

DOI 10.5862/JEST.254.3

УДК 621.311

Д.Д. Заборова, М.И. Куколев, Т.А. Мусорина, М.Р. Петриченко

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ ЭНЕРГЕТИЧЕСКОЙ ЭФФЕКТИВНОСТИ СЛОИСТЫХ СТРОИТЕЛЬНЫХ ОГРАЖДЕНИЙ

D.D. Zaborova, M.I. Kukolev, T.A. Mussorina, M.R. Petritchenco

THE SIMPLEST MATHEMATICAL MODEL OF THE ENERGY EFFICIENCY OF LAYERED BUILDING ENVELOPES

Энергоэффективность ограждающих конструкций (стены, перекрытия, фасады) должна соответствовать требованиям нормативных документов. Основное внимание уделяется конструктивно-технологическим мероприятиям, направленным на увеличение термического сопротивления ограждений. Реализация повышенного термического сопротивления стеновой конструкции требует оценок термической устойчивости стены. Показано, что повышенное термическое сопротивление теплопроводности не всегда обеспечивает стационарность температур граней стены. В настоящей статье выясняется связь между активным (термическое сопротивление) и реактивным (аккумуляция) сопротивлениями ограждения на модели одномерной стенки.

ЭНЕРГОЭФФЕКТИВНОСТЬ; ТЕМПЕРАТУРНО-ВЛАЖНОСТНЫЙ РЕЖИМ; АККУМУЛЯЦИЯ ТЕПЛОТЫ; СТЕНОВЫЕ ОГРАЖДЕНИЯ; ЗАДАЧА КОШИ.

The energy efficiency of building envelopes (walls, floors, facades) should meet the requirements of regulatory documents. The current focus is mainly on the structural and technological measures aimed at increasing the thermal resistance of protections. Increasing the thermal resistance of wall structures requires estimating the thermal stability of the walls. It has been shown that increased thermal resistance of thermal conductivity does not always provide a steady temperature of the wall's faces. In this paper, we have found the connection between the active (thermal resistance) and the reactive (accumulation) resistances of an envelope using the model of a one-dimensional wall.

ENERGY EFFICIENCY; TEMPERATURE AND HUMIDITY CONDITIONS; HEAT ACCUMULATION, WALL ENCLOSURE; CAUCHY PROBLEM

Введение

В известных публикациях изучается оптимизация температурно-влажностного режима стен, т.е. ресурс конструкций [2], влияние включений на величину потерь теплоты и на термическое сопротивление стеновых ограждений [3], влияние двойных фасадов на тепловые потери [4], эффективность применения новых теплоизоляционных материалов, в том числе противопожарных мембран, на термическое сопротивление и энергоэффективность [5] и т.д. Включениями называются инородные конструкции, кронштейны, элементы арматуры, анкеры и пр., искажающие одномерное

температурное поле. К ним же относится неидеальность сопряжения слоев конструкции, приводящая к образованию воздушных линз. Из всего перечня частных задач, как правило, выпадают вопросы тепловой устойчивости ограждений и связанные с этим вопросы определения аккумуляции теплоты ограждениями.

Термическим сопротивлением теплопроводности принято называть величину

$$\sum_{i=1}^N \frac{\delta_i}{\lambda_i},$$

где N – число слоев; δ_i – толщина слоя; λ_i – коэффициент теплопроводности; $i = 1(1)N$.



Аккумуляционная способность ограждения определяет количество теплоты, необходимой для поддержания заданного температурного уровня стены и ограждаемого помещения при изменении температуры внешнего источника теплоты (сток). Конструкция теплоустойчива, если скорость изменения температуры в любой точке конструкции не превосходит некоторого предельного значения, иначе выражаясь, если температура ограждающей конструкции $T = T(t, x)$, то $\max_{x \in X} \left| \frac{\partial T}{\partial t} \right| < c_T$, или,

что то же, скорость изменения температуры равномерно ограничена на множестве X значений пространственной координаты x .

В статье [2] рассматриваются теплотехнические свойства различных конструктивных систем навесных вентилируемых фасадов. В работах [4, 19] автор поясняет достаточные условия, необходимые для существования свободного конвективного течения в вертикальном щелевом канале.

Менее представлены решения задач гидравлики неизотермических свободно-конвективных потоков в НВФ (навесной вентилируемый фасад). Количество работ по теплопередаче и гидродинамике НВФ на порядок меньше работ по оптимизации термического сопротивления стеновых ограждений.

Решению проблеме энергосбережения в зданиях посвящены многие исследования. Так, В.Г. Гагарин, В.В. Козлов, Е.Ю. Цыкановский предложили методику расчета коэффициента теплотехнической эффективности конструкции с учетом влияния конструктивных элементов [17].

Постановка задач и результаты

В строительстве актуален вопрос влияния уровня тепловой защиты ограждающих конструкций на величину потерь тепловой энергии в здании, который рассматривается в статьях [11–13].

Цель нашей работы — выяснить связь между активным и реактивным сопротивлениями стенового ограждения на модели одномерной стенки.

Для этого необходимо решить следующие задачи:

1) рассмотреть три неравенства, выражающие ограничения на мгновенную температуру стенки;

2) провести анализ свойств решения задачи Коши.

Задача 1 в нормированных координатах ставится так:

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} &= \frac{\partial}{\partial x} \left(a(x) \frac{\partial T}{\partial x} \right), \quad t > 0, \quad 0 < x < 1; \\ \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)_{x=0} + h_0 (\theta_0(t) - u(t, 0)) &= \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)_{x=1} + \\ + h_1 (u(t, 1) - \theta_1(t)) &= 0; \quad t > 0, \quad u(t, 0) = 0. \end{aligned} \quad (1)$$

Здесь $u(t, x)$ — температура стенки; x — координата (в долях толщины стенки d); t — безразмерное время (число Фурье $t := \frac{a_0 \tau}{\delta^2}$, τ — «физическое» время); θ_0, θ_1 — температуры соответственно горячего и холодного источников (заданы); h_0, h_1 — безразмерная теплоотдача от внешних источников к стенке с горячей и с холодной стороны, или числа Био (заданы); $a = a(x)$ — приведенный коэффициент температуропроводности, $a := \frac{\lambda}{a_0 \rho c}$ (задан). Данная конструкция стены изображена на рисунке.

Числа Био определяются стандартно:

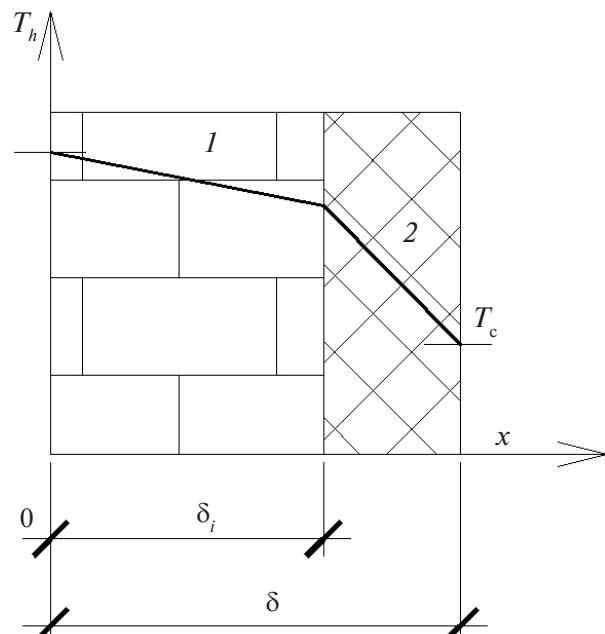


Рис. 1. Распределение температуры по толщине типичной конструкции стены
(1 — кирпич; 2 — утеплитель)

$$\beta = \frac{h_i \sqrt{at_0}}{\lambda}, \quad (2)$$

где h_i – коэффициент теплоотдачи; a – коэффициент температуропроводности; t_0 – период времени (год, месяц, неделя и т.д.).

Предельная задача (1) хорошо известна в классической теории [6, 7]. Традиционные методы ее решения плохо работают при температурах внешних источников и коэффициентах теплоотдачи, изменяющихся во времени.

Необходимо отметить три неравенства, выражающих ограничения на мгновенную температуру стены,

$$\theta_1(t) \leq u(t, 1) < u(t, 0) \leq \theta_0(t), \quad (2)$$

а также свойства полунепрерывности предельных температур стены как функций чисел Био:

$$\theta_0(t) \geq \limsup_{h_0 \rightarrow \infty} u(t, 0), \quad \theta_1 \leq \liminf_{h_1 \rightarrow \infty} u(t, 1). \quad (3)$$

Задача 2. Для моделирования температурного распределения $u = u(t, x)$ используется интегральное тождество, получаемое из уравнения предельной задачи (1) [8, 9]:

$$\frac{d}{dt} \int_0^1 u(t, x) dx = H_0(\theta_0 - u(t, 0)) - H_1(u(t, 1) - \theta_1); \quad (4)$$

$$H_0 := a(0)h_0, \quad H_1 := a(1)h_1.$$

Левая часть тождества (4) представляет мгновенную скорость изменения средней температуры ограждения, т.е. меру его тепловой устойчивости ограждения. Правая часть (4) – баланс плотностей тепловых потоков, «исправленный» (авторы умножают на коэффициенты температуропроводности в предельных точках $x = 0, x = 1$) с учетом переменности теплофизических свойств стены по ходу теплового потока.

Тождество (4) можно преобразовать в дифференциальное уравнение для предельной температуры $u(t, 0) := \vartheta_0(t)$.

Пусть $u(t, x) := \vartheta_0(t)\exp(-m(t)x)$.

В силу выражения (4) получим

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\vartheta_0}{m} (1 - e^{-m}) \right) = H_0(\theta_0 - \vartheta_0) - H_1(\vartheta_0 e^{-m} - \theta_1) = 0, \quad (5)$$

причем очевидно, что $\vartheta_0(0) = 0$.

При $m \ll 1$ получим следующую задачу Коши для определения $\vartheta_0(t)$:

$$\frac{d\vartheta_0}{dt} + (H_0 + H_1)\vartheta_0 = H_0\theta_0 + H_1\theta_1; \quad \vartheta_0(0) = 0. \quad (6)$$

Зная $\vartheta_0(t)$ и воспользовавшись тождеством $m = \frac{h_0\theta_0}{h_0 + \vartheta_0}$, можно найти экспоненту $m(t)$ для следующей итерации. Как видно, при $h_0 \ll 1$ допущение о малости $m(t)$ справедливо. Наоборот, если $h_0 \gg 1$, то $m(t) = \theta_0(t)$. Тогда аппроксимация температуры имеет вид

$$u(t, x) = \vartheta_0(t)\exp(-x\theta_0(t)). \quad (7)$$

Значит, $\theta_1(t) = \vartheta_0 \exp(-\theta_0(t))$, откуда немедленно получаем, что при $h_0 \gg 1$ температура горячего источника $\theta_0(t)$ есть среднее логарифмическое температур стенки в предельных точках:

$$\theta_0(t) = \ln \frac{\vartheta_0(t)}{\vartheta_1(t)}.$$

Заключение

Приведем конкретные результаты. Они базируются на простых свойствах решения (8) задачи Коши (6). Эти свойства сформулируем в виде лемм без доказательств (доказательства известны [10, 18]).

Лемма 1. Решение задачи Коши (3) имеет вид:

$$\vartheta_0(t) = \int_0^t (H_0\theta_0 + H_1\theta_1)(\tau) \exp \left(- \int_\tau^t (H_0 + H_1)(\omega) d\omega \right) d\tau, \quad (8)$$

где τ, ω – переменные интегрирования.

Лемма 2. Пусть $t \rightarrow \infty$. Тогда

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \vartheta_0(t) = \left(\frac{H_0\theta_0 + H_1\theta_1}{H_0 + H_1} \right)_{t=\infty}. \quad (9)$$

Иначе говоря, предельное (стационарное) значение температуры горячей грани стены равно средней взвешенной (по теплоотдаче, «исправленной» на неоднородность температуропроводности стенки) температуре горячего и холодного источников [14–16].

Лемма 3. Пусть «исправленные» коэффициенты теплоотдачи (H_0, H_1) и температуры источников (θ_0, θ_1) постоянны. Тогда решение (8) принимает вид

$$\vartheta_0(t) = \frac{H_0\theta_0 + H_1\theta_1}{H_1 + H_0} \left(1 - \exp(-(H_0 + H_1)t) \right), \quad (10)$$



Далее:

$$d\vartheta_0/dt = (H_0\theta_0 + H_1\theta_1)\exp(-t(H_0 + H_1)) \xrightarrow{t \rightarrow \infty} +0. \quad (11)$$

Выражение (11) справедливо и для медленно изменяющихся распределений θ_0, θ_1 (температуры источников), H_0, H_1 (коэффициенты теплоотдачи). Тогда, используя (11), можно утверждать следующее:

1) если $H_0 = 0$, т.е. горячая грань стены теплоизолирована, то мгновенная скорость изменения температуры стены ($d\vartheta_0(t)/dt$) определяется только «холодным» источником:

$$d\vartheta_0/dt = H_1\theta_1(t)\exp(-tH_1). \quad (12)$$

При этом максимальная скорость изменения температуры не превосходит $tH_1\exp(-tH_1)$ на всем множестве значений температуры холодного источника $\theta_1(t)$;

2) в условиях предыдущего пункта при неизменной теплоотдаче источника

$$d^2\vartheta_0/dt^2 = \left(\frac{d\theta_1}{dt}H_1 - H_1^2\theta_1 \right) \exp(-tH_1). \quad (13)$$

Если температура горячей грани стены изменяется линейно, то при любом конечном значении $t > 0$ температура холодного источника меняется экспоненциально по времени: $\theta_1(t) \approx \exp(tH_1)$. Иными словами, скорости из-

менения температур источника и граней стены различны: экспоненциальное изменение температуры источника приводит к линейному изменению температуры граней стены;

3) при конечной теплоотдаче на обеих гранях имеем

$$d^2\vartheta_0/dt^2 = \left(\frac{d\theta_0}{dt}H_0 + \frac{d\theta_1}{dt}H_1 - (H_0 + H_1)(H_0\theta_0 + H_1\theta_1) \right) \times \exp(-t(H_0 + H_1)). \quad (14)$$

Значит, при линейном (медленном) изменении температуры грани приведенная температура источника $\theta_0H_0 + \theta_1H_1$ изменяется пропорционально $\exp(t(H_0 + H_1))$;

4) во всех случаях аккумулирующая способность стены сглаживает колебания температуры на поверхности стены;

5) аккумулирующая способность строительного ограждения, сглаживающая изменения температуры источников (воздух), тем больше, чем больше значения приведенных коэффициентов теплоотдачи H_0, H_1 , т.е. в конечном счете, чем больше коэффициенты температуропроводности a_0, a_1 граней стены;

6) таким образом, реализация повышенного термического сопротивления стены за счет применения теплоизоляционных материалов с низкой температуропроводностью вступает в противоречие с теплоустойчивостью ограждения.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **ФЗ № 261 2009.** Об энергосбережении и о повышении энергетической эффективности и о внесении изменений в отдельные законодательные акты Российской Федерации.
2. **Туснина О.А., Емельянов А.А., Туснина В.М.** Технологические свойства различных конструктивных систем навесных вентилируемых фасадов // Инженерно-строительный журнал. 2013. № 8. С. 54–88.
3. **Есенгабулов С.К.** Энергоэффективные наружные стены с организационным воздухообменом: автореферат дисс... канд. техн. наук. Москва, 2009. 163 с.
4. **Петриченко М.Р., Петроченко М.В.** Достаточные условия существования свободно конвективного течения в вертикальном щелевом канале // Научно-технические ведомости СПбГПУ. 2012. № 147(2). С. 276–282.
5. **Ватин Н.И., Горшков А.С., Немова Д.В.** Энергоэффективность ограждающих конструкций при капитальном ремонте // Строительство уникальных зданий и сооружений. 2013. № 3 (8). С. 1–11.
6. **Vatin N.I., Nemova D.V., Rymkevich P.P., Gorshkov A.S.** Influence of building envelope thermal protection on heat loss value in the building // Magazine of Civil Engineering. 2013. № 8. С. 4–14.
7. **Zemitis J., Borodinecs A., Frolova M.** Measurements of moisture production caused by various sources // Energy and Buildings. 2016. № 127. Р. 884–891.
8. **Куколев М.И., Петриченко М.Р.** Определение температурного поля стеки при периодическом тепловом воздействии // Двигатель-2007: Труды международной конференции. М.: Изд-во МГТУ, 2007. С. 115–119.
9. **Иванченко Н.Н., Ткаченко М.М., Петриченко М.Р.** Определение теплоотдачи конвекцией в цилиндре ДВПТ // Двигателестроение. 1984. № 12. С. 11–14.
10. **Vatin N., Gorshkov A., Nemova D., Tarasova D.** Energy efficiency of facades at major repairs of buildings // Applied Mechanics and Materials. 2014. Iss. 633–634. P. 991–996.

11. **Ватин Н.И., Немова Д.В., Рымкевич П.П., Горшков А.С.** Влияние уровня тепловой защиты ограждающих конструкций на величину потерь тепловой энергии в здании // Инженерно-строительный журнал. 2012. № 8(34). С. 4–14.
12. **Горшков А.С., Рымкевич П.П.** Диаграммный метод описания процесса нестационарной теплопередачи // Инженерно-строительный журнал. 2015. № 8(60). С. 68–82.
13. **Корниенко С.В.** Многофакторная оценка теплового режима в элементах оболочки здания // Инженерно-строительный журнал. 2014. № 8. С. 25–37.
14. **Korniyenko S.** Evaluation of thermal performance of residential building envelope // Procedia Engineering 2015. Vol. 117. P. 191–196.
15. **Назиров Р.А., Белов Т.В.** Влияние сопротивления теплопередачи утеплителя на распределение температурных полей в стенных ограждениях с наружными вентилируемыми фасадами // Журнал Сибирского федерального университета. Техника и Технология. 2014. № 2. 207–213.
16. **Vatin N., Petrichenko M., Nemova D., Staritsyna A., Tarasova D.** Renovation of educational buildings to increase energy efficiency // Applied Mechanics and Materials. 2014. P. 1023–1028.
17. **Vatin N., Petrichenko M., Nemova D.** Hydraulic methods for calculation of system of rear ventilated facades // Applied Mechanics and Materials. 2014. Vol. 633–634. P. 1007–1012.
18. **СНиП 23-02-2003.** Тепловая защита зданий. М.: Госстрой России, ФГУП ЦПП, 2003. 26 с.
19. **Olshevskyi V., Statsenko E., Musorina T., Nemova D., Ostrovaia A.** Moisture transfer in ventilated facade structures // MATEC Web of Conferences. 2016. T. 53. 1–5.

REFERENCES

1. **261-FZ (Federal Law).** Ob energosberzhenii i o povyshenii energeticheskoy effektivnosti i o vnesenii izmenenii v otdelnyye zakonodatelnyye akty Rossiskoy federatsii [On energy saving and energy efficiency improvements and on Amendments to Certain Legislative Acts of the Russian Federation]. 2009. 42 p. (rus.)
2. **Tusnina O.A., Yemelyanov A.A., Tusnina V.M.** Teplotekhnicheskiye svoystva razlichnykh konstruktivnykh sistem navesnykh ventilaruyemykh fasadov. *Inzhenerno-stroitelnyy zhurnal*. [Magazine of Civil Engineering]. 2013. № 8. S. 54–88. (rus.)
3. **Yesengabulov S.K.** Energoeffektivnyye naruzhnyye steny s organizovannym vozdukhoobmenom: Avtoreferat ... kand. tekhn. nauk. Moskva, 2009. 163 c. (rus.)
4. **Petrichenko M.R., Petrochenko M.V.** Dostatochnyye usloviya sushchestvovaniya svobodno konvektivnogo techeniya v vertikalnom shchelevom kanale. *Nauchno-tehnicheskiye vedomosti SPbGPU*. 2012. № 2(147). S. 276–282. (rus.)
5. **Vatin N.I., Gorshkov A.S., Nemova D.V.** Energoefektivnost ogranazhdayushchikh konstruktsiy pri kapitalnom remonte / *Stroitelstvo unikalnykh zdaniy i sooruzheniy*. [Construction of Unique Buildings and Structures]. 2013. № 3 (8). S. 1–11. (rus.)
6. **Vatin N.I., Nemova D.V., Rymkevich P.P., Gorshkov A.S.** Influence of building envelope thermal protection on heat loss value in the building. *Magazine of Civil Engineering*. 2013. № 8. S. 4–14.
7. **Zemitis J., Borodinecs A., Frolova M.** Measurements of moisture production caused by various sources. *Energy and Buildings*. 2016. № 127. P. 884–891.
8. **Kukolev M.I., Petrichenko M.R.** Opredeleniye temperaturnogo polya stenki pri periodicheskem teplovom vozdeystvii. *Dvigatel-2007: Trudy mezhdunarodnoy konferentsii*. Moskva: Izd-vo MGTU, 2007. S. 115–119. (rus.)
9. **Ivanchenko N.N., Tkachenko M.M., Petrichenko M.R.** Opredeleniye teplootdachi konvektsiyey v tsilindre DVPT. *Dvigatelestroyeniye*. 1984. № 12. S. 11–14. (rus.)
10. **Vatin N., Gorshkov A., Nemova D., Tarasova D.** Energy efficiency of facades at major repairs of buildings Applied Mechanics and Materials, 2014. Iss. 633–634. P. 991–996.
11. **Vatin N.I., Nemova D.V., Rymkevich P.P., Gorshkov A.S.** Vliyanie urovnya teplovoy zashchity ogranazhdayushchikh konstruktsiy na velichinu poter teplovoy energii v zdani. *Inzhenerno-stroitelnyy zhurnal*. [Magazine of Civil Engineering]. 2012. № 8(34). S. 4–14. (rus.)
12. **Gorshkov A.S., Rymkevich P.P.** Diagrammnyy metod opisaniya protsesssa nestatsionarnoy teploperedachi. *Inzhenerno-stroitelnyy zhurnal*. [Magazine of Civil Engineering] 2015. № 8(60). S. 68–82. (rus.)
13. **Korniyenko S.V.** Mnogofaktornaya otsenka teplovogo rezhima v elementakh obolochki zdaniya. *Ingenerno-stroitelnyy zhurnal* [Magazine of Civil Engineering]. 2014. № 8. S. 25–37. (rus.)
14. **Korniyenko S.** Evaluation of thermal performance of residential building envelope. *Procedia Engineering*. 2015. Vol. 117. S. 191–196.
15. **Nazirov R.A., Belov T.V.** Vliyanie soprotivleniya teploperedachi uteplitelya na raspredeleniye temperaturnykh poley v stenovyykh ogranazhdennyakh s navesnymi ventilaruyemyimi fasadami. *Zhurnal Sibirsogo federalnogo universiteta. Tekhnika i Tekhnologiya*. 2014. № 2. S. 207–213. (rus.)
16. **Vatin N., Petrichenko M., Nemova D., Staritsyna A., Tarasova D.** Renovation of educational buildings to increase energy efficiency. *Applied Mechanics and Materials*. 2014, P. 1023–1028.
17. **Vatin N., Petrichenko M., Nemova D.** Hydraulic methods for calculation of system of rear ventilated

facades. *Applied Mechanics and Materials*. 2014. Vol. 633–634. P. 1007–1012.

18. SP 50.13330.2012. Teplovaya zashchita zdaniy. M.: Gosstroy Rossii, FGUP TsPP. 2012. 139 s.

19. Olshevskyi V., Statsenko E., Musorina T., Nemova D., Ostrovaia A. Moisture transfer in ventilated facade structures. *MATEC Web of Conferences*. 2016. T. 53. P. 1–5

СВЕДЕНИЯ ОБ АВТОРАХ/AUTHORS

ЗАБОРОВА Дарья Дмитриевна – аспирант Санкт-Петербургского политехнического университета Петра Великого.

195251, Россия, г. Санкт-Петербург, Политехническая ул., 29.

E-mail: zaborova-dasha@mail.ru

ZABOROVA Dariia D. – Peter the Great St. Petersburg Polytechnic University.

29 Politehnicheskaya St., St. Petersburg, 195251, Russia.

E-mail: zaborova-dasha@mail.ru

КУКОЛЕВ Максим Игоревич – доктор технических наук профессор Санкт-Петербургского политехнического университета Петра Великого.

195251, Россия, г. Санкт-Петербург, Политехническая ул., 29.

E-mail: m_kukolev@mail.ru

KUKOLEV MAKSIM I. – Peter the Great St. Petersburg Polytechnic University.

29 Politehnicheskaya St., St. Petersburg, 195251, Russia.

E-mail: m_kukolev@mail.ru

МУСОРИНА Татьяна Александровна – студент Санкт-Петербургского политехнического университета Петра Великого.

195251, Россия, г. Санкт-Петербург, Политехническая ул., 29.

E-mail: flamingo-93@mail.ru

MUSSORINA Tatiana T. – Peter the Great St. Petersburg Polytechnic University.

29 Politehnicheskaya St., St. Petersburg, 195251, Russia.

E-mail: flamingo-93@mail.ru

ПЕТРИЧЕНКО Михаил Романович – доктор технических наук профессор, заведующий кафедрой Санкт-Петербургского политехнического университета Петра Великого.

195251, Россия, г. Санкт-Петербург, Политехническая ул., 29.

E-mail: fonpetrich@mail.ru

PETRITCHENKO Mikhail R. – Peter the Great St. Petersburg Polytechnic University.

29 Politehnicheskaya St., St. Petersburg, 195251, Russia.

E-mail: fonpetrich@mail.ru