

doi: 10.5862/MCE.61.7

Оптимальное проектирование рам с учетом ограничений по прочности и кратным частотам собственных колебаний

Optimal design of 3d frame structures taking into account the stress and multiple natural frequency constraints

Канд. техн. наук, доцент О.А. Сергеев,
Нижегородский государственный технический
университет им. Р.Е. Алексеева, г. Нижний
Новгород, Россия

канд. техн. наук, доцент В.Г. Киселев,
Нижегородский государственный
университет им. Н.И. Лобачевского, г. Нижний
Новгород, Россия

канд. физ.-мат. наук, доцент С.А. Сергеева,
Нижегородский государственный технический
университет им. Р.Е. Алексеева, г. Нижний
Новгород, Россия

O.A. Sergeyev,
Nizhny Novgorod State Technical University n.a.
R.E. Alekseev, Nizhny Novgorod, Russia

V.G. Kiselev,
Lobachevsky State University of Nizhni Novgorod,
Nizhny Novgorod, Russia

S.A. Sergeeva,
Nizhny Novgorod State Technical University n.a.
R.E. Alekseev, Nizhny Novgorod, Russia

Ключевые слова: оптимизация рам; анализ чувствительности; линейно упругие пространственные рамы; кратные частоты собственных колебаний

Key words: optimization of frame structures; sensitivity analysis; linearly elastic space frames; multiple natural frequencies

Аннотация. Рассматривается задача определения оптимальных размеров поперечных сечений, координат узлов упругих пространственных рам, примерами которых являются каркасы зданий, мачты и отсеки корпусов судов, крылья самолетов, рамные конструкции автомобилей, мосты, трансляционные башни и т.д., с ограничениями на напряжения и кратные частоты собственных колебаний. Учитывается несколько независимых условий нагружения рамы, включая собственный вес. Анализ напряженного состояния включает в себя растяжение (сжатие), изгиб, сдвиг и кручение балочных элементов. Деформация балочных элементов не учитывается. Анализ чувствительности кратных частот выполняется через аналитическое дифференцирование по координатам узлов и размерам поперечных сечений балочных элементов. Оптимальный проект достигается путем решения последовательности задач квадратичного программирования.

Abstract. The problem of determining the optimal cross-sectional parameters and joint positions of linearly elastic space frames with imposed stress and multiple frequency constraints was considered. The frame was assumed to be acted on by different independent load systems, including temperature and self-weight loads. The stress-state analysis includes tension, bending, shear and torsion of beam elements. The warping of beam elements was not taken into account in this problem. The sensitivity analysis of multiple frequencies was performed through analytic differentiation with respect to the joint positions and the sizes of the cross-sections of beam elements. The optimal design is attained through solving a sequence of quadratic programming problems.

Введение

Одним из наиболее распространенных типов несущих конструкций являются рамные конструкции. К ним относятся каркасы зданий, мачты и отсеки корпусов судов, крылья самолетов, рамные конструкции автомобилей, мосты, трансляционные башни и т.д. В данной работе рассматривается задача оптимального проектирования рамных конструкций с варьируемыми координатами узлов и размерами поперечных сечений элементов. На оптимальный проект наложены ограничения на напряжения и частоты собственных колебаний. Ограничения на напряжения в элементах рамы обеспечивают надлежащие уровни напряжений при заданных условиях нагружения, а ограничения на частоты собственных колебаний необходимы для

получения правильного отклика рамы при динамическом возбуждении, для которого исключается резонанс и получается подходящий спектр частот.

Оптимизация колонн, ферм, пластин и оболочек с ограничениями на кратные частоты собственных колебаний рассматривается в работах [1–4]. В работах [5–8] проводится анализ чувствительности некратных и кратных частот собственных колебаний.

Цель этой работы – расширить проведенные ранее исследования рассмотрев одновременное варьирование координат узлов конструкции и размеров поперечных сечений, и получить оптимальные проекты, для которых контролируются статические и динамические отклики [9–12].

Появление кратных или почти равных частот является характерной чертой оптимального проектирования конструкций с ограничениями на частоты собственных колебаний [13–16]. Такое совпадение частот связывается с симметрией конструкции или наводится в результате развития спектра частот из-за процесса перепроектирования к оптимальной точке с ограничением на фундаментальную частоту. Известно, что кратные частоты являются недифференцируемыми [17, 18]. Производные от них можно вычислить только по направлению. Этот факт создает трудности в нахождении таких производных по варьируемым параметрам конструкции и в применении эффективных градиентных методов оптимизации.

Настоящее исследование посвящено разработке эффективного метода анализа чувствительности и оптимизации рамных конструкций с кратными частотами. Задача оптимизации решается с помощью алгоритма приведенного квадратичного программирования.

1. Постановка задачи оптимизации

Рассмотрим линейно упругую раму, для которой статическое уравнение равновесия имеет вид:

$$[K]\{U\} = \{\{P_1\} + \{P_2\} + \{P_3\}\}, \quad (1)$$

где $[K]$ – глобальная матрица жесткости рамы; $\{U\}$ – вектор узловых перемещений; $\{P_1\}$ – внешние узловые нагрузки; $\{P_2\}$, $\{P_3\}$ – узловые нагрузки от распределенной нагрузки по элементам рамы.

Частоты собственных колебаний определяются с помощью уравнения

$$([K] - \omega_j^2[M])\{\Phi_j\} = 0, \quad j = 1, \dots, n, \quad (2)$$

где $[M]$ – глобальная матрица масс рамы; ω_j – j -я частота собственных колебаний; $\{\Phi_j\}$ – j -я мода собственных колебаний; n – число степеней свободы рамы. Частоты являются действительными числами и могут быть упорядочены:

$$0 < \omega_1 \leq \omega_2 \leq \dots \leq \omega_j \leq \dots \leq \omega_n. \quad (3)$$

Задача оптимизации может быть сформулирована следующим образом [19, 20]. Требуется определить из заданного диапазона $[\{X\}_{\min}, \{X\}_{\max}]$ размеры поперечных сечений и координаты узлов (параметры формы) $\{X^*\}$, для которых масса W рамы принимает минимальное значение:

$$W(\{X^*\}) = \min_{\{X\} \in F} W(\{X\}). \quad (4)$$

Допустимая область F определяется ограничениями на напряжения, частоты собственных колебаний и на варьируемые параметры конструкции:

$$F = \{\{X\} : \sigma_{eff}(\{X\}) \leq \sigma_{eff}^a, \omega_j(\{X\}) \geq \omega_j^a, j = 1, 2, \dots, k, \{X\}_{\min} \leq \{X\} \leq \{X\}_{\max}\}, \quad (5)$$

где σ_{eff} – эквивалентное напряжение в каждой точке конструкции; σ_{eff}^a , ω_j^a – допустимые напряжение, частота; k – количество учитываемых частот; l – число переменных проектирования в векторе $\{X\}$.

Sergeyev O.A., Kiselev V.G., Sergeyeva S.A. Optimalnoye proyektirovaniye ram s uchetom ogranicheniy po prochnosti i kratnym chastotam sobstvennykh kolebaniy [Optimal design of 3d frame structures taking into account the stress and multiple natural frequency constraints]. *Magazine of Civil Engineering*. 2016. No. 1. Pp. 74–81. doi: 10.5862/MCE.61.7

2. Анализ чувствительности кратной частоты собственных колебаний

Предположим, что $\omega_1 = \omega_2 = \tilde{\omega}$, где $\tilde{\omega}$ – общее значение кратных частот. Тогда вычисление производных от ω_1 и ω_2 представляет собой проблему, так как моды собственных колебаний $\{\Phi_1\}$ и $\{\Phi_2\}$ для ω_1 и ω_2 не единственны. Любая линейная комбинация $\{\Phi_1\}$ и $\{\Phi_2\}$ будет удовлетворять уравнению (2). Пусть векторы $\{\Phi_j\}$ являются $[M]$ -нормированными, то есть

$$\{\Phi_i\}^T [M] \{\Phi_j\} = \delta_{ij}, \quad i, j = 1, 2. \quad (6)$$

Представим линейную комбинацию $\{\Phi_1\}$ и $\{\Phi_2\}$ как

$$\{\tilde{\Phi}\} = \beta_1 \{\Phi_1\} + \beta_2 \{\Phi_2\}, \quad (7)$$

где β_1 и β_2 – неизвестные коэффициенты. Из уравнения $\{\tilde{\Phi}\}^T [M] \{\tilde{\Phi}\} = 1$ получим, что

$$\beta_1^2 + \beta_2^2 = 1. \quad (8)$$

Заметим, что кратные частоты и моды собственных колебаний недифференцируемы в общем смысле. Следовательно, будем использовать производные по направлению в пространстве проектирования для кратных частот $\omega_1 = \omega_2 = \tilde{\omega}$ и моды $\{\tilde{\Phi}\}$ собственных колебаний.

Рассмотрим вариацию вектора переменных проектирования $\{X\}$ в виде $\{X\} + \varepsilon\{e\}$, где единичный вектор $\{e\}$ представляет направление в пространстве проектирования, вдоль которого меняются переменные проектирования; ε – величина возмущения в этом направлении; норма вектора $\{e\}$ определяется равенством $\|\{e\}\| = \sqrt{e_1^2 + e_2^2 + \dots + e_l^2} = 1$.

Дифференцируя уравнение $([K] - \tilde{\omega}^2 [M])\{\tilde{\Phi}\} = 0$ по направлению, получим

$$([\dot{K}] - \tilde{\omega}^2 [\dot{M}])\{\tilde{\Phi}\} + ([K] - \tilde{\omega}^2 [M])\{\dot{\tilde{\Phi}}\} - 2\tilde{\omega}\dot{\tilde{\omega}}[M]\{\tilde{\Phi}\} = 0, \quad (9)$$

где производные по направлению от $[K]$, $[M]$, $\{\tilde{\Phi}\}$, $\tilde{\omega}$ определяются как $[\dot{K}] = \sum_{i=1}^l (\partial[K]/\partial X_i) e_i$,

$$[\dot{M}] = \sum_{i=1}^l (\partial[M]/\partial X_i) e_i, \quad \{\dot{\tilde{\Phi}}\} = \sum_{i=1}^l (\partial\{\tilde{\Phi}\}/\partial X_i) e_i, \quad \dot{\tilde{\omega}} = \sum_{i=1}^l (\partial\tilde{\omega}/\partial X_i) e_i.$$

Умножим уравнение (9) слева на $\{\Phi_1\}^T$, а потом на $\{\Phi_2\}^T$:

$$\{\Phi_1\}^T [\dot{A}]\{\tilde{\Phi}\} - 2\tilde{\omega}\dot{\tilde{\omega}} \{\Phi_1\}^T [M]\{\tilde{\Phi}\} = 0, \quad \{\Phi_2\}^T [\dot{A}]\{\tilde{\Phi}\} - 2\tilde{\omega}\dot{\tilde{\omega}} \{\Phi_2\}^T [M]\{\tilde{\Phi}\} = 0, \quad (10)$$

где $[\dot{A}] = [\dot{K}] - \tilde{\omega}^2 [\dot{M}]$.

Подставляя (7) в (10), получим

$$\begin{bmatrix} \{\Phi_1\}^T [\dot{A}]\{\Phi_1\} - 2\tilde{\omega}\dot{\tilde{\omega}} & \{\Phi_1\}^T [\dot{A}]\{\Phi_2\} \\ \{\Phi_2\}^T [\dot{A}]\{\Phi_1\} & \{\Phi_2\}^T [\dot{A}]\{\Phi_2\} - 2\tilde{\omega}\dot{\tilde{\omega}} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \end{Bmatrix} = 0. \quad (11)$$

Равенство нулю определителя системы уравнений (11) дает квадратное уравнение для определения производных по направлению двукратной частоты:

$$\dot{\tilde{\omega}}^2 4\tilde{\omega}^2 - \dot{\tilde{\omega}} 2\tilde{\omega} (\{\Phi_1\}^T [\dot{A}]\{\Phi_1\} + \{\Phi_2\}^T [\dot{A}]\{\Phi_2\}) + [(\{\Phi_1\}^T [\dot{A}]\{\Phi_1\})(\{\Phi_2\}^T [\dot{A}]\{\Phi_2\}) - (\{\Phi_1\}^T [\dot{A}]\{\Phi_2\})^2] = 0. \quad (12)$$

Уравнение (12) имеет двукратный корень $\dot{\omega}_1 = \dot{\omega}_2 = \dot{\tilde{\omega}} = \{\Phi_1\}^T [\dot{A}]\{\Phi_1\} / (2\tilde{\omega}) = \{\Phi_2\}^T [\dot{A}]\{\Phi_2\} / (2\tilde{\omega})$, если его дискриминант равен нулю.

Сергеев О.А., Киселев В.Г., Сергеева С.А. Оптимальное проектирование рам с учетом ограничений по прочности и кратным частотам собственных колебаний // Инженерно-строительный журнал. 2016. №1(61). С. 74–81.

Заметим, что, например, в плоскости переменных проектирования X_1 и X_2 (рис. 1), используя условие для двукратного корня $\{\Phi_1\}^T [A] \{\Phi_1\} = \{\Phi_2\}^T [A] \{\Phi_2\}$, можно точно определить ориентацию вектора $\{e\}$ для траектории, где частоты ω_1 и ω_2 совпадают:

$$\operatorname{tg} \varphi = \left(\{\Phi_1\}^T \frac{\partial [A]}{\partial X_1} \{\Phi_1\} - \{\Phi_2\}^T \frac{\partial [A]}{\partial X_1} \{\Phi_2\} \right) / \left(\{\Phi_2\}^T \frac{\partial [A]}{\partial X_2} \{\Phi_2\} - \{\Phi_1\}^T \frac{\partial [A]}{\partial X_2} \{\Phi_1\} \right), \quad (13)$$

где $[A] = [K] - \tilde{\omega}^2 [M]$.

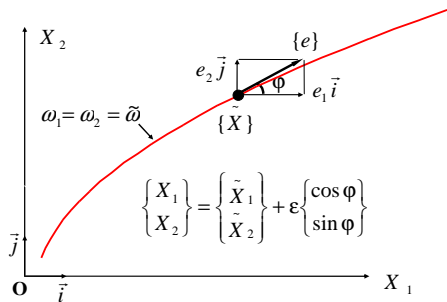


Рисунок 1. Траектория двукратной частоты

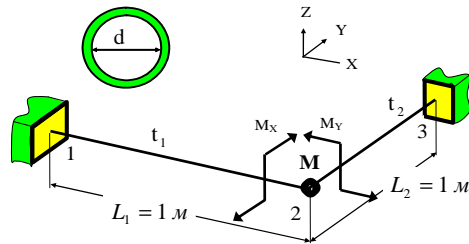


Рисунок 2. Пространственная рама

3. Пример 1: рама с двумя степенями свободы, двукратный оптимум

Рассмотрим двухэлементную раму с учетом собственного веса с двумя переменными проектирования: t_1 , t_2 – толщины кольцевых сечений балочных элементов с внутренним диаметром $d = 0.04$ м. В узле 2 добавлены масса M с моментами инерции $I_X = I_Y = 0.147$ кг м² и сосредоточенные внешние моменты $M_X = M_Y = 784.8$ Н м (рис. 2). Рама имеет две степени свободы: углы поворота массы M относительно осей X и Y . Модуль упругости $E = 200$ ГПа, модуль сдвига $G = 80$ ГПа, плотность материала $\rho = 7799$ кг/м³, допустимые эквивалентное напряжение и частота $\sigma_{eff}^a = 147$ МПа, $\omega^a = 118.96$ Гц. Переменные проектирования рамы изменяются в пределах (м): $0.001 \leq t_1 \leq 0.005$, $0.001 \leq t_2 \leq 0.005$.

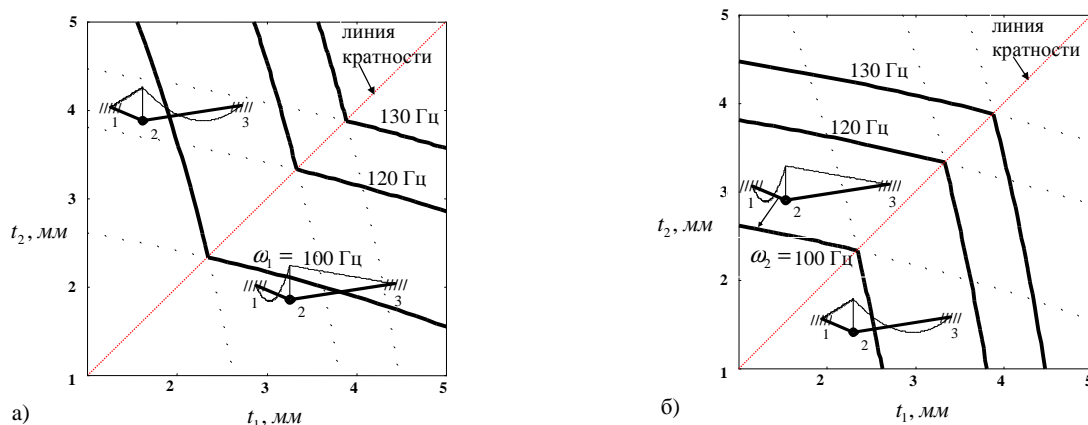


Рисунок 3. Линии уровней ω_1 и ω_2 : а) $\omega_1 = \text{const}$, б) $\omega_2 = \text{const}$

Линии уровней частот и моды собственных колебаний представлены в плоскости переменных проектирования t_1 , t_2 на рисунке 3. Из него видно, что пересечения линий уровня

Sergeyev O.A., Kiselev V.G., Sergeyeva S.A. Optimalnoye proyektirovaniye ram s uchetom ogranicheniy po prochnosti i kratnym chastotam sobstvennykh kolebaniy [Optimal design of 3d frame structures taking into account the stress and multiple natural frequency constraints]. *Magazine of Civil Engineering*. 2016. No. 1. Pp. 74–81. doi: 10.5862/MCE.61.7

$\omega_1 = const$ и $\omega_2 = const$ на линии кратности нет. На рисунке 4 показаны поверхности частот $\omega_1(t_1, t_2)$ и $\omega_2(t_1, t_2)$, линия кратности проходит там, где $\omega_1 = \omega_2$. Заметим, что на ней нет пересечения частотных поверхностей, происходит только обмен модами собственных колебаний.

Оптимальная масса рамы $W_{opt} = 6.94$ кг связана с двукратной частотой $\omega_1 = \omega_2$ и лежит на границе допустимой области F в точке Optimum ($t_1 = 3.27$ мм, $t_2 = 3.27$ мм) (рис. 5).

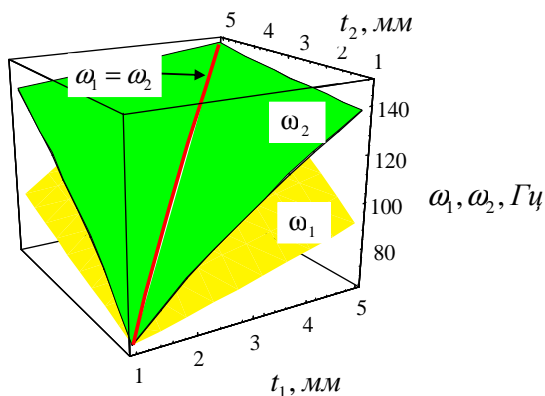


Рисунок 4. Поверхности частот ω_1 и ω_2

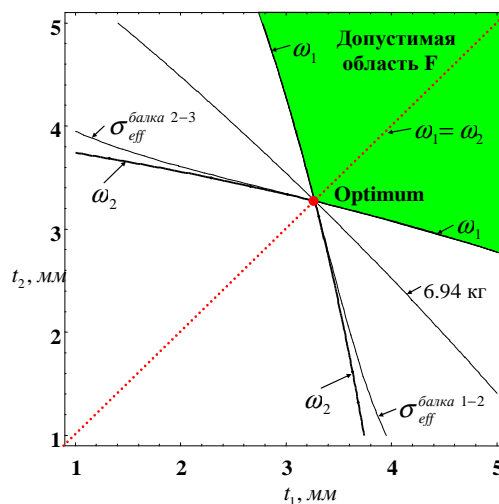


Рисунок 5. Двукратный оптимум

4. Пример 2: купол с 78 степенями свободы, простой оптимум

Рассмотрим задачу оптимального проектирования пространственного купола с ограничениями на фундаментальную частоту $\omega_1 \geq 5.9$ Гц и на эквивалентные напряжения $\sigma_{eff} \leq 147$ МПа. Модуль упругости материала $E = 200$ ГПа, модуль сдвига $G = 80$ ГПа, плотность материала $\rho = 7799$ кг/м³. Конструкция, состоящая из 52 балочных элементов, симметрична и, следовательно, ожидаются кратные частоты. Балочные элементы объединяются в 8 типов кольцевых сечений $t_a, t_b, t_c, t_d, t_e, t_f, t_g, t_h$ с внутренним диаметром $d = 86$ мм (рис. 6; табл. 1). Координаты узлов 1–13 связываются в 5 групп через переменные проектирования Z_1, X_2, Z_2, X_6, Z_6 . Сосредоточенная сила $P = 632745$ Н приложена в узле 1 в отрицательном направлении оси Z . Также принимается во внимание собственный вес балочных элементов.

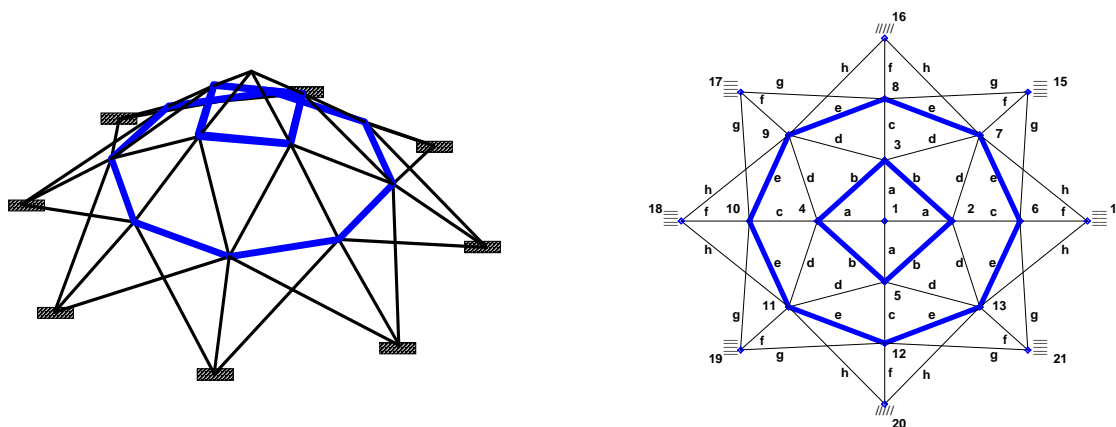


Рисунок 6. Пространственный купол. Номера узлов и 8 типов сечений (a–h)

На рисунке 7 показана оптимальная форма купола. Оптимальные значения переменных проектирования и массы купола приведены в таблице 1. Анализируя полученные результаты, можно сделать следующие выводы:

- 1) оптимальное решение характеризуется некротной, или простой фундаментальной частотой;
- 2) если использовать в качестве критерия для кратных частот относительную разницу между ними $\leq 10^{-4}$, тогда вторая и третья частоты будут кратными (рис. 8).

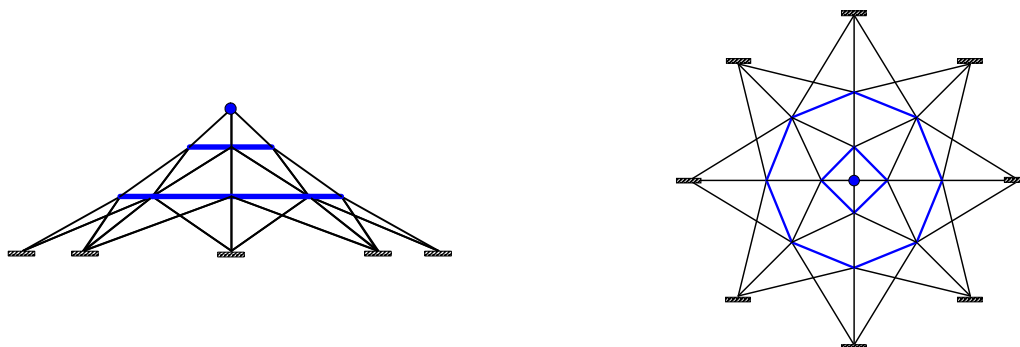


Рисунок 7. Оптимальная форма купола с сосредоточенной силой $P = 632745$ Н в узле 1.

$$M_{opt} = 2069.145 \text{ кг}$$

Таблица 1. Оптимальные значения переменных проектирования (мм) и массы купола (кг)

Сосредоточенная сила $P = 632745$ Н на вершине купола с учетом собственного веса элементов			
Допустимая фундаментальная частота $\omega^a = 5.9$ Гц			
ПП	Minimum	Maximum	Оптимальные значения (мм)
t_a	1.5	10.	5.809
t_b	1.5	10.	1.5
t_c	1.5	10.	4.046
t_d	1.5	10.	2.149
t_e	1.5	10.	1.5
t_f	1.5	10.	3.907
t_g	1.5	10.	1.5
t_h	1.5	10.	1.5
Z_1	7000.	11000.	10428.27
X_2	18000.	22000.	18000.
Z_2	6000.	10000.	7597.405
X_6	23000.	27500.	23000.
Z_6	3000.	7000.	4015.105
Оптимальная масса, кг			2069.145
Число итераций			19
Число активных ограничений для оптимума			46

Sergeyev O.A., Kiselev V.G., Sergeyeva S.A. Optimalnoye proyektirovaniye ram s uchetom ogranicheniy po prochnosti i kratnym chastotam sobstvennykh kolebaniy [Optimal design of 3d frame structures taking into account the stress and multiple natural frequency constraints]. *Magazine of Civil Engineering*. 2016. No. 1. Pp. 74–81. doi: 10.5862/MCE.61.7

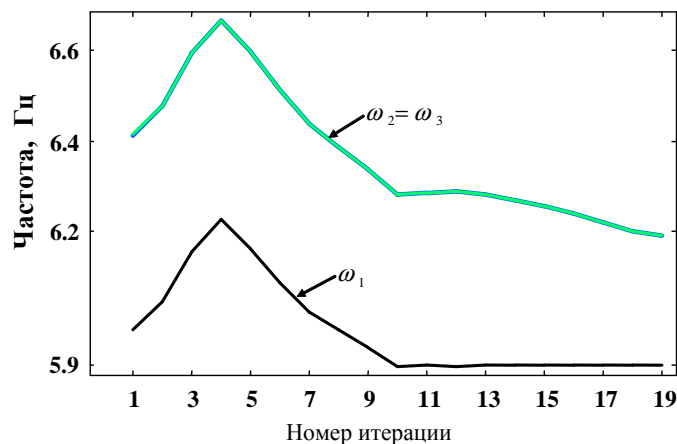


Рисунок 8. График зависимости частоты от числа итераций

Выводы

Рамы – один из наиболее распространенных типов несущих конструкций. В работе расширены проведенные ранее исследования и рассмотрено одновременное варьирование координат узлов и размеров поперечных сечений конструкции. Важно отметить, что рамные конструкции более чувствительны к варьированию координат узлов. Одновременное варьирование координат узлов и размеров поперечных сечений дает более эффективные проекты, а использование ограничений на напряжения в элементах рамы и частоты собственных колебаний гарантирует практически оптимальные проекты, для которых контролируются статические и динамические отклики.

Замечено, что на линии кратности нет пересечения поверхностей частот, на ней они только касаются друг друга и происходит их резкий излом и обмен модами собственных колебаний.

Литература

- Ohsaki M., Fujisawa K., Katoh N., Kanno Y. Semi-definite programming for topology optimization of trusses under multiple eigenvalue constraints // *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*. 1999. Vol. 180. Pp. 203–217.
- Krog L.A., Olhoff N. Topology optimization of plate and shell structures with multiple eigenfrequencies // *Proceedings of the first World Congress of Structural and Multidisciplinary Optimization*. Goslar, Germany. 1995. Pp. 675–682.
- Khot K.S. Optimization of structures with multiple frequency constraints // *Computers & Structures*. 1985. Vol. 20. Pp. 869–876.
- Masur E.F. Optimal structural design under multiple eigenvalue constraints // *International Journal of Solids and Structures*. 1984. Vol. 20. Pp. 211–231.
- Gravesen J., Evgrafov A., Nguyen D.M. On the sensitivities of multiple eigenvalues // *Structural and Multidisciplinary Optimization*. 2011. Vol. 44. Pp. 583–587.
- Lee I.W., Jung G.H. An efficient algebraic method for the computation of natural frequency and mode shape sensitivities. Part II, Multiple natural frequencies // *Computers & Structures*. 1997. Vol. 62. Pp. 437–443.
- Seyranian A.P., Lund E., Olhoff N. Multiple Eigenvalues in Structural Optimization Problems // *Structural Optimization*. 1994. Vol. 8. Pp. 207–227.
- Mills-Curran W.C. Calculation of eigenvector derivatives for structures with repeated eigenvalues // *AIAA Journal*. 1988. Vol. 26(7). Pp. 867–871.

References

- Ohsaki M., Fujisawa K., Katoh N., Kanno Y. Semi-definite programming for topology optimization of trusses under multiple eigenvalue constraints. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*. 1999. Vol. 180. Pp. 203–217.
- Krog L.A., Olhoff N. Topology optimization of plate and shell structures with multiple eigenfrequencies. *Proceedings of the first World Congress of Structural and Multidisciplinary Optimization*. Goslar, Germany. 1995. Pp. 675–682.
- Khot K.S. Optimization of structures with multiple frequency constraints. *Computers & Structures*. 1985. Vol. 20. Pp. 869–876.
- Masur E.F. Optimal structural design under multiple eigenvalue constraints. *International Journal of Solids and Structures*. 1984. Vol. 20. Pp. 211–231.
- Gravesen J., Evgrafov A., Nguyen D.M. On the sensitivities of multiple eigenvalues. *Structural and Multidisciplinary Optimization*. 2011. Vol. 44. Pp. 583–587.
- Lee I.W., Jung G.H. An efficient algebraic method for the computation of natural frequency and mode shape sensitivities. Part II, Multiple natural frequencies. *Computers & Structures*. 1997. Vol. 62. Pp. 437–443.
- Seyranian A.P., Lund E., Olhoff N. Multiple Eigenvalues in Structural Optimization Problems. *Structural Optimization*. 1994. Vol. 8. Pp. 207–227.
- Mills-Curran W.C. Calculation of eigenvector derivatives for structures with repeated eigenvalues. *AIAA Journal*. 1988. Vol. 26. Pp. 867–871.
- Kadisov G.M., Chernyshov V.V. Konechno-elementnoye modelirovaniye dinamiki mostov pri vozdeystvii podvizhnoy

Сергеев О.А., Киселев В.Г., Сергеева С.А. Оптимальное проектирование рам с учетом ограничений по прочности и кратным частотам собственных колебаний // *Инженерно-строительный журнал*. 2016. №1(61). С. 74–81.

9. Кадисов Г.М., Чернышов В.В. Конечно-элементное моделирование динамики мостов при воздействии подвижной нагрузки // Инженерно-строительный журнал. 2013. №9(44). С. 56–63.
10. Савин С.Н. Динамический мониторинг строительных конструкций на примере пандуса киноконцертного зала «Пушкинский» в г. Москва // Инженерно-строительный журнал. 2012. №7(33). С. 58–62.
11. Денисов Г.В. К вопросу о локализации колебаний в строительных конструкциях // Инженерно-строительный журнал. 2012. №5(31). С. 60–64.
12. Денисов Г.В., Лалин В.В. О сплошном спектре колебаний балочных элементов конструкции при высокочастотных воздействиях // Инженерно-строительный журнал. 2012. №1(27). С. 91–97.
13. Olhoff N. Optimal design with respect to structural eigenvalues // In Proceedings of 15th IUTAM Congress. Toronto, Canada. 1980. Pp. 133–149.
14. Nakamura T., Ohsaki M. A natural generator of optimum topology of plane trusses for specified fundamental frequency // Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering. 1992. Vol. 94(1). Pp. 113–129.
15. Kirsch U. Combined approximations: A general reanalysis approach for structural optimization // Structural and Multidisciplinary Optimization. 2000. Vol. 20. Pp. 97–106.
16. Chen S.H., Yang X.W., Lian H.D. Comparison of several eigenvalue reanalysis methods for modified structures // Structural and Multidisciplinary optimization. 2000. Vol. 20. Pp. 253–259.
17. Haug E.J., Choi K.K., Komkov V. Design Sensitivity Analysis of Structural Systems. New York: Academic Press, 1986. 381 p.
18. Ohsaki M. Optimization of finite dimensional structures. USA: CRC Press, 2010. 439 p.
19. Sergeyev O., Mroz Z. Sensitivity analysis and optimal design of 3D frame structures for stress and frequency constraints // Computers & Structures. 2000. Vol. 75. Pp. 167–185.
20. Sergeyev O., Pedersen P. On design of joint positions for minimum mass 3D frames // Structural Optimization. 1996. Vol. 11. Pp. 95–101.
- nagruzki [Finite-element modelling of bridge dynamics from exposure to moving load]. *Magazine of Civil Engineering*. 2013. No. 9. Pp. 56–63. (rus)
10. Savin S.N. Dinamicheskiy monitoring stroitelnykh konstruktсий na primere pandusa kinokontsertnogo zala «Pushkinskiy» v g. Moskva [Dynamic monitoring of building structures on the example of the concert hall "Pushkinskiy" ramp in Moscow]. *Magazine of Civil Engineering*. 2012. No. 7. Pp. 58–62. (rus)
11. Denisov G.V. K voprosu o lokalizatsii kolebaniy v stroitelnykh konstruktсийakh [On the vibrations localization in building structures]. *Magazine of Civil Engineering*. 2012. No. 5. Pp. 60–64. (rus)
12. Denisov G.V., Lalin V.V. O sploshnom spektre kolebaniy balochnykh elementov [About the continuous spectrum of vibrations of beam construction elements under high-frequency effects]. *Magazine of Civil Engineering*. 2012. No. 1. Pp. 91–97. (rus)
13. Olhoff N. Optimal design with respect to structural eigenvalues. In *Proceedings of 15th IUTAM Congress*. Toronto. Canada. 1980. Pp. 133–149.
14. Nakamura T., Ohsaki M. A natural generator of optimum topology of plane trusses for specified fundamental frequency. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*. 1992. Vol. 94. Pp. 113–129.
15. Kirsch U. Combined approximations: A general reanalysis approach for structural optimization. *Structural and Multidisciplinary Optimization*. 2000. Vol. 20. Pp. 97–106.
16. Chen S.H., Yang X.W., Lian H.D. Comparison of several eigenvalue reanalysis methods for modified structures. *Structural and Multidisciplinary optimization*. 2000. Vol. 20. Pp. 253–259.
17. Haug E.J., Choi K.K., Komkov V. *Design Sensitivity Analysis of Structural Systems*. New York. Academic Press. 1986. 381 p.
18. Ohsaki M. *Optimization of finite dimensional structures*. USA. CRC Press. 2010. 439 p.
19. Sergeyev O., Mroz Z. Sensitivity analysis and optimal design of 3D frame structures for stress and frequency constraints. *Computers & Structures*. 2000. Vol. 75. Pp. 167–185.
20. Sergeyev O., Pedersen P. On design of joint positions for minimum mass 3D frames. *Structural Optimization*. 1996. Vol. 11. Pp. 95–101.

Олег Анатольевич Сергеев,
+79107974190; эл. почта: nnsa@rambler.ru

Владимир Геннадьевич Киселев,
+79103833875; эл. почта: kivg@mts-nn.ru

Светлана Анатольевна Сергеева,
+79040648651; эл. почта: nnsveta@rambler.ru

Oleg Sergeyev,
+79107974190; nnsa@rambler.ru

Vladimir Kiselev,
+79103833875; kivg@mts-nn.ru

Svetlana Sergeyeva,
+79040648651; nnsveta@rambler.ru

© Сергеев О.А., Киселев В.Г., Сергеева С.А., 2016

Sergeyev O.A., Kiselev V.G., Sergeyeva S.A. Optimalnoye proyektirovaniye ram s uchetom ogranicheniy po prochnosti i kratnym chastotam sobstvennykh kolebaniy [Optimal design of 3d frame structures taking into account the stress and multiple natural frequency constraints]. *Magazine of Civil Engineering*. 2016. No. 1. Pp. 74–81. doi: 10.5862/MCE.61.7