doi: 10.5862/MCE.56.7

Вариационные постановки нелинейных задач с независимыми вращательными степенями свободы

Д-р техн. наук, заведующий кафедрой В.В. Лалин;
ассистент Е.В. Зданчук;
аспирант Д.А. Кушова;
д-р физ.-мат. наук, профессор Л.А. Розин,
Санкт-Петербургский политехнический университет Петра Великого

Аннотация. Рассматриваются геометрически и физически нелинейные теории упругих стержней (стержни Коссера – Тимошенко) и упругой среды Коссера. Эти теории характерны тем, что в них присутствуют независимые трансляционные и вращательные степени свободы. Постановки задач для этих теорий в виде систем дифференциальных уравнений хорошо известны. Однако до сих пор не получены вариационные постановки в виде задач о поиске точек стационарности соответствующих функционалов.

Используются только вариационные постановки в виде принципа виртуальной работы (возможных перемещений). Наличие функционалов вариационных постановок важно для правильной формулировки алгоритмов метода конечных элементов при решении нелинейных задач, а также для постановки и решения задач устойчивости равновесия.

В настоящей работе даны вариационные постановки статических задач для указанных теорий в виде задач поиска точек стационарности функционалов.

Ключевые слова: независимые вращательные степени свободы; нелинейные стержни Коссера; нелинейная среда Коссера; функционал вариационной постановки

Введение

В статье рассматриваются геометрически и физически нелинейные пространственные статические задачи строительной механики и механики деформируемого твердого тела для упругих сред, в которых, наряду с трансляционными степенями свободы – перемещениями, имеются вращательные степени свободы – повороты, независимые от перемещений.

Примером одномерных теорий такого рода является стержень Коссера – Тимошенко [1–20], трехмерными примерами являются среда Коссера – моментная теория упругости [19, 21–25] и редуцированная среда Коссера [26–29].

В мировой научной литературе для геометрически нелинейных задач с независимыми поворотами отсутствует вариационная постановка в виде задачи поиска точки стационарности некоторого функционала. Используется только вариационная постановка в виде вариационного уравнения – принцип виртуальных перемещений (виртуальной работы) [7, 14, 15, 17, 19, 20, 30–33].

В настоящей статье даны вариационные постановки нелинейной теории упругих стержней Коссера – Тимошенко и нелинейной трехмерной упругой среды Коссера в виде задачи о поиске точки стационарности соответствующих функционалов.

Описание больших поворотов

Независимые повороты можно описывать с помощью вектора поворота $\boldsymbol{\varphi} = \boldsymbol{\varphi}_i \mathbf{e}_i$, где $\mathbf{e}_i$ – орты ортогональной декартовой системы координат. Здесь и в дальнейшем все индексы имеют значения от 1 до 3 и используется правило суммирования по немому индексу, например, $\varphi_i \mathbf{e}_i \equiv \varphi_1 \mathbf{e}_1 + \varphi_2 \mathbf{e}_2 + \varphi_3 \mathbf{e}_3$.

Альтернативное описание независимых поворотов дает тензор поворота $\mathbf{P}$. Через вектор φ тензор $\mathbf{P}$ выражается следующим образом [3, 14, 16, 20, 23, 34, 35]:

$$\mathbf{P} \equiv \mathbf{P}(\varphi) = \mathbf{I}\cos\Phi + \frac{\sin\Phi}{\Phi}\mathbf{I}\times\varphi + \frac{1-\cos\Phi}{\Phi^2}\varphi\varphi , \tag{1}$$

где $\Phi = \sqrt{\varphi_1^2 + \varphi_2^2 + \varphi_3^2}$ – модуль вектора φ; $\mathbf{I} = \mathbf{e}_i \mathbf{e}_i$ – единичный тензор; x – знак векторного умножения; $\mathbf{ab}$ – диадное произведение векторов $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$.

Тензор $\mathbf{P}$ является ортогональным тензором, т. е. удовлетворяет равенствам $\mathbf{P} \cdot \mathbf{P}^T = \mathbf{P}^T \cdot \mathbf{P} = \mathbf{I}$ (где $\cdot$ – знак скалярного умножения) и имеет определитель, равный 1.

Если тензор $\mathbf{P}$ зависит от некоторого числового параметра β, то его производная по β полностью определяется вектором $\mathbf{b}$ по правилу [5, 34, 35]:

$$\frac{\partial \mathbf{P}}{\partial \beta} = \mathbf{P} \times \mathbf{b} \quad \langle = \rangle \quad \mathbf{b} = -\frac{1}{2}(\mathbf{P}^T \cdot \frac{\partial \mathbf{P}}{\partial \beta})_x , \tag{2}$$

где $(...)_x$ – векторный инвариант тензора [5, 34, 35]; $(...)^T$ – транспонирование тензора.

Пусть от параметра β зависит вектор поворота φ: $\varphi = \varphi(\beta)$, то есть $\mathbf{P}(\beta) \equiv \mathbf{P}(\varphi(\beta))$. Производная $\partial \mathbf{P} / \partial \beta$ по-прежнему определяется вектором $\mathbf{b}$ по формуле (2). Производная $\partial \varphi / \partial \beta$ и вектор $\mathbf{b}$ связаны соотношением

$$\mathbf{b} = \mathbf{Z}^T \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial \beta} , \tag{3}$$

где тензор Жилина $\mathbf{Z}$ определен формулой [34, 35]:

$$\mathbf{Z} \equiv \mathbf{Z}(\boldsymbol{\varphi}) = \mathbf{I}\frac{\sin\Phi}{\Phi} + \frac{1-\cos\Phi}{\Phi^2}\mathbf{I} \times \boldsymbol{\varphi} + \frac{\Phi - \sin\Phi}{\Phi^3}\boldsymbol{\varphi\varphi} . \tag{4}$$

Несмотря на то, что выражение (4) было известно и раньше (см., например [2, 21, 36]), систематическое исследование свойств и использование этого тензора было проведено именно П.А. Жилиным, что объясняет использованное нами название тензора $\mathbf{Z}$.

Из (1) следует, что $\mathbf{P}$ можно рассматривать как функцию трех параметров φ_i. Введем три вектора $\mathbf{H}_i$ по формуле (2):

$$\frac{\partial \mathbf{P}}{\partial \varphi_i} = \mathbf{P} \times \mathbf{H}_i . \tag{5}$$

Согласно (3) $\mathbf{H}_i = \mathbf{Z}^T \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial \varphi_i}$, но $\frac{\partial \boldsymbol{\varphi}}{\partial \boldsymbol{\varphi_i}} = \mathbf{e}_{\boldsymbol{i}}$, следовательно $\mathbf{H}_i = \mathbf{Z}^T \cdot \mathbf{e}_i$. Так как $\mathbf{e}_i$ – линейно независимые единичные векторы, то последнее равенство эквивалентно следующему:

$$\mathbf{Z}^T = \mathbf{H}_i \mathbf{e}_i \tag{6}$$

и, поскольку $\frac{\partial \mathbf{e}_i}{\partial \beta} \equiv 0$, то формулу (3) можно записать в виде

$$\mathbf{b} = \mathbf{H}_i \frac{\partial \varphi_i}{\partial \beta} . \tag{7}$$

Вычисление вариаций

Обозначим $\delta\varphi \equiv \mathbf{e}_i \delta\varphi_i$ – вариация вектора поворота φ. Для любой функции (в том числе векторной или тензорной) $A(\varphi)$ вектора φ вариация вычисляется следующим образом:

$$\delta A = \left. \frac{\partial A(\varphi + \alpha\delta\varphi)}{\partial \alpha} \right|_{\alpha=0} ,$$

где α – скалярный параметр.

Исходя из определения, получим

$$\delta A = \left[\frac{\partial A(\varphi + \alpha\delta\varphi)}{\partial(\varphi_i + \alpha\delta\varphi_i)} \frac{\partial(\varphi_i + \alpha\delta\varphi_i)}{\partial\alpha} \right]_{\alpha=0} = \frac{\partial A}{\partial\varphi_i}\delta\varphi_i . \tag{8}$$

Вычислим вариацию тензора $\mathbf{P}$. Согласно (8) и (5) можно записать:

$$\boldsymbol{\delta}\,\mathbf{P} = \frac{\partial\mathbf{P}}{\partial\boldsymbol{\varphi}_i}\boldsymbol{\delta\varphi}_i = \mathbf{P}\times\mathbf{H}_i\boldsymbol{\delta\varphi}_i .$$

Используя свойство $\mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}_k = \begin{cases} 1, i=k \\ 0, i \neq k \end{cases}$, последнюю формулу можно записать в виде

$$\boldsymbol{\delta}\,\mathbf{P} = \mathbf{P}\times\mathbf{H}_i\mathbf{e}_i\cdot\mathbf{e}_k\boldsymbol{\delta\varphi}_k .$$

На основании (6) и определения $\delta\varphi$, окончательно получим:

$$\boldsymbol{\delta}\,\mathbf{P} = \mathbf{P}\times\mathbf{Z}^{\boldsymbol{T}}\cdot\boldsymbol{\delta\varphi} . \tag{9}$$

Формула (9) – инвариантная запись вариации тензора поворота $\mathbf{P}$.

Далее займемся вычислением вариации вектора $\mathbf{b}$ из формул (2) и (3). Так как, согласно (3), вектор $\mathbf{b}$ зависит не только от самого вектора φ, но и от его производной $\partial\varphi / \partial\beta$, то его вариация должна вычисляться по формуле:

$$\boldsymbol{\delta}\,\mathbf{b} = \frac{\partial\mathbf{b}}{\partial\boldsymbol{\varphi}_i}\boldsymbol{\delta\varphi}_i + \frac{\partial\mathbf{b}}{\partial(\frac{\partial\boldsymbol{\varphi}_i}{\partial\boldsymbol{\beta}})}\boldsymbol{\delta}(\frac{\partial\boldsymbol{\varphi}_i}{\partial\boldsymbol{\beta}}) . \tag{10}$$

Так как векторы $\mathbf{H}_i$ не зависят от $\partial\varphi_i / \partial\beta$, то из (7) следует:

$$\frac{\partial\mathbf{b}}{\partial(\frac{\partial\boldsymbol{\varphi}_i}{\partial\boldsymbol{\beta}})} = \mathbf{H}_i . \tag{11}$$

Используя равенство $\delta(\frac{\partial\varphi_i}{\partial\beta}) = \frac{\partial(\delta\varphi_i)}{\partial\beta}$ и (11), последнее слагаемое в (10) можно записать следующим образом:

$$\frac{\partial\mathbf{b}}{\partial(\frac{\partial\boldsymbol{\varphi}_i}{\partial\boldsymbol{\beta}})}\boldsymbol{\delta}(\frac{\partial\boldsymbol{\varphi}_i}{\partial\boldsymbol{\beta}}) = \mathbf{H}_i\frac{\partial(\boldsymbol{\delta\varphi}_i)}{\partial\boldsymbol{\beta}} . \tag{12}$$

Для вычисления первого слагаемого в (10) используем равенство вторых смешанных производных тензора $\mathbf{P}$. На основании (2) и (5) получим:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2\mathbf{P}}{\partial\varphi_i\partial\beta} &= \frac{\partial}{\partial\varphi_i}(\mathbf{P}\times\mathbf{b}) = (\mathbf{P}\times\mathbf{H}_i)\times\mathbf{b} + \mathbf{P}\times\frac{\partial\mathbf{b}}{\partial\varphi_i}; \\ \frac{\partial^2\mathbf{P}}{\partial\beta\partial\varphi_i} &= \frac{\partial}{\partial\beta}(\mathbf{P}\times\mathbf{H}_i) = (\mathbf{P}\times\mathbf{b})\times\mathbf{H}_i + \mathbf{P}\times\frac{\partial\mathbf{H}_i}{\partial\beta} . \end{aligned} \tag{13}$$

Приравняв друг другу правые части формул (13) и воспользовавшись непосредственно проверяемым тождеством $(\mathbf{A}\times\mathbf{a})\times\mathbf{b}-(\mathbf{A}\times\mathbf{b})\times\mathbf{a}=\mathbf{A}\times(\mathbf{a}\times\mathbf{b})$, справедливым для любых векторов $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ и тензора $\mathbf{A}$, получим $\mathbf{P}\times(\mathbf{H}_i\times\mathbf{b}+\dfrac{\partial\mathbf{b}}{\partial\varphi_i}-\dfrac{\partial\mathbf{H}_i}{\partial\beta})=0$, откуда

$$\frac{\partial\mathbf{b}}{\partial\varphi_i}=\frac{\partial\mathbf{H}_i}{\partial\beta}+\mathbf{b}\times\mathbf{H}_i.$$

Подставляя последнюю формулу и формулу (12) в (10), получим:

$$\delta\mathbf{b}=\frac{\partial}{\partial\beta}(\mathbf{H}_i\delta\varphi_i)+\mathbf{b}\times\mathbf{H}_i\delta\varphi_i. \tag{14}$$

Так как $\dfrac{\partial\mathbf{e}_i}{\partial\beta}\equiv 0$, то с использованием (6) формулу (14) можно записать в следующем инвариантном виде:

$$\delta\mathbf{b}=\frac{\partial}{\partial\beta}(\mathbf{Z}^T\cdot\delta\varphi)+\mathbf{b}\times\mathbf{Z}^T\cdot\delta\varphi. \tag{15}$$

В дальнейшем будет удобно использовать преобразованную формулу (15). Для этого воспользуемся тождествами [34]:

$$\mathbf{Z}^T=\mathbf{P}^T\cdot\mathbf{Z} \text{ и } (\mathbf{P}\times\mathbf{b})^T=-\mathbf{b}\times\mathbf{P}^T. \tag{16}$$

На основании последнего тождества из (2) следует $\dfrac{\partial\mathbf{P}^T}{\partial\beta}=-\mathbf{b}\times\mathbf{P}^T$. Теперь первое слагаемое в (15) можно преобразовать следующим образом:

$$\frac{\partial}{\partial\beta}(\mathbf{Z}^T\cdot\delta\varphi)=\frac{\partial}{\partial\beta}(\mathbf{P}^T\cdot\mathbf{Z}\cdot\delta\varphi)=\frac{\partial\mathbf{P}^T}{\partial\beta}\cdot\mathbf{Z}\cdot\delta\varphi+\mathbf{P}^T\cdot\frac{\partial}{\partial\beta}(\mathbf{Z}\cdot\delta\varphi)=$$
$$=-\mathbf{b}\times\mathbf{P}^T\cdot\mathbf{Z}\cdot\delta\varphi+\mathbf{P}^T\cdot\frac{\partial}{\partial\beta}(\mathbf{Z}\cdot\delta\varphi)=-\mathbf{b}\times\mathbf{Z}^T\cdot\delta\varphi+\mathbf{P}^T\cdot\frac{\partial}{\partial\beta}(\mathbf{Z}\cdot\delta\varphi).$$

Подставив полученный результат в (15), получим:

$$\delta\mathbf{b}=\mathbf{P}^T\cdot\frac{\partial}{\partial\beta}(\mathbf{Z}\cdot\delta\varphi). \tag{17}$$

Напомним, что в (17) β – произвольный скалярный параметр, от которого зависят вектор и тензор поворота.

Вариационная постановка нелинейных задач для стержней Коссера – Тимошенко

Выберем в качестве отсчетной конфигурации (ОК) начальное положение стержня в момент времени t = 0, актуальная конфигурация (АК) – текущее положение стержня в момент времени t. Будем использовать материальное (Лагранжево) описание, при котором любая точка стержня задается своей дуговой координатой s в ОК.

Введем обозначения:

$\mathbf{r}(s,t)$ – радиус-вектор точек стержня в АК;

$\mathbf{R}(s)$ – радиус-вектор точек стержня в ОК $(\mathbf{r}(\mathrm{s},0)=\mathbf{R}(\mathrm{s}))$;

$\mathbf{P}(s,t)$ – тензор поворота, описывающий независимые повороты;

ρ – линейная плотность в ОК;

J – массовая плотность тензора инерции в АК;

$\upsilon,\ \omega$ – векторы линейной и угловой скоростей;

$\mathrm{q},\ \boldsymbol{\mu}$ – векторы распределенной силовой и моментной нагрузок в текущем положении на единицу длины ОК;

$\mathrm{f},\ \mathrm{m}$ – векторы внутренних усилий (сил и моментов);

$\boldsymbol{\varepsilon},\ \boldsymbol{\gamma}$ – векторы деформаций (растяжение – сдвиг и изгиб – кручение);

$\dfrac{\partial}{\partial s}(...) \equiv (...)'$ – частная производная по длине дуги;

$\dfrac{\partial}{\partial t}(...) \equiv (...)^{\bullet}$ – частная производная по времени.

Определение скоростей:

$$\upsilon = \mathrm{r}^{\bullet};\quad \mathrm{P}^{\bullet} = \omega \times \mathrm{P}. \tag{18}$$

Определение деформаций:

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \mathrm{r}' - \mathrm{P}\cdot\mathrm{R}';\quad \mathrm{P}' = \boldsymbol{\gamma}\times\mathrm{P}. \tag{19}$$

Уравнения движения:

$$\begin{cases} \mathrm{f}' + \mathrm{q} = \rho\upsilon^{\bullet} \\ \mathrm{m}' + \mathrm{r}'\times\mathrm{f} + \boldsymbol{\mu} = \rho(J\cdot\omega)^{\bullet} \end{cases} \tag{20}$$

Формулы и уравнения (18)–(20) являются хорошо известными и стандартными для нелинейной теории стержней. В зарубежной литературе такая теория называется геометрически точной (geometrically exact theory) [1, 4–6, 8, 10, 11, 16].

Для упругих стержней энергия деформации зависит только от деформаций: $W = W(\varepsilon,\gamma)$, где W – линейная плотность энергии деформации текущего положения на единицу длины ОК.

Известно, что векторы внутренних усилий $\mathrm{f},\ \mathrm{m}$ и деформаций $\varepsilon,\ \gamma$ не являются энергетически сопряженными, т.е. $\mathbf{W}^{\bullet} \neq \mathrm{f}\cdot\boldsymbol{\varepsilon}^{\bullet} + \mathrm{m}\cdot\boldsymbol{\gamma}^{\bullet}$, следовательно, для таких векторов не может существовать классической вариационной постановки в виде задачи о поиске точки стационарности некоторого функционала.

В работах [2, 8, 11, 16] доказано, что энергетически сопряженными являются повернутые векторы усилий и деформаций:

$$\begin{cases} \boldsymbol{E} = \mathrm{P}^{\mathrm{T}}\cdot\boldsymbol{\varepsilon} = \mathrm{P}^{\mathrm{T}}\mathrm{r}' - \mathrm{R}' \\ \boldsymbol{\Gamma} = \mathrm{P}^{\mathrm{T}}\cdot\boldsymbol{\gamma} \Leftrightarrow \mathrm{P}' = \mathrm{P}\times\Gamma \end{cases} \tag{21}$$

$$\mathrm{F} = \mathrm{P}^{\mathrm{T}}\cdot\mathrm{f};\quad \mathrm{M} = \mathrm{P}^{\mathrm{T}}\cdot\mathrm{m}. \tag{22}$$

Для таких векторов в работе [8] доказано равенство:

$$\mathbf{W}^{\bullet} = \mathrm{F}\cdot\boldsymbol{E}^{\bullet} + \mathrm{M}\cdot\boldsymbol{\Gamma}^{\bullet}, \tag{23}$$

где $\mathbf{W} = \mathbf{W}(E,\Gamma)$.

Как показано в [8], из (23) вытекает следующая запись физических уравнений для нелинейно упругого материала:

$$\mathrm{F} = \frac{\partial W}{\partial \boldsymbol{E}};\quad \mathrm{M} = \frac{\partial W}{\partial \boldsymbol{\Gamma}}. \tag{24}$$

В дальнейшем будем рассматривать статические задачи, правые части уравнений (20) будут равны нулю и уравнения равновесия, записанные через повернутые векторы (22) примут вид:

$$\begin{cases}(\mathrm{P}\cdot\mathrm{F})' + q = 0\\ (\mathrm{P}\cdot\mathrm{M})' + \mathrm{r}'\times\mathrm{P}\cdot\mathrm{F} + \boldsymbol{\mu} = 0\end{cases} \tag{25}$$

Введем функционал:

$$\mathrm{L}(r,\varphi) = \int_0^l [W(E,\Gamma) - \mathrm{U}_1(r) - \mathrm{U}_2(\varphi)]ds,$$

где $\mathrm{U}_1(r)$ – потенциал силовой нагрузки;

$\mathrm{U}_2(\varphi)$ – потенциал моментной нагрузки;

l – длина стержня в ОК.

Будем считать, что один конец стержня, например при s = 0, закреплен, второй – свободен и не нагружен. Тогда главные граничные условия для вариационной задачи поиска точки стационарности функционала L:

$$\mathrm{L}\rightarrow стац \tag{26}$$

будут иметь вид:

$$\begin{cases}\mathrm{r}(0) = \boldsymbol{R}(0)\\ \varphi(0) = 0\end{cases} \tag{27}$$

Статические граничные условия на свободном конце стержня имеют вид:

$$\begin{aligned}&\mathrm{m}(l) = 0 \quad\Leftrightarrow\quad \mathrm{M}(l) = 0\\ &\mathrm{f}(l) = 0 \quad\Leftrightarrow\quad \mathrm{F}(l) = 0\end{aligned} \tag{28}$$

Докажем, что уравнения Эйлера вариационной задачи (26), (27) будут равносильны уравнениям равновесия (25) при условии потенциальности нагрузок, а естественные граничные условия – равносильны граничным условиям (28).

Вариация функционала L имеет вид:

$$\delta\mathrm{L} = \int_0^{l}\left[\frac{\partial\mathrm{W}}{\partial\boldsymbol{E}}\cdot\delta\boldsymbol{E} + \frac{\partial\mathrm{W}}{\partial\boldsymbol{\Gamma}}\cdot\delta\boldsymbol{\Gamma} - \frac{\partial\mathrm{U}_1}{\partial\mathbf{r}}\cdot\delta\mathbf{r} - \frac{\partial\mathrm{U}_2}{\partial\boldsymbol{\varphi}}\cdot\delta\boldsymbol{\varphi}\right]\mathrm{ds}.$$

Вариацию вектора ***Г*** получим из (17), отождествив параметр *β* с дуговой координатой s:

$$\delta\boldsymbol{\Gamma} = \mathrm{P}^{\mathrm{T}}\cdot(\mathrm{Z}\cdot\delta\varphi)'. \tag{29}$$

Вычислим вариацию вектора ***E*** из формулы (21):

$$\delta\boldsymbol{E} = \delta\mathrm{P}^{\mathrm{T}}\cdot\mathrm{r}' + \mathrm{P}^{\mathrm{T}}\cdot\delta\mathrm{r}'.$$

Согласно (9) и (16)

$$\delta\mathrm{P}^{\mathrm{T}} = -(\mathrm{Z}^{\mathrm{T}}\cdot\delta\varphi)\times\mathrm{P}^{\mathrm{T}};$$

$$\delta\mathrm{P}^{\mathrm{T}}\cdot\mathrm{r}' = -(\mathrm{Z}^{\mathrm{T}}\cdot\delta\varphi)\times\mathrm{P}^{\mathrm{T}}\cdot\mathrm{r}' = (\mathrm{P}^{\mathrm{T}}\cdot\mathrm{r}')\times\mathrm{Z}^{\mathrm{T}}\cdot\delta\varphi = (\mathrm{P}^{\mathrm{T}}\cdot\mathrm{r}')\times\mathrm{P}^{\mathrm{T}}\cdot\mathrm{Z}\cdot\delta\varphi = \mathrm{P}^{\mathrm{T}}\cdot(\mathrm{r}'\times\mathrm{Z}\cdot\delta\varphi).$$

Окончательно,

$$\delta\boldsymbol{E} = \mathrm{P}^{\mathrm{T}}\cdot(\delta\mathrm{r}' + \mathrm{r}'\times\mathrm{Z}\cdot\delta\varphi). \tag{30}$$

Используя (24), (29) и (30), первые два слагаемых вариации δL можно записать в виде:

$$\int_0^l [\mathrm{F}\cdot\mathrm{P}^{\mathrm{T}}\cdot(\delta\mathrm{r}'+\mathrm{r}'\times\mathrm{Z}\cdot\delta\varphi)+\mathrm{M}\cdot\mathrm{P}^{\mathrm{T}}\cdot(\mathrm{Z}\cdot\delta\varphi)']ds.$$

В последнем выражении проинтегрируем два слагаемых по частям:

$$\int_0^l \mathrm{F}\cdot\mathrm{P}^{\mathrm{T}}\cdot(\delta\mathrm{r})'\,ds=(\mathrm{P}\cdot\mathrm{F})\cdot\delta\mathrm{r}\big|_0^l-\int_0^l(\mathrm{P}\cdot\mathrm{F})'\cdot\delta\mathrm{r}\,ds;$$

$$\int_0^l \mathrm{M}\cdot\mathrm{P}^{\mathrm{T}}\cdot(\mathrm{Z}\cdot\delta\varphi)'\,ds=(\mathrm{P}\cdot\mathrm{M})\cdot\mathrm{Z}\cdot\delta\varphi\big|_0^l-\int_0^l(\mathrm{P}\cdot\mathrm{M})'\cdot\mathrm{Z}\cdot\delta\varphi\,ds.$$

Так как $\mathrm{F}\cdot\mathrm{P}^{\mathrm{T}}\cdot(\mathrm{r}'\times\mathrm{Z}\cdot\delta\varphi)=(\mathrm{F}\cdot\mathrm{P}^{\mathrm{T}}\times\mathrm{r}')\cdot\mathrm{Z}\cdot\delta\varphi=-(\mathrm{r}'\times\mathrm{P}\cdot\mathrm{F})\cdot\mathrm{Z}\cdot\delta\varphi,$ то вариация δL окончательно запишется в следующем виде:

$$\delta\mathrm{L}=-\int_0^l\left\{\left((\mathrm{P}\cdot\mathrm{F})'+\frac{\partial\mathrm{U}_1}{\partial\mathrm{r}}\right)\cdot\delta\mathrm{r}+\left[\left((\mathrm{P}\cdot\mathrm{M})'+\mathrm{r}'\times\mathrm{P}\cdot\mathrm{F}\right)\cdot\mathrm{Z}+\frac{\partial\mathrm{U}_2}{\partial\varphi}\right]\cdot\delta\varphi\right\}\mathrm{ds}+$$
$$+\left[(\mathrm{P}\cdot\mathrm{M})\cdot\mathrm{Z}\cdot\delta\varphi+(\mathrm{P}\cdot\mathrm{F})\cdot\delta\mathrm{r}\right]\big|_{s=l},$$

так как из (27) следует, что $\delta\mathrm{r}(0)=0,\quad \delta\varphi(0)=0.$

Условие $\delta\mathrm{L}=0$ приводит к следующим уравнениям Эйлера и естественным граничным условиям:

$$\begin{cases}(\mathrm{P}\cdot\mathrm{F})'+\dfrac{\partial\mathrm{U}_1}{\partial\mathrm{r}}=0\\ \left[(\mathrm{P}\cdot\mathrm{M})'+\mathrm{r}'\times\mathrm{P}\cdot\mathrm{F}\right]\cdot\mathrm{Z}+\dfrac{\partial\mathrm{U}_2}{\partial\varphi}=0\end{cases}\qquad(31)$$

$$(\mathrm{P}\cdot\mathrm{M})\cdot\mathrm{Z}\big|_{s=l}=0\qquad(\mathrm{P}\cdot\mathrm{F})\big|_{s=l}=0.\qquad(32)$$

Так как тензор **Z** – неособенный (при Ф ≠ 0 и Ф ≠ π) ([34]), так же как и тензор **P**, то естественные граничные условия (32) равносильны условиям (28). Аналогично, первое уравнение (31) равносильно первому уравнению (25) при условии потенциальности силовой нагрузки $\mathrm{q}=\partial\mathrm{U}/\partial\mathrm{r}$. Второе уравнение (31) будет равносильно второму уравнению (25) при условии

$$\frac{\partial\mathrm{U}_2}{\partial\boldsymbol{\varphi}}=\boldsymbol{\mu}\cdot\mathbf{Z}.\qquad(33)$$

Как показано в работах [37, 38], именно выражение (33) есть условие потенциальности моментной нагрузки.

Таким образом, вариационная постановка (26), (27) не только равносильна уравнениям (25), но и позволяет автоматически получить нетривиальное выражение для потенциальной моментной нагрузки.

Вариационная постановка нелинейных задач для среды Коссера (моментной теории упругости)

При материальном (лагранжевом) описании каждая точка среды задается тремя координатами x_i в ОК. Кинематические переменные: $\mathbf{r}(x_i;t)$ – радиус-вектор в АК, тензор поворота $\mathbf{P}(x_i;t)$ или вектор поворота $\varphi(x_i;t)$, связанный с тензором $\mathbf{P}$ формулой (1). Векторы $\boldsymbol{\upsilon}$ – линейной и $\boldsymbol{\omega}$ – угловой скоростей определяются по формулам (18).

Ограничимся случаем одинаковой ориентации частиц в ОК, то есть будем считать, что для всех x_i в момент времени $t=0$ справедливы условия $\varphi(x_i;0)=0$ и $\mathbf{P}(x_i;0)=\mathbf{I}$.

Введем обозначения:

$\boldsymbol{\tau},\mathbf{m}$ – тензоры напряжений и моментных напряжений (тензоры типа Коши) в АК;

$\mathbf{e},\mathbf{k}$ – тензоры деформаций растяжения – сдвига и изгиба – кручения;

$\mathbf{f},\boldsymbol{\mu}$ – векторы объемной силовой и моментной нагрузок на единицу объема ОК;

ρ – объемная плотность в ОК;

$\mathbf{J}$ – массовая плотность тензора инерции в АК;

$\nabla=\mathbf{e}_k\dfrac{\partial}{\partial x_k}$ – оператор-градиент в ОК;

$\mathbf{F}=\nabla\mathbf{r}^T$ – градиент деформации;

$J=\det\mathbf{F}$ – определитель тензора $\mathbf{F}$.

Для упругой среды энергия деформации зависит только от деформаций: $W=W(\mathbf{e},\mathbf{k})$, где W – объемная плотность энергии деформации текущего состояния на единицу объема ОК. Тензоры $\boldsymbol{\tau},\mathbf{m}$, $\mathbf{e},\mathbf{k}$ определены в АК [7, 19, 21–23, 25, 39] и не являются энергетически сопряженными, то есть

$$\dot{W}(\mathbf{e},\mathbf{k})\neq\boldsymbol{\tau}^T\cdot\cdot\,\dot{\mathbf{e}}+\mathbf{m}^T\cdot\cdot\,\dot{\mathbf{k}}.$$

При материальном описании необходимо использовать следующие тензоры внутренних усилий [19,23]:

$$\mathbf{T}=J\,\mathbf{F}^{-1}\cdot\boldsymbol{\tau}\cdot\mathbf{P},\ \mathbf{M}=J\,\mathbf{F}^{-1}\cdot\mathbf{m}\cdot\mathbf{P}. \tag{34}$$

Как показано в [19, 23, 25], энергетически сопряженными к тензорам (34) являются тензоры деформации $\mathbf{E},\mathbf{K}$, которые определяются следующим образом:

$$\begin{gathered}\mathbf{E}=\mathbf{F}^T\cdot\mathbf{P}-\mathbf{I};\\ \nabla\,\mathbf{P}^T=-\mathbf{K}\times\mathbf{P}^T,\end{gathered} \tag{35}$$

где $\mathbf{K}=\mathbf{e}_s\mathbf{k}_s$;

векторы $\mathbf{k}_s$ определяются равенствами $\partial\mathbf{P}/\partial x_s=\mathbf{P}\times\mathbf{k}_s \quad\Leftrightarrow\quad \partial\mathbf{P}^T/\partial x_s=-\mathbf{k}_s\times\mathbf{P}^T$.

Из последнего равенства и формулы (3) следует, что $\mathbf{k}_s=\mathbf{Z}^T\cdot\dfrac{\partial\varphi}{\partial x_s}=\dfrac{\partial\varphi}{\partial x_s}\cdot\mathbf{Z}$, откуда получаем следующее выражение тензора $\mathbf{K}$ через вектор φ:

$$\mathbf{K}=\nabla\varphi\cdot\mathbf{Z}. \tag{36}$$

В работе [23] доказано, что введенные тензоры усилий (34) и деформаций (35) удовлетворяют равенству

$$\dot{W}(\mathbf{e},\mathbf{k})=\mathbf{T}^T\cdot\cdot\,\dot{\mathbf{E}}+\mathbf{M}^T\cdot\cdot\,\dot{\mathbf{K}}. \tag{37}$$

Как показано в [23], из равенства (37) вытекает следующая запись физических уравнений для нелинейно упругого материала:

$$\mathbf{T}=\frac{\partial W}{\partial\mathbf{E}}. \tag{38}$$

В лагранжевых координатах уравнения движения имеют вид [23, 39]:

$$\nabla\cdot(J\,\mathbf{F}^{-1}\cdot\boldsymbol{\tau})+\mathbf{f}=\rho\,\dot{\boldsymbol{\upsilon}};$$
$$\nabla\cdot(J\,\mathbf{F}^{-1}\cdot\mathbf{m})+J\,\boldsymbol{\tau}_x+\boldsymbol{\mu}=\rho(\mathbf{J}\cdot\boldsymbol{\omega})^{\bullet}.$$

В дальнейшем будем рассматривать статические задачи, правые части уравнений движения будут равны нулю и уравнения равновесия, записанные с использованием тензоров (34), примут вид:

$$\nabla\cdot(\mathbf{T}\cdot\mathbf{P}^T)+\mathbf{f}=0,$$
$$\nabla\cdot(\mathbf{M}\cdot\mathbf{P}^T)+(\mathbf{F}\cdot\mathbf{T}\cdot\mathbf{P}^T)_x+\boldsymbol{\mu}=0. \qquad (39)$$

Рассмотрим тело, занимавшее в ОК объем V, ограниченный поверхностью $S=S_1+S_2$. На части поверхности S_1 заданы условия закрепления:

$$\mathbf{r}\big|_{S_1}=0;\ \varphi\big|_{S_1}=0.$$

На части поверхности S_2 тело свободно и не нагружено: $\mathbf{n}\cdot\boldsymbol{\tau}\big|_{S_2^*}=0$, $\mathbf{n}\cdot\mathbf{m}\big|_{S_2^*}=0$, где $\mathbf{n}$ – единичный вектор внешней нормали к поверхности тела в АК.

Так как $\mathbf{n}dS^*=J\,\mathbf{N}\cdot\mathbf{F}^{-1}dS$ [40], где dS – элемент поверхности в ОК, который переходит в dS^* в АК, $\mathbf{N}$ – единичная внешняя нормаль к поверхности S, которая переходит в $\mathbf{n}$ в АК, то граничные условия на S_2 можно переписать в виде:

$$J\,\mathbf{N}\cdot\mathbf{F}^{-1}\cdot\boldsymbol{\tau}\big|_{S_2}=0;\ J\,\mathbf{N}\cdot\mathbf{F}^{-1}\cdot\mathbf{m}\big|_{S_2}=0,$$

или с использованием тензоров (34):

$$\mathbf{N}\cdot\mathbf{T}\cdot\mathbf{P}^T\Big|_{S_2}=0;\ \mathbf{N}\cdot\mathbf{M}\cdot\mathbf{P}^T\Big|_{S_2}=0. \qquad (40)$$

Введем функционал

$$L(\mathbf{r},\varphi)=\int_V[W(\mathbf{E},\mathbf{K})-U_1(\mathbf{r})-U_2(\varphi)]\,dV,$$

где $U_1(\mathbf{r})$ – потенциал силовой нагрузки; $U_2(\varphi)$ – потенциал моментной нагрузки.

Рассмотрим вариационную задачу поиска точки стационарности функционала L:

$$L(\mathbf{r},\varphi)\to стац \qquad (41)$$

при условиях (40) (главные граничные условия).

Докажем, что уравнения Эйлера вариационной задачи (40), (41) будут эквивалентны уравнениям (39) при условии потенциальности нагрузок, а естественные граничные условия будут равносильны условиям (40).

Вариация функционала L имеет вид:

$$\boldsymbol{\delta L}=\int_V\Big(\frac{\partial \boldsymbol{W^T}}{\partial\mathbf{E}}\cdot\cdot\,\boldsymbol{\delta}\,\mathbf{E}+\frac{\partial \boldsymbol{W^T}}{\partial\mathbf{K}}\cdot\cdot\,\boldsymbol{\delta}\,\mathbf{K}\Big)-\nabla\boldsymbol{U}_1\cdot\boldsymbol{\delta}\,\mathbf{r}-\frac{\partial\boldsymbol{U}_2}{\partial\boldsymbol{\varphi}}\cdot\boldsymbol{\delta\varphi})\boldsymbol{dV}.$$

Вычислим вариации тензоров деформаций. Из определения тензора $\mathbf{F}$ следует, что $\delta\,\mathbf{F}^T=\nabla\delta\,\mathbf{r}$. Тогда, с учетом (9), из (35) получаем:

$$\delta\,\mathbf{E}=\nabla\delta\,\mathbf{r}\cdot\mathbf{P}+\mathbf{F}^T\cdot\mathbf{P}\times\mathbf{Z}^T\cdot\delta\varphi. \qquad (42)$$

Из определения вектора $\mathbf{k}_s$ и (17) получаем:

$$\delta \mathbf{k}_s = \mathbf{P}^T \cdot \frac{\partial}{\partial x_s}(\mathbf{Z}\cdot\delta\varphi) = \frac{\partial}{\partial x_s}(\mathbf{Z}\cdot\delta\varphi)\cdot\mathbf{P}.$$

Отсюда и из определения тензора $\mathbf{K}$ следует:

$$\delta\mathbf{K} = \nabla(\mathbf{Z}\cdot\delta\varphi)\cdot\mathbf{P}. \tag{43}$$

Теперь первые два слагаемые в δL с учетом (38) можно записать в виде

$$\int_V [\mathbf{T}^T \cdot\cdot(\nabla\delta\mathbf{r}\cdot\mathbf{P} + \mathbf{F}^T\cdot\mathbf{P}\times\mathbf{Z}^T\cdot\delta\varphi) + \mathbf{M}^T \cdot\cdot\nabla(\mathbf{Z}\cdot\delta\varphi)\cdot\mathbf{P}]\,dV. \tag{44}$$

Первое и третье слагаемые в (44) преобразуем с использованием свойства $\mathbf{A}\cdot\cdot(\mathbf{B}\cdot\mathbf{C}) = (\mathbf{C}\cdot\mathbf{A})\cdot\cdot\mathbf{B}$ [40], формулы $\mathbf{A}^T\cdot\cdot\nabla\mathbf{a} = \nabla\cdot(\mathbf{A}\cdot\mathbf{a}) - (\nabla\cdot\mathbf{A})\cdot\mathbf{a}$ [40] и формулы Гаусса – Остроградского $\int_V \nabla\cdot(\mathbf{A}\cdot\mathbf{a})\,dV = \int_S \mathbf{n}\cdot\mathbf{A}\cdot\mathbf{a}\,dS$ [40].

Получим:

$$\int_V \mathbf{T}^T\cdot\cdot(\nabla\delta\mathbf{r}\cdot\mathbf{P})\,dV = \int_V (\mathbf{T}\cdot\mathbf{P}^T)^T\cdot\cdot\nabla\delta\mathbf{r}\,dV = \int_S \mathbf{N}\cdot\mathbf{T}\cdot\mathbf{P}^T\cdot\delta\mathbf{r}\,dS - \int_V \nabla\cdot(\mathbf{T}\cdot\mathbf{P}^T)\cdot\delta\mathbf{r}\,dV,$$

$$\int_V \mathbf{M}^T\cdot\cdot\nabla(\mathbf{Z}\cdot\delta\varphi)\cdot\mathbf{P}\,dV = \int_V (\mathbf{M}\cdot\mathbf{P}^T)^T\cdot\cdot\nabla(\mathbf{Z}\cdot\delta\varphi)\,dV = \int_S \mathbf{N}\cdot\mathbf{M}\cdot\mathbf{P}^T\cdot\mathbf{Z}\cdot\delta\varphi\,dS -$$
$$- \int_V \nabla\cdot(\mathbf{M}\cdot\mathbf{P}^T)\cdot\mathbf{Z}\cdot\delta\varphi\,dV.$$

При преобразовании второго слагаемого в (44) используем следующие свойства [23]:

$$\mathbf{A}_x^T = -\mathbf{A}_x,$$
$$\mathbf{A}\cdot\cdot(\mathbf{B}\times\mathbf{a}) = (\mathbf{A}\cdot\mathbf{B})_x\cdot\mathbf{a},\ (\mathbf{P}^T\cdot\mathbf{A}\cdot\mathbf{P})_x = \mathbf{A}_x\cdot\mathbf{P} \text{ и } \mathbf{P}\cdot\mathbf{Z}^T = \mathbf{Z}.$$

Получим:

$$\mathbf{T}^T\cdot\cdot(\mathbf{F}^T\cdot\mathbf{P}\times\mathbf{Z}^T\cdot\delta\varphi) = (\mathbf{T}^T\cdot\mathbf{F}^T\cdot\mathbf{P})_x\cdot\mathbf{Z}^T\cdot\delta\varphi = -(\mathbf{P}^T\cdot\mathbf{F}\cdot\mathbf{T})_x\cdot\mathbf{Z}^T\cdot\delta\varphi =$$
$$= -(\mathbf{F}\cdot\mathbf{T}\cdot\mathbf{P}^T)_x\cdot\mathbf{P}\cdot\mathbf{Z}^T\cdot\delta\varphi = -(\mathbf{F}\cdot\mathbf{T}\cdot\mathbf{P}^T)_x\cdot\mathbf{Z}\cdot\delta\varphi.$$

Так как $\delta\mathbf{r}\big|_{S_1} = 0$, $\delta\varphi\big|_{S_1} = 0$, то окончательно вариация δL запишется в виде

$$\delta L = \int_{S_2} (\mathbf{N}\cdot\mathbf{T}\cdot\mathbf{P}^T\cdot\delta\mathbf{r} + \mathbf{N}\cdot\mathbf{M}\cdot\mathbf{P}^T\cdot\mathbf{Z}\cdot\delta\varphi)\,dS_2 -$$

$$- \int_V [(\nabla\cdot(\mathbf{T}\cdot\mathbf{P}^T) + \nabla U_1)\cdot\delta\mathbf{r} - [(\nabla\cdot(\mathbf{M}\cdot\mathbf{P}^T) + (\mathbf{F}\cdot\mathbf{T}\cdot\mathbf{P}^T)_x)\cdot\mathbf{Z} + \frac{\partial U_2}{\partial\varphi}]\cdot\delta\varphi]\,dV.$$

Условие $\delta L = 0$ при любых $\delta\mathbf{r}$ и $\delta\varphi$ приводит к следующим уравнениям Эйлера и естественным граничным условиям:

$$\nabla\cdot(\mathbf{T}\cdot\mathbf{P}^T) + \nabla U_1 = 0,\ [\nabla\cdot(\mathbf{M}\cdot\mathbf{P}^T) + (\mathbf{F}\cdot\mathbf{T}\cdot\mathbf{P}^T)_x]\cdot\mathbf{Z} + \frac{\partial U_2}{\partial\varphi} = 0, \tag{45}$$

$$\mathbf{N}\cdot\mathbf{T}\cdot\mathbf{P}^T\Big|_{S_2} = 0,\ \mathbf{N}\cdot\mathbf{M}\cdot\mathbf{P}^T\cdot\mathbf{Z}\Big|_{S_2} = 0. \tag{46}$$

Условия (46) равносильны условиям (40). Первое уравнение (45) равносильно первому уравнению (39) при условии потенциальности силовой нагрузки: $\mathbf{f} = \nabla U_1$. Второе уравнение (45) равносильно второму уравнению (39) при условии потенциальности моментной нагрузки: $\dfrac{\partial U_2}{\partial \varphi} = \boldsymbol{\mu} \cdot \mathbf{Z}$, аналогично условию (33).

Заключение

В работе даны постановки геометрически и физически нелинейных задач для упругих стержней Коссера – Тимошенко и упругой среды Коссера. Использованы энергетически сопряженные внутренние усилия и деформации. Даны вариационные формулировки в виде задач поиска точки стационарности соответствующих функционалов. Доказана эквивалентность на гладких решениях вариационных и дифференциальных постановок. Показано, что вариационные постановки автоматически приводят к правильному выражению для потенциальной моментной нагрузки.

Полученные результаты являются важными для построения алгоритмов метода конечных элементов при численном решении нелинейных задач, а также для постановки и решения задач устойчивости равновесия.

Литература

1. Голоскоков Д.П., Жилин П.А. Общая нелинейная теория упругих стержней с приложением к описанию эффекта Пойнтинга / Депонировано ВИНИТИ №1912-В87 Деп. 20 с.
2. Crisfield M.A. Non-linear Finite Element Analysis of Solids and structures. Vol. 2. Wiley: Chichester, 1977.
3. Simo J.C., Vu-Quoc L. A three-dimensional finite-strain rod model. Part II: Geometric and computational aspects // Computer Methods In Applied Mechanics and Engineering. 1986. Vol. 58. Issue 1. Pp. 79–116.
4. Simo J.C., Vu-Quoc L. On the dynamics in space of rods undergoing large motions – a geometrically exact approach // Computer Methods In Applied Mechanics and Engineering. 1988. Vol. 66. Pp.125–161.
5. Елисеев В.В. Механика упругих стержней. СПб.: Изд-во СПбГПУ, 1994. 88с.
6. Jelenic G., Crisfield M.A. Geometrically exact 3D beam theory: implementation of a strain – invariant finite element for static and dynamics // Comp. Meths. Appl. Mech. Engng. 1999. №171. Pp. 141–171.
7. Rubin M.B. Cosserat theories: shells, rods and points. Dordrecht: Kluwer Acad. Publ., 2000. 408 p.
8. Лалин В.В. Различные формы уравнений нелинейной динамики упругих стержней // Труды СПбГПУ. №489. СПб.: Изд-во СПбГПУ, 2004. С. 121–128.
9. Gerstmayr J., Shabana A.A. Analysis of thin beams and cables using the absolute nodal coordinate formulation // Nonlinear Dyn. 2006. №45(1–2). Pp. 109–130.
10. Makinen J. Total Lagrangian Reissner's geometrically exact beam element without singularities // Int. J. Numer. Meth. Engng. 2007. Pp. 1009–1048.
11. Жилин П.А. Прикладная механика. Теория упругих тонких стержней. СПб.: Изд-во СПбГПУ, 2007. 102 с.
12. Бровко Г.Л., Иванова О.А. Моделирование свойств и движений неоднородного одномерного континуума сложной микроструктуры типа Коссера // Известия РАН. МТТ. 2008. №1. С. 22–36.
13. Галишникова В.В. Вывод разрешающих уравнений задачи нелинейного деформиирования пространственных ферм на основе унифицированного подхода // Вестник ВолгГАСУ, Серия: Строительство и архитектура. Волгоград. 2009. Вып. 14(33). С. 39–49.
14. Ibrahimbegovic A. Nonlinear Solid Mechanics. Springer Science+Business Media B.V, 2009. 585 p.
15. Iesan D. Classical and Generalized Models of Elastic Rods. Boca Raton.CRC Press, 2009. 369 p.
16. Lang H., Linn J. Lagrangian fields theory in space – time for geometrically exact Cosserat rods. Preprint: Berichte des ITWM Kaiserslautern, 2009.
17. Bauchau O.A. Flexible Multibody Dynamics. Springer, 2010. 728 p.
18. Xiao N., Zhong H. Non-linear quadrature element analysis of planar frames based on geometrically exact beam theory // Int. J. Non-Lin. Mech. 2012. Vol. 47. Pp. 481–488.

19. Eremeyev V.A., Lebedev L.P., Altenbach H. Foundations of Micropolar Mechanics. New York. Springer, 2013. 145 p.
20. Zienkiewicz O.C., Taylor R.L., Fox D.D. The Finite Element Method for Solis and Structural Mechanics. Elsevier. 2014. 624 p.
21. Kafadar C.B., Eringen A.C. Micropolar media – I. The classical theory // Int. J. Engng. Sci. 1971. Vol. 9. Pp. 271–305.
22. Eringen A.C. Microcontinuum Field Theory I. Foundations and solids. New York. Springer, 1999. 325 p.
23. Лалин В.В. Уравнения нелинейной динамики моментной упругой среды // Научно – технические ведомости СПбГПУ. 2007. №49. С. 97–105.
24. Кулеш М.А., Матвеенко В.П., Шардаков И.Н. Волны в упругой среде Коссера // Математическое моделирование систем и процессов. 2008. №16. С. 64–75.
25. Pictraszkiewicz W., Eremeyev V.A. On vectorially parametrized natural strain measures of the non-linear Cosserast continuum // Int. J. Solids Struct. 2009. №46(11–12). Pp. 2477–2480.
26. Кулеш М.А., Грекова Е.Ф., Шардаков И.Н. Задача о распространении поверхностной волны в редуцированной среде Коссера // Акустический журнал. 2009.Т. 55, №2. С. 216–225.
27. Grekova E.F., Kulesh M.A., Herman G.C. Waves in linear elastic media with microrotations, part 2: Isotropic reduced Cosserat model// Bulletin of the Seismological Society of America. 2009. 99 (2 B). Pp. 1423–1428.
28. Grekova E.F. Nonlinear isotropic elastic reduced Cosserat continuum as a possible model for geomedium and geomaterials. Spherical prestressed state in the semilinear material // Journal of seismology. 2012. Vol. 16, issue 4. Pp. 695–707.
29. Lalin V., Zdanchuk E. Nonlinear thermodynamic model for reduced Cosserat continuum // International Journal of Mathematical Models and Methods in Applied Sciences. 2014. Vol. 8. Pp. 208–213.
30. Antman S.S. Nonlinear problems of elasticity. Berlin Heidelberg New York. Springer, 2005. 835 p.
31. Shabana A.A. Computational continuum mechanics. Cambridge University Press, 2008. 349 p.
32. Wriggers P. Nonlinear finite element methods. Springer – Verlag Berlin Heidelberg, 2008. 566 p.
33. Krenk S. Non-linear modeling and analysis of solids and structures. Cambridge University Press, 2009. 361 p.
34. Жилин П.А. Векторы и тензоры второго ранга в трехмерном пространстве. СПб.: Нестор, 2001. 276 с.
35. Zhilin P.A. A new Approach to the Analysis of Free Rotations of Rigid Bodies // ZAMM – Journal of Applied Mathematics and Mechanics. 1996. №4. Pp. 187–204.
36. Borri M., Mello F., Atluri S.N. Variational approach for dynamics and time-finite-element: numerical studies // Computational Mechanics. 1990. No. 7(1). Pp. 49–76.
37. Исполов Ю.Г., Сливкер В.И. О консервативной моментной нагрузке // Строительная механика и расчет сооружений. 2007. №1. С. 61–67.
38. Перельмутер А.В., Сливкер В.И. Устойчивость равновесия конструкций и родственные проблемы. Т. 1. М.: Изд-во СКАД СОФТ, 2010. 704 с.
39. Елисеев В.В. Механика упругих тел. СПб. Изд-во: СПбГПУ. 2003. 336 с.
40. Lurie A.I. Nonlinear theory of elasticity. Amsterdam: North-Holland, 1990. 617 p.

Владимир Владимирович Лалин, Санкт-Петербург, Россия
Тел. моб.: +7(921)3199878; эл. почта: vllalin@yandex.ru

Елизавета Викторовна Зданчук, Санкт-Петербург, Россия
Тел. моб.: +7(905)2518113; эл. почта: zelizaveta@yandex.ru

Дарья Александровна Кушова, Санкт-Петербург, Россия
Тел. моб.: +7(911)1908859; эл. почта: dasha_kushova@mail.ru

Леонид Александрович Розин, Санкт-Петербург, Россия
Тел. раб.: +7(812)552-60-87; эл. почта: smitu@cef.spbstu.ru

doi: 10.5862/MCE.56.7

Variational formulations for non-linear problems with independent rotational degrees of freedom

V.V. Lalin,
Peter the Great St. Petersburg Polytechnic University
+7(921)3199878; e-mail: vllalin@yandex.ru
E.V. Zdanchuk,
Peter the Great St. Petersburg Polytechnic University
+7(905)2518113; e-mail: zelizaveta@yandex.ru
D.A. Kushova,
Peter the Great St. Petersburg Polytechnic University
+7(911)1908859; e-mail: dasha_kushova@mail.ru
L.A. Rozin,
Peter the Great St. Petersburg Polytechnic University
+7(812)552-60-87; e-mail: smitu@cef.spbstu.ru

Key words

independent rotational degrees of freedom; geometrically exact theory of Cosserat rods; nonlinear Cosserat continuum

Abstract

We consider the geometrically and physically nonlinear theory of elastic rods (Cosserat – Timoshenko rods) and the elastic Cosserat medium. These theories consider independent translational and rotational degrees of freedom. Systems of differential equations for these theories are well known. In this paper we obtain the variational formulation of static problems for these theories.

The variational problem was defined as a problem of searching for the stationary points of functionals. The variational functionals are important for the correct formulation of finite element method algorithms for nonlinear problems, as well as for the formulation and solution of stability problems.

References

1. Goloskokov D.P., Zhilin P.A. *Obshchaya nelineynaya teoriya uprugikh sterzhney s prilozheniyem k opisaniyu effekta Poyntinga* [General nonlinear theory of elastic rods with application to the description of the Poynting]. Deponirovano VINITI №1912-V87 Dep. 20 p.
2. Crisfield M.A. *Non-linear Finite Element Analysis of Solids and structures. Vol. 2.* Wiley: Chichester, 1977.
3. Simo J.C., Vu-Quoc L. A three-dimensional finite-strain rod model. Part II: Geometric and computational aspects. *Computer Methods In Applied Mechanics and Engineering*. 1986. Vol. 58. Issue 1. Pp .79–116.
4. Simo J.C., Vu-Quoc L. On the dynamics in space of rods undergoing large motions – a geometrically exact approach. *Computer Methods In Applied Mechanics and Engineering*. 1988. Vol. 66. Pp. 125–161.
5. Yeliseyev V.V. Mekhanika uprugikh sterzhney [Mechanics of elastic rods]. Saint - Petersburg: Izd-vo SPbGPU, 1994. 88 p. (rus)
6. Jelenic G., Crisfield M.A. Geometrically exact 3D beam theory: implementation of a strain – invariant finite element for static and dynamics. *Comp. Meths. Appl. Mech. Engng*. 1999. No. 171. Pp. 141–171.
7. Rubin M.B. *Cosserat theories: shells, rods and points*. Dordrecht: Kluwer Acad. Publ., 2000. 408 p.
8. Lalin V.V. Razlichnyye formy uravneniy nelineynoy dinamiki uprugikh sterzhney [Various forms of the equations of nonlinear dynamics of elastic rods]. *Trudy SPbGPU*. No 489. Saint-Petersburg: Izd-vo SPbGPU, 2004. Pp. 121–128. (rus)
9. Gerstmayr J., Shabana A.A. Analysis of thin beams and cables using the absolute nodal coordinate formulation. *Nonlinear Dyn*. 2006. No.45(1-2). Pp. 109–130.
10. Makinen J. Total Lagrangian Reissner's geometrically exact beam element without singularities. *Int. J. Numer. Meth. Engng*. 2007. Pp. 1009–1048.
11. Zhilin P.A. *Prikladnaya mekhanika. Teoriya uprugikh tonkikh sterzhney* [Applied Mechanics. Theory of thin elastic rods]. Saint - Petersburg: Izd-vo SPbGPU, 2007. 102 p. (rus)
12. Brovko G.L., Ivanova O.A. Modelirovaniye svoystv i dvizheniy neodnorodnogo odnomernogo kontinuuma slozhnoy mikrostruktury tipa Kossera [Modelling of the properties and motions of an inhomogeneous one-

dimensional continuum of complex microstructures such as Cosserat]. *Izvestiya RAN. MTT*. 2008. No.1. Pp. 22–36. (rus)

13. Galishnikova V.V. Vyvod razreshayushchikh uravneniy zadachi nelineynogo deformiirovaniya prostranstvennykh ferm na osnove unifitsirovannogo podkhoda [Derivation of governing equations of non-linear deformation of spatial trusses based on a unified approach]. *Vestnik VolgGASU, seriya: Stroitelstvo i arkhitektura*. Volgograd. 2009. No. 14(33). Pp. 39–49. (rus)
14. Ibrahimbegovic A. *Nonlinear Solid Mechanics.* Springer Science+Business Media B.V, 2009. 585p.
15. Iesan D. *Classical and Generalized Models of Elastic Rods*. Boca Raton.CRC Press, 2009.
16. Lang H., Linn J. *Lagrangian fields theory in space – time for geometrically exact Cosserat rods*. Preprint: Berichte des ITWM Kaiserslautern, 2009.
17. Bauchau O.A. *Flexible Multibody Dynamics*. Springer, 2010. 728 p.
18. Xiao N., Zhong H. Non-linear quadrature element analysis of planar frames based on geometrically exact beam theory. *Int. J. Non-Lin. Mech.* 2012. Vol. 47. Pp. 481–488.
19. Eremeyev V.A., Lebedev L.P., Altenbach H. *Foundations of Micropolar Mechanics*. New York. Springer, 2013. 145 p.
20. Zienkiewicz O.C., Taylor R.L., Fox D.D. *The Finite Element Method for Solis and Structural Mechanics*. Elsevier. 2014. 624 p.
21. Kafadar C.B., Eringen A.C. Micropolar media – I. The classical theory. *Int. J. Engng. Sci.* 1971. Vol. 9. Pp. 271–305.
22. Eringen A.C. *Microcontinuum Field Theory I. Foundations and solids.* New York. Springer, 1999. 325 p.
23. Lalin V.V. Uravneniya nelineynoy dinamiki momentnoy uprugoy sredy [The equations of the nonlinear dynamics of elastic medium of the moment]. *Nauchno – tekhnicheskiye vedomosti SPbGPU*. 2007. №49. Pp. 97–105. (rus)
24. Kulesh M.A., Matveenko V.P., Shardakov I.N. Volny v uprugoy srede Kossera. [Waves in elastic Cosserat medium]. *Matematicheskoye modelirovaniye sistem i protsessov*. 2008. No16. Pp. 64–75. (rus)
25. Pictraszkiewicz W., Eremeyev V.A. On vectorially parametrized natural strain measures of the non-linear Cosserast continuum. *Int. J. Solids Struct.* 2009. №46(11-12). Pp. 2477–2480.
26. Kulesh M.A., Grekova E.F., Shardakov I.N. Zadacha o rasprostranenii poverkhnostnoy volny v redutsirovannoy srede Kossera [The problem of propagation of a surface wave in the reduced Cosserat medium]. *Akusticheskij zhurnal*. 2009. Vol. 55, No.2. Pp. 216–225. (rus)
27. Grekova E.F., Kulesh M.A., Herman G.C. Waves in linear elastic media with microrotations, part 2: Isotropic reduced Cosserat model. *Bulletin of the Seismological Society of America*. 2009. 99 (2 B). Pp. 1423–1428.
28. Grekova E.F. Nonlinear isotropic elastic reduced Cosserat continuum as a possible model for geomedium and geomaterials. Spherical prestressed state in the semilinear material. *Journal of seismology*. 2012. Vol. 16, issue 4. Pp. 695–707.
29. Lalin V., Zdanchuk E. Nonlinear thermodynamic model for reduced Cosserat continuum. International *Journal of Mathematical Models and Methods in Applied Sciences*. 2014. Vol. 8. Pp. 208–213.
30. Antman S.S. *Nonlinear problems of elasticity*. Berlin Heidelberg New York. Springer, 2005. 835 p.
31. Shabana A.A. *Computational continuum mechanics*. Cambridge University Press, 2008. 349 p.
32. Wriggers P. *Nonlinear finite element methods*. Springer – Verlag Berlin Heidelberg, 2008. 566 p.
33. Krenk S. *Non-linear modeling and analysis of solids and structures*. Cambridge University Press, 2009. 361 p.
34. Zhilin P.A. *Vektory i tenzory vtorogo ranga v trekhmernom prostranstve* [Vectors and second-rank tensors in three-dimensional space]. Saint - Petersburg: Nestor, 2001. 276 p. (rus)
35. Zhilin P.A. A new Approach to the Analysis of Free Rotations of Rigid Bodies. *ZAMM. Z. angew. Math. Mech*. 1996. No.4. Pp. 187–204.
36. Borry M., Mello F., Atluri S.N. Variational approach for dynamics and time-finite-element: numerical studies. *Computational Mechanics*. 1991. Pp. 49–76.
37. Ispolov Ju.G., Slivker V.I. O konservativnoy momentnoy nagruzke [On the conservative moment loads]. *Stroitelnaya mekhanika i raschet sooruzheniy*. 2007. No 1. Pp. 61–67. (rus)
38. Perelmuter A.V., Slivker V.I. *Ustoychivost ravnovesiya konstruktsiy i rodstvennyye problemy* [Stability of equilibrium structures and related problems]. Vol. 1. Moscow: SKAD SOFT, 2010. 704 p. (rus)
39. Yeliseyev V.V. *Mekhanika uprugikh tel* [The mechanics of elastic bodies]. SPb. Izd-vo: SPbGPU. 2003. 336 p. (rus)
40. Lurie A.I. *Nonlinear theory of elasticity*. Amsterdam: North-Holland, 1990. 617 p.

Full text of this article in Russian: pp. 54–65