DOI: 10.5862/JPM.242.15
УДК: 519.21(075)

*И.Д. Лобанов, А.В. Денисов*

Санкт-Петербургский политехнический университет Петра Великого

# ТОЧНОЕ АНАЛИТИЧЕСКОЕ РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ О СРЕДНЕМ ЧИСЛЕ ВЫБРОСОВ УЗКОПОЛОСНОГО ГАУССОВСКОГО СЛУЧАЙНОГО ПРОЦЕССА

В представленной работе рассмотрена задача о количестве выбросов (пересечений уровня) стационарного узкополосного гауссовского процесса, заданного экспоненциально-косинусоидальной автокорреляционной функцией. Задача была решена ранее С. Райсом в терминах совместной плотности вероятностей процесса и его производной по времени, но в данной работе получено решение с использованием функционала плотности вероятностей, полученного И.Н. Амиантовым, а также канонического разложения случайного процесса. Также в данной работе для решения задачи рассмотрено оптимальное каноническое разложение узкополосного случайного процесса на основе работы А.П. Филимонова и А.В. Денисова. Использование вышеперечисленных средств позволило получить точное аналитическое решение задачи о выбросах стационарного гауссовского узкополосного случайного процесса. Полученные формулы применимы, например, при решении задач об остаточном ресурсе некоторых радиотехнических изделий, об обрушающихся морских волнах и в других случаях.

ВЫБРОС СЛУЧАЙНОГО ПРОЦЕССА, ФУНКЦИОНАЛ ПЛОТНОСТИ ВЕРОЯТНОСТИ, КАНОНИЧЕСКОЕ РАЗЛОЖЕНИЕ.

Задача о среднем числе выбросов (переходов через уровень) стационарным случайным процессом $\xi(t)$ впервые была решена С. Райсом [1] в терминах совместной плотности вероятностей $W(\xi(t), \dot{\xi}(t))$ процесса $\xi(t)$ и его производной по времени $\dot{\xi}(t)$. Это решение вошло во многие учебники и обзорные статьи по статистической радиотехнике и радиофизике, например, в работы [2 – 4].

Эта задача не потеряла актуальности и в настоящее время. Формулу для нахождения числа переходов через уровень можно использовать при решении следующих прикладных задач [5 – 7]:

об остаточном ресурсе некоторых радиотехнических изделий (например, дорогих массивных трансформаторов);

об обрушении морских (океанических) гравитационных волн (если решение таких задач основано на спектральной методологии).

Однако в работе [3, с. 456] при выводе формулы для числа переходов через уровень на достаточно малом промежутке $\Delta t$, осуществляется переход от приращения производной случайного процесса $\Delta\dot{\xi}$ к дифференциалу $d\dot{\xi}$, но при этом не выполняется операция предельного перехода $\Delta t \to 0$. Невыполнение указанной операции нам представляется не вполне корректным, вследствие чего формула С. Райса приобретает приближенный характер.

При решении подобных задач исследователь обычно располагает графиком спектральной плотности мощности и (или) графиком автокорреляционной функции.

В связи с этим представляет интерес получение точного аналитического решения данной задачи с использованием функционала плотности вероятностей [8] и канонического разложения случайного процесса [9, 10].

Нахождение функционала плотности вероятностей $F(x(t))$, который показывает относительную вероятность появления траектории, для произвольной автокорреляционной функции представляет собой достаточно сложную математическую задачу, связанную с решением интегрального уравнения Фредгольма. Однако в работе [8] получено точное выражение для функционала плотности вероятностей. Это выражение будет использовано как базовое в настоящей работе и представлено далее.

Рассмотрим на промежутке $[-T/2,\ T/2]$ траектории стационарного узкополосного гауссовского случайного процесса $x(t)$, заданного спектральной плотностью мощности (1) и соответствующей ей автокорреляционной функцией (2):

$$\Phi(f)=\frac{2a\sigma^2}{(2\pi)^4(f-f_0)^2+(2\pi)^2f^2}, \tag{1}$$

$$K(\tau)=\sigma^2\exp(-a|\tau|)\times\left(\cos(\omega_1\tau)+\frac{a}{\omega_1}\sin(\omega_1|\tau|)\right), \tag{2}$$

где $\omega_0=2\pi f_0, \omega_0^2=\omega_1^2+a^2$.

Введем обозначение

$$H_0=\exp\left[-\frac{1}{4\sigma^2a^2\omega_0^2}\left([a\omega_0^2x_1^2+ax_1^2]+[a\omega_0^2x_2^2+ax_2^2]\right)\right],$$

где $x_1$, $x_2$ — соответственно начальное и конечное значения траектории случайного процесса $x(t)$ на некотором промежутке $[-T/2, T/2]$.

С учетом введенного обозначения (указанного промежутка) функционал плотности вероятностей процесса (1), (2) имеет следующий вид [8]:

$$F(x(t))=hH_0\exp\left[-\frac{1}{4\sigma^2a^2\omega_0^2}\left(\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}}x''^2(t)dt+a^2\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}}x'^2(t)dt+\omega_0^4\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}}x^2(t)dt+2\omega_0^2\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}}x''(t)dt\right)\right], \tag{3}$$

где $x'(t)$, $x''(t)$ — первая и вторая производные $x(t)$; промежуток $[-T/2,\ T/2]$ произвольный; $h$ — параметр, который зависит от ранга дробления $n$-мерной функции распределения рассматриваемого случайного процесса при $n\to\infty$ и является одинаковым для различных реализаций $x(t)$ [8].

Всюду в дальнейшем значение $T$ будем полагать равным периоду первой гармоники $T_0$ канонического разложения случайного процесса по тригонометрическому базису.

Запишем общий вид канонического разложения узкополосного процесса $x(t)$ с нулевым математическим ожиданием по такому базису:

$$x(t)=A_0+\sum_{k=1}^{\infty}A_k\cos\left(\frac{2\pi k}{T_0}t+\varphi_k\right); \tag{4}$$

в этом базисе коэффициенты $A_0, A_k$ — некоррелированные между собой гауссовские случайные величины с нулевым математическим ожиданием и дисперсиями $\sigma_k^2$; $\varphi_k$ — случайные величины с равномерным распределением в интервале $[0;2\pi]$.

Дисперсии $\sigma_k^2$ находятся по известной автокорреляционной функции [9]:

$$\sigma_0^2=2\int_0^{\frac{T}{2}}\sigma^2\exp(-a|\tau|)\left(\cos(\omega_1\tau)+\frac{a}{\omega_1}\sin(\omega_1|\tau|)\right)d\tau, \tag{5}$$

$$\sigma_k^2=2\int_0^{\frac{T}{2}}\sigma^2\exp(-a|\tau|)\left(\cos(\omega_1\tau)+\frac{a}{\omega_1}\sin(\omega_1|\tau|)\right)\cos\left(\frac{2\pi k}{T}\tau\right)d\tau. \tag{6}$$

Исключив из разложения (4) те члены ряда, для которых $\sigma_k^2\ll 1$, разложение $x(t)$ можно приближенно представить в виде конечной суммы:

$$x(t) = \sum_{k=M}^{N} A_k \cos\left(\frac{2\pi k}{T_0} t + \varphi_k\right), \qquad (7)$$

причем

$$\sum_{k=M}^{N} \sigma_k^2 \approx \sigma^2.$$

Оптимальный выбор периода $T_0$ канонического разложения, как известно из статьи [9], связан со следующими требованиями:

1) количество членов разложения должно быть минимальным,

2) сумма дисперсий $\sigma_k^2$ в разложении (7) должна быть близка к суммарной дисперсии $\sigma^2$.

Эти условия можно удовлетворить только в том случае, когда период канонического разложения $T_0$ обратно пропорционален эффективной ширине графика спектральной плотности мощности [9].

Для узкополосного случайного процесса (1), (2) эффективная ширина $\Delta f$ графика спектральной плотности мощности определяется характерным масштабом изменения «огибающей» автокорреляционной функции, т. е. параметром $a$, так что в случае узкополосного и достаточно высокочастотного процесса, когда постоянная составляющая отсутствует, выполняется неравенство

$$T_0 \ge \frac{1}{ak},$$

где $k$ – номер наименьшей гармоники канонического разложения.

Если представить оптимальное каноническое разложение (7), то $k$ можно положить равным $M$. Обратно пропорциональная связь между $T_0$ и $a$ согласуется с теоремой отсчетов Котельникова [11].

Заметим, что если использовать неоптимальное каноническое разложение и взять другое (большее) значение $T$, то дальнейшее решение останется неизменным.

С учетом выведенных выше формул получим выражение для среднего числа выбросов за время $T_0$.

Введем следующее обозначение:

$$x(t) = \sum_{k=M}^{N} x_k(t),\ x_k(t) = A_k \cos\left(\frac{2\pi k}{T_0} t + \varphi_k\right). \quad (8)$$

Нетрудно получить, что

$$F(x_k(t)) = hH_0 \exp\left[-\frac{2\pi A_k^2 k^2}{T_0} \times \right.$$
$$\left. \times \frac{4k^2 + a^2}{4a^2\omega^2\sigma^2 T_0^2} - \frac{\omega^2 T_0}{16a^2\sigma^2}\right]. \qquad (9)$$

Заметим, что количество осцилляций $k$-ой гармоники за время $T_0$ равно $2k$.

Используя выражение для функционала плотности вероятностей (9), определим вероятность появления $k$-ой гармоники с амплитудой, превосходящей уровень $|C|$ (берется модуль величины, так как $C$ может быть как больше, так и меньше нуля). Учитывая, что $A_k$ подчиняется гауссовской статистике, получим следующее:

$$P(x_k(t), C) = \frac{1}{\Phi_{norm}} \int_{|C|}^{+\infty} \frac{1}{\sigma_k\sqrt{2\pi}} \exp\left[-\frac{A_k^2}{2\sigma_k^2} - \right.$$
$$\left. -\frac{2\pi A_k^2 k^2}{T_0} \cdot \frac{4k^2 + a^2}{4a^2\omega^2\sigma^2 T_0^2} - \frac{\omega^2 T_0}{16a^2\sigma^2}\right] dA_k, \qquad (10)$$

где

$$\Phi_{norm} = \sum_{k=M}^{N} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sigma_k\sqrt{2\pi}} \exp\left[-\frac{A_k^2}{2\sigma_k^2} - \frac{2\pi A_k^2 k^2}{T_0} \times \right.$$
$$\left. \times \frac{4k^2 + a^2}{4a^2\omega^2\sigma^2 T_0^2} - \frac{\omega^2 T_0}{16a^2\sigma^2}\right] dA_k.$$

С учетом вероятности (10) формула для вычисления среднего числа переходов через уровень $C$ за время $T$ имеет вид:

$$\overline{N} = \frac{2}{\Phi_{norm}} \sum_{k=M}^{N} k \int_{|C|}^{+\infty} \frac{1}{\sigma_k\sqrt{2\pi}} \exp\left[-\frac{A_k^2}{2\sigma_k^2} - \right.$$
$$\left. -\frac{2\pi A_k^2 k^2}{T_0} \cdot \frac{4k^2 + a^2}{4a^2\omega^2\sigma^2 T_0^2} - \frac{\omega^2 T_0}{16a^2\sigma^2}\right] dA_k. \qquad (11)$$

Докажем, что для определения среднего числа переходов случайным процессом через уровень $C$ достаточно рассмотреть лишь траектории, состоящие из одной гармоники. Для этого будем рассматривать кортежи реализаций случайного процесса. Назовем основным набором кортеж реализаций на промежутке $[-T_0/2,\ T_0/2]$, где $T_0$ – период первой гармоники канонического разложения случайного процесса. Расширенным набором будем называть кортеж реализаций случайного процесса на промежутке $[-NT_0/2, NT_0/2]$, где $N$ – целое число. Поскольку процесс является периодическим в среднем квадратическом, то количество переходов через уровень траекторией из расширенного набора будет равно $kN$, где $k$ – количество переходов через уровень траекторией за время $T$ на основном промежутке.

Если подставлять в выражение (3) траектории из расширенного набора, то можно прийти к следующему заключению: существует такой номер $N$, начиная с которого вероятность реализации любой линейной комбинации становится много меньше, чем таковая для любой отдельно взятой гармоники канонического разложения. Таким образом, среднее число пересечений через уровень на промежутке $[-NT_0/2, NT_0/2]$ будет зависеть от вероятности реализации отдельно взятых гармоник и количества пересечений ими уровня. Принимая во внимание, что среднее число переходов уровня на промежутке времени $[-NT_0/2, NT_0/2]$ равно $KN$, где $K$ – среднее число пересечений уровня за время $T$, получаем, что среднее пересечение уровня за время $T$ будет также зависеть только от вероятности реализации отдельно взятых гармоник и количества пресечений ими уровня. Из этого следует справедливость формулы (11).

Формулу (11) можно применять для определения количества переходов стационарного гауссовского узкополосного случайного процесса через произвольный уровень $C$.

Формула (11) является точным аналитическим решением задачи о среднем числе выбросов (переходов через уровень) стационарным случайным процессом для рассмотренной модели автокорреляционной функции и может быть распространена на другие близкие модели узкополосных процессов.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ


[1] **Райс С.** Теория флуктуационных шумов. Пер. с англ. под ред. Н.А. Железнова // Теория передачи электрических сигналов при наличии помех. М.: Изд-во ИЛ, 1953. С. 88–238.

[2] **Бунимович В.И.** Флуктуационные процессы в радиоприемных устройствах. М.: Советское радио, 1951. 360 с.

[3] **Тихонов В.И.** Выбросы случайных процессов // Успехи физических наук. 1962. Т. 77. Вып. 3. С. 449–480.

[4] **Тихонов В. И.** Выбросы случайных процессов. М.: Наука, 1970. 392 с.

[5] **Шарков Е.А.** Обрушающиеся морские волны: структура, геометрия, электродинамика. М.: Научный мир, 2009. 304 с.

[6] **Young I.R., Babanin A.V.** Spectral distribution of energy dissipation of wind-generated waves due to dominant wave breaking // J. Physical Oceanography. 2006. Vol. 36. No. 3. Pp. 376–394.

[7] **Чайковский В.С.** Методика определения размаха шумов по спектральной плотности мощности // Тр. Междунар. симп. «Надежность и качество». 2011. Т. 2. С. 286–288.

[8] **Амиантов И.Н.** Избранные вопросы статистической теории связи М.: Советское радио, 1971. 416 с.

[9] **Филимонов А.П., Денисов А.В.** Выбор параметров канонического разложения узкополосного случайного процесса // Известия вузов. Приборостроение. 2007. № 8. С. 48–53.

[10] **Синицын И.Н.** Канонические представления случайных функций и их применение в задачах компьютерной поддержки научных исследований. М.: Торус Пресс, 2009. 768 с.

[11] **Свиньин С.Ф.** Базисные сплайны в теории отсчетов сигналов СПб.: Наука, 2003. 118 с.


## СВЕДЕНИЯ ОБ АВТОРАХ


**ЛОБАНОВ Иван Дмитриевич** – *студент Института физики, нанотехнологий и телекоммуникаций Санкт-Петербургского политехнического университета Петра Великого.*

195251, Российская Федерация, г. Санкт-Петербург, Политехническая ул., 29
lobanov.111@yandex.ru

**ДЕНИСОВ Александр Владимирович** – *кандидат физико-математических наук, доцент кафедры радиотехники и телекоммуникаций Санкт-Петербургского политехнического университета Петра Великого.*

195251, Российская Федерация, г. Санкт-Петербург, Политехническая ул., 29
A.V.Denisov@inbox.ru

*Lobanov I.D., Denisov A.V.* THE EXACT ANALYTICAL SOLUTION OF THE PROBLEM ON THE AVERAGE NUMBER OF SPIKES OF THE NARROWBAND GAUSSIAN STOCHASTIC PROCESS.

In this article, the problem of the number of spikes (level crossings) of the stationary narrowband Gaussian process has been considered. The process was specified by the exponentially-cosine autocorrelation function. The problem had been solved earlier by S. Rice in terms of the joint probabilities' density of the process and its derivative with respect to time, but in our article we obtained the solution using the functional of probabilities' density (the functional was obtained by I.N. Amiantov), as well as an expansion of the canonical stochastic process. In this article, the optimal canonical expansion of narrowband stochastic process based on the work of A.P. Filimonov and A.V. Denisov was also considered to solve the problem. The application of all these resources allowed obtaining an exact analytical solution of the problem on spikes of stationary narrowband Gaussian process. The obtained formulae one could use to solve, for example, some problems about the residual resource of some radiotechnical products, about the breaking sea waves and others.

EMISSION OF STOCHASTIC PROCESS, DENSITY FUNCTIONAL OF PROBABILITY, CANONICAL EXPANSION.

## REFERENCES

[1] **S. Rays,** Teoriya fluktuatsionnykh shumov [The theory of fluctuation noise], Teoriya peredachi elektricheskikh signalov pri nalichii pomekh [In: The theory of electric signaling with noise], Moscow, Izdatelstvo IL, 1953, Pp. 88–238.

[2] **V.I. Bunimovich,** Fluktuatsionnyye protsessy v radiopriyemnykh ustroystvakh [Fluctuation processes in the radio receivers], Moscow, Sovetskoye radio, 1951.

[3] **V.I. Tikhonov,** Vybrosy sluchaynykh protsessov [Overshoots of random processes], Uspekhi fizicheskikh nauk. 77 (3) (1962) 449–480.

[4] **V.I. Tikhonov,** Vybrosy sluchaynykh protsessov [Overshoots of random processes], Moscow, Nauka, 1970.

[5] **E.A. Sharkov,** Obrushayushchiyesya morskiye volny: struktura, geometriya, elektrodinamika [Hitting sea waves: the structure, geometry, electrodynamics], Moscow, Nauchniy mir, 2009.

[6] **I.R. Young, A.V. Babanin,** Spectral distribution of energy dissipation of wind-generated waves due to dominant wave breaking, J. Physical Oceanography. 36 (3) (2006) 376–394.

[7] **V.S. Tchaykovskiy,** Metodika opredeleniya razmakha shumov po spektralnoy plotnosti moshchnosti [The procedure for finding the peak-to-peak noise amplitude from the power spectral density], Trudy Mezhdunarodnogo simpoziuma «Nadezhnost i kachestvo». 2 (2011) 286–288.

[8] **I.N. Amiantov,** Izbrannyye voprosy statisticheskoy teorii svyazi [Selected points of statistical communication theory], Moscow, Sovetskoye radio, 1971.

[9] **A.P. Filimonov, A.V. Denisov,** Vybor parametrov kanonicheskogo razlozheniya uzkopolosnogo sluchaynogo protsessa [Parametrization of canonical expansion for narrowband random process], Izvestiya vuzov. Priborostroyeniye. No. 8 (2007) 48–53.

[10] **I.N. Sinitsyn,** Kanonicheskiye predstavleniya sluchaynykh funktsiy i ikh primeneniye v zadachakh kompyuternoy podderzhki nauchnykh issledovaniy [Canonical representation of random functions and their application to the computational support of scientific research], Moscow, Toruss Press, 2009.

[11] **S.F. Svin'in,** Bazisniye splayny v teorii otschetov signalov [Basic splines in the theory of signal count], St. Petersburg, Nauka, 2003.

## THE AUTHORS

**LOBANOV Ivan D.**
*Peter the Great St. Petersburg Polytechnic University*
29 Politekhnicheskaya St., St. Petersburg, 195251, Russian Federation
lobanov.111@yandex.ru

**DENISOV Alexander V.**
*Peter the Great St. Petersburg Polytechnic University*
29 Politekhnicheskaya St., St. Petersburg, 195251, Russian Federation
A.V.Denisov@inbox.ru