

DOI: 10.18721/JPM.12113

УДК 539.3

КВАЗИСТАТИЧЕСКИЙ ПОДХОД К РЕШЕНИЮ ЗАДАЧИ ТЕРМОУПРУГОСТИ ВРАЩАЮЩИХСЯ ТЕЛ

С.В. Полянский¹, А.К. Беляев^{1,2}

¹ Институт проблем машиноведения РАН, Санкт-Петербург, Российская Федерация;

² Санкт-Петербургский политехнический университет Петра Великого,
Санкт-Петербург, Российская Федерация

Представлено решение нестационарной задачи термоупругости вращающихся тел на примере определения оптимальных температурных полей и полей напряжений в прокатных валках систем горячего проката, что представляет собой актуальную проблему. Используется пространственное описание, позволяющее уменьшить число независимых переменных и рассматривать поля температуры и напряжений как квазистатические. Для процессов, происходящих в теле валка, характерны большие градиенты температуры и связанные с ними напряжения, а также вращающийся характер полей. Для решения задачи моделирования указанных процессов предлагается использовать ряды Фурье, которые позволяют при довольно большом количестве рассматриваемых членов ряда получать решение с достаточной точностью. Особенностью полученного решения является локализация максимальных напряжений на незначительной глубине от поверхности валка.

Ключевые слова: температурное напряжение, прокатный валок, вращающаяся система, ряд Фурье

Ссылка при цитировании: Полянский С.В., Беляев А.К. Квазистатический подход к решению задачи термоупругости вращающихся тел // Научно-технические ведомости СПбГПУ. Физико-математические науки. 2019. Т. 12. № 1. С. 156–166. DOI: 10.18721/JPM.12113

A QUASISTATIC APPROACH TO THE THERMOELASTICITY PROBLEM OF ROTATING BODIES

S.V. Polyanskiy¹, A.K. Belyaev^{1,2}

¹ Institute for Problems in Mechanical Engineering of the RAS,
St. Petersburg, Russian Federation;

² Peter the Great St. Petersburg Polytechnic University, St. Petersburg, Russian Federation

The non-stationary problem of thermoelasticity for rotating bodies has been solved through determining the optimal temperature and stress fields in the rolling mills of hot rolling systems, this determination being an issue of the day. The Eulerian approach was applied, it allowed us to reduce the number of independent variables and consider these fields as quasistatic ones. The heavy temperature gradients and stresses bound up with them, as well as the rotating nature of these fields are typical for the processes taking place in the roll core. To solve the problem of simulation of these processes, we proposed to use Fourier series, which allowed us to obtain a solution with a sufficient accuracy for the large number of terms of the series being considered. The peculiarity of the solution obtained is that the stress maximum locates at an insignificant depth beneath the roll surface.

Keywords: temperature stress, mill roll, rotating system, Fourier series

Citation: S.V. Polyanskiy, A.K. Belyaev, A quasistatic approach to the thermoelasticity problem of rotating bodies, St. Petersburg Polytechnical State University Journal. Physics and Mathematics. 12 (1) (2019) 156–166. DOI: 10.18721/JPM.12113



Введение

В настоящее время задачи термоупругости вращающихся тел, подверженных тепловым ударам, часто требуют рационального решения в различных практических приложениях и не теряют своей актуальности.

Ярким примером одного из таких приложений является моделирование процессов, имеющих место при горячей прокатке листового металла, где вращающиеся валки прокатного стана работают в условиях тяжелого механического и температурного воздействия. На валки действует совокупность циклических, механических и температурных напряжений, в результате наблюдается характерное, связанное с образованием blisterных отколов, разрушение поверхностного слоя валков типа «апельсиновая корка».

Целью данного исследования является разработка метода, позволяющего эффективно решать задачи термоупругости вращающихся тел, подверженных тепловым ударам.

Рассмотрение задачи несвязанной термоупругости проводится в несколько этапов. Первый этап требует решения нестационарной граничной задачи теплопроводности, доставляющей поле температур; последнее зависит как от времени, так и от пространственных координат. Второй шаг нацелен на определение напряженно-деформированного состояния вращающегося тела. Предлагается математический подход, позволяющий свести уравнения в частных производных с тремя независимыми переменными к обыкновенным дифференциальным уравнениям и получить решение в виде одинарного ряда.

Универсальность предлагаемого подхода демонстрируется на примере полного решения задачи нахождения температурных напряжений во вращающихся валках при горячем прокате листового металла. В процессе эксплуатации прокатных валков замечено, что характер разрушения его поверхности имеет чешуйчатую структуру и формирование трещин происходит не на поверхности, а на относительно небольшой глубине (1 – 2 мм) от поверхности валка. Исследование характера трещин позволило предположить, что одним из определяющих факторов их появления выступает возникновение нестационарных температурных напряжений в результате резких перепадов

температур. Данные эффекты физики металлов объясняются значительными градиентами температуры, вызванными тепловыми ударами.

Предлагаемый метод аналитического вычисления локализованного температурного поля предпочтительнее численных, так как не требует итерационного подбора размера сеток, неизвестного заранее.

Актуальность вышеописанной проблемы для промышленности подтверждается большим числом работ, посвященных исследованию как отдельно поля температур, так и температурных полей и механических напряжений, возникающих при прокатке.

При исследовании температурных полей применяют три основных подхода:

прямое экспериментальное измерение полей поверхностной температуры [1];

вычисление температурных полей методом конечных элементов (МКЭ) или сеточным методом с учетом вращения валка или граничных условий [2 – 10];

вычисление температурных полей методом Фурье в виде суммы ряда по собственным функциям [11 – 14].

Особое место занимают работы [15 – 17], в которых развивается теория гармонического конечного элемента. В этом случае решается последовательность одномерных МКЭ-задач для каждой из амплитуд гармоник ряда Фурье отдельно, затем полученные амплитуды умножаются на соответствующую гармоническую функцию и складываются.

Исследование полей механических напряжений производится только методами конечных элементов [3, 5, 6, 8 – 10, 16 – 18]. В качестве нагрузки принимается поле температур, затем решается плоская задача теории упругости. Практически все решения, за исключением приведенных в работе [17], дают максимальные напряжения (по норме Мизеса) на поверхности валков, в пятне контакта с прокатываемым металлом. Этот результат считается общепризнанным, поэтому в работе [14] после вычисления температуры методом Фурье, с помощью температурного потенциала вычисляются не напряжения, а модуль кинематического упрочнения поверхности.

Вместе с тем характер разрушения валков показывает, что максимальные механические напряжения находятся на небольшой глубине внутри тела валков. Стандартный МКЭ-подход не позволяет описать

указанный характер адекватно. Это касается и «гармонических» конечных элементов [15 – 17], авторы которых отмечают, что использовать эти элементы для расчета напряжений нельзя, так как они дают напряжения в полтора раза выше, чем «стандартный» МКЭ.

В настоящей статье предлагается использовать пространственное описание, что позволяет свести нестационарную задачу теплопроводности к квазистационарной и тем самым разработать математическую модель теплопроводности вращающегося упругого тела. Появляется возможность найти поле распределения температур, и с использованием термоупругого потенциала получить температурные напряжения, которые представляют собой частные решения задачи термоупругости. Граничные условия будут удовлетворены с помощью функции Эри на примере тривиальных условий нагружения.

Определение поля температур в валках

На рис. 1 представлена схема нагрева и охлаждения прокатного валка. В процессе работы прокатный валок контактирует с раскаленным слябом в узком секторе контакта, а затем проходит сложный цикл охлаждения в различных средах. В нашем случае мы рассматриваем поочередное охлаждение водой и воздухом, но возможны варианты охлаждения пароводяной смесью, или только водой (воздухом). Секторами показаны участки различного охлаждения.

В предположении, что поле температуры не зависит от продольной координаты, уравнение нестационарной теплопрово-

дности имеет вид

$$\lambda \Delta T - \gamma \dot{T} = 0, \quad (1)$$

где T – температура; λ , γ – теплопроводность и теплоемкость материала валка, соответственно; Δ – двумерный оператор Лапласа; точка означает материальную производную по времени.

Используется пространственное (эйлерово) описание, что позволяет уменьшить число независимых переменных. При условии, что прокатный валок вращается с постоянной угловой скоростью ω , выражение для материальной производной поля температуры упрощается:

$$\dot{T}(r, \varphi, t) = \frac{\partial T}{\partial t} + \frac{\partial T}{\partial r} \frac{dr}{dt} + \frac{\partial T}{\partial \varphi} \frac{d\varphi}{dt} = \omega \frac{\partial T}{\partial \varphi}, \quad (2)$$

где r , φ – радиус и угол в полярной системе координат.

В силу стационарности задачи,

$$\frac{\partial T}{\partial t} = 0, \quad \frac{dr}{dt} = 0, \quad \frac{d\varphi}{dt} = \omega.$$

В результате получаем уравнение стационарной теплопроводности с двумя независимыми переменными:

$$\lambda \left(\frac{\partial^2 T}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial T}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 T}{\partial \varphi^2} \right) - \gamma \omega \frac{\partial T}{\partial \varphi} = 0. \quad (3)$$

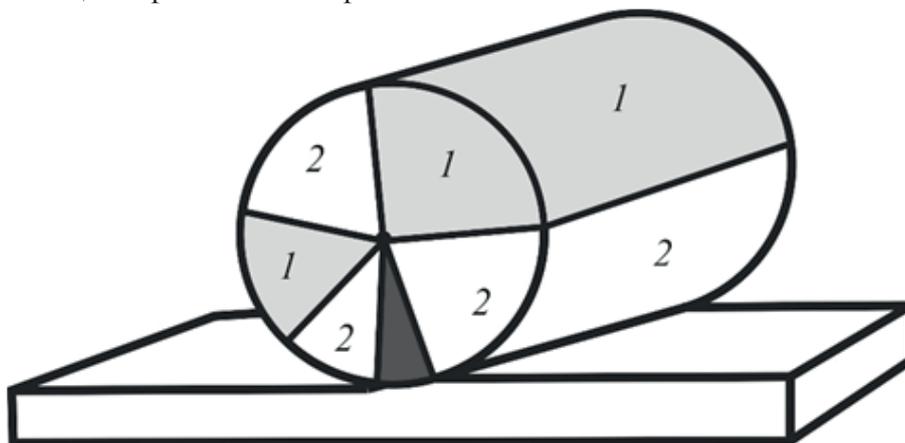


Рис. 1. Схема прокатки (показан только верхний валок), а также охлаждения прокатного валка водой (1) и воздухом (2); черным сектором показана зона контакта

Температура поверхности валка в узкой зоне непосредственного контакта валка и проката, где $0 \leq \varphi \leq \varphi_0$ (см. рис. 1), принята равной $T_c = 600^\circ\text{C}$, как средней между температурой горячего проката и температурой валка. В остальной зоне ($\varphi_0 < \varphi \leq 2\pi$) ставится граничное условие третьего рода:

$$r = R, \varphi_0 < \varphi \leq 2\pi, \\ \lambda \frac{\partial T}{\partial r} + \beta(T - T_m) = 0,$$

где R – радиус валка; $T = T_m(\varphi)$ – температура воздушно-водяной смеси системы охлаждения поверхности валка.

Эти два условия можно записать в виде единого граничного условия третьего рода:

$$r = R, \eta \frac{\partial T}{\partial r} + T - T_e = 0, \quad (4)$$

где

$$T_e = T_e(\varphi) = \begin{cases} T_c, & 0 \leq \varphi \leq \varphi_0, \\ T_m(\varphi), & \varphi_0 < \varphi \leq 2\pi; \end{cases} \\ \eta = \frac{\lambda}{\beta} = \begin{cases} 0, & 0 \leq \varphi \leq \varphi_0, \\ \eta(\varphi), & \varphi_0 < \varphi \leq 2\pi; \end{cases} \quad (5)$$

причем параметры $\lambda(\varphi)$, $\beta(\varphi)$, $T_m(\varphi)$ есть кусочно-постоянные функции угла φ .

Для решения граничной задачи (3) – (5) применим метод интегральных преобразований:

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} T(r, \varphi) e^{-in\varphi} d\varphi = T_n(r),$$

и затем будем искать решение в виде двустороннего ряда:

$$T(r, \varphi) = \sum_{n=-N}^N T_n(r) e^{in\varphi}.$$

После интегрального преобразования уравнение (3) принимает вид

$$\frac{d^2 T_n}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dT_n}{dr} + \left(-\frac{n^2}{r^2} - \frac{in\omega\gamma}{\lambda} \right) T_n = 0. \quad (7)$$

Для $n \neq 0$ решение уравнения (7) выражается через функции Бесселя J_n и Y_n :

$$T_n(r) = A_n J_n \left(\sqrt{\frac{-in\omega\gamma}{\lambda}} r \right) + \\ + B_n Y_n \left(\sqrt{\frac{-in\omega\gamma}{\lambda}} r \right). \quad (8)$$

Поскольку $Y_n(0) = \infty$, то $B_n = 0$ в силу ограниченности температуры в центре валка. Тогда

$$T_n(r) = A_n J_n \left(\sqrt{\frac{-in\omega\gamma}{\lambda}} r \right) = \\ = A_n J_n \left(-\frac{1-i}{\sqrt{2}} a \sqrt{n\xi} \right), \quad (9)$$

где $a = \sqrt{\frac{\omega\gamma}{\lambda}} R$ и введен безразмерный

радиус $\xi = r/R$, $0 \leq \xi \leq 1$.

Отдельного рассмотрения требует случай $n = 0$. При этом уравнение (7) имеет вид

$$\frac{d^2 T_0}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dT_0}{dr} = \frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left(r \frac{dT_0}{dr} \right) = 0.$$

Отсюда $T_0 = C \ln r + A_0$, а из условия ограниченности при $r = 0$ следует, что $C = 0$, т. е. $T_0 = \text{const}$.

Теперь проведем интегральное преобразование граничного условия (4):

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left[\eta(\varphi) \frac{\partial T}{\partial r} + T - T_e(\varphi) \right] e^{-in\varphi} d\varphi = 0. \quad (10)$$

Представим $\eta(\varphi)$ в виде ряда Фурье и введем следующие обозначения:

$$\eta(\varphi) = \sum_{k=0}^k \eta_k e^{ik\varphi}, \\ \eta_k = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \eta(\varphi) e^{-ik\varphi} d\varphi, \quad (11) \\ \tau_n = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} T_e(\varphi) e^{-in\varphi} d\varphi.$$

Особого вычисления требует первое слагаемое в уравнении (10):

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \eta(\varphi) \frac{\partial T}{\partial r} e^{-in\varphi} d\varphi = \\ = \frac{1}{2\pi} \sum_{k=0}^k \eta_k \int_0^{2\pi} \frac{\partial T}{\partial r} e^{-i(n-k)\varphi} d\varphi = \\ = \sum_{k=0}^k \eta_k \frac{d}{dr} \left(\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} T e^{-i(n-k)\varphi} d\varphi \right) = \\ = \sum_{k=0}^k \eta_k \frac{d}{dr} T_{n-k}(r) = \sum_{k=0}^k \eta_k T'_{n-k}.$$

Подставляя явное выражение для T_n и вычисляя производную от функции Бесселя по правилу

$$J'_n(z) = J_{n-1}(z) - \frac{n}{z} J_n(z) = 0,$$

получаем следующую форму записи граничного условия:

$$\begin{cases} A_0 - \tau_0, n = 0; \\ \sum_{k=0}^K \left(\frac{\eta_k}{r} A_{n-k} \left[\frac{1-i}{\sqrt{2}} a\sqrt{n-k} J_{n-k-1}(\chi_{n-k}) - \right. \right. \\ \left. \left. -(n-k) J_{n-k}(\chi_{n-k}) \right] \right) + \\ \left. + A_n J_n(\chi_{n-k}) \right) - \tau_n = 0, n \neq 0, \end{cases} \quad (12)$$

где $\chi_{n-k} = \frac{1-i}{\sqrt{2}} a\sqrt{n-k}$.

В результате получена система из n уравнений с n неизвестными коэффициентами A_n . Для ее решения будем использовать асимптотику функции Бесселя при больших значениях аргумента:

$$J_n(z) = \sqrt{\frac{2}{\pi z}} \cos\left(z - \frac{n\pi}{2} - \frac{\pi}{4}\right),$$

так как для реальных параметров горячего проката ($a = 201,6$) аргумент функций Бесселя принимает значения

$$\left| \frac{1-i}{\sqrt{2}} \right| a\sqrt{n} \approx 201,6\sqrt{n}, \quad n = 1, 2, \dots$$

Подставив эти значения аргумента, получим:

$$\begin{aligned} J_n(z) &= \sqrt{\frac{2}{\pi z}} \cos\left(z - \frac{n\pi}{2} - \frac{\pi}{4}\right) \approx \\ &\approx \frac{1}{2} \sqrt{\frac{2\sqrt{2}}{\pi(1-i)a\sqrt{n}}} \cdot e^{\frac{a\sqrt{n}}{\sqrt{2}}} \cdot e^{i\left[\frac{a\sqrt{n}}{\sqrt{2}} - \frac{n\pi}{2} - \frac{\pi}{4}\right]}. \end{aligned} \quad (13)$$

Таким образом, в результате решения системы уравнений для коэффициентов A_n и их подстановки в формулы (9) и (6) для $T(r, \varphi)$, мы получаем распределение температуры в прокатном валке.

Поскольку коэффициенты в уравнении (12) содержат экспоненциальные множители, матрица системы имеет плохую обусловленность. Поэтому требуется оценить необходимое количество членов ряда для каждой функции и использовать специаль-

ный алгоритм решения.

Характер уравнений (12) позволяет использовать алгоритм с выбором ведущего элемента. При несимметричном задании матрицы (η_k) (см. выражение (11)), матрица системы становится треугольной, что позволяет последовательно рассчитать все коэффициенты A_n . Ниже в качестве примера вычислений представлен график поля температур на поверхности прокатного валка в зависимости от угловой координаты (рис. 2) для следующих числовых значений параметров системы:

1. $T_c = 600$ °С, $\varphi_0 = 12,68^\circ = 0,2213$ рад (в зоне контакта);

2. $T_c = 25$ °С, $\beta = 41700$ Вт/(°С · м²) (для воды);

$T_0 = 25$ °С, $\beta = 1500$ Вт/(°С · м²) (для воздуха);

3. $\lambda = 31$ Вт/(°С · м), $\gamma = 0,673$ кДж/(°С · кг) (для валков).

Вычисление температурных напряжений

Для вычисления поля температурных напряжений используем термоупругий потенциал перемещений Φ , который вводится равенством $\underline{u} = \nabla\Phi$. В задаче о плоской деформации термоупругий потенциал Φ удовлетворяет уравнению [19]:

$$\Delta\Phi = \frac{1+\nu}{1-\nu} \alpha T. \quad (14)$$

Дифференцируя обе части этого уравнения по времени и подставляя dT/dt из уравнения (1), имеем:

$$\frac{d}{dt} \Delta\Phi = \frac{1+\nu}{1-\nu} \alpha \frac{\lambda}{\beta} \Delta T. \quad (15)$$

Поскольку термоупругий потенциал представляет лишь частное решение уравнения термоупругости, в обеих частях уравнения (15) можно опустить знак оператора Δ . В результате имеем:

$$\frac{d}{dt} \Phi = \frac{1+\nu}{1-\nu} \alpha \frac{\lambda}{\beta} T. \quad (16)$$

Материальная производная термоупругого потенциала во вращающейся системе координат вычисляется по аналогии с вычислением по выражению (2):

$$\frac{d}{dt} \Phi = \frac{\partial\Phi}{\partial\varphi} \frac{\partial\varphi}{\partial t} = \omega \frac{\partial\Phi}{\partial\varphi} = \frac{1+\nu}{1-\nu} \alpha \frac{\lambda}{\beta} T, \quad (17)$$

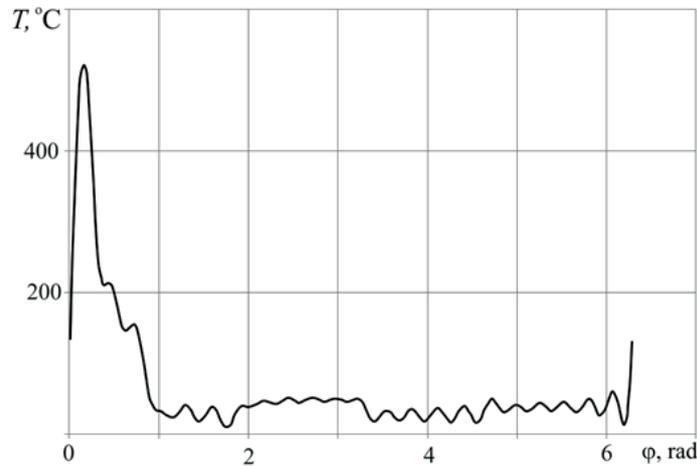


Рис. 2. Расчетная температура на поверхности прокатного вала как функция угловой координаты ($r = R$); параметры расчета приведены в тексте

откуда получается явное выражение для термоупругого потенциала:

$$\Phi = \frac{1+\nu}{\omega} \frac{1-\nu}{1-\nu} \alpha \frac{\lambda}{\beta} \int T d\varphi = \frac{1+\nu}{\omega} \frac{1-\nu}{1-\nu} \alpha \frac{\lambda}{\gamma} \left[\sum_{n=-N}^N T_n(r) \frac{1}{in} e^{in\varphi} \right]. \quad (18)$$

Температурные напряжения, соответствующие полученному термоупругому потенциалу, находятся прямым дифференцированием (см. работу [19]):

$$\begin{aligned} \sigma_r^\Phi &= -2G \left[\frac{1}{r} \frac{\partial \Phi}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \varphi^2} \right], \\ \sigma_\varphi^\Phi &= -2G \frac{\partial^2 \Phi}{\partial r^2}, \\ \tau_{r\varphi}^\Phi &= 2G \frac{\partial}{\partial r} \left[\frac{1}{r} \frac{\partial \Phi}{\partial \varphi} \right], \\ \sigma_z^\Phi &= -2G \Delta \Phi = -2G \frac{1+\nu}{1-\nu} \alpha T, \\ \tau_{zr}^\Phi &= \tau_{z\varphi}^\Phi = 0. \end{aligned} \quad (19)$$

Функция Эри для удовлетворения граничным условиям

Представленные температурные напряжения есть частные решения, и в общем случае они не удовлетворяют граничным условиям. Ниже мы покажем, как добиться

выполнения тривиальных силовых условий на всей поверхности вала. Для корректировки решения с целью удовлетворения тривиальным граничным условиям, введем полные напряжения:

$$\begin{aligned} \sigma_r &= \sigma_r^\Phi + \sigma_r^U, \\ \sigma_\varphi &= \sigma_\varphi^\Phi + \sigma_\varphi^U, \\ \tau_{r\varphi} &= \tau_{r\varphi}^\Phi + \tau_{r\varphi}^U \end{aligned}$$

и т. д.

Здесь верхний индекс означает напряжения, определяемые через функцию Эри в плоской задаче $U(r, \varphi)$.

Она удовлетворяет бигармоническому уравнению $\Delta \Delta U = 0$ и позволяет определить напряжения:

$$\begin{aligned} \sigma_r^U &= \frac{1}{r} \frac{\partial U}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 U}{\partial \varphi^2}, \\ \sigma_\varphi^U &= \frac{\partial^2 U}{\partial r^2}, \\ \tau_{r\varphi}^U &= -\frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial U}{\partial \varphi} \right), \\ \sigma_z^U &= \nu (\sigma_r^U + \sigma_\varphi^U), \\ \tau_{zr}^U &= \tau_{z\varphi}^U = 0. \end{aligned} \quad (20)$$

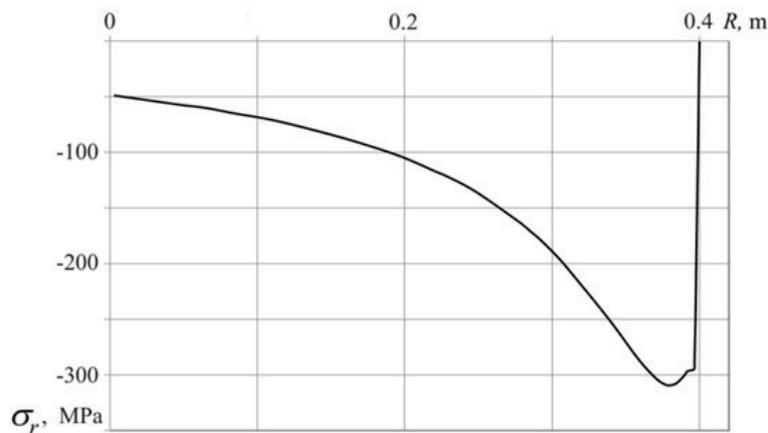


Рис. 3. Радиальное распределение напряжений σ_r в теле прокатного вала при значении $\varphi = 0,1$ рад

Общий вид функции Эри в виде ряда Фурье имеет следующий вид (см. работы [19, 20]):

$$U(\xi, \varphi) = [\alpha \xi^3 + \beta \xi^{-1} + \lambda \xi + \gamma \xi \ln \xi + \chi \varphi \xi] e^{i\varphi} + \sum_{n=2}^{\infty} (P_n \xi^n + Q_n \xi^{n+2}) e^{in\varphi}, \quad (20)$$

причем коэффициенты $\alpha, \beta, \lambda, \gamma, \chi, P_n, Q_n$ можно найти из граничного условия отсутствия напряжений на всей поверхности вала:

$$r = R, \quad \sigma_r^\Phi + \sigma_r^U = 0, \quad \tau_{r\varphi}^\Phi + \tau_{r\varphi}^U = 0. \quad (22)$$

На рис. 3 представлено распределение напряжений по радиусу вала при значении угла $\varphi = 0,1$ рад.

На рис. 4 представлено семейство распределений радиальных напряжений по угловой координате в теле прокатного вала при разных значениях его радиуса.

На рис. 3 хорошо заметен быстрый рост напряжений на малой глубине от поверхности и плавное уменьшение к центру вала. Максимум напряжений достигается на глубине h около 4 мм от поверхности (см. рис. 4).

Обсуждение результатов

Полученное нами распределение радиальных напряжений в теле вала существенно отличается от известных результатов, вычисленных с помощью МКЭ. Макси-

мальные радиальные напряжения 350 МПа оказываются близкими к пределу текучести и имеют специфический «ныряющий» характер. Зона этих напряжений находится в теле вала на глубине 2 – 4 мм от поверхности, что хорошо объясняет blisterное усталостное разрушение, когда от поверхности вала при прокатке отваливаются блистеры толщиной 1 – 4 мм.

В работе [9] максимум напряжений под поверхностью получен за счет моделирования многослойной системы с разными механическими характеристиками вблизи поверхности вала.

«Ныряющие» напряжения были получены в работе [17] в результате учета контактных напряжений (помимо температурных) в зоне прокатки. В отличие от нашего решения, там глубина залегания максимума напряжений по норме Мизеса составляла 5 % от радиуса, что не позволяло объяснять блистерные отколы. В нашем же случае эта глубина равна около 3 см.

Таким образом, предложенный и использованный нами подход позволяет получить новые результаты, которые в состоянии объяснить экспериментально наблюдаемое блистерное разрушение поверхности «ныряющими» циклическими радиальными напряжениями.

Вероятно, огромные градиенты радиальных напряжений, возникающие в подповерхностном слое, не дают возможности решить задачу методом МКЭ. Этот слой составляет около 0,1 % от радиуса вала, и осреднение напряжений, которое автоматически происходит внутри конечных эле-

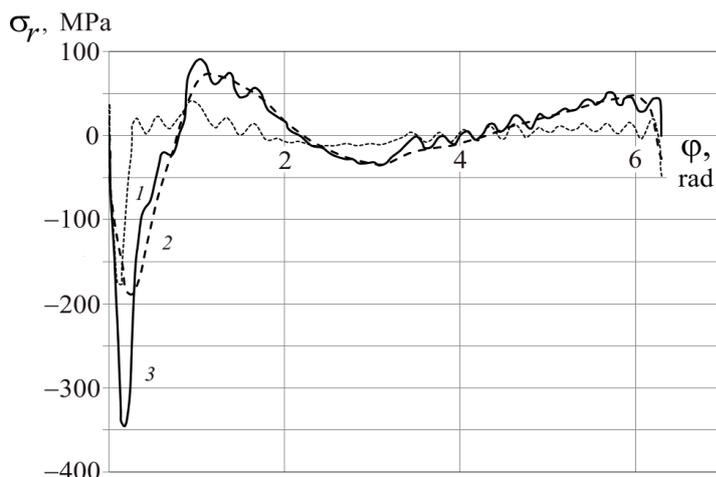


Рис. 4. Распределение радиальных напряжений σ_r по угловой координате φ на разной глубине от поверхности вала h , мм: 0,5 (1), 4 (2), 100 (3)

ментов, не позволяет адекватно моделировать эти градиенты.

Необходимо отметить, что функции Бесселя в ряде Фурье при асимптотическом представлении содержат в качестве множителей экспоненты вида $\exp(\lambda r/R)$, где множители λ имеют характерное значение около 1000. Поэтому оказалось, что нет смысла брать более сорока членов ряда Фурье, так как даже в случае применения специальной нормировки не удастся определить коэффициенты ряда Фурье при заданной двойной точности. С этим обстоятельством связаны «колебания» всех функций, видимые на графиках угловых распределений. Естественно, что численное МКЭ-решение сталкивается с аналогичной проблемой плохой обусловленности задачи, о чем пишут авторы цитируемых работ.

Заключение

Путем перехода к пространственному описанию в задаче термоупругости вращающихся тел удалось уменьшить число независимых переменных и получить точные решения для поля температур и напряжений в виде одинарного ряда Фурье. Выведены формулы для температурных напряжений через термоупругий потенциал; с его помощью вычислены температурные напряжения на поверхности и в теле вала. Продемонстрировано, как следует подобрать функцию Эри для удовлетворения граничным условиям на поверхности вала. Рассмотрение было ограничено случаем тривиальных силовых граничных условий на всей поверхности вала, хотя данный подход позволяет удовлетворять любым, наперед

заданным граничным условиям.

В качестве примера практического применения было найдено поле температурных напряжений в прокатных валах при горячем прокате листового металла.

На основании проведенных исследований сделан вывод, что температурные напряжения вносят весомый вклад в напряженное состояние прокатных валков, а величина температурной составляющей напряжений и цикличность их возникновения говорят о возможности разрушения поверхности валков исключительно за счет температурного «шока», который возникает при прогреве и охлаждении поверхности валков.

Впервые удалось получить эффект температурных напряжений, «ныряющих» на малую глубину под поверхность вала. Важно, что полученный эффект адекватно объясняет блистерный характер разрушения вала. Выбранный для примера объект исследования оказался удачной моделью для описания процессов, происходящих при работе вращающихся систем, подверженных сложному температурному нагружению.

Таким образом, предложенный подход к решению задачи может иметь другие важные практические приложения при анализе режимов работы подобных указанных систем, в частности в металлургической и машиностроительной отраслях.

Исследование выполнено при финансовой поддержке грантов РФФИ 17-08-00783 и 18-08-00201.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Keanini R.G.** Inverse estimation of surface heat flux distributions during high speed rolling using remote thermal measurements // International Journal of Heat and Mass Transfer. 1998. Vol. 41. No. 2. Pp. 275–285.
2. **Khan O.U., Jamal A., Arshed G.M., Arif A.F.M., Zubair S.M.** Thermal analysis of a cold rolling process – a numerical approach // Numerical Heat Transfer. Part A: Applications. 2004. Vol. 46. No. 6. Pp. 613–632.
3. **Benasciutti D.** On thermal stress and fatigue life evaluation in work rolls of hot rolling mill // The Journal of Strain Analysis for Engineering Design. 2012. Vol. 47. No. 5. Pp. 297–312.
4. **Saxena A., Sahai Y.** Modeling of fluid flow and heat transfer in twin-roll casting of aluminum alloys // Materials Transactions. 2002. Vol. 43. No. 2. Pp. 206–213.
5. **Lai W.B., Chen T.C., Weng C.I.** Transient thermal stresses of work roll by coupled thermoelasticity // Computational Mechanics. 1991. Vol. 9. No. 1. Pp. 55–71.
6. **Saxena A., Sahai Y.** Modeling of thermo-mechanical stresses in twin-roll casting of aluminum alloys // Materials Transactions. 2002. Vol. 43. No. 2. Pp. 214–221.
7. **Serajzadeh S.** Effects of rolling parameters on work-roll temperature distribution in the hot rolling of steels // The International Journal of Advanced Manufacturing Technology. 2008. Vol. 35. No. 9–10. Pp. 859–866.
8. **Benasciutti D., Brusa E., Bazzaro G.** Finite elements prediction of thermal stresses in work roll of hot rolling mills // Procedia Engineering. 2010. Vol. 2. No. 1. Pp. 707–716.
9. **Toparli M., Sen F., Culha O., Celic E.** Thermal stress analysis of HVOF sprayed WC–Co/NiAl multilayer coatings on stainless steel substrate using finite element methods // Journal of Materials Processing Technology. 2007. Vol. 190. No. 1. Pp. 26–32.
10. **Li C., Yu H., Deng G., Liu X., Wang G.** Numerical simulation of temperature field and thermal stress field of work roll during hot strip rolling // Journal of Iron and Steel Research International. 2007. Vol. 14. No. 5. Pp. 18–21.
11. **Tudor A., Radulescu C., Petre I.** Thermal effect of the brake shoes friction on the wheel/rail contact // Tribology in Industry. 2003. Vol. 25. No. 1–2. Pp. 27–32.
12. **Johnson R.E., Keanini R.G.** An asymptotic model of work roll heat transfer in strip rolling // International Journal of Heat and Mass Transfer. 1998. Vol. 41. No. 6. Pp. 871–879.
13. **Dünckelmeyer M., Krempaszky C., Werner E., Hein G., Schörkhuber K.** Analytical modeling of thermo-mechanically induced residual stresses of work rolls during hot rolling // Steel Research International. Metal Forming. 2010. Vol. 81. No. 9. Pp. 697–802.
14. **Benasciutti D., de Bona F., Munteanu M.G.** A semi-analytical finite element approach in machine design of axisymmetric structures // Intech Open Access Publisher. 2011. Pp. 71–96.
15. **Benasciutti D., de Bona F., Munteanu M.G.** Work roll in hot strip rolling: A semianalytical approach for estimating temperatures and thermal stresses // Proceedings of 9th International Conference on Advanced Manufacturing Systems and Technology (AMST 11). 2011. Pp. 395–406.
16. **Benasciutti D., de Bona F., Munteanu M.G.** An harmonic 1d-element for nonlinear analysis of axisymmetric structures: The case of hot rolling // Pan-American Congress on Computational Mechanics “PANACM 2015”. XI Argentine Congress on Computational Mechanics “MECOM 2015”. S. Idelsohn, V. Sonzogni, A. Coutinho, et al. (Eds). 2015. Pp. 1–12.
17. **Sun C.G., Yun C.S., Chung J.S., Hwang S.M.** Investigation of thermomechanical behavior of a work roll and of roll life in hot strip rolling // Metallurgical and Materials Transactions. A. 1998. Vol. 29. No. 9. Pp. 2407–2424.
18. **Тимошенко С.П., Гудьер Дж. Н.** Теория упругости. Пер. с англ. М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит.-ры, 1975. 263 с.
19. **Лурье А.И.** Теория упругости. М.: Наука, 1970. 940 с.

Статья поступила в редакцию 04.10.2018, принята к публикации 26.12.2018.

СВЕДЕНИЯ ОБ АВТОРАХ

ПОЛЯНСКИЙ Сергей Владимирович – стажер-исследователь Института проблем машиноведения Российской академии наук, Санкт-Петербург, Российская Федерация.

199178, Российская Федерация, г. Санкт-Петербург, Большой проспект В.О., 61.

svpolyanskiy@gmail.com



БЕЛЯЕВ Александр Константинович – доктор физико-математических наук, директор Института проблем машиноведения Российской академии наук; профессор кафедры механики и процессов управления Института прикладной математики и механики Санкт-Петербургского политехнического университета Петра Великого, Санкт-Петербург, Российская Федерация.

195251, Российская Федерация, г. Санкт-Петербург, Политехническая ул., 29
vice.ipme@gmail.com

REFERENCES

- [1] **R.G. Keanini**, Inverse estimation of surface heat flux distributions during high speed rolling using remote thermal measurements, *International Journal of Heat and Mass Transfer*. 41 (2) (1998) 275–285.
- [2] **O.U. Khan, A. Jamal, G.M. Arshed, et al.**, Thermal analysis of a cold rolling process – A numerical approach, *Numerical Heat Transfer, Part A: Applications*. 46 (6) (2004) 613–632.
- [3] **D. Benasciutti**, On thermal stress and fatigue life evaluation in work rolls of hot rolling mill, *The Journal of Strain Analysis for Engineering Design*. 47 (5) (2012) 297–312.
- [4] **A. Saxena, Y. Sahai**, Modeling of fluid flow and heat transfer in twin-roll casting of aluminum alloys, *Materials Transactions*. 43 (2) (2002) 206–213.
- [5] **W.B. Lai, T.C. Chen, C.I. Weng**, Transient thermal stresses of work roll by coupled thermoelasticity, *Computational Mechanics*. 9 (1) (1991) 55–71.
- [6] **A. Saxena, Y. Sahai**, Modeling of thermo-mechanical stresses in twin-roll casting of aluminum alloys, *Materials Transactions*. 43 (2) (2002) 214–221.
- [7] **S. Serajzadeh**, Effects of rolling parameters on work-roll temperature distribution in the hot rolling of steels, *The International Journal of Advanced Manufacturing Technology*. 35 (9–10) (2008) 859–866.
- [8] **D. Benasciutti, E. Brusa, G. Bazzaro**, Finite elements prediction of thermal stresses in work roll of hot rolling mills, *Procedia Engineering*. 2 (1) (2010) 707–716.
- [9] **M. Toparli, F. Sen, O. Culha, E. Celic**, Thermal stress analysis of HVOF sprayed WC–Co/NiAl multilayer coatings on stainless steel substrate using finite element methods, *Journal of Materials Processing Technology*. 190 (1) (2007) 26–32.
- [10] **C. Li, H. Yu, G. Deng, et al.**, Numerical simulation of temperature field and thermal stress field of work roll during hot strip rolling, *Journal of Iron and Steel Research, International*. 14 (5) (2007) 18–21.
- [11] **A. Tudor, C. Radulescu, I. Petre**, Thermal effect of the brake shoes friction on the wheel/rail contact, *Tribology in Industry*. 25 (1–2) (2003) 27–32.
- [12] **R.E. Johnson, R.G. Keanini**, An asymptotic model of work roll heat transfer in strip rolling, *International Journal of Heat and Mass Transfer*. 41 (6) (1998) 871–879.
- [13] **M. Dünckelmeyer, C. Krempaszky, E. Werner, et al.**, Analytical modeling of thermo-mechanically induced residual stresses of work rolls during hot rolling, *Steel Research International, Metal Forming*. 81 (9) (2010) 697–802.
- [14] **D. Benasciutti, F. de Bona, M.G. Munteanu**, A semi-analytical finite element approach in machine design of axisymmetric structures, *Intech Open Access Publisher*. (2011) 71–96.
- [15] **D. Benasciutti, F. de Bona, M.G. Munteanu**, Work roll in hot strip rolling: a semianalytical approach for estimating temperatures and thermal stresses, *Proceedings of 9th International Conference on Advanced Manufacturing Systems and Technology (AMST 11)* (2011) 395–406.
- [16] **D. Benasciutti, F. de Bona, M.G. Munteanu**, An harmonic 1d-element for nonlinear analysis of axisymmetric structures: The case of hot rolling, *Pan-American Congress on Computational Mechanics – PANACM 2015*, In conjunction with the 11th Argentine Congress on Computational Mechanics – MECOM 2015, S. Idelsohn, V. Sonzogni, A. Coutinho, et al. (Eds). (2015) 1–12.
- [17] **C.G. Sun, C.S. Yun, J.S. Chung, S.M. Hwang**, Investigation of thermomechanical behavior of a work roll and of roll life in hot strip rolling, *Metallurgical and Materials Transactions A*. 29 (9) (1998) 2407–2424.
- [18] **S.P. Timoshenko, J.N. Goodier**, *Theory of elasticity*. New-York, Toronto, London, McGraw-Hill Book Comp., Inc. 1951.
- [19] **A.I. Lurie**, *Theory of elasticity*, Springer, 2010.

THE AUTHORS

POLYANSKIY Sergey V.

Institute for Problems in Mechanical Engineering of the RAS
61 Bolshoi Ave. V.O., St. Petersburg, 199178, Russian Federation
svpolyanskiy@gmail.com

BELYAEV Alexander K.

Institute for Problems in Mechanical Engineering of the RAS
Peter the Great St. Petersburg Polytechnic University
29 Politechnicheskaya St., St. Petersburg, 195251, Russian Federation
vice.ipme@gmail.com