

DOI: 10.18721/JPM.10208

УДК 539.3

СИММЕТРИЗАЦИЯ ТЕНЗОРА ЭФФЕКТИВНЫХ НАПРЯЖЕНИЙ ДЛЯ СРЕД С АНИЗОТРОПНОЙ ПОВРЕЖДЕННОСТЬЮ

А.С. Семенов

Санкт-Петербургский политехнический университет Петра Великого
Санкт-Петербург, Российская Федерация

Предложена единообразная форма представления процедуры симметризации тензора эффективных напряжений, содержащая классические аддитивную и мультипликативную схемы как частные случаи. Проведено сравнение различных вариантов симметризации тензора эффективных напряжений для однонаправленного поврежденного материала с параллельными микротрещинами и для двунаправленного поврежденного материала с системой ортогональных микротрещин. Предложена процедура идентификации анизотропной поврежденности на основе методов акустической эмиссии.

Ключевые слова: континуальная механика повреждений; тензор поврежденности; тензор эффективных напряжений; анизотропия; моделирование; идентификация

Ссылка при цитировании: Семенов А.С. Симметризация тензора эффективных напряжений для сред с анизотропной поврежденностью // Научно-технические ведомости СПбГПУ. Физико-математические науки. Т. 10. № 2. С. 82–98. DOI: 10.18721/JPM.10208

SYMMETRIZATION OF THE EFFECTIVE STRESS TENSOR FOR ANISOTROPIC DAMAGED CONTINUA

A.S. Semenov

Peter the Great St. Petersburg Polytechnic University, St. Petersburg, Russian Federation

A uniform formulation of the effective stress tensor symmetrization procedure has been proposed. This form contains the classical additive and multiplicative symmetrization schemes as particular cases. Different options of symmetrization of the effective stress tensor for the unidirectionally damaged material with parallel microcracks and for the bidirectionally damaged material with a system of orthogonal microcracks were compared. The differences in any forms of the effective stress tensor were second-order infinitesimals for low damage levels. The differences in predictions from considered symmetrization schemes increased with the growth of the damage level and with that of the differences between the eigenvalues of damage. An identification procedure for anisotropic damage was proposed on the basis of acoustic emission methods and then it was discussed.

Key words: continuum damage mechanics; damage tensor; effective stress tensor; anisotropy; simulation; identification

Citation: A.S. Semenov, Symmetrization of the effective stress tensor for anisotropic damaged continua, St. Petersburg Polytechnical State University Journal. Physics and Mathematics. 10(2) (2017) 82–98. DOI: 10.18721/JPM.10208

Введение

Тензор эффективных напряжений (ТЭН) является одним из центральных понятий механики континуальных повреждений

(МКП). Он был введен для одномерного случая в первых работах по механике поврежденного континуума Л.М. Качановым [1] и Ю.Н. Работновым [2]. Возникновение

и эволюция микродефектов (микротрещины и микропоры) приводит к сокращению эффективной площади несущих элементов квазиконтинуума, что в свою очередь приводит к эффекту возрастания внутренних напряжений (называемых эффективными), которые на макроуровне могут рассматриваться в качестве осреднения реально действующих на микроуровне напряжений в материале. Поэтому формулировки феноменологических определяющих уравнений, используемые в рамках МКП, как правило, связаны с заменой традиционного тензора напряжений Коши тензором эффективных напряжений.

Среди многочисленных обзоров отечественных и зарубежных исследований, выполненных с использованием МКП, следует упомянуть работы [3 – 7], отражающие современное состояние и обладающие полнотой охвата ключевых аспектов. Возможности МКП были продемонстрированы при анализе процессов ползучести [5 – 10], пластичности [6, 11, 12], усталости [13 – 17, 6], комбинации усталости и ползучести [6, 18], термоусталости [18] и хрупкого разрушения [19, 20, 6, 7].

В зависимости от характера пространственного и ориентационного распределения микродефектов могут использоваться скалярные [1, 2, 8, 21 и др.], векторные [22 – 24] и тензорные (второго [8, 25 – 28] и др.), четвертого [29 – 31] и восьмого [32] рангов) параметры поврежденности. Возможны также различные подходы к определению тензора поврежденности:

на основе спектрального представления в собственном базисе, с заданием главных значений как относительных площадей дефектов в соответствующих направлениях [26];

на основе анализа морфологии микротрещин [25];

как к коэффициенту разложения в обобщенном ряду Фурье для ориентационного распределения плотности микродефектов [5, 28];

путем введения эквивалентной нагруженной псевдонеповрежденной конфигурации и анализа соответствующего градиента деформаций [28] (геометрический подход).

Следует отметить, что использование тензора поврежденности второго ранга позволяет лишь описать поведение ортотропных материалов, но не более сложных групп симметрии. Однако ортотропного приближения оказывается вполне достаточно для широко распространенного на практике случая, когда повреждения вызваны микро-растрескиванием, ориентационные свойства которого определяются направлением действия максимальных растягивающих напряжений.

В общем случае ТЭН, соответствующий тензору поврежденности второго ранга, оказывается несимметричным [26]. Корректное использование несимметричного тензора напряжений приводит к необходимости рассмотрения моделей сред Коссера и/или микрополярных сред. Для того чтобы избежать значительного усложнения модели, в ряде работ предлагается симметризовать полученный несимметричный тензор. В литературе предложены различные варианты симметризации ТЭН [26, 33, 34].

Целью данного исследования является сравнительный анализ различных вариантов симметризации ТЭН и последующий поиск единой однопараметрической формулировки, содержащей известные определения в качестве частных случаев.

Тензор эффективных напряжений

Изотропная поврежденность. В простейшем случае при одноосном растяжении силой F прямолинейного стержня поперечной площади S , часть которой S_D занимают микродефекты, эффективное напряжение $\bar{\sigma}$ (действует в неповрежденном материале вне пустот) определяется из условия

$$F = \sigma S = \bar{\sigma} \bar{S} = \bar{\sigma} (S - S_D).$$

Если ввести поврежденность как долю площади поперечного сечения стержня, занятую дефектами $D = S_D / S$, то эффективное напряжение $\bar{\sigma} = F / \bar{S}$ выразится через традиционное понятие напряжения $\sigma = F / S$ равенством

$$\bar{\sigma} = \sigma / (1 - D).$$

В общем случае при многоосном напряженном состоянии изотропного по-

врежденного материала также используется скалярный параметр поврежденности D ($0 \leq D \leq 1$). Тогда ТЭН определяется следующим выражением:

$$\bar{\sigma} = \frac{1}{1-D} \sigma. \quad (1)$$

Поврежденность при этом представляет собой поверхностную плотность микродефектов и определяется равенством

$$D = \delta S_D / \delta S,$$

где δS_D – площадь дефектов на произвольно ориентированной элементарной площадке δS . При отсутствии повреждений ($D = 0$) ТЭН $\bar{\sigma}$ идентичен тензору напряжений Коши σ .

При использовании гипотезы эквивалентности деформаций ($\bar{\epsilon} = \epsilon$) тензор упругих модулей поврежденной среды ${}^4\bar{C}^e$ (для которого в упругом состоянии справедливо выражение $\bar{\sigma} = {}^4\bar{C}^e \cdot \cdot \epsilon$) связан с тензором начальных модулей упругости (неповрежденного материала) ${}^4C^e$ (для которого $\sigma = {}^4C^e \cdot \cdot \epsilon$) равенством

$${}^4\bar{C}^e = (1-D) {}^4C^e. \quad (2)$$

Альтернативное представление можно получить в случае использования гипотезы эквивалентности (упругих) энергий; оно имеет вид

$${}^4\bar{C}^e = (1-D)^2 {}^4C^e. \quad (3)$$

Анизотропная поврежденность. Элементарная ориентированная площадка $n\delta S$ в актуальной конфигурации трансформируется в эквивалентной нагруженной псевдонеповрежденной конфигурации в $\bar{n}\delta\bar{S}$. Аналогично рассмотренному выше одномерному случаю, симметричный тензор поврежденности D можно ввести как элемент оператора линейного преобразования $n\delta S$ в $\bar{n}\delta\bar{S}$:

$$(1-D) \cdot n\delta S = \bar{n}\delta\bar{S},$$

где $\mathbf{1}$ – единичный тензор.

Использование поврежденности в виде тензора второго ранга позволяет учесть анизотропию процесса накопления повреждений (возникновение и рост микротрещин перпендикулярно направлению

действия максимальных главных напряжений). Вследствие условия совпадения результирующих векторов «традиционных» и эффективных напряжений, приходим к соотношению

$$\sigma \cdot n\delta S = \bar{\sigma} \cdot \bar{n}\delta\bar{S},$$

откуда можем определить ТЭН [9]:

$$\bar{\sigma} = \sigma \cdot (1-D)^{-1}. \quad (4)$$

В общем случае ТЭН, введенный определением (4), оказывается несимметричным. Симметричность наблюдается при изотропной поврежденности $D = D\mathbf{1}$, а также при соосности тензора напряжений σ и тензора поврежденности D .

В общем случае, не ограниченном рассмотрением только тензоров поврежденности второго ранга, связь между эффективными и традиционными напряжениями осуществляется с помощью тензора влияния поврежденности четвертого ранга 4M и представляет собой линейное преобразование общего вида [32]:

$$\bar{\sigma} = {}^4M \cdot \cdot \sigma. \quad (5)$$

Для рассмотренных случаев изотропной (1) и анизотропной (4) поврежденностей тензоры влияния определяются следующими выражениями:

$${}^4M = \frac{1}{2(1-D)} (\mathbf{1}\bar{\otimes}\mathbf{1} + \mathbf{1}\underline{\otimes}\mathbf{1}), \quad (6)$$

$${}^4M = \frac{1}{2} [\mathbf{1}\bar{\otimes}(\mathbf{1}-D)^{-1} + \mathbf{1}\underline{\otimes}(\mathbf{1}-D)^{-1}], \quad (7)$$

где использованы символы непрямого диадного умножения

$$(\mathbf{A}\bar{\otimes}\mathbf{B})_{ijkl} = A_{ik}B_{jl}, \quad (\mathbf{A}\underline{\otimes}\mathbf{B})_{ijkl} = A_{il}B_{jk}.$$

Появление двух слагаемых в правых частях выражений (4) и (5) обусловлено учетом симметрии тензора

$$\sigma = \sigma^S = (1/2)(\sigma + \sigma^T),$$

где $(\dots)^S$ и $(\dots)^T$ – операции симметризации и транспонирования (перестановки индексов) тензора второго ранга.

Например, при получении выражения (4), как следствие формулы (1) имеем:

$$(1-D)\bar{\sigma} = \sigma = \mathbf{1} \cdot \sigma \cdot \mathbf{1} = \mathbf{1} \cdot (1/2)(\sigma + \sigma^T) \cdot \mathbf{1} =$$

$$\begin{aligned}
 &= \mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j (1/2) (\delta_{ik} \sigma_{km} \delta_{mj} + \delta_{ik} \sigma_{mk} \delta_{mj}) = \\
 &= \mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j (1/2) (\delta_{ik} \delta_{mj} + \delta_{im} \delta_{kj}) \sigma_{km} = \\
 &= (1/2) (\mathbf{1} \otimes \mathbf{1} + \mathbf{1} \otimes \mathbf{1}) \cdot \boldsymbol{\sigma},
 \end{aligned}$$

где δ_{ik} – символ Кронекера, \otimes – символ прямого диадного умножения

$$(\mathbf{A} \otimes \mathbf{B})_{ijkl} = A_{ij} B_{kl}.$$

При использовании гипотезы эквивалентности деформаций тензор упругих модулей поврежденной среды ${}^4\bar{\mathbf{C}}^e$ связан с тензором начальных модулей упругости ${}^4\mathbf{C}^e$ равенством

$${}^4\bar{\mathbf{C}}^e = {}^4\mathbf{M}^{-1} \cdot {}^4\mathbf{C}^e. \quad (8)$$

В случае использования гипотезы эквивалентности энергий получается равенство

$${}^4\bar{\mathbf{C}}^e = {}^4\mathbf{M}^{-1} \cdot {}^4\mathbf{C}^e \cdot {}^4\mathbf{M}^{-T}. \quad (9)$$

Симметризация тензора эффективных напряжений

Явные схемы. Простейший вариант симметризации ТЭН, предложенный С. Мураками и Н. Оно [26], связан с вычислением симметричной части от тензора второго ранга, фигурирующего в правой части равенства (4):

$$\bar{\boldsymbol{\sigma}} = \frac{1}{2} [(\mathbf{1} - \mathbf{D})^{-1} \cdot \boldsymbol{\sigma} + \boldsymbol{\sigma} \cdot (\mathbf{1} - \mathbf{D})^{-1}]. \quad (10)$$

Тензор влияния поврежденности может быть получен как прямое следствие формулы тензора (10) в виде

$$\begin{aligned}
 {}^4\mathbf{M} = \frac{1}{4} [&\mathbf{1} \otimes (\mathbf{1} - \mathbf{D})^{-1} + \mathbf{1} \otimes (\mathbf{1} - \mathbf{D})^{-1} + \\
 &+ (\mathbf{1} - \mathbf{D})^{-1} \otimes \mathbf{1} + (\mathbf{1} - \mathbf{D})^{-1} \otimes \mathbf{1}]. \quad (11)
 \end{aligned}$$

Матрица, соответствующая тензору влияния поврежденности (11), в главных осях $\mathbf{n}_1, \mathbf{n}_2, \mathbf{n}_3$ тензора поврежденности

$$\mathbf{D} = D_1 \mathbf{n}_1 \otimes \mathbf{n}_1 + D_2 \mathbf{n}_2 \otimes \mathbf{n}_2 + D_3 \mathbf{n}_3 \otimes \mathbf{n}_3$$

имеет вид:

$$[\mathbf{M}] = \begin{bmatrix} M_{11} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & M_{22} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & M_{33} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & M_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & M_{55} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & M_{66} \end{bmatrix}, \quad (12)$$

где диагональные элементы, связывающие нормальные и касательные компоненты напряжений, определяются выражениями различной структуры:

$$\begin{aligned}
 M_{11} &= \frac{1}{1 - D_1}, \\
 M_{44} &= \frac{1}{2} \left(\frac{1}{1 - D_1} + \frac{1}{1 - D_2} \right). \quad (13)
 \end{aligned}$$

Элементы матрицы M_{22} и M_{33} вычисляются аналогично M_{11} . Элементы M_{55} и M_{66} находятся аналогично M_{44} , – на основе циклической перестановки индексов $1 \rightarrow 2 \rightarrow 3 \rightarrow 1 \dots$.

Матрица (12) является диагональной, благодаря выбору системы координат, связанной с главными осями \mathbf{D} . В общем случае для произвольной системы координат она будет отлична от диагональной.

При получении матрицы $[\mathbf{M}]$ (12) была принята очередность индексов, соответствующая следующему порядку перечисления компонент тензора напряжений:

$$\{\sigma_{11}, \sigma_{22}, \sigma_{33}, \tau_{12}, \tau_{23}, \tau_{31}\}.$$

Альтернативный вариант симметризации (4) был предложен в работе [33]:

$$\bar{\boldsymbol{\sigma}} = (\mathbf{1} - \mathbf{D})^{-1/2} \cdot \boldsymbol{\sigma} \cdot (\mathbf{1} - \mathbf{D})^{-1/2}. \quad (14)$$

В случае соосности тензора напряжений и тензора поврежденности оба определения (10) и (14) совпадают.

Тензор влияния, соответствующий процедуре мультипликативной симметризации (14), имеет вид:

$$\begin{aligned}
 {}^4\mathbf{M} = \frac{1}{2} [&(\mathbf{1} - \mathbf{D})^{-1/2} \otimes (\mathbf{1} - \mathbf{D})^{-1/2} + \\
 &+ (\mathbf{1} - \mathbf{D})^{-1/2} \otimes (\mathbf{1} - \mathbf{D})^{-1/2}]. \quad (15)
 \end{aligned}$$

Матрица, соответствующая тензору влияния (15), в главных осях тензора поврежденности допускает представление также в виде диагональной матрицы (12), компоненты которой вычисляются на основе выражений:

$$\begin{aligned}
 M_{11} &= \frac{1}{1 - D_1}, \\
 M_{44} &= \frac{1}{\sqrt{(1 - D_1)(1 - D_2)}}. \quad (16)
 \end{aligned}$$

Так же, как и в предыдущем случае, элементы матрицы M_{22} и M_{33} вычисляются аналогично M_{11} , а элементы M_{55} и M_{66} находятся аналогично M_{44} , на основе циклической перестановки индексов $1 \rightarrow 2 \rightarrow 3 \rightarrow 1 \dots$. Следует отметить, что выражения для M_{11} в (13) и (16) совпадают.

В дальнейшем, для удобства изложения материала, преобразование, связанное с равенством (10), будем называть аддитивной симметризацией, а с равенством (14) – мультипликативной симметризацией.

В данной работе предлагается использовать единое универсальное представление для симметризованного ТЭН, содержащее варианты (10) и (14) как частные случаи. Предлагаемое представление имеет следующий вид:

$$\bar{\sigma} = \frac{1}{2}[(\mathbf{1} - \mathbf{D})^{-a} \cdot \sigma \cdot (\mathbf{1} - \mathbf{D})^{-(1-a)} + (\mathbf{1} - \mathbf{D})^{-(1-a)} \cdot \sigma \cdot (\mathbf{1} - \mathbf{D})^{-a}], \quad (17)$$

где a – безразмерный скалярный параметр, изменяющийся в диапазоне от 0 до 1.

При $a = 0$ или 1 получаем процедуру аддитивной симметризации (10), при $a = 1/2$ – процедуру мультипликативной симметризации (14).

Тензор влияния, соответствующий обобщенной процедуре симметризации (17), имеет вид

$${}^4\mathbf{M} = \frac{1}{4}[(\mathbf{1} - \mathbf{D})^{-a} \bar{\otimes} (\mathbf{1} - \mathbf{D})^{-(1-a)} + (\mathbf{1} - \mathbf{D})^{-a} \underline{\otimes} (\mathbf{1} - \mathbf{D})^{-(1-a)} + (\mathbf{1} - \mathbf{D})^{-(1-a)} \bar{\otimes} (\mathbf{1} - \mathbf{D})^{-a} + (\mathbf{1} - \mathbf{D})^{-(1-a)} \underline{\otimes} (\mathbf{1} - \mathbf{D})^{-a}]. \quad (18)$$

Матрица для тензора влияния (18), в главных осях тензора поврежденности определяется матрицей диагонального вида (12), где

$$M_{11} = \frac{1}{1 - D_1},$$

$$M_{44} = \frac{1}{2} \left[\frac{1}{(1 - D_1)^a (1 - D_2)^{1-a}} + \frac{1}{(1 - D_1)^{1-a} (1 - D_2)^a} \right]. \quad (19)$$

M_{22} и M_{33} вычисляются аналогично M_{11} , так же как и M_{55} и M_{66} находятся аналогично M_{44} , на основе циклической перестановки индексов $1 \rightarrow 2 \rightarrow 3 \rightarrow 1 \dots$.

В качестве дальнейшего обобщения представления (17) можно рассмотреть такое двухпараметрическое представление:

$$\bar{\sigma} = \frac{1}{2}[(\mathbf{1} - \mathbf{D})^{-a} \cdot \sigma \cdot (\mathbf{1} - \mathbf{D})^{-b} + (\mathbf{1} - \mathbf{D})^{-b} \cdot \sigma \cdot (\mathbf{1} - \mathbf{D})^{-a}]. \quad (20)$$

Оно содержит выражение (17) при $b = 1 - a$ как частный случай. Процедура симметризации (20) позволяет учесть вариант ТЭН, предложенный Беттенем в статье [27], имеющий вид

$$\bar{\sigma} = (\mathbf{1} - \mathbf{D})^{-1} \cdot \sigma \cdot (\mathbf{1} - \mathbf{D})^{-1},$$

а также независимость в выборе показателей в степенях напряжений σ и тензора сплошности $\Psi = \mathbf{1} - \mathbf{D}$ в обобщенных формулировках определяющих уравнений ползучести [8].

Тензор влияния, соответствующий двухпараметрической процедуре симметризации (20), определяется следующим равенством:

$${}^4\mathbf{M} = \frac{1}{4}[(\mathbf{1} - \mathbf{D})^{-a} \bar{\otimes} (\mathbf{1} - \mathbf{D})^{-b} + (\mathbf{1} - \mathbf{D})^{-a} \underline{\otimes} (\mathbf{1} - \mathbf{D})^{-b} + (\mathbf{1} - \mathbf{D})^{-b} \bar{\otimes} (\mathbf{1} - \mathbf{D})^{-a} + (\mathbf{1} - \mathbf{D})^{-b} \underline{\otimes} (\mathbf{1} - \mathbf{D})^{-a}]. \quad (21)$$

Неявные схемы. В работах [33, 34] рассматривается возможность неявного задания ТЭН в виде решения следующего уравнения:

$$\bar{\sigma} = \frac{1}{2}[(\mathbf{1} - \mathbf{D}) \cdot \bar{\sigma} + \bar{\sigma} \cdot (\mathbf{1} - \mathbf{D})]. \quad (22)$$

Условия для определения симметричного ТЭН, получаемого путем неявной аддитивной симметризации (22), обсуждаются в работе [34].

При введении предположения о симметричности ТЭН, которое выражается как

$$\bar{\sigma} = \bar{\sigma}^S = (1/2)(\bar{\sigma} + \bar{\sigma}^T),$$

тензор влияния определяется в следующем виде:

$${}^4\mathbf{M} = \left[\frac{1}{2}(\mathbf{1} \bar{\otimes} \mathbf{1} + \mathbf{1} \underline{\otimes} \mathbf{1}) - \right] \quad (23)$$

$$-\frac{1}{4}(\mathbf{1} \otimes \underline{\mathbf{D}} + \mathbf{1} \otimes \underline{\mathbf{D}} + \underline{\mathbf{D}} \otimes \mathbf{1} + \underline{\mathbf{D}} \otimes \mathbf{1}) \Big]^{-1}. \quad (23)$$

Матрица, соответствующая тензору влияния (23), в главных осях тензора поврежденности имеет вид (12), где

$$\begin{aligned} M_{11} &= \frac{1}{1 - D_1}, \\ M_{44} &= \frac{1}{1 - \frac{D_1 + D_2}{2}}. \end{aligned} \quad (24)$$

Как и в предыдущих случаях, элементы матрицы M_{22} и M_{33} вычисляются аналогично M_{11} , а элементы M_{55} и M_{66} находятся аналогично M_{44} , на основе циклической перестановки индексов $1 \rightarrow 2 \rightarrow 3 \rightarrow 1 \dots$.

Неявная мультипликативная симметризация определяется выражением

$$\boldsymbol{\sigma} = (\mathbf{1} - \mathbf{D})^{-1/2} \cdot \bar{\boldsymbol{\sigma}} \cdot (\mathbf{1} - \mathbf{D})^{-1/2}. \quad (25)$$

Очевидно, что данное определение не отличается от варианта явной мультипликативной симметризации (14).

В качестве обобщения неявных схем симметризации (22) и (25) может рассматриваться однопараметрическое представление следующего вида:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\sigma} &= \frac{1}{2} [(\mathbf{1} - \mathbf{D})^a \cdot \bar{\boldsymbol{\sigma}} \cdot (\mathbf{1} - \mathbf{D})^{1-a} + \\ &+ (\mathbf{1} - \mathbf{D})^{1-a} \cdot \bar{\boldsymbol{\sigma}} \cdot (\mathbf{1} - \mathbf{D})^a], \end{aligned} \quad (26)$$

где a – безразмерный скалярный параметр, изменяющийся в диапазоне от 0 до 1 (как и для представления (17)).

При $a = 0$ (или $a = 1$) получаем процедуру аддитивной симметризации (22), при $a = 1/2$ – процедуру мультипликативной симметризации (25).

Тензор влияния, соответствующий обобщенной процедуре симметризации (26), имеет вид:

$$\begin{aligned} {}^4\mathbf{M} &= 4[(\mathbf{1} - \mathbf{D})^a \otimes (\mathbf{1} - \mathbf{D})^{1-a} + \\ &+ (\mathbf{1} - \mathbf{D})^a \otimes (\mathbf{1} - \mathbf{D})^{1-a} + (\mathbf{1} - \mathbf{D})^{1-a} \otimes (\mathbf{1} - \mathbf{D})^a + \\ &+ (\mathbf{1} - \mathbf{D})^{1-a} \otimes (\mathbf{1} - \mathbf{D})^a]^{-1}. \end{aligned} \quad (27)$$

Матрица влияния, записанная в главных осях тензора поврежденности, имеет вид (12), где

$$\begin{aligned} M_{11} &= \frac{1}{1 - D_1}, \\ M_{44} &= 2[(1 - D_1)^a (1 - D_2)^{1-a} + \\ &+ (1 - D_1)^{1-a} (1 - D_2)^a]^{-1}. \end{aligned} \quad (28)$$

Как и для вышеприведенных случаев, M_{22} и M_{33} вычисляются аналогично M_{11} , так же как и M_{55} и M_{66} находятся аналогично M_{44} , на основе циклической перестановки индексов $1 \rightarrow 2 \rightarrow 3 \rightarrow 1 \dots$.

Возможность явного выполнения инверсии, присутствующей в тензоре (27), реализована при вычислении элементов матрицы (28), благодаря диагональному виду матрицы влияния (12) в главных осях тензора поврежденности.

Сравнительный анализ различных вариантов симметризации

Сравнение результатов, получаемых с использованием различных процедур явной (см. формулы (10), (14), (17)) и неявной (формулы (22), (25), (26)) симметризации, осуществлялось для двух идеализированных вариантов поврежденного материала с различной микроструктурой:

система одинаково ориентированных (параллельных) микротрещин (вертикальных или наклонных, см. рис. 1, a, b), периодически повторяющихся в двух направлениях;

система ортогональных микротрещин различной длины в каждом из направлений (см. рис. 1, c), периодическая в двух направлениях.

На макроуровне материал рассматривается как однородный. Информация о микроструктуре на макроуровне учитывается только путем введения тензора поврежденности. Тензорный характер поврежденности обеспечивает возможность учета анизотропии свойств начально изотропного материала.

Система параллельных микротрещин. Тензор поврежденности в рассматриваемом случае (см. рис. 1, b) имеет вид

$$\mathbf{D} = D_1 \mathbf{n}_1 \otimes \mathbf{n}_1, \quad (29)$$

где D_1 – максимальное собственное значение тензора поврежденности ($0 \leq D_1 \leq 1$),

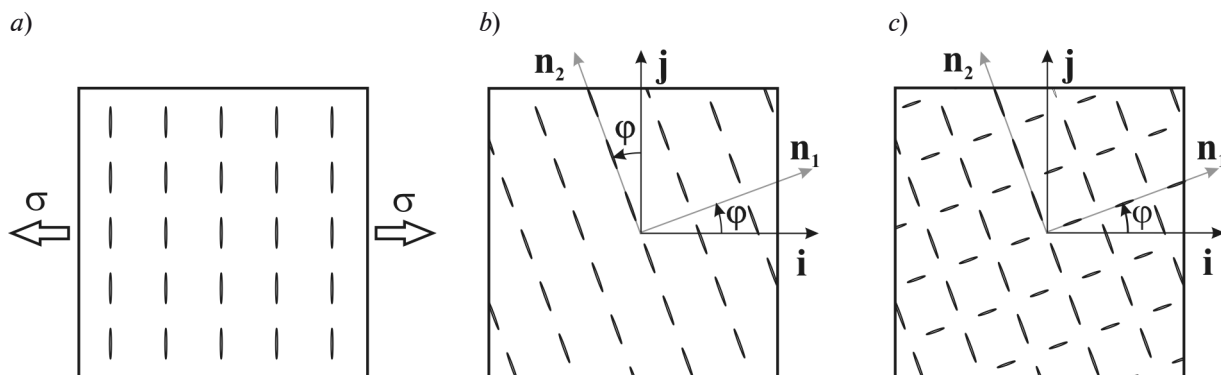


Рис. 1. Идеализированные варианты материала с повреждениями: представлены системы вертикальных (а), односторонне направленных, наклонных (b) и ортогональных (с) микротрещин

определяемое соотношением между длиной микротрещины и размером неповрежденной перемычки (расстояние между ближайшими вершинами соседних коллинеарных трещин); \mathbf{n}_1 – нормаль к берегам микротрещин.

Особый интерес представляет простейший случай системы вертикальных микротрещин (рис. 1, а, где $\varphi = 0$, $\mathbf{D} = D_1 \mathbf{i} \otimes \mathbf{i}$), допускающий наглядную интерпретацию результатов. При одноосном растяжении макрообразца в направлении, перпендикулярном ориентации микротрещин, в нем на макроуровне будет реализовано одноосное однородное напряженное состояние; тензор напряжений выражается как

$$\boldsymbol{\sigma} = \sigma_{11} \mathbf{i} \otimes \mathbf{i}.$$

Этот тензор является соосным с тензором поврежденности. В данном случае прогнозы всех рассмотренных выше аддитивных и мультипликативных явных и неявных процедур симметризации ТЭН совпадают:

$$\bar{\sigma}_{11} = \frac{\sigma_{11}}{1 - D_1}. \quad (30)$$

Этот очевидный результат можно было получить и из сопоставления матриц влияния $[\mathbf{M}]$ для рассматриваемых вариантов определения ТЭН. Все матрицы (13), (16), (19), (24) и (28) в главных осях тензора поврежденности имеют одинаковые первые диагональные элементы M_{11} .

Аналогичное утверждение справедливо также для второго и третьего диагональных

элементов. Отличия наблюдаются только в четвертом, пятом и шестом диагональных элементах матриц влияния. Это указывает на возможность появления различий при сдвиговом воздействии.

При плоском чистом сдвиге, тензор напряжений которого имеет вид

$$\boldsymbol{\sigma} = \tau_{12} (\mathbf{i} \otimes \mathbf{j} + \mathbf{j} \otimes \mathbf{i}),$$

наблюдается различие в прогнозах ТЭН.

Формулы для вычисления отношений $\bar{\tau}_{12} / \tau_{12}$, полученных как величины M_{44} при $D_1 \neq 0$ и $D_2 = 0$, для всех рассмотренных выше аддитивных и мультипликативных, явных и неявных процедур симметризации представлены в таблице. На основе полученных соотношений проведено сравнение различных схем симметризации, результаты которого показаны на рис. 2.

Наибольшие абсолютные значения отношения $\bar{\tau}_{12} / \tau_{12}$ наблюдаются для явной аддитивной схемы симметризации (10) (см. рис. 2, а) во всем диапазоне изменения поврежденности. Наименьшие значения $\bar{\tau}_{12} / \tau_{12}$ соответствуют неявной аддитивной схеме симметризации (22). Кривые, соответствующие мультипликативной симметризации (явная (14) и неявная (25) схемы) дают в этом случае совпадающий результат), занимает промежуточное положение (рис. 2, а).

В отличие от явной, неявная схема аддитивной симметризации не демонстрирует сингулярности $\bar{\tau}_{12} / \tau_{12}$ при стремлении D_1 к единице.

Таблица

Отношения $\bar{\tau}_{12} / \tau_{12}$ при плоском чистом сдвиге в системе вертикальных микротрещин

Процедура симметризации ТЭН		Базовая формула	$\bar{\tau}_{12} / \tau_{12}$	Номер кривой на рис. 2
Явная	аддитивная	(10)	$\frac{1}{2} \left(1 + \frac{1}{1 - D_1} \right)$	1
	мультипликативная	(14)	$\frac{1}{\sqrt{1 - D_1}}$	2
	обобщенная	(17)	$\frac{1}{2} \left[\frac{1}{(1 - D_1)^a} + \frac{1}{(1 - D_1)^{1-a}} \right]$	4
Неявная	аддитивная	(22)	$\frac{1}{1 - D_1 / 2}$	3
	мультипликативная	(25)	$\frac{1}{\sqrt{1 - D_1}}$	—
	обобщенная	(26)	$\frac{2}{(1 - D_1)^a + (1 - D_1)^{1-a}}$	5

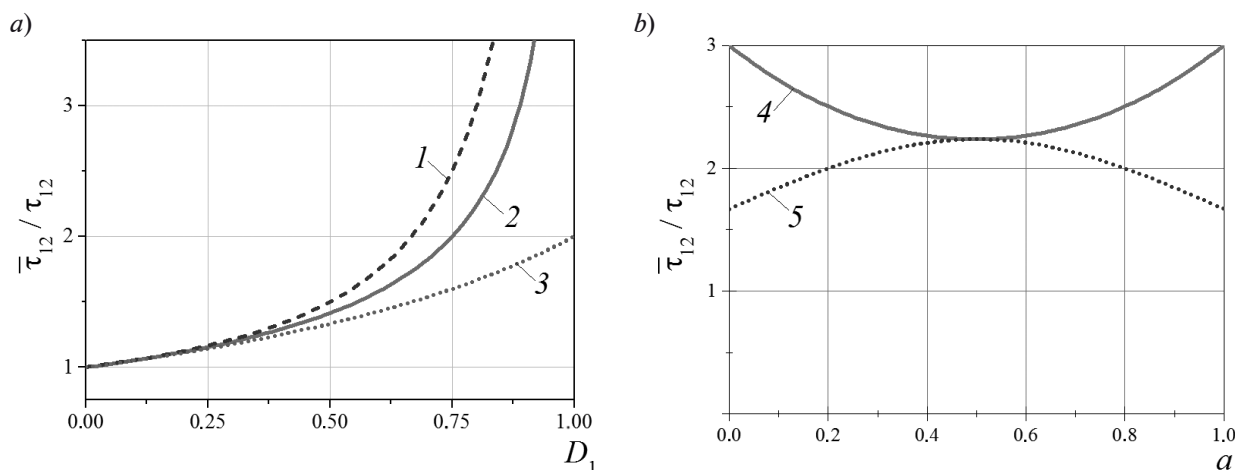


Рис. 2. Зависимость величины $\bar{\tau}_{12} / \tau_{12}$ от поврежденности D_1 (a) и параметра a (при значении $D_1 = 0,8$) (b) в системе вертикальных микротрещин для различных вариантов симметризации тензора эффективных напряжений (см. таблицу)

Следует отметить, что сравнение вторых инвариантов ТЭН для рассмотренных схем симметризации со вторым инвариантом несимметричного ТЭН (4) указало на то, что наиболее близкий к (4) прогноз дается явной аддитивной схемой (10).

Результаты анализа влияния параметра a на отношение $\bar{\tau}_{12} / \tau_{12}$ при фиксированном значении $D_1 = 0,8$ показаны на рис. 2, b.

Наибольшие различия значений $\bar{\tau}_{12} / \tau_{12}$ в явной (17) и неявной (26) схемах симметризации ТЭН наблюдаются при $a = 0$ и $a = 1$ (соответствуют случаю аддитивной симметризации) и составляют 45 %. Различия между аддитивной и мультипликативной процедурами явной симметризации составляет 25 %. С ростом уровня поврежденности D_1 указанные различия будут расти

(см. рис. 2, *a*). Важно отметить, что отношение $\bar{\tau}_{12} / \tau_{12}$ при явной симметризации всегда не меньше, чем при неявной.

В отличие от случая вертикальных микротрещин (см. рис. 1, *a*, $\varphi = 0$), при анализе материала с наклонными микротрещинами (рис. 1, *b*, $\varphi \neq 0$), при одноосном растяжении представительного объема, ТЭН будет содержать не одну, а три ненулевых компоненты, и для каждой из них будут наблюдаться различия в прогнозах процедур симметризации. Результаты вычисления отношения $\bar{\sigma}_{11} / \sigma_{11}$ при одноосном нагружении, когда

$$\sigma = \sigma_{11} \mathbf{i} \otimes \mathbf{i}, \quad \mathbf{D} = D_1 \mathbf{n}_1 \otimes \mathbf{n}_1,$$

для рассмотренных явных (17) и неявных (26) методов симметризации определяются соответственно следующими уравнениями:

$$\frac{\bar{\sigma}_{11}}{\sigma_{11}} = \cos^4 \varphi \frac{1}{1 - D_1} + \sin^4 \varphi + \sin^2 \varphi \cos^2 \varphi \left[\frac{1}{(1 - D_1)^a} + \frac{1}{(1 - D_1)^{1-a}} \right], \quad (31)$$

$$\frac{\bar{\sigma}_{11}}{\sigma_{11}} = \cos^4 \varphi \frac{1}{1 - D_1} + \sin^4 \varphi + \sin^2 \varphi \cos^2 \varphi \left[\frac{4}{(1 - D_1)^a + (1 - D_1)^{1-a}} \right]. \quad (32)$$

Предельный анализ соотношений (31) и (32) при $D_1 \rightarrow 0$ показал, что различия для любых вариантов ТЭН имеют второй порядок малости $O(D_1^2)$.

На рис. 3 представлено сравнение значений $\bar{\sigma}_{11} / \sigma_{11}$, полученных при помощи процедур явной аддитивной, явной мультипликативной и неявной аддитивной симметризации при различных значениях угла ориентации микротрещин φ и фиксированном значении $D_1 = 0,8$. Максимальное значение $\bar{\sigma}_{11} / \sigma_{11}$ (как и для рассмотренного выше случая $\bar{\tau}_{12} / \tau_{12}$ (см. рис. 2, *a*)) наблюдается для явной аддитивной схемы симметризации (10); наименьшее значение $\bar{\sigma}_{11} / \sigma_{11}$ соответствует неявной аддитивной схеме симметризации (22); мультипликативная симметризация (явная и неявные схемы дают совпадающий результат) занимает промежуточное положение (см. рис. 3). Максимальные различия значений $\bar{\sigma}_{11} / \sigma_{11}$ для явной и неявной схем симметризации наблюдаются при $\varphi = 45^\circ$.

Характер изменения отношения $\bar{\sigma}_{11} / \sigma_{11}$ с ростом поврежденности D_1 для материала с наклонными микротрещинами в целом соответствует наблюдаемому для отношения $\bar{\tau}_{12} / \tau_{12}$ (сравните рис. 4, *a* и 2, *a*). Однако различия между прогнозами для различных схем симметризации ТЭН в рассматриваемом

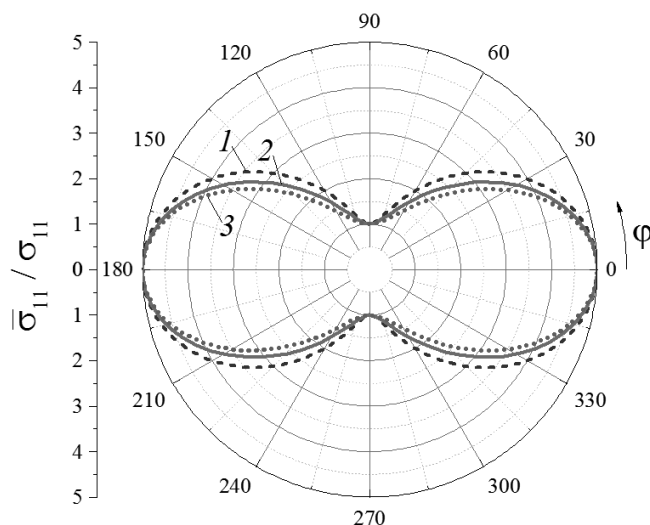


Рис. 3. Зависимости отношения $\bar{\sigma}_{11} / \sigma_{11}$ от угла φ ориентации наклонных микротрещин для трех вариантов симметризации тензора эффективных напряжений: явная аддитивная, представлена формулой (10) (кривая 1); явная мультипликативная, ф-ла (14) (2); неявная аддитивная, ф-ла (22) (3)

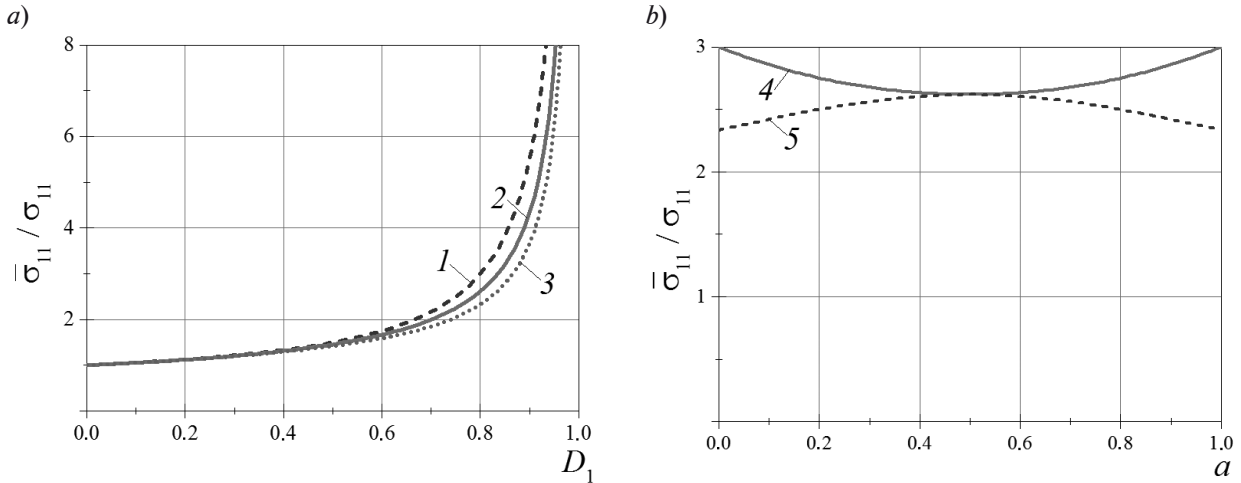


Рис. 4. Зависимости величины $\bar{\sigma}_{11} / \sigma_{11}$ от поврежденности D_1 (a) и параметра a (при значении $D_1 = 0,8$) (b) в системе наклонных микротрещин ($\varphi = 45^\circ$) для различных вариантов симметризации тензора эффективных напряжений: явная аддитивная, представлена формулой (10) (кривая 1); явная мультипликативная, ф-ла (14) (2); неявная аддитивная, ф-ла (22) (3); явная, ф-ла (31) (4); неявная, ф-ла (32) (5)

мом случае ($\varphi = 45^\circ$) менее значительные. Неявная аддитивная схема симметризации для $\bar{\sigma}_{11} / \sigma_{11}$ в отличие от $\bar{\tau}_{12} / \tau_{12}$ демонстрируют сингулярное поведение $\bar{\sigma}_{11} / \sigma_{11}$ при стремлении D_1 к единице.

Результаты анализа влияния параметра a на отношение $\bar{\sigma}_{11} / \sigma_{11}$ при фиксированных значениях параметров $D_1 = 0,8$ и $\varphi = 45^\circ$ для системы наклонных трещин показаны на рис. 4, b. Так же, как и в случае вертикальных микротрещин для $\bar{\tau}_{12} / \tau_{12}$ (см. рис. 2, b), наибольшие различия в значениях $\bar{\sigma}_{11} / \sigma_{11}$ для явной (31) и неявной (32) схем симметризации наблюдаются при $a = 0$ и $a = 1$ (соответствуют случаю аддитивной симметризации ТЭН). Отношение $\bar{\sigma}_{11} / \sigma_{11}$ при явной симметризации ТЭН всегда не меньше, чем при неявной.

Система ортогональных микротрещин. Тензор поврежденности в рассматриваемом случае системы ортогональных микротрещин (см. рис. 1, c) имеет вид

$$\mathbf{D} = D_1 \mathbf{n}_1 \otimes \mathbf{n}_1 + D_2 \mathbf{n}_2 \otimes \mathbf{n}_2. \quad (33)$$

Величины D_1 и D_2 определяются соотношением между длинами трещин и промежутков между ними (расстояния между вершинами соседних коллинеарных трещин) в направлениях \mathbf{n}_1 и \mathbf{n}_2 соответственно. \mathbf{n}_1 и \mathbf{n}_2 —

это главные оси тензора поврежденности. Компоненты тензора поврежденности D_1 и D_2 удовлетворяют ограничениям

$$0 \leq D_1 \leq 1; \quad 0 \leq D_2 \leq 1.$$

Результаты вычисления отношения $\bar{\sigma}_{11} / \sigma_{11}$ для материала, поврежденного системой ортогональных микротрещин (см. рис. 1, c) с тензором \mathbf{D} , определяемым по формуле (33), при одноосном нагружении, когда тензор напряжений выражается как

$$\boldsymbol{\sigma} = \sigma_{11} \mathbf{i} \otimes \mathbf{i},$$

для рассмотренных ранее явных (17) и неявных (26) процедур симметризации определяются соответственно следующими уравнениями:

$$\frac{\bar{\sigma}_{11}}{\sigma_{11}} = \frac{\cos^4 \varphi}{1 - D_1} + \frac{\sin^4 \varphi}{1 - D_2} + \sin^2 \varphi \cos^2 \varphi \times \left[\frac{1}{(1 - D_1)^a (1 - D_2)^{1-a}} + \frac{1}{(1 - D_2)^a (1 - D_1)^{1-a}} \right], \quad (34)$$

$$\frac{\bar{\sigma}_{11}}{\sigma_{11}} = \frac{\cos^4 \varphi}{1 - D_1} + \frac{\sin^4 \varphi}{1 - D_2} + \sin^2 \varphi \cos^2 \varphi \times \left[\frac{4}{(1 - D_1)^a (1 - D_2)^{1-a} + (1 - D_2)^a (1 - D_1)^{1-a}} \right]. \quad (35)$$

Различие уравнений (34) и (35) состоит

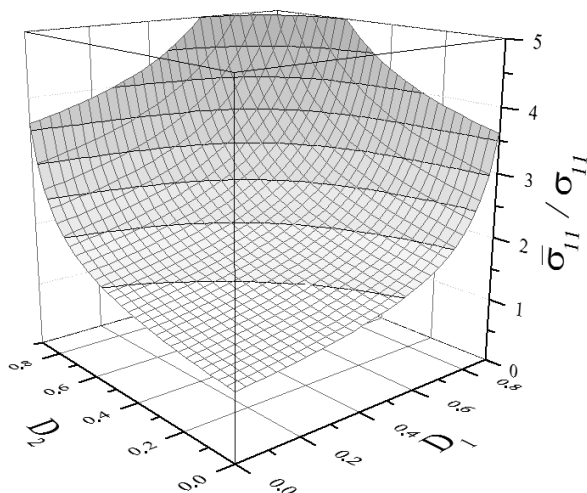


Рис. 5. Зависимость отношения $\bar{\sigma}_{11} / \sigma_{11}$ от параметров поврежденности D_1 и D_2 в системе ортогональных микротрещин при значении $\varphi = 45^\circ$ для явной аддитивной симметризации (см. ф-лу (10))

только в выражениях, стоящих в квадратных скобках.

Используя неравенство

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} \geq \frac{4}{x+y},$$

справедливое при $x > 0, y > 0$, несложно показать, что значение отношения $\bar{\sigma}_{11} / \sigma_{11}$,

вычисленное на основе формулы (34), всегда больше или равно соответствующего значения, найденного по формуле (35). Ранее введенные равенства (31) и (32) входят как частные случаи в формулы (34) и (35) при $D_2 = 0$.

Сравнение значений $\bar{\sigma}_{11} / \sigma_{11}$, найденных с использованием формул (34) и (35), показало, что максимум отношения $\bar{\sigma}_{11} / \sigma_{11}$ наблюдается для явной аддитивной схемы симметризации (10) (частный случай (34) при $a = 0$) при всех значениях угла φ ; минимальное значение $\bar{\sigma}_{11} / \sigma_{11}$ соответствует неявной аддитивной схеме симметризации (22) (частный случай (35) при $a = 0$); мультипликативная симметризация (явная и неявная схемы дают совпадающий результат) занимает промежуточное положение. Максимальные различия значений $\bar{\sigma}_{11} / \sigma_{11}$ для явной и неявной схем симметризации ТЭН наблюдаются при $\varphi = 45^\circ$.

Характер изменения $\bar{\sigma}_{11} / \sigma_{11}$ с ростом поврежденностей D_1 и D_2 соответствует наблюдаемому для односторонне ориентированных микротрещин (см. рис. 4, а). Зависимость $\bar{\sigma}_{11} / \sigma_{11}(D_1, D_2)$ для явной аддитивной схемы симметризации ТЭН (10) показана на рис. 5.

Влияние D_2 на угловое распределение

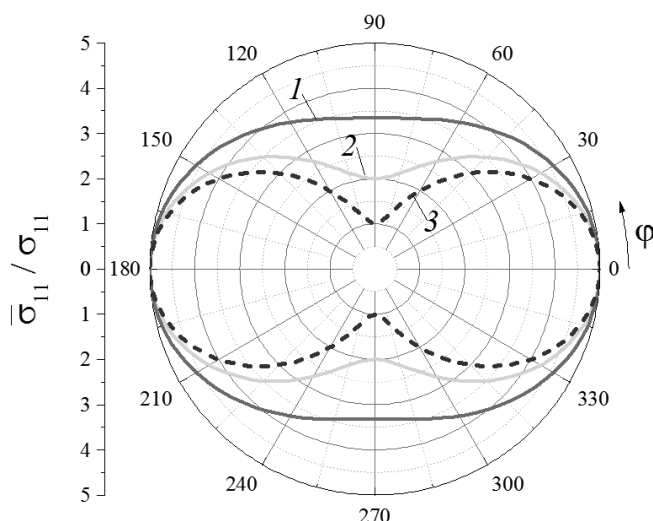


Рис. 6. Зависимости величины $\bar{\sigma}_{11} / \sigma_{11}$ от угла ориентации микротрещин для различных соотношений D_1 и D_2 при фиксированном значении $D_1 = 0,8$. Значение $D_2 = 0,7$ (кривая 1), $0,5$ (2), $0,0$ (3)

$\bar{\sigma}_{11} / \sigma_{11}$ при фиксированном значении D_1 показано на рис. 6 для явной аддитивной схемы симметризации ТЭН (10). При стремлении значения D_2 к D_1 кривая $\bar{\sigma}_{11} / \sigma_{11}$ стремится к окружности, соответствующей случаю изотропной поврежденности.

Изолинии $\bar{\sigma}_{11} / \sigma_{11}$ на плоскости $D_1 - D_2$ (рис. 7), построенные с использованием различных схем симметризации ТЭН, показывают, что различие в прогнозах увеличивается с ростом разницы между D_1 и D_2 . При $D_1 = D_2$ прогнозы совпадают. Наибольшее расхождение наблюдается при односторонне ориентированных микротрещинах с $D_1 = 0$ или $D_2 = 0$ (см. рис. 7). Разброс по углам ориентации микротрещин сглаживает расхождение в прогнозах схем симметризации ТЭН.

Влияние скалярного параметра a на отношение $\bar{\sigma}_{11} / \sigma_{11}$ для материала, поврежденного системой ортогональных микротрещин, имеет характер, аналогичный ранее рассмотренному варианту односторонне ориентированных микротрещин (см. рис. 4, b). Значения отношения $\bar{\sigma}_{11} / \sigma_{11}$ при

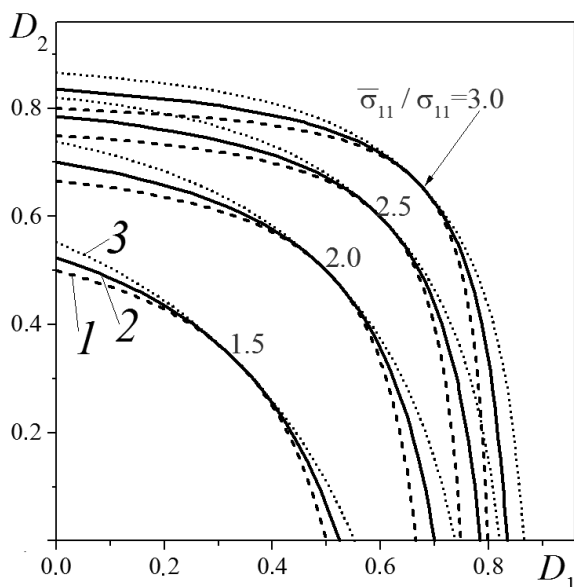


Рис. 7. Изолинии значений $\bar{\sigma}_{11} / \sigma_{11}$ на плоскости $D_1 - D_2$ для различных схем симметризации ТЭН: явная аддитивная, ф-ла (10) (кривая 1); явная мультипликативная, ф-ла (14) (2); неявная аддитивная, ф-ла (22) (3)

явной симметризации ТЭН всегда больше или равны соответствующим значениям при его неявной симметризации при любых допустимых значениях D_1 , D_2 и ϕ , что непосредственно следует из анализа вида соотношений (34) и (35).

Идентификация компонент тензора поврежденности

Известные методы оценки поврежденности основаны на измерении физических величин [35]: модулей упругости и плотности материала, его микротвердости, скорости распространения в материале ультразвуковых волн, деформаций ускоренной стадии ползучести, электрического сопротивления материала и др.

При анализе анизотропной поврежденности представляются перспективными методы акустической эмиссии, основанные на измерении анизотропии акустоупругих свойств твердого тела [36, 37].

Фазовые скорости v распространения плоской монохроматической волны

$$\mathbf{u} = \mathbf{A} \exp ik(\mathbf{N} \cdot \mathbf{r} - vt)$$

в направлении \mathbf{N} в упругой среде, характеризующейся тензором модулей упругости ${}^4\mathbf{C}^e$, определяются на основе решения уравнения

$$\det(\mathbf{N} \cdot {}^4\mathbf{C}^e \cdot \mathbf{N} - \rho v^2) = 0,$$

представляющего собой условие определения собственных чисел акустического тензора

$$\mathbf{N} \cdot {}^4\mathbf{C}^e \cdot \mathbf{N}.$$

Выше нами введено обозначение ρ для плотности материала. При использовании гипотезы эквивалентности деформаций (8) уравнение для определения скоростей распространения волн \bar{v} в поврежденной среде с тензором модулей упругости

$${}^4\bar{\mathbf{C}}^e = {}^4\mathbf{M}^{-1} \cdot {}^4\mathbf{C}$$

имеет вид

$$\det(\mathbf{N} \cdot {}^4\mathbf{M}^{-1} \cdot {}^4\mathbf{C}^e \cdot \mathbf{N} - \rho \bar{v}^2) = 0. \quad (36)$$

Решение уравнения (36) в общем случае имеет громоздкий вид. Упрощения можно достичь, если рассматривать распростране-

ние волны в направлении одной из главных осей тензора поврежденности, например вдоль третьей оси $\mathbf{N} = \mathbf{n}_3$. В этом случае для начально изотропного или для начально ортотропного материала (при условии совпадения осей упругой анизотропии с главными осями тензора поврежденности) акустический тензор имеет диагональный вид и решение уравнения (36) допускает простое компактное представление:

$$\begin{cases} \bar{v}_3 = \sqrt{M_{33}^{-1} C_{33}^e \rho^{-1}}, \\ \bar{v}_2 = \sqrt{M_{55}^{-1} C_{55}^e \rho^{-1}}, \\ \bar{v}_1 = \sqrt{M_{66}^{-1} C_{66}^e \rho^{-1}}, \end{cases} \quad (37)$$

где \bar{v}_3 – скорость распространения продольной волны в направлении \mathbf{n}_3 ; \bar{v}_1 , \bar{v}_2 – скорости поперечных волн в направлениях \mathbf{n}_1 и \mathbf{n}_2 соответственно.

Для начально изотропного упругого материала, характеризуемого константами Ляме λ , μ и определяемого тензором упругих модулей вида

$${}^4\mathbf{C}^e = \lambda \mathbf{1} \otimes \mathbf{1} + \mu (\mathbf{1} \otimes \mathbf{1} + \mathbf{1} \otimes \mathbf{1}), \quad (38)$$

при использовании явной схемы симметризации (17), с учетом формулы (19), как следствие соотношений (37) получаем следующие выражения для скоростей:

$$\begin{cases} \bar{v}_3 = \{(1 - D_3)(\lambda + 2\mu) / \rho\}^{1/2}, \\ \bar{v}_2 = \{[(1 - D_3)^{-a}(1 - D_2)^{a-1} + \\ + (1 - D_3)^{a-1}(1 - D_2)^{-a}]^{-1} 2\mu / \rho\}^{1/2}, \\ \bar{v}_1 = \{[(1 - D_3)^{-a}(1 - D_1)^{a-1} + \\ + (1 - D_3)^{a-1}(1 - D_1)^{-a}]^{-1} 2\mu / \rho\}^{1/2}. \end{cases} \quad (39)$$

При использовании неявной схемы симметризации (26), с учетом формулы (28), как следствие соотношений (37) получаем альтернативные выражения для скоростей:

$$\begin{cases} \bar{v}_3 = \{(1 - D_3)(\lambda + 2\mu) / \rho\}^{1/2}, \\ \bar{v}_2 = \{[(1 - D_3)^a(1 - D_2)^{1-a} + \\ + (1 - D_3)^{1-a}(1 - D_2)^a] / 2 \cdot \mu / \rho\}^{1/2}, \\ \bar{v}_1 = \{[(1 - D_3)^a(1 - D_1)^{1-a} + \\ + (1 - D_3)^{1-a}(1 - D_1)^a] / 2 \cdot \mu / \rho\}^{1/2}. \end{cases} \quad (40)$$

Выражения для скоростей $\bar{v}_1, \bar{v}_2, \bar{v}_3$ (39)

или (40) могут рассматриваться как система трех нелинейных алгебраических уравнений относительно трех неизвестных главных значений тензора поврежденности D_1, D_2, D_3 . В ряде случаев решение можно получить аналитически в замкнутом виде.

В случае явной аддитивной симметризации главные поврежденности будут определяться как решения системы (39) при $a = 0$:

$$\begin{cases} D_3 = 1 - (\bar{v}_3 / v_3)^2, \\ D_2 = 1 - [2(\bar{v}_2 / v_2)^{-2} - (\bar{v}_3 / v_3)^{-2}]^{-1}, \\ D_1 = 1 - [2(\bar{v}_1 / v_1)^{-2} - (\bar{v}_3 / v_3)^{-2}]^{-1}, \end{cases} \quad (41)$$

где $v_3 = \sqrt{(\lambda + 2\mu) / \rho}$ – скорость распространения продольной волны в неповрежденном материале, $v_1 = v_2 = \sqrt{\mu / \rho}$ – скорости распространения поперечных волн в этом материале.

Выражения (41) можно непосредственно использовать для идентификации анизотропной поврежденности на основе данных измерения скоростей ультразвуковых сигналов [36 – 38].

В случае явной мультипликативной симметризации, в качестве следствия системы уравнений (39), при $a = 1/2$ имеем:

$$\begin{cases} D_3 = 1 - (\bar{v}_3 / v_3)^2, \\ D_2 = 1 - (\bar{v}_2 / v_2)^4 / (\bar{v}_3 / v_3)^2, \\ D_1 = 1 - (\bar{v}_1 / v_1)^4 / (\bar{v}_3 / v_3)^2. \end{cases} \quad (42)$$

В случае неявной аддитивной симметризации ТЭН, поврежденности будут определяться на основе поиска решения системы уравнений (40) при $a = 0$:

$$\begin{cases} D_3 = 1 - (\bar{v}_3 / v_3)^2, \\ D_2 = 1 - [2(\bar{v}_2 / v_2)^2 - (\bar{v}_3 / v_3)^2], \\ D_1 = 1 - [2(\bar{v}_1 / v_1)^2 - (\bar{v}_3 / v_3)^2]. \end{cases} \quad (43)$$

Аналогичные выражения для поврежденностей можно получить в случае использования гипотезы эквивалентности энергий (9). Скорости распространения волн в предположении постоянства поврежденности определяются в этом случае как решения характеристического уравнения:

$$\det(\mathbf{N} \cdot {}^4\mathbf{M}^{-1} \cdot {}^4\mathbf{C}^e \cdot {}^4\mathbf{M}^{-T} \cdot \mathbf{N} - \rho \bar{v}^2) = 0. \quad (44)$$

Идентификация главных значений тензора поврежденности при использовании уравнения (44) производится аналогично рассмотренному выше случаю анализа (36). Для явной аддитивной симметризации (10) при этом имеем:

$$\begin{cases} D_3 = 1 - \bar{v}_3 / v_3, \\ D_2 = 1 - [2(v_2 / \bar{v}_2) - (v_3 / \bar{v}_3)]^{-1}, \\ D_1 = 1 - [2(v_1 / \bar{v}_1) - (v_3 / \bar{v}_3)]^{-1}; \end{cases} \quad (45)$$

в случае явной мультипликативной симметризации (14) получаем выражения:

$$\begin{cases} D_3 = 1 - \bar{v}_3 / v_3, \\ D_2 = 1 - (\bar{v}_2 / v_2)^2 / (\bar{v}_3 / v_3), \\ D_1 = 1 - (\bar{v}_1 / v_1)^2 / (\bar{v}_3 / v_3); \end{cases} \quad (46)$$

в случае неявной аддитивной симметризации (22) приходим к уравнениям:

$$\begin{cases} D_3 = 1 - \bar{v}_3 / v_3, \\ D_2 = 1 - [2(\bar{v}_2 / v_2) - (\bar{v}_3 / v_3)], \\ D_1 = 1 - [2(\bar{v}_1 / v_1) - (\bar{v}_3 / v_3)]. \end{cases} \quad (47)$$

Произвол в выборе схемы симметризации ТЭН и гипотезы эквивалентности может быть устранен на основе анализа экспериментальных данных для конкретного вида материалов и условий нагружения. Необходимо обеспечить выполнение неравенств

$$0 \leq D_1 \leq 1, \quad 0 \leq D_2 \leq 1, \quad 0 \leq D_3 \leq 1,$$

монотонность увеличения поврежденности с ростом нагрузки, возможность получения термодинамически согласованной и наиболее простой формы уравнений эволюции для тензора поврежденности.

Заключение

Предложенная единая обобщенная однопараметрическая форма представления симметризованного ТЭН позволяет ввести в рассмотрение новые варианты ТЭН, а также анализировать свойства поврежденного континуума в общем виде для различных ТЭН.

На основе решения ряда тестовых задач для параллельных и ортогональных микротрещин в настоящей работе показано, что явная аддитивная схема симметризации дает верхнюю границу тензора эффективных напряжений (т. е. является консервативной оценкой), в то время как неявная аддитивная — его нижнюю границу. Различия в прогнозах рассмотренных схем симметризации увеличиваются с ростом уровня поврежденности, а также с ростом различий между главными значениями тензора поврежденности. При низких уровнях поврежденности различия в любых вариантах ТЭН являются малыми второго порядка.

Вариативность в определении симметризованного ТЭН приводит к различным эквивалентным определениям поврежденности. В ряде случаев вопрос о выборе наиболее подходящего варианта ТЭН может быть решен на основе экспериментальных исследований в процессе идентификации параметров уравнения эволюции повреждений. В работе также предложена процедура идентификации анизотропной поврежденности на основе широко известных акустических методов.

Работа выполнена при финансовой поддержке гранта Российского научного фонда (проект №15-19-00091).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Качанов Л.М. О времени разрушения в условиях ползучести // Известия АН СССР. Отд-ние техн. наук. 1958. № 8. С. 26–31.
2. Работнов Ю.Н. О механизме длительного разрушения // Вопросы прочности материалов и конструкций. М.: Изд-во АН СССР, 1959. С. 5–7.
3. Волегов П.С., Грибов Д.С., Трусов П.В. Поврежденность и разрушение: классические континуальные теории // Физическая мезомеханика. 2015. Т. 18. № 4. С. 68–86.
4. Локощенко А.М. Применение кинетической теории при анализе длительного высокотемпературного разрушения металлов в условиях сложного напряженного состояния. Обзор // Прикладная механика и техническая физика. 2012. Т. 53. № 4. С. 149–164.
5. Murakami S. Continuum damage mechanics. Heidelberg, London, New York: Springer, 2012. 423 p.
6. Lemaitre J., Desmorat R. Engineering damage mechanics: ductile, creep, fatigue and brittle failures. Berlin: Springer, 2005. 380 p.

7. **Krajcinovic D.** Damage mechanics. Amsterdam: Elsevier, 1996. 761 p.
8. **Работнов Ю.Н.** Ползучесть элементов конструкций. М.: Наука, 1966. 752 с.
9. **Hult J.** Creep in continua and structures. Topics in applied continuum mechanics. Ed. by J.L. Zeman and F. Ziegler. Vienna: Springer, 1974. Pp. 137–155.
10. **Leckie F., Hayhurst D.** Creep rupture of structures // Proc. R. Soc. Lond. A. 1974. Vol. A340. No. 1622. Pp. 323–347.
11. **Dragon A.** Plasticity and ductile fracture damage: study of void growth in metals // Eng. Fract. Mech. 1985. Vol. 21. No. 4. Pp. 875–885.
12. **Lemaitre J.** A continuous damage mechanics model for ductile fracture // J. Eng. Mater. Technol. 1985. Vol. 107. No. 1. Pp. 83–89.
13. **Lemaitre J.** Evaluation of dissipation and damage in metals under dynamic loading // Proc. Int. Conf. on the Mech. Behavior of Materials I. Japan. 1971. Pp. 540–549.
14. **Chaboche J.L.** Une loi différentielle d'endommagement de fatigue avec cumulation non linéaire // Revue Française de Mécanique. 1974. No. 50–51. Pp. 71–82.
15. **Семенов А.С.** Исследование процесса образования зигзагов при распространении усталостной трещины методами континуальной механики повреждений // Нелинейные проблемы механики и физики деформируемого твердого тела. Под ред. К.Ф. Черных. Сборник трудов научной школы академика В.В. Новожилова. СПб.: Изд-во Политехнического университета, 2000. С. 186–211.
16. **Семенов А.С.** Механика нелокальных континуальных повреждений // Научно-технические ведомости СПбГПУ. 2006. № 1 (48). С. 148–159.
17. **Мельников Б.Е., Семенов А.С.** Энергетическая модель накопления повреждений при малоцикловой усталости // XXI Петербургские чтения по проблемам прочности. К 100-летию со дня рождения Л.М. Качанова и Ю.Н. Работнова. Сб. материалов. СПб.: Соло, 2014. С. 59–61.
18. **Семенов А.С., Гецов Л.Б.** Критерии термомусталостного разрушения монокристаллических жаропрочных сплавов и методы определения их параметров // Проблемы прочности. 2014. № 1. С. 50–62.
19. **Krajcinovic D., Fonseka G.U.** The continuous damage theory of brittle materials. Parts I, II // ASME J. Appl. Mech. 1981. Vol. 48. No. 4. Pp. 809–824.
20. **Бенин А.В., Семенов А.С., Семенов С.Г., Мельников Б.Е.** Математическое моделирование процесса разрушения сцепления арматуры с бетоном. Ч. 2. Модели без учета несплошности соединения // Инженерно-строительный журнал. 2014. № 1 (45). С. 23–40.
21. **Павлов П.А.** Основы инженерных расчетов элементов машин на усталость и длительную прочность. Ленинград: Машиностроение, 1988. 251 с.
22. **Качанов Л.М.** Основы механики разрушения. М.: Наука, 1974. 312 с.
23. **Петреня Ю.К.** Физико-механические основы континуальной механики повреждаемости. СПб.: Политехника, 1997. 253 с.
24. **Davison L., Stevens A.** Thermomechanical constitution of spalling elastic bodies // J. Appl. Phys. 1973. Vol. 44. No. 2. Pp. 667–674.
25. **Вакуленко А.А., Качанов М.Л.** Континуальная модель среды с трещинами // Изв. АН СССР. Механика твердого тела. 1971. № 4. С. 159–166.
26. **Murakami S., Ohno N.** A continuum theory of creep and creep damage // Creep in structures. A.R.S. Ponter, D.R. Hayhurst (eds.). Berlin: Springer, 1981. Pp. 422–443.
27. **Betten J.** Damage tensors in continuum mechanics // Journal de Mécanique théorique et appliqué. 1983. Vol. 2. No. 1. Pp. 13–32.
28. **Радаев Ю.Н.** Тензорные меры поврежденности и гармонический анализ тонкой структуры поврежденности // Вестник Самарского гос. ун-та, 1998. № 2 (8). С. 79–105.
29. **Chaboche J.** Continuum damage mechanics: Part I. General concepts // J. Appl. Mech. 1988. Vol. 55. No. 1. Pp. 59–64.
30. **Krajcinovic D.** Damage mechanics // Mech. Mater. 1989. Vol. 8. No. 2-3. Pp. 117–197.
31. **Leckie F.A., Onat E.T.** Tensorial nature of damage measuring internal variables // Physical Non-Linearities in Structural Analysis. Berlin: Springer, 1981. Pp. 140–155.
32. **Chaboche J.-L.** Le concept de contrainte effective applique a l'elasticite et ala viscoplasticite en presence d'un endommagement anisotrope // Mechanical Behavior of Anisotropic Solids. J.P. Boehler (ed.). Hague: Martinus Nijhoff, 1982. Pp. 737–760.
33. **Cordebois J.P., Sidoroff F.** Damage induced elastic anisotropy // Mechanical Behavior of Anisotropic Solids, J.P. Boehler (ed.). Hague: Martinus Nijhoff, 1982. Pp. 761–774.
34. **Betten J.** Net-stress analysis in creep mechanics // Ingenieur-Archiv. 1982. Vol. 52. No. 6. Pp. 405–419.
35. **Lemaitre J., Dufailly J.** Damage measurements // Eng. Fract. Mech. 1987. Vol. 28. No. 5-6. Pp. 643–661.

36. **Никитина Н.Е.** Акустоупругость. Опыт практического применения. Н. Новгород: Тадам, 2005. 208 с.

37. **Беляев А.К., Лобачев А.М., Модестов В.С., Пивков А.В., Полянский В.А., Семенов А.С., Третьяков Д.А., Штукин Л.В.** Оценка величины пластических деформаций с использо-

ванием акустической анизотропии // Известия Российской АН. Механика твердого тела. 2016. № 5. С. 124–131.

38. **Belyaev A.K., Polyanskiy V.A., Lobachev A.M., et al.** Propagation of sound waves in stressed elasto-plastic material // Proc. Int. Conf. Days on Diffraction. 2016. № 7756813. Pp. 56–61.

Статья поступила в редакцию 18.03.2017, принята к публикации 09.04.2017.

СВЕДЕНИЯ ОБ АВТОРЕ

СЕМЕНОВ Артем Семенович – кандидат физико-математических наук, доцент Санкт-Петербургского политехнического университета Петра Великого, Санкт-Петербург, Российская Федерация.

195251, Российская Федерация, г. Санкт-Петербург, Политехническая ул., 29
Semenov.Artem@googlemail.com

REFERENCES

[1] **L.M. Kachanov**, O vremeni razrusheniya v usloviyakh polzuchesti [On the creep-rapture life], Izv. AN SSSR. Ser. Techn. Sci. (8) (1958) 26–31.

[2] **Yu.N. Rabotnov**, O mekhanizme dlitel'nogo razrusheniya [On the delayed fracture mechanics], Voprosy prochnosti materialov i konstruksiy [On the strength of materials and constructions], Moscow, AN SSSR (1959) 5–7.

[3] **P.S. Volegov, D.S. Gribov, P.V. Trusov**, Povrezhdennost i razrusheniye: klassicheskiye kontinualnyye teorii [The damage and fracture: Classical continuum theories], Fizicheskaya mezomekhanika. 18 (4) (2015) 68–86.

[4] **A.M. Lokoshchenko**, Primeneniye kineticheskoy teorii pri analize dlitel'nogo vysokotemperaturnogo razrusheniya metallov v usloviyakh slozhnogo napryazhennogo sostoyaniya. Obzor [An application of the kinetic theory in the analysis of the delayed high-temperature fracture of metal under complex stress condition (Review)], Priklad. Mekhanika i Tekhnich. Fizika. 53 (4) (2012) 149–164.

[5] **S. Murakami**, Continuum damage mechanics, Springer, Heidelberg, London, New York (2012).

[6] **J. Lemaitre, R. Desmorat**, Engineering damage mechanics: ductile, creep, fatigue and brittle failures, Springer, Berlin (2005).

[7] **D. Krajcinovic**, Damage mechanics, Elsevier, Amsterdam (1996).

[8] **Yu.N. Rabotnov**, Polzuchest elementov konstruksiy [Creep of structural elements], Moscow, Nauka (1966).

[9] **J. Hult**, Creep in continua and structures, Topics in Applied Continuum Mechanics, Ed. by J.L. Zeman and F.Ziegler, Vienna, Springer (1974) 137–155.

[10] **F. Leckie, D. Hayhurst**, Creep rupture of structures, Proc. R. Soc. Lond. A340 (1622) (1974) 323–347.

[11] **A. Dragon**, Plasticity and ductile fracture damage: study of void growth in metals, Eng. Fract. Mech. 21 (4) (1985) 875–885.

[12] **J. Lemaitre**, A continuous damage mechanics model for ductile fracture, J. Eng. Mater. Technol. 107 (1) (1985) 83–89.

[13] **J. Lemaitre**, Evaluation of dissipation and damage in metals under dynamic loading, Proc. Int. Conf. on the Mech. Behavior of Materials I. Japan, (1971) 540–549.

[14] **J.L. Chaboche**, Une loi différentielle d'endommagement de fatigue avec cumulation non linéaire, Revue Française de Mécanique. (50–51) (1974) 71–82.

[15] **A.S. Semenov**, Issledovaniye protsessa obrazovaniya zigzagov pri rasprostraneni ustalostnoy treshchiny metodami kontinualnoy mekhaniki povrezhdeniy [A study of zigzag formation during the fatigue crack propagation by methods of the continuum damage mechanics], Nelineynyye problemy mekhaniki i fiziki deformiruyemogo tverdogo tela, Ed. Chernykh K.F., Sbornik Trudov Nauchnoy Shkoly akademika V.V. Novozhilova, St. Petersburg (2000) 186–211.

[16] **A.S. Semenov**, Mekhanika nelokalnykh kontinualnykh povrezhdeniy [Nonlocal continuum damage mechanics], St. Petersburg Polytechnical State University Journal. No. 1 (48) (2006) 148–159.

[17] **B.E. Melnikov, A.S. Semenov**, Energeticheskaya model nakopleniya povrezhdeniy pri malotsiklovoy ustalosti [An energetic model of damage accumulation during low-cycle fatigue], XXI Peterburgskiy chteniye po problemam prochnosti. K 100-letiyu so dnya rozhdeniya L.M. Kachanova i Yu.N. Rabotnova. Sb. Materialov, St. Petersburg, Solo (2014) 59–61.

[18] **A.S. Semenov, L.B. Getsov**, Kriterii termoustalostnogo razrusheniya monokristal-

licheskih zharoprochnykh splavov i metody opredeleniya ikh parametrov [Thermal fatigue fracture criteria of single crystal heat-resistant alloys and methods for identification of their parameters], *Strength of Materials*. 46(1) (2014) 38–48.

[19] **D. Krajcinovic, G.U. Fonseka**, The continuous damage theory of brittle materials, Parts I and II, *ASME, J. Appl. Mech.* 48 (4) (1981) 809–824.

[20] **A.V. Benin, A.S. Semenov, S.G. Semenov, B.E. Melnikov**, Matematicheskoye modelirovaniye protsessa razrusheniya stsepleniya armatury s betonom. Chast 2. Modeli bez ucheta nesploshnosti soyedineniya [The simulation of bond fracture between reinforcing bars and concrete. Part 2. Models without taking the bond discontinuity into account], *Magazine of Civil Engineering*. 45(1) (2014) 23–40.

[21] **P.A. Pavlov**, Osnovy inzhenernykh raschetov elementov mashin na ustalost i dlitelnyuyu prochnost [A basis of design studies of machine parts for fatigue and long-term strength], Leningrad, Mashinostroyeniye (1988).

[22] **L.M. Kachanov**, Osnovy mekhaniki razrusheniya [A basis of the failure mechanics], Moscow, Nauka (1974).

[23] **Yu.K. Petrenya**, Fiziko-mekhanicheskiye osnovy kontinualnoy mekhaniki povrezhdayemosti [Physical and mechanical foundations of continuum damage mechanics], St. Petersburg, Politekhnik (1997).

[24] **L. Davison, A. Stevens**, Thermomechanical constitution of spalling elastic bodies, *J. Appl. Phys.* 44 (2) (1973) 667–674.

[25] **A.A. Vakulenko, M.L. Kachanov**, Kontinualnaya model sredi s treshchinami [Continuous model of the medium with cracks], *Izv. AN SSSR. Mekh. Tverd. Tela.* (4) (1971) 159–166.

[26] **S. Murakami, N. Ohno**, A continuum theory of creep and creep damage, *Creep in Structures*, A.R.S. Ponter, D.R. Hayhurst (eds.), Berlin, Springer (1981) 422–443.

[27] **J. Betten**, Damage tensors in continuum mechanics, *Journal de Mécanique Théorique et Ap-*

pliqué. 2 (1) (1983) 13–32.

[28] **Yu.N. Radayev**, Tenzornyye mery povrezhdennosti i garmonicheskiy analiz tonkoy struktury povrezhdennosti [Tensor damage measures and a harmonic analysis of the damage fine structure], *Vest. Samarskogo Gos. Un-ta*. No. 2 (8) (1998) 79–105.

[29] **J. Chaboche**, Continuum damage mechanics: Part I, General concepts, *J. Appl. Mech.* 55(1) (1988) 59–64.

[30] **D. Krajcinovic**, Damage mechanics, *Mech. Mater.* 8 (2-3) (1989) 117–197.

[31] **F.A. Leckie, E.T. Onat**, Tensorial nature of damage measuring internal variables, *Physical Non-Linearities in Structural Analysis*, Springer, Berlin (1981) 140–155.

[32] **J.-L. Chaboche**, Le concept de contrainte effective applique a l'elasticite et a la viscoplasticite en presence d'un endommagement anisotrope, *Mechanical Behavior of Anisotropic Solids*, Boehler J.P. (ed.), Martinus Nijhoff, Hague (1982) 737–760.

[33] **J.P. Cordebois, F. Sidoroff**, Damage induced elastic anisotropy, *Mechanical Behavior of Anisotropic Solids*, Boehler J.P. (ed.), Martinus Nijhoff, Hague (1982) 761–774.

[34] **J. Betten**, Net-stress analysis in creep mechanics, *Ing.-Archiv*. 52 (6) (1982) 405–419.

[35] **J. Lemaitre, J. Dufailly**, Damage measurements, *Eng. Fract. Mech.* 28 (5-6) (1987) 643–661.

[36] **N.E. Nikitina**, Akoustouprugost. Opyt prakticheskogo primeneniya [Acoustoelasticity. Practical experience], Nizhniy Novgorod, TALAM (2005)

[37] **A.K. Belyayev, A.M. Lobachev, V.S. Modestov, et al.**, Otsenka velichiny plasticheskikh deformatsiy s ispolzovaniyem akusticheskoy anizotropii [Estimating the plastic strain with the use of acoustic anisotropy], *Mechanics of Solids*. 51(5) (2016) 606–611.

[38] **A.K. Belyaev, V.A. Polyanskiy, A.M. Lobachev, et al.**, Propagation of sound waves in stressed elasto-plastic material, *Proc. Int. Conf. Days on Diffraction*. No. 7756813 (2016) 56–61.

Received 05.03.2017, accepted 22.03. 2017.

THE AUTHOR

SEMENOV Artem S.

Peter the Great St. Petersburg Polytechnic University

29 Politechnicheskaya St., St. Petersburg, 195251, Russian Federation

Semenov.Artem@googlemail.com