DOI: 10.18721/JPM.12204
УДК 517.51; 517.28; 517.983; 537.213, 537.8

ОБОБЩЕНИЕ ФОРМУЛЫ ТОМСОНА ДЛЯ ГАРМОНИЧЕСКИХ ОДНОРОДНЫХ ФУНКЦИЙ

А.С. Бердников[1], Л.Н. Галль[1], Н.Р. Галль[1], К.В. Соловьев[2,1]

[1]Институт аналитического приборостроения Российской академии наук,
Санкт-Петербург, Российская Федерация;

[2]Санкт-Петербургский политехнический университет Петра Великого,
Санкт-Петербург, Российская Федерация

В работе показано, что формулу Томсона для трехмерных гармонических функций, однородных по Эйлеру, можно обобщить, если вместо чисто алгебраических линейных выражений использовать линейную алгебраическую форму с участием частных производных первого порядка от исходной функции. Приводится исчерпывающий список получающихся выражений первого порядка, преобразующих произвольные трехмерные однородные гармонические функции в новые трехмерные гармонические функции.

Ключевые слова: электростатическое поле, магнитостатическое поле, скалярный потенциал, уравнение Лапласа, формула Томсона

Ссылка при цитировании: Бердников А.С., Галль Л.Н., Галль Н.Р., Соловьев К.В. Обобщение формулы Томсона для гармонических однородных функций // Научно-технические ведомости СПбГПУ. Физико-математические науки. 2019. Т. 12. № 2. С. 49–62. DOI: 10.18721/JPM.12204

GENERALIZATION OF THE THOMSON FORMULA FOR HOMOGENEOUS HARMONIC FUNCTIONS

A.S. Berdnikov[1], L.N. Gall[1], N.R. Gall[1], K.V. Solovyev[2,1]

[1]Institute for Analytical Instrumentation of the Russian Academy of Sciences,
St. Petersburg, Russian Federation;

[2]Peter the Great St. Petersburg Polytechnic University, St. Petersburg, Russian Federation

In the paper, it has been shown that the Thomson formula for three-dimensional harmonic homogeneous functions in Euler terms can be generalized using a linear algebraic form involving the first order partial derivatives of the initial function instead of pure algebraic linear expressions. An exhaustive list of the formed first order expressions converting arbitrary three-dimensional harmonic functions in Euler terms into new three-dimensional homogeneous harmonic functions was presented.

Keywords: electrostatic field, magnetostatic field, scalar potential, homogeneous function, harmonic function

Citation: Berdnikov A.S., Gall L.N., Gall N.R., Solovyev K.V., Generalization of the Thomson formula for homogeneous harmonic functions, St. Petersburg Polytechnical State University Journal. Physics and Mathematics. 12 (2) (2019) 49–62. DOI: 10.18721/JPM.12204

Введение

Данная публикация является продолжением работы [1], посвященной исследованию обобщений формулы Томсона для трехмерных гармонических функций общего вида. Рассматриваются дифференциально-алгебраические преобразования, являющиеся аналогом классической формулы Томсона для однородных гармонических функций. Эти преобразования можно использовать для генерирования новых гармонических функций, которые представлены в аналитической форме и являются однородными по Эйлеру. Электрические и магнитные поля, у которых скалярный потенциал (трехмерная гармоническая функция) будет однородной по Эйлеру функцией, подчиняются принципу подобия траекторий Ю.К. Голикова [2, 3]. Такие поля обладают дополнительными полезными электронно- и ионно-оптическими свойствами [4 – 10].

Пусть $r=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$ — расстояние от пробной точки (x,y,z) до начала координат. Формулой Томсона (преобразованием Кельвина) называется преобразование

$$V(x,y,z)=\frac{1}{r}U\left(\frac{x}{r^2},\frac{y}{r^2},\frac{z}{r^2}\right). \qquad (1)$$

Это преобразование позволяет из гармонической функции $U(x,y,z)$, удовлетворяющей уравнению Лапласа

$$U_{xx}+U_{yy}+U_{zz}=0, \qquad (2)$$

получить новую гармоническую функцию $V(x,y,z)$ [11 – 18]. Здесь и далее нижние индексы x, y, z обозначают частные производные по соответствующим переменным.

В частности, формула Томсона (1) служит полезным математическим инструментом при генерировании аналитических выражений для скалярных потенциалов электрических и магнитных полей, которые могут использоваться при синтезе новых электронно- и ионно-оптических систем [4 – 10, 19, 20].

Функция $U(x,y,z)$ называется однородной (точнее, положительно однородной) по Эйлеру, если она удовлетворяет тождеству

$$\forall\lambda>0:\ U(\lambda x,\lambda y,\lambda z)\equiv\lambda^m U(x,y,z),$$

где m — степень однородности функции (не обязательно целочисленная). [21, 22].

Для того, чтобы непрерывно дифференцируемая функция $U(x,y,z)$ была положительно однородной по Эйлеру степени m, необходимо и достаточно, чтобы в любой точке пространства (за исключением, возможно, начала координат) выполнялось дифференциальное соотношение Эйлера для однородных функций:

$$xU_x+yU_y+zU_z-mU=0. \qquad (3)$$

Доказательство этого важного утверждения можно найти в работах [21, 22].

Поиск среди линейных алгебраических формул вида

$$V(x,y,z)=S(x,y,z)\times \\ \times U\big(f(x,y,z),g(x,y,z),h(x,y,z)\big) \qquad (4)$$

(S, f, g, h – некоторые фиксированные функции) других соотношений, обладающих свойством для любых гармонических функций $U(x,y,z)$ порождать новые гармонические функции $V(x,y,z)$, показал, что формула Томсона (1) является, в некотором смысле, уникальной [1, 15, 17].

Дело в том, что с точностью до трехмерных вращений вокруг начала координат, сдвигов (параллельных переносов)

$$x'=x+a,\ y'=y+b,\ z'=z+c,$$

симметрий

$$x'=-x,\ y'=-y,\ z'=-z$$

и пропорционального масштабирования

$$x'=kx,\ y'=ky,\ z'=kz$$

(а также умножения полученных потенциалов на множитель-константу) формула Томсона (1) и тривиальное тождество $V(x,y,z)=U(x,y,z)$ будут единственными выражениями вида (4), удовлетворяющими поставленной задаче.

Исследование линейных выражений с участием первых частных производных от функции U, которые имеют вид

$$\begin{aligned} V(x,y,z)= \\ =S(x,y,z)\cdot U\big(f(x,y,z),g(x,y,z),h(x,y,z)\big)+ \\ +P(x,y,z)\cdot U_x\big(f(x,y,z),g(x,y,z),h(x,y,z)\big)+ \\ +Q(x,y,z)\cdot U_y\big(f(x,y,z),g(x,y,z),h(x,y,z)\big)+ \\ +R(x,y,z)\cdot U_z\big(f(x,y,z),g(x,y,z),h(x,y,z)\big) \end{aligned} \qquad (5)$$

(S, P, Q, R, f, g, h – некоторые фиксированные функции), показало возможность существования дополнительных формул, преобразующих трехмерные гармонические функции в новые трехмерные гармониче-

ские функции [1].

Теперь трансформирующие преобразования являются уже не чисто алгебраическими, а дифференциально-алгебраическими. Это позволяет расширить набор доступных математических инструментов при генерировании новых трехмерных гармонических функций, служащих скалярными потенциалами для электрических и магнитных полей.

Увеличение порядка частных производных от функции U, которые участвуют в выражении вида (5), приводит к дополнительному расширению списка таких формул, но отчасти делает неудобным процесс оперирования с ними. В частности, по причине зависимости друг от друга вторых производных гармонических функций, такие формулы не будут определены однозначно. А именно, для каждой трансформирующей формулы будет иметься широкий набор таких формул, не эквивалентных друг другу алгебраически по внешнему виду, но дающих на выходе ничем не отличающийся по сути результат.

Следует отметить, однако, что количество полученных в работе [1] трансформирующих преобразований, сохраняющих гармоничность трехмерной гармонической функции, оказалось меньше ожидаемого. Одной из причин отрицательного результата при поиске новых алгебраических и дифференциально-алгебраических выражений первого порядка для генерирования трехмерных гармонических функций, является, по-видимому, слишком жесткое требование, что эти выражения должны работать для любых исходных гармонических функций $U(x,y,z)$. Так, хорошо известно, что для двумерных гармонических функций $U(x,y)$ любое конформное преобразование аргументов будет порождать новую двумерную гармоническую функцию [23 – 27]. Такое преобразование гармонических функций имеет вид (4), но при этом существенно отличается от формулы Томсона (1).

Другим примером служит формула Томсона для однородных гармонических функций (см. работы [28] и [29], приложение Б к главе 1), имеющая вид

$$V(x,y,z) = r^{-2m-1}U(x,y,z). \qquad (6)$$

При подстановке в формулу (6) однородной гармонической функции U степени m функция (6) окажется гармонической, но для произвольной гармонической функции U это определенно не так.

Наконец, рассмотрим трансформирующие преобразования вида

$$\begin{gathered}
V(x,y,z) = CU_x(x,y,z) + \\
+BU_y(x,y,z) + AU_z(x,y,z); \\
A = a(2m+1)xz + b(2m+1)yz + \\
+c\left(-mx^2 - my^2 + (m+1)z^2\right); \\
B = a(2m+1)xy + \\
+b\left(-mx^2 + (m+1)y^2 - mz^2\right) + \\
+c(2m+1)yz; \\
C = a\left((m+1)x^2 - my^2 - mz^2\right) + \\
+b(2m+1)xy + c(2m+1)xz,
\end{gathered} \qquad (7)$$

которые можно получить при анализе условий гармоничности линейных форм от частных производных U_x, U_y, U_z с коэффициентами, представляющими собой квадратичные формы общего вида по переменным x, y, z. Из тождества

$$\begin{gathered}
V_{xx} + V_{yy} + V_{zz} \equiv \\
\equiv (4m+2)(ax+by+cz)\left(U_{xx} + U_{yy} + U_{zz}\right) + \\
+C\left(U_{xxx} + U_{xyy} + U_{xzz}\right) + B\left(U_{xxy} + U_{yyy} + U_{yzz}\right) + \\
+A\left(U_{xxz} + U_{yyz} + U_{zzz}\right) + \\
+2a\left(xU_{xx} + yU_{xy} + zU_{xz} - (m-1)U_x\right) + \\
+2b\left(xU_{xy} + yU_{yy} + zU_{yz} - (m-1)U_y\right) + \\
+2c\left(xU_{xz} + yU_{yz} + zU_{zz} - (m-1)U_z\right)
\end{gathered}$$

следует, что, вообще говоря, при требовании для функции U одной лишь гармоничности, выражение (7) будет гармонической функцией, только если

$$a = b = c = 0.$$

Если же U является однородной функцией степени m и удовлетворяет как уравнению Лапласа (2), так и дифференциальному соотношению Эйлера (3), то будут выполнены условия

$$U_{xxx} + U_{xyy} + U_{xzz} = 0,$$

$$U_{xxy} + U_{yyy} + U_{yzz} = 0,$$

$$U_{xxz} + U_{yyz} + U_{zzz} = 0,$$

$$xU_{xx} + yU_{xy} + zU_{xz} = (m-1)U_x,$$
$$xU_{xy} + yU_{yy} + zU_{yz} = (m-1)U_y,$$
$$xU_{xz} + yU_{yz} + zU_{zz} = (m-1)U_z,$$

которые получаются при дифференцировании (2) и (3) по x, y, z.

Тогда выражение (7) окажется гармонической однородной функцией степени $(m+1)$ при любых a, b, c.

Задача данной работы – поиск альтернативных выражений, которые были бы применимы для однородных трехмерных гармонических функций и полезны при генерировании аналитических выражений для трехмерных гармонических функций, являющихся однородными по Эйлеру.

Имеются веские основания полагать, что при ограничении класса трансформируемых гармонических функций можно значительно расширить набор трансформирующих математических выражений.

Постановка задачи

Рассмотрим трансформацию трехмерной однородной гармонической функции $U(x,y,z)$ в соответствии с правилом (5), где S, P, Q, R, f, g, h – некоторые фиксированные функции, а U – произвольная однородная гармоническая функция фиксированной степени m. Требуется, чтобы для заданных функций S, P, Q, R, f, g, h и любых однородных гармонических функций U степени m выражение (5) было гармонической функцией, однородной по Эйлеру.

Поскольку функция U должна удовлетворять дифференциальному соотношению Эйлера (3), в выражении (5) без ограничения общности можно считать, что

$$R(x, y, z) = 0$$

(частная производная U_z может быть выражена через функции U, U_x, U_y).

Кроме того, ограничимся частным случаем

$$f(x,y,z) \equiv x,\ g(x,y,z) \equiv y,$$
$$h(x,y,z) \equiv z,$$

который есть следствие рассматриваемого в работе [1] симметричного варианта замены переменных

$$f(x,y,z) = x\varphi(x,y,z),$$
$$g(x,y,z) = y\varphi(x,y,z),$$
$$h(x,y,z) = z\varphi(x,y,z)$$

(здесь общий множитель $\varphi(x,y,z)$ выносится из-под аргументов функций U, U_x, U_y и U_z в силу того, что эти функции являются однородными по Эйлеру).

Таким образом, далее будут рассматриваться трансформации вида

$$V(x,y,z) = S_0(x,y,z)\cdot U(x,y,z) + P_0(x,y,z)\cdot U_x(x,y,z) + Q_0(x,y,z)\cdot U_y(x,y,z), \quad (8)$$

где S_0, P_0, Q_0 – некоторые фиксированные функции, обеспечивающие однородность и гармоничность функции V при условии однородности и гармоничности функции U, имеющей заданную степень однородности m.

Для того, чтобы выражение (5) было однородной по Эйлеру функцией при подстановке в него произвольной однородной гармонической функции U, функции S, P, Q, R, f, g, h в выражении (5) должны удовлетворять некоторым дополнительным условиям.

В частности, для выражений вида (8) можно показать, что условие, согласно которому функция S_0 является однородной по Эйлеру степени $n - m$, а функции P_0 и Q_0 являются однородными по Эйлеру степени $n - m + 1$, есть не только достаточное, но и необходимое, чтобы выражение (8) оказалось однородной функцией степени n.

При доказательстве необходимости свойства однородности по Эйлеру у функций S_0, P_0 и Q_0, для функции U используется ее однородность по Эйлеру без привлечения свойства гармоничности. При этом потребуется проверка, что для гармонических однородных функций не появляется дополнительных вариантов, отсутствующих в случае произвольных однородных функций. Однако ограничительные требования

$$f(x,y,z) = x,\ g(x,y,z) = y,$$
$$h(x,y,z) = z,\ R(x,y,z) = 0$$

гарантируют, что других возможных вариантов для функций S_0, P_0 и Q_0 не имеется.

Очевидный метод решения поставленной задачи состоит в том, чтобы из результата подстановки выражения (5) или (8) в уравнение Лапласа и в дифференциальное соотношение Эйлера удалить все зависимые частные производные функции U. После этого множители, сгруппированные перед оставшимися частными производными функции U, будут обязаны быть равными

нулю по отдельности и независимо друг от друга. «Лишние» производные следует исключать, пользуясь не только уравнением Лапласа

$$U_{xx} + U_{yy} + U_{zz} = 0,$$

как это было сделано в работе [1], но и дифференциальным соотношением Эйлера

$$xU_x + yU_y + zU_z = mU$$

для однородных функций степени m, а также результатами дифференцирования указанных уравнений по переменным x, y, z.

Задача несколько осложняется тем фактом, что при независимом дифференцировании уравнения Лапласа и дифференциального соотношения Эйлера возникают зависимые друг от друга дифференциальные соотношения:

$$\begin{aligned}&\left(xU_{xxx} + yU_{xxy} + zU_{xxz} - (m-2)U_{xx}\right) + \\ &+\left(xU_{xyy} + yU_{yyy} + zU_{yyz} - (m-2)U_{yy}\right) + \\ &+\left(xU_{xzz} + yU_{yzz} + zU_{zzz} - (m-2)U_{zz}\right) \equiv \\ &\equiv x\left(U_{xxx} + U_{xyy} + U_{xzz}\right) + \\ &+y\left(U_{xxy} + U_{yyy} + U_{yzz}\right) + \\ &+z\left(U_{xxz} + U_{yyz} + U_{zzz}\right) - \\ &-(m-2)\left(U_{xx} + U_{yy} + U_{zz}\right).\end{aligned}$$

Однако существует более эффективный способ решения поставленной задачи. Поскольку $U(x,y,z)$ является однородной по Эйлеру функцией степени m, то с помощью замены переменных, использующейся для формулы Донкина [7 – 10, 30 – 34], ее можно представить в виде

$$U(x,y,z) = r^m F\left(\frac{x}{z+r}, \frac{y}{z+r}\right), \qquad (9)$$

где $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$, F – некоторая подходящая функция двух переменных.

Такая запись является слегка измененной формой универсального представления однородных функций степени k в соответствии с формулой [21, 22]:

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = x_1^k g(x_2/x_1, \ldots x_n/x_1);$$

она не приводит к потере допустимых решений.

Соответственно, трансформированную функцию $V(x,y,z)$, которая должна будет являться однородной по Эйлеру функцией степени n, можно представить в виде

$$V(x,y,z) = r^n G\left(\frac{x}{z+r}, \frac{y}{z+r}\right). \qquad (10)$$

Замена переменных, использованная при конструировании подстановок (9) и (10), является обратимой:

$$\begin{cases} p = \dfrac{x}{z + \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}, \\ q = \dfrac{y}{z + \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}, \\ r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}, \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = \dfrac{2pr}{1 + p^2 + q^2}, \\ y = \dfrac{2qr}{1 + p^2 + q^2}, \\ z = \pm\dfrac{r\left(1 - p^2 - q^2\right)}{1 + p^2 + q^2}. \end{cases} \qquad (11)$$

Для того, чтобы функция U, заданная с помощью равенства (9), была гармонической, т. е. удовлетворяла трехмерному уравнению Лапласа, необходимо и достаточно, чтобы функция F удовлетворяла двумерному эллиптическому уравнению

$$\frac{\partial^2 F(p,q)}{\partial p^2} + \frac{\partial^2 F(p,q)}{\partial q^2} + \\ + \frac{4m(m+1)}{\left(1 + p^2 + q^2\right)^2} F(p,q) = 0. \qquad (12)$$

Тогда любой однородной гармонической функции U степени m соответствует функция F, удовлетворяющая уравнению (12), а из любого решения уравнения (12) с помощью подстановки (9) получается однородная гармоническая функция степени n, причем указанное соответствие между функциями F и U будет взаимно-однозначным. Это утверждение проверяется с помощью прямой подстановки выражения (9) в трехмерное уравнение Лапласа с последующей заменой переменных согласно правилу (11). Аналогичный прием используется, например, в работах [35 – 39].

Легко понять, что преобразование функции U, согласно правилу (8), которое долж-

но приводить к появлению новой однородной гармонической функции V степени n, эквивалентно преобразованию функции F, согласно правилу

$$G(p,q)=s(p,q)F(p,q)+ \\ +v(p,q)\frac{\partial F(p,q)}{\partial p}+w(p,q)\frac{\partial F(p,q)}{\partial q} \quad (13)$$

с некоторыми фиксированными функциями

$$s(p,q),\ v(p,q),\ w(p,q),$$

после чего функция G обязана будет удовлетворять уравнению

$$\frac{\partial^2 G(p,q)}{\partial p^2}+\frac{\partial^2 G(p,q)}{\partial q^2}+ \\ +\frac{4n(n+1)}{\left(1+p^2+q^2\right)^2}G(p,q)=0. \quad (14)$$

В итоге задача свелась к нахождению таких функций $s(p,q)$, $v(p,q)$, $w(p,q)$ и таких индексов m, n, которые бы для любого решения дифференциального уравнения (12) после преобразования (13) порождали бы решения дифференциального уравнения (14). При этом на функции F и G не накладывается никаких дополнительных условий, кроме собственно уравнений (12) и (14).

Решение задачи

После подстановки выражения (13) в уравнение (14) получается линейная комбинация частных производных

$$F,\ F_p,\ F_q,\ F_{pp},\ F_{pq}, \\ F_{qq},\ F_{ppp},\ F_{ppq},\ F_{pqq},\ F_{qqq}$$

(нижние индексы обозначают переменные, по которым берутся соответствующие частные производные).

Производные F_{qq}, F_{pqq}, F_{qqq} являются зависимыми, и их можно выразить через остальные частные производные с помощью уравнения (12). После этого множители, сгруппированные перед оставшимися частными производными

$$F,\ F_p,\ F_q,\ F_{pp},\ F_{pq},\ F_{ppp},\ F_{ppq},$$

должны оказаться равными нулю, если требуется, чтобы функция G удовлетворяла уравнению (14) для любого решения уравнения (12). Полученная система уравнений имеет вид:

$$v_p-w_q=0,\ v_q+w_p=0,$$

$$v_{pp}+v_{qq}+v\frac{4\left(n(n+1)-m(m+1)\right)}{\left(1+p^2+q^2\right)^2}=-2s_p,$$

$$w_{pp}+w_{qq}+w\frac{4\left(n(n+1)-m(m+1)\right)}{\left(1+p^2+q^2\right)^2}=-2s_q,$$

$$s_{pp}+s_{qq}+s\frac{4\left(n(n+1)-m(m+1)\right)}{\left(1+p^2+q^2\right)^2}= \\ =-\frac{16m(m+1)}{\left(1+p^2+q^2\right)^3}(pv+qw)+ \\ +\frac{4m(m+1)}{\left(1+p^2+q^2\right)^2}\left(v_p+w_q\right).$$

Анализ полученной переопределенной системы уравнений в частных производных относительно неизвестных функций $s(p,q)$, $v(p,q)$, $w(p,q)$ с помощью методов [40 – 46] приводит к следующим невырожденным решениям, исчерпывающим все возможные случаи.

а) $n = -2 - m$ или $n = 1 + m$:

$$\begin{cases} s(p,q)=\dfrac{(m+1)}{1+p^2+q^2}\times \\ \times\left(4c_a p+4c_b q+c_c\left(1-p^2-q^2\right)\right), \\ v(p,q)=c_c p+2c_b pq+c_a\left(-1+p^2-q^2\right), \\ w(p,q)=c_c q+2c_a pq+c_b\left(-1-p^2+q^2\right), \end{cases}$$

где c_a, c_b, c_c – произвольные константы;

б) $n = -1 + m$ или $n = -m$:

$$\begin{cases} s(p,q)=\dfrac{-m}{1+p^2+q^2}\times \\ \times\left(4c_a p+4c_b q+c_c\left(1-p^2-q^2\right)\right), \\ v(p,q)=c_c p+2c_b pq+c_a\left(-1+p^2-q^2\right), \\ w(p,q)=c_c q+2c_a pq+c_b\left(-1-p^2+q^2\right), \end{cases}$$

где c_a, c_b, c_c – также произвольные константы;

в) $n = m$ или $n = -1 - m$:

$$\begin{cases} s(p,q)=c, \\ v(p,q)=-c_c q+2c_b pq+c_a\left(1+p^2-q^2\right), \\ w(p,q)=c_c p+2c_a pq+c_b\left(1-p^2+q^2\right), \end{cases}$$

где c, c_a, c_b, c_c – произвольные константы.

Кроме того, имеются вырожденные решения. Первое из них имеет вид

$$s(p,q) = 0,\ v(p,q) = 0,\ w(p,q) = 0$$

и не представляет особого интереса.

Второе решение соответствует выбору

$$m = 0,\ n = 0,$$
$$\text{либо } m = 0,\ n = -1,$$
$$\text{либо } m = -1,\ n = 0,$$
$$\text{либо } m = -1,\ n = -1.$$

В этих случаях уравнения (12) и (14) превращаются в двумерные уравнения Лапласа, а преобразование (13) приобретает вид

$$G(p,q) = cF(p,q) + v(p,q)F_p(p,q) + \\ + w(p,q)F_q(p,q), \tag{15}$$

где c – константа, а функции $v(p,q)$, $w(p,q)$ удовлетворяют условиям Коши – Римана

$$v_p = w_q,\ v_q = -w_p,$$

т. е. являются вещественной и мнимой частями аналитической функции комплексного переменного

$$u(p + iq) = v(p,q) + iw(p,q).$$

Физический смысл уравнения (15) достаточно прост: умножение на константу превращает решение двумерного уравнения Лапласа в решение двумерного уравнения Лапласа, а произведение двух аналитических функций комплексного переменного

$$v(p,q) + iw(p,q),\ F_p(p,q) - iF_q(p,q)$$

снова дает аналитическую функцию комплексного переменного, вещественная и мнимая части которой обязаны удовлетворять двумерному уравнению Лапласа [24 – 27, 36].

Однако это любопытное вырожденное решение не слишком интересно в качестве генератора новых однородных гармонических функций, поскольку вещественные и мнимые части аналитических функций комплексного переменного обеспечивают вполне достаточный ресурс для решений двумерного уравнения Лапласа. При этом все трехмерные однородные гармонические функции со степенями однородности 0 и –1 можно получить с помощью формул Донкина [7 – 10, 30 – 34]:

$$V(x,y,z) = H\left(\frac{x}{z+r}, \frac{y}{z+r}\right),$$

$$V(x,y,z) = \frac{1}{r}H\left(\frac{x}{z+r}, \frac{y}{z+r}\right),$$

где H – решение двумерного уравнения Лапласа.

В конечном итоге получаются следующие трансформирующие выражения вида (8):

$$V(x,y,z) = U(x,y,z), \tag{16}$$

$$V(x,y,z) = U_x(x,y,z), \tag{17}$$

$$V(x,y,z) = U_y(x,y,z), \tag{18}$$

$$V(x,y,z) = \frac{m}{z}U(x,y,z) - \\ - \frac{x}{z}U_x(x,y,z) - \frac{y}{z}U_y(x,y,z), \tag{19}$$

$$V(x,y,z) = (2m+1)xU(x,y,z) - \\ - r^2U_x(x,y,z), \tag{20}$$

$$V(x,y,z) = (2m+1)yU(x,y,z) - \\ - r^2U_y(x,y,z), \tag{21}$$

$$V(x,y,z) = \frac{-mr^2 + (2m+1)z^2}{z}U(x,y,z) + \\ + \frac{xr^2}{z}U_x(x,y,z) + \frac{yr^2}{z}U_y(x,y,z), \tag{22}$$

$$V(x,y,z) = yU_x(x,y,z) - xU_y(x,y,z), \tag{23}$$

$$V(x,y,z) = -\frac{mx}{z}U(x,y,z) + \\ + \frac{x^2+z^2}{z}U_x(x,y,z) + \frac{xy}{z}U_y(x,y,z), \tag{24}$$

$$V(x,y,z) = -\frac{my}{z}U(x,y,z) + \\ + \frac{xy}{z}U_x(x,y,z) + \frac{y^2+z^2}{z}U_y(x,y,z), \tag{25}$$

$$V(x,y,z) = \frac{1}{r^{2m+1}}U(x,y,z), \tag{26}$$

$$V(x,y,z) = \frac{1}{r^{2m-1}}U_x(x,y,z), \tag{27}$$

$$V(x,y,z)=\frac{1}{r^{2m-1}}U_y(x,y,z), \tag{28}$$

$$V(x,y,z)=\frac{m}{zr^{2m-1}}U(x,y,z)- \tag{29}$$
$$-\frac{x}{zr^{2m-1}}U_x(x,y,z)-\frac{y}{zr^{2m-1}}U_y(x,y,z),$$

$$V(x,y,z)=\frac{(2m+1)x}{r^{2m+3}}U(x,y,z)- \tag{30}$$
$$-\frac{1}{r^{2m+1}}U_x(x,y,z),$$

$$V(x,y,z)=\frac{(2m+1)y}{r^{2m+3}}U(x,y,z)- \tag{31}$$
$$-\frac{1}{r^{2m+1}}U_y(x,y,z),$$

$$V(x,y,z)=\frac{(2m+1)z^2-mr^2}{zr^{2m+3}}U(x,y,z)+ \tag{32}$$
$$+\frac{x}{zr^{2m+1}}U_x(x,y,z)+\frac{y}{zr^{2m+1}}U_y(x,y,z),$$

$$V(x,y,z)=\frac{y}{r^{2m+1}}U_x(x,y,z)- \tag{33}$$
$$-\frac{x}{r^{2m+1}}U_y(x,y,z),$$

$$V(x,y,z)=-\frac{mx}{zr^{2m+1}}U(x,y,z)+ \tag{34}$$
$$+\frac{x^2+z^2}{zr^{2m+1}}U_x(x,y,z)+\frac{xy}{zr^{2m+1}}U_y(x,y,z),$$

$$V(x,y,z)=-\frac{my}{zr^{2m+1}}U(x,y,z)+ \tag{35}$$
$$+\frac{xy}{zr^{2m+1}}U_x(x,y,z)+\frac{y^2+z^2}{zr^{2m+1}}U_y(x,y,z),$$

где $r=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$.

Наличие в знаменателе переменной z обычно свидетельствует о том, что в формуле неявным образом присутствует производная U_z с некоторым ненулевым множителем, которая впоследствии, из-за использования соотношения Эйлера (3) для исключения зависимой производной U_z, превратилась в линейную комбинацию функций U, U_x и U_y. В результате некоторые выражения можно упростить, избавившись от переменной z в знаменателе:

$$V(x,y,z)=U_z(x,y,z), \tag{19a}$$

$$V(x,y,z)=(2m+1)zU(x,y,z)- \tag{22a}$$
$$-r^2U_z(x,y,z),$$

$$V(x,y,z)=zU_x(x,y,z)-xU_z(x,y,z), \tag{24a}$$

$$V(x,y,z)=zU_y(x,y,z)-yU_z(x,y,z), \tag{25a}$$

$$V(x,y,z)=\frac{1}{r^{2m-1}}U_z(x,y,z), \tag{29a}$$

$$V(x,y,z)=\frac{(2m+1)z}{r^{2m+3}}U(x,y,z)- \tag{32a}$$
$$-\frac{1}{r^{2m+1}}U_z(x,y,z),$$

$$V(x,y,z)=\frac{z}{r^{2m+1}}U_x(x,y,z)- \tag{34a}$$
$$-\frac{x}{r^{2m+1}}U_z(x,y,z),$$

$$V(x,y,z)=\frac{z}{r^{2m+1}}U_y(x,y,z)- \tag{35a}$$
$$-\frac{y}{r^{2m+1}}U_z(x,y,z).$$

Заключение

В работе показано, что формулу Томсона для трехмерных гармонических функций, однородных по Эйлеру, можно обобщить, если вместо чисто алгебраических линейных выражений использовать линейную алгебраическую форму (5) с участием частных производных первого порядка от исходной функции. Приводится исчерпывающий список полученных выражений первого порядка, преобразующих произвольные трехмерные однородные гармонические функции в новые трехмерные гармонические функции, которые можно получить, не прибегая к замене переменных в аргументах функции U.

Аккуратная проверка, впрочем, показывает, что все полученные выражения фактически представляют собой трансформирующие формулы для трехмерных гармонических функций общего вида из работы [1], которые упрощены с помощью предположения об однородности функции U и дифференциального соотношения Эйлера (3) для однородных функций [21, 22].

Можно получить и другие соотношения, если рассматривать линейные комбинации с постоянными коэффициентами, составленные из базовых соотношений (16) – (35),

которые соответствуют одной и той же степени однородности трансформированной функции. Кроме того, если прибавить к любой из формул (16) – (35) соотношение Эйлера (3), умноженное на произвольную однородную функцию соответствующей степени, то получится новая трансформирующая формула.

Например, такой линейной комбинацией является трансформирующая формула (7), которая с формальной точки зрения кардинальным образом отличается от полученных ранее базовых формул (16) – (35):

$$L[U]=\Big(a(2m+1)xz+b(2m+1)yz+$$
$$+c\big(-mx^2-my^2+(m+1)z^2\big)\Big)U_x+$$
$$+\Big(a(2m+1)xy+b\big(-mx^2+(m+1)y^2-mz^2\big)+$$
$$+c(2m+1)yz\Big)U_y+\Big(a\big((m+1)x^2-my^2-mz^2\big)+$$
$$+b(2m+1)xy+c(2m+1)xz\Big)U_z=$$
$$=(2m+1)(cx+by+az)\big(xU_x+yU_y+zU_z-mU\big)+$$
$$+mc\Big((2m+1)xU-\big(x^2+y^2+z^2\big)U_x\Big)+$$
$$+mb\Big((2m+1)yU-\big(x^2+y^2+z^2\big)U_y\Big)+$$
$$+ma\Big((2m+1)xU-\big(x^2+y^2+z^2\big)U_z\Big).$$

Однако, хотя подобные формулы визуально могут весьма заметно отличаться (в алгебраическом смысле) от полученного ранее списка, по своему действию в качестве генераторов новых аналитических выражений для трехмерных однородных гармонических функций эти формулы будут полностью эквивалентны базовым формулам (16) – (35). Аналогичные проблемы с фактической идентичностью математических выражений, не равных друг другу тождественно в алгебраическом смысле, описываются, например, в работах [47 – 50].

Вычисления, приводимые в данной работе, выполнены с помощью программы Wolfram Mathematica [51].

Данная работа частично выполнена в рамках гос. задания № 075-00780-19-00 Института аналитического приборостроения РАН.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Бердников А.С., Галль Л.Н., Галль Р.Н., Соловьев К.В.** Обобщение формулы Томсона для гармонических функций общего вида // Научно-технические ведомости СПбГПУ. Физико-математические науки. 2019. Т. 12. № 2. С.32–48.

2. **Голиков Ю.К., Краснова Н.К.** Обобщенный принцип подобия и его применение в электронной спектрографии // Прикладная физика. 2007. № 2. С. 5–11.

3. **Аверин И.А., Бердников А.С., Галль Н.Р.** Принцип подобия траекторий при движении заряженных частиц с разными массами в однородных по Эйлеру электрических и магнитных полях // Письма в Журнал технической физики. 2017. Т. 43. № 3. С. 39–43.

4. **Голиков Ю.К., Краснова Н.К.** Теория синтеза электростатических энергоанализаторов. СПб.: Изд-во Политехнического ун-та, 2010. 409 с.

5. **Голиков Ю.К., Краснова Н.К.** Электрические поля, однородные по Эйлеру, для электронной спектрографии // Журнал технической физики. 2011. Т. 81, № 2. С. 9–15.

6. **Краснова Н.К.** Теория и синтез диспергирующих и фокусирующих электронно-оптических сред. Дис. ... докт. физ.-мат. наук. 01.04.04. СПб.: СПбГПУ, 2013. 259 с.

7. **Габдуллин П.Г., Голиков Ю.К., Краснова Н.К., Давыдов С.Н.** Применение формулы Донкина в теории энергоанализаторов. I. // Журнал технической физики. 2000. Т. 70. № 2. С. 91–94.

8. **Габдуллин П.Г., Голиков Ю.К., Краснова Н.К., Давыдов С.Н.** Применение формулы Донкина в теории энергоанализаторов. II. // Журнал технической физики. 2000. Т. 70. № 3. С. 44–47.

9. **Голиков Ю.К., Краснова Н.К**. Аналитические структуры электрических обобщенно-однородныхспектрографических сред // Научное приборостроение. 2014. Т. 24. № 1. С. 50–58.

10. **Голиков Ю.К., Бердников А.С., Антонов А.С., Краснова Н.К., Соловьев К.В**. Применение формулы Донкина в теории электростатических призм // Журнал технической физики. 2018. Т. 88. № 11. С. 1711–1719.

11. **Thomson W.** Extraits de deux Lettres adressées à M. Liouville // Journal de

Mathématiques Pures et Appliquées. 1847. Tome XII. Pp. 256–264.

12. **Сретенский Л.Н.** Теория ньютоновского потенциала. Москва, Ленинград: ОГИЗ-ГИТТЛ, 1946. 318 с.

13. **Смирнов В.И.** Курс высшей математики. Т. 4. Ч. 2. М.: Наука, 1981. 297 с.

14. **Владимиров В.С.** Уравнения математической физики. М.: Наука, 1981. 512 с.

15. **Kellogg O.D.** Foundations of potential theory. Berlin, Heidelberg, New-York: Springer-Verlag, 1967. 386 p.

16. **Уэрмлер Дж.** Теория потенциала. М.: Мир, 1980. 134 с.

17. **Helms L.L.** Potential theory. 2nd Ed. London, Heidelberg, New-York, Dordrecht: Springer, 2014. 485 p.

18. **Голиков Ю.К.** Аналитические способы описания гармонических функций // Вестник Актюбинского регионального государственного университета им. К. Жубанова. Физико-математические науки. 2016. № 2 (44). С. 165–181.

19. **Голиков Ю.К., Уткин К.Г., Чепарухин В.В.** Расчет элементов электростатических электронно-оптических систем. Ленинград: Изд-во ЛПИ, 1984. 79 с.

20. **Голиков Ю.К., Соловьёв К.В.** Электростатические ионные ловушки. СПб.: Изд-во Политехнического ун-та, 2008. 152 с.

21. **Фихтенгольц Г.М.** Курс дифференциального и интегрального исчисления. Т. 1. М.: Физматлит, 2001. 616 с.

22. **Смирнов В.И.** Курс высшей математики. Т. 1. М.: Наука, 1974. 480 с.

23. **Коппенфельс В., Штальман Ф.** Практика конформных отображений. М.: Изд-во иностр. лит-ры, 1963. 406 с.

24. **Лаврентьев М.А., Шабат Б.В.** Методы теории функций комплексного переменного. М.: Наука, 1965. 716 с.

25. **Маркушевич А.И.** Теория аналитических функций. В 2 тт. М.: Наука, 1968. Т. 1. – 486 с., Т. 2 – 624 с.

26. **Евграфов М.А.** Аналитические функции. 3-е изд., перераб. и доп. М.: Наука, 1991. 448 с.

27. **Гурвиц А., Курант Р.** Теория функций. М.: Наука, 1968. 646 с.

28. **Томсон У. (лорд Кельвин), Тэт П.Г.** Трактат по натуральной философии. Ч. I. Москва, Ижевск: НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», 2010. 572 с.

29. **Томсон У. (лорд Кельвин), Тэт П.Г.** Трактат по натуральной философии. Ч. II. Москва, Ижевск: НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», 2011. 560 с.

30. **Donkin W.F.** On the equation of Laplace‘s functions &c. // Philosophical Transactions of the Royal Society of London. 1857. Vol. 147. Pp. 43–57.

31. **Donkin W.F.** On the equation of Laplace‘s functions &c. // Proceedings of the Royal Society of London. 1856 –1857. Vol. 8. Pp. 307–310.

32. **Гобсон Е.В.** Теория сферических и эллипсоидальных функций. М.: Изд-во иностр. лит-ры, 1952. 476 с.

33. **Уиттекер Э.Т., Ватсон Дж.** Курс современного анализа. Ч. 2: Трансцендентные функции. М.: Гос. изд-во физ.-мат. лит-ры, 1963. 516 с.

34. **Бердников А.С., Аверин И.А.** Краевые поля бессеточных электронных спектрографов с однородными по Эйлеру электростатическими полями // Успехи прикладной физики. 2016. Т. 4. № 1. С. 5–8.

35. **Бердников А.С., Аверин И.А., Краснова Н.К., Соловьёв К.В.** Общие формулы для трехмерных электрических и магнитных потенциалов, однородных по Эйлеру с целочисленным порядком однородности // Научное приборостроение. 2016. Т. 26. № 4. С. 13–30.

36. **Бердников А.С., Краснова Н.К., Соловьев К.В.** Анализ интегральной формулы Уиттекера общего вида для электрических и магнитных потенциалов, однородных по Эйлеру // Научное приборостроение. 2017. Т. 27. № 4. С. 63–71.

37. **Бердников А.С., Краснова Н.К., Соловьев К.В.** Интегральная формула Уиттекера для электрических и магнитных потенциалов с нулевым порядком однородности и ее следствия // Научное приборостроение. 2017. Т. 27. № 4. С. 72–79.

38. **Голиков Ю.К., Бердников А.С., Антонов А.С., Краснова Н.К., Соловьев К.В.** Синтез электродных конфигураций, сохраняющих для краевых электрических полей свойство однородности по Эйлеру // Журнал технической физики. 2018. Т. 88. № 4. С. 609–613.

39. **Бердников А.С., Галль Л.Н., Антонов А.С., Соловьев К.В.** Синтез краевых магнитных полей для статических масс-анализаторов спектрографического типа // Масс-спектрометрия. 2018. Т. 15. № 1. С. 26–43.

40. **Гюнтер Н.М.** Интегрирование уравнений в частных производных первого порядка. Ленинград, Москва: ОНТИ, 1934. 368 с.

41. **Трикоми Ф.** Лекции по уравнениям в частных производных. М.: Изд-во иностр. лит-ры, 1957. 443 с.

42. **Рашевский П.К.** Геометрическая теория уравнений с частными производными. Москва, Ленинград: ГИТТЛ, 1947. 362 с.

43. **Фиников С.П.** Метод внешних форм Картана в дифференциальной геометрии. Москва, Ленинград: ОГИЗ, 1948. 432 с.

44. **Картан Э.** Внешние дифференциальные системы и их геометрические приложения. М.: Изд-во Московского ун-та, 1962. 237 с.

45. **Щербаков Р.Н.** Основы метода внешних форм и линейчатой дифференциальной геометрии. Томск: Изд-во ТГУ, 1973. 236 с.

46. **Капцов О.В.** Методы интегрирования уравнений с частными производными. М.: Физматлит, 2009. 184 с.

47. **Буляница А.Л., Курочкин В.Е.** Исследование процессов упорядочивания в открытых системах // Научное приборостроение. 2000. Т. 10. № 2. С. 43–49.

48. **Буляница А.Л., Евстрапов А.А., Рудницкая Г.Е.** Метод моментов при расчете параметров каналов в микроразмерных системах // Научное приборостроение. 2003. Т. 13. № 4. С. 28–40.

49. **Евстрапов А.А., Буляница А.Л., Рудницкая Г.Е., Беленький Б.Г., Петряков А.О., Курочкин В.Е.** Особенности применения алгоритмов цифровой фильтрации электрофореграмм при анализе веществ на микрочипе // Научное приборостроение. 2003. Т. 13. № 2. С. 57–63.

50. **Буляница А.Л.** Математическое моделирование в микрофлюидике: основные положения // Научное приборостроение. 2005. Т. 15. № 2. С. 51–66.

51. Wolfram Mathematica. URL : http://wolfram.com/mathematica/

Статья поступила в редакцию 21.03.2019, принята к публикации 22.04.2019.

СВЕДЕНИЯ ОБ АВТОРАХ

БЕРДНИКОВ Александр Сергеевич – *доктор физико-математических наук, ведущий научный сотрудник Института аналитического приборостроения РАН, Санкт-Петербург, Российская Федерация.*

190103, Российская Федерация, г. Санкт-Петербург, Рижский пр., 26
asberd@yandex.ru

ГАЛЛЬ Лидия Николаевна – *доктор физико-математических наук, главный научный сотрудник Института аналитического приборостроения РАН, Санкт-Петербург, Российская Федерация.*

190103, Российская Федерация, г. Санкт-Петербург, Рижский пр., 26
lngall@yandex.ru

ГАЛЛЬ Николай Ростиславович – *доктор физико-математических наук, ведущий научный сотрудник Института аналитического приборостроения РАН, Санкт-Петербург, Российская Федерация.*

190103, Российская Федерация, г. Санкт-Петербург, Рижский пр., 26
gall@ms.ioffe.ru

СОЛОВЬЕВ Константин Вячеславович – *кандидат физико-математических наук, доцент кафедры физической электроники Санкт-Петербургского политехнического университета Петра Великого, младший научный сотрудник Института аналитического приборостроения РАН, Санкт-Петербург, Российская Федерация.*

195251, Российская Федерация, г. Санкт-Петербург, Политехническая ул., 29
k-solovyev@mail.ru

REFERENCES

1. **Berdnikov A.S., Gall L.N., Gall N.R., et al.,** Generalization of the Thomson formula for general harmonic functions, St. Petersburg Polytechnical State University Journal. Physics and Mathematics. 12 (2) (2019) 32–48.

2. **Golikov Yu.K., Krasnova N.K.,** Generalized similarity principle of similarity in electron spectrography, Prikladnaya fizika (Applied Physics). (2) (2007) 5–11.

3. **Averin I.A., Berdnikov A.S., Gall N.R.,** The principle of similarity of trajectories for the motion of charged particles with different

masses in electric and magnetic fields that are homogeneous in Euler terms, Technical Physics Letters. 43 (2) (2017) 156–158.

4. **Golikov Yu.K., Krasnova N.K.,** Teoriya synteza elektrostaticheskikh energoanalizatorov [Theory of designing of electrostatic energy analyzers], Saint-Petersburg Polytechnic University Publishing, St. Petersburg, 2010 (in Russian).

5. **Golikov Yu.K., Krasnova N.K.,** Application of electric fields uniform in the Euler sense in electron spectrography, Technical Physics. 56 (2) (2011) 164–170.

6. **Krasnova N.K.,** Theory and synthesis of disperging and focusing electron optical media, Dr. Sci. Thesis. St. Petersburg, 2013 (in Russian).

7. **Gabdullin P.G., Golikov Yu.K., Krasnova N.K., Davydov S.N.,** The use of Donkin's formula in the theory of energy analyzers, I, Technical Physics. 45 (2) (2000) 232–235.

8. **Gabdullin P.G., Golikov Yu.K., Krasnova N.K., Davydov S.N.,** The use of Donkin's formula in the theory of energy analyzers, II, Technical Physics. 45 (3) (2000) 330–333.

9. **Golikov Yu.K., Krasnova N.K.,** Analytical structures of generalized homogeneous electrical spectrographic media, Nauchnoe priborostroenie (Scientific Instrumentation). 24 (1) (2014) 50–58.

10. **Golikov Yu.K., Berdnikov A.S., Antonov A.S., et al.,** Application of the Donkin formula in the theory of electrostatic prisms, Technical Physics. 63 (11) (2018) 1659–1666.

11. **Thomson W.,** Extraits de deux Lettres adressées a M. Liouville, Journal de Mathématiques Pures et Appliqués. 12 (1847) 256–264.

12. **Sretensky L.N.,** Teoriya niyutonovskogo potentsiala [Theory of the Newtonian potential], Moscow, Leningrad, OGIZ-GITTL, 1946.

13. **Smirnov V.I.,** A course of higher mathematics, Vol. 4: Integral equations and partial differential equations, Pergamon Press, Oxford, 1964.

14. **Vladimirov V.S.,** Uravneniya matematicheskoy fiziki [Equations of mathematical physics], Mir Publishers, Moscow, 1984.

15. **Kellogg O.D.,** Foundations of potential theory, Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, New-York, 1967.

16. **Wermer J.,** Potential theory, 2nd Ed., Ser. "Lecture Notes in Mathematics", Vol. 408, Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, New-York, 1981.

17. **Helms L.L.** Potential Theory, 2nd Ed., Springer, London, Heidelberg, New-York, Dordrecht, 2014.

18. **Golikov Yu.K.,** Analytical ways of describing harmonic functions, Vestnik of Aktobe's K. Zhubanov Regional State University, Physics and Mathematics. (2(44)) (2016) 165–181.

19. **Golikov Yu.K., Utkin K.G., Cheparuhin V.V.,** Raschet elementov elektrostaticheskikh elektronno-opticheslikh sistem [Design of elements of electron optical systems], Leningrad Polytechnic Inst. Publishing, Leningrad, 1984.

20. **Golikov Yu.K., Solovyev K.V.,** Elektrostaticheskiye ionnyye lovushki [Electrostatic ion traps], Saint-Petersburg Polytechnic University Publishing, St. Petersburg, 2008.

21. **Fichtenholz G.M.,** Differential- und Integralrechnung, I, VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften, Berlin. 1968.

22. **Smirnov V.I.,** A course of higher mathematics, Vol. I: Elementary Calculus, Pergamon Press, Oxford, 1964.

23. **Koppenfels W., Stallmann F.,** Praxis der Konformen Abbildung, Springer-Verlag, Berlin, Göttingen, Heidelberg, 1959.

24. **Lavrent'ev M.A., Shabat B.V.,** Methoden der komplexen Funktionen-theorie, Verlag Wissenshaft, 1969.

25. **Markushevich A.I.,** Theory of functions of a complex variable, Vol. 1–3, Providence, US, Amer. Math. Society Publ., 2005.

26. **Evgrafov M.A.,** Analytic functions, Dover Publ., 1978.

27. **Hurwitz A., Courant R.,** Vorlesungen über Allgemeine Funktionentheorie und Elliptische Funktionen, Springer, Berlin. 1964.

28. **Thomson W. (Lord Kelvin), Tait P.G.,** Treatise on natural philosophy, 2nd Ed., Part 1, University Press, Cambridge, 1912.

29. **Thomson W. (Lord Kelvin), Tait P.G.,** Treatise on natural philosophy, 2nd Ed., Part 2, University Press, Cambridge, 1912.

30. **Donkin W.F.,** On the equation of Laplace's functions &c., Philosophical Transactions of the Royal Society of London. 147 (1857) 43–57.

31. **Donkin W.F.,** On the equation of Laplace's functions &c., Philosophical Proceedings of the Royal Society of London. 8 (1856–1857) 307–310.

32. **Hobson E.W.,** The theory of spherical and ellipsoidal harmonics, University Press, Cambridge, 2012.

33. **Whittaker E.T., Watson G.N.,** A course of modern analysis, University Press, Cambridge, 1950.

34. **Berdnikov A.S., Averin I.A.,** Fringe fields of gridless electronic spectrographs with Euler's homogeneous electrostatic fields, Uspekhi prikladnoy fiziki (Advances in Applied Physics).

4 (1) (2016) 5–8.

35. **Berdnikov A.S., Averin I.A., Krasnova N.K., Solovyev K.V.,** Universal expressions for 3D electric and magnetic potentials which are uniform in Euler terms, Nauchnoye priborostroyeniye (Scientific Instrumentation). 26 (4) (2016) 13–30.

36. **Berdnikov A.S., Krasnova N.K., Solovyev K.V.,** Analysis of the general Whittaker' formula for 3D electric and magnetic potentials homogeneous in Euler terms, Nauchnoye priborostroyeniye (Scientific Instrumentation). 27 (4) (2017) 63–71.

37. **Berdnikov A.S., Krasnova N.K., Solovyev K.V.,** Whittaker' formula for 3D electric and magnetic potentials with a zero order of homogeneity and its consequencies // Nauchnoye priborostroyeniye (Scientific Instrumentation). 27 (4) (2017) 72–79.

38. **Golikov Yu.K., Berdnikov A.S., Antonov A.S., et al.,** Synthesis of electrode configurations that conserve fringing electric field homogeneity in Euler terms, Technical Physics. 63 (4) (2018) 593–597.

39. **Berdnikov A.S., Gall L.N., Antonov A.S., Solovyev K.V.,** Synthesis of fringing magnetic fields for static mass analyzers of the spectrographic type, Journal of Analytical Chemistry. 73 (14) (2018) 1301–1316.

40. **Günther N.M.,** Integrirovaniye uravneniy v chastnykh proizvodnykh pervogo poryadka [Integration of first-order partial differential equations], ONTI, Leningrad, Moscow, 1934.

41. **Tricomi F.G.,** Lezioni sulle equazioni a derivative parziali, Editrice Gherono, Torino, 1954.

42. **Rashevsky P.K.,** Geometricheskaya teoriya uravneniy s chastnymy proizvodnymy [Geometric theory of partial differential equations], OGIZ, Moscow, Leningrad, 1947.

43. **Finikov S.P.,** Metod vneshnikh form Kartana v differentsialnoy geometriy [Cartan's method of exterior forms in differential geometry], OGIZ, Moscow, Leningrad, 1948.

44. **Cartan É.,** Les systèmes différentiels extérieurs et leurs applications géométriques, Ser. "Actualités Scientifiques et Industrielles, No. 994, Hermann, Paris, 1945.

45. **Shcherbakov R.N.,** Osnovy metoda vneshnikh form i lineuchatoy differentsialnoy geometriy [Fundamentals of the method of external forms and differential line geometry], Tomsk State University Publishing House, Tomsk, 1973.

46. **Kaptsov O.V.,** Metody integrirovaniya uravneniy s chastnymy proizvodnymy [Methods for integrating partial differential equations], Fizmatlit, Moscow, 2009.

47. **Bulyanitsa A.L., Kurochkin V.E.,** Studying ordering processes in open systems (on the example of pattern evolution in colonies of imperfect mycelial fungi), Nauchnoye priborostroyeniye (Scientific Instrumentation). 10 (2) (2000) 43–49.

48. **Bulyanitsa A.L., Evstrapov A.A., Rudnitskaya G.E.,** Calculation of microscale system channel parameters by the method of moments, Nauchnoye priborostroyeniye (Scientific Instrumentation). 13 (4) (2003) 28–40.

49. **Evstrapov A.A., Bulyanitsa A.L., Rudnitskaya G.E., et al.,** Characteristic features of digital signal filtering algorithms as applied to electrophoresis on a microchip, Nauchnoye priborostroyeniye (Scientific Instrumentation). 13 (2) (2003) 57–63.

50. **Bulyanitsa A.L.,** Mathematical modeling in microfluidics: basic concepts, Nauchnoye priborostroyeniye (Scientific Instrumentation). 15 (2) (2005) 51–66.

51. Wolfram Mathematica, URL : http://wolfram.com/mathematica/

Received 21.03.2019, accepted 22.04.2019.

THE AUTHORS

BERDNIKOV Alexander S.
Institute for Analytical Instrumentation of the Russian Academy of Sciences
26 Rizhsky Ave., St. Petersburg, 190103, Russian Federation
asberd@yandex.ru

GALL Lidia N.
Institute for Analytical Instrumentation of the Russian Academy of Sciences
26 Rizhsky Ave., St. Petersburg, 190103, Russian Federation
lngall@yandex.ru

GALL Nikolaj R.
Institute for Analytical Instrumentation of the Russian Academy of Sciences
26 Rizhsky Ave., St. Petersburg, 190103, Russian Federation
gall@ms.ioffe.ru

SOLOVYEV Konstantin V.
Peter the Great St. Petersburg Polytechnic University
29 Politechnicheskaya St., St. Petersburg, 195251, Russian Federation
k-solovyev@mail.ru

© Санкт-Петербургский политехнический университет Петра Великого, 2019