DOI: 10.5862/JPM.225.16
УДК 519.216

А.В. Денисов, А.А. Синцов
Санкт-Петербургский политехнический университет Петра Великого

КАНОНИЧЕСКОЕ РАЗЛОЖЕНИЕ ФЛУКТУАЦИОННЫХ ПОМЕХ С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ ФОРМАЛИЗМА ДЕЛЬТА-ФУНКЦИИ

На основании формализма обобщенных функций получено каноническое разложение нормальных флуктуационных помех, реализации которых могут быть не только положительнозначными, но и осциллирующими. Во втором случае за время действия отдельной помехи несколько раз происходит смена знака у соответствующей ей физической величины, причем в обоих случаях каноническое разложение представляет собой разложение по квазибелому шуму.

КАНОНИЧЕСКОЕ РАЗЛОЖЕНИЕ, НОРМАЛЬНАЯ ФЛУКТУАЦИОННАЯ ПОМЕХА, УЗКОПОЛОСНАЯ ФЛУКТУАЦИОННАЯ ПОМЕХА, ОБОБЩЕННАЯ ФУНКЦИЯ.

Введение

Данная работа посвящена нахождению канонического разложения флуктуационных помех, действующих на радиоприемные устройства; при этом реализация отдельной помехи задается как функция на финитном носителе либо с фиксированным знаком (рис. 1, *a*), либо знакопеременной (осциллирующей) (рис. 1, *b*). В теории случайных процессов, как хорошо известно, каноническим разложением случайного процесса называют его представление в виде ряда, состоящего из произведений случайных величин на детерминированные функции времени. Этот ряд сходится к исходному случайному процессу в среднем квадратическом. Математическое обоснование канонического разложения случайных функций было получено К. Каруненом и М. Лоевом, а также В.С. Пугачёвым (библиографический список по этой тематике содержится в книге [1]).

Задача спектрального разложения случайных процессов, рассматриваемая в данной статье, тесно связана лишь с работой [2], в которой В.А. Котельников привел разложение в ряд Фурье нормальных флуктуационных помех [2], действующих на протяжении «достаточно большого» времени наблюдения. Помехи представлены в виде произведений стандартизованных гауссовских некоррелированных случайных величин на синусы и косинусы кратных аргументов с основным периодом, равным времени наблюдения. Напомним, что в работе [2] нормальные флуктуационные помехи охарактеризованы как некоторые случайные положительнозначные импульсы, которые могут поступать на вход радиотехнических систем в результате действия различных природных факторов (разрядов молнии и пр.). При этом случайный характер помех определялся тремя факторами: случайным временем появления импульсов, случайным значением площади под графиком каждого такого импульса, а также случайным их количеством за фиксированный интервал наблюдения T Последний значительно превосходит некоторую эффективную (среднюю) длительность импульсов. В работе [2] спектрально-ортогональное разложение такого случайного процесса на временном промежутке длительностью T по тригонометрическому базису получено на основании центральной предельной теоремы (ЦПТ), а также теоремы о среднем значении из интегрального исчисления. Для применения второй из них как раз требовалось, чтобы каждая помеха представляла собой реализацию знакопостоянной [2] непрерывной случайной функции. Если априорно задать автокорреляционную функцию такого случайного стационарного процесса в виде дельта-функции, то на основании хорошо

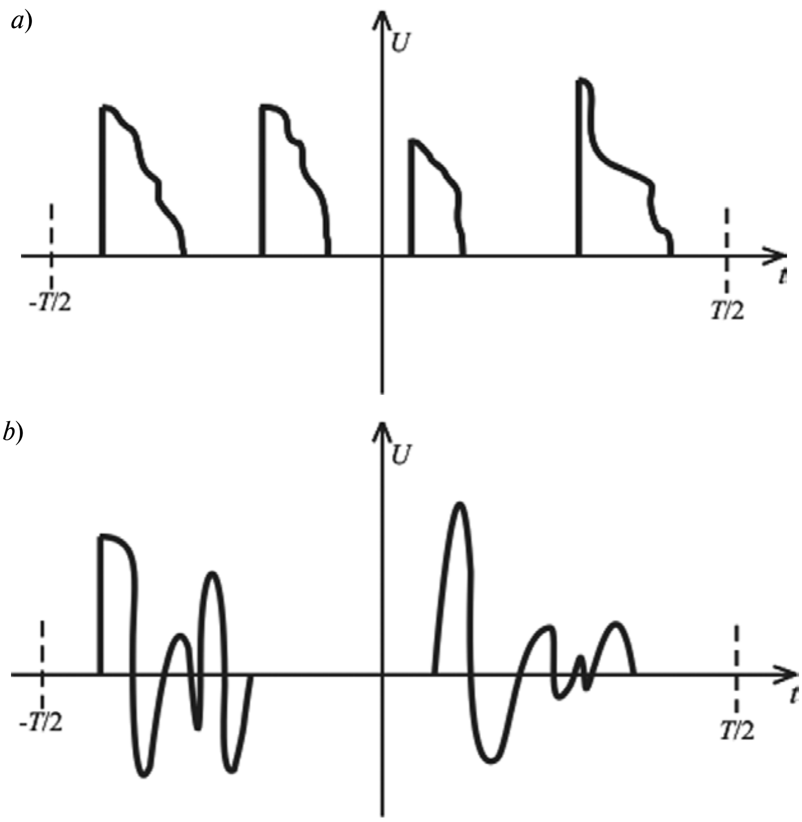

Рис. 1. Графическое представление способов задания отдельной помехи $U(t)$ на временном интервале $[-T/2,\ T/2]$ в виде функции на финитном носителе: a – с фиксированным (положительным в данном примере) знаком, b – в виде знакопеременной функции

известной формулы Винера – Хинчина мы получаем постоянное значение спектральной плотности мощности процесса, что элементарно вытекает из полученного автором канонического разложения.

Мы отдаем должное заслугам В.А. Котельникова в становлении статистической радиотехники и радиофизики и считаем необходимым отметить ради исторической справедливости, что в своей монографии [2] он между прочими выкладками получил пример канонического разложения, хотя термин «канонический» вошел в лексику радиотехников несколько позднее. Независимо от В.А. Котельникова и практически одновременно с ним рассмотрел аналогичное разложение О. Райс. Их исследования в области радиофизики нашли затем применение С.М. Рытовым, Л.А. Черновым и другими учеными, в том числе при аналитическом задании случайной составляющей электронной плотности применительно к задаче о распространении волн в случайно-неоднородных средах.

В первом разделе нашей работы мы не приводим новых результатов, а фактически получаем на несколько другом математическом языке выкладки В.А. Котельникова в задаче, которую он рассмотрел во второй главе своей монографии [2]. При получении канонического разложения мы будем брать за основу формализм обобщенных функций, а также центральную предельную теорему. Будем полагать, что для ее применения выполняется либо условие Ляпунова [3, 4], либо условие Линдеберга [4]. Как хорошо известно, условие Линдеберга соблюдается для последовательности независимых и одинаково распределенных случайных величин с конечными дисперсиями [4]. Мы считаем, что проще использовать формализм обобщенных функций, чем обычный математический анализ [2].

Во втором разделе, опираясь на формализм дельта-функции, мы получаем каноническое разложение флуктуационных помех для случая, когда указанные помехи имеют осциллирующий характер. При этом за время действия отдельной помехи несколько раз происходит смена знака у соответствующей ей физической величины (например, напряжения). Этот результат, с нашей точки зрения, является новым.

В том же втором разделе, не умаляя общности, мы рассматриваем узкополосные случайные гауссовские помехи («микровсплески») и находим каноническое разложение «кортежа» таких помех за достаточно большой промежуток времени T. Для этой задачи подход, предпринятый в работе [2], где использована теорема о среднем значении, непригоден из-за осциллирующего характера случайной функции, входящей под знак интеграла. Однако формализм обобщенных функций позволяет легко получить аналитическое представление такого случайного процесса, причем его каноническое разложение также представляет собой разложение по белому шуму. Важно подчеркнуть, что в обоих разделах каноническое разложение выполнено с использованием формализма обобщенных функций.

Каноническое разложение нормальных флуктуационных помех

Рассмотрим фиксированный отрезок времени $[-T/2,\ T/2]$ и выберем на нем N случайных точек $t_l (l = \overline{1, N})$, имеющих равномерное распределение. Сначала ограничимся рассмотрением только одного такого случайного эксперимента, в котором число N будем считать фиксированным (не случайным). Затем, рассмотрев множество реализаций, проведем усреднение по ансамблю реализаций. Точки будем нумеровать в порядке их «бросания» на этот отрезок, а не в возрастающем порядке. В каждой точке t_l зададим помеху $U_l(t)$ в виде $q_l\delta(t - t_l)$, так что на промежутке $[-T/2,\ T/2]$ флуктуационную помеху $U(t)$ зададим в виде

$$U(t) = \sum_{l=1}^{N} q_l \delta(t - t_l), \tag{1}$$

где площадь q_l под графиком каждого импульса будем считать случайной величиной.

Полагаем, что случайные величины q_l и t_l являются статистически независимыми [5]. Разложим функцию (1) в ряд Фурье на промежутке $[-T/2,\ T/2]$:

$$\begin{gathered} U(t) = \sum_{k=0}^{\infty} A_k \cos\left(\frac{2\pi}{T}kt\right) + \\ + \sum_{k=1}^{\infty} B_k \sin\left(\frac{2\pi}{T}kt\right), \end{gathered} \tag{2}$$

$$A_0 = \frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} U(t)\,dt, \tag{3}$$

$$A_k = \frac{2}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} U(t)\cos\left(\frac{2\pi}{T}kt\right)dt \ \ (k \ge 1), \tag{4}$$

$$B_k = \frac{2}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} U(t)\sin\left(\frac{2\pi}{T}kt\right)dt. \tag{5}$$

Ясно, что замена отдельной l-й помехи, действующей в течение «короткого» промежутка времени Δt_l на дельта-функцию, приводит к ограничению на номер высшей гармоники в разложении (2); иначе говоря, должно выполняться следующее неравенство:

$$\frac{T}{2\pi k} >> \max_l(\Delta_l) \equiv \Delta. \tag{6}$$

Максимальное значение индекса k в разложении (2), удовлетворяющее ограничению (6), обозначим $k_{\max}$. Таким образом, формулы (4), (5) дадут правильные выражения для коэффициентов разложения шума (1) только до гармоники с номером $k = k_{\max}$. Введем обозначения:

$$C_l^{(k)} = \cos\left(\frac{2\pi}{T}kt_l\right),\ \ S_l^{(k)} = \sin\left(\frac{2\pi}{T}kt_l\right)$$

и запишем иначе коэффициенты (3) – (5) для функции (1):

$$\begin{gathered} A_0 = \frac{1}{T}\sum_{l=1}^{N} q_l,\ \ A_k = \frac{2}{T}\sum_{l=1}^{N} q_l C_l^{(k)}, \\ B_k = \frac{2}{T}\sum_{l=1}^{N} q_l S_l^{(k)},\ \ k = \overline{1, k_{\max}}. \end{gathered} \tag{7}$$

Из принятой ранее статистической независимости случайных величин q_l и t_l следует, что величины q_l и C_l, а также q_l и S_l также статистически независимы, так что все моменты $\langle q_l^m X^m \rangle$, где X равно C_l либо S_l, факторизуются следующим образом [5]:

$$\langle q_l^{m_1} X^{m_2} \rangle = \langle q_l^{m_1} \rangle \langle X^{m_2} \rangle, \quad l = \overline{1, N}, \qquad (8)$$

где m_1, m_2 – произвольные натуральные числа.

Математические ожидания случайных величин $C_l^{(k)}$ и $S_l^{(k)}$, в силу равномерного закона распределения случайной величины t_l, равны нулю, а их дисперсии равны 1/2. Обозначим математическое ожидание случайной величины q_l через q_0, а ее дисперсию – σ^2. В соответствии с равенством (8) выразим дисперсии коэффициентов Фурье (7):

$$D(A_0) = \frac{1}{T} N\sigma^2, \quad D(A_k) = D(B_k) = \frac{2}{T^2} N\sigma^2;$$

их математические ожидания следуют выражениям

$$E(A_0) = \frac{1}{T} Nq_0, \quad E(A_k) = E(B_k) = 0.$$

Согласно ЦПТ для независимых случайных величин Y_l, при $N \to \infty$ выражение

$$\frac{\sum_{l=1}^{N} Y_l - \sum_{l=1}^{N} E(Y_l)}{\sqrt{\sum_{l=1}^{N} D(Y_l)}} \qquad (9)$$

стремится к стандартизованной гауссовской случайной величине. Отсюда при $N >> 1$ имеем следующие приближенные равенства:

$$\frac{\sum_{l=1}^{N} q_l - Nq_0}{\sqrt{N\sigma^2}} \approx \theta_0, \quad \frac{\sum_{l=1}^{N} q_l C_l^{(k)}}{\sqrt{\frac{1}{2} N\sigma^2}} \approx \theta_k^{(C)},$$

$$\frac{\sum_{l=1}^{N} q_l S_l^{(k)}}{\sqrt{\frac{1}{2} N\sigma^2}} \approx \theta_k^{(S)},$$

где $\theta_0, \theta_k^{(C)}, \theta_k^{(S)}$ – стандартизованные гауссовские случайные величины.

Отсюда получаем, что частичная сумма ряда (2), содержащая постоянную составляющую и сумму первых $k_{\max}$ гармоник (удовлетворяющих неравенству (6)), в разложении нормальных флуктуационных помех в ряд Фурье на отрезке $[-T/2, T/2]$ будет иметь вид:

$$U = \frac{1}{T} \sqrt{N} \sigma \left\{ \rho_0 + \sqrt{2} \sum_{k=1}^{k_{\max}} \left(\theta_k^{(C)} \cos\left(\frac{2\pi}{T} kt_k \right) + \right.\right.$$
$$\left.\left. + \theta_k^{(S)} \sin\left(\frac{2\pi}{T} kt_k \right) \right) \right\}, \qquad (10)$$

где

$$\rho_0 = \theta_0 + \frac{q_0 \sqrt{N}}{\sigma}. \qquad (11)$$

Для того чтобы получить энергетический спектр $S(w)$ помехи (1) в диапазоне частот $(-\tilde{w}, \tilde{w})$, где $\tilde{w} = \frac{2\pi}{T} k_{\max}$, нужно возвести выражение (10) в квадрат и провести усреднение по ансамблю реализаций. Из выражений (10) и (11) видно, что энергетический дискретный спектр получается неравномерным: при $q_0 \sqrt{N} / \sigma << 1$ спектральная составляющая энергетического спектра на нулевой частоте «проседает» в два раза. В случае, когда $q_0 \sqrt{N} / \sigma >> 1$, спектральная составляющая при нулевой частоте сильно возрастает. Этот результат отсутствовал в работе [2]. Можно думать, что при выборе конечного (не очень большого) числа точек N, в окрестности нулевой частоты будет образовываться «пьедестал». Для энергетического спектра из формулы (10) получаем:

$$S(w) \cong \frac{\sigma^2}{T^2} \langle N \rangle \left\{ \left(1 + \frac{\langle N \rangle}{\sigma^2} D(q_0) \right) \delta(0) + \right.$$
$$\left. + 2 \sum_{-k_{\max}}^{k_{\max}} \delta\left(w - \frac{2\pi}{T} k \right) \right\} \ (k \neq 0),$$

где $\langle N \rangle$ – среднее значение импульсов за время T.

С увеличением T дискретный спектр практически переходит в сплошной.

Каноническое разложение гауссовских узкополосных флуктуационных помех

Рассмотрим теперь ситуацию, когда на

промежутке $[-T/2,\ T/2]$ имеется много помех:

$$U(t) = \sum_{l=1}^{N} U_l(t - t_l),\ N >> 1, \qquad (12)$$

где $U_l(t - t_l)$ – гауссовский стационарный узкополосный случайный процесс с нулевым математическим ожиданием и дисперсий σ^2; t_l – время появления l-й помехи, которая длится за промежуток времени $\Delta t_l << T$ (рис. 2).

Каждую помеху $U_l(t - t_l)$ зададим как периодический в среднеквадратическом [6] случайный процесс с периодом автокорреляционной функции, равным τ, посредством канонического разложения по функциям Уолша:

$$U_l(t - t_l) = \sum_{m=0}^{M} P_m W_m(t), \qquad (13)$$

$$\begin{gathered} W_1(t) = \operatorname{sign}\left(\sin\left(\pi\frac{t}{\tau}\right)\right), \\ W_{2^n}(t) = \operatorname{sign}\left(\cos\left(2^n\pi\frac{t}{\tau}\right)\right), \\ W_{m(\pm)n}(t) = W_m(t)W_n(t), \end{gathered} \qquad (13)$$

где нижний индекс $(m(\pm)n)$ определяется записью m и n в двоичной нотации с последующим сложением их разрядов по модулю 2 [7].

Переходя к формализму дельта-функций, заметим, что на основании формулы (13) можно приближенно считать, что на достаточно малом промежутке

$$\delta = \min\left\{\Delta t_l, \frac{\tau}{M}\right\}$$

функция $U_l(t - t_l)$ принимает значение q_l,

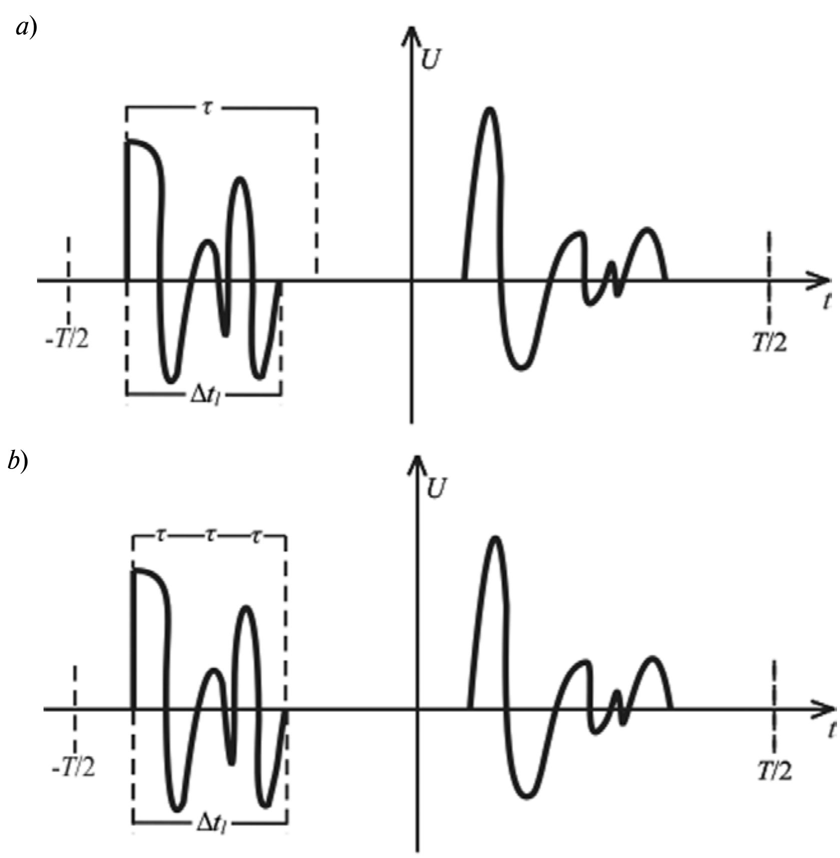

Рис. 2. Графическое представление двух частных случаев способа задания одной из многих помех $U(t)$ на временном интервале $[-T/2,\ T/2]$, которая длится в течение времени Δt_l: a – $\max_l \Delta t_l \le \tau$; b – $\Delta t_l = n_l\tau$ (обозначения величин см. в тексте)

которое является случайной величиной, являющейся линейной комбинацией случайных величин Pm с коэффициентами при них, равными либо плюс, либо минус единице:

$$q_l = \alpha_1^{(l)} P_1 + \alpha_2^{(l)} P_2 + ... + \alpha_M^{(l)} P_M, \quad \left|\alpha_j^{(l)}\right| = 1, j = \overline{1, M}. \tag{14}$$

Рассмотрим два частных случая.

Случай 1. Пусть $\max\limits_l \Delta t_l \le \tau$, то есть период τ (рис. 2, *a*) первой гармоники канонического разложения имеет значение, не меньшее длины носителя любой помехи $U_l(t - t_l)$. В этом случае флуктуационные помехи (12), которые мы намерены далее подвергнуть гармоническому анализу на промежутке длиной T, можно математически задать с помощью дельта-функций:

$$U(t) = \sum_{l=1}^{N} U_l(t) = \sum_{l=1}^{N} q_l \delta(t - t_l), \tag{15}$$

где вид случайных величин q_l определяется формулой (14).

Пусть все помехи $U_l(t - t_l)$ характеризуются нулевым математическим ожиданием и дисперсией σ^2. Математические ожидания случайных величин Pm равны нулю (поскольку математическое ожидание исходного процесса равно нулю), а дисперсия случайной величины q_l, на основании формулы (14), равна сумме дисперсий некоррелированных случайных величин P_j $(j = \overline{1, M})$; следовательно, она равна дисперсии помехи (13) σ^2. Тогда, применяя ЦПТ (как в предыдущем разделе), получим разложение случайного процесса (15) за время T:

$$U = \frac{1}{T}\sqrt{N}\sigma\left\{\theta_0 + \sqrt{2}\sum_{k=1}^{k_{\max}}\left(\theta_k^{(C)} \cos\left(\frac{2\pi}{T} k t_k\right) + \theta_k^{(S)} \sin\left(\frac{2\pi}{T} k t_k\right)\right)\right\}. \tag{16}$$

Случай 2. Рассмотрим теперь ситуацию, когда носитель каждой помехи $\Delta t_l = n_l \tau$, где n_l – натуральное число, большее или равное двум, так что сумма ряда

$$n_1 + n_2 + \cdots + n_N \equiv N_* > N.$$

В этом случае целесообразно осуществить дробление каждого отрезка Δt_l на n_l непересекающихся подинтервалов протяженностью τ (рис. 2, *b*).

На каждом таком подинтервале запишем каноническое представление помехи $U_l(t - t_l)$ в виде (13). Положим, что помехи характеризуются нулевым математическим ожиданием и суммарной дисперсией σ^2 на каждом таком подинтервале длиной τ.

В этом случае σ^2 является средней мощностью случайного процесса за время τ. За время $n_l\tau$ $(n_l > 1)$ средняя мощность будет равна $n_l\sigma^2$. Полагая, что $\max\limits_l n_l << \frac{T}{\tau}$, заменим (с целью получения сходимости в среднем квадратическом) исходный случайный процесс на процесс, который дается выражением, аналогичным по виду выражению (15):

$$U(t) = \sum_{l=1}^{N} q_l^{(\Sigma)} \delta(t - t_l).$$

Очевидно, что каждая случайная величина $q_l^{(\Sigma)}$ характеризуется нулевым математическим ожиданием и дисперсией $n_l\sigma^2$. Суммарная энергия всех помех за время наблюдения T будет выражаться как

$$\sigma_\Sigma^2 = (n_1 + n_2 + \cdots n_N)\sigma^2 \equiv N_*\sigma^2.$$

В этом случае каноническое разложение суммарного действия помех по белому шуму будет иметь вид, сходный с (16), но с точностью до замены в выражении (16) N на N_*.

Некоторые применения полученных формул в задачах о распространении электромагнитных волн

Первая задача касается неравновесных процессов в плазменной радиофизике, когда за счет флуктуации плотности электронной концентрации происходит трансформация одной электромагнитной волны, распространяющейся в такой среде, в другую волну с измененной частотой.

В такой задаче случайно-неоднородную среду распространения волны можно задать как «облачную» структуру [8] электронной концентрации.

Вторая задача состоит в описании рассеяния электромагнитной волны в случайных средах, неоднородности в которых характеризуются случайным полем флуктуаций электронной концентрации проницаемости [8]. При решении таких задач флуктуации электронной плотности целесообразно моделировать каноническим разложением по белому шуму.

В некоторых случаях при рассмотрении плоских электромагнитных волн в ионосфере более пригодна модель среды волнового типа, где часто наблюдается модуляция отраженного сигнала в результате интерференции электромагнитной волны на квазипериодических неоднородностях.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

[1] **Пугачёв В.С.** Теория случайных функций и ее применение в задачах автоматического управления. М.: Физматгиз, 1962. С. 248–303.

[2] **Котельников В.А.** Теория потенциальной помехоустойчивости. М.,Л.: Госэнергоиздат, 1956. 152 с.

[3] **Хинчин А.Я.** Основные законы теории вероятностей. М.,Л.: Гос. технико-теоретическое изд-во, 1932. 86 с.

[4] **Кораллов Л.Б., Синай Я.Г.** Теория вероятностей и случайные процессы. Пер. с англ. М.: Изд-во МЦНМО, 2013. 408 с.

[5] **Ван Кампен Н.Г.** Стохастические процессы в физике и химии. М.: Высшая школа, 1990. 375 с.

[6] **Синицын И.Н.** Канонические представления случайных функций и их применение в задачах компьютерной поддержки научных исследований. М.: Торус Пресс, 2009. 768 с.

[7] **Лорд И.А., Уилсон С.Б.** Введение в дифференциальную геометрию и топологию. Математическое описание вида и формы. Пер. с англ. М., Ижевск: Институт компьютерных исследований, 2003. С. 278–279.

[8] **Солодовников Г.К., Новожилов В.И., Фаткуллин М.Н., Черкашин Ю.Э.** Распространение радиоволн в многомасштабной неоднородной ионосфере. М.: Наука, 1990. 200 с.

СВЕДЕНИЯ ОБ АВТОРАХ

ДЕНИСОВ Александр Владимирович – *кандидат физико-математических наук, доцент кафедры радиотехники и телекоммуникаций Санкт-Петербургского политехнического университета Петра Великого.*

195251, Российская Федерация, г. Санкт-Петербург, Политехническая ул., 29
A.v.denisov@inbox.ru

СИНЦОВ Артём Андреевич – *студент Института физики, нанотехнологий и телекоммуникаций Санкт-Петербургского политехнического университета Петра Великого.*

195251, Российская Федерация, г. Санкт-Петербург, Политехническая ул., 29
Sincov95@gmail.com

Denisov A.V., Sintsov A.A. CANONICAL DECOMPOSITION OF FLUCTUATION INTERFERENCES USING THE DELTA-FUNCTION FORMALISM.

The paper deals with the discrete spectral-orthogonal decompositions of centered Gaussian random processes for two cases.

In the first case, the process implementations are a sequence of pulses that are short in comparison with the observation time. The process decomposition was obtained as a generalized Fourier series on the basis of the delta-function formalism, and the variances of the coefficients (random values) of this series were found as well. The resulting expressions complement Kotelnikov's formula because they cover both the high-frequency and the low-frequency regions of the canonical-decomposition spectrum.

In the second case, a random process is a superposition of narrow-band Gaussian random processes, and its implementations are characterized by oscillations. For such a process the canonical decomposition in terms of Walsh functions was obtained on the basis of the generalized function formalism. Then this decomposition was re-decomposed in terms of trigonometric functions; it follows from the resulting series that the canonical decomposition spectrum is not uniform since a pedestal is formed in the constant component region.

CANONICAL DECOMPOSITION, NARROW-BAND GAUSSIAN PROCESS, GENERALIZED FUNCTION.

REFERENCES

[1] **V.S. Pugachyov**, Teoriya sluchajnykh funktsij i ee primenenie v zadachakh avtomaticheskogo upravleniya [The theory of random functions and its application in problems of automatic control], Fizmatgiz, Moscow, 1962, pp. 248–303.

[2] **V.A. Kotel'nikov**, Teoriya potentsial'noj pomekhoustojchivosti [The theory of potential noise immunity], Gosenergoizdat, Moscow, Leningrad, 1956.

[3] **A.Ya. Khinchin**, Osnovnye zakony teorii veroyatnostej [Basic laws of probability theory], Gos. tekhniko-teoreticheskoe izd-vo, Moscow, Leningrad, 1932.

[4] **L.B. Korallov, Ya.G. Sinai**, Teoriya veroyatnostej i sluchajnye protsessy [Theory of probability and random processes], Izd-vo MTsNMO, Moscow, 2013.

[5] **N.G. Van Kampen**, Stokhasticheskie protsessy v fizike i khimii [Stochastic Processes in Physics and Chemistry], Vysshaya shkola, Moscow, 1990.

[6] **I.N. Sinitsyn,** Kanonicheskie predstavleniya sluchajnykh funktsij i ikh primenenie v zadachakh komp'yuternoj podderzhki nauchnykh issledovanij [Canonical representations of random functions and their application to problems of computer support of research], Torus Press, Moscow, 2009.

[7] **E.A. Lord, S.B. Wilson**, Vvedenie v differentsial'nuyu geometriyu i topologiyu. Matematicheskoe opisanie vida i formy [An introduction to differential geometry and topology. The mathematical description of the shape and form], Institut komp'yuternykh issledovanij, Moscow, Izhevsk, 2003, pp. 278–279.

[8] **G.K. Solodovnikov, V.I. Novozhilov, M.N. Fatkullin, Cherkashin Yu.E.**, Rasprostranenie radiovoln v mnogomasshtabnoj neodnorodnoj ionosfere [Radio wave propagation in multiscale inhomogeneous ionosphere], Nauka, Moscow, 1990.

THE AUTHORS

DENISOV Alexander V.
Peter the Great St. Petersburg Polytechnic University
29 Politekhnicheskaya St., St. Petersburg, 195251, Russian Federation
A.v.denisov@inbox.ru

SINTSOV Artem A.
Peter the Great St. Petersburg Polytechnic University
29 Politekhnicheskaya St., St. Petersburg, 195251, Russian Federation
Sincov95@gmail.com