МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ФИЗИКА

DOI: 10.5862/JPM.218.4
УДК 521.1, 501

М.Р. Петриченко
Санкт-Петербургский политехнический университет Петра Великого

ПРИБЛИЖЕННЫЕ ОЦЕНКИ ПОСТОЯННОЙ БЛАЗИУСА

Для приближенной оценки постоянной Блазиуса используются интегральные свойства однородных решений предельной задачи Крокко и расщепляющие (плоские) разложения. Доказано, что производная $d\varphi/dh$ имеет логарифмическую особенность в точке $h = 1$, поэтому $d\varphi^2/dh \to -0$, $\varphi \to +0$ ($h \to 1-0$), и расщепляющий ряд для производной $d\varphi/dh$ расходится при $h \to 1-0$ не медленнее, чем гармонический ряд. Доказано существование интегрального инварианта для однородного решения предельной задачи Крокко, изображающего квадрат нормы производной решения. Доказано, что вдоль действительных однородных решений задачи Крокко выполняется условие минимума для распределения (гомеоморфизма из $D(\varphi) \times J(\varphi) \to R^1$), $Z(1, \varphi, \psi)$.

ПРЕДЕЛЬНАЯ ЗАДАЧА КРОККО, РАСЩЕПЛЯЮЩЕЕ РАЗЛОЖЕНИЕ, РАСПРЕДЕЛЕНИЕ И ПЛОТНОСТЬ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ, ГОМЕОМОРФИЗМ, ИНВАРИАНТ ПРЕДЕЛЬНОЙ ЗАДАЧИ.

Введение и постановка задачи

Оценка значения постоянной Блазиуса имеет принципиальное значение в связи с определением плотности потоков массы, импульса и энергии на границе твердое тело – жидкость. Исторически первое значение этой константы определено в гидродинамической задаче о пограничном слое на пластине Г. Блазиусом. Им применено сшивание (аналитическое продолжение) степенного ряда вблизи стенки и асимптотического разложения во внешней (струйной) части течения. В таком виде решение Блазиуса приводится в курсах гидродинамики Н.Е. Кочина, Л. Прандтля и др. История вопроса описана в работах [1, 2].

Можно считать, что точное значение постоянной a известно, надежно вычислено на 30 разрядов и, как констатируется в работе [1], «Метод Блазиуса полностью реабилитирован».

Пусть мы имеем

$$D(\varphi) = (h : 0 < h < 1), \varphi \in C^2(0,1),$$
$$J(\varphi) = (\varphi : 0 < \varphi < a < \infty)$$

и $a := \varphi(0)$ – постоянная Блазиуса.

Диффеоморфизм $\varphi(h)$, $\varphi \in C^{(2)}(0,1)$ получается как решение двухточечной предельной задачи:

$$2\varphi d^2\varphi / dh^2 + f(h) = 0,$$
$$(d\varphi / dh)_{h=0} = \varphi(1) = 0. \qquad (1)$$

Двухточечная предельная задача может быть редуцирована на задачу Коши со следующими начальными условиями:

$$\varphi(0) - a = (d\varphi / dh)_{h=0} = 0. \qquad (2)$$

При этом должно выполняться условие $\varphi(1) = 0$. По предложению В.П. Варина [1], удобнее ставить нормированные начальные условия в точке $h = 1$:

$$\varphi(0) - 1 = (d\varphi / dh)_{h=0} = 0, \qquad (2a)$$

где $0 < h < r$, $r = a^{-2/3}$, $\varphi(r) = 0$.

Основная задача состоит в точной оценке постоянной a (постоянная Блазиуса). Явно эта постоянная возникает только при редукции предельной задачи (1) на задачу Коши; удобство же задачи (1) состоит в том, что все предельные условия тривиальны. Если константу a нормировать на единицу, то необходимо найти величину r, которая является корнем $\varphi(h)$. Более того, в работе [2] доказано, что $\varphi(h)$ – это распределение, аналитическое на промежутке $0 < h < r$. Точка $h = r$ (или $h = 1$ в ненормированной постановке) – особая точка для производной $d\varphi/dh$ [2].

Именно, в работе [2] приводится следующий результат: пусть $\varphi(h)$ – решение предельной задачи (1). Тогда $h = 1$ – особая точка,

$$\varphi(1) = 0, \ -d\varphi/dh \to \infty, \ h \to 1 - 0,$$

т. е. $r = 1$ – естественный радиус сходимости, зависящий от a:

$$\forall\varepsilon > 0, \exists\eta(\varepsilon) > 0, \ \eta \underset{\varepsilon\to+0}{\to} +0 \Rightarrow 1 - \eta <$$
$$< r(a + \varepsilon) < r(a - \varepsilon) < 1 + \eta.$$

Для вычисления постоянной a используется метод так называемых плоских разложений [3]. Метод удобен тем, что позволяет ограничиваться в вычислениях небольшим количеством членов левого фланга ряда. Эта аппроксимация гарантирована равномерной сходимостью плоского ряда. Доказательство равномерной сходимости представлено в работах [3, 4]. Подобные функциональные ряды (расщепляющие разложения) описаны в статье [5]; идея расщепления в том виде, в котором она используется в этой статье, принадлежит Л. Шварцу и Д. Юэ [6].

Цель настоящей работы – получение приближенных оценок константы a. Для решения этой задачи используется прямой метод, основанный на вычислении норм распределений и плотностей распределений. Далее оценки будут считаться плохими, если погрешность вычисления a будет не меньше 1 %.

Основные свойства решения предельной задачи (1)

В качестве первого шага нашего исследования изучим свойства решений уравнения

$$2\varphi d^2\varphi / dh^2 + h = 0, \tag{3}$$

со следующим набором предельных условий:

$$\begin{gathered}(d\varphi / dh)_{h=0} = \varphi(1) = 0,\\ \varphi(0) - a = \varphi(1) = 0,\\ (d\varphi / dh)_{h=0} = \varphi(0) - a = 0.\end{gathered} \tag{4}$$

Перенормировка на промежуток единичной длины в данном случае не целесообразна, так как $r = a^{-2/3}$ (константы a и r связаны).

Лемма 1. *Формальный первый интеграл уравнения (3), такой, что*

$$(d\varphi / dh)_{h=0} = 0,$$

имеет следующий вид:

$$\begin{gathered}\psi^2 := (d\varphi / dh)^2 = \int_0^\omega h(\tau)d\tau,\\ \omega := \ln(a / \varphi) \in (0, \infty).\end{gathered} \tag{5}$$

Доказательство леммы 1 очевидно.

Из леммы 1 следует, что

$$\exp(-\omega)d\omega / dh = -\sqrt{\int_0^\omega h(\tau)d\tau},$$

и для определения $h(\omega)$ нетрудно получить нелинейное интегральное уравнение.

Распределение $h(\omega) \geq 0$ является монотонным, т. е.

$$dh/d\omega > 0, \ h(0) = h(\infty) - 1 = 0,$$

поэтому, в силу второй теоремы о среднем [7] имеем:

$$\exists\omega^* \in (0, \omega) \Rightarrow \int_0^\omega h(\tau)d\tau = h(\omega)(\omega - \omega^*).$$

Введем обозначение

$$\sigma := 1 - \omega^* / \omega < 1,$$

или в другой записи

$$\sigma := \frac{\int_0^\omega h(\tau)d\tau}{\omega h(\omega)}. \tag{6}$$

Лемма 2. *Уравнение (3) равносильно канонической системе со следующим гамильтонианом:*

$$H(\omega, \psi, h) = (1/2)(\psi^2 - \omega h(\omega)) < 0.$$

Доказательство. Действительно,

$$\psi^2 - \omega h(\omega) = (\omega^* - \omega)h(\omega) = -\sigma\omega h(\omega) < 0.$$

Таким образом, лемма 2 доказана.

Следствие леммы 2. Действительная траектория (характеристика) уравнения (3) удовлетворяет условию минимума распределения $Z(1, \varphi, \psi)$:

$$Z(1,\varphi,\psi)=\int_0^1(\psi^2+h\ln(a/\varphi))dh\to\inf>0.$$

Можно трактовать $Z(h, \psi, \varphi)$ как действие, и вместо уравнения Крокко (3) для переменной φ решать уравнение Якоби для Z:

$$\partial Z/\partial h+H(h,\varphi,\partial Z/\partial\varphi)=0,$$
$$\psi:=d\varphi/dh=\partial Z/\partial\varphi.$$

Полное решение уравнения Якоби равносильно решению уравнения (3). Вдоль траектории уравнения (3) выполняется неравенство

$$0=dZ\le\delta Z,$$

где δ означает изометрическую вариацию на виртуальных траекториях, а d – вариацию на действительном решении предельной задачи (1).

Лемма 3. *Существует ненулевое решение предельной задачи (1).*

Доказательство. Проинтегрируем уравнение (3) по h от 0 до 1:

$$(\varphi d\varphi/dh)_0^1-\int_0^1(d\varphi/dh)^2dh+1/4=0.$$

Но следует учесть, что

$$\lim_{h\to1-0}\varphi d\varphi/dh=\lim_{\varphi\to+0}\varphi\sqrt{\ln(a/\varphi)^{\sigma h}}=0,$$

и тогда предыдущее тождество можно переписать следующим образом:

$$\int_0^1(d\varphi/dh)^2dh=1/4>0. \qquad (7)$$

Лемма 3 доказана.

Лемма 4. *Распределение $\sigma(\omega)$ является возрастающим при*

$$\sigma\le\frac{1}{1+\alpha},\alpha:=\frac{d\ln h}{d\ln\omega},$$

и допускает следующую оценку:

$$3/4\le\sigma\le1.$$

Доказательство. В силу определения (6) справедливо следующее равенство:

$$d\sigma/d\omega=(1-\sigma(1+\alpha))/\omega,$$
$$\alpha:=d\ln h/d\ln\omega.$$

Производная в левой части равенства неотрицательна при

$$\sigma\le1/(1+\alpha).$$

Далее, в данном случае $h\approx(\mathrm{erf}\sqrt{\omega})^{2/3}$, и при $\omega << 1$ $h = O(\omega^{1/3})$, $\alpha = 1/3$. При $\omega\to\infty$, $\sigma\to 1-0$.

Лемма 3 доказана.

Оценки постоянной Блазиуса

(а). Из доказательства леммы 1 следует, что

$$\exp(-\omega)d\omega/dh=\sqrt{\sigma\omega h}.$$

Пусть $\sigma=\sigma_m=\mathrm{const}$, $1>\sigma_m>3/4$ – некоторая норма σ (см. лемму 4). Тогда приближенная оценка имеет вид

$$a\sqrt{\pi}\mathrm{erf}(\sqrt{\omega})= =(2/3)\sqrt{\sigma_m h^3}\Rightarrow a=(2/3)\sqrt{\sigma_m/\pi}. \qquad (8)$$

Из выражений (8) следует, что $h=(\mathrm{erf}\sqrt{\omega})^{2/3}$.

Аналогичная аппроксимация решения предельной задачи (1) приведена в работе [8], где она записана как

$$h=(\mathrm{erf}\sqrt{\omega})^{1/2}.$$

В силу равенства (8), постоянная a лежит в пределах

$$0{,}32573501<a<0{,}376126392\,.$$

Очевидно, что допустимый интервал значений этой постоянной непомерно велик. Чтобы получить требуемую оценку, целесообразно его сузить.

Оценку σ можно улучшить, если использовать тождество (7):

$$1/4=\int_0^\infty\sigma\omega h(\omega)dh=\frac{2}{3\sqrt{\pi}}\int_0^\infty\omega^{1/2}\sigma(\mathrm{erf}\sqrt{\omega})^{1/3}\times$$
$$\times\exp(-\omega)d\omega\cong(1/3)(1-1/(3\pi))\sigma_m,$$

причем полученная оценка есть верхняя для σ_m.

Таким образом,

$$\sigma_m=0{,}839023119,\ a=0{,}344525024,$$

что лежит в пределах вычисленного отклонения a.

(б). Пусть в общем случае

$$\sigma = \sigma_0 + \alpha h,\ \sigma_0 = 3/4,\ 0 < \alpha < 1/4.$$

Тогда формула (6) принимает вид:

$$a = \frac{\sigma_0^2}{8\sqrt{\alpha^3\pi}}\{(1 + 2\alpha/\sigma_0)\times \times\sqrt{4\alpha/\sigma_0(1+\alpha/\sigma_0)} - \ln(1 + 2\alpha/\sigma_0 + + \sqrt{4\alpha/\sigma_0(1+\alpha/\sigma_0)})\}. \quad (8а)$$

Если $\alpha \to +0$, то

$$a \to 2/3\sqrt{\sigma_0/\pi} + 0.$$

Среднее арифметическое значение α на промежутке (0, 1/4) составляет 0,125; тогда

$$\sigma_m = 0{,}8125,\ a = 0{,}339035748,$$

с погрешностью 1 % от точного значения.

При $\sigma_m = 0{,}7795,\ a = 0{,}33207$ и погрешность определения константы Блазиуса сужается до 0,003 %.

Итак, значение постоянной Блазиуса можно определять из интеграла уравнения Крокко:

$$a\sqrt{\pi}\operatorname{erf}(\sqrt{\ln(a/\varphi)}) = \int_0^h \sqrt{\sigma z}dz,$$

полагая $\varphi = 0$, $h = 1$, $\sigma = \sigma_m$, $\sigma_m > 3/4$.

Тогда получаем, что $a = (2/3)\sqrt{\sigma_m/\pi}$.

(в). **Псевдотеорема.** *Справедлива следующая рациональная оценка*: $a = 1/3$.

Доказательство. Действительно, напишем расщепляющий ряд для ряд для $\varphi(h)$ в следующем виде [5]:

$$\varphi(h) = a + \sum_{k\ge1}\lambda^k\varphi_k(h),\ \varphi'_1(0) = = \varphi_1(1) + a/\lambda = \varphi'_k(0) = \varphi_k(1) = 0,\ k \ge 2. \quad (3)$$

Такой плоский ряд представлен в работе В.П. Варина [2], где автор обозначает параметр разложения λ через C.

Подстановка ряда (3) в уравнение Крокко (1) со свободным членом $f(h)$ расщепляет последнее в систему линейных уравнений:

$$2a\varphi''_1 + f(h)/\lambda = 0,$$

$$2a\varphi''_k + \sum_{j=1}^k \varphi_j(h)\varphi''_{k-j}(h) = 0,$$

и тогда

$$\varphi(h) = \frac{1}{2a}\int_h^1 dz\int_0^z f(t)dt + \frac{1}{a}\sum_{k\ge2}\int_h^1 dz\int_0^z g_k(t)dt.$$

Очевидно, что это разложение не зависит от параметра λ. Здесь

$$g_k := \sum_{j=1}^k \varphi_j(h)\varphi''_{k-j}(h),\ k \ge 2.$$

При $h = 0$ получим равенство

$$\varphi(0) := a = \frac{1}{2a}\int_0^1 (1-t)f(t)dt + + \frac{1}{a}\sum_{k=2}^{\infty}\int_0^1 (1-t)g_k(t)dt,$$

или в символическом виде:

$$a = G_1 + \sum_{k=2}^{\infty} G_k,\ G_1 := \frac{1}{2a}\int_0^1 (1-t)f(t)dt,$$

$$G_k := \frac{1}{a}\int_0^1 (1-t)g_k(t)dt,$$

где $\forall k \ge 1,\ G_k > 0,\ G_k = G_1^k$.

Тогда, согласно формальному подходу, получаем равенство

$$\varphi(0) = \frac{G_1}{1 - G_1} = \frac{\frac{1}{2a}\int_0^1 (1-t)f(t)dt}{1 - \frac{1}{2a}\int_0^1 (1-t)f(t)dt}.$$

Пусть в этом равенстве $f(h) = h$, $\varphi(0) = a$. Тогда

$$a = \frac{1/(12a)}{1 - 1/(12a)},$$

$a = 1/3 = 0{,}3(3)$, что и требовалось доказать.

Псевдотеорема доказана.

Полученное значение a несколько отличается от точного значения, приводимого в работах [1, 2], не ниже, чем на 32 разряда, и оно составляет

$$a = 0{,}33205733621...,$$

т. е. отличается менее, чем на 0,4 %.

Расщепляющий (плоский) ряд для уравнения (3) приводит к последовательности (системе) линейных уравнений:

$$2a\varphi''_1 + f(h)/\lambda = 0,$$

$$2a\varphi''_k + \sum_{j=1}^k \varphi_j(h)\varphi''_{k-j}(h) = 0,$$

каждое из которых представляет необходимое условие минимума для соответствующих распределений.

Выпишем указанные уравнения в их естественной последовательности:

$$Z_1 = \int_0^1 (a(d\varphi_1 / dh)^2 - \varphi_1(h)f(h) / \lambda)dh,$$

$$Z_k = \int_0^1 \left(a(d\varphi_k / dh)^2 - \right.$$

$$\left. - \varphi_k(h)\sum_{j=1}^{k} \varphi_j \varphi''_{k-j} \right) dh \to \inf .$$

В результате получается, что нелинейная предельная задача «разваливается» на счетную последовательность линейных задач, обладающих интегралами энергии вида

$$E_1 = \psi_1^2 / 2 + \varphi_1(h)f(h) / \lambda,$$

$$E_k = \psi_k^2 / 2 + \varphi_k(h)\sum_{j=1}^{k} \varphi_j(h)\varphi''_{k-j}(h).$$

Такой результат не является неожиданным, поскольку уравнение Крокко (3) равносильно канонической системе.

Аналогичный результат получается при расщеплении и в случае с уравнением Блазиуса:

$$2d^2y / dz^3 + yd^2y / dz^2 = 0,$$

$$D(y) = (z : 0 < z < \infty), J(dy / dz) = (0,1),$$

$$z \in C^{(3)}(0, \infty),$$

не связанным ни с какими вариационными задачами.

Далее, пусть

$$y = z + \sum_{k=1} \lambda^k y_k(z),$$

и расщепленная линейная система принимает вид

$$2y'''_1 + zy''_1 = 0;\ 2y'''_k + zy''_k + \sum_{j=1}^{k} y_j y''_{k-j} = 0.$$

Очевидно, каждое из уравнений расщепленной системы не зависит от параметра λ, и каждое уравнение представляет необходимое условие минимума для некоторого распределения. Например, первое уравнение связано с необходимым условием минимума для распределения

$$Z_1 := \int_0^\infty ((d\varphi / dz)^2 + (1 / 4)(z\varphi)^2)dz,\ \ \varphi: = y''_1.$$

Точнее, первое уравнение расщепленной системы содержится среди необходимых условий минимума Z_1 или эквивалентного распределения

$$Z_1^* := \int_0^\infty (d\varphi / dz - z\varphi / 2)^2 dz.$$

Заключение

В результате проведенного исследования показано, что приближенную оценку постоянной Блазиуса $a = \varphi(0)$ можно получить, если использовать простые интегральные оценки решения предельной задачи (1). Каноническая структура уравнения Крокко позволяет свести решение предельной задачи (1) к поиску критической точки положительного функционала (распределения). Разложения решения в плоский (расщепляющий) ряд сводит решение предельной задачи (1) к минимизации последовательности неотрицательных распределений. Формальное суммирование расщепляющего ряда приводит к рациональному приближению $a = 1/3$ для постоянной Блазиуса.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

[1] **Варин В.П.** Плоские разложения и их приложения. М.: Препринты ИПМ им. М.В. Келдыша № 23. 2014. 25 с.

[2] **Varin V.P.** A solution of the Blasius problem. Moscow: Keldysh Institute preprints. No. 40. 2013. 21 p.

[3] **Варин В.П.** Плоские разложения решений ОДУ вблизи особенности. М.: Препринты ИПМ им. М.В. Келдыша. № 64. 2010. 12 с.

[4] **Кащенко И.С.** Асимптотические разложения решений уравнений. Ярославль: Ярославский гос. ун-т им. П.Г. Демидова, 2011. 46 с.

[5] **Петриченко М.Р.** Расщепляющие разложения в предельных задачах для обыкновенных квазилинейных дифференциальных уравнений // Научно-технические ведомости СПбГПУ. Физико-математические науки. 2012. № 2(146). С. 143–149.

[6] **Шварц Л., Юэ Д.** Математические методы для физических наук. М.: Мир, 1965.

С. 76–77 (пример 1-7).

[7] **Харди Г.Х.** Курс чистой математики. М.: Гос. изд-во иностр. лит-ры, 1949. С. 323 (7.11, 7.12).

[8] **Полубаринова-Кочина П.Я.** Теория движения грунтовых вод. М.: ГТТИ, 1952. С. 569–571.

СВЕДЕНИЯ ОБ АВТОРЕ

ПЕТРИЧЕНКО Михаил Романович – *доктор технических наук, заведующий кафедрой Санкт-Петербургского государственного политехнического университета.*

195251, Российская Федерация, г. Санкт-Петербург, Политехническая ул., 29

fonpetrich@mail.ru

Petritchenko M.R. ROUGH ESTIMATES OF THE BLASIUS CONSTANT.

Integral properties of homogeneous solutions of the Crocco boundary problem and splitting (flat) decomposition have been used for an approximate estimate of the Blasius constant. The derivative *d*(fi) / *dh* was proved to have a logarithmic singularity at the point $h = 1$, therefore the second one tends to minus zero, and the function in itself tends to plus zero, because *h* tends to unity minus zero, so the splitting series is not slower to diverge as compared with the harmonic one. The existence of an integral invariant was proved for a uniform solution of the Crocco boundary problem, the solution exhibiting the squared norm of the solution derivative. The condition for distribution minimum was established to be satisfied along the real uniform solutions of the boundary Crocco problem.

CROCCO BOUNDARY PROBLEM, SPLITTING DECOMPOSITION, DISTRIBUTION DENSITY, HOMEOMORPHISM, INVARIANT OF BOUNDARY PROBLEM.

REFERENCES

[1] **V.P. Varin,** Flat expansions of solutions and their applications, Keldysh Institute preprints, Moscow, 23 (2014).

[2] **V.P. Varin,** A solution of the Blasius problem, Keldysh Institute preprints, Moscow, 40 (2013).

[3] **V.P. Varin,** Flat expansions of solutions to ODEs at singularities, Keldysh Institute preprints, Moscow, 64 (2010).

[4] **I.S. Kashchenko,** Asimptoticheskie razlozheniya reshenij uravnenij [Asymptotic expansions of solutions of equations], Yaroslavskij gos. un-t im. P.G. Demidova, Yaroslavl', 2011.

[5] **M.R. Petrichenko,** Splitting expansions for the ordinary quasi-linear differential equations in the limiting problems, St. Petersburg State Polytechnical University Journal: Physics and Mathematics. 2(146) (2012) 143–149.

[6] **L. Shvarts, D. Yue,** Matematicheskie metody dlya fizicheskikh nauk [Mathematical methods for physical sciences], Mir, Moscow, 1965, pp. 76–77 (example 1-7).

[7] **G.H. Hardy,** Kurs chistoj matematiki [A Course of Pure Mathematics], Gos. izd-vo inostr. lit-ry, Moscow, 1949, p. 323.

[8] **P.Ya. Polubarinova-Kochina,** Teoriya dvizheniya gruntovykh vod [Theory of groundwater flow], GTTI, Moscow, 1952, pp. 569–571.

THE AUTHOR

PETRITCHENKO Mikhail R.

Peter the Great St. Petersburg Polytechnic University

29 Politekhnicheskaya St., St. Petersburg, 195251, Russian Federation

fonpetrich@mail.ru

© Санкт-Петербургский политехнический университет Петра Великого, 2015