

DOI: 10.5862/JPM.237.2

УДК: 621.0:519.873

В.Я. Копп¹, А.Л. Карташов², М.В. Загорёнов¹, В.Ю. Ключкин³

¹ Севастопольский государственный университет;

² Государственное автономное учреждение
«Севастопольская телерадиокомпания»;

³ Санкт-Петербургский политехнический
университет Петра Великого

ПОЛУМАРКОВСКАЯ МОДЕЛЬ СТРУКТУРЫ ТЕХНОЛОГИЧЕСКАЯ ЯЧЕЙКА – НАКОПИТЕЛЬ

При построении модели структуры технологическая ячейка – накопитель (ТМ–SD) использовалась теория полумарковских процессов. На базе полученных выражений найдены стационарные характеристики для определения стационарного распределения вложенной цепи Маркова. Проведенное исследование позволило определить стационарное распределение полумарковского процесса и вычислить коэффициент готовности указанной структуры; приведена расчетная формула. Решены уравнения марковского восстановления для системы ТМ–SD с учетом отказов ТМ и SD при допущении об экспоненциальном поведении отказов. Полученные выражения описывают процесс функционирования такой системы и позволяют ее заменить эквивалентным элементом, имеющим два факторных состояния; это существенно упрощает задачу моделирования более сложных систем. Рассмотрена правомерность использования экспоненциальных законов распределения случайных величин (это времена наработки на отказы ТМ и SD). Проведенное имитационное моделирование показало, что уже для ТМ (или SD), состоящей из шести узлов, можно принять гипотезу об экспоненциальном распределении времени наработки на отказ ТМ в целом (или SD).

ПОЛУМАРКОВСКАЯ МОДЕЛЬ, УРАВНЕНИЕ МАРКОВСКОГО ВОССТАНОВЛЕНИЯ,
ВЛОЖЕННАЯ ЦЕПЬ МАРКОВА, СТАЦИОНАРНОЕ РАСПРЕДЕЛЕНИЕ.

Введение

Временное резервирование по-прежнему остается одним из наиболее эффективных средств повышения надежности технических устройств, особенно асинхронных автоматизированных линий, в которых технологические ячейки соединены друг с другом через накопители. Данному вопросу посвящено значительное число исследований [1 – 7], во многих из которых авторы ограничиваются, как правило, определением коэффициента готовности рассматриваемой системы. Однако заметим, что при моделировании сложных стохастических систем во многих случаях используется иерархический подход к построению их моделей [8 – 11], при котором необходимо

стыковать отдельные элементы системы друг с другом. Для этого требуется знать функции распределения времен наработки на отказ и восстановления этих элементов. К другим недостаткам предлагаемых моделей следует отнести игнорирование надежности накопителя [12 – 14], поскольку это существенно усложняет задачу. Однако при построении моделей многофазных систем необходимо оперировать функциями распределений времени между отказами и восстановлениями элементов с временным резервированием. При этом временной резерв в общем случае будет зависеть от надежности накопителя.

Целью данной работы является построение полумарковской модели процесса функционирования структуры технологи-

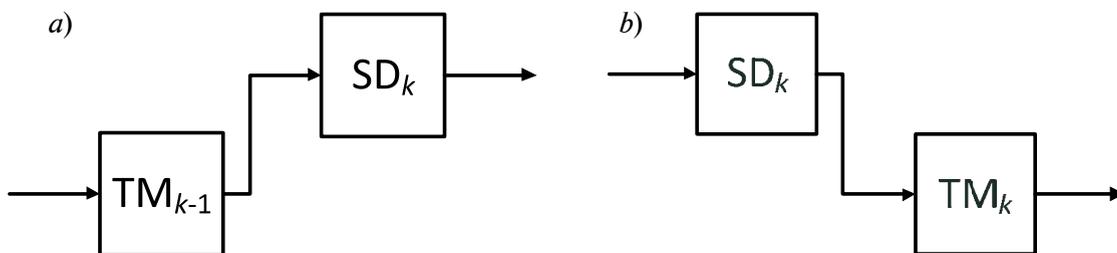


Рис. 1. Структура технологическая ячейка (ТМ) – накопитель (SD), работающая на выдачу (a) и на прием (b) продукции; k – порядковый номер

ческая ячейка – накопитель, позволяющей определять ее коэффициент готовности, а также указанные функции распределения для рассматриваемой структуры в целом. Фактически это означает эквивалентную замену указанной структуры одним простейшим элементом, имеющим два факторных состояния: отказовое и работоспособное.

Возможные структуры технологических ячеек (далее ТМ, от англ. technological module) с накопителями (далее SD, от англ. storage device) промежуточной продукции, которые обеспечивают временной резерв (структуры работают в составе асинхронной автоматизированной линии), представлены на рис. 1.

Различие структур, представленных на рис. 1, обусловлено тем, что один и тот же SD может работать совместно с предыдущим ТМ на выдачу продукции и совместно с последующим на ее прием. С точки зрения математического описания структуры, представленные на рис. 1, *a* и *b*, идентичны, поэтому модель будет строиться только для случая, приведенного на рис. 1, *a*.

Постановка задачи

Поставим задачу следующим образом: пусть известны функции распределения $F_{01}(t)$ и $F_{10}(t)$ случайных величин ξ_1 и η_1 , которые являются временами наработки на отказ и восстановления ТМ соответственно, а также функции распределения $F_{03}(t)$ и $F_{30}(t)$ случайных величин ξ_3 и η_3 , являющихся временами наработки на отказ и восстановления накопителя. Кроме этого, известна функция распределения $F_{12}(t)$ случайной величины, ξ_2 , являющейся временем резерва.

Вводим следующие допущения:

пренебрежение вероятностью одновременного отказа ячейки и накопителя (ввиду малой вероятности этого события);

экспоненциальный вид функций распределения $F_{01}(t)$ и $F_{03}(t)$.

В проводимом исследовании необходимо определить функции распределения времен между отказами и восстановлениями участка в целом, то есть эквивалентно заменить его простейшим элементом, имеющим два факторных состояния.

Ставится задача определения стационарных характеристик системы и получение коэффициента готовности участка ТМ – SD.

Построение модели

Граф состояний системы представлен на рис. 2. Описание вершин построенного графа (рис. 2) представлено в табл. 1.

Времена пребывания $\theta_0 - \theta_3$ в состояниях S_0, S_1, S_{2x} и S_3 , соответственно, определим из следующих выражений:

$$\theta_0 = (\xi_1 \wedge \xi_3); \theta_1 = (\eta_1 \wedge \xi_2);$$

$$\theta_{2x} = x; \theta_3 = \eta_2,$$

где \wedge – знак, обозначающий минимум случайных величин.

Тогда функции распределения времен пребывания в состояниях имеют вид, приведенный в табл. 1.

Стационарное распределение $\rho(x)$ вложенной цепи Маркова определяется по формуле

$$\rho(x) = \int_x p(x, y) \rho(y) dy,$$

где $p(x, y)$ – плотность вероятности перехода вложенной цепи Маркова.

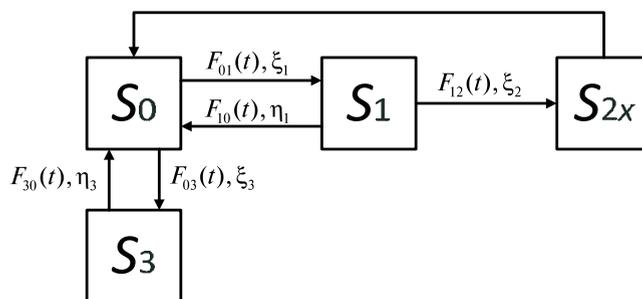


Рис. 2. Граф состояний системы ТМ – SD

Таблица 1

Вид функций распределения промежутков времени пребывания в различных состояниях (рис. 2)

Состояние	Описание состояния	Функция распределения времен пребывания
S_0	ТМ исправна, SD исправен, временной задел ξ_2 в SD, состояние работоспособное	$\bar{F}_0(t) = \bar{F}_{01}(t) \cdot \bar{F}_{03}(t)$
S_1	ТМ отказала, SD исправен, временной задел ξ_2 в SD, состояние работоспособное	$\bar{F}_1(t) = \bar{F}_{10}(t) \cdot \bar{F}_{12}(t)$
S_{2x}	ТМ отказала, SD исправен, резерв времени израсходован, поскольку запас продукции в SD исчерпан ($\xi_2 = 0$), состояние неработоспособное	$F_{2x}(t) = 1_x(t)$, где $1_x(t) = \begin{cases} 0, & t < x; \\ 1, & t \geq x. \end{cases}$
S_3	ТМ исправна, SD отказал, состояние неработоспособное	$F_3(t) = F_{30}(t)$

Сокращения: ТМ – технологическая ячейка, SD – накопитель.

Выражения для $P(x, y)$ имеют следующий вид:

$$\begin{cases} P_0^1 \{ \xi_1 < \xi_3 \} = \int_0^\infty F_{01}(z) f_{03}(z) dz, \\ P_0^3 \{ \xi_1 > \xi_3 \} = \int_0^\infty F_{03}(t) f_{01}(t) dt, \\ P_1^0 = \int_0^\infty F_{10}(t) f_{12}(t) dt, \\ P_1^{2x} = \int_0^\infty f_{10}(x+t) f_{12}(t) dt, \\ P_{2x}^0 = 1, \\ P_3^0 = 1. \end{cases} \quad (1)$$

$\rho(x)$ [15 – 17]:

$$\begin{cases} \rho_0 = \int_0^\infty \rho_{2x} \cdot 1_x(t) \cdot dx + \rho_3 \cdot 1 + \\ + \rho_1 \int_0^\infty F_{10}(w) f_{12}(w) dw, \\ \rho_1 = \rho_0 \int_0^\infty F_{01}(z) f_{03}(z) dz = \rho_0 P \{ \xi_1 < \xi_3 \}, \\ \rho_{2x} = \rho_1 \int_0^\infty f_{10}(x+t) f_{12}(t) dt, \\ \rho_3 = \rho_0 \int_0^\infty F_{03}(u) f_{01}(u) du. \end{cases} \quad (2)$$

Условие нормировки:

$$\int_0^\infty \rho_{2x} dx + \rho_3 + \rho_1 \int_0^\infty F_{10}(w) f_{12}(w) dw + \quad (3)$$

Используя систему (1), запишем систему уравнений для определения стационарного распределения вложенной цепи Маркова

$$\begin{aligned}
 & + \rho_0 \int_0^{\infty} F_{01}(z) f_{03}(z) dz + \\
 & + \int_0^{\infty} \rho_1 \int_0^{\infty} f_{10}(x+t) f_{12}(t) dt dx + \\
 & + \rho_0 \int_0^{\infty} F_{03}(u) f_{01}(u) du = 1.
 \end{aligned} \tag{3}$$

Решая систему уравнений (2) с использованием условия (3), получим:

$$\begin{cases}
 \rho_0 = \frac{1}{2+C}; \\
 \rho_1 = \frac{\int_0^{\infty} F_{01}(z) f_{03}(z) dz}{2+C}; \\
 \rho_{2x} = \frac{C}{2+C}; \\
 \rho_3 = \frac{\int_0^{\infty} \bar{F}_{01}(z) f_{03}(z) dz}{2+C},
 \end{cases}$$

где $C = \int_0^{\infty} F_{01}(z) f_{03}(z) dz \int_0^{\infty} f_{12}(t) \bar{F}_{10}(t) dt$.

Определим стационарное распределение полумарковского процесса. Стационарные вероятности полумарковского процесса следуют выражениям:

$$\begin{aligned}
 \pi_0 &= \frac{\rho_0 \cdot \bar{\theta}_0}{\bar{\theta}}, \quad \pi_1 = \frac{\rho_1 \cdot \bar{\theta}_1}{\bar{\theta}}, \quad \pi_2 = \frac{\rho_2 \cdot \bar{\theta}_2}{\bar{\theta}}, \\
 \pi_3 &= \frac{\rho_3 \cdot \bar{\theta}_3}{\bar{\theta}},
 \end{aligned}$$

где $\bar{\theta} = \rho_0 \cdot \bar{\theta}_0 + \rho_1 \cdot \bar{\theta}_1 + \rho_2 \cdot \bar{\theta}_2 + \rho_3 \cdot \bar{\theta}_3$.

Средние времена пребывания в соответствующих состояниях выражаются как

$$\begin{aligned}
 \bar{\theta}_0 &= \int_0^{\infty} \bar{F}_{01}(t) \bar{F}_{03}(t) dt, \\
 \bar{\theta}_1 &= \int_0^{\infty} \bar{F}_{10}(t) \bar{F}_{12}(t) dt, \quad \bar{\theta}_3 = \int_0^{\infty} \bar{F}_{30}(t) dt, \\
 \bar{\theta}_2 &= \bar{\theta}_x = \int_0^{\infty} 1_x(t) dt = \int_0^{\infty} \bar{F}_{2x}(t) dt; \\
 \bar{\theta} &= \rho_0 \cdot \bar{\theta}_0 + \rho_1 \cdot \bar{\theta}_1 + \rho_2 \cdot \bar{\theta}_2 + \rho_3 \cdot \bar{\theta}_3 = \\
 &= \rho_0 \int_0^{\infty} \bar{F}_{01}(t) \cdot \bar{F}_{03}(t) dt + \rho_0 \int_0^{\infty} F_{01}(z) \cdot f_{03}(z) dz \times \\
 & \times \int_0^{\infty} \bar{F}_{10}(t) \cdot \bar{F}_{12}(t) dt + \rho_0 \int_0^{\infty} F_{01}(z) \cdot f_{03}(z) dz \times
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & \times \int_0^{\infty} f_{10}(x+t) \cdot f_{12}(t) dt \cdot \int_0^{\infty} \bar{F}_{2x}(t) dt + \\
 & + \rho_0 \int_0^{\infty} F_{03}(u) \cdot f_{01}(u) du \cdot \int_0^{\infty} \bar{F}_{03}(t) dt.
 \end{aligned}$$

Учитывая, что функции распределения времени наработки на отказ ТМ и SD приняты простейшими, т. е.

$$\begin{aligned}
 F_{01}(t) &= 1 - \lambda_1 e^{-\lambda_1 t}, \quad F_{03}(t) = 1 - \lambda_2 e^{-\lambda_2 t}, \\
 \rho_1 &= \rho_0 \int_0^{\infty} F_{01}(z) f_{03}(z) dz = \\
 &= \rho_0 \int_0^{\infty} (1 - e^{-\lambda_1 z}) \lambda_2 e^{-\lambda_2 z} dz = \rho_0 \frac{\lambda_1}{\lambda_1 + \lambda_2}, \\
 \rho_3 &= \rho_0 \int_0^{\infty} F_{03}(u) f_{01}(u) du = \\
 &= \rho_0 \int_0^{\infty} (1 - e^{-\lambda_2 u}) \lambda_1 e^{-\lambda_1 u} du = \rho_0 \frac{\lambda_2}{\lambda_1 + \lambda_2},
 \end{aligned}$$

интенсивность потоков отказов можно заменить их математическими ожиданиями:

$$\begin{aligned}
 \frac{\lambda_1}{\lambda_1 + \lambda_2} &= \frac{\frac{1}{m_1}}{\frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2}} = \frac{m_2}{m_1 + m_2}, \\
 \frac{\lambda_2}{\lambda_1 + \lambda_2} &= \frac{\frac{1}{m_2}}{\frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2}} = \frac{m_1}{m_1 + m_2}.
 \end{aligned}$$

С учетом определенных выше ρ_1 и ρ_3 среднее время записывается как

$$\begin{aligned}
 \bar{\theta} &= \rho_0 \frac{m_2}{m_1 + m_2} \left(\int_0^{\infty} \bar{F}_{10}(t) \bar{F}_{12}(t) dt + \right. \\
 & \left. + \int_0^{\infty} f_{10}(x+t) f_{12}(t) dt \int_0^{\infty} \bar{F}_{2x}(t) dt \right) + \\
 & + \rho_0 \int_0^{\infty} \bar{F}_{01}(t) \bar{F}_{03}(t) dt + \rho_0 \frac{m_1}{m_1 + m_2} \int_0^{\infty} \bar{F}_{03}(t) dt.
 \end{aligned}$$

Стационарные вероятности в этом случае следуют выражениям

$$\begin{aligned}
 \pi_0 &= \int_0^{\infty} \bar{F}_{01}(t) \bar{F}_{03}(t) dt \times \\
 & \times \left(\frac{m_2}{m_1 + m_2} \left(\int_0^{\infty} \bar{F}_{10}(t) \bar{F}_{12}(t) dt + \right. \right.
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & \left. + \int_0^\infty f_{10}(x+t)f_{12}(t)dt \int_0^\infty \bar{F}_{2x}(t)dt \right) + \\
 & \left. + \int_0^\infty \bar{F}_{01}(t)\bar{F}_{03}(t)dt + \frac{m_1}{m_1+m_2} \int_0^\infty \bar{F}_{03}(t)dt \right)^{-1}, \\
 \pi_1 &= \frac{m_2}{m_1+m_2} \int_0^\infty \bar{F}_{10}(t)\bar{F}_{12}(t)dt \times \\
 & \times \left(\frac{m_2}{m_1+m_2} \left(\int_0^\infty \bar{F}_{10}(t)\bar{F}_{12}(t)dt + \right. \right. \\
 & \left. \left. + \int_0^\infty f_{10}(x+t)f_{12}(t)dt \int_0^\infty \bar{F}_{2x}(t)dt \right) + \right. \\
 & \left. + \int_0^\infty \bar{F}_{01}(t)\bar{F}_{03}(t)dt + \frac{m_1}{m_1+m_2} \int_0^\infty \bar{F}_{03}(t)dt \right)^{-1}, \\
 \pi_2 &= \int_0^\infty F_{01}(z)f_{03}(z)dz \int_0^\infty f_{10}(x+t)f_{12}(t)dt \times \\
 & \times \int_0^\infty \bar{F}_{2x}(t)dt \cdot \left(\frac{m_2}{m_1+m_2} \left(\int_0^\infty \bar{F}_{10}(t)\bar{F}_{12}(t)dt + \right. \right. \\
 & \left. \left. + \int_0^\infty f_{10}(x+t)f_{12}(t)dt \int_0^\infty \bar{F}_{2x}(t)dt \right) + \right. \\
 & \left. + \int_0^\infty \bar{F}_{01}(t)\bar{F}_{03}(t)dt + \frac{m_1}{m_1+m_2} \int_0^\infty \bar{F}_{03}(t)dt \right)^{-1}, \\
 \pi_3 &= \frac{m_1}{m_1+m_2} \int_0^\infty \bar{F}_{30}(t)dt \times \\
 & \times \left(\frac{m_2}{m_1+m_2} \left(\int_0^\infty \bar{F}_{10}(t)\bar{F}_{12}(t)dt + \right. \right. \\
 & \left. \left. + \int_0^\infty f_{10}(x+t)f_{12}(t)dt \int_0^\infty \bar{F}_{2x}(t)dt \right) + \right. \\
 & \left. + \int_0^\infty \bar{F}_{01}(t)\bar{F}_{03}(t)dt + \frac{m_1}{m_1+m_2} \int_0^\infty \bar{F}_{03}(t)dt \right)^{-1}.
 \end{aligned}$$

Полученные выражения стационарного распределения полумарковского процесса (ПМП) позволяют определять такие важные характеристики системы, как коэффициенты готовности и простоя:

$$K_a = \pi_0 + \pi_1, \quad K_d = \pi_2 + \pi_3.$$

Для определения функции распределения времен наработки на отказ системы в целом необходимо составить и решить систему уравнений марковского восстановления

ния. А для нахождения функции распределения времени восстановления системы достаточно воспользоваться формулой [18]:

$$F_0(t) = \frac{\sum_{j \in M_+} \left(\sum_{i \in M_-} p_{ij} \rho_i \right) G_j(t)}{\sum_{j \in M_+} \sum_{i \in M_-} p_{ij} \rho_i}. \quad (4)$$

Однако ввиду того, что состояние S_{2x} является непрерывным, для нахождения функции распределения времени наработки на отказ (времени непрерывной работы системы) необходимо воспользоваться стационарным алгоритмом фазового укрупнения устойчивых состояний [16, 17] для того, чтобы перейти от системы с непрерывными состояниями к системе с дискретными состояниями. Изображение графа такой системы подобно представленному на рис. 2, но вместо состояния S_{2x} вводится состояние S_2 .

Тогда вероятности переходов примут вид:

$$P_0^1 \{ \xi_1 < \xi_3 \} = \int_0^\infty f_{01}(z)\bar{F}_{03}(z)dz;$$

$$P_0^3 \{ \xi_1 > \xi_3 \} = \int_0^\infty \bar{F}_{01}(t)f_{03}(t)dt;$$

$$P_1^0 = \int_0^\infty f_{10}(t)\bar{F}_{12}(t)dt;$$

$$P_1^2 = \int_0^\infty \bar{F}_{10}(x)f_{12}(t)dt; \quad P_2^0 = 1; \quad P_3^0 = 1.$$

А стационарное распределение вложенной цепи Маркова (ВЦМ):

$$\left\{ \begin{aligned}
 \rho_0 &= \frac{1}{2+B}; \\
 \rho_1 &= \frac{\int_0^\infty F_{01}(z)f_{03}(z)dz}{2+B}; \\
 \rho_2 &= \frac{B}{2+B}; \\
 \rho_3 &= \frac{\int_0^\infty \bar{F}_{01}(z)f_{03}(z)dz}{2+B},
 \end{aligned} \right.$$

где $B = \int_0^\infty F_{01}(z)f_{03}(z)dz \int_0^\infty f_{12}(t)\bar{F}_{10}(t)dt$.

Функция распределения времени пре-

Таблица 2

Полумарковские ядра
для дискретной системы ТМ – SD

Состояние	Полумарковские ядра
S_0	$Q_{01}(t) = \int_0^t f_{01}(x)\bar{F}_{03}(x)dx$ $Q_{03}(t) = \int_0^t \bar{F}_{01}(x)f_{03}(x)dx$
S_1	$Q_{10}(t) = \int_0^t f_{10}(x)\bar{F}_{12}(x)dx$ $Q_{12}(t) = \int_0^t \bar{F}_{10}(x)f_{12}(x)dx$
S_2	$Q_{2x0}(t) = 1_x(t)$
S_3	$Q_{30}(t) = F_{30}(t)$

бывания системы в укрупненном дискретном состоянии S_2 имеет следующий вид:

$$\bar{F}_2(t) = \left(\int_0^t F_{01}(z)f_{03}(z)dz \int_0^t \bar{F}_{10}(t+y)f_{12}(y)dy \right) \times \left(\int_0^t F_{01}(z)f_{03}(z)dz \int_0^t \bar{F}_{10}(y)f_{12}(y)dy \right)^{-1}.$$

Полумарковские ядра для графа дискретной системы представлены в табл. 2.

Составим уравнения марковского восстановления (УМВ) [16, 17, 19]:

$$\begin{cases} \varphi_0(t) = \int_0^t Q_{01}(dx)\varphi_1(t-x) + Q_{03}(t); \\ \varphi_1(t) = \int_0^t Q_{10}(dx)\varphi_0(t-x) + Q_{12}(t). \end{cases} \quad (5)$$

Подставив полумарковские ядра табл. 2 в уравнения (5), получим:

$$\begin{cases} \varphi_0(t) = \int_0^t \varphi_1(t-x)f_{01}(x)\bar{F}_{03}(x)dx + \int_0^t \bar{F}_{01}(x)f_{03}(x)dx; \\ \varphi_1(t) = \int_0^t \varphi_0(t-x)f_{10}(x)\bar{F}_{12}(x)dx + \int_0^t \bar{F}_{10}(x)f_{12}(x)dx. \end{cases} \quad (6)$$

Сделав замену переменных и подставив $\varphi_1(t)$ в выражение для $\varphi_0(t)$ в системе (6), получим:

$$\begin{aligned} \varphi_0(t) = & \int_0^t f_{01}(t-x)\bar{F}_{03}(t-x)dx \times \\ & \times \int_0^x \varphi_0(y)f_{10}(x-y)\bar{F}_{12}(x-y)dy + \\ & + \int_0^t f_{01}(t-x)\bar{F}_{03}(t-x)dx \int_0^x \bar{F}_{10}(y)f_{12}(y)dy + \\ & + \int_0^t \bar{F}_{01}(x)f_{03}(x)dx. \end{aligned} \quad (7)$$

Преобразовав выражение (7), имеем:

$$\begin{aligned} \varphi_0(t) = & \int_0^t \varphi_0(y)[(f_{01}\bar{F}_{03}) * (f_{10}\bar{F}_{12})](t-y)dy + \\ & + \int_0^x \bar{F}_{10}(y)f_{12}(y)dy \int_0^{t-y} f_{01}(x)\bar{F}_{03}(x)dx + \\ & + \int_0^t \bar{F}_{01}(x)f_{03}(x)dx, \end{aligned} \quad (8)$$

где * – знак операции свертки.

Введем обозначения

$$K(x) = [(f_{01}\bar{F}_{03}) * (f_{10}\bar{F}_{12})](x);$$

$$\begin{aligned} \Phi(t) = & \int_0^x \bar{F}_{10}(y)f_{12}(y)dy \int_0^{t-y} f_{01}(x)\bar{F}_{03}(x)dx + \\ & + \int_0^t \bar{F}_{01}(x)f_{03}(x)dx. \end{aligned}$$

Тогда выражение (8) будет иметь вид

$$\varphi_0(t) = \int_0^t \varphi_0(x)K(t-x)dx + \Phi(t). \quad (9)$$

Введем оператор [20, 21]:

$$[A\varphi_0](t) = \int_0^t \varphi_0(x)K(t-x)dx.$$

Тогда выражение (9) примет вид

$$\varphi_0(t) = [A\varphi_0](t) + \Phi(t). \quad (10)$$

Решая уравнение (10), получим:

$$\varphi_0(t) = [I - A]\Phi(t) = \Phi(t) + \sum_{n=1}^{\infty} [A^n\Phi](t).$$

Проитерировав, получим:

$$\varphi_0(t) = \Phi(t) + \int_0^t h(t-x)\Phi(x)dx, \quad (11)$$

где $h(x) = \sum_{n=1}^{\infty} [(f_{01}\bar{F}_{03}) * (f_{10}\bar{F}_{12})]^{(*)n}(x)$;

$$\Phi(t) = \int_0^t \bar{F}_{10}(y)f_{12}(y)dy \int_0^{t-y} f_{01}(x)\bar{F}_{03}(x)dx + \int_0^t \bar{F}_{01}(x)f_{03}(x)dx.$$

Полученная функция распределения (11) описывает время наработки системы на отказ.

Найдем функцию распределения времени восстановления системы, используя формулу (4):

$$F_{23}^0(t) = \frac{F_2(t)P_2^0\rho_2 + F_3(t)P_3^0\rho_3}{P_2^0\rho_2 + P_3^0\rho_3}. \quad (12)$$

Поскольку $P_2^0 = 1$ и $P_3^0 = 1$, функция распределения (12) принимает вид

$$F_{23}^0(t) = \frac{F_2(t)\rho_2 + F_3(t)\rho_3}{\rho_2 + \rho_3}. \quad (13)$$

Полученные формулы (11) и (13) дают нам возможность полностью описать поведение системы в целом, то есть представить ее в виде эквивалентного ей простейшего элемента, имеющего два факторных состояния: отказа и рабочее. Результаты моде-

лирования с использованием формулы (11) представлены на рис. 3.

Исходными данными для моделирования служат функции распределения $F_{01}(t)$, $F_{03}(t)$, $F_{10}(t)$ и $F_{12}(t)$; они распределены по обобщенному закону Эрланга второго порядка с параметрами λ_{01} , λ_{03} ; μ_1 , μ_2 ; ν_1 , ν_2 соответственно; причем

$$f_{01}(t) = \lambda_{01}e^{-\lambda_{01}t},$$

где $\lambda_{01} = 0,1250 \text{ ч}^{-1}$;

$$f_{03}(t) = \lambda_{03}e^{-\lambda_{03}t},$$

где $\lambda_{03} = 0,0625 \text{ ч}^{-1}$;

$$f_{10}(t) = \frac{\mu_1\mu_2(e^{-\mu_1t} - e^{-\mu_2t})}{\mu_2 - \mu_1},$$

где $\mu_1 = 0,3333 \text{ ч}^{-1}$, $\mu_2 = 1,000 \text{ ч}^{-1}$.

$$f_{12}(t) = \frac{\nu_1\nu_2(e^{-\nu_1t} - e^{-\nu_2t})}{\nu_2 - \nu_1},$$

где $\nu_1 = 1,1 \text{ ч}^{-1}$, $\nu_2 = 10,9 \text{ ч}^{-1}$.

Обсуждение полученных результатов

Сравним значения математического ожидания полученной нами функции (11) и математического ожидания, определяемого с помощью выражения [16]:

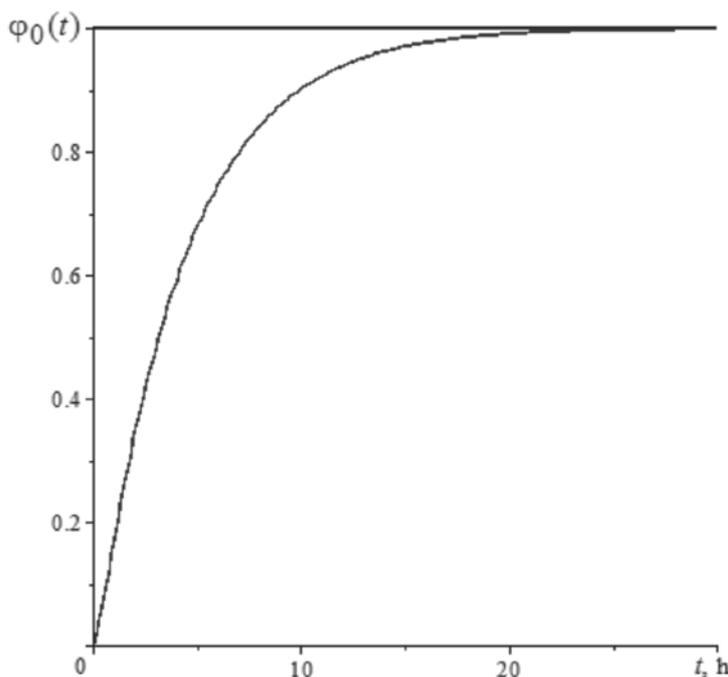


Рис. 3. Вид функции распределения $\varphi_0(t)$ – времени наработки на отказ (см. формулу (11))

$$T_+ = \frac{\sum_{i \in M_+} m_i \rho_i}{\sum_{e \in E \subset M_+} \sum_{j \in M_+} P_{ej} \rho_j}$$

Математическое ожидание полученной нами функции распределения составляет

$$6,453680520695,$$

тогда как определяемое авторами работы [16] –

$$6,453680520781.$$

Нетрудно констатировать, что различие наблюдается только в четырех последних значащих цифрах, т. е. фактически полученные значения совпадают.

Рассмотрим влияние принятого нами допущения об экспоненциальном характере отказов ТМ и SD на точность модели.

Введенные допущения о том, что функции распределения времени наработки на отказ ТМ и времени наработки на отказ накопителя (SD) являются экспонентами, существенно упрощают модель. Анализ условий, которые приводят к простейшему потоку отказов, могут привести к выводу, что простейшие потоки достаточно редки. Конечно, потоки отказов обладают последствием. Примером может служить то наблюдение, что отказ того или иного узла ТМ ведет, как правило, к отказу строго определенного ряда других узлов. Возможно также и нарушение ординарности: одновременный отказ нескольких узлов возможен, хотя при создании моделей такая ситуация принимается маловероятной. Условие же стационарности практически всегда выполняется, поскольку интенсивности отказов ТМ и SD с течением времени не изменяются.

Однако использовать простейшие потоки для описания отказов во многих случаях допустимо. Любая ТМ представляет собой сложную техническую систему, состоящую из большого числа узлов и деталей. Поток отказов отдельной механической детали выражается, как правило, экспонентой. Закон наработки на отказ для ТМ, состоящей из узлов и деталей, наработка на отказ которых подчиняется экспоненциальному закону, также будет выражаться экспонентой

[22]. В случае, если какой-либо из потоков оказывается ординарным и стационарным, можно воспользоваться теоремой Хинчина [23].

А.Я. Хинчин в свое время доказал, что если поток представляет собой суперпозицию стационарных, ординарных и взаимно независимых потоков, и λ_i – интенсивность i -го потока, то суммарный поток будет стремиться к простейшему потоку с интенсивностью

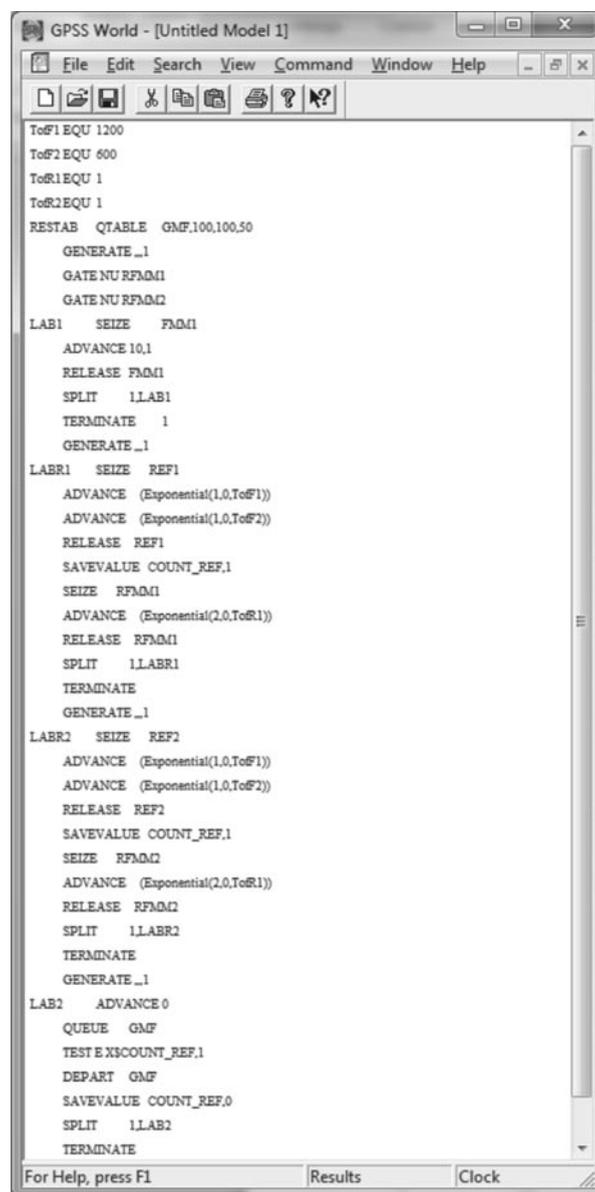


Рис. 4. Листинг программы для ТМ, состоящей из двух узлов

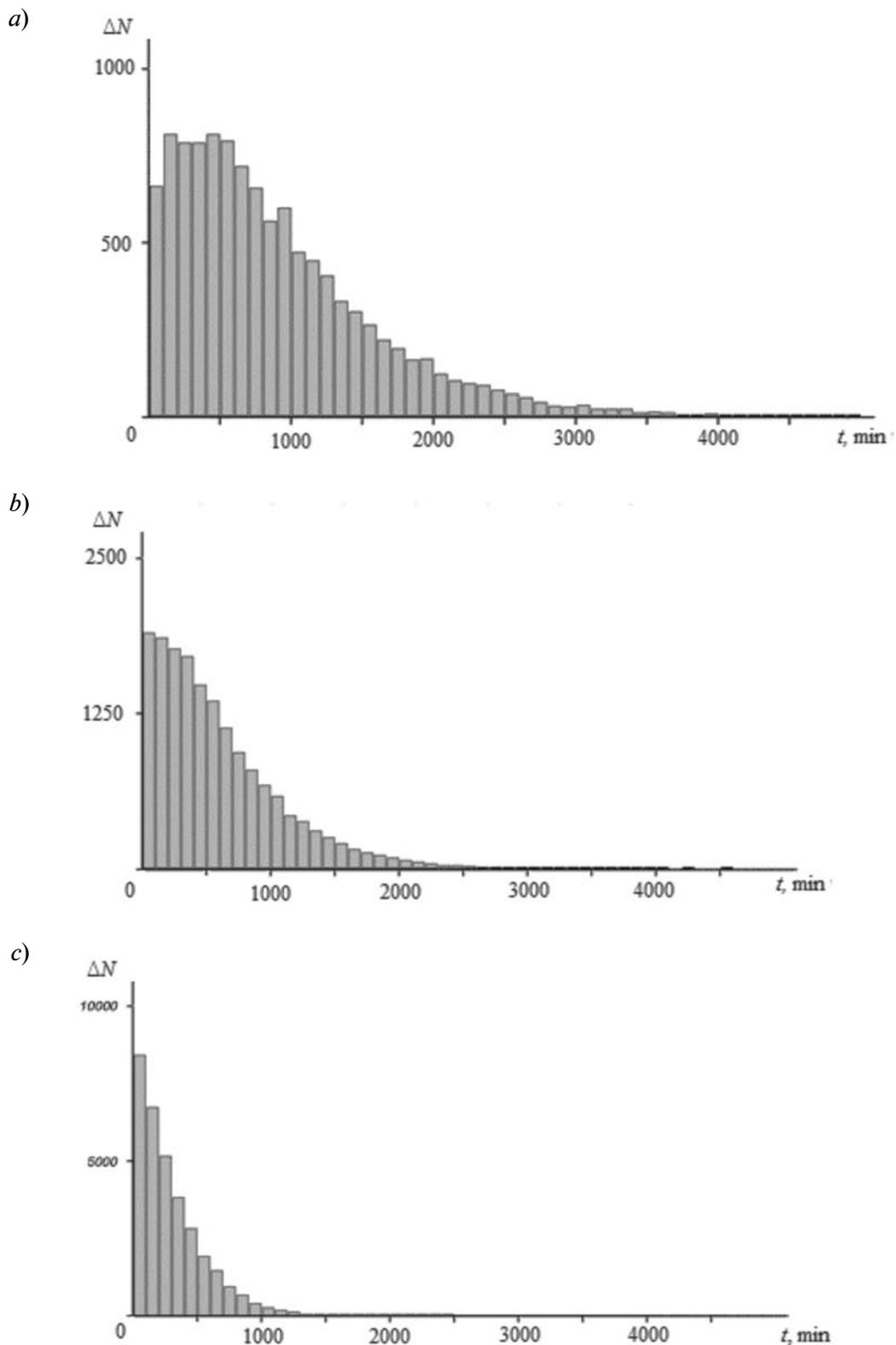


Рис. 5. Гистограммы времен наработки для ТМ, состоящих из двух (a), трех (b) и шести (c) узлов; получены на основе закона Эрланга второго порядка (ΔN – количество отказов в промежуток времени)

$$\Lambda = (\lambda_1 + \dots + \lambda_i + \dots + \lambda_n),$$

если n достаточно велико.

Возникает вопрос, насколько велико должно быть значение n , чтобы можно было принять поток отказов ТМ экспоненциальным.

Для оценки этого значения построим имитационную модель, используя систему GPSS World. В качестве закона наработки на отказ примем обобщенный закон Эрланга второго порядка. Листинг программы для ТМ, состоящей из двух узлов, приведен на рис. 4.

Моделирование осуществлялось для ТМ, содержащей от двух до шести узлов. Ряд гистограмм времени наработки на отказ приведен на рис. 5.

Как видно из результатов моделирования, уже для ТМ, состоящей из шести узлов (см. рис. 5, с), можно принять гипотезу об экспоненциальном распределении времени наработки на отказ всей ТМ. Поскольку ТМ реально содержит значительно большее число узлов и деталей, допущение, принятое нами в модели, вполне приемлемо. Аналогичные рассуждения справедливы и для наработки на отказ накопительных устройств.

Заключение

В результате проведенного исследования поставленная цель, а именно

– построение полумарковской модели процесса функционирования структуры технологической ячейки – накопитель, достигнута: получены выражения для определения функций распределения времен наработки на отказ и на восстановление системы (см. формулы (11) и (13) соответственно).

Проведенное сравнение значений математического ожидания времени наработки системы на отказ, определенное с использованием полученной нами функции распределения, и полученного по формуле, приведенной в работе [16], показало практически полное совпадение результатов.

Полученные выражения позволяют заменить исследуемую структуру эквивалентным простейшим элементом, что значительно упрощает моделирование систем верхнего уровня иерархии.

В дальнейшем планируется использование полученных выражений при моделировании асинхронных автоматизированных линий.

Исследования выполнены при финансовой поддержке Министерства образования и науки Российской Федерации по базовой части государственного задания № 2014/702 (проект № 3858) и при поддержке гранта Российского фонда фундаментальных исследований № 15-01-05840.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Черкесов Г.Н. Надежность технических систем с временной избыточностью. М.: Советское радио, 1974. 296 с.
- [2] Черкесов Г.Н. Современное состояние теории и практики надежности многофазных систем с накопителями // Надежность и контроль качества. 1986. № 10. С. 3–7.
- [3] Ганин Н.М., Катковник В.Я. Сетевые модели функционирования ГПС с ограниченными накопителями // Машиностроение. 1988. № 2. С. 26–32.
- [4] Obzherin Yu.E., Boyko E.G. Semi-Markov Models. Control of Restorable Systems with Latent Failures. USA, Elsevier, Academic Press, 2015. 214 p.
- [5] Peschansky A.I. Semi-Markov Models of One-Server Loss Queues with Recurrent Input. Germany: LAP LAMPERT Academic Publishing, 2013. 138 p.
- [6] Каргашов Л.Е., Копп В.Я., Обжерин Ю.Е., Заморёнов М.В. К вопросу об использовании закона Эрланга при моделировании производственных систем // СИЯЭП. Сб. научн. тр. Севастополь, 2002. Вып. 7. С. 220–225.
- [7] Филипович О.В., Копп В.Я., Заморёнов М.В., Гаджибеков А.Н. Использование уравнения Фоккера – Планка при анализе СМО типа G/G/1/K // Оптимизация производственных процессов. Сб. научн. тр. Севастополь, 2000. Вып. 3. С. 56–60.
- [8] Управление ГПС: Модели и алгоритмы / Под общ. ред. акад. АН СССР С.В. Емельянова. М.: Машиностроение, 1987. 368 с.
- [9] Сольников Р.И., Кононюк А.Е., Кулаков Ф.М. Автоматизация проектирования гибких производственных систем. Л.: Машиностроение, 1990. 415 с.
- [10] Вальков В.М., Вершин В.Е. Автомати-

зированные системы управления технологическими процессами. 2-е изд., доп. и перераб. Л.: Машиностроение, 1977, 240 с.

[11] **Крон Г.** Исследование сложных систем по частям. Диакоптика. М.: Изд-во иностр. лит., 1965. 542 с.

[12] **Копп В.Я., Обжерин Ю.Е., Песчанский А.И.** Моделирование автоматизированных линий. Севастополь: Изд-во СевНТУ, 2006. 240 с.

[13] **Копп В.Я., Обжерин Ю.Е., Песчанский А.И.** Стохастические модели автоматизированных производственных систем с временным резервированием. Севастополь: Изд-во СевНТУ, 2000. 284 с.

[14] **Филипович О.В., Копп В.Я., Галкина Л.В.** Моделирование участков автоматизированных линий с учетом стохастического характера межоперационных заделов //Сб. научн. тр. СИЯЭиП. Севастополь: СИЯЭиП, 2001. Вып. 5. С. 213217.

[15] **Байхельт Ф., Франкен П.** Надежность и техническое обслуживание. Математический подход. Пер. с нем. М.: Радио и связь, 1988. 392 с.

[16] **Королюк В.С., Турбин А.Ф.** Процессы марковского восстановления в задачах на-

дежности систем. Киев: Наукова думка, 1982. 236 с.

[17] **Королюк В.С.** Стохастические модели систем. Отв. ред. А.Ф. Турбин. Киев: Наукова думка, 1989. 208 с.

[18] **Райншке К., Ушаков И.А.** Оценка надежности систем с использованием графов. М.: Радио и связь, 1988. 208 с.

[19] **Броди С.М., Власенко О.Н., Марченко Б.Г.** Расчет и планирование испытаний систем на надежность. Киев: Наукова думка, 1970. 192 с.

[20] **Колмогоров А.Н., Фомин С.В.** Элементы теории функций и функционального анализа. Учебник для ун-тов. 6-е изд., испр. М.: Наука, 1989. 623 с.

[21] **Михлин С.Г.** Интегральные уравнения и их приложения к некоторым проблемам механики, математической физики и техники. М.: Гостехиздат, 1949. 380 с.

[22] **Вентцель Е.С.** Теория вероятностей. Учеб. для вузов. 6-е изд., стер. М.: Высшая школа, 1999. 576 с.

[23] **Хинчин А.Я.** Математические методы в теории массового обслуживания. М.: Изд-во АН СССР, 1955. 123 с.

СВЕДЕНИЯ ОБ АВТОРАХ

КОПП Вадим Яковлевич – доктор технических наук, профессор кафедры приборных систем и автоматизации технологических процессов Севастопольского государственного университета.

299053, г. Севастополь, Университетская ул., 33, Российская Федерация.
volkov-and@yandex.ru

КАРТАШОВ Алексей Леонидович – инженер Государственного автономного учреждения города Севастополя «Севастопольская телерадиокомпания».

299011, г. Севастополь, 4-я Бастионная ул., 1, Российская Федерация.
kartashov.alekseyy@rambler.ru

ЗАМОРЁНОВ Михаил Вадимович – кандидат технических наук, доцент кафедры информационных технологий и компьютерных систем Севастопольского государственного университета.

299053, г. Севастополь, Университетская ул., 33, Российская Федерация.
zamoryonoff@gmail.com

КЛЮКИН ВАЛЕРИЙ ЮРЬЕВИЧ – кандидат технических наук, доцент кафедры «Автоматы» Санкт-Петербургского политехнического университета Петра Великого.

195251, г. Санкт-Петербург, Политехническая ул., 29, Российская Федерация.
volkov-and@yandex.ru

Kopp V.Ya., Kartashov A.L., Zamoryonov M.V., Klyukin V.Yu. THE SEMI-MARKOV MODEL FOR THE 'TECHNOLOGICAL MODULE – STORAGE DEVICE' STRUCTURE.

The theory of semi-Markov process has been used to design the model of 'technological module – storage device' (TM-SD) structure. Stationary characteristics based on obtained equations were determined to find stationary distribution of the Markov embedded chain. Relying upon performed studies the stationary

distribution of semi-Markov process was determined. This allowed calculation of the availability ratio of TM-SD structure and the design formula was given. The Markov restoration equations for TM-SD system with taking into account TM and SD failures were solved assuming the exponential behavior of these failures. The obtained expressions describe operating of such a system and allow substitution of TM-SD system with an equivalent element with two factor states. This result significantly simplifies the modeling problem for more complex systems. The legitimacy of using exponential distributions of random variables (error-free periods for TM and SD) was analyzed. The performed simulation modeling disclosed that the hypothesis for an exponential behavior of error-free periods for TM as a whole (and SD as well) can be accepted even in the case that TM (or SD) consists of six nodes.

SEMI-MARKOV MODEL, MARKOV RESTORATION EQUATION, EMBEDDED MARKOV CHAIN, STATIONARY DISTRIBUTION.

REFERENCES

- [1] **G.N. Cherkesov**, Nadezhnost tekhnicheskikh sistem s vremennoy izbytochnostyu [The reliability of technical systems with time redundancy], Moscow, Sov. Radio, 1974.
- [2] **G.N. Cherkesov**, Sovremennoye sostoyaniye teorii i praktiki nadezhnosti mnogofaznykh sistem s nakopitelyami [The current state of theory and practice of reliability of polyphase systems with storage devices], Nadezhnost i kontrol kachestva. No. 10 (1986) 3–7.
- [3] **N.M. Ganin, V.Ya. Katkovnik**, Setevyye modeli funktsionirovaniya GPS s ogranichennymi nakopitelyami [Networks models for operation of GPS with organic storage devices], Mashinostroyeniye. No. 2 (1988) 26–32.
- [4] **Yu.E. Obzherin, E.G. Boyko**, Semi-Markov Models. Control of Restorable Systems with Latent Failures, Elsevier, Academic press, USA, 2015.
- [5] **A.I. Peschansky**, Semi-Markov Models of One-Server Loss Queues with Recurrent Input, Germany: LAP LAMPERT Academic Publishing, 2013.
- [6] **L.E. Kartashov, V.Ya. Kopp, Yu.E. Obzherin, M.V. Zamorenov**, K voprosu ob ispolzovanii zakona Erlanga pri modelirovanii proizvodstvennykh sistem [On the using the Erlang distribution when modeling of the manufacturing systems] SIYaEP Sb. Nauchn. Tr. Sevastopol, 2002. No. 7 (2002) 220–225.
- [7] **O.V. Filipovich, V.Ya. Kopp, M.V. Zamorenov, A.N. Gadzhibekov**, Ispolzovaniye uravneniya Fokkera–Planka pri analize SMO tipa G/G/1/K Optimizatsiya proizvodstv. protsessov [Manufacturing process optimization], Sb. Nauch. Tr. Sevastopol, No. 3 (2000) 56–60.
- [8] Upravleniye GPS: Modeli i algoritmy [GPS control: models and algorithms], Ed. S.V. Emelyanov, Moscow, Mashinostroyeniye, 1987.
- [9] **R.I. Solnitsev, A.E. Kononyuk, F.M. Kulakov**, Avtomatizatsiya proyektirovaniya gibkikh proizvodstvennykh sistem [Design automation of the flexible manufacturing systems], Leningrad, Mashinostroyeniye, 1990.
- [10] **V.M. Valkov, V.E. Vershin**, Avtomatizirovannyye sistemy upravleniya tekhnologicheskimi protsessami [Automated systems to control manufacturing processes], 2d ed., Leningrad, Mashinostroyeniye, 1977.
- [11] **G. Kron**, Issledovaniye slozhnykh sistem po chastyam. Diakoptika [Studies in complex systems by parts. Diakoptics], Moscow, Izd-vo inostr. lit., 1965.
- [12] **V.Ya. Kopp, Yu.E. Obzherin, A.I. Peschanskiy**, Modelirovaniye avtomatizirovannykh liniy [Modeling of the automated lines], Sevastopol: Izd-vo SevNTU, 2006.
- [13] **V.Ya. Kopp, Yu.E. Obzherin A.I. Peschanskiy**, Stokhasticheskiye modeli avtomatizirovannykh proizvodstvennykh sistem s vremennym rezervirovaniyem [Stochastic models of automated manufacturing systems with time reservation], Sevastopol: Izd-vo SevNTU, 2000.
- [14] **O.V. Filipovich, V.Ya. Kopp, L.V. Galkina**, Modelirovaniye uchastkov avtomatizirovannykh liniy s uchetom stokhasticheskogo kharaktera mezhoperatsionnykh zadelov [Modeling of the automated line sections with consideration for stochastic character of interoperational process stock], Sb. Nauch. Tr. SIYaEP, Sevastopol: SIYaEP, No. 5 (2001) 213217.
- [15] **F. Baykhelt, P. Franken**, Nadezhnost i tekhnicheskoye obsluzhivaniye. Matematicheskiy podkhod [Reliability and technical service. The mathematical approach], Moscow, Radio i svyaz, 1988.
- [16] **V.S. Korolyuk, A.F. Turbin**, Protssy markovskogo vosstanovleniya v zadachakh nadezhnosti sistem [The Markov renewal processes in the system reliability problems], Kiev, Naukova Dumka, 1982.
- [17] **V.S. Korolyuk**, Stokhasticheskiye modeli system [Stochastic models of systems], Ed. A.F. Turbin, Kiev, Naukova Dumka, 1989.
- [18] **K. Raynshke, I.A. Ushakov**, Otsenka nadezhnosti sistem s ispolzovaniyem grafov [The reliability assessment of the systems using the graph theory], Moscow, Radio i svyaz, 1988.

[19] **S.M. Brodi, O.N. Vlasenko, B.G. Marchenko**, Raschet i planirovaniye ispytaniy sistem na nadezhnost [The calculation and planning of the system reliability testing], Kiev, Naukova Dumka, 1970.

[20] **A.N. Kolmogorov, S.V. Fomin**, Elementy teorii funktsiy i funktsionalnogo analiza [Elements of function theory and functional analysis], 6th ed., Moscow, Nauka, 1989.

[21] **S.G. Mikhlin**, Integralnyye uravneniya i ikh prilozheniya k nekotorym problemam mekhaniki,

matematicheskoy fiziki i tekhniki [The integral equations and their application to some problems of mechanics, mathematical physics and engineering], Moscow, Gostekhizdat, 1949.

[22] **E.S. Venttsel**, Teoriya veroyatnostey [The theory of chances], 6-th ed. Moscow, Vysshaya shkola, 1999.

[23] **A.Ya. Khinchin**, Matematicheskiye metody v teorii massovogo obsluzhivaniya [Mathematical methods in the queueing theory], Moscow, Izd-vo Akademii Nauk, 1955.

THE AUTHORS

KOPP Vadim Ya.

Sevastopol State University

33, Universitetskaja St., Sevastopol, 299053, Russian Federation
volkov-and@yandex.ru

KARTASHOV Aleksey L.

State Autonomous Institution of Sevastopol "Sevastopol Television and Radio Company"

1, 4 Bastionnaja St., Sevastopol, 299011, Russian Federation
kartashov.alekseyy@rambler.ru

ZAMORYONOV Michael V.

Sevastopol State University

33, Universitetskaja St., Sevastopol, 299053, Russian Federation
zamoryonoff@gmail.com

KLYUKIN Valery Y.

Peter the Great Saint-Petersburg Polytechnic University

29, Polytekhnicheskaya St., St. Petersburg, 195251, Russian Federation
volkov-and@yandex.ru