

DOI: 10.18721/JPM.12104
УДК 517.946

КОЛЕБАНИЯ ПОЛУОГРАНИЧЕННОЙ СТРУНЫ, ИНИЦИИРОВАННЫЕ ГРАНИЧНЫМ РЕЖИМОМ

Д.С. Аниконов, Д.С. Коновалова

Институт математики им. С.Л. Соболева СО РАН,
г. Новосибирск, Российская Федерация

Рассматриваются поперечные колебания полугораниченной струны, состоящей из различных материалов. Математической моделью служит однородное волновое уравнение с кусочно-постоянными коэффициентами. В качестве первого этапа исследуется решение этого уравнения с нулевыми данными Коши. Доказывается существование и единственность обобщенного решения поставленной задачи, и анализируются его свойства. Отмечается специфичность полученных выводов, в частности, указываются зоны распространения колебаний и их отсутствия. Полученные результаты имеют конструктивный характер и могут служить основой создания численного алгоритма. Актуальность подобных задач вызвана их использованием в теории зондирования неоднородных сред физическими сигналами.

Ключевые слова: дифференциальное уравнение, разрывный коэффициент, зондирование неизвестных сред, волновой процесс

Ссылка при цитировании: Аниконов Д.С., Коновалова Д.С. Колебания полугораниченной струны, инициированные граничным режимом // Научно-технические ведомости СПбГПУ. Физико-математические науки. 2019. Т. 12. № 1. С. 50–60. DOI: 10.18721/JPM.12104

SEMI-BOUNDED STRING'S VIBRATIONS INITIATED BY THE BOUNDARY REGIME

D.S. Anikonov, D.S. Konovalova

Sobolev Institute of Mathematics, Novosibirsk, Russian Federation

Transverse vibrations of a semi-bounded string consisting of different materials are considered. The homogeneous wave equation with piecewise constant coefficients stand duty as a mathematical model. As a first step, we have investigated the solution of this equation with zero Cauchy data. The existence and uniqueness of the generalized solution of the problem were proved and the properties of the solution were analyzed. The specificity of the obtained conclusions was discussed, in particular, the zones of oscillations' propagation and of their absence were demonstrated. The obtained results are of a constructive character and can serve as a basis for the creation of a numerical algorithm. The importance of such problems is caused by their use in the theory of sensing inhomogeneous media by physical signals.

Keywords: differential equation, discontinuous coefficient, sounding of unknown media, wave process

Citation: D.S. Anikonov, D.S. Konovalova, Semi-bounded string's vibrations initiated by the boundary regime, St. Petersburg Polytechnical State University Journal. Physics and Mathematics. 12 (1) (2019) 50–60. DOI: 10.18721/JPM.12104

Введение

В настоящей работе исследуются решения дифференциальных уравнений с разрывными коэффициентами при старших производных. Это научное направление пока еще находится в стадии становления, и по нему имеются лишь разрозненные результаты. Вместе с тем мы можем указать на ряд работ подобного типа [1–13], из которых наиболее близкими к настоящей статье являются [8–10].

Суть данной проблемы состоит в следующем. На плоскости переменных (x, t) в первом квадранте

$$\mathbb{R}_2^{++} = \{(x, t), x > 0, t > 0\}$$

рассматривается уравнение

$$\alpha(x) \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial t^2} - \beta(x) \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2} = 0, \quad (1)$$

$$(x, t) \in \mathbb{R}_2^{++}, \alpha(x), \beta(x) > 0$$

и дополнительные условия

$$u(0, t) = \mu(t), u(x, 0) = 0, u_t(x, 0) = 0. \quad (2)$$

Предполагается, что функция $\mu(t)$ имеет непрерывные производные до второго порядка включительно и выполняются условия согласования

$$\mu(0) = \mu'(0) = \mu''(0) = 0, \quad (3)$$

Эти условия совпадают с традиционными требованиями, которые сформулированы в монографии [11].

Для удобства считаем функцию $\mu(t)$ продолженной нулем при $t < 0$. Задача (1), (2) состоит в нахождении функции $u(x, t)$ при заданных функциях $\alpha(x), \beta(x), \mu(t)$. Формулы для ее решения при постоянных α, β хорошо известны и приводятся, например, в монографии [11].

Мы рассматриваем случай, который ранее не изучался; это когда функции $\alpha(x), \beta(x)$ кусочно-постоянны:

$$\alpha(x) = \alpha_1, 0 \leq x \leq x_0, \alpha(x) = \alpha_2, x > x_0;$$

$$\beta(x) = \beta_1, 0 \leq x \leq x_0, \beta(x) = \beta_2, x > x_0,$$

где $x_0, \alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2$ – положительные постоянные числа.

Равенства (1), (2), в частности, представляют собой математическую модель процесса поперечных колебаний полуограниченной струны. При этом колебания вызваны в данном случае только поведением

граничной точки ($x = 0$). Как показал предварительный анализ, более общая задача с ненулевой правой частью уравнения (1) и ненулевыми данными Коши ($u(x, 0), u_t(x, 0)$) потребует весьма громоздкого исследования, которое, вероятно, будет выполнено авторами в дальнейшем поэтапно.

Также отметим, что рассмотренная задача (1), (2) довольно специфична как по возможности использования сравнительно простого метода, так и по выводам. В частности, будет указана зона распространения колебаний и зона их отсутствия. Структура этих зон определяется значениями разрывных коэффициентов уравнения (1) и отличается от классического случая.

Принятые обозначения и определения

Для первых производных произвольной функции $\chi(x, t)$, дифференцируемой по x и по t , кроме традиционных обозначений, будем использовать также запись $\partial_1 \chi(x, t), \partial_2 \chi(x, t)$

Введем в рассмотрение следующие единичные векторы, имеющие характеристические направления:

$$\omega_1^+ = \left(\frac{\sqrt{\beta_1}}{\sqrt{\alpha_1 + \beta_1}}, \frac{\sqrt{\alpha_1}}{\alpha_1 + \beta_1} \right),$$

$$\omega_1^- = \left(\frac{-\sqrt{\beta_1}}{\sqrt{\alpha_1 + \beta_1}}, \frac{\sqrt{\alpha_1}}{\alpha_1 + \beta_1} \right),$$

$$\omega_2^+ = \left(\frac{\sqrt{\beta_2}}{\sqrt{\alpha_2 + \beta_2}}, \frac{\sqrt{\alpha_2}}{\alpha_2 + \beta_2} \right),$$

$$\omega_2^- = \left(\frac{-\sqrt{\beta_2}}{\sqrt{\alpha_2 + \beta_2}}, \frac{\sqrt{\alpha_2}}{\alpha_2 + \beta_2} \right).$$

Обозначим

$$\gamma_1 = \sqrt{\alpha_1 \beta_1}, \gamma_2 = \sqrt{\alpha_2 \beta_2},$$

$$a_1 = \sqrt{\beta_1} / \sqrt{\alpha_1},$$

$$a_2 = \sqrt{\beta_2} / \sqrt{\alpha_2}.$$

В квадранте \mathbb{R}_2^{++} выделяются следующие множества:

$$G_1 = \{(x, t) : 0 < x < x_0, t > 0\},$$

$$G_2 = \{(x, t) : x > x_0, t > 0\},$$

$$G_0 = G_1 \cup G_2.$$

Далее в нашей работе широко исполь-

зуются криволинейные интегралы второго рода. Для кривой с началом в точке $P = (p_1, p_2)$ и концом в точке $Q = (q_1, q_2)$ используется обозначение (PQ) . Если кривая является границей односвязной ограниченной области, то принята ориентация, когда при перемещении точки по кривой область располагается слева. Считаем, что точки P и Q принадлежат кривой (PQ) .

Обобщенное решение ищется в классе функций $u(x, t)$, удовлетворяющих условиям (2) и уравнению (1) в областях G_1 и G_2 . В целом $u(x, t)$ считается непрерывной при $x \geq 0$, $t \geq 0$ и имеющей частные производные в областях G_1 и G_2 , равномерно непрерывные в любой ограниченной подобласти в G_1 и G_2 . Кроме того, предполагается, что на луче (x_0, t) , $t > 0$ выполнены условия сопряжения:

$$\lim_{x \rightarrow x_0 - 0} \partial_2 u(x, t) = \lim_{x \rightarrow x_0 + 0} \partial_2 u(x, t), \quad (4)$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0 - 0} \beta_1 \partial_1 u(x, t) = \lim_{x \rightarrow x_0 + 0} \beta_2 \partial_1 u(x, t), \quad (5)$$

которые являются следствиями закона Гука и закона сохранения импульса.

В книге [11] рассматривается задача, совпадающая по смыслу с задачей (1), (2), сформулированной нами, но там введены другие ограничения. А именно – вместо уравнения (1) исследуется интегро-дифференциальное уравнение относительно функции $u(x, t)$, записанное через криволинейный интеграл второго рода:

$$J(G) = \int_{\partial G} \alpha(\xi) \partial_2 u(\xi, \tau) d\xi + \beta(\xi) \partial_1 u(\xi, \tau) d\tau = 0. \quad (6)$$

В равенстве (6) аргумент G – это произвольная односвязная область в \mathbb{R}_2^+ , а ее граница ∂G – кусочно-гладкая линия класса C^1 . Функция $u(x, t)$ непрерывна в \mathbb{R}_2^+ , а ее частные производные $\partial_1 u(x, t)$, $\partial_2 u(x, t)$ – кусочно-непрерывны с возможными разрывами первого рода на некоторых линиях. При этом допускается наличие разрывов $\partial_1 u(x, t)$, $\partial_2 u(x, t)$ внутри G , а также возможен случай, когда линия разрывов совпадает с частью ∂G . Тогда в качестве производных $\partial_1 u(x, t)$, $\partial_2 u(x, t)$ берутся их предельные значения изнутри области G . Подчеркнем, что уравнение (6) есть следствие закона Гука и закона сохранения импульса. Соответственно и выводы, полученные из равенства (6),

также следуют из этих законов.

Уравнение (6) с условием (2) будем называть задачей (6), (2). Отметим, что в монографии [11] авторы при постановке задачи допускают наличие переменных $\alpha(x)$, $\beta(x)$ в уравнении (6), однако все выводы они делают только для постоянных коэффициентов.

Построение составных характеристик, исходящих из точки области G_1

Далее в работе будет неоднократно использоваться следующее простое утверждение для функций $u(x, t)$, описанных в задаче (6), (2).

Лемма. Верны следующие равенства:

$$\int_{(PQ)} \alpha(\xi) \partial_2 u(\xi, \tau) d\xi + \beta(\xi) \partial_1 u(\xi, \tau) d\tau = \gamma_i(u(Q) - u(P)), \quad (7)$$

$$(PQ) \subset \overline{G}_i, (PQ) = \{P - \tau \omega_i^+, \tau \in [0, |Q - P|]\}, \\ i = 1, 2;$$

$$\int_{(PQ)} \alpha(\xi) \partial_2 u(\xi, \tau) d\xi + \beta(\xi) \partial_1 u(\xi, \tau) d\tau = -\gamma_i(u(Q) - u(P)), \quad (8)$$

$$(PQ) \subset \overline{G}_i, (PQ) = \{P + \tau \omega_i^-, \tau \in [0, |Q - P|]\}, \\ i = 1, 2.$$

Доказательство. Используем в левой части формулы (7) представление

$$(PQ) = \left(p_1 - s \frac{\sqrt{\beta_i}}{\sqrt{\alpha_i + \beta_i}}, p_2 - s \frac{\sqrt{\alpha_i}}{\sqrt{\alpha_i + \beta_i}} \right), \\ 0 \leq s \leq |Q - P|,$$

и таким путем перейдем к обычному определенному интегралу:

$$\int_{(PQ)} \alpha_i \partial_2 u(\xi, \tau) d\xi + \beta_i \partial_1 u(\xi, \tau) d\tau = \\ = \int_0^{|QP|} \left[\alpha_i \partial_2 u \left(p_1 - s \frac{\sqrt{\beta_i}}{\sqrt{\alpha_i + \beta_i}}, p_2 - s \frac{\sqrt{\alpha_i}}{\sqrt{\alpha_i + \beta_i}} \right) \frac{-\sqrt{\beta_i}}{\sqrt{\alpha_i + \beta_i}} + \right.$$

$$\begin{aligned}
 & +\beta_i \partial_1 u \left(p_1 - s \frac{\sqrt{\beta_i}}{\sqrt{\alpha_i + \beta_i}}, \right. \\
 & \left. p_2 - s \frac{\sqrt{\alpha_i}}{\sqrt{\alpha_i + \beta_i}} \right) \frac{-\sqrt{\alpha_i}}{\sqrt{\alpha_i + \beta_i}} \Big] ds = \\
 & = \sqrt{\alpha_i \beta_i} \int_0^{|QP|} \frac{d}{ds} [u(P - s\omega_i^+)] = \\
 & \gamma_i(u(Q) - u(P)).
 \end{aligned}$$

В итоге полученные равенства доказывают формулу (7); формула же (8) доказывается совершенно аналогично.

Лемма доказана.

Далее сделаем следующие построения.

Из начала координат проведем отрезок прямой $x = a_1 t$ до его пересечения с линией $x = x_0$ в точке $P = (x_0, p)$. Затем из точки P проведем луч, лежащий на линии $x - x_0 = a_2(t - p)$ и находящийся в области G_2 . Обозначим через G_3 область, ограниченную указанными отрезком и лучом сверху, а также полуосью $Ox, x > 0$ снизу.

Покажем, что из равенства (6) следует другое равенство:

$$u(x, t) = 0, (x, t) \in G_3.$$

Возьмем произвольную точку $H = (x_0, h)$ в области G_3 .

Прямые

$$x - x_0 = a_1(t - h), \quad x - x_0 = -a_2(t - h)$$

пересекают полуось $Ox, x > 0$ в точках C и B соответственно.

В качестве области G возьмем треугольник $G(H)$ с вершинами в точках H, B, C ; на основании леммы и формулы (6) имеем:

$$\begin{aligned}
 & \int_{\partial G(H)} \alpha(\xi) \partial_2 u(\xi, \tau) d\xi + \beta(\xi) \partial_1 u(\xi, \tau) d\tau = \\
 & = \int_{(HC)} \alpha(\xi) \partial_2 u(\xi, \tau) d\xi + \beta(\xi) \partial_1 u(\xi, \tau) d\tau + \\
 & + \int_{(CB)} \alpha(\xi) \partial_2 u(\xi, \tau) d\xi + \beta(\xi) \partial_1 u(\xi, \tau) d\tau + \\
 & + \int_{(CH)} \alpha(\xi) \partial_2 u(\xi, \tau) d\xi + \beta(\xi) \partial_1 u(\xi, \tau) d\tau = \\
 & = \gamma_1(u(C) - u(H)) - \gamma_2(u(H) - u(B)) = 0.
 \end{aligned}$$

Отсюда, с учетом равенств

$$u(C) = u(B) = 0$$

имеем равенство $u(H) = 0$.

Теперь возьмем точку

$$M = (x, t) \in G_1 \cap G_3.$$

Прямая $\xi - x = a_1(\tau - t)$, проходящая через точку M , пересекает полуось $Ox, x > 0$ в точке C' . Рассмотрим прямую

$$\xi - x = -a_1(\tau - t),$$

также проходящую через точку M . Из двух возможных вариантов рассмотрим более сложный, когда указанная прямая пересекает луч $(x_0, t), t > 0$, в точке $H = (x_0, h)$ в области G_3 . Далее через точку H проведем прямую

$$\xi - x_0 = -a_2(\tau - h),$$

пересекающую полуось $Ox, x > 0$ в точке B' .

Рассмотрим четырехугольник $G(M)$ с вершинами M, C', B', H . Применяем формулу (6) к области $G = G(M)$ и вычисляем интегралы вдоль прямолинейных участков ее границы; с учетом равенств

$$u(C') = u(B') = u(H) = 0,$$

получаем равенство $u(M) = 0$.

Для точки $M = (x, t) \in G_2 \cap G_3$ рассуждения полностью аналогичны.

Из теории дифференциальных уравнений известно, что характеристики для уравнения (1) представляют собой отрезки прямых

$$x = \pm a_1 t + \text{const}$$

в области G_1 , а в области G_2 — отрезки прямых

$$x = \pm a_2 t + \text{const}.$$

Возьмем точку $M_1 \in G_1 \setminus \overline{G_3}$, т. е.

$$M_1 = (x, t), \quad 0 < x < x_0, \quad t > a_1 x$$

(рис. 1). Из точки M_1 проведены две непрерывные составные характеристики, лежащие в области G_1 , участки которых, проходящие через точку $P = (p_1, p_2)$, являются частями прямых

$$\xi - p_1 = \pm a_1(\tau - p_2).$$

Эти участки имеют концевые точки на лучах

$$R_1 = (0, t), \quad t > 0,$$

$$R_2 = (x_0, t), \quad t > 0.$$

Точки, лежащие на луче R_1 , обозначаются как

$$E_{i,k} = (0, e_{i,k}), \quad i = 1, 2, \quad k = 0, 1, \dots,$$

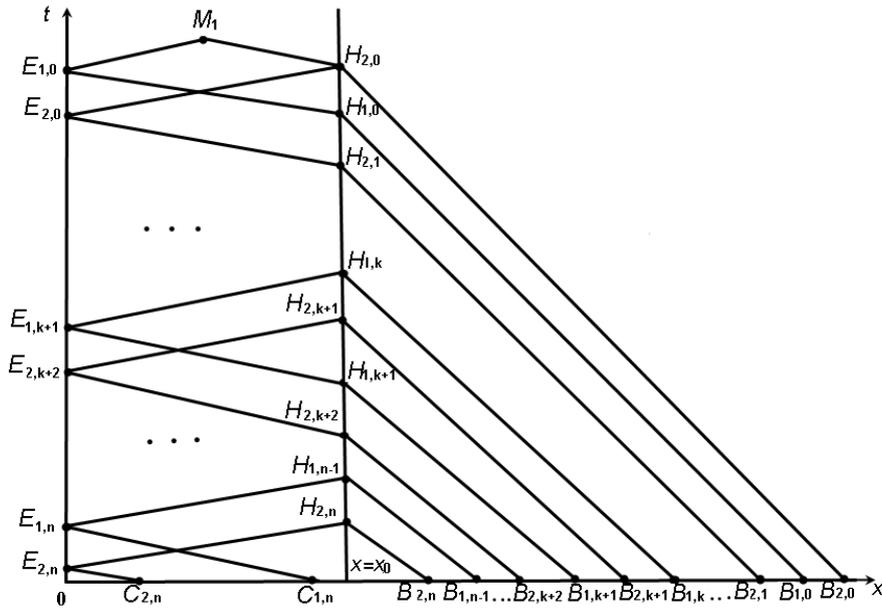


Рис. 1. Иллюстрация к построению на графике $x(t)$ двух составных характеристик, исходящих из точки $M_1 = (x, t)$, $0 < x < x_0$, $t > a_1 x$

а точки на луче R_2 — как $H_{i,k} = (x_0, h_{i,k})$.

При этом индекс i указывает номер составной характеристики, а индекс k есть нумерация конечных точек.

Первая составная характеристика получается по следующему правилу. Из точки M_1 проводится прямая

$$\xi - x = a_1(\tau - t)$$

вплоть до ее пересечения с лучом R_1 в точке $E_{1,0} = (0, e_{1,0})$. Далее через полученную точку $E_{1,0}$ проводится прямая

$$\xi = -a_1(\tau - e_{1,0})$$

до пересечения с лучом R_2 в точке $H_{1,0} = (x_0, h_{1,0})$. Дальнейшее построение состоит в том, что через получаемые точки $E_{1,k} = (0, e_{1,k})$ на луче R_1 проводятся прямые

$$\xi = -a_1(\tau - e_{1,k}),$$

пересекающие луч R_2 в точках $H_{1,k} = (x_0, h_{1,k})$. Через точки $H_{1,k}$ проводятся прямые

$$\xi - x_0 = a_1(\tau - h_{1,k}).$$

Формулы для этих точек имеют следующий вид:

$$e_{1,k} = t - \frac{x}{a_1} - 2k \frac{x_0}{a_1}, \quad (9)$$

$$h_{1,k} = t - \frac{x}{a_1} - (2k + 1) \frac{x_0}{a_1}, \quad k \geq 0.$$

Построение продолжается до тех пор, пока получаемые отрезки характеристик имеют непустое пересечение с областью G_1 . Таким образом, мы получили множество точек $E_{1,k}$, $H_{1,k}$ на лучах R_1 , R_2 соответственно, $0 \leq k \leq n$. Для окончательного построения используем прямую

$$\xi = -a_1(\tau - e_{1,n}),$$

пересекающую полуось Ox , $x > 0$, в точке $C_{1,n}$.

Вторая составная характеристика, исходящая из точки M_1 , строится аналогично. А именно: из точки M_1 проводится прямая

$$\xi - x_0 = -a_1(\tau - t)$$

вплоть до ее пересечения с лучом R_2 в точке $H_{2,0}$. Далее, действуя последовательно и попеременно используя характеристики

$$\xi = \pm a_1 \tau + \text{const},$$

исходящие из уже полученных точек, получаем множество конечных точек $E_{2,k}$, $0 \leq k \leq n$ на луче R_1 и $H_{2,k}$, $0 \leq k \leq n$ на луче R_2 а также точку $C_{2,n}$ на отрезке горизонтальной оси $(0, x_0)$.

Формулы для этих точек имеют следующий вид:

$$e_{2,k} = t - \frac{x_0 - x}{a_1} - (2k + 1) \frac{x_0}{a_1},$$

$$h_{2,k} = t - \frac{x_0 - x}{a_1} - 2k \frac{x_0}{a_1}, \quad (10)$$

$$k \geq 0, \quad C_{2,n} = (0, c_{2,n}).$$

В множестве $\overline{G_2}$ построение используемых характеристик имеет более простой характер: через точки $H_{i,k}$, $i = 1, 2, k = 0, \dots, n$, проводятся прямые

$$\xi - x_0 = -a_2(\tau - h_{i,k})$$

вплоть до их пересечения с полуосью Ox , $x > 0$ в точках $B_{i,k}$.

Следствия для функции $u(x, t)$ из равенства (6) в областях G_1, G_2

Рассмотрим многоугольник $G(M_1)$ с вершинами в точках $M_1, E_{1,0}, H_{1,0}, B_{1,0}, B_{2,0}, H_{2,0}$ и применим к нему формулу (6) для случая $G = G(M_1)$ (см. рис. 1).

Ввиду того, что

$$\partial G(M_1) = (M_1 E_{1,0}) \cup (E_{1,0} H_{1,0}) \cup (H_{1,0} B_{1,0}) \cup (B_{1,0} B_{2,0}) \cup (B_{2,0} H_{2,0}) \cup (H_{2,0} M_1),$$

вычисляем интеграл $J(G(M_1))$, пользуясь леммой:

$$\begin{aligned} J(G(M_1)) &= \gamma_1(u(E_{1,0}) - u(M_1)) - \\ &- \gamma_1(u(H_{1,0}) - u(E_{1,0})) - \gamma_2(u(B_{1,0}) - \\ &- u(H_{1,0})) - \gamma_2(u(H_{2,0}) - u(B_{2,0})) - \\ &- \gamma_1(u(M_1) - u(H_{2,0})) = 0. \end{aligned}$$

Отсюда, с учетом равенств $u(B_{1,0}) = u(B_{2,0}) = 0$ следует, что

$$\begin{aligned} u(M_1) &= u(E_{1,0}) + \frac{\gamma_2 - \gamma_1}{2\gamma_1} \times \\ &\times u(H_{1,0}) + \frac{\gamma_1 - \gamma_2}{2\gamma_1} u(H_{2,0}). \end{aligned} \quad (11)$$

Чтобы найти выражение для $u(H_{2,0})$, рассмотрим многоугольник $G(H_{2,0})$ с вершинами в точках $H_{2,0}, E_{2,0}, H_{2,1}, B_{2,1}, B_{2,0}$. Аналогично только что выполненным вычислениям, с использованием леммы для случая $G = G(H_{2,0})$ получаем следующее:

$$u(H_{2,0}) = \frac{2\gamma_1}{\gamma_2 + \gamma_1} u(E_{2,0}) + \frac{\gamma_2 - \gamma_1}{\gamma_2 + \gamma_1} u(H_{2,1}).$$

Чтобы найти выражение для $u(H_{2,1})$, рассмотрим многоугольник $G = G(H_{2,1})$ с вершинами $H_{2,1}, E_{2,1}, H_{2,2}, B_{2,2}, B_{2,1}$. Снова применяя лемму и повторяя вычисления, приходим к формуле

$$u(H_{2,1}) = \frac{2\gamma_1}{\gamma_2 + \gamma_1} u(E_{2,1}) + \frac{\gamma_2 - \gamma_1}{\gamma_2 + \gamma_1} u(H_{2,2}).$$

Таким же образом мы можем получить следующую общую формулу:

$$\begin{aligned} u(H_{2,k}) &= \frac{2\gamma_1}{\gamma_2 + \gamma_1} u(E_{2,k}) + \\ &+ \frac{\gamma_2 - \gamma_1}{\gamma_2 + \gamma_1} u(H_{2,k+1}). \end{aligned} \quad (12)$$

Используя полученную рекуррентную формулу (12), имеем:

$$u(H_{2,0}) = \frac{2\gamma_1}{\gamma_2 + \gamma_1} \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{\gamma_2 - \gamma_1}{\gamma_2 + \gamma_1} \right)^k u(E_{2,k}). \quad (13)$$

Чтобы найти формулы для $u(H_{1,0})$ аналогичными действиями, но при этом использовать элементы второй составной характеристики, которая исходит из точки M_1 , получаем следующее равенство:

$$u(H_{1,0}) = \frac{2\gamma_1}{\gamma_2 + \gamma_1} \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{\gamma_2 - \gamma_1}{\gamma_2 + \gamma_1} \right)^k u(E_{1,k+1}). \quad (14)$$

Следует отметить, что в правых частях равенств (13) и (14), вследствие условия (3), $\mu(t) = 0, t \leq 0$, отличным от нуля является лишь конечное число первых слагаемых. Используя равенства (13), (14) для формулы (11), в итоге получаем:

$$\begin{aligned} u(M_1) &= u(E_{1,0}) + \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{\gamma_2 - \gamma_1}{\gamma_2 + \gamma_1} \right)^{k+1} \times \\ &\times (u(E_{1,k+1}) - u(E_{2,k})). \end{aligned} \quad (15)$$

Теперь рассмотрим более простой случай, когда произвольная точка $M_2 = (x, t)$ принадлежит области $G_2 \setminus \overline{G_3}$. Построим составную непрерывную характеристику, которая исходит из этой точки и заканчивается на горизонтальной оси. Для этого снова будем использовать отрезки характеристик, лежащих на прямых

$$\xi = \pm a_2 \tau + \text{const.}$$

Концы отдельных характеристик, которые получаются на луче $x = x_0, t > 0$, мы обозначили через $H_k, k = 0, 1, \dots, m$, а на луче $x = 0, t > 0$ — через $E_k, k = 0, 1, \dots, m$. Концы же отдельных характеристик на горизонтальной оси, в порядке их возрастания, мы обозначили через $C_m, B_m, B_{m-1}, \dots, B_0, D$ (рис. 2).

Рассуждая аналогично предыдущему случаю, выводим следующие формулы:

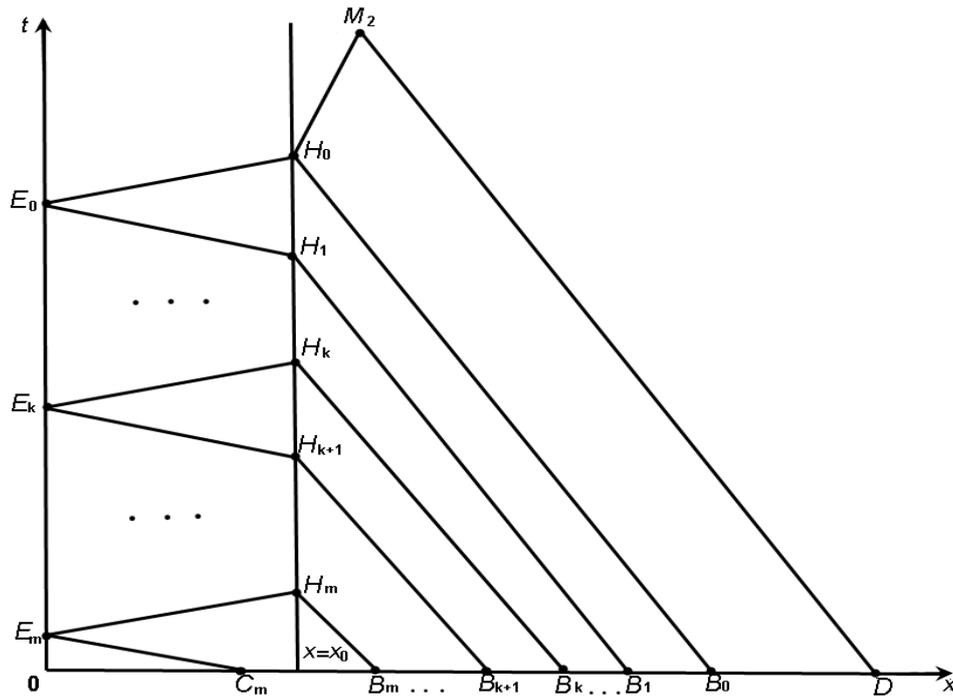


Рис. 2. Иллюстрация к построению на графике $x(t)$ двух составных характеристик, исходящих из точки $M_2 \in G_2 \setminus \overline{G_3}$

$$u(M_2) = \frac{2\gamma_1}{\gamma_2 + \gamma_1} \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{\gamma_2 - \gamma_1}{\gamma_2 + \gamma_1} \right)^k u(E_k), \quad (16)$$

$$E_k = \left(0, t - \frac{x}{a_2} + \left(\frac{1}{a_2} - \frac{1}{a_1} \right) x_0 - 2k \frac{x_0}{a_1} \right). \quad (17)$$

Заметим, что ситуация, представленная при построении составных характеристик (см. рис. 1 и 2), не охватывает все варианты. Возможен, например, случай, когда последний участок составной характеристики исходит из точки $H_{2,n}$ или H_m и заканчивается на горизонтальной оси. Этот вариант нами также проанализирован. Установлено, что он не приводит к изменению полученных формул.

Основной результат

В этом разделе будет показано, что полученные выше формулы дают возможность решить задачу (1), (2).

Теорема. Существует единственное решение $u(x,t)$ задачи (1), (2), представленное двумя равенствами: (15) при всех $M_1 \in G_1$ и (16) для любой точки $M_2 \in G_2$.

Доказательство. Проведем доказательство в два этапа.

1. *Существование решения.* Тот факт, что

функция $u(x,t), (x,t) \in G_0 \setminus \overline{G_3}$, представленная формулами (15), (16), удовлетворяет уравнению (1), прямо следует из того, что каждое слагаемое в соответствующих рядах является решением этого уравнения. Что касается множества $\overline{G_3}$, то, как было показано, $u(x,t) = 0, (x,t) \in \overline{G_3}$. Таким образом, остается проверить выполнение остальных свойств, указанных нами при постановке задачи.

Во-первых, необходимо отметить, что если точка M_1 стремится к линии $\xi = a_1 \tau$, то, как следует из формул (9), (10),

$$\mu(e_{1,k}) \rightarrow 0, \mu(e_{2,k}) \rightarrow 0,$$

что и означает непрерывность $u(x,t), (x,t) \in G_1$.

Из таких же соображений следует непрерывность частных производных первого и второго порядков функции $u(x,t), (x,t) \in G_1$. Рассуждая аналогично, нетрудно показать выполнение требуемых свойств гладкости функции $u(x,t), (x,t) \in G_2$. Из вышеизложенного следует, что формулы (15), (16) дают функции, удовлетворяющие уравнению (1) везде в области G_0 .

Далее отметим, что если точка $M_1 = (x,t)$ стремится к точке $(0,t)$, то

$$E_{1,k} \rightarrow \left(0, t - 2k \frac{x_0}{a_1}\right),$$

$$E_{2,k} \rightarrow \left(0, t - (2k+2) \frac{x_0}{a_1}\right),$$

$$E_{1,0} \rightarrow (0, t).$$

Отсюда следует, что $|E_{2,k} - E_{1,k+1}| \rightarrow 0$. Поэтому правая часть равенства (15) стремится к $\mu(t)$, что и означает выполнение граничного условия $u(0, t) = \mu(t)$. Таким образом доказано выполнение условий (2) для функции $u(x, t)$.

Осталось проверить выполнение свойств $u(x, t)$ при $x \rightarrow x_0$. Нетрудно видеть, что при этом выполняется соотношение

$$E_k, E_{1,k}, E_{2,k} \rightarrow \left(0, t - (2k+1) \frac{x_0}{a_1}\right).$$

Следовательно, формула (15) при $x \rightarrow x_0$ принимает вид

$$u(x_0, t) = u(E_0) + \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{\gamma_2 - \gamma_1}{\gamma_2 + \gamma_1}\right)^{k+1} \times$$

$$\times (u(E_{k+1}) - u(E_k)) = \frac{2\gamma_1}{\gamma_2 + \gamma_1} u(E_0) +$$

$$+ \sum_{k=1}^{\infty} \left(\left(\frac{\gamma_2 - \gamma_1}{\gamma_2 + \gamma_1}\right)^k - \left(\frac{\gamma_2 - \gamma_1}{\gamma_2 + \gamma_1}\right)^{k+1} \right) u(E_k) =$$

$$= \frac{2\gamma_1}{\gamma_2 + \gamma_1} \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{\gamma_2 - \gamma_1}{\gamma_2 + \gamma_1}\right)^k u(E_k). \quad (18)$$

Правая часть полученного равенства (18) совпадает с правой частью равенства (16), что и доказывает непрерывность функции $u(x, t)$ при $x \rightarrow x_0$.

Теперь докажем выполнение условий (4), (5). Из равенства (15) следует, что

$$\frac{\partial u(M_1)}{\partial t} = \mu'(e_{1,0}) + \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{\gamma_2 - \gamma_1}{\gamma_2 + \gamma_1}\right)^{k+1} \times$$

$$\times (\mu(e_{1,k+1}) - \mu(e_{2,k})).$$

Отсюда получаем:

$$\lim_{x \rightarrow x_0 - 0} \frac{\partial u(M_1)}{\partial t} = \mu' \left(t - \frac{x_0}{a_1} \right) +$$

$$+ \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{\gamma_2 - \gamma_1}{\gamma_2 + \gamma_1} \right)^k \left(\mu' \left(t - (2k+1) \frac{x_0}{a_1} \right) - \right. \quad (19)$$

$$\left. - \mu' \left(t - (2k-1) \frac{x_0}{a_1} \right) \right).$$

Далее, из равенства (16) следует, что

$$\lim_{x \rightarrow x_0 + 0} \frac{\partial u(M_2)}{\partial t} = \frac{2\gamma_1}{\gamma_2 + \gamma_1} \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{\gamma_2 - \gamma_1}{\gamma_2 + \gamma_1} \right)^k \mu' \times$$

$$\times \left(t - (2k+1) \frac{x_0}{a_1} \right). \quad (20)$$

Выполняя в равенстве (19) действия, аналогичные тем, которые выполнялись при получении равенства (18), получим:

$$\lim_{x \rightarrow x_0 + 0} \frac{\partial u(M_2)}{\partial t} = \lim_{x \rightarrow x_0 - 0} \frac{\partial u(M_1)}{\partial t};$$

полученное равенство означает выполнение условия (4).

Почти такими же действиями проверяется выполнение условия (5):

$$\lim_{x \rightarrow x_0 - 0} \frac{\partial u(M_1)}{\partial x} = -\frac{1}{a_1} \frac{2\gamma_2}{\gamma_2 + \gamma_1} \times$$

$$\times \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{\gamma_2 - \gamma_1}{\gamma_2 + \gamma_1} \right)^k \mu' \left(t - (2k+1) \frac{x_0}{a_1} \right);$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0 + 0} \frac{\partial u(M_2)}{\partial x} = -\frac{1}{a_2} \frac{2\gamma_1}{\gamma_2 + \gamma_1} \times$$

$$\times \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{\gamma_2 - \gamma_1}{\gamma_2 + \gamma_1} \right)^k \mu' \left(t - (2k+1) \frac{x_0}{a_1} \right).$$

Из последних двух равенств следует, что

$$\beta_2 \lim_{x \rightarrow x_0 + 0} \frac{\partial u(M_2)}{\partial x} = \beta_1 \lim_{x \rightarrow x_0 - 0} \frac{\partial u(M_1)}{\partial x},$$

а это означает выполнение условия (5).

Итак, существование решения доказано.

2. *Единственность решения.* Для доказательства возьмем два решения задачи (1), (2) и обозначим их разность как $V(x, t)$.

Рассмотрим функции

$$\begin{aligned} v_1(x,t) &= \partial_2 V(x,t) + a(x)\partial_1 V(x,t), \\ v_2(x,t) &= \partial_2 V(x,t) - a(x)\partial_1 V(x,t). \end{aligned}$$

Нетрудно проверить, что выполняются следующие равенства:

$$\begin{aligned} \partial_2 v_1(x,t) - a(x)\partial_1 v_1(x,t) &= 0, \\ \partial_2 v_2(x,t) + a(x)\partial_1 v_2(x,t) &= 0, \end{aligned} \quad (21)$$

$$\begin{aligned} v_i(0,t) = 0, v_i(x,0) = 0, \\ i = 1, 2, (x,t) \in G_0. \end{aligned} \quad (22)$$

Условимся обозначать для $0 < x < x_0$

через $v_1(x,t), v_2(x,t), V(x,t)$
 $v_1^-(x,t), v_2^-(x,t), V^-(x,t),$

а для $x \geq x_0$ – через

$$v_1^+(x,t), v_2^+(x,t), V^+(x,t).$$

Следовательно, из равенств (21) и (22) имеем уравнение

$$v_1^-(x,t) = v_2^-(x,t) = 0.$$

Отсюда и из условий (4), (5) следуют равенства

$$v_1^+(H) = v_2^+(H) = 0$$

для произвольной точки H на луче (x_0, t) , $t > 0$.

Из этих равенств и равенств (21), с учетом условий

$$v_1^+(x,0) = v_2^+(x,0) = 0,$$

следует, что

$$v_1^+(x,t) = v_2^+(x,t) = 0.$$

Таким образом, мы приходим к равенствам

$$\begin{aligned} v_1(x,t) = v_2(x,t) &= 0, \\ \partial_1 V(x,t) = 0, \partial_2 V(x,t) &= 0, \\ V(x,t) &= \text{const}. \end{aligned}$$

Поэтому, в силу условия $V(x,t) = 0$ имеем:

$$V(x,t) = 0, (x,t) \in \overline{\mathbb{R}_2^{++}},$$

что и означает единственность решения задачи.

Теорема доказана.

Заключение

В работе рассмотрено одномерное волновое уравнение, описывающее не только поперечные колебания неоднородной полуграниченной струны, но и продольные колебания неоднородного стресса. При этом поставлена задача о нахождении функции колебаний для частного случая, когда процесс вызван исключительно поведением граничной точки.

Доказана теорема существования и единственности решения поставленной задачи, и для него приведены простые и явные формулы. В теореме представлена компактная форма записи решения, в которой использованы удобные вспомогательные обозначения.

Более полные формулы, содержащие только исходные данные задачи, имеют следующий вид:

$$\begin{aligned} (x,t) \in G_1, u(x,t) &= \mu \left(t - \frac{x}{a_1} \right) + \\ &+ \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{\gamma_2 - \gamma_1}{\gamma_2 + \gamma_1} \right)^{k+1} \left(\mu \left(t - \frac{x}{a_1} - 2(k+1) \frac{x_0}{a_1} \right) - \right. \\ &\left. - \mu \left(t - \frac{x}{a_1} - (2k+1) \frac{x_0}{a_1} \right) \right), \\ (x,t) \in G_2, u(x,t) &= \frac{2\gamma_1}{\gamma_2 + \gamma_1} \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{\gamma_2 - \gamma_1}{\gamma_2 + \gamma_1} \right)^k \times \\ &\times \mu \left(t - \frac{x}{a_2} + \left(\frac{1}{a_2} - \frac{1}{a_1} \right) x_0 - 2k \frac{x_0}{a_1} \right). \end{aligned}$$

Важно отметить, что последние из представленных формул позволяют создать без затруднений соответствующий численный алгоритм.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Petrova G., Popov B. Linear transport equations with discontinuous coefficients // Communications in Partial Differential Equations. 1999. Vol. 24. No. 9–10. Pp. 1849–1873.
2. Bouchut F., Jame F. One-dimensional transport equations with discontinuous

coefficients // Journal of Nonlinear Analysis. Theory, Methods and Applications. 1998. Vol. 32. No. 7. Pp. 891–933.

3. **Куликовский А.Г., Свешникова Е.И., Чугайнова А.П.** Математические методы изучения разрывных решений нелинейных гиперболических систем уравнений // Лекционные курсы НОЦ. Вып. 16. М.: Изд. Математического института им. В.А. Стеклова РАН, 2010. 122 с.

4. **Tadmor E.** Local error estimates for discontinuous solutions of nonlinear hyperbolic equations // SIAM J. Numer. Anal. 1991. Vol. 28. No. 4. Pp. 891–906.

5. **Калиткин Н.Н.** Численные методы. М.: Наука, 1978. 512 с.

6. **Гельфанд И.М.** Некоторые задачи теории квазилинейных уравнений // Успехи математических наук. 1959. Т. XIV. Вып. 2 (86). С. 87–158.

7. **Филиппов А.Ф.** Дифференциальные уравнения с разрывной правой частью. М.: Наука, 1985. 255 с.

8. **Ильин В.А.** Формула типа Даламбера для

продольных колебаний бесконечного стержня, состоящего из разной плотности и разной упругости // Доклады Академии наук. 2009. Т. 427. № 4. С. 466–468.

9. **Ильин В.А.** Формула типа Даламбера для поперечных колебаний бесконечного стержня, состоящего из двух участков разной плотности // Доклады Академии наук. 2009. Т. 427. № 5. С. 609–611.

10. **Аниконов Д.С., Коновалова Д.С.** Прямая и обратная задачи для волнового уравнения с разрывными коэффициентами // Научно-технические ведомости СПбГПУ. Физико-математические науки. 2018. Т. 11. № 2. С. 61–72.

11. **Тихонов А.Н., Самарский А.А.** Уравнения математической физики. М.: Наука, 1977. 735 с.

12. **Салехов Г.С.** Обобщение формул Даламбера и Пуассона // Успехи математических наук. 1947. Т. 2. Вып. 40. С. 175–182.

13. **Свешников А.Г., Боголюбов А.Н., Кравцов В.В.** Лекции по математической физике. М.: Изд-во МГУ, 2004. 416 с.

Статья поступила в редакцию 02.11.2018, принята к публикации 12.12.2018.

СВЕДЕНИЯ ОБ АВТОРАХ

АНИКОНОВ Дмитрий Сергеевич – доктор физико-математических наук, заведующий лабораторией условно-корректных задач Института математики им. С.Л. Соболева СО РАН, г. Новосибирск, Российская Федерация.

630090, Российская Федерация, г. Новосибирск, ул. Коптюга, 4
 anik@math.nsc.ru

КОНОВАЛОВА Дина Сергеевна – кандидат физико-математических наук, старший научный сотрудник лаборатории условно-корректных задач Института математики им. С.Л. Соболева СО РАН, г. Новосибирск, Российская Федерация.

630090, Российская Федерация, г. Новосибирск, ул. Коптюга, 4
 dsk@math.nsc.ru

REFERENCES

[1] **G. Petrova, B. Popov,** Linear transport equations with discontinuous coefficients, Communications in Partial Differential Equations. 24 (9–10) (1999) 1849–1873.

[2] **F. Bouchut, F. Jame,** One-dimensional transport equations with discontinuous coefficients, Journal Nonlinear Analysis, Theory, Methods and Applications. 32 (7) (1998) 891–933.

[3] **A.G. Kulikovskiy, E.I. Sveshnikova, A.P. Chugaynova,** Matematicheskiye metody izucheniya razryvnykh resheniy nelineynykh giperbolicheskikh sistem uravneniy [Mathematical methods of studies in discontinuous solutions of systems of nonlinear hyperbolic equations], SEC

lecture course, 16 (2010), MIAN, Moscow.

[4] **E. Tadmor,** Local error estimates for discontinuous solutions of nonlinear hyperbolic equations, SIAM J. Numer. Anal. 28 (4) (1991) 891–906.

[5] **N.N. Kalitkin,** Chislennyye metody [Numerical methods], Nauka, Moscow, 1978.

[6] **I.M. Gel'fand,** Some problems of analysis and differential equations, Uspekhi Mat. Nauk. 14 (2(86)) (1959) 87–158.

[7] **A.F. Filippov,** Differentsialnyye uravneniya s razryvnoy pravoy chastyu [Differential equations with a discontinuous right-hand part], Nauka, Moscow, 1985.

[8] **V.A. Il'in**, A d'Alembert-type formula for longitudinal oscillations of an infinite rod consisting of two segments with different densities and elasticities, *Doklady Mathematics*. 80 (1) (2009) 613–615.

[9] **V.A. Ilin**, A d'Alembert-type formula for transverse oscillations of an infinite rod consisting of two segments with different densities, *Doklady Mathematics*. 80 (1) (2009) 624–626.

[10] **D.S. Anikonov, D.S. Konovalova**, Direct and inverse problems for a wave equation with discontinuous coefficients, *St. Petersburg State*

Polytechnical University Journal. Physics and Mathematics. 11 (2) (2018) 61–72.

[11] **A.N. Tikhonov, A.A. Samarskiy**, *Uravneniya matematicheskoy fiziki* [Mathematical physics equations], Nauka, Moscow, 1977.

[12] **G.S. Salekhov**, A generation of formulas of d'Alembert and Poisson, *Uspekhi Mat. Nauk*. 2 (4(20)) (1947) 175–182.

[13] **A.G. Sveshnikov, A.N. Bogolyubov, V.V. Kravtsov**, *Lektsii po matematicheskoy fizike* [Lectures on mathematical physics], MSU, Moscow, 2004.

Received 02.11.2018, accepted .12.11.2018.

THE AUTHORS

ANIKONOV Dmitriy S.

Sobolev Institute of Mathematics

4 Acad. Koptyug Ave., Novosibirsk, 630090, Russian Federation
anik@math.nsc.ru

KONOVALOVA Dina S.

Sobolev Institute of Mathematics

4 Acad. Koptyug Ave., Novosibirsk, 630090, Russian Federation
dsk@math.nsc.ru