Oden, T. Westermann, J. Bass, M.E. Botkin [307]. Последняя статья посвящена плоским и трехмерным задачам линейной теории упругости с граничными условиями общего вида (заданы и перемещения, и поверхностные силы). В примерах сравниваются апостериорные оценки энергетической нормы и проблемно-ориентированные оценки. Во всех случаях точные решения задач неизвестны. Сравнение проводится при помощи решений, полученных на мелких сетках, что может потребовать существенных вычислительных ресурсов. Аналогичный подход используется автором при постановке вычислительного эксперимента в диссертации и является общепринятым, поскольку при всестороннем анализе апостериорных методов контроля точности невозможно ограничиться достаточно узким классом задач с известными точными решениями. Задачам механики деформируемого твердого тела посвящена также упомянутая работа [299], содержащая обширную библиографию. Примеры в ней касаются плоских задач, но в то же время выходят за рамки физически линейной теории. Обзор последних достижений данного направления исследований можно найти в работе P. Ladevèze, F. Pled, L. Chamoin [308].

1.11. Оценка погрешности моделей

Для полноты описания известных результатов в рамках главы необходимо упомянуть некоторые работы по оценке погрешности моделей[19] в рамках математического моделирования. Следует отметить определенные терминологические особенности, сложившиеся в рассматриваемой области. Существует два близких по переводу на русский язык понятия — verification/validation. Они однако имеют разный смысл в теории апостериорного контроля точности (см. I. Babuska, J.T. Oden [309]). Первое понятие используется, когда речь идет об оценках ошибки приближенного решения задачи, а второе — в случае, если обсуждается адекватность той или иной математической модели, то есть степень ее соответствия реальному физическому процессу или другой более общей модели, упрощением которой она получена. Таким образом, тому, о чем шла речь выше, соответствует термин «верификация». Одно из современных направлений развития рассматриваемой теории как раз связано с оценкой ошибки, привносимой моделью. Сюда могут входить в том числе погрешности, связанные с упрощающей заменой пространственных задач на плоские аналоги, с гомогенизацией неоднородных сред, с неопределенностью в коэффициентах исходного уравнения и тому подобное. Тогда речь уже идет о «валидации» соответствующих математических моделей средствами вычислительной математики.

Оценке адекватности моделей посвящено относительно небольшое количество публикаций, число которых, однако, неуклонно растет. Отметим некоторые из них. Например, J.T. Oden, S. Prudhomme [310] рассматривают несколько классов задач механики жидкости и деформируемого твердого тела. При этом изложена одна из общих методологий построения адаптивных алгоритмов

[19] устоявшийся англоязычный термин — «modeling error»

и оценки ошибок моделей в контексте проблемно-ориентированных величин, о которых шла речь в предыдущем параграфе. Работа носит в большей степени теоретический характер. При этом авторами обобщен DWR-метод, привлекающий к построению апостериорных оценок сопряженную задачу. Этот же подход развивает M. Braack, A. Ern [311]. Работа J.T. Oden, S. Prudhomme, D.C. Hammerand, M.S. Kuczma [312] посвящена явному вычислению границ ошибок, возникающих из-за различий математических моделей, выбираемых для анализа физических явлений в нелинейной механике сплошных сред, когда сравниваются «грубая» и «точная» модели. Статья I. Babuška, F. Nobile, R. Tempone [313] интересна, в том числе, классификацией источников ошибок и соответствующими примерами фактов из реальной инженерной практики, когда эти ошибки приводили к разрушительным несчастным случаям. Интересной с точки зрения общего взгляда на проблему является также статья J.T. Oden, S. Prudhomme [314]. В работе E. Stein, M. Rüter, S. Ohnimus [315] также на достаточно общем уровне рассмотрена связь между классическими апостериорными оценками, проблемно-ориентированными оценками и оценками ошибок моделей, возникающих при замене трехмерных задач их плоскими аналогами. Статья содержит обширный библиографический список. Исследованию аналогичной проблематики, но в рамках функционального подхода, посвящены работы S. Repin [218], S. Repin, S. Sauter, A. Smolianski [316], S. Repin, S. Sauter [317], S. Repin, T. Samrowski [240], часть монографий [64] и [66], а также S. Repin, T. Samrowski, S. Sauter [318]. В работе O. Mali, S. Repin [319] рассматривается влияние неопределенности в значении коэффициента Пуассона, устанавливается связь его отклонения и возникающей ошибки в решении. Статья S. Repin, T. Samrowski, S. Sauter [320] посвящена оценке ошибок моделей, связанных с гомогенизацией. Из работ отечественных авторов также отметим A.K. Alekseev [321], в которой сравниваются линейные и нелинейные уравнения, возникающие в задаче теплопроводности. Наконец, в статье I. Turevsky, S.H. Gopalakrishnan, K. Suresh [322] обсуждается интересная задача — как оценить влияние удаления несущественных с точки зрения конкретного анализа геометрических деталей из модели[20]. Делается попытка апостериорно оценить с привлечением сопряженной задачи ту ошибку, которая при этом возникает. При оригинальной и несомненно имеющей прикладное значение постановке задачи, с математической точки зрения исследование вызывает ряд вопросов. Например, заявлено, что подход пригоден для чуть ли не всех возможных особенностей внутри области и на ее внешней границе — важна «малость» удаляемой из модели детали. В то же время, хорошо известно, что гладкость границы оказывает на гладкость точного решения определяющее влияние, а обсуждение этого вопроса в статье фактически отсутствует. Другой вопрос возникает по классификации удаляемых особенностей — по предложенной авторами методике они разделены на «внутренние», то есть расположенные вдали от внешней границы, и «граничные». Но, строго говоря, при удалении внутренних особенностей исчезает часть граничных условий и не учитывается их влияние на точное решение задачи. В этом смысле разделение на две группы выглядит несколько искусственным. В заключение параграфа отметим также работу O.J.B. Almeida Pereira, J.P. Moitinho de Almeida [323], в которой лаконично и по существу написана вводная часть с кратким обзором литературы по этому направлению.

1.12. О свойствах различных оценок и критериях их сравнения

Общепринятой, простой и достаточно естественной характеристикой качества получаемых при помощи любого метода глобальных оценок погрешности является так называемый индекс эффективности[21]. Он определяется как отношение оценивающей величины к оцениваемой и для мажоранты выглядит

[20] такое упрощение модели носит в инженерной литературе название «defeaturing»

[21] в разных источниках — effectivity index, efficiency index

следующим образом:

$$I_{eff} := \frac{\mathcal{M}(\tilde{u}, ...)}{\|u - \tilde{u}\|}.$$

Очевидно, что оптимальное значение индекса эффективности равно единице. Тот факт, что индекс всегда остается больше единицы, говорит о надежности метода. Важным свойством мажоранты погрешности является ее эквивалентность ошибке. В терминах индекса эффективности это означает, что существуют такие постоянные c_1 и c_2, что

$$c_1 \leq I_{eff} \leq c_2,$$

причем эти постоянные не зависят от характерного размера элементов сетки, хотя могут существенно зависеть от ее локальной структуры. В случае, если имеет место стремление индекса эффективности к единице при измельчении сетки, говорят, что индикатор асимптотически точен. Эквивалентность ошибке для многих индикаторов может быть показана при достаточно общих предположениях относительно структуры разбиения области и гладкости точного решения, тогда как установление асимптотической точности, как правило, требует наложения существенных дополнительных ограничений.

В [307] при обсуждении вопроса о том, какой диапазон изменения индекса эффективности можно считать удовлетворительным для оценок энергетической нормы, из обобщения данных разных литературных источников говорится, что значения от 0.5 до 2.0 являются приемлемыми. С другой стороны, по мнению авторов статьи, основанному на их собственном опыте, крайне сложным и/или трудоемким будет получение результатов высокого качества в случае неклассических задач, в частности, связанных с вычислением упомянутых выше проблемно-ориентированных оценок. Здесь даже индикаторы с индексом эффективности порядка десятка могут рассматриваться как несущие полезную дополнительную информацию. Такое замечание вполне можно отнести и к рассматриваемому в диссертации функциональному подходу с одним лишь уточнением — поскольку он дает гарантированные верхние границы ошибки (мажоранты), то на практике значение индекса всегда больше единицы. Для этого случая можно встретить близкие критерии (в [52], например, указан диапазон от 1.0 до 2.0–3.0).

Когда речь идет о количественных характеристиках, отражающих качество локальной индикации погрешности, ситуация совсем не так однозначна. В литературе упоминаются локальные индексы эффективности, некоторые суммарные характеристики отклонения индикатора от точного распределения ошибки, процентные характеристики правильно определенных для дальнейшего разбиения элементов сетки и тому подобное, но ни одна из этих характеристик не является общепринятой и не отражает в полной мере эффективность сравниваемых методов с точки зрения индикации погрешности на элементах разбиения.

Кратко рассмотрим некоторые вычислительные свойства мажоранты (1.23). Отметим, что неравенство (1.22) может быть записано в форме

$$\|\nabla(\tilde{u} - u)\|_\Omega \leq \|\nabla\tilde{u} - \tilde{\tilde{y}}\|_\Omega + \mathfrak{c}_I \|\operatorname{div}\tilde{\tilde{y}} + f\|_\Omega, \tag{1.25}$$

которая не содержит свободного параметра β. Такое представление более удобно при установлении свойств оценки. На практике же предпочтительнее иметь квадратичную структуру функционала в правой части.

Множество $\mathbb{H}(\Omega, \operatorname{div})$, которому принадлежит свободный элемент $\tilde{\tilde{y}}$, является гильбертовым пространством. На нем вводится скалярное произведение, порождающее норму вида

$$\|\tilde{\tilde{y}}\|_{\operatorname{div}} := \left(\|\tilde{\tilde{y}}\|^2_\Omega \; + \; \|\operatorname{div}\tilde{\tilde{y}}\|^2_\Omega\right)^{1/2}.$$

Элемент $p = \nabla u$, очевидно, входит в это допустимое множество, поскольку $-\operatorname{div} p = f \in \mathbb{L}_2(\Omega)$. При $\tilde{\tilde{y}} = p$ значение мажоранты в правой части неравенства (1.25) равно $\|\nabla\tilde{u} - \nabla u\|_\Omega$. Таким образом, рассматриваемая оценка точна и для эффективного контроля погрешности достаточно построить последовательность $\tilde{\tilde{y}}_k$, которая бы сходилась к p в пространстве $\mathbb{H}(\Omega, \operatorname{div})$ при $k \to \infty$. Данное свойство функциональной мажоранты является более сильным, чем асимптотическая точность. Оно гарантирует возможность получения индекса эффективности, близкого к единице, не только при достаточно сильном измельчении сетки, а на каждой рассматриваемой сетке для любого заданного приближенного решения — это вопрос лишь вычислительных ресурсов, которые разумно затратить на апостериорную оценку точности.

В последнее десятилетие в литературе наметилась тенденция к использованию специального символа $\lesssim$, смысл которого заключается в том, чтобы скрыть в неравенстве любую (большую или малую) мультипликативную константу. Таким образом, неравенства $x \leq 100\ y$ и $x \leq 0.01\ y$ формально могут быть записаны одинаково как $x \lesssim y$. С одной стороны, это упрощает выкладки, с другой — приводит к размыванию четкой грани между надежными подходами и индикаторами погрешности, индекс эффективности которых может варьироваться в разных, даже однотипных задачах от сотых долей до тысяч. Все это в теоретическом обосновании индикатора скрыто знаком $\lesssim$. Принято при этом доказывать справедливость неравенств, утверждающих об эффективности[22] и надежности[23] индикаторов. Первое из них — это оценка вида

$$\eta \lesssim \|u - u_h\| \ + \ \mathrm{osc}(f, \mathcal{T}_h),$$

где η — индикатор, $\|u - u_h\|$ — норма погрешности (не обязательно энергетическая), f — правая часть уравнения, $\mathcal{T}_h$ — разбиение, на котором получена галеркинская аппроксимация u_h, а $\mathrm{osc}(f, \mathcal{T}_h)$ — так называемое осциллирующее слагаемое, определяемое выражением

$$\mathrm{osc}(f, \mathcal{T}_h) := \left(\sum_{T \in \mathcal{T}_h} \|h_T(f - f_T)\|^2 \right)^{1/2}, \quad f_T = \frac{1}{|T|} \int\limits_T f \, d\Omega.$$

Таких слагаемых, вообще говоря, может быть несколько. Концепция учета подобных добавок также связана с условием насыщения, о котором шла речь в параграфе 1.5. Второе неравенство, наоборот, устанавливает оценку сверху для

[22] efficiency estimate

[23] reliability estimate

нормы погрешности через индикатор

$$\|u - u_h\| \lesssim \eta$$

(см., например, M. Ainsworth, T. Vejchodský [324], C. Carstensen, C. Merdon [325], [326], Z. Cai, S. Zhang [137], L. Beirão da Veiga, G. Manzini [118], T.P. Barrios, E.M. Behrens, M. González [327], R. Sacchi, A. Veeser [328]). Таким образом, двусторонние оценки записываются с точностью до множителей, не зависящих от характерного размера сетки, и с точностью до слагаемых большего порядка малости, влияние которых часто не подлежит явному учету, но на фиксированных (особенно — грубых) сетках может оказаться значительным. Резюмируя сказанное выше, заметим, что понятие надежности может обсуждаться в разном контексте, и в последние годы оно существенно упростилось, поскольку речь реже идет о гарантированных верхних оценках погрешности. Тем не менее, автор будет использовать эту характеристику функционального подхода в том наиболее общем и всеобъемлющем смысле, который нашел свое отражение во введении и выгодно отличает этот подход от многих других. Аналогичная ситуация в литературе возникла и с понятием эффективности — чаще всего оно связано с термином «индекс эффективности» или с упомянутым выше свойством индикаторов, а не с вопросами сравнительного анализа вычислительной работы, необходимой для построения апостериорных индикаторов/оценок, хотя такая трактовка также иногда встречается в литературе (например, [52]).

В заключение параграфа отметим, что примеры сравнения различных апостериорных индикаторов и оценок погрешности можно найти, например, в работах W.F. Mitchell [49], I. Babuška, T. Strouboulis, C.S. Upadhyay, S.K. Gangaraj, K. Copps [131], I. Babuška, T. Strouboulis, C.S. Upadhyay, S.K. Gangaraj [132], A. Papastavrou, R. Verfürth [329], V. John [330], C. Carstensen, S. Bartels, R. Klose [331], M. Picasso [152], P. Ladevèze, J.-P. Pelle [182], A.H. ElSheikh, S. Smith, S.E. Chidiac [332], Z. Cai, S. Zhang [159], C. Carstensen, C. Merdon [326], [186]. Остановимся подробнее на содержании некоторых публикаций.

В сравнительном анализе в работе [326] участвуют все основные методы построения апостериорных оценок: явный метод невязок, различные варианты осреднения и уравновешивания, а также упрощенный вариант индикатора, аналогичный функциональной мажоранте по структуре, но теряющий теоретическую надежность (оценки перестают быть гарантированными верхними границами). Подтверждаются выводы о том, что индикаторы, основанные на осреднении, могут существенно недооценивать погрешность, явный метод невязок полезен при адаптации сеток, но абсолютно непригоден для использования в качестве критерия остановки вычислительного процесса, а для этих целей лучше всего подходят методы с уравновешиванием, к которым причислен и функциональный подход.

Статья [186] посвящена отдельному, более детальному рассмотрению группы индикаторов с уравновешиванием. В ней функциональный подход присутствует в явном виде, поскольку для примеров с постоянной правой частью введенная авторами добавка к мажоранте исчезает, а весовой множитель во втором слагаемом функционала выбран так, чтобы оценка была гарантированной. Все методы демонстрируют надежность и достаточно высокую эффективность. Наилучших результатов удается добиться при помощи специальной процедуры, основанной на построении вспомогательной мелкой сетки. Таким образом удается снизить переоценку ошибки, но за счет дополнительных затрат вычислительных ресурсов. С точки зрения использования апостериорной оценки как критерия завершения численного расчета этот выигрыш не столь значителен. Там, где истинная погрешность составляет, скажем 5%, а мажоранта показывала 8%, после специальной постобработки выходит 6%. Получается, что оба результата достаточно высокого качества. Стоит ли усложнять вычислительный алгоритм ради такого улучшения — это вопрос дискуссионный.

В работе [329] на примере задачи конвекции-диффузии с преобладанием конвективного слагаемого сравниваются метод осреднения, явный метод невязок и неявный метод невязок в классических вариантах, подобных описанным ранее. Результаты и основные выводы выглядят неоднозначно, поскольку при оценке эффективности методов сопоставляются приближенные решения задач с малым параметром и точное решение, соответствующее нулевому значению параметра. Следовательно, не учитывается ошибка, возникающая при замене модели с малым параметром на модель без параметра с известным аналитическим решением. Один из примеров фактически показывает, что если нет эталона для сравнения, то трудно сделать какие-либо достоверные выводы, глядя на итоговые разбиения, полученные в процессе адаптации. Из приведенных данных численных расчетов напрашивается вывод, что попытки прямого распространения ZZ-индикатора на другие типы задач может приводить к очень существенному росту индекса эффективности (до значений 50–100 на сетках всего в несколько тысяч элементов). Для явного метода невязок индекс возрастает с измельчением сетки в 10 раз в двух примерах из трех, а для неявного метода — он меняется резко и немонотонно

$$11.7 > 2.1 < 4.4 > 2.8 < 7.2 > 5.8.$$

Однако, если оценить качество адаптации по данным таблиц, то индикатор, основанный на осреднении, дает выше точность при меньшем числе узлов, хотя, по словам авторов, он не учитывает некоторые локальные особенности приближенных решений, связанные с осцилляциями.

Исследование [159] в основном содержит результаты сравнения различных индикаторов, полученных методами восстановления на базе локальных и глобальных процедур. Это — пять из шести индикаторов, а последний основан на явном методе невязок. В работе дается достаточно подробный обзор других источников, в частности, J.S. Ovall [333], подтверждающих тот факт, что для негладких решений в задачах с внутренним интерфейсом разрыва коэффициентов уравнения использование классических методов восстановления может приводить к чрезмерному сгущению сеток вблизи разрыва, а также проводится собственное численное исследование, подтверждающее наличие этой проблемы.

В качестве одного из возможных путей улучшения качества адаптации сеток вблизи зоны разрыва коэффициентов, авторы предлагают переход от узловой процедуры восстановления к процедуре, использующей ребра разбиения, а также привлечение аппроксимаций, естественных для пространства $\mathbb{H}(\Omega, \mathrm{div})$. Аналогичный подход, но в применении к функциональной мажоранте исследуется в главе 2. Однако анализ результатов [159] указывает на то, что в отличие от функционального подхода, методы восстановления даже после модификации могут недооценивать истинную величину погрешности. Отметим, что теоретические результаты [159] получили свое дальнейшее развитие в статье Z. Cai, S. Zhang [334].

Работа [152] посвящена сравнению поведения классических методов на анизотропных сетках, результаты которого демонстрируют неоспоримое преимущество метода осреднения перед явным методом невязок. Индексы эффективности для первого из них лежат в диапазоне 0.6–1.0, в основном 0.9–1.0, тогда как для второго отношение максимального и минимального значения достигает 3.5, а сам максимум говорит о переоценке истинной погрешности в десятки раз. Тем не менее, следует отметить, что наблюдаемое превосходство одного метода над другим не получило строгого теоретического обоснования.

О содержании более ранних работ [131] и [132] подробнее написано в параграфе 4.2, поскольку они включают, в том числе, исследования плоских задач линейной теории упругости. Там же упомянуты работы, содержащие сравнительный анализ методов или групп методов, который целиком посвящен обсуждению задач механики деформируемого твердого тела.

Глава 2

Вычислительный эксперимент для классических скалярных задач — сравнение подходов и адаптивные алгоритмы

2.1. Методики вычисления функциональных мажорант погрешности

Существует несколько алгоритмов вычисления оценки погрешности, полученной при помощи функционального подхода. Рассмотрим их на примере мажоранты (1.23) для задачи (1.1)

$$\mathcal{M}^2(\tilde{u}, \beta, \tilde{\tilde{y}}) = (1+\beta)\|\nabla \tilde{u} - \tilde{\tilde{y}}\|_\Omega^2 + (1+\beta^{-1})\mathfrak{c}_I^2 \|\operatorname{div} \tilde{\tilde{y}} + f\|_\Omega^2.$$

Как уже говорилось в параграфе 1.12, оптимальное значение переменной $\tilde{\tilde{y}}$ совпадает с градиентом точного решения u, то есть является точным решением двойственной вариационной задачи, которая имеет вид, приведенный в параграфе 1.9.

С точки зрения вычислительной трудоемкости решать двойственную задачу для оценки погрешности невыгодно, поскольку это требует построения специального вида базиса, чтобы аппроксимации принадлежали множеству $\mathbb{Q}_f$. Однако, если по каким-то причинам оказывается необходимым найти приближенное решение двойственной задачи, то полученная аппроксимация может быть использована для контроля точности решения исходной задачи при помощи мажоранты. В этом случае оценка фактически превращается в оценку Прагера–Синжа–Михлина, обобщением которой и является.

В качестве первой альтернативы нахождению равновесного поля существует очень простой способ получения оценки погрешности, использующий ту же идею, что и метод осреднения градиента. Имея после решения исходной задачи разрывное поле градиента приближенного решения $\nabla \tilde{u}$, мы можем осреднить его при помощи, например, процедуры, описанной в параграфе 1.6 при введении индикатора η_T^{ZZ}. Тогда становится возможным подставить кусочно-линейное поле $\tilde{\tilde{y}} = G\nabla \tilde{u}$ в мажоранту $\mathcal{M}$ и получить легко вычисляемую гарантированную верхнюю границу погрешности. Однако, как правило, такая оценка слишком пессимистична и завышает истинное значение нормы ошибки в десятки раз из-за сильного влияния второго слагаемого. В конечном итоге это приводит к большому количеству избыточных шагов адаптации в то время как желаемая точность уже давно достигнута.

Наиболее надежный способ, чаще всего дающий удовлетворительный результат при вычислении оценок погрешности, заключается в использовании осреднения градиента приближенного решения лишь для построения начального приближения по двойственной переменной. Дальнейшая минимизация значения функционала $\mathcal{M}^2$ выполняется итерационным методом при периодическом пересчете значения параметра β на оптимальное для текущего $\tilde{\tilde{y}}$. Как показывает практика, достаточно эффективным оказывается алгоритм с трехкратным пересчетом параметра β (см., например, C. Carstensen, C. Merdon [186, Алгоритм 5.1, с. 442]). Отметим, что этот алгоритм использовался ранее в работе M. Frolov, P. Neittaanmäki, S. Repin [184], но там были приведены только графические результаты его применения, демонстрирующие зависимость величины оценки от количества пересчетов, а сами шаги описаны не были. Его целесообразнее использовать, чем алгоритм с точным удовлетворением уравнению равновесия, поскольку он не требует построения базисов специального вида. Приведенные далее примеры подтверждают, что он в то же время позволяет получать качественные оценки погрешности.

Причина, по которой осредненный градиент приближенного решения не дает желаемого результата, заключается в том, что элемент $G\nabla \tilde{u}$ намного точнее воспроизводит градиент решения ∇u, чем его дивергенция удовлетворяет уравнению

$$\mathrm{div}(G\nabla\tilde{u}) + f = 0.$$

Поэтому для начального приближения второе слагаемое мажоранты велико и требует значительного уменьшения в процессе минимизации. В литературе упоминается модификация алгоритма (например, S. Repin [196], S. Repin, J. Valdman [199], J. Valdman [236]), когда градиент приближенного решения предлагается осреднять не на текущей сетке, а на более мелкой. Во-первых, такой способ более трудоемкий и требует решения задачи на мелкой сетке. Во-вторых, он недостаточно улучшает ситуацию, поскольку асимптотически сохраняет качество оценки только в том случае, если привлекаются всё более мелкие по сравнению с текущим разбиением вспомогательные сетки. То есть если сначала хороший индекс эффективности, скажем 1.5, был получен осреднением на сетке с характерным размером $h/4$, то через несколько итераций потребуется привлечение сетки с размером $h/8$, и так далее. Чтобы проиллюстрировать сказанное выше, в параграфе 2.4 изложены результаты численных расчетов для таких процедур осреднения и дан их сравнительный анализ.

В заключение параграфа отметим, что большинство примеров, приведенных в главе, посвящено несколько более общей классической эллиптической задаче, чем (1.1), достаточно часто упоминаемой в математической литературе как «стационарная задача диффузии»

$$\begin{cases} -\,\mathrm{div}(A\nabla u) = f & \text{в } \Omega, \\ \quad u = 0 & \text{на } \Gamma, \end{cases} \tag{2.1}$$

где, в дополнение к требованиям для задачи (1.1), $A = \{a_{ij}\}_{i,j=1,2}$ — симметричная матрица, $a_{ij} \in \mathbb{L}_\infty(\Omega)$, $i,j = 1,2$. Также предполагается, что существуют положительные константы α_1 и α_2, такие что[1]

$$\alpha_1|\xi|^2 \leqslant A\xi\cdot\xi \leqslant \alpha_2|\xi|^2, \quad \forall\xi\in\mathbb{R}^2.$$

[1] двусторонняя оценка должна выполняться поточечно почти всюду в Ω

Хорошо известно, что данная задача допускает следующую формулировку: найти элемент $u \in U_0$, удовлетворяющий интегральному тождеству

$$\int\limits_{\Omega} A\nabla u \cdot \nabla w \, d\Omega = \int\limits_{\Omega} f w \, d\Omega, \quad \forall w \in U_0,$$

где U_0 — пространство, введенное в первой главе. Обобщенное решение задачи u существует и единственно (см., например, О.А. Ладыженская [296]).

Для задачи (2.1) оценка энергетической нормы ошибки представлена в работе S. Repin [176] и имеет вид

$$\begin{aligned} \|u - \tilde{u}\|^2 \leqslant \mathcal{M}^2(\tilde{u}, \beta, \tilde{\tilde{y}}) := (1+\beta) \int\limits_{\Omega} (A\nabla\tilde{u} - \tilde{\tilde{y}}) \cdot (\nabla\tilde{u} - A^{-1}\tilde{\tilde{y}}) \, d\Omega \; + \\ + \left(1 + \frac{1}{\beta}\right) \frac{\mathfrak{c}_I^2}{\alpha_1} \int\limits_{\Omega} (\operatorname{div} \tilde{\tilde{y}} + f)^2 \, d\Omega, \end{aligned} \tag{2.2}$$

где $\tilde{u}$ — приближенное решение задачи, полученное любым из методов, обеспечивающих его принадлежность пространству U_0, а норма определяется следующим образом:

$$\|u - \tilde{u}\| := \left(\int\limits_{\Omega} A\nabla(u - \tilde{u}) \cdot \nabla(u - \tilde{u}) \, d\Omega \right)^{1/2},$$

и $\mathfrak{c}_I$ — константа в уже упомянутом неравенстве Фридрихса.

При написании главы был частично использован материал кандидатской диссертации автора [243]. Исследование также перекликается со сравнительным анализом, выполненным под его научным руководством в диссертации М.А. Чуриловой [246].

2.2. Два способа построения свободной переменной и связанные с этим аппроксимации

Рассмотрим подробнее два сравниваемых в главе способа вычисления функциональной апостериорной оценки (2.2) для случая, когда $\tilde{u} = u_h$ — приближенное решение, полученное методом конечных элементов с кусочно-линейной непрерывной аппроксимацией на сетке с характерным размером h. В этом случае u_h можно записать в виде суммы

$$u_h = \sum_{i=1}^{N} u_i \varphi_i,$$

где N — количество узлов расчетной сетки, u_i — значения решения в соответствующих узлах, а φ_i — непрерывные, линейные на каждом элементе функции формы, обращающиеся в ноль во всех узлах, кроме i-го. Отметим, что в формулах не указана явно зависимость функций u_h и φ_i от пространственных координат, чтобы избежать необходимости вводить новые обозначения. Тем не менее, эта зависимость подразумевается здесь и в дальнейших построениях. Воспользуемся такими же аппроксимациями для компонент переменной $\tilde{\tilde{y}}$, а именно

$$\tilde{\tilde{y}} = \sum_{i=1}^{N} \begin{pmatrix} y_{1i}\varphi_i \\ y_{2i}\varphi_i \end{pmatrix},$$

где y_{1i} и y_{2i} — значения в узлах расчетной сетки. Таким образом, при заданном начальном значении параметра β (например, $\beta = 1$) необходимо решить задачу минимизации

$$\min_{(y_{11},\dots,y_{1N},y_{21},\dots,y_{2N})} \mathcal{M}^2(u_h, \beta, \tilde{\tilde{y}}).$$

Необходимое условие для нее

$$\frac{\partial \mathcal{M}^2}{\partial y_{mi}} = 0, \quad \forall m = 1, 2,\ i = \overline{1, N}$$

приводит к системе линейных алгебраических уравнений для $2N$ неизвестных, матрица которой является положительно определенной и симметричной. В случае рассмотрения задачи Дирихле никаких граничных условий на свободную переменную в мажоранте не возникает. Система может решаться как прямым, так и итерационным методом, например, методом сопряженных градиентов с предобуславливанием (см. [236]). Далее параметр β вычисляется заново, исходя из минимизации правой части оценки погрешности при фиксированном элементе $\tilde{\tilde{y}}$, то есть

$$\beta = \frac{\mathfrak{c}_I \left(\int\limits_\Omega (\operatorname{div} \tilde{\tilde{y}} + f)^2 \, d\Omega \right)^{1/2}}{\left(\alpha_1 \int\limits_\Omega (A\nabla u_h - \tilde{\tilde{y}}) \cdot (\nabla u_h - A^{-1}\tilde{\tilde{y}}) \, d\Omega \right)^{1/2}}.$$

Как показано далее, во многих случаях такая методика позволяет построить эффективный адаптивный алгоритм на основе соответствующего функционального индикатора погрешности, полученного из первого слагаемого мажоранты

$$\eta_T^{CA} := \left(\int\limits_T (A\nabla u_h - \tilde{\tilde{y}}) \cdot (\nabla u_h - A^{-1}\tilde{\tilde{y}}) \, d\Omega \right)^{1/2}.$$

Однако у такого способа есть существенный недостаток, поскольку векторные поля из пространства $\mathbb{H}(\Omega, \operatorname{div})$ допускают разрыв касательной составляющей вдоль линии разрыва коэффициентов исходного дифференциального уравнения. Естественно, непрерывные аппроксимации не могут обеспечить такой разрыв, что может решающим образом влиять на качество локальной индикации погрешности вблизи зоны разрыва. Возникающая проблема решается путем привлечения аппроксимаций в пространстве $\mathbb{H}(\Omega, \operatorname{div})$, характерных для теории смешанных методов конечных элементов, а именно двойственных смешанных методов. Первые работы на эту тему датируются концом 60-х годов XX века, но общая теория сформировалась позднее (см. J.E. Roberts, J.-M. Thomas [335], F. Brezzi, M. Fortin [14], а также D. Braess [29], Ф. Сьярле [1], В.В. Шайдуров [13], D. Boffi et al. [336], S.C. Brenner, R.L. Scott [34] и цитируемую там литературу). К настоящему моменту существует широкий спектр аппроксимаций, построенных на основе как треугольных, так и четырехугольных элементов (см., в частности, [336], [34], [14], а также P.A. Raviart, J.M. Thomas [252], F. Brezzi, J. Douglas (Jr.), L.D. Marini [337], R.G. Duran[338]).

Рассмотрим конформные аппроксимации векторных полей из пространства $\mathbb{H}(\Omega, \operatorname{div})$ для триангуляции $\mathcal{T}_h$. Их нормальная составляющая должна сохранять непрерывность при переходе через общую сторону E двух соседних

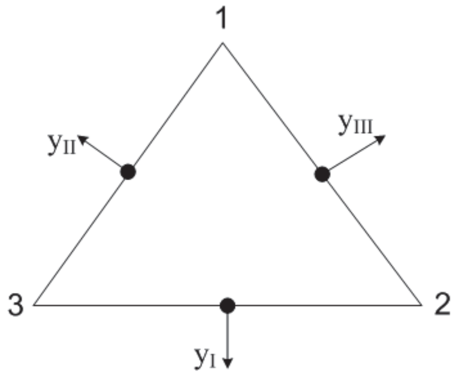


Рисунок 2.1: Элемент Равьяра–Тома нулевого порядка.

элементов T_1 и T_2, то есть $\tilde{\tilde{y}} \cdot n_{T_1} = -\tilde{\tilde{y}} \cdot n_{T_2}$ на $E = T_1 \cap T_2$, где n_{T_1} и n_{T_2} — внешние нормали к E для элементов T_1 и T_2, соответственно. Одна из аппроксимаций, удовлетворяющих данному требованию — это аппроксимация с помощью элементов Равьяра–Тома [252], [14]. Для простоты численно был реализован конечный элемент Равьяра–Тома нулевого порядка, содержащий три степени свободы — нормальные составляющие $\tilde{\tilde{y}}$ в серединах сторон (см. Рисунок 2.1). На каждом элементе разбиения поле выражается формулой

$$\tilde{\tilde{y}}_T = y_I\psi_I + y_{II}\psi_{II} + y_{III}\psi_{III} = \begin{pmatrix} y_I\psi_{I_1} + y_{II}\psi_{II_1} + y_{III}\psi_{III_1} \\ y_I\psi_{I_2} + y_{II}\psi_{II_2} + y_{III}\psi_{III_2} \end{pmatrix},$$

где $y_I = \tilde{\tilde{y}}_T \cdot n_I$, $y_{II} = \tilde{\tilde{y}}_T \cdot n_{II}$, $y_{III} = \tilde{\tilde{y}}_T \cdot n_{III}$; n_I, n_{II}, n_{III} — нормали к ребрам треугольника T в локальной нумерации; векторные функции формы ψ_I, ψ_{II} и ψ_{III} имеют вид

$$\psi_m = \begin{pmatrix} \psi_{m1} \\ \psi_{m2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \iota_{m1} + \bar{\iota}_m x_1 \\ \iota_{m2} + \bar{\iota}_m x_2 \end{pmatrix}, \quad m = I, II, III,$$

где x_1 и x_2 — пространственные координаты, а коэффициенты ι_{m1}, ι_{m2} и $\bar{\iota}_m$ для представления каждой из функций формы на элементе можно найти через решение системы линейных алгебраических уравнений следующего вида:

$$\begin{array}{llll} \psi_I \cdot n_I = 1, & \psi_{II} \cdot n_I = 0, & \psi_{III} \cdot n_I = 0 & \text{в точке } I, \\ \psi_I \cdot n_{II} = 0, & \psi_{II} \cdot n_{II} = 1, & \psi_{III} \cdot n_{II} = 0 & \text{в точке } II, \\ \psi_I \cdot n_{III} = 0, & \psi_{II} \cdot n_{III} = 0, & \psi_{III} \cdot n_{III} = 1 & \text{в точке } III, \end{array}$$

где точки I–III являются серединами соответствующих сторон элемента. Дивергенция такого поля на элементе есть константа

$$\operatorname{div} \tilde{\tilde{y}}_T = 2(y_I \bar{\iota}_I + y_{II} \bar{\iota}_{II} + y_{III} \bar{\iota}_{III}).$$

Во всей области поле определяется формулой

$$\tilde{\tilde{y}} = \sum_{i=1}^{N_{ed}} y_i \psi_i,$$

где N_{ed} — количество ребер всех элементов в триангуляции $\mathcal{T}_h$, y_i — значения на ребрах, а ψ_i — соответствующие базисные функции. Таким образом, при данном типе аппроксимации нужно решить задачу минимизации

$$\min_{(y_1, \ldots, y_{N_{ed}})} \mathcal{M}^2(u_h, \beta, \tilde{\tilde{y}}),$$

причем необходимое условие минимума

$$\frac{\partial \mathcal{M}^2}{\partial y_i} = 0, \quad \forall i = \overline{1, N_{ed}}$$

приводит к системе линейных алгебраических уравнений относительно N_{ed} неизвестных, матрица которой также положительно определенная и симметричная, как и в случае стандартных аппроксимаций метода конечных элементов. Ее общая сборка происходит с учетом выбранного направления нормали к ребру, а степени свободы относятся теперь уже к ребрам, а не к узлам. Это незначительно уменьшает размерность системы по сравнению с предыдущим способом.

Индикатор погрешности, учитывающий локальные вклады на каждом элементе для аппроксимации Равьяра–Тома, обозначим через

$$\eta_T^{RT} := \left(\int_T (A \nabla u_h - \tilde{\tilde{y}}) \cdot (\nabla u_h - A^{-1} \tilde{\tilde{y}}) \, d\Omega \right)^{1/2}.$$

Формально он определяется так же, как и в случае пары непрерывных аппроксимаций. Заметим, что в данном исследовании был сделан выбор в пользу простоты реализации и экономии вычислительных ресурсов. При необходимости качество локальной индикации погрешности можно повысить за счет использования, например, аппроксимации Равьяра–Тома первого порядка. Элемент первого порядка содержит восемь степеней свободы — шесть значений нормальных составляющих на сторонах и значение векторного поля в центре масс.

2.3. Сравнение функциональной мажоранты с классическими методами на фиксированных сетках

При сопоставлении разных методов построения мажорант и индикаторов погрешности важную роль играет выбор критериев оценки качества получаемых результатов. Как уже говорилось ранее, существует общепринятая характеристика точности глобальных оценок, называемая в литературе индексом эффективности. Эта характеристика дает представление о том, насколько метод недооценивает или наоборот переоценивает истинное значение нормы ошибки. Однако сравнение с другими индикаторами при помощи одних только глобальных характеристик невозможно в силу того, что стандартные индикаторы часто не обеспечивают надежных глобальных оценок (мажорант), а лишь позволяют определить локальные зоны, где ошибки относительно велики. Следовательно, необходим также критерий, по которому можно судить, насколько хорошо метод воспроизводит локальное распределение погрешности внутри расчетной области. Выбор такого критерия не столь однозначен — в главе рассмотрено несколько вариантов. Достаточно подробно вопрос анализа качества локальной индикации погрешности и сравнения индикаторов освещен в монографии [66].

Отметим, что как полную величину

$$(\eta_T)^2 = (1+\beta)\int\limits_T (A\nabla\tilde{u} - \tilde{\tilde{y}}) \cdot (\nabla\tilde{u} - A^{-1}\tilde{\tilde{y}})\, d\Omega + \\ + \ (1+\beta^{-1})\,\frac{\mathfrak{c}_I^2}{\alpha_1}\int\limits_T (\operatorname{div}\tilde{\tilde{y}} + f)^2\, d\Omega\ ,$$

так и ее первое слагаемое без учета множителя, введенное ранее как $(\eta_T^{CA})^2$

можно считать локальным индикатором вклада в квадрат нормы ошибки на элементе T, поскольку квадрат энергетической нормы отклонения $e = u - u_h$ также может быть представлен в виде суммы локальных величин

$$\|\!|e|\!\|^2 = \sum_{T \in \mathcal{T}_h} (\eta_T^e)^2, \quad \eta_T^e := \left(\int\limits_T A\nabla e \cdot \nabla e \, dx \right)^{1/2}.$$

Рассмотрим следующую характеристику качества локальной индикации (см. S. Repin [175], С.И. Репин, М.Е. Фролов [71]):

$$I_{\mathcal{T}_h} := 1 + \frac{\sum_T |\bar{\mathcal{M}}_T - \bar{e}_T|}{\sum_T \bar{e}_T},$$

где

$$\bar{e}_T := \frac{(\eta_T^e)^2}{\max_{T \in \mathcal{T}_h} \{(\eta_T^e)^2\}}, \qquad \bar{\mathcal{M}}_T := \frac{(\eta_T)^2}{\max_{T \in \mathcal{T}_h} \{(\eta_T)^2\}}.$$

В данном случае суммирование ведется по всем элементам разбиения $\mathcal{T}_h$, а соответствующие локальные вклады нормируются так, чтобы их максимальное значение равнялось единице. Отметим, что как и для индекса эффективности I_{eff}, для этой величины оптимальное значение равно единице. В этом случае мажоранта абсолютно точно воспроизводит локальное распределение погрешности по области.

Приведем два примера из работы автора [243] (см., также [184] и [71]). Отметим, что [71] является первой работой, в которой функциональный подход численно сравнивался с классическими индикаторами для плоских задач. В [184] на примере уравнения Пуассона исследованы вычислительные свойства соответствующей оценки. Результаты касаются и более общей задачи — задачи Дирихле для уравнения диффузии с разрывами в правой части и коэффициентах уравнения. При этом реализованы непрерывные аппроксимации метода конечных элементов на фиксированных сетках без адаптации.

Индикаторы, с которыми проводится сравнение, получены при помощи явного метода невязок и метода осреднения градиента, описанных в главе 1.

Приведем их в более общей форме, когда A не обязательно является единичной матрицей. Отметим еще раз, что применение этих методов строго обосновано только в том случае, когда приближенное решение совпадает с галеркинской аппроксимацией u_h. Далее рассмотрены следующие глобальные индикаторы и совокупность соответствующих им локальных величин:

— Индикатор η^{ZZ} основан на локальной процедуре осреднения

$$\eta^{ZZ} := \|A\nabla u_h - G(A\nabla u_h)\|_\Omega,$$

где $G(A\nabla u_h)$ — кусочно-линейное непрерывное векторное поле. Его значение в узле X определяется по формуле

$$G(A\nabla u_h)|_X = \sum_{T\in\Omega_X} \frac{|T|}{|\Omega_X|}\, A\nabla u_h|_T.$$

— Индикатор η^{LS} основан на $\mathbb{L}_2$-проекции кусочно-постоянного векторного поля $A\nabla u_h$ на пространство кусочно-линейных непрерывных полей Y_h

$$\eta^{LS} := \min_{y\in Y_h} \|A\nabla u_h - y\|_\Omega.$$

Такую проекцию можно считать некоторым вариантом осреднения. В книге R. Verfürth [58] показана связь индикаторов η^{ZZ} и η^{LS}. Заменив стандартное скалярное произведение в пространстве $\mathbb{L}_2(\Omega,\mathbb{R}^2)$ на следующее:

$$(q,y)_h := \sum_{T\in\mathcal{T}_h} \frac{|T|}{3} \left(\sum_{m=1}^{3} q(X_m(T))\cdot y(X_m(T)) \right),$$

где $X_1(T), X_2(T), X_3(T)$ — вершины элемента T, мы в точности придем к индикатору η^{ZZ}. Индекс h подчеркивает сеточный характер построения.

— Индикатор η^j является объединением совокупности локальных индикаторов вида (1.9)

$$\eta^j := \left(\sum_{E\in\mathcal{E}_h} h_E\, \|j(A\nabla u_h\cdot n_E)\|_E^2 \right)^{1/2}.$$

Идеальным подходом к постановке вычислительного эксперимента является сравнение картины локального распределения погрешности, полученного на основе каждого из индикаторов, с истинным распределением ошибки. Однако это возможно только тогда, когда известно точное решение задачи. В случае, когда точное решение неизвестно, вместо него использовалась аппроксимация, полученная на более мелкой сетке, например, $u_{h/4}$. Как уже говорилось ранее — это общепринятая практика. Такое решение далее названо «эталонным»[2]. В качестве соответствующего локального индикатора рассматривается следующий:

$$\eta_T^{RS} := \left(\int_T A\nabla\tilde{e} \cdot \nabla\tilde{e}\, dx \right)^{1/2},$$

где $\tilde{e} := u_{h/4} - u_h$.

Перейдем к характерным примерам.

***Пример* 2.1.** *Квадратная область с вырезанной четвертью*

В первом примере рассматривается мажоранта из неравенства (2.2), которая получена для $f \equiv 1$ при условии, что A — единичная матрица. Она сравнивается с индикаторами η^{ZZ} и η^j. При этом значение индекса $I_{\mathcal{T}_h}$, отражающего качество локального воспроизведения погрешности, легко может быть получено для η^{ZZ} после возведения в квадрат. Вычисление данного индекса для явного метода невязок требует знания констант $\tilde{C}_1$ и $\tilde{C}_2$ в неравенстве типа (1.8). Однако, если рассматривать в качестве индикатора локальной структуры ошибки только второе слагаемое, связанное со скачками нормальной составляющей вектора, то значение $I_{\mathcal{T}_h}$ из-за нормировки уже не будет зависеть от констант. В Таблице 2.1 приведены значения данного индекса для функциональной мажоранты и индикаторов η^{ZZ} и η^j, соответственно. В ней также представлены оценки ошибки, полученные для двух равномерных разбиений области Ω. Здесь N обозначает количество внутренних узлов сетки, которое совпадает с числом степеней свободы в исходной задаче. Первые две строки данной таблицы относятся

[2] от англ. reference solution

к случаю, когда приближенное решение является галеркинской аппроксимацией. Индексы указывают на то качество, с которым методы позволяют восстано-

Таблица 2.1: Качество индикации погрешности при помощи сравниваемых методов

N	$\|\|\|e\|\|\|$	$\mathcal{M}$	$I_{eff}(\mathcal{M})$	$I_{\mathcal{T}_h}(\mathcal{M})$	$I_{\mathcal{T}_h}(\eta^{ZZ})$	$I_{\mathcal{T}_h}(\eta^{j})$
161	0.0814	0.0968	1.19	1.24	1.17	1.41
705	0.0435	0.0560	1.29	1.18	1.12	1.31
705	0.0493	0.0609	1.23	1.20	1.34	1.45
705	0.0617	0.0716	1.16	1.19	1.58	1.64
705	0.0688	0.0782	1.14	1.18	1.64	1.70

вить ошибку глобально и локально. Три последние строки Таблицы 2.1 отражают тот случай, когда приближенное решение отличается от той галеркинской аппроксимации, которой соответствует вторая строка. Их сравнение позволяет сделать вывод, что для этого случая только функциональный подход дает эффективную оценку погрешности. Качество индикации ее локальной структуры, которое отражает индекс $I_{\mathcal{T}_h}(\mathcal{M})$, не ухудшается. С другой стороны, как и следовало ожидать, когда решение отличается от галеркинского приближения, для метода осреднения градиента и метода невязок наблюдается значительное возрастание величины индексов $I_{\mathcal{T}_h}(\eta^{ZZ})$ и $I_{\mathcal{T}_h}(\eta^{j})$.

Для сопоставления глобальной оценки нормы ошибки с методом невязок в Таблице 2.2 в сокращенном варианте даны результаты для рассматриваемого примера, взятые из работы C. Carstensen, S.A. Funken [126]. При сравнении Таблицы 2.1 и Таблицы 2.2 явно видно преимущество функционального подхода. Индекс эффективности для метода невязок, при попытке полноценно его реализовать, может в десятки раз превышать оптимальное значение, что свидетельствует о сильной переоценке истинной величины погрешности. Как говорилось ранее, это связано с серьезными затруднениями, возникающими при

Таблица 2.2: Глобальная оценка погрешности при помощи метода невязок

N	$\|\!\|e\|\!\|$	Оценка	I_{eff}
33	0.1580	5.0319	31.85
161	0.0862	2.9456	34.17
705	0.0476	1.6565	34.82

вычислении верхних границ для констант $\tilde{C}_1$ и $\tilde{C}_2$ в неравенстве (1.8). Отметим, что некоторая разница в точности расчета приближенных решений на сетках с одинаковым числом степеней свободы возникает из-за того, что авторы [126] предположительно использовали разбиения, которые не полностью отражают симметрию задачи, что и привело к менее точным галеркинским аппроксимациям.

Таким образом, для стандартных индикаторов качество результатов не только в теории, но и на практике существенно зависит от того, насколько приближенное решение близко к галеркинской аппроксимации.

***Пример* 2.2.** *Квадратная область, содержащая острый входящий угол*

Во втором примере мажоранта сравнивается с индикаторами η^{ZZ} и η^{LS}, которые основаны на сглаживании кусочно-постоянного поля градиента приближенного решения. При этом рассматривается задача (1.1) с разрывной правой частью

$$\begin{cases} f = -1, & \text{если } x_1 \leq 0.5, \\ f = +1, & \text{если } x_1 \geq 1.5, \\ f = 0, & \text{если } x_1 \in (0.5, 1.5) \end{cases}$$

в области, изображенной на Рисунке 2.2. В данном случае основной целью также является исследование надежности методов. При этом для наглядности в приближенное решение u_h искусственно вводится гладкая погрешность путем добавления смещения, величина которого задается значением положительного параметра α, а именно

$$\begin{cases} \alpha\ \sin(2\pi x_1)\ \sin(2\pi x_2), & \text{если } |x_1 - 1| < 0.5 \ \text{ и } \ |x_2 - 0.75| < 0.25, \\ 0 & \text{иначе.} \end{cases}$$

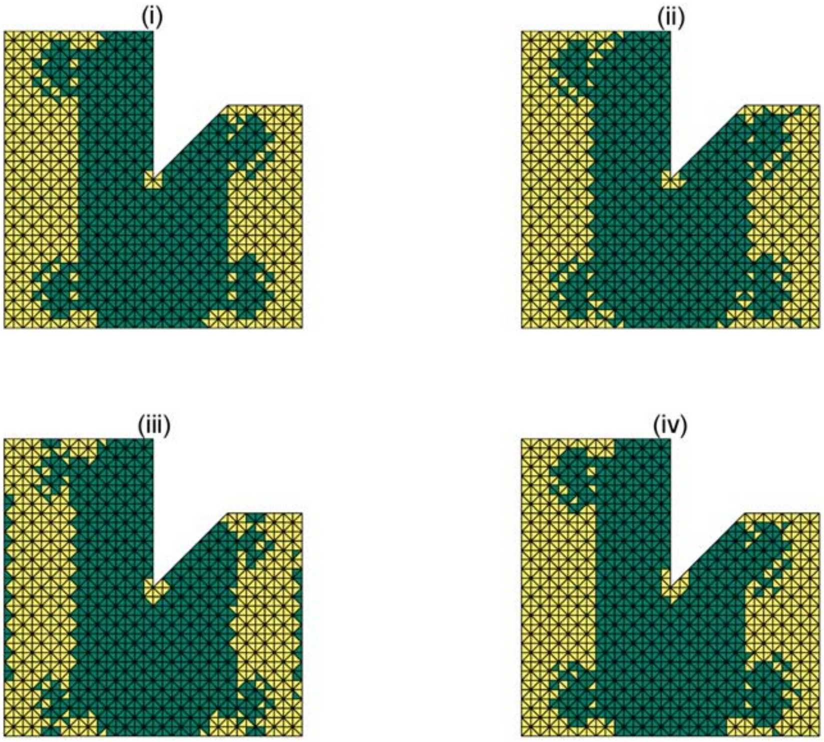


Рисунок 2.2: Индикация на основе (i) распределения погрешности η_T^{RS} и при помощи индикаторов (ii) η^{ZZ}, (iii) η^{LS}, (iv) η_T^{CA} при $\alpha = 0$.

Заметим, что если известно точное решение исходной задачи, то мы можем вычислить истинное локальное распределение погрешности для данного приближенного решения. Имея эту информацию, можно разделить элементы триангуляции на две группы: в первую группу попадут те элементы, для которых локальные ошибки меньше, чем среднее значение по всей области, во вторую — те, для которых они больше. С точки зрения последовательной адаптации сеток такое распределение означает, что элементы второй группы отмечены для дальнейшего разбиения. На Рисунке 2.2 и далее они выделены желтым цветом. Таким образом, близость диаграмм, полученных при использовании различных индикаторов с диаграммой, которую мы имеем, зная точное распределение погрешности, будет служить доказательством высокой эффективности сравниваемых методов. Существенное отличие, наоборот, будет говорить о низком качестве локальной индикации.

Приведенная далее Таблица 2.3 иллюстрирует изменение индекса эффективности глобальных оценок, получаемых при помощи разных методов с ростом α. Первая строка соответствует исходному приближенному решению. В этом

Таблица 2.3: Связь между значением параметра α и величиной индекса эффективности сравниваемых оценок

α	$I_{eff}(\eta^{ZZ})$	$I_{eff}(\eta^{LS})$	$I_{eff}(\mathcal{M})$
0.000	1.01	0.96	1.04
0.002	0.99	0.93	1.04
0.004	0.92	0.86	1.03
0.006	0.83	0.78	1.03
0.008	0.75	0.70	1.02
0.010	0.68	0.64	1.02

случае все три метода дают примерно одинаковый результат, качество которого является высоким (см. также Рисунок 2.2). Однако при локальном отклонении приближенного решения от галеркинской аппроксимации с ростом значения параметра эффективность стандартных индикаторов существенно снижается. Более того, они начинают явно недооценивать истинную величину ошибки, что недопустимо с точки зрения надежного моделирования в инженерных задачах. Индикаторы η^{ZZ} и η^{LS} никак не отражают сильное возрастание погрешности и, как следствие, изменение ее распределения. Этот вывод подтверждается серией диаграмм на Рисунке 2.3. При этом мажоранта продолжает воспроизводить глобальную норму погрешности с близким к единице индексом эффективности. Другие примеры, иллюстрирующие данное преимущество функционального подхода, можно найти в [184].

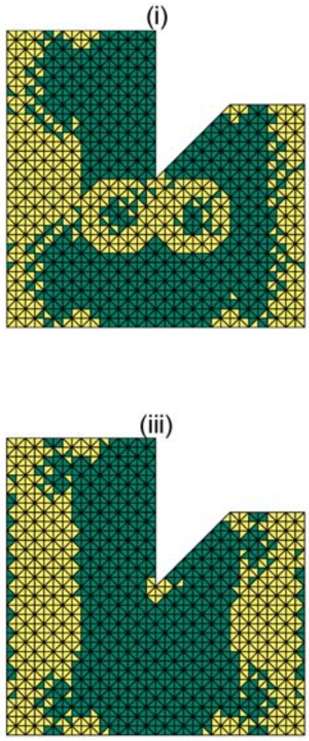


Рисунок 2.3: Индикация на основе (i) распределения погрешности η_T^{RS} и при помощи индикаторов (ii) η^{ZZ}, (iii) η^{LS}, (iv) η_T^{CA} при $\alpha = 0.004$.

2.4. Реализация адаптивных алгоритмов с использованием пары кусочно-линейных непрерывных аппроксимаций метода конечных элементов

Результаты, приведенные в предыдущем параграфе, а также другие примеры [243] и [184] отражают достаточно высокое качество и надежность оценок погрешности, получаемых с помощью подхода на одном взятом разбиении области Ω. Этот опыт дает основание предположить, что алгоритмы адаптации, построенные на базе той информации о погрешности, которую обеспечивает соответствующий индикатор, будут более эффективными, чем основанные на стандартных методах. В рассмотренных ниже примерах метод сравнивается в процессе адаптации со стандартным индикатором, используемым в пакете MATLAB, а также с классическим индикатором по методу осреднения.

Как говорилось ранее, вопрос о том, каким образом оценивать и сравнивать качество локальной индикации погрешности при последовательном улучшении сеток, не имеет однозначного ответа. В процессе адаптации те сетки, к которым приводит тот или иной индикатор, могут сильно различаться по своей структуре. В примерах в качестве ориентира для сравнения используется введенный ранее эталонный индикатор. Именно с ним сопоставляется локальный индикатор, основанный на мажоранте (2.2), стандартный индикатор MATLAB PDE Toolbox

$$\eta_T^{\mathrm{MATLAB}} := \|h_T\, f\|_T + \left\{ \frac{1}{2} \sum_{E \in \mathcal{E}_T} h_E^2\, |j(A\nabla u_h \cdot n_E)|^2 \right\}^{1/2}$$

и другие методы. Приведенный выше индикатор основан на работе K. Eriksson, C. Johnson [101]. Он имеет структуру, аналогичную другим индикаторам, полученным при помощи явного метода невязок в параграфе 1.2. Подход, связанный с использованием эталонного решения вместо неизвестного точного, несущественно завышает индекс эффективности, что может привести лишь к недооценке истинной эффективности предлагаемых методик.

В целом, каждую итерацию алгоритма адаптации можно представить как последовательность указанных ниже действий, выполняющихся после выбора желаемого значения погрешности ϵ и построения начального разбиения области. Отметим, что поскольку речь идет о вычислительном эксперименте, то описание второго этапа несколько отличается от соответствующего ему описания во введении — остановка процесса происходит по значению эталонного индикатора, чтобы все методы работали в одинаковых условиях.

Шаг 1 Вычисление приближенного решения задачи u_h.

Шаг 2 Оценка нормы отклонения $\|u - u_h\|$ с помощью выбранного метода. Оценка погрешности при помощи эталонного решения. Если приближенное решение с заданной точностью получено, то процесс адаптации завершается. Иначе, переходим к Шагу 3.

Шаг 3 Локальная индикация погрешности с помощью одного из индикаторов — выделение зон, где значение погрешности велико.

Шаг 4 Адаптация — измельчение сетки в выбранных зонах стандартными средствами пакета и переход к Шагу 1 следующей итерации на новой сетке.

Абсолютно одинаково анализ проводится для всех индикаторов. В результате получаются разные последовательности сеток и соответствующих им приближенных решений. Последовательность с эталонным индикатором считается ориентиром, поскольку адаптация для нее получена из условия знания точного или очень близкого к точному распределения локальных ошибок. Далее возможно выбрать из всех последовательностей сетки, близкие по количеству узлов и/или сравнить относительную точность приближенных решений. Имея каждый раз в качестве ориентира сетку, полученную при помощи эталонного критерия, можно также определить, обеспечивает тот или иной метод адаптацию разбиения к особенностям данной задачи или нет.

Переходя к примерам, отметим, что во всех случаях использовался одинаковый принцип адаптивного построения более мелкой сетки на основе информации, полученной после решения задачи на более грубой. Таким образом, различия в итоговом результате могли возникнуть только по причине разной степени эффективности сравниваемых методов. Чаще всего использовался критерий отсечения элементов по среднему значению локальной погрешности, как при построении диаграмм предыдущего параграфа. Подробную информацию о различных критериях отбора элементов для сгущения и типах разбиения можно найти, например, в монографии R. Verfürth [58].

Пример 2.3. *Прямоугольная область из трех частей с квадратным отверстием*

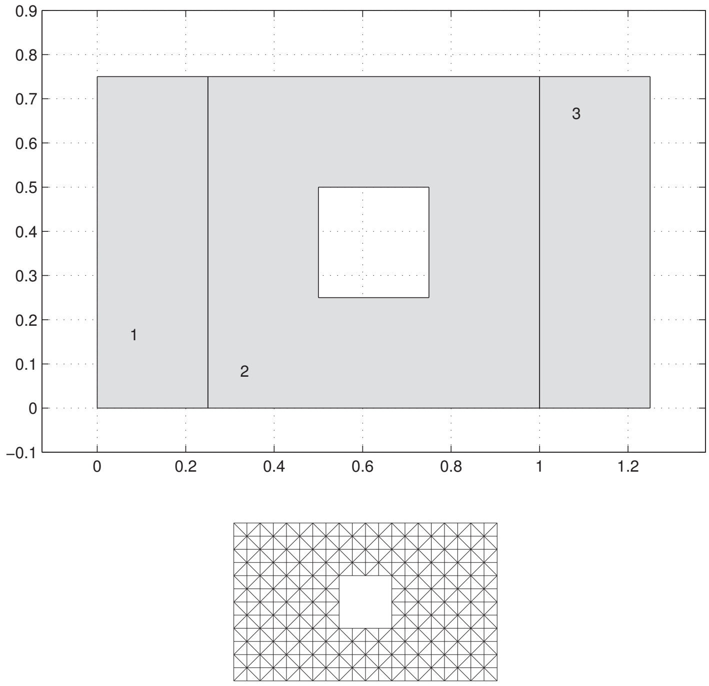


Рисунок 2.4: Область Ω для примера 2.3 и ее начальное разбиение.

В первом примере с адаптацией рассматривается задача (1.1) в области с отверстием. При этом правая часть принимает следующие значения внутри области Ω (см. Рисунок 2.4)

$$\begin{cases} f = 1 & \text{в подобласти 1,} \\ f = 0 & \text{в подобласти 2,} \\ f = 1 & \text{в подобласти 3.} \end{cases}$$

Начальное разбиение также приведено на Рисунке 2.4. Оно отражает симметрию задачи для того, чтобы можно было контролировать сохранение этой симметрии в процессе работы адаптивных алгоритмов, основанных на различных методах. Результаты нескольких итераций адаптации начальной сетки представлены в Таблице 2.4. Как и ранее, за N обозначено число узлов возникающих сеток. Величина $e\%$ представляет собой процент относительной погрешности соответствующих приближенных решений, вычисляемый по формуле

$$e\% := \frac{\|u_h - u_{h/4}\|}{\|u_{h/4}\|} \times 100\%.$$

Последние столбцы таблицы относятся к случаю, когда разбиение происходит равномерно, то есть без адаптации. Сравним результаты, которые получаются при знании точного распределения погрешности, с теми, которые обеспечивает мажоранта. Легко видеть, что использование данного индикатора практически эквивалентно знанию истинных величин локальных ошибок. Получающиеся сетки очень близки как по количеству узлов, так и по точности приближенных решений. К этому же заключению можно прийти, сравнивая два конечных разбиения, приведенных на Рисунке 2.6.

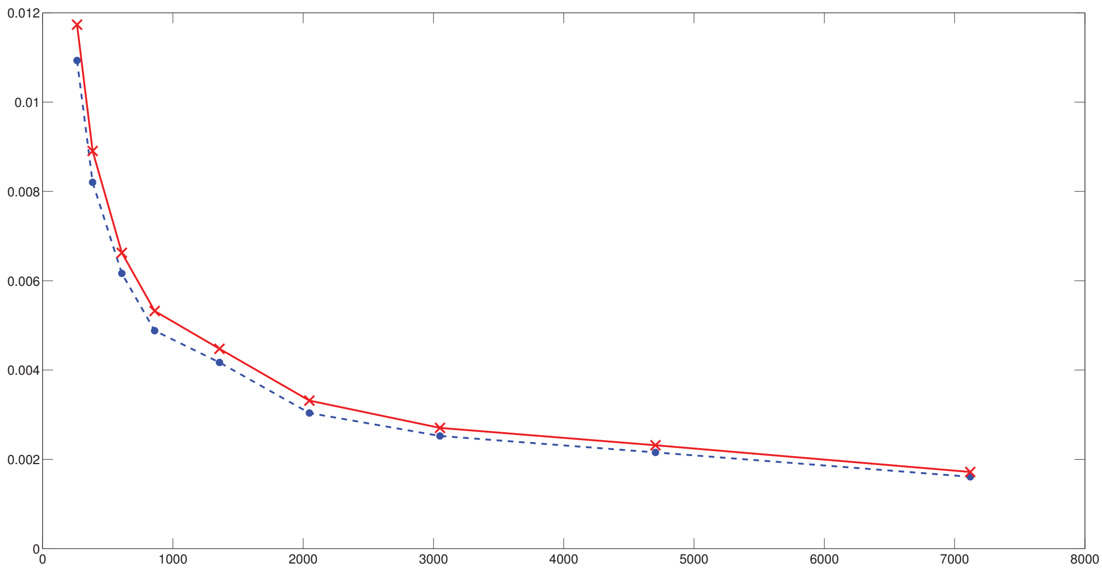


Рисунок 2.5: Зависимость величины нормы ошибки от числа узлов сетки (точки, соединенные пунктирной линией) и ее гарантированная верхняя оценка, обеспеченная мажорантой (точки, соединенные сплошной линией) для примера 2.3.

Итер.	η_T^{RS}		η_T^{CA}			η_T^{MATLAB}			η_T^{ZZ}			равн. разб.	
	N	$e\%$	N	$e\%$	I_{eff}	N	$e\%$	I_{eff}	N	$e\%$	I_{eff}	N	$e\%$
0	264	19.70	264	19.70	1.07	264	19.70	1.18	264	19.70	1.04	264	19.70
1	380	14.77	384	14.77	1.08	360	15.49	1.10	380	14.77	1.03		
2	600	11.09	608	11.09	1.07	608	11.66	1.05	588	11.12	1.04		
3	848	8.78	860	8.79	1.09	1012	9.09	0.99	844	8.75	1.05	976	10.44
4	1294	7.49	1358	7.50	1.07	1540	7.71	0.97	1346	7.35	1.03		
5	1956	5.52	2048	5.47	1.09	2194	5.94	1.02	2094	5.36	1.04		
6	2928	4.59	3050	4.54	1.07	3714	4.88	0.96	3114	4.48	1.04	3744	5.42
7	4508	3.93	4704	3.88	1.07	5568	4.14	0.95	4878	3.78	1.04		
8	6912	2.94	7120	2.89	1.07	8006	3.15	0.99	7516	2.80	1.04		
9						13280	2.61	0.96				14656	2.80

Таблица 2.4: Адаптация сеток для сравниваемых индикаторов в примере 2.3

Мажоранта обеспечивает на каждом этапе адаптации точную оценку погрешности в энергетической норме с индексом эффективности в диапазоне 1.07–1.09 (см. столбец 6 Таблицы 2.4 и Рисунок 2.5), что, безусловно, является очень хорошим результатом. Качество локальной индикации также остается высоким — «карта» отметок элементов для последующего разбиения близка к эталонной на каждой итерации (см. Рисунок 2.8), что в итоге и приводит к близким финальным сеткам.

Для классических методов следует отметить, что в данном примере стандартный индикатор пакета также обеспечивает достаточно эффективную адаптацию сетки. Однако он уступает по качеству мажоранте (см. столбцы 7–9 Таблицы 2.4 и Рисунок 2.7 вверху). Индикатор, основанный на методе осреднения, дает хороший результат, что вполне естественно, поскольку простые эллиптические краевые задачи без разрывов в коэффициентах при отсутствии отклонения от галеркинских аппроксимаций как раз и составляют область успешного применения известного подхода.

Далее сравним два алгоритма вычисления мажоранты. В первом из них для $\tilde{\tilde{y}}$ возьмем осреднение на мелкой сетке $A\nabla u_{h/4}$ без минимизации функционала. Результаты для случая, когда мажоранта считается на сетке с параметром $h/4$, а затем вклады собираются с измельченных элементов в исходные крупные, сведены в Таблицу 2.5. Второй способ основан на решении линейной системы для расчета $\tilde{\tilde{y}}$ (см. Таблицу 2.6), как это и было сделано в приведенных выше исследованиях. Для анализа результатов введем обозначения для частей мажоранты без учета множителей

$$\mathcal{D}(\tilde{u},\tilde{\tilde{y}}) := \left(\int\limits_{\Omega} (A\nabla\tilde{u} - \tilde{\tilde{y}})\cdot(\nabla\tilde{u} - A^{-1}\tilde{\tilde{y}})\, d\Omega\right)^{1/2},$$

$$\mathcal{R}(\tilde{\tilde{y}}) := \left(\int\limits_{\Omega} (\operatorname{div}\tilde{\tilde{y}} + f)^2\, d\Omega\right)^{1/2}.$$

Из таблиц можно сделать вывод о том, что только полноценная минимизация квадратичного функционала достаточно уменьшает вклад второго слагаемого в итоговую оценку. Даже модифицированные процедуры осреднения производных не обеспечивают стабильного поведения индекса эффективности оценок. Наоборот, наблюдается его резкий рост почти на порядок в процессе адаптации. Это связано с асимптотическим поведением погрешности аппроксимации $\tilde{\tilde{y}}$ — точность воспроизведения поля $A\nabla u$, являющегося решением двойственной вариационной задачи, в $\mathbb{L}_2$-норме растет быстрее, чем для этой аппроксимации убывает невязка уравнения равновесия, если уменьшение ее величины вообще наблюдается. Ситуация даже в условиях суперсходимости не может быть ис-

Таблица 2.5: Поведение функциональной оценки в примере 2.3, когда $\tilde{\tilde{y}}$ вычисляется как осреднение $A\nabla u_{h/4}$ на мелкой сетке

Итер.	N	$\mathcal{M}^2$	$(1+\beta)\mathcal{D}^2$	$\mathfrak{c}_I^2/\alpha_1(1+\beta^{-1})\mathcal{R}^2$	$e\%$	I_{eff}
0	264	0.001212	0.000110	0.001103	19.70	3.18
1	384	0.001049	0.000076	0.000973	14.77	3.95
2	544	0.001133	0.000059	0.001073	11.29	5.37
3	768	0.001139	0.000048	0.001091	8.97	6.77
4	1204	0.001314	0.000043	0.001271	7.59	8.59
5	1808	0.001408	0.000033	0.001375	5.54	12.18
6	2650	0.001515	0.000029	0.001486	4.65	15.05
7	4134	0.002076	0.000028	0.002048	4.00	20.51
8	6384	0.002103	0.000021	0.002081	2.97	27.73

правлена без привлечения все более мелких вспомогательных разбиений, что нецелесообразно, поскольку влечет за собой неоправданно высокие вычислительные затраты. Дополнительные аргументы в пользу полноценной процедуры минимизации можно также найти в работе S.K. Kleiss, S.K. Tomar [242]. Она посвящена реализации функционального подхода с помощью техники, основанной на изогеометрическом анализе[3]. Приведенный в статье обзор литературы

[3] IGA — IsoGeometric Analysis

свидетельствует о том, что количество публикаций, в которых стандартные методы апостериорного контроля удалось распространить в рамках IGA, исчисляется единицами. В [242] также детально описана итерационная процедура вычисления мажорант ошибки на основе сборки и решения системы линейных алгебраических уравнений с пересчетом свободного положительного параметра.

Таблица 2.6: Поведение функциональной оценки в примере 2.3, когда $\tilde{\tilde{y}}$ находится через решение системы

Итер.	N	$\mathcal{M}^2$	$(1+\beta)\mathcal{D}^2$	$\mathfrak{c}_I^2/\alpha_1(1+\beta^{-1})\mathcal{R}^2$	$e\%$	I_{eff}
0	264	0.000138	0.000138	5×10^{-8}	19.70	1.07
1	384	0.000079	0.000079	2×10^{-8}	14.77	1.08
2	608	0.000044	0.000044	4×10^{-9}	11.09	1.07
3	860	0.000028	0.000028	3×10^{-9}	8.79	1.09
4	1358	0.000020	0.000020	2×10^{-9}	7.50	1.07
5	2048	0.000011	0.000011	8×10^{-10}	5.47	1.09
6	3050	0.000007	0.000007	1×10^{-10}	4.54	1.07
7	4704	0.000005	0.000005	5×10^{-11}	3.88	1.07
8	7120	0.000003	0.000003	9×10^{-12}	2.89	1.07

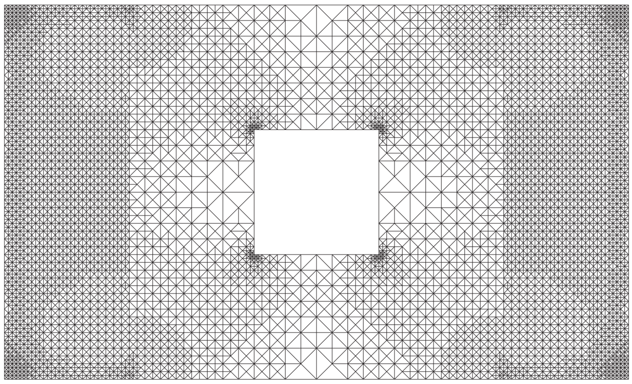
***Пример* 2.4.** *Задача с разрывом в коэффициентах матрицы в L-образной области*

Далее рассматривается задача (2.1) с разрывами правой части и коэффициента a_{11} матрицы A, которые имеют следующие значения (см. Рисунок 2.9)

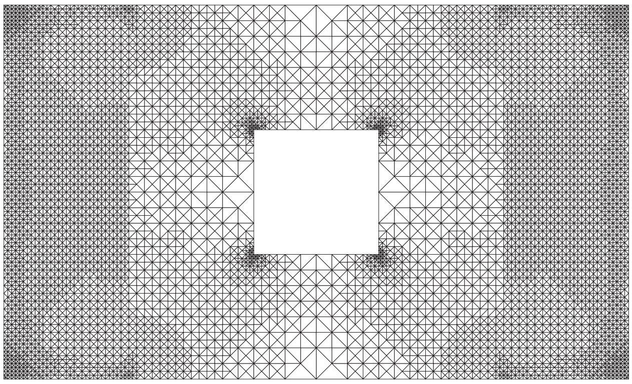
$$\begin{cases} a_{11} = 10, & f = 1 \quad \text{в подобласти } 1, \\ a_{11} = 1\ , & f = 0 \quad \text{в подобласти } 2, \\ a_{11} = 10, & f = 1 \quad \text{в подобласти } 3, \end{cases}$$

$a_{12} = a_{21} = 0$ и $a_{22} = 1$ во всей области Ω. Как и в предыдущем примере, начиная с одного и того же исходного разбиения области Ω, производится адаптация сеток на основе решения задачи, индикации погрешности и измельчения тех элементов, на которых локальные ошибки велики. Оценка энергетической нормы погрешности отражена на Рисунке 2.10. Результаты нескольких итераций работы адаптивных алгоритмов, построенных при помощи сравниваемых методов, представлены в Таблице 2.7. Отметим, что в данном случае соответствие между ними проявляется не столь явно. Сопоставляя результаты, можно прийти к выводу, что и в данном случае использование индикатора, который основан на функциональном подходе, практически равносильно знанию точного распределения погрешности. Этот вывод подтверждается при сравнении конечных разбиений на Рисунке 2.11, а также при анализе данных на Рисунке 2.13. Последние, однако, указывают на возможность противоречивого толкования характеристик локального распределения погрешности, которые были вполне удовлетворительными на фиксированных сетках. В сложных ситуациях визуальное или количественное сравнение тех элементов, которые отмечены для дальнейшего измельчения, может привести к некорректным выводам, поскольку отмеченные зоны на конкретной итерации могут значительно различаться, но в результате 3–4 этапов адаптации приводить к близким сеткам и близкой точности[4]. Основной количественной мерой качества локальной индикации по совокупности нескольких итераций предлагается все-таки считать соотношение числа степеней свободы к получаемой точности.

[4] первая характеристика, вообще говоря, является лишь качественной и достаточно субъективной, а вторая — количественной

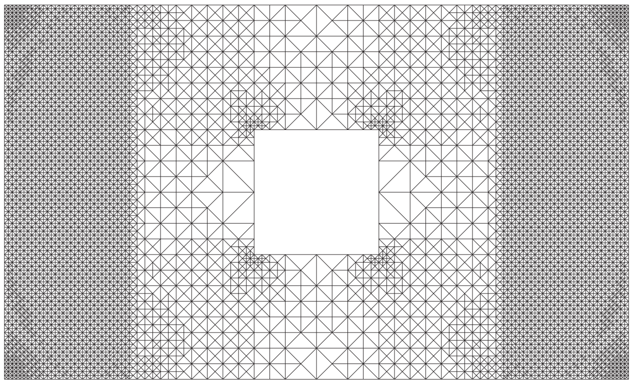


эталон (η_T^{RS}): итерация 8, 6912 уз., 2.94%

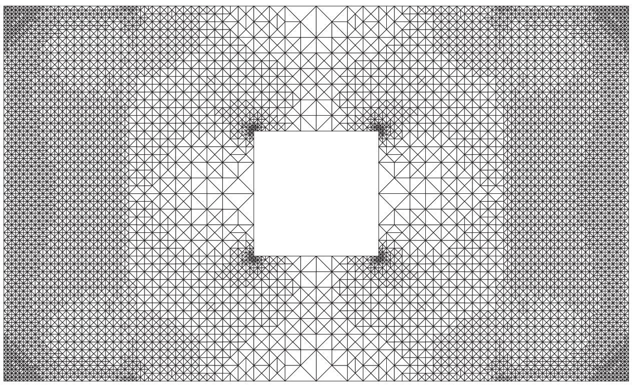


мажоранта (η_T^{CA}): итерация 8, 7120 уз., 2.89%

Рисунок 2.6: Итоговая адаптация, которую обеспечивают сравниваемые индикаторы для примера 2.3 — метод (индикатор): итерация, количество узлов, относительная точность.



явный метод невязок (η_T^{MATLAB}): итерация 8, 8006 уз., 3.15%



метод осреднения (η_T^{ZZ}): итерация 8, 7516 уз., 2.80%

Рисунок 2.7: Итоговая адаптация, которую обеспечивают сравниваемые индикаторы для примера 2.3 — метод (индикатор): итерация, количество узлов, относительная точность.

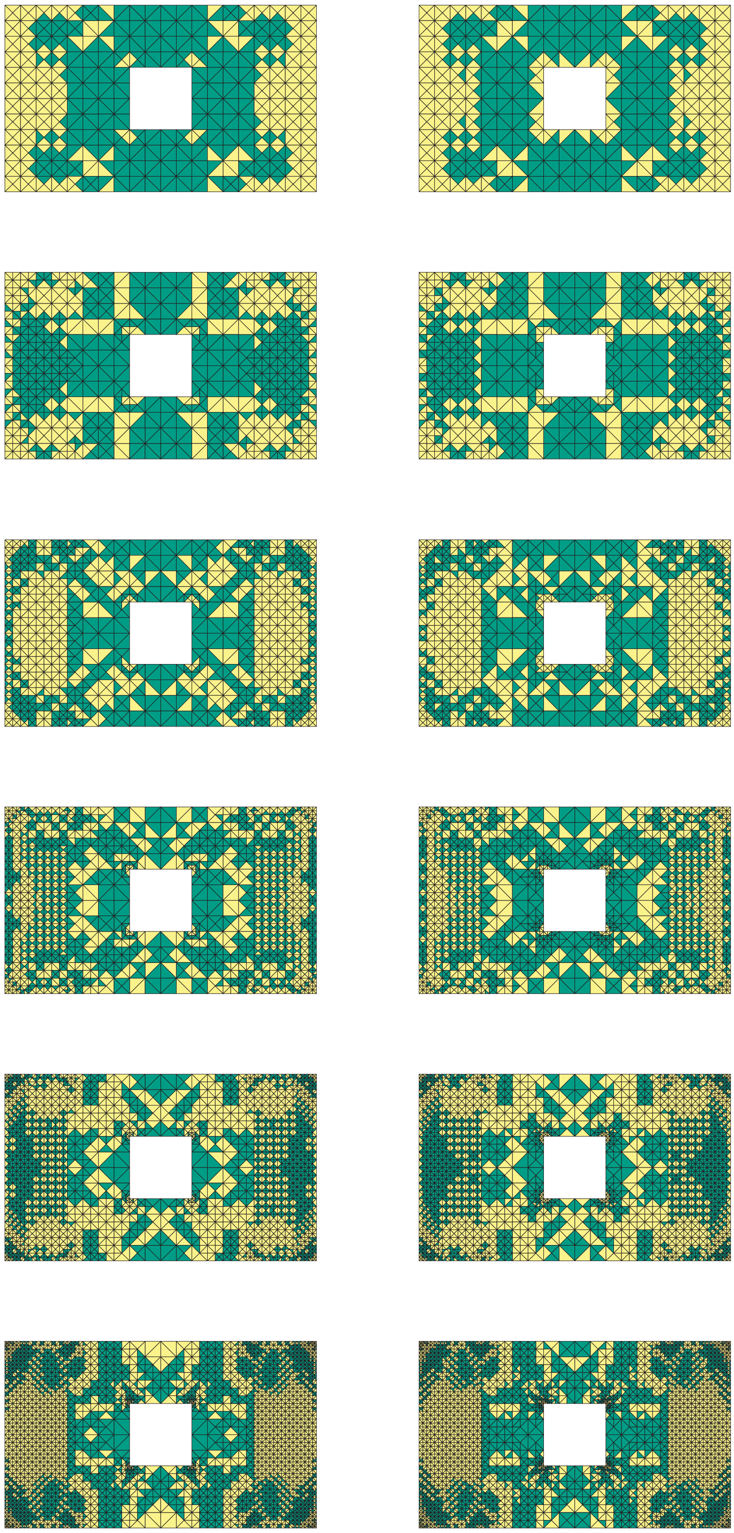


Рисунок 2.8: Элементы, отмеченные для разбиения на итерациях 1, 2,...6 для примера 2.3 (эталон — левая колонка, мажоранта — правая колонка).

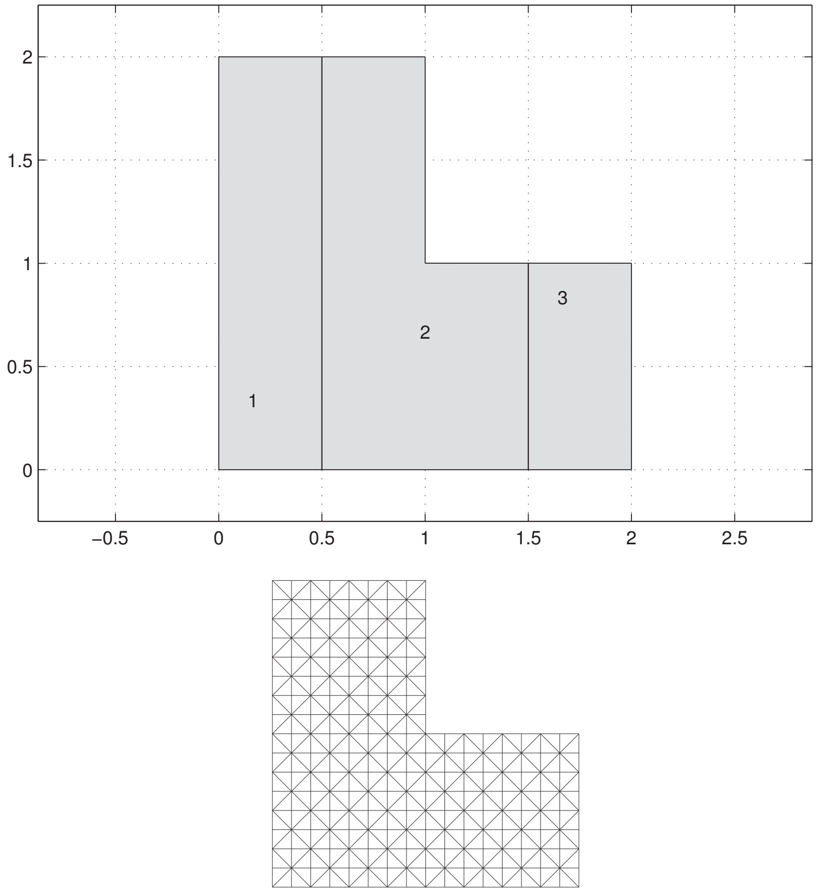


Рисунок 2.9: Область Ω для примера 2.4 и ее начальное разбиение.

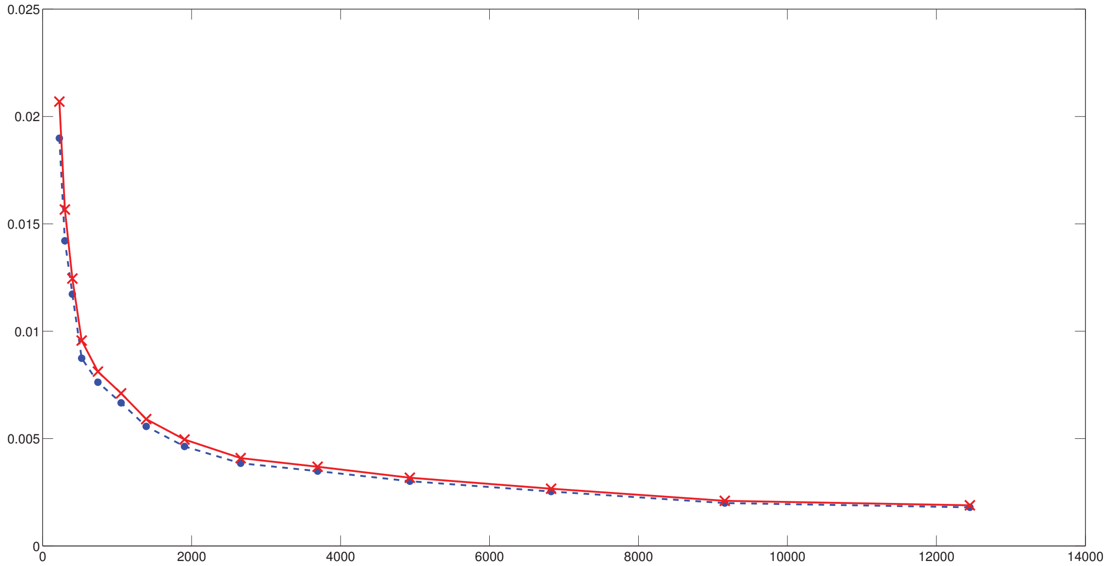
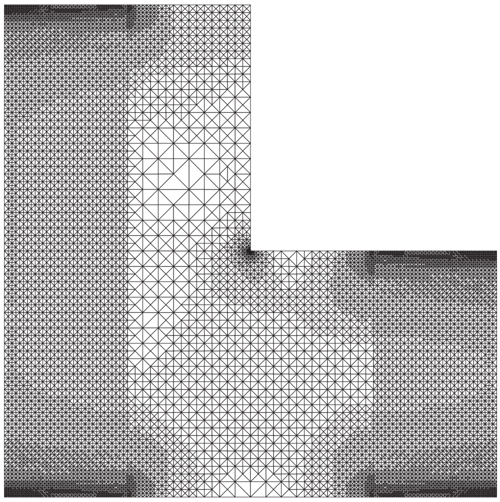


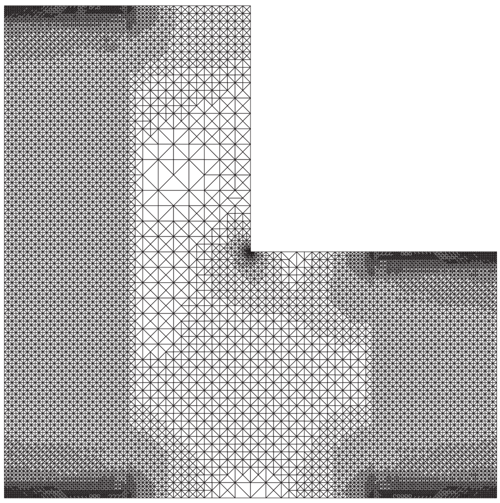
Рисунок 2.10: Зависимость величины нормы ошибки от числа узлов сетки и ее гарантированная верхняя оценка, обеспеченная мажорантой для примера 2.4.

Итер.	η_T^{RS}		η_T^{CA}			η_T^{MATLAB}			η_T^{ZZ}			равн. разб.	
	N	$e\%$	N	$e\%$	I_{eff}	N	$e\%$	I_{eff}	N	$e\%$	I_{eff}	N	$e\%$
0	225	19.02	225	19.02	1.09	225	19.02	2.74	225	19.02	0.63	225	19.02
2	413	11.47	400	11.73	1.06	408	13.45	2.38	401	12.78	0.67		
4	758	7.35	742	7.63	1.06	759	8.74	2.54	806	8.61	0.70	833	10.27
6	1408	5.43	1391	5.57	1.06	1300	7.24	2.21	1688	6.06	0.71		
8	2570	3.76	2659	3.85	1.06	2472	5.22	2.24	3549	4.17	0.75		
9	3508	3.37	3692	3.48	1.06	3273	4.87	2.00	5145	3.43	0.74	3201	5.31
10	4619	2.95	4930	3.02	1.05	4483	4.01	2.11	7352	3.09	0.71		
11	6252	2.55	6827	2.53	1.05	6025	3.56	2.06	10860	2.63	0.70		
12	8297	2.08	9158	1.99	1.05	8072	2.81	2.23	15434	2.05	0.75		
13	11230	1.82	12450	1.80	1.05	10640	2.66	2.08	21984	1.72	0.73	12545	2.71
14						13902	2.29	1.99					
15						18156	2.02	2.04					
16						24134	1.81	2.00				49665	1.37

Таблица 2.7: Адаптация сеток для сравниваемых индикаторов в примере 2.4



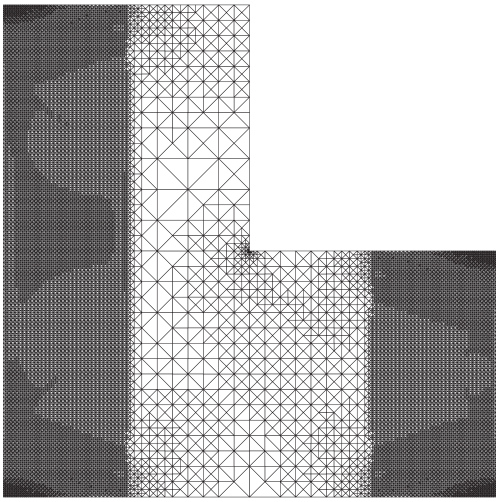
эталон (η_T^{RS}): итерация 13, 11230 уз., 1.82%



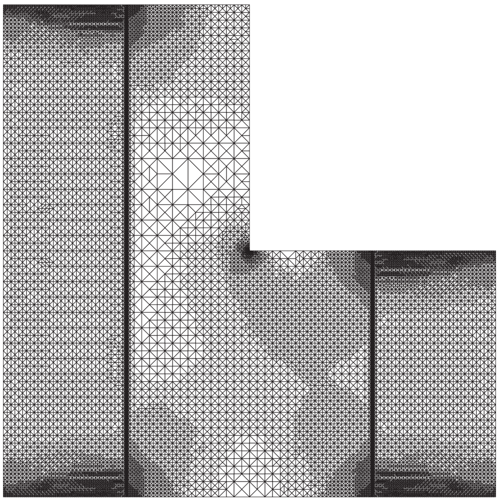
мажоранта (η_T^{CA}): итерация 13, 12450 уз., 1.80%

Рисунок 2.11: Итоговая адаптация, которую обеспечивают сравниваемые индикаторы для примера 2.4 — метод (индикатор): итерация, количество узлов, относительная точность.

В данном примере стандартный индикатор пакета уже существенно уступает функциональной мажоранте. Это следует из данных, приведенных в Таблице 2.7, и из анализа структуры сеток, изображенных на Рисунке 2.11 и Рисунке 2.12. Итоговую погрешность около 1.8% стандартный индикатор пакета MATLAB обеспечивает при почти в два раза большем количестве степеней сво-



явный метод невязок (η_T^{MATLAB}): итерация 16, 24134 уз., 1.81%



метод осреднения (η_T^{ZZ}): итерация 13, 21984 уз., 1.72%

Рисунок 2.12: Итоговая адаптация, которую обеспечивают сравниваемые индикаторы для примера 2.4 — метод (индикатор): итерация, количество узлов, относительная точность.

боды. При этом на Рисунке 2.12 вверху видна основная причина этого — она заключается в том, что распределение узлов в зонах, где правая часть уравнения отлична от нуля, достаточно сильно отличается от ожидаемого, которое приведено вверху на Рисунке 2.11.

Основной недостаток метода осреднения с точки зрения глобальной ин-

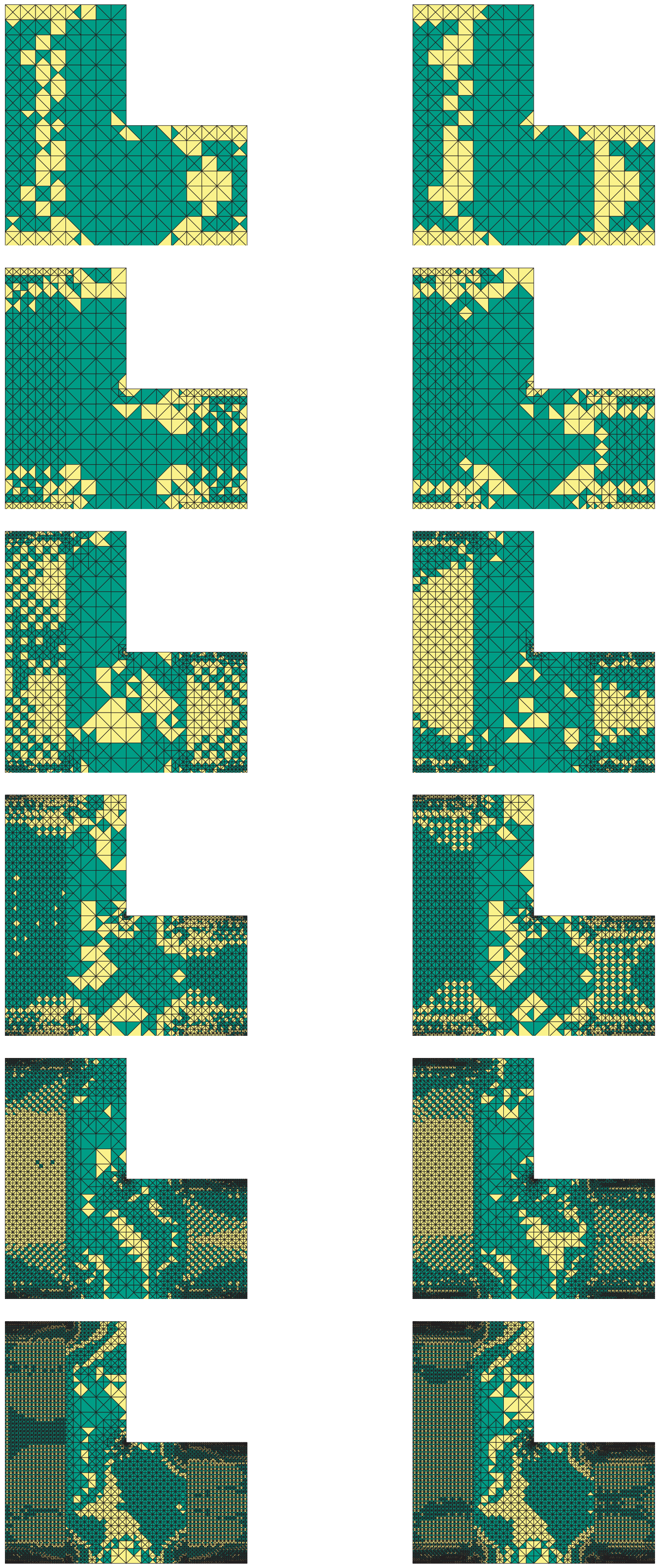


Рисунок 2.13: Элементы, отмеченные для разбиения на итерациях 1, 3,...11 для примера 2.4 (эталон — левая колонка, мажоранта — правая колонка).

дикации погрешности — возможная недооценка истинной величины ошибки — проявился в данном примере. Индексы эффективности для метода варьируются в диапазоне 0.63–0.75. Таким образом, погрешность оказывается существенно больше, чем предсказывает стандартный метод. С точки зрения качества получаемых сеток — оно уже не является столь высоким по сравнению с предыдущим примером. Основная причина заключается в наличии нежелательных областей с сильно избыточным сгущением узлов, возникающим вблизи зоны разрыва коэффициента уравнения. Данный пример также дополнен результатами исследования, указывающего на необходимость построения и решения системы линейных алгебраических уравнений, поскольку упрощенные алгоритмы приводят к росту переоценки ошибки в десятки раз. Об этом свидетельствуют данные Таблиц 2.8 и 2.9.

В заключение параграфа отметим, что эффективность функционального подхода имеет также и теоретическое обоснование. Например, в [187] доказывается, что мера множества, на котором индикатор существенно отличается от истинного распределения ошибки, может быть сделана сколь угодно малой при дополнительных вычислительных затратах на получение поля $\tilde{\tilde{y}}$. Локальные и глобальные вычислительные свойства функциональных оценок, связанные с сильной сходимостью, также исследуются в монографии [64], статьях [184], [185] и цитируемой там литературе.

2.5. Преимущества и недостатки аппроксимации Равьяра–Тома наименьшего порядка как альтернативы непрерывным

В предыдущих параграфах описаны примеры успешного применения функционального подхода, основанные на использовании стандартных непрерывных аппроксимаций метода конечных элементов, в том числе к построению адаптив-

Таблица 2.8: Поведение функциональной оценки в примере 2.4, когда $\tilde{\tilde{y}}$ вычисляется как осреднение $A\nabla u_{h/4}$ по мелкой сетке

Итер.	N	$\mathcal{M}^2$	$(1+\beta)\mathcal{D}^2$	$\mathfrak{c}_I^2/\alpha_1(1+\beta^{-1})\mathcal{R}^2$	$e\%$	I_{eff}
0	225	0.291683	0.0450481	0.246635	19.02	28.44
1	289	0.290762	0.0449858	0.245776	14.98	36.03
2	382	0.290698	0.0449807	0.245718	14.47	37.30
3	494	0.290360	0.0449548	0.245406	14.31	37.69
4	667	0.290234	0.0449463	0.245288	13.61	39.63
5	860	0.289684	0.0449016	0.244783	13.22	40.75
6	1145	0.289791	0.0449102	0.244881	12.67	42.52
7	1572	0.288936	0.0448398	0.244096	11.71	45.95
8	2086	0.288841	0.0448322	0.244009	11.22	47.96
9	2767	0.289370	0.0448712	0.244499	11.11	48.46
10	3651	0.289347	0.0448697	0.244478	10.79	49.88
11	4842	0.289328	0.0448682	0.244460	10.53	51.11
12	6425	0.288839	0.0448253	0.244014	9.26	58.08
13	8431	0.290131	0.0449189	0.245212	7.49	71.95
14	11073	0.289949	0.0449046	0.245045	7.31	73.64

ных алгоритмов. Однако в общем случае может понадобиться аппроксимация, которая допускает разрыв касательной составляющей векторного поля при переходе через межэлементную границу. Такие аппроксимации характерны для смешанных методов конечных элементов. Параграф посвящен сравнению адаптивных алгоритмов, основанных на функциональной апостериорной оценке для задачи Дирихле для стационарного уравнения диффузии с разрывами первого рода в коэффициентах уравнения. Материал опирается на результаты, полученные в соавторстве с М.А. Чуриловой [79], существенно дополняющие работу тех же авторов [258]. Алгоритмы реализованы М.А. Чуриловой в среде

Таблица 2.9: Поведение функциональной оценки в примере 2.4, когда $\tilde{\tilde{y}}$ находится через решение системы

Итер.	N	$\mathcal{M}^2$	$(1+\beta)\mathcal{D}^2$	$\mathfrak{c}_I^2/\alpha_1(1+\beta^{-1})\mathcal{R}^2$	$e\%$	I_{eff}
0	225	0.000428	0.000428	3×10^{-8}	19.02	1.09
1	299	0.000245	0.000245	1×10^{-8}	14.23	1.10
2	400	0.000155	0.000155	3×10^{-9}	11.73	1.06
3	524	0.000091	0.000091	5×10^{-9}	8.74	1.09
4	742	0.000066	0.000066	5×10^{-10}	7.63	1.06
5	1053	0.000051	0.000051	5×10^{-10}	6.66	1.07
6	1391	0.000035	0.000035	2×10^{-10}	5.57	1.06
7	1905	0.000025	0.000025	3×10^{-10}	4.63	1.07
8	2659	0.000017	0.000017	4×10^{-11}	3.85	1.06
9	3692	0.000014	0.000014	6×10^{-12}	3.48	1.06
10	4930	0.000010	0.000010	4×10^{-12}	3.02	1.05
11	6827	0.000007	0.000007	4×10^{-11}	2.53	1.05
12	9158	0.000004	0.000004	3×10^{-11}	1.99	1.05
13	12450	0.000003	0.000003	7×10^{-12}	1.80	1.05

MATLAB, что стало частью ее кандидатской диссертации [246]. Подраздел содержит сравнение последовательностей конечно-элементных разбиений, индекса эффективности оценок и относительной погрешности приближенных решений. Цель исследования — распространить область эффективного применения функционального подхода на более широкий класс задач с разрывами в коэффициентах уравнения, что делается за счет привлечения аппроксимации с помощью конечного элемента Равьяра–Тома нулевого порядка (см., например, [335] и [29]).

Сделаем обзорное отступление, позволяющее точнее определить место представленных исследований в общем массиве публикаций последних десятилетий.

Первой работой, содержащей полноценный численный анализ функционального подхода, а именно вычисление индекса эффективности и индекса качества индикации локального распределения погрешности, сравнение со стандартными подходами в одномерном случае, а также пример в двумерной области без сравнения, является работа S. Repin [175]. Сравнение с методом осреднения градиента и явным методом невязок для плоских задач выполнено впервые в работе С.И. Репина и М.Е. Фролова [71]. За последние пятнадцать лет было опубликовано несколько статей, в которых рассматривается вычислительный эксперимент, близкий по постановке. Например, в работах S. Repin, S. Sauter, A. Smolianski [187] и [188] можно найти примеры с адаптацией сеток для задачи Дирихле для уравнения Пуассона, а также для краевых условий смешанного типа. Однако там использовались только стандартные аппроксимации для свободной переменной. Работа M. Frolov, P. Neittaanmäki, S. Repin [185] и уже упомянутая в главе диссертация [243] содержат примеры адаптации сеток на основе вычисления функциональных апостериорных оценок для задачи Дирихле для уравнения Пуассона и стационарного уравнения диффузии, в том числе с разрывами коэффициентов. При этом для свободной переменной также использованы стандартные аппроксимации метода конечных элементов. Статья J. Valdman [236] включает пример решения уравнения Пуассона и оценки погрешности с реализацией аппроксимации Равьяра–Тома нулевого порядка, но рассматривается последовательность равномерно измельченных сеток без адаптации. Исследование ориентировано на анализ эффективности использования многосеточного метода со специальным предобуславливанием при вычислении функциональных апостериорных оценок. В статье R. Lazarov, S. Repin, S. Tomar [237] исследуется применение функциональных оценок к приближенным решениям уравнения диффузии, полученным при помощи разрывного метода Галеркина. Для свободной переменной используется аппроксимация Равьяра–Тома первого порядка. Рассматриваются задачи в квадратной области, в том числе в случае скачка в коэффициентах уравнения. Расчеты также выполнены на последовательности равномерных разбиений без адаптации. Вопросам эффективности предобуславливания в задачах, возникающих при вычислении функциональных мажорант для разрывного метода Галеркина, посвящен раздел 4.3 статьи J.K. Kraus, S. K. Tomar [239]. Наконец, в работе P. Harasim, J. Valdman [207] расматривается задача с препятствием. Аппроксимации Равьяра–Тома также привлекались к рассмотрению в рамках других подходов, например, D. Braess, R. Verfürth [339], R. Luce, B.I. Wohlmuth [340], M.G. Larson, A. Målqvist [341], A. Agouzal, K. Lipnikov, Yu. Vassilevski [342], C. Carstensen, C. Merdon [326], [186], Z. Cai, S. Zhang [137], M. Vohralík [343], B. Cockburn, W. Zhang [344] и цитируемой там литературе. В сравнительном анализе для части примеров [186] неявно участвует функциональный подход, поскольку модифицированный индикатор авторов превращается там в мажоранту из первой главы. Отметим также теоретическое сравнение методов, связанных с процедурами локального уравновешивания, приведенное в [343], где для построения оценки погрешности предлагается использовать вспомогательную «двойственную» сетку. Подробно описаны нескольких вариантов построения оценок для задачи диффузии с разрывами коэффициентов уравнения и их основные отличия. M. Вохралик, в частности, сравнивает предлагаемый им метод с глобальным вариантом вычисления функциональной мажоранты. Однако, не вполне понятно, почему не упомянут и не используется предложенный на несколько лет раньше «локальный» вариант оценки из цитируемой в статье монографии [64], хотя в теоретическом плане результаты идентичны и основаны на одной и той же идее. Вычислительный эксперимент относительно функционального подхода, приведенный в статье, вызывает ряд вопросов, главный из которых связан с поведением индекса эффективности мажорант — нарушается гарантированность оценок, что принципиально невозможно при корректной реализации. Подводя итог краткого обзора, отметим что, с одной стороны, диссертационное исследование опирается на полученные ранее результаты, отражающие как положительный, так и отрицательный опыт ряда авторов. С другой стороны, оно существенно дополняет упомянутые выше литературные источники, делая анализ эффективности функционального подхода более разносторонним.

Рассмотрим несколько задач с разрывами коэффициентов матрицы A в области Ω. Отметим, что ниже представлены только те примеры, в которых разрыв в коэффициентах матрицы приводит к разрыву касательной составляющей поля $A\nabla u$. В противном случае, как было показано в предыдущем параграфе, даже стандартные аппроксимации метода конечных элементов дают хороший результат при вычислении функциональной апостериорной оценки.

***Пример* 2.5.** *Сравнение пары непрерывных аппроксимаций и смешанной аппроксимации для векторного поля в квадратной области*

Рассмотрим случай, когда только один коэффициент матрицы a_{11} терпит разрыв

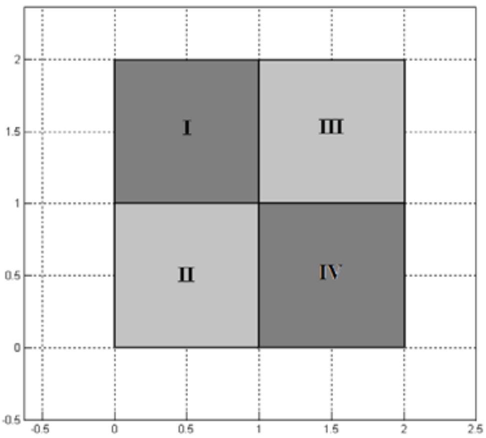
$$a_{11} = \begin{cases} 1 & \text{в подобластях I и IV}, \\ 2 & \text{в подобластях II и III}, \end{cases}$$

$a_{12} = a_{21} = 0$, $a_{22} = 1$, а $f \equiv 1$ в Ω (см. Рисунок 2.14).

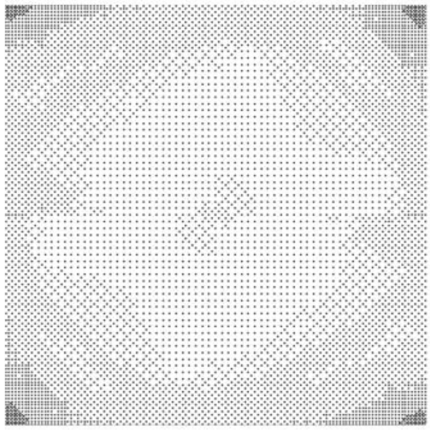
Начиная с одного и того же начального разбиения области, производится адаптация с помощью индикаторов η_T^{RS}, η_T^{CA} и η_T^{RT}, результаты которой представлены в Таблице 2.10. Критерием остановки итерационного процесса выбрано условие достижения относительной погрешности 2%. На Рисунке 2.14 приведены узлы расчетных сеток, получившиеся в итоге адаптации. Можно сделать вывод, что при использовании индикатора η_T^{RT} не происходит сгущения сетки вблизи границы разрыва коэффициента, что соответствует эталонной сетке. Помимо этого, количество узлов, необходимое для достижения заданной точности, лишь незначительно превосходит число узлов для η_T^{RS}.

***Пример* 2.6.** *Сравнение двух типов аппроксимаций в* L*-образной области*

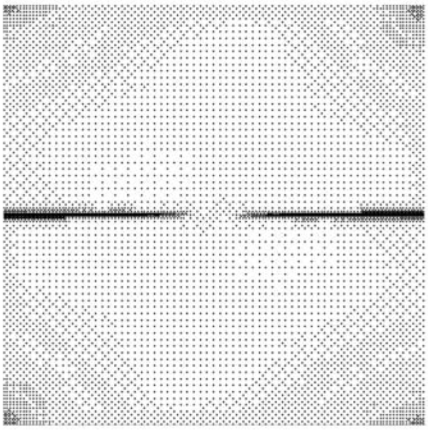
Рассмотрим задачу с разрывом коэффициентов в матрице A вдоль обеих



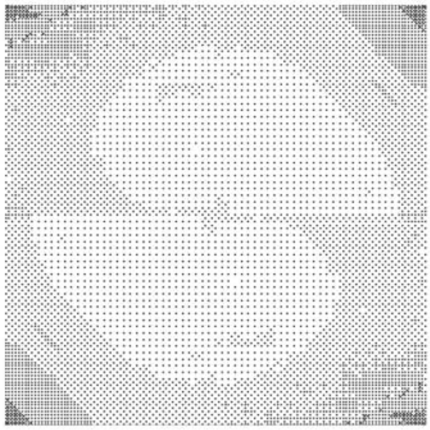
(i) область



(ii) η_T^{RS}, 7105 уз., погр. 1.70%



(iii) η_T^{CA}, 7401 уз., погр. 1.80%



(iv) η_T^{RT}, 7749 уз., погр. 1.73%

Рисунок 2.14: Область и результаты адаптации для примера 2.5.

координатных осей

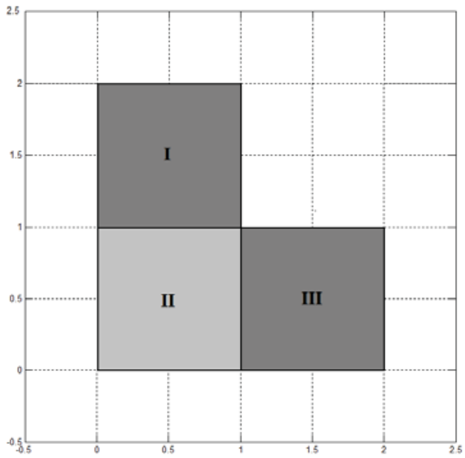
$$a_{11} = \begin{cases} 1 & \text{в подобластях I и III}, \\ 2 & \text{в подобласти II}, \end{cases} \qquad a_{22} = \begin{cases} 2 & \text{в подобластях I и III}, \\ 1 & \text{в подобласти II}, \end{cases}$$

$a_{12} = a_{21} = 0$, а $f \equiv 1$ в области Ω, содержащей входящий угол (см. Рисунок 2.15).

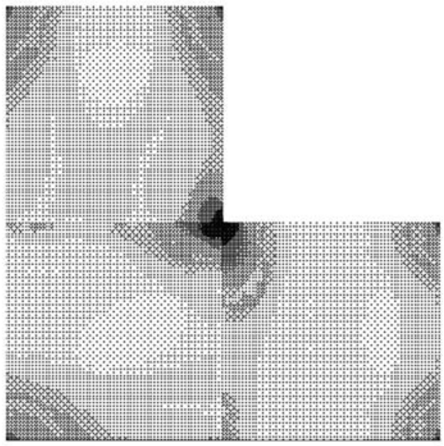
В Таблице 2.11 приведены результаты для близких по достигнутой точности этапов. На Рисунке 2.15 представлены узлы финальных расчетных сеток. Как и ожидалось, использование индикатора η_T^{CA} снова приводит к излишнему сгущению сетки в зонах, где коэффициенты матрицы A терпят разрыв, чего мы не наблюдаем при использовании индикатора η_T^{RT}.

Таблица 2.10: Адаптация сеток для различных индикаторов в примере 2.5

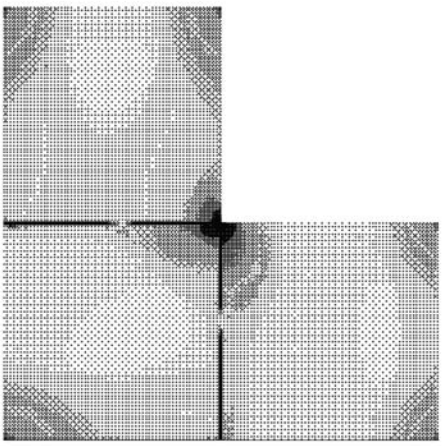
η_T^{RS}		η_T^{CA}			η_T^{RT}		
N	$e\%$	N	$e\%$	I_{eff}	N	$e\%$	I_{eff}
289	10.32	289	10.32	1.22	289	10.32	1.30
577	6.29	531	6.64	1.29	577	6.74	1.28
1343	3.89	1623	3.77	1.35	1419	4.11	1.33
4803	2.03	4961	2.19	1.31	5179	2.11	1.33
7105	1.70	7401	1.80	1.38	7749	1.73	1.30



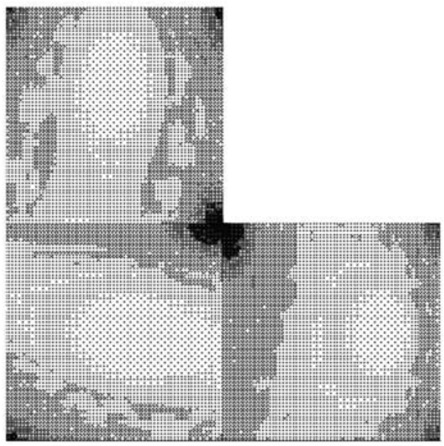
(i) область



(ii) η_T^{RS}, 14102 уз., погр. 1.70%



(iii) η_T^{CA}, 18821 уз., погр. 1.72%



(iv) η_T^{RT}, 18358 уз., погр. 1.71%

Рисунок 2.15: Область и результаты адаптации для примера 2.6.

Таблица 2.11: Адаптация сеток для различных индикаторов в примере 2.6

η_T^{RS}		η_T^{CA}			η_T^{RT}		
N	$e\%$	N	$e\%$	I_{eff}	N	$e\%$	I_{eff}
225	17.63	225	17.63	1.32	225	17.63	1.45
538	10.03	591	10.01	1.39	608	10.02	1.41
1829	5.20	2099	5.31	1.33	2375	4.93	1.42
7958	2.40	10067	2.45	1.27	9289	2.43	1.38
14102	1.70	18821	1.72	1.28	18358	1.71	1.40

Пример 2.7. *Сравнение двух типов аппроксимаций в квадратной области с отверстием*

Наконец, рассмотрим пример, в котором квадратная область Ω состоит из двух частей и имеет отверстие (Рисунок 2.16), а коэффициенты матрицы A терпят разрыв

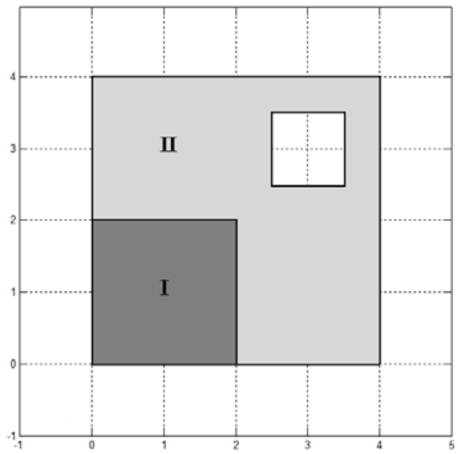
$$a_{11} = \begin{cases} 5 & \text{в подобласти I,} \\ 1 & \text{в подобласти II,} \end{cases} \qquad a_{22} = \begin{cases} 5 & \text{в подобласти I,} \\ 1 & \text{в подобласти II,} \end{cases}$$

$a_{12} = a_{21} = 0$, а $f \equiv 1$.

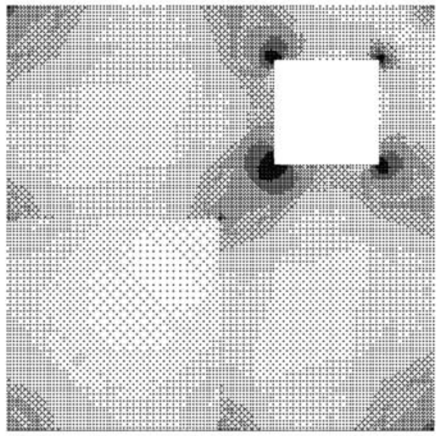
В Таблице 2.12 представлены результаты для нескольких этапов адаптации. На Рисунке 2.16 приведены узлы итоговых расчетных сеток. Из этих данных можно сделать вывод, что при использовании индикатора η_T^{RT} для достижения необходимой точности потребовалось меньше степеней свободы, чем для η_T^{CA}, а качество адаптации оказалось лучше. Заметим, что получающаяся картина полностью отражает симметрию, которой обладает исходная задача. К числу недостатков простейшей аппроксимации Равьяра–Тома следует отнести худшие аппроксимационные свойства внутри элемента по сравнению с парой стандартных непрерывных аппроксимаций метода конечных элементов, что несколько влияет на качество сеток вдали от границ области.

Таблица 2.12: Адаптация сеток для различных индикаторов в примере 2.7

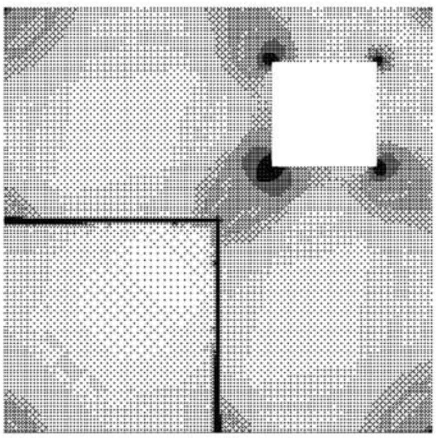
η_T^{RS}		η_T^{CA}			η_T^{RT}		
N	$e\%$	N	$e\%$	I_{eff}	N	$e\%$	I_{eff}
280	17.48	280	17.48	1.41	280	17.48	1.40
1193	6.86	1340	7.13	1.47	1389	6.83	1.37
5156	3.16	6630	3.28	1.40	6486	3.01	1.35
9120	2.33	12458	2.40	1.39	11679	2.22	1.36
16227	1.73	23610	1.75	1.37	20723	1.66	1.35



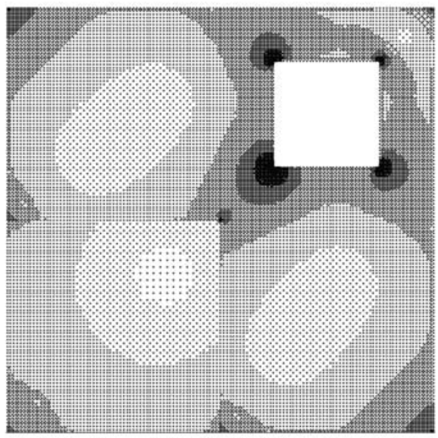
(i) область



(ii) η_T^{RS}, 16227 уз., погр. 1.73%



(iii) η_T^{CA}, 23610 уз., погр. 1.75%



(iv) η_T^{RT}, 20723 уз., погр. 1.66%

Рисунок 2.16: Область и результаты адаптации для примера 2.7.

Тем не менее, адаптация даже на персональном компьютере может быть продолжена вплоть до миллиона узлов и получения решения с относительной погрешностью менее одной трети процента (см. Таблицу 2.13). Для достаточно больших сеток невозможно использовать эталонное решение для проверки относительной погрешности. Вместо этого вычислялась ее гарантированная верхняя оценка по следующей формуле:

$$\mathcal{M}\% := \frac{\mathcal{M}}{\|u_h\|} \times 100\%.$$

Суммарное время такого расчета при конфигурации INTEL Core i7, 4 ядра, 8 процессоров, 3.07 ГГц, 8GB RAM, MATLAB R2009a составило от 20 до 30 минут в зависимости от индикатора.

Таблица 2.13: Продолжение адаптации в примере 2.7

η_T^{CA}				η_T^{RT}			
N	$e\%$	I_{eff}	$\mathcal{M}\%$	N	$e\%$	I_{eff}	$\mathcal{M}\%$
23610	1.75	1.37	2.39	27452	1.43	1.34	1.92
32369	1.51	1.29	1.95	36329	1.25	1.33	1.67
85234			1.23	63299			1.25
820310			0.37	719981			0.37
1147833			0.33	939257			0.32

2.6. Основные выводы

В главе рассматриваются адаптивные алгоритмы решения скалярных эллиптических краевых задач, базирующиеся на измельчении конечно-элементной расчетной сетки с использованием индикаторов локального распределения погрешности. Для сравнения выбраны классические индикаторы и индикаторы, полученные в рамках функционального подхода с двумя принципиально отличающимися друг от друга способами построения аппроксимации для свободной переменной. Мажоранты сопоставляются классическим результатам в рамках метода конечных элементов с различных точек зрения — обсуждаются такие свойства как универсальность, эффективность, надежность.

Из приведенного в главе вычислительного эксперимента можно сформулировать следующие заключения:

1. Для стандартных индикаторов качество результатов не только в теории, но и на практике существенно зависит от того, насколько приближенное решение близко к галеркинской аппроксимации.

2. Функциональный подход является универсальным и позволяет контролировать погрешности разной природы.

3. Из результатов для двух методик вычисления функциональных мажорант можно сделать вывод о том, что только полноценная минимизация квадратичного функционала достаточно уменьшает вклад второго слагаемого в итоговую оценку.

4. Для преодоления трудностей, возникающих при использовании непрерывных аппроксимаций в функционалах, хорошей альтернативой в адаптивных алгоритмах может быть смешанная аппроксимация — представленные результаты свидетельствуют о преимуществе такого подхода и служат основанием для его распространения на краевые задачи механики деформируемого твердого тела.

Глава 3

Апостериорные оценки для некоторых моделей в теории пластин и стержней

Глава связана с исследованиями, начатыми в совместной работе с С.И. Репиным [72]. В ней методами теории двойственности вариационного исчисления получен класс явно вычисляемых мажорант, который обеспечивает оценки точности решения задачи о пластине Рейсснера–Миндлина при жесткой заделке. Обобщение этого результата основано на прямых преобразованиях слабой постановки задачи. Оба подхода не требуют дополнительного анализа свойств контролируемого приближенного решения и учета особенностей метода, который был использован для его получения.

3.1. Обзор публикаций по современным методам конечных элементов и апостериорному контролю точности в задаче об изгибе пластин Рейсснера–Миндлина

В настоящее время модель Рейсснера–Миндлина стала одной из популярных моделей, описывающих деформацию пластин малой и средней толщины и уточняющих классическую теорию тонких пластин Кирхгоффа–Лява, функциональные апостериорные оценки для которой были впервые предложены в статье P. Neittaanmäki, S. Repin [219].

В основу соответствующих уравнений классической теории[1] пластин легло несколько гипотез, приведенных ниже (см., например, Ю.А. Амензаде [345], D. Braess [29])

[1] в диссертации рассматривается линейный случай

1. Пластина считается тонкой, то есть ее толщина мала по сравнению с двумя другими характерными размерами.

2. Прогиб срединной плоскости мал по сравнению с толщиной.

3. Нормаль к срединной плоскости до изгиба переходит в нормаль к срединной плоскости после изгиба.

4. Величина компоненты тензора напряжений σ_{33} мала по сравнению с другими компонентами.

5. Перемещение точек срединной плоскости происходит вдоль оси x_3 и зависит только от координат x_1 и x_2.

6. Сегменты, перпендикулярные срединной плоскости, сохраняют линейность при деформации.

Модель Рейсснера–Миндлина получается при отказе от двух ограничивающих предположений — 1 и 3, что позволяет рассматривать пластины малой и средней толщины. В последние десятилетия модель обсуждается как математиками и механиками, так и инженерами. Основная часть публикаций в области численного анализа для данной задачи посвящена проблеме разработки методов конечных элементов, позволяющих эффективно строить приближенное решение в случае уменьшения толщины пластины, когда возникают различные вычислительные эффекты. В данной главе мы не будем подробно останавливаться на проблемах, связанных с построением таких методов для рассматриваемой модели. Соответствующие результаты и литературу можно найти, например, в следующих работах: E. Dvorkin, K.-J. Bathe [346], [347], J.C. Simo, F. Armero [348], D. Arnold [349], D. Arnold, F. Brezzi [350], D. Arnold, R. Falk [351], L. Gastaldi, R.H. Nochetto [352], J.H. Bramble, T. Sun [353], F. Brezzi, M. Fortin [354], D. Arnold, F. Brezzi, L.D. Marini [355], R. Durán, A. Ghioldi, N. Wolanski [356], R. Durán, E. Liberman [357], R.S. Falk, T. Tu [358], C. Lovadina

[359], L. Beirão da Veiga, J. Niiranen, R. Stenberg [360], [361], L. Beirão da Veiga, D. Mora, R. Rodríguez [362], F. Brezzi, L.D. Marini [363], F. Celiker, B. Cockburn, H.K. Stolarski [364], G. Castellazzi, P. Krysl [365], E. Oñate, F. Zárate [366], а также монографиях — O.C. Zienkiewicz, R.L. Taylor [20], D. Braess [29], K.J. Bathe [367] и статьях, содержащих подробные обзоры — R.S. Falk [368], C. Carstensen, X. Xie, G. Yu, T. Zhou [369], J. Hu, Y. Huang [370]. Некоторые альтернативные современные подходы можно найти, например, в работах L. Beirão da Veiga, A. Buffa, C. Lovadina, M. Martinelli, G. Sangalli [371], J. Hale, P.M. Baiz [372].

Проблеме построения методов контроля точности вычисленных аппроксимаций посвящено существенно меньшее количество публикаций. Ее исследование актуально в настоящее время. Апостериорные оценки погрешности для задачи о пластине Рейсснера–Миндлина в рамках классических направлений были предложены несколькими авторами — P. Boisse, S. Perrin, G. Coffignal, K. Hadjeb [291], C. Carstensen [114], C. Carstensen, K. Weinberg [373], [374], B. Boroomand, M. Ghaffarian, O.C. Zienkiewicz [375], C. Carstensen, J. Schöberl [376], C. Carstensen, J. Hu [377], J. Hu, Y. Huang [370], C. Carstensen et al. [369], E. Liberman [378], C. Lovadina, R. Stenberg [379], L. Beirão da Veiga, C. Chinosi, C. Lovadina, R. Stenberg [380], L. Beirão da Veiga, J. Niiranen, R. Stenberg [361][2], G. Castellazzi, S. de Miranda, F. Ubertini [381].

Остановимся подробнее на содержании некоторых публикаций. Например, работы [114], [377], [370], [378] и [379] носят теоретический характер. В них при помощи явного метода невязок построены соответствующие апостериорные оценки и приводится их теоретическое обоснование (в последних двух работах — для довольно общих классов конечных элементов). Апостериорные оценки для элемента [357] получены в [378], для [351] — в работе [114], для [358] — в [380]. Прикладные работы [373], [374], [376] и [369] включают, помимо теории, результаты численных расчетов. В частности, из [374] следует, что отношение оценки погрешности из [114] к самой ошибке устойчиво к уменьшению толщины

[2] там же указано несколько других работ данного авторского коллектива

пластины и увеличению размерности дискретной задачи, но остается величиной порядка десятка, что не может считаться удовлетворительным, если речь идет об оценке точности решения, а не индикации зон с большой погрешностью для последующей адаптации сетки. Другими словами, стандартный метод дает достаточно качественный индикатор, но практически бесполезную апостериорную оценку, которая переоценивает истинную величину ошибки на порядок. Другие исследования также направлены, в первую очередь, на анализ асимптотического поведения апостериорных оценок погрешности, а не их свойств на каждой конкретной сетке, что позволяет строить адаптивные алгоритмы, но не обеспечивает достоверной информации о величине ошибки. Например, статья [380] развивает технику, предложенную в [379]. Как дополнение к теоретической части она содержит результаты численного анализа соответствующего апостериорного индикатора и основанного на его использовании адаптивного алгоритма. Исследование, однако, направлено в основном на демонстрацию согласованности поведения погрешности в случае адаптивного сгущения триангуляций с известными априорными оценками скорости сходимости. Работа [361] является одной из тех немногих публикаций, которые позволяют не только оценить поведение предложенного в ней индикатора ошибки с ростом размерности дискретной задачи, но и сравнить глобальную величину индикатора с самой погрешностью. Результат, как и все упомянутые ранее, получен при помощи явного метода невязок. Доказывается теоретическая эффективность и надежность индикатора. Представленные численные результаты достаточно противоречивы. Там, где индексы эффективности приведены явно, их значения находятся вблизи 10. Из части графиков следует, что адаптация расчетных сеток может даже приводить к ухудшению ситуации — погрешность оказывается больше, чем при равномерном разбиении. В одном из примеров индексы эффективности не указаны, но из сравнения соответствующих графиков можно сделать вывод, что ошибка переоценивается индикатором уже на несколько порядков. Таким образом, что характерно для явного метода невязок, в реальности он не обеспечивает надежного и эффективного контроля точности. В работе [291] рассматривается метод оценки погрешности через определяющее соотношение, обобщением которого можно считать функциональный подход (см. параграф 1.8). В [291] приведена серия примеров деформирования пластин под воздействием равномерно распределенной нагрузки с различными граничными условиями и подтверждено высокое качество результатов индикации глобальной величины погрешности, достигаемое не только с измельчением конечно-элементной сетки, то есть асимптотически, но и на достаточно грубых начальных разбиениях. Приведены индексы эффективности оценок в различных ситуациях, меняющиеся в диапазоне 1.0–1.5 и приближающиеся к единице с ростом числа элементов разбиения. В работе [381] также используется альтернативный способ, основанный на RCP-методе. К сожалению, численные результаты, приведенные в статье, носят асимптотический характер и не позволяют сделать вывод о поведении индексов эффективности для предложенного индикатора. Таким образом, проблема в исследовании рассмотрена только со стороны построения адаптивных алгоритмов без обсуждения надежности контроля точности. Аналогичный недостаток можно отметить у работы [375], где развивается REP-метод и проводится сравнительный анализ двух его вариантов с классическим SPR-методом.

Использованный в главе способ построения функциональных апостериорных оценок погрешности основан на привлечении обобщенной постановки рассматриваемой задачи. Поскольку он позволяет оценить точность любой конформной аппроксимации решения, оценка остается справедливой вне зависимости от того, каким методом было получено приближенное решение. Это оказывается особенно важно, когда речь идет о контроле точности решений, полученных коммерческими пакетами. В них реализованы вычислительные процедуры, направленные на борьбу с «эффектом зажимания» или «локинга»[3], который проявляется в большой неточности расчета приближенных значений прогиба тонкостенных конструкций при математическом моделировании. Од-

[3] в англоязычной литературе — locking, shear locking

ним из средств преодоления эффекта является применение более грубой, редуцированной схемы интегрирования на части элементов сетки. Как следствие, приближенное решение не является более галеркинской аппроксимацией, поэтому к нему не могут быть применены классические методы контроля точности.

3.2. Классическая и обобщенная постановка задачи

Модель Рейсснера–Миндлина описывает деформацию[4] пластины толщины t в терминах двух переменных: скалярной функции $u = u(x)$ и векторной функции $\theta = \theta(x)$, которые, соответственно, представляют собой прогиб срединной плоскости пластины и поворот вектора нормали к ней при деформировании. Предполагается, что срединная плоскость изначально занимает ограниченную связную область $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ с липшицевой границей Γ. Уравнения, входящие в классическую постановку рассматриваемой задачи, имеют следующий вид: найти такую пару (u, θ) и соответствующее этой паре векторное поле γ, что

$$\begin{cases} -\operatorname{Div}(\mathrm{C}\varepsilon(\theta)) = \gamma & \text{в } \Omega, \\ -\operatorname{div}\gamma = g & \text{в } \Omega, \\ \gamma = \lambda t^{-2}(\nabla u - \theta) & \text{в } \Omega, \end{cases} \tag{3.1}$$

где Div — оператор дивергенции, применяемый к тензорам,

$$\lambda = \frac{Ek}{2(1+\nu)}, \quad \varepsilon(\theta) = \frac{1}{2}(\nabla\theta + (\nabla\theta)^T),$$

функция gt^3 соответствует распределенной поперечной нагрузке, действующей на пластину, тензор C — тензор четвертого ранга, определяемый ниже, E и ν — модуль Юнга и коэффициент Пуассона соответственно, а k — корректировочный коэффициент[5]. В дальнейших рассуждениях предполагается, что $g \in \mathbb{L}_2(\Omega)$, тензор C обладает свойством симметрии и существуют такие поло-

[4] речь идет о линейной теории упругости

[5] часто 5/6

жительные константы α_1 и α_2, что

$$\alpha_1|\varkappa|^2 \leq \mathrm{C}\varkappa : \varkappa \leq \alpha_2|\varkappa|^2 \quad \forall \varkappa \in \mathbb{M}^{2\times 2}_{sym}, \quad |\varkappa|^2 = \varkappa : \varkappa,$$

где символ : обозначает тензорное произведение, а $\mathbb{M}^{2\times 2}_{sym}$ — пространство симметричных тензоров второго ранга размерности два. Двусторонняя оценка должна выполняться почти всюду в Ω. В частном случае, когда пластина сделана из однородного изотропного материала, имеем

$$\mathrm{C}\varkappa = \frac{E}{12(1-\nu^2)}\left(\,(1-\nu)\varkappa + \nu\ \mathrm{tr}\,\varkappa\mathbb{I}\,\right),$$

$$\mathrm{C}^{-1}\varkappa = \frac{12}{E}\left(\,(1+\nu)\varkappa - \nu\ \mathrm{tr}\,\varkappa\mathbb{I}\,\right),$$

где $\mathbb{I}$ — единичный тензор второго ранга, а $\mathrm{tr}\,\varkappa$ — след тензора $\varkappa$.

Сначала рассмотрим однородные граничные условия

$$\begin{cases} u = 0 & \text{на } \Gamma, \\ \theta = 0 & \text{на } \Gamma, \end{cases} \tag{3.2}$$

соответствующие жесткому закреплению (заделке) края пластины. Известно, что функционал энергии в рассматриваемом случае имеет вид

$$\mathcal{J}(u,\theta) = \int\limits_{\Omega}\left(\frac{1}{2}\mathrm{C}\varepsilon(\theta) : \varepsilon(\theta) + \frac{1}{2}\lambda t^{-2}|\nabla u - \theta|^2 - gu\right)\,d\Omega.$$

Существование пары элементов, на которой достигается минимум функционала $\mathcal{J}$ на множестве $S := \overset{\circ}{\mathbb{W}}{}^1_2(\Omega) \times \overset{\circ}{\mathbb{W}}{}^1_2(\Omega,\mathbb{R}^2)$, следует из известных результатов вариационного исчисления для выпуклых коэрцитивных функционалов (см., например, I. Ekeland, R. Temam [178], О.А. Ладыженская, Н.Н. Уральцева [382, с. 397]). Можно показать, что при стремлении t к нулю минимайзеры этой вариационной задачи стремятся к решению соответствующей вариационной задачи для пластины Кирхгоффа–Лява. Вопрос обсуждается в нескольких публикациях, например, F. Brezzi, M. Fortin [354], R. Falk [368]. Оценке поведения при $t \to 0$ последовательности обобщенных решений, полученных в рамках смешанной математической формулировки исходной краевой задачи, посвящена работа R. Pierre [383]. Аргументы в пользу пластин Рейсснера–Миндлина по сравнению с пластинами Кирхгоффа–Лява, основанные на анализе сходимости относительной погрешности для соответствующих моделей, содержит работа D. Arnold, A. Madureira, S. Zhang [384]. Приняв гипотезу Кирхгоффа и положив $\theta = \nabla u$, приходим к следующему виду тензора:

$$\varepsilon(\nabla u) = \nabla\nabla u.$$

В этом случае необходимо потребовать, чтобы элемент u принадлежал пространству $\mathbb{W}_2^2(\Omega)$. Поскольку второе слагаемое в функционале $\mathcal{J}$ обращается в нуль, то мы в точности получаем вариационную задачу, рассмотренную в работе P. Neittaanmäki, S. Repin [219].

Обобщенная постановка задачи об изгибе пластины Рейсснера–Миндлина в одном из возможных вариантов записи имеет вид:
найти тройку элементов $(u, \theta, \gamma) \in U_0 \times \Theta_0 \times Q$, удовлетворяющую соотношениям

$$\begin{cases} \int\limits_\Omega \mathrm{C}\varepsilon(\theta) : \varepsilon(\varphi)\, d\Omega - \int\limits_\Omega \gamma \cdot \varphi\, d\Omega = 0, & \forall \varphi \in \Theta_0, \\ \int\limits_\Omega \gamma \cdot \nabla w\, d\Omega = \int\limits_\Omega g w\, d\Omega, & \forall w \in U_0, \\ \int\limits_\Omega \big(\lambda^{-1} t^2 \gamma - (\nabla u - \theta)\big) \cdot \tau\, d\Omega = 0, & \forall \tau \in Q, \end{cases} \tag{3.3}$$

где

$$U_0 := \overset{\circ}{\mathbb{W}}{}_2^1(\Omega), \quad \Theta_0 := \overset{\circ}{\mathbb{W}}{}_2^1(\Omega, \mathbb{R}^2), \quad Q := \mathbb{L}_2(\Omega, \mathbb{R}^2).$$

Любое решение задачи, обладающее повышенной гладкостью, удовлетворяет исходным уравнениям (3.1). Следовательно, оно является решением не только в обобщенном, но и в классическом смысле.

Теперь предположим, не конкретизируя метод, что рассматриваемая система решена приближенно, то есть имеется некоторая произвольная пара конформных аппроксимаций $(\tilde{u}, \tilde{\theta})$ точного решения задачи (u, θ) в S. Тогда элемент $\gamma = \lambda t^{-2}(\nabla u - \theta)$ аппроксимируется в Q элементом $\tilde{\gamma} = \lambda t^{-2}(\nabla \tilde{u} - \tilde{\theta})$. Определяя соответствующие погрешности, то есть отклонения от точных значений, $e_{\tilde{u}} := u - \tilde{u}$, $e_{\tilde{\theta}} := \theta - \tilde{\theta}$, $e_{\tilde{\gamma}} := \gamma - \tilde{\gamma}$, а также квадрат ошибки $\epsilon^2 :=$

$\mathcal{J}(\tilde{u},\tilde{\theta}) - \mathcal{J}(u,\theta)$, измеряемый в терминах функционала энергии, докажем следующее утверждение:

для произвольной аппроксимации $(\tilde{u},\tilde{\theta}) \in S$ имеет место соотношение

$$\epsilon^2 = \frac{1}{2}\left(\|\!|e_{\tilde{\theta}}|\!\|^2 + \lambda^{-1}t^2\|e_{\tilde{\gamma}}\|^2_\Omega\right), \tag{3.4}$$

где

$$\|e_{\tilde{\gamma}}\|^2_\Omega := \int\limits_\Omega |e_{\tilde{\gamma}}|^2\, d\Omega$$

и

$$\|\!|e_{\tilde{\theta}}|\!\|^2 := \int\limits_\Omega \mathrm{C}\varepsilon(e_{\tilde{\theta}}) : \varepsilon(e_{\tilde{\theta}})\, d\Omega.$$

<u>Доказательство</u>

По определению имеем

$$2\epsilon^2 = \int\limits_\Omega \left(\mathrm{C}\varepsilon(\tilde{\theta}) : \varepsilon(\tilde{\theta}) + \lambda t^{-2}|\nabla\tilde{u} - \tilde{\theta}|^2 - 2g\tilde{u}\right) d\Omega -$$
$$- \int\limits_\Omega \left(\mathrm{C}\varepsilon(\theta) : \varepsilon(\theta) + \lambda t^{-2}|\nabla u - \theta|^2 - 2gu\right) d\Omega.$$

Преобразуя части приведенного выше выражения с использованием обобщенной постановки (3.3), получаем:

$$\int\limits_\Omega \mathrm{C}\varepsilon(\tilde{\theta}) : \varepsilon(\tilde{\theta})\, d\Omega - \int\limits_\Omega \mathrm{C}\varepsilon(\theta) : \varepsilon(\theta)\, d\Omega =$$
$$= \int\limits_\Omega \mathrm{C}\varepsilon(\tilde{\theta} - \theta) : \varepsilon(\tilde{\theta} - \theta)\, d\Omega + 2\int\limits_\Omega \left(\mathrm{C}\varepsilon(\tilde{\theta}) : \varepsilon(\theta) - \mathrm{C}\varepsilon(\theta) : \varepsilon(\theta)\right) d\Omega =$$
$$= \|\!|e_{\tilde{\theta}}|\!\|^2 - 2\int\limits_\Omega \mathrm{C}\varepsilon(e_{\tilde{\theta}}) : \varepsilon(\theta)\, d\Omega = \|\!|e_{\tilde{\theta}}|\!\|^2_\Omega - 2\int\limits_\Omega \gamma \cdot e_{\tilde{\theta}}\, d\Omega;$$

$$\lambda t^{-2}\left(\|\nabla\tilde{u} - \tilde{\theta}\|^2_\Omega - \|\nabla u - \theta\|^2_\Omega\right) =$$
$$= \lambda^{-1}t^2\left(\|\tilde{\gamma}\|^2_\Omega - \|\gamma\|^2_\Omega\right) = \lambda^{-1}t^2\|e_{\tilde{\gamma}}\|^2_\Omega - 2\int\limits_\Omega \gamma \cdot (\lambda^{-1}t^2 e_{\tilde{\gamma}})\, d\Omega.$$

Принимая во внимание следующее соотношение между отклонениями:

$$e_{\tilde{\theta}} + \lambda^{-1}t^2 e_{\tilde{\gamma}} = \theta - \tilde{\theta} + (\nabla u - \theta) - (\nabla \tilde{u} - \tilde{\theta}) = \nabla e_{\tilde{u}}, \tag{3.5}$$

сгруппируем три слагаемых и используем вторую строку (3.3)

$$-\int\limits_{\Omega} \left(\gamma \cdot \left(e_{\tilde{\theta}} + \lambda^{-1}t^2 e_{\tilde{\gamma}}\right) - g(u - \tilde{u})\right) d\Omega = -\int\limits_{\Omega} (\gamma \cdot \nabla e_{\tilde{u}} - g e_{\tilde{u}})\, d\Omega = 0.$$

Учитывая оставшуюся часть выражения, приходим к соотношению (3.4).

□

Правая часть (3.4) представляет собой квадрат нормы, которую естественно использовать для измерения погрешности в терминах отклонений $e_{\tilde{\theta}}$ и $e_{\tilde{\gamma}}$. Как показано в заключительной части параграфа 3.3, оценка этих двух отклонений и соотношение (3.5) позволяют также контролировать $\mathbb{L}_2$-норму градиента отклонения $e_{\tilde{u}}$.

3.3. Построение апостериорных оценок с привлечением методов теории двойственности вариационного исчисления

Результаты предыдущего параграфа указывают на то, что точность любой аппроксимации $(\tilde{u}, \tilde{\theta})$ может быть оценена, если известно значение точной нижней грани прямой задачи, далее обозначаемое $\inf \mathfrak{P}$. Несмотря на то, что в общем случае оно неизвестно, левая часть (3.4) может быть оценена сверху с использованием двойственной вариационной формулировки. Введем для этого лагранжиан

$$\mathcal{L}(w, \varphi, q) := \int\limits_{\Omega} \left(\frac{1}{2}\mathrm{C}\varepsilon(\varphi) : \varepsilon(\varphi) - gw + q \cdot (\nabla w - \varphi) - \frac{\lambda^{-1}t^2|q|^2}{2}\right) d\Omega,$$

где

$$\inf \mathfrak{P} := \inf_{(w,\varphi)\in S} \mathcal{J}(w, \varphi) = \inf_{(w,\varphi)\in S} \sup_{q \in \mathbb{L}_2(\Omega, \mathbb{R}^2)} \mathcal{L}(w, \varphi, q).$$

Двойственная задача $\mathfrak{P}^*$, порожденная лагранжианом $\mathcal{L}$, имеет следующий вид: найти такой элемент $p \in \mathbb{L}_2(\Omega, \mathbb{R}^2)$, что

$$I^*(p) = \sup \mathfrak{P}^* := \sup_{q \in \mathbb{L}_2(\Omega, \mathbb{R}^2)} I^*(q),$$

где

$$I^*(q) = \inf_{(w,\varphi) \in S} \mathcal{L}(w, \varphi, q).$$

Используя известные результаты выпуклого анализа, например [178], можно показать, что справедливо соотношение $\inf \mathfrak{P} = \sup \mathfrak{P}^*$, то есть

$$\inf_{(w,\varphi) \in S} \sup_{q \in \mathbb{L}_2(\Omega, \mathbb{R}^2)} \mathcal{L}(w, \varphi, q) = \sup_{q \in \mathbb{L}_2(\Omega, \mathbb{R}^2)} \inf_{(w,\varphi) \in S} \mathcal{L}(w, \varphi, q). \tag{3.6}$$

При помощи соотношений (3.4) и (3.6) получаем оценку

$$\| e_{\tilde{\theta}} \|^2 + \lambda^{-1} t^2 \| e_{\tilde{\gamma}} \|^2_\Omega \leq 2 \left(\mathcal{J}(\tilde{u}, \tilde{\theta}) - I^*(q) \right), \tag{3.7}$$

которая справедлива для любого элемента $q \in \mathbb{L}_2(\Omega, \mathbb{R}^2)$. Как следует из определения двойственного функционала

$$\begin{aligned} I^*(q) &= \inf_{w \in U_0, \varphi \in \Theta_0} \mathcal{L}(w, \varphi, q) = \\ &= \inf_{w \in U_0, \varphi \in \Theta_0} \int\limits_\Omega \left(\frac{1}{2} \mathrm{C} \varepsilon(\varphi) : \varepsilon(\varphi) - q \cdot \varphi - \frac{\lambda^{-1} t^2 |q|^2}{2} + q \cdot \nabla w - g w \right) d\Omega. \end{aligned}$$

Если элемент q не принадлежит множеству $\mathbb{Q}_g$, где

$$\mathbb{Q}_g := \left\{ q \in \mathbb{L}_2(\Omega, \mathbb{R}^2) \middle| \int\limits_\Omega q \cdot \nabla w \, d\Omega = \int\limits_\Omega g w \, d\Omega, \quad \forall w \in U_0 \right\},$$

то значение $I^*(q)$ не ограничено снизу. Поэтому функционал фактически определен для $q \in \mathbb{Q}_g$ и имеет вид

$$I^*(q) = \inf_{\varphi \in \Theta_0} \int\limits_\Omega \left(\frac{1}{2} \mathrm{C} \varepsilon(\varphi) : \varepsilon(\varphi) - q \cdot \varphi \right) d\Omega - \int\limits_\Omega \frac{\lambda^{-1} t^2 |q|^2}{2} \, d\Omega.$$

Первое слагаемое в данном выражении можно представить следующим образом:

$$\inf_{\varphi \in \Theta_0} \int\limits_\Omega \left(\frac{1}{2} \mathrm{C} \varepsilon(\varphi) : \varepsilon(\varphi) - q \cdot \varphi \right) d\Omega = \sup_{\tau \in \mathbb{N}_q} \int\limits_\Omega \left(-\frac{1}{2} \mathrm{C}^{-1} \tau : \tau \right) d\Omega,$$

где

$$\mathbb{N}_q := \left\{ \tau \in \mathbb{L}_2(\Omega, \mathbb{M}^{2\times 2}_{sym}) \,\middle|\, \int\limits_{\Omega} \tau : \varepsilon(\varphi)\, d\Omega = \int\limits_{\Omega} q \cdot \varphi \, d\Omega \,, \quad \forall \varphi \in \Theta_0 \right\}.$$

Данное соотношение связывает прямую и двойственную задачи специального вида. Оно основано на стандартных аргументах теории двойственности вариационного исчисления. В результате приходим к выражению

$$I^*(q) = \sup_{\tau \in \mathbb{N}_q} \int\limits_{\Omega} \left(-\frac{1}{2} \mathrm{C}^{-1} \tau : \tau \right) d\Omega - \int\limits_{\Omega} \frac{\lambda^{-1} t^2 |q|^2}{2} \, d\Omega.$$

Принимая во внимание неравенство

$$I^*(q) \geq \mathcal{I}^*(q, \tau),$$

где

$$\mathcal{I}^*(q, \tau) := - \int\limits_{\Omega} \left(\frac{1}{2} \mathrm{C}^{-1} \tau : \tau + \frac{\lambda^{-1} t^2 |q|^2}{2} \right) d\Omega,$$

и используя (3.7), получаем оценку

$$|\!|\!| e_{\tilde{\theta}} |\!|\!|^2 + \lambda^{-1} t^2 \| e_{\tilde{\gamma}} \|^2_{\Omega} \leq 2 \left(\mathcal{J}(\tilde{u}, \tilde{\theta}) - \mathcal{I}^*(q, \tau) \right), \tag{3.8}$$

которая верна для любого $\tau \in \mathbb{N}_q$, где q — произвольный фиксированный элемент $\mathbb{Q}_g$.

Покажем, что неравенство (3.8) допускает другое представление

$$|\!|\!| e_{\tilde{\theta}} |\!|\!|^2 + \lambda^{-1} t^2 \| e_{\tilde{\gamma}} \|^2_{\Omega} \leq \inf_{q \in \mathbb{Q}_g} \left\{ \inf_{\tau \in \mathbb{N}_q} \mathcal{D}^2(\tilde{\theta}, \tau) + \lambda^{-1} t^2 \| \tilde{\gamma} - q \|^2_{\Omega} \right\}, \tag{3.9}$$

где

$$\mathcal{D}^2(\tilde{\theta}, \tau) := \int\limits_{\Omega} \left(\mathrm{C} \varepsilon(\tilde{\theta}) : \varepsilon(\tilde{\theta}) + \mathrm{C}^{-1} \tau : \tau - 2\tau : \varepsilon(\tilde{\theta}) \right) d\Omega.$$

Действительно,

$$\begin{aligned} 2 \left(\mathcal{J}(\tilde{u}, \tilde{\theta}) - \mathcal{I}^*(q, \tau) \right) &= \\ = \int\limits_{\Omega} \left(\mathrm{C} \varepsilon(\tilde{\theta}) : \varepsilon(\tilde{\theta}) + \lambda t^{-2} |\nabla \tilde{u} - \tilde{\theta}|^2 - 2g\tilde{u} + \mathrm{C}^{-1} \tau : \tau + \lambda^{-1} t^2 |q|^2 \right) d\Omega &= \\ = \mathcal{D}^2(\tilde{\theta}, \tau) + 2 \int\limits_{\Omega} \left(\tau : \varepsilon(\tilde{\theta}) - g\tilde{u} \right) d\Omega + \int\limits_{\Omega} \lambda^{-1} t^2 \left(|\tilde{\gamma}|^2 + |q|^2 \right) d\Omega. \end{aligned}$$

Используя соотношения

$$\int_\Omega \tau : \varepsilon(\tilde{\theta})\, d\Omega = \int_\Omega q \cdot \tilde{\theta}\, d\Omega,$$

$$\tilde{\theta} + \lambda^{-1} t^2 \tilde{\gamma} = \nabla \tilde{u}$$

и

$$\int_\Omega q \cdot \nabla \tilde{u}\, d\Omega = \int_\Omega g \tilde{u}\, d\Omega,$$

приходим к промежуточному результату:

$$2\left(\mathcal{J}(\tilde{u}, \tilde{\theta}) - \mathcal{I}^*(q, \tau)\right) = \mathcal{D}^2(\tilde{\theta}, \tau) + \lambda^{-1} t^2 \|\tilde{\gamma} - q\|^2_\Omega + \\ + 2\int_\Omega \left(q \cdot \left(\tilde{\theta} + \lambda^{-1} t^2 \tilde{\gamma}\right) - g\tilde{u}\right) d\Omega = \mathcal{D}^2(\tilde{\theta}, \tau) + \lambda^{-1} t^2 \|\tilde{\gamma} - q\|^2_\Omega.$$

Таким образом, правая часть оценки погрешности, как и левая ее часть, может быть записана в терминах пары аппроксимаций $(\tilde{\theta}, \tilde{\gamma})$, а не исходной пары $(\tilde{u}, \tilde{\theta})$.

Практическое применение оценки (3.9) серьезно затруднено тем обстоятельством, что при вычислении верхних границ отклонения от точного решения свободные элементы q и τ необходимо выбирать из соответствующих допустимых множеств $\mathbb{Q}_g$ и $\mathbb{N}_q$. Построение внутренних аппроксимаций в них может оказаться слишком трудоемкой задачей, тем более, что второе множество зависит от выбора элемента q. По этой причине дальнейшей целью является модификация полученного неравенства таким образом, чтобы вычисление оценок погрешности не требовало использования специальных аппроксимаций.

Построим оценку погрешности, в которой правая часть определена на паре пространств $\mathbb{H}(\Omega, \mathrm{div}) \times \mathbb{N}_{sym}(\Omega, \mathrm{Div})$, где

$$\mathbb{N}_{sym}(\Omega, \mathrm{Div}) := \left\{\varkappa \in \mathbb{L}_2(\Omega, \mathbb{M}^{2\times 2}_{sym}) \mid \mathrm{Div}\, \varkappa \in \mathbb{L}_2(\Omega, \mathbb{R}^2)\right\}.$$

Запишем слагаемое $\mathcal{D}^2(\tilde{\theta}, \tau)$ в виде

$$\mathcal{D}^2(\tilde{\theta}, \tau) = \int_\Omega \mathrm{C}(\varepsilon(\tilde{\theta}) - \mathrm{C}^{-1}\tau) : (\varepsilon(\tilde{\theta}) - \mathrm{C}^{-1}\tau)\, d\Omega.$$

В силу свойств тензора С величина

$$\left(\int\limits_{\Omega} \mathrm{C}\varkappa : \varkappa \, d\Omega\right)^{1/2}$$

представляет собой норму в пространстве $\mathbb{L}_2(\Omega, \mathbb{M}^{2\times 2}_{sym})$, эквивалентную стандартной. Добавляя и вычитая произвольный элемент $\varkappa \in \mathbb{N}_{sym}(\Omega, \mathrm{Div})$, и используя неравенство треугольника для этой нормы, имеем

$$\mathcal{D}(\tilde{\theta}, \tau) \leq \mathcal{D}(\tilde{\theta}, \varkappa) + \left(\int\limits_{\Omega} \mathrm{C}^{-1}(\tau - \varkappa) : (\tau - \varkappa) \, d\Omega\right)^{1/2}.$$

Применяя неравенство

$$2|ab| \leq \beta_1 \, a^2 + \beta_1^{-1} \, b^2,$$

приходим к оценке

$$\mathcal{D}^2(\tilde{\theta}, \tau) \leq (1 + \beta_1)\mathcal{D}^2(\tilde{\theta}, \varkappa) + \left(1 + \beta_1^{-1}\right) \int\limits_{\Omega} \mathrm{C}^{-1}(\tau - \varkappa) : (\tau - \varkappa) \, d\Omega,$$

которая верна при любом положительном значении параметра β_1. Отсюда заключаем, что

$$\inf_{\tau \in \mathbb{N}_q} \mathcal{D}^2(\tilde{\theta}, \tau) \leq (1 + \beta_1)\mathcal{D}^2(\tilde{\theta}, \varkappa) + \left(1 + \beta_1^{-1}\right) \mathfrak{r}^2(\varkappa), \tag{3.10}$$

где

$$\mathfrak{r}^2(\varkappa) := \inf_{\tau \in \mathbb{N}_q} \int\limits_{\Omega} \mathrm{C}^{-1}(\tau - \varkappa) : (\tau - \varkappa) \, d\Omega.$$

Покажем справедливость утверждения:
для любого элемента $\varkappa \in \mathbb{N}_{sym}(\Omega, \mathrm{Div})$ выполняется оценка

$$\mathfrak{r}^2(\varkappa) \leq \mathfrak{c}_{II}^2 \|q + \mathrm{Div}\, \varkappa\|_{\Omega}^2,$$

где $\mathfrak{c}_{II}$ — постоянная, удовлетворяющая неравенству

$$\|\varphi\|_{\Omega} \leq \mathfrak{c}_{II} \|\varphi\|, \quad \forall \varphi \in \varTheta_0.$$

Доказательство

Сделаем замену переменных $\sigma := \tau - \varkappa$ в определении $\mathfrak{r}^2(\varkappa)$. С одной стороны,

$$\int\limits_{\Omega} \tau : \varepsilon(\varphi)\, d\Omega = \int\limits_{\Omega} q \cdot \varphi\, d\Omega, \quad \forall \varphi \in \Theta_0.$$

С другой стороны,

$$-\int\limits_{\Omega} \varkappa : \varepsilon(\varphi)\, d\Omega = \int\limits_{\Omega} \operatorname{Div} \varkappa \cdot \varphi\, d\Omega, \quad \forall \varphi \in \Theta_0.$$

Следовательно, σ принадлежит множеству $\mathbb{N}_r$, где $r := q + \operatorname{Div} \varkappa$,

$$\mathbb{N}_r := \left\{ \sigma \in \mathbb{L}_2(\Omega, \mathbb{M}^{2\times 2}_{sym}) \,\middle|\, \int\limits_{\Omega} \sigma : \varepsilon(\varphi)\, d\Omega = \int\limits_{\Omega} r \cdot \varphi\, d\Omega\,, \quad \forall \varphi \in \Theta_0 \right\}.$$

Отсюда, на основе рассуждений, аналогичных тем, что были приведены ранее, получается требуемая оценка. Действительно,

$$\mathfrak{r}^2(\varkappa) = \inf_{\sigma \in \mathbb{N}_r} \int\limits_{\Omega} \mathrm{C}^{-1}\sigma : \sigma\, d\Omega = -\sup_{\sigma \in \mathbb{N}_r} \int\limits_{\Omega} \left(-\mathrm{C}^{-1}\sigma : \sigma\right)\, d\Omega =$$

$$= -\inf_{\varphi \in \Theta_0} \int\limits_{\Omega} \left(\mathrm{C}\varepsilon(\varphi) : \varepsilon(\varphi) - 2r \cdot \varphi\right) d\Omega \le -\inf_{\varphi \in \Theta_0} \left(\|\!|\varphi|\!\|^2 - 2\mathfrak{c}_{II} \|r\|_{\Omega} \|\!|\varphi|\!\| \right) \le$$

$$\le -\inf_{a \ge 0} \left(a^2 - 2\mathfrak{c}_{II}\|r\|_{\Omega} a\right) = \mathfrak{c}^2_{II} \|q + \operatorname{Div} \varkappa\|^2_{\Omega}.$$

□

Следствием неравенств (3.9), (3.10) и доказанного утверждения является оценка

$$\|\!|e_{\tilde{\theta}}|\!\|^2 + \lambda^{-1} t^2 \|e_{\tilde{\gamma}}\|^2_{\Omega} \le (1 + \beta_1)\mathcal{D}^2(\tilde{\theta}, \varkappa) +$$

$$+ \inf_{q \in \mathbb{Q}_g} \left\{ \left(1 + \beta_1^{-1}\right) \mathfrak{c}^2_{II} \|q + \operatorname{Div} \varkappa\|^2_{\Omega} + \lambda^{-1} t^2 \|\tilde{\gamma} - q\|^2_{\Omega} \right\},$$

которая справедлива для любых $\beta_1 > 0$, $q \in \mathbb{Q}_g$ и $\varkappa \in \mathbb{N}_{sym}(\Omega, \operatorname{Div})$. Таким образом, мы избавились от первого ограничения. Теперь свободную переменную — тензор $\varkappa$ — можно выбирать удовлетворяющим условию $\operatorname{Div} \varkappa \in \mathbb{L}_2(\Omega, \mathbb{R}^2)$

и условию симметрии. С этого момента будем использовать вместо $\varkappa$ обозначение $\tilde{\tilde{\varkappa}}$, отражающее тот факт, что в качестве произвольного элемента можно использовать аппроксимацию, построенную с применением численных методов.

Аналогично преобразованию, приведенному в параграфе 1.9, вместо произвольного элемента $q \in \mathbb{Q}_g$ в апостериорную оценку можно ввести свободный элемент $\tilde{\tilde{y}} \in \mathbb{H}(\Omega, \operatorname{div})$

$$\|\tilde{\gamma} - q\|^2_\Omega \leq (1+\beta_2)\|\tilde{\gamma} - \tilde{\tilde{y}}\|^2_\Omega + \left(1+\beta_2^{-1}\right)\|q - \tilde{\tilde{y}}\|^2_\Omega,$$

$$\|q + \operatorname{Div}\tilde{\tilde{\varkappa}}\|^2_\Omega \leq (1+\beta_3)\|\tilde{\tilde{y}} + \operatorname{Div}\tilde{\tilde{\varkappa}}\|^2_\Omega + \left(1+\beta_3^{-1}\right)\|q - \tilde{\tilde{y}}\|^2_\Omega,$$

где β_2, β_3 — свободные положительные параметры. Используя оценку

$$\inf_{q \in \mathbb{Q}_g} \|q - \tilde{\tilde{y}}\|^2_\Omega \leq \mathfrak{c}_I^2 \|\operatorname{div}\tilde{\tilde{y}} + g\|^2_\Omega,$$

вывод которой представлен в главе 1, мы приходим для пластин Рейсснера–Миндлина к неравенству вида

$$|\!|\!| e_{\tilde{\theta}} |\!|\!|^2 + \lambda^{-1}t^2\|e_{\tilde{\gamma}}\|^2_\Omega \leq \mathcal{M}^2(\tilde{\theta}, \tilde{\gamma}, \beta_1, \beta_2, \beta_3, \tilde{\tilde{\varkappa}}, \tilde{\tilde{y}}) := \mathcal{M}_1^2 + \mathcal{M}_2^2 + \mathcal{M}_3^2 + \mathcal{M}_4^2, \quad (3.11)$$

где

$$\mathcal{M}_1^2 := (1+\beta_1)\int\limits_\Omega (\mathrm{C}\varepsilon(\tilde{\theta}) - \tilde{\tilde{\varkappa}}) : (\varepsilon(\tilde{\theta}) - \mathrm{C}^{-1}\tilde{\tilde{\varkappa}})\, d\Omega,$$

$$\mathcal{M}_2^2 := \lambda^{-1}t^2(1+\beta_2)\|\tilde{\gamma} - \tilde{\tilde{y}}\|^2_\Omega,$$

$$\mathcal{M}_3^2 := \left(1+\beta_1^{-1}\right)(1+\beta_3)\mathfrak{c}_{II}^2\|\tilde{\tilde{y}} + \operatorname{Div}\tilde{\tilde{\varkappa}}\|^2_\Omega,$$

$$\mathcal{M}_4^2 := \left(\left(1+\beta_1^{-1}\right)\left(1+\beta_3^{-1}\right)\mathfrak{c}_{II}^2 + \lambda^{-1}t^2\left(1+\beta_2^{-1}\right)\right)\mathfrak{c}_I^2\|\operatorname{div}\tilde{\tilde{y}} + g\|^2_\Omega.$$

Поясним смысл оценки (3.11). С одной стороны, в нее входят элементы $\tilde{\theta}$ и $\tilde{\gamma}$, в терминах которых мы контролируем точность аппроксимации решения рассматриваемой задачи. С другой стороны, она также содержит пару свободных функций $(\tilde{\tilde{y}}, \tilde{\tilde{\varkappa}})$ и несколько положительных параметров. Правая часть неравенства (3.11) дает гарантированную оценку сверху для квадрата нормы отклонения от точного решения при любом выборе $\tilde{\tilde{y}}$, $\tilde{\tilde{\varkappa}}$ и β_1, β_2, β_3 из соответствующих допустимых классов. Однако неудачный выбор этих элементов может привести к существенной переоценке истинного значения погрешности. С другой стороны, при помощи мажоранты можно получить сколь угодно точную оценку интересующей нас величины. Действительно, для пары $\tilde{\tilde{y}} = \gamma$ и $\tilde{\tilde{\varkappa}} = \mathrm{C}\varepsilon(\theta)$ слагаемые $\mathcal{M}_3^2$ и $\mathcal{M}_4^2$, с точностью до множителей представляющие собой квадраты норм невязок дифференциальных уравнений исходной системы, обращаются в нуль. Следовательно, можно положить β_1, β_2, β_3 равными нулю, и вместо неравенства достигается равенство.

Из полученной оценки вытекает также оценка для отклонения $e_{\tilde{u}} = \tilde{u} - u$. Действительно,

$$\|\nabla e_{\tilde{u}}\|_\Omega \leq \|e_{\tilde{\theta}}\|_\Omega + \lambda^{-1}t^2\|e_{\tilde{\gamma}}\|_\Omega \leq \mathfrak{c}_{II}|\!|\!|e_{\tilde{\theta}}|\!|\!| + \lambda^{-1}t^2\|e_{\tilde{\gamma}}\|_\Omega.$$

Отсюда следует, что

$$\|\nabla e_{\tilde{u}}\|_\Omega^2 \leq (1+\beta)\mathfrak{c}_{II}^2|\!|\!|e_{\tilde{\theta}}|\!|\!|^2 + \left(1+\beta^{-1}\right)\lambda^{-2}t^4\|e_{\tilde{\gamma}}\|_\Omega^2,$$

где β — произвольное положительное число. Положив $\beta = \lambda^{-1}t^2\mathfrak{c}_{II}^{-2}$, мы приходим к неравенству

$$\|\nabla e_{\tilde{u}}\|_\Omega^2 \leq (\lambda^{-1}t^2 + \mathfrak{c}_{II}^2)\left(|\!|\!|e_{\tilde{\theta}}|\!|\!|^2 + \lambda^{-1}t^2\|e_{\tilde{\gamma}}\|_\Omega^2\right) \leq (\lambda^{-1}t^2 + \mathfrak{c}_{II}^2)\,\mathcal{M}^2.$$

Таким образом, функционал $\mathcal{M}$ одновременно позволяет контролировать нормы всех рассматриваемых отклонений.

В заключение отметим, что изложенный способ получения апостериорных оценок основан на работе С.И. Репина и М.Е. Фролова [72] (S. Repin, M. Frolov [247]). Можно также показать (см. М.Е. Фролов [243]), что (3.11) включает в себя в качестве частного случая соответствующую оценку для задачи о пластине Кирхгоффа–Лява из более ранней работы P. Neittaanmäki, S. Repin [219]. Исследование вопроса построения вычисляемых оценок погрешности, возникающей при замене исходных уравнений теории упругости на плоскую задачу об изгибе пластины Кирхгоффа–Лява, фактически — оценок ошибки модели, представлено в появившейся относительно недавно работе S. Repin, S. Sauter [317]. Этот результат, дополненный [219], позволяет осуществить полный контроль точности, включающий ошибку аппроксимации и ошибку модели.

3.4. Оценка энергетической нормы ошибки на основе преобразования интегральных тождеств

Рассмотрим другой способ получения мажорант погрешности для задачи о пластине Рейсснера–Миндлина, который основан на преобразовании обобщенной постановки (3.3). Он изложен в работе М.Е. Фролова, П. Нейттаанмяки и С.И. Репина [248] (см. также M. Frolov, P. Neittaanmäki, S. Repin [222]).

Сначала модифицируем первое соотношение (3.3), вычитая из обеих частей выражение, содержащее приближенное решение и пробную функцию $\varphi \in \Theta_0$

$$\int\limits_\Omega (\mathrm{C}\varepsilon(\theta) : \varepsilon(\varphi) - \mathrm{C}\varepsilon(\tilde{\theta}) : \varepsilon(\varphi))\, d\Omega = \int\limits_\Omega (\gamma \cdot \varphi - \mathrm{C}\varepsilon(\tilde{\theta}) : \varepsilon(\varphi))\, d\Omega.$$

Подставляя $\varphi = e_{\tilde{\theta}} = \theta - \tilde{\theta}$, получим

$$\int\limits_\Omega \mathrm{C}\varepsilon(e_{\tilde{\theta}}) : \varepsilon(e_{\tilde{\theta}})\, d\Omega = \int\limits_\Omega (\gamma \cdot e_{\tilde{\theta}} - \mathrm{C}\varepsilon(\tilde{\theta}) : \varepsilon(e_{\tilde{\theta}}))\, d\Omega. \tag{3.12}$$

Из второго соотношения в системе (3.3), добавив выражение $\tilde{\gamma} \cdot \nabla w$

$$\int\limits_\Omega (\gamma \cdot \nabla w - \tilde{\gamma} \cdot \nabla w)\, d\Omega = \int\limits_\Omega (gw - \tilde{\gamma} \cdot \nabla w)\, d\Omega$$

и положив $w = e_{\tilde{u}} = u - \tilde{u}$, приходим к равенству

$$\int\limits_\Omega e_{\tilde{\gamma}} \cdot \nabla e_{\tilde{u}}\, d\Omega = \int\limits_\Omega (g e_{\tilde{u}} - \tilde{\gamma} \cdot \nabla e_{\tilde{u}})\, d\Omega.$$

Следовательно, из формулы (3.5) имеем

$$\int\limits_\Omega e_{\tilde{\gamma}} \cdot (\lambda^{-1} t^2 e_{\tilde{\gamma}} + e_{\tilde{\theta}})\, d\Omega = \int\limits_\Omega (g e_{\tilde{u}} - \lambda^{-1} t^2 \tilde{\gamma} \cdot e_{\tilde{\gamma}} - \tilde{\gamma} \cdot e_{\tilde{\theta}})\, d\Omega$$

или

$$\int\limits_{\Omega} \lambda^{-1} t^2 e_{\tilde{\gamma}} \cdot e_{\tilde{\gamma}} \, d\Omega = \int\limits_{\Omega} (g e_{\tilde{u}} - \lambda^{-1} t^2 \tilde{\gamma} \cdot e_{\tilde{\gamma}} - \gamma \cdot e_{\tilde{\theta}}) \, d\Omega. \tag{3.13}$$

Составив полусумму (3.12) и (3.13), получаем

$$\frac{1}{2} \int\limits_{\Omega} \left(\mathrm{C}\varepsilon(e_{\tilde{\theta}}) : \varepsilon(e_{\tilde{\theta}}) + \lambda^{-1} t^2 e_{\tilde{\gamma}} \cdot e_{\tilde{\gamma}} \right) \, d\Omega =$$

$$= \frac{1}{2} \int\limits_{\Omega} (-\mathrm{C}\varepsilon(\tilde{\theta}) : \varepsilon(e_{\tilde{\theta}}) + g e_{\tilde{u}} - \lambda^{-1} t^2 \tilde{\gamma} \cdot e_{\tilde{\gamma}}) \, d\Omega. \tag{3.14}$$

Отметим, что равенство (3.14) продолжает (3.4), а именно

$$\epsilon^2 = \frac{1}{2} \int\limits_{\Omega} (-\mathrm{C}\varepsilon(\tilde{\theta}) : \varepsilon(e_{\tilde{\theta}}) + g e_{\tilde{u}} - \lambda^{-1} t^2 \tilde{\gamma} \cdot e_{\tilde{\gamma}}) \, d\Omega.$$

Теперь введем в рассмотрение свободные элементы $\tilde{\tilde{\varkappa}} \in \mathbb{N}_{sym}(\Omega, \mathrm{Div})$, а также $\tilde{\tilde{y}} \in \mathbb{H}(\Omega, \mathrm{div})$. Используя формулы интегрирования по частям для этих элементов

$$\int\limits_{\Omega} \tilde{\tilde{\varkappa}} : \varepsilon(e_{\tilde{\theta}}) \, d\Omega + \int\limits_{\Omega} \mathrm{Div} \, \tilde{\tilde{\varkappa}} \cdot e_{\tilde{\theta}} \, d\Omega = 0$$

и

$$\int\limits_{\Omega} \tilde{\tilde{y}} \cdot \nabla e_{\tilde{u}} \, d\Omega + \int\limits_{\Omega} \mathrm{div} \, \tilde{\tilde{y}} \, e_{\tilde{u}} \, d\Omega = 0,$$

преобразуем правую часть равенства (3.14) и получим

$$2\epsilon^2 = \int\limits_{\Omega} (\tilde{\tilde{\varkappa}} - \mathrm{C}\varepsilon(\tilde{\theta})) : \varepsilon(e_{\tilde{\theta}}) \, d\Omega +$$

$$+ \int\limits_{\Omega} (\tilde{\tilde{y}} \cdot \nabla e_{\tilde{u}} - \lambda^{-1} t^2 \tilde{\gamma} \cdot e_{\tilde{\gamma}} + \mathrm{Div} \, \tilde{\tilde{\varkappa}} \cdot e_{\tilde{\theta}}) \, d\Omega +$$

$$+ \int\limits_{\Omega} (g + \mathrm{div} \, \tilde{\tilde{y}}) e_{\tilde{u}} \, d\Omega.$$

Соотношение $\nabla e_{\tilde{u}} = \lambda^{-1} t^2 e_{\tilde{\gamma}} + e_{\tilde{\theta}}$ влечет за собой представление

$$2\epsilon^2 = \int\limits_{\Omega} \mathrm{C}(\mathrm{C}^{-1} \tilde{\tilde{\varkappa}} - \varepsilon(\tilde{\theta})) : \varepsilon(e_{\tilde{\theta}}) \, d\Omega + \lambda^{-1} t^2 \int\limits_{\Omega} (\tilde{\tilde{y}} - \tilde{\gamma}) \cdot e_{\tilde{\gamma}} \, d\Omega +$$

$$+ \int\limits_{\Omega} (\tilde{\tilde{y}} + \mathrm{Div} \, \tilde{\tilde{\varkappa}}) \cdot e_{\tilde{\theta}} \, d\Omega + \int\limits_{\Omega} (g + \mathrm{div} \, \tilde{\tilde{y}}) e_{\tilde{u}} \, d\Omega.$$

Таким образом, приходим к неравенству

$$
\begin{aligned}
2\epsilon^2 \le \|\mathrm{C}^{-1}\tilde{\tilde{\varkappa}} - \varepsilon(\tilde{\theta})\| \;\; \|e_{\tilde{\theta}}\| \;\; + \;\; \lambda^{-1}t^2\|\tilde{\tilde{y}} - \tilde{\gamma}\|_\Omega \;\; \|e_{\tilde{\gamma}}\|_\Omega + \\
+ \mathfrak{c}_{II} \;\; \|\tilde{\tilde{y}} + \mathrm{Div}\, \tilde{\tilde{\varkappa}}\|_\Omega \;\; \|e_{\tilde{\theta}}\| \;\; + \;\; \mathfrak{c}_I \;\; \|g + \mathrm{div}\, \tilde{\tilde{y}}\|_\Omega \;\; \|\nabla e_{\tilde{u}}\|_\Omega.
\end{aligned}
$$

Отметим, что обе постоянные $\mathfrak{c}_I$ и $\mathfrak{c}_{II}$ не зависят от способа построения дискретной задачи и метода решения. Из соотношения (3.5) получаем

$$
\|\nabla e_{\tilde{u}}\|_\Omega \le \mathfrak{c}_{II}\|e_{\tilde{\theta}}\| + \lambda^{-1}t^2\|e_{\tilde{\gamma}}\|_\Omega. \tag{3.15}
$$

Следовательно,

$$
2\epsilon^2 = \|e_{\tilde{\theta}}\|^2 + \lambda^{-1}t^2\|e_{\tilde{\gamma}}\|_\Omega^2 \le \|e_{\tilde{\theta}}\|\, a \,+\, \lambda^{-1}t^2\|e_{\tilde{\gamma}}\|_\Omega\, b,
$$

где

$$
a := \|\mathrm{C}^{-1}\tilde{\tilde{\varkappa}} - \varepsilon(\tilde{\theta})\| + \mathfrak{c}_{II}\|\tilde{\tilde{y}} + \mathrm{Div}\, \tilde{\tilde{\varkappa}}\|_\Omega + \mathfrak{c}_I\mathfrak{c}_{II}\|g + \mathrm{div}\, \tilde{\tilde{y}}\|_\Omega
$$

и

$$
b := \|\tilde{\tilde{y}} - \tilde{\gamma}\|_\Omega + \mathfrak{c}_I\|g + \mathrm{div}\, \tilde{\tilde{y}}\|_\Omega.
$$

Далее, используя неравенство Коши–Шварца, мы приходим к оценке

$$
\epsilon^2 \le \frac{1}{2}\left(a^2 + \lambda^{-1}t^2b^2\right), \tag{3.16}
$$

правая часть которой может быть вычислена явно, так как содержит только известные величины (приближенное решение, константы и свободные элементы).

Отметим, что при получении оценки автоматически сохраняется соответствие размерностей физических величин. Так, например, слагаемое $\lambda^{-1}t^2\|e_{\tilde{\gamma}}\|_\Omega b$ разбивается перед применением неравенства Коши–Шварца следующим образом: $(\lambda^{-1/2}t\|e_{\tilde{\gamma}}\|_\Omega)(\lambda^{-1/2}tb)$. Размерность обоих множителей равна $\mathbf{H}^{1/2}$ $\mathbf{м}^{-1}$. В случае, когда на границе задано другое условие, согласование размерностей необходимо проводить явно.

3.5. Некоторые численные результаты для пластин

Оценка (3.16) дает верхнюю границу для интегрального значения ошибки в области Ω. Чтобы получить индикатор локальной погрешности на каждом элементе разбиения, необходимо преобразование правой части этого неравенства к виду, содержащему квадраты норм, а не квадраты их сумм. Это может быть сделано при помощи последовательного применения неравенства Коши с параметром, дающего оценки

$$a^2 \leq (1+\beta_1)\|\mathrm{C}^{-1}\tilde{\tilde{\varkappa}} - \varepsilon(\tilde{\theta})\|^2 + \\ + \left(1+\beta_1^{-1}\right)(1+\beta_2)\mathfrak{c}_{II}^2\|\tilde{\tilde{y}} + \operatorname{Div}\tilde{\tilde{\varkappa}}\|_\Omega^2 + \\ + \left(1+\beta_1^{-1}\right)\left(1+\beta_2^{-1}\right)\mathfrak{c}_I^2\mathfrak{c}_{II}^2\|\operatorname{div}\tilde{\tilde{y}} + g\|_\Omega^2$$

и

$$b^2 \leq (1+\beta_2)\|\tilde{\gamma} - \tilde{\tilde{y}}\|_\Omega^2 + \left(1+\beta_2^{-1}\right)\mathfrak{c}_I^2\|\operatorname{div}\tilde{\tilde{y}} + g\|_\Omega^2,$$

где β_1, β_2 — свободные положительные параметры. Из оценки (3.16) мы получаем

$$\|e_{\tilde{\theta}}\|^2 + \lambda^{-1}t^2\|e_{\tilde{\gamma}}\|_\Omega^2 \leq \mathcal{M}^2 := \mathcal{M}_1^2 + \bar{\mathcal{M}}_2^2 + \bar{\mathcal{M}}_3^2, \qquad (3.17)$$

где функционал $\mathcal{M}_1$ определен как в (3.11), а остальные — следующим образом:

$$\bar{\mathcal{M}}_2^2 := \lambda^{-1}t^2(1+\beta_2)\left(\|\tilde{\gamma} - \tilde{\tilde{y}}\|_\Omega^2 + \beta_2^{-1}\mathfrak{c}_I^2\|\operatorname{div}\tilde{\tilde{y}} + g\|_\Omega^2\right),$$

$$\bar{\mathcal{M}}_3^2 := \left(1+\beta_1^{-1}\right)(1+\beta_2)\mathfrak{c}_{II}^2\left(\|\tilde{\tilde{y}} + \operatorname{Div}\tilde{\tilde{\varkappa}}\|_\Omega^2 + \beta_2^{-1}\mathfrak{c}_I^2\|\operatorname{div}\tilde{\tilde{y}} + g\|_\Omega^2\right).$$

Отметим еще раз, что мажоранта $\mathcal{M}^2$ в неравенстве (3.17) не только в теории, но и при применении позволяет вычислять гарантированные верхние границы для квадрата энергетической нормы погрешности.

Чтобы сделать функционал $\mathcal{M}^2$ более пригодным для практического использования, преобразуем его слагаемые при помощи замены одних свободных параметров другими. В качестве примера покажем, как можно модифицировать слагаемое $\bar{\mathcal{M}}_2^2$. Сначала введем вместо β_2 новый параметр $B_2 = \beta_2\mathfrak{c}_I^{-2}$, получив

$$\bar{\mathcal{M}}_2^2 = \lambda^{-1}t^2(1+B_2\mathfrak{c}_I^2)\left(\|\tilde{\gamma} - \tilde{\tilde{y}}\|_\Omega^2 + B_2^{-1}\|\operatorname{div}\tilde{\tilde{y}} + g\|_\Omega^2\right).$$

Таким образом, если мы имеем даже приблизительное представление о значении постоянной $\mathfrak{c}_I$, это дает возможность установить значение параметра B_2 достаточно малым — таким, чтобы произведением $B_2\mathfrak{c}_I^2$ можно было пренебречь. Тогда можно использовать следующую модификацию функционала $\bar{\mathcal{M}}_2^2$:

$$\hat{\mathcal{M}}_2^2(\tilde{\tilde{y}}) := \lambda^{-1}t^2\left(\|\tilde{\gamma} - \tilde{\tilde{y}}\|_\Omega^2 + B_2^{-1}\|\operatorname{div}\tilde{\tilde{y}} + g\|_\Omega^2\right),$$

где второе слагаемое имеет смысл штрафного слагаемого с соответствующим штрафным параметром B_2. Аналогичным образом, представив параметр β_1 в виде $B_1\mathfrak{c}_{II}^2$, получим новые варианты оставшихся частей мажоранты, а именно

$$\hat{\mathcal{M}}_1^2(\tilde{\tilde{\varkappa}}) := \int\limits_\Omega (\mathrm{C}\varepsilon(\tilde{\theta}) - \tilde{\tilde{\varkappa}}) : (\varepsilon(\tilde{\theta}) - \mathrm{C}^{-1}\tilde{\tilde{\varkappa}})\, d\Omega$$

и

$$\hat{\mathcal{M}}_3^2(\tilde{\tilde{y}}, \tilde{\tilde{\varkappa}}) := B_1^{-1}\left(\|\tilde{\tilde{y}} + \operatorname{Div}\tilde{\tilde{\varkappa}}\|_\Omega^2 + B_2^{-1}\|\operatorname{div}\tilde{\tilde{y}} + g\|_\Omega^2\right).$$

Слагаемое $\hat{\mathcal{M}}_3^2$ имеет смысл взвешенной суммы квадратов норм невязок первых двух уравнений системы (3.1) — если положить $\tilde{\tilde{y}} = \gamma$ и $\tilde{\tilde{\varkappa}} = \mathrm{C}\varepsilon(\theta)$, то оно обращается в нуль. При этом сумма двух других слагаемых дает точную оценку погрешности

$$\|e_{\tilde{\theta}}\|^2 + \lambda^{-1}t^2\|e_{\tilde{\gamma}}\|_\Omega^2 = \hat{\mathcal{M}}_1^2(\mathrm{C}\varepsilon(\theta)) + \hat{\mathcal{M}}_2^2(\gamma).$$

Следовательно, построенный вместо функционала $\mathcal{M}^2$ индикатор погрешности $\hat{\mathcal{M}}^2 := \hat{\mathcal{M}}_1^2 + \hat{\mathcal{M}}_2^2$ должен качественно воспроизводить величину погрешности, по крайней мере в случае, когда элементы $(\tilde{\tilde{y}}, \tilde{\tilde{\varkappa}})$ выбраны разумно.

Приведем один численный пример использования описанного выше метода. Рассмотрим случай, когда область Ω содержит характерные для практических задач особенности — входящие углы и отверстие. Данный пример отражает типичную ситуацию, в которой точное решение задачи не обладает повышенной гладкостью. Тогда особенно важно иметь процедуру апостериорного контроля точности приближенных решений, поскольку априорные оценки скорости сходимости не гарантируют какой-либо квалифицированной сходимости, обычно предполагающейся при уменьшении характерного размера сетки.

***Пример* 3.1.** *Пластина полигональной формы с отверстием*

Рассмотрим задачу (3.1) при постоянной нагрузке g с граничными условиями (3.2) в области Ω достаточно общего вида, изображенной на Рисунке 3.1. Для коэффициентов, входящих в постановку задачи, выберем значения, харак-

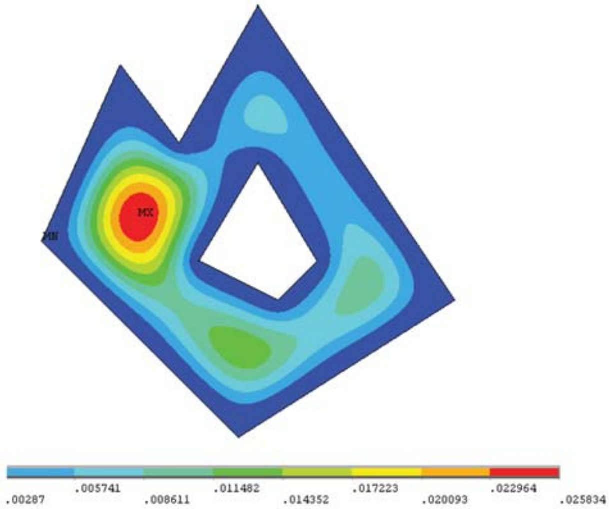


Рисунок 3.1: Геометрия области Ω и приближенные значения прогиба пластины $\tilde{u}$, полученные ANSYS.

терные для стали[6]: $E = 2.1\ \times 10^{11}$ $\mathbf{Н/м}^2$, $\nu = 0.3$, а также стандартную величину корректировочного множителя $k = 5/6$. Рассмотрим пластину толщины $t = 0.01$ **м** при характерном размере области ~ 1 **м**. Таким образом, мы исследуем случай жестко закрепленной пластины, имеющей малую толщину и находящейся под воздействием равномерно распределенной нагрузки.

В Таблице 3.1 приведены результаты вычислений для трех разбиений области Ω конечными элементами, каждое последующее из которых получено путем равномерного дробления предыдущего[7]. Приближенные решения задачи построены при помощи стандартных средств пакета ANSYS. Размерность дискретной задачи примерно втрое превышает число узлов сетки N. Точность

[6] поскольку свойства различных сталей несколько отличаются, взяты «усредненные» характеристики

[7] каждая сторона каждого элемента делится пополам

Таблица 3.1: Характеристики эффективности функционального метода

N	ϵ	$I_{eff}(\hat{\mathcal{M}})$
2265	91.4	1.04
8778	46.3	1.06
34548	23.2	1.22

решений оценена с использованием индикатора $\hat{\mathcal{M}}$, а качество оценок погрешности определяется через индекс эффективности. Из результатов, приведенных в Таблице 3.1, напрашивается вывод, что предлагаемый метод остается надежным, но демонстрирует некоторый рост переоценки истинной величины ошибки с измельчением сетки. Таким образом, при использовании стандартных непрерывных аппроксимаций метода конечных элементов могут возникать проблемы, связанные с эффективностью реализации функционального подхода[8]. Вопрос, однако, требует дополнительного исследования.

3.6. Обобщение метода на другие типы краевых условий

В предыдущих параграфах рассматривались пластины с жесткой заделкой по всей границе области. Перейдем к обсуждению различных граничных условий, таких как, например, свободный край или свободно опертый край. Другим обобщением является отказ от строгого выполнения условия симметрии тензора $\tilde{\tilde{\varkappa}}$. Изложение опирается на вышедшую недавно работу автора [83]. Для классической задачи теории упругости в трехмерной постановке, а также ее плоских аналогов, в частности, задачи о плоской деформации, функциональная апостериорная оценка подобного рода была предложена в монографии S. Repin [64]. Ее численному анализу посвящена следующая глава диссертации.

[8] под реализацией подразумевается реализация контроля ошибки, а под эффективностью — необходимое поведение соответствующего индекса, а именно отсутствие существенного роста в процессе измельчения сеток

Рассмотрим пластину, одна из кромок которой жестко заделана, а остальные свободны. В этом случае система соотношений (3.1) сохраняется. Предположим, что граница области Γ состоит из двух непересекающихся частей — Γ_D и Γ_S, где Γ_D — часть с условием заделки, а условие на Γ_S уточняется далее. Слабая постановка выглядит аналогично (3.3). Меняются только пространства, которым должны принадлежать элементы точного решения

$$\begin{cases} \int\limits_\Omega \mathrm{C}\varepsilon(\theta) : \varepsilon(\varphi)\, d\Omega - \int\limits_\Omega \gamma \cdot \varphi\, d\Omega = 0, & \forall \varphi \in \Theta, \\ \int\limits_\Omega \gamma \cdot \nabla w\, d\Omega = \int\limits_\Omega g w\, d\Omega, & \forall w \in U, \\ \int\limits_\Omega \big(\lambda^{-1} t^2 \gamma - (\nabla u - \theta)\big) \cdot \tau\, d\Omega = 0, & \forall \tau \in Q, \end{cases}$$

где

$$U := \left\{ w \in \mathbb{W}_2^1(\Omega) \mid w = 0 \text{ на } \Gamma_\mathrm{D} \right\},$$
$$\Theta := \left\{ \varphi \in \mathbb{W}_2^1(\Omega, \mathbb{R}^2) \mid \varphi = 0 \text{ на } \Gamma_\mathrm{D} \right\}.$$

Функционал $\mathcal{J}$ также сохраняет представленный в параграфе 3.2 вид. Соответствующая задача минимизации ставится на паре пространств $U \times \Theta$.

Из второго соотношения обобщенной постановки при условии повышенной гладкости решения получаем

$$\int\limits_\Omega \gamma \cdot \nabla w\, d\Omega = -\int\limits_\Omega \operatorname{div} \gamma\; w\, d\Omega + \int\limits_{\Gamma_\mathrm{S}} \gamma \cdot n\; w\, d\Gamma = \int\limits_\Omega g w\, d\Omega.$$

Учитывая уравнение равновесия внутри области и последнее соотношение слабой постановки, которое можно трактовать как равенство двух элементов в пространстве $\mathbb{L}_2(\Omega, \mathbb{R}^2)$

$$\gamma = \lambda t^{-2}(\nabla u - \theta),$$

приходим к естественному граничному условию

$$\partial u / \partial n = \theta \cdot n \quad \text{ на } \Gamma_\mathrm{S}.$$

Второе естественное условие получается аналогично и выглядит следующим образом:

$$\mathrm{C}\varepsilon(\theta)n = 0 \quad \text{на } \Gamma_{\mathrm{S}}.$$

Отметим, что другие варианты существенных и естественных граничных условий приведены, например, в работе D. Arnold, R. Falk [385].

Разделим свободный тензор $\tilde{\tilde{\varkappa}}$ на две составляющие $\tilde{\tilde{\varkappa}} = [\tilde{\tilde{\varkappa}}^1 \;\; \tilde{\tilde{\varkappa}}^2]$, где

$$\tilde{\tilde{\varkappa}}^1, \tilde{\tilde{\varkappa}}^2 \in \mathbb{H}(\Omega, \mathrm{div}).$$

Подробнее такое преобразование рассмотрено в параграфе 4.5, поскольку хронологически первым оно было успешно использовано автором для задачи о плоской деформации в статье [80], далее — в работе [81] и, наконец, для плоских задач теории упругости Коссера (глава 5).

Используя приведенное выше представление, можно записать следующее соотношение, выделив симметрическую и кососимметрическую части тензора:

$$\int\limits_{\Omega} \mathrm{sym}\,(\tilde{\tilde{\varkappa}}) : \varepsilon(\varphi)\, d\Omega + \int\limits_{\Omega} (\mathrm{div}\, \tilde{\tilde{\varkappa}}^1\; \varphi_1 + \mathrm{div}\, \tilde{\tilde{\varkappa}}^2\; \varphi_2)\, d\Omega +$$
$$+ \int\limits_{\Omega} \mathrm{skew}\,(\tilde{\tilde{\varkappa}}) : \nabla\varphi\, d\Omega = \int\limits_{\Gamma_{\mathrm{S}}} (\tilde{\tilde{\varkappa}}^1 \cdot n\; \varphi_1 + \tilde{\tilde{\varkappa}}^2 \cdot n\; \varphi_2)\, d\Gamma.$$

Аналогично выкладкам на с. 145–146, имеем

$$\epsilon^2 = \frac{1}{2} \int\limits_{\Omega} (-\mathrm{C}\varepsilon(\tilde{\theta}) : \varepsilon(e_{\tilde{\theta}}) + g e_{\tilde{u}} - \lambda^{-1} t^2 \tilde{\gamma} \cdot e_{\tilde{\gamma}})\, d\Omega +$$
$$+ \int\limits_{\Omega} \tilde{\tilde{y}} \cdot (\lambda^{-1} t^2 e_{\tilde{\gamma}} + e_{\tilde{\theta}})\, d\Omega + \int\limits_{\Omega} \mathrm{div}\, \tilde{\tilde{y}}\, e_{\tilde{u}}\, d\Omega - \int\limits_{\Gamma_{\mathrm{S}}} \tilde{\tilde{y}} \cdot n\; e_{\tilde{u}}\, d\Gamma =$$
$$= \int\limits_{\Omega} (\mathrm{sym}\,(\tilde{\tilde{\varkappa}}) - \mathrm{C}\varepsilon(\tilde{\theta})) : \varepsilon(e_{\tilde{\theta}})\, d\Omega + \int\limits_{\Omega} (\mathrm{div}\, \tilde{\tilde{y}} + g) e_{\tilde{u}}\, d\Omega +$$
$$+ \int\limits_{\Omega} \lambda^{-1} t^2 (\tilde{\tilde{y}} - \tilde{\gamma}) \cdot e_{\tilde{\gamma}}\, d\Omega + \int\limits_{\Omega} (\tilde{\tilde{y}} + [\mathrm{div}\, \tilde{\tilde{\varkappa}}^1 \;\; \mathrm{div}\, \tilde{\tilde{\varkappa}}^2]) \cdot e_{\tilde{\theta}}\, d\Omega +$$
$$+ \int\limits_{\Omega} \mathrm{skew}\,(\tilde{\tilde{\varkappa}}) : \nabla e_{\tilde{\theta}}\, d\Omega - \int\limits_{\Gamma_{\mathrm{S}}} [\tilde{\tilde{\varkappa}}^1 \cdot n \;\; \tilde{\tilde{\varkappa}}^2 \cdot n] \cdot e_{\tilde{\theta}}\, d\Gamma - \int\limits_{\Gamma_{\mathrm{S}}} \tilde{\tilde{y}} \cdot n\; e_{\tilde{u}}\, d\Gamma.$$

Таким образом,

$$\begin{aligned}
\| e_{\tilde\theta} \|^2 + \lambda^{-1} t^2 \| e_{\tilde\gamma} \|^2_\Omega \le \| \mathrm{skew}\,(\tilde{\tilde{\varkappa}}) \|_\Omega \ \| \nabla e_{\tilde\theta} \|_\Omega + \\
+ \| \mathrm{C}^{-1}\,\mathrm{sym}\,(\tilde{\tilde{\varkappa}}) - \varepsilon(\tilde\theta) \| \ \| e_{\tilde\theta} \| \ + \ \lambda^{-1} t^2 \| \tilde{\tilde{y}} - \tilde\gamma \|_\Omega \ \| e_{\tilde\gamma} \|_\Omega + \\
+ \sqrt{|\Omega|}\ \| g + \mathrm{div}\,\tilde{\tilde{y}} \|_\Omega \ \frac{1}{\sqrt{|\Omega|}}\ \| e_{\tilde u} \|_\Omega + \\
+ \sqrt{|\Gamma_\mathrm{S}|}\ \| \tilde{\tilde{y}} \cdot n \|_{\Gamma_\mathrm{S}} \ \frac{1}{\sqrt{|\Gamma_\mathrm{S}|}} \| e_{\tilde u} \|_{\Gamma_\mathrm{S}} + \\
+ \sqrt{|\Omega|}\ \| \tilde{\tilde{y}} + [\mathrm{div}\,\tilde{\tilde{\varkappa}}^1 \ \ \mathrm{div}\,\tilde{\tilde{\varkappa}}^2] \|_\Omega \ \frac{1}{\sqrt{|\Omega|}}\ \| e_{\tilde\theta} \|_\Omega + \\
+ \sqrt{|\Gamma_\mathrm{S}|}\ \| [\tilde{\tilde{\varkappa}}^1 \cdot n \ \ \tilde{\tilde{\varkappa}}^2 \cdot n] \|_{\Gamma_\mathrm{S}} \ \frac{1}{\sqrt{|\Gamma_\mathrm{S}|}}\ \| e_{\tilde\theta} \|_{\Gamma_\mathrm{S}}.
\end{aligned}$$

Используем неравенства

$$\frac{1}{|\Omega|} \| w \|^2_\Omega + \frac{1}{|\Gamma_\mathrm{S}|} \| w \|^2_{\Gamma_\mathrm{S}} \le \mathfrak{c}^2_{III} \| \nabla w \|^2_\Omega,$$

$$\frac{1}{|\Omega|} \| \varphi \|^2_\Omega + \frac{1}{|\Gamma_\mathrm{S}|} \| \varphi \|^2_{\Gamma_\mathrm{S}} \le \mathfrak{c}^2_{IV} \| \varphi \|^2$$

и неравенство типа неравенства Корна[9]

$$\| \nabla e_{\tilde\theta} \|^2_\Omega \le \mathfrak{c}^2_K \| e_{\tilde\theta} \|^2.$$

Тогда правая часть оценки погрешности мажорируется выражением

$$\begin{aligned}
\lambda^{-1} t^2 \ \| \tilde{\tilde{y}} - \tilde\gamma \|_\Omega \ \| e_{\tilde\gamma} \|_\Omega + (\mathfrak{c}_K \| \mathrm{skew}\,(\tilde{\tilde{\varkappa}}) \|_\Omega + \| \mathrm{C}^{-1}\,\mathrm{sym}\,(\tilde{\tilde{\varkappa}}) - \varepsilon(\tilde\theta) \|) \ \| e_{\tilde\theta} \| + \\
+ \sqrt{|\Omega| \ \ \| \tilde{\tilde{y}} + [\mathrm{div}\,\tilde{\tilde{\varkappa}}^1 \ \ \mathrm{div}\,\tilde{\tilde{\varkappa}}^2] \|^2_\Omega \ + \ |\Gamma_\mathrm{S}| \ \ \| [\tilde{\tilde{\varkappa}}^1 \cdot n \ \ \tilde{\tilde{\varkappa}}^2 \cdot n] \|^2_{\Gamma_\mathrm{S}}} \ \ \mathfrak{c}_{IV} \| e_{\tilde\theta} \| + \\
+ \sqrt{|\Omega| \ \ \| g + \mathrm{div}\,\tilde{\tilde{y}} \|^2_\Omega \ + \ |\Gamma_\mathrm{S}| \ \ \| \tilde{\tilde{y}} \cdot n \|^2_{\Gamma_\mathrm{S}}} \ \ \mathfrak{c}_{III} (\mathfrak{c}_{II} \| e_{\tilde\theta} \| + \lambda^{-1} t^2 \| e_{\tilde\gamma} \|_\Omega),
\end{aligned}$$

полученным с помощью (3.15) и неравенства Коши–Шварца. Группируя слагаемые с одинаковыми компонентами погрешности, получаем оценку, аналогичную (3.16).

[9] подробный обзор аналогичных результатов и их роли в механике сплошных сред приведен, например, в работе C.O. Horgan [386]

Теорема 3.1. *Для произвольного приближенного решения* $(\tilde{u}, \tilde{\theta}) \in U \times \Theta$ *задачи об изгибе пластины Рейсснера–Миндлина справедлива следующая апостериорная оценка:*

$$\| e_{\tilde{\theta}} \|^2 + \lambda^{-1} t^2 \| e_{\tilde{\gamma}} \|_\Omega^2 \leq \hat{a}^2 + \lambda^{-1} t^2 \hat{b}^2,$$

где

$$\begin{aligned} \hat{a} := \| \mathrm{C}^{-1} \operatorname{sym}(\tilde{\tilde{\varkappa}}) - \varepsilon(\tilde{\theta}) \| + \mathfrak{c}_K \| \operatorname{skew}(\tilde{\tilde{\varkappa}}) \|_\Omega + \\ + \mathfrak{c}_{IV} \sqrt{|\Omega| \ \| \tilde{\tilde{y}} + [\operatorname{div} \tilde{\tilde{\varkappa}}^1 \ \operatorname{div} \tilde{\tilde{\varkappa}}^2] \|_\Omega^2 \ + \ |\Gamma_{\mathrm{S}}| \ \| [\tilde{\tilde{\varkappa}}^1 \cdot n \ \ \tilde{\tilde{\varkappa}}^2 \cdot n] \|_{\Gamma_{\mathrm{S}}}^2} + \\ + \mathfrak{c}_{II} \mathfrak{c}_{III} \sqrt{|\Omega| \ \| g + \operatorname{div} \tilde{\tilde{y}} \|_\Omega^2 \ + \ |\Gamma_{\mathrm{S}}| \ \| \tilde{\tilde{y}} \cdot n \|_{\Gamma_{\mathrm{S}}}^2}, \end{aligned}$$

$$\hat{b} := \| \tilde{\tilde{y}} - \tilde{\gamma} \|_\Omega + \mathfrak{c}_{III} \sqrt{|\Omega| \ \| g + \operatorname{div} \tilde{\tilde{y}} \|_\Omega^2 \ + \ |\Gamma_{\mathrm{S}}| \ \| \tilde{\tilde{y}} \cdot n \|_{\Gamma_{\mathrm{S}}}^2}.$$

Приведенные ранее преобразования, основанные на строгих методах функционального анализа и известных неравенствах, фактически, обеспечивают строгость доказательства утверждения. Такая апостериорная оценка точна, поскольку для $\tilde{\tilde{y}} = \gamma$ и $\tilde{\tilde{\varkappa}} = \mathrm{C}\varepsilon(\theta)$ правая часть неравенства совпадает с левой, и также является гарантированной — при практическом применении неравенство не может нарушаться. Основные ее отличия от результатов, полученных ранее в главе, заключаются в учете различных граничных условий, ослаблении ограничений на класс допустимых свободных элементов и удобном с практической точки зрения единообразии типов аппроксимаций, которые могут быть использованы для построения этих элементов, чего также не было в предыдущих оценках.

Те граничные условия, которые были естественными в исходной постановке, при оценке погрешности становятся существенными, что аналогично ситуации, наблюдаемой в двойственных смешанных методах конечных элементов (см., например, F. Brezzi, M. Fortin [14]). Если удовлетворить условиям точно, например при помощи аппроксимаций, подробно описанных в следующей главе, то граничные интегралы можно исключить из апостериорной оценки. При этом мажоранта существенно упрощается и с точностью до одного дополнительного слагаемого, возникающего в качестве штрафа за нарушение симметрии тензора

$\tilde{\tilde{\varkappa}}$, совпадает с приведенной в параграфе 3.4. В этом случае интегралы по части границы Γ_{S} можно также исключить из определения констант $\mathfrak{c}_{III}$ и $\mathfrak{c}_{IV}$, что уменьшит их значение.

На самом деле можно рассматривать полученный ранее результат не как одну оценку, а как целый класс функциональных апостериорных оценок, поскольку он допускает различные модификации в зависимости от граничных условий, подходит для разных типов условий и их комбинаций, а также позволяет привлекать при реализации любые методы конечных элементов, обеспечивающие конформность аппроксимации в гильбертовом пространстве $\mathbb{H}(\Omega, \mathrm{div})$. Например, если край пластины не свободен, а находится на опоре, то вместо естественного условия

$$\partial u / \partial n = \theta \cdot n \quad \text{на } \Gamma_{\mathrm{S}}$$

на этой части границы возникает существенное условие

$$u = 0 \quad \text{на } \Gamma_{\mathrm{S}}.$$

Его необходимо учитывать при вычислении константы $\mathfrak{c}_{III}$. Оно также приводит к обращению в нуль интеграла $\int\limits_{\Gamma_{\mathrm{S}}} \tilde{\tilde{y}} \cdot n \, e_{\tilde{u}} \, d\Gamma$ и исчезновению соответствующего слагаемого из мажоранты.

Вводя дополнительные положительные параметры, как в параграфе 3.5, квадрат мажоранты можно представить в виде квадратичного функционала, что может быть более удобно при практическом применении, поскольку задача минимизации такого функционала при фиксированных значениях параметров сводится к решению системы линейных алгебраических уравнений с разреженной матрицей. Однако вопрос реализации данной апостериорной оценки и проверки ее эффективности посредством численного эксперимента остается открытым.

3.7. Надежный контроль точности для задачи об изгибе прямолинейных балок Тимошенко

Модель Тимошенко является одним из известных обобщений классической модели Бернулли–Эйлера. В определенном смысле эта задача близка к той, что рассматривалась ранее в главе. Как и в случае пластин, сначала приведем классическую постановку задачи:
найти пару элементов (u, θ), удовлетворяющую на интервале $I := [0, l]$ системе уравнений

$$\begin{cases} (C_S(u' - \theta))' + f = 0, \\ \\ (C_B\theta')' + C_S(u' - \theta) = 0, \end{cases}$$

где штрих означает дифференцирование по единственной пространственной координате x, l — длина балки, $u = u(x)$ — прогиб балки, $\theta = \theta(x)$ — поворот поперечного сечения, $f = f(x)$ — распределенная поперечная нагрузка, $C_B = C_B(x)$ и $C_S = C_S(x)$ — изгибная и сдвиговая жесткость, соответственно. Жесткости определяются по формулам

$$C_B = EI_{sec}, \quad C_S = kGA,$$

где E — модуль Юнга, I_{sec} — момент инерции сечения,

$$G = \frac{E}{2(1+\nu)}$$

— модуль сдвига, ν — коэффициент Пуассона, A — площадь поперечного сечения, а k — корректировочный коэффициент.

Для упрощения выкладок предполагается, что материал балки изотропен и поперечное сечение не меняется. Следовательно, C_B и C_S постоянны и систему можно переписать в следующем виде:

$$\begin{cases} \gamma' + g = 0, \\ \theta'' + \gamma = 0, \end{cases}$$

где

$$\begin{cases} g = C_B^{-1} f, \\ \gamma = d^{-2}(u' - \theta), \\ d^2 = C_B / C_S. \end{cases}$$

Мы также предполагаем, что балка жестко заделана на концах, то есть

$$u(0) = u(l) = 0,$$
$$\theta(0) = \theta(l) = 0.$$

Тогда слабая (обобщенная) формулировка задачи следующая:
найти тройку функций $(u, \theta, \gamma) \in U_0 \times \Theta_0 \times Q$ таких, что

$$\begin{cases} \int\limits_I \theta' \varphi' \, dx - \int\limits_I \gamma \varphi \, dx = 0, & \forall \varphi \in \Theta_0, \\ \int\limits_I \gamma w' \, dx = \int\limits_I g w \, dx, & \forall w \in U_0, \\ \int\limits_I \big(d^2 \gamma - (u' - \theta)\big) \tau \, dx = 0, & \forall \tau \in Q, \end{cases} \tag{3.18}$$

где $U_0 := \overset{\circ}{\mathbb{W}}{}_2^1(I)$, $\Theta_0 := \overset{\circ}{\mathbb{W}}{}_2^1(I)$ и $Q := \mathbb{L}_2(I)$, а $g \in \mathbb{L}_2(I)$.

Рассмотрим произвольную пару элементов $(\tilde{u}, \tilde{\theta})$, которая обеспечивает конформную аппроксимацию пары (u, θ) в $U_0 \times \Theta_0$. Тогда поле $\tilde{\gamma} := d^{-2}(\tilde{u}' - \tilde{\theta})$ аппроксимирует элемент γ в Q. Вводя соответствующие отклонения от точных значений

$$e_{\tilde{u}} := u - \tilde{u}, \qquad e_{\tilde{\theta}} := \theta - \tilde{\theta}, \qquad e_{\tilde{\gamma}} := \gamma - \tilde{\gamma},$$

рассмотрим следующую норму погрешности:

$$\epsilon := \left(\|e'_{\tilde{\theta}}\|_I^2 + d^2 \|e_{\tilde{\gamma}}\|_I^2 \right)^{1/2}.$$

Дальнейшие построения основаны на прямой модификации слабой постановки задачи (3.18) при помощи нескольких дополнительных слагаемых, возникающих в обеих частях соотношений

$$\begin{cases} \int\limits_I e'_{\tilde\theta}\varphi'\,dx = \int\limits_I (\gamma\varphi - \tilde\theta'\varphi')\,dx, & \forall\varphi\in U_0,\\ \int\limits_I d^2 e_{\tilde\gamma}\tau\,dx = \int\limits_I (u'-\theta-d^2\tilde\gamma)\tau\,dx, & \forall\tau\in Q; \end{cases}$$

$$\begin{cases} \|e'_{\tilde\theta}\|_I^2 = \int\limits_I (\gamma e_{\tilde\theta} - \tilde\theta' e'_{\tilde\theta})\,dx,\\ d^2\|e_{\tilde\gamma}\|_I^2 = \int\limits_I (u'-\theta-d^2\tilde\gamma)e_{\tilde\gamma}\,dx. \end{cases}$$

В результате преобразования приходим к следующему выражению:

$$\epsilon^2 = \int\limits_I (\gamma e_{\tilde\theta} - \tilde\theta' e'_{\tilde\theta})\,dx + \int\limits_I (u'-\theta-d^2\tilde\gamma)e_{\tilde\gamma}\,dx.$$

Тогда соотношение

$$\int\limits_I (u'-\theta)\tilde\gamma\,dx = \int\limits_I (\tilde u'-\tilde\theta)\gamma\,dx$$

влечет за собой

$$\int\limits_I (\gamma e_{\tilde\theta} + (u'-\theta)e_{\tilde\gamma})\,dx = \int\limits_I \gamma(\theta-\tilde\theta+u'-\theta-\tilde u'+\tilde\theta)\,dx = \int\limits_I g e_{\tilde u}\,dx,$$

и в итоге получается другое представление ошибки

$$\epsilon^2 = \int\limits_I (g e_{\tilde u} - \tilde\theta' e'_{\tilde\theta} - d^2\tilde\gamma)e_{\tilde\gamma}\,dx.$$

Для того, чтобы построить функциональную оценку погрешности, вводится пара дополнительных переменных, которые являются произвольными элементами $\tilde{\tilde y}$ и $\tilde{\tilde\varkappa}$ пространства Соболева $\mathbb{W}_2^1(I)$. Формулы интегрирования по частям

$$\int\limits_I \tilde{\tilde y} e'_{\tilde u}\,dx + \int\limits_I \tilde{\tilde y}' e_{\tilde u}\,dx = 0, \quad \int\limits_I \tilde{\tilde\varkappa} e'_{\tilde\theta}\,dx + \int\limits_I \tilde{\tilde\varkappa}' e_{\tilde\theta}\,dx = 0$$

для этих элементов дают соотношение

$$\epsilon^2 = \int\limits_I \left((g+\tilde{\tilde y}')e_{\tilde u} - d^2\tilde\gamma e_{\tilde\gamma} + \tilde{\tilde y} e'_{\tilde u}\right)\,dx - \int\limits_I \Big((\tilde{\tilde\varkappa}-\tilde\theta')e'_{\tilde\theta} + \tilde{\tilde\varkappa}' e_{\tilde\theta}\Big)\,dx.$$

Тогда, используя равенство

$$e'_{\tilde{u}} = d^2 e_{\tilde{\gamma}} + e_{\tilde{\theta}},$$

получаем

$$\epsilon^2 = \int\limits_I \left((g + \tilde{\tilde{y}}') e_{\tilde{u}} + d^2 (\tilde{\tilde{y}} - \tilde{\gamma}) e_{\tilde{\gamma}} \right) dx + \int\limits_I \left((\tilde{\tilde{\varkappa}}' + \tilde{\tilde{y}}) e_{\tilde{\theta}} + (\tilde{\tilde{\varkappa}} - \tilde{\theta}') e'_{\tilde{\theta}} \right) dx.$$

Применяя известные неравенства

$$\begin{aligned} \|e_{\tilde{\theta}}\|_I &\leq \mathfrak{c}_I \|e'_{\tilde{\theta}}\|_I, \\ \|e'_{\tilde{u}}\|_I &\leq d^2 \|e_{\tilde{\gamma}}\|_I + \|e_{\tilde{\theta}}\|_I, \end{aligned}$$

приходим к апостериорной оценке функционального типа с произвольными элементами $\tilde{\tilde{y}}$ и $\tilde{\tilde{\varkappa}}$.

Теорема 3.2. *Точность любого конформного приближенного решения задачи об изгибе балки Тимошенко в случае жесткой заделки на концах может быть оценена при помощи следующего неравенства:*

$$\epsilon^2 = \|e'_{\tilde{\theta}}\|_I^2 + d^2 \|e_{\tilde{\gamma}}\|_I^2 \leq \mathcal{M}^2 := \mathcal{M}_1^2 + \mathcal{M}_2^2, \tag{3.19}$$

где

$$\mathcal{M}_1(\tilde{\tilde{y}}, \tilde{\tilde{\varkappa}}) := \|\tilde{\tilde{\varkappa}} - \tilde{\theta}'\|_I + \mathfrak{c}_I \|\tilde{\tilde{\varkappa}}' + \tilde{\tilde{y}}\|_I + \mathfrak{c}_I^2 \|g + \tilde{\tilde{y}}'\|_I$$

и

$$\mathcal{M}_2(\tilde{\tilde{y}}) := d^2 (\|\tilde{\tilde{y}} - \tilde{\gamma}\|_I + \mathfrak{c}_I \|g + \tilde{\tilde{y}}'\|_I).$$

Эта оценка является надежной, поскольку всегда обеспечивает верхнюю границу погрешности, и является точной, поскольку для $\tilde{\tilde{y}} = \gamma$ и $\tilde{\tilde{\varkappa}} = \theta'$ достигается равенство

$$\mathcal{M} = \epsilon.$$

Следовательно, для любого типа конформных приближенных решений, оценка может быть получена с любой наперед заданной точностью — это только вопрос вычислительных затрат.

3.8. Численные результаты для балок Тимошенко

До 2009–2010 гг. функциональный подход практически не тестировался численно в применении к тому коммерческому программному обеспечению для решения инженерных задач, которое отличается полностью закрытым кодом. Исключение составило применение пакета MATLAB для задачи диффузии, но в нем код в большей степени открыт (см., например, M. Frolov, P. Neittaanmäki, S. Repin [185]). Подобного рода исследования для пакета ANSYS были начаты с задачи о пластине Рейсснера–Миндлина, но носили там предварительный, незавершенный характер. Полноценный анализ был впервые проведен именно для задачи об изгибе балки Тимошенко — результаты опубликованы автором в [257] и в существенно расширенном варианте в [224].

Алгоритм постановки вычислительного эксперимента выглядит следующим образом:

- В пакете ANSYS при помощи BEAM188-элементов приближенно решается задача об изгибе балки.

- Все необходимые исходные данные и результаты расчета выгружаются для верификации во внешний модуль, который вычисляет апостериорную оценку. Этот программный модуль реализован при помощи современной версии языка FORTRAN стандарта 2003/2008.

Рассматриваются балки как малой, так и средней толщины с различными сечениями и при разном нагружении.

Отметим, что программа обеспечивает вычисление оценки погрешности, стоящей в правой части неравенства (3.19). Квадрат нормы погрешности, стоящий в левой части, вычисляется явно в том случае, когда точное аналитическое решение известно, или оценивается снизу при помощи подстановки эталонного решения. Такая процедура может незначительно недооценивать истинную величину ошибки. Как следствие, может несколько преуменьшаться эффективность предлагаемого метода. Однако в случае достаточно точного эталонного решения эта недооценка незначительна.

Идея создания специальных средств внешней проверки коммерческих пакетов не является новой (см., например, M. Garbey, C. Picard [387]). Но, из-за упомянутых во введении и первой главе особенностей, стандартные методы плохо согласуются с программным обеспечением для инженерных расчетов, если оно разработано другим коллективом и детали реализации скрыты. Конечно, вычисление мажорант, полученных в рамках функционального подхода, требует определенных усилий на стадии реализации. Тем не менее, как показано далее, соответствующий функционал обеспечивает достаточно точные и надежные оценки погрешности даже без полной информации о внутренних вычислительных процедурах, использованных в пакете для получения приближенного решения. В этом случае данное достоинство функционального подхода становится не просто важным, а решающим.

Рассмотрим несколько примеров. Первый относится к случаю, когда модель Тимошенко и модель Бернулли–Эйлера должны давать очень близкие результаты, а остальные — к противоположному. Стандартный параметр, который в инженерных пакетах используется для определения степени близости двух моделей — это коэффициент относительной толщины[10], вычисляемый по формуле

$$S_R := \frac{GAl^2}{EI_{sec}}.$$

Если значение этого коэффициента достаточно велико (тысячи), модели считаются идентичными.

***Пример* 3.2.** *Балка с параметром* $S_R > 10000$

В первом примере рассмотрим балку квадратного сечения сравнительно малого размера — длина равна 1.0 при стороне поперечного сечения, равной

[10] slenderness ratio

0.02. Единицы измерения стандартные, не имеют решающего значения при постановке вычислительного эксперимента в данном случае и далее в параграфе нигде не указываются. Рассматривается следующая задача:

$$u'''' = g,$$
$$u(0) = u(1) = 0,$$
$$u'(0) = u'(1) = 0,$$

где $g = 3.84$. В этом случае известно простое аналитическое решение

$$u = 0.16\, x^2\, (1 - x)^2,$$

и максимум прогиба составляет 0.01, что соответствует предположению о его малости.

Приближенное решение, вычисленное ANSYS на сетке, состоящей из 100 элементов, изображено на Рисунке 3.2. При выводе поля для наглядности используется множитель, равный 5.0. В таблицах через N_{el} обозначено число элементов сетки. Знание точного решения позволяет оценить качество индикации локального распределения погрешности при помощи любого метода путем сравнения с истинным распределением погрешности на интервале. И то, и другое представлены на Рисунке 3.3, где величины интегралов, вычисленных по элементам, нормированы на максимальное значение локального вклада для мажоранты. Из результатов, собранных в Таблице 3.2, можно сделать вывод, что

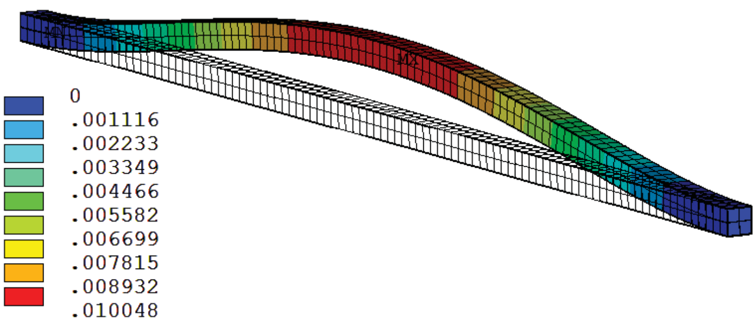


Рисунок 3.2: Приближенное решение для примера 3.2.

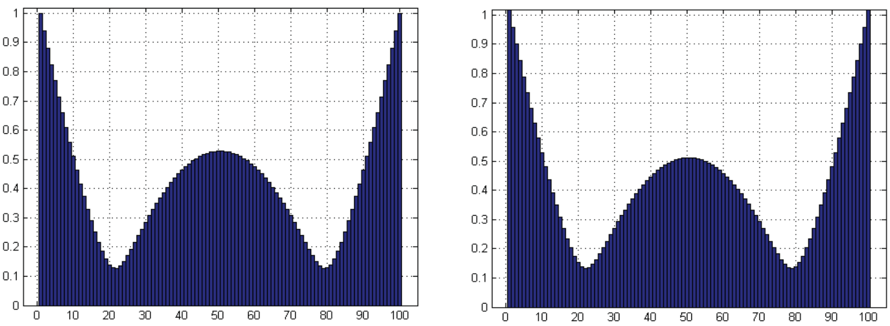


Рисунок 3.3: Истинное распределение погрешности относительно элементов сетки (справа) и индикация погрешности при помощи мажоранты (слева) для примера 3.2.

Таблица 3.2: Качество оценки погрешности на последовательности вложенных разбиений в примере 3.2

N_{el}	ϵ	$\mathcal{M}$	I_{eff}
100	$4.01\ \times 10^{-2}$	$4.06\ \times 10^{-2}$	1.01
200	$2.01\ \times 10^{-2}$	$2.03\ \times 10^{-2}$	1.01
400	$1.01\ \times 10^{-2}$	$1.01\ \times 10^{-2}$	1.01
800	$0.50\ \times 10^{-2}$	$0.50\ \times 10^{-2}$	1.02

эффективность метода остается стабильной в процессе последовательного измельчения сетки[11]. Отношение мажоранты $\mathcal{M}$ к истинному значению ошибки ϵ очень близко к единице, при этом, в полном соответствии с теорией, всегда остается больше. Отметим, что приближенное решение на последней сетке, состоящей из 800 элементов, имеет точность 96.5 %, и функциональная мажоранта указывает на такой же низкий уровень погрешности.

***Пример* 3.3.** *Балка с параметром* S_R *около* 600

Во втором примере рассматривается балка круглого сечения средней толщины — ее длина равна 1, а диаметр поперечного сечения равен 0.1. Для этого

[11] при сопоставлении данных таблицы следует учитывать незначительное влияние округления

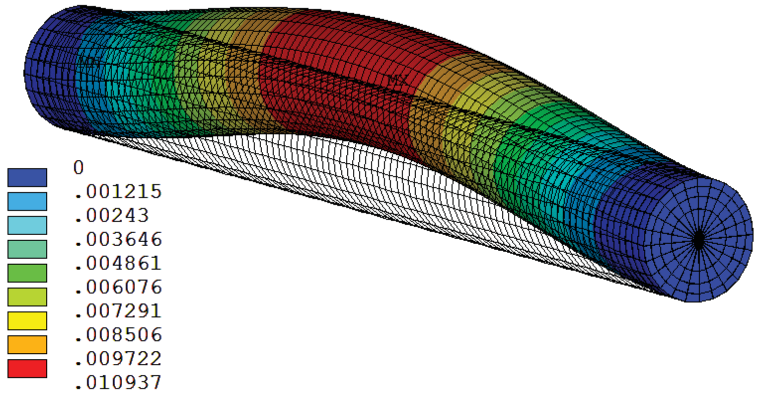


Рисунок 3.4: Приближенное решение для примера 3.3.

Таблица 3.3: Качество оценки погрешности на последовательности вложенных разбиений в примере 3.3

N_{el}	ϵ	$\mathcal{M}$	I_{eff}
100	0.99×10^{-2}	1.15×10^{-2}	1.17
200	0.49×10^{-2}	0.58×10^{-2}	1.17
400	0.25×10^{-2}	0.29×10^{-2}	1.17
800	0.12×10^{-2}	0.14×10^{-2}	1.18

случая точное решение неизвестно, поэтому вместо него используется эталонное решение, полученное на мелкой сетке. Приближенное решение на сетке в 100 элементов изображено на Рисунке 3.4, а результаты собраны в Таблице 3.3. Из них видно, что эффективность метода достаточно высока и сохраняется постоянной. Например, решение на сетке в 800 элементов имеет относительную точность 99.2%. В это же время точность, которую показывает мажоранта, составляет 99.0%. Следовательно, применение функционального подхода приводит к крайне незначительной переоценке истинной величины погрешности, что не влечет необходимости избыточного расчета приближенных решений.

***Пример* 3.4.** *Балка под действием нагружения переменного направления*

В последнем примере рассматривается балка из примера 3.2, но в случае неравномерного нагружения, которое вместе с приближенным решением изоб-

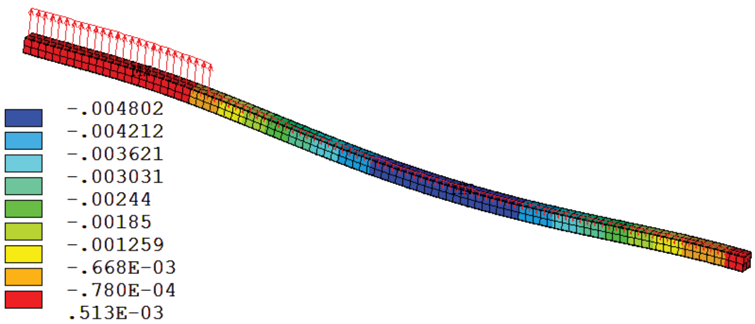


Рисунок 3.5: Нагружение и приближенное решение для примера 3.4.

Таблица 3.4: Качество оценки погрешности на последовательности вложенных разбиений в примере 3.4

N_{el}	ϵ	$\mathcal{M}$	I_{eff}
100	2.69×10^{-2}	2.98×10^{-2}	1.11
200	1.35×10^{-2}	1.48×10^{-2}	1.10
400	0.67×10^{-2}	0.74×10^{-2}	1.10
800	0.33×10^{-2}	0.37×10^{-2}	1.11

ражено на Рисунке 3.5. Первая четверть нагружена в положительном направлении — ей соответствует $g = 19.2$. Более длинная часть нагружена в отрицательном направлении, но сама нагрузка в пять раз меньше ($g = -3.84$).

Соответствующие численные результаты представлены в Таблице 3.4. Они показывают, что мажоранта $\mathcal{M}$ обеспечивает точный контроль глобальной величины погрешности в энергетической норме. Решение на последней сетке из 800 элементов имеет точность около 96.5%, тогда как точность приближенного решения согласно апостериорной оценке составляет около 96.1%. Из представленных результатов можно сделать вывод, что функциональный подход обеспечивает надежный контроль погрешности. Он также позволяет получить дополнительную индикацию возможных проблем со сходимостью алгоритма численного решения исходной задачи.

3.9. Функциональные апостериорные оценки ошибки для балок Бернулли–Эйлера

В дополнение к предыдущему параграфу рассмотрим классическую постановку задачи об изгибе балки Бернулли–Эйлера. Она заключается в нахождении такой функции u, которая удовлетворяет дифференциальному уравнению четвертого порядка

$$(EI_{sec}(x)u''(x))'' = f(x), \quad x \in I. \tag{3.20}$$

Предположим, что балка сделана из изотропного материала, то есть E — константа, а поперечное сечение может быть как постоянным, так и переменным. Ограничим круг рассматриваемых задач случаем, когда $f \in \mathbb{L}_2(I)$, а балка заделана на концах. Последнее требование не является принципиальным и введено с целью упрощения выкладок. Соответствующая слабая постановка получается умножением уравнения (3.20) на пробную функцию и интегрированием по частям. Так мы приходим к соотношению

$$\int\limits_I EI_{sec}u''w''dx = \int\limits_I fwdx, \quad \forall w \in U_0, \tag{3.21}$$

где $U_0 := \left\{ w \in \mathbb{W}_2^2(I) \mid w(0) = w(l) = w'(0) = w'(l) = 0 \right\}$.

Предположим, что тем или иным способом получена аппроксимация $\tilde{u}$ точного решения задачи u, принадлежащая пространству U_0 — это единственное ограничение. Более того, даже если решение построено неконформными методами, то можно рассмотреть какой-либо из способов проецирования этого элемента на пространство U_0 и контролировать уже точность получившегося элемента. Такой подход реализован, в частности, в работе R. Lazarov, S. Repin, S. Tomar [237], где обсуждаются функциональные апостериорные оценки точности аппроксимаций, полученных при помощи разрывного метода Галеркина.

Обозначим через $e := u - \tilde{u}$ погрешность приближенного решения. Поскольку рассматривается единственное скалярное поле, то нет причины усложнять систему обозначений, как это сделано в предыдущем параграфе. Преобразуя соотношение (3.21), получаем

$$\int\limits_I EI_{sec} e'' w'' dx = \int\limits_I (fw - EI_{sec}\tilde{u}'' w'') dx, \quad \forall w \in U_0. \tag{3.22}$$

Для того чтобы построить вычисляемую оценку погрешности, качеством которой можно было бы управлять, введем в интегральное тождество свободный элемент $\tilde{\tilde{\mu}} \in \mathbb{W}_2^2(I)$, для которого справедлива формула

$$\int\limits_I \tilde{\tilde{\mu}}'' w dx = \int\limits_I \tilde{\tilde{\mu}} w'' dx, \quad \forall w \in U_0.$$

Используя ее в (3.22), приходим к соотношению

$$\int\limits_I EI_{sec} e'' w'' dx = \int\limits_I (f - \tilde{\tilde{\mu}}'') w dx + \int\limits_I (\tilde{\tilde{\mu}} - EI_{sec}\tilde{u}'') w'' dx. \tag{3.23}$$

Выберем в качестве глобальной величины ϵ, контролирующей погрешность, энергетическую норму отклонения приближенного решения от точного решения. Полагая $w = e$ в соотношении (3.23), применяя неравенство Коши–Шварца, имеем оценку

$$\|\sqrt{EI_{sec}} e''\|_I^2 \leq \|f - \tilde{\tilde{\mu}}''\|_I \;\; \|e\|_I + \|(\tilde{\tilde{\mu}} - EI_{sec}\tilde{u}'')/\sqrt{EI_{sec}}\|_I \;\; \|\sqrt{EI_{sec}} e''\|_I,$$

в которой используется стандартная норма в пространстве $\mathbb{L}_2(I)$. Оценим $\|e\|_I$ сверху при помощи следующего неравенства:

$$\frac{\|e\|_I}{\|\sqrt{EI_{sec}} e''\|_I} \leq \mathfrak{c} := \lambda^{-1/2}, \tag{3.24}$$

$$\lambda := \inf_{w \in U_0, w \neq 0} \frac{\|\sqrt{EI_{sec}} w''\|_I^2}{\|w\|_I^2},$$

где константа $\mathfrak{c}$ никак не связана с конкретным видом правой части уравнения и является общей для данного типа граничных условий. На практике ее допускается достаточно грубо оценить сверху, что является преимуществом, поскольку получение точных верхних оценок таких постоянных может оказаться нетривиальной задачей. Используя (3.24), приходим к неравенству

$$\epsilon \leq \|(\tilde{\tilde{\mu}} - EI_{sec}\tilde{u}'')/\sqrt{EI_{sec}}\|_I + \mathfrak{c}\|f - \tilde{\tilde{\mu}}''\|_I. \tag{3.25}$$

Правая часть оценки не содержит точного решения задачи, а только приближенное решение $\tilde{u}$. Апостериорная оценка точна при следующем выборе свободной переменной:

$$\tilde{\tilde{\mu}} = EI_{sec}u''.$$

Метод, помимо непосредственного контроля погрешности, дает дополнительное преимущество, поскольку переменная $\tilde{\tilde{\mu}}$ представляет собой независимую от $EI_{sec}\tilde{u}''$ аппроксимацию изгибающего момента. С ее помощью можно также получить более точную аппроксимацию перерезывающей силы.

С практической точки зрения удобно иметь квадратичную структуру функционала в правой части

$$\epsilon^2 \leq \mathcal{M}^2(\tilde{u}, \beta, \tilde{\tilde{\mu}}), \tag{3.26}$$

где $\beta > 0$ — произвольный параметр,

$$\mathcal{M}^2(\tilde{u}, \beta, \tilde{\tilde{\mu}}) := (1+\beta)\|(\tilde{\tilde{\mu}} - EI_{sec}\tilde{u}'')/\sqrt{EI_{sec}}\|_I^2 + \mathfrak{c}^2(1+\beta^{-1})\|f - \tilde{\tilde{\mu}}''\|_I^2.$$

Правая часть такой оценки представляет собой сумму локальных вкладов на каждом элементе. Эти вклады могут служить индикаторами распределения погрешности по расчетной области, указывая на элементы с большой погрешностью. Тогда существует ряд известных процедур отбора элементов для измельчения разбиения, то есть адаптивного сгущения сетки. Наиболее простой способ — найти максимальный локальный индикатор среди всех элементов и разбить те из них, значения индикаторов для которых превышают половину максимального значения (см., например, монографию R. Verfürth [58]).

При реализации (3.26), как один из возможных вариантов, целесообразен выбор последовательности конечномерных подпространств $\{W_i\}_{i=1}^{\infty}$ пространства $\mathbb{W}_2^2(I)$, обладающей свойством предельной плотности в нем. Далее вычисления можно проводить по следующему алгоритму:

$$\beta_0 = 1;$$
$$i = 1, 2, 3, ...;$$
$$\tilde{\tilde{\mu}}_i := \arg \inf_{\tilde{\tilde{\mu}} \in W_i} \mathcal{M}^2(\tilde{u}, \beta_{i-1}, \tilde{\tilde{\mu}});$$
$$\beta_i = \mathfrak{c} \; \frac{\|f - \tilde{\tilde{\mu}}_i''\|_I}{\|(\tilde{\tilde{\mu}}_i - EI_{sec}\tilde{u}'')/\sqrt{EI_{sec}}\|_I}.$$

Отметим, что материал параграфа основан на результатах работы автора [250]. Некоторые другие типы граничных условий обсуждаются в монографии O. Mali, P. Neittaanmäki, S. Repin [66]. В ней показано, что вид оценки сохраняется при условии, что свободный элемент точно удовлетворяет естественным граничным условиям.

Изложенный ранее способ построения аналогов оценки (3.26), которые включают две независимые переменные, может быть применен и в случае задачи об изгибе балок Бернулли–Эйлера, что позволяет ввести независимые аппроксимации, соответствующие силам и моментам.

3.10. Бигармоническая задача

В заключение главы кратко остановимся на известных результатах, касающихся классической задачи математической физики — бигармонической задачи — также имеющей отношение к теории тонких пластин. Подходы к получению приближенных решений краевых задач такого типа в рамках смешанных и классических методов конечных элементов хорошо изучены — можно упомянуть, например, R. Falk [388], R. Glowinski, O. Pironneau [389], Ф. Сьярле [1], C. Johnson, J. Pitkäranta [390], J. Bramble, R. Falk [391], P. Monk [392], В.В. Шайдуров [13], G. Engel et al [393].

Функциональные апостериорные оценки для нее получены, теоретически и численно исследованы в работах M. Frolov, P. Neittaanmäki, S. Repin [185],

[233], M. Frolov [223] и приведены в диссертации автора [243]. В статье [223] получены два типа двойственных мажорант для бигармонической задачи. В работе P. Neittaanmäki, S. Repin [219] для задачи об изгибе тонких пластин Кирхгоффа–Лява предложены аналогичные оценки более общего вида. Их вычислительные свойства обсуждаются также в [185]. При граничных условиях, соответствующих жесткой заделке края пластины, они могут быть применены к бигармонической задаче. Однако мажоранты в них имеют более сложную структуру и включают симметричный тензор второго ранга в качестве двойственной переменной $\tilde{\tilde{\varkappa}}$. В первой мажоранте из [223] переменная $\tilde{\tilde{\varkappa}}$ — скалярная функция из пространства $\mathbb{W}^2_2(\Omega)$, а во второй требование на ее гладкость ослаблено до существования первых обобщенных производных. Это сделано при помощи введения второй дополнительной переменной $\tilde{\tilde{y}}$ из пространства $\mathbb{H}(\Omega, \mathrm{div})$.

В [243] рассмотрены вычислительные свойства одной из предложенных апостериорных оценок. Доказано утверждение, которое устанавливает глобальное свойство мажоранты о сходимости индекса эффективности получаемой оценки к оптимальному значению в процессе минимизации. Там можно найти примеры численной реализации, приведенные также в статьях [223] и [233]. В первом блоке численных экспериментов приближенное решение $\tilde{u}$ ищется как комбинация кусочно-полиномиальных функций, обеспечивающих его принадлежность пространству $\mathbb{W}^2_2(\Omega)$. Аппроксимация двойственной переменной $\tilde{\tilde{\varkappa}}$, входящей в мажоранту, строится при помощи глобальных тригонометрических базисных функций. Во втором блоке примеров рассмотрена реализация мажоранты, которая использует возможности пакета MATLAB с адаптивным построением сеток. Приближенное решение $\tilde{u}$ не вычисляется, а строится исходя из точных узловых значений u. Для получения конформной аппроксимации используется интерполянт на основе составного редуцированного треугольного элемента Сие–Клафа–Точера (см., например, Ф. Сьярле [1], M. Bernadou, J.-M. Boisserie [394]). Явное представление для функций формы и другие особенности применения данного элемента описаны, например, в [394], M. Bernadou,

K. Hassan [395]. Хотя построение конформного приближенного решения бигармонической задачи требует использования $\mathcal{C}^1$-элементов, при минимизации значения мажоранты могут быть использованы стандартные кусочно-линейные аппроксимации как для переменной $\tilde{\tilde{\varkappa}}$, так и для переменной $\tilde{\tilde{y}}$. Причем они строятся на основе той же самой сетки, что и приближенное решение. Из приведенных в [233] и [243] результатов можно сделать вывод, что метод с парой свободных элементов $(\tilde{\tilde{\varkappa}}, \tilde{\tilde{y}})$ позволяет оценить глобальную величину погрешности приближенных решений с индексом эффективности $I_{eff} \approx 3$. При этом итоговая сетка сгущается в тех областях, где локальная величина ошибки на начальной сетке велика. Важно отметить также тот факт, что эта сетка обладает симметрией, свойственной рассмотренным точным решениям, при том, что начальная сетка не всегда выбиралась симметричной.

В заключение заметим, что классические методы также применялись для построения апостериорных оценок точности приближенных решений бигармонической задачи. Первым результатом, по всей видимости, следует считать оценку, предложенную в монографии R. Verfürth [58]. Она основана на явном методе невязок. Несколько других оценок, в частности, полученных в рамках методов невязок и осреднения, и ссылки на соответствующие источники можно найти в теоретической работе K. Segeth [396]. Публикации L. Beirão da Veiga, J. Niiranen, R. Stenberg [397], T. Gudi [398] также позволяют оценить современный уровень развития классических методов апостериорного контроля точности для задач с эллиптическими операторами четвертого порядка, возникающих в теории пластин — таких результатов несравнимо меньше, чем для задач с операторами второго порядка.

3.11. Основные выводы

В главе рассмотрены вопросы, связанные с надежным контролем точности в задачах линейной теории изгиба пластин Рейсснера–Миндлина, а также изгиба прямолинейных стержней Тимошенко и Бернулли–Эйлера. На основе привлечения строгих математических методов и известных неравенств получены новые функциональные апостериорные оценки для этих классов задач. Для них известны вычислительные эффекты, при возникновении которых особенно важно иметь надежную процедуру апостериорного контроля точности приближенных решений, поскольку априорные оценки скорости сходимости обеспечивают лишь теоретическое обоснование применимости конкретного численного метода.

Отметим следующее:

1. Все представленные оценки являются гарантированными и точными.

2. Основные особенности класса оценок для пластины Рейсснера–Миндлина заключаются в учете нескольких видов граничных условий, ослаблении ограничений на множество допустимых свободных элементов и единообразии типов аппроксимаций, которые могут быть использованы для построения этих элементов.

3. Вопрос эффективной реализации функционального подхода и ее проверки посредством вычислительного эксперимента для пластин остается открытым.

4. Основные численные результаты посвящены анализу точности решений для модели Тимошенко, полученных в пакете ANSYS.

5. Технология оказывается пригодной для независимой проверки приближенных решений, полученных коммерческими программными продуктами для инженерных расчетов, демонстрируя не только надежность, но и высокую эффективность обеспечиваемых оценок.

Глава 4

Задачи классической теории упругости

Несмотря на то, что теоретические основы функционального подхода достаточно глубоко проработаны, задача его практического применения для контроля точности решений в механике деформируемого твердого тела исследована недостаточно. Особенно актуальна реализация предлагаемых методов как независимой надстройки над пакетами для инженерных вычислений, которые широко используются в современной практике. Надежный контроль погрешности таких решений другими (нефункциональными) методами видится довольно затруднительным, поскольку стандартные индикаторы основаны на специальных предположениях о свойствах приближенного решения. Гарантировать выполнение всех требований в случае программного обеспечения с закрытым кодом невозможно — отдельные детали реализации могут быть скрыты или описаны не в полном объеме.

Опыт, накопленный в XXI веке (см., например, М.Е. Фролов, М.А. Чурилова [79], J.K. Kraus, S.K. Tomar [239] и цитируемую там литературу, а также материал второй главы диссертации), показывает, что один из эффективных способов вычисления функциональных апостериорных оценок для плоских задач заключается в использовании смешанных аппроксимаций метода конечных элементов. Например, это могут быть аппроксимации Равьяра–Тома [252] или предложенные относительно недавно аппроксимации Арнольда–Боффи–Фалка [251]. Привлечение пакета ANSYS к реализации вычислительного эксперимента позволяет акцентировать внимание на важном с практической точки зрения преимуществе функционального подхода — его независимости от скрытых второстепенных деталей реализации вычисления приближенного решения.

Глава содержит одиннадцать разделов. Приведенный в ней обзор необходим, поскольку для рассматриваемого класса задач существует широкий спектр публикаций по тематике исследования, чего нельзя сказать о предыдущей и заключительной главах диссертации. Итак, в первом параграфе приведена математическая постановка задачи, во втором — дополнительный обзор, а в третьем показано, как получить функциональную апостериорную оценку для плоских задач линейной теории упругости с учетом условия симметрии тензора напряжений. Вывод справедлив и для пространственных задач. Далее в основном рассматриваются плоские задачи на примере плоской деформации. Недостатки и достоинства применения непрерывной аппроксимации метода конечных элементов обсуждаются в разделе 4.4. Разделы 4.5–4.7 посвящены получению модифицированной оценки с неявным учетом условия симметрии, основанному на материале соответствующей главы монографии [64], изложению аспектов применения конечных элементов Равьяра–Тома и Арнольда–Боффи–Фалка, а также численным результатам. В параграфе 4.8 описаны три серии вычислений для случая нескольких материалов в задаче, объединенные в один общий пример. Далее, в разделе 4.9 исследуются адаптивные алгоритмы. Десятый параграф содержит некоторые результаты для трехмерного случая. Основные выводы представлены в заключительном разделе главы.

4.1. Математическая постановка плоских и пространственных задач линейной теории упругости

Эта классическая задача механики деформируемого твердого тела заключается в определении в области $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ (d=2 или 3) поля перемещений u, поля напряжений σ и поля деформаций ε, которые связаны системой соотношений

$$\begin{cases} \operatorname{Div}\sigma + f = 0 & \text{в } \Omega, \\ \sigma = \mathrm{L}\varepsilon & \text{в } \Omega, \\ \varepsilon(u) = \frac{1}{2}(\nabla u + (\nabla u)^T) & \text{в } \Omega, \end{cases} \tag{4.1}$$

где f — плотность объемных сил, а L — тензор упругих модулей, связывающий напряжения и деформации (см., например, А.И. Лурье [399], [400], А.А. Ильюшин [401], С.П. Тимошенко, Дж. Гудьер [402], Ю.А. Амензаде [345], В. Новацкий [403], Ф. Сьярле [404] и другие классические труды). Будем предполагать, что среда однородна и изотропна, тогда в линейном случае этот тензор определяется двумя постоянными, связанными со свойствами материала, например, коэффициентом Пуассона и модулем Юнга. К системе уравнений (4.1), рассматриваемой в занимаемой упругим телом области, добавляются граничные условия в терминах перемещений

$$u = u_{\mathrm{D}} \qquad \text{на } \Gamma_{\mathrm{D}}, \tag{4.2}$$

и в терминах напряжений

$$\sigma n = g \qquad \text{на } \Gamma_{\mathrm{S}}, \tag{4.3}$$

где Γ_{D} и Γ_{S} — две непересекающиеся части границы, объединение которых представляет собой всю границу области Ω, причем мера Γ_{D} предполагается отличной от нуля. В соотношениях (4.2) и (4.3) u_{D}, g и n обозначают, соответственно, заданные на первой части границы перемещения, заданные на второй части границы поверхностные силы и внешнюю нормаль к поверхности тела. Основой для вывода апостериорной оценки для краевой задачи (4.1)–(4.3), как и для применения метода конечных элементов, является ее обобщенная постановка. При этом рассматривается решение прямой задачи, в которой основной неизвестной характеристикой является поле перемещений, а деформации и напряжения определяются по нему. Эта задача выглядит следующим образом: найти элемент $u \in U$ такой, что

$$\int\limits_{\Omega} \mathrm{L}\varepsilon(u) : \varepsilon(w)\, d\Omega = \int\limits_{\Omega} f \cdot w\, d\Omega + \int\limits_{\Gamma_{\mathrm{S}}} g \cdot w\, d\Gamma, \quad \forall w \in U_0, \tag{4.4}$$

где

$$U := \left\{ w \in \mathbb{W}_2^1(\Omega, \mathbb{R}^d) \mid w = u_{\mathrm{D}} \text{ на } \Gamma_{\mathrm{D}} \right\},$$

$$U_0 := \left\{ w \in \mathbb{W}_2^1(\Omega, \mathbb{R}^d) \mid w = 0 \text{ на } \Gamma_{\mathrm{D}} \right\},$$

$$\mathbb{W}_2^1(\Omega, \mathbb{R}^d) := \underbrace{\mathbb{W}_2^1(\Omega) \times \ldots \times \mathbb{W}_2^1(\Omega)}_{d}.$$

Относительно данных задачи снова предполагается, что Ω — ограниченная связная область с границей, непрерывной по Липшицу,

$$f \in \mathbb{L}_2(\Omega, \mathbb{R}^d), \quad g \in \mathbb{L}_2(\Gamma_{\mathrm{S}}, \mathbb{R}^d), \quad u_{\mathrm{D}} \in \mathbb{W}_2^1(\Omega, \mathbb{R}^d),$$

а тензор четвертого ранга L обладает свойством симметрии

$$\mathrm{L}_{ijks} = \mathrm{L}_{ksij} = \mathrm{L}_{jiks}, \quad i, j, k, s = 1, \ldots, d,$$

а также

$$\mathrm{L}_{ijks} \in \mathbb{L}_\infty(\Omega) \quad i, j, k, s = 1, \ldots, d$$

и справедлива двусторонняя оценка

$$\alpha_1 \int\limits_\Omega |\tau|^2 \, d\Omega \leq \int\limits_\Omega \mathrm{L}\tau : \tau \, d\Omega \leq \alpha_2 \int\limits_\Omega |\tau|^2 \, d\Omega, \quad \forall \tau \in \mathbb{L}_2(\Omega, \mathbb{M}_{sym}^{d\times d})$$

с некоторыми положительными константами α_1 и α_2, где $\mathbb{M}_{sym}^{d\times d}$ — пространство симметричных тензоров второго ранга размерности d. Исходя из указанных выше допущений, естественным пространством для поиска поля напряжений является

$$\mathbb{H}_{sym}(\Omega, \Gamma_{\mathrm{S}}, \mathrm{Div}) := \left\{ \tau \in \mathbb{L}_2(\Omega, \mathbb{M}_{sym}^{d\times d}) \mid \mathrm{Div}\,\tau \in \mathbb{L}_2(\Omega, \mathbb{R}^d), \;\; \tau n \in \mathbb{L}_2(\Gamma_{\mathrm{S}}, \mathbb{R}^d) \right\}.$$

Отметим, что условие симметрии тензора напряжений учитывается в сильном смысле только в том случае, если речь идет о стандартных аппроксимациях метода конечных элементов, иначе используется пространство

$$\mathbb{H}(\Omega, \Gamma_{\mathrm{S}}, \mathrm{Div}) := \left\{ \tau \in \mathbb{L}_2(\Omega, \mathbb{M}^{d\times d}) \mid \mathrm{Div}\,\tau \in \mathbb{L}_2(\Omega, \mathbb{R}^d), \;\; \tau n \in \mathbb{L}_2(\Gamma_{\mathrm{S}}, \mathbb{R}^d) \right\},$$

где $\mathbb{M}^{d\times d}$ — пространство произвольных тензоров второго ранга размерности d.

Соответствующий задаче функционал энергии выглядит следующим образом:

$$\mathcal{J}(u) = \frac{1}{2}\int\limits_{\Omega} \mathrm{L}\varepsilon(u) : \varepsilon(u)\, d\Omega - \int\limits_{\Omega} f \cdot u\, d\Omega - \int\limits_{\Gamma_{\mathrm{S}}} g \cdot u\, d\Gamma.$$

Если рассмотреть произвольное приближенное решение $\tilde{u} \in U$ задачи (4.4), то несложно показать, что энергетическая норма погрешности этого решения выражается через разность значений функционала на приближенном и точном решениях, а именно

$$|\!|\!|\tilde{u} - u|\!|\!|^2 = 2(\mathcal{J}(\tilde{u}) - \mathcal{J}(u)),$$

где

$$|\!|\!|\tilde{u} - u|\!|\!| := \left(\int\limits_{\Omega} \mathrm{L}\varepsilon(\tilde{u} - u) : \varepsilon(\tilde{u} - u)\, d\Omega\right)^{1/2}.$$

Это соотношение позволяет расширить круг рассматриваемых в вычислительном эксперименте задач и выйти за рамки тех задач, в которых известно точное аналитическое решение. Для этого используется очевидное неравенство

$$|\!|\!|\tilde{u} - u|\!|\!|^2 \geq 2(\mathcal{J}(\tilde{u}) - \mathcal{J}(u_{ref})),$$

где вместо точного решения u можно взять приближенное решение u_{ref} на мелкой сетке. Поскольку такая замена дает гарантированную оценку погрешности снизу, а рассмотренные далее функциональные мажоранты дают гарантированную оценку сверху, то использование отношения верхней и нижней оценки вместо отношения верхней оценки к точному значению может лишь незначительно преуменьшить истинную эффективность метода.

Если ограничиться случаем $u_{\mathrm{D}} = 0$ и подставить точное решение u в функционал $\mathcal{J}$, то в силу слабой постановки (4.4), мы получим

$$\mathcal{J}(u) = -\frac{1}{2}\int\limits_{\Omega} \mathrm{L}\varepsilon(u) : \varepsilon(u)\, d\Omega = -\frac{1}{2}\int\limits_{\Omega} \sigma(u) : \varepsilon(u)\, d\Omega.$$

Таким образом, значение функционала энергии на точном решении можно получить как значение энергии деформации с обратным знаком, даже если мера части границы Γ_S отлична от нуля. Таким же свойством обладают галеркинские аппроксимации — точные решения соответствующих (4.4) конечномерных задач. Это, не умаляя общности, позволяет использовать для оценки эффективности функционального подхода значение энергии деформации, вычисленное ANSYS на мелкой сетке.

4.2. Обзор применения методов апостериорного контроля точности приближенных решений в теории упругости

Рассматриваемая задача достаточно часто служила основой для реализации и сравнения различных методов апостериорного контроля точности. Все основные их классы применялись к задачам линейной теории упругости, а некоторые, например метод осреднения и метод оценки через определяющее соотношение — интенсивно развивались именно в этом направлении. Безусловно, исследованию различных индикаторов и аспектов их применения в скалярных эллиптических задачах посвящено большее число работ, но плоские и пространственные задачи линейной теории упругости привлекательны тем, в первую очередь, что имеют близкую структуру уравнений, но являются векторными[1]. Сказанное выше подчеркивает необходимость посвятить специальный параграф дополнительному обзору достижений в области разработки методов апостериорного контроля точности приближенных решений применительно к задаче (4.1)–(4.3).

Исторически первым подходом к оценке точности решений задач теории упругости был геометрический подход через использование неравенства Прагера–Синжа. Работа W. Prager, J.L. Synge [169] появилась за три-четыре десятилетия до формирования общей теории апостериорного контроля точности в рамках метода конечных элементов. В дальнейшем уже в 70–80-е годы на

[1] если говорить о постановке в перемещениях

результате авторов фактически вырос «метод оценки погрешности через определяющее соотношение». Этот метод, более подробно описанный в параграфе 1.8, интенсивно применялся к задачам теории упругости. Помимо монографии P. Ladevèze, J.-P. Pelle [182][2] и уже упомянутых в первой главе источников, остановимся подробнее на содержании некоторых других работ. Например, F. Pled, L. Chamoin, P. Ladevèze [405] включает детальный обзор литературы, посвященной различным процедурам построения полей, которые используются при оценке глобальной нормы погрешности. Из анализа приведенных численных результатов, развивающих вычислительный эксперимент тех же авторов [406], где рассматриваются примеры сложных геометрий расчетной области, можно сделать вывод, что предложенные авторами улучшения вычислительной процедуры позволяют снизить величины индекса эффективности с 2.4–2.6 до 1.0–1.2, что безусловно является хорошим результатом, но при этом вычислительные затраты возрастают на один–два порядка в зависимости от задачи. В работе L. Gallimard [407] предложена модификация метода, направленная на упрощение его применения для коммерческих программных продуктов. Она основана на решении локальных задач на подобластях без предварительного уравновешивания по ребрам конечно-элементного разбиения, поскольку этот этап реализации алгоритма требует формирования нестандартного массива данных. Модификация, наоборот, основана лишь на построении совокупности элементов, прилегающих к каждому узлу разбиения, что элементарно реализуется, исходя из данных о связности вершин. Эффективность такой методики получения глобальных оценок точности в энергетической норме продемонстрирована на примере плоских задач для случая однородного изотропного материала. Приведенные в статье индексы эффективности близки к единице (1.05–1.25). Вторая часть работы посвящена применению метода к проблемно-ориентированным оценкам. Обсуждение результатов, касающихся неклассических оценок

---

[2] техническим деталям построения допустимых полей для рассматриваемого в главе класса задач в ней посвящена глава 8

в терминах проблемно-ориентированных функционалов или оценок ошибок моделей в механике, представлено в параграфах 1.10 и 1.11.

Широкое использование методов осреднения для контроля точности решений задач механики началось с пионерской работы O.C. Zienkiewicz, J.Z. Zhu [147] — это крайне интересная и содержательная с точки зрения анализа вычислительных аспектов статья, включающая широкий круг примеров, в том числе в областях сложной геометрии. Авторами обсуждаются задачи о плоском напряженном состоянии и плоской деформации с использованием билинейных и биквадратичных элементов, где четырехугольные сетки фиксированы и меняются вручную, далее — треугольные сетки с адаптацией. На ряде сеток в статье даны локальные индексы эффективности, указывающие на зоны, в которых индикатор ZZ локально более точен. Глобальный индекс эффективности может быть существенно меньше единицы (0.5–0.7), но иногда растет с измельчением разбиения. Исследования продолжены в работе тех же авторов [151], где представлена улучшенная стратегия адаптивного построения сеток. Упор при этом делается на анализ скорости сходимости приближенных решений, а не обсуждение точности самих апостериорных оценок. В процессе адаптации число узлов треугольных сеток доходит до нескольких тысяч. Как и в первой работе, численные результаты включают примеры задач о плоской деформации и плоском напряженном состоянии и указывают на возможность достижения согласованной с теорией скорости сходимости при использовании предложенного авторами адаптивного алгоритма. Важно также отметить, что процедура, обсуждаемая в работе, является автоматизированной с точки зрения создания и дальнейшего разбиения сеток для метода конечных элементов.

В 1992 году вышла серия публикаций O.C. Zienkiewicz, J.Z. Zhu [280], [281] и [150], где последняя из них по сути резюмирует результаты двух других работ авторов. Эти статьи заложили основу уже упомянутого в первой главе SPR-метода, в том числе для задач линейной теории упругости. Плоское напряженное состояние обсуждается в двух примерах из [150]. Помимо непосредственно теории и численных результатов, приведены полезные технические детали, в частности, указаны точки суперсходимости для разных типов конечных элементов и отображена процедура восстановления значений поля напряжений на границе области или стыке двух материалов. В этой связи можно также упомянуть работу G. Goodsell, J.R. Whiteman [408], которая посвящена анализу эффекта суперсходимости для рассматриваемого класса задач.

Явный метод невязок исследовался в работе C. Johnson, P. Hansbo [52], часть которой посвящена задачам линейной упругости, а численные примеры содержат задачи о плоской деформации. Помимо оценки обсуждается методика вычисления весовых множителей, представляющаяся достаточно грубой с точки зрения учета локальных особенностей сеток. В соответствующей части численных результатов для плоской деформации представлен один пример с адаптивным построением триангуляций расчетной области, в котором индекс эффективности оценок растет от 1.1 до 1.3 в процессе измельчения. В монографии R. Verfürth [58] линейной теории упругости посвящена лишь небольшая часть, где без обоснования вычислительным экспериментом предложен индикатор, также основанный на явном методе невязок. Распространение результатов на смешанные методы на основе вариационного принципа Хеллингера-Рейсснера изложено, например, в статьях D. Braess, O. Klaas, R. Niekamp, E. Stein, F. Wobschal [409], M. Lonsing, R. Verfürth [410], G. Yu, X. Xie, C. Carstensen [411], T.P. Barrios, E.M. Behrens, M. González [327], [412], а на специальный метод конечных элементов, связанный с дополнением/расширением тензора деформаций[3] — в работе D. Braess, C. Carstensen, B.D. Reddy [117]. Обзор соответствующих результатов, касающихся оценок для разрывного метода Галеркина, можно найти в статье P. Hansbo, M.G. Larson [413]. Остановимся подробнее на содержании ряда упомянутых публикаций. В [409] упор сделан на адаптации сеток, а не анализе качества оценок в глобальной норме. В [327] приведены численные результаты для почти несжимаемых материалов с примерами адаптации три-

[3] enhanced strain method

ангуляций расчетной области. Они показывают, что метод не дает никаких гарантий того, что недооценка погрешности не окажется существенной и не будет еще усугубляться в процессе работы адаптивного алгоритма. Например, в одном из рассмотренных случаев индекс эффективности при равномерном разбиении близок к 1/2, а при адаптивном — к 1/4. Это означает, что вычислительный процесс может быть остановлен при ошибке решения около 40%, но будет заявлено об ошибке в 10%, что неприемлемо. Результаты работы тех же авторов [412] вызывают определенные сомнения. Предложенный в ней индикатор имеет несогласованные по физической размерности слагаемые, все весовые множители в которых выбраны равными единице, что для явного метода невязок является достаточно распространенной практикой. При этом индексы эффективности оценок, вычисляемых во всех примерах, находятся в диапазоне 0.8–1.0, и в ряде конкретных случаев — для каждой из рассмотренных сеток практически совпадают с единицей, что без учета констант едва ли возможно без специального отбора тестов и подбора параметров задачи, дающих результаты столь высокого качества. Статья [411] также содержит численные результаты, касающиеся поведения индекса эффективности другого индикатора, полученного на основе явного метода невязок, при стремлении коэффициента Пуассона к 1/2. В одном из примеров индекс эффективности оказывается меньше 1, а во втором — около 4. В работе K.-Y. Kim [414] можно найти краткий анализ близких по тематике публикаций, в которых рассматривается апостериорный контроль для смешанных методов конечных элементов со слабым учетом симметрии тензора напряжений. Современный обзор результатов, касающихся применения явного метода невязок и ряда других методов к плоским задачам теории упругости можно найти, например, в работе M. Ainsworth, R. Rankin [415]. Неявные методы обсуждаются, например, в работе C. Carstensen, J. Thiele [416] и уже упомянутой [410].

Статья P. Beckers, H.-G. Zhong, E. Maunder [417] содержит сравнительный анализ шести индикаторов различных типов, базирующийся на рассмотрении плоских задач, в том числе, имеющих точные аналитические решения. Приведенные индикаторы основаны (i) на явном методе невязок; (ii)-(iii) на эффекте суперсходимости, но в рамках уравновешивания; (iv)–(vi) на постобработке производных. Из описанных в работе результатов можно сделать следующие выводы: ни один из указанных классических методов не обеспечивает гарантированного выполнения неравенства $I_{eff} \geq 1$, а явный метод невязок может терять свойство асимптотической точности даже для краевых задач с гладкими решениями и по совокупности приведенных в публикации данных является худшим, а лучшим — один из методов, основанных на постобработке, который по мнению авторов по поведению близок к SPR-методу, в особенности, на равномерных разбиениях.

В современной работе P. Beckers [294] предложены и численно исследованы на наборе пространственных задач два способа построения допустимого поля напряжений посредством решения двойственной вариационной задачи, как это предлагал в первой половине 60-х годов XX века B. Fraeijs de Veubeke [293]. Аналогичный подход для плоских задач использован также в работах В.Г. Корнеева и коллег — [87], [88] и цитируемой там литературе — о чем несколько подробнее было сказано в завершающей части параграфа 1.8. В [294] проведено сравнение с реализацией в рамках метода оценки погрешности через определяющее соотношение и SPR. Примеры показывают, что на структурированных сетках все методы дают неплохой результат, но последний недооценивает погрешность в ряде случаев. А вот для сильно деформированных разбиений, то есть имеющих большое количество конечных элементов искаженной формы — методика [294] предпочтительнее остальных, хотя для нее остается открытым вопрос о применимости в случае ненулевых объемных сил. Общая вычислительная трудоемкость решения исходной задачи и двойственной сравнима только в случае, если используются полиномы второго и первого порядков, соответственно. При реализации в обоих случаях полиномов первого порядка — отличие в общем времени расчета, измеряемом в секундах, составляет около 8 раз. Таким образом, оценка погрешности примерно на порядок увеличивает вычислительные затраты на получение приближенного решения, но позволяет гарантировать его точность при небольшой переоценке истинной величины ошибки. Приведенные в статье значения индекса эффективности для этого случая не превышают 1.1 как для структурированных сеток, так и для сильно искаженных. Современный обзор публикаций, развивающих идеи [293], можно также найти в работе M. Kempeneers, J.-F. Debongnie, P. Beckers [418].

В статье I. Babuška et al. [131], помимо разработки специальной методологии сравнения индикаторов различных типов, примененной к оценкам на основе неявных методов невязок и SPR, содержится достаточно полный обзор основных на тот момент достижений в области — это около 60 источников. При этом вводится понятие индекса устойчивости[4]

$$I_R := \max\{|1 - C_L| + |1 - C_U|, |1 - 1/C_L| + |1 - 1/C_U|\},$$

где C_L и C_U — нижняя и верхняя граница локального индекса эффективности индикатора, вычисленного по ячейке из достаточно большого количества конечных элементов нетривиальной формы. Основная идея авторов заключается в том, что необходимо отделить друг от друга факторы, оказывающие особое влияние на качество оценки погрешности (локальная структура сеток и структура решения). Рассматриваются зоны вдали от границы области, где решение обладает необходимой гладкостью. Если оценка не демонстрирует достаточной устойчивости для внутренних ячеек, что отражает большая величина индекса I_R, то авторы предлагают считать ее ненадежной, а надежные методы, наоборот, дают индекс, близкий к нулю. Такой тест апостериорных индикаторов предложил известный чешско-американский специалист в области вычислительной математики и инженерного дела И. Бабушка. В англоязычной литературе он носит название «Babuška patch test» (помимо [131], см., например, [19]). В вычислительном эксперименте [131] рассмотрен широкий спектр модельных задач —

[4] robustness index

уравнение Лапласа, уравнение Пуассона, изотропная линейная упругость, ортотропная теплопроводность, но с упором на первую задачу. Среди выводов следует особо отметить три: 1) SPR в целом показал наилучшие результаты с точки зрения введенной авторами специальной характеристики; 2) следует использовать методы невязок совместно с процедурами уравновешивания; 3) оригинальный метод П. Ладевеза и коллег [289] не обладает достаточной устойчивостью. Исследование было продолжено в работе I. Babuška, T. Strouboulis, C.S. Upadhyay, S.K. Gangaraj [132], касающейся исключительно различных методов с уравновешиванием, но для гладких решений на сетках простой периодической структуры. U. Brink, E. Stein [129] также исследовали эту группу методов, в том числе за рамками геометрически и физически линейной теории. Основной вывод, который можно сделать из приведенных численных результатов заключается в том, что способ апостериорной оценки погрешности, основанный на решении локальных задач, с некоторыми модификациями может быть распространен и на случай почти несжимаемых материалов, но гарантированных верхних оценок не обеспечивает, хотя индексы эффективности достаточно близки к единице.

Исследование SPR в свою очередь было продолжено во многих работах, поскольку идея оказалась достаточно популярной, например — это уже упомянутые в первой главе статьи P. Díez, J.J. Ródenas, O.C. Zienkiewicz [160], J.J. Ródenas, M. Tur, F.J. Fuenmayor, A. Vercher [284], а также T. Kvamsdal, K.M. Okstad [419] и часть монографии [19]. В [419], помимо оригинальной версии, сравнивались пять различных модификаций процедуры восстановления поля напряжений с учетом уравнений равновесия и граничных условий, таких как, например, предложенная N.-E. Wiberg, F. Abdulwahab [420]. Важный вывод, подтверждающий результаты других авторов, заключается в существенной недооценке величины энергетической нормы погрешности при помощи классической процедуры. Ее модификации несколько улучшают надежность метода, но для примера с негладким решением показано, что ни одна из них не дает гарантированных верхних оценок, хотя в части случаев имеет место асимптотическая точность. В [284] и [160] рассмотрены плоские модельные задачи, относящиеся к случаю плоской деформации, в том числе в областях с входящими углами, а также адаптация сеток при помощи различных индикаторов. Представленные в этих работах модификации в описанных примерах продемонстрировали надежность, не приводя к недооценке глобальной величины погрешности, и почти всегда — асимптотическую точность. Авторы [284] отмечают, что также значительно повышается точность восстановления поля напряжений по сравнению с исходной методикой, поскольку используемые построения приводят к локальному уравновешиванию внутри патчей и на границе Γ_S в узлах сетки, а в частных случаях — на всей границе. В [160] уравновешивание также происходит локально и последовательно, а непрерывность поля достигается специальной постобработкой на основе концепции разбиения единицы, которая нарушает равновесие, но дает «почти статически допустимое поле напряжений». Статья также содержит обзор достаточно большого числа публикаций, посвященных близким исследованиям. Его дополняет сравнительный анализ смежных методов из работы J.P. Moitinho de Almeida, E.A.W. Maunder [421], продолженной теми же авторами — [422].

Сравнению REP- и различных вариантов RCP-методов посвящена работа A. Benedetti, S. de Miranda, F. Ubertini [161]. Численное исследование в ней выполнено в духе [131] на искусственно созданном наборе конфигураций (периодически повторяющихся шаблонов) конечно-элементных разбиений. Важной отличительной особенностью метода [161] является то, что он не использует данных о точках суперсходимости, которые не всегда известны, особенно в нелинейных задачах. Исследование продолжено в работе G. Castellazzi, S. de Miranda, F. Ubertini [423], посвященной уже анализу качества адаптации сеток. Подобно материалу, представленному во второй главе диссертации, проводится сравнение локальных индикаторов на фиксированных сетках и зон сгущений сеток, получаемых в процессе работы адаптивных алгоритмов на основе точного знания погрешности и использования вместо нее индикатора RCP-метода. Финальные разбиения имеют схожие качественные особенности. При этом индексы эффективности глобальных оценок в плоских задачах механики деформируемого твердого тела приближаются к единице, то есть индикатор асимптотически точен, хотя они и демонстрируют недооценку погрешности в ряде случаев. Таким образом, метод является интересным, но не может считаться полностью надежным.

Отметим, что с точки зрения развития методов восстановления напряжений может быть полезен способ, предложенный P.G. Ciarlet, P. Ciarlet (Jr.) [424], который позволяет получить поле деформаций (следовательно, напряжений) без поля перемещений через минимизацию функционала специального вида. В этом его отличие от прямых и смешанных методов — неизвестный элемент в задаче один, но это поле деформаций. В минимизации в слабом виде учитывается условие совместности деформаций. В работе рассматривается класс задач с чистым условием «в напряжениях». Однако для функционального подхода полученных результатов недостаточно, поскольку имеет место только сходимость аппроксимаций в пространстве $\mathbb{L}_2(\Omega, ...)$, хотя используется класс элементов со степенями свободы на ребрах.

В литературе также можно встретить применение DWR-метода, описанного в параграфе 1.3, к рассматриваемому классу задач. В частности, в главе 10 монографии W. Bangerth, R. Rannacher [62] приведен пример расчета в квадратной области с закреплением по части границы и приложенными поверхностными силами. В процессе адаптации сеток сравниваются два индикатора, направленных на разные цели — глобальный в энергетической норме и в терминах линейных функционалов, оценивающий среднее нормальное напряжение на части границы с условием типа Дирихле. Приведены индексы эффективности проблемно-ориентированного индикатора, которые убывают от 1.95 до 1.79 в процессе адаптации. Интересно, что этот же пример встречается в работе R. Rannacher, F.-T. Suttmeier [425], но там таблица с результатами содержит еще одну строчку, где индекс эффективности растет, теряя монотонность поведения.

Как и упомянутая в начале параграфа статья [407], проблеме построения оценок на основе полей без уравновешивания по ребрам элементов посвящена современная работа R. Cottereau, P. Díez, A. Huerta [426], но со стороны другого класса методов — неявных. В ней предложен способ вычисления верхних оценок погрешности в энергетической норме, основанный на решении серии локальных задач на патчах. При этом привлекается двойственная формулировка локальных задач. Численные результаты для плоских и пространственных задач линейной теории упругости, в том числе достаточно сложной геометрии, указывают на эффективность такой модификации. Индексы не становятся меньше единицы и оказываются достаточно близки к ней, не превышая 1.35. Технически, однако, результат напрямую зависит от порядка обхода патчей и особенностей их наложения, то есть от структуры сетки. Это происходит поскольку каждый элемент входит сразу в несколько таких патчей, а локально вычисленные данные привлекаются к дальнейшим построениям, что называется авторами «минимизацией с аккумулированием», но определение «правильного» порядка обхода — это нетривиальная задача. В статье делается попытка уйти от прямого обсуждения этого вопроса при помощи обработки статистики результатов вычислительного эксперимента для разных направлений обхода. Авторы также делают важное заключение, что повышение порядка полиномиальной аппроксимации, используемой для построения допустимого поля напряжений, «непропорционально сильно увеличивает вычислительную трудоемкость метода», поэтому основная часть результатов получена для случая квадратичных полиномов[5]. Тем не менее, работа может быть интересна не только сама по себе, но и как основа для частичной локализации вычисления функциональных мажорант, о которых идет речь в следующих параграфах.

Отметим, что в плане анализа развития различных групп классических

[5] из соответствующей теоремы в статье следует, что это минимальный допустимый порядок

методов, помимо монографий, безусловный интерес представляет сборник статей [427] под общей редакцией П. Ладевеза и Дж. Одена, посвященный адаптивным методам в механике, и объединивший работы крупных специалистов в области, а также ранняя обзорная публикация R. Verfürth [428]. В ней в теоретическом ключе изложены основные популярные на тот момент методы — методы невязок (явный и неявный), иерархический метод, методы осреднения и уравновешивания, и сделана попытка наметить путь распространения ряда идей на нелинейные задачи.

Другим интересным формирующимся направлением развития теории является задача апостериорного контроля точности в расширенных методах конечных элементов[6] и других подобных методах, которые более удобны, например, в механике разрушения — обзор соответствующих публикаций можно найти в работах M. Duflot, S. Bordas [429], T. Gerasimov, M. Rüter, E. Stein [430], O.A. González-Estrada et al. [431], J.J. Ródenas et al. [432] и [433].

Резюмируем сказанное выше: простые и не трудоемкие с вычислительной точки зрения методы не являются ни надежными, ни эффективными, поскольку не дают абсолютно никаких гарантий, что полученная оценка не превысит истинную погрешность в десятки раз или, наоборот, не будет иметь место недооценка в несколько раз, что несет еще бóльшую опасность. Модификации стандартных методов, направленные на повышение их надежности, могут давать неплохой результат, но влекут за собой необходимость использовать нетривиальные технические построения при реализации вычислений, и тем не менее — в большинстве случаев не обеспечивают гарантированных оценок. В число редких исключений, например, входит метод оценки погрешности через определяющее соотношение. Но абсолютно все стандартные методы основаны, как минимум на этапе реализации вычислительных алгоритмов, а чаще — ранее при строгом математическом обосновании, на том факте, что проверяемое приближенное решение является галеркинской аппроксимацией. Это можно гаранти-

[6] XFEM — eXtended Finite Element Method

ровать только в том случае, если используются классические методы конечных элементов и разработчик кода не скрывает не только основных, но и второстепенных деталей реализации.

Как уже упоминалось во введении, функциональный подход также распространен на линейные и некоторые нелинейные задачи механики[7]. Исследования данного направления проводятся с середины 90-х годов XX века. В основном, ранние публикации носили теоретический характер — их обзор можно найти в монографии S. Repin [64]. В последнее десятилетие более активно исследуются прикладные аспекты использования функциональных мажорант. При этом чаще всего рассматриваются плоские задачи, такие как задача о плоской деформации или задача о плоском напряженном состоянии. Необходимые ссылки будут даны в тексте главы.

4.3. Функциональная оценка погрешности с симметричным тензором напряжений

В работе [220] А.В. Музалевским и С.И. Репиным с привлечением методов теории двойственности вариационного исчисления по аналогии с более ранней работой S. Repin, L.S. Xanthis [172] получена и численно исследована апостериорная оценка функционального типа для задачи (4.4). В частности, авторами рассмотрены двумерные аналоги пространственной задачи — плоское напряженное состояние, плоская деформация, осесимметричная задача. В статье приведены два примера численного расчета для случая плоских задач. Следуя [64], покажем как получить оценку более простым способом — при помощи преобразований обобщенной постановки. Вводя обозначение для погрешности $e := u - \tilde{u}$, имеем для любого $w \in U_0$

$$\int\limits_{\Omega} \mathrm{L}\varepsilon(e) : \varepsilon(w)\, d\Omega = \int\limits_{\Omega} f \cdot w\, d\Omega + \int\limits_{\Gamma_S} g \cdot w\, d\Gamma - \int\limits_{\Omega} \mathrm{L}\varepsilon(\tilde{u}) : \varepsilon(w)\, d\Omega. \tag{4.5}$$

[7] в главе речь идет исключительно о механике деформируемого твердого тела

Рассмотрим произвольный тензор $\tilde{\tilde{\sigma}} \in \mathbb{H}_{sym}(\Omega, \Gamma_{\mathrm{S}}, \mathrm{Div})$, являющийся независимой от решения исходной задачи аппроксимацией тензора напряжений. Для него справедлива формула интегрирования по частям

$$\int\limits_{\Omega} \tilde{\tilde{\sigma}} : \varepsilon(w)\, d\Omega + \int\limits_{\Omega} \mathrm{Div}\, \tilde{\tilde{\sigma}} \cdot w\, d\Omega = \int\limits_{\Gamma_{\mathrm{S}}} \tilde{\tilde{\sigma}} n \cdot w\, d\Gamma, \quad \forall w \in U_0.$$

Следовательно, имеет место представление

$$|\!|\!| e |\!|\!|^2 = \int\limits_{\Omega} \mathrm{L}\varepsilon(e) : \varepsilon(e)\, d\Omega = \int\limits_{\Omega} (\mathrm{Div}\, \tilde{\tilde{\sigma}} + f) \cdot e\, d\Omega +$$
$$+ \int\limits_{\Omega} (\tilde{\tilde{\sigma}} - \mathrm{L}\varepsilon(\tilde{u})) : \varepsilon(e)\, d\Omega + \int\limits_{\Gamma_{\mathrm{S}}} (g - \tilde{\tilde{\sigma}} n) \cdot e\, d\Gamma.$$

Используем неравенство Коши–Шварца для следующего скалярного произведения:

$$(\tau_1, \tau_2)_{\mathrm{L}} := \int\limits_{\Omega} \mathrm{L}\tau_1 : \tau_2\, d\Omega \le \sqrt{(\tau_1, \tau_1)_{\mathrm{L}}} \sqrt{(\tau_2, \tau_2)_{\mathrm{L}}}, \quad \forall \tau_1, \tau_2 \in \mathbb{L}_2(\Omega, \mathbb{M}^{d\times d}_{sym}),$$

то есть

$$\int\limits_{\Omega} (\tilde{\tilde{\sigma}} - \mathrm{L}\varepsilon(\tilde{u})) : \varepsilon(e)\, d\Omega \le |\!|\!| e |\!|\!| \sqrt{\int\limits_{\Omega} \mathrm{L}(\mathrm{L}^{-1}\tilde{\tilde{\sigma}} - \varepsilon(\tilde{u})) : (\mathrm{L}^{-1}\tilde{\tilde{\sigma}} - \varepsilon(\tilde{u}))\, d\Omega}.$$

Если ввести обозначения для соответствующих невязок

$$\begin{cases} R(\tilde{\tilde{\sigma}}) := \mathrm{Div}\, \tilde{\tilde{\sigma}} + f & \text{в } \Omega, \\ r(\tilde{\tilde{\sigma}}) := \tilde{\tilde{\sigma}} n - g & \text{на } \Gamma_{\mathrm{S}}, \end{cases}$$

и оценить по неравенству Коши–Шварца оставшиеся слагаемые

$$\int\limits_{\Omega} R(\tilde{\tilde{\sigma}}) \cdot e\, d\Omega + \int\limits_{\Gamma_{\mathrm{S}}} r(\tilde{\tilde{\sigma}}) \cdot e\, d\Gamma \le$$
$$\le \sqrt{|\Omega|\ \|R(\tilde{\tilde{\sigma}})\|^2_{\Omega} + |\Gamma_{\mathrm{S}}|\ \|r(\tilde{\tilde{\sigma}})\|^2_{\Gamma_{\mathrm{S}}}} \sqrt{\tfrac{1}{|\Omega|}\|e\|^2_{\Omega} + \tfrac{1}{|\Gamma_{\mathrm{S}}|}\|e\|^2_{\Gamma_{\mathrm{S}}}},$$

то оценка погрешности, предложенная в [220] и незначительно исправленная здесь для явного согласования размерностей физических величин, может быть преобразована к виду

$$|\!|\!| e |\!|\!| \le \mathcal{D}(\tilde{u}, \tilde{\tilde{\sigma}}) + \mathcal{R}(\tilde{\tilde{\sigma}}), \tag{4.6}$$

где

$$\mathcal{D}(\tilde{u}, \tilde{\tilde{\sigma}}) := \left(\int\limits_{\Omega} \mathrm{L}^{-1}(\tilde{\tilde{\sigma}} - \mathrm{L}\varepsilon(\tilde{u})) : (\tilde{\tilde{\sigma}} - \mathrm{L}\varepsilon(\tilde{u}))\, d\Omega \right)^{1/2},$$

$$\mathcal{R}(\tilde{\tilde{\sigma}}) := \mathfrak{c}_V \left(|\Omega|\ \|R(\tilde{\tilde{\sigma}})\|^2_{\Omega} + |\Gamma_{\mathrm{S}}|\ \|r(\tilde{\tilde{\sigma}})\|^2_{\Gamma_{\mathrm{S}}} \right)^{1/2},$$

$\|\cdot\|_{\Omega}$ и $\|\cdot\|_{\Gamma_{\mathrm{S}}}$ — стандартные нормы в соответствующих пространствах функций, суммируемых с квадратом в смысле интеграла Лебега, а $\mathfrak{c}_V$ — константа, не зависящая от разбиения области конечными элементами, которая удовлетворяет неравенству

$$\frac{1}{|\Omega|}\|w\|^2_{\Omega} + \frac{1}{|\Gamma_{\mathrm{S}}|}\|w\|^2_{\Gamma_{\mathrm{S}}} \le \mathfrak{c}_V^2 |\!|\!| w |\!|\!|^2$$

для всех элементов $w \in U_0$. Такая константа существует и может быть с достаточной степенью точности вычислена, например, при помощи минимизации функционала

$$\frac{|\!|\!| w |\!|\!|^2}{\frac{1}{|\Omega|}\|w\|^2_{\Omega} + \frac{1}{|\Gamma_{\mathrm{S}}|}\|w\|^2_{\Gamma_{\mathrm{S}}}}$$

на конечномерных подпространствах пространства U_0 (см., например, [64, с. 106]). Поскольку такая методика, вообще говоря, дает оценку константы снизу, а не сверху, на практике желательно увеличить ее значение в полтора–два раза, чтобы сохранить надежность подхода. Вычисление верхних оценок для таких констант представляет специальную задачу. Заметим, что в случае, если мера части границы Γ_{S} равна нулю, соответствующее слагаемое следует исключить.

На практике удобной является форма оценки погрешности, в которой стоят квадраты норм без извлечения корня

$$|\!|\!| e |\!|\!|^2 \le \mathcal{M}^2(\tilde{u}, \beta, \tilde{\tilde{\sigma}}) := (1+\beta)\mathcal{D}^2(\tilde{u}, \tilde{\tilde{\sigma}}) + \left(1 + \frac{1}{\beta}\right)\mathcal{R}^2(\tilde{\tilde{\sigma}}), \qquad (4.7)$$

где β — произвольный положительный параметр ([64]). При этом поле напряжений, необходимое для его вычисления, может быть получено из минимизации функционала следующего вида:

$$\mathcal{D}^2(\tilde{u}, \tilde{\tilde{\sigma}}) + c_1 \| R(\tilde{\tilde{\sigma}}) \|^2_\Omega + c_2 \| r(\tilde{\tilde{\sigma}}) \|^2_{\Gamma_S},$$

где c_1 и c_2 — соответствующие весовые множители, которые позволяют учесть в функционале независимо уравнения равновесия и граничные условия в напряжениях, сохраняя корректный баланс между ними.

4.4. Реализация вычисления мажоранты на основе стандартной билинейной аппроксимации метода конечных элементов

Метод, описанный ранее, был впервые применен в статье [220] для плоских задач в случае триангуляции расчетной области. Там представлены примеры вычисления оценки типа (4.7) для задачи о плоской деформации, а эффективность методики реализации на основе стандартной кусочно-линейной аппроксимации исследована в процессе работы основанного на ней адаптивного алгоритма. Для оценки качества полученных результатов использовались как величина погрешности по отношению к числу элементов и узлов сетки, так и индекс эффективности апостериорной оценки.

Несмотря на то, что полученные в работе [220] численные результаты указывают на явные преимущества предлагаемого авторами адаптивного подхода по сравнению с равномерным разбиением сеток, индексы эффективности самих апостериорных оценок заметно возрастают с измельчением сетки. В частности, в одном примере значение индекса эффективности возросло от 1.3 до 2.0 при равномерном измельчении от 292 до 4672 элементов и от 1.3 до 2.5 — при адаптивном измельчении сетки от 292 до 426 элементов. В другом примере наблюдался рост индекса от 1.6 до 2.3 при переходе от 305 к 409 элементам, и от 1.6 до 2.2 при равномерном разбиении до 4880 элементов. С другой стороны, один и тот же уровень точности достигался при адаптации на триангуляциях с числом степеней свободы в несколько раз меньшим, чем при равномерном разбиении.

В исследовании автора эффект существенного роста индекса эффективности наблюдается также на сетках с четырехугольными элементами. Такой выбор разбиений является более естественным для пакета ANSYS и рекомендуется разработчиками в качестве основного, поскольку дает более точный результат в инженерной практике. Такой тип элемента связан с функциями формы из пространства $\mathcal{Q}_1(\hat{\mathcal{K}})$ — пространства полиномов не более чем первой степени по каждой координате над эталонным элементом $\hat{\mathcal{K}} := [-1,1] \times [-1,1]$, которое дает классическую кусочно-билинейную непрерывную аппроксимацию для каждой из компонент тензора напряжений — σ_{11}, σ_{22} и σ_{12}. Приведем пример.

***Пример* 4.1.** *Задача о плоской деформации в полигональной области с отверстием*

Рассматривается задача в области, изображенной на Рисунке 4.1. Такой пример выбран, поскольку известно, что наличие отверстий в области может влиять на качество оценки погрешности. На левом рисунке отображена геометрия области и ее начальное разбиение. Последующие сетки получены из предыдущих путем равномерного измельчения элементов по каждой стороне в два раза. В постановке одновременно присутствуют условия в перемещениях (перемещение точек стороны, на которую указывает горизонтальная стрелка, равны нулю), а также условия в напряжениях (вертикальная стрелка указывает на сторону приложения давления). Остальные части границы свободны от нагружения или закрепления. Для анализа эффективности методики вычисляется решение на мелкой сетке, содержащей 263552 узла и 262144 элемента, и оценка ошибки снизу, полученная при помощи этого решения. Поскольку такая оценка практически совпадает с истинной погрешностью, мы пренебрегаем этой разницей и сравниваем остальные данные с ней. Как уже говорилось ранее, такая замена может привести только к незначительной недооценке, но никак не к переоценке эффективности исследуемой методики.

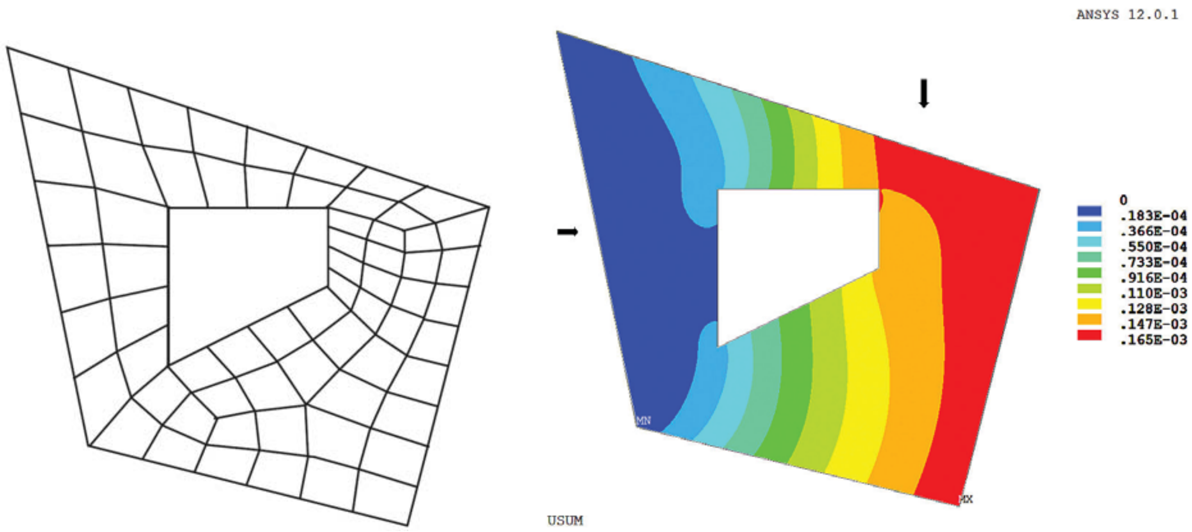


Рисунок 4.1: Форма области, начальное разбиение и решение для примера 4.1.

Данные для рассматриваемой задачи следующие: модуль Юнга $E = 207 \times 10^9$ **Па**; коэффициент Пуассона $\nu = 0.3$; плотность $\rho = 7830$ **кг/м³**; объемная сила f отсутствует; давление, определяющее функцию g, равно 10^6 **Па**.

Число элементов сеток N_{el}, абсолютная и относительная погрешность связанных с ними приближенных решений, измеряемая в энергетической норме, верхняя оценка нормы ошибки, индекс эффективности и получившееся значение параметра β указаны в соответствующих столбцах Таблицы 4.1. Из анализа данных таблицы можно сделать вывод, что хотя мы еще не достигли уровня погрешности в 5–10%, считающегося в инженерной практике достаточно малым, индекс эффективности оценок вырос до величины порядка десятка. К тому же он монотонно возрастает с каждым новым разбиением сетки, а не остается относительно постоянным или стремится к единице. Этот недостаток является существенным, поскольку фактически делает бесполезным применение апостериорной оценки в качестве критерия остановки вычислений, оставляя ее лишь как средство локальной индикации элементов с большой погрешностью. Как показано далее, ситуация исправляется за счет привлечения смешанных аппроксимаций и использования специальной модификации апостериорной оценки, по-

Таблица 4.1: Данные для непрерывных аппроксимаций в примере 4.1

N_{el}	$\|\|e\|\|$	$e\%$	$\mathcal{M}$	I_{eff}	β
64	9.00	40.1%	53.3	5.3	1.8
256	6.16	27.4%	49.5	7.3	1.5
1024	4.06	18.1%	43.7	9.7	1.4

лученной в монографии [64] и позволяющей учесть условие симметрии тензора, который подставляется в нее при анализе погрешности, посредством дополнительного штрафного слагаемого, а не в строгой форме.

4.5. Оценка погрешности с учетом условия симметрии тензора в форме дополнительного штрафного слагаемого

При выводе мажоранты из соотношения (4.7) существенно используется предположение о симметричности тензора, который подставляется в нее при вычислении. Конечно, существуют варианты смешанных методов, которые учитывают симметрию в сильной форме (см., например, R.S. Falk [434] и цитируемую там литературу, а также обзор в конце данного абзаца), но они содержат большое число степеней свободы и сильно усложняются при переходе к трехмерным задачам, что неоправданно увеличило бы размерность решаемых при оценке погрешности систем уравнений (например, в работе S. Adams, B. Cockburn [435] предлагается элемент, содержащий 162 степени свободы). Более выгодным видится учет этого условия в слабой форме, которая позволяет использовать простейшие смешанные аппроксимации. По аналогии с [64], получим эту оценку в том виде, который подходит для применения смешанных аппроксимаций, обычно используемых для решения уравнения Пуассона. Для практической реализации удобной является не тензорная форма записи, которая использовалась ранее, а развернутая запись по компонентам

$$\tilde{\tilde{\sigma}} = \begin{bmatrix} \tilde{\tilde{\sigma}}_{11} & \tilde{\tilde{\sigma}}_{12} \\ \tilde{\tilde{\sigma}}_{21} & \tilde{\tilde{\sigma}}_{22} \end{bmatrix}, \quad \tilde{\tilde{\sigma}} n = \begin{bmatrix} \tilde{\tilde{\sigma}}_{11} n_1 + \tilde{\tilde{\sigma}}_{21} n_2 \\ \tilde{\tilde{\sigma}}_{12} n_1 + \tilde{\tilde{\sigma}}_{22} n_2 \end{bmatrix}, \quad \operatorname{Div} \tilde{\tilde{\sigma}} = \begin{bmatrix} \tilde{\tilde{\sigma}}_{11,1} + \tilde{\tilde{\sigma}}_{21,2} \\ \tilde{\tilde{\sigma}}_{12,1} + \tilde{\tilde{\sigma}}_{22,2} \end{bmatrix},$$

где $\tilde{\tilde{\sigma}}_{ij,k} := \partial \tilde{\tilde{\sigma}}_{ij} / \partial x_k,\ i, j, k = 1, 2$. Здесь и далее, хотя обозначение сохранено, уже не предполагается равенство $\tilde{\tilde{\sigma}}_{12} = \tilde{\tilde{\sigma}}_{21}$. Такое представление подсказывает разделение тензора напряжений на две составляющие, для каждой из которых можно использовать смешанные аппроксимации

$$\tilde{\tilde{\sigma}} = \begin{bmatrix} S^1 & S^2 \end{bmatrix}, \quad S^1, S^2 \in \mathbb{H}(\Omega, \operatorname{div}).$$

Это позволяет предположить, что методика, успешно примененная в главе 2, может оказаться эффективной для рассматриваемого класса задач. Отметим, что также хорошо известны смешанные методы для плоских и пространственных задач теории упругости, основанные, в том числе, на смешанных вариационных принципах механики (см., например, К. Васидзу [7]), но соответствующие конечные элементы, как правило, более сложны в реализации и содержат большее число степеней свободы. Обзор достижений этого направления развития смешанных методов можно найти, например, в монографиях F. Brezzi, M. Fortin [14], O.C. Zienkiewicz, R.L. Taylor [19], D. Braess [29], S.C. Brenner, R.L. Scott [34] и статьях R. Stenberg [436], [437], D.N. Arnold, R. Winther [438], D.N. Arnold, R.S. Falk, R. Winther [439], R.S. Falk [434], G.N. Gatica, A. Márquez, S. Meddahi [440], L. Boulaajine, S. Nicaise, L. Paquet, Rafilipojaona [441], W. Qiu, L. Demkowicz [442], C. Carstensen, M. Eigel, J. Gedicke [443], B.P. Lamichhane, A.T. McBride, B.D. Reddy [444]. Подробнее о контроле точности решений, полученных такими методами, можно узнать из соответствующих работ, упомянутых в параграфе 4.2.

Сначала снова преобразуем (4.4) к виду (4.5), но разобьем тензор напряжений $\tilde{\tilde{\sigma}}$ на симметричную $\mathrm{sym}\,(\tilde{\tilde{\sigma}})$ и антисимметричную $\mathrm{skew}\,(\tilde{\tilde{\sigma}})$ части

$$\tilde{\tilde{\sigma}} = \mathrm{sym}\,(\tilde{\tilde{\sigma}}) + \mathrm{skew}\,(\tilde{\tilde{\sigma}}), \quad \mathrm{sym}\,(\tilde{\tilde{\sigma}}) := (\tilde{\tilde{\sigma}} + \tilde{\tilde{\sigma}}^T)/2,$$
$$\mathrm{skew}\,(\tilde{\tilde{\sigma}}) := (\tilde{\tilde{\sigma}} - \tilde{\tilde{\sigma}}^T)/2 = \begin{bmatrix} 0 & (S_1^2 - S_2^1)/2 \\ (S_2^1 - S_1^2)/2 & 0 \end{bmatrix}.$$

Для простоты рассмотрим случай, когда нулевое граничное условие в перемещениях задано на всей границе, то есть $\Gamma = \Gamma_{\mathrm{D}}$, $\Gamma_{\mathrm{S}} = \emptyset$, $u_{\mathrm{D}} = 0$. Получим функциональную апостериорную оценку, рассмотрев произвольный тензор $\tilde{\tilde{\sigma}}$ из указанного ранее класса. Для него справедливо

$$\int\limits_\Omega \mathrm{sym}\,(\tilde{\tilde{\sigma}}) : \varepsilon(w)\, d\Omega = \int\limits_\Omega (S_1^1 w_{1,1} + (S_1^2 + S_2^1)\frac{w_{1,2} + w_{2,1}}{2} + S_2^2 w_{2,2})\, d\Omega =$$
$$= \int\limits_\Omega ((S_1^1 w_{1,1} + S_2^1 w_{1,2}) + (S_1^2 w_{2,1} + S_2^2 w_{2,2}))\, d\Omega - \int\limits_\Omega \mathrm{skew}\,(\tilde{\tilde{\sigma}}) : \nabla w\, d\Omega,$$

где

$$(\nabla w)_{ij} = w_{j,i}, \quad i, j = 1, 2.$$

Интегрируя по частям, получаем

$$\int\limits_\Omega \mathrm{sym}\,(\tilde{\tilde{\sigma}}) : \varepsilon(w)\, d\Omega = -\int\limits_\Omega (\mathrm{div}\, S^1 w_1 + \mathrm{div}\, S^2 w_2)\, d\Omega - \int\limits_\Omega \mathrm{skew}\,(\tilde{\tilde{\sigma}}) : \nabla w\, d\Omega.$$

Далее, повторяя преобразования, аналогичные разделу 4.3, приходим к соотношению, в котором появляется дополнительное слагаемое, представляющее собой штраф за невыполнение условия симметрии в явном виде

$$\|e\| \le \mathcal{D}(\tilde{u}, \mathrm{sym}\,(\tilde{\tilde{\sigma}})) + \mathfrak{c}_{VI} \|R(\tilde{\tilde{\sigma}})\|_\Omega + \mathfrak{c}_K \|\mathrm{skew}\,(\tilde{\tilde{\sigma}})\|_\Omega,$$

где $\mathfrak{c}_{VI} = \mathfrak{c}_V \sqrt{|\Omega|}$, а $\mathfrak{c}_K$ — константа, связанная с неравенством Корна и константой α_1. Для преобразования к виду, аналогичному (4.7), необходимо использовать два свободных параметра, а именно

$$\|e\|^2 \leq (1+\beta_1)\mathcal{D}^2(\tilde{u}, \operatorname{sym}(\tilde{\tilde{\sigma}})) + \left(1+\frac{1}{\beta_1}\right)\left(\mathfrak{c}_{VI}\|R(\tilde{\tilde{\sigma}})\|_\Omega + \mathfrak{c}_K\|\operatorname{skew}(\tilde{\tilde{\sigma}})\|_\Omega\right)^2 \leq$$
$$\leq (1+\beta_1)\mathcal{D}^2(\tilde{u}, \operatorname{sym}(\tilde{\tilde{\sigma}})) + \left(1+\frac{1}{\beta_1}\right)(1+\beta_2)\mathfrak{c}_{VI}^2\|R(\tilde{\tilde{\sigma}})\|_\Omega^2 +$$
$$+ \left(1+\frac{1}{\beta_1}\right)\left(1+\frac{1}{\beta_2}\right)\mathfrak{c}_K^2\|\operatorname{skew}(\tilde{\tilde{\sigma}})\|_\Omega^2, \quad (4.8)$$

где β_1 и β_2 — произвольные положительные параметры. При практической реализации на первой итерации удобно положить параметры равными единице, а после определения поля напряжений пересчитать их по формулам

$$\beta_2 = \left(\mathfrak{c}_K\|\operatorname{skew}(\tilde{\tilde{\sigma}})\|_\Omega\right) \,/\, \left(\mathfrak{c}_{VI}\|R(\tilde{\tilde{\sigma}})\|_\Omega\right);$$
$$\beta_1 = (1+1/\beta_2)\,\mathfrak{c}_K\|\operatorname{skew}(\tilde{\tilde{\sigma}})\|_\Omega \,/\, \mathcal{D}(\tilde{u}, \operatorname{sym}(\tilde{\tilde{\sigma}})),$$

дающим оптимальные значения.

4.6. Смешанные аппроксимации метода конечных элементов для четырехугольников и некоторые детали их реализации

Рассмотрим подробнее преобразование, связывающее произвольный элемент разбиения $\mathcal{K}$ с эталонным элементом $\hat{\mathcal{K}}$ (Рисунок 4.2 слева и справа, соответственно). Обозначим его через $\mathcal{F}$, то есть $\mathcal{K} = \mathcal{F}(\hat{\mathcal{K}})$, $x = \mathcal{F}(\hat{x})$, $\hat{x} = \mathcal{F}^{-1}(x)$. Координаты вершин элемента $\mathcal{K}$ заданы в глобальной системе координат $x = (x_1, x_2)$, а эталонный элемент задан в локальной системе координат $\hat{x} = (\hat{x}_1, \hat{x}_2)$. Рассмотрим произвольную функцию $\hat{\psi} : \hat{\mathcal{K}} \to \mathbb{R}^2$. Известно, что эта функция на произвольном элементе выражается с помощью преобразования Пиола, обозначаемого далее $P_{\mathcal{F}}$, а именно

$$\psi = P_{\mathcal{F}}\hat{\psi} : \quad \mathcal{K} \to \mathbb{R}^2;$$

$$\psi(x) = \frac{1}{[J\mathcal{F}](\hat{x})}[D\mathcal{F}](\hat{x})\hat{\psi}(\hat{x});$$
$$\operatorname{div}\psi(x) = \frac{1}{[J\mathcal{F}](\hat{x})}\hat{\operatorname{div}}\hat{\psi}(\hat{x}),$$

где $[D\mathcal{F}](\hat{x})$ — матрица Якоби преобразования $\mathcal{F}$, а $[J\mathcal{F}](\hat{x})$ — ее определитель (см., например, D.N. Arnold, D. Boffi, R.S. Falk [251], R.G. Duran [338]). Также, для произвольной скалярной функции $\hat{p} : \hat{\mathcal{K}} \to \mathbb{R}$ справедливы формулы

$$\int\limits_{\mathcal{K}} \operatorname{div}\psi \;\; p\, dx = \int\limits_{\hat{\mathcal{K}}} \hat{\operatorname{div}}\hat{\psi} \;\; \hat{p}\, d\hat{x};$$
$$\int\limits_{\partial\mathcal{K}} \psi\cdot n \;\; p\, d\Gamma = \int\limits_{\partial\hat{\mathcal{K}}} \hat{\psi}\cdot\hat{n} \;\; \hat{p}\, d\hat{\Gamma},$$

где $p = \hat{p}\circ F^{-1}$, а $\partial\mathcal{K}$ и $\partial\hat{\mathcal{K}}$ — границы элементов, соответственно.

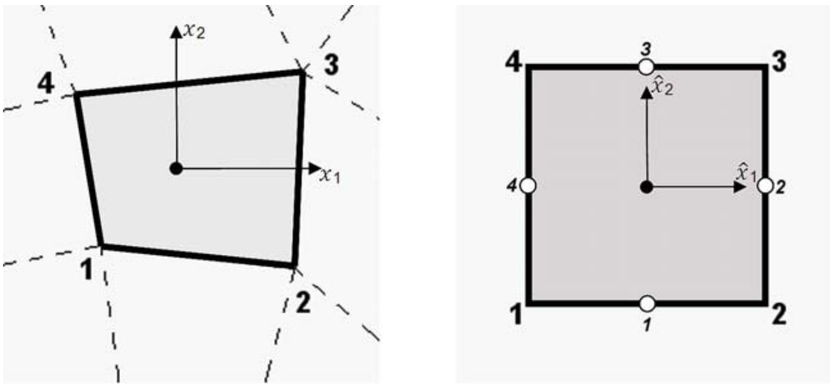


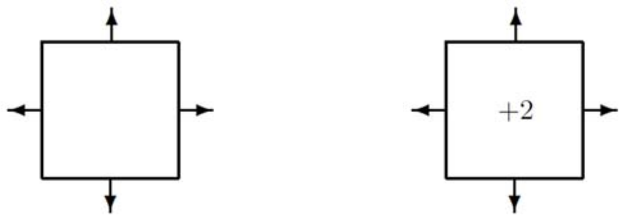
Рисунок 4.2: Связь нумерации вершин эталонного элемента и произвольного четырехугольника.

Степенями свободы для простейшего элемента Равьяра–Тома нулевого порядка являются нормальные составляющие вектор-функции в центрах ребер, то есть $\hat{\psi}\cdot\hat{n}_i, i = 1, ...4$, где $\hat{n}_i$ — внешняя нормаль к i-ой стороне, а нумерация сторон указана на Рисунке 4.2 справа. Соответствующее пространство обозначается $\mathcal{RT}_0(\hat{\mathcal{K}}) := \mathcal{P}_{1,0}(\hat{\mathcal{K}})\times\mathcal{P}_{0,1}(\hat{\mathcal{K}})$, где $\mathcal{P}_{i,j}(\hat{\mathcal{K}})$ — пространство полиномов над эталонным элементом $\hat{\mathcal{K}}$ степени не выше i по $\hat{x}_1$ и j — по $\hat{x}_2$. Явный вид функций формы (обозначим их $\hat{\varphi}_i,\ i = 1, ...4$), соответствующих каждой стороне, нетрудно получить из условия

$$\hat{\varphi}_i \cdot \hat{n}_j = \delta_{ij}, \quad i, j = 1, ...4,$$

где δ_{ij} — символ Кронекера. Имеем

$$\hat{\varphi}_1(\hat{x}) = \begin{bmatrix} 0 \\ (\hat{x}_2 - 1)/2 \end{bmatrix}, \quad \hat{\varphi}_2(\hat{x}) = \begin{bmatrix} (\hat{x}_1 + 1)/2 \\ 0 \end{bmatrix},$$
$$\hat{\varphi}_3(\hat{x}) = \begin{bmatrix} 0 \\ (\hat{x}_2 + 1)/2 \end{bmatrix}, \quad \hat{\varphi}_4(\hat{x}) = \begin{bmatrix} (\hat{x}_1 - 1)/2 \\ 0 \end{bmatrix};$$



(1) $\mathcal{RT}_0(\hat{\mathcal{K}})$ (2) $\mathcal{ABF}_0(\hat{\mathcal{K}})$

Рисунок 4.3: Степени свободы для рассматриваемых элементов.

$$\hat{\varphi}_{1,1} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \hat{\varphi}_{2,1} = \begin{bmatrix} 1/2 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \hat{\varphi}_{3,1} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \hat{\varphi}_{4,1} = \begin{bmatrix} 1/2 \\ 0 \end{bmatrix};$$

$$\hat{\varphi}_{1,2} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1/2 \end{bmatrix}, \quad \hat{\varphi}_{2,2} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \hat{\varphi}_{3,2} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1/2 \end{bmatrix}, \quad \hat{\varphi}_{4,2} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix};$$

$$\hat{\mathrm{div}}\hat{\varphi}_i = 1/2,$$

где $\hat{\varphi}_{i,k} := \partial\hat{\varphi}_i / \partial\hat{x}_k, i = 1, ...4, k = 1, 2$. В работе [251] на примере решения уравнения Пуассона смешанным методом и методом наименьших квадратов показано, что при применении для четырехугольных элементов пары пространств

$\mathcal{Q}_1(\hat{\mathcal{K}}) \times \mathcal{RT}_0(\hat{\mathcal{K}})$, где первое пространство соответствует билинейной аппроксимации скалярной переменной, а второе — аппроксимации Равьяра–Тома наименьшего порядка для векторной переменной (градиента), могут возникать проблемы со сходимостью на разбиениях, отличных от равномерного разбиения области на квадраты. Эти трудности, однако, удается преодолеть при использовании другой пары пространств $\mathcal{Q}_1(\hat{\mathcal{K}}) \times \mathcal{ABF}_0(\hat{\mathcal{K}})$, где $\mathcal{ABF}_0(\hat{\mathcal{K}}) := \mathcal{P}_{2,0}(\hat{\mathcal{K}}) \times \mathcal{P}_{0,2}(\hat{\mathcal{K}})$ — предложенное в [251] расширенное пространство, содержащее помимо исходных четырех степеней свободы на ребрах еще две степени свободы внутри элемента (Рисунок 4.3). В этой же работе можно найти теоретическое обоснование наблюдаемого эффекта и соответствующие априорные оценки скорости сходимости (см., также, R.G. Duran [338], P.B. Bochev, D. Ridzal [445], D.Y. Kwak, H.C. Pyo [446], D. Boffi, L. Gastaldi [447]). Дополнительной парой параметров для элемента Арнольда–Боффи–Фалка являются следующие интегралы:

$$\int\limits_{\hat{\mathcal{K}}} \hat{\operatorname{div}}\hat{\psi} \;\; \hat{x}_1 \, d\hat{x}, \quad \int\limits_{\hat{\mathcal{K}}} \hat{\operatorname{div}}\hat{\psi} \;\; \hat{x}_2 \, d\hat{x}.$$

Получим соответствующие функции формы, обозначив их $\hat{\phi}_1(\hat{x})$ и $\hat{\phi}_2(\hat{x})$, из условий

$$\int\limits_{\hat{\mathcal{K}}} \hat{\operatorname{div}}\hat{\phi}_1 \;\; \hat{x}_1 \, d\hat{x} = 1, \quad \int\limits_{\hat{\mathcal{K}}} \hat{\operatorname{div}}\hat{\phi}_1 \;\; \hat{x}_2 \, d\hat{x} = 0, \tag{4.9}$$

$$\hat{\phi}_1 \cdot \hat{n}_j = 0, \quad j = 1, ...4 \quad \text{в центрах ребер;} \tag{4.10}$$

$$\int\limits_{\hat{\mathcal{K}}} \hat{\operatorname{div}}\hat{\phi}_2 \;\; \hat{x}_1 \, d\hat{x} = 0, \quad \int\limits_{\hat{\mathcal{K}}} \hat{\operatorname{div}}\hat{\phi}_2 \;\; \hat{x}_2 \, d\hat{x} = 1,$$

$$\hat{\phi}_2 \cdot \hat{n}_j = 0, \quad j = 1, ...4 \quad \text{в центрах ребер.}$$

Для рассмотренных ранее функций введенные интегралы равны нулю, например,

$$\int\limits_{\hat{\mathcal{K}}} \hat{\operatorname{div}} \hat{\varphi}_1 \; \hat{x}_1 \, d\hat{x} = \int\limits_{-1}^{1} \int\limits_{-1}^{1} \hat{x}_1/2 \; d\hat{x}_1 d\hat{x}_2 = 0,$$

$$\int\limits_{\hat{\mathcal{K}}} \hat{\operatorname{div}} \hat{\varphi}_1 \; \hat{x}_2 \, d\hat{x} = \int\limits_{-1}^{1} \int\limits_{-1}^{1} \hat{x}_2/2 \; d\hat{x}_1 d\hat{x}_2 = 0,$$

то есть они не требуют модификации. Записав полином из пространства $\mathcal{P}_{2,0}(\hat{\mathcal{K}}) \times \mathcal{P}_{0,2}(\hat{\mathcal{K}})$ в общем виде через неопределенные коэффициенты α_{ij} при $i = 1, 2, j = 0, 1, 2$

$$\hat{\phi}_1(\hat{x}) = \begin{bmatrix} \alpha_{10} + \alpha_{11}\hat{x}_1 + \alpha_{12}\hat{x}_1^2 \\ \alpha_{20} + \alpha_{21}\hat{x}_2 + \alpha_{22}\hat{x}_2^2 \end{bmatrix},$$

используем условия (4.10) в точках элемента $\hat{\mathcal{K}}$

$$(0, -1), \quad (1, 0), \quad (0, 1), \quad (-1, 0),$$

где

$$\hat{n}_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \end{bmatrix}, \quad \hat{n}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \hat{n}_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \hat{n}_4 = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Имеем уравнения

$$\alpha_{20} - \alpha_{21} + \alpha_{22} = 0, \quad \alpha_{10} + \alpha_{11} + \alpha_{12} = 0,$$

$$\alpha_{20} + \alpha_{21} + \alpha_{22} = 0, \quad \alpha_{10} - \alpha_{11} + \alpha_{12} = 0,$$

следовательно, $\alpha_{21} = \alpha_{11} = 0$, $\alpha_{20} = -\alpha_{22}$, $\alpha_{10} = -\alpha_{12}$ и

$$\hat{\phi}_1(\hat{x}) = \begin{bmatrix} \alpha_{10}(1 - \hat{x}_1^2) \\ \alpha_{20}(1 - \hat{x}_2^2) \end{bmatrix}.$$

Учитывая условия (4.9)

$$\int\limits_{-1}^{1} \int\limits_{-1}^{1} 2(\alpha_{10}\hat{x}_1 + \alpha_{20}\hat{x}_2)\hat{x}_1 d\hat{x}_1 d\hat{x}_2 = -1;$$

$$\int\limits_{-1}^{1} \int\limits_{-1}^{1} 2(\alpha_{10}\hat{x}_1 + \alpha_{20}\hat{x}_2)\hat{x}_2 d\hat{x}_1 d\hat{x}_2 = 0,$$

имеем $\alpha_{10} = -3/8, \alpha_{20} = 0$, то есть

$$\hat{\phi}_1(\hat{x}) = \begin{bmatrix} 3(\hat{x}_1^2 - 1)/8 \\ 0 \end{bmatrix},$$

и по аналогии

$$\hat{\phi}_2(\hat{x}) = \begin{bmatrix} 0 \\ 3(\hat{x}_2^2 - 1)/8 \end{bmatrix}.$$

Дальнейшая процедура формирования системы линейных алгебраических уравнений, соответствующей функционалу в правой части оценки (4.8), отличается от стандартной тем, что при обходе по элементам вклады от интегралов привязываются к степеням свободы, относящимся к ребрам элемента или самому элементу, а не его вершинам.

4.7. Численные результаты работы авторского комплекса программ для оценки точности приближенных решений в плоских задачах классической теории упругости

Важное место в применении любых численных методов занимает их реализация и проверка вычислительным экспериментом. В качестве источника приближенного решения использован пакет ANSYS, широко применяющийся в инженерной практике, поскольку коммерческие пакеты тестируются в промышленных масштабах. Поэтому их разумно привлекать при проверке собственного программного кода, реализованного на языке FORTRAN стандарта 2003/2008 с использованием средств библиотеки IMSL. В частности, библиотека использовалась при работе с разреженными матрицами.

Чтобы не рассматривать проблему оценки константы в неравенстве Корна, не относящуюся напрямую к теме исследования, примеры параграфа ограничены случаем, когда присутствуют только граничные условия в перемещениях.

Тогда эта константа определяется аналитически вне зависимости от геометрии области.

***Пример* 4.2.** *Область с полигональной границей*

В данном примере рассматривается задача о плоской деформации в области, изображенной на Рисунке 4.4. Слева приведена форма области и ее на-

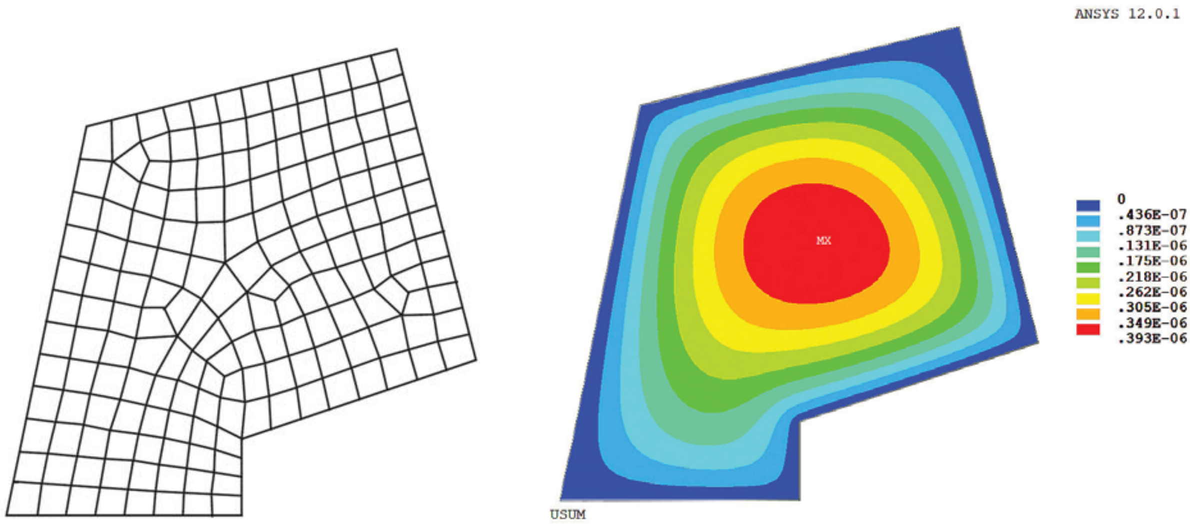


Рисунок 4.4: Форма области, начальное разбиение и решение для примера 4.2.

чальное разбиение. Последующие сетки получены из предыдущих разбиений путем их равномерного измельчения по каждой стороне в два раза. Для анализа эффективности методики вычисляется решение на мелкой сетке. Свойства материала для этой и следующей задачи такие же, как в примере 4.1. Объемная сила f задается через ускорение $[-5.0\ \ 3.0]$ **м/с^2** и плотность материала.

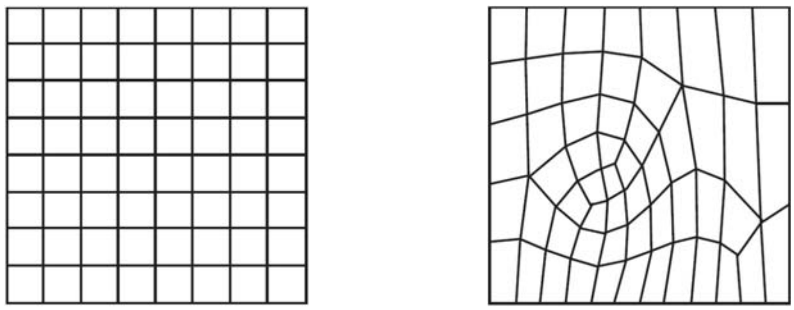
Таблица 4.2: Данные для различных аппроксимаций в примере 4.2

N_{el}	$\|e\|$	$e\%$	$I_{eff}(1)$	$I_{eff}(2)$	$I_{eff}(3)$
173	0.0537	12.1%	1.8	2.3	1.6 (1.2)
692	0.0277	6.2%	2.0	2.3	1.6 (1.2)
2768	0.0141	3.2%	2.4	2.4	1.6 (1.2)

Мы сравниваем индексы эффективности для трех методик, связанных с (1) тройкой непрерывных аппроксимаций, (2) парой аппроксимаций Равьяра–Тома и (3) парой аппроксимаций Арнольда–Боффи–Фалка. Число элементов сеток N_{el}, погрешность соответствующих приближенных решений и результаты оценки погрешности приведены в Таблице 4.2. В последнем столбце в скобках указаны индексы эффективности индикатора, учитывающего только первое слагаемое мажоранты. Из данных таблицы видно, что когда необходимый уровень точности 95% достигнут, только последний способ позволяет остановить процесс вычислений на данной итерации. Остальные оценки являются менее точными.

***Пример* 4.3.** *Квадратная область с разными начальными разбиениями*

Далее рассматривается задача в квадратной области. Объемная сила f задается через ускорение $[-1.0 \;\; 0.0]$ $\mathbf{м/с^2}$. Мы сравниваем индексы эффективности трех мажорант на сетках, состоящих из квадратов и из четырехугольников общего вида (см. Рисунок 4.5). Можно ожидать, что согласно [251] аппроксимации Равьяра–Тома будут давать приемлемый результат только в первом случае и существенно проигрывать во втором. Это предположение подтверждают данные, которые представлены в Таблице 4.3 и Таблице 4.4. Эффективность третьего индикатора остается постоянной, а для второго наблюдается ухудшение качества оценок при переходе к неструктурированным разбиениям.



(1) (2)

Рисунок 4.5: Варианты начальных разбиений области для примера 4.3.

Таблица 4.3: Данные для различных аппроксимаций в примере 4.3 для сетки типа (1)

N_{el}	$\|\|e\|\|$	$e\%$	$I_{eff}(1)$	$I_{eff}(2)$	$I_{eff}(3)$
64	0.601×10^{-3}	16.9%	1.5	1.7	1.6 (1.2)
256	0.305×10^{-3}	8.6%	1.7	1.6	1.6 (1.2)
1024	0.153×10^{-3}	4.3%	1.8	1.6	1.6 (1.2)

Таблица 4.4: Данные для различных аппроксимаций в примере 4.3 для сетки типа (2)

N_{el}	$\|\|e\|\|$	$e\%$	$I_{eff}(1)$	$I_{eff}(2)$	$I_{eff}(3)$
55	0.885×10^{-3}	24.9%	1.5	2.0	1.7 (1.2)
220	0.452×10^{-3}	12.7%	1.6	2.1	1.7 (1.2)
880	0.229×10^{-3}	6.5%	1.8	2.2	1.7 (1.2)

***Пример* 4.4.** *Область с отверстием*

Заключительный пример параграфа отличается от предыдущего только формой области, приведенной на Рисунке 4.6, и величиной ускорения, а именно $[-9.8 \quad 0.0]$ $\mathbf{м/с^2}$. По аналогии с первым примером область содержит отверстие. Мы сравниваем индексы эффективности для трех типов аппроксимаций на сетках, состоящих из квадратных элементов и, частично, четырехугольников общего вида. Данные Таблицы 4.5 подтверждают сделанные ранее выводы. Также обращает на себя внимание тот факт, что индикатор погрешности, основанный на первом слагаемом оценки, во всех примерах дает достаточно хороший результат (индексы эффективности от 1.0 до 1.2). Тем не менее, гарантированную верхнюю границу, никогда не ведущую к недооценке погрешности, можно получить только в том случае, если учесть все слагаемые.

Таким образом, разработан эффективный способ реализации функциональных апостериорных оценок для плоских задач линейной теории упругости. Ме-

Таблица 4.5: Данные для различных аппроксимаций в примере 4.4

N_{el}	$\|\|e\|\|$	$e\%$	$I_{eff}(1)$	$I_{eff}(2)$	$I_{eff}(3)$
167	0.0700	28.3%	1.9	1.8	1.6 (1.0)
668	0.0374	15.8%	2.4	1.8	1.6 (1.1)
2672	0.0215	9.1%	3.0	1.9	1.6 (1.1)
10688	0.0125	5.3%	3.9	1.9	1.7 (1.2)

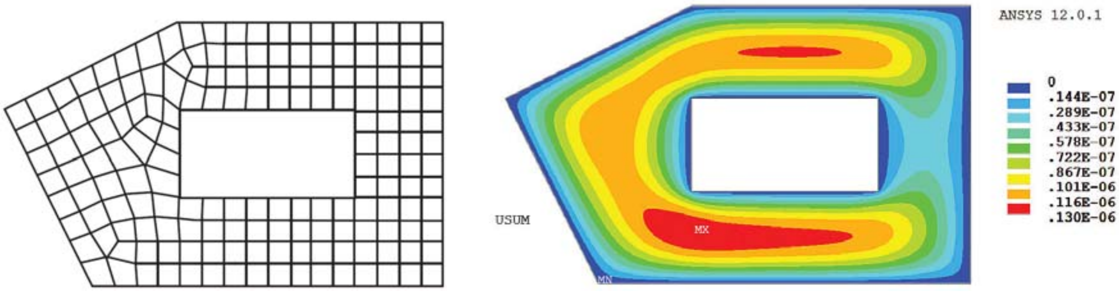


Рисунок 4.6: Форма области, начальное разбиение и решение для примера 4.4.

тодика применена к приближенным решениям, вычисленным в пакете ANSYS. Вычислительный эксперимент показал, что лучший результат достигается на смешанных аппроксимациях Арнольда–Боффи–Фалка. При их использовании индекс эффективности оценок не демонстрирует заметного роста с увеличением числа элементов разбиения, что является необходимым условием применения методики в инженерной практике. Если ограничиться использованием индикатора погрешности, основанного на первом слагаемом, а не гарантированной верхней оценки, то степень переоценки истинного значения ошибки не превышает 20%. Представленные выше результаты опубликованы автором в [80] и [259]. Отметим, что вывод о преимуществе функциональной мажоранты со слабым учетом условия симметрии тензора напряжений коррелирует с численными результатами, приведенными в работе [448], входящей в серию из трех работ с общим автором: Z. Cai, G. Starke [449], Z. Cai, J. Korsawe, G. Starke [450], G. Starke, A. Schwarz, J. Schröder [448]. Она посвящена не контролю погрешности, а исследованию одного из современных методов решения краевых задач, являющегося альтернативой смешанным методам конечных элементов. Рассмотренный в [448] функционал имеет близкую к мажоранте структуру. Существенное отличие заключается в том, что баланс слагаемых в мажоранте получен из строгих, обоснованных математической теорией соображений и позволяет использовать ее для вычисления гарантированных верхних оценок погрешности, а функционал в [448] предложен из иных соображений. Основной численный результат работы — демонстрация того, что алгоритм с учетом симметрии тензора в виде штрафного слагаемого обеспечивает более быструю сходимость к нулю $\mathbb{L}_2$-нормы невязки уравнения равновесия.

4.8. Случай нескольких материалов в модели и сравнение с пакетом ANSYS

Приведем серию из трех относительно простых задач, объединенных общей геометрией. Примеры направлены в первую очередь на оценку эффективности апостериорного контроля погрешности и сравнение с результатами работы стандартной методики пакета ANSYS при помощи индекса эффективности апостериорной оценки или индикатора.

Ниже рассматривается единый блок примеров из работы автора [81], для которого геометрия области, свойства материалов и условия нагружения взяты из работы V. Manet [451], посвященной расчетам трехслойных структур в пакете ANSYS. Примеры отличаются друг от друга лишь свойствами материалов. Геометрия области приведена на Рисунке 4.7 вверху — это прямоугольник. Ширина области составляет 24 **мм**, высота — 2 **мм**. Твердое тело состоит из трех частей. Верхний и нижний слои сделаны из одного материала. Толщина среднего слоя, сделанного из другого материала, составляет 80% от общей. На Рисунке 4.7 также приведено начальное разбиение области конечными элементами.

Пример 4.5. *Трехслойная структура с разными свойствами наполнителя*

Серия 1. Сначала рассмотрим случай, когда материал однороден и имеет следующие свойства: модуль Юнга 3.4 **ГПа** и коэффициент Пуассона 0.34. На верхнюю кромку приложено давление 1 **МПа**, а боковые кромки нижнего слоя закреплены. Основные параметры сеток указаны в 1–2 столбце Таблицы 4.6 — это общее число элементов и количество разбиений каждого из слоев[8].

Таблица 4.6: Поведение сравниваемых оценок и индикаторов погрешности на последовательности вложенных конечно-элементных разбиений для примера 4.5

сетка	N_{el}	$\|u - \tilde{u}\|$	$e\%$	I_{eff} (индикатор)	I_{eff} (ANSYS)
Серия 1					
3 x 1 на 20	60	0.345×10^0	46.3	2.9 (1.3)	1.2
3 x 2 на 40	240	0.214×10^0	28.7	2.8 (1.4)	1.2
3 x 4 на 80	960	0.125×10^0	16.8	2.8 (1.5)	1.3
3 x 8 на 160	3840	0.705×10^{-1}	9.4	2.9 (1.5)	1.3
Серия 2					
3 x 1 на 20	60	0.146×10^1	61.7	1.4 (0.8)	1.6
3 x 2 на 40	240	0.975×10^0	41.2	1.5 (0.9)	2.4
3 x 4 на 80	960	0.589×10^0	24.8	1.5 (1.0)	3.9
3 x 8 на 160	3840	0.329×10^0	13.9	1.6 (1.1)	6.7
Серия 3					
3 x 1 на 20	60	0.337×10^1	77.3	1.0 (0.6)	1.3
3 x 2 на 40	240	0.240×10^1	55.4	1.2 (0.9)	1.8
3 x 4 на 80	960	0.146×10^1	33.7	1.3 (1.0)	2.9
3 x 8 на 160	3840	0.802×10^0	18.5	1.4 (1.1)	5.3

Данные об оценке погрешности представлены в 3–6 столбцах таблицы. Это

[8] запись «3 x 1 на 20» читается «три слоя с одним разбиением по вертикали и двадцатью по горизонтали»

соответственно: абсолютная погрешность; относительная погрешность; индексы эффективности для функциональной оценки и индикатора, основанного на ее первом слагаемом (в скобках) и индикатора, который обеспечивает пакет ANSYS. Из представленных результатов можно сделать вывод, что стандартная процедура пакета дает в случае однородного материала приемлемый результат, который чуть лучше, чем индикатор, основанный на функциональной апостериорной оценке. Индексы эффективности обоих подходов стабильны при измельчении сетки.

Серии 2 и 3. В двух следующих случаях материал наполнителя имеет другие свойства. Во втором — модуль Юнга 0.34 **ГПа** и коэффициент Пуассона 0.40 (пена [451][9]), а третьем примере — модуль Юнга 0.07 **ГПа** (мягкая пена [451]). Данные об оценке погрешности также представлены в Таблице 4.6. Основной вывод из этих результатов заключается в том, что даже такое простое обобщение выходит за рамки применимости стандартной процедуры ANSYS. Индексы эффективности для нее демонстрируют существенный рост при измельчении сетки (от 1.6 до 6.7 и от 1.3 до 5.3, соответственно). Это делает методику пакета практически бесполезной, поскольку она указывает на погрешность свыше 90% там, где реальная не превышает 15%. Разработчики неявно признают ограниченность возможностей пакета, поскольку пользователь получает предупреждение о том, что в подобных задачах результаты, касающиеся индикации ошибки, могут быть неудовлетворительными и не заслуживают полного доверия. С другой стороны, индексы эффективности для функционального подхода не превышают 1.6 и не демонстрируют существенного роста по сравнению с методом осреднения. На Рисунке 4.7 в левой колонке сверху вниз изображены приближенные решения соответствующих задач, в правой колонке — индикаторы распределения погрешности по области на последней сетке, полученные на основе функционального подхода. Эта информация в случае необходимости может послужить основой для адаптивного вычисления приближенного решения,

[9] сохранена терминология оригинала

то есть для построения адаптивных алгоритмов.

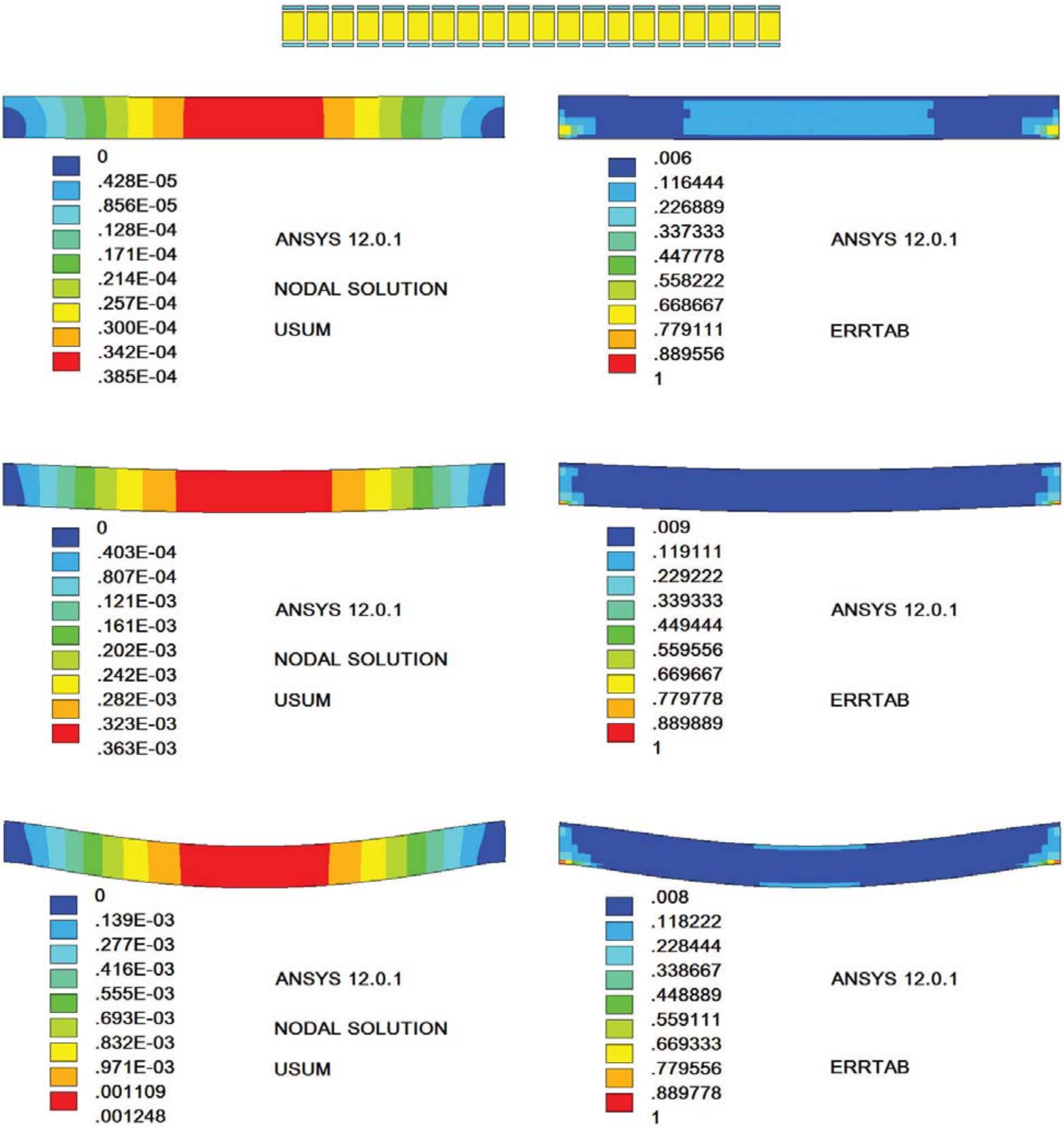


Рисунок 4.7: Начальное разбиение расчетной области, результаты решения и индикации погрешности: приближенные решения задач 1–3 для примера 4.5 (левая колонка сверху вниз); индикатор локального распределения ошибки по области, который дает функциональная апостериорная оценка (правая колонка сверху вниз).

4.9. Адаптивные алгоритмы на основе функциональной мажоранты с парой аппроксимаций Равьяра–Тома нулевого порядка

Изложим кратко некоторые характерные результаты, представленные в диссертации М.А. Чуриловой [246], в которой наряду с работой M.A. Churilova, M.E. Frolov [253] можно найти еще несколько примеров сравнения адаптивных алгоритмов с функциональными мажорантами, вычисленными на основе непрерывных аппроксимаций и аппроксимаций Равьяра–Тома нулевого порядка на триангуляциях.

***Пример* 4.6.** *Продолжение примера 4.2 с адаптацией*

Проведем сравнение результатов расчета с результатами, полученными ранее на вложенных сетках, состоящих из четырехугольных элементов. Начальное разбиение, состоящее из 358 треугольных элементов (205 узлов), представлено на Рисунке 4.8. Ранее использовалась сетка с 173 четырехугольными элементами (202 узла). Прошлые результаты отражены в Таблице 4.2 для трех сеток. В Таблице 4.7 сохраняется логика обозначений: индекс эффективности $I_{eff}(1)$ относится к непрерывной аппроксимации, а $I_{eff}(2)$ — к аппроксимации Равьяра–Тома. Данные полностью согласуются с теми выводами, которые были сделаны для примера 4.2. Индекс эффективности не демонстрирует роста в случае использования пары аппроксимаций Равьяра–Тома. Узлы финальных сеток, получившихся после адаптации, представлены на Рисунке 4.9. В данном случае сравнение производится со встроенным индикатором пакета MATLAB, вычисленным на основе явного метода невязок. Он дает приемлемый результат с точки зрения сгущения сетки, но не может использоваться в качестве критерия остановки вычислительного процесса, поскольку завышает истинное значение ошибки на несколько порядков и в этом смысле абсолютно бесполезен.

Таблица 4.7: Результаты расчета на треугольных сетках для примера 4.6

N_{el}	$\|\|\|e\|\|\|$	$e\%$	$I_{eff}(1)$	$I_{eff}(2)$
358	0.0591	13.33	1.54	1.86
1432	0.0331	7.46	1.76	1.87
5728	0.0178	4.00	2.06	1.88

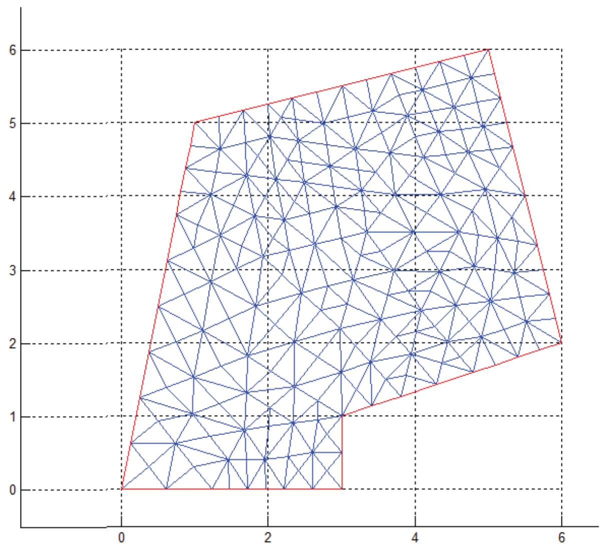


Рисунок 4.8: Триангуляция расчетной области в примере 4.6.

4.10. Некоторые результаты для пространственных задач

Рассматриваемые ниже результаты также относятся к задачам линейной теории упругости, но в трехмерном случае. Общая структура оценки погрешности (4.7) для него сохраняется. Поскольку использованы непрерывные трилинейные аппроксимации, то речь может идти только об индикаторе на основе функционального подхода. Вопрос реализации смешанных аппроксимаций и анализа эффективности гарантированных оценок остается открытым, что вполне соответствует общему уровню развития теории апостериорного контроля точности к началу XXI века. Например, цитируя S. Prudhomme, J.T. Oden,

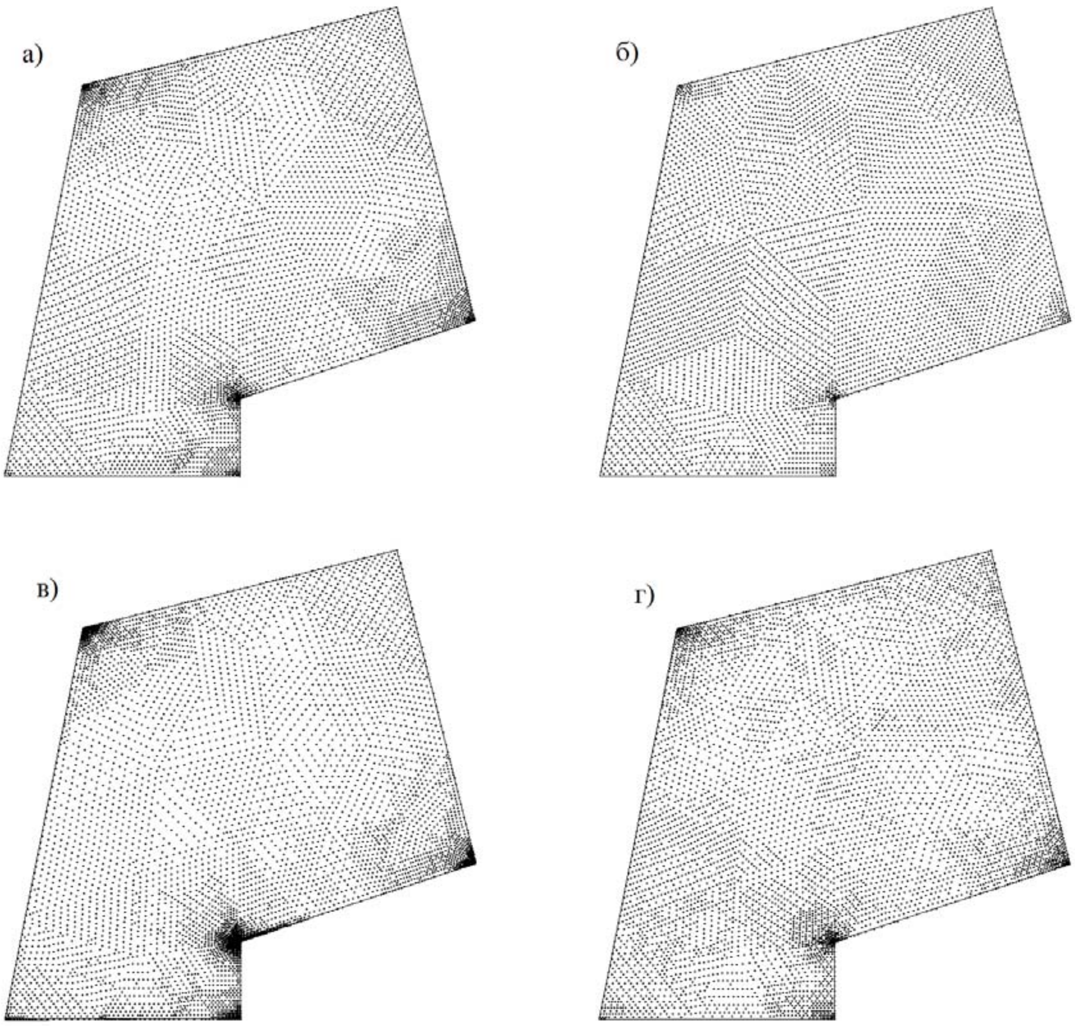


Рисунок 4.9: Результат работы адаптивных алгоритмов (а) с эталонным индикатором; (б) индикатором пакета; функциональной мажорантой с (в) непрерывной аппроксимацией и (г) аппроксимацией Равьяра–Тома для примера 4.6.

T. Westermann, J. Bass, M.E. Botkin [307][10] — «самые современные оценщики[11], например, включающие в себя уравновешивание, сложны для применения в конечных элементах в 3D и требуют значительно большего процессорного времени для выполнения». Таким образом, исследование, часть которого представлена ниже, является необходимым этапом для дальнейшего развития вычислительных алгоритмов на случай трехмерных задач. Более того, именно оно стало отправной точкой для той работы, которая в итоге легла в основу данной и

[10] перевод с оригинала выполнен автором

[11] в англоязычной литературе широко используется термин «estimator», для которого трудно подобрать удачный перевод

следующей глав диссертации, а также оказала существенное влияние на теоретическую часть предыдущей.

Приведем один из нескольких примеров, представленных в публикации автора [256].

***Пример* 4.7.** *Трехмерная задача в области сложной формы*

Ниже рассматривается задача, в которой присутствуют только условия в перемещениях в области, заданной набором из двенадцати вершин со следующими координатами (см. также Рисунок 4.10 с начальным разбиением области):

$$(0.00, 1.00, 1.00), (0.00, 3.80, 1.00), (2.40, 3.60, 1.00);$$
$$(3.63, 2.00, 1.00), (2.50, 2.00, 1.00), (2.50, 1.00, 1.00);$$
$$(0.00, 1.00, 4.00), (0.00, 3.80, 4.00), (2.40, 3.60, 4.00);$$
$$(3.63, 2.00, 4.00), (2.50, 2.00, 4.00), (2.50, 1.00, 4.00).$$

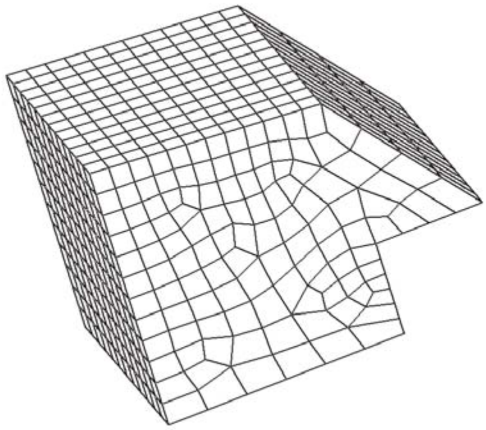


Рисунок 4.10: Форма расчетной области и начальное разбиение конечными элементами для примера 4.7.

Основные параметры сеток указаны в Таблице 4.8. Для оценки эффективности методики вычисляется решение на мелкой сетке, обозначенной RS. Отметим, что максимальная размерность задачи, которая решалась при оценке погрешности, составляет почти 0.5 млн. уравнений, а решение задачи на мелкой сет-

Таблица 4.8: Данные о сетках и эффективности оценок для примера 4.7

разбиение	N	N_{el}	$e\%$	функц.	ANSYS
0	1820	1404	15.6	16.5	22.2
1	11200	9672	9.4	10.8	14.3
2	81095	75168	4.2	5.5	7.9
RS	732253	707808			
	($\sim$ 2 млн. ур.)				

ке связано уже с системой порядка 2 млн. уравнений. Данные для рассматриваемой задачи следующие: перемещения всех граничных узлов фиксированы, ускорение $a_3 = 9.8$ **м/с**^{2} (учет собственного веса конструкции), E= 10.7 **ГПа**, ν= 0.15, плотность $\rho = 1.83 \times 10^3$ **кг/м**^{3}. Данные об оценке погрешности также собраны в Таблице 4.8. В ней представлена оценка ошибки снизу, полученная при помощи решения, вычисленного на мелкой сетке (столбец 4). Поскольку такая оценка практически совпадает с истинной погрешностью, мы пренебрегаем этой разницей и сравниваем остальные данные с ней. В последнем столбце дается значение индикатора относительной точности решения, которое выдает пакет. Вычисляется этот индикатор при помощи методики, предложенной в [147].

Из анализа данных, содержащихся в таблице, можно сделать вывод о том, что качество оценки погрешности оказывается высоким, поскольку используемые объемные конечные элементы (SOLID) хорошо подходят для решения данной задачи. Поэтому и точность приближенного решения достигает отметки 95%, считающейся в инженерной практике достаточной. Пакет ANSYS несколько завышает истинную величину погрешности. Отметим, что хотя нарушения неравенства «истинная погрешность $\leq$ оценка» не происходит, используемые индикаторы не являются гарантированными верхними оценками погрешности. Оценки стали бы гарантированными, если применять неравенство (4.7), но с практической точки зрения это связано с некоторыми затруднениями именно в трехмерном случае. Выше показано, как подобные трудности успешно преодолеваются для плоских задач, здесь же этот вопрос остается открытым. Реализация «несимметричной» мажоранты при помощи специальных конечных элементов, подобных элементу Арнольда–Боффи–Фалка, также остается открытой проблемой. На пути решения этой задачи могут оказаться полезны результаты, полученные недавно в работе R.S. Falk, P. Gatto, P. Monk [452], развивающей [251].

4.11. Основные выводы

В главе исследованы две мажоранты функционального типа и три методики их реализации для контроля точности решений задач линейной теории упругости. Вычислительные алгоритмы основаны на конечных элементах, характерных для стандартной обобщенной и двойственной смешанной формулировок задачи. На примере плоской деформации проведен их сравнительный анализ для разных случаев — в вычислительном эксперименте варьируется геометрия области, в том числе, присутствуют примеры в областях с входящими углами и отверстиями, а также рассматриваются разные типы краевых условий. Для части задач выполнен сравнительный анализ с аналогичными процедурами пакетов ANSYS и MATLAB.

По материалу главы можно сделать следующие заключения:

1. Из анализа публикаций следует вывод о том, что простые и не трудоемкие с вычислительной точки зрения методы не являются ни надежными, ни эффективными. Последнее подтверждается численными результатами, изложенными в главе.

2. Реализация функциональной апостериорной оценки с явным учетом условия симметрии присутствующего в ней тензора на основе стандартных

непрерывных аппроксимаций метода конечных элементов может приводить к существенному росту индекса эффективности, который наблюдался на сетках с четырехугольными элементами при равномерном разбиении и на триангуляциях, но уже в процессе адаптации. Недостаток является существенным, поскольку лишает смысла применение апостериорной оценки в качестве критерия остановки вычислений.

3. Показано, что ситуация исправляется за счет привлечения смешанных аппроксимаций и функциональной апостериорной оценки с учетом условия симметрии в слабой форме при помощи дополнительного штрафного слагаемого. Причем, вычисление функционала реализовано таким образом, чтобы использовать простейшие смешанные аппроксимации, обычно возникающие при решении уравнения Пуассона.

4. Вычислительный эксперимент показал, что лучший результат достигается на смешанных аппроксимациях Арнольда–Боффи–Фалка. В этом случае индекс эффективности оценок не демонстрирует существенного роста с увеличением числа элементов разбиения, что является одним из необходимых условий применения методики в инженерной практике.

5. Таким образом, разработана эффективная методика реализации вычисления функциональных апостериорных оценок для плоских задач линейной теории упругости, которая применена к приближенным решениям, полученным в пакете ANSYS. Сравнение с результатами работы стандартной процедуры контроля точности, встроенной в пакет, говорит об общем преимуществе функционального подхода и его более широких возможностях. Аналогичное заключение можно сделать относительно пакета MATLAB.

Глава 5

Апостериорные оценки в теории упругости Коссера

Существенная часть исследований диссертационной работы посвящена задачам моментной или несимметричной теории упругости, связанным с континуумом Коссера. Такие среды обладают расширенным по сравнению с классическими сплошными средами спектром свойств. Они позволяют учесть зернистость, волокнистость материала за счет наделения точек континуума свойствами твердого тела. Модели, построенные с их помощью, применяются при описании напряженно-деформированного состояния материалов с микроструктурой (гранулированных, порошкообразных, сыпучих). В таких моделях неявно присутствует малый параметр, характеризующий размер частиц микроструктуры и позволяющий учитывать взаимодействие механических процессов различного пространственного масштаба.

Как известно, силовое взаимодействие по обе стороны произвольной поверхности нагруженной среды в классических теориях деформируемого твердого тела задается только главным вектором сил. Последовательное развитие этой идеи приводит к симметричности тензоров напряжений и деформаций, фактически предполагая, что нагружаемое тело является бесструктурным деформируемым континуумом. Ограничения, накладываемые такой теорией пытался снять Фойхт (W. Voigt) в 1887 году в своей работе [453] об упругих свойствах кристаллов. Он предложил при описании силового взаимодействия учитывать дополнительно и главный момент. При этом тензоры как силовых, так и моментных напряжений оказываются несимметричными. Частицы среды обладают теперь 6 степенями свободы: тремя компонентами вектора перемещения и тремя — вектора независимого поворота. Одна из первых довольно полно разработанных подобных теорий изложена в 1909 году в книге E. Cosserat, F. Cosserat [454].

Интересный исторический очерк о жизни и творчестве братьев Коссера можно найти в статье В.И. Ерофеева [455].

Возобновление интереса к этой теории относится к 60-м годам XX века. Оно связано с именами многих известных специалистов в области механики (см., например, C. Truesdell, R.A. Toupin [456], R.A. Toupin [457], [458], R.D. Mindlin [459], [460], R.D. Mindlin, H.F. Tiersten [461], C. Truesdell, W. Noll [462], A.C. Eringen [463], A.C. Eringen, E.S. Suhubi [464], Э.Л. Аэро, Е.В. Кувшинский [465], [466], [467], A.E. Green, R.S. Rivlin [468], В.А. Пальмов [469], [470], В.Т. Койтер [471], W. Nowacki [472], [403]). Начиная с 60-х годов, интерес к таким моделям неуклонно растет. В настоящее время библиография, относящаяся к данной тематике и смежным проблемам, достаточно обширна.

Математическое описание среды Коссера можно найти в трудах В. Новацкого [403], Н.Ф. Морозова [473], В.В. Елисеева [474], I. Hlaváček, M. Hlaváček [475], а другие модели сред описаны, в частности, в работе I. Hlaváček, M. Hlaváček [476], монографиях G. Capriz [477], A.C. Eringen [478], В.И. Ерофеев [479], О.В. Садовская, В.М. Садовский [480], а также сборниках статей под общей редакцией нескольких авторов: G. Capriz, P. Giovine, P.M. Mariano [481], H. Altenbach, G.A. Maugin, V. Erofeev [482], H. Altenbach, S. Forest, A. Krivtsov [483]. В кратком варианте соотношения для среды Коссера изложены в работе S. Forest [484]. Отметим, что наибольший вклад в данный обзор внесли следующие статьи: Смолин И.Ю. [485], J. Jeong, P. Neff [486], В.В. Корепанов, М.А. Кулеш, В.П. Матвеенко, И.Н. Шардаков [487], а также монографии [403], [473], V.A. Eremeyev, L.P. Lebedev, H. Altenbach [488]. Подробный обзор литературы можно найти также в статьях J. Altenbach, H. Altenbach, V.A. Eremeyev [489], A.R. Hadjesfandiari, G.F. Dargush [490], G.A. Maugin [491], O. Sadovskaya, V. Sadovskii [492], M.A. Wheel [493], H.W. Zhang, H. Wang, P. Wriggers, B.A. Schrefler [494].

В последнее десятилетие начали более интенсивно развиваться методы численного решения задач, связанных с континуумом Коссера (см., например, [485],

[494], [493], [487], [492], [490], а также P. Neff, K. Chełmiński, W. Müller, C. Wieners [495], H.W. Zhang, H. Wang, B.S. Chen, Z.Q. Xie [496], A. Riahi, J.H. Curran [497], A. Riahi, J.H. Curran, H. Bidhendi [498], E. Providas, M.A. Kattis [499] и цитируемую там литературу). Делаются успешные попытки применения алгоритмов расчета на многопроцессорных системах — О.В. Садовская [500]. С другой стороны, практически отсутствуют работы, посвященные надежным методам апостериорного контроля точности вычисляемых аппроксимаций. Например, подход, основанный на привлечении методов теории двойственности вариационного исчисления, использован в работе [73], написанной в соавторстве с С.И. Репиным (см. также [254]). В ней для плоских задач в теории упругости Коссера предложена апостериорная оценка функционального типа для случая граничного условия Дирихле, заданного на всей границе области. Эти результаты изложены в параграфах 5.1–5.4. Далее рассмотрены задачи, граничные условия в которых могут включать как заданные перемещения и поворот, так поверхностные силы и момент, что является обобщением результата [73]. Соответствующий класс функциональных оценок получен в параграфах 5.5–5.6 и численно исследован в параграфе 5.8. Раздел 5.7 носит вспомогательный характер — в нем представлено аналитическое решение одной из плоских задач, использующееся в вычислительном эксперименте. Дальнейшее развитие на случай трехмерных задач требует существенно более сложных построений, которые могут быть выполнены по аналогии. В качестве альтернативного метода построения апостериорных индикаторов распределения погрешности, но не ее гарантированных оценок, можно упомянуть результат, изложенный в работе D. Perić, J. Yu, D.R.J. Owen [501]. К сожалению, автору неизвестны другие публикации, посвященные проблеме построения классических методов апостериорного контроля точности приближенных решений в задачах, связанных с континуумом Коссера. Таким образом, по всей видимости, представленные ниже результаты не имеют прямых аналогов.

5.1. Плоские задачи для континуума Коссера с граничным условием на перемещения и поворот

Пусть сплошная среда занимает ограниченную связную область $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ с достаточно гладкой границей Γ. Классическая постановка задачи заключается в нахождении в каждой внутренней точке сплошной среды векторной функции $u := (u_1, u_2)$ — перемещения вдоль осей $0x_1$ и $0x_2$, и скалярной функции $\omega := \omega_3$ — поворота вокруг оси $0x_3$. Поля перемещений и поворотов должны удовлетворять системе уравнений (см., например, Н.Ф. Морозов [473])

$$(\lambda + 2\mu)(\operatorname{div} u)_{,1} + (\mu + \mu_c)(u_{1,22} - u_{2,12}) + 2\mu_c\omega_{,2} + f_1 = 0, \tag{5.1}$$

$$(\lambda + 2\mu)(\operatorname{div} u)_{,2} + (\mu + \mu_c)(u_{2,11} - u_{1,21}) - 2\mu_c\omega_{,1} + f_2 = 0, \tag{5.2}$$

$$4B\Delta\omega - 4\mu_c\omega + 2\mu_c(u_{2,1} - u_{1,2}) + g = 0. \tag{5.3}$$

Здесь и далее запятая в нижнем индексе означает дифференцирование по соответствующей пространственной координате; $f := (f_1, f_2)$ и g — это функции, характеризующие заданные внутри области силовые и моментные внешние воздействия; λ, μ — классические константы Ляме для материала; μ_c, B — постоянные, характеризующие среду Коссера. При обращении последних в нуль мы приходим к уравнениям классической теории упругости.

Сначала ограничимся случаем, когда на границе области, которую занимает сплошная среда, заданы условия типа Дирихле. Таким образом, на Γ известны перемещения $u = u^\Gamma$ и поворот $\omega = \omega^\Gamma$. Далее мы предполагаем:

$$f \in \mathbb{L}_2(\Omega, \mathbb{R}^2), \quad g \in \mathbb{L}_2(\Omega);$$
$$u^\Gamma \in \mathbb{W}_2^{1/2}(\Gamma, \mathbb{R}^2), \quad \omega^\Gamma \in \mathbb{W}_2^{1/2}(\Gamma),$$

и используем следующие обозначения:

$$\varUpsilon := \overset{\circ}{\mathbb{W}}{}_2^1(\Omega, \mathbb{R}^2) + u^\Gamma, \quad \varUpsilon^0 := \overset{\circ}{\mathbb{W}}{}_2^1(\Omega, \mathbb{R}^2);$$

$$\varTheta := \overset{\circ}{\mathbb{W}}{}_2^1(\Omega) + \omega^\Gamma, \quad \varTheta^0 := \overset{\circ}{\mathbb{W}}{}_2^1(\Omega).$$

Известно, что функционал энергии для рассматриваемой задачи, определенный на паре элементов $(u, \omega) \in \Upsilon \times \Theta$, имеет вид ([473])

$$
\begin{aligned}
\mathcal{J}(u,\omega) = \int\limits_{\Omega} \mu \left(u_{1,1}^2 + u_{2,2}^2 + \frac{1}{2}(u_{2,1}+u_{1,2})^2 \right) d\Omega + \\
+ \int\limits_{\Omega} \left(\frac{\lambda}{2}(u_{1,1}+u_{2,2})^2 + \frac{\mu_c}{2}(u_{2,1}-u_{1,2}-2\omega)^2 + 2B(\omega_{,1}^2+\omega_{,2}^2) \right) d\Omega - \\
- \int\limits_{\Omega} (f\cdot u + g\omega)\; d\Omega = \int\limits_{\Omega} \frac{1}{2}\mathrm{L}\varepsilon(u) : \varepsilon(u)\, d\Omega + \\
+ \int\limits_{\Omega} \left(\frac{\mu_c}{2}(u_{2,1}-u_{1,2}-2\omega)^2 + 2B|\nabla\omega|^2 \right) d\Omega - \int\limits_{\Omega} (f\cdot u + g\omega)\; d\Omega,
\end{aligned}
$$

где

$$
\varepsilon(u) = \frac{1}{2}(\nabla u + (\nabla u)^T), \quad \mathrm{L}\varepsilon = \lambda\,\mathrm{tr}\,\varepsilon\mathbb{I} + 2\mu\varepsilon.
$$

Эта постановка соответствует случаю малых деформаций.

Условия стационарности дают нам определение обобщенного решения задачи, для которого соотношения (5.1)–(5.3) понимаются в слабой форме, а именно

$$
\int\limits_{\Omega} \left(\mathrm{L}\varepsilon(u) : \varepsilon(v^0) + p\,(v_{2,1}^0 - v_{1,2}^0) - f\cdot v^0 \right) d\Omega = 0, \quad \forall v^0 \in \Upsilon^0; \tag{5.4}
$$

$$
\int\limits_{\Omega} \left(4B\nabla\omega\cdot\nabla\theta^0 - 2p\theta^0 - g\theta^0 \right) d\Omega = 0, \quad \forall \theta^0 \in \Theta^0, \tag{5.5}
$$

где $p := \mu_c(u_{2,1} - u_{1,2} - 2\omega)$.

Вопросы корректности соответствующей математической постановки — существование и единственность обобщенного решения вариационной задачи и минимайзера функционала — обсуждаются, в частности, в книге Н.Ф. Морозова. Существование пары элементов, на которой достигается минимум $\mathcal{J}$ также следует из известных результатов вариационного исчисления, изложенных в книге О.А. Ладыженской и Н.Н. Уральцевой [382]. Действительно, поскольку имеет место оценка

$$
\mathcal{J}(u,\omega) \geq \mathcal{J}_1(u) + \mathcal{J}_2(\omega),
$$

где

$$\mathcal{J}_1(u) := \int\limits_\Omega \left(\frac{1}{2}\mathrm{L}\varepsilon(u) : \varepsilon(u) - f \cdot u\right) d\Omega,$$

$$\mathcal{J}_2(\omega) := \int\limits_\Omega \left(2B|\nabla\omega|^2 - g\omega\right) d\Omega,$$

то коэрцитивность $\mathcal{J}$ следует из коэрцитивности $\mathcal{J}_1$ и $\mathcal{J}_2$, которая устанавливается при помощи неравенств Корна и Фридрихса. Подробный обзор литературы, посвященной математическим вопросам для постановок в более общих случаях, а также вопросам сходимости, в том числе априорным оценкам скорости сходимости для галеркинских аппроксимаций, можно найти в статье [486].

5.2. Представление энергетической нормы отклонения от точного решения

Пусть элементы $(\tilde{u}_1, \tilde{u}_2)$ и $\tilde{\omega}$ — некоторое приближение к точному решению. Ему соответствует элемент $\tilde{p} := \mu_c(\tilde{u}_{2,1} - \tilde{u}_{1,2} - 2\tilde{\omega})$. Тогда, вводя отклонения компонент приближенного решения от точного $e_{\tilde{u}} := (u_1, u_2) - (\tilde{u}_1, \tilde{u}_2)$, $e_{\tilde{\omega}} := \omega - \tilde{\omega}$ и $e_{\tilde{p}} := p - \tilde{p}$, определим норму погрешности выражением

$$|\!|\!|(e_{\tilde{u}}; e_{\tilde{p}}; e_{\tilde{\omega}})|\!|\!| := \left(\int\limits_\Omega \left(\frac{1}{2}\mathrm{L}\varepsilon(e_{\tilde{u}}) : \varepsilon(e_{\tilde{u}}) + \frac{1}{2\mu_c}e_{\tilde{p}}^2 + 2B|\nabla e_{\tilde{\omega}}|^2\right) d\Omega\right)^{1/2}.$$

Рассмотрим разность значений функционала энергии на приближенном и точном решениях:

$$\mathcal{J}(\tilde{u}, \tilde{\omega}) - \mathcal{J}(u, \omega) = \int\limits_\Omega \left(\frac{1}{2}\mathrm{L}\varepsilon(\tilde{u}) : \varepsilon(\tilde{u}) + \frac{1}{2\mu_c}\tilde{p}^2 + 2B|\nabla\tilde{\omega}|^2\right) d\Omega +$$

$$+ \int\limits_\Omega \left(-\frac{1}{2}\mathrm{L}\varepsilon(u) : \varepsilon(u) - \frac{1}{2\mu_c}p^2 - 2B|\nabla\omega|^2 + f \cdot e_{\tilde{u}} + g e_{\tilde{\omega}}\right) d\Omega =$$

$$= \int\limits_\Omega \left(\frac{1}{2} \mathrm{L}\varepsilon(e_{\tilde u}) : \varepsilon(e_{\tilde u}) + \frac{1}{2\mu_c} e_{\tilde p}^2 + 2B|\nabla e_{\tilde\omega}|^2 \right) d\Omega +$$

$$+ \int\limits_\Omega \left(f \cdot e_{\tilde u} + g e_{\tilde\omega} - \mathrm{L}\varepsilon(u) : \varepsilon(e_{\tilde u}) - \frac{1}{\mu_c} p e_{\tilde p} - 4B \nabla\omega \cdot \nabla e_{\tilde\omega} \right) d\Omega. \qquad (5.6)$$

Нетрудно видеть, что поскольку имеет место представление

$$p e_{\tilde p} = \mu_c p((u_2 - \tilde u_2)_{,1} - (u_1 - \tilde u_1)_{,2} - 2(\omega - \tilde\omega)),$$

то из соотношений (5.4)–(5.5) при $v^0 = e_{\tilde u}$ и $\theta^0 = e_{\tilde\omega}$ следует, что последний интеграл в (5.6) равен нулю. Таким образом, имеет место равенство

$$|\!|\!| (e_{\tilde u}; e_{\tilde p}; e_{\tilde\omega}) |\!|\!|^2 = \mathcal{J}(\tilde u, \tilde\omega) - \mathcal{J}(u, \omega).$$

Из него получается обобщение известной оценки С.Г. Михлина [171] на вариационную задачу, соответствующую рассматриваемой модели теории Коссера.

5.3. Аналог оценки Прагера–Синжа

Введем лагранжиан $\mathcal{L}(v, \theta; \tau, q, s)$, используя пару исходных переменных

$$(v, \theta) \in \mathit{\Upsilon} \times \mathit{\Theta}$$

и тройку двойственных переменных

$$(\tau, q, s) \in \mathcal{H}(\Omega) := \mathbb{L}_2(\Omega, \mathbb{M}^{2\times 2}_{sym}) \times \mathbb{L}_2(\Omega) \times \mathbb{L}_2(\Omega, \mathbb{R}^2).$$

Как показано далее, эти элементы представляют собой симметричную и несимметричную части тензора силовых напряжений и ненулевые компоненты тензора моментных напряжений. Лагранжиан имеет вид

$$\mathcal{L}(v, \theta; \tau, q, s) = \int\limits_\Omega \left(\varepsilon(v) : \tau - \frac{1}{2} \mathrm{L}^{-1}\tau : \tau + q(v_{2,1} - v_{1,2} - 2\theta) \right) d\Omega +$$

$$+ \int\limits_\Omega \left(-\frac{1}{2\mu_c} q^2 + s \cdot \nabla\theta - \frac{1}{8B}|s|^2 - f \cdot v - g\theta \right) d\Omega.$$

Тогда справедливо соотношение

$$\sup_{(\tau,q,s)\in\mathcal{H}(\Omega)} \mathcal{L}(v,\theta;\tau,q,s) = \\ = \int\limits_{\Omega} \left(\frac{1}{2}\mathrm{L}\varepsilon(v) : \varepsilon(v) + \frac{\mu_c}{2}(v_{2,1} - v_{1,2} - 2\theta)^2 + 2B|\nabla\theta|^2 \right) d\Omega - \\ - \int\limits_{\Omega} (f \cdot v + g\theta)\, d\Omega = \mathcal{J}(v,\theta).$$

Далее мы заключаем, что

$$\inf_{(v,\theta)\in\Upsilon\times\Theta} \mathcal{L}(v,\theta;\tau,q,s) = \mathcal{I}^*(\tau,q,s) := \\ := \int\limits_{\Omega} \left(\varepsilon(u^\Gamma) : \tau + q(u^\Gamma_{2,1} - u^\Gamma_{1,2} - 2\omega^\Gamma) + s \cdot \nabla\omega^\Gamma - (f \cdot u^\Gamma + g\omega^\Gamma) \right) d\Omega - \\ - \int\limits_{\Omega} \left(\frac{1}{2}\mathrm{L}^{-1}\tau : \tau + \frac{1}{2\mu_c}q^2 + \frac{1}{8B}|s|^2 \right) d\Omega, \tag{5.7}$$

если двойственные переменные удовлетворяют соотношениям

$$\begin{cases} \int\limits_{\Omega} \left(\varepsilon(v^0) : \tau + q(v^0_{2,1} - v^0_{1,2}) - f \cdot v^0 \right) d\Omega = 0, \quad \forall v^0 \in \Upsilon^0, \\ \int\limits_{\Omega} \left(s \cdot \nabla\theta^0 - 2q\theta^0 - g\theta^0 \right) d\Omega = 0, \quad \forall \theta^0 \in \Theta^0. \end{cases} \tag{5.8}$$

Если хотя бы одно из условий (5.8) не выполнено, то точная нижняя грань в (5.7) будет равна $-\infty$.

Используя (5.4)–(5.5), можно показать, что элемент $(\mathrm{L}\varepsilon(u), p, 4B\nabla\omega)$, принадлежащий $\mathcal{H}(\Omega)$, удовлетворяет ограничениям (5.8), и при этом имеет место равенство

$$\mathcal{I}^*(\mathrm{L}\varepsilon(u), p, 4B\nabla\omega) = \int\limits_{\Omega} \left(\mathrm{L}\varepsilon(u) : \varepsilon(u^\Gamma) + p(u^\Gamma_{2,1} - u^\Gamma_{1,2} - 2\omega^\Gamma) \right) d\Omega + \\ + \int\limits_{\Omega} 4B\nabla\omega \cdot \nabla\omega^\Gamma\, d\Omega - \int\limits_{\Omega} (f \cdot u^\Gamma + g\omega^\Gamma)\, d\Omega - \\ - \int\limits_{\Omega} \left(\frac{1}{2}\mathrm{L}\varepsilon(u) : \varepsilon(u) + \frac{\mu_c}{2}(u_{2,1} - u_{1,2} - 2\omega)^2 + 2B|\nabla\omega|^2 \right) d\Omega = \mathcal{J}(u,\omega).$$

Таким образом, выполняется важное и хорошо известное в теории двойственности вариационного исчисления соотношение

$$\inf_{(v,\theta)\in\Upsilon\times\Theta}\mathcal{J}(v,\theta)=\sup_{(\tau,q,s)\in\mathcal{H}(\Omega)}\mathcal{I}^*(\tau,q,s).$$

Из него следует оценка квадрата энергетической нормы отклонения приближенного решения от точного (другими словами — апостериорная оценка погрешности):

$$|\!|\!|(e_{\tilde u};e_{\tilde p};e_{\tilde\omega})|\!|\!|^2=\mathcal{J}(\tilde u,\tilde\omega)-\mathcal{I}^*(\mathrm{L}\varepsilon(u),p,4B\nabla\omega)\le\mathcal{J}(\tilde u,\tilde\omega)-\mathcal{I}^*(\tau,q,s).$$

Преобразуем ее правую часть:

$$\begin{aligned}
\mathcal{J}(\tilde u,\tilde\omega)-\mathcal{I}^*(\tau,q,s)&=\int\limits_\Omega\left(\frac{1}{2}\mathrm{L}\varepsilon(\tilde u):\varepsilon(\tilde u)+\frac{1}{2\mu_c}\tilde p^2+2B|\nabla\tilde\omega|^2\right)\,d\Omega-\\
&-\int\limits_\Omega(f\cdot\tilde u+g\tilde\omega)\,d\Omega+\int\limits_\Omega\left(\frac{1}{2}\mathrm{L}^{-1}\tau:\tau+\frac{1}{2\mu_c}q^2+\frac{1}{8B}|s|^2\right)\,d\Omega-\\
&-\int\limits_\Omega\left(\varepsilon(u^\Gamma):\tau+q(u^\Gamma_{2,1}-u^\Gamma_{1,2}-2\omega^\Gamma)+s\cdot\nabla\omega^\Gamma-f\cdot u^\Gamma-g\omega^\Gamma\right)\,d\Omega=\\
&=\int\limits_\Omega\left(\frac{1}{2}(\mathrm{L}\varepsilon(\tilde u)-\tau):(\varepsilon(\tilde u)-\mathrm{L}^{-1}\tau)+\frac{1}{2\mu_c}(\tilde p-q)^2+2B|\nabla\tilde\omega-\frac{1}{4B}s|^2\right)\,d\Omega+\\
&+\int\limits_\Omega\left(\varepsilon(\tilde u-u^\Gamma):\tau+q\left(\frac{1}{\mu_c}\tilde p-(u^\Gamma_{2,1}-u^\Gamma_{1,2}-2\omega^\Gamma)\right)\right)\,d\Omega+\\
&+\int\limits_\Omega\left(s\cdot\nabla(\tilde\omega-\omega^\Gamma)-f\cdot(\tilde u-u^\Gamma)-g(\tilde\omega-\omega^\Gamma)\right)\,d\Omega.
\end{aligned}$$

Из соотношений (5.8) при $v^0=\tilde u-u^\Gamma$ и $\theta^0=\tilde\omega-\omega^\Gamma$, а также определения $\tilde p$ следует, что сумма последних двух интегралов равна нулю. Таким образом, приходим к неравенству

$$\begin{aligned}
|\!|\!|(e_{\tilde u};e_{\tilde p};e_{\tilde\omega})|\!|\!|^2\le&\int\limits_\Omega\frac{1}{2}(\mathrm{L}\varepsilon(\tilde u)-\tau):(\varepsilon(\tilde u)-\mathrm{L}^{-1}\tau)\,d\Omega+\\
&+\int\limits_\Omega\left(\frac{1}{2\mu_c}(\tilde p-q)^2+2B|\nabla\tilde\omega-\frac{1}{4B}s|^2\right)\,d\Omega,
\end{aligned}\qquad(5.9)$$

где тройка свободных элементов (τ, q, s) обязана удовлетворять (5.8).

Оценка (5.9) является обобщением на рассматриваемую задачу известного неравенства Прагера–Синжа, лежащего в основе уже упомянутого в первой главе метода гиперокружностей, иногда применяющегося для оценки точности приближенных решений. Это соотношение, записанное в иной форме, можно найти в [473].

5.4. Функциональная апостериорная оценка и ряд ее вычислительных свойств

Строго обоснованное применение неравенства (5.9) требует построения аппроксимаций с учетом ограничений (5.8), которым на практике довольно трудно удовлетворить точно. Поэтому, как и во многих других вариационных задачах, возникает необходимость расширить класс допустимых функций. Ниже мы покажем, что это действительно можно сделать.

Пусть новая тройка элементов $(\tilde{\tilde{\tau}}, \tilde{\tilde{q}}, \tilde{\tilde{s}})$ выбирается из класса

$$\tilde{\tilde{\mathcal{H}}}(\Omega) := \mathbb{H}_{sym}(\Omega, \mathrm{Div}) \times \mathbb{W}_2^1(\Omega) \times \mathbb{H}(\Omega, \mathrm{div}).$$

Преобразуем (5.9), используя неравенство треугольника и неравенство Коши с произвольным параметром $\beta > 0$

$$\begin{aligned}
&\|\!|(e_{\tilde{u}}; e_{\tilde{p}}; e_{\tilde{\omega}})|\!\|^2 \le \frac{1}{2}\|\!|\mathrm{L}\varepsilon(\tilde{u}) - \tau|\!\|_*^2 + \frac{1}{2\mu_c}\|\tilde{p} - q\|_\Omega^2 + \frac{1}{8B}\|4B\nabla\tilde{\omega} - s\|_\Omega^2 \le \\
&\le (1+\beta)\left(\frac{1}{2}\|\!|\mathrm{L}\varepsilon(\tilde{u}) - \tilde{\tilde{\tau}}|\!\|_*^2 + \frac{1}{2\mu_c}\|\tilde{p} - \tilde{\tilde{q}}\|_\Omega^2 + \frac{1}{8B}\|4B\nabla\tilde{\omega} - \tilde{\tilde{s}}\|_\Omega^2\right) + \\
&+(1+\beta^{-1})\left(\frac{1}{2}\|\!|\tau - \tilde{\tilde{\tau}}|\!\|_*^2 + \frac{1}{2\mu_c}\|q - \tilde{\tilde{q}}\|_\Omega^2 + \frac{1}{8B}\|s - \tilde{\tilde{s}}\|_\Omega^2\right),
\end{aligned}$$

где $\|\cdot\|_\Omega$ — единое обозначение для стандартных $\mathbb{L}_2$-норм в соответствующих пространствах, связанных с областью Ω, а $\|\!|\tau|\!\|_*^2 := \int\limits_\Omega \mathrm{L}^{-1}\tau : \tau \, d\Omega$.

Делая замену $\bar{\tau} := \tau - \tilde{\tilde{\tau}}$, $\bar{q} := q - \tilde{\tilde{q}}$, $\bar{s} := s - \tilde{\tilde{s}}$, вводя обозначения для слагаемых оценки и указывая на зависимость от свободных элементов, получаем

$$\|(e_{\tilde{u}}; e_{\tilde{p}}; e_{\tilde{\omega}})\|^2 \leq (1+\beta)\mathcal{D}^2(\tilde{u}, \tilde{\omega}, \tilde{p}; \tilde{\tilde{\tau}}, \tilde{\tilde{q}}, \tilde{\tilde{s}}) + (1+\beta^{-1})\mathfrak{r}^2(\tilde{\tilde{\tau}}, \tilde{\tilde{q}}, \tilde{\tilde{s}}), \tag{5.10}$$

где

$$\mathcal{D}^2(\tilde{u}, \tilde{\omega}, \tilde{p}; \tilde{\tilde{\tau}}, \tilde{\tilde{q}}, \tilde{\tilde{s}}) := \frac{1}{2}\|\mathrm{L}\varepsilon(\tilde{u}) - \tilde{\tilde{\tau}}\|_*^2 + \frac{1}{2\mu_c}\|\tilde{p} - \tilde{\tilde{q}}\|_\Omega^2 + \frac{1}{8B}\|4B\nabla\tilde{\omega} - \tilde{\tilde{s}}\|_\Omega^2,$$

$$\mathfrak{r}^2(\tilde{\tilde{\tau}}, \tilde{\tilde{q}}, \tilde{\tilde{s}}) := -\sup_{(\bar{\tau},\bar{q},\bar{s})\in\mathcal{H}(\Omega)} \left\{ -\int_\Omega \left(\frac{1}{2}\mathrm{L}^{-1}\bar{\tau} : \bar{\tau} + \frac{1}{2\mu_c}\bar{q}^2 + \frac{1}{8B}|\bar{s}|^2 \right) d\Omega \right\}$$

при ограничениях

$$\begin{cases} \int_\Omega \left(\varepsilon(v^0) : \bar{\tau} + \bar{q}(v^0_{2,1} - v^0_{1,2}) - \bar{f} \cdot v^0 \right) d\Omega = 0, \quad \forall v^0 \in \varUpsilon^0, \\ \int_\Omega \left(\bar{s} \cdot \nabla\theta^0 - \bar{g}\theta^0 - 2\bar{q}\theta^0 \right) d\Omega = 0, \quad \forall \theta^0 \in \varTheta^0, \end{cases}$$

в которых

$$\bar{f} := \begin{pmatrix} f_1 + \tilde{\tilde{\tau}}_{11,1} + \tilde{\tilde{\tau}}_{21,2} - \tilde{\tilde{q}}_{,2} \\ f_2 + \tilde{\tilde{\tau}}_{12,1} + \tilde{\tilde{\tau}}_{22,2} + \tilde{\tilde{q}}_{,1} \end{pmatrix},$$
$$\bar{g} := g + 2\tilde{\tilde{q}} + \operatorname{div}\tilde{\tilde{s}}.$$

Оценка (5.10) обладает фундаментальным свойством функциональных мажорант отклонения от точного решения, а именно, она состоит из дополняющих друг друга частей, в которых явно учтены все физические законы, лежащие в основе рассматриваемой модели сплошной среды. В данном случае, первая из них отражает погрешность в выполнении каждого из определяющих соотношений, связывающих различные компоненты напряжений и деформаций, которые выражены через перемещения и поворот. Вторая часть включает учет всех трех уравнений равновесия. Действительно, всегда справедливо неравенство $\mathfrak{r} \geq 0$, а равенство нулю достигается при $\bar{f}_1 = 0$, $\bar{f}_2 = 0$ и $\bar{g} = 0$ почти всюду в Ω, что соответствует случаю, когда тройка $(\tilde{\tilde{\tau}}, \tilde{\tilde{q}}, \tilde{\tilde{s}})$ удовлетворяет уравнениям равновесия.

Отметим, что у полученного неравенства сохраняется недостаток — возникают практические трудности, связанные с вычислением значения функционала $\mathfrak{r}$. Однако для этого слагаемого может быть построена явно вычисляемая оценка сверху, которая при этом сохраняет данную ранее физическую интерпретацию. Покажем, как это делается.

Фактически при анализе функционала мы сталкиваемся с аналогом двойственной задачи, но с модифицированной правой частью, определяемой функциями $\bar{f}$ и $\bar{g}$. Используя стандартные аргументы теории двойственности, двойственную задачу можно заменить на соответствующую ей прямую задачу

$$\mathfrak{r}^2 = -\inf_{(\bar{u},\bar{\omega})\in\Upsilon^0\times\Theta^0} \bar{\mathcal{J}}(\bar{u},\bar{\omega}),$$

где

$$\bar{\mathcal{J}}(\bar{u},\bar{\omega}) = \int\limits_\Omega \left(\frac{1}{2}\mathrm{L}\varepsilon(\bar{u}) : \varepsilon(\bar{u}) + \frac{\mu_c}{2}(\bar{u}_{2,1} - \bar{u}_{1,2} - 2\bar{\omega})^2 + 2B|\nabla\bar{\omega}|^2\right) d\Omega - \\ - \int\limits_\Omega (\bar{f}\cdot\bar{u} + \bar{g}\bar{\omega})\, d\Omega.$$

Далее используем неравенство

$$\|\bar{u}\|^2_\Omega + \|\bar{\omega}\|^2_\Omega \le \frac{\mathfrak{c}^2_{VII}}{2}\int\limits_\Omega \left(\mathrm{L}\varepsilon(\bar{u}) : \varepsilon(\bar{u}) + \mu_c(\bar{u}_{2,1} - \bar{u}_{1,2} - 2\bar{\omega})^2 + 4B|\nabla\bar{\omega}|^2\right) d\Omega,$$

где константа $\mathfrak{c}_{VII}$ связана с константой в неравенстве Фридрихса и с минимальным собственным значением тензора L, зависящим от свойств материала. Имеем

$$\mathfrak{r}^2 \le -\inf_{t\in\mathbb{R}^+}\left(t^2 - at\right) = a^2/4, \text{ где } \quad a = \mathfrak{c}_{VII}\left(\|\bar{f}\|^2_\Omega + \|\bar{g}\|^2_\Omega\right)^{1/2},$$

то есть

$$\mathfrak{r}^2(\tilde{\bar{\tau}},\tilde{\bar{q}},\tilde{\bar{s}}) \le \mathcal{R}^2(\tilde{\bar{\tau}},\tilde{\bar{q}},\tilde{\bar{s}}),$$

где

$$\mathcal{R}^2(\tilde{\bar{\tau}},\tilde{\bar{q}},\tilde{\bar{s}}) := \frac{\mathfrak{c}^2_{VII}}{4}\left(\|f_1 + \tilde{\bar{\tau}}_{11,1} + \tilde{\bar{\tau}}_{21,2} - \tilde{\bar{q}}_{,2}\|^2_\Omega + \right. \\ \left. + \|f_2 + \tilde{\bar{\tau}}_{12,1} + \tilde{\bar{\tau}}_{22,2} + \tilde{\bar{q}}_{,1}\|^2_\Omega + \|g + 2\tilde{\bar{q}} + \operatorname{div}\tilde{\bar{s}}\|^2_\Omega\right).$$

Получили апостериорную оценку функционального типа. Сформулируем результат в виде утверждения, доказательство которого фактически содержится в параграфах 5.2–5.4.

Теорема 5.1. *Погрешность произвольного конформного приближенного решения задачи* (5.1)–(5.3) *с граничными условиями Дирихле, рассматриваемого в обобщенной постановке* (5.4)–(5.5), *контролируется при помощи апостериорной оценки следующего вида:*

$$\left\| (e_{\tilde{u}}; e_{\tilde{p}}; e_{\tilde{\omega}}) \right\|^2 \leq (1+\beta)\ \mathcal{D}^2(...;\tilde{\tilde{\tau}}, \tilde{\tilde{q}}, \tilde{\tilde{s}}) + (1+\beta^{-1})\ \mathcal{R}^2(\tilde{\tilde{\tau}}, \tilde{\tilde{q}}, \tilde{\tilde{s}}), \tag{5.11}$$

содержащей свободные поля $(\tilde{\tilde{\tau}}, \tilde{\tilde{q}}, \tilde{\tilde{s}})$ *из тройки гильбертовых пространств* $\mathbb{H}_{sym}(\Omega, \mathrm{Div}) \times \mathbb{W}_2^1(\Omega) \times \mathbb{H}(\Omega, \mathrm{div})$, *произвольный положительный параметр* β *и константу, не зависящую от способа дискретизации исходной задачи.*

Оценка (5.11) обладает двумя важными свойствами — она является точной и гарантированной.

Первое свойство означает, что существуют такие $(\tilde{\tilde{\tau}}, \tilde{\tilde{q}}, \tilde{\tilde{s}}) \in \tilde{\tilde{\mathcal{H}}}(\Omega)$, при которых достигается равенство правой и левой части. Действительно, рассмотрим в качестве такой тройки точное решение двойственной вариационной задачи $(\mathrm{L}\varepsilon(u), p, 4B\nabla\omega)$. Элемент $\tilde{\tilde{\tau}} = \mathrm{L}\varepsilon(u)$ представляет собой симметричную часть тензора силовых напряжений и равен

$$\begin{bmatrix} (\lambda+2\mu)u_{1,1} + \lambda u_{2,2} & \mu(u_{1,2}+u_{2,1}) \\ \mu(u_{1,2}+u_{2,1}) & (\lambda+2\mu)u_{2,2} + \lambda u_{1,1} \end{bmatrix}.$$

Элемент $\tilde{\tilde{q}} = \mu_c(u_{2,1} - u_{1,2} - 2\omega)$ соответствует добавке, нарушающей симметрию тензора силовых напряжений в случае среды Коссера, а $\tilde{\tilde{s}} = 4B\nabla\omega$ содержит ненулевые компоненты тензора моментных напряжений. Сравнивая теперь слагаемые функционала $\mathcal{R}^2(\tilde{\tilde{\tau}}, \tilde{\tilde{q}}, \tilde{\tilde{s}})$ с уравнениями (5.1)–(5.3), можно сделать вывод, что функционал с точностью до множителя представляет собой сумму квадратов норм невязок соответствующих уравнений равновесия. Поэтому он обращается в нуль на точном решении и можно положить параметр β равным нулю. Тогда первое слагаемое $\mathcal{D}^2(\tilde{\tilde{\tau}}, \tilde{\tilde{q}}, \tilde{\tilde{s}})$ совпадает с квадратом выбранной нормы отклонения приближенного решения от точного.

Второе свойство означает, во-первых, что все этапы получения оценки строго математически обоснованы, что гарантирует справедливость неравенства для любой допустимой тройки $(\tilde{\tilde{\tau}}, \tilde{\tilde{q}}, \tilde{\tilde{s}})$. С теоретической точки зрения, функциональная апостериорная оценка (5.11) и оценка Прагера–Синжа этим свойством обладают в равной степени, но (5.11) определена на достаточно широком классе, что делает ее более удобной для практического применения. Во-вторых, неравенство остается справедливым даже при использовании полей, полученных при помощи простых численных процедур, поскольку точного удовлетворения уравнениям равновесия не требуется. При подстановке в мажоранту равновесных полей мы приходим к оценке Прагера–Синжа, как к частному случаю.

5.5. Плоские задачи со смешанными краевыми условиями

Далее модифицируется система обозначений — (x_1, x_2, x_3) меняется на (x, y, z), а индексы $1, 2, 3$ на x, y, z в обозначении полей и дифференцирования по пространственной координате. Это сделано для того, чтобы избежать возможных противоречий, связанных с использованием в дальнейшем числовой индексации для вспомогательных переменных, смысл которой отличается от установления соответствия между компонентами и пространственными координатами.

Итак, введем обозначения, схематично отраженные на Рисунке 5.1, а именно $u := (u_x, u_y)$ — это перемещения вдоль осей $0x$ и $0y$, ω_z — поворот вокруг оси $0z$. Предполагается, что вся граница области Γ состоит из двух непересекающихся частей Γ_D и Γ_S. Функции $f := (f_x, f_y)$ и g_z характеризуют заданные внутри Ω распределенные внешние воздействия (силы и момент), а функции $t := (t_x, t_y)$ и m_z — заданные на части границы Γ_S поверхностные силы и момент. На части

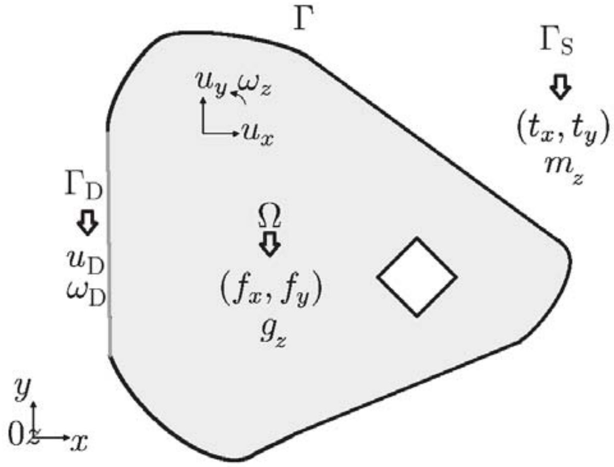


Рисунок 5.1: Плоская задача в теории Коссера: основные поля, объемное и поверхностное нагружение, граничные условия смешанного типа.

границы Γ_D области, занимаемой сплошной средой, заданы условия типа Дирихле — известны перемещения $u = u_D$ и поворот $\omega_z = \omega_D$. Далее предполагаем, что

$$f_x, \quad f_y, \quad g_z \in \mathbb{L}_2(\Omega);$$
$$u_D \in \mathbb{W}_2^{1/2}(\Gamma_D, \mathbb{R}^2), \quad \omega_D \in \mathbb{W}_2^{1/2}(\Gamma_D);$$
$$t_x, \quad t_y, \quad m_z \in \mathbb{L}_2(\Gamma_S);$$

и используем следующие обозначения:

$$\Upsilon := \Upsilon^0 + u_D, \quad \Theta := \Theta^0 + \omega_D,$$

где

$$\Upsilon^0 := \left\{ v^0 \in \mathbb{W}_2^1(\Omega, \mathbb{R}^2) \mid v^0 = 0 \text{ на } \Gamma_D \right\};$$
$$\Theta^0 := \left\{ \theta^0 \in \mathbb{W}_2^1(\Omega) \mid \theta^0 = 0 \text{ на } \Gamma_D \right\}.$$

Функционал энергии для рассматриваемой задачи, определенный на паре элементов $((u_x, u_y), \omega_z) \in \Upsilon \times \Theta$, имеет вид [473]

$$\mathcal{J}(u_x, u_y, \omega_z) =$$
$$= \int\limits_{\Omega} \frac{E}{2(1+\nu)} \left(u_{x,x}^2 + u_{y,y}^2 + \frac{1}{2}(u_{y,x} + u_{x,y})^2 + \frac{\nu}{1-2\nu}(u_{x,x} + u_{y,y})^2 \right) d\Omega +$$
$$+ \int\limits_{\Omega} \left(\frac{\mu_c}{2}(u_{y,x} - u_{x,y} - 2\omega_z)^2 + 2B(\omega_{z,x}^2 + \omega_{z,y}^2) \right) d\Omega -$$
$$- \int\limits_{\Omega} (f_x u_x + f_y u_y + g_z \omega_z)\, d\Omega - \int\limits_{\Gamma_S} (t_x u_x + t_y u_y + m_z \omega_z)\, d\Gamma,$$

где E и ν — классические константы для изотропного материала (модуль Юнга и коэффициент Пуассона). Снова вводя константы Ляме

$$\mu = \frac{E}{2(1+\nu)}, \qquad \lambda = \frac{E\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)}$$

и записывая необходимые условия минимума функционала, получаем

$$\frac{\partial}{\partial\alpha}\mathcal{J}(u_x + \alpha v_x^0, u_y, \omega_z)\mid_{\alpha=0}=$$
$$= \int\limits_{\Omega} \left(2\mu u_{x,x} v_{x,x}^0 + \mu(u_{y,x} + u_{x,y}) v_{x,y}^0 + \lambda(u_{x,x} + u_{y,y}) v_{x,x}^0\right) d\Omega -$$
$$- \int\limits_{\Omega} \mu_c (u_{y,x} - u_{x,y} - 2\omega_z) v_{x,y}^0\, d\Omega - \int\limits_{\Omega} f_x v_x^0\, d\Omega - \int\limits_{\Gamma_S} t_x v_x^0\, d\Gamma = 0; \quad (5.12)$$

$$\frac{\partial}{\partial\alpha}\mathcal{J}(u_x, u_y + \alpha v_y^0, \omega_z)\mid_{\alpha=0}=$$
$$= \int\limits_{\Omega} \left(2\mu u_{y,y} v_{y,y}^0 + \mu(u_{y,x} + u_{x,y}) v_{y,x}^0 + \lambda(u_{x,x} + u_{y,y}) v_{y,y}^0\right) d\Omega +$$
$$+ \int\limits_{\Omega} \mu_c (u_{y,x} - u_{x,y} - 2\omega_z) v_{y,x}^0\, d\Omega - \int\limits_{\Omega} f_y v_y^0\, d\Omega - \int\limits_{\Gamma_S} t_y v_y^0\, d\Gamma = 0; \quad (5.13)$$

$$\frac{\partial}{\partial\alpha}\mathcal{J}(u_x, u_y, \omega_z + \alpha\theta_z^0)\mid_{\alpha=0}= \int\limits_{\Omega} (-2\mu_c)(u_{y,x} - u_{x,y} - 2\omega_z)\theta_z^0\, d\Omega +$$
$$+ \int\limits_{\Omega} 4B(\omega_{z,x}\theta_{z,x}^0 + \omega_{z,y}\theta_{z,y}^0)\, d\Omega - \int\limits_{\Omega} g_z \theta_z^0\, d\Omega - \int\limits_{\Gamma_S} m_z \theta_z^0\, d\Gamma = 0, \quad (5.14)$$

где $(v_x^0, v_y^0) \in \Upsilon^0$ и $\theta_z^0 \in \Theta^0$ — произвольные элементы, а α — вещественный параметр. Эти условия дают нам определение обобщенного решения.

5.6. Представление погрешности и класс ее гарантированных апостериорных оценок

Предположим, что вычислено приближенное решение задачи. Не будем ограничиваться точными решениями соответствующих конечномерных задач, взятыми в качестве аппроксимаций, точность которых необходимо контролировать, а рассмотрим в соответствии с основами функционального подхода более широкий класс функций. Пусть элементы $(\tilde{u}_x, \tilde{u}_y)$ и $\tilde{\omega}_z$ — некоторое приближение к точному решению, построенное любым из методов, обеспечивающих конформность полученной аппроксимации. Тогда, вводя отклонения компонент приближенного решения от точного $e_x := u_x - \tilde{u}_x$, $e_y := u_y - \tilde{u}_y$ и $e_z := \omega_z - \tilde{\omega}_z$, получим аналог соотношений (5.12)–(5.14). Интегральное тождество (5.12) преобразуется следующим образом:

$$\int\limits_\Omega \left(2\mu e_{x,x} v_{x,x}^0 + \mu(e_{y,x} + e_{x,y}) v_{x,y}^0 + \lambda(e_{x,x} + e_{y,y}) v_{x,x}^0\right)\, d\Omega -$$

$$- \int\limits_\Omega \mu_c (e_{y,x} - e_{x,y} - 2e_z) v_{x,y}^0 \, d\Omega = \int\limits_\Omega f_x v_x^0 \, d\Omega + \int\limits_{\Gamma_S} t_x v_x^0 \, d\Gamma -$$

$$- \int\limits_\Omega \left(2\mu \tilde{u}_{x,x} v_{x,x}^0 + \mu(\tilde{u}_{y,x} + \tilde{u}_{x,y}) v_{x,y}^0 + \lambda(\tilde{u}_{x,x} + \tilde{u}_{y,y}) v_{x,x}^0\right)\, d\Omega +$$

$$+ \int\limits_\Omega \mu_c (\tilde{u}_{y,x} - \tilde{u}_{x,y} - 2\tilde{\omega}_z) v_{x,y}^0 \, d\Omega.$$

Подставляя в качестве пробных функций соответствующие отклонения

$$v_x^0 = e_x, \quad v_y^0 = e_y,$$

$$\theta_z^0 = e_z,$$

приходим к модифицированному тождеству

$$\int\limits_{\Omega}\left(2\mu e_{x,x}^2+\mu(e_{y,x}+e_{x,y})e_{x,y}+\lambda(e_{x,x}+e_{y,y})e_{x,x}\right)\,d\Omega-$$

$$-\int\limits_{\Omega}\mu_c(e_{y,x}-e_{x,y}-2e_z)e_{x,y}\,d\Omega=\int\limits_{\Omega}f_xe_x\,d\Omega+\int\limits_{\Gamma_S}t_xe_x\,d\Gamma-$$

$$-\int\limits_{\Omega}(2\mu\tilde{u}_{x,x}e_{x,x}+\mu(\tilde{u}_{y,x}+\tilde{u}_{x,y})e_{x,y}+\lambda(\tilde{u}_{x,x}+\tilde{u}_{y,y})e_{x,x})\,d\Omega+$$

$$+\int\limits_{\Omega}\mu_c(\tilde{u}_{y,x}-\tilde{u}_{x,y}-2\tilde{\omega}_z)e_{x,y}\,d\Omega. \quad (5.15)$$

Аналогично, выполнив преобразование для второго тождества, имеем

$$\int\limits_{\Omega}\left(2\mu e_{y,y}^2+\mu(e_{y,x}+e_{x,y})e_{y,x}+\lambda(e_{x,x}+e_{y,y})e_{y,y}\right)\,d\Omega+$$

$$+\int\limits_{\Omega}\mu_c(e_{y,x}-e_{x,y}-2e_z)e_{y,x}\,d\Omega=\int\limits_{\Omega}f_ye_y\,d\Omega+\int\limits_{\Gamma_S}t_ye_y\,d\Gamma-$$

$$-\int\limits_{\Omega}(2\mu\tilde{u}_{y,y}e_{y,y}+\mu(\tilde{u}_{y,x}+\tilde{u}_{x,y})e_{y,x}+\lambda(\tilde{u}_{x,x}+\tilde{u}_{y,y})e_{y,y})\,d\Omega-$$

$$-\int\limits_{\Omega}\mu_c(\tilde{u}_{y,x}-\tilde{u}_{x,y}-2\tilde{\omega}_z)e_{y,x}\,d\Omega. \quad (5.16)$$

Для третьего получаем

$$\int\limits_{\Omega}4B(e_{z,x}\theta_{z,x}^0+e_{z,y}\theta_{z,y}^0)\,d\Omega-\int\limits_{\Omega}2\mu_c(e_{y,x}-e_{x,y}-2e_z)\theta_z^0\,d\Omega=$$

$$=\int\limits_{\Omega}g_z\theta_z^0\,d\Omega+\int\limits_{\Gamma_S}m_z\theta_z^0\,d\Gamma-\int\limits_{\Omega}4B(\tilde{\omega}_{z,x}\theta_{z,x}^0+\tilde{\omega}_{z,y}\theta_{z,y}^0)\,d\Omega+$$

$$+\int\limits_{\Omega}2\mu_c(\tilde{u}_{y,x}-\tilde{u}_{x,y}-2\tilde{\omega}_z)\theta_z^0\,d\Omega.$$

Следовательно,

$$\int\limits_{\Omega}4B|\nabla e_z|^2\,d\Omega-\int\limits_{\Omega}2\mu_c(e_{y,x}-e_{x,y}-2e_z)e_z\,d\Omega= \quad (5.17)$$

$$=\int\limits_{\Omega}g_z\xi_z\,d\Omega+\int\limits_{\Gamma_S}m_z\xi_z\,d\Gamma-\int\limits_{\Omega}4B\nabla\tilde{\omega}_z\cdot\nabla\xi_z\,d\Omega+\int\limits_{\Omega}2\mu_c(\tilde{u}_{y,x}-\tilde{u}_{x,y}-2\tilde{\omega}_z)e_z\,d\Omega.$$

Собирая соотношения (5.15), (5.16) и (5.17) вместе, получаем:

$$2\|\xi\|^2 = \int\limits_{\Gamma_S} (t_x e_x + t_y e_y + m_z e_z)\, d\Gamma + \int\limits_{\Omega} (f_x e_x + f_y e_y + g_z e_z)\, d\Omega -$$

$$-\int\limits_{\Omega} (2\mu \tilde{u}_{x,x} e_{x,x} + 2\mu \tilde{u}_{y,y} e_{y,y} + \lambda(\tilde{u}_{x,x} + \tilde{u}_{y,y})(e_{x,x} + e_{y,y}))\ d\Omega -$$

$$-\int\limits_{\Omega} \mu(\tilde{u}_{y,x} + \tilde{u}_{x,y})(e_{y,x} + e_{x,y})\, d\Omega -$$

$$-\int\limits_{\Omega} (4B \nabla\tilde{\omega}_z \cdot \nabla\xi_z + \mu_c(\tilde{u}_{y,x} - \tilde{u}_{x,y} - 2\tilde{\omega}_z)(e_{y,x} - e_{x,y} - 2e_z))\ d\Omega,$$

где $\xi := (e_x, e_y, e_z)$ и

$$\|\xi\|^2 := \int\limits_{\Omega} \left(\mu e_{x,x}^2 + \frac{\mu}{2}(e_{y,x} + e_{x,y})^2 + \mu e_{y,y}^2 + \frac{\lambda}{2}(e_{x,x} + e_{y,y})^2 \right)\ d\Omega +$$

$$+ \int\limits_{\Omega} \left(\frac{\mu_c}{2}(e_{y,x} - e_{x,y} - 2e_z)^2 + 2B|\nabla e_z|^2 \right)\ d\Omega.$$

Рассмотрим обобщенный (несимметричный) тензор деформаций γ, который выражается через перемещения и поворот формулами

$$\gamma_{xx} = u_{x,x}, \quad \gamma_{yy} = u_{y,y};$$

$$\gamma_{xy} = u_{y,x} - \omega_z, \quad \gamma_{yx} = u_{x,y} + \omega_z,$$

(см., например, M. Ostoja-Starzewski, I. Jasiuk [502], или уже упомянутые работы [473] и [479]). С несимметричным тензором силовых напряжений σ для изотропной среды Коссера деформации связывает соотношение

$$\sigma = (\mu + \mu_c)\gamma + (\mu - \mu_c)\gamma^T + \lambda\, \mathrm{tr}\, \gamma\ \mathbb{I}.$$

В развернутой форме записи имеем

$$\sigma_{xx} = (2\mu + \lambda) u_{x,x} + \lambda u_{y,y};$$

$$\sigma_{yy} = (2\mu + \lambda) u_{y,y} + \lambda u_{x,x};$$

$$\sigma_{yx} = (\mu + \mu_c)(u_{x,y} + \omega_z) + (\mu - \mu_c)(u_{y,x} - \omega_z) =$$
$$= \mu(u_{x,y} + u_{y,x}) - \mu_c(u_{y,x} - u_{x,y} - 2\omega_z);$$
$$\sigma_{xy} = \mu(u_{x,y} + u_{y,x}) + \mu_c(u_{y,x} - u_{x,y} - 2\omega_z).$$

Обозначим волнами поля, вычисленные по приближенному решению, например,

$$\tilde{\sigma}_{xx} = (2\mu + \lambda)\tilde{u}_{x,x} + \lambda\tilde{u}_{y,y}$$

(компоненты $\tilde{\sigma}_{xy}, \tilde{\sigma}_{yx}, \tilde{\sigma}_{yy}$ — по аналогии). Ему также соответствует элемент $\tilde{p} := \mu_c(\tilde{u}_{y,x} - \tilde{u}_{x,y} - 2\tilde{\omega}_z)$ — аппроксимация поля $p := \mu_c(u_{y,x} - u_{x,y} - 2\omega_z)$.

Введем свободные элементы $\tilde{\tilde{\tau}} := (\tilde{\tilde{\tau}}_1,\ \tilde{\tilde{\tau}}_2)$ и $\tilde{\tilde{s}}$, где

$$\tilde{\tilde{\tau}}_1, \tilde{\tilde{\tau}}_2, \tilde{\tilde{s}} \in \mathbb{H}(\Omega, \Gamma_{\mathrm{S}}, \operatorname{div}) := \left\{ \eta \in \mathbb{L}_2(\Omega, \mathbb{R}^2) \mid \operatorname{div} \eta \in \mathbb{L}_2(\Omega), \eta \cdot n \in \mathbb{L}_2(\Gamma_{\mathrm{S}}) \right\},$$

то есть

$$\tilde{\tilde{\tau}}_1 = \begin{pmatrix} \tilde{\tilde{\tau}}_{xx} \\ \tilde{\tilde{\tau}}_{yx} \end{pmatrix}, \quad \tilde{\tilde{\tau}}_2 = \begin{pmatrix} \tilde{\tilde{\tau}}_{xy} \\ \tilde{\tilde{\tau}}_{yy} \end{pmatrix}, \quad \tilde{\tilde{s}} = \begin{pmatrix} \tilde{\tilde{s}}_x \\ \tilde{\tilde{s}}_y \end{pmatrix}.$$

Поля $\tilde{\tilde{\tau}}_1$ и $\tilde{\tilde{\tau}}_2$ играют роль независимой аппроксимации компонент тензора силовых напряжений σ, элемент $\tilde{\tilde{s}}$ — это аппроксимация вектора $4B\nabla\omega_z$, состоящего из ненулевых компонент тензора моментных напряжений

$$M_{xz} = 4B\omega_{z,x}, \quad M_{yz} = 4B\omega_{z,y}.$$

Для элементов введенного выше пространства справедливы формулы интегрирования по частям: для любых $(v_x^0, v_y^0) \in \varUpsilon^0$ и $\theta_z^0 \in \varTheta^0$

$$\int\limits_{\Omega} \operatorname{div} \tilde{\tilde{\tau}}_1 \;\; v_x^0 \, d\Omega + \int\limits_{\Omega} \tilde{\tilde{\tau}}_1 \cdot \nabla v_x^0 \, d\Omega = \int\limits_{\Gamma_{\mathrm{S}}} \tilde{\tilde{\tau}}_1 \cdot n \;\; v_x^0 \, d\Gamma,$$
$$\int\limits_{\Omega} \operatorname{div} \tilde{\tilde{\tau}}_2 \;\; v_y^0 \, d\Omega + \int\limits_{\Omega} \tilde{\tilde{\tau}}_2 \cdot \nabla v_y^0 \, d\Omega = \int\limits_{\Gamma_{\mathrm{S}}} \tilde{\tilde{\tau}}_2 \cdot n \;\; v_y^0 \, d\Gamma,$$
$$\int\limits_{\Omega} \operatorname{div} \tilde{\tilde{s}} \;\; \theta_z^0 \, d\Omega + \int\limits_{\Omega} \tilde{\tilde{s}} \cdot \nabla \theta_z^0 \, d\Omega = \int\limits_{\Gamma_{\mathrm{S}}} \tilde{\tilde{s}} \cdot n \;\; \theta_z^0 \, d\Gamma.$$

Учитывая их, имеем

$$
\begin{aligned}
2\|\xi\|^2 = \int\limits_{\Gamma_S} (t_x e_x + t_y e_y + m_z e_z)\, d\Gamma + \int\limits_{\Omega} (f_x e_x + f_y e_y + g_z e_z)\, d\Omega - \\
- \int\limits_{\Omega} \left(\tilde{\sigma}_{xx} e_{x,x} + \tilde{\sigma}_{yy} e_{y,y} + \tilde{\sigma}_{yx} e_{x,y} + \tilde{\sigma}_{xy} e_{y,x}\right)\, d\Omega - \\
- \int\limits_{\Omega} \left(4B \nabla \tilde{\omega}_z \cdot \nabla e_z - 2\mu_c (\tilde{u}_{y,x} - \tilde{u}_{x,y} - 2\tilde{\omega}_z) e_z\right)\, d\Omega = \\
= \int\limits_{\Omega} ((\tilde{\tilde{\tau}}_{xx,x} + \tilde{\tilde{\tau}}_{yx,y} + f_x) e_x + (\tilde{\tilde{\tau}}_{xy,x} + \tilde{\tilde{\tau}}_{yy,y} + f_y) e_y)\, d\Omega + \\
+ \int\limits_{\Omega} \big((\tilde{\tilde{\tau}}_{xx} - \tilde{\sigma}_{xx}) e_{x,x} + (\tilde{\tilde{\tau}}_{yy} - \tilde{\sigma}_{yy}) e_{y,y} + (\tilde{\tilde{\tau}}_{yx} - \tilde{\sigma}_{yx}) e_{x,y} + (\tilde{\tilde{\tau}}_{xy} - \tilde{\sigma}_{xy}) e_{y,x}\big)\, d\Omega + \\
+ \int\limits_{\Omega} (\tilde{\tilde{s}} - 4B \nabla \tilde{\omega}_z) \cdot \nabla e_z\, d\Omega + \int\limits_{\Omega} \big(\operatorname{div} \tilde{\tilde{s}} + 2\mu_c (\tilde{u}_{y,x} - \tilde{u}_{x,y} - 2\tilde{\omega}_z) + g_z\big)\, e_z\, d\Omega + \\
+ \int\limits_{\Gamma_S} ((t_x - \tilde{\tilde{\tau}}_{xx} n_x - \tilde{\tilde{\tau}}_{yx} n_y) e_x + (t_y - \tilde{\tilde{\tau}}_{xy} n_x - \tilde{\tilde{\tau}}_{yy} n_y) e_y)\, d\Gamma + \\
+ \int\limits_{\Gamma_S} (m_z - \tilde{\tilde{s}}_x n_x - \tilde{\tilde{s}}_y n_y) e_z\, d\Gamma. \quad (5.18)
\end{aligned}
$$

Рассмотрим известную связь между классическими симметричными тензорами напряжений $\operatorname{sym}(\sigma)$ и деформаций ε в случае плоской деформации

$$
\varepsilon = \operatorname{sym}(\gamma) := \frac{\gamma + \gamma^T}{2}; \quad \varepsilon(u) = \frac{1}{2}\left(\nabla u + (\nabla u)^T\right);
$$

$$
\begin{aligned}
\operatorname{sym}(\sigma)_{xx} &= \lambda \operatorname{tr} \varepsilon + 2\mu \varepsilon_{xx}; \\
\operatorname{sym}(\sigma)_{yy} &= \lambda \operatorname{tr} \varepsilon + 2\mu \varepsilon_{yy}; \\
\operatorname{sym}(\sigma)_{xy} &= \operatorname{sym}(\sigma)_{yx} = 2\mu \varepsilon_{xy}.
\end{aligned}
$$

Тогда

$$
\operatorname{tr}(\operatorname{sym}(\sigma)) := \operatorname{sym}(\sigma)_{xx} + \operatorname{sym}(\sigma)_{yy} = 2(\lambda + \mu) \operatorname{tr} \varepsilon;
$$

$$
\varepsilon = \mathrm{L}^{-1} \operatorname{sym}(\sigma) := \frac{1}{2\mu}\left(\operatorname{sym}(\sigma) - \frac{\lambda}{2(\lambda + \mu)} \operatorname{tr}(\operatorname{sym}(\sigma))\, \mathbb{I}\right);
$$

$$\mathrm{sym}(\sigma) = \mathrm{L}\varepsilon,$$

где L — тензор четвертого ранга.

Обозначив $\eta := \tilde{\tilde{\tau}} - \tilde{\sigma}$, преобразуем часть слагаемых правой части (5.18):

$$\eta_{xx}e_{x,x} + \eta_{yy}e_{y,y} + \eta_{xy}e_{y,x} + \eta_{yx}e_{x,y} =$$

$$= \frac{\eta_{xy} + \eta_{yx}}{2}(e_{x,y} + e_{y,x}) + \eta_{xx}e_{x,x} + \eta_{yy}e_{y,y} + \frac{\eta_{xy} - \eta_{yx}}{2}(e_{y,x} - e_{x,y}) =$$

$$= \mathrm{sym}(\eta) : \varepsilon(\xi) + \frac{\eta_{xy} - \eta_{yx}}{2}(e_{y,x} - e_{x,y}).$$

Интеграл от первого слагаемого оценивается при помощи известного неравенства Юнга–Фенхеля

$$\int\limits_{\Omega} \mathrm{sym}(\eta) : \varepsilon(\xi)\, d\Omega \leq \left(\int\limits_{\Omega} \mathrm{L}^{-1}\, \mathrm{sym}(\eta) : \mathrm{sym}(\eta)\, d\Omega \right)^{1/2} \left(\int\limits_{\Omega} \mathrm{L}\varepsilon(\xi) : \varepsilon(\xi)\, d\Omega \right)^{1/2}.$$

Второе слагаемое преобразуется

$$\frac{\eta_{xy} - \eta_{yx}}{2}(e_{y,x} - e_{x,y}) =$$

$$= \left(\frac{\tilde{\tilde{\tau}}_{xy} - \tilde{\tilde{\tau}}_{yx}}{2} - \mu_c(\tilde{u}_{y,x} - \tilde{u}_{x,y} - 2\tilde{\omega}_z) \right) (e_{y,x} - e_{x,y} - 2e_z) +$$

$$+ \left(\tilde{\tilde{\tau}}_{xy} - \tilde{\tilde{\tau}}_{yx} - 2\mu_c(\tilde{u}_{y,x} - \tilde{u}_{x,y} - 2\tilde{\omega}_z) \right) e_z.$$

Объединяя с соответствующими слагаемыми (5.18), получаем сумму

$$\int\limits_{\Omega} \frac{1}{\sqrt{\mu_c}} \left(\frac{\tilde{\tilde{\tau}}_{xy} - \tilde{\tilde{\tau}}_{yx}}{2} - \mu_c(\tilde{u}_{y,x} - \tilde{u}_{x,y} - 2\tilde{\omega}_z) \right) \sqrt{\mu_c}(e_{y,x} - e_{x,y} - 2e_z)\, d\Omega +$$

$$+ \int\limits_{\Omega} (\mathrm{div}\, \tilde{\tilde{s}} + \tilde{\tilde{\tau}}_{xy} - \tilde{\tilde{\tau}}_{yx} + g_z)e_z\, d\Omega,$$

к которой можно применить неравенство Гёльдера и получить промежуточный результат

$$\begin{aligned}
&\|\xi\|^2 \leq \\
&\leq \left(\int\limits_\Omega \frac{1}{2}\mathrm{L}^{-1}(\tilde{\tilde{\tau}} - \mathrm{sym}(\tilde{\sigma})) : (\tilde{\tilde{\tau}} - \mathrm{sym}(\tilde{\sigma}))\, d\Omega\right)^{1/2} \left(\int\limits_\Omega \frac{1}{2}\mathrm{L}\varepsilon(\xi) : \varepsilon(\xi)\, d\Omega\right)^{1/2} + \\
&+ \left(\int\limits_\Omega \frac{1}{2\mu_c}\left(\frac{\tilde{\tilde{\tau}}_{xy} - \tilde{\tilde{\tau}}_{yx}}{2} - \tilde{p}\right)^2 d\Omega\right)^{1/2} \left(\int\limits_\Omega \frac{\mu_c}{2}(e_{y,x} - e_{x,y} - 2e_z)^2\, d\Omega\right)^{1/2} + \\
&+ \left(\int\limits_\Omega \frac{1}{8B}|\tilde{\tilde{s}} - 4B\nabla\tilde{\omega}_z|^2\, d\Omega\right)^{1/2} \left(\int\limits_\Omega 2B|\nabla e_z|^2\, d\Omega\right)^{1/2} + \\
&+\frac{1}{2}\int\limits_\Omega ((\tilde{\tilde{\tau}}_{xx,x} + \tilde{\tilde{\tau}}_{yx,y} + f_x)e_x + (\tilde{\tilde{\tau}}_{xy,x} + \tilde{\tilde{\tau}}_{yy,y} + f_y)e_y\, d\Omega + \\
&+\frac{1}{2}\int\limits_{\Gamma_\mathrm{S}} ((t_x - \tilde{\tilde{\tau}}_{xx}n_x - \tilde{\tilde{\tau}}_{yx}n_y)e_x + (t_y - \tilde{\tilde{\tau}}_{xy}n_x - \tilde{\tilde{\tau}}_{yy}n_y)e_y\, d\Gamma + \\
&+\frac{1}{2}\int\limits_\Omega (\mathrm{div}\, \tilde{\tilde{s}} + \tilde{\tilde{\tau}}_{xy} - \tilde{\tilde{\tau}}_{yx} + g)e_z\, d\Omega + \frac{1}{2}\int\limits_{\Gamma_\mathrm{S}} (m_z - \tilde{\tilde{s}}_x n_x - \tilde{\tilde{s}}_y n_y)e_z\, d\Gamma.
\end{aligned}$$

Поскольку переменные в исходной постановке имеют физическую размерность, то оценку слагаемых необходимо производить так, чтобы размерность каждой части составляла корень из размерности функционала $\mathcal{J}$ (в данном случае $\mathbf{H}^{1/2}$). Оценка первых трех слагаемых проведена в соответствии с этим условием. Для согласования размерностей в последнем блоке из шести слагаемых введем константы c_x, c_y, c_z и d_x, d_y, d_z размерности $\mathbf{Н/м}^4$, $\mathbf{Н/м}^4$, $\mathbf{Н/м}^2$ и $\mathbf{Н/м}^3$, $\mathbf{Н/м}^3$, $\mathbf{Н/м}$, соответственно.

Используем неравенство

$$\frac{1}{\mathfrak{c}^2_{VIII}} \leq \inf_{(v_x^0, v_y^0, \theta_z^0) \in \Upsilon^0 \times \Theta^0} \frac{\|(v_x^0, v_y^0, \theta_z^0)\|^2}{\Delta^2(v_x^0, v_y^0, \theta_z^0)},$$

где

$$\begin{aligned}
\Delta^2(v_x^0, v_y^0, \theta_z^0) := \|c_x^{1/2} v_x^0\|^2_\Omega + \|c_y^{1/2} v_y^0\|^2_\Omega + \|c_z^{1/2} \theta_z^0\|^2_\Omega + \\
+\|d_x^{1/2} v_x^0\|^2_{\Gamma_\mathrm{S}} + \|d_y^{1/2} v_y^0\|^2_{\Gamma_\mathrm{S}} + \|d_z^{1/2} \theta_z^0\|^2_{\Gamma_\mathrm{S}},
\end{aligned}$$

а существование константы $\mathfrak{c}_{VIII}$ следует из свойств тензора L и из существования при условиях задачи константы в неравенстве Фридрихса. Тогда шесть последних слагаемых оцениваются следующим выражением:

$$\mathcal{R}(\tilde{\tilde{\tau}}_1, \tilde{\tilde{\tau}}_2, \tilde{\tilde{s}}) \ \ \|\xi\|,$$

где

$$\begin{aligned}\mathcal{R}^2(\tilde{\tilde{\tau}}_1, \tilde{\tilde{\tau}}_2, \tilde{\tilde{s}}) := \frac{\mathfrak{c}_{VIII}^2}{4}\times&\\ \times \Big(\|c_x^{-1/2}(\tilde{\tilde{\tau}}_{xx,x} + \tilde{\tilde{\tau}}_{yx,y} + f_x)\|_\Omega^2 + \|c_y^{-1/2}(\tilde{\tilde{\tau}}_{xy,x} + \tilde{\tilde{\tau}}_{yy,y} + f_y)\|_\Omega^2 +&\\ + \|c_z^{-1/2}(\operatorname{div}\tilde{\tilde{s}} + \tilde{\tilde{\tau}}_{xy} - \tilde{\tilde{\tau}}_{yx} + g_z)\|_\Omega^2 + \|d_x^{-1/2}(t_x - \tilde{\tilde{\tau}}_{xx}n_x - \tilde{\tilde{\tau}}_{yx}n_y)\|_{\Gamma_{\mathrm{S}}}^2 +&\\ + \|d_y^{-1/2}(t_y - \tilde{\tilde{\tau}}_{xy}n_x - \tilde{\tilde{\tau}}_{yy}n_y)\|_{\Gamma_{\mathrm{S}}}^2 + \|d_z^{-1/2}(m_z - \tilde{\tilde{s}}\cdot n)\|_{\Gamma_{\mathrm{S}}}^2\Big)&.\end{aligned}$$

С точки зрения практического применения подхода нецелесообразно использовать разные наборы констант, поскольку это влечет за собой необходимость пересчета постоянной $\mathfrak{c}_{VIII}$, поэтому свяжем их значения с параметрами задачи, имеющими подходящую размерность. Пусть, например,

$$c_x = c_y = \frac{\mu}{|\Omega|}, \quad c_z = \frac{B}{|\Omega|}, \quad d_x = c_x|\Gamma_{\mathrm{S}}|, \quad d_y = c_y|\Gamma_{\mathrm{S}}|, \quad d_z = c_z|\Gamma_{\mathrm{S}}|.$$

Применяя неравенство Коши–Шварца, получаем первую апостериорную оценку:

$$\|\xi\| \le \mathcal{D}(\tilde{\sigma}, \tilde{p}, \tilde{M}; \tilde{\tilde{\tau}}_1, \tilde{\tilde{\tau}}_2, \tilde{\tilde{s}}) + \mathcal{R}(\tilde{\tilde{\tau}}_1, \tilde{\tilde{\tau}}_2, \tilde{\tilde{s}}), \tag{5.19}$$

где $\tilde{M} := 4B\nabla\tilde{\omega}_z$,

$$\begin{aligned}\mathcal{D}^2(\tilde{\sigma}, \tilde{p}; \tilde{\tilde{\tau}}_1, \tilde{\tilde{\tau}}_2, \tilde{\tilde{s}}) := \int\limits_\Omega \frac{1}{2}\mathrm{L}^{-1}(\tilde{\tilde{\tau}} - \operatorname{sym}(\tilde{\sigma})) : (\tilde{\tilde{\tau}} - \operatorname{sym}(\tilde{\sigma}))\, d\Omega +&\\ + \int\limits_\Omega \frac{1}{2\mu_c}\left(\frac{\tilde{\tilde{\tau}}_{xy} - \tilde{\tilde{\tau}}_{yx}}{2} - \tilde{p}\right)^2 d\Omega + \int\limits_\Omega \frac{1}{8B}|\tilde{\tilde{s}} - \tilde{M}|^2\, d\Omega&.\end{aligned}$$

Используя неравенство Коши с параметром, приходим к конечному результату и можем сформулировать следующую теорему, фактически доказанную выше.

Теорема 5.2. *Для плоских задач в теории упругости Коссера с граничными условиями смешанного типа справедливо обобщение апостериорной оценки, представленной в Теореме 5.1, содержащее тройку свободных элементов из одного класса — гильбертова пространства* $\mathbb{H}(\Omega, \Gamma_\mathrm{S}, \mathrm{div})$

$$\|\xi\|^2 \leq (1+\beta)\mathcal{D}^2(...;\tilde{\tilde{\tau}}_1, \tilde{\tilde{\tau}}_2, \tilde{\tilde{s}}) + (1+\beta^{-1})\mathcal{R}^2(\tilde{\tilde{\tau}}_1, \tilde{\tilde{\tau}}_2, \tilde{\tilde{s}}). \tag{5.20}$$

Обе полученные апостериорные оценки помимо аппроксимаций $\tilde{u}_x$, $\tilde{u}_y$ и $\tilde{\omega}_z$, точность которых мы контролируем через силовые характеристики $\tilde{\sigma}$, $\tilde{p}$ и $\tilde{M}$, включают в себя свободные элементы $\tilde{\tilde{\tau}}_1$, $\tilde{\tilde{\tau}}_2$ и $\tilde{\tilde{s}}$. Близость этих элементов к точным полям силовых и моментных напряжений дает эффективную оценку погрешности. Действительно, функционал $\mathcal{R}^2$ представляет собой взвешенную сумму квадратов норм невязок соответствующих уравнений равновесия для среды Коссера, которые можно найти, например в [473], [479], [493], [502] и других источниках. В свою очередь, значение функционала $\mathcal{D}^2$ на точных значениях полей совпадает с квадратом нормы погрешности. Функционал в правой части (5.20) более удобен с практической точки зрения, чем (5.19), поскольку имеет квадратичную структуру, следовательно, среди прочего, может быть представлен в виде суммы локальных вкладов и использован в качестве локального индикатора распределения погрешности.

Если поверхностные силы и моменты кусочно-постоянны, то используя специальные аппроксимации — например, аппроксимации Арнольда–Боффи–Фалка [251], успешно примененные в предыдущей главе — можно точно удовлетворить части граничных условий, а именно

$$\tilde{\tilde{\tau}}_1 \cdot n = t_x, \quad \tilde{\tilde{\tau}}_2 \cdot n = t_y, \quad \tilde{\tilde{s}} \cdot n = m_z = M_{xz}n_x + M_{yz}n_y,$$

что исключает из мажорант интегралы, вычисляемые по границе области. Как показано в [80], применение таких аппроксимаций для классических плоских задач теории упругости приводит к существенному повышению качества вычисляемых оценок. Если на всей границе области задано условие на перемещения и поворот, то мы приходим как к частному случаю к результату, полученному в работе [73] и изложенному ранее в данной главе. В обоих случаях вводится тройка дополнительных переменных. Отличием новой оценки является то, что все элементы, входящие в эту тройку, могут быть построены на основе одного и того же типа аппроксимаций, поскольку все они принадлежат одному пространству, а не разным, как ранее.

5.7. Об одном аналитическом решении

Для подавляющего большинства примеров, рассмотренных при работе над диссертацией, задачи не имеют известного аналитического решения. Это связано с необходимостью исследовать применимость функционального подхода за рамками того небольшого множества задач, где такие решения можно получить или даже построить, определив соответствующую правую часть уравнения и граничные условия. Но поскольку публикации, в которых были бы численно исследованы свойства апостериорных оценок точности для задач в теории упругости Коссера, практически отсутствуют, разумным представляется начать именно с задачи с аналитическим решением. В качестве такого примера выбрана задача о сдвиговом деформировании бесконечного слоя шириной l, решение которой получил в своей диссертации М.А. Кулеш. В автореферате [503] оно приводится в иной форме, поскольку ниже явно используется симметрия задачи, что позволяет несколько упростить вид решения.

Рассмотрим модельную задачу в области $\Omega = [-l/2, l/2] \times (-\infty, +\infty)$, на боковых частях границы которой $x = \pm l/2$ задано условие типа Дирихле — нулевое перемещение и поворот. Пусть распределенная нагрузка, действующая на слой, такова, что $f_x \equiv 0$, а $f_y \equiv \mathrm{const}$, где f_y действует в отрицательном направлении оси ординат. Тогда разумно предположить, что вид решения не будет зависеть от переменной y, то есть $u_x \equiv 0$, $u_y = u_y(x)$, $\omega_z = \omega_z(x)$. Граничные условия записываются следующим образом: $u_y(\pm l/2) = \omega_z(\pm l/2) = 0$.

Приведенные ранее в главе уравнения с учетом смены индексации примут вид

$$(\lambda + 2\mu)(\operatorname{div} u)_{,x} + (\mu + \mu_c)(u_{x,y} - u_{y,x})_{,y} + 2\mu_c\omega_{z,y} = 0; \tag{5.21}$$

$$(\lambda + 2\mu)(\operatorname{div} u)_{,y} + (\mu + \mu_c)(u_{y,x} - u_{x,y})_{,x} - 2\mu_c\omega_{z,x} - f_y = 0; \tag{5.22}$$

$$4B\Delta\omega_z - 4\mu_c\omega_z + 2\mu_c(u_{y,x} - u_{x,y}) = 0. \tag{5.23}$$

Легко видеть, что при сделанных ранее предположениях первое уравнение системы удовлетворяется автоматически, а второе существенно упрощается

$$(\mu + \mu_c)u_{y,xx} - 2\mu_c\omega_{z,x} = f_y$$

и интегрируется явно

$$u_{y,x} - \frac{2\mu_c}{\mu + \mu_c}\omega_z = \frac{f_y x}{\mu + \mu_c} + \text{const}. \tag{5.24}$$

Третье уравнение системы также незначительно упрощается и преобразуется с подстановкой (5.24)

$$4B\omega_{z,xx} - 4\mu_c\omega_z + 2\mu_c u_{y,x} = 0,$$

далее

$$4B\omega_{z,xx} + \left(\frac{4\mu_c^2}{\mu + \mu_c} - 4\mu_c\right)\omega_z + \frac{2\mu_c}{\mu + \mu_c} f_y x = \text{const}$$

и, наконец,

$$\omega_{z,xx} - \frac{\mu\mu_c}{B(\mu + \mu_c)}\omega_z + \frac{\mu_c f_y x}{2B(\mu + \mu_c)} = \text{const}.$$

Рассмотрим сначала однородное уравнение

$$\omega_{zo,xx} = \frac{\mu\mu_c}{B(\mu + \mu_c)}\omega_{zo}.$$

Поскольку поворот в данном случае — нечетная функция, то

$$\omega_{zo} = \mathrm{G}_z \sinh\left(A\frac{2x}{l}\right), \quad A = \left(\frac{\mu\mu_c l^2}{4B(\mu + \mu_c)}\right)^{1/2},$$

где A — безразмерный параметр, а G_z — постоянная, требующая определения. Частное решение неоднородного уравнения

$$\omega_{zn} = \frac{f_y\, x}{2\mu}$$

также выписывается явно, поскольку не включает произвольной постоянной из-за нечетности функции. Таким образом,

$$\omega_z = \mathrm{G}_z \sinh\left(A\frac{2x}{l}\right) + \frac{f_y\, x}{2\mu},$$

где G_z находится из условия $\omega_z(l/2) = 0$, следовательно,

$$\omega_z = \frac{f_y\, l}{2\mu}\left(\frac{x}{l} - \frac{\sinh(2Ax/l)}{2\sinh(A)}\right). \tag{5.25}$$

Используя представление (5.25) в (5.24), получаем

$$u_{y,x} = \frac{1}{\mu+\mu_c}\left(\frac{\mu+\mu_c}{\mu}\, f_y\, x - \frac{\mu_c}{\mu}\frac{l}{2}f_y\frac{\sinh(2Ax/l)}{\sinh(A)}\right) + \mathrm{const}.$$

Далее, интегрируя, учитываем, что результат должен представлять собой четную функцию

$$u_y = \frac{f_y\, x^2}{2\mu} - \frac{f_y\, l^2\, \mu_c}{4A\, \mu(\mu+\mu_c)}\frac{\cosh(2Ax/l)}{\sinh(A)} + \mathrm{G}_y,$$

где неизвестная постоянная G_y находится из условия $u_y(l/2) = 0$, то есть

$$\mathrm{G}_y = -\frac{f_y}{2\mu}\left(\frac{l^2}{4} - \frac{l^2\mu_c}{2A(\mu+\mu_c)}\coth(A)\right).$$

Как итог, приходим к решению

$$u_y = \frac{f_y l^2}{2\mu}\left(\left(\frac{x}{l}\right)^2 - \frac{1}{4} + \frac{\mu_c}{2A(\mu+\mu_c)}\frac{\cosh(A) - \cosh(2Ax/l)}{\sinh(A)}\right). \tag{5.26}$$

По представлениям (5.25)–(5.26) несложно определить компоненты тензоров деформаций, силовых и моментных напряжений

$$\gamma_{xx} \equiv 0,\ \gamma_{yy} \equiv 0, \quad \gamma_{xy} = u_{y,x} - \omega_z, \quad \gamma_{yx} = \omega_z;$$

$$\sigma_{xx} \equiv 0,\ \sigma_{yy} \equiv 0, \quad \sigma_{xy} = f_y\, x, \quad \sigma_{yx} = (\mu-\mu_c)u_{y,x} + 2\mu_c\omega_z;$$

$$M_{yz} \equiv 0, \quad M_{xz} = 4B\omega_{z,x}.$$

Полученные формулы будут использованы в примере 5.1.

5.8. Численные результаты и оценка области эффективного применения авторского комплекса программ для анализа погрешности приближенных решений в плоских задачах теории упругости Коссера

В параграфе рассматриваются плоские задачи, решение которых реализовано через стандартные аппроксимации метода конечных элементов, а оценка погрешности вычисляется с привлечением аппроксимации Арнольда–Боффи–Фалка нулевого порядка, описанной в предыдущей главе. Показано, что предлагаемая методика всегда является надежной, но для определенного класса задач может оказаться неэффективной. В этом случае, однако, отклонение решения от классического настолько мало, что разумным оказывается выбор «несимметричной» мажоранты из предыдущей главы. Изложенные далее результаты опубликованы в работах автора [225], [226] и [255].

***Пример* 5.1.** *Пример с известным точным решением для бесконечного слоя*

В качестве первого примера выбрана задача о сдвиговом деформировании бесконечного слоя, для которой можно провести сравнение с точным решением, выписанным явно в параграфе 5.7. Однако при рассмотрении конечной высоты слоя именно вычисление апостериорных оценок позволяет гарантировать малость отклонения приближенного решения от неизвестного точного, поскольку аналитическое решение не может более в полной мере служить основой для контроля корректности работы вычислительных процедур. Оно содержит неизвестную ошибку математической модели, возникшую после замены конечного слоя на бесконечный.

В задаче рассматривается прямоугольная область с соотношением сторон 1 к 10 при равномерно распределенной объемной силе, действующей в отрицательном направлении оси $0y$, с условиями типа Дирихле на боковых поверхностях. На Рисунке 5.2 представлены аналитические и приближенные (вычисленные) значения компонент вектора перемещения и поворота. Легко видеть, что существенное отличие численного решения от аналитического возникает вдали от линии $y = 0$. Из анализа данных, приведенных в Таблице 5.1, можно сделать вывод о том, что метод эффективен, надежен и позволяет гарантировать точность вычисляемых приближенных решений. Отметим, что сетки метода конечных элементов выбирались в двух вариантах — с квадратными элементами и с элементами, вытянутыми вдоль вертикальной оси в соотношении 1 к 4.

Пример 5.2. *Квадратная область с круглым отверстием малого радиуса*

Для данного примера (см. Рисунок 5.3) радиус отверстия сравним по размеру с размером частиц микроструктуры. Левая сторона квадрата закреплена, а к правой приложена растягивающая распределенная нагрузка. Параметры задачи взяты из статьи [494]: сторона квадрата 16.2 **мм**, радиус отверстия 0.216 **мм**, $\lambda = 0.11538 \times 10^{10}$ $\mathbf{Н/м^2}$, $\mu = 0.76923 \times 10^{9}$ $\mathbf{Н/м^2}$, $B = 31.762$ **Н**, $\mu_c = 0.25638 \times 10^{11}$ $\mathbf{Н/м^2}$, нагружение 1 **МПа**, размер частиц 0.2 **мм**.

Таблица 5.1: Результаты для $\mathcal{ABF}_0(\hat{\mathcal{K}})$-аппроксимации в примере 5.1

Соотношение сторон элементов	1:1			1:4		
Число ст. свободы	615	2187	8211	567	2091	8019
Погрешность, %	38.1	19.8	10.1	21.7	11.7	6.2
I_{eff}	1.4	1.4	1.3	2.0	1.8	1.6

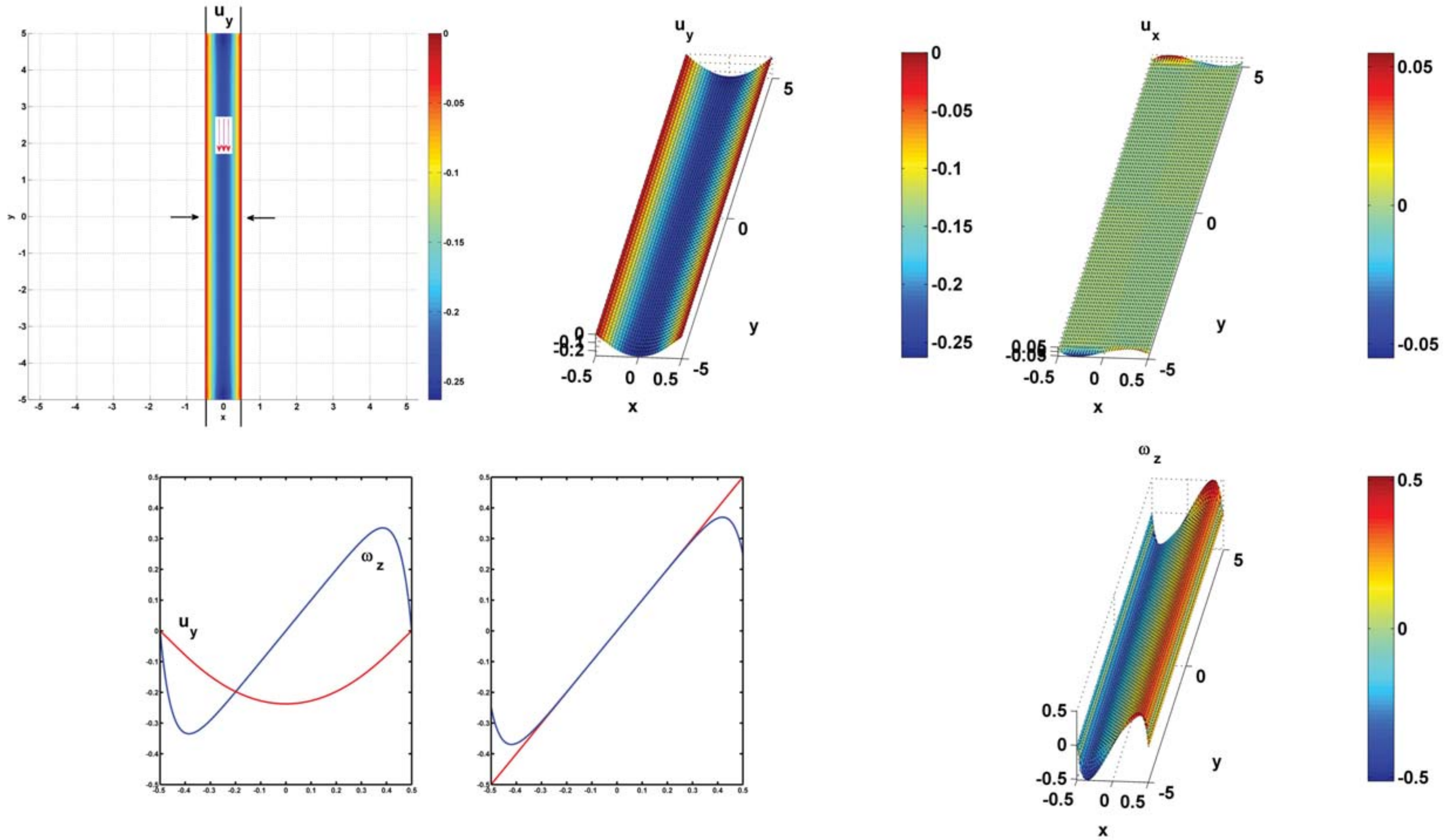


Рисунок 5.2: Условия и результаты для примера 5.1: левый блок сверху вниз — слой, граничные условия и нагружение; результат расчета методом конечных элементов вертикального перемещения для области конечного размера; точные значения полей для бесконечного слоя, а также компоненты касательных напряжений σ_{xy} (красный), σ_{yx} (синий); правый блок сверху вниз — результат расчета горизонтального перемещения и поворота.

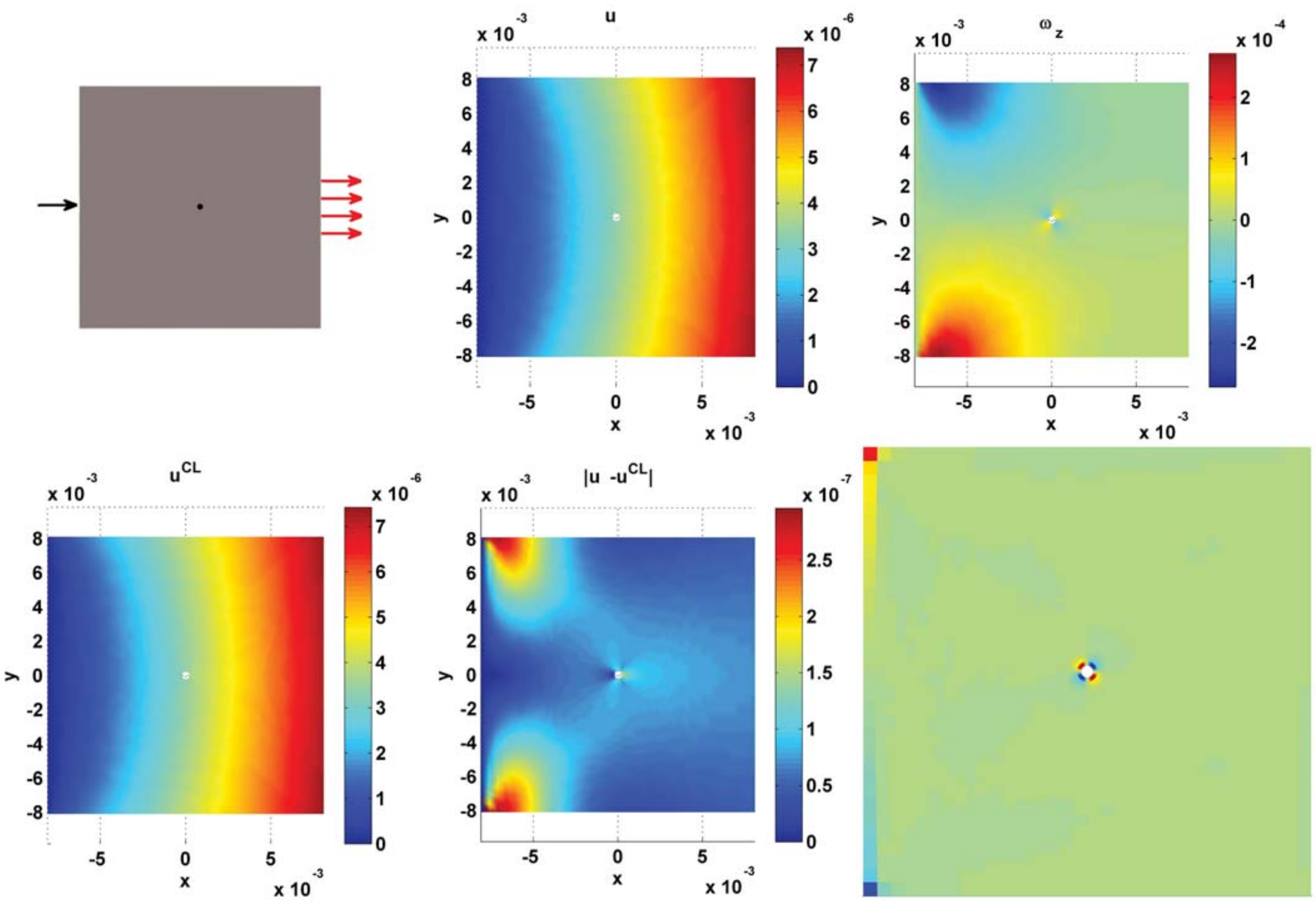


Рисунок 5.3: Результаты в примере 5.2 для сетки 2 из Таблицы 5.2 (слева направо сверху вниз): условия задачи (схематично); суммарное перемещение и поворот; классическое решение ANSYS, отмеченное индексом **CL**, и отклонение от него; зоны, в которых проявляется несимметрия тензора напряжений.

Таблица 5.2: Результаты для примера 5.2

Сетка	0	1	2	3	RS [a]
Число ст. свободы	504	1872	7200	28224	111744
Погрешность, %	15.8	11.1	7.3	4.0	отклонение
I_{eff}	1.23	1.20	1.21	1.34	от ANSYS
β	0.158	0.122	0.087	0.056	около 0.8 %

[a] параметры сетки для вычисления эталонного решения

Результаты оценки погрешности для нескольких шагов равномерного дробления сетки собраны в Таблице 5.2. Из данных можно сделать вывод, что индекс эффективности остается стабильным и подход действительно является надежным, поскольку верхние оценки энергетической нормы погрешности всегда гарантированные. Параметр β монотонно приближается к нулю. Опыт применения оценок для других задач и теория указывают на то, что такое поведение параметра необходимо для получения результатов достаточно высокого качества. В дополнение к глобальной оценке погрешности, методика дает индикатор ее локального распределения по расчетной области Ω, приведенный на Рисунке 5.4. Он может быть полезен при использовании автоматической процедуры разбиения/перестроения расчетной сетки.

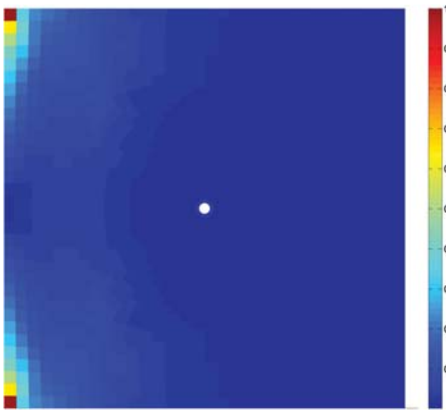


Рисунок 5.4: Индикатор локального распределения погрешности для примера 5.2.

Таблица 5.3: Результаты для примера 5.3

Сетка	0	1	2	3	RS
Число ст. свободы	336	1248	4800	18816	296448
Погрешность, %	11.5	7.4	4.7	2.9	отклонение
I_{eff}	1.85	1.72	1.70	1.77	от ANSYS
β	0.098	0.058	0.036	0.023	около 0.9%

Данный пример является типичной иллюстрацией к поведению предложенной в работе апостериорной оценки функционального типа в случае, когда имеется существенное влияние микроструктуры, которое порождает различие в решениях по модели Коссера и классической модели. В некоторых примерах эта разница достигала 7% в глобальной интегральной норме.

***Пример* 5.3.** *Квадратная область с большим квадратным отверстием*

Следующий пример, с одной стороны, похож на предыдущий с точки зрения граничных условий — закрепления и приложенных нагрузок. С другой стороны, отверстие в области и сами ее размеры существенно больше, чем в примере 5.2. Форма отверстия также оказывает влияние на получаемые результаты. Рассматривается квадратная область, для которой сторона равна 2 **м**, а диагональ отверстия квадратной формы составляет 0.3 **м** (см. Рисунок 5.5). Свойства материала взяты из [503]: $\lambda = 0.20960 \times 10^{10}$ $\mathbf{Н/м^2}$, $\mu = 0.10330 \times 10^{10}$ $\mathbf{Н/м^2}$, $B = 0.10578 \times 10^7$ $\mathbf{Н}$, $\mu_c = 0.11480 \times 10^9$ $\mathbf{Н/м^2}$, нагружение как и ранее выбрано равным 1 **МПа**.

Результаты оценки погрешности представлены в Таблице 5.3. Индекс эффективности находится в диапазоне 1.7–1.9, а параметр β уменьшается с измельчением сетки. Индикатор локального распределения ошибки на Рисунке 5.6 в этом случае выделяет не только зоны области, лежащие вблизи закрепления, но также верхнего и нижнего угла отверстия, полностью отражая симметрию, которой обладает исходная задача.

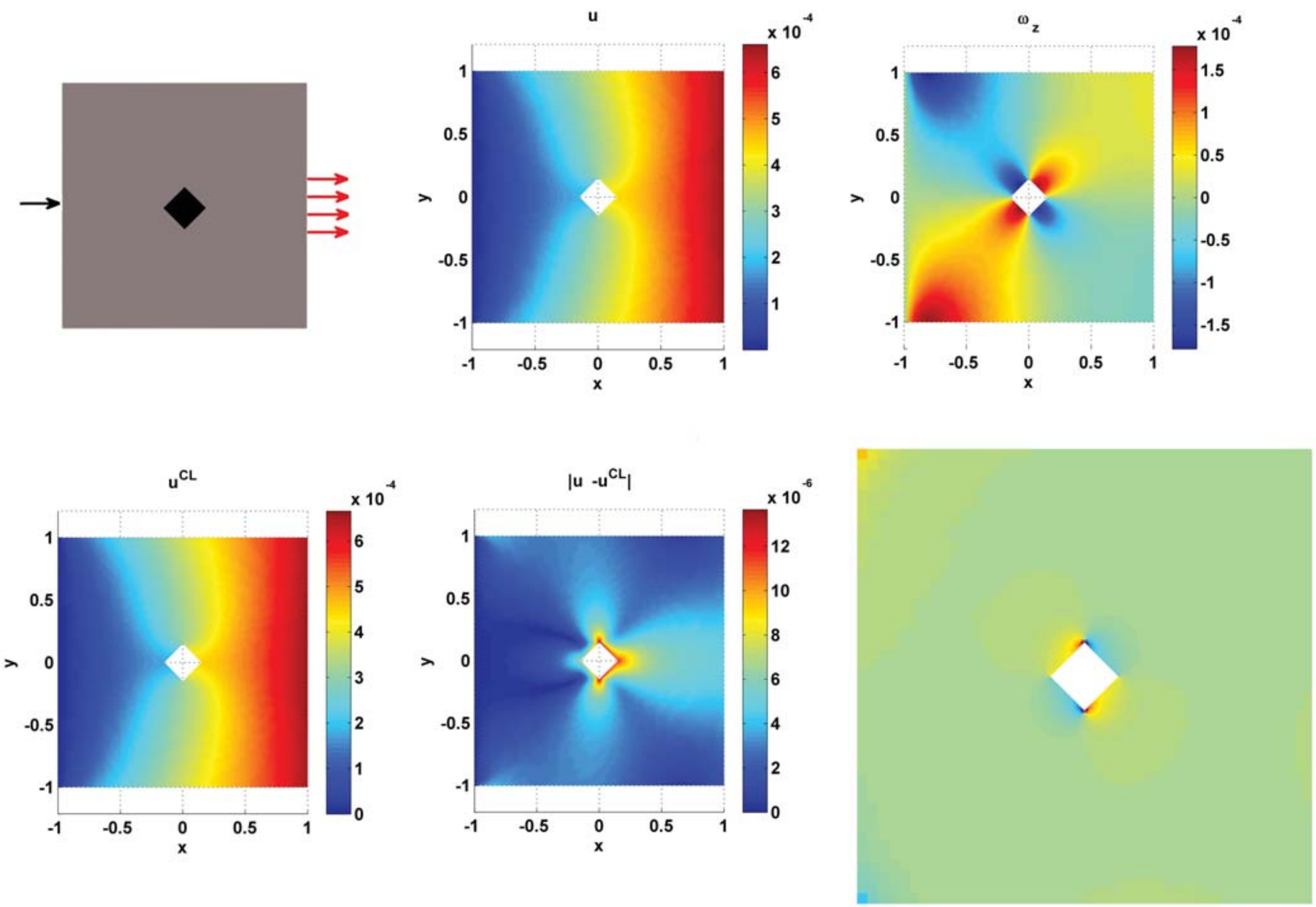


Рисунок 5.5: Результаты в примере 5.3 для сетки 3 из Таблицы 5.3 (слева направо сверху вниз): условия задачи (схематично); суммарное перемещение и поворот; классическое решение ANSYS, отмеченное индексом **CL**, и отклонение от него; зоны, в которых проявляется несимметрия тензора напряжений.

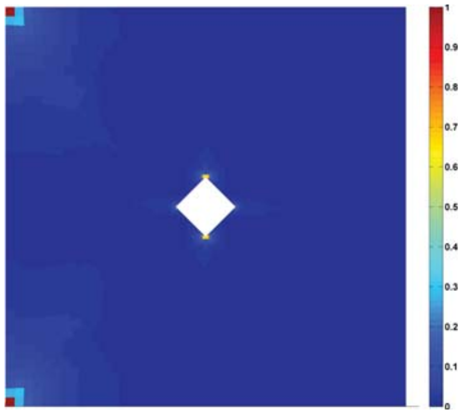


Рисунок 5.6: Индикатор локального распределения погрешности для примера 5.3.

***Пример* 5.4.** *О границах применимости оценки*

В качестве следующего примера обсуждается континуум Коссера в области, представляющей из себя единичный квадрат без отверстий. Параметры материала выбраны таким образом, чтобы получить крайне малое различие между эталонным решением и классическим решением ANSYS в $\mathbb{L}_2$-норме. Из результатов, собранных в Таблице 5.4, можно сделать вывод, что предложенная оценка погрешности дает результат хуже, чем в предыдущих случаях — индекс эффективности монотонно и достаточно быстро растет. Увеличивается также и значение параметра β. Естественной альтернативой в этом случае становится функциональная апостериорная оценка для классической линейной теории упругости, исследованная в предыдущей главе диссертации.

Таблица 5.4: Результаты для примера 5.4

Сетка	0	1	2	RS
Число ст. свободы	140	747	2811	198147
Погрешность, %	28.1	15.2	8.6	отклонение
I_{eff}	6.9	11.1	13.6	от ANSYS
β	1.223	1.396	1.862	менее 0.04 %

Таблица 5.5: Результаты для примера 5.5

Сетка	0	1	2	RS
Число ст. свободы	225	833	3201	49665
Погрешность, %	26.3	13.9	7.4	отклонение
I_{eff}	1.45	1.42	1.47	от ANSYS
β	0.180	0.109	0.069	около 5.0%

***Пример* 5.5.** *Пример в L-образной области*

Данные — геометрия расчетной области на Рисунке 5.7, нагружение и стандартные упругие свойства материала — для заключительного примера в главе взяты из работы C. Carstensen, H. Rabus [504], в которой рассматривается область, изображенная на Рисунке 5.7. Это квадрат со стороной 2.0 **м** с вырезанной четвертью. Такая геометрия, содержащая входящий угол, часто используется в литературе для постановки вычислительного эксперимента и носит называние L-образной области. Остальные параметры задачи, соответственно, $\lambda = 0.57692$ **Н/м**^{2}, $\mu = 0.38462$ **Н/м**^{2}, $B = 0.24038 \times 10^{-3}$ **Н**, $\mu_c = 0.16700$ **Н/м**^{2}. Объемная сила задана следующим образом: $f = (1, 0)$ в темной части, $f = (0, 0)$ — в остальных.

Рисунок 5.7: Форма области и ее разделение для примера 5.5.

Численные результаты представлены в Таблице 5.5. Данный пример полностью подтверждает сделанные ранее выводы. Индекс эффективности снова не демонстрирует существенного роста с измельчением сетки и остается в интервале 1.4–1.5, а параметр β при этом монотонно убывает. Такая картина вновь наблюдается в задаче, где существенным является отличие решения от классического.

5.9. Основные выводы

В главе методами теории двойственности вариационного исчисления и преобразованием обобщенной постановки задачи получены функциональные апостериорные оценки энергетической нормы отклонения от точного решения для произвольных конформных приближенных решений плоских задач в теории упругости Коссера. Первый результат ограничивается задачами с граничными условиями на перемещение и поворот, а второй — условиями общего вида, включающими также заданные силы и момент. Все полученные оценки являются гарантированными и точными (не имеют зазора между правой и левой частью).

Основными выводами из представленного вычислительного эксперимента являются следующие:

1. Аппроксимация Арнольда–Боффи–Фалка минимального порядка обеспечивает эффективный способ реализации функционального подхода.

2. Подход является надежным — оценки гарантированные и сохраняют это свойство при практической реализации.

3. Методика эффективна для широкого класса задач, поскольку поведение индекса эффективности стабильно, а его значение лежит в диапазоне от 1.0 до 2.0.

4. Исключение составляют некоторые ситуации, в которых пренебрежимо мало влияние микроструктуры на вид решения. В этом случае в качестве разумной альтернативы можно выбрать оценку, исследованную в предыдущей главе.

Заключение

В диссертации развит современный подход, который позволяет вычислять надежные апостериорные оценки, контролирующие точность приближенных решений многих практически важных вариационных задач, что является неотъемлемой частью современного математического моделирования. Результаты получены для известных задач механики и некоторых задач математической физики: задачи Дирихле для уравнения Пуассона и задачи диффузии; задач теории изгиба пластин Рейсснера–Миндлина, изгиба прямолинейных балок Тимошенко и Бернулли–Эйлера; плоских задач классической теории упругости и моментной теории упругости Коссера. В работе предложены новые теоретические оценки, а также разработаны и применены методики численной реализации мажорант погрешности в виде комплексов программ.

Большое внимание уделено вычислительному эксперименту, направленному на анализ особенностей различных реализаций функционального подхода к построению апостериорных оценок. Основным выводом из приведенных численных результатов является следующий: подход позволяет получать эффективные оценки энергетической нормы ошибки для конформных аппроксимаций решения исходной задачи. Лучший результат с точки зрения качества оценки погрешности достигается при привлечении аппроксимаций, характерных для смешанных методов конечных элементов. Затраты, которые влечет за собой реализация вычислений, компенсируются за счет универсальности подхода, устойчивости и высокого качества оценок, измеряемого в терминах общепринятой характеристики — индекса эффективности. Таким образом, можно рекомендовать функциональный подход к применению при оценке точности приближенных решений различных краевых задач, в особенности как независимую надстройку к коммерческим пакетам для инженерного анализа, поскольку его возможности превосходят возможности классических методов в теории апостериорного контроля точности.

Помимо научной ценности и новизны, полученные теоретические результаты и опыт, накопленный автором при их реализации, могут найти свое применение при промышленной разработке отечественного программного обеспечения для инженерных расчетов. Результаты могут быть использованы в научных исследованиях в области разработки новых методов вычислений.

Проведенное исследование может быть развито в рамках нескольких направлений. Во-первых, один из теоретических результатов для пластин Рейсснера–Миндлина получен в форме, допускающей прямое распространение на этот класс задач того метода, который основан на привлечении аппроксимации Арнольда–Боффи–Фалка. Во-вторых, важным этапом дальнейших изысканий видится переход к анализу пространственных задач теории упругости, чему в диссертации посвящена относительно небольшая часть. Наконец, еще одним, но не последним по значимости направлением последующей разработки темы является параллельная реализация подхода и глубокий анализ вопросов, связанных с решением возникающих систем линейных алгебраических уравнений, в частности, их эффективное предобуславливание.

Список литературы

1. Сьярле, Ф. Метод конечных элементов для эллиптических задач / Ф. Сьярле. — М.: Мир, 1980. — 512 с.
2. Марчук, Г.И. Введение в проекционно-сеточные методы: учеб. пособие для вузов / Г.И. Марчук, В.И. Агошков. — М.: Наука, 1981. — 416 с.
3. Колтунов, М.А. Прикладная механика деформируемого твердого тела: учеб. пособие для вузов по спец. «Прикл. математика» / М.А. Колтунов, А.С. Кравчук, В.П. Майборода. — М.: Высш. шк., 1983. — 349 с.
4. Ректорис, К. Вариационные методы в математической физике и технике / К. Ректорис. — М.: Мир, 1985. — 589 с.
5. Самарский, А.А. Введение в численные методы / А.А. Самарский. — 2-е изд., перераб. и доп. — М.: Наука, 1987. — 288 с.
6. Крауч, С. Методы граничных элементов в механике твердого тела / С. Крауч, А. Старфилд. — М.: Мир, 1987. — 328 с.
7. Васидзу, К. Вариационные методы в теории упругости и пластичности / К. Васидзу. — М.: Мир, 1987. — 542 с.
8. Мирсалимов, В.М. Неодномерные упругопластические задачи / В.М. Мирсалимов. — М.: Наука, 1987. — 255 с.
9. Фадеев, А.Б. Метод конечных элементов в геомеханике / А.Б. Фадеев. — М.: Недра, 1987. — 221 с.
10. Работнов, Ю.Н. Механика деформируемого твердого тела: учеб. пособие для мех.-мат. и физ. спец. ун-тов / Ю.Н. Работнов. — 2-е изд., испр. — М.: Наука, 1988. — 712 с.
11. Марчук, Г.И. Методы вычислительной математики / Г.И. Марчук. — М.: Наука, 1989. — 608 с.
12. Дьяконов, Е.Г. Минимизация вычислительной работы: Асимптотически оптимальные алгоритмы для эллиптических задач / Е.Г. Дьяконов. — М.: Наука, 1989. — 272 с.
13. Шайдуров, В.В. Многосеточные методы конечных элементов / В.В. Шайдуров. — М.: Наука, 1989. — 288 с.
14. Brezzi, F. Mixed and hybrid finite element methods / F. Brezzi, M. Fortin. — New York etc.: Springer-Verlag, 1991. — ix + 350 pp.
15. Crisfield, M.A. Non-linear finite element analysis of solids and structures. Volume 1: Essentials / M.A. Crisfield. — Chichester: Wiley, 1991. — xv + 345 pp.
16. Федоренко, Р.П. Введение в вычислительную физику: учебное пособие для вузов / Р.П. Федоренко. — М.: Изд-во МФТИ, 1994. — 526 с.

17. Bonet, J. Nonlinear continuum mechanics for finite element analysis / J. Bonet, R.D. Wood. — Cambridge: Cambridge University Press, 1997. — xvii + 248 pp.

18. Moaveni, S. Finite element analysis: Theory and application with ANSYS / S. Moaveni. — Prentice Hall, 1999. — 880 pp.

19. Zienkiewicz, O.C. Finite element method. Vol. 1: The basis / O.C. Zienkiewicz, R.L. Taylor. — 5th edition. — Oxford: Butterworth-Heinemann, 2000. — 712 pp.

20. Zienkiewicz, O.C. Finite element method. Vol. 2: Solid mechanics / O.C. Zienkiewicz, R.L. Taylor. — 5th edition. — Oxford: Butterworth-Heinemann, 2000. — 480 pp.

21. Коробейников, С.Н. Нелинейное деформирование твердых тел / С.Н. Коробейников. — РАН. Сибирское отделение; Ин-т гидродинамики им. М.А.Лаврентьева. — Новосибирск: СО РАН, 2000. — 261 с.

22. Воеводин, В.В. Параллельные вычисления: учебное пособие для вузов по направлению 510200 «Прикладная математика и информатика» / В.В. Воеводин, Вл.В. Воеводин. — Санкт-Петербург: БХВ-Петербург, 2002. — 599 с.

23. Ern, A. Theory and practice of finite elements / A. Ern, J.-L. Guermond. — New York, NY: Springer, 2004. — xiii + 524 pp.

24. Ольшанский, М.А. Лекции и упражнения по многосеточным методам / М.А. Ольшанский. — М.: Физматлит, 2005. — 168 с.

25. Численные методы решения задач математической физики. Современные проблемы вычислительной математики и математического моделирования: в 2 т. / Н.С. Бахвалов, Г.М. Кобельков, Ю.А. Кузнецов [и др.]. — Ин-т вычисл. математики. — Т. 1: Вычислительная математика. — М.: Наука, 2005. — 343 с.

26. Самарский, А.А. Математическое моделирование: Идеи. Методы. Примеры / А.А. Самарский, А.П. Михайлов. — 2-е изд., испр. — М.: Физматлит, 2005. — 316 с.

27. Sadd, M.H. Elasticity: Theory, applications, and numerics / M.H. Sadd. — Elsevier Butterworth Heinemann, 2005. — 600 pp.

28. Solin, P. Partial differential equations and the finite element method / P. Solin. — Wiley, 2005. — 512 pp.

29. Braess, D. Finite elements. Theory, fast solvers and applications in solid mechanics. Translated from German by Larry L. Schumaker / D. Braess. — 3rd edition. — Cambridge: Cambridge University Press, 2007. — xvii + 365 pp.

30. Бахвалов, Н.С. Численные методы / Н.С. Бахвалов, Н.П. Жидков, Г.М. Кобельков. — 5-е изд. — М.: БИНОМ. Лаборатория знаний, 2007. — 636 с.

31. Бадриев, И.Б. Итерационные методы решения вариационных неравенств в гильбертовых пространствах: учебное пособие... по направлению «Прикладная математика и ин-

форматика» / И.Б. Бадриев, О.А. Задворнов. — 2-е изд., испр. и доп. — Казань: Казанский государственный университет, 2007. — 152 с.

32. Slivker, V. Mechanics of structural elements. Theory and application / V. Slivker. — Berlin: Springer, 2007. — xxvii + 786 pp.
33. Бурова, И.Г. Алгоритмы параллельных вычислений и программирование: курс лекций / И.Г. Бурова, Ю.К. Демьянович. — Санкт-Петербург: Издательство С.-Петербургского государственного университета, 2007. — 206 с.
34. Brenner, S.C. The mathematical theory of finite element methods / S.C. Brenner, R.L. Scott. — 3rd edition. — New York, NY: Springer, 2008. — xvii + 397 pp.
35. Fries, T.-P. The extended/generalized finite element method: an overview of the method and its applications / T.-P. Fries, T. Belytschko // Int. J. Numer. Methods Eng. — 2010. — Vol. 84, № 3. — P. 253–304.
36. Szabó, B. Introduction to finite element analysis. Formulation, verification and validation / B. Szabó, I. Babuška. — Hoboken, NJ: John Wiley & Sons, 2011. — xviii + 364 pp.
37. Даутов, Р.З. Введение в теорию метода конечных элементов: учебное пособие...по направлению «Прикладная математика и информатика» / Р.З. Даутов, М.М. Карчевский. — Казань: Казанский государственный университет, 2012. — 240 с.
38. Korneev, V.G. Dirichlet–Dirichlet domain decomposition methods for elliptic problems: h and hp finite element discretizations / V.G. Korneev, U. Langer. — World Scientific Publishing, 2015. — 484 pp.
39. Handbook of numerical analysis. Volume I. Finite difference methods (Part 1). Solution of equations in R^n (Part 1) / Ed. by P.G. Ciarlet, J.L. Lions. — Amsterdam etc.: North-Holland, 1990. — vii + 652 pp.
40. Handbook of numerical analysis. Volume II: Finite element methods (Part 1) / Ed. by P.G. Ciarlet, J.L. Lions. — Amsterdam etc.: North-Holland, 1991. — ix + 928 pp.
41. Handbook of numerical analysis. Volume III: Techniques of scientific computing (Part 1). Numerical methods for solids (Part 1). Solution of equations in $\mathbb{R}^n$ (Part 2) / Ed. by P.G. Ciarlet, J.L. Lions. — Amsterdam: North-Holland, 1994. — x + 778 pp.
42. Handbook of numerical analysis. Volume IV: Finite element methods (Part 2). Numerical methods for solids (Part 2) / Ed. by P.G. Ciarlet, J.L. Lions. — Amsterdam: North-Holland, 1995. — 984 pp.
43. Dörfler, W. A convergent adaptive algorithm for Poisson's equation / W. Dörfler // SIAM J. Numer. Anal. — 1996. — Vol. 33, № 3. — P. 1106–1124.
44. Veeser, A. Convergent adaptive finite elements for the nonlinear Laplacian / A. Veeser // Numer. Math. — 2002. — Vol. 92, № 4. — P. 743–770.

45. Mekchay, K. Convergence of adaptive finite element methods for general second order linear elliptic PDEs / K. Mekchay, R.H. Nochetto // SIAM J. Numer. Anal. — 2005. — Vol. 43, № 5. — P. 1803–1827.

46. Carstensen, C. A convergent adaptive finite element method for the primal problem of elasto-plasticity / C. Carstensen, A. Orlando, J. Valdman // Int. J. Numer. Methods Eng. — 2006. — Vol. 67, № 13. — P. 1851–1887.

47. Demlow, A. Convergence of an adaptive finite element method for controlling local energy errors / A. Demlow // SIAM J. Numer. Anal. — 2010. — Vol. 48, № 2. — P. 470–497.

48. Siebert, K.G. Mathematically founded design of adaptive finite element software / K.G. Siebert // Multiscale and adaptivity: Modeling, numerics and applications. C.I.M.E. summer school, Cetraro, Italy, July 6–11, 2009. — Berlin: Springer; Firenze: Fondazione CIME Roberto Conti, 2012. — P. 227–309.

49. Mitchell, W.F. A comparison of adaptive refinement techniques for elliptic problems / W.F. Mitchell // ACM Trans. Math. Softw. — 1989. — Vol. 15, № 4. — P. 326–347.

50. Stevenson, R. Optimality of a standard adaptive finite element method / R. Stevenson // Found. Comput. Math. — 2007. — Vol. 7, № 2. — P. 245–269.

51. Stein, E. Mesh adaptations for linear 2D finite-element discretizations in structural mechanics, especially in thin shell analysis / E. Stein, W. Rust // J. Comput. Appl. Math. — 1991. — Vol. 36, № 1. — P. 107–129.

52. Johnson, C. Adaptive finite element methods in computational mechanics / C. Johnson, P. Hansbo // Comput. Methods Appl. Mech. Eng. — 1992. — Vol. 101, № 1-3. — P. 143–181.

53. Babuška, I. Error estimates for adaptive finite element computations / I. Babuška, W.C. Rheinboldt // SIAM J. Numer. Anal. — 1978. — Vol. 15. — P. 736–754.

54. Babuška, I. A-posteriori error estimates for the finite element method / I. Babuška, W.C. Rheinboldt // Int. J. Numer. Methods Eng. — 1978. — Vol. 12. — P. 1597–1615.

55. Babuška, I. A posteriori error analysis of finite element solutions for one- dimensional problems / I. Babuška, W.C. Rheinboldt // SIAM J. Numer. Anal. — 1981. — Vol. 18. — P. 565–589.

56. Babuška, I. Feedback, adaptivity, and a posteriori estimates in finite elements: aims, theory, and experience / I. Babuška // Accuracy estimates and adaptive refinements in finite element computations (Lisbon, 1984). — John Wiley & Sons Ltd, 1986. — P. 3–23.

57. Bank, R.E. Analysis of a local a posteriori error estimate for elliptic equations / R.E. Bank // Accuracy estimates and adaptive refinements in finite element computations (Lisbon, 1984). — John Wiley & Sons Ltd, 1986. — P. 119–128.

58. Verfürth, R. A review of a posteriori error estimation and adaptive mesh-refinement tech-

niques / R. Verfürth. — Chichester: John Wiley & Sons; Stuttgart: B. G. Teubner, 1996. — vi + 127 pp.

59. Verfürth, R. A posteriori error estimation techniques for finite element methods / R. Verfürth. — Oxford: Oxford University Press, 2013. — xx + 393 pp.
60. Ainsworth, M. A posteriori error estimation in finite element analysis / M. Ainsworth, J.T. Oden. — Chichester: Wiley, 2000. — xx + 240 pp.
61. Babuška, I. The finite element method and its reliability / I. Babuška, T. Strouboulis. — Oxford University Press, 2001. — 814 pp.
62. Bangerth, W. Adaptive finite element methods for differential equations / W. Bangerth, R. Rannacher. — Basel: Birkhäuser, 2003. — viii + 207 pp.
63. Neittaanmäki, P. Reliable methods for computer simulation. Error control and a posteriori estimates / P. Neittaanmäki, S. Repin. Studies in Mathematics and its Applications 33. — Amsterdam: Elsevier, 2004. — x + 305 pp.
64. Repin, S. A posteriori estimates for partial differential equations / S. Repin. — Berlin: de Gruyter, 2008. — xi + 316 pp.
65. Babuška, I. Finite elements. An introduction to the method and error estimation / I. Babuška, J.R. Whiteman, T. Strouboulis. — Oxford: Oxford University Press, 2011. — xii + 323 pp.
66. Mali, O. Accuracy verification methods. Theory and algorithms / O. Mali, P. Neittaanmäki, S. Repin. — Dordrecht: Springer, 2014. — xiii + 355 pp.
67. Репин, С.И. Двусторонние оценки отклонения от точного решения для равномерно эллиптических уравнений / С.И. Репин // Труды Санкт-Петербургского Математического общества. — 2001. — Т. 9. — С. 148–179.
68. Репин, С.И. Оценки отклонения от точных решений некоторых краевых задач с условием несжимаемости / С.И. Репин // Алгебра и анализ. — 2004. — Т. 16, № 5. — С. 124–161.
69. Репин, С.И. Оценки разности приближенных решений задач Коши для параболического диффузионного уравнения и гиперболического уравнения с малым параметром / С.И. Репин, Б.Н. Четверушкин // Доклады Академии наук. — 2013. — Т. 451, № 3. — С. 255–258.
70. Музалевский, А.В. Об оценках погрешности приближенных решений в задачах линейной теории термоупругости / А.В. Музалевский, С.И. Репин // Известия ВУЗов: Математика. — 2005. — Т. 1 (512). — С. 64–72.
71. Репин, С.И. Об апостериорных оценках точности приближенных решений краевых задач для уравнений эллиптического типа / С.И. Репин, М.Е. Фролов // Журн. выч. мат. и матем. физики. — 2002. — Т. 42, № 12. — С. 1774–1787.
72. Репин, С.И. Об оценке отклонений от точного решения задачи о пластине Рейсснера-

Миндлина / С.И. Репин, М.Е. Фролов // Зап. научн. семинаров ПОМИ, Краевые задачи математической физики и смежные вопросы теории функций 34. — 2004. — Т. 310. — С. 145–157, 228.

73. Репин, С.И. Оценки отклонения от точного решения для плоских задач в теории упругости Коссера / С.И. Репин, М.Е. Фролов // Проблемы математического анализа. — 2011. — № 62. — С. 153–161.

74. Гаевская, А.В. Апостериорные оценки точности приближенных решений для задачи теплопроводности / А.В. Гаевская, С.И. Репин // Матер. Пятого Всерос. семинара Сеточные методы для краевых задач и приложения / Казань: Изд-во Казан. гос. ун-та. — 2004. — С. 40–43.

75. Гаевская, А.В. Апостериорние оценки погрешности приближенных решений линейных параболических задач / А.В. Гаевская, С.И. Репин // Дифференциальные уравнения. — 2005. — Т. 41, № 7. — С. 970–983.

76. Алексеев, А.К. Использование лагранжевых коэффициентов при апостериорной оценке погрешности расчета / А.К. Алексеев, И.Н. Махнев // Сибирский журнал вычислительной математики. — 2009. — Т. 12, № 4. — С. 375–388.

77. Бакушинский, А.Б. Новые апостериорные оценки погрешности приближенных решений нерегулярных операторных уравнений / А.Б. Бакушинский, А.С. Леонов // Вычислительные методы и программирование. — 2014. — Т. 15. — С. 359–369.

78. Боголюбов, А.Н. Об оценке погрешности приближенного решения эллиптических уравнений с некоэрцитивной билинейной формой / А.Н. Боголюбов, А.А. Панин // Вычислительные методы и программирование. — 2009. — Т. 10. — С. 34–48.

79. Фролов, М.Е. Адаптация сеток на основе функциональных апостериорных оценок с аппроксимацией Равьяра-Тома / М.Е. Фролов, М.А. Чурилова // Журнал вычислительной математики и математической физики. — 2012. — Т. 52, № 7. — С. 1277–1288.

80. Фролов, М.Е. Применение функциональных оценок погрешности со смешанными аппроксимациями к плоским задачам линейной теории упругости / М.Е. Фролов // Журнал вычислительной математики и математической физики. — 2013. — Т. 53, № 7. — С. 1178–1191.

81. Фролов, М.Е. О реализации контроля точности решений плоских задач теории упругости при помощи смешанных конечных элементов / М.Е. Фролов // Вычислительная механика сплошных сред. — 2014. — Т. 7, № 1. — С. 73–81.

82. Фролов, М.Е. Функциональные апостериорные оценки погрешности решений плоских задач в теории упругости Коссера / М.Е. Фролов // Прикладная математика и механика. — 2014. — Т. 78, № 4. — С. 595–603.

83. Фролов, М.Е. Надежный апостериорный контроль точности решений задач об изгибе пластин Рейсснера–Миндлина / М.Е. Фролов // Сеточные методы для краевых задач и приложения. Материалы Десятой Международной конференции. — Казань: Казанский университет. — 2014. — С. 610–615.
84. Чурилова, М.А. Применение функционального подхода к адаптивному решению эллиптических задач / М.А. Чурилова // Научно-технические ведомости СПбГПУ. — 2012. — Т. 4 (158). — С. 64–69.
85. Чурилова, М.А. Вычислительные свойства функциональных апостериорных оценок для стационарной задачи реакции-диффузии / М.А. Чурилова // Вестник СПбГУ. Серия 1: Математика. Механика. Астрономия. — 2014. — Т. 1, № 1. — С. 68–78.
86. Чурилова, М.А. Теоретическое и численное исследование функциональных апостериорных оценок для плоских задач линейной теории упругости / М.А. Чурилова // Сеточные методы для краевых задач и приложения. Материалы Десятой Международной конференции. — Казань: Казанский университет. — 2014. — С. 649–654.
87. Корнеев, В.Г. Контроль погрешности численных решений краевых задач механики сплошной среды / В.Г. Корнеев // Научно-технические ведомости СПбГПУ. — 2009. — Т. 4, № 88. — С. 31–43.
88. Корнеев, В.Г. Простые алгоритмы вычисления классических апостериорных оценок погрешности численных решений эллиптических уравнений / В.Г. Корнеев // Ученые записки Казанского университета. Серия: Физико-математические науки. — 2011. — Т. 153, № 4. — С. 11–27.
89. Золотарёва, Н.Д. Метод построения сеток, адаптирующихся к решению краевых задач для обыкновенных дифференциальных уравнений второго и четвертого порядков / Н.Д. Золотарёва, Е.С. Николаев // Дифференциальные уравнения. — 2009. — Т. 45, № 8. — С. 1165–1178.
90. Золотарёва, Н.Д. Адаптивная p-версия метода конечных элементов решения краевых задач для обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка / Н.Д. Золотарёва, Е.С. Николаев // Дифференциальные уравнения. — 2013. — Т. 49, № 7. — С. 863–876.
91. Багаев, Б.М. Сеточные методы решения задач с пограничным слоем: В 5 ч. / Б.М. Багаев, Е.Д. Карепова, В.В. Шайдуров. — РАН. Сибирское отделение; Ин-т вычислительного моделирования. — Новосибирск: Наука, 2001. — Ч. 2, 2001. — 222 с.
92. Караваев, А.С. Перестроение неструктурированных четырехугольных и смешанных сеток / А.С. Караваев, С.П. Копысов // Вестник Удмуртского университета. Математика. Механика. Компьютерные науки. — 2013. — № 4. — С. 62–78.

93. Караваев, А.С. Алгоритмы построения и перестроения неструктурированных четырехугольных сеток в многосвязных областях / А.С. Караваев, С.П. Копысов, А.Б. Пономарёв // Вычислительная механика сплошных сред. — 2012. — Т. 5, № 2. — С. 144–150.
94. Копысов, С.П. Метод декомпозиции для параллельного адаптивного конечно-элементного алгоритма / С.П. Копысов, А.К. Новиков // Вестник Удмуртского университета. Математика. Механика. Компьютерные науки. — 2010. — № 3. — С. 141–154.
95. Тимербаев, М.Р. Апостериорные оценки ошибок схем метода конечных элементов для эллиптических краевых задач с вырождением / М.Р. Тимербаев // Дифференциальные уравнения. — 2014. — Т. 50, № 7. — С. 963–978.
96. Bank, R.E. Some a posteriori error estimators for elliptic partial differential equations / R.E. Bank, A. Weiser // Math. Comput. — 1985. — Vol. 44. — P. 283–301.
97. Babuška, I. A feedback finite element method with a posteriori error estimation. I. The finite element method and some basic properties of the a posteriori error estimator / I. Babuška, A. Miller // Comput. Methods Appl. Mech. Eng. — 1987. — Vol. 61. — P. 1–40.
98. Rank, E. A simple error estimator in the finite element method / E. Rank, O.C. Zienkiewicz // Commun. Appl. Numer. Methods. — 1987. — Vol. 3. — P. 243–249.
99. Verfürth, R. A posteriori error estimators for the Stokes equations / R. Verfürth // Numer. Math. — 1989. — Vol. 55, № 3. — P. 309–325.
100. Verfürth, R. A posteriori error estimates for nonlinear problems. Finite element discretizations of elliptic equations / R. Verfürth // Math. Comput. — 1994. — Vol. 62, № 206. — P. 445–475.
101. Eriksson, K. Adaptive finite element methods for parabolic problems. I: A linear model problem / K. Eriksson, C. Johnson // SIAM J. Numer. Anal. — 1991. — Vol. 28, № 1. — P. 43–77.
102. Durán, R. On the asymptotic exactness of Bank-Weiser's estimator / R. Durán, R. Rodríguez // Numer. Math. — 1992. — Vol. 62, № 3. — P. 297–303.
103. Babuška, I. Analysis of the efficiency of an a posteriori error estimator for linear triangular finite elements / I. Babuška, R. Durán, R. Rodríguez // SIAM J. Numer. Anal. — 1992. — Vol. 29, № 4. — P. 947–964.
104. Rodríguez, R. A posteriori error analysis in the finite element method / R. Rodríguez // Finite element methods. 50 years of the Courant element. Conference held at the Univ. of Jyväskylä, Finland, 1993. — New York, NY: Marcel Dekker, Inc., 1994. — P. 389–397.
105. Becker, R. Adaptive error control for multigrid finite element methods / R. Becker, C. Johnson, R. Rannacher // Computing. — 1995. — Vol. 55, № 4. — P. 271–288.
106. Becker, R. A feed-back approach to error control in finite element methods: Basic analysis

and examples / R. Becker, R. Rannacher // East-West J. Numer. Math. — 1996. — Vol. 4, № 4. — P. 237–264.

107. Siebert, K.G. An a posteriori error estimator for anisotropic refinement / K.G. Siebert // Numer. Math. — 1996. — Vol. 73, № 3. — P. 373–398.
108. Stewart, J.R. A tutorial in elementary finite element error analysis: A systematic presentation of a priori and a posteriori error estimates / J.R. Stewart, T.J.R. Hughes // Comput. Methods Appl. Mech. Eng. — 1998. — Vol. 158, № 1-2. — P. 1–22.
109. Wohlmuth, B.I. A comparison of a posteriori error estimators for mixed finite element discretizations by Raviart-Thomas elements / B.I. Wohlmuth, R.H.W. Hoppe // Math. Comput. — 1999. — Vol. 68, № 228. — P. 1347–1378.
110. Residual based a posteriori error estimators for eddy current computation / R. Beck, R. Hiptmair, R.H.W. Hoppe, B. Wohlmuth // M2AN, Math. Model. Numer. Anal. — 2000. — Vol. 34, № 1. — P. 159–182.
111. Carstensen, C. Edge residuals dominate a posteriori error estimates for low order finite element methods / C. Carstensen, R. Verfürth // SIAM J. Numer. Anal. — 1999. — Vol. 36, № 5. — P. 1571–1587.
112. Chen, Z. Residual type a posteriori error estimates for elliptic obstacle problems / Z. Chen, R.H. Nochetto // Numer. Math. — 2000. — Vol. 84, № 4. — P. 527–548.
113. Melenk, J.M. On residual-based a posteriori error estimation in hp-FEM / J.M. Melenk, B.I. Wohlmuth // Adv. Comput. Math. — 2001. — Vol. 15, № 1-4. — P. 311–331.
114. Carstensen, C. Residual-based a posteriori error estimate for a nonconforming Reissner-Mindlin plate finite element / C. Carstensen // SIAM J. Numer. Anal. — 2002. — Vol. 39, № 6. — P. 2034–2044.
115. Carstensen, C. A unifying theory of a posteriori finite element error control / C. Carstensen // Numer. Math. — 2005. — Vol. 100, № 4. — P. 617–637.
116. Formaggia, L. Anisotropic error estimates for elliptic problems / L. Formaggia, S. Perotto // Numer. Math. — 2003. — Vol. 94, № 1. — P. 67–92.
117. Braess, D. Uniform convergence and a posteriori error estimators for the enhanced strain finite element method / D. Braess, C. Carstensen, B.D. Reddy // Numer. Math. — 2004. — Vol. 96, № 3. — P. 461–479.
118. Beirão da Veiga, L. An *a posteriori* error estimator for the mimetic finite difference approximation of elliptic problems / L. Beirão da Veiga, G. Manzini // Int. J. Numer. Methods Eng. — 2008. — Vol. 76, № 11. — P. 1696–1723.
119. Carstensen, C. Unified framework for an a posteriori error analysis of non-standard finite element approximations of H(curl)-elliptic problems / C. Carstensen, R.H.W. Hoppe // J.

Numer. Math. — 2009. — Vol. 17, № 1. — P. 27–44.

120. Ye, X. A posterior error estimate for finite volume methods of the second order elliptic problem / X. Ye // Numer. Methods Partial Differ. Equations. — 2011. — Vol. 27, № 5. — P. 1165–1178.

121. Weißer, S. Residual error estimate for BEM-based FEM on polygonal meshes / S. Weißer // Numer. Math. — 2011. — Vol. 118, № 4. — P. 765–788.

122. Horváth, T.L. Implicit a posteriori error estimation using patch recovery techniques / T.L. Horváth, F. Izsák // Cent. Eur. J. Math. — 2012. — Vol. 10, № 1. — P. 55–72.

123. Carstensen, C. Refined fully explicit a posteriori residual-based error control / C. Carstensen, C. Merdon // SIAM J. Numer. Anal. — 2014. — Vol. 52, № 4. — P. 1709–1728.

124. Zhao, J. On a posteriori error estimates for the linear triangular finite element / J. Zhao, S. Chen // Calcolo. — 2014. — Vol. 51, № 2. — P. 287–304.

125. Clement, Ph. Approximation by finite element functions using local regularization / Ph. Clement // Rev. Franc. Automat. Inform. Rech. Operat., R. — 1975. — Vol. 9, № 2. — P. 77–84.

126. Carstensen, C. Constants in Clément-interpolation error and residual based a posteriori error estimates in finite element methods / C. Carstensen, S.A. Funken // East-West J. Numer. Math. — 2000. — Vol. 8, № 3. — P. 153–175.

127. Veeser, A. Explicit upper bounds for dual norms of residuals / A. Veeser, R. Verfürth // SIAM J. Numer. Anal. — 2009. — Vol. 47, № 3. — P. 2387–2405.

128. Ainsworth, M. A posteriori error estimation in finite element analysis / M. Ainsworth, J.T. Oden // Comput. Methods Appl. Mech. Eng. — 1997. — Vol. 142, № 1-2. — P. 1–88.

129. Brink, U. A posteriori error estimation in large-strain elasticity using equilibrated local Neumann problems / U. Brink, E. Stein // Comput. Methods Appl. Mech. Eng. — 1998. — Vol. 161, № 1-2. — P. 77–101.

130. Díez, P. Recovering lower bounds of the error by postprocessing implicit residual a posteriori error estimates / P. Díez, N. Parés, A. Huerta // Int. J. Numer. Methods Eng. — 2003. — Vol. 56, № 10. — P. 1465–1488.

131. Validation of a posteriori error estimators by numerical approach / I. Babuška, T. Strouboulis, C.S. Upadhyay [et al] // Int. J. Numer. Methods Eng. — 1994. — Vol. 37, № 7. — P. 1073–1123.

132. A model study of element residual estimators for linear elliptic problems: The quality of the estimators in the interior of meshes of triangles and quadrilaterals / I. Babuška, T. Strouboulis, C.S. Upadhyay, S.K. Gangaraj // Comput. Struct. — 1995. — Vol. 57, № 6. — P. 1009–1028.

133. Strouboulis, T. Guaranteed computable bounds for the exact error in the finite element

solution. II: Bounds for the energy norm of the error in two dimensions / T. Strouboulis, I. Babuška, S.K. Gangaraj // Int. J. Numer. Methods Eng. — 2000. — Vol. 47, № 1-3. — P. 427–475.

134. Dörsek, P. Symmetry-free, p-robust equilibrated error indication for the hp-version of the FEM in nearly incompressible linear elasticity / P. Dörsek, J.M. Melenk // Comput. Methods Appl. Math. — 2013. — Vol. 13, № 3. — P. 291–304.
135. Kelly, D.W. The self-equilibration of residuals and 'Upper-bound' error estimates for the finite element method / D.W. Kelly // Accuracy estimates and adaptive refinements in finite element computations (Lisbon, 1984). — John Wiley & Sons Ltd., 1986.
136. Parés, N. Guaranteed energy error bounds for the Poisson equation using a flux-free approach: solving the local problems in subdomains / N. Parés, H. Santos, P. Díez // Int. J. Numer. Methods Eng. — 2009. — Vol. 79, № 10. — P. 1203–1244.
137. Cai, Z. Robust equilibrated residual error estimator for diffusion problems: conforming elements / Z. Cai, S. Zhang // SIAM J. Numer. Anal. — 2012. — Vol. 50, № 1. — P. 151–170.
138. Оганесян, Л.А. Исследование скорости сходимости вариационно-разностных схем для эллиптических уравнений второго порядка в двумерной области с гладкой границей / Л.А. Оганесян, Л.А. Руховец // Журн. выч. мат. и матем. физики. — 1969. — Т. 9. — С. 1102–1120.
139. Křížek, M. On a global superconvergence of the gradient of linear triangular elements / M. Křížek, P. Neittaanmäki // J. Comput. Appl. Math. — 1987. — Vol. 18. — P. 221–233.
140. Křížek, M. On superconvergence techniques / M. Křížek, P. Neittaanmäki // Acta Appl. Math. — 1987. — Vol. 9. — P. 175–198.
141. Wahlbin, L.B. Superconvergence in Galerkin finite element methods / L.B. Wahlbin. — Berlin: Springer Verlag, 1995. — xi + 166 pp.
142. Wheeler, M.F. Superconvergent recovery of gradients on subdomains from piecewise linear finite-element approximations / M.F. Wheeler, J.R. Whiteman // Numer. Methods Partial Differ. Equations. — 1987. — Vol. 3, № 4. — P. 357–374.
143. Bramble, J.H. Higher order local accuracy by averaging in the finite element method / J.H. Bramble, A.H. Schatz // Math. Comput. — 1977. — Vol. 31. — P. 94–111.
144. Zlamal, M. Some superconvergence results in the finite element method / M. Zlamal // Math. Aspects Finite Elem. Mech., Proc. Conf. Rome 1975, Lect. Notes Math. 606. — 1977. — P. 353–362.
145. Zlamal, M. Superconvergence and reduced integration in the finite element method / M. Zlamal // Math. Comput. — 1978. — Vol. 32. — P. 663–685.
146. Babuška, I. Superconvergence in the generalized finite element method / I. Babuška,

U. Banerjee, J.E. Osborn // Numer. Math. — 2007. — Vol. 107, № 3. — P. 353–395.

147. Zienkiewicz, O.C. A simple error estimator and adaptive procedure for practical engineering analysis / O.C. Zienkiewicz, J.Z. Zhu // Int. J. Numer. Methods Eng. — 1987. — Vol. 24. — P. 337–357.

148. Durán, R. On the asymptotic exactness of error estimators for linear triangular finite elements / R. Durán, M.A. Muschietti, R. Rodríguez // Numer. Math. — 1991. — Vol. 59, № 2. — P. 107–127.

149. Durán, R. Asymptotically exact error estimators for rectangular finite elements / R. Durán, M.A. Muschietti, R. Rodríguez // SIAM J. Numer. Anal. — 1992. — Vol. 29, № 1. — P. 78–88.

150. Zienkiewicz, O.C. The superconvergent patch recovery (SPR) and adaptive finite element refinement / O.C. Zienkiewicz, J.Z. Zhu // Comput. Methods Appl. Mech. Eng. — 1992. — Vol. 101, № 1-3. — P. 207–224.

151. Zhu, J.Z. Adaptive techniques in the finite element method / J.Z. Zhu, O.C. Zienkiewicz // Commun. Appl. Numer. Methods. — 1988. — Vol. 4, № 2. — P. 197–204.

152. Picasso, M. An anisotropic error indicator based on Zienkiewicz–Zhu error estimator: Application to elliptic and parabolic problems / M. Picasso // SIAM J. Sci. Comput. — 2003. — Vol. 24, № 4. — P. 1328–1355.

153. Micheletti, S. Reliability and efficiency of an anisotropic Zienkiewicz-Zhu error estimator / S. Micheletti, S. Perotto // Comput. Methods Appl. Mech. Eng. — 2006. — Vol. 195, № 9-12. — P. 799–835.

154. Cao, W. On the superconvergence patch recovery techniques for the linear finite element approximation on anisotropic meshes / W. Cao // J. Comput. Appl. Math. — 2014. — Vol. 265. — P. 33–51.

155. Babuška, I. Analysis of optimal finite-element meshes in R^1 / I. Babuška, W.C. Rheinboldt // Math. Comput. — 1979. — Vol. 33. — P. 435–463.

156. ANSYS: Theory reference for the mechanical APDL and mechanical applications. Release 12.0. — ANSYS Inc., 2009.

157. Dow, J.O. A unified approach to the finite element method and error analysis procedures / J.O. Dow. — San Diego, CA: Academic Press, 1999. — xxiv + 533 pp.

158. Zhu, J.Z. A posteriori error estimation — the relationship between different procedures / J.Z. Zhu // Comput. Methods Appl. Mech. Eng. — 1997. — Vol. 150, № 1-4. — P. 411–422.

159. Cai, Z. Recovery-based error estimator for interface problems: Conforming linear elements / Z. Cai, S. Zhang // SIAM J. Numer. Anal. — 2009. — Vol. 47, № 3. — P. 2132–2156.

160. Díez, P. Equilibrated patch recovery error estimates: simple and accurate upper bounds of the error / P. Díez, J.J. Ródenas, O.C. Zienkiewicz // Int. J. Numer. Methods Eng. — 2007. —

Vol. 69, № 10. — P. 2075–2098.

161. Benedetti, A. A posteriori error estimation based on the superconvergent Recovery by Compatibility in Patches / A. Benedetti, S. de Miranda, F. Ubertini // Int. J. Numer. Methods Eng. — 2006. — Vol. 67, № 1. — P. 108–131.
162. Bank, R.E. Asymptotically exact a posteriori error estimators. I: Grids with superconvergence / R.E. Bank, J. Xu // SIAM J. Numer. Anal. — 2003. — Vol. 41, № 6. — P. 2294–2312.
163. Bank, R.E. Asymptotically exact a posteriori error estimators. II: General unstructured grids / R.E. Bank, J. Xu // SIAM J. Numer. Anal. — 2003. — Vol. 41, № 6. — P. 2313–2332.
164. Carstensen, C. Each averaging technique yields reliable a posteriori error control in FEM on unstructured grids. I: Low order conforming, nonconforming, and mixed FEM / C. Carstensen, S. Bartels // Math. Comput. — 2002. — Vol. 71, № 239. — P. 945–969.
165. Bartels, S. Each averaging technique yields reliable a posteriori error control in FEM on unstructured grids. II: Higher order FEM / S. Bartels, C. Carstensen // Math. Comput. — 2002. — Vol. 71, № 239. — P. 971–994.
166. Carstensen, C. All first-order averaging techniques for a posteriori finite element error control on unstructured grids are efficient and reliable / C. Carstensen // Math. Comput. — 2004. — Vol. 73, № 247. — P. 1153–1165.
167. Fierro, F. A posteriori error estimators, gradient recovery by averaging, and superconvergence / F. Fierro, A. Veeser // Numer. Math. — 2006. — Vol. 103, № 2. — P. 267–298.
168. Farrell, P.E. An anisotropic Zienkiewicz-Zhu-type error estimator for 3D applications / P.E. Farrell, S. Micheletti, S. Perotto // Int. J. Numer. Methods Eng. — 2011. — Vol. 85, № 6. — P. 671–692.
169. Prager, W. Approximations in elasticity based on the concept of function space / W. Prager, J.L. Synge // Q. Appl. Math. — 1947. — Vol. 5. — P. 241–269.
170. Synge, J.L. The hypercircle method / J.L. Synge // Stud. numer. Anal., Pap. Honour Cornelius Lanczos. — 1974. — P. 201–217.
171. Михлин, С.Г. Вариационные методы в математической физике / С.Г. Михлин. — М.: Наука, 1970. — 512 с.
172. Repin, S. A posteriori error estimation for elastoplastic problems based on duality theory / S. Repin, L.S. Xanthis // Comput. Methods Appl. Mech. Engrg. — 1996. — Vol. 138, № 1–4. — P. 317–339.
173. Репин, С.И. A posteriori error estimates for approximate solutions of variational problems with power growtn functionals / С.И. Репин // Зап. научн. семинаров ПОМИ. — 1997. — Т. 249. — С. 244–255.
174. Репин, С.И. A posteriori error estimation for nonlinear variational problems by duality

theory / С.И. Репин // Зап. научн. семинаров ПОМИ. — 1997. — Т. 243. — С. 201–214.

175. Repin, S. A unified approach to a posteriori error estimation based on duality error majorants / S. Repin // Math. Comput. Simulation. — 1999. — Vol. 50, № 1-4. — P. 305–321.
176. Repin, S.I. A posteriori error estimation for variational problems with uniformly convex functionals / S.I. Repin // Math. Comput. — 2000. — Vol. 69, № 230. — P. 481–500.
177. Rockafellar, R.T. Convex analysis / R.T. Rockafellar. — Princeton, N. J.: Princeton University Press, 1970. — xviii + 451 pp.
178. Ekeland, I. Convex analysis and variational problems / I. Ekeland, R. Temam. Studies in Mathematics and its Applications 1. — Amsterdam - Oxford: North-Holland Publishing Company; New York: American Elsevier Publishing Company, Inc., 1976. — ix + 402 pp.
179. Мосолов, П.П. Механика жесткопластических сред / П.П. Мосолов, В.П. Мясников. — М.: Наука, 1981. — 208 с.
180. Темам, Р. Математические задачи теории пластичности / Р. Темам. — М.: Наука, 1991. — 288 с.
181. Панагиотопулос, П. Неравенства в механике и их приложения: Выпуклые и невыпуклые функции энергии / П. Панагиотопулос. — М.: Мир, 1989. — 492 с.
182. Ladevèze, P. Mastering calculations in linear and nonlinear mechanics. Translated by Theofanis Strouboulis / P. Ladevèze, J.-P. Pelle. — New York, NY: Springer, 2005. — xi + 413 pp.
183. Han, W. A posteriori error analysis via duality theory. With applications in modeling and numerical approximations / W. Han. — New York, NY: Springer, 2005. — xvi + 302 pp.
184. Frolov, M. On the reliability, effectivity and robustness of a posteriori error estimation methods / M. Frolov, P. Neittaanmäki, S. Repin // Numerical Methods for Scientific Computing. Variational problems and applications. — Barcelona: CIMNE, 2003. — P. 153–175.
185. Frolov, M. On computational properties of a posteriori error estimates based upon the method of duality error majorants / M. Frolov, P. Neittaanmäki, S. Repin // Numerical mathematics and advanced applications. Proceedings of ENUMATH 2003, the 5th European conference on numerical mathematics and advanced applications, Prague, Czech Republic, August 18–22, 2003. — Berlin: Springer, 2004. — P. 346–357.
186. Carstensen, C. Effective postprocessing for equilibration a posteriori error estimators / C. Carstensen, C. Merdon // Numer. Math. — 2013. — Vol. 123, № 3. — P. 425–459.
187. Repin, S. A posteriori error estimation for the Dirichlet problem with account of the error in the approximation of boundary conditions / S. Repin, S. Sauter, A. Smolianski // Computing. — 2003. — Vol. 70, № 3. — P. 205–233.
188. Repin, S. A posteriori error estimation for the Poisson equation with mixed Dirichlet/Neumann boundary conditions / S. Repin, S. Sauter, A. Smolianski // J. Comput. Appl.

Math. — 2004. — Vol. 164-165. — P. 601–612.

189. Repin, S. Two-sided a posteriori error estimates for mixed formulations of elliptic problems / S. Repin, S. Sauter, A. Smolianski // SIAM J. Numer. Anal. — 2007. — Vol. 45, № 3. — P. 928–945.
190. Repin, S. Functional a posteriori estimates for the reaction-diffusion problem / S. Repin, S. Sauter // C. R., Math., Acad. Sci. Paris. — 2006. — Vol. 343, № 5. — P. 349–354.
191. Repin, S. Advanced forms of functional a posteriori error estimates for elliptic problems / S. Repin // Russ. J. Numer. Anal. Math. Model. — 2008. — Vol. 23, № 5. — P. 505–521.
192. Korotov, S. Two-sided a posteriori error estimates for linear elliptic problems with mixed boundary conditions / S. Korotov // Appl. Math., Praha. — 2007. — Vol. 52, № 3. — P. 235–249.
193. Nicaise, S. Functional a posteriori error estimates for the reaction-convection-diffusion problem / S. Nicaise, S. Repin // Journal of Mathematical Sciences. — 2008. — Vol. 152, № 5. — P. 690–701.
194. Репин, С.И. Апостериорные оценки точности вариационных методов для задач с невыпуклыми функционалами / С.И. Репин // Алгебра и анализ. — 1999. — Т. 11, № 4. — С. 151–182.
195. Repin, S.I. Two-sided estimates of deviation from exact solutions of uniformly elliptic equations / S.I. Repin // Amer. Math. Soc. Transl. (2). — 2003. — Vol. 209. — P. 143–171.
196. Repin, S. A posteriori error estimation methods for partial differential equations / S. Repin // Lectures on advanced computational methods in mechanics. Collection of lectures, RICAM, Linz, Austria, October 3 – December 16, 2005. — Berlin: de Gruyter, 2007. — P. 161–226.
197. Repin, S. Estimates of deviations from exact solutions of variational problems with linear growth functionals / S. Repin // Journal of Mathematical Sciences. — 2010. — Vol. 166, № 1. — P. 75–85.
198. Bildhauer, M. Estimates of the deviation from the minimizer for variational problems with power growth functionals / M. Bildhauer, S.I. Repin // Zap. Nauchn. Semin. POMI. — 2006. — Vol. 336. — P. 5–24.
199. Repin, S. Functional a posteriori error estimates for problems with nonlinear boundary conditions / S. Repin, J. Valdman // J. Numer. Math. — 2008. — Vol. 16, № 1. — P. 51–81.
200. Repin, S.I. On measures of errors for nonlinear variational problems / S.I. Repin // Russ. J. Numer. Anal. Math. Model. — 2012. — Vol. 27, № 6. — P. 577–584.
201. Neittaanmäki, P. Estimates of deviations from exact solutions for elasticity problems with nonlinear boundary conditions / P. Neittaanmäki, S. Repin, J. Valdman // Russ. J. Numer. Anal. Math. Model. — 2013. — Vol. 28, № 6. — P. 597–630.

202. Репин, С.И. Estimates of deviations from exact solutions of elliptic variational inequalities / С.И. Репин // Зап. научн. семинаров ПОМИ. — 2000. — Т. 271. — С. 188–203.

203. Repin, S. Functional a posteriori estimates for elliptic variational inequalities / S. Repin // Journal of Mathematical Sciences. — 2008. — Vol. 152, № 5. — P. 702–712.

204. Repin, S. Estimates of deviations from exact solutions of variational inequalities based upon Payne–Weinberger inequality / S. Repin // Journal of Mathematical Sciences. — 2009. — Vol. 157, № 6. — P. 874–884.

205. Repin, S.I. Functional a posteriori error estimates for incremental models in elasto-plasticity / S.I. Repin, J. Valdman // Cent. Eur. J. Math. — 2009. — Vol. 7, № 3. — P. 506–519.

206. Harasim, P. Verification of functional a posteriori error estimates for obstacle problem in 1D / P. Harasim, J. Valdman // Kybernetika. — 2013. — Vol. 49, № 5. — P. 738–754.

207. Harasim, P. Verification of functional a posteriori error estimates for obstacle problem in 2D / P. Harasim, J. Valdman // Kybernetika. — 2014. — Vol. 50, № 6. — P. 978–1002.

208. Repin, S. Estimates of deviations from exact solutions of initial-boundary value problem for the heat equation / S. Repin // Atti Accad. Naz. Lincei, Cl. Sci. Fis. Mat. Nat., IX. Ser., Rend. Lincei, Mat. Appl. — 2002. — Vol. 13, № 2. — P. 121–133.

209. Repin, S. Estimates of deviations from exact solutions of initial boundary value problems for the wave equation / S. Repin // Journal of Mathematical Sciences. — 2009. — Vol. 159, № 2. — P. 229–240.

210. Neittaanmäki, P. A posteriori error majorants for approximations of the evolutionary Stokes problem / P. Neittaanmäki, S. Repin // J. Numer. Math. — 2010. — Vol. 18, № 2. — P. 119–134.

211. Repin, S.I. A posteriori error estimates for approximations of evolutionary convection-diffusion problems / S.I. Repin, S.K. Tomar // Journal of Mathematical Sciences. — 2010. — Vol. 170, № 4. — P. 554–566.

212. Matculevich, S. Computable estimates of the distance to the exact solution of the evolutionary reaction–diffusion equation / S. Matculevich, S. Repin // Applied Mathematics and Computation. — 2014. — Vol. 247. — P. 329–347.

213. Matculevich, S. A posteriori error estimates for time-dependent reaction-diffusion problems based on the Payne–Weinberger inequality / S. Matculevich, P. Neittaanmäki, S. Repin // Discrete and Continuous Dynamical Systems – Series A. — 2015. — Vol. 35, № 6. — P. 2659–2677.

214. Pauly, D. Functional a posteriori error estimates for elliptic problems in exterior domains / D. Pauly, S. Repin // Journal of Mathematical Sciences. — 2009. — Vol. 162, № 3. — P. 393–406.

215. Mali, O. Conforming and non-conforming functional a posteriori error estimates for elliptic boundary value problems in exterior domains: theory and numerical tests / O. Mali, A. Muzalevskiy, D. Pauly // Russ. J. Numer. Anal. Math. Model. — 2013. — Vol. 28, № 6. — P. 577–596.

216. Pauly, D. Two-sided a posteriori error bounds for electro-magnetostatic problems / D. Pauly, S. Repin // Journal of Mathematical Sciences. — 2010. — Vol. 166, № 1. — P. 53–62.

217. Repin, S.I. A posteriori estimates of the accuracy of dimensional reduction models in 3-D elasticity theory / S.I. Repin // Finite element methods. Three-dimensional problems. Proceedings of international conference, Jyväskylä, Finland, June 28–July 1, 2000. — Tokyo: Gakkotosho. GAKUTO Int. Ser., Math. Sci. Appl. 15, 2001. — P. 240–253.

218. Repin, S.I. Estimates for errors in two-dimensional models of elasticity theory / S.I. Repin // Probl. Mat. Anal. — 2001. — Vol. 22. — P. 178–196.

219. Neittaanmäki, P. A posteriori error estimates for boundary-value problems related to the biharmonic operator / P. Neittaanmäki, S.I. Repin // East-West J. Numer. Math. — 2001. — Vol. 9, № 2. — P. 157–178.

220. Muzalevsky, A.V. On two-sided error estimates for approximate solutions of problems in the linear theory of elasticity / A.V. Muzalevsky, S.I. Repin // Russ. J. Numer. Anal. Math. Model. — 2003. — Vol. 18, № 1. — P. 65–85.

221. Muzalevskii, A.V. Error estimates for approximate solutions of problems of the linear thermoelasticity theory / A.V. Muzalevskii, S.I. Repin // Russ. Math. — 2005. — Vol. 49, № 1. — P. 60–68.

222. Frolov, M.E. Guaranteed functional error estimates for the Reissner-Mindlin plate problem / M.E. Frolov, P. Neittaanmäki, S.I. Repin // Journal of Mathematical Sciences. — 2006. — Vol. 132, № 4. — P. 553–561.

223. Frolov, M.E. On efficiency of the dual majorant method for the quality estimation of approximate solutions of fourth-order elliptic boundary value problems / M.E. Frolov // Russ. J. Numer. Anal. Math. Model. — 2004. — Vol. 19, № 5. — P. 407–418.

224. Frolov, M.E. Functional a posteriori error estimates for certain models of plates and beams / M.E. Frolov // Russ. J. Numer. Anal. Math. Model. — 2010. — Vol. 25, № 2. — P. 117–129.

225. Frolov, M. Reliable a posteriori error estimation for plane problems in Cosserat elasticity / M. Frolov // Numerical Mathematics and Advanced Applications – ENUMATH 2013, Lecture Notes in Computational Science and Engineering 103. — Springer International Publishing, 2015. — P. 225–232.

226. Фролов, М.Е. Апостериорные оценки для контроля точности решений плоских задач в теории упругости Коссера / М.Е. Фролов // XIX Зимняя школа по механике сплошных

сред. Сборник статей. — Екатеринбург: РИО УрО РАН. — 2015. — С. 313–318.

227. Fuchs, M. A posteriori error estimates of functional type for variational problems related to generalized Newtonian fluids / M. Fuchs, S. Repin // Math. Methods Appl. Sci. — 2006. — Vol. 29, № 18. — P. 2225–2244.

228. Fuchs, M. Estimates of the deviations from the exact solutions for variational inequalities describing the stationary flow of certain viscous incompressible fluids / M. Fuchs, S. Repin // Math. Methods Appl. Sci. — 2010. — Vol. 33, № 9. — P. 1136–1147.

229. Mikhaylov, A. Estimates of deviations from the exact solution of the Stokes problem in the vorticity-velocity-pressure formulation / A. Mikhaylov, S. Repin // Journal of Mathematical Sciences. — 2012. — Vol. 185, № 5. — P. 698–706.

230. Gorshkova, E. Comparative study of the a posteriori error estimators for the Stokes problem / E. Gorshkova, P. Neittaanmäki, S. Repin // Numerical mathematics and advanced applications. Proceedings of ENUMATH 2005, the 6th European conference on numerical mathematics and advanced applications, Santiago de Compostela, Spain, July 18–22, 2005. — Berlin: Springer, 2006. — P. 252–259.

231. A posteriori error estimates for viscous flow problems with rotation / E. Gorshkova, A. Mahalov, P. Neittaanmäki, S. Repin // Journal of Mathematical Sciences. — 2007. — Vol. 142, № 1. — P. 1749–1762.

232. Repin, S.I. Estimates of deviations from the exact solution of a generalized Oseen problem / S.I. Repin // Journal of Mathematical Sciences. — 2013. — Vol. 195, № 1. — P. 64–75.

233. Frolov, M. On practical implementation of duality error majorants for boundary-value problems arising in the theory of plates / M. Frolov, P. Neittaanmäki, S. Repin // Proc. of the European Congress on Computational Methods in Applied Sciences and Engineering. — University of Jyväskylä, 2004. — 7 pp. — CD, Vol. II, 886.pdf. ISBN 951-39-1869-6.

234. Gaevskaya, A. Functional approach to a posteriori error estimation for elliptic optimal control problems with distributed control / A. Gaevskaya, R.H.W. Hoppe, S. Repin // Journal of Mathematical Sciences. — 2007. — Vol. 144, № 6. — P. 4535–4547.

235. A posteriori error estimates for a Maxwell type problem / I. Anjam, O. Mali, A. Muzalevsky [et al] // Russ. J. Numer. Anal. Math. Model. — 2009. — Vol. 24, № 5. — P. 395–408.

236. Valdman, J. Minimization of functional majorant in a posteriori error analysis based on $H(\mathrm{div})$ multigrid-preconditioned CG method / J. Valdman // Adv. Numer. Anal. — 2009. — Vol. 2009. — P. 15.

237. Lazarov, R. Functional a posteriori error estimates for discontinuous Galerkin approximations of elliptic problems / R. Lazarov, S. Repin, S.K. Tomar // Numer. Methods Partial Differ. Equations. — 2009. — Vol. 25, № 4. — P. 952–971.

238. Боголюбов, А.Н. Зависимость эффективности апостериорной оценки точности приближенного решения эллиптической краевой задачи от входных данных и параметров алгоритма / А.Н. Боголюбов, М.Д. Малых, А.А. Панин // Вестник Московского Университета. Серия 3: Физика. Астрономия. — 2009. — № 1. — С. 18–22.

239. Kraus, J.K. Algebraic multilevel iteration method for lowest order Raviart-Thomas space and applications / J.K. Kraus, S.K. Tomar // Int. J. Numer. Methods Eng. — 2011. — Vol. 86, № 10. — P. 1175–1196.

240. Repin, S. Estimates of dimension reduction errors for stationary reaction–diffusion problems / S. Repin, T. Samrowski // Journal of Mathematical Sciences. — 2011. — Vol. 173, № 6. — P. 803–821.

241. Mali, O. Analysis of errors caused by incomplete knowledge of material data in mathematical models of elastic media: Ph.D. thesis / University of Jyväskylä: Jyväskylä Studies in Computing 132. — 2011.

242. Kleiss, S.K. Guaranteed and sharp a posteriori error estimates in isogeometric analysis / S.K. Kleiss, S.K. Tomar. — arXiv:1304.7712.

243. Фролов, М.Е. Апостериорные оценки точности приближенных решений вариационных задач для эллиптических уравнений дивергентного типа: дис. ... канд. физ.-мат. наук.: 05.13.18 / Фролов Максим Евгеньевич. — Санкт-Петербург, 2004.

244. Репин, С.И. Применение методов математической физики к контролю точности решений задач механики / С.И. Репин, М.Е. Фролов // Научно-технические ведомости СПбГПУ. — 2007. — № 1. — С. 203–209.

245. Churilova, M.A. MATLAB implementation of functional type a posteriori error estimates with Raviart-Thomas approximation / M.A. Churilova, M.E. Frolov // Progress in Industrial Mathematics at ECMI 2012, Mathematics in Industry 19. The European Consortium for Mathematics in Industry. — Springer, 2014. — P. 379–383.

246. Чурилова, М.А. Применение функционального подхода для надежного апостериорного контроля точности при адаптивном решении эллиптических задач: дис. ... канд. физ.-мат. наук.: 05.13.18 / Чурилова Мария Александровна. — Санкт-Петербург, 2014.

247. Repin, S. Estimation of deviations from the exact solution for the Reissner-Mindlin plate problem / S. Repin, M. Frolov // Journal of Mathematical Sciences. — 2006. — Vol. 132, № 3. — P. 331–338.

248. Фролов, М.Е. Гарантированные функциональные оценки погрешности для задачи о пластине Рейсснера-Миндлина / М.Е. Фролов, П. Нейттаанмяки, С.И. Репин // Проблемы математического анализа. — 2005. — Т. 31. — С. 159–166.

249. Carstensen, C. Elastoviscoplastic finite element analysis in 100 lines of Matlab /

C. Carstensen, R. Klose // J. Numer. Math. — 2002. — Vol. 10, № 3. — P. 157–192.

250. Фролов, М.Е. Функциональная апостериорная оценка погрешности решения задачи об изгибе стержня Эйлера-Бернулли / М.Е. Фролов // Научно-технические ведомости СПбГПУ. — 2010. — Т. 3 (104). — С. 81–84.

251. Arnold, D.N. Quadrilateral $H(\mathrm{div})$ finite elements / D.N. Arnold, D. Boffi, R.S. Falk // SIAM J. Numer. Anal. — 2005. — Vol. 42, № 6. — P. 2429–2451.

252. Raviart, P.A. A mixed finite element method for second order elliptic problems / P.A. Raviart, J.M. Thomas // Lecture Notes in Mathematics 606. — Berlin: Springer, 1977. — P. 292–315.

253. Churilova, M.A. Functional a posteriori error estimates for linear elasticity: computational properties and adaptive algorithms / M.A. Churilova, M.E. Frolov // Университетский научный журнал. — 2014. — № 10. — С. 23–36.

254. Repin, S. Estimates for deviations from exact solutions to plane problems in the Cosserat theory of elasticity / S. Repin, M. Frolov // Journal of Mathematical Sciences. — 2012. — Vol. 181, № 2. — P. 281–291.

255. Frolov, M. Accuracy verification for computed solutions in Cosserat elasticity / M. Frolov // Book of abstracts of the 6th International Conference on Advanced Computational Methods in Engineering, ACOMEN 2014. Ghent, Belgium, 23-28 June 2014. — 2014. — P. 87–88.

256. Фролов, М.Е. Реализация функционального подхода к апостериорному контролю точности решений трехмерных задач теории упругости / М.Е. Фролов // Научно-технические ведомости СПбГПУ. — 2011. — № 2 (122). — С. 137–142.

257. Фролов, М.Е. О проблеме контроля точности решений, полученных инженерными пакетами / М.Е. Фролов // Материалы научно-практической конференции «Научные исследования и инновационная деятельность». — СПб: Изд-во Политехнического университета, 2009. — С. 236–240.

258. Чурилова, М.А. Применение функциональных апостериорных оценок в адаптивных алгоритмах решения эллиптических краевых задач / М.А. Чурилова, М.Е. Фролов // XL Неделя науки СПбГПУ: материалы международной научно-практической конференции. Ч. V. — СПб.: Изд-во Политехнического университета, 2011. — Р. 114–116.

259. Фролов, М.Е. Функциональные апостериорные оценки со смешанными аппроксимациями для плоских задач теории упругости / М.Е. Фролов // Материалы Шестого Всероссийского форума «Наука и инновации в технических университетах». — СПб.: Изд-во Политехнического университета, 2012. — С. 41–42.

260. Bernardi, C. A local regularization operator for triangular and quadrilateral finite elements / C. Bernardi, V. Girault // SIAM J. Numer. Anal. — 1998. — Vol. 35, № 5. — P. 1893–1916.

261. Bank, R.E. — PLTMG: a software package for solving elliptic partial differential equations user's guide 8.0, 1998.
262. Bornemann, F.A. A posteriori error estimates for elliptic problems in two and three space dimensions / F.A. Bornemann, B. Erdmann, R. Kornhuber // SIAM J. Numer. Anal. — 1996. — Vol. 33, № 3. — P. 1188–1204.
263. Zhang, Z. Recovery type a posteriori error estimates in finite element methods / Z. Zhang, N. Yan // Korean J. Comput. Appl. Math. — 2001. — Vol. 8, № 2. — P. 235–251.
264. Ainsworth, M. The influence and selection of subspaces for a posteriori error estimators / M. Ainsworth // Numer. Math. — 1996. — Vol. 73, № 4. — P. 399–418.
265. Ainsworth, M. A unified approach to a posteriori error estimation using element residual methods / M. Ainsworth, J.T. Oden // Numer. Math. — 1993. — Vol. 65, № 1. — P. 23–50.
266. Bank, R.E. A posteriori error estimates for the Stokes problem / R.E. Bank, B.D. Welfert // SIAM J. Numer. Anal. — 1991. — Vol. 28, № 3. — P. 591–623.
267. Wan, X. Some improvements to the flux-type a posteriori error estimators / X. Wan // Comput. Methods Appl. Mech. Eng. — 2008. — Vol. 197, № 6-8. — P. 567–576.
268. Ainsworth, M. A procedure for a posteriori error estimation for *h-p* finite element methods / M. Ainsworth, J.T. Oden // Comput. Methods Appl. Mech. Eng. — 1992. — Vol. 101, № 1-3. — P. 73–96.
269. Bank, R.E. A posteriori error estimates based on hierarchical bases / R.E. Bank, R.K. Smith // SIAM J. Numer. Anal. — 1993. — Vol. 30, № 4. — P. 921–935.
270. Hierarchical a posteriori error estimators for the mimetic discretization of elliptic problems / P.F. Antonietti, L. Beirão da Veiga, C. Lovadina, M. Verani // SIAM J. Numer. Anal. — 2013. — Vol. 51, № 1. — P. 654–675.
271. Domínguez, C. A FE-BE coupling for a fluid-structure interaction problem: hierarchical a posteriori error estimates / C. Domínguez, E.P. Stephan, M. Maischak // Numer. Methods Partial Differ. Equations. — 2012. — Vol. 28, № 5. — P. 1417–1439.
272. Dörfler, W. Small data oscillation implies the saturation assumption / W. Dörfler, R.H. Nochetto // Numer. Math. — 2002. — Vol. 91, № 1. — P. 1–12.
273. Bank, R. Saturation estimates for hp-finite element methods / R. Bank, A. Parsania, S. Sauter. — Preprint UZH 02-2014.
274. Robust hierarchical a posteriori error estimators for stabilized convection-diffusion problems / B. Achchab, A. Agouzal, M. El Fatini, A. Souissi // Numer. Methods Partial Differ. Equations. — 2012. — Vol. 28, № 5. — P. 1717–1728.
275. Ainsworth, M. A posteriori error estimators in the finite element method / M. Ainsworth, A. Craig // Numer. Math. — 1992. — Vol. 60, № 4. — P. 429–463.

276. Lin, R. Numerical study of natural superconvergence in least-squares finite element methods for elliptic problems / R. Lin, Z. Zhang // Appl. Math., Praha. — 2009. — Vol. 54, № 3. — P. 251–266.

277. Křížek, M. Superconvergence phenomenon in the finite element method arising from averaging gradients / M. Křížek, P. Neittaanmäki // Numer. Math. — 1984. — Vol. 45. — P. 105–116.

278. Rodríguez, R. Some remarks on Zienkiewicz-Zhu estimator / R. Rodríguez // Numer. Methods Partial Differ. Equations. — 1994. — Vol. 10, № 5. — P. 625–635.

279. Carey, V. Flexible patch post-processing recovery strategies for solution enhancement and adaptive mesh refinement / V. Carey, G.F. Carey // Int. J. Numer. Methods Eng. — 2011. — Vol. 87, № 1-5. — P. 424–436.

280. Zienkiewicz, O.C. The superconvergent patch recovery and *a posteriori* error estimates. I: The recovery technique / O.C. Zienkiewicz, J.Z. Zhu // Int. J. Numer. Methods Eng. — 1992. — Vol. 33, № 7. — P. 1331–1364.

281. Zienkiewicz, O.C. The superconvergent patch recovery and *a posteriori* error estimates. II: Error estimates and adaptivity / O.C. Zienkiewicz, J.Z. Zhu // Int. J. Numer. Methods Eng. — 1992. — Vol. 33, № 7. — P. 1365–1382.

282. Boroomand, B. Recovery by equilibrium in patches (REP) / B. Boroomand, O.C. Zienkiewicz // Int. J. Numer. Methods Eng. — 1997. — Vol. 40, № 1. — P. 137–164.

283. Boroomand, B. An improved REP recovery and the effectivity robustness test / B. Boroomand, O.C. Zienkiewicz // Int. J. Numer. Methods Eng. — 1997. — Vol. 40, № 17. — P. 3247–3277.

284. Improvement of the superconvergent patch recovery technique by the use of constraint equations: the SPR-C technique / J.J. Ródenas, M. Tur, F.J. Fuenmayor, A. Vercher // Int. J. Numer. Methods Eng. — 2007. — Vol. 70, № 6. — P. 705–727.

285. Du, L. Gradient recovery type a posteriori error estimate for finite element approximation on non-uniform meshes / L. Du, N. Yan // Adv. Comput. Math. — 2001. — Vol. 14, № 2. — P. 175–193.

286. On a new edge-based gradient recovery technique / B. Pouliot, M. Fortin, A. Fortin, E. Chamberland // International Journal for Numerical Methods in Engineering. — 2013. — Vol. 93, № 1. — P. 52–65.

287. Vejchodský, T. Local a posteriori error estimator based on the hypercircle method / T. Vejchodský // Proc. of the European Congress on Computational Methods in Applied Sciences and Engineering. — University of Jyväskylä, 2004. — 16 pp.

288. Braess, D. Equilibrated residual error estimator for edge elements / D. Braess, J. Schöberl //

Math. Comput. — 2008. — Vol. 77, № 262. — P. 651–672.

289. Ladevèze, P. Error estimate procedure in the finite element method and applications / P. Ladevèze, D. Leguillon // SIAM J. Numer. Anal. — 1983. — Vol. 20. — P. 485–509.

290. Ladevèze, P. New advances on a posteriori error on constitutive relation in f. e. analysis / P. Ladevèze, Ph. Rougeot // Comput. Methods Appl. Mech. Eng. — 1997. — Vol. 150, № 1-4. — P. 239–249.

291. Error estimation through the constitutive relation for Reissner-Mindlin plate bending finite elements / P. Boisse, S. Perrin, G. Coffignal, K. Hadjeb // Comput. Struct. — 1999. — Vol. 73, № 6. — P. 615–627.

292. Ladevèze, P. Constitutive relation error estimators and adaptivity in structural engineering / P. Ladevèze // Adaptive finite elements in linear and nonlinear solid and structural mechanics, CISM International Centre for Mechanical Sciences 416. — Springer Vienna, 2005. — P. 257–319.

293. Fraeijs de Veubeke, B. Displacement and equilibrium models in the finite element method (reprint of Chapter 9, P. 145–197 of Stress Analysis published by John Wiley & Sons, 1965) / B. Fraeijs de Veubeke // Int. J. Numer. Methods Eng. — 2001. — Vol. 52, № 3. — P. 287–342.

294. Beckers, P. Extension of dual analysis to 3-D problems: Evaluation of its advantages in error estimation / P. Beckers // Comput. Mech. — 2008. — Vol. 41, № 3. — P. 421–427.

295. Anufriev, I. A posteriori error estimation by means of the exactly equilibrated fields. RICAM Report 2007-08 / I. Anufriev, V. Korneev, V. Kostylev. — Linz, Austria: Johann Radon Institute for Computational and Applied Mathematics, 2007. — 55 pp.

296. Ладыженская, О.А. Краевые задачи математической физики / О.А. Ладыженская. — М.: Наука, 1973. — 407 с.

297. Repin, S. Computable majorants of constants in the Poincare and Friedrichs inequalities / S. Repin // Journal of Mathematical Sciences. — 2012. — Vol. 186, № 2. — P. 307–321.

298. Oden, J.T. Goal-oriented error estimation and adaptivity for the finite element method / J.T. Oden, S. Prudhomme // Comput. Math. Appl. — 2001. — Vol. 41, № 5-6. — P. 735–756.

299. Steeb, H. Goal-oriented error estimation in solid mechanics / H. Steeb, A. Maute, E. Ramm // Error-controlled adaptive finite elements in solid mechanics. — John Wiley and Sons, 2002. — P. 211–261.

300. Alekseev, A.K. An estimation of the sensitivity of numerical error norm using adjoint model / A.K. Alekseev, I.M. Navon // Int. J. Numer. Methods Fluids. — 2010. — Vol. 63, № 12. — P. 1421–1434.

301. Korotov, S. A posteriori error estimation of goal-oriented quantities by a superconvergence patch recovery / S. Korotov, P. Neittaanmäki, S. Repin // J. Numer. Math. — 2003. —

Vol. 11, № 1. — P. 33–59.

302. Banichuk, N.V. Introduction to optimization of structures. Translated from Russian by Vadim Komkov / N.V. Banichuk. — New York etc.: Springer-Verlag, 1990. — x + 300 pp.
303. Finite element analysis with mesh refinement for shape optimization / N.V. Banichuk, F.-J. Barthold, A. Falk, E. Stein // Control and Cybernetics. — 1996. — Vol. 25, № 3. — P. 657–664.
304. Eschenauer, H. Applied structural mechanics. Fundamentals of elasticity, load-bearing structures, structural optimization / H. Eschenauer, N. Olhoff, W. Schnell. — Berlin: Springer, 1997. — xviii + 389 pp.
305. Repin, S.I. A posteriori estimates in local norms / S.I. Repin // Probl. Mat. Anal. — 2004. — Vol. 29. — P. 79–87.
306. Ainsworth, M. Guaranteed computable bounds on quantities of interest in finite element computations / M. Ainsworth, R. Rankin // Int. J. Numer. Methods Eng. — 2012. — Vol. 89, № 13. — P. 1605–1634.
307. Practical methods for a posteriori error estimation in engineering applications / S. Prudhomme, J.T. Oden, T. Westermann [et al] // Int. J. Numer. Methods Eng. — 2003. — Vol. 56, № 8. — P. 1193–1224.
308. Ladevèze, P. New bounding techniques for goal-oriented error estimation applied to linear problems / P. Ladevèze, F. Pled, L. Chamoin // Int. J. Numer. Meth. Eng. — 2013. — Vol. 93, № 13. — P. 1345–1380.
309. Babuška, I. Verification and validation in computational engineering and science: basic concepts / I. Babuška, J.T. Oden // Comput. Methods Appl. Mech. Eng. — 2004. — Vol. 193, № 36-38. — P. 4057–4066.
310. Oden, J.T. Estimation of modeling error in computational mechanics / J.T. Oden, S. Prudhomme // J. Comput. Phys. — 2002. — Vol. 182, № 2. — P. 496–515.
311. Braack, M. A posteriori control of modeling errors and discretization errors / M. Braack, A. Ern // Multiscale Model. Simul. — 2003. — Vol. 1, № 2. — P. 221–238.
312. Modeling error and adapticity in nonlinear continuum mechanics / J.T. Oden, S. Prudhomme, D.C. Hammerand, M.S. Kuczma // Comput. Methods Appl. Mech. Eng. — 2001. — Vol. 190, № 49-50. — P. 6663–6684.
313. Babuška, I. Reliability of computational science / I. Babuška, F. Nobile, R. Tempone // Numer. Methods Partial Differ. Equations. — 2007. — Vol. 23, № 4. — P. 753–784.
314. Oden, J.T. Control of modeling error in calibration and validation processes for predictive stochastic models / J.T. Oden, S. Prudhomme // Int. J. Numer. Methods Eng. — 2011. — Vol. 87, № 1-5. — P. 262–272.

315. Stein, E. Computational model verification and validation in structural mechanics / E. Stein, M. Rüter, S. Ohnimus // ECCOMAS multidisciplinary jubilee symposium. New computational challenges in materials, structures, and fluids. Papers based on the presentations at the conference (EMJS'08), Vienna, Austria, February 18–20, 2008. — Dordrecht: Springer, 2009. — Computational Methods in Applied Sciences 14. — P. 135–153.

316. Repin, S. A posteriori estimation of dimension reduction errors for elliptic problems on thin domains / S. Repin, S. Sauter, A. Smolianski // SIAM J. Numer. Anal. — 2004. — Vol. 42, № 4. — P. 1435–1451.

317. Repin, S. Computable estimates of the modeling error related to Kirchhoff-Love plate model / S. Repin, S. Sauter // Anal. Appl., Singap. — 2010. — Vol. 8, № 4. — P. 409–428.

318. Repin, S.I. Combined a posteriori modeling-discretization error estimate for elliptic problems with complicated interfaces / S.I. Repin, T.S. Samrowski, S.A. Sauter // ESAIM, Math. Model. Numer. Anal. — 2012. — Vol. 46, № 6. — P. 1389–1405.

319. Mali, O. Blowup of errors caused by inexact knowledge of the Poisson ratio in some elasticity problems / O. Mali, S. Repin // Russ. J. Numer. Anal. Math. Model. — 2011. — Vol. 26, № 4. — P. 413–425.

320. Repin, S.I. A posteriori error majorants of the modeling errors for elliptic homogenization problems / S.I. Repin, T.S. Samrowski, S.A. Sauter // C. R., Math., Acad. Sci. Paris. — 2013. — Vol. 351, № 23-24. — P. 877–882.

321. Alekseev, A.K. An adjoint-based a posteriori estimation of iterative convergence error / A.K. Alekseev // Comput. Math. Appl. — 2006. — Vol. 52, № 8-9. — P. 1205–1212.

322. Turevsky, I. Defeaturing: *a posteriori* error analysis via feature sensitivity / I. Turevsky, S.H. Gopalakrishnan, K. Suresh // Int. J. Numer. Methods Eng. — 2008. — Vol. 76, № 9. — P. 1379–1401.

323. Pereira, O.J.B. Almeida. Dual adaptive finite element refinement for multiple local quantities in linear elastostatics / O.J.B. Almeida Pereira, J.P. Moitinho de Almeida // Int. J. Numer. Methods Eng. — 2010. — Vol. 83, № 3. — P. 347–365.

324. Ainsworth, M. Robust error bounds for finite element approximation of reaction–diffusion problems with non-constant reaction coefficient in arbitrary space dimension / M. Ainsworth, T. Vejchodský // Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering. — 2014. — Vol. 281. — P. 184–199.

325. Carstensen, C. A posteriori error estimator competition for conforming obstacle problems / C. Carstensen, C. Merdon // Numer. Methods Partial Differ. Equations. — 2013. — Vol. 29, № 2. — P. 667–692.

326. Carstensen, C. Estimator competition for Poisson problems / C. Carstensen, C. Merdon //

J. Comput. Math. — 2010. — Vol. 28, № 3. — P. 309–330.

327. Barrios, T.P. A posteriori error analysis of an augmented mixed formulation in linear elasticity with mixed and Dirichlet boundary conditions / T.P. Barrios, E.M. Behrens, M. González // Comput. Methods Appl. Mech. Eng. — 2011. — Vol. 200, № 1-4. — P. 101–113.
328. Sacchi, R. Locally efficient and reliable a posteriori error estimators for Dirichlet problems / R. Sacchi, A. Veeser // Math. Models Methods Appl. Sci. — 2006. — Vol. 16, № 3. — P. 319–346.
329. Papastavrou, A. A posteriori error estimators for stationary convection-diffusion problems: a computational comparison / A. Papastavrou, R. Verfürth // Comput. Methods Appl. Mech. Engrg. — 2000. — Vol. 189. — P. 449–462.
330. John, V. A numerical study of a posteriori error estimators for convection-diffusion equations / V. John // Comput. Methods Appl. Mech. Eng. — 2000. — Vol. 190, № 5-7. — P. 757–781.
331. Carstensen, C. An experimental survey of a posteriori Courant finite element error control for the Poisson equation / C. Carstensen, S. Bartels, R. Klose // Adv. Comput. Math. — 2001. — Vol. 15, № 1-4. — P. 79–106.
332. ElSheikh, A.H. Numerical investigation of the reliability of a posteriori error estimation for advection-diffusion equations / A.H. ElSheikh, S. Smith, S.E. Chidiac // Commun. Numer. Methods Eng. — 2008. — Vol. 24, № 9. — P. 711–726.
333. Ovall, J.S. Fixing a «Bug» in recovery-type a posteriori error estimators: Tech. rep. / J.S. Ovall. — Bonn, Germany: Max-Planck-Institute fur Mathematick in den Naturwissenschaften, 2006.
334. Cai, Z. Robust residual- and recovery-based a posteriori error estimators for interface problems with flux jumps / Z. Cai, S. Zhang // Numer. Methods Partial Differ. Equations. — 2012. — Vol. 28, № 2. — P. 476–491.
335. Roberts, J.E. Mixed and hybrid methods / J.E. Roberts, J.-M. Thomas // Handbook of Numerical Analysis. V. II, Part I. — Amsterdam: Elsevier, 1991. — P. 527–637.
336. Mixed finite elements, compatibility conditions and applications / D. Boffi, F. Brezzi, L.F. Demkowicz [et al]. — Berlin: Springer, 2008. — 235 pp.
337. Brezzi, F. Two families of mixed finite elements for second order elliptic problems / F. Brezzi, J.(Jr.) Douglas, L.D. Marini // Numer. Math. — 1985. — Vol. 47. — P. 217–235.
338. Durán, R.G. Mixed finite element methods / R.G. Durán // Mixed finite elements, compatibility conditions, and applications. Lectures given at the C.I.M.E. summer school, Cetraro, Italy, June 26–July 1, 2006. — Berlin: Springer; Florenz: Fondazione CIME Roberto Conti, 2008. — P. 1–44.

339. Braess, D. A posteriori error estimators for the Raviart-Thomas element / D. Braess, R. Verfürth // SIAM J. Numer. Anal. — 1996. — Vol. 33, № 6. — P. 2431–2444.
340. Luce, R. A local a posteriori error estimator based on equilibrated fluxes / R. Luce, B.I. Wohlmuth // SIAM J. Numer. Anal. — 2004. — Vol. 42, № 4. — P. 1394–1414.
341. Larson, M.G. A posteriori error estimates for mixed finite element approximations of elliptic problems / M.G. Larson, A. Målqvist // Numer. Math. — 2008. — Vol. 108, № 3. — P. 487–500.
342. Agouzal, A. Error estimates for a finite element solution of the diffusion equation based on composite norms / A. Agouzal, K. Lipnikov, Yu. Vassilevski // J. Numer. Math. — 2009. — Vol. 17, № 2. — P. 77–95.
343. Vohralík, M. Guaranteed and fully robust a posteriori error estimates for conforming discretizations of diffusion problems with discontinuous coefficients / M. Vohralík // J. Sci. Comput. — 2011. — Vol. 46, № 3. — P. 397–438.
344. Cockburn, B. An a posteriori error estimate for the variable-degree Raviart-Thomas method / B. Cockburn, W. Zhang // Math. Comput. — 2014. — Vol. 83, № 287. — P. 1063–1082.
345. Амензаде, Ю.А. Теория упругости: учебник для студентов механико-математических факультетов университетов / Ю.А. Амензаде. — 3-е изд., доп. — М.: Высшая школа, 1976. — 271 с.
346. Dvorkin, E.N. A continuum mechanics based four-node shell element for general nonlinear analysis / E.N. Dvorkin, K.-J. Bathe // Eng. Comput. — 1984. — Vol. 1. — P. 77–88.
347. Bathe, K.-J. A formulation of general shell elements - The use of mixed interpolation of tensorial components / K.-J. Bathe, E.N. Dvorkin // Int. J. Numer. Methods Eng. — 1986. — Vol. 22. — P. 697–722.
348. Simo, J.C. Geometrically non-linear enhanced strain mixed methods and the method of incompatible modes / J.C. Simo, F. Armero // Int. J. Numer. Methods Eng. — 1992. — Vol. 33, № 7. — P. 1413–1449.
349. Arnold, D.N. Innovative finite element methods for plates / D.N. Arnold // Mat. Apl. Comput. — 1991. — Vol. 10, № 2. — P. 77–88.
350. Arnold, D.N. Some new elements for the Reissner-Mindlin plate model / D.N. Arnold, F. Brezzi // Boundary value problems for partial differential equations and applications. Dedicated to Enrico Magenes on the occasion of his 70th birthday. — Paris: Masson, 1993. — P. 287–292.
351. Arnold, D.N. A uniformly accurate finite element method for the Reissner-Mindlin plate / D.N. Arnold, R.S. Falk // SIAM J. Numer. Anal. — 1989. — Vol. 26, № 6. — P. 1276–1290.
352. Gastaldi, L. Quasi-optimal pointwise error estimates for the Reissner-Mindlin plate /

L. Gastaldi, R.H. Nochetto // SIAM J. Numer. Anal. — 1991. — Vol. 28, № 2. — P. 363–377.

353. Bramble, J.H. A negative-norm least squares method for Reissner-Mindlin plates / J.H. Bramble, T. Sun // Math. Comput. — 1998. — Vol. 67, № 223. — P. 901–916.

354. Brezzi, F. Numerical approximation of Mindlin-Reissner plates / F. Brezzi, M. Fortin // Math. Comput. — 1986. — Vol. 47. — P. 151–158.

355. Arnold, D.N. A family of discontinuous Galerkin finite elements for the Reissner-Mindlin plate / D.N. Arnold, F. Brezzi, L.D. Marini // J. Sci. Comput. — 2005. — Vol. 22-23. — P. 25–45.

356. Durán, R. A finite element method for the Mindlin-Reissner plate model / R. Durán, A. Ghioldi, N. Wolanski // SIAM J. Numer. Anal. — 1991. — Vol. 28, № 4. — P. 1004–1014.

357. Durán, R. On mixed finite element methods for the Reissner-Mindlin plate model / R. Durán, E. Liberman // Math. Comput. — 1992. — Vol. 58, № 198. — P. 561–573.

358. Falk, R.S. Locking-free finite elements for the Reissner-Mindlin plate / R.S. Falk, T. Tu // Math. Comput. — 2000. — Vol. 69, № 231. — P. 911–928.

359. Lovadina, C. A low-order nonconforming finite element for Reissner-Mindlin plates / C. Lovadina // SIAM J. Numer. Anal. — 2005. — Vol. 42, № 6. — P. 2688–2705.

360. Beirão Da Veiga, L. A family of C^0 finite elements for Kirchhoff plates. I: Error analysis / L. Beirão Da Veiga, J. Niiranen, R. Stenberg // SIAM J. Numer. Anal. — 2007. — Vol. 45, № 5. — P. 2047–2071.

361. Beirão da Veiga, L. A posteriori error analysis for the postprocessed MITC plate elements / L. Beirão da Veiga, J. Niiranen, R. Stenberg // SIAM J. Numer. Anal. — 2013. — Vol. 51, № 1. — P. 1–23.

362. Beirão da Veiga, L. Numerical analysis of a locking-free mixed finite element method for a bending moment formulation of Reissner-Mindlin plate model / L. Beirão da Veiga, D. Mora, R. Rodríguez // Numer. Methods Partial Differ. Equations. — 2013. — Vol. 29, № 1. — P. 40–63.

363. Brezzi, F. A nonconforming element for the Reissner-Mindlin plate / F. Brezzi, L.D. Marini // Computers and Structures. — 2003. — Vol. 81. — P. 515–522.

364. Celiker, F. Locking-free optimal discontinuous Galerkin methods for Timoshenko beams / F. Celiker, B. Cockburn, H.K. Stolarski // SIAM J. Numer. Anal. — 2006. — Vol. 44, № 6. — P. 2297–2325.

365. Castellazzi, G. Displacement-based finite elements with nodal integration for Reissner-Mindlin plates / G. Castellazzi, P. Krysl // Int. J. Numer. Methods Eng. — 2009. — Vol. 80, № 2. — P. 135–162.

366. Oñate, E. Extended rotation-free plate and beam elements with shear deformation effects /

E. Oñate, F. Zárate // Int. J. Numer. Methods Eng. — 2010. — Vol. 83, № 2. — P. 196–227.

367. Bathe, K.J. Finite element procedures / K.J. Bathe. — Prentice Hall, 1996. — 1037 pp.

368. Falk, R.S. Finite elements for the Reissner-Mindlin plate / R.S. Falk // Mixed finite elements, compatibility conditions, and applications. Lectures given at the C.I.M.E. summer school, Cetraro, Italy, June 26–July 1, 2006. — Berlin: Springer; Florenz: Fondazione CIME Roberto Conti, 2008. — P. 195–232.

369. A priori and a posteriori analysis for a locking-free low order quadrilateral hybrid finite element for Reissner-Mindlin plates / C. Carstensen, X. Xie, G. Yu, T. Zhou // Comput. Methods Appl. Mech. Eng. — 2011. — Vol. 200, № 9-12. — P. 1161–1175.

370. Hu, J. A posteriori error analysis of finite element methods for Reissner-Mindlin plates / J. Hu, Y. Huang // SIAM J. Numer. Anal. — 2010. — Vol. 47, № 6. — P. 4446–4472.

371. An isogeometric method for the Reissner-Mindlin plate bending problem / L. Beirão da Veiga, A. Buffa, C. Lovadina [et al] // Comput. Methods Appl. Mech. Eng. — 2012. — Vol. 209-212. — P. 45–53.

372. Hale, J. A locking-free meshfree method for the simulation of shear-deformable plates based on a mixed variational formulation / J. Hale, P.M. Baiz // Comput. Methods Appl. Mech. Engrg. — 2012. — Vol. 241-244. — P. 311–322.

373. Carstensen, C. Adaptive mixed finite element method for Reissner-Mindlin plate / C. Carstensen, K. Weinberg // Comput. Methods Appl. Mech. Eng. — 2001. — Vol. 190, № 51-52. — P. 6895–6908.

374. Carstensen, C. An adaptive non-conforming finite-element method for Reissner-Mindlin plates / C. Carstensen, K. Weinberg // Int. J. Numer. Methods Eng. — 2003. — Vol. 56, № 15. — P. 2313–2330.

375. Boroomand, B. On application of two superconvergent recovery procedures to plate problems / B. Boroomand, M. Ghaffarian, O.C. Zienkiewicz // Int. J. Numer. Methods Eng. — 2004. — Vol. 61, № 10. — P. 1644–1673.

376. Carstensen, C. Residual-based a posteriori error estimate for a mixed Reißner-Mindlin plate finite element method / C. Carstensen, J. Schöberl // Numer. Math. — 2006. — Vol. 103, № 2. — P. 225–250.

377. Carstensen, C. A posteriori error analysis for conforming MITC elements for Reissner-Mindlin plates / C. Carstensen, J. Hu // Math. Comput. — 2008. — Vol. 77, № 262. — P. 611–632.

378. Liberman, E. A posteriori error estimator for a mixed finite element method for Reissner-Mindlin plate / E. Liberman // Math. Comput. — 2001. — Vol. 70, № 236. — P. 1383–1396.

379. Lovadina, C. A posteriori error analysis of the linked interpolation technique for plate bending

problems / C. Lovadina, R. Stenberg // SIAM J. Numer. Anal. — 2005. — Vol. 43, № 5. — P. 2227–2249.

380. A priori and a posteriori error analysis for a family of Reissner-Mindlin plate elements / L. Beirão da Veiga, C. Chinosi, C. Lovadina, R. Stenberg // BIT. — 2008. — Vol. 48, № 2. — P. 189–213.
381. Castellazzi, G. Patch based stress recovery for plate structures / G. Castellazzi, S. de Miranda, F. Ubertini // Comput. Mech. — 2011. — Vol. 47, № 4. — P. 379–394.
382. Ладыженская, О.А. Линейные и квазилинейные уравнения эллиптического типа / О.А. Ладыженская, Н.Н. Уральцева. — М.: Наука, 1973. — 576 с.
383. Pierre, R. Convergence properties and numerical approximation of the solution of the Mindlin plate bending problem / R. Pierre // Math. Comput. — 1988. — Vol. 51, № 183. — P. 15–25.
384. Arnold, D.N. On the range of applicability of the Reissner–Mindlin and Kirchhoff–Love plate bending models / D.N. Arnold, A.L. Madureira, S. Zhang // J. Elasticity. — 2002. — Vol. 67, № 3. — P. 171–185.
385. Arnold, D.N. Edge effects in the Reissner-Mindlin plate theory / D.N. Arnold, R.S. Falk // Analytical and Computational Models for Shells. — American Society of Mechanical Engineers, 1989. — P. 71–90.
386. Horgan, C.O. Korn's inequalities and their applications in continuum mechanics / C.O. Horgan // SIAM Rev. — 1995. — Vol. 37, № 4. — P. 491–511.
387. Garbey, M. A multilevel method for solution verification / M. Garbey, C. Picard // Domain decomposition methods in science and engineering XVII. Selected papers based on the presentations at the 17th international conference on domain decomposition methods, St. Wolfgang/Strobl, Austria, July 3–7, 2006. — Berlin: Springer, 2008. — P. 517–525.
388. Falk, R.S. Approximation of the biharmonic equation by a mixed finite element method / R.S. Falk // SIAM J. Numer. Anal. — 1978. — Vol. 15. — P. 556–567.
389. Glowinski, R. Numerical methods for the first biharmonic equation and for the two- dimensional Stokes problem / R. Glowinski, O. Pironneau // SIAM Rev. — 1979. — Vol. 21. — P. 167–212.
390. Johnson, C. Analysis of some mixed finite element methods related to reduced integration / C. Johnson, J. Pitkäranta // Math. Comput. — 1982. — Vol. 38. — P. 375–400.
391. Bramble, J.H. Two mixed finite element methods for the simply supported plate problem / J.H. Bramble, R.S. Falk // RAIRO, Anal. Numér. — 1983. — Vol. 17. — P. 337–384.
392. Monk, P. A mixed finite element method for the biharmonic equation / P. Monk // SIAM J. Numer. Anal. — 1987. — Vol. 24. — P. 737–749.
393. Continuous/discontinuous finite element approximations of fourth-order elliptic problems in

structural and continuum mechanics with applications to thin beams and plates, and strain gradient elasticity / G. Engel, K. Garikipati, T. J. R. Hughes [et al] // Comput. Methods Appl. Mech. Eng. — 2002. — Vol. 191, № 34. — P. 3669–3750.

394. Bernadou, M. The finite element method in thin shell theory: application to arch dam simulations / M. Bernadou, J.M. Boisserie. Progress in Scientific Computing 1. — Boston - Basel - Stuttgart: Birkhäuser, 1982. — x + 199 pp.
395. Bernadou, M. Basis functions for general Hsieh-Clough-Tocher triangles, complete or reduced / M. Bernadou, K. Hassan // Int. J. Numer. Methods Eng. — 1981. — Vol. 17. — P. 784–789.
396. Segeth, K. A comparison of a posteriori error estimates for biharmonic problems solved by the FEM / K. Segeth // J. Comput. Appl. Math. — 2012. — Vol. 236, № 18. — P. 4788–4797.
397. Beirão da Veiga, L. A posteriori error analysis for the Morley plate element with general boundary conditions / L. Beirão da Veiga, J. Niiranen, R. Stenberg // Int. J. Numer. Methods Eng. — 2010. — Vol. 83, № 1. — P. 1–26.
398. Gudi, T. Residual-based a posteriori error estimator for the mixed finite element approximation of the biharmonic equation / T. Gudi // Numer. Methods Partial Differ. Equations. — 2011. — Vol. 27, № 2. — P. 315–328.
399. Лурье, А.И. Теория упругости / А.И. Лурье. — М.: Наука, 1970. — 939 с.
400. Лурье, А.И. Нелинейная теория упругости / А.И. Лурье. — М.: Наука, 1980. — 512 с.
401. Ильюшин, А.А. Механика сплошной среды: учебник для студентов, обучающихся по специальности «Механика» / А.А. Ильюшин. — 3-е изд., перераб. и доп. — М.: Издательство Московского университета, 1990. — 310 с.
402. Тимошенко, С.П. Теория упругости / С.П. Тимошенко, Дж. Гудьер. — М.: Наука, 1975. — 576 с.
403. Новацкий, В. Теория упругости / В. Новацкий. — М.: Мир, 1975. — 872 с.
404. Сьярле, Ф. Математическая теория упругости. Т.1. Трехмерная теория упругости / Ф. Сьярле. — М.: Мир, 1992. — 471 с.
405. Pled, F. An enhanced method with local energy minimization for the robust a posteriori construction of equilibrated stress fields in finite element analyses / F. Pled, L. Chamoin, P. Ladevèze // Comput. Mech. — 2012. — Vol. 49, № 3. — P. 357–378.
406. Pled, F. On the techniques for constructing admissible stress fields in model verification: performances on engineering examples / F. Pled, L. Chamoin, P. Ladevèze // Int. J. Numer. Methods Eng. — 2011. — Vol. 88, № 5. — P. 409–441.
407. Gallimard, L. A constitutive relation error estimator based on traction-free recovery of the equilibrated stress / L. Gallimard // Int. J. Numer. Methods Eng. — 2009. — Vol. 78, № 4. —

P. 460–482.

408. Goodsell, G. Pointwise superconvergence of recovered gradients for piecewise linear finite element approximations to problems of planar linear elasticity / G. Goodsell, J.R. Whiteman // Numer. Methods Partial Differ. Equations. — 1990. — Vol. 6, № 1. — P. 59–74.
409. Error indicators for mixed finite elements in 2-dimensional linear elasticity / D. Braess, O. Klaas, R. Niekamp [et al] // Comput. Methods Appl. Mech. Eng. — 1995. — Vol. 127, № 1-4. — P. 345–356.
410. Lonsing, M. A posteriori error estimators for mixed finite element methods in linear elasticity / M. Lonsing, R. Verfürth // Numer. Math. — 2004. — Vol. 97, № 4. — P. 757–778.
411. Yu, G. Uniform convergence and a posteriori error estimation for assumed stress hybrid finite element methods / G. Yu, X. Xie, C. Carstensen // Comput. Methods Appl. Mech. Eng. — 2011. — Vol. 200, № 29-32. — P. 2421–2433.
412. Barrios, T.P. Low cost a posteriori error estimators for an augmented mixed FEM in linear elasticity / T.P. Barrios, E.M. Behrens, M. González // Appl. Numer. Math. — 2014. — Vol. 84. — P. 46–65.
413. Hansbo, P. Energy norm a posteriori error estimates for discontinuous Galerkin approximations of the linear elasticity problem / P. Hansbo, M.G. Larson // Comput. Methods Appl. Mech. Eng. — 2011. — Vol. 200, № 45-46. — P. 3026–3030.
414. Kim, K.-Y. Guaranteed a posteriori error estimator for mixed finite element methods of linear elasticity with weak stress symmetry / K.-Y. Kim // SIAM J. Numer. Anal. — 2011. — Vol. 49, № 6. — P. 2364–2385.
415. Ainsworth, M. Guaranteed computable error bounds for conforming and nonconforming finite element analyses in planar elasticity / M. Ainsworth, R. Rankin // Int. J. Numer. Methods Eng. — 2010. — Vol. 82, № 9. — P. 1114–1157.
416. Carstensen, C. Partition of unity for localization in implicit *a posteriori* finite element error control for linear elasticity / C. Carstensen, J. Thiele // Int. J. Numer. Methods Eng. — 2008. — Vol. 73, № 1. — P. 71–95.
417. Beckers, P. Numerical comparison of several a posteriori error estimators for 2D stress analysis / P. Beckers, H.-G. Zhong, E. Maunder // Rev. Eur. Élém. Finis. — 1993. — Vol. 2, № 2. — P. 155–178.
418. Kempeneers, M. Pure equilibrium tetrahedral finite elements for global error estimation by dual analysis / M. Kempeneers, J.-F. Debongnie, P. Beckers // Int. J. Numer. Methods Eng. — 2010. — Vol. 81, № 4. — P. 513–536.
419. Kvamsdal, T. Error estimation based on superconvergent patch recovery using statically admissible stress fields / T. Kvamsdal, K.M. Okstad // Int. J. Numer. Methods Eng. —

1998. — Vol. 42, № 3. — P. 443–472.

420. Wiberg, N.-E. Patch recovery based on superconvergent derivatives and equilibrium / N.-E. Wiberg, F. Abdulwahab // Int. J. Numer. Methods Eng. — 1993. — Vol. 36, № 16. — P. 2703–2724.
421. de Almeida, J.P.Moitinho. Recovery of equilibrium on star patches using a partition of unity technique / J.P.Moitinho de Almeida, E.A.W. Maunder // Int. J. Numer. Methods Eng. — 2009. — Vol. 79, № 12. — P. 1493–1516.
422. Maunder, E.A.W. Recovery of equilibrium on star patches from conforming finite elements with a linear basis / E.A.W. Maunder, J.P.Moitinho de Almeida // Int. J. Numer. Methods Eng. — 2012. — Vol. 89, № 12. — P. 1497–1526.
423. Castellazzi, G. Adaptivity based on the recovery by compatibility in patches / G. Castellazzi, S. de Miranda, F. Ubertini // Finite Elements in Analysis and Design. — 2010. — Vol. 46, № 5. — P. 379–390.
424. Ciarlet, P.G. Direct computation of stresses in planar linearized elasticity / P.G. Ciarlet, P.(Jr.) Ciarlet // Math. Models Methods Appl. Sci. — 2009. — Vol. 19, № 7. — P. 1043–1064.
425. Rannacher, R. Error estimation and adaptive mesh design for FE models in elasto-plasticity theory / R. Rannacher, F.-T. Suttmeier // Error-controlled adaptive finite elements in solid mechanics. — John Wiley and Sons, 2002. — P. 5–52.
426. Cottereau, R. Strict error bounds for linear solid mechanics problems using a subdomain-based flux-free method / R. Cottereau, P. Díez, A. Huerta // Comput. Mech. — 2009. — Vol. 44, № 4. — P. 533–547.
427. Advances in adaptive computational methods in mechanics / Ed. by P. Ladevèze, J.T. Oden. — Amsterdam: Elsevier, 1998. — 540 pp.
428. Verfürth, R. A review of a posteriori error estimation techniques for elasticity problems / R. Verfürth // Comput. Methods Appl. Mech. Eng. — 1999. — Vol. 176, № 1-4. — P. 419–440.
429. Duflot, M. *A posteriori* error estimation for extended finite elements by an extended global recovery / M. Duflot, S. Bordas // Int. J. Numer. Methods Eng. — 2008. — Vol. 76, № 8. — P. 1123–1138.
430. Gerasimov, T. An explicit residual-type error estimator for $Q1$-quadrilateral extended finite element method in two-dimensional linear elastic fracture mechanics / T. Gerasimov, M. Rüter, E. Stein // Int. J. Numer. Methods Eng. — 2012. — Vol. 90, № 9. — P. 1118–1155.
431. Efficient recovery-based error estimation for the smoothed finite element method for smooth and singular linear elasticity / O.A. González-Estrada, S. Natarajan, J.J. Ródenas [et al] // Comput. Mech. — 2013. — Vol. 52, № 1. — P. 37–52.
432. A recovery-type error estimator for the extended finite element method based on singu-

lar + smooth stress field splitting / J.J. Ródenas, O.A. González-Estrada, J.E. Tarancón, F.J. Fuenmayor // Int. J. Numer. Methods Eng. — 2008. — Vol. 76, № 4. — P. 545–571.

433. Enhanced error estimator based on a nearly equilibrated moving least squares recovery technique for FEM and XFEM / J.J. Ródenas, O.A. González-Estrada, F.J. Fuenmayor, F. Chinesta // Comput. Mech. — 2013. — Vol. 52, № 2. — P. 321–344.
434. Falk, R.S. Finite element methods for linear elasticity / R.S. Falk // Mixed finite elements, compatibility conditions, and applications. Lectures given at the C.I.M.E. summer school, Cetraro, Italy, June 26–July 1, 2006. — Berlin: Springer; Florenz: Fondazione CIME Roberto Conti, 2008. — P. 159–194.
435. Adams, S. A mixed finite element method for elasticity in three dimensions / S. Adams, B. Cockburn // J. Sci. Comput. — 2005. — Vol. 25, № 3. — P. 515–521.
436. Stenberg, R. A family of mixed finite elements for the elasticity problem / R. Stenberg // Numer. Math. — 1988. — Vol. 53, № 5. — P. 513–538.
437. Stenberg, R. Weakly symmetric mixed finite elements for linear elasticity / R. Stenberg // Numerical Mathematics and Advanced Applications – ENUMATH 2013, Lecture Notes in Computational Science and Engineering 103. — Springer International Publishing, 2015. — P. 3–18.
438. Arnold, D.N. Mixed finite elements for elasticity / D.N. Arnold, R. Winther // Numer. Math. — 2002. — Vol. 92, № 3. — P. 401–419.
439. Arnold, D.N. Mixed finite element methods for linear elasticity with weakly imposed symmetry / D.N. Arnold, R.S. Falk, R. Winther // Math. Comput. — 2007. — Vol. 76, № 260. — P. 1699–1723.
440. Gatica, G.N. A new dual-mixed finite element method for the plane linear elasticity problem with pure traction boundary conditions / G.N. Gatica, A. Márquez, S. Meddahi // Comput. Methods Appl. Mech. Eng. — 2008. — Vol. 197, № 9-12. — P. 1115–1130.
441. Dual mixed finite element methods for the elasticity problem with Lagrange multipliers / L. Boulaajine, S. Nicaise, L. Paquet, Rafilipojaona // J. Comput. Appl. Math. — 2008. — Vol. 221, № 1. — P. 234–260.
442. Qiu, W. Mixed *hp*-finite element method for linear elasticity with weakly imposed symmetry / W. Qiu, L. Demkowicz // Comput. Methods Appl. Mech. Eng. — 2009. — Vol. 198, № 47-48. — P. 3682–3701.
443. Carstensen, C. Computational competition of symmetric mixed FEM in linear elasticity / C. Carstensen, M. Eigel, J. Gedicke // Comput. Methods Appl. Mech. Eng. — 2011. — Vol. 200, № 41-44. — P. 2903–2915.
444. Lamichhane, B.P. A finite element method for a three-field formulation of linear elasticity

based on biorthogonal systems / B.P. Lamichhane, A.T. McBride, B.D. Reddy // Comput. Methods Appl. Mech. Eng. — 2013. — Vol. 258. — P. 109–117.

445. Bochev, P.B. Rehabilitation of the lowest-order Raviart-Thomas element on quadrilateral grids / P.B. Bochev, D. Ridzal // SIAM J. Numer. Anal. — 2009. — Vol. 47, № 1. — P. 487–507.

446. Kwak, D.Y. Mixed finite element methods for general quadrilateral grids / D.Y. Kwak, H.C. Pyo // Appl. Math. Comput. — 2011. — Vol. 217, № 14. — P. 6556–6565.

447. Boffi, D. Some remarks on quadrilateral mixed finite elements / D. Boffi, L. Gastaldi // Computers and Structures. — 2009. — Vol. 87. — P. 751–757.

448. Starke, G. Analysis of a modified first-order system least squares method for linear elasticity with improved momentum balance / G. Starke, A. Schwarz, J. Schröder // SIAM J. Numer. Anal. — 2011. — Vol. 49, № 3. — P. 1006–1022.

449. Cai, Z. First-order system least squares for the stress-displacement formulation: Linear elasticity / Z. Cai, G. Starke // SIAM J. Numer. Anal. — 2003. — Vol. 41, № 2. — P. 715–730.

450. Cai, Z. An adaptive least squares mixed finite element method for the stress-displacement formulation of linear elasticity / Z. Cai, J. Korsawe, G. Starke // Numer. Methods Partial Differ. Equations. — 2005. — Vol. 21, № 1. — P. 132–148.

451. Manet, V. The use of ANSYS to calculate the behaviour of sandwich structures / V. Manet // Composites Science and Technology. — 1998. — Vol. 58, № 12. — P. 1899–1905.

452. Falk, R.S. Hexahedral $\mathbf{H}(\mathrm{div})$ and $\mathbf{H}(\mathrm{curl})$ finite elements / R.S. Falk, P. Gatto, P. Monk // ESAIM, Math. Model. Numer. Anal. — 2011. — Vol. 45, № 1. — P. 115–143.

453. Voigt, W. Theoretische studien über die elastizitätsverhaltnisse der kristalle / W. Voigt // Abh. Gott. Akad. Wiss. — 1887. — P. 48–55.

454. Cosserat, E. Théorie des corps déformables / E. Cosserat, F. Cosserat. — Paris: Hermann, 1909. — 226 pp.

455. Ерофеев, В.И. Братья Коссера и механика обобщенных континуумов / В.И. Ерофеев // Вычислительная механика сплошных сред. — 2009. — Т. 2, № 4. — С. 5–10.

456. Truesdell, C. The classical field theories / C. Truesdell, R.A. Toupin // Handbuch der Physik III/1. — Berlin: Springer-Verlag, 1960. — P. 226–793.

457. Toupin, R.A. Elastic materials with couple-stresses / R.A. Toupin // Arch. Ration. Mech. Anal. — 1962. — Vol. 11. — P. 385–414.

458. Toupin, R.A. Theories of elasticity with couple-stress / R.A. Toupin // Arch. Ration. Mech. Anal. — 1964. — Vol. 17. — P. 85–112.

459. Mindlin, R.D. Influence of couple-stresses on stress concentrations / R.D. Mindlin // Exp. Mech. — 1963. — Vol. 3, № 1. — P. 1–7.

460. Mindlin, R.D. Micro-structure in linear elasticity / R.D. Mindlin // Arch. Ration. Mech. Anal. — 1964. — Vol. 16. — P. 51–78.

461. Mindlin, R.D. Effects of couple-stresses in linear elasticity / R.D. Mindlin, H.F. Tiersten // Arch. Ration. Mech. Anal. — 1962. — Vol. 11. — P. 415–448.

462. Truesdell, C. The non-linear field theories of mechanics. Handbuch der Physik III/3 / C. Truesdell, W. Noll. — Springer: Heidelberg, 1965.

463. Eringen, A.C. Theory of micropolar elasticity / A.C. Eringen // Fracture 2. — 1968. — P. 621–729.

464. Eringen, A.C. Nonlinear theory of simple micro-elastic solids / A.C. Eringen, E.S. Suhubi // Int. J. Eng. Sci. — 1964. — Vol. 2. — P. 189–203.

465. Аэро, Э.Л. Основные уравнения теории упругости сред с вращательным взаимодействием частиц / Э.Л. Аэро, Е.В. Кувшинский // Физика твердого тела. — 1960. — Т. 11, № 7. — С. 1399–1409.

466. Кувшинский, Е.В. Континуальная теория асимметрической упругости. Учет внутреннего вращения / Е.В. Кувшинский, Э.Л. Аэро // Физика твердого тела. — 1963. — Т. 5, № 9. — С. 2591–2598.

467. Аэро, Э.Л. Континуальная теория асимметрической упругости. Равновесие изотропного тела / Э.Л. Аэро, Е.В. Кувшинский // Физика твердого тела. — 1964. — Т. 6, № 9. — С. 2689–2699.

468. Green, A.E. Multipolar continuum mechanics / A.E. Green, R.S. Rivlin // Arch. Ration. Mech. Anal. — 1964. — Vol. 17. — P. 113–147.

469. Пальмов, В.А. Основные уравнения теории несимметричной упругости / В.А. Пальмов // Прикладная математика и механика. — 1964. — Т. 28, № 3. — С. 401–408.

470. Пальмов, В.А. Плоская задача теории несимметричной упругости / В.А. Пальмов // Прикладная математика и механика. — 1964. — Т. 28, № 6. — С. 1117–1120.

471. Койтер, В.Т. Моментные напряжения в теории упругости / В.Т. Койтер // Механика: Сб. переводов. — 1965. — № 3. — С. 89–112.

472. Nowacki, W. Couple-stresses in the theory of thermoelasticity / W. Nowacki // Irreversible Aspects Continuum Mech., Transfer Phys. Charact. Moving Fluids, IUTAM Symp. Vienna 1966. — 1968. — P. 259–278.

473. Морозов, Н.Ф. Математические вопросы теории трещин / Н.Ф. Морозов. — М.: Наука, 1984. — 256 с.

474. Елисеев, В.В. Механика упругих тел / В.В. Елисеев. — Санкт-Петербург: Изд-во СПбГТУ, 1999. — 340 с.

475. Hlaváček, I. On the existence and uniqueness of solution and some variational principles

in linear theories of elasticity with couple-stresses. I. Cosserat continuum / I. Hlaváček, M. Hlaváček // Apl. Mat. — 1969. — Vol. 14, № 5. — P. 387–410.

476. Hlaváček, I. On the existence and uniqueness of solution and some variational principles in linear theories of elasticity with couple-stresses. II. Mindlin's elasticity with microstructure and the first strain-gradient theory / I. Hlaváček, M. Hlaváček // Apl. Mat. — 1969. — Vol. 14, № 5. — P. 411–426.
477. Capriz, G. Continua with microstructure / G. Capriz. — New York etc.: Springer-Verlag, 1989. — x + 92 pp.
478. Eringen, A.C. Microcontinuum field theories. I. Foundations and solids / A.C. Eringen. — Berlin: Springer, 1999. — xvi + 325 pp.
479. Ерофеев, В.И. Волновые процессы в твердых телах с микроструктурой / В.И. Ерофеев. — М.: Изд-во МГУ, 1999. — 327 с.
480. Садовская, О.В. Математическое моделирование в задачах механики сыпучих сред / О.В. Садовская, В.М. Садовский. — М.: Физматлит, 2008. — 368 с.
481. Mathematical models of granular matter / Ed. by G. Capriz, P. Giovine, P.M. Mariano. — Berlin: Springer, 2008. — xvi + 212 pp.
482. Mechanics of generalized continua, Advanced structured materials 7 / Ed. by H. Altenbach, G.A. Maugin, V. Erofeev. — Berlin, Heidelberg: Springer-Verlag, 2011. — xix + 350 pp.
483. Generalized continua as models for materials: with multi-scale effects or under multi-field actions, Advanced structured materials 22 / Ed. by H. Altenbach, S. Forest, A. Krivtsov. — Berlin, Heidelberg: Springer-Verlag, 2013. — xii + 331 pp.
484. Forest, S. Cosserat media / S. Forest // Encyclopedia of Materials: Science and Technology. — Elsevier, 2001. — P. 1715–1718.
485. Смолин, И.Ю. О применении модели Коссера для описания пластического деформирования на мезоуровне / И.Ю. Смолин // Физ. мезомех. — 2005. — Т. 8, № 3. — С. 49–62.
486. Jeong, J. Existence, uniqueness and stability in linear Cosserat elasticity for weakest curvature conditions / J. Jeong, P. Neff // Math. Mech. Solids. — 2010. — Vol. 15, № 1. — P. 78–95.
487. Аналитические и численные решения в рамках континуума Коссера как основа для постановки экспериментов по обнаружению моментных эффектов в материалах / В.В. Корепанов, М.А. Кулеш, В.П. Матвеенко, И.Н. Шардаков // Вычислительная механика сплошных сред. — 2009. — Т. 2, № 4. — С. 76–91.
488. Eremeyev, V.A. Foundations of micropolar mechanics / V.A. Eremeyev, L.P. Lebedev, H. Altenbach. — Berlin: Springer, 2013. — x + 142 pp.
489. Altenbach, J. On generalized Cosserat-type theories of plates and shells: a short review and

bibliography / J. Altenbach, H. Altenbach, V.A. Eremeyev // Arch. Appl. Mech. — 2010. — Vol. 80, № 1. — P. 73–92.

490. Hadjesfandiari, A.R. Boundary element formulation for plane problems in couple stress elasticity / A.R. Hadjesfandiari, G.F. Dargush // Int. J. Numer. Methods Eng. — 2012. — Vol. 89, № 5. — P. 618–636.

491. Maugin, G.A. A historical perspective of generalized continuum mechanics / G.A. Maugin // Mechanics of generalized continua, Advanced structured materials 7. — Berlin, Heidelberg: Springer-Verlag, 2011. — P. 3–19.

492. Sadovskaya, O. Mathematical modeling in mechanics of granular materials / O. Sadovskaya, V. Sadovskii. Advanced Structured Materials 21. — Berlin: Springer, 2012. — xi + 390 pp.

493. Wheel, M.A. A control volume-based finite element method for plane micropolar elasticity / M.A. Wheel // Int. J. Numer. Methods Eng. — 2008. — Vol. 75, № 8. — P. 992–1006.

494. A finite element model for contact analysis of multiple Cosserat bodies / H.W. Zhang, H. Wang, P. Wriggers, B.A. Schrefler // Comput. Mech. — 2005. — Vol. 36, № 6. — P. 444–458.

495. A numerical solution method for an infinitesimal elasto-plastic Cosserat model / P. Neff, K. Chełmiński, W. Müller, C. Wieners // Math. Models Methods Appl. Sci. — 2007. — Vol. 17, № 8. — P. 1211–1239.

496. Analysis of Cosserat materials with Voronoi cell finite element method and parametric variational principle / H.W. Zhang, H. Wang, B.S. Chen, Z.Q. Xie // Comput. Methods Appl. Mech. Eng. — 2008. — Vol. 197, № 6-8. — P. 741–755.

497. Riahi, A. Full 3D finite element Cosserat formulation with application in layered structures / A. Riahi, J.H. Curran // Appl. Math. Modelling. — 2009. — Vol. 33, № 8. — P. 3450–3464.

498. Riahi, A. Buckling analysis of 3D layered structures using a Cosserat continuum approach / A. Riahi, J.H. Curran, H. Bidhendi // Computers and Geotechnics. — 2009. — Vol. 36, № 7. — P. 1101–1112.

499. Providas, E. Finite element method in plane Cosserat elasticity / E. Providas, M.A. Kattis // Computers and Structures. — 2002. — Vol. 80, № 27-30. — P. 2059–2069.

500. Садовская, О.В. Численное решение пространственных динамических задач моментной теории упругости с граничными условиями симметрии / О.В. Садовская // Журнал вычислительной математики и математической физики. — 2009. — Т. 49, № 2. — С. 313–322.

501. Perić, D. On error estimates and adaptivity in elastoplastic solids: Applications to the numerical simulation of strain localization in classical and Cosserat continua / D. Perić, J. Yu, D.R.J. Owen // Int. J. Numer. Methods Eng. — 1994. — Vol. 37, № 8. — P. 1351–1379.

502. Ostoja-Starzewski, M. Stress invariance in planar Cosserat elasticity / M. Ostoja-Starzewski, I. Jasiuk // Proc. R. Soc. Lond., Ser. A. — 1995. — Vol. 451, № 1942. — P. 453–470.

503. Кулеш, М.А. Построение и анализ аналитических решений некоторых двумерных статических задач несимметричной теории упругости: автореф. дис. ... канд. физ.-мат. наук.: 01.02.04 / Кулеш Михаил Александрович. — Пермь, 2001.

504. Carstensen, C. The adaptive nonconforming FEM for the pure displacement problem in linear elasticity is optimal and robust / C. Carstensen, H. Rabus // SIAM J. Numer. Anal. — 2012. — Vol. 50, № 3. — P. 1264–1283.