DOI: 10.5862/JPM.230.5
УДК 517.9, 512.81

М.Р. Петриченко

Санкт-Петербургский политехнический университет Петра Великого

ГРУБЫЕ ОЦЕНКИ И БИНОМИАЛЬНЫЕ АППРОКСИМАЦИИ В ПРЕДЕЛЬНЫХ ЗАДАЧАХ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ КРОККО

Для решения предельных задач Крокко, известных как типичная и однородная, использованы биномы (в качестве аппроксимантов точного решения), а также интегральные тождества. Получена оценка степени близости точного решения к его аппроксимации по величине $\varphi(0)$. Доказано, что решение типичной предельной задачи Крокко имеет логарифмическую особенность деривативa при $\varphi = 0$; уравнение Крокко предоставляет необходимое и достаточное условия минимума положительного распределения, выпуклого по $d\varphi/dh$. Показано, что однородная предельная задача Крокко эквивалентна двум типичным предельным задачам Крокко с общей критической точкой.

ПРЕДЕЛЬНАЯ ЗАДАЧА КРОККО, АППРОКСИМАЦИЯ, ВЫПУКЛОЕ РАСПРЕДЕЛЕНИЕ, МИНИМУМ ПОЛОЖИТЕЛЬНОГО ФУНКЦИОНАЛА.

Введение

Для уравнения Крокко

$$\varphi d^2\varphi / dh^2 + 0,5f(h) = 0, \qquad (1)$$

заданного на промежутке $0 < h < 1$, причем $f(h) > 0$, $f \in L_1(0, 1)$, возможна постановка разных предельных задач.

Прежде всего, может быть поставлена типичная предельная задача:

$$(d\varphi / dh)_{h=0} = \varphi(1) = 0. \qquad (2)$$

Помимо этой, может быть поставлена предельная задача, однородная по $\varphi(h)$:

$$\varphi(0) = \varphi(1) = 0; \qquad (3)$$

а также смешанная однородная предельная задача:

$$\begin{aligned} a_0(d\varphi / dh)_{h=0} + b_0\varphi(0) = \\ = a_1(d\varphi / dh)_{h=1} + b_1\varphi(1) = 0 \end{aligned} \qquad (4)$$

с действительными параметрами a_i, b_i, $i = 0, 1$.

Предельные задачи (1) – (4) имеют физическую основу и связаны с описанием явлений диффузии, теплопроводности, а также струйных и пристеночных вязких пограничных слоев.

В работе [1] предлагается использовать при решении типичной предельной задачи Крокко для случая $f(h) = h$ вместо постановки (2) условия Коши:

$$\varphi(0) - \alpha = (d\varphi / dh)_{h=0} = 0, \qquad (2а)$$

причем постоянную α можно подобрать так, чтобы $\varphi(1) = 0$.

В более точной формулировке утверждается следующее:

Пусть $\varphi = \varphi(h, \alpha)$ и $\varphi(1, \alpha) = 0$. Тогда

$$\forall\varepsilon > 0, \exists\eta = \eta(\varepsilon) \Rightarrow |\varphi(1,\beta)| < \varepsilon, |\beta - \alpha| < \eta.$$

Следует отметить, что данное утверждение есть не что иное, как теорема о непрерывной зависимости решения дифференциального уравнения от параметров [2].

В работе [1] доказано, что точка $h = 1$ есть подвижная особенность задачи Коши (1), (2а):

$$d\varphi / dh \underset{h\to 1-0}{\to} -\infty$$

[1, 3], но $d\varphi^2 / dh \underset{h\to 1-0}{\to} -0.$

Анализ имеющихся результатов

Анализ работы [1] показывает, что на самом деле доказано нечто большее, а именно, что радиус сходимости плоского ряда для деривативa $d\varphi/dh$ равен единице [1, 3, 4].

Можно конкретизировать этот результат. Пусть $\alpha > 0$ – такое значение $\varphi(0)$, при котором $\varphi(1, \alpha) = 0$ и $\beta > 0$ (β – любое произвольное значение $\varphi(0)$, такое, что $\varphi(h_0) = 0$). Тогда

$$\forall\varepsilon > 0,\ \exists\delta > 0 \Rightarrow |\beta - \alpha| < \varepsilon \to |1 - h_0| < \delta.$$

Это определение описывает алгоритм «пристрелки». Значение константы α можно найти методом «пристрелки». Согласно этому методу, задается $\alpha > 0$ и решается задача Коши (1), (2а). Если значение $\varphi(h_0 < 1, \alpha) = 0$, то значение α следует увеличить; если $\varphi(h_0 > 1, \alpha) = 0$, то α необходимо уменьшить (рис. 1).

Можно нормировать h и φ следующим образом:

$$h = z / r, \varphi = \alpha\Phi,\ \Phi = \Phi(z),$$
$$0 < z < r,\ 0 < \Phi < 1,$$

что означает Φ: $h \in (0, r) \to \Phi \in (0, 1)$, т. е. переменная h изменяется в промежутке $(0, r)$, а переменная Φ изменяется в промежутке (0, 1) [4].

Тогда предельную задачу (1), (2) в новых обозначениях перепишем в таком виде:

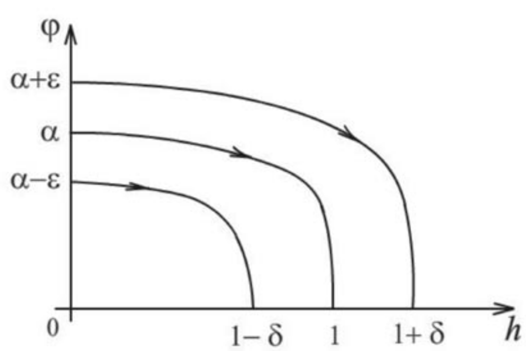

Рис. 1. Зависимость $\varphi(h)$, поясняющая суть алгоритма метода пристрелки

$$2\alpha^2 r^3 \Phi d^2\Phi / dz^2 + z = 0,$$
$$\Phi(0) - 1 = (d\Phi / dz)_{z=0} = \Phi(r) = 0.$$

Для полного совпадения с предельной задачей Крокко положим $r = \alpha^{-2/3}$, или $\alpha = r^{-3/2}$, и, следовательно, увеличение α приводит к уменьшению радиуса сходимости r и наоборот. Таким образом, можно утверждать, что

$$\forall\varepsilon > 0\ \exists\delta = \delta(\varepsilon, \alpha) > 0 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow -\delta < r(\alpha + \varepsilon) - r < r(\alpha - \varepsilon) - r < \delta.$$

Далее легко подсчитать, что

$$\delta = 2/3\varepsilon\alpha^{-5/3} + O(\varepsilon^2).$$

Следовательно, сходимость процесса пристрелки является неравномерной по α и ухудшается с уменьшением значения α.

Для реализации пристрелки воспользуемся методом неподвижной точки, для чего реализуем последовательность Коши; полнота (нормированного) кольца C^1 гарантирует сходимость (этот прием известен в линеаризованном виде [5]).

Пусть

$$2\varphi_{k-1} d^2\varphi_k / dh^2 + f(h) = 0,$$

где нижний индекс означает номер итерации.

Очевидно, что данное уравнение представляет собой итерационный аналог уравнения (1). Тогда

$$\varphi_k(h) = \alpha - \int_0^h (h - z) f(z) / \varphi_{k-1}(z) dz$$

есть итерированное решение задачи Коши (1), (2а). Следовательно,

$$\alpha = \int_0^1 (1 - z) f(z) / \varphi_{k-1}(z) dz.$$

Далее полагаем, что $f(h) = h$. Тогда если в нулевом приближении $\varphi_0(h) = \alpha$, то $\varphi_1(h) = (1 - h^3)/12$. В первом приближении получаем $\alpha = 12^{-1/2} = 0{,}2887$, что меньше соответствующего точного значения на 13 %.

Записав это решение в виде

$$\varphi_0(h) = \alpha - h^3/(12\alpha),$$

получаем, что

$$\partial\varphi(1, \alpha)/\partial\alpha = 1 + 1/(12\alpha^2) > 0.$$

Отсюда следует, что значение $\varphi(h,\ \alpha)$

вблизи правого конца промежутка $h \in (0, 1)$ не убывает при увеличении α, чем и объясняется алгоритм пристрелки.

Во втором приближении

$$\alpha = \sqrt{3} / 2 \ln 3 - \pi / 6 = 0,4278,$$

что больше точного значения на 30 %. Среднее значение постоянной α (ее релаксация) по первым двум приближениям составляет 0,3514, что дает погрешность уже в 6 % .

В предельной задаче (1), (3) точка $h = 1 - 0$ представляет особенность для дериватива, а именно – при $h \to 1 - 0$, $d\varphi/dh \to -\infty$.

Можно доказать (и это будет сделано далее), что возникающая сингулярность дериватива имеет логарифмический тип и при этом $\lim\limits_{h \to 1-0} \varphi d\varphi / dh = 0$. Следовательно, $\varphi^2(h)$ – регулярная на промежутке $0 < h < 1$ функция. Это свойство квадрата решения типичной предельной задачи Крокко дальше используется для оценки параметров решения.

Цель настоящей работы – получить грубые апостериорные оценки решений предельной задачи Крокко, аппроксимирующие точные решения в среднем.

Постановка задачи

Для приближенных оценок решений предельных задач (1) – (4) в целом (т. е. на промежутке $0 < h < 1$) достаточны интегральные тождества, получаемые из предельных задач.

Указанные оценки мы относим к грубым, так как они выполняются в среднем для промежутка $0 < h < 1$ с некоторыми весами (ядрами), т. е. приближаются к решению в слабой топологии. При этом значения констант решения вычисляются с невысокой точностью (погрешность не ниже 1,5 %). Интегральные же тождества связаны с условием экстремума некоторого распределения. Точные значения констант задачи, как доказано в работе [6], определяются из равномерных разложений решения.

Например, в качестве приближенного решения задачи Крокко (1), (2), (2а) на промежутке $0 < h < 1$ можно использовать бином

$$\varphi(h) = \beta(1 - h^m)$$

с двумя константами: m и β. Постоянная β задает приближенное значение $\varphi(0)$, т. е. $\beta = \varphi(0)$. Значение показателя степени m должно быть немалым, поскольку значение дериватива $d\varphi/dh$ в точке $h=1-0$ не мало.

Например, если $f(h) = h$, то $\beta = \sqrt{7} / 8$, $m = 4$ (эта оценка грубая).

Действительно, константа α аппроксимирована с погрешностью в 1 %, тогда как точное значение равно примерно 1/3.

Здесь следует отметить, что В.П. Вариным анонсировано рекордное по точности значение $\alpha = 0,33205...$ (на 32 разряда!), и точность не ограничена [1, 3] (см. также краткое резюме в работе [4]).

Кроме вышеизложенного, для степенных рядов, связанных с предельной задачей Крокко, применяется аппроксимация Паде [5] (вопросы сходимости интерполяционного процесса выходят за рамки данного исследования и здесь не рассматриваются). Детальное изучение Паде-аппроксимации для задач сильной аппроксимации отрезков степенных рядов, аналитического продолжения и решений предельных задач, кроме классических монографий А.А. Гончара, С.П. Суетина, имеется в работах [7, 8]. Наконец, в связи нелинейными задачами в большой работе [9] изучены дифференциальные уравнения с квадратичной нелинейностью (там же приводится история вопроса и обширные дальнейшие ссылки). Близкая по тематике работа [10] содержит лиевы группы преобразований для уравнения пограничного слоя Крокко при градиентном (неравномерном) внешнем течении и соответствующие этим группам решения.

Основные (предваряющие) тождества

Для решения поставленных задач необходимо доказать следующую теорему, выражающую свойства решения типичной предельной задачи (1), (2).

Теорема 1. *В обеих предельных задачах для уравнений (1) – (3) выполняются следующие условия:*

$$\lim_{h \to 1-0} \varphi d\varphi / dh = 0, \quad \lim_{h \to +0} \varphi d\varphi / dh = 0. \tag{5}$$

Доказательство 1. Действительно, в силу уравнения Крокко (1) справедливо следующее равенство:

$$2\varphi d\varphi / dh + \varphi(h)\int_0^h f(z)dz / \varphi(z) = 0,$$

и при $h = 0$ теорема 1 выполняется.

Далее, рассмотрим условия (2). В этом случае можно записать:

$$(d\varphi^2 / dh)_{h=1} = -\lim_{h\to 1-0} \varphi(h)\int_0^h f(z)dz / \varphi(z) =$$

$$= (0\times\infty) = \lim_{h\to 1-0} \frac{f(h)\varphi(h)}{\varphi'(h)} = 0,$$

что и требовалось доказать. Аналогично проверяются предельные условия (3), что и требовалось доказать.

Ниже приводится еще одно доказательство этой теоремы, использующее первый интеграл предельной задачи Крокко.

Доказательство 2. Понизим порядок в уравнении (1).

Пусть $\psi := d\varphi / dh,$ и тогда уравнение (1) принимает вид

$$d\psi^2 / d\ln(1/\varphi) - f(h) = 0. \qquad (1а)$$

Пусть в условиях предельной задачи (1) $\alpha := \varphi(0)$. Тогда получаем выражение

$$\psi = \mp\sqrt{\int_0^{\ln(\alpha/\varphi)} f(h)dz}.$$

В предельной задаче (2), очевидно, берется выражение с верхним знаком (минус). Если $f(z)$ – возрастающая функция, то интеграл под корнем расходится, но получается еще одно полезное тождество:

$$\lim_{\varphi\to +0} \varphi\psi = 0,$$

и это еще одно доказательство.

Теорема доказана дважды.

Для получения важных следствий доказанной теоремы 1 удобно ввести переменную

$$\omega := \ln(\varphi/\alpha) \in (0,\infty).$$

Тогда уравнение (1а) принимает следующий вид:

$$d\psi^2 / d\omega - f(h) = 0. \qquad (1б)$$

Пусть $f(h) = h$. Тогда в силу уравнения (1б) получаем уравнение

$$d\psi^2 / d\omega - h = 0. \qquad (1в)$$

Решение этого уравнения такое, что равенство $\psi(0) = 0$ принимает вид

$$\psi := d\varphi / dh = -\sqrt{\int_0^\omega h(\tau)d\tau},$$

или

$$\alpha\exp(-\omega)d\omega / dh = \sqrt{\int_0^\omega h(\tau)d\tau}. \qquad (6)$$

Для решения уравнения первого порядка (6) остается разделить переменные.

Поскольку $h(\omega)$ представляет собой монотонно-возрастающее распределение, т. е.

$$h(0) = h(\infty) - 1 = 0,$$

то по второй теореме о среднем (формулы Бонне) можно записать:

$$\exists\omega^*, 0 < \omega^* < \omega < \infty \Rightarrow \int_0^\omega h(\tau)d\tau =$$

$$= h(\omega)(\omega - \omega^*) = \sigma\omega h(\omega),$$

где $\sigma := 1 - \omega^* / \omega \le 1$.

Следовательно, в силу уравнения (6), справедливо равенство

$$\alpha\exp(-\omega)d\omega / \sqrt{\omega} = \sqrt{\sigma h}dh,$$

интегрируя которое с учетом начального условия (2), получаем:

$$\alpha\sqrt{\pi}\mathrm{erf}(\sqrt{\omega}) = \int_0^h \sqrt{\sigma z}dz.$$

Пусть σ – постоянная, $\sigma = \sigma_m$, и тогда

$$\alpha\sqrt{\pi}\mathrm{erf}(\sqrt{\omega}) = 2/3\sqrt{\sigma_m h^3}.$$

Пусть $h = 1$. Тогда получаем следующее значение величины α:

$$\alpha = 2/3\sqrt{\sigma_m/\pi}. \qquad (7)$$

Использование теоремы 1 и следствий из нее дает возможность получать неравенства и оценки, позволяющие построить приближенные решения уравнения Крокко.

Во-первых, справедливо неравенство $\psi^2 - \omega h(\omega) \le 0$.

Действительно, по определению:

$$\frac{\psi^2}{\omega h(\omega)} = \frac{\int_0^\omega h(\tau)d\tau}{\omega h(\omega)} = \sigma \le 1,$$

что равносильно доказываемому неравенству.

Далее, если в уравнении (1б) $f(h)$ – неубывающая функция h, то

$$\int_0^\omega f(h(\tau))d\tau = (\omega - \omega^*) f(h(\omega)) =$$

$$= \sigma\omega f(h(\omega)),\ \sigma := 1 - \omega^* / \omega \le 1.$$

Следовательно,

$$\alpha\sqrt{\pi}\mathrm{erf}(\sqrt{\omega}) = \sqrt{\sigma_m}\int_0^h \sqrt{f(z)}dz,$$

и выражение для α имеет вид

$$\alpha = \sqrt{\sigma_m / \pi}\int_0^1 \sqrt{f(z)}dz. \quad (7а)$$

Введем обозначение

$$\int_0^h \sqrt{f(z)}dz = g(h),$$

из которого ясно, что $g(h)$ – возрастающая функция. Тогда

$$h = g^{-1}(\alpha\sqrt{\pi / \sigma_m}\mathrm{erf}(\sqrt{\omega})), \quad (8)$$

где g^{-1} – символ обратного отображения.

Полученное выражение (8) есть не что иное, как приближенное решение уравнения Крокко.

Дальше для иллюстрации решения (8) мы рассмотрим степенные функции $f(h)$. Пусть

$$f(h) = h^s, s > 0 \Rightarrow \alpha\sqrt{\pi}\mathrm{erf}(\sqrt{\omega}) =$$

$$= \frac{2\sqrt{\sigma_m}}{s+2}h^{s/2+1},\ \alpha = \frac{2}{s+2}\sqrt{\sigma_m / \pi}.$$

Тогда решение уравнения Крокко имеет вид

$$h^{s/2+1} = \mathrm{erf}(\sqrt{\omega}), h = (\mathrm{erf}(\sqrt{\omega}))^{2/(s+2)}.$$

При $s = 0$ получается точное решение уравнения Фурье, при $s = 1$ – приближенное решение уравнения Крокко:

$$h = (\mathrm{erf}(\sqrt{\omega}))^{2/3}.$$

Если же $f(h)$ – невозрастающее распределение, т. е. $f(0) = 1$, то

$$\int_0^\omega f(h)dh = \omega^* < \omega,$$

и тогда из уравнения (1б) получаем следующий первый интеграл:

$$\psi = -\sqrt{\omega^*} = -\sqrt{\theta\omega},\ \theta := \omega^* / \omega < 1.$$

Если провести разделение переменных, то

$$\sqrt{\theta_m}h = \alpha\sqrt{\pi}\mathrm{erf}(\sqrt{\omega}),$$

$$\alpha = \sqrt{\theta_m / \pi}.$$

Окончательное выражение для h имеет следующий вид:

$$h = \mathrm{erf}(\sqrt{\omega}).$$

Интегральное уравнение, равносильное уравнению Крокко

Уравнение Крокко (1) можно записать в следующем виде:

$$2d\varphi / dh + \int_0^h f(z)dz / \varphi(z) = 0. \quad (1г)$$

Отсюда получается интегральное уравнение для определения $\varphi(h)$:

$$\varphi(h) - \alpha + 0,5\int_0^h \frac{(h-z)f(z)}{\varphi(z)}dz = 0. \quad (1д)$$

Введем итерационный процесс, обозначив номер итерации буквой k. Тогда решение уравнения (1д) с помощью указанного процесса принимает вид

$$\varphi_k(h) = \alpha - 0,5\int_0^h (h-z)f(z) / \varphi_{k-1}(z)dz.$$

Пусть $f(z) = z$, тогда, полагая $\varphi_0(h) = \alpha$, последовательно получаем:

$$\varphi_1(h) = \alpha - \frac{h^3}{12\alpha}, \alpha^2 = 1/12,$$

$$\varphi_2(h) = \alpha - \frac{1}{2\alpha}\int_0^h \frac{(h-z)z}{1-z^3}dz = \alpha - 1/(2\alpha) \times$$

$$\times\left\{h/3\ln\frac{1}{1-h} + h/6\ln(1+h+h^2) -\right.$$

$$\left. - h/\sqrt{3}\left(\mathrm{arctg}\frac{2h+1}{\sqrt{3}} - \pi/6\right) - 1/3\ln\frac{1}{1-h^3}\right\},$$

$$\alpha^2 = 1/2(\ln\sqrt{3} - \pi/(6\sqrt{3})),$$

и т. д.

Видно, что уже на второй итерации возникает логарифмическая особенность у деривативa $d\varphi/dh$, $h \to 1-0$.

Ввиду того, что $\varphi \in C^{(2)}(0,1)$ – элемент полного пространства, для сходимости итерационного процесса достаточна сходимость в себе последовательности $(\varphi_k)_{k\geq 0}$.

Экстремальное свойство решения уравнения Крокко

Прежде всего отметим, что уравнение Крокко порождается некоторым производящим функционалом. В связи с этим справедливо следующее утверждение.

Утверждение 1. *Уравнение Крокко равносильно канонической системе:*

$$d\varphi / dh = \psi,\ d\psi / dh = -0,5 f(h) / \varphi$$

с гамильтонианом $E(h,\varphi,\psi) = \psi^2 - f(h)\ln(1/\varphi)$.

Тогда вдоль решения (характеристики) предельной задачи Крокко распределение I_Δ *удовлетворяет условию экстремума*:

$$I_\Delta(\varphi) = \int_\Delta ((d\varphi/dh)^2 + f(h)\ln(1/\varphi))dh \to \to \inf \geq 0,\ \forall\Delta \subset (0,1), \tag{9}$$

или (что тождественно)

$$dI_\Delta \leq \delta I_\Delta,$$

где d – изменение распределения вдоль куска действительной характеристики (решения), δ – изменение распределения вдоль любой допустимой характеристики.

Нетрудно показать, что необходимое условие (9) экстремума (минимума) распределения I_Δ совпадает с уравнением Крокко. Доказательство существования локального экстремума у распределения I_Δ, предполагаемого в утверждении 1, опускается.

Далее, рассмотрим связь биномиальной аппроксимации решения уравнения Крокко с экстремальным свойством решения. Прежде всего, из предельной задачи (1), (2) следует, что

$$\int_0^1 \psi^2 dh = 0,5\int_0^1 f(h)dh. \tag{10}$$

В частности, если $f(h) = h$, то равенство (10) принимает вид

$$\int_0^1 \psi^2 dh = 1/4. \tag{10a}$$

Поэтому справедлива следующая теорема.

Теорема 2. *Пусть выбрано следующее распределение φ(h), аппроксимирующее решение предельной задачи (1), (2):*

$$\varphi(h) = \alpha(1-h^m), \tag{11}$$

и Δ = (0, 1), т. е. распределение (9) является условием глобального экстремума I_Δ на *интервале (0, 1).*

Тогда, если φ(h) доставляет экстремум распределению (9), то выполняется равенство (10a), т. е. имеет место импликация: (9) → (10). Другими словами, для выполнения условия (9) необходимо выполнение тождества (10).

Доказательство. Проверим утверждение теоремы 2 для бинома (11). Действительно, подстановка распределения (11) в функционал (9) приводит к условию

$$\frac{(\alpha m)^2}{2m-1} + 1/2\ln(1/\alpha) \to \inf \geq 0. \tag{11a}$$

Найдем минимум левой части выражения (11a) по α. Дифференцируем это выражение по α и приравниваем результат нулю:

$$\frac{(\alpha m)^2}{2m-1} = 1/4,\ \alpha = \sqrt{2m-1}/(2m).$$

Но это выражение совпадает с тождеством (10a) для бинома (11).

Теорема 2 доказана.

Совершенно аналогично тождеству (10) можно доказать тождества с ядром h^m, $m > 0$.

Действительно, поскольку в условиях предельной задачи (1), (2) выполняется утверждение теоремы 1, согласно которому

$$(\varphi d\varphi/dh)_{h=+0} = (\varphi d\varphi/dh)_{h=1-0} = 0,$$

то, интегрируя по частям, получим для любого $m > 0$ такое равенство:

$$\int_0^1 h^m \varphi d^2\varphi / dh^2 dh = -m\int_0^1 h^{m-1}\varphi(h)d\varphi(h) - \int_0^1 h^m (d\varphi/dh)^2 dh = -m/2(h^{m-1}\varphi^2)_0^1 +$$

$$+\ 0,5m(m-1)\int_0^1 h^{m-2}\varphi^2(h)dh -$$

$$-\int_0^1 h^m (d\varphi / dh)^2 dh = 0,5m(m-1)\times$$

$$\times\int_0^1 h^{m-2}\varphi^2(h)dh - \int_0^1 h^m (d\varphi / dh)^2 dh.$$

Таким образом,

$$\int_0^1 h^m (d\varphi / dh)^2 dh =$$
$$= 0,5\left(m(m-1)\int_0^1 h^{m-2}\varphi^2(h)dh + \int_0^1 h^m f(h)dh \right). \quad (12)$$

Нетрудно показать, что при $m = 0$ равенство (12) переходит в равенство (10), что и требуется.

Если же $m = 1$, то

$$\int_0^1 h(d\varphi / dh)^2 dh = 0,5\int_0^1 hf(h)dh. \quad (12а)$$

В случае если $m = 2$, то

$$\int_0^1 h^2(d\varphi / dh)^2 dh =$$
$$= \int \varphi^2(h)dh + 0,5\int_0^1 h^2 f(h)dh. \quad (12б)$$

Тождества (12а) и (12б) удобно использовать при биномиальной аппроксимации решения предельной задачи (1), (2) в виде полинома, зависящего от параметров.

Реализация интегральных тождеств и апостериорные оценки констант приближенного решения

В данном разделе рассмотрено несколько частных случаев реализации тождеств (12), (12а) и (12б) для построения биномиальных аппроксимаций решения уравнения Крокко. При этом распределение $f(h)$ считается степенной функцией от h.

Случай 1. Пусть $f(h) = h^s$. Тогда из тождеств (12а) и (10) следует, что биномиальная аппроксимация

$$\varphi(h) = \alpha(1 - h^m) \quad (13)$$

реализуется для различных s при следующих значениях параметров α и m:

$s = 0$, $\alpha = 0,5559$, $m = 2,6180$;

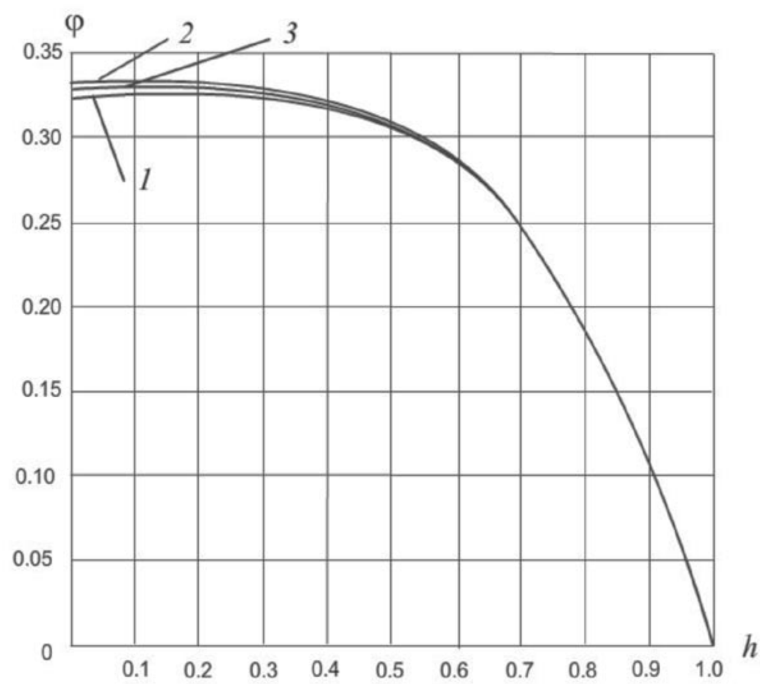

Рис. 2. Биномиальные аппроксимации решения предельной задачи (1) при различных наборах параметров:
$\alpha = 0,325$, $m = 4,137$ (*1*); $\alpha = 1/3$, $m = 3,927$ (*2*); $\alpha = 0,3307$, $m = 4$ (*3*)

$s = 1,\ \alpha = 0{,}3259,\ m = 4{,}1370;$

$s = 2,\ \alpha = 0{,}2319,\ m = 5{,}6460;$

$s = 3,\ \alpha = 0{,}1803,\ m = 7{,}1500.$

В предельной задаче Крокко $s = 1$, и тогда погрешность определения α составляет 2 %. Если $s = 0$, то точное значение $\alpha = 0{,}5642$ превосходит найденное на 1,5 %.

Существует еще две неплохие аппроксимации решения задачи (1), (2), $s = 1$. Именно, если $f(h) = h$, то $\alpha = 1/3$, $m = 3{,}922$ и $\alpha = \sqrt{7}/8$, $m = 4$.

На рис. 2 представлены три биномиальные аппроксимации $\varphi(h)$, отвечающие найденным значениям параметров α и m. Видно, что незначительное различие кривых наблюдается в области малых значений h. При $h \to 1 - 0$ расслоение кривых незначительно.

Случай 2. Пусть $f(h) = 1 - h^s$. Тогда аналогично первому случаю получаем следующие значения параметров:

$s = 1,\ \alpha = 0{,}4446,\ m = 1{,}8431;$

$s = 2,\ \alpha = 0{,}5000,\ m = 2{,}000;$

$s = 3,\ \alpha = 0{,}5213,\ m = 2{,}1019;$

$s = \infty,\ \alpha = 0{,}5559,\ m = 2{,}6180.$

Разумеется, последний случай соответствует случаю $s = 0$ первого случая.

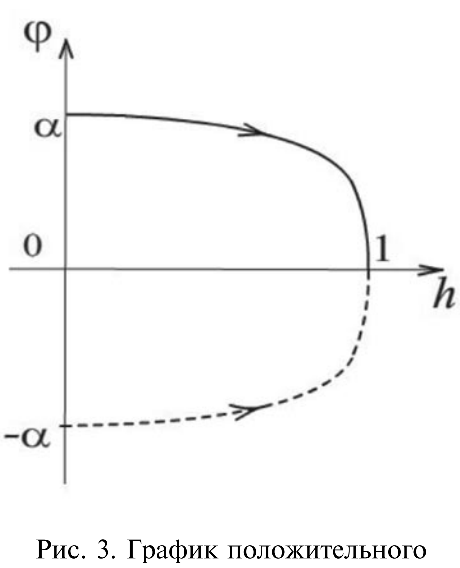

Рис. 3. График положительного и отрицательного решений (сплошная линия и пунктир) типичной предельной задачи Крокко (1), (2) в координатах h, φ (иллюстрация Примера 1)

Случай 3. Пусть $f(h) = (1 - h)^s$. Тогда получаем следующий набор параметров:

$s = 0,\ \alpha = 0{,}5559,\ m = 2{,}6180;$

$s = 1,\ \alpha = 0{,}4446,\ m = 1{,}8340;$

$s = 2,\ \alpha = 0{,}3433,\ m = 1{,}7071;$

$s = 3,\ \alpha = 0{,}3366,\ m = 1{,}4413.$

Об однозначности решений уравнения Крокко

Задача данного раздела – доказать на примерах, что решения уравнения Крокко не являются 2-диффеоморфизмами.

Пример 1. Начнем с типичной предельной задачи (1), (2). Пусть $\varphi(h)$ – ее решение. Тогда функция $-\varphi(h)$ также является решением уравнения (1), таким, что

$$d\varphi(0)/dh = 0,\ \varphi(1) = 0,\ \varphi(0) + \alpha = 0.$$

Поэтому график решения в координатах h, φ представляет собой полуовал, симметричный относительно начала координат (рис. 3), отображение φ: $(0 < h < 1) \to (0, \varphi_0)$ – инъекция (мономорфизм или однозначное отображение).

Пример 2. Рассмотрим теперь задачу Коши (1), (2а), равносильную предельной задаче Крокко (1), (2). В этом случае необходимо подобрать постоянную α таким образом, чтобы выполнялось условие $\varphi(1) = 0$. Алгоритм пристрелки уже описан выше в разделе «Анализ имеющихся результатов».

Очевидно, что уравнение Крокко (1) допускает «понижение порядка» и с этом случае принимает вид

$$2\varphi d\varphi / dh + \varphi(h)\int_0^h f(t)dt / \varphi(t) = 0. \quad (14)$$

Действительно, перепишем уравнение (1) в виде интегро-дифференциального уравнения:

$$2d\varphi / dh + \int_0^h f(t)dt / \varphi(t) = 0,$$

а затем домножим обе его части на $\varphi(h)$. Очевидно, что при этом корневое пространство расширится и появится лишнее решение $\varphi(h) = 0$.

Уравнение (14) можно переписать в виде

$$\varphi^2(h) = \alpha^2 - \int_0^h \varphi(z)dz\int_0^z f(t)dt \,/\, \varphi(t), \quad (15)$$

откуда получается, что

$$\alpha^2 = \int_0^1 \varphi(z)dz\int_0^z f(t)dt \,/\, \varphi(t), \quad (16)$$

или в другой записи:

$$\alpha^2 = \int_0^1 f(t)dt \,/\, \varphi(t)\int_t^1 \varphi(z)dz. \quad (16a)$$

Поэтому с учетом равенства (16а) выражение (15) можно записать следующим образом:

$$\varphi^2(h) = \int_h^1 \varphi(z)dz\int_0^z f(t)dt \,/\, \varphi(t). \quad (15a)$$

Следовательно, справедливо следующее, почти очевидное, утверждение.

Утверждение 2. *Вещественное решение предельной задачи (1), (2) или равносильной задачи Коши (1), (2а) на промежутке $0 < h < 1$ существует, если отображение $f(h) > 0$.*

Доказательство. Действительно, из формул (15) и (15а) следует, что знак решения определяется только знаком $f(h)$.

Переходим к однородной предельной задаче Крокко (1), (3). Тогда в равенстве (16) $\alpha = 0$. Тогда интегральное уравнение (14) допускает решение $\varphi(h) = 0$, $0 < h < 1$. Это решение удовлетворяет условиям (3).

Пусть в предельной задаче (1), (3) выполняются условия $f(h) \geq 0$, $\varphi \geq 0$. Тогда $d^2\varphi/dh^2 < 0$. Отрицательные решения находятся вне нашего рассмотрения как не имеющие физического смысла.

Утверждение 2 доказано.

Дальнейшие выкладки проводим для «чистого» случая Крокко, т. е. когда $f(h) = h$. Для этого требуется доказать следующую лемму.

Лемма. *Пусть $\varphi(h)$ – решение предельной задачи (1), (3). Тогда существует $h_0 \in (0, 1)$ такое, что при $h = h_0$ $d\varphi/dh = 0$.*

Доказательство. Перепишем первый интеграл для уравнения Крокко в виде

$$\varphi'(h) = \varphi'(0) - (1/2)\int_0^h tdt \,/\, \varphi(t), \quad (17)$$

причем штрихами обозначены производные по h.

Пусть критическое (подозреваемое на максимум) значение $h = h_0 \geq 0$ существует, и тогда

$$\varphi'(0) = (1/2)\int_0^{h_0} tdt \,/\, \varphi(t) > 0.$$

Необходимо показать, что $0 < h_0 < 1$. Повторно интегрируя равенство (17), получаем:

$$\varphi(h) - h\varphi'(0) + (1/2)\int_0^h (h-t)t \,/\, \varphi(t)dt = 0.$$

Теперь пусть $h = 1$, в этом случае

$$\varphi'(0) = (1/2)\int_0^1 (1-t)t \,/\, \varphi(t)dt, \quad (17a)$$

и тогда справедливо выражение

$$\varphi(h) = (1/2)\left(h\int_h^1 t \,/\, \varphi(t)dt + \int_0^h t^2 \,/\, \varphi(t)dt - \right.$$

$$\left. - h\int_0^1 t^2 \,/\, \varphi(t)dt\right) = (1/2)\left(h\int_h^1 t \,/\, \varphi(t)dt + \right.$$

$$\left. + (1-h)\int_0^1 t^2 \,/\, \varphi(t)dt - \int_h^1 t^2 \,/\, \varphi(t)dt\right) \geq$$

$$\geq (1/2)(1-h)\int_0^1 t^2 \,/\, \varphi(t)dt > 0.$$

Следовательно, $\varphi(h) > 0$, $0 < h < 1$.

Из равенств (17) и (17а) вытекает, что

$$\int_{h_0}^1 tdt \,/\, \varphi(t) = \int_0^1 t^2 dt \,/\, \varphi(t) > 0. \quad (18)$$

Нетрудно видеть, что если в уравнении (18) $h_0 = 0$, то из этого необходимо следует, что $\varphi = \infty$ почти всюду на промежутке (0, 1). Но это недопустимо (исключено). Случай, когда $h_0 = 1$, также оказывается невозможным, поскольку слева в равенстве должен стоять 0, а справа – положительное число.

Лемма доказана.

Полученный здесь результат, очевидно, не зависит от $f(h)$. Попутно в ходе доказательства установлено, что $d\varphi/dh > 0$ на левом конце промежутка (от 0 до точки $h = h_0 - 0$) и что $\varphi(h) > 0$, когда $0 < h < 1$.

Далее продолжим проведение выкладок для «чистого» случая Крокко.

Легко доказать, что $d\varphi/dh < 0$ на промежутке $h_0 + 0 < h < 1 - 0$.

Для этого проинтегрируем уравнение Крокко от правого конца промежутка:

$$\varphi'(h) - \varphi'(1) - \int_h^1 tdt / \varphi(t) = 0,$$

откуда следует, что

$$\varphi'(1) = -\int_{h_0}^1 tdt / \varphi(t) < 0.$$

Следовательно,

$$\varphi'(h) = -\int_{h_0+0}^{h} hdt / \varphi(t) < 0,$$
$$h_0 + 0 < h < 1 - 0,$$

что и требовалось.

Для наглядности представим график функции $\varphi = \varphi(h)$. Она должна отражаться на нем в виде овала в первом квадранте координатной плоскости с максимальным значением $\varphi_0 := \varphi(h_0) > 0$ (рис. 4). Видно, что предельная задача Крокко в записи (1), (3) распадается на две типичные предельные задачи для промежутков $(+0,\ h_0 - 0)$ и $(h_0 + 0,\ 1 - 0)$:

$$\begin{gathered}\varphi(0) = (d\varphi / dh)_{h=h_0-0} = 0,\ \ 0 < h < h_0;\\ \varphi(1) = (d\varphi / dh)_{h=h_0+0} = 0.\end{gathered} \qquad (17)$$

Решения с такими условиями легко построить. Например, если $s = 0$ ($f = 1$), то

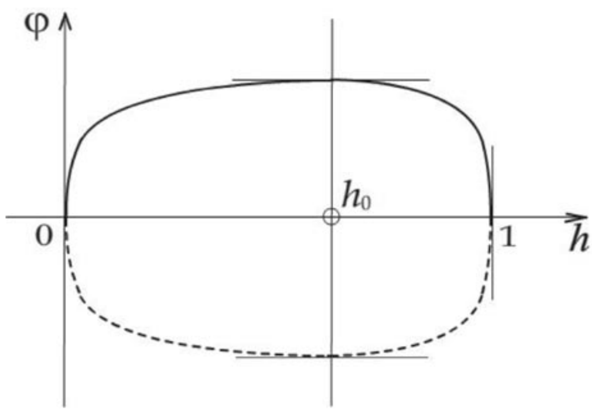

Рис. 4. График решения однородной предельной задачи Крокко (1), (3); при h_0 функция φ имеет максимальное положительное и минимальное отрицательное значения

$$\begin{gathered}h_0 - h_l = \varphi_0\sqrt{\pi}\operatorname{erf}(\sqrt{\omega});\\ h_r - h_0 = \varphi_0\sqrt{\pi}\operatorname{erf}(\sqrt{\omega});\\ \omega := \ln(\varphi_0 / \varphi), \varphi_0 := \varphi(h_0) \geq \varphi(h),\end{gathered} \qquad (18)$$

где h_l, h_r − сужения $h(\omega)$ на левый и на правый промежутки соответственно, т. е.

$$h = h_l,\ 0 < h < h_0;\ h = h_r,\ h_0 < h < 1.$$

Пусть в решении (18) $\varphi = 0$. Тогда

$$h_0 = 1 - h_0,\ h_0 = 1/2,\ \varphi_0 = 1/(2\pi^{0,5}).$$

Максимальное значение φ, которое записывается как $\varphi(h_0) = \varphi_0$, оказывается вдвое меньше, чем соответствующее решение в типичной предельной задаче Крокко (1), (2).

В случае, когда $f(h) = h$, решение можно получить аналогичным образом. На промежутке $0 < h < h_0$ ставим такие же предельные условия, как и в типичной предельной задаче Крокко, а именно

$$\varphi(0) = \varphi'(h_0) = 0.$$

Далее следует применить аппроксимацию в виде кубического бинома:

$$\varphi(h) = \alpha(h_0^3 - (h_0 - h)^3).$$

С этой целью используем тождество

$$\varphi'(0) = (1/2)\int_0^{h_0} tdt / \varphi(t).$$

Из него следует, что

$$\varphi'(0) = 3\alpha h_0^2,$$

и, проделав простые расчеты, получим следующее равенство:

$$\alpha^2 h_0^3 = \frac{1}{\sqrt{3}}\frac{\pi}{18},$$

которое связывает величины α и h_0.

Теперь пусть $\varphi := \alpha\Phi$, $\zeta := h / h_0$. Функция $\Phi = \Phi(\zeta)$ удовлетворяет уравнению Крокко и допускает кубическую аппроксимацию:

$$\Phi(\zeta) = 1 - (1 - \zeta)^3.$$

Тогда легко подсчитать, что $\alpha^2 = h_0^3$, откуда получаем значения h_0 и α:

$$h_0 = \left(\frac{1}{\sqrt{3}}\frac{\pi}{18}\right)^{1/6} = 0,68 > 1/2, \alpha = 0,46.$$

Заключение

В результате проведенного исследования можно сделать следующие заключения:

для приближенных оценок решений предельных задач Крокко (1) – (4) в целом (т. е. на промежутке $0 < h < 1$) достаточно использовать интегральные тождества, получаемые из предельных условий. Такие оценки можно рассматривать как грубые, поскольку значения констант решения вычисляются с погрешностью не менее 1,5 %. Показано, что интегральные тождества связаны с условием экстремума некоторого распределения. В качестве эталонных решений использованы решения, полученные В.П. Вариным;

применение интегральных тождеств оказывается достаточным для определения постоянных биномиальной аппроксимации (различных) предельных задач Крокко, т. е. (1), (2) и (1), (3), с невысокой точностью (погрешность составляет около 1 %). Максимальное расхождение точного решения предельной задачи и биномиальной аппроксимации наблюдается (естественно) вблизи особенности $h = 1 - 0$ для деривативa. Эта особенность является регулярной, «стираемого» (логарифмического) порядка;

уравнение Крокко связано с необходимым условием минимума для положительного распределения (функционала). Соответствующий гамильтониан знакопеременен. Решение задачи на минимум распределения равносильно определению констант бинома из интегральных тождеств;

однородная предельная задача (1), (3) распадается на две типичные предельные задачи Крокко для промежутков левее и правее критической точки (максимума) $\varphi(h)$. Интегральные тождества в предельной задаче (1), (3) также применимы для грубой оценки постоянных.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

[1] **Варин В.П.** Плоский асимптотический ряд Блазиуса // Математический форум (сборник). Сер. Итоги науки. Владикавказ, 2015. С. 34–47;

[2] **Шилов Г.Е.** Математический анализ. Спецкурс. М.: Физматгиз, 1961.

[3] **Варин В.П.** Плоские разложения и их приложения. М.: Препринты ИПМ им. М.В. Келдыша, 2014. № 23. 25 с. URL: htpp://library.keldysh.ru/preprint.asp?id=2014-23;

[4] **Варин В.П.** Плоский асимптотический ряд Блазиуса // Теория операторов, комплексный анализ, математическое моделирование. Матер. научн. конф. Пос. Дивноморское. 7 – 13 сент. 2014. С. 16.

[5] **Башкин В.А., Диканский Е.А.** Решение уравнений Прандтля при нулевом градиенте давления на неизотермической поверхности // Ученые Записки ЦАГИ. 2000. Т. 31. № 3-4. С. 47–59.

[6] **Брюно А.Д., Горючкина И.В.** Сходимость степенных разложений решений ОДУ. М.: Препринты ИПМ им. М.В. Келдыша, 2013. № 94. 13 с. URL: htpp://library.keldysh.ru/preprint.asp?id=2013-94;

[7] **Сорокин В.Н.** Аппроксимации Эрмита – Паде обобщенных гипергеометрических рядов от двух переменных//Сибирский математический журнал. 2002. Т. 43. № 4. С. 894–906.

[8] **Комарова Е.В.** Асимптотическая Паде-интерполяция решений краевых и вариационных задач с параметром. Автореферат дис. ... канд. физ.-мат. наук. 05.13.18. М., 2003. 14 с.

[9] **Феоктистов В.В., Мякинник О.О.** О решении задач пограничного слоя, преобразованных к системе уравнений в частных производных первого порядка с квадратичной нелинейностью// Вестник МГТУ им. Н.Э. Баумана. Сер. Естественные науки. 2004. № 1. С. 54–71.

[10] **Павлов В.Г., Якимов Е.И.** Переменные Крокко и уравнения пограничного слоя на поверхности при неравномерном внешнем потоке// Вестник КГТУ им. А.Н. Туполева. 2004. № 2. С. 30–33.

[11] **Петриченко М.Р.** Однородная предельная задача Крокко//Научное обозрение физико-математических и технических наук. М.: Просперо, 2015. Вып. 14. С. 53–55.

СВЕДЕНИЯ ОБ АВТОРЕ

ПЕТРИЧЕНКО Михаил Романович – *доктор технических наук, заведующий кафедрой гидравлики Санкт-Петербургского политехнического университета Петра Великого.*

195251, Российская Федерация, г. Санкт-Петербург, Политехническая ул., 29

fonpetrich@mail.ru

Petritchenko M.R. ROUGH ESTIMATES AND BINOMIAL APPROXIMATIONS FOR THE CROCCO EQUATION IN THE BOUNDARY PROBLEMS.

In order to solve the Crocco boundary problems known as the typical one and the uniform one, binomials (as approximants of exact solutions) and integral identities have been used. The extent of the closeness of the exact solution to its approximation was estimated using the $\varphi(0)$ value. The solution of the typical Crocco boundary problem was proved to have a logarithmic singularity of the derivative at $\varphi = 0$. The Crocco equation was found to provide both necessary and sufficient conditions for the minimum of a positive distribution being vortex in $d\varphi/dh$. The uniform Crocco boundary problem was demonstrated to be equivalent to the two typical Crocco boundary problems with a common critical point.

CROCCO BOUNDARY PROBLEM, APPROXIMATION, CONVEX DISTRIBUTION, MINIMUM OF POSITIVE FUNCTIONAL.

REFERENCES

[1] **V.P. Varin**, Ploskiy asimptoticheskiy ryad Blaziusa [The plane asymptotical Blasius series], Matematicheskiy forum, seriya «Itogi nauki», Vladikavkaz, 2015, 34–47.

[2] **G.E. Shilov**, Matematicheskiy analiz, spetskurs [Mathematical analysis, special course], M.: Fizmatgiz, 1961.

[3] **V.P. Varin,** Ploskiye razlozheniya i ikh prilozheniya [The plane expansions and their applications], Preprinty IPM im. M.V. Keldysha, 2014, No. 23, URL: htpp://library.keldysh.ru/preprint.asp?id=2014-23;

[4] **V.P. Varin,** Ploskiy asimptoticheskiy ryad Blaziusa, Teoriya operatorov, kompleksnyy analiz, matematicheskoye modelirovaniye [The plane asymptotical Blasius series, Theory of operators, Complex analysis, Mathematical simulation], Divnomorskoye, 2014, P. 16.

[5] **V.A. Bashkin, E.A. Dikanskiy**, Resheniye uravneniy Prandtlya pri nulevom gradiyente davleniya na neizotermicheskoy poverkhnosti [The solution of Prandtl equation for zero-pressure gradient on the non-isothermal surface], Uchenyye zapiski TsAGI. 31(3-4) (2000) 47–59.

[6] **A.D. Bryuno, I.V. Goryuchkina**, Skhodimost stepennykh razlozheniy resheniy ODU [The convergence of power expansions of ODE solutions], Preprinty IPM im. M.V. Keldysha, 2013, No. 94, URL: htpp://library.keldysh.ru/preprint.asp?id=2013-94;

[7] **V.N. Sorokin,** Approksimatsii Ermita-Pade obobshchennykh gipergeometricheskikh ryadov ot dvukh peremennykh [The Hermit-Pade approximations to generalized hypergeometrical series in two variables], Sibirskiy matematicheskiy zhurnal. 43(4) (2002) 894–906.

[8] **E.V. Komarova,** Asimptoticheskaya Pade-interpolyatsiya resheniy krayevykh i variatsionnykh zadach s parametrom [The asymptotical Pade-interpolation of the boundary-value and variational problems with a parameter], avtoreferat dissert.... k.f-m. nauk, 05.13.18, Moscow, 2003.

[9] **V.V. Fyeoktistov, O.O. Myakinnik,** O reshenii zadach pogranichnogo sloya, preobrazovannykh k sisteme uravneniy v chastnykh proizvodnykh pervogo poryadka s kvadratichnoy nelineynostyu [On the solution of the boundary-layer problems transformed to the partial first-order differential system with a quadratic linearity], Vestnik MGTU im. N.E. Baumana Seriya «Yestestvennyye nauki». 1(2004) 54–71.

[10] **V.G. Pavlov, E.I. Yakimov**, Peremennyye Krokko i uravneniya pogranichnogo sloya na poverkhnosti pri neravnomernom vneshnem potoke [The Crocco variables and the boundary-layer equations on the surface under nonuniform external flow], Vestnik KGTU im. A.N. Tupoleva. 2 (2004) 30–33.

[11] **M.R. Petrichenko**, Odnorodnaya predelnaya zadacha Krokko [The uniform Crocco boundary problem], Nauchnoye obozreniye fiziko-matematicheskikh i tekhnicheskikh nauk, Prospero, No. 14, Moscow, 2015, 53–55.

THE AUTHOR

PETRITCHENKO Michael R.
Peter the Great St. Petersburg Polytechnic University
29 Politechnicheskaya St., St. Petersburg, 195251, Russian Federation
fonpetrich@mail.ru