DOI: 10.5862/JPM.218.12
УДК 519.216.2

Т.А. Алексеева
Национальный исследовательский университет «Высшая школа экономики»,
Санкт-Петербургский филиал

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ СЛУЧАЙНЫХ ДОРОЖНЫХ ВОЗМУЩЕНИЙ ПРИ ИССЛЕДОВАНИИ ДИНАМИКИ МОБИЛЬНЫХ МАШИН

В работе представлена методика моделирования случайных дорожных возмущений на основе метода неканонического разложения случайных функций в виде детерминированных функций, зависящих только от трех случайных величин при любых законах распределения их вероятностей.

СЛУЧАЙНОЕ ВОЗМУЩЕНИЕ, НЕКАНОНИЧЕСКОЕ РАЗЛОЖЕНИЕ СЛУЧАЙНЫХ ФУНКЦИЙ, КОРРЕЛЯЦИОННАЯ ФУНКЦИЯ, СПЕКТРАЛЬНАЯ ПЛОТНОСТЬ, ИНТЕРПОЛЯЦИОННЫЙ МЕТОД.

Одной из основных задач при исследовании низкочастотных колебаний мобильных машин, в частности колесных тракторов, является учет случайных воздействий со стороны микрорельефа поля (дороги). Микрорельеф представляет собой поверхность поля или дороги со случайным расположением неровностей. Его принято рассматривать как случайную функцию, удовлетворяющую следующим требованиям: функция стационарна, ординаты микропрофиля подчиняются нормальному закону распределения, длины неровностей ограничены по верхнему и нижнему пределам, микропрофиль меняется случайным образом только в вертикальной продольной плоскости [8, 12 – 14].

Существуют различные методы представления случайных функций: с помощью обобщенных рядов Фурье, методами К. Карунена, В.С. Пугачева, В.А. Котельникова и др. [1–5]. Эти методы представления позволяют построить для любой случайной функции бесконечный функциональный ряд, коэффициентами которого являются нормированные некоррелированные случайные величины. Однако все эти представления случайной функции обладают рядом существенных недостатков. В частности, для получения приемлемой точности необходимо использовать достаточно большое число членов ряда. Кроме того, линейная форма этих представлений мало пригодна при исследовании нелинейных колебательных систем.

В данной работе в основу методики моделирования случайных дорожных возмущений положено неканоническое представление случайной функции, предложенное В.И. Чернецким [6]. Оно отличается от других тем, что дает точное совпадение случайной функции и ее представления в рамках корреляционной теории при использовании для стационарной случайной функции всего трех случайных величин. Такое представление случайной функции имеет широкий спектр применения, в частности используется для анализа электрических цепей [7], а также представления реализаций случайных процессов сложной структуры [8–11].

Согласно принятым допущениям, достаточными статистическими характеристиками случайной функции дорожного возмущения являются корреляционная функция и спектральная плотность. В результате анализа применяемых на практике выражений для аппроксимации корреляционных функций была выбрана функция следующего вида [12, 13]:

$$R_h(\tau) = D_h\left(A_0 e^{-\alpha_0|\tau|}(1+\alpha_0|\tau|) + \right.$$
$$\left. + \sum_{i=1}^{N} A_i e^{-\alpha_0|\tau|}\left(\cos\beta_i\tau + \frac{\alpha_i}{\beta_i}\sin\beta_i|\tau|\right)\right). \quad (1)$$

Соответствующая ей спектральная плотность имеет вид

$$S_h(\omega) = D_h\left(\frac{4A_0\alpha_0^3}{(\omega^2+\alpha_0^2)^2} + \right.$$
$$\left. + \sum_{i=1}^{N}\frac{4A_i\alpha_i\omega_{0i}^2}{(\omega^2-\omega_{0i}^2)^2+4\alpha_i^2\omega^2}\right), \quad (2)$$

где A_0, A_i – безразмерные коэффициенты, учитывающие величину спектральной плотности микрорельефа в точках максимума; D_h, см² – дисперсия возмущения; τ, с – время; N – число максимумов спектральной плотности; ω, с$^{-1}$ – частота.

Корреляционные коэффициенты α_0, α_i, β_i связаны со скоростью движения машины v соотношениями:

$$\alpha_0 = \alpha_{0\,\text{ед.}}v; \quad \alpha_i = \alpha_{i\,\text{ед.}}v; \quad \beta_i = \beta_{i\,\text{ед.}}v, \quad (3)$$

где $\alpha_{0\text{ед.}}, \alpha_{i\text{ед.}}, \beta_{i\text{ед.}}$ – коэффициенты, соответствующие единичной скорости.

Такой выбор корреляционной функции обусловлен тем, что, во-первых, она позволяет учитывать наличие периодической составляющей в случайной функции возмущения, во-вторых, на основе экспериментальных исследований [12, 13] были получены значения коэффициентов в выражении (1) для ряда основных типов микропрофилей. Это явилось основой для построения реализаций случайных функций возмущения в аналитической форме.

Из-за сложности проблемы построения реализаций случайных функций возмущений по их статистическим характеристикам, обычно в выражении для корреляционной функции (1) используют одно или два слагаемых.

В данной работе решена задача построения реализаций случайных дорожных возмущений при удержании в указанном выражении пяти и более членов, что позволяет учесть максимумы спектральных плотностей и получить более достоверную информацию о спектральном составе микрорельефа.

Эта методика используется для построения реализаций случайных функций возмущений $h_1(t)$ и $h_2(t)$, входящих в систему дифференциальных уравнений, моделирующих колебания мобильных машин. Эти функции имеют вид:

$$h_1(t) = m_{h_1} + \lambda_1\sin\omega t + \lambda_2\cos\omega t; \quad (4)$$

$$h_2(t) = m_{h_2} + \lambda_1\sin\omega(t-t_0) + $$
$$+ \lambda_2\cos\omega(t-t_0), \quad (5)$$

где $t_0 = l / v$ (l – база мобильной машины, v – скорость движения); m_{h_1}, m_{h_2} – математические ожидания случайных функций; λ_1, λ_2, ω – независимые случайные величины.

Необходимые для построения реализаций вероятностные характеристики случайных функций $h_1(t)$ и $h_2(t)$ заданы: их математические ожидания равны нулю, а корреляционная функция определяется выражением (1).

Законы распределения вероятностей случайных величин λ_1 и λ_2 произвольны, а плотность распределения случайной величины ω определяется по корреляционной функции (1):

$$f(\omega) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{R_h(\tau)}{D_h}e^{-i\omega\tau}d\tau = \frac{2A_0\alpha_0^3}{\pi(\alpha_0^2+\omega^2)^2} + $$
$$+ \sum_{i=1}^{N}\frac{2A_i\alpha_i\omega_{0i}^2}{\pi(\omega_{0i}^2-\omega^2)^2+(2\alpha_i\omega)^2}. \quad (6)$$

При интерполяционном методе анализа необходимая выборка значений случайных величин λ_1, λ_2, ω рассчитывается при помощи соответствующего ψ-преобразования и специальных таблиц стандартных узлов типа Чебышева для любых законов распределения вероятностей случайных величин.

Для случайных величин λ_1 и λ_2 были использованы таблицы узлов типа Чебышева нормального распределения. Рабочие узлы λ_{1k_1} и λ_{2k_2} для всевозможных индексов $k_1 = 1, 2, \ldots, q_1$, $k_2 = 1, 2, \ldots, q_2$ рассчитываются по формулам:

$$\lambda_{1k_1} = M(\lambda_1) + \sigma_{\lambda_1} x_{k_1}; \; \lambda_{1k_2} = M(\lambda_2) + \sigma_{\lambda_2} x_{k_2};$$

$$\sigma_{\lambda_1} = \sigma_{\lambda_2} = \sqrt{D_h}; \; M(\lambda_1) = M(\lambda_2) = 0,$$

где x_{k_1}, x_{k_2} – стандартные узлы Чебышева для нормального распределения.

Для случайной величины ω по указанной плотности распределения вероятностей (6) построено ψ-преобразование к равномерному закону распределения:

$$\frac{x+1}{2} = \int_{-\infty}^{\omega} \left(\frac{2A_0\alpha_0^3}{\pi(\alpha_0^2 + \omega^2)^2} + \right.$$
$$\left. + \sum_{i=1}^{N} \frac{2A_i\alpha_i\omega_{0i}^2}{\pi(\omega_{0i}^2 - \omega^2)^2 + (2\alpha_i\omega)^2} \right) d\omega. \tag{7}$$

Полученное уравнение не дает возможности выразить ω в явной форме в зависимости от x. Поэтому решение этого уравнения было сведено к численному интегрированию дифференциального уравнения

$$\frac{d\omega}{dx} = (1/2)\left(\frac{2A_0\alpha_0^3}{\pi(\alpha_0^2 + \omega^2)^2} + \right.$$
$$\left. + \sum_{i=1}^{N} \frac{2A_i\alpha_i\omega_{0i}^2}{\pi(\omega_{0i}^2 - \omega^2)^2 + (2\alpha_i\omega)^2} \right)^{-1} \tag{8}$$

при начальных условиях $x = 0$, $\omega = 0$.

В результате получены рабочие узлы ω_{k_3}, соответствующие стандартным узлам x_{k_3} $(k_3 = 1, 2, \ldots, q_3)$.

Аналогично строится ψ-преобразование для случайной величины ω с плотностью распределения (6); при этом используются таблицы стандартных узлов типа Чебышева для нормального и экспоненциального законов распределения.

При расчетах для случайных величин λ_1 и λ_2 выбрано по два узла, а для случайной величины ω – пять узлов интерполирования, т. е. $q_1 = 2$, $q_2 = 2$, $q_3 = 5$; $k_1 = 1, 2$; $k_2 = 1, 2$; $k_3 = 1, 2, 3, 4, 5$. В этом случае необходимо рассчитать по 20 значений λ_{k_1}, λ_{k_2}, ω_{k_3}, $n = q_1q_2q_3 = 2 \cdot 2 \cdot 5 = 20$.

Такой выбор числа узлов интерполирования обеспечивает сочетание требуемой точности и минимального объема вычислений в рамках интерполяционного метода.

При программном синтезе реализаций случайных дорожных возмущений по заданной корреляционной функции (1) корреляционные коэффициенты α_i и β_i варьировались в зависимости от скорости движения машины в соответствии с выражением (3).

По разработанной методике были рассчитаны таблицы рабочих узлов типа Чебышева λ_{k_1}, λ_{k_2}, ω_{k_3} случайных величин λ_1, λ_2, ω для восьми основных фонов дорог при различных скоростях движения, что является исходным материалом для исследования динамики мобильных машин.

Итак, разработанная методика математического моделирования случайных дорожных возмущений дает точное представление случайной функции возмущения в рамках корреляционной теории при использовании всего трех случайных величин, позволяет получить более достоверную информацию о спектральном составе микрорельефа, упростить исследование динамики мобильных машин и сократить объем вычислений по сравнению с другими методами. Компьютерная модель не критична к программному средству и может быть реализована в средах, допускающих стохастическое моделирование.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

[1] **Пугачев В.С.** Теория случайных функций и ее применение к задачам автоматического управления. М.: Физматгиз, 3-е изд., 1962. 883 с.

[2] **Karhunen K.** Uber lineare Methoden in der Wahrscheinlichkeitsrechnung // Ann. Acad. Sci. Fennicae. Ser. A. I. Math.-Phys. 1947. No. 37. Pp. 1–79.

[3] **Свешников А.А.** Прикладные методы теории случайных функций. М.: Наука, 1968. 463 с.

[4] **Фурунжиев Р.И.** Проектирование оптимальных виброзащитных систем. Монография. Минск: Вышейшая школа, 1971. 320 с.

[5] **Ламперти Дж.** Случайные процессы. Обзор математической теории. Киев: Вища школа, 1983. 227 с.

[6] **Чернецкий В.И.** Анализ точности нелинейных систем управления. М.: Машиностроение, 1968. 246 с.

[7] **Мищенко Т.Н., Михаличенко П.Е., Костин Н.А.** Вероятностные характеристики случайной функции напряжения на токоприемнике первого украинского электровоза ДЭ-1 // Научные журналы НТУ «ХПИ». Электротехника и электромеханика. 2003. № 2. С. 43–46.

[8] **Фурунжиев Р.И.** Автоматизированное проектирование колебательных систем. Монография. Минск: Вышейшая школа, 1977. 452 с.

[9] **Чернецкий В.И.** Математическое моделирование стохастических систем. Петрозаводск: Петрозаводский гос. ун-т, 1994. 486 с.

[10] **Перов С.Н., Скворцов Ю.В.** Представление случайных процессов с помощью неканонического разложения // Вестник Самарского государственного аэрокосмического ун-та. 2008. № 1 (14). С. 226–235.

[11] **Павлюк Ю.С., Сакулин В.Д.** Нелинейная динамика механических систем при случайном воздействии // Динамика, прочность и износостойкость машин. 1995. № 1. С. 33–43.

[12] **Росляков В.П.** Аппроксимация корреляционных функций случайных процессов в задачах динамики сельхозмашин // Механизация и электрификация социалистического сельского хозяйства. 1969. № 8. С. 15–19.

[13] **Росляков В.П.** Статистические характеристики рельефов обрабатываемых полей // Труды Курского СХИ. Воронеж. 1969. Вып. 3.

[14] **Хачатуров А.А.** Динамика системы дорога-шина-автомобиль-водитель. М.: Машиностроение, 1976. 535 с.

СВЕДЕНИЯ ОБ АВТОРЕ

АЛЕКСЕЕВА Татьяна Анатольевна – *кандидат физико-математических наук, доцент департамента прикладной математики и бизнес-информатики Санкт-Петербургского филиала Национального исследовательского университета «Высшая школа экономики».*

190008, Российская Федерация, г. Санкт-Петербург, ул. Союза Печатников, 16

tatyanalexeeva@gmail.com

Alexeeva T.A. SIMULATION OF OCCASIONAL ROAD DISTURBANCES FOR MOBILE VEHICLES DYNAMIC STUDIES.

This paper focuses on a simulation procedure of occasional road disturbances reasoning from non-canonical occasional functions analysis method in terms of determinate functions depending on only three casual quantities with any distribution law of their probabilities. A developed mathematical method for simulation of random road disturbances gives an accurate representation of the random function perturbations in the framework of the correlation theory using only three random variables. The proposed approach allows obtaining more reliable information about the spectral composition of the microrelief, simplifying studies of the mobile vehicles dynamics and reducing the computation amount as compared to other methods.

OCCASIONAL DISTURBANCE, NON-CANONICAL ANALYSIS OF OCCASIONAL FUNCTIONS, CORRELATIONAL FUNCTION, SPECTRAL DENSITY, INTERPOLATION METHOD.

REFERENCES

[1] **V.S. Pugachev,** Teoriya sluchajnykh funktsij i ee primenenie k zadacham avtomaticheskogo upravleniya [The theory of random functions and its application to problems of automatic control], Fizmatgiz, Moscow, 3rd ed., 1962.

[2] **K. Karhunen,** Uber lineare Methoden in der Wahrscheinlichkeitsrechnung, Ann. Acad. Sci. Fennicae, Ser. A. I. Math.-Phys. 37 (1947) 1–79.

[3] **A.A. Sveshnikov,** Prikladnye metody teorii sluchajnykh funktsij [Applied methods of the theory of random functions], Nauka, Moscow, 1968.

[4] **R.I. Furunzhiev,** Proektirovanie optimal'nykh vibrozashchitnykh system [Designing optimal vibration isolation systems], Vyshejshaya shkola, Minsk, 1971.

[5] **J. Lamperti,** Sluchajnye protsessy. Obzor matematicheskoj teorii [Random processes. Overview of the mathematical theory], Vishcha shkola, Kiev, 1983.

[6] **V.I. Chernetskij,** Analiz tochnosti nelinejnykh sistem upravleniya [Accuracy analysis of nonlinear control systems], Mashinostroenie, Moscow, 1968.

[7] **T.N. Mishchenko, P.E. Mikhalichenko, N.A. Kostin,** Veroyatnostnye kharakteristiki sluchajnoj funktsii napryazheniya na tokopriemnike pervogo ukrainskogo elektrovoza DE-1 [Probabilistic characteristics of a random function of voltage in the current collector of the first Ukrainian electric locomotive DE-1], Nauchnye zhurnaly NTU «KhPI». Elektrotekhnika i elektromekhanika. 2 (2003) 43–46.

[8] **R.I. Furunzhiev,** Avtomatizirovannoe proektirovanie kolebatel'nykh sistem, [Computer-aided

design of vibrating systems], Minsk: Vyshejshaya shkola, 1977.

[9] **V.I. Chernetskij,** Matematicheskoe modelirovanie stokhasticheskikh system [Mathematical modeling of stochastic systems], Petrozavodskij gos. un-t, Petrozavodsk, 1994.

[10] **S.N. Perov, Yu.V. Skvortsov,** Predstavlenie sluchajnykh protsessov s pomoshch'yu nekanonicheskogo razlozheniya [Representation of stochastic processes using non-canonical decomposition], Vestnik Samarskogo gosudarstvennogo aerokosmicheskogo un-ta. 1 (14) (2008) 226–235.

[11] **Yu.S. Pavlyuk, V.D. Sakulin,** Nelinejnaya dinamika mekhanicheskikh sistem pri sluchajnom vozdejstvii [Nonlinear dynamics of mechanical systems at accidental exposure], Dinamika, prochnost' i iznosostojkost' mashin. 1 (1995) 33–43.

[12] **V.P. Roslyakov,** Approksimatsiya korrelyatsionnykh funktsij sluchajnykh protsessov v zadachakh dinamiki sel'khozmashin [Approximation of correlation functions of random processes in dynamics problems of agricultural machinery], Mekhanizatsiya i elektrifikatsiya sotsialisticheskogo sel'skogo khozyajstva. 8 (1969) 15–19.

[13] **V.P. Roslyakov,** Statisticheskie kharakteristiki rel'efov obrabatyvaemykh polej [Statistical characteristics of the reliefs of cultivated fields], Trudy Kurskogo SKhI, Voronezh. 3 (1969).

[14] **A.A. Khachaturov,** Dinamika sistemy doroga-shina-avtomobil'-voditel' [Dynamics of a road-tire-car-driver system], Mashinostroenie, Moscow, 1976.

THE AUTHOR

ALEXEEVA Tatiana A.

National Research University Higher School of Economics

16 Soyuza Pechatnikov St., St. Petersburg, 190008, Russian Federation

tatyanalexeeva@gmail.com