



DOI: 10.18721/JPM.10209

УДК 194.3

ТРЕЩИНА МОДЫ III, ПРИБЛИЖАЮЩАЯСЯ К УПРУГОМУ КЛИНОВИДНОМУ ВКЛЮЧЕНИЮ

В.В. Тихомиров

Санкт-Петербургский политехнический университет Петра Великого,
Санкт-Петербург, Российская Федерация

В статье решается задача об антиплоской полубесконечной трещине, которая приближается к упругому клиновидному включению. С помощью интегрального преобразования Меллина и метода Винера – Хопфа получено точное решение указанной задачи. Исследована асимптотика коэффициента интенсивности напряжений K_{III} в вершине трещины при малых расстояниях от нее до вершины включения. Показано, что в зависимости от параметров композиции трещина может быть как устойчивой (коэффициент интенсивности напряжений $K_{III} \rightarrow 0$), так и неустойчивой ($K_{III} \rightarrow \infty$). В случае интерфейса, имеющего угловую точку, при некоторых значениях параметров рост трещины может быть неустойчивым (в отличие от гладкого интерфейса), если трещина подходит из мягкого материала к относительно более жесткому включению. С другой стороны, возможна ситуация, когда $K_{III} \rightarrow 0$, если трещина приближается из жесткой среды к мягкому включению.

Ключевые слова: антиплоская трещина; интерфейс с угловой точкой; клиновидное включение; устойчивость трещины

Ссылка при цитировании: Тихомиров В.В. Трещина моды III, приближающаяся к упругому клиновидному включению // Научно-технические ведомости СПбГПУ. Физико-математические науки. Т. 10. № 2. С. 99–109. DOI: 10.18721/JPM.10209

MODE-III CRACK APPROACHING TO THE WEDGE-SHAPED ELASTIC INCLUSION

V.V. Tikhomirov

Peter the Great St. Petersburg Polytechnic University, St. Petersburg, Russian Federation

The problem on antiplane semi-infinite crack approaching to the elastic wedge-shaped inclusion is considered. The problem has been solved exactly using the Mellin integral transformation and the Wiener-Hopf method. The stress intensity factor of the crack tip K_{III} asymptotic behavior for short distances from the crack to the inclusion vicinity was studied. Depending on the composition parameters, the crack was shown to be stable ($K_{III} \rightarrow 0$) or unstable ($K_{III} \rightarrow \infty$). Providing that the interface has a corner point, the crack growth can be unstable (unlike the smooth interface) for some parameter values even though the crack approaches from the soft material to a relatively harder inclusion. Alternatively, the possibility of $K_{III} \rightarrow 0$ exists provided the crack approaching from the hard material to a soft inclusion.

Key words: antiplane crack; interface with a corner point; wedge-shaped inclusion; crack stability

Citation: V.V. Tikhomirov, Mode-III crack approaching to the wedge-shaped elastic inclusion, St. Petersburg Polytechnical State University Journal. Physics and Mathematics. 10 (2) (2017) 99–109. DOI: 10.18721/JPM.10209

Введение

Одной из важных проблем механики неоднородных структур является проблема взаимодействия трещин с границей раздела (интерфейсом) материалов. В процессе такого взаимодействия растущие трещины могут отклоняться интерфейсом с образованием вторичных трещин расслоения или преломляться при проникновении в другую среду [1, 2].

В рамках плоской задачи, начиная с классической статьи А.Р. Зака и М.Л. Вильямса [3], вопросу взаимодействия трещин с биматериальным интерфейсом посвящено большое число публикаций [1, 2, 4 – 8]. В этих работах рассмотрены плоские трещины конечной или полубесконечной длины, ориентированные перпендикулярно или наклонно к прямолинейному интерфейсу. При этом в статьях [1, 2, 4 – 6] использовалась модель идеального интерфейса, согласно которой граница материалов считается слоем нулевой толщины – линией, на которой упругие модули материалов имеют разрывы, а касательные и нормальные к ней перемещения и напряжения сохраняют непрерывность. В статье [7] рассмотрен неидеальный интерфейс, а в работе [8] границу раздела моделировали слоем функционально-градиентного материала конечной толщины. Особо необходимо выделить статью [9], в которой для полубесконечной трещины моды I, приближающейся к идеальному интерфейсу получено точное решение и определен материальный параметр, контролирующий ее устойчивый рост.

Для антиплоских трещин это направление исследований изучено в значительно меньшей степени. По-видимому, первой работой по данной тематике была статья [10], в которой рассмотрена трещина, заканчивающаяся на идеальном интерфейсе или его пересекающая. В ней показано, что для трещины, вершина которой находится на границе двух разнородных материалов, сингулярность поля напряжений носит степенной характер. Однако ее показатель отличен от стандартного значения 0,5 и определяется первым корнем

характеристического уравнения. Анализ наклонной трещины, заканчивающейся на прямолинейном идеальном интерфейсе, проведен в работе [11]. К. Аткинсон [12] получил асимптотику напряжений в вершине трещины при малых расстояниях до прямолинейного интерфейса. Преломление полубесконечной трещины моды III исследовано В.Д. Кулиевым [13]. Антиплоская трещина конечной длины, расположенная в функционально-градиентном покрытии вблизи функционально-градиентной подложки, рассмотрена в работе [14]. Ф. Эрдоган [15] установил, что для трещины, ортогонально упирающейся в границу двух функционально-градиентных материалов при их идеальном контакте и направлении материального градиента, совпадающем с направлением трещины, показатель сингулярности имеет классическое значение 0,5. Иными словами, показано, что непрерывность упругих модулей обеспечивает в этом случае обычную корневую особенность, как в случае однородного материала.

Основная мотивация настоящей статьи состоит в анализе влияния отсутствия гладкости границы двух разнородных материалов, содержащей угловую точку, а также расположения трещины по отношению к этой границе, на сингулярность поля напряжений вблизи вершины трещины.

С этой целью в работе рассмотрена полубесконечная антиплоская трещина, приближающаяся к клиновидному включению. Методом Винера – Хопфа получено точное решение задачи и найден коэффициент интенсивности напряжений (КИН). Получена асимптотика КИН при стремлении к нулю расстояния между вершиной трещины и вершиной включения. Показано, что при некоторых значениях модулей сдвига материалов и геометрических параметров структуры поведение КИН в вершине трещины, находящейся на достаточно малом расстоянии от включения, может качественно отличаться от случая гладкой границы. В отличие от прямолинейного интерфейса, относительно более жесткое включение может способствовать росту трещины, а более мягкое – оказывать на нее тормозящее действие.

Постановка задачи и сведение ее к уравнению Винера – Хопфа

Рассмотрим полубесконечную трещину моды III, расположенную в матрице $\Omega_2 \cup \Omega_3$, вершина которой находится на расстоянии ε от вершины клиновидного включения Ω_1 (рис. 1). К берегам трещины приложена самоуравновешенная нагрузка $g(r)$. Материалы включения и матрицы считаются однородными и изотропными с модулями сдвига μ_1 и μ_2 , соответственно. Контакт на границах раздела материалов предполагается идеальным.

Геометрию рассматриваемой упругой композиции удобно определять двумя параметрами: углом раствора включения α ($0 < \alpha < 2\pi$) и углом подхода трещины к включению β , т. е. углом между направлением исходной трещины и осью симметрии включения. Очевидно, что

$$|\beta| \leq \pi - \alpha/2.$$

Изменение угла β при фиксированном значении α приводит к повороту включения вокруг его вершины. Таким образом, угол β характеризует взаимную ориентацию трещины и включения. Например, при $\beta = 0$ задача будет симметричной. Значениям

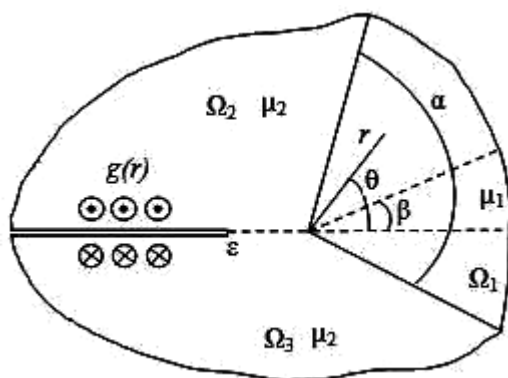


Рис. 1. Схема к постановке задачи: полубесконечная трещина приближается к вершине клиновидного включения:

μ_1, μ_2 – модули сдвига материалов включения и матрицы; Ω_1 – область включения; Ω_2, Ω_3 – области матрицы; ε – расстояние от вершины включения до вершины трещины; α – угол раствора включения, β – угол подхода трещины к включению; r, θ – полярные координаты

$$\beta = \pm(\pi - \alpha/2)$$

соответствует интерфейсная трещина, а значениям $\beta = \pm\alpha/2$ – случаи, когда трещина подходит к включению вдоль линии границы раздела фаз.

Задача сводится к решению уравнений равновесия в каждой из областей Ω_k :

$$\frac{\partial^2 w_k}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 w_k}{\partial \theta^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial w_k}{\partial r} = 0 \quad (k = 1, 2, 3), \quad (1)$$

где r, θ – полярные координаты, w_k – перемещения вдоль оси z .

При этом налагаются условия идеального контакта материалов:

$$w_1 = w_2, \quad \tau_{\theta z1} = \tau_{\theta z2} \quad \text{при} \quad \theta = \beta + \alpha/2, \quad (2)$$

$$w_1 = w_3, \quad \tau_{\theta z1} = \tau_{\theta z3} \quad \text{при} \quad \theta = \beta - \alpha/2$$

($\tau_{\theta zk} = \mu_k r^{-1} \partial w_k / \partial \theta$ – касательные напряжения), а также условия на линии трещины:

$$\tau_{\theta z2}(r, \pi) = \tau_{\theta z3}(r, -\pi) = g(r) \quad (\varepsilon \leq r < \infty); \quad (3)$$

$$\tau_{\theta z2}(r, \pi) = \tau_{\theta z3}(r, -\pi) = \tau(r);$$

$$w_2(r, \pi) = w_3(r, -\pi) \quad (0 \leq r \leq \varepsilon), \quad (4)$$

где $\tau(r)$ – неизвестная функция.

Решение задачи ищем в виде интегралов Меллина:

$$w_k(r, \theta) = \frac{1}{2\pi i} \int_L W_k(p, \theta) r^{-p} dp, \quad (5)$$

$$\tau_{\theta zk}(r, \theta) = \frac{1}{2\pi i} \int_L T_{\theta zk}(p, \theta) r^{-p-1} dp \quad (k = 1, 2, 3);$$

при этом трансформанты перемещений и напряжений определяются следующими формулами:

$$W_k(p, \theta) = A_k(p) \sin p\theta + B_k(p) \cos p\theta, \quad (6)$$

$$T_{\theta zk}(p, \theta) = \mu_k p [A_k(p) \cos p\theta - B_k(p) \sin p\theta]$$

$$(\mu_3 = \mu_2).$$

Ввиду условий регулярности решения при $r \rightarrow 0$ и $r \rightarrow \infty$, контур интегрирования L расположен параллельно мнимой оси в полосе

$$-\delta_1 < \text{Re } p < \delta_2 \quad (\delta_1, \delta_2 > 0).$$

Из условий (3) и (4) получаем равенства

$$T_{0z2}(p, \pi) = T_{0z3}(p, -\pi) = [T_+(p) + G_-(p)]\varepsilon^{p+1}, \quad (7)$$

$$-p[W_2(p, \pi) - W_3(p, -\pi)] = U_-(p)\varepsilon^p,$$

где

$$T_+(p) = \int_0^1 \tau(\varepsilon\rho)\rho^p d\rho,$$

$$G_-(p) = \int_1^\infty g(\varepsilon\rho)\rho^p d\rho, \quad (8)$$

$$U_-(p) = \int_1^\infty \frac{\partial}{\partial \rho} [w_2(\varepsilon\rho, \pi) - w_3(\varepsilon\rho, -\pi)]\rho^p d\rho.$$

Функции $G_-(p)$ и $U_-(p)$ регулярны и не имеют нулей в левой от контура L полуплоскости Ω_- , а $T_+(p)$ — в правой полуплоскости Ω_+ [16].

Подставляем выражения (6) в левые части равенств (7) и в условия (2), преобразованные по Меллину. После исключения величин $A_k(p)$ и $B_k(p)$ приходим к уравнению Винера — Хопфа:

$$F(p)[T_+(p) + G_-(p)] + \frac{\mu_2}{2\varepsilon} U_-(p) = 0 \quad (p \in L). \quad (9)$$

Здесь в качестве контура L может быть взята мнимая ось, а функция $F(p)$ имеет вид

$$F(p) = f(p)/\Delta(p), \quad (10)$$

$$f(p) = 2[\sin^2(\pi p) - m^2 \sin^2((\pi - \alpha)p)], \quad (11)$$

$$\Delta(p) = \sin(2\pi p) + 2m \sin(\alpha p) \cos(2\beta p) - m^2 \sin[2(\pi - \alpha)p]. \quad (12)$$

Упругие свойства композиции отражены в этих формулах через одну биупругую постоянную m :

$$m = (\mu_1 - \mu_2)/(\mu_1 + \mu_2) = (\mu - 1)/(\mu + 1),$$

где $\mu = \mu_1/\mu_2$ представляет собой относительную жесткость включения ($0 \leq \mu < \infty$).

При всех сочетаниях модулей сдвига материалов эта величина удовлетворяет неравенству $|m| \leq 1$. Если материал включения является более жестким, по сравнению с материалом матрицы, то $0 < m < 1$; в противном случае (для мягкого включения) биупругая постоянная лежит в интервале $-1 < m < 0$. Значение $m = 0$ отвечает одно-

родной среде, а значения $m = \pm 1$ определяют абсолютно твердое включение и клиновидный вырез.

Решение уравнения Винера — Хопфа

Представим функцию (10) в виде

$$F(p) = p \Phi(p)/X(p),$$

$$X(p) = p \operatorname{ctg}(\pi p), \quad (13)$$

$$\Phi(p) = [1 - m^2 \sin^2[(\pi - \alpha)p] \sin^{-2}(\pi p)] \times$$

$$\times [1 + 2m \sin(\alpha p) \cos(2\beta p) \sin^{-1}(2\pi p) - m^2 \sin[2(\pi - \alpha)p] \sin^{-1}(2\pi p)]^{-1}. \quad (14)$$

Факторизация функции $X(p)$ осуществляется элементарно [16]:

$$X(p) = \frac{X_+(p)}{X_-(p)}, \quad X_+(p) = \frac{\Gamma(1+p)}{\Gamma(1/2+p)},$$

$$X_-(p) = \frac{\Gamma(1/2-p)}{\Gamma(1-p)},$$

где $\Gamma(x)$ — гамма-функция.

На мнимой оси при $p = it$ функция (14) непрерывна, не имеет нулей и полюсов, ее индекс равен нулю, и при $|t| \rightarrow \infty$ она экспоненциально стремится к единице, если

$$\alpha + 2\beta < 2\pi.$$

Поэтому, в соответствии с результатами, полученными в работах [9, 16], справедливы равенства

$$\Phi(p) = \frac{\Phi_+(p)}{\Phi_-(p)},$$

$$\Phi_\pm(p) = \exp \left[-\frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{\ln \Phi(t)}{t-p} dt \right] \quad (p \notin L). \quad (15)$$

С учетом четности функции $\Phi(p)$, аналитические функции в областях Ω_+ и Ω_- могут быть представлены в форме

$$\Phi_\pm(p) = \exp \left[\frac{p}{\pi} \int_0^\infty \frac{\ln \Phi(i\xi)}{\xi^2 + p^2} d\xi \right].$$

В результате использования формул (13) — (15), перегруппировки слагаемых в уравнениях (9), а также применения теоремы Лиувилля [16], получаем:

$$\Phi_+(p)X_+^{-1}(p)T_+(p) + Q_+(p) =$$

$$= -\frac{\mu_2}{2\varepsilon p} U_-(p)\Phi_-(p)X_-^{-1}(p) - Q_-(p) = J(p), \quad (16)$$

где

$$Q_{\pm}(p) = \pm \frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{Q(t)}{t-p} dt, \quad (17)$$

$$Q(t) = \frac{1}{t} \Phi_{-}(t) X_{-}^{-1}(t) F(t) G_{-}(t).$$

Оценивая члены в равенстве (16) при $p \rightarrow \infty$, получаем, что единая аналитическая функция $J(p) = 0$. Тогда из уравнения (16) находим

$$T_{+}(p) = -X_{+}(p) \Phi_{+}^{-1}(p) Q_{+}(p). \quad (18)$$

Учитывая, что при $p \rightarrow \infty$

$$X_{+}(p) \sim \sqrt{p}, \quad Q_{+}(p) \sim \frac{C}{p}, \quad (19)$$

$$C = -\frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{\Phi_{-}(t) G_{-}(t)}{t X_{-}(t)} F(t) dt,$$

получаем асимптотику $T_{+}(p) \sim -C/\sqrt{p}$.

Отсюда по теореме Абелева типа [16] заключаем, что асимптотика напряжений при $r \rightarrow \varepsilon - 0$ имеет вид

$$\tau(r) \sim -\frac{C}{\sqrt{\pi(1-r)}} = -C \sqrt{\frac{\varepsilon}{\pi}} \frac{1}{\sqrt{\varepsilon-r}}. \quad (20)$$

Коэффициент интенсивности напряжений

Определим коэффициент интенсивности напряжений (КИН) в вершине трещины формулой

$$K_{III} = \lim_{r \rightarrow \varepsilon - 0} \sqrt{2\pi(\varepsilon - r)} \tau(r).$$

Тогда, используя асимптотику (20), получаем следующую формулу:

$$K_{III}(\alpha, \beta, \mu, \varepsilon) = -\sqrt{2\varepsilon} C. \quad (21)$$

С целью построения функции Грина будем считать, что к берегам трещины приложены самоуравновешенные сосредоточенные силы T_0 на расстоянии r_0 от ее вершины, т. е.

$$g(r) = T_0 \delta(r - r_0),$$

где $\delta(r)$ – дельта-функция Дирака, а $\varepsilon < r_0 < \infty$.

Тогда, вычисляя по формуле (8) функцию $G_{-}(t)$, совмещая в выражении (19) контур интегрирования с мнимой осью и используя теорему о вычетах в области Ω_{-} ,

согласно формуле (21), будем иметь:

$$K_{III} = -K_{III}^0 \sqrt{\pi(1 - \varepsilon/r_0)} \times \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\Phi_{-}(-p_k) f(p_k)}{p_k X_{-}(-p_k) \Delta'(p_k)} \left(\frac{\varepsilon}{r_0}\right)^{p_k - 1/2}, \quad (22)$$

где

$$K_{III}^0 = T_0 \sqrt{2/[\pi(r_0 - \varepsilon)]}$$

– коэффициент интенсивности напряжений (КИН) в вершине трещины, находящейся в неограниченной однородной среде; штрих означает производную по переменной p , а p_k – положительные нули функции (12).

Корни уравнения

$$\Delta(p) = 0, \quad (23)$$

расположенные в полосе $0 < \text{Re } p < 1$, детально проанализированы в работе [17]. Установлено, что в зависимости от параметров композиции α, β и m , уравнение (23) в этой полосе может иметь один корень $p_1 < 0,5$ или $p_1 > 0,5$, а также два корня:

$$0 < p_1 < 0,5 < p_2 < 1,0$$

или

$$0,5 < p_1 < p_2 < 1,0.$$

На рис. 2 показаны области изменения угловых параметров, при которых первый корень уравнения (23) будет больше или меньше 0,5 для относительно жесткой ($0 < m < 1$) или мягкой ($-1 < m < 0$) среды 1.

Из представления (22) вытекает асимптотика КИН при $\varepsilon \rightarrow 0$:

$$K_{III} \sim -K_{III}^0 \sqrt{\pi(1 - \varepsilon/r_0)} \times \frac{\Phi_{-}(-p_1) f(p_1)}{p_1 X_{-}(-p_1) \Delta'(p_1)} \left(\frac{\varepsilon}{r_0}\right)^{p_1 - 0.5}. \quad (24)$$

Таким образом, поведение КИН при малых расстояниях от вершины трещины до вершины включения определяется величиной первого корня уравнения (23).

Возможны следующие три варианта при $\varepsilon \rightarrow 0$:

если $p_1 < 0,5$, то $K_{III} \rightarrow \infty$;

если $p_1 > 0,5$, то $K_{III} \rightarrow 0$;

если $p_1 = 0,5$, то $K_{III} \rightarrow \text{const}$.

Подобное поведение КИН для трещины моды I, приближающейся к границе

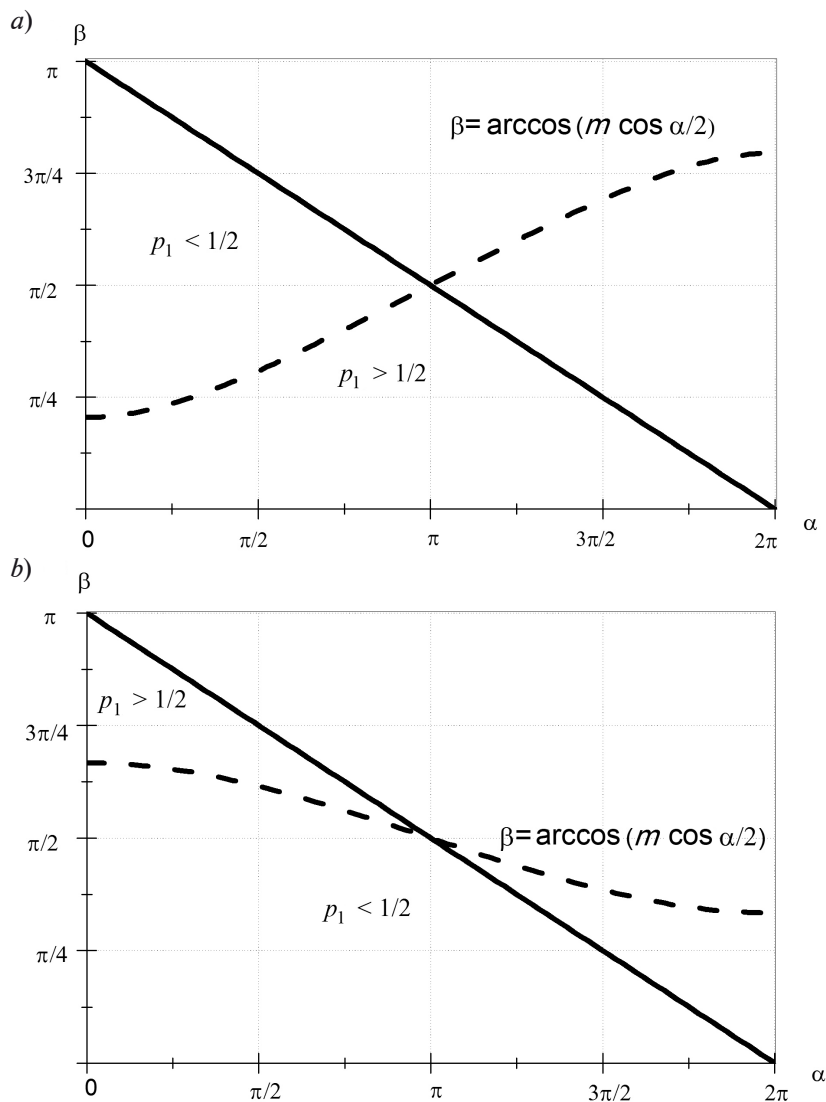


Рис. 2. Области изменения углов α и β , в которых первый корень p_1 уравнения $\Delta(p) = 0$ получается меньшим или большим 0,5 для жесткого (а) и мягкого (б) включений

раздела материалов, отмечалось в работах [1, 5, 9].

В случае симметричной структуры характеристическое уравнение принимает вид

$$\Delta_*(p) = \cos(\pi p) + m \cos[(\pi - \alpha)p] = 0$$

и имеет в интервале $(0, 1)$ единственный корень. При этом для $m > 0$ этот корень превышает 0,5, а для $m < 0$ лежит в интервале $0 < p_1 < 0,5$.

Отсюда вытекает, что если трещина приближается к более мягкой среде, то КИН в ее вершине неограниченно растет и, следо-

вательно, такая трещина является неустойчивой. Если же трещина, находясь в более мягкой среде, подходит к более жесткому включению, то КИН становится исчезающе малым, т. е. жесткое включение тормозит развитие трещины.

На рис. 3 показана зависимость нормализованной величины КИН $N = K_{III} / K_{III}^0$ от относительного расстояния ε/r_0 для жесткого и мягкого включений.

Приведенные данные показывают, что когда трещина находится в мягком материале (рис. 3, а), коэффициент интенсивности напряжений меньше, чем КИН в

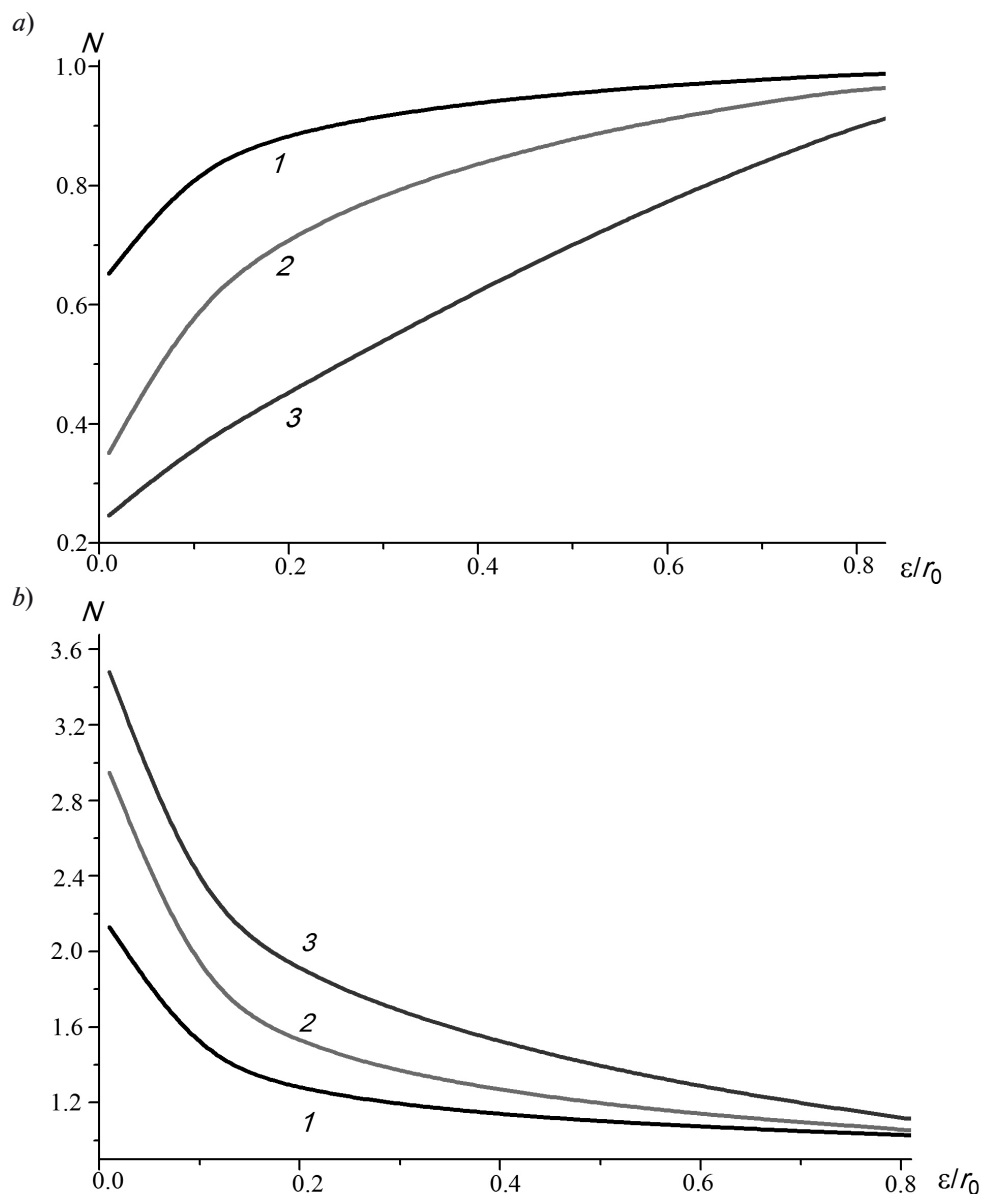


Рис. 3. Зависимость нормализованной величины КИН в вершине трещины, приближающейся к жесткому ($\mu = 4$) (a) и мягкому ($\mu = 0,25$) (b) включениям, при различных углах α его раствора и $\beta = 0$, от относительного расстояния ε/r_0 ; $\alpha = \pi/2$ (1), π (2), $3\pi/2$ (3)

однородной среде, и он снижается с уменьшением расстояния от вершины трещины до интерфейса.

Если же трещина находится в жестком материале (рис. 3, b), то зависимость КИН от относительного расстояния противоположная. Аналогичное изменение КИН в плоской задаче с прямолинейным интерфейсом было получено на основе численной процедуры в работе [18].

В случае несимметричной структуры ($\beta \neq 0$) поведение КИН при малых ε оказывается не столь однозначным.

Если угол раствора включения $\alpha \in (\pi, 2\pi)$, то зависимость КИН от ε/r_0 будет аналогична симметричному случаю, т. е. для жесткого включения рост трещины всегда будет устойчивым, а для мягкого — неустойчивым.

Если трещина приближается из мяг-

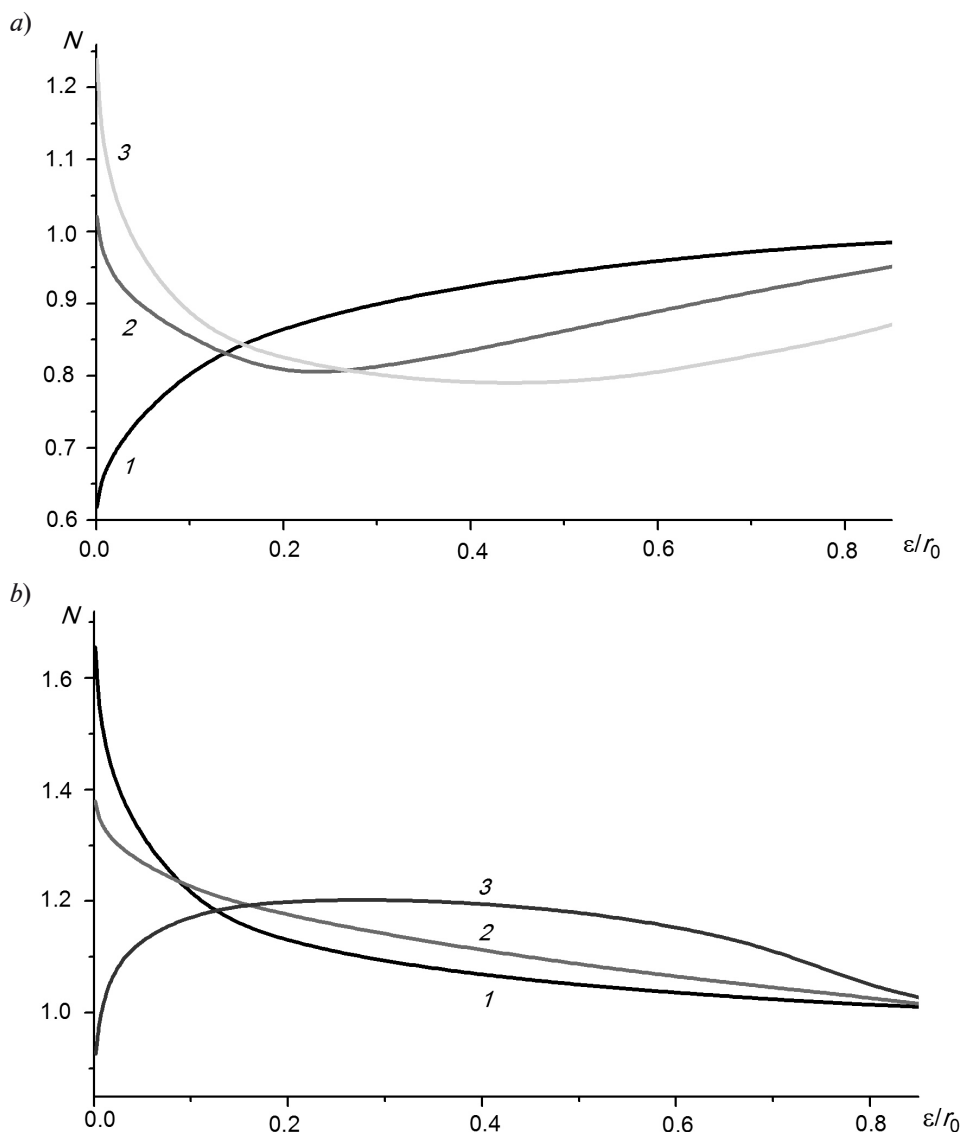


Рис. 4. Зависимости нормализованной величины КИН в вершине трещины, приближающейся к жесткому ($\mu = 4$) (a) и мягкому ($\mu = 0,5$) (b) включениям с углом раствора $\alpha = \pi/2$ и различных значениях угла β , от относительного расстояния ε/r_0 ; $\beta = \pi/4$ (1), $\pi/2$ (2), $2\pi/3$ (3)

кой среды к жесткому включению с углом $0 < \alpha < \pi$, то при выполнении неравенства

$$\cos \beta > m \cos(\alpha/2) \quad (25)$$

характеристическое уравнение (23) обязательно имеет первый корень $p_1 < 0,5$ и, следовательно, $K_{III} \rightarrow \infty$ при $\varepsilon \rightarrow 0$.

В случае нарушения этого неравенства $K_{III} \rightarrow 0$ при $\varepsilon \rightarrow 0$, и трещина будет устойчивой. Если же трещина приближается из жесткой среды к мягкому включе-

нию, то ситуация будет противоположной: при параметрах композиции, удовлетворяющих неравенству (25), трещина имеет устойчивый рост, а при параметрах, когда неравенство (25) не выполняется, $K_{III} \rightarrow \infty$ при $\varepsilon \rightarrow 0$, и рост трещины будет неустойчивым.

Эти выводы проиллюстрированы для жесткого и мягкого включений на рис. 4 (кривые 2 и 3 на рис. 4, a, кривая 3 на рис. 4, b).

Сингулярность напряжений в угловой точке включения

На основе равенств (7) для напряжений на линии трещины имеем:

$$\begin{aligned} \tau_{\theta z_2}(r, \pi - 0) &= \tau_{\theta z_3}(r, -\pi + 0) = \tau_{\theta z}(r) = \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int_L [T_+(p) + G_-(p)] \left(\frac{r}{\varepsilon}\right)^{-p-1} dp. \end{aligned} \quad (26)$$

Используя формулы (13), (15), (17) и (18), получаем равенство

$$T_+(p) + G_-(p) = \frac{p}{F(p)} \frac{X_-(p)Q_-(p)}{\Phi_-(p)}.$$

С учетом этого представления, напряжения (26) принимают вид

$$\tau_{\theta z}(r) = \frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{p\Delta(p)}{f(p)} \frac{X_-(p)Q_-(p)}{\Phi_-(p)} \left(\frac{r}{\varepsilon}\right)^{-p-1} dp. \quad (27)$$

На основе формулы (11) представим характеристическое уравнение, определяющее полюсы подынтегральной функции, в следующем виде:

$$f(p) = 2f^+(p)f^-(p) = 0,$$

$$f^\pm(p) = \sin(\pi p) \pm m \sin[(\pi - \alpha)p].$$

Поскольку при замене m на $-m$ функция $f^+(p)$ переходит в $f^-(p)$, достаточно рассмотреть, например, только корни уравнения

$$f^+(p) = 0. \quad (28)$$

Кроме того, имеет место следующее равенство:

$$f^+(p, -m, 2\pi - \alpha) = f^+(p, m, \alpha).$$

Отсюда вытекает, что необходимо проанализировать корни t_k уравнения (28), например, только для мягкого включения ($m < 0$) при $0 < \alpha \leq \pi$. Тогда значения корней для жесткого включения ($m > 0$) получаются с помощью замены α на $2\pi - \alpha$.

Анализ показывает, что уравнение (28) имеет в интервале $(0,5, 1,0)$ единственный вещественный корень при $0 < \alpha < \pi$ для случая мягкого включения, и при $\pi < \alpha < 2\pi$ для случая жесткого включения.

Далее совмещаем контур интегриро-

вания в выражении (27) с мнимой осью, применяем теорему о вычетах и учитываем, что полюсы подынтегральной функции в области Ω_- определяются отрицательными нулями функции $f(p)$. Тогда получим следующее выражение:

$$\tau_{\theta z}(r) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{t_k \Delta(t_k)}{f'(-t_k)} \frac{X_-(-t_k)Q_-(-t_k)}{\Phi_-(-t_k)} \left(\frac{r}{\varepsilon}\right)^{t_k-1}. \quad (29)$$

Очевидно, что асимптотика напряжений при $r \rightarrow 0$ определяется первым членом ряда (29), т. е. первым положительным нулем функции $f(p)$. В случае композиции несимметричного строения ($\beta \neq 0$) сингулярность напряжений в угловой точке включения является слабой и имеет место при любом значении $\alpha \neq \pi$ и любой относительной жесткости $\mu \neq 1$.

Поскольку функция, входящая в интеграл (27), в симметричной задаче (когда $\beta = 0$) принимает вид

$$\frac{\Delta(p)}{f(p)} = \frac{\cos(\pi p) + m \cos[(\pi - \alpha)p]}{\sin(\pi p) + m \sin[(\pi - \alpha)p]},$$

сингулярность напряжений при $r \rightarrow 0$ возникает только тогда, когда угол, определяющий область с более жестким материалом, превышает 180° .

Заключение

В статье на основе интегрального преобразования Меллина и метода Винера – Хопфа получено точное решение задачи об антиплоской трещине, приближающейся к вершине клиновидного включения. Проанализировано поведение коэффициента интенсивности напряжений в вершине трещины при уменьшении расстояния до вершины включения. Показано, что, в отличие от случая гладкой границы раздела материалов, при некоторых значениях параметров композиции трещина может быть неустойчивой для жесткого включения и устойчивой, если включение мягкое. Исследована сингулярность напряжений в угловой точке включения и показано, что эта сингулярность может быть только слабой.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **He M.Y., Hutchinson J.W.** Crack deflection at an interface between dissimilar elastic materials // *Int. J. Solids Struct.* 1989. Vol. 25. No. 9. Pp. 1053–1067.
2. **Martin E., Poitou B., Leguillon D., Gatt J.M.** Competition between deflection and penetration at an interface in the vicinity of a main crack // *Int. J. Fract.* 2008. Vol. 151. No. 2. Pp. 247–268.
3. **Zak A.R., Williams M.L.** Crack point singularities at a bimaterial interface // *Trans. ASME. Ser. E. J. Appl. Mech.* 1963. Vol. 30. No. 1. Pp. 142–144.
4. **Erdogan F., Kaya A.C., Joseph P.F.** The crack problem in bonded nonhomogeneous materials // *Trans. ASME. Ser. E. J. Appl. Mech.* 1991. Vol. 58. No. 2. Pp. 410–418.
5. **Romeo A., Ballarini R.** A crack very close to a biomaterial interface // *Trans. ASME. Ser. E. J. Appl. Mech.* 1995. Vol. 62. No. 3. Pp. 614–619.
6. **Chang J., Xu J.Q.** The singular stress field and stress intensity factors of a crack terminating at a bimaterial interface // *Int. J. Mech. Sciences.* 2007. Vol. 49. No. 7. Pp. 888–897.
7. **Zhong X.-C., Li X.-F., Lee K.Y.** Analysis of a mode-I crack perpendicular to an imperfect interface // *Int. J. Solids Struct.* 2009. Vol. 46. No. 6. Pp. 1456–1463.
8. **Choi H.J.** Thermoelastic problem of steady-state heat flows disturbed by a crack at an arbitrary angle to the graded interfacial zone in bonded materials // *Int. J. Solids Struct.* 2011. Vol. 48. No. 6. Pp. 893–909.
9. **Nuller B., Rvkin M., Chudnovsky A.A.** Closed form solution for a crack approaching an interface // *J. Mech. Mat. Struct.* 2006. Vol. 1. No. 8. Pp. 1405–1423.
10. **Erdogan F., Cook T.S.** Antiplane shear crack terminating at and going through a bimaterial interface // *Int. J. Fract.* 1974. Vol. 10. No. 2. Pp. 227–240.
11. **Fenner D.N.** Stress singularities in composite materials with an arbitrary oriented crack meeting interface // *Int. J. Fract.* 1976. Vol. 12. No. 5. Pp. 705–721.
12. **Atkinson C.** On stress intensity factor associated with crack interacting with an interface between two elastic media // *Int. J. Eng. Science.* 1975. Vol. 13. No. 6. Pp. 489–504.
13. **Кулиев В.Д.** Преломление трещины продольного сдвига // *ДАН СССР.* 1979. Т. 249. № 2. С. 315–318.
14. **Li Y.D., Lee K.Y.** An anti-plane crack perpendicular to the weak/micro- discontinuous interface in a bi-FGM structure with exponential and linear non-homogeneities // *Int. J. Fract.* 2007. Vol. 147. No 4. Pp. 203–211.
15. **Erdogan F.** The crack problem for bonded nonhomogeneous materials under antiplane shear loading // *Trans. ASME. Ser. E. J. Appl. Mech.* 1985. Vol. 52. No. 4. Pp. 823–828.
16. **Noble B.** Method based on the Wiener-Hopf technique for solution of partial differential equations. Oxford: Pergamon Press, 1958.
17. **Тихомиров В.В.** Трещина продольного сдвига, упирающаяся в клиновидное упругое включение // *Научно-технические ведомости СПбГПУ. Физико-математические науки.* 2014. № 2 (194). С. 110–119.
18. **Chen S.H., Wang T.C., Kao-Walter Sh.** A crack perpendicular to the bimaterial interface in finite solid // *Int. J. Solids Struct.* 2003. Vol. 40. No. 11. Pp. 2731–2755.

Статья поступила в редакцию 19.03.2017, принята к публикации 07.04.2017.

СВЕДЕНИЯ ОБ АВТОРЕ

ТИХОМИРОВ Виктор Васильевич — кандидат физико-математических наук, заместитель директора по образовательной деятельности Санкт-Петербургского политехнического университета Петра Великого, Санкт-Петербург, Российская Федерация.

195251, Российская Федерация, г. Санкт-Петербург, Политехническая ул., 29
victikh@mail.ru

REFERENCES

- [1] **M.Y. He, J.W. Hutchinson,** Crack deflection at an interface between dissimilar elastic materials, *Int. J. Solids Struct.* 25 (9) (1989) 1053–1067.
- [2] **E. Martin, B. Poitou, D. Leguillon, J.M. Gatt,** Competition between deflection and penetration at an interface in the vicinity of a main crack, *Int. J. Fract.* 151 (2) (2008) 247–268.
- [3] **A.R. Zak, M.L. Williams,** Crack point singularities at a bimaterial interface, *Trans. ASME. Ser. E, J. Appl. Mech.* 30 (1) (1963) 142–144.
- [4] **F. Erdogan, A.C. Kaya, P.F. Joseph,** The crack problem in bonded nonhomogeneous materials, *Trans. ASME. Ser. E., J. Appl. Mech.* 58 (2) (1991) 410–418.
- [5] **A. Romeo, R. Ballarini,** A crack very close to a biomaterial interface, *Trans. ASME. Ser. E.,*

J. Appl. Mech. 62 (3) (1995) 614–619.

[6] **J. Chang, J.Q. Xu**, The singular stress field and stress intensity factors of a crack terminating at a bimaterial interface, Int. J. Mech. Sci. 49 (7) (2007) 888–897.

[7] **X.-C. Zhong, X.-F. Li, K.Y. Lee**, Analysis of a mode-I crack perpendicular to an imperfect interface, Int. J. Solids Struct. 46 (6) (2009) 1456–1463.

[8] **H.J. Choi**, Thermoelastic problem of steady-state heat flows disturbed by a crack at an arbitrary angle to the graded interfacial zone in bonded materials, Int. J. Solids Struct. 48 (6) (2011) 893–909.

[9] **B. Nuller, M. Ryvkin, A.A. Chudnovsky**, Closed form solution for a crack approaching an interface, J. Mech. Mat. Struct. 1 (8) (2006) 1405–1423.

[10] **F. Erdogan, T.S. Cook**, Antiplane shear crack terminating at and going through a bimaterial interface, Int. J. Fract. 10 (2) (1974) 227–240.

[11] **D.N. Fenner**, Stress singularities in composite materials with an arbitrary oriented crack meeting interface, Int. J. Fract. 12 (5) (1976) 705–721.

[12] **C. Atkinson**, On stress intensity factor associated with crack interacting with an interface

between two elastic media, Int. J. Eng. Science. 13 (6) (1975) 489–504.

[13] **V.D. Kuliyeu**, Prelomleniye treshchiny prodolnogo sdviga [Longitudinal shear crack breaking], DAN SSSR. 249 (2) (1979) 315–318.

[14] **Y.D. Li, K.Y. Lee**, An antiplane crack perpendicular to the weak/micro- discontinuous interface in a bi-FGM structure with exponential and linear non-homogeneities, Int. J. Fract. 147(4) (2007) 203–211.

[15] **F. Erdogan**, The crack problem for bonded nonhomogeneous materials under antiplane shear loading, Trans. ASME. Ser. E., J. Appl. Mech. 52(4) (1985) 823–828.

[16] **B. Noble**, Method based on the Wiener – Hopf technique for solution of partial differential equations, Oxford, Pergamon Press (1958).

[17] **V.V. Tikhomirov**, Longitudinal shear crack terminating at a wedge-shaped elastic inclusion, St. Petersburg Polytechnical State University Journal. Physics and Mathematics. No. 2 (194) (2014) 110 – 119.

[18] **S.H. Chen, T.C. Wang, Sh. Kao-Walter**, A crack perpendicular to the bimaterial interface in finite solid, Int. J. Solids Struct. 40 (11) (2003) 2731 – 2755.

Received 19.03.2017, accepted 07.04.2017.

THE AUTHOR

TIKHOMIROV Victor V.

Peter the Great St. Petersburg Polytechnic University

29 Politechnicheskaya St., St. Petersburg, 195251, Russian Federation

victikh@mail.ru