УДК 330,42; 51-77 DOI: 10.5862/JE.245.1

А.Г. Дмитриев, Т.А. Козелецкая, Е.А. Герман

ДВУХПАРАМЕТРИЧЕСКОЕ УРАВНЕНИЕ КАРДИНАЛИСТСКОЙ ПОЛЕЗНОСТИ И ВОЗМОЖНОСТИ ЭМПИРИЧЕСКОЙ ОЦЕНКИ ЕГО ПАРАМЕТРОВ

A.G. Dmitriev, T.A. Kozeletskaya, E.A. German

TWO-PARAMETER EQUATION OF CARDINAL UTILITY AND THE POSSIBILITY OF AN EMPIRICAL EVALUATION OF ITS OPTIONS

Концепция отказа от попыток измерения (представления числами) полезности (ощущений удовлетворения при потреблении благ), предложенная Дж. Хиксом в 1934 г., на самом деле осталась не реализованной. Как это стало ясно к концу XX в., она оказалась непродуктивной для целей анализа экономической реальности. В соответствии с современными представлениями репрезентативной теории измерений Дж. Хикс предложил вместо измерений полезности по шкале отношений использовать шкалу порядка. Позже И. Пфанцаглем показано, что с результатами измерений по шкале порядка недопустимы даже простейшие математические операции. Это обусловило непродуктивность порядкового подхода Дж. Хикса. В статье показана возможность измерения ощущений удовлетворения при потреблении благ (полезности) по шкале отношений. С результатами таких измерений допустим весь арсенал математических операций с именованными величинами. Использована методология математического моделирования с помощью дифференциальных уравнений, в основе которой лежит фундаментальное свойство дифференцируемых функций многих переменных. Связь между дифференциалом функции и дифференциалами ее аргументов всегда линейна. Частные производные можно рассматривать как коэффициенты пропорциональности между дифференциалами. При таком подходе задача построения математической модели сводится к обоснованию вида коэффициентов пропорциональности (частных производных) перед дифференциалами аргументов. Обосновано дифференциальное уравнение кардиналистской полезности. Его решение, представленное с учетом требований корректной записи математических выражений с именованными величинами, дает двухпараметрическое уравнение кардиналистской полезности. Обсуждается экономический смысл его параметров и возможности эмпирической оценки их численных значений.

КАРДИНАЛИСТСКАЯ ПОЛЕЗНОСТЬ; МОДЕЛИРОВАНИЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫМИ УРАВНЕНИЯМИ; ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЕ УРАВНЕНИЕ ПОЛЕЗНОСТИ; ДВУХПАРАМЕТРИЧЕСКОЕ УРАВНЕНИЕ УДОВЛЕТВОРЕННОСТИ; ЭМПИРИЧЕСКАЯ ОЦЕНКА ПАРАМЕТРОВ.

The concept of rejecting the attempts to measure utility (the feeling of satisfaction from consuming goods), i.e., represent it numerically was first proposed by John Hicks in 1934 but has remained only theoretical up until the present time. As it became clear by the end of the 20th century, it was counterproductive for the analysis of economic reality. In accordance with modern concepts of representative theory of measurement, Hicks essentially suggested using an ordinal scale instead of the ratio scale for measuring utility. Pfanzagl later demonstrated that even the simplest mathematical operations are impossible with the results of measurements on a scale of order. This was what likely caused Hicks's ordinal approach to be unproductive. Our work shows the possibility of measuring the feeling of satisfaction from consuming goods (utility) by the ratio scale. It is known that the entire arsenal of mathematical operations on the named values can be performed with the results of these measurements. We used the methodology of mathematical modeling by differential equations. It is based on a fundamental property of differentiable functions of many variables. The relationship between the differential of the function and the differentials of its arguments is always linear. Partial derivatives can be considered to be factors of proportionality between the differentials. With this approach, the task of constructing a mathematical model is reduced to the justification of the form factors of proportionality (partial) before the differentials of the arguments. We have substantiated the differential equation of cardinal utility. Its solution, presented in view of the requirements of the correct recording of mathematical expressions with named variables, yields a two-parameter equation of cardinal utility. We discussed the economic meaning of its parameters and the possibility of an empirical evaluation of their numerical values.

CARDINAL UTILITY; MODELING DIFFERENTIAL EQUATIONS; DIFFERENTIAL EQUATION OF UTILITY; TWO-PARAMETER EQUATION OF SATISFACTION; EMPIRICAL ASSESSMENT OF PARAMETERS.

Введение. Известно, что после дискуссий о содержании понятия «полезность» пришли к пониманию того, что оно отображает ощущение удовлетворения индивида, вызванное потреблением блага [1], а не свойство потребляемого блага. В этой ситуации логично было бы использовать термин «удовлетворенность». Однако и в настоящее время, традиционно используют привычное – «полезность».

Для любого конкретного блага можно указать его количественно, т. е. представить числом, точнее сказать, именованным числом, или измерить его количество. Для услуг в этих случаях используют денежные единицы, для товаров – преимущественно физические единицы измерения (массы, объема и др.).

Наличие причинно-следственной связи между удовлетворенностью (полезностью) и количеством потребленного блага естественным образом порождает желание найти математическую связь между ними в виде соответствующего уравнения (математической функции). Это, в свою очередь, ставит задачу о представлении числами (измерениях) и самой полезности (удовлетворенности).

Наличие количественных данных о полезности совместно с данными о количестве блага могло бы способствовать построению математической модели полезности и проведению ее верификации.

На этапе зарождения теории полезности (конец XIX – начало XX в.) достичь желаемой цели – получить уравнение (функцию) полезности[1] не удалось. Сложилось представление, что причина этому – нерешенность проблемы измерения полезности.

В качестве выхода из тупикового положения предложено использовать порядковый (ординалистский) подход. В работе Дж. Хикса [2] эта порядковая теория приобрела завершенную форму. Описывая события тех лет позже [3], он писал: «... теперь нам предстоит осуществить “чистку” теории, отбрасывая все концепции, зараженные идеей количественного измерения полезности...» [4].

Оценивая суть этой «чистки» с позиций современных знаний об измерениях [5, 6], в терминах репрезентативной теории измерений можно выразить следующее. Кардиналистская полезность – это полезность, измеренная по шкале отношений (шкале самого высокого, четвертого уровня). Ординалистская полезность – это полезность, измеренная по шкале лишь второго уровня, т. е. по шкале порядка [7, 8].

При этом следует иметь в виду, что любые известные математические операции допустимы только с результатами измерений, полученными по шкале отношений [9, 10]. К этому утверждению математиков П. Суппеса, Дж. Зинеса и И. Пфанцагля следует добавить необходимость проводить анализ размерностей величин в используемых математических выражениях. С данными же, полученными по шкале порядка, недопустимы даже элементарные операции сложения, не говоря о других [9, 10].

Об измерениях, в том числе и полезности

Для выполнения измерений, как известно, необходимо: 1) определиться с единицей измерения; 2) указать способ выполнения измерительных процедур [11, 12].

Рассмотрим первый случай. Единицы измерения имеют наименование и размер**2**. Например, для измерения длины еще со времен

[1] В последующем, как известно, ее стали называть «кардиналистская (количественная) полезность».

[2] Размер единицы – хранимая (эталон) или воспроизводимая в лабораторных условиях ее количественная определенность [90·1].

Французской революции 1789—1799 используют так называемую метрическую систему и единицу измерения длины называют метр. Первоначально размер метра был определен эталоном. Это был стержень сложного сечения, изготовленный из специального сплава. Хранился он в Париже. Теперь в качестве эталона длины принят более сложный объект на основе He-Ne лазеров, позволяющий воспроизводить единицу длины с высокой точностью.

В отношении наименования единицы измерения полезности вопрос давно решен. Она, как известно, получила название ютил (util) [13].

В отношении размера этой единицы решить вопрос принципиально невозможно, так как не создать овеществленный прототип ощущений человека для хранения или воспроизведения его в лабораторных условиях.

Это обстоятельство породило заблуждение, что количественная полезность принципиально неизмерима и поэтому нет альтернативы ординалистскому подходу в теории.

В этой связи напомним ситуацию с измерением площади поверхности.

Наименования единиц измерения площади в разных системах измерения хорошо известны: квадратный метр (м^2); квадратный дюйм (1 кв. дюйм = $6{,}4516 \cdot 10^{-4}$ м^2); гектар (1 га = 10^4 м^2) и др.

Размер единиц измерения площади овеществленным эталоном или воспроизводимым образом не определен.

Как видим, ситуация с наименованием и размером для единицы измерения площади и единицы измерения полезности аналогичны. Но неоспоримо, что площадь принципиально нельзя измерить по причине отсутствия ее материализованного объекта для хранения или воспроизведения в лабораторных условиях.

Рассмотрим второй случай. Измерительные процедуры принято разделять на две основные категории — прямые и косвенные измерения [12, 14].

При прямых измерениях проводят отсчет непосредственно численного значения интересующей величины по показаниям сертифицированных инструментов разной степени сложности.

При косвенных измерениях искомое значение измеряемой величины находят на основании известной зависимости (уравнения связи) между этой величиной и другими, непосредственно измеряемыми в ходе выполнения измерительных процедур. Простейший пример: площадь столешницы прямоугольной формы вычисляют как произведение длин ее сторон, которые измеряют инструментальными средствами.

Для измерения полезности можно пойти по аналогичному пути: получить уравнение, связывающее полезность (удовлетворенность) с количествами потребляемых благ, и по результатам измерений количеств потребляемых благ вычислять удовлетворенность. Другими словами, использовать методологию косвенных измерений.

О построении математических моделей

Очевидно, что уравнение полезности (удовлетворенности), если оно получено, можно называть моделью, точнее сказать, математической моделью полезности. Строить модели (вербальные, графические, математические и др.) можно как на основе фактов, эмпирических данных, так и на основе гипотез. Для математических моделей без количественных данных не обойтись. Они могут быть использованы и на стадии построения модели и на этапе верификации модели, появившейся на базе гипотезы.

В качестве типичного примера использования результатов измерений можно вспомнить историю открытия закона всемирного тяготения. Иоганн Кеплер по результатам измерения параметров орбит планет солнечной системы сформулировал ряд утверждений, известных как законы его имени. Исаак Ньютон на основе этих данных построил математическую модель, известную как закон всемирного тяготения[3].

В теории полезности повторить подобное не представляется возможным по причине отсутствия данных, количественно отображающих ощущение удовлетворения при потреблении благ.

Примеров построения математической модели на основе гипотезы можно привести много. Например, уравнения состояния газа

[3] При этом он еще обогатил и математику: своими «флюксиями» и «флюентами» заложил основы дифференциального исчисления.

(Менделеева – Клапейрона; Ван-дер-Ваальса), уравнение Шредингера и др.

Для получения уравнения полезности можно поступить аналогичным образом.

Двухпараметрическая функция удовлетворенности

Впервые уравнение полезности было получено в диссертационной работе [15] и получило развитие в [16, 17].

Подходы, использованные в [15, 16], объединяет то обстоятельство, что в обоих случаях использовано моделирование на основе дифференциального уравнения. После его интегрирования была получена искомая функция.

При записи решения дифференциального уравнения обращалось внимание на математическую корректность записи выражений с именованными величинами. Это позволило при отсутствии количественных данных для нахождения константы интегрирования предложить ее интерпретацию, имеющую экономический смысл.

Дифференциальное уравнение полезности. Моделированию с помощью дифференциального уравнения отдано предпочтение по следующей причине.

Моделированию с помощью дифференциального уравнения отдано предпочтение по следующей причине.

Наличие результатов измерений для интересующих величин, как известно, облегчает выбор моделирующей функции. При их отсутствии поле для поиска функции безгранично. По всей видимости, это обстоятельство не позволило найти количественную связь полезности с количествами потребляемых благ.

Поле поиска можно ограничить, если воспользоваться хорошо известной в математике связью между дифференциалами переменных любой дифференцируемой функции $\varphi(x, y, z, ...)$. Дифференциал функции $d\varphi(x, y, z, ...)$ связан с дифференциалами аргументов dx, dy, dz, ... известным соотношением:

$$d\varphi = \frac{\partial\varphi}{\partial x}dx + \frac{\partial\varphi}{\partial y}dy + \frac{\partial\varphi}{\partial z}dz + \dots . \qquad (1)$$

Оно показывает, что связь между дифференциалами переменных линейная, а частные производные $\frac{\partial\varphi}{\partial x}, \frac{\partial\varphi}{\partial y}, \frac{\partial\varphi}{\partial z}, \dots$ выступают в роли коэффициентов α, β, γ, ..., зависящих (или независящих) от соответствующей переменной.

Рассматривая связь между бесконечно малым приращением ощущения удовлетворения (дифференциалом полезности du), вызванным потреблением очередной бесконечно малой порции блага dq, с учетом того, что $du|_{dq=0} = 0$ и в соответствии с (1) можно записать:

$$du = \alpha(q)\, dq. \qquad (2)$$

Гипотеза, положенная в основу построения математической модели полезности, состоит в предположении, что α обратно пропорционально количеству потребленного блага q, т. е. $\alpha(q) \sim 1 / q$.

Эта гипотеза базируется на относительности субъективных оценок приращения количества потребляемого блага, т. е. на относительности понятий «много», «мало». В справедливости этого нетрудно убедиться на простом примере.

Допустим, что денежные выплаты увеличены на одинаковую (не бесконечно малую) величину Δq успевающим студентам, преподавателям и работникам сферы управления вуза. Для определенности пусть будет $\Delta q = 1000$ р. Очевидно, что получившие добавку будут оценивать это увеличение поразному. Для студента это большая величина, по сравнению с его стипендией. Для доцента и профессора – существенная надбавка, по сравнению с его должностным окладом за исполнение трудовых функций. Управленец же высокого ранга воспримет добавку как несущественную.

Если эти оценки (ощущения) представить в терминах теории измерений, то можно сказать, что каждым из указанных лиц добавка измерялась с использованием разных единиц измерения ощущений (не количества денег). Добавка сравнивалась с достигнутым (к моменту ее получения) уровнем денежного содержания. Можно сказать, сравнивалась со своим «внутренним эталоном».

С учетом вышеизложенного вместо выражения (2) для делимых благ можно записать:

$$du = k\frac{dq}{q}, \qquad (3)$$

где q — достигнутый уровень потребления блага; k — коэффициент удовлетворенности, необходимый для согласования размерностей именованных величин.

Отметим, что дифференциальное уравнение (3) в полной мере соответствует закону убывающей предельной полезности Госсена.

Двухпараметрическое уравнение. Результат интегрирования (3), записанный с учетом требований корректной записи математических выражений с именованными величинами,[4] имеет вид:

$$u = k\ln\frac{q}{q_0}. \qquad (4)$$

Вместо математически традиционной записи решения в виде $u = k\ln(q) + C$ равенство (4) содержит константу интегрирования q_0 под оператором логарифмирования. Это обеспечивает безразмерность логарифмируемого выражения q/q_0.

В [16] показано, что равенство (4) совпадает с основным уравнением психофизики — уравнением Вебера—Фехнера [18]. Оно, как известно, получено на основе экспериментальных данных еще в конце XIX в. Это обстоятельство может служить косвенным подтверждением обоснованности уравнения полезности (4).

Экономический смысл параметра q_0. Экономический смысл q_0 вытекает из свойств логарифмической функции. При потреблении блага в количестве $q > q_0$ имеем $u > 0$, т. е. потребитель ощущает удовлетворение от потребления блага. При $q < q_0$ имеем $u < 0$, т. е. потребитель ощущает раздражение (отрицательное удовлетворение). При $q = q_0$ имеем $u = 0$ и ощущения потребителя «нейтральные».

Отсутствие измерений полезности u не дает возможности определить константу интегрирования q_0 в выражении (4). Это, в свою очередь, не позволяет из множества функций $u(q)$ выбрать частное решение, которое количественно характеризовало бы ощущение удовлетворения конкретного индивида.

Однако на множестве потребителей блага допускаемое математикой множество констант интегрирования q_0 можно связать с субъективностью восприятия количества блага отдельным потребителем, о чем уже шла речь выше. В этом случае параметр q_0 приобретает смысл персонифицированного параметра, или персонифицированного уровня нейтрального потребления блага.

Процедуры, позволяющие получить его численные значения, будут рассмотрены ниже.

Экономический смысл параметра k. Экономический смысл коэффициента удовлетворения k виден из равенства (4). При $q = 2{,}718q_0$ имеем $\ln\frac{q}{q_0} = 1$, следовательно, $u = k$. Сказанное означает, что коэффициент удовлетворения — это тот уровень удовлетворенности, который ощущает потребитель блага, когда потребляет его в количестве $2{,}718q_0$ единиц.

Обобщенная функция удовлетворенности при полипотреблении

При потреблении индивидом многих (N) благ его общее ощущение удовлетворения будет описываться выражением

$$U = \sum_{i=1}^{N} u_i = \sum_{i=1}^{N} k_i \ln\frac{q_i}{q_{0i}}. \qquad (5)$$

Следует отметить, что аддитивность общей полезности не является новой гипотезой, а вытекает из гипотезы о пропорциональности приращения ощущения удовлетворенности (приращения полезности) приращению количества потребленного блага, что отражено в выражениях (2) и (3).

Действительно, если формально рассматривать полезность U как функцию многих переменных, т. е. $U(q_1, q_2, ..., q_N)$, то ее приращение (дифференциал) можно пред-

[4] Требования корректной записи математических выражений с именованными величинами в физической и технической литературе называют анализом размерностей величин или их размерностным анализом.

ставить как сумму частных дифференциалов, т. е.

$$dU = \frac{\partial U}{\partial q_1} dq_1 + ... + \frac{\partial U}{\partial q_i} dq_i + ... + \frac{\partial U}{\partial q_N} dq_N. \quad (6)$$

При этом нетрудно видеть, что обобщенное уравнение полезности (5) и уравнения (2) и (3) согласуются с выражением (6).

Замечание об области применимости равенства (5). Как и всякая математическая модель, обобщенное уравнение полезности (5) может быть использовано при определенных условиях. Область его применения определяется исходными предпосылками при выводе. В частности, при выводе рассматривался функциональный спрос, т. е. потребительский спрос, обусловленный качествами, присущими самому товару. При этом рассмотрена самая простая ситуация, когда потребитель оценивает свои внутренние ощущения от потребления благ только по количественным признакам. Предполагалось, что сравнительную оценку приращению блага (много или мало) он дает сопоставлением его с достигнутым уровнем потребления. Здесь факторы, определяющие субъективность оценки, «прячутся» в коэффициент удовлетворения k_i и уровень нейтрального потребления q_{oi}. При выводе уравнения полезности вообще не упоминались «внешние» факторы, способные повлиять на отношение потребителя к тому или иному благу в любой период времени. Мы имеем в виду рекламу, прогнозы о состоянии рынка в ближайшее время, разного рода слухи и т. п. По этим причинам не следует требовать от уравнения (5) возможности моделировать ситуацию на рынке, известную как эффект Веблена, эффект «присоединения к большинству», эффект «сноба» и др. В подобных случаях формально можно говорить об изменениях коэффициента удовлетворения и уровня нейтрального потребления.

Возможности эмпирической оценки параметров k_i и q_{0i}

Коэффициенты удовлетворения k_i и уровни нейтрального потребления q_{0i} отображают субъективное восприятие конкретным потребителем каждого (i-го) блага из их общего числа N.

Экономическое поведение каждого конкретного потребителя определяется стремлением получить максимальное удовлетворение от потребления многих благ при ограниченных финансовых возможностях.

Математически это задача поиска условного максимума функции (5) при наличии бюджетных ограничений. Она решена стандартным методом неопределенного множителя (методом Лагранжа) [19]. Было получено:

$$q_i = \delta_i \cdot \frac{M}{p_i}, \quad (7)$$

где M — бюджет потребителя на приобретение всех N благ; коэффициент $\delta_i = k_i / \sum_{i=1}^{N} k_i$.

Произведение $\delta_i M$ в числителе равенства (7) представляет собой расходы ($D_i = \delta_i M$) на приобретение i-го блага в количестве q_i единиц. Очевидно, что $\delta_i < 1$. В произведении $\delta_i M$ коэффициент δ_i показывает долю потребительского бюджета, израсходованного на покупку блага. Он отображает выбор потребителя, отражает уровень предпочтений. В [19] он назван коэффициентом выбора.

Нетрудно убедиться в справедливости тождества

$$\sum_{i=1}^{N} \delta_i = \sum_{i=1}^{N} \frac{k_i}{\sum_{i=1}^{N} k_i} = 1. \quad (8)$$

Отметим, что в равенстве (7) отсутствуют уровни нейтрального потребления q_{0i}. Формально математически это обусловлено дифференцированием функции Лагранжа, содержащей в качестве одного из слагаемых выражения (5).

По существу вопроса это обстоятельство отражает лишь то, что в соответствии с равенством (7) потребитель совершает покупки только тогда, когда $q_i > q_{0i}$. В противном случае, когда бюджет M потребителя и коэффициенты выбора δ_i таковы, что вычисленные по выражению (7) $q_i < q_{0i}$, покупатель перестает покупать благо и заменяет его на более дешевое (эффект Гиффена [19]).

Уровни нейтрального потребления q_{0i} определяют критическую цену блага (p^{cr}), такую, что $q_i\big|_{p=p^{cr}} = q_{0i}$ [17].

Измерение коэффициентов выбора δ_i. Из соотношения (7) следует, что расходы (D) потребителя на покупку блага в количестве q единиц составляют:

$$D_i = q_i p_i = \delta_i M, \tag{9}$$

а *относительные расходы* (D_i/M), как это следует из выражения (9), равны соответствующим коэффициентам выбора:

$$D_i/M = \delta_i, \tag{10}$$

которые определяются только коэффициентами удовлетворения, см. (7).

Эмпирически числовые данные об относительных расходах (D_i/M) могут быть получены с помощью статистических исследований или известными методами экспериментальной экономики Вернона Смита [20]. Их можно получить как для отдельного потребителя, так и для интересующей социальной группы населения и, таким образом, произвести измерение коэффициентов выбора (уровней предпочтения) косвенным методом, вычислениями по выражению (10).

Коэффициенты выбора $\delta_i = k_i \Big/ \sum\limits_{i=1}^{N} k_i$ можно рассматривать как результаты сравнений каждого из коэффициентов удовлетворения k_i с их суммой $\sum\limits_{i=1}^{N} k_i$.

В терминах теории измерений подобное сравнение однородных величин (их отношение) означает измерение величины, находящейся в числителе, в относительных единицах (по отношению к базовому значению в знаменателе). Измерения в относительных единицах можно представлять как вещественным числом (в нашем случае δ), так и в процентах – $(100\,\delta)$ %, или в промиллях – $(100\,\delta)$ ‰ [11].

В качестве примеров использования относительных единиц можно назвать диэлектрическую и магнитную проницаемость вещества, мольную долю вещества и др. В экономике – это многочисленные индексы, отображающие динамику экономических процессов.

Измерение коэффициентов удовлетворения k_i. Располагая числовыми данными об относительных расходах на каждое из N благ (коэффициентах выбора), фактически будем иметь систему из N уравнений, содержащую N неизвестных коэффициентов удовлетворения $k_1, \ldots, k_N$:

$$\begin{cases} k_1 \Big/ \sum\limits_{i=1}^{N} k_i = \delta_1 \\ k_2 \Big/ \sum\limits_{i=1}^{N} k_i = \delta_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ k_N \Big/ \sum\limits_{i=1}^{N} k_i = \delta_N. \end{cases} \tag{11}$$

Если эта система состоит из линейно независимых уравнений, то ее решение позволит найти коэффициенты удовлетворения $k_1, \ldots, k_N$.

Однако она таковой не является. Покажем это на примере потребления трех благ. Для удобства чтения коэффициенты k_1, k_2, k_3 обозначим, соответственно, как x, y, z. Тогда в соответствии с системой (11) будем иметь три уравнения:

$$\begin{cases} \dfrac{x}{x+y+z} = \delta_1, \\ \dfrac{y}{x+y+z} = \delta_2, \\ \dfrac{z}{x+y+z} = \delta_3. \end{cases} \tag{12}$$

При этом тождество (8) примет вид:

$$\delta_1 + \delta_2 + \delta_3 = 1. \tag{13}$$

Для доказательства линейной зависимости уравнений в системе (12) поступим следующим образом: из любых двух уравнений в (12) получим третье с использованием тождества (13). Так, например, из первых двух получим третье.

Для этого из равенства (13) получим δ_1 и подставим его в первое равенство системы (12). Получим:

$$\frac{x}{x+y+z} = 1 - \delta_2 - \delta_3. \tag{14}$$

Из (14) выразим δ_2 и подставим его во второе равенство системы (12). В результате получим:

$$\frac{y}{x+y+z} = 1 - \delta_3 - \frac{x}{x+y+z}. \qquad (15)$$

Из (15) получим δ_3:

$$\delta_3 = 1 - \frac{x}{x+y+z} - \frac{y}{x+y+z} = \frac{z}{x+y+z}, \qquad (16)$$

что совпадает с третьим уравнением системы (12).

Как видим, система (12) содержит линейно зависимые уравнения и поэтому найти все ее неизвестные не представляется возможным.

В отношении системы (11) можно сказать аналогичное. Оставим это утверждение без строгих математических выкладок.

Итак, располагая численными значениями коэффициентов выбора δ_i и используя только их, найти численные значения коэффициентов удовлетворения невозможно.

Однако рассматривая коэффициенты выбора $\delta_i = k_i / \sum_{i=1}^{N} k_i$ как результаты сравнений каждого из коэффициентов удовлетворения k_i с их суммой $\sum_{i=1}^{N} k_i$ можно, подобно тому, как это сделано в отношении единиц измерения физических величин, конвенциально установить численное значение для суммы $\sum_{i=1}^{N} k_i$. Например, принять $\sum_{i=1}^{N} k_i \equiv K$. В этом случае для каждого из k_i может быть получено численное его значение $k_i = \delta_i K$.

Измерение уровней нейтрального потребления q_{0i}. Как отмечалось выше, q_{0i} имеют смысл персонифицированных уровней нейтрального потребления блага. Выражение (7) показывает, что с ростом цены на благо потребитель покупает его во все меньшем количестве. При достижении цены некоторого критического уровня, когда оказывается, что $q_i = q_{0i}$, потребитель перестает покупать благо и для удовлетворения соответствующей потребности переходит на менее качественный продукт [19].

Это показывает, что численные значения q_{0i} могут быть получены эмпирически методами экспериментальной экономики Вернона Смита [20].

Выводы. Как видим, имеется принципиальная возможность эмпирически получить численные значения коэффициентов удовлетворения k_i и уровней нейтрального потребления q_{0i}. Воспользовавшись ими, нетрудно, используя выражение (5), вычислить и полезность (удовлетворенность), обусловленную потреблением соответствующих количеств благ q_i.

В терминах теории измерений это будет означать измерение полезности косвенным методом. Другими словами, можно сказать, что ощущения удовлетворения, вызванные потреблением соответствующих количеств благ, будут измерены косвенным методом. Как и измерения слуховых, зрительных, тактильных и других ощущений, они относятся к категории психологических (психофизических) измерений [18].

Следует обратить внимание на то, что в данном исследовании речь идет о возможности получить численные значения и обсуждается связь с количествами потребленных благ только для кардиналистской (количественной) полезности.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований. Проект №14-06-00177 «Взаимодействие агентов рыночных отношений: кибернетический подход к анализу и математические модели».

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Винер Дж.** Концепция полезности в теории ценности и ее критики // Теория потребительского поведения и спроса / под. ред. В.М. Гальперина. СПб.: Экон. шк., 1993. С. 78–116.

2. **Hicks J., Allen R.** A Reconsideration of the Theory of Value // Economica, February 1934, May 1934.

3. **Хикс Дж.Р.** Стоимость и капитал: пер. с англ. / общ. ред и вступ. ст. Р.М. Энтова. М.: Прогресс, 1993. 488 с. (Экономическая мысль Запада).

4. **Энтов Р.М.** Экономическая теория Дж.Р. Хикса // Стоимость и капитал: пер. с англ. / общ. ред и вступ. ст. Р.М. Энтова. М.: Прогресс, 1993. 488 с. (Экономическая мысль Запада).

5. **Кнорринг В.Г.** Развитие репрезентативной теории измерений // Измерения, контроль, автоматизация: [сб. науч.-техн. обзоров]. 1980. № 11–12. С. 3–9.

6. **Орлов А.И.** Репрезентативная теория измерений и ее применение // Заводская лаборатория, 1996. Т. 62. № 1. С. 54–60. URL: http://antorlov.chat.ru/reprteor.htm; http://orlovs.pp.ru

7. **Stevens S.S.** On the theory of scales of measurement // Science, 1946, vol. 103, no. 2684, pp. 677–680.

8. **Stevens S.S.** Handbook of Experimental Psychology. New York, John Wiley & Sons, Inc. 1951. (Перевод в кн.: Экспериментальная психология. М.: ИЛ, 1960. Т. 1).

9. **Суппес П., Зинес Дж.** Основы теории измерений // Психологические измерения / под ред. Л.Д. Мешалкина. М.: Мир, 1967. 196 с.

10. **Пфанцагль И.** Теория измерений. М.: Мир, 1976. 248 с.

11. **Чертов А.Г.** Физические величины (терминология, определения, обозначения, размерности, единицы): справ. пособие. М.: Высш. шк., 1990. 335 с.

12. **Сена Л.А.** Единицы физических величин и их размерности. М.: Наука, 1988. 431 с.

13. Словарь по экономике: пер. с англ. / под ред. П.А. Ватника. СПб.: Экономическая школа, 1998. 752 с.

14. **Рабинович С.Г.** Погрешности измерений. Л.: Энергия, 1978. 262 с.

15. **Козелецкая Т.А.** Модели экономического поведения индивида: [канд. дис.]. СПб., 2005. 159 с.

16. **Дмитриев А.Г., Козелецкая Т.А., Герман Е.А.** Теория потребительского спроса: психофизическое обоснование дифференциального уравнения кардиналистской полезности; интерпретация решения // Журнал экономической теории. 2011. № 1. С. 111–117.

17. **Герман Е.А.** Функция индивидуального потребления блага // Научно-технические ведомости Санкт-Петербургского государственного политехнического университета. Экономические науки. 2012. № 6(161). С. 34–36.

18. **Фресс П., Пиаже Ж.** Экспериментальная психология: пер. с франц. / под ред. А.Н. Леонтьева. М.: Прогресс, 1966. 430 с.

19. **Дмитриев А.Г., Козелецкая Т.А., Герман Е.А.** Теория потребительского спроса: кривая индивидуального спроса и эффект Гиффена // Журнал экономической теории. 2010. № 2. С. 134–139.

20. **Смит В.** Экспериментальная экономика. М.: ИРИСЭН; Мысль, 2008. 805 с.

REFERENCES

1. **Viner Dzh.** Kontseptsiia poleznosti v teorii tsennosti i ee kritiki. *Teoriia potrebitel'skogo povedeniia i sprosa*. Pod. red. V.M. Gal'perina. SPb.: Ekon. shk, 1993. S. 78–116. (rus)

2. **Hicks J., Allen R.** A Reconsideration of the Theory of Value. *Economica*, February 1934, May 1934.

3. **Khiks Dzh.R.** Stoimost' i kapital: per. s angl. Obshch. red i vstup. st. R.M. Entova. M.: Progress, 1993. 488 s. (Ekonomicheskaia mysl' Zapada). (rus)

4. **Entov R.M.** Ekonomicheskaia teoriia Dzh.R. Khiksa. *Stoimost' i kapital*: per. s angl. Obshch. red i vstup. st. R.M. Entova. M.: Progress, 1993. 488 s. (Ekonomicheskaia mysl' Zapada). (rus)

5. **Knorring V.G.** Razvitie reprezentativnoi teorii izmerenii. *Izmereniia, kontrol', avtomatizatsiia*: *sb. nauch.-tekhn. obzorov*. 1980. № 11–12. S. 3–9. (rus)

6. **Orlov A.I.** Reprezentativnaia teoriia izmerenii i ee primenenie. *Zavodskaia laboratoriia*, 1996. T. 62. № 1. S. 54–60. URL: http://antorlov.chat.ru/reprteor.htm; http://orlovs.pp.ru (rus)

7. **Stevens S.S.** On the theory of scales of measurement. *Science*, 1946, vol. 103, no. 2684, pp. 677–680.

8. **Stevens S.S.** Handbook of Experimental Psychology. New York, John Wiley & Sons, Inc. 1951. (Perevod v kn. Eksperimental'naia psikhologiia. M.: IL, 1960. T. 1).

9. **Suppes P., Zines Dzh.** Osnovy teorii izmerenii. *Psikhologicheskie izmereniia*. Pod red. L.D. Meshalkina. M.: Mir, 1967. 196 s. (rus)

10. **Pfantsagl' I.** Teoriia izmerenii. M.: Mir, 1976. 248 s. (rus)

11. **Chertov A.G.** Fizicheskie velichiny (terminologiia, opredeleniia, oboznacheniia, razmernosti, edinitsy): sprav. posobie. M.: Vyssh. shk., 1990. 335 s. (rus)

12. **Sena L.A.** Edinitsy fizicheskikh velichin i ikh razmernosti. M.: Nauka, 1988. 431 s. (rus)

13. Slovar' po ekonomike: per. s angl. Pod red. P.A. Vatnika. SPb.: Ekonomicheskaia shkola, 1998. 752 s. (rus)

14. **Rabinovich S.G.** Pogreshnosti izmerenii. L.: Energiia, 1978. 262 s. (rus)

15. **Kozeletskaia T.A.** Modeli ekonomicheskogo povedeniia individa: kand. dis. SPb., 2005. 159 s. (rus)

16. **Dmitriev A.G., Kozeletskaia T.A., German E.A.** Teoriia potrebitel'skogo sprosa: psikhofizicheskoe obosnovanie differentsial'nogo uravneniia kardinalistskoi poleznosti; interpretatsiia resheniia. *Zhurnal ekonomicheskoi teorii*. 2011. № 1. S. 111–117. (rus)

17. **Herman E.A.** The function of individual consumption goods. *St. Petersburg State Polytechnical University Journal. Economics*, 2012, no. 6(161), pp. 34–36. (rus)

18. **Fress P., Piazhe Zh.** Eksperimental'naia psikhologiia: per. s frants. Pod red. A.N. Leont'eva. M.: Progress, 1966. 430 s. (rus)

19. **Dmitriev A.G., Kozeletskaia T.A., German E.A.** Teoriia potrebitel'skogo sprosa: krivaia individual'nogo sprosa i effekt Giffena. *Zhurnal ekonomicheskoi teorii.* 2010. № 2. S. 134–139. (rus)

20. **Smit V.** Eksperimental'naia ekonomika. M.: IRISEN; Mysl'', 2008. 805 s. (rus)

ДМИТРИЕВ Александр Георгиевич – профессор Санкт-Петербургского политехнического университета Петра Великого, доктор физико-математических наук.

195251, ул. Политехническая, д. 29, Санкт-Петербург, Россия. E-mail: dmitriev.ag@mail.ru

DMITRIEV Aleksandr G. – Peter the Great St. Petersburg Polytechnic University.

195251. Politechnicheskaya str. 29. St. Petersburg. Russia. E-mail: dmitriev.ag@mail.ru

КОЗЕЛЕЦКАЯ Татьяна Александровна – доцент Санкт-Петербургского политехнического университета Петра Великого, кандидат экономических наук.

195251, ул. Политехническая, д. 29, Санкт-Петербург, Россия. E-mail: marta9578@mail.ru

KOZELETSKAYA Tat'iana A. – Peter the Great St. Petersburg Polytechnic University.

195251. Politechnicheskaya str. 29. St. Petersburg. Russia. E-mail: marta9578@mail.ru

ГЕРМАН Елена Александровна – ассистент Санкт-Петербургского политехнического университета Петра Великого.

195251, ул. Политехническая, д. 29, Санкт-Петербург, Россия. E-mail: elena250573@rambler.ru

GERMAN Elena A. – Peter the Great St. Petersburg Polytechnic University.

195251. Politechnicheskaya str. 29. St. Petersburg. Russia. E-mail: elena250573@rambler.ru