

DOI: 10.18721/JPM.10207

УДК 531.391+681.5.015

ПРОЦЕДУРА ИДЕНТИФИКАЦИИ ПРИ МОДАЛЬНОМ УПРАВЛЕНИИ РАСПРЕДЕЛЕННЫМ УПРУГИМ ОБЪЕКТОМ

А.К. Беляев¹, В.А. Полянский², Н.А. Смирнова², А.В. Федотов¹

¹Институт проблем машиноведения РАН, Санкт-Петербург, Российская Федерация

²Санкт-Петербургский политехнический университет Петра Великого,
Санкт-Петербург, Российская Федерация

При реализации модальной системы управления распределенными упругими объектами требуется обеспечить сепарацию собственных форм из сигналов сенсоров и возможность независимо воздействовать на формы с помощью актуаторов. В статье предложена идентификационная процедура, которая позволяет разделить формы колебаний в измеренных и управляющих сигналах при отсутствии математической модели объекта. Работоспособность идентификационной процедуры подтверждена экспериментально при создании системы активного подавления вынужденных изгибных колебаний металлической балки. Продемонстрирована высокая эффективность реализованной модальной системы управления.

Ключевые слова: виброзащита; мехатроника; модальное управление; идентификация; распределенный упругий объект

Ссылка при цитировании: Беляев А.К., Полянский В.А., Смирнова Н.А., Федотов А.В. Процедура идентификации при модальном управлении распределенным упругим объектом // Научно-технические ведомости СПбГПУ. Физико-математические науки. Т. 10. № 2. С. 69–81. DOI: 10.18721/JPM.10207

IDENTIFICATION PROCEDURE IN THE MODAL CONTROL OF A DISTRIBUTED ELASTIC SYSTEM

A.K. Belyaev¹, V.A. Polyanskiy², N.A. Smirnova², A.V. Fedotov¹

¹ Institute for Problems of Mechanical Engineering, RAS, St. Petersburg, Russian Federation

²Peter the Great St. Petersburg Polytechnic University, St. Petersburg, Russian Federation

It is necessary to provide the separation of the inherent object modes from the sensor signals and to make possible independent affecting the modes with the use of actuators when realizing the modal system of controlling an elastic object with distributed parameters. The present paper puts forward an identification procedure which allows separating the vibration modes of the object in measured and control signals in the absence of the object model simulation. The control operability of this procedure was verified by experiment through making a system of the active suppression of forced bending vibrations of a metal beam. The experiment showed the high control efficiency of the realized modal system.

Key words: vibration protection; mechatronics; modal control; identification; distributed elastic system

Citation: A.K. Belyayev, V.A. Polyanskiy, N.A. Smirnova, A.V. Fedotov, Identification procedure in the modal control of a distributed elastic system, St. Petersburg Polytechnical State University Journal. Physics and Mathematics. 10(2) (2017) 69–81. DOI: 10.18721/JPM.10207

Введение

Особенность задачи управления колебаниями распределенных механических объектов, таких как балки и пластины, связана с наличием в их описании бесконечного ряда собственных форм, каждую из которых можно рассматривать как отдельную степень свободы. При этом диапазон частот внешнего возмущающего воздействия включает, как правило, несколько собственных частот объекта. Ранее нами теоретически и экспериментально было показано, что в таких условиях система подавления вибраций распределенного объекта, построенная на основе алгоритма модального управления, имеет существенные преимущества над системой локальных регуляторов [1].

Модальный подход предполагает независимое управление различными формами колебаний распределенного объекта. Идея данного подхода в применении к управлению колебаниями упругих систем была впервые сформулирована в статье [2] и получила дальнейшее развитие в монографии [3]. Для реализации алгоритма модального управления необходимо решить задачу размещения сенсоров и актуаторов на объекте, а также проблему сепарации собственных форм при их измерении сенсорами и при управлении ими с помощью актуаторов. Основные пути решения указанной проблемы предполагают либо использование распределенных сенсоров и актуаторов в качестве модальных фильтров [4, 5], либо применение массивов дискретных элементов управления [6 – 10].

При использовании дискретных элементов управления для разделения форм колебаний требуется настройка системы, обрабатывающей сигналы сенсоров и преобразующей их в управляющие сигналы, передаваемые на актуаторы. В настоящей работе предлагается идентификационная процедура, позволяющая решить задачу настройки. Представлены результаты экспериментальных исследований, демон-

стрирующие эффективность предложенной процедуры.

Модальное управление консольной балкой

Рассмотрим задачу подавления колебаний балки с помощью модального управления. В качестве модельного объекта выберем консольно закрепленную балку Бернулли – Эйлера. Колебания балки возбуждаются внешним воздействием, приложенным в заданном сечении; это воздействие изменяется по полигармоническому закону. В r сечениях могут быть приложены управляющие воздействия, создаваемые пьезоактуаторами, с целью уменьшить амплитуду установившихся колебаний. Управляющие воздействия формируются с использованием сигналов пьезоэлектрических сенсоров, расположенных в n сечениях.

Математическую модель балки постоянного сечения запишем в виде следующей системы дифференциальных уравнений:

$$\begin{cases} -\frac{\partial Q}{\partial x} + \rho \ddot{u} = 0, \\ Q - \frac{\partial M}{\partial x} = \mu_0 + \sum_{i=1}^r \mu_i, \\ \frac{\partial u}{\partial x} + \varphi = 0, \\ \frac{\partial \varphi}{\partial x} - \frac{1}{EI} M = 0, \end{cases}$$

где u – поперечное перемещение (прогиб) балки; φ – угол поворота касательной к средней линии балки; Q – поперечная сила; M – изгибающий момент; x – продольная координата, отсчитываемая от левого конца балки; ρ – масса единицы длины балки; I – момент инерции поперечного сечения; E – модуль Юнга материала балки; μ_0 – распределенный возбуждающий момент, μ_i – распределенные управляющие моменты.

Система сводится к одному дифференциальному уравнению:

$$\rho \ddot{u} + (EIu'')'' = \mu'_0 + \sum_{i=1}^r \mu'_i. \quad (1)$$

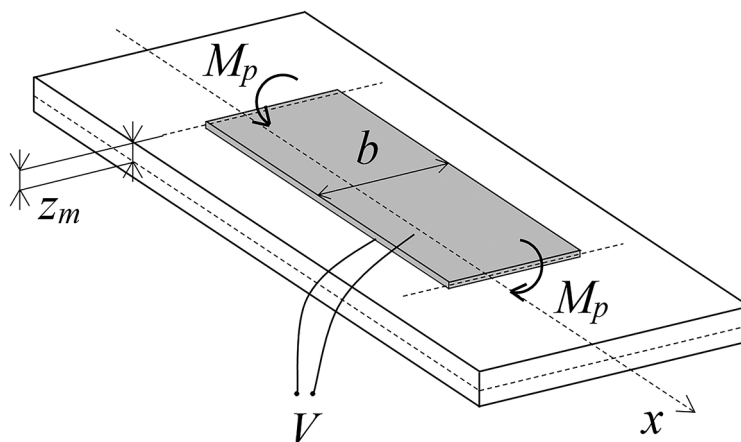


Рис. 1. Модель воздействия актуатора на балку:

b – ширина пьезослоя актуатора; V – электрическое напряжение, подаваемое на актуатор; M_p – механические моменты, образующие пару; z_m – расстояние между средними линиями балки и актуатора

Граничные условия отражают способ закрепления балки длиной l :

$$u_{x=0} = 0, \quad u'_{x=0} = 0, \quad u''_{x=l} = 0, \quad u'''_{x=l} = 0.$$

Начальное состояние системы соответствует прямолинейной конфигурации балки:

$$u_{t=0} = 0, \quad \dot{u}_{t=0} = 0.$$

Для описания управляющего воздействия воспользуемся моделью пьезоактуатора [11], выполненного в виде тонкой прямоугольной пластинки, наклеенной вдоль балки между сечениями $x = a_i$ и $x = A_i$ (рис. 1).

Согласно этой модели, приложение электрического напряжения V к электродам актуатора эквивалентно приложению пары моментов M_p в сечениях $x = a_i$ и $x = A_i$, равных по модулю и противоположных по направлению. Модуль момента определяется выражением

$$M_p = e_{31} b z_m V,$$

где e_{31} – пьезоэлектрическая константа материала, b – ширина пьезослоя, z_m – расстояние между средними линиями балки и актуатора.

Управляющие моменты в модели (см. уравнение(1)) можно представить в виде

$$\mu_i = M_{pi} [\delta(x - A_i) - \delta(x - a_i)],$$

где δ – дельта-функция.

В работе [2] предложена модель сенсора, выполненного в виде тонкой прямоугольной пластинки из пьезоматериала, наклеенной вдоль балки между сечениями $x = d$ и $x = D$. В этой модели электрическое напряжение, являющееся сигналом сенсора, пропорционально разности углов поворота сечений $x = d$ и $x = D$:

$$V = \frac{e_{31} b z_m}{C} [\varphi(t, D) - \varphi(t, d)],$$

где z_m – расстояние между средними линиями балки и сенсора, C – емкость сенсора.

При построении алгоритма управления примем гипотезу о том, что сенсор измеряет кривизну балки:

$$\frac{\partial \varphi(t, x)}{\partial x} = - \frac{\partial^2 u(t, x)}{\partial x^2},$$

в сечении $x = (D + d)/2$ (для краткости изложения будем писать, что сенсор закреплен в этом сечении).

Построение алгоритма модального управления предполагает представление прогиба в виде ряда по собственным формам:

$$u(x, t) = \sum_{k=1}^{\infty} w_k(x) \beta_k(t), \quad (2)$$

где $w_k(x)$ – собственные формы, удовлетворяющие условиям ортогональности

$$\int_0^l \rho w_i(x) w_k(x) dx = \delta_{ik}.$$

Главные координаты $\beta_k(t)$ должны быть найдены как решения системы

$$\begin{aligned} \ddot{\beta}_k(t) + \lambda_k^2 \beta_k(t) &= f_k + y_k, \\ f_k &= \int_0^l \mu_0 \vartheta_k(x) dx, \quad y_k = \int_0^l \vartheta_k(x) \left(\sum_{i=1}^r \mu_i \right) dx, \quad (3) \\ \vartheta_k(x) &= \frac{-dw_k(x)}{dx}, \end{aligned}$$

где λ_k — k -я собственная частота упругой балки.

В правой части первого уравнения (3) слагаемое f_k отвечает за внешнее возмущение. Слагаемое y_k представляет собой результат преобразования управляющего воздействия:

$$\begin{aligned} y_k &= \int_0^l \vartheta_k(x) \left\{ \sum_{i=1}^r M_{pi} [\delta(x - A_i) - \delta(x - a_i)] \right\} dx = \\ &= \sum_{i=1}^r [\vartheta_k(A_i) - \vartheta_k(a_i)] M_{pi}. \end{aligned}$$

Полагая кривизну формы балки постоянной на длине пьезоактуатора, будем считать, что

$$\begin{aligned} y_k &= \sum_{i=1}^r M_{pi} (A_i - a_i) \frac{d}{dx} \vartheta_k \left(\frac{a_i + A_i}{2} \right) = \\ &= -k_a \sum_{i=1}^r V_i \frac{d^2}{dx^2} w_k \left(\frac{a_i + A_i}{2} \right), \end{aligned}$$

где коэффициент $k_a = e_{31} b z_m (A_i - a_i)$ одинаков для всех актуаторов, V_i — электрическое напряжение, подаваемое на i -ый пьезоактуатор.

Таким образом, мы считаем, что каждый актуатор закреплен в определенном сечении и способен изменять кривизну балки в соответствии с управляющим сигналом V_i .

С учетом выражений (2) и (3) цель управления заключается в снижении амплитуд установившихся колебаний первых m главных координат $\beta_k(t)$, $k = 1, 2, \dots, m$, за счет выбора управляющих сигналов V_i . Объединяя r управляющих сигналов в вектор U , запишем алгоритм модального управления:

$$U_{r \times 1} = FK_{m \times m} T \Phi_{n \times 1}, \quad (4)$$

где $\Phi_{n \times 1}$ — вектор, объединяющий сигналы

сенсоров; $K_{m \times m}$ — диагональная матрица коэффициентов усиления; $F_{r \times m}$, $T_{m \times n}$ — модальные матрицы, подлежащие выбору (здесь и далее нижний индекс показывает размерность матричного объекта).

Модальная матрица $T_{m \times n}$ — анализатор форм, она преобразует вектор измеренных сигналов $\Phi_{n \times 1}$ в вектор оценок первых m главных координат $\hat{\beta}_{m \times 1}$:

$$\hat{\beta}_{m \times 1} = T_{m \times n} \Phi_{n \times 1}.$$

Матрица $K_{m \times m}$ задает коэффициенты усиления, преобразующие вектор оценок собственных форм $\hat{\beta}_{m \times 1}$ в вектор желаемых воздействий на каждую из форм $\hat{\alpha}_{m \times 1}$:

$$\hat{\alpha}_{m \times 1} = K_{m \times m} \hat{\beta}_{m \times 1}.$$

Модальная матрица $F_{r \times m}$ — синтезатор форм, она преобразует вектор желаемых воздействий на формы $\hat{\alpha}_{m \times 1}$ в вектор управляющих сигналов, подаваемых на актуаторы $U_{r \times 1}$:

$$U_{r \times 1} = F_{r \times m} \hat{\alpha}_{m \times 1}.$$

В общем случае элементы матрицы $K_{m \times m}$ могут быть не константами, а функциями комплексной переменной: $k_j = k_j(s)$. При диагональной матрице $K_{m \times m}$ система управления включает в себя m контуров, каждый из которых соответствует своей форме колебаний балки и имеет свою передаточную функцию $k_j(s)$. На вход j -го модального контура управления подается комбинация сигналов сенсоров с коэффициентами, заданными j -ой строкой матрицы $T_{m \times n}$, а выходной сигнал контура распределяется на актуаторы в пропорциях, заданных j -м столбцом матрицы $F_{r \times m}$. Отметим, что в алгоритме управления (4) можно использовать показания избыточного количества сенсоров в n сечениях балки, чтобы вычислить управляющие сигналы для $r \leq n$ актуаторов. При этом имеется возможность управлять не более чем m гармониками ($m = 1, 2, \dots, r$).

Введем в рассмотрение матрицы форм $\theta_{r \times m}$, $\theta_{n \times m}^s$ и будем заполнять их следующим образом. Строка матрицы $\theta_{r \times m}$ состоит из значений $-d^2 w_k / dx^2$, $k = 1, 2, \dots, m$, в месте закрепления актуатора, а количество строк определяется количеством r актуаторов.

Строка матрицы $\theta_{n \times m}^s$ состоит из значений $-d^2 w_k / dx^2$, $k = 1, 2, \dots, m$, в месте закрепления датчика, а количество строк определяется количеством n датчиков.

Вектор сигналов сенсоров представим в виде слагаемого, включающего первые m гармоник, и вектора $\tilde{\Phi}$, содержащего высшие гармоники:

$$\Phi_{n \times 1} = k_s \theta_{n \times m}^s \beta_{m \times 1} + \tilde{\Phi}, \quad (5)$$

при этом коэффициент

$$k_s = e_{31} b z_m (D_i - d_i) / C$$

примем одинаковым для всех сенсоров.

Первые m уравнений бесконечной системы (3) с учетом управления (4) и разложения (5) запишем в матричном виде:

$$\ddot{\beta}_{m \times 1} + \Lambda_{m \times m} \beta_{m \times 1} = f_{m \times 1} + k_a k_s \theta_{m \times r}^T F_{r \times m} \times \times K_{m \times m} T_{m \times n} \theta_{n \times m}^s \beta_{m \times 1} + \Delta, \quad (6)$$

где $\Lambda_{m \times m} = \text{diag}\{\lambda_k^2\}$ – диагональная матрица квадратов собственных частот упругой балки; $f_{m \times 1}$ – вектор внешних воздействий, объединяющий компоненты f_k ; вектор Δ не содержит компонент вектора $\beta_{m \times 1}$, а только высшие гармоники.

Для реализации модального управления необходимо получить диагональную структуру матрицы

$$\theta_{m \times r}^T F_{r \times m} K_{m \times m} T_{m \times n} \theta_{n \times m}^s;$$

это позволило бы независимо управлять m низшими гармониками упругой балки при условии устойчивости высших гармоник.

Добиться диагональной структуры можно выбором матриц $F_{r \times m}$ и $T_{m \times n}$. Ниже предложена процедура определения модальных матриц $F_{r \times m}$ и $T_{m \times n}$, включающая идентификационный эксперимент на реальном объекте.

Процедура определения модальных матриц

Вначале необходимо экспериментально или расчетным путем получить оценки r низших собственных форм колебаний балки. Полученные оценки форм колебаний позволяют установить пьезоэлементы на тех участках балки, где вклад форм существен. После того, как сенсоры и актуаторы установлены, можно приступить к опреде-

лению модальных матриц $F_{r \times m}$ и $T_{m \times n}$. Идентификационная процедура проводится для разомкнутой системы и включает следующие этапы.

Первый этап. Для определения матрицы $\theta_{n \times m}^s$ последовательно создаются с помощью внешнего воздействия резонансные режимы вынужденных колебаний балки, соответствующие m низшим собственным частотам.

Пусть внешним воздействием является изгибающий момент

$$\mu_{0j} = \mu_0^M \delta(x - x_0) \sin \lambda_j t, \quad j = 1, 2, \dots, m,$$

приложенный в сечении $x = x_0$, тогда модель (6) разомкнутой системы принимает вид

$$\ddot{\beta}_{m \times 1} + \Lambda_{m \times m} \beta_{m \times 1} = = \mu_0^M [\vartheta_1(x_0) \vartheta_2(x_0) \dots \vartheta_m(x_0)]^T \sin \lambda_j t.$$

Резонансные режимы используются в качестве селективного преобразования, так как в каждом из них колебания балки по одной собственной форме, соответствующей собственной частоте λ_j , превалируют над другими. Следовательно, можно считать, что сигнал i -го сенсора в j -м резонансном режиме определяется выражением

$$\Phi_i^j(t) = k_s \theta_{ij}^s \beta_j(t).$$

Допустив, что в системе присутствует пропорциональное демпфирование, уравнение для j -ой главной координаты запишем в виде:

$$\ddot{\beta}_j + \xi_j \dot{\beta}_j + \lambda_j^2 \beta_j = f_j^M \sin \lambda_j t,$$

где ξ_j – коэффициент демпфирования, $f_j^M = \mu_0^M \vartheta_j(x_0)$ – амплитуда возмущения.

Установившееся решение имеет следующий вид:

$$\beta_j = \beta_j^M \cos \lambda_j t,$$

что позволяет оценить установившийся сигнал i -го сенсора выражением

$$\Phi_i^j = \Phi_i^{jM} \cos \lambda_j t,$$

где $\Phi_{ij}^M = k_s \theta_{ij}^s \beta_j^M$.

Отсюда получим выражение для компонент матрицы θ^s :

$$\theta_{ij}^s = \frac{1}{k_s \beta_j^M} \Phi_i^{jM}.$$

Измерение амплитуд и фаз сигналов каждого из n сенсоров в j -м резонансном режиме дает возможность получить j -ый столбец матрицы θ^s с точностью до константы, если принять, что $\theta_{ij}^s = \Phi_i^{jM}$. Данной оценки достаточно для разделения форм колебаний в модальных контурах управления.

Второй этап. Если актуаторы и парные им датчики закреплены в одних и тех же сечениях балки, то матрица $\theta_{r \times m}$ выписывается по матрице $\theta_{n \times m}^s$. На практике это условие не всегда соблюдается, поэтому ниже приводится алгоритм экспериментального определения матрицы θ .

При отсутствии внешних воздействий модель (6) разомкнутой системы представляется в виде

$$\ddot{\beta}_{m \times 1} + \Lambda_{m \times m} \beta_{m \times 1} = k_a \theta_{m \times r}^T U_{r \times 1},$$

$$U = [V_1 \quad V_2 \quad \dots \quad V_r]^T.$$

Возбудим резонансные колебания балки только i -м актуатором, подав на него гармоническое напряжение с j -ой собственной частотой

$$V_i = V_0 \sin \lambda_j t.$$

В установившемся процессе, обусловленном наличием демпфирования в реальной системе, будут представлены все формы колебаний. Однако доминирующую роль будут играть колебания по j -ой собственной форме, а вклад остальных форм будет пренебрежимо мал. Уравнение для j -ой главной координаты при возбуждении колебаний i -м актуатором запишем в виде

$$\ddot{\beta}_j^i + \xi_j \dot{\beta}_j^i + \lambda_j^2 \beta_j^i = k_a \theta_{ij} V_i.$$

Таким образом, каждый j -ый столбец матрицы θ показывает, в каких пропорциях актуаторы возбуждают j -ю форму колебаний балки. Установившееся решение уравнения имеет следующий вид:

$$\beta_j^i = \beta_j^{iM} \cos \lambda_j t, \quad \beta_j^{iM} = -\frac{k_a \theta_{ij} V_0}{\xi_j \lambda_j}.$$

Допустим, что имеется возможность измерить прогиб в некотором сечении x^* с помощью внешнего прибора. Оценка прогиба в резонансном режиме с j -ой собственной частотой дается формулой

$$u(x^*, t) = w_j(x^*) \beta_j^{iM} \cos \lambda_j t = u_j^{iM} \cos \lambda_j t.$$

Выразим компоненты матрицы θ через измеряемую величину u_j^{iM} :

$$\theta_{ij} = -\frac{\xi_j \lambda_j}{k_a V_0 w_j(x^*)} u_j^{iM}.$$

Чтобы получить оценку j -го столбца матрицы θ , необходимо последовательно вызывать резонансные колебания балки с j -ой собственной частотой каждым из r актуаторов. Для всех r экспериментов в рамках одного резонансного режима следует измерить амплитуду и фазу установившихся колебаний в одном и том же сечении балки. Измерения необходимо производить с помощью внешнего прибора, например лазерного виброметра, причем в сечении, по возможности наиболее удаленном от актуаторов, для того чтобы минимизировать влияние на результат неточности воспроизведения собственных форм в резонансных режимах. Измерения дают возможность получить j -ый столбец матрицы θ с точностью до константы, если принять $\theta_{ij} = u_j^{iM}$. Данной оценки достаточно для разделения форм колебаний в модальных контурах управления.

Третий этап. В частном случае, когда $m = n = r$, искомые модальные матрицы выбираются обратными к матрицам форм:

$$T_{r \times r} = (\theta_{r \times r}^s)^{-1}, \quad F_{r \times r} = (\theta_{r \times r}^T)^{-1}.$$

Возможность обращения матриц форм зависит от расположения пьезоэлементов вдоль балки и связана с наличием свойств наблюдаемости и управляемости [12]. Практически этот случай означает, что количество форм, по которым ведется управление, заранее задано и равно количеству пар сенсор-актуатор. Зачастую заранее неизвестно, сколько форм потребуется задействовать в алгоритме модального управления для достижения приемлемой степени подавления вибраций. Поэтому сначала можно задаться некоторым количеством m форм, по которым предполагается управлять объектом, чтобы минимизировать количество идентификационных экспериментов. Тогда матрицы форм будут прямоугольными, и для определения модальных матриц потре-

буется операция псевдообращения:

$$\begin{aligned} T_{m \times n} &= (\theta_{m \times n}^s \theta_{n \times m}^s)^{-1} \theta_{m \times n}^{sT}, \\ F_{r \times m} &= \theta_{r \times m} (\theta_{m \times r}^T \theta_{r \times m})^{-1}. \end{aligned} \quad (7)$$

Если при этом качество подавления вибрации балки оказывается неудовлетворительным, то необходимо вернуться к идентификационным экспериментам и доопределить следующие строки матриц форм. Затем следует заново вычислить модальные матрицы по формуле (7) и использовать их для более качественного подавления вибрации.

Четвертый этап. После вычисления модальной матрицы T целесообразно проверить, насколько качественно производится сепарация гармоник из сигналов сенсоров. Процедура проверки состоит в том, что последовательно, с помощью внешнего момента, возбуждаются резонансные режимы вынужденных колебаний балки, соответствующие m низшим собственным частотам. Для каждого из этих режимов формируется вектор оценок главных координат

$$\hat{\beta}_{m \times 1} = T_{m \times n} \Phi_{n \times 1}.$$

Если матрица T определена правильно, то для каждого j -го резонансного режима этот вектор будет иметь ненулевой элемент под j -м номером, а остальные элементы будут равны нулю.

После вычисления модальной матрицы F целесообразно проверить, насколько качественно разделено управление различными гармониками. При идеальном разделении воздействие на балку всех актуаторов в j -м резонансном режиме ($j = 1, 2, \dots, m$) с амплитудами и фазами, распределенными в соответствии с k -м столбцом матрицы F ($k \neq j$), должно быть ортогонально j -ой собственной форме колебаний балки. Для проверки необходимо вызывать j -ый резонансный режим с помощью воздействия сразу всех актуаторов. При этом на актуаторы следует подавать сигналы, амплитуда которых соответствует модулям значений, составляющих k -ый столбец матрицы F ($k \neq j$), в фазе или в противофазе, в зависимости от знаков этих значений. В каждом из проделанных экспериментов амплитуда

резонансных колебаний балки, регистрируемая внешним измерителем, будет тем меньше, чем точнее определена матрица F .

Если на каком-то из этапов результаты проверки признаются неудовлетворительными, то это свидетельствует о недостаточном разделении m низших собственных форм. В этом случае соответствующие идентификационные эксперименты и вычисления необходимо повторить.

Тестирование идентификационной процедуры на экспериментальной установке

Общая схема экспериментальной установки приведена на рис. 2. Объект управления представляет собой алюминиевую балку 1 длиной 70 см, с прямоугольным сечением 3×35 мм. Она расположена вертикально и закреплена в одной точке на расстоянии 10 см от нижнего конца. Внешним возмущением служит вибрация опоры балки, вызываемая приложением переменного электрического напряжения на пьезоэлектрический стержень-толкатель 4, прикрепленный к неподвижному основанию 5. Вибрация пьезотолкателя вызывает изгибные колебания балки.

Цель управления состоит в том, чтобы подавить вынужденные резонансные колебания балки с первой и со второй собственными частотами. Качество подавления резонансных колебаний оценивается по показаниям виброметра 6, измеряющего скорость колебаний верхнего конца балки. Система управления включает в себя два пьезоэлектрических сенсора 3 и два актуатора 2, прикрепленных к балке попарно (см. рис. 2). Актуаторы изменяют кривизну балки в зависимости от приложенного электрического сигнала, а сенсоры измеряют эту кривизну по мере того, как балка совершает изгибные колебания. Актуаторы и сенсоры связаны через контроллер 7.

Сначала была решена задача размещения сенсоров и актуаторов вдоль балки. Поскольку цель управления – подавление колебаний по первой и второй гармоникам, актуаторы и сенсоры должны быть размещены в местах, где кривизна первой и второй форм $d^2 w_1 / dx^2$ и $d^2 w_2 / dx^2$ принимает наи-

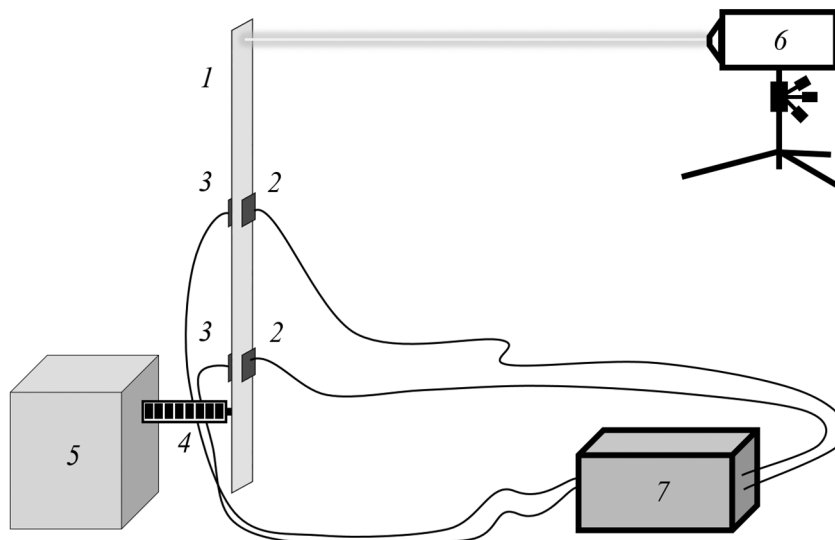


Рис. 2. Схема экспериментальной установки (замкнутая система):
 1 – алюминиевая балка (объект управления); 2 – актуаторы; 3 – сенсоры; 4 – пьезоэлектрический толкатель; 5 – неподвижное основание; 6 – лазерный виброметр, 7 – контроллер

большие по модулю значения.

Формы колебаний, полученные численно и экспериментально, хорошо совпали. На рис. 3. представлены графики вычисленной кривизны форм, пунктиром обозначены зоны крепления пар сенсор-актуатор ($a_1 = 10,4$ см, $A_1 = 16,5$ см для первой пары и $a_2 = 37,4$ см, $A_2 = 43,5$ см для второй).

Как численные, так и экспериментальные исследования показали, что в резуль-

тате наклеивания пьезоэлементов на балку собственные частоты и собственные формы объекта изменяются незначительно. Это позволило на основе представленных данных сформировать расчетную оценку матриц форм:

$$\hat{\theta}_{2 \times 2} = \hat{\theta}_{2 \times 2}^s = \begin{bmatrix} 0,75 & -0,50 \\ 0,25 & 0,50 \end{bmatrix}.$$

Здесь столбцы матриц форм были опре-

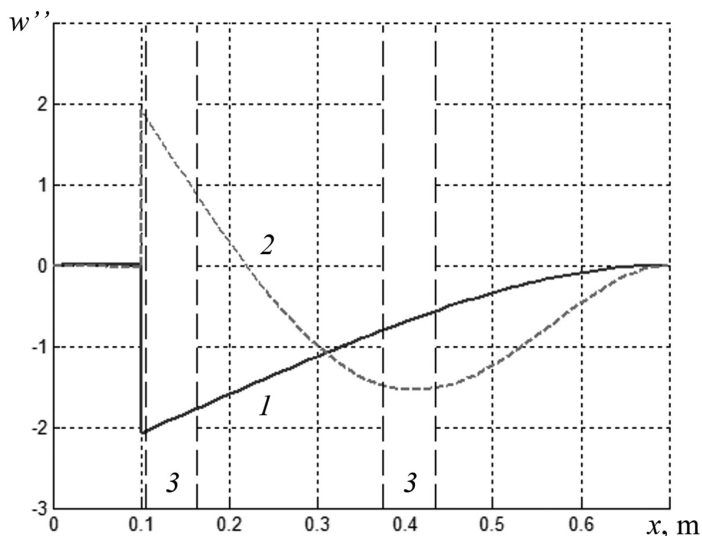


Рис. 3. Графики вычисленной кривизны первой (1) и второй (2) форм колебаний балки (d^2w_1/dx^2 и d^2w_2/dx^2); пунктиром (3) показаны зоны крепления пар сенсор-актуатор

делены с точностью до константы, поскольку это никак не влияет на качество разделения форм колебаний.

Далее матрицы форм θ^s и θ были определены экспериментально в соответствии с предложенной идентификационной процедурой. Каждый из двух столбцов матрицы θ^s был получен в результате обработки сигналов сенсоров в резонансных режимах, созданных вибрацией пьезотолкателя с первой и со второй собственными частотами:

$$\theta^s = \begin{bmatrix} 0,76 & -0,51 \\ 0,24 & 0,49 \end{bmatrix}.$$

Отсюда была вычислена модальная матрица T :

$$T = (\theta^s)^{-1} = \begin{bmatrix} 0,99 & 1,03 \\ -0,49 & 1,53 \end{bmatrix}. \quad (8)$$

Матрица форм θ была определена путем измерения амплитуды и фазы резонансных колебаний верхней точки балки с помощью лазерного виброметра. Резонансные режимы с каждой из собственных частот создавались воздействием первого или второго актуаторов. Полученная в результате матрица имеет следующий вид:

$$\theta = \begin{bmatrix} 0,75 & -0,51 \\ 0,25 & 0,49 \end{bmatrix}.$$

Отсюда была вычислена модальная матрица F :

$$F = (\theta^T)^{-1} = \begin{bmatrix} 0,98 & -0,49 \\ 1,02 & 1,51 \end{bmatrix}. \quad (9)$$

Необходимо подчеркнуть, что в идентификационных экспериментах очень важна точность попадания в резонанс, поскольку данные вычисления основаны на предположении, что в созданном режиме реализуются колебания балки по одной соответствующей собственной форме.

Затем было проверено качество разделения форм в соответствии с вышеописанным четвертым этапом идентификационной процедуры. Проверка показала, что как при измерении, так и при управлении первые две формы разделяются хорошо. Для иллюстрации достигнутого качества разделения форм на рис. 4 приведены различные амплитудно-частотные характеристики разомкнутой си-

стемы в частотном диапазоне, содержащем две низшие собственные частоты балки. Для получения амплитудно-частотной характеристики амплитуда установившегося гармонического измеренного сигнала A_{V_j} делится на амплитуду гармонического возмущающего сигнала A_{V_u} . На рис. 4, *a* показаны амплитудно-частотные характеристики H_{ij} , полученные при воздействии на балку i -м актуатором и измерении сигнала j -м сенсором. Видно, что на каждой из указанных амплитудно-частотных характеристик присутствуют два ярко выраженных резонансных пика, поскольку каждый из актуаторов возбуждает, а каждый из сенсоров реагирует как на первую, так и на вторую форму колебаний балки.

На рис. 4, *b* представлены амплитудно-частотные характеристики H_{pqj} разомкнутой системы, соответствующие модальным контурам управления. Здесь воздействие на балку оказывалось одновременно двумя актуаторами в пропорциях, заданных i -м столбцом матрицы F , а результирующий сигнал являлся комбинацией сигналов сенсоров с коэффициентами, заданными j -ой строкой матрицы T . Видно, что на амплитудно-частотной характеристике H_{pq11} , соответствующей первому контуру управления, присутствует только первый резонансный пик, на амплитудно-частотной характеристике H_{pq22} , соответствующей второму контуру – только второй пик, а на амплитудно-частотных характеристиках H_{pq12} и H_{pq21} , показывающих взаимное влияние контуров, резонансные пики практически отсутствуют. Данный результат свидетельствует о высоком качестве разделения первой и второй форм при использовании модальных матриц (8) и (9).

Можно заметить, что вдали от резонансов взаимное влияние модальных контуров управления существенно превышает взаимное влияние сенсоров и актуаторов, расположенных на разных участках балки. Это объясняется тем, что каждый модальный контур включает в себя как оба используемых сенсора, так и оба актуатора, а актуаторы оказывают сильное влияние на парные им сенсоры даже вдали от резонансных частот.

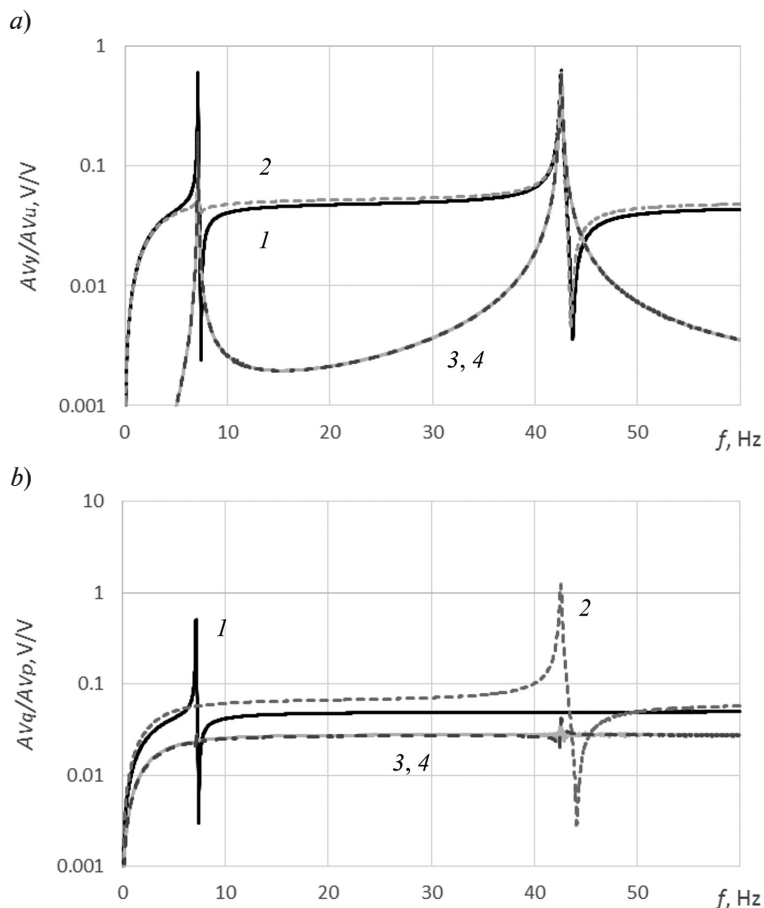


Рис. 4. Экспериментальные амплитудно-частотные характеристики H_{ij} (a) и H_{pqij} (b) разомкнутой системы до (a) и после (b) разделения форм; характеристики H_{ij} получены при воздействии на балку i -м актуатором и измерении сигнала j -м сенсором; H_{pqij} получены при комбинированном воздействии на балку обоих актуаторов, соответствующем i -му контуру управления, и при измерении комбинации сигналов сенсоров, соответствующей j -му контуру управления; $ij = 11$ (кривые 1), 22 (2), 12 (3) и 21 (4)

В рамках эксперимента была создана модальная система управления, позволяющая подавлять вынужденные резонансные колебания балки с первой и со второй собственными частотами. Для этого в контроллере был реализован модальный закон управления (4):

$$U_{2 \times 1} = FK_{2 \times 2}T\Phi_{2 \times 1},$$

где диагональная структура матрицы

$$K_{2 \times 2} = \begin{bmatrix} k_1(s) & 0 \\ 0 & k_2(s) \end{bmatrix}$$

обеспечивала раздельное управление колебаниями с первой и со второй собственными частотами, а выбор и настройка пере-

даточных функций $k_1(s), k_2(s)$ обеспечивали устойчивость замкнутой системы и наиболее эффективное подавление колебаний на соответствующей резонансной частоте. Рис. 5 демонстрирует эффективность работы системы управления. Здесь показана осциллограмма скорости колебаний верхнего конца балки

$$Vp(t) = \left. \frac{\partial u}{\partial t} \right|_{x=l}.$$

Эксперимент был организован следующим образом. Сначала при выключенной системе управления создавался режим резонансных колебаний балки, вызванных вибрацией пьезоэлектрического толкателя:

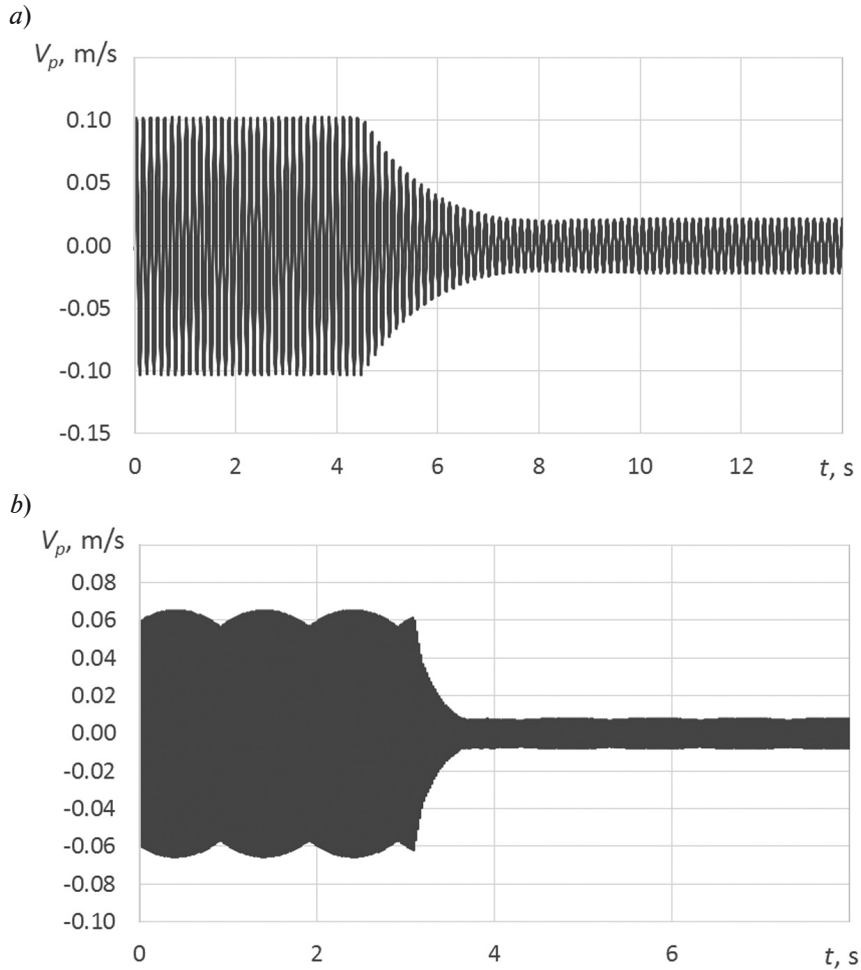


Рис. 5. Осциллограммы скорости V_p колебаний верхнего конца балки, соответствующие резонансным режимам с первой (a) и со второй (b) собственными частотами. Видны моменты времени, соответствующие включению системы управления

рис. 5, a соответствует резонансу с первой собственной частотой, рис. 5, b – со второй.

Затем система замыкалась так, как показано на рис. 2. На рис. 5 хорошо виден момент времени, соответствующий включению системы управления. В результате амплитуда колебаний балки значительно уменьшилась: на первом резонансе уменьшение составляет 79 %, а на втором – 88 %.

Результаты эксперимента свидетельствуют о работоспособности предложенной идентификационной процедуры определения модальных матриц. С ее помощью удалось создать эффективную систему модального управления колебаниями упругой балки в диапазоне частот внешних возмущений, включающем две низшие собствен-

ные частоты балки.

Заключение

Предложенная в данной работе идентификационная процедура позволяет производить настройку модальной системы управления распределенным механическим объектом по результатам экспериментов на реальном объекте. Таким образом, для реализации алгоритма модального управления не требуется построение математической модели объекта. Высокое качество разделения форм колебаний объекта, достигаемое в результате использования предложенной процедуры, подтверждается экспериментально на примере колебаний металлической балки.

Алгоритм модального управления предоставляет возможность варьировать количество управляемых гармоник, увеличивая их число в том случае, если качество подавления вибраций признается неудовлет-

ворительным. Идентифицировать объект в этом случае также можно последовательно, начиная с минимального числа экспериментов и при необходимости осуществляя дополнительные.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Беляев А.К., Котов В.Н., Полянский В.А., Смирнова Н.А.** Биоморфное управление в задаче об активном подавлении колебаний // Вестник СПбГУ. Математика. Механика. Астрономия. 2014. № 1. С. 59–68.
2. **Gould L.A., Murray-Lasso M.A.** On the modal control of distributed parameter systems with distributed feedback // IEEE Transactions on Automatic Control. 1966. Vol. 11. No. 4. Pp. 729–737.
3. **Meirovitch L.** Dynamics and control of structures. New York: John Wiley & Sons, 1990. 425 p.
4. **Lee C.-K., Moon F.C.** Modal sensors/actuators // ASME Journal of Applied Mechanics. 1990. Vol. 57. No. 2. Pp. 434–441.
5. **Donoso A., Bellido J.C.** Systematic design of distributed piezoelectric modal sensors/actuators for rectangular plates by optimizing the polarization profile // Structural and Multidisciplinary Optimization. 2009. Vol. 38. No. 4. Pp. 347–356.
6. **Stubener U., Gaul L.** Modal vibration control for PVDF coated plates // Journal of Intelligent Material Systems and Structures. 2000. Vol. 11. No. 4. Pp. 283–293.
7. **Hurlebaus S., Stübener U., Gaul L.** Vibration reduction of curved panels by active modal control // Computers and Structures. 2008. Vol. 86. No. 3-5. Pp. 251–257.
8. **Zenz G., Berger W., Gerstmayr J., Nader M., Krommer M.** Design of piezoelectric transducer arrays for passive and active modal control of thin plates // Smart Structures and Systems. 2013. Vol. 12. No. 5. Pp. 547–577.
9. **Fuller C.R., Elliot S.J., Nelson P.A.** Active control of vibration. London: Academic Press, 1996.
10. **Hansen C., Snyder S., Qiu X., Brooks L., Moreau D.** Active control of noise and vibration. 2nd ed. London: CRC Press, 2012.
11. **Preumont A.** Mechatronics: dynamics of electromechanical and piezoelectric systems. Dordrecht: Springer, 2006.
12. **Эйкхофф П., Ванечек А., Савараги Е. и др.** Современные методы идентификации систем. Пер. с англ. М.: Мир, 1983. 400 с.

Статья поступила в редакцию 05.03.2017, принята к публикации 22.03.2017.

СВЕДЕНИЯ ОБ АВТОРАХ

БЕЛЯЕВ Александр Константинович – доктор физико-математических наук, профессор, директор Института проблем машиноведения РАН, Санкт-Петербург, Российская Федерация.

199178, Российская Федерация, г. Санкт-Петербург, Большой проспект В.О., 61.
vice.ipme@gmail.com

ПОЛЯНСКИЙ Владимир Анатольевич – доктор технических наук, профессор кафедры систем и технологий управления Санкт-Петербургского политехнического университета Петра Великого, Санкт-Петербург, Российская Федерация.

195251, Россия, г. Санкт-Петербург, Политехническая ул., 29
vapol@mail.ru

СМИРНОВА Нина Анатольевна – кандидат технических наук, доцент кафедры «Механика и процессы управления» Санкт-Петербургского политехнического университета Петра Великого, Санкт-Петербург, Российская Федерация.

195251, Россия, г. Санкт-Петербург, Политехническая ул., 29
nina-mru@mail.ru

ФЕДОТОВ Александр Васильевич – аспирант Института проблем машиноведения РАН, Санкт-Петербург, Российская Федерация.

199178, Российская Федерация, г. Санкт-Петербург, Большой проспект В.О., 61.
alvafed@yandex.ru



REFERENCES

- [1] **A.K. Belyayev, V.N. Kotov, V.A. Polyanskiy, N.A. Smirnova**, Biomorfnoye upravleniye v zadache ob aktivnom podavlenii kolebaniy [Biomorphic control in the problems on active oscillation suppression], Vestnik Sankt-Peterburgskogo Universiteta, Physics, Mechanics, Astronomy (1) (2014) 59–68.
- [2] **L.A. Gould, M.A. Murray-Lasso**, On the modal control of distributed parameter systems with distributed feedback, IEEE Transactions on Automatic Control. 11 (4) (1966) 729–737.
- [3] **L. Meirovitch**, Dynamics and control of structures, New York, John Wiley & Sons, 1990.
- [4] **C.-K. Lee, F.C. Moon**, Modal sensors/actuators, ASME Journal of Applied Mechanics. 57(2) (1990) 434–441.
- [5] **A. Donoso, J.C. Bellido**, Systematic design of distributed piezoelectric modal sensors/actuators for rectangular plates by optimizing the polarization profile, Structural and Multidisciplinary Optimization. 38 (4) (2009) 347–356.
- [6] **U. Stübener, L. Gaul**, Modal vibration control for PVDF coated plates, Journal of Intelligent Material Systems and Structures. 11(4) (2000) 283–293.
- [7] **S. Hurlebaus, U. Stübener, L. Gaul**, Vibration reduction of curved panels by active modal control, Computers and Structures. 86 (3-5) (2008) 251–257.
- [8] **G. Zenz, W. Berger, J. Gerstmayr, et al.**, Design of piezoelectric transducer arrays for passive and active modal control of thin plates, Smart Structures and Systems. 12(5) (2013) 547–577.
- [9] **C.R. Fuller, S.J. Elliot, P.A. Nelson**, Active control of vibration, Academic Press, 1996.
- [10] **C. Hansen, S. Snyder, X. Qiu, et al.**, Active control of noise and vibration, 2nd ed., CRC Press, 2012.
- [11] **A. Preumont**, Mechatronics: dynamics of electromechanical and piezoelectric systems, Springer, 2006.
- [12] **P. Eykkhoff, A. Vanechek, E. Savaragi, et al.**, Sovremennyye metody identifikatsii system [Modern methods of system identification], Moscow, Mir, 1983.

Received 05.03.2017, accepted 22.03. 2017.

THE AUTHORS

BELYAEV Alexander K.

Institute for Problems of Mechanical Engineering RAS
61 Bolshoi Ave. V.O., St. Petersburg, 199178, Russian Federation
vice.ipme@gmail.com

POLYANSKIY Vladimir A.

Peter the Great St. Petersburg Polytechnic University
29 Politechnicheskaya St., St. Petersburg, 195251, Russian Federation
vapol@mail.ru

SMIRNOVA Nina A.

Peter the Great St. Petersburg Polytechnic University
29 Politechnicheskaya St., St. Petersburg, 195251, Russian Federation
nina-mpu@mail.ru

FEDOTOV Alexander V.

Institute for Problems of Mechanical Engineering RAS
61 Bolshoy Ave. V.O., St. Petersburg, 199178, Russian Federation
alvafed@yandex.ru