

МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ



НАУЧНО-ТЕХНИЧЕСКИЕ ВЕДОМОСТИ

САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО
ПОЛИТЕХНИЧЕСКОГО УНИВЕРСИТЕТА

Физико-математические
науки

ТОМ 12, №3
2019

Санкт-Петербургский политехнический
университет Петра Великого
2019

НАУЧНО-ТЕХНИЧЕСКИЕ ВЕДОМОСТИ САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО ПОЛИТЕХНИЧЕСКОГО УНИВЕРСИТЕТА. ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЕ НАУКИ

РЕДАКЦИОННЫЙ СОВЕТ ЖУРНАЛА

Алферов Ж.И., академик РАН – председатель;
Боровков А.И., проректор по перспективным проектам;
Варшалович Д.А., академик РАН;
Глухих В.А., академик РАН;
Жуков А.Е., чл.-кор. РАН – зам. председателя;
Иванов В.К., д-р физ.-мат. наук, профессор;
Индейцев Д.А., чл.-кор. РАН;
Рудской А.И., академик РАН – зам. председателя;
Суриц Р.А., академик РАН.

РЕДАКЦИОННАЯ КОЛЛЕГИЯ ЖУРНАЛА

Иванов В.К., д-р физ.-мат. наук, профессор, СПбПУ, СПб., Россия, – главный редактор;
Фотиади А.Э., д-р физ.-мат. наук, профессор, СПбПУ, СПб., Россия, – зам. главного редактора;
Капралова В.М., канд. физ.-мат. наук, доцент, СПбПУ, СПб., Россия, – ответственный секретарь;
Антонов В.И., д-р физ.-мат. наук, профессор, СПбПУ, СПб., Россия;
Безпрозванный И.Б., д-р биол. наук, профессор, Юго-Западный медицинский центр
Техасского университета, Даллас, США;
Блинов А.В., д-р физ.-мат. наук, профессор, СПбПУ, СПб., Россия;
Донецкий Д.В., д-р физ.-мат. наук, профессор, университет штата Нью-Йорк в Стоуни-Брук, США;
Лобода О.С., канд. физ.-мат. наук, доцент, СПбПУ, СПб., Россия;
Малерб Й.Б., Dr.Sc. (Physics), профессор, университет Претории, ЮАР;
Остряков В.М., д-р физ.-мат. наук, профессор, СПбПУ, СПб., Россия;
Привалов В.Е., д-р физ.-мат. наук, профессор, СПбПУ, СПб., Россия;
Смирнов Е.М., д-р физ.-мат. наук, профессор, СПбПУ, СПб., Россия;
Соловьёв А.В., д-р физ.-мат. наук, профессор, Научно-исследовательский центр мезобионаносистем (MBN),
Франкфурт-на-Майне, Германия;
Таганцев А.К., д-р физ.-мат. наук, профессор, Швейцарский федеральный институт технологий,
Лозанна, Швейцария;
Топтыгин И.Н., д-р физ.-мат. наук, профессор, СПбПУ, СПб., Россия;
Тропп Э.А., д-р физ.-мат. наук, профессор, СПбПУ, СПб., Россия;
Фирсов Д.А., д-р физ.-мат. наук, профессор, СПбПУ, СПб., Россия;
Хейфец А.С., Ph.D. (Physics), профессор, Австралийский национальный университет,
Канберра, Австралия;
Черепанов А.С., д-р физ.-мат. наук, профессор, СПбПУ, СПб., Россия.

Журнал с 2002 г. входит в Перечень ведущих рецензируемых научных журналов и изданий, в которых должны быть опубликованы основные результаты диссертаций на соискание ученых степеней доктора и кандидата наук.

Сведения о публикациях представлены в Реферативном журнале ВИНТИ РАН, в международной справочной системе «Ulrich's Periodical Directory».

С 2008 года выпускается в составе сериального периодического издания «Научно-технические ведомости СПбГПУ».

Журнал зарегистрирован Федеральной службой по надзору в сфере информационных технологий и массовых коммуникаций (Роскомнадзор). Свидетельство о регистрации ПИ № ФС77-52144 от 11 декабря 2012 г.

Распространяется по Каталогу стран СНГ, Объединенному каталогу «Пресса России» и по Интернет-каталогу «Пресса по подписке». Подписной индекс **71823**.

Журнал индексируется в базе данных **Web of Science** (Emerging Sources Citation Index), а также включен в базу данных «**Российский индекс научного цитирования**» (РИНЦ), размещенную на платформе Научной электронной библиотеки на сайте

<http://www.elibrary.ru>

При перепечатке материалов ссылка на журнал обязательна.

Точка зрения редакции может не совпадать с мнением авторов статей.

Адрес редакции и издательства:

Россия, 195251, Санкт-Петербург, ул. Политехническая, д. 29.

Тел. редакции (812) 294-22-85.

<http://ntv.spbstu.ru/physics>

THE MINISTRY OF SCIENCE AND HIGHER EDUCATION OF THE RUSSIAN FEDERATION



ST. PETERSBURG STATE
POLYTECHNICAL UNIVERSITY
JOURNAL

Physics
and Mathematics

**VOLUME 12, No.3,
2019**

Peter the Great St. Petersburg
Polytechnic University
2019

ST. PETERSBURG STATE POLYTECHNICAL UNIVERSITY JOURNAL. PHYSICS AND MATHEMATICS

JOURNAL EDITORIAL COUNCIL

Zh.I. Alferov – full member of RAS, head of the editorial council;
A.I. Borovkov – vice-rector for perspective projects;
V.A. Glukhikh – full member of RAS;
D.A. Indeitsev – corresponding member of RAS;
V.K. Ivanov – Dr. Sci.(phys.-math.), prof.;
A.I. Rudskoy – full member of RAS, deputy head of the editorial council;
R.A. Suris – full member of RAS;
D.A. Varshalovich – full member of RAS;
A.E. Zhukov – corresponding member of RAS, deputy head of the editorial council.

JOURNAL EDITORIAL BOARD

V.K. Ivanov – Dr. Sci. (phys.-math.), prof., SPbPU, St. Petersburg, Russia, – editor-in-chief;
A.E. Fotiadi – Dr. Sci. (phys.-math.), prof., SPbPU, St. Petersburg, Russia, – deputy editor-in-chief;
V.M. Kapralova – Candidate of Phys.-Math. Sci., associate prof., SPbPU, St. Petersburg, Russia, – executive secretary;
V.I. Antonov – Dr. Sci. (phys.-math.), prof., SPbPU, St. Petersburg, Russia;
I.B. Bezprozvanny – Dr. Sci. (biology), prof., The University of Texas Southwestern Medical Center, Dallas, TX, USA;
A.V. Blinov – Dr. Sci. (phys.-math.), prof., SPbPU, St. Petersburg, Russia;
A.S. Cherepanov – Dr. Sci. (phys.-math.), prof., SPbPU, St. Petersburg, Russia;
D.V. Donetski – Dr. Sci. (phys.-math.), prof., State University of New York at Stony Brook, NY, USA;
D.A. Firsov – Dr. Sci. (phys.-math.), prof., SPbPU, St. Petersburg, Russia;
A.S. Kheifets – Ph.D., prof., Australian National University, Canberra, Australia;
O.S. Loboda – Candidate of Phys.-Math. Sci., associate prof., SPbPU, St. Petersburg, Russia;
J.B. Malherbe – Dr. Sci. (physics), prof., University of Pretoria, Republic of South Africa;
V.M. Ostryakov – Dr. Sci. (phys.-math.), prof., SPbPU, St. Petersburg, Russia;
V.E. Privalov – Dr. Sci. (phys.-math.), prof., SPbPU, St. Petersburg, Russia;
E.M. Smirnov – Dr. Sci. (phys.-math.), prof., SPbPU, St. Petersburg, Russia;
A.V. Solov'yov – Dr. Sci. (phys.-math.), prof., MBN Research Center, Frankfurt am Main, Germany;
A.K. Tagantsev – Dr. Sci. (phys.-math.), prof., Swiss Federal Institute of Technology, Lausanne, Switzerland;
I.N. Toptygin – Dr. Sci. (phys.-math.), prof., SPbPU, St. Petersburg, Russia;
E.A. Tropp – Dr. Sci. (phys.-math.), prof., SPbPU, St. Petersburg, Russia.

The journal is included in the List of leading peer-reviewed scientific journals and other editions to publish major findings of theses for the research degrees of Doctor of Sciences and Candidate of Sciences.

The publications are presented in the VINITI RAS Abstract Journal and Ulrich's Periodical Directory International Database.

The journal is published since 2008 as part of the periodical edition 'Nauchno-tekhnicheskie vedomosti SPb-GPU'.

The journal is registered with the Federal Service for Supervision in the Sphere of Telecom, Information Technologies and Mass Communications (ROSKOMNADZOR). Certificate ПИ № ФС77-52144 issued December 11, 2012.

The journal is distributed through the CIS countries catalogue, the «Press of Russia» joint catalogue and the «Press by subscription» Internet catalogue. The subscription index is **71823**.

The journal is in the **Web of Science** (Emerging Sources Citation Index) and the **Russian Science Citation Index** (RSCI) databases.

© Scientific Electronic Library (<http://www.elibrary.ru>).

No part of this publication may be reproduced without clear reference to the source.

The views of the authors may not represent the views of the Editorial Board.

Address: 195251 Politekhnikeskaya St. 29, St. Petersburg, Russia.

Phone: (812) 294-22-85.

<http://ntv.spbstu.ru/physics>

© Peter the Great St. Petersburg Polytechnic University, 2019

Содержание

Физика конденсированного состояния

- Гулякова А.А., Гороховатский Ю.А., Фрюбинг П. *Диэлектрическая релаксация в композитных пленках на основе ударопрочного полистирола с включениями диоксида титана (статья на английском языке)*..... 9

Математическое моделирование физических процессов

- Булович С.В. *Схема численного интегрирования системы уравнений многофазных потоков в равновесном баротропном приближении*..... 17

Математическая физика

- Бердников А.С., Галль Л.Н., Галль Н.Р., Соловьев К.В. *Базисные дифференциальные операторы Донкина для однородных гармонических функций*..... 26

- Бердников А.С., Галль Л.Н., Галль Н.Р., Соловьев К.В. *Дифференциальные операторы Донкина общего вида для однородных гармонических функций*..... 45

Приборы и техника физического эксперимента

- Аладов А.В., Берлов Д.Н., Закгейм А.Л., Черняков А.Е., Фотиади А.Э., Валюхов В.П. *Аппаратно-программный комплекс для определения функционального состояния человека при воздействии света с варьируемыми спектрально-цветовыми характеристиками*..... 63

- Аладов А.В., Берлов Д.Н., Валюхов В.П., Власова О.Л., Закгейм А.Л., Панихина А.А., Фотиади А.Э. *Экспериментальная установка для исследования влияния синего света на функцию восприятия времени у лиц с разным типом вегетативной регуляции*..... 78

- Преснякова Н.Н., Васильев А.Л., Терещенко Е.Ю., Яцишина Е.Б. *Особенности применения электронно-микроскопических методов в историческом металловедении*..... 92

Физическая электроника

- Головицкий А.П., Ремига О.А. *Сравнение способности испускания оптического излучения электроотрицательного тлеющего разряда в цилиндрической и коаксиальной геометрии* 101

Биофизика и медицинская физика

- Добровольская И.П., Иванькова Е.М., Попрядухин П.В., Юдин В.Е. *Композиционные полимерные матрицы для тканевой инженерии и трансплантологии*..... 110

Ядерная физика

- Егоров А.Ю., Бердников Я.А., Бакаев В.А., Никитцина И.М. *Анализ методов обратной свертки экспериментальных данных при измерении сечений рождения пар адронных струй* 123

- Бердников А.Я., Бердников Я.А., Жарко С.В., Котов Д.О., Радзевич П.В. *Особенности рождения короткоживущих нейтральных каонов в столкновениях ядер меди и золота при энергии 200 ГэВ*..... 131

Бердников А.Я., Бердников Я.А., Жарко С.В., Котов Д.О., Радзевич П.В. *Исследование эффекта гашения адронных струй в столкновениях ядер меди и золота с помощью омега-мезонов*..... 143

Теоретическая физика

Ларионов Н.В. *Влияние диполь-дипольного взаимодействия на эволюцию моды резонатора в модели лазера на нескольких излучателях*..... 155

Математика

Пичугин Ю.А. *Особенности использования информации по Шеннону в задачах, связанных с линейной регрессией*..... 164

Механика

Модестов В.С. *Прочность железобетонных конструкций при экстремальных механических воздействиях*..... 177

Хроника

Пётр Александрович Родный (к пятидесятилетию научной и педагогической деятельности) 188

Авторский указатель..... 191

Contents

Condensed matter physics

- Gulyakova A.A., Gorokhovatsky Yu.A., Frübing P.** *Dielectric relaxation spectroscopy in the high-impact polystyrene/titanium-dioxide composite films*..... 9

Simulation of physical processes

- Bulovich S.V.** *The system of multiphase flow equations in the equilibrium barotropic approximation: a numerical scheme*..... 17

Mathematical physics

- Berdnikov A.S., Gall L.N., Gall N.R., Solovyev K.V.** *Basic Donkin's differential operators for homogeneous harmonic functions*..... 26

- Berdnikov A.S., Gall L.N., Gall N.R., Solovyev K.V.** *Donkin's differential operators for homogeneous harmonic functions*..... 45

Experimental technique and devices

- Aladov A.V., Berlov D.N., Zakgeim A.L., Chernyakov A.E., Fotiadi A.E., Valyukhov V.P.** *Hardware-software complex for characterization of a person's functional status on exposure to light with the varied spectral color parameters*..... 63

- Aladov A.V., Berlov D.N., Valyukhov V.P., Vlasova O.L., Zakgeim A.L., Panihina A.A., Fotiadi A.E.** *Experimental setup for studying the blue light effect on sense of time among the persons with different type of vegetative regulation*..... 78

- Presniakova N.N., Vasiliev A.L., Tereschenko E.Yu., Yatsishina E.B.** *Electron-microscopic methods in historical metallurgy: features of the use*..... 92

Physical electronics

- Golovitskii A.P., Remiga O.A.** *The electronegative glow discharge in the cylindrical and coaxial geometry: the comparison of optical radiation emission ability*..... 101

Biophysics and medical physics

- Dobrovolskaya I.P., Ivan'kova E.M., Popryadukhin P.V., Yudin V.E.** *Composite polymer matrices for tissue engineering and transplantology*..... 110

Nuclear physics

- Egorov A.Yu., Berdnikov Ya.A., Bakaev V.A., Nikittsina I.M.** *An analysis of unfolding methods for measurement of hadron dijet production cross sections*..... 123

- Berdnikov A.Ya., Berdnikov Ya.A., Zharko S.V., Kotov D.O., Radzevich P.V.** *Features of short-living neutral kaon production in copper-gold nuclei collisions at 200 GeV*..... 131

Berdnikov A.Ya., Berdnikov Ya.A., Zharko S.V., Kotov D.O., Radzevich P.V. Jet-quenching studies in ultrarelativistic copper-gold nuclei collisions using omega mesons..... 143

Theoretical Physics

Larionov N.V. Impact of dipole-dipole interaction on the cavity mode evolution in the model of few emitters laser..... 155

Mathematics

Pichugin Yu.A. The Shannon information quantity in the tasks associated with linear regression: usage pattern..... 164

Mechanics

Modestov V.S. Strength of reinforced concrete structures under extreme mechanical impacts..... 177

Chronicle

Piotr Alexandrovich Rodnyi (dedicated to the 50th anniversary of his scientific and pedagogical activities)..... 188

Author index 191

DOI: 10.18721/JPM.12301

UDC 541.64: 678

DIELECTRIC RELAXATION SPECTROSCOPY IN THE HIGH-IMPACT POLYSTYRENE/TITANIUM-DIOXIDE COMPOSITE FILMS

A.A. Guliakova¹, Yu.A. Gorokhovatsky¹, P. Frübing²

¹Herzen State Pedagogical University of Russia, St. Petersburg, Russian Federation;

²Postdam University, Potsdam, Germany

The relaxation processes in high-impact polystyrene (HIPS) films filled with titanium dioxide (TiO_2) of the rutile modification have been investigated by means of dielectric relaxation spectroscopy (DRS) supplemented by differential scanning calorimetry (DSC). Films with 2, 4, 6 and 8 vol.% TiO_2 were compared to each other and to unfilled samples. Above the glass transition one relaxation became visible for unfilled HIPS. It could be identified as the α relaxation, related to the onset of micro-Brownian motions at the glass transition. The low-frequency (LF) process (which superimposed with α relaxation near T_g) was observed in all TiO_2 containing films. The LF process for composite films was not uniform and showed Arrhenius behavior. At lower temperatures (up to about 130 °C) an activation energy of 1.1 eV was found, whereas in the limit of high temperatures, and particularly for higher TiO_2 content the activation energy was 2.4 eV.

Keywords: dielectric spectroscopy, high-impact polystyrene, titanium dioxide, composite film

Citation: Guliakova A.A., Gorokhovatsky Yu.A., Frübing P., Dielectric relaxation spectroscopy in the high-impact polystyrene/titanium-dioxide composite films, St. Petersburg Polytechnical State University Journal. Physics and Mathematics. 12 (3) (2019) 9–16. DOI: 10.18721/JPM.12301

ДИЭЛЕКТРИЧЕСКАЯ РЕЛАКСАЦИЯ В КОМПОЗИТНЫХ ПЛЕНКАХ НА ОСНОВЕ УДАРОПРОЧНОГО ПОЛИСТИРОЛА С ВКЛЮЧЕНИЯМИ ДИОКСИДА ТИТАНА

А.А. Гулякова¹, Ю.А. Гороховатский¹, П. Фрюбинг²

¹Российский государственный педагогический университет им.
А.И. Герцена, Санкт-Петербург, Российская Федерация;

²Потсдамский университет, г. Потсдам, Германия

Методом диэлектрической спектроскопии проведено исследование релаксационных процессов в композитных пленках на основе ударопрочного полистирола (УПС) с диоксидом титана TiO_2 в качестве наполнителя. Сравнивалось поведение пленок УПС без наполнителя и композитных пленок с разным содержанием TiO_2 (2, 4, 6 и 8 об.%). Для пленок УПС без наполнителя установлено наличие одного релаксационного процесса (α -релаксация). Для композитных пленок обнаружен неоднородный низкочастотный релаксационный процесс, подчиняющийся закону Аррениуса. Значения энергии активации, рассчитанные для низких (до 130 °C) и высоких (свыше 130 °C) температур, составили 1,1 и 2,4 эВ, соответственно.

Ключевые слова: диэлектрическая релаксация, ударопрочный полистирол, диоксид титана, композитная пленка

Ссылка при цитировании: Гулякова А.А., Гороховатский Ю.А., Фрюбинг П. Диэлектрическая релаксация в композитных пленках на основе ударопрочного полистирола с включениями диоксида титана // Научно-технические ведомости СПбГПУ. Физико-математические науки. 2019. Т. 12. № 3. С. 9–16. DOI: 10.18721/JPM.12301

Introduction

Titanium dioxide (TiO_2) used as a filler in the present study serves as an additive for different polymeric materials in order to modify their crystallinity and morphology, change their elastic modulus, and increase their permittivity or conductivity, to improve their thermal stability.

Titanium dioxide exhibits a high dielectric constant as well as very low conductivity. Therefore, composite materials of an insulating polymer with TiO_2 fine particles are considered as dielectric materials with adjustable permittivity and conductivity for electrical and electronic applications [1–6].

Scientific interest has mostly been focused on structural investigations and mechanical properties of the polystyrene (PS) composites as it is an important engineering material. High-impact polystyrene (HIPS) is a rubber-modified version of PS in which higher toughness is achieved by incorporation of micron-sized polybutadiene-rubber particles. [7, 8].

Here, an attempt was made for a more detailed investigation of the relaxation processes in the pure and composite HIPS films.

Experimental details

High-impact polystyrene (HIPS-0801, GOST (Russian State Standard) 28250-89E) contains from 4 to 6 % of a butadiene rubber. Titanium-dioxide (TiO_2) powder of the rutile modification (R-01, GOST 9808-65, specific surface area is $15 \text{ m}^2/\text{g}$, particle size is between 0.1 and $0.8 \mu\text{m}$) was used as a filler. Mixing of HIPS and TiO_2 was performed using a laboratory rolling mill under heating at $(175 \pm 5)^\circ\text{C}$ for 3 min. Films of pure HIPS as well as HIPS with TiO_2 contents of 2, 4, 6 and 8 vol.% were manufactured by melt pressing according to GOST 12019-66 at $(170 \pm 5)^\circ\text{C}$ for 5 min. The films with thicknesses ranging from 350 to $450 \mu\text{m}$ were investigated as received.

Dielectric spectra were recorded in the temperature range between 20 and 160°C and in the frequency range from 0.1 Hz to 1 MHz with a Novocontrol ALPHA high-resolution dielectric analyzer and a Novocontrol QUATRO cryosystem, where the sample holder was immersed in a dry nitrogen-gas stream. The

data was acquired as a function of frequency through a series of ascending temperatures (usually 5 K steps, with an accuracy of $\pm 0.1 \text{ K}$).

For differential scanning calorimetry (DSC), a PerkinElmer Pyris Diamond differential scanning calorimeter was employed. For electrical measurements, circular aluminum electrodes (of diameter 12 mm and thickness about 50 nm) were evaporated onto both sides of the films.

Experimental results

The temperature dependence of the dissipation factor $\tan \delta$ of pure HIPS and HIPS with different content of TiO_2 is shown in Fig. 1.

Two relaxation regions can be observed. The α relaxation at about 120°C is present in all samples and marks the onset of micro-Brownian motions at the glass transition. The temperature dependence of this lower-temperature (LT) process confirms its relation to the glass transition. The high-temperature (HT) relaxation at about 150°C (Fig. 1) exists only for composite HIPS films [9].

The frequency dependence of the dielectric loss of pure HIPS is plotted in Fig. 2. The peak is shifted to higher frequency with increasing temperature.

The plot of the loss-peak frequency f_{\max} versus the inverse temperature bends towards the glass transition according to the Vogel – Fulcher – Tamman (VFT) law (Fig.3)

$$\tau_{\max}(T) = \tau_{\max,0} \exp \frac{E_a}{k(T - T_v)}$$

where the inverse frequency factor $\tau_{\max,0}$, the activation energy E_a and the Vogel temperature T_v are fit parameters.

The thermal glass transition appears at a temperature where the relaxation time is approximately 100 s [10]. This circumstance is taken here as the criterion for the determination of T_g in Fig. 4: the extrapolation of the VFT line to $\tau = 100 \text{ s}$ gives $T_g = 92.8^\circ\text{C}$.

By means of differential scanning calorimetry (DSC) T_g values between 97.1 and 99.4°C were obtained^s for HIPS, no correlation with filler content was visible (Table 1).

For unfilled HIPS the glass transition

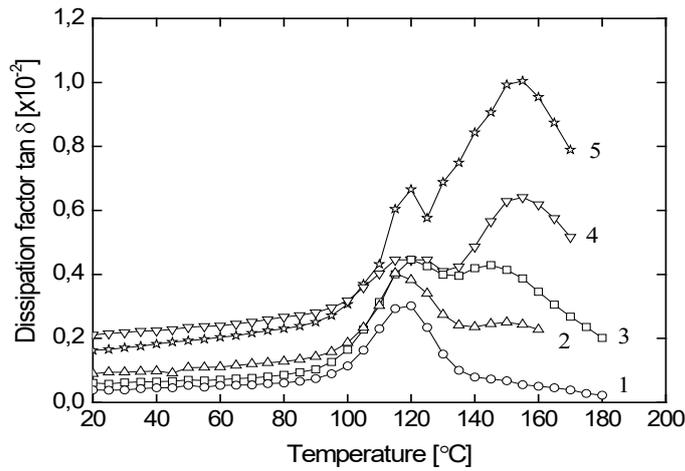


Fig. 1. Temperature dependence of the dissipation factor $\tan \delta$ at 1 kHz for pure HIPS and HIPS with TiO_2 contents (1 – pure HIPS, 2 – 2 vol.%, 3 – 4 vol.%, 4 – 6 vol.%, 5 – 8 vol.%). The data points are connected only for guiding the eyes

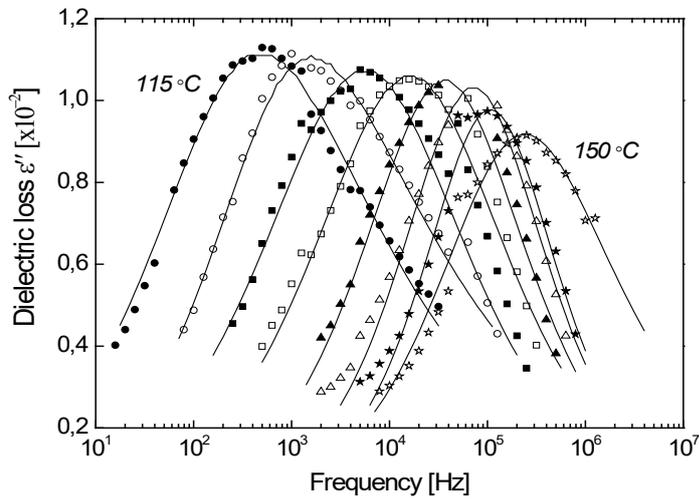


Fig. 2. Frequency dependences of the dielectric loss of pure HIPS at selected temperatures (5 K step) as indicated. The data are fitted with the Havriliak – Negami (HN) function (solid lines)

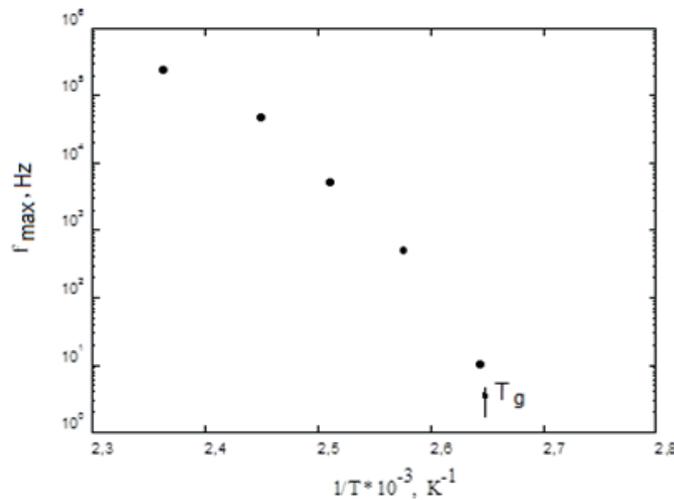


Fig. 3. Temperature dependence of the loss-peak frequency f_{\max} for pure HIPS

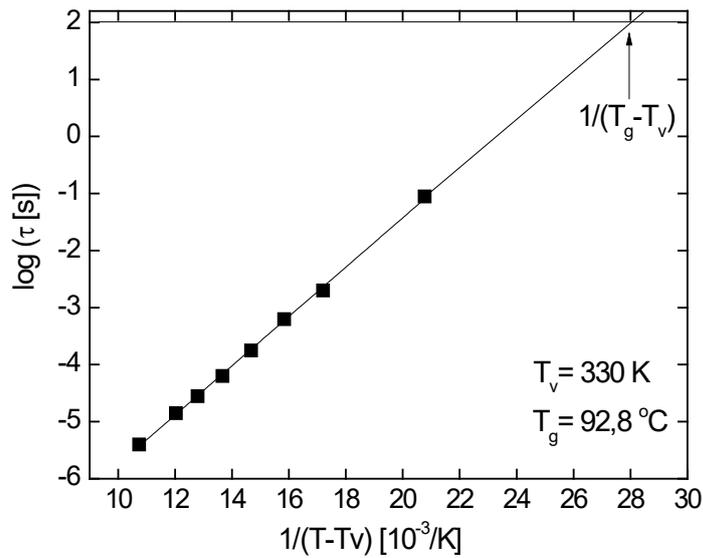


Fig. 4. VFT plot of the parameter τ obtained from the HN fits of Fig. 2

Table 1
DSC results for unfilled HIPS and HIPS with different TiO_2 contents

Filler content, vol. %	Glass transition temperature $T_g, \pm 0.1 \text{ }^\circ\text{C}$
0	98.7
2	97.1
4	99.0
6	99.4
8	97.9

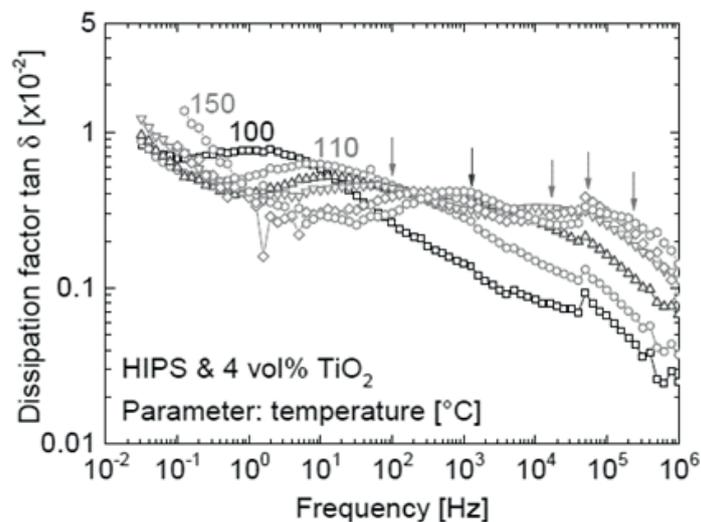


Fig. 5. Frequency dependence of the dissipation factor of HIPS with 4 vol.% TiO_2 at selected temperatures as indicated (10 K steps). The arrows mark the positions of the α relaxation peaks on unfilled HIPS [6]

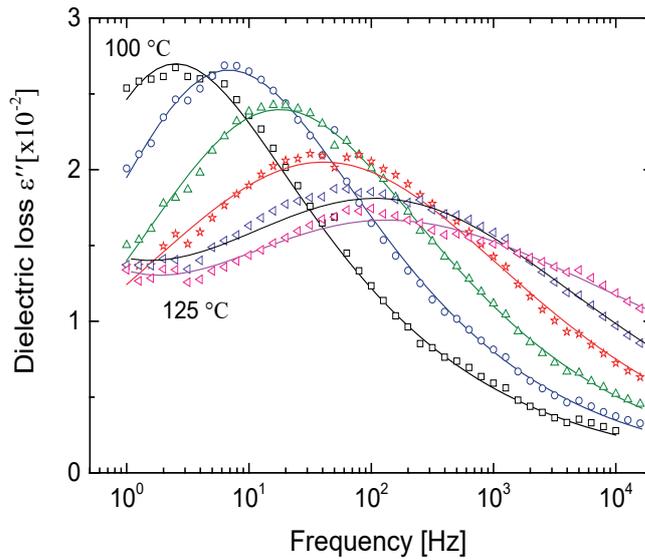


Fig.6. Frequency dependence of the dielectric losses ϵ'' of HIPS with 4 vol.% TiO_2 at selected temperatures

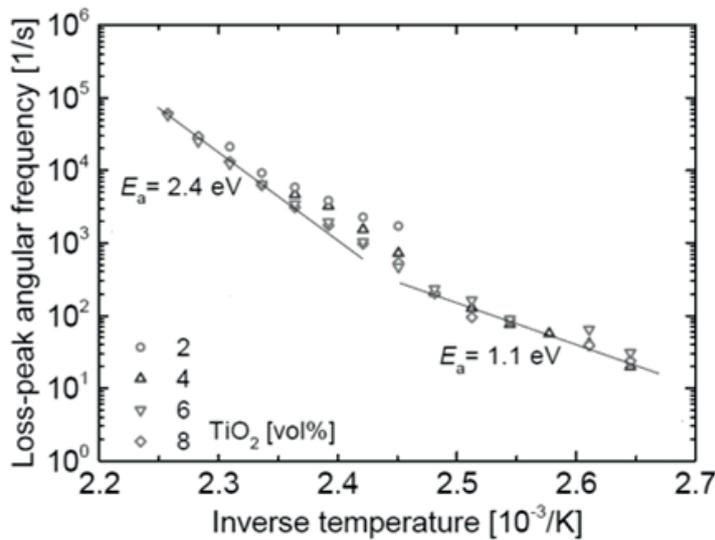


Fig. 7. Arrhenius diagram showing the peak angular frequency of the visible loss peak in HIPS with different TiO_2 contents

temperature T_g is 98.7 °C [6]. Both slight increase and slight decrease of T_g have been reported by other authors [11]. The value of T_g depends on interfacial grafting between the butadiene-rubber inclusions and the polystyrene matrix [12] and on the molar mass of the polystyrene component.

Fig. 5 shows the spectrum of the dissipation factor $\tan \delta$ of HIPS with 4 vol.% TiO_2 .

Another relaxation process appears at lower

frequencies (LF). This process superimposes on the α relaxation at temperatures near the glass transition and is observed for all TiO_2 containing HIPS films. The LF process manifests as a strong high-temperature loss-factor peak at about 150 °C (Fig.1), increasing with filler content, whereas the α relaxation loss-factor peak appears at about 120 °C.

In order to separate the LF process from the α relaxation, the temperature dependence

of its loss-peak angular frequency has been determined by fitting the empirical Havriliak – Negami (HN) function to the measured loss (Fig. 6). One broad loss peak is visible, which constitutes the superposition of the LF process and the α process.

Arrhenius diagram (Fig.7) shows the peak angular frequency of the visible loss peak in HIPS with different TiO₂. For 4, 6 and 8 vol.% TiO₂-containing films, the LF process shows Arrhenius behavior, but the process is not uniform.

At low temperatures (up to about 130 °C) an activation energy of 1.1 eV is found [6], whereas the activation energy is 2.4 eV in the limit of high temperatures.

Summary

Thus, by means of dielectric relaxation spectroscopy, one relaxation process was found for unfilled HIPS films. This process could be identified as the α relaxation, related to the onset of micro-Brownian motions at the glass transition.

By means of differential scanning calorimetry (DSC), the T_g values between 97.1 and 99.4 °C were obtained for HIPS, no correlation with filler content was visible. The Arrhenius plot of the α relaxation bends towards the glass transition temperature, the best fit is obtained with a Vogel temperature of 330 K which yields $T_g = 92.8$ °C closely related to the T_g values obtained by DSC.

For composite HIPS films, except α relaxation, another nonuniform relaxation process appeared at lower frequencies. At low temperatures (up to about 130 °C) an activation energy of 1.1 eV was found, whereas the activation energy is 2.4 eV in the limit of high temperatures. The appearance of two different activation energies needs to be further investigated.

Aknowledgments

The authors are grateful to Prof. Mansur F. Galikhanov, Kazan National Research Technological University, for providing the samples.

REFERENCES

1. **Polu A.R., Kumar R.**, Mg²⁺-ion conducting poly(ethylene glycol)-TiO₂ composite polymer electrolytes for solid-state batteries, *Mater. Express.* 4 (1) (2014) 79–84.
2. **Kontos G.A., Soulintzis A.L., Karahaliou P.K., et al.**, Electrical relaxation dynamics in TiO₂ – polymer matrix composites, *Express Polym. Lett.* 1 (12) (2007) 781–789.
3. **Mo T.C., Wang H.W., Chen S.Y., Yeh Y.C.**, Synthesis and dielectric properties of polyaniline/titanium dioxide nanocomposites, *Ceramics International.* 34 (7) (2008) 1767–1771.
4. **Basavaraja C., Kim J.K., Huh D.S.**, Morphology and electrical properties of poly(3,4-ethylenedioxythiophene)/titanium dioxide nanocomposites. *Macromol. Res.* 23 (7) (2015) 649–657.
5. **Dey A.**, Electrical transport in titanian nanoparticles embedded in conducting polymer matrix, *Nanotechnol. Rev.* 4 (5) (2015) 429–437.
6. **Gulyakova A., Gorokhovatsky Yu.A., Frübing P., Gerhard R.** Relaxation processes determining the electret stability of high-impact polystyrene/titanium-dioxide composite films// *IEEE Transactions on Dielectrics and Electrical Insulation.* 24 (4) (2017) 2541–2548.
7. **Mishra A.**, Factors governing the stabilities of homoelectrets obtained from polystyrene and its derivatives, *J. Appl. Polym. Sci.* 27 (4) (1982) 1107–1118.
8. *Applied polymer science: 21st century*, Ed. by C.D. Craver, C.E. Carraher, Elsevier, 2000.
9. **Gulyakova A., Frübing P., Gorokhovatsky Yu.**, Relaxation processes and electret properties of titanium-dioxide filled high-impact polystyrene films, *IEEE 14th Int'l. Sympos. Electrets (ISE 14)*, Montpellier, France, 2011. Pp. 139–140.
10. **Donth E.-J.**, *Relaxation and thermodynamics in polymers: glass transition*, Akademie-Verlag, Berlin (1992). Pp. 141, 181.
11. **Wang Z., Pang H., Li G., Zhang Z.**, Glass transition and free volume of high impact polystyrene/TiO₂ nanocomposites determined by dilatometry, *J. Macromol. Sci., B.* 45 (5) (2006) 689–697.
12. **Theocaris P.S., Kefalas V., Spathis G.**, Evaluation of interfacial grafting between matrix and gel inclusions in high impact polystyrene, *J. Reinf. Plast. Compos.* 7 (1) (1988) 66–71.

Received 04.07.2019, accepted 05.07.2019.

THE AUTHORS

GULIAKOVA Anna A. *Herzen State Pedagogical University of Russia*

48 Moyka Emb., St. Petersburg, 191186, Russian Federation

a.guliakova@gmail.com

GOROKHOVATSKY Yuriy A. *Herzen State Pedagogical University of Russia*

48 Moyka Emb., St. Petersburg, 191186, Russian Federation

gorokh-yu@yandex.ru

FRÜBING Peter *Postdam University of Germany*

9, Am Neuen Palais 10, Potsdam, 14469, Germany

frubing@uni-potsdam.de

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Polu A.R., Kumar R.** Mg²⁺-ion conducting poly(ethylene glycol)-TiO₂ composite polymer electrolytes for solid-state batteries // *Mater. Express*. 2014. Vol. 4. No. 1. Pp. 79–84.
2. **Kontos G.A., Soulintzis A.L., Karahaliou P.K., Psarras G.C., Georga S.N., Krontiras C.A., Pisanias M.N.** Electrical relaxation dynamics in TiO₂ – polymer matrix composites // *Express Polym. Lett.* 2007. Vol. 1. No. 12. Pp. 781–789.
3. **Mo T.C., Wang H.W., Chen S.Y., Yeh Y.C.** Synthesis and dielectric properties of polyaniline/titanium dioxide nanocomposites // *Ceramics International*. 2008. Vol. 34. No. 7. Pp. 1767–1771.
4. **Basavaraja C., Kim J.K., Huh D.S.** Morphology and electrical properties of poly(3,4-ethylenedioxythiophene)/titanium dioxide nanocomposites // *Macromol. Res.* 2015. Vol. 23. No. 7. Pp. 649–657.
5. **Dey A.** Electrical transport in titanian nanoparticles embedded in conducting polymer matrix // *Nanotechnol. Rev.* 2015. Vol. 4. No. 5. Pp. 429–437.
6. **Gulyakova A., Gorokhovatsky Yu.A., Frübing P., Gerhard R.** Relaxation processes determining the electret stability of high-impact polystyrene/titanium-dioxide composite films // *IEEE Transactions on Dielectrics and Electrical Insulation*. 24 (4) (2017) 2541–2548.
7. **Mishra A.**, Factors governing the stabilities of homoelectrets obtained from polystyrene and its derivatives, *J. Appl. Polym. Sci.* 1982. Vol. 27. No. 4. Pp. 1107–1118.
8. *Applied polymer science: 21st century*. Ed. by C.D. Craver, C.E. Carraher, Elsevier, 2000.
9. **Gulyakova A., Frübing P., Gorokhovatsky Yu.** Relaxation processes and electret properties of titanium-dioxide filled high-impact polystyrene films // *IEEE 14th Int'l. Sympos. Electrets (ISE 14)*. Montpellier, France, 2011. Pp. 139–140.
10. **Donth E.-J.** Relaxation and thermodynamics in polymers: glass transition. Berlin: Akademie-Verlag, 1992. Pp. 141, 181.
11. **Wang Z., Pang H., Li G., Zhang Z.** Glass transition and free volume of high impact polystyrene/TiO₂ nanocomposites determined by dilatometry // *J. Macromol. Sci. B.* 2006. Vol. 45. No. 5. Pp. 689–697.
12. **Theocaris P.S., Kefalas V., Spathis G.** Evaluation of interfacial grafting between matrix and gel inclusions in high impact polystyrene // *J. Reinf. Plast. Compos.* 1988. Vol. 7. No. 1. Pp. 66–71.

Статья поступила в редакцию 04.07.2019, принята к публикации 05.07.2019.

СВЕДЕНИЯ ОБ АВТОРАХ

ГУЛЯКОВА Анна Александровна – кандидат физико-математических наук, доцент кафедры общей и экспериментальной физики Российского государственного педагогического университета им. А.И. Герцена, Санкт-Петербург, Российская Федерация.

191186, Российская Федерация, г. Санкт-Петербург, наб. р. Мойки, 48
a.guliakova@gmail.com

ГОРОХОВАТСКИЙ Юрий Андреевич – доктор физико-математических наук, заведующий кафедрой общей и экспериментальной физики Российского государственного педагогического университета им. А.И. Герцена, Санкт-Петербург, Российская Федерация.

191186, Российская Федерация, г. Санкт-Петербург, наб. р. Мойки, 48
gorokh-yu@yandex.ru

ФРЮБИНГ Петер – научный сотрудник группы прикладной физики конденсированного состояния Потсдамского университета, г. Потсдам, Германия.

9, Am Neuen Palais 10, Potsdam, 14469, Germany
frubing@uni-potsdam.de



Математическое моделирование физических процессов

DOI: 10.18721/JPM.12302
УДК 519.63:621.039

СХЕМА ЧИСЛЕННОГО ИНТЕГРИРОВАНИЯ СИСТЕМЫ УРАВНЕНИЙ МНОГОФАЗНЫХ ПОТОКОВ В РАВНОВЕСНОМ БАРОТРОПНОМ ПРИБЛИЖЕНИИ

С.В. Булович

Санкт-Петербургский политехнический университет Петра Великого,
Санкт-Петербург, Российская Федерация

Для модели многофазной среды с общим давлением в жидкостях предложена экономичная схема интегрирования системы дифференциальных уравнений. Алгоритм позволяет рассматривать варианты потока многофазной среды с формированием любой структуры по количеству рассматриваемых жидкостей и допускает асимптотический переход к одножидкостной модели. Алгебраическое соотношение баланса объемной доли жидкостей сформулировано в виде дифференциального уравнения относительно давления. Корректность задачи Коши для системы уравнений, описывающих поведение многофазной среды с общим давлением, восстанавливается путем использования повторных производных по пространственной координате от разыскиваемых функций. В качестве примера работы алгоритма рассмотрен вариант течения для трех жидкостей. Решена задача Римана о распаде разрыва в канале переменного сечения при различных значениях давления и объемной доли жидкостей по разные стороны диафрагмы.

Ключевые слова: многожидкостная модель, численное моделирование, корректность задачи Коши, экономичный алгоритм

Ссылка при цитировании: Булович С.В. Схема численного интегрирования системы уравнений многофазных потоков в равновесном баротропном приближении // Научно-технические ведомости СПбГПУ. Физико-математические науки. 2019. Т. 12. № 3. С. 17–25. DOI: 10.18721/JPM.12302

THE SYSTEM OF MULTIPHASE FLOW EQUATIONS IN THE EQUILIBRIUM BAROTROPIC APPROXIMATION: A NUMERICAL SCHEME

S.V. Bulovich

Peter the Great St. Petersburg Polytechnic University, St. Petersburg, Russian Federation

In the paper, an economical integration scheme of a differential equation system has been proposed for the model of multiphase medium with a common pressure in liquids. The algorithm allows someone to consider various cases of multiphase medium flows with formation of any structure by the number of liquids under study and admits an asymptotic transition to a single-fluid model. The algebraic balance relation of the fluid volume fraction was stated through the form of a differential equation in pressure. The correctness of the Cauchy problem for an equation system was remade using repeated derivatives of the sought-for functions with respect to a spatial coordinate. The Riemann problem in the varying-area channel at various values of liquid pressure and its volume fraction on the different sides of a diaphragm in the three-fluid version was solved.

Keywords: multi-fluid model, numerical simulation, correctness of Cauchy problem, economical algorithm

Citation: Bulovich S.V. The system of multiphase flow equations in the equilibrium barotropic approximation: a numerical scheme, St. Petersburg Polytechnical State University Journal. Physics and Mathematics. 12 (3) (2019) 17–25. DOI: 10.18721/JPM.12302

Введение

Для описания явлений, происходящих в гетерогенных средах, сформулирован ряд математических моделей, обладающих определенной иерархией по полноте и адекватности отражения происходящих процессов. Простейшие модели оперируют представлениями о многофазном потоке как смеси, которая рассматривается в рамках одного общего для смеси уравнения баланса массы, импульса и энергии. Более полное описание, введенное в рассмотрение Х.А. Рахматулиным [1], использует понятие взаимопроникающих континуумов, когда одна и та же область пространства характеризуется количеством объемной доли вещества, находящегося в различных агрегатных состояниях. При этом, в зависимости от допущений о равновесности происходящих процессов, для определения оставшихся термо- и газодинамических функций состояния многофазного потока, используют необходимое количество балансовых соотношений. В случае более широкого толкования концепции взаимопроникающих континуумов привлекают понятие жидкостей, когда допускается, что для одного и того же агрегатного состояния вещества варьируются состав, уровень скоростей, температур и давлений. В такой постановке широкое распространение получила модель, в которой реализовано допущение о равных значениях давления в жидкостях. По принятой классификации это так называемые равновесные по давлению модели.

В классе течений, где тепловые процессы не являются определяющими, возможно дальнейшее упрощение математической модели, связанное с рассмотрением баротропных процессов. В этом случае многожидкостная модель будет состоять из уравнений неразрывности, уравнений количества движения, уравнений связи плотности со значением давления для каждой из жидкостей и алгебраического соотношения баланса объемной доли жидкостей. В квазиодномерной постановке система уравнений, записанная для канала переменного сечения, имеет вид

$$\frac{\partial(A\alpha_k\rho_k)}{\partial t} + \frac{\partial(A\alpha_k\rho_k u_k)}{\partial x} = 0,$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial(A\alpha_k\rho_k u_k)}{\partial t} + \frac{\partial(A\alpha_k\rho_k u_k^2 + A\alpha_k p)}{\partial x} - \\ - p \frac{\partial(A\alpha_k)}{\partial x} = 0, \end{aligned} \quad (1)$$

$$\sum_{k=1}^{k=K} \alpha_k = 1, \rho_k = \rho_k(p),$$

где α_k – объемная доля k -ой жидкости; ρ_k , кг/м³, u_k , м/с, – ее плотность и скорость ($k = 1, 2, \dots, K$; K – общее количество жидкостей); p , Па, – общее для всех жидкостей давление в сечении канала; A , м², – площадь сечения канала; t , с, – время; x , м, – координата вдоль образующей канала.

Система дифференциальных уравнений (1) состоит из слагаемых в виде первых производных по пространству и времени. Источниковые слагаемые, описывающие массообменные процессы в жидкостях и процессы изменения импульса за счет взаимодействия фаз на межфазной поверхности или взаимодействия жидкостей со стенкой канала, не представлены. Как правило, при конструировании этих слагаемых не используют дифференциальные соотношения, и, следовательно, такие слагаемые не будут влиять на тип и свойства системы уравнений (1).

В рамках двухжидкостного подхода ($K = 2$) установлено, что система уравнений (1) всегда негиперболична, если скорости в жидкостях по величине не равны между собой, а задача Коши для нее некорректна. Другими словами, такую систему уравнений формально нельзя использовать для описания состояния гетерогенной среды [2]. Известно несколько приемов, решающих эту проблему.

Формальный подход к системе уравнений (1) как к системе уравнений первого порядка позволяет ожидать от нее проявления гиперболических свойств как от совокупности уравнений переноса, что и наблюдается при предельном переходе к однофазному течению (одной жидкости). В случае двух и большего количества жидкостей комплексное значение собственных чисел (они трактуются как скорости распространения возмущений) у матрицы Якоби для этой системы свидетельствует об отсутствии характеристических направлений и утрате гиперболических свойств.



Понимание этого факта позволило сформировать путь регуляризации свойств матрицы, который исключает возникновение комплексных собственных чисел матрицы Якоби за счет добавления тех или иных слагаемых, содержащих первые производные от разыскиваемых функций.

Исторически в литературе такой подход восстановления гиперболических свойств системы уравнений Эйлера для многофазных задач в формулировке с общим давлением связывают с учетом присоединенных масс. Добавление производных по времени и по пространству от компонент скорости в уравнения количества движения позволяет установить размеры области, где неблагоприятное сочетание значений разыскиваемых функций не проявляется [3 – 5]. В конечном счете, развивая это направление, в системе уравнений (1) удалось ограничиться добавлением для каждой из жидкостей в уравнения количества движения всего одного слагаемого, содержащего в качестве сомножителя градиент объемной доли. Физическая интерпретация этого слагаемого раскрывается таким понятием, как давление на границе p_i (здесь индекс i обозначает принадлежность к интерфейсу, т. е. величину давления на поверхности между контактирующими жидкостями). Возникающую при этом разность давлений $p_i - p$ можно определить через характеристики контактирующих жидкостей. Подбор количественного значения для разности $p_i - p$ позволяет обеспечить действительные значения всех собственных чисел матрицы Якоби. В частности, для двухжидкостных моделей анализ корней характеристического уравнения указывает, что действительные значения обеспечиваются при выборе количественного значения разности в виде величины, которая пропорциональна скорости движения жидкости относительно скорости движения интерфейса, т. е. величине $u_{ki} - u_k$. Примеры использования этой методики для двухжидкостного подхода содержатся, например, в работах [6 – 8]; обоснование работоспособности этого приема для трех и большего количества жидкостей в литературе отсутствует.

Следует упомянуть еще об одном техническом приеме численного решения системы уравнений (1). Заключается он в использовании разностных операторов, аппроксимирующих производные с первым порядком точности, для представления

производных по пространству. В этом случае первое дифференциальное приближение разностной схемы в качестве главного слагаемого содержит повторную производную. Ее наличие приводит к изменению типа системы дифференциальных уравнений с неопределенного на параболический. В системе уравнений первого дифференциального приближения степень влияния этих производных обусловлена значением коэффициентов при старших производных, т. е. схемной вязкостью. Установлено, что при грубой дискретизации расчетной области, т. е. при высоких значениях схемной вязкости, получить численное решение системы уравнений (1) возможно. К сожалению, при этом подходе установить асимптотику поведения решения при уменьшении шага сетки невозможно, так как при уменьшении значения схемной вязкости возникающие колебания решения носят экспоненциальный характер.

В настоящей работе для решения системы уравнений (1) следует обратить внимание на два важных момента.

Во-первых, за счет дополнения уравнений количества движения повторными производными, изменен тип рассматриваемой системы уравнений на параболический. Это позволяет, в общем случае, не связывать устойчивость вычислительного процесса с использованием для представления производных по пространству операторов, которые выполняют аппроксимацию с первым порядком точности. Необходимый для этого коэффициент переноса (по аналогии с принятыми в вычислительной математике трактовками, его следует называть искусственной вязкостью) определяется параметрами решаемой задачи: свойствами рассматриваемых жидкостей и шагом дискретизации по пространству.

Во-вторых, вместо алгебраического уравнения баланса объемной доли сформулировано эволюционное дифференциальное уравнение параболического типа относительно давления.

Для вывода указанного уравнения воспользуемся уравнением неразрывности. Для каждой жидкости, расписывая значение производной по времени от произведения функций, можно получить уравнение следующего вида:

$$A \frac{\partial \alpha_k}{\partial t} + A \frac{\alpha_k}{\rho_k} \frac{\partial \rho_k}{\partial t} + \frac{1}{\rho_k} \frac{\partial (A \alpha_k \rho_k u_k)}{\partial x} = 0. \quad (2)$$

При помощи уравнения состояния для каждой из жидкостей, заменяя производную от плотности производной от давления и, с учетом алгебраического соотношения баланса объемной доли, проводя суммирование по всем значениям объемных долей, можно получить уравнение эволюции давления, которое имеет ясный физический смысл как результирующая мера дисбаланса потоков массы различных жидкостей:

$$A \left(\sum_{k=1}^K \frac{\alpha_k}{\rho_k c_k^2} \right) \frac{\partial p}{\partial t} + \sum_{k=1}^K \left(\frac{1}{\rho_k} \frac{\partial (A \alpha_k \rho_k u_k)}{\partial x} \right) = 0. \quad (3)$$

В первом слагаемом, сомножитель в виде суммы перед производной от давления по времени является ничем иным, как способом вычисления скорости звука в смеси жидкостей по формуле Вуда.

После названных двух модификаций система уравнений (1) приобретает следующий вид:

$$\begin{aligned} \frac{\partial (A \alpha_k \rho_k)}{\partial t} + \frac{\partial (A \alpha_k \rho_k u_k)}{\partial x} &= 0, \\ \frac{\partial (A \alpha_k \rho_k u_k)}{\partial t} + \frac{\partial (A \alpha_k \rho_k u_k^2)}{\partial x} + A \alpha_k \frac{\partial p}{\partial x} &= \\ &= \frac{\partial}{\partial x} \left(v A \frac{\partial (\alpha_k \rho_k u_k)}{\partial x} \right), \end{aligned} \quad (4)$$

$$\frac{A}{\rho c^2} \frac{\partial p}{\partial t} + \sum_{k=1}^K \left(\frac{1}{\rho_k} \frac{\partial (A \alpha_k \rho_k u_k)}{\partial x} \right) = 0,$$

$$\rho_k = \rho_k(p), \quad c_k^2 = \frac{\partial p}{\partial \rho_k}, \quad \rho = \sum_{k=1}^K \alpha_k \rho_k,$$

$$\frac{1}{\rho c^2} = \sum_{k=1}^K \left(\frac{\alpha_k}{\rho_k c_k^2} \right), \quad v = \Delta x c,$$

где c_k , c , м/с, – соответственно скорость звука в k -ой жидкости и таковая в гетерогенной среде, определенной по формуле Вуда; ρ – плотность смеси.

Выбор коэффициента искусственной вязкости основан на исследовании, проведенном в работе [9].

Численный метод

Для численного решения системы дифференциальных уравнений (4) воспользуемся методом конечных разностей. Для этого

введем равномерную сетку по пространству с шагом дискретизации Δx и шагом интегрирования по времени Δt ; f_i^n – значение функции, заданное в узле сетки с координатами $i\Delta x$ и $n\Delta t$. Для упрощения изложения алгоритма воспользуемся простейшими разностными соотношениями:

$$\Lambda f_i = (f_i - f_{i-1}) / \Delta x$$

– двухточечный направленный разностный оператор, аппроксимирующий производную $\partial/\partial x$ с первым порядком точности;

$$\bar{\Lambda} f_i = (f_{i+1} - f_i) / \Delta x$$

– направленный разностный оператор, сопряженный к Λ .

Простейший алгоритм численного интегрирования системы уравнений (4) основан на явно-неявной аппроксимации ее слагаемых.

Конечно-разностная аппроксимация для K уравнений количества движения для каждой из жидкостей при $(u_k)_i^n > 0$ имеет вид:

$$\begin{aligned} \frac{(A \alpha_k \rho_k u_k)_i^{n+1} - (A \alpha_k \rho_k u_k)_i^n}{\Delta t} + \\ + \Lambda (A \alpha_k \rho_k u_k^2)_i^n - \\ - \Lambda (A v \bar{\Lambda} (\alpha_k \rho_k u_k)_i^n) + A (\alpha_k)_i^n \bar{\Lambda} p_i^{n+1} = 0. \end{aligned} \quad (5)$$

Конечно-разностная аппроксимация эволюционного уравнения относительно давления может быть записана в виде

$$\begin{aligned} \left(\frac{A}{\rho c^2} \right)_i^n \frac{p_i^{n+1} - p_i^n}{\Delta t} + \\ + \sum_{k=1}^K \left(\frac{1}{(\rho_k)_i^n} \Lambda (A \alpha_k \rho_k u_k)_i^{n+1} \right) = 0. \end{aligned} \quad (6)$$

Важным моментом является использование для аппроксимации градиента давления сопряженного оператора по отношению к оператору конвективного переноса. Это приводит, в случае разнонаправленного движения жидкостей, к связи по давлению текущей точки с двумя соседними. Заметим, что если $(u_k)_i^n < 0$, то в формулах (5) и (6) применяется циклическая замена Λ на $\bar{\Lambda}$.

Совокупность уравнений (K уравнений (5) и уравнение (6)) образует замкнутую систему, в которой непосредственной подстановкой можно исключить переменную $(A\alpha_k \rho_k u_k)_i^{n+1}$ и сформулировать уравнение относительно давления p_i^{n+1} . Если ввести обозначение для группы слагаемых, определенных на известном временном слое n по формуле

$$\begin{aligned} (A\alpha_k \rho_k u_k)_i^* &= (A\alpha_k \rho_k u_k)_i^n - \\ -\Delta t \left(\Lambda (A\alpha_k \rho_k u_k)_i^n - \Lambda (Av\bar{\Lambda} (\alpha_k \rho_k u_k)_i^n) \right), \end{aligned} \quad (7)$$

то значение давления в канале определяется из решения уравнения вида

$$\begin{aligned} &\left(\frac{A}{\rho c^2} \right)_i^n p_i^{n+1} - \\ -\Delta t^2 \sum_{k=1}^K \left(\frac{1}{(\rho_k)_i^n} \Lambda (A\alpha_k \bar{\Lambda} p_i^{n+1}) \right) &= \\ = -\Delta t \sum_{k=1}^K \left(\frac{1}{(\rho_k)_i^n} \Lambda (A\alpha_k \rho_k u_k)_i^* \right) + & \\ + \left(\frac{A}{\rho c^2} \right)_i^n p_i^n. \end{aligned} \quad (8)$$

Заметим, что любые сочетания последовательности операторов

$$\Lambda (A\alpha_k \bar{\Lambda} p_i^{n+1}) \text{ или } \bar{\Lambda} (A\alpha_k \Lambda p_i^{n+1}),$$

являющихся, по сути, операторами для представления повторной производной, эквивалентны между собой. Стандартное представление повторной производной приводит к формированию трехдиагональной матрицы коэффициентов перед неизвестными значениями p_i^{n+1} . Для получения однозначного решения задачи необходимо сформулировать относительно давления два граничных условия на разных концах канала.

Рассмотрим формулировку граничных условий для проницаемой границы и для непроницаемой. Для входной границы, когда все жидкости поступают в расчетную область, как правило, заданы значения величин

$$\alpha_k^{inlet}, \rho_k^{inlet}, u_k^{inlet},$$

т. е. задан расход каждой жидкости

$$G_k^{inlet} = A\alpha_k^{inlet} \rho_k^{inlet} u_k^{inlet}.$$

Если полагать, что изменение этих величин во времени не порождает существенных градиентов давления в окрестности границы, то можно воспользоваться однородным граничным условием 2-го рода:

$$\frac{\partial p}{\partial x} = 0, \quad (9)$$

которое в разностном виде можно представить как двухточечное соотношение. Такое же граничное условие можно применить для тупикового канала (непроницаемая торцевая поверхность канала), что непосредственно следует из уравнения количества движения при нулевом значении расхода.

Для выходной границы, когда все жидкости покидают расчетную область, для установления уровня давления можно воспользоваться граничным условием 1-го рода:

$$p = p^{outlet}. \quad (10)$$

Значения остальных функций на выходной границе для покидающих расчетную область жидкостей доопределяются, исходя из условия гладкости их поведения, т. е. экстраполяцией.

Вариант, когда на проницаемой границе реализуется ситуация, при которой одновременно ряд жидкостей поступает в расчетную область, а оставшиеся жидкости ее покидают, не рассматривается.

После определения давления из уравнения (8) при помощи стандартной процедуры скалярной прогонки с двухточечными граничными условиями, остальные значения функций вычисляются по явным формулам для всех K жидкостей в следующем порядке:

$$\begin{aligned} (A\alpha_k \rho_k u_k)_i^{n+1} &= (A\alpha_k \rho_k u_k)_i^* - \\ -\Delta t \alpha_k A \bar{\Lambda} p_i^{n+1}, \\ (A\alpha_k \rho_k)_i^{n+1} &= (A\alpha_k \rho_k)_i^n - \\ -\Delta t \Lambda (A\alpha_k \rho_k u_k)_i^{n+1}. \end{aligned} \quad (11)$$

Описанная в работе схема дискретизации переменных и применяемые разностные операторы приводят к первому порядку аппроксимации системы дифференциальных уравнений по времени и по пространству. Ограничение на шаг интегрирования по времени, связанное с явной формой описания конвективных и диффузионных потоков, определяется стандартными оценками:

$$\Delta t \leq \min\left(\frac{\Delta x}{c}, \frac{\Delta x^2}{2\nu}\right). \quad (12)$$

Как можно судить по неравенству (12), для выбранного способа определения коэффициента искусственной вязкости явная аппроксимация диффузионных слагаемых накладывает в два раза более жесткое ограничение на шаг интегрирования по времени, по сравнению с условием, следующим из оценки устойчивости вычислительного процесса, связанного с конвективным переносом.

Заметим, что искусственная «параболизация» системы уравнений (1) по всем переменным открывает более широкие возможности, чем направление, связанное с восстановлением гиперболических свойств системы уравнений (1). В частности, допустимы более вариативные функциональные значения для уравнения состояния. Например, можно рассматривать многофазные потоки с несжимаемыми включениями, когда уравнение состояния сводит-

ся к константе по плотности (в этом случае скорость звука в этой компоненте равна бесконечности). Возможен предельный переход, когда все компоненты многофазного течения несжимаемы. В этом предельном случае в уравнении (6) отсутствует нестационарное слагаемое (тип уравнения для давления меняется на эллиптический) и происходит асимптотический переход к классической модели несжимаемой жидкости, обобщенной на несколько компонентов.

Пример расчета

Для иллюстрации предложенного алгоритма в настоящей работе проведен расчет развития течения в канале переменного сечения, соединяющего два резервуара, в трехжидкостном приближении. Постановка задачи взята из работы [10], где решение получено по методике, реализованной в коде «КОРСАР» [11] в трехжидкостном приближении. Решение и приведенные графики демонстрируют поведение функций, которые возникают после мгновенного разрушения диафрагмы, расположенной посередине канала.

Используемые количественные значения термодинамических функций и их уравнения состояния для жидкостей сведены в таблице.

Развитие нестационарного течения из состояния покоя в канале конической формы с отношением площадей 4 : 1 и протяженностью 1 м для состава из трех

Таблица

Использованные количественные значения термодинамических функций и их уравнения состояния для трех жидкостей

Термодинамическая функция	Значение функции или ее уравнение		
	Пар	Несжимаемая жидкость	Слабосжимаемая жидкость
Давление, МПа в левом резервуаре в правом резервуаре	2,0	2,0	2,0
	0,2	0,2	0,2
Объемная доля в левом резервуаре в правом резервуаре	0,40	0,59	0,01
	0,59	0,40	0,01
Плотность материала, кг/м ³	$\left(\frac{p}{1,0e5}\right)^{0,714}$	1,0e3	$1,0e3\left(\frac{p}{1,0e6}\right)^{0,130}$

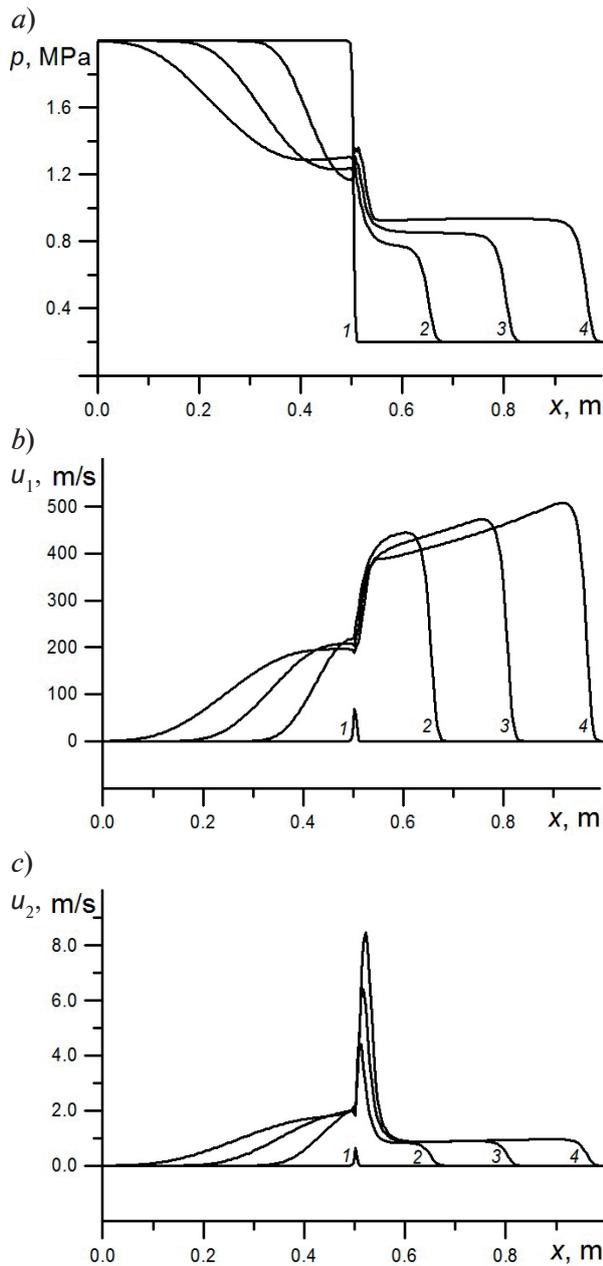


Рис. 1. Расчетные профили газодинамического давления (а), скоростей пара (b) и несжимаемой жидкости (с) по продольной координате в моменты первого (1), 100-го (2), 200-го (3) и 300-го (4) шагов по времени

жидкостей (см. таблицу) было выполнено на сетке, состоящей из 256 узлов. Шаг интегрирования по времени был выбран ($2,0e - 6$) с.

Результат численного интегрирования после 300 шагов по времени представлен на рис. 1, где приведены профили газодинамических функций первого и каждого сотого шага по времени. В частности, на рисунке представлены зависимости давления (а), скорости пара (b) и несжимаемой жидкости (с) от продольной координаты в выбранные моменты времени.

Заключение

В качестве подведения итогов отметим ключевые положительные моменты предложенного алгоритма.

Во-первых, он не содержит ограничения на количество рассматриваемых жидкостей.

Во-вторых, прием регуляризации задачи Коши при помощи повторных производных позволяет, не искажая скорости распространения акустических возмущений, получать характеристики течения на начальных фазах быстропротекающих процессов.

В-третьих, он превосходит по эффективности все существующие на настоящий момент алгоритмы решения систем уравнений для двухжидкостного (многожидкостного) подхода, так как вычисления проводятся по явным формулам и процедуре одной скалярной прогонки.

Работа выполнена в рамках государственного задания Министерства образования и науки Российской Федерации № 3.3314.2017/4.6. (период 2017 – 2019 гг.).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Рахматулин Х.А. Основы газодинамики взаимопроникающих движений сжимаемых сред // Прикладная математика и механика. 1956. Т. 20. № 2. С. 184–195.
2. Клебанов Л.А., Крошилин А.Е., Нигматулин Б.И., Нигматулин Р.И. О гиперболичности, устойчивости и корректности задачи Коши для системы дифференциальных урав-

нений двухскоростного движения двухфазных сред // Прикладная математика и механика. 1982. Т. 46. № 1. С. 83–95.

3. Lyczkowski R.W., Gidaspow D., Solbrig Ch.W., Hughes E.D. Characteristics and stability analysis of transient one-dimensional two-phase equations and their finite-difference approximation // Nuclear Science and

Engineering, 1978. Vol. 66. No. 3. Pp. 378–396.

4. **Chao B.T., Sha W.T., Soo S.L.** On inertial coupling in dynamic equations of components in a mixture // International Journal of Multiphase Flow. 1978. Vol. 4. No. 2. Pp. 219–222.

5. **Drew D.A., Lahey R.T.** Application of general constitutive principles to the derivation of multidimensional two-phase flow equations // International Journal of Multiphase Flow. 1979. Vol. 5. No. 4. Pp. 243–264.

6. **Figueiredo A.B., Baptista R.M., Rachid F.B.F., Bodstein G.C.R.** Numerical simulation of stratified-pattern two-phase flow in gas pipelines using a two-fluid model // International Journal of Multiphase Flow. 2017. Vol. 88. January. Pp. 30–49.

7. **Evje S., Flatten T.** On the wave structure of two-phase flow models // SIAM J. Appl. Math. 2007. Vol. 67. No. 2. Pp. 487–511.

8. **Крошилин А.Е., Крошилин В.Е.** Корректное численное моделирование двухфаз-

ного теплоносителя // Теплоэнергетика. 2016. № 2. С. 22–30.

9. **Bulovich S.V., Smirnov E.M.** Experience in using a numerical scheme with artificial viscosity at solving the Riemann problem for a multi-fluid model of multiphase flow // AIP Conference Proceedings. 2018. Vol. 1959. No. 1. P. 050007.

10. **Smirnov S.I., Bulovich S.V., Smirnov E.M.** Calculation of unsteady two-phase quasi-onedimensional channel flow based on the two-fluid model and the artificial viscosity numerical scheme // Proceedings of International Conference Physica. SPb/2018. St. Petersburg, October, 23–25, 2018. Journal of Physics: Conference Series. 1135. 012103. 10.1088/1742-6596/1135/1/012103.

11. **Мигров Ю.А., Волкова С.Н., Юдов Ю.В. и др.** КОРСАР – теплогидравлический расчетный код нового поколения для обоснования безопасности АЭС с ВВЭР // Теплоэнергетика. 2001. № 9. С. 36–43.

Статья поступила в редакцию 26.03.2019, принята к публикации 13.05.2019.

СВЕДЕНИЯ ОБ АВТОРЕ

БУЛОВИЧ Сергей Валерьевич – кандидат физико-математических наук, доцент кафедры «Гидроаэродинамика, горение и теплообмен» Санкт-Петербургского политехнического университета Петра Великого, Санкт-Петербург, Российская Федерация.

195251, Российская Федерация, г. Санкт-Петербург, Политехническая ул., 29
bulovic@yandex.ru

REFERENCES

1. **Rakhmatulin Kh.A.**, Osnovy gazodinamiki vzaimopronikayushchikh dvizheniy szhimayemykh sred [Gas dynamics principles of interpenetrating motions of compressible media], J. Appl. Math. Mech. 20 (2) (1956) 184–195.

2. **Klebanov L.A., Kroshilin A.E., Nigmatulin B.I., Nigmatulin R.I.**, O giperbolichnosti, ustoychivosti i korrektnosti zadachi Koshi dlya sistemy differentsialnykh uravneniy dvukhskorostnogo dvizheniya dvukhfaznykh sred [On hyperbolicity, stability and correctness of the Cauchy problem for a differential equations system of a two-speed motion of biphasic media], J. Appl. Math. Mech. 46 (1) (1982) 83–95.

3. **Lyczkowski R.W., Gidaspow D., Solbrig Ch.W., Hughes E.D.**, Characteristics and stability analysis of transient one-dimensional two-phase equations and their finite-difference approximation, Nuclear Science and Engineering. 66 (3) (1978) 378–396.

4. **Chao B.T., Sha W.T., Soo S.L.**, On inertial coupling in dynamic equations of components in

a mixture, International Journal of Multiphase Flow. 4 (2) (1978) 219–222.

5. **Drew D.A., Lahey R.T.**, Application of general constitutive principles to the derivation of multidimensional two-phase flow equations, International Journal of Multiphase Flow. 5 (4) (1979) 243–264.

6. **Figueiredo A.B., Baptista R.M., Rachid F.B.F., Bodstein G.C.R.**, Numerical simulation of stratified-pattern two-phase flow in gas pipelines using a two-fluid model, International Journal of Multiphase Flow. 88 (January) (2017) 30–49.

7. **Evje S., Flatten T.**, On the wave structure of two-phase flow models, SIAM J. Appl. Math. 67 (2) (2007) 487–511.

8. **Kroshilin A.E., Kroshilin V.E.**, Correct numerical simulation of a two-phase coolant, Thermal Engineering. 63 (2) (2016) 98–106.

9. **Bulovich S.V., Smirnov E.M.**, Experience in using a numerical scheme with artificial viscosity at solving the Riemann problem for a multi-



fluid model of multiphase flow, AIP Conference Proceedings. 1959 (1) (2018) 050007.

10. **Smirnov S.I., Bulovich S.V., Smirnov E.M.**, Calculation of unsteady two-phase quasi-onedimensional channel flow based on the two-fluid model and the artificial viscosity numerical scheme, Proceedings of International Conference PhysicA, SPb/2018. St. Petersburg, October, 23–25, (2018), Journal of Physics:

Conference Series. 1135. 012103. 10.1088/1742-6596/1135/1/012103.

11. **Migrov Yu.A., Volkova S.N., Yudov Yu.V., et al.**, KORSAR –teplogidravlicheskiy raschetnyy kod novogo pokoleniya dlya obosnovaniya bezopasnosti AES s VVER [KORSAR is a heat-hydraulic new-generation design code for a safety case of a NPP with LWR], Thermal Engineering. (9) (2001) 36–43.

Received 26.03.2019, accepted 13.05.2019.

THE AUTHOR

BULOVICH Sergei V.

Peter the Great St. Petersburg Polytechnic University

29 Politechnicheskaya St., St. Petersburg, 195251, Russian Federation

bulovic@yandex.ru

DOI: 10.18721/JPM.12303

УДК 517.51; 517.28; 517.983; 537.213, 537.8

БАЗИСНЫЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ ОПЕРАТОРЫ ДОНКИНА ДЛЯ ОДНОРОДНЫХ ГАРМОНИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ

А.С. Бердников¹, Л.Н. Галль¹, Н.Р. Галль¹, К.В. Соловьев^{2,1}

¹Институт аналитического приборостроения Российской академии наук,
Санкт-Петербург, Российская Федерация;

²Санкт-Петербургский политехнический университет Петра Великого,
Санкт-Петербург, Российская Федерация

В работе показано, что существуют дифференциальные операторы, которые преобразуют трехмерные однородные гармонические функции в новые трехмерные однородные гармонические функции. Характерной чертой этих операторов, названных авторами дифференциальными операторами Донкина, является их обратимость: для любой однородной гармонической функции найдется однородный и гармонический прототип, из которого эту функцию можно получить, если применить указанный оператор. В работе приводится полный список дифференциальных операторов Донкина первого порядка, которые выступают в качестве линейного базиса для симметризованных формул Томсона, используемых при генерировании трехмерных однородных гармонических функций.

Ключевые слова: электростатическое поле, магнитостатическое поле, скалярный потенциал, однородная функция, гармоническая функция

Ссылка при цитировании: Бердников А.С., Галль Л.Н., Галль Н.Р., Соловьев К.В. Базисные дифференциальные операторы Донкина для однородных гармонических функций // Научно-технические ведомости СПбГПУ. Физико-математические науки. 2019. Т. 12. № 3. С. 26–44. DOI: 10.18721/JPM.12303

BASIC DONKIN'S DIFFERENTIAL OPERATORS FOR HOMOGENEOUS HARMONIC FUNCTIONS

A.S. Berdnikov¹, L.N. Gall¹, N.R. Gall¹, K.V. Solovyev^{2,1}

¹Institute for Analytical Instrumentation of the Russian Academy of Sciences,
St. Petersburg, Russian Federation;

²Peter the Great St. Petersburg Polytechnic University, St. Petersburg, Russian Federation

It has been shown that there are differential operators transforming the three-dimensional homogeneous harmonic functions into new three-dimensional ones. A characteristic feature of these operators is their reversibility: for any homogeneous harmonic function there is a homogeneous and harmonic prototype from which it can be obtained by applying the specified operator. The involved operators were called differential Donkin's operators by the authors. The paper provides a complete list of fundamental first-order Donkin's differential operators forming a linear basis of Thomson formulas for three-dimensional homogeneous harmonic functions.

Keywords: electrostatic field, magnetostatic field, scalar potential, homogeneous function, harmonic function

Citation: Berdnikov A.S., Gall L.N., Gall N.R., Solovyev K.V., Basic Donkin's differential operators for homogeneous harmonic functions, St. Petersburg Polytechnical State University Journal. Physics and Mathematics. 12 (3) (2019) 26–44. DOI: 10.18721/JPM.12303

Постановка задачи

Полезным инструментом при синтезе электронно- и ионно-оптических систем специального вида служат электрические и магнитные поля, однородные по Эйлеру [1 – 6]. Для полей, однородных по Эйлеру, напряженность электрического поля \mathbf{E} и/или индукция магнитного поля \mathbf{B} должны удовлетворять не только уравнениям Максвелла для электромагнитного поля, но и тождеству однородности:

$$\begin{aligned} \forall \lambda > 0: \mathbf{E}(\lambda x, \lambda y, \lambda z) &\equiv \lambda^{k-1} \mathbf{E}(x, y, z), \\ \forall \lambda > 0: \mathbf{B}(\lambda x, \lambda y, \lambda z) &\equiv \lambda^{k-1} \mathbf{B}(x, y, z), \end{aligned} \quad (1)$$

где k – степень однородности поля (не обязательно целочисленная).

Траектории движения заряженных частиц в электростатических и магнитостатических полях, однородных по Эйлеру, подчиняются принципу подобия траекторий Голикова [7, 8]. Отсюда следуют уникальные оптические свойства устройств, управляющих движением заряженных частиц, если эти устройства используют однородные по Эйлеру электрические и магнитные поля [1 – 5, 9 – 16].

При ненулевой степени однородности электрические или магнитные поля, однородные по Эйлеру и подчиняющиеся тождеству (1), характеризуются скалярным электрическим или магнитным потенциалом в виде скалярной гармонической функции $U(x, y, z)$, которая будет однородной (точнее, положительно однородной, т. е. при $\lambda > 0$) по Эйлеру, в смысле, который придается этому термину в классическом математическом анализе [17, 18]:

$$\forall \lambda > 0: U(\lambda x, \lambda y, \lambda z) \equiv \lambda^k U(x, y, z), \quad (2)$$

где k – степень однородности функции, совпадающая со степенью однородности электрического или магнитного поля, как она определена с помощью тождеств (1).

Для полей с нулевой степенью однородности скалярный потенциал U в самом общем случае имеет вид:

$$U(x, y, z) = U_0(x, y, z) + C \ln(z + r), \quad (3)$$

где $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ (здесь и далее), U_0 – однородная гармоническая функция нулевой степени, C – произвольная константа.

При $C \neq 0$ выражение (3) больше не является однородной по Эйлеру функцией,

хотя градиент функции (3) и подчиняется условиям однородности (1) для электрического либо магнитного поля. Вопрос об однородности скалярных и/или векторных потенциалов для полей, однородных по Эйлеру, подробно исследуется в работе [19].

Исследования Ю.К. Голикова [3, 20, 21] наглядно демонстрируют, каким удобным и эффективным инструментом при синтезе новых электронно- и ионно-оптических систем являются аналитические методы и, в частности, аналитические выражения для потенциалов электрических и магнитных полей. В случае однородных электрических и магнитных полей, при получении аналитических выражений для их скалярных потенциалов требуется предпринимать дополнительные и целенаправленные усилия, поскольку таких функций в некотором смысле «много меньше», чем обычных гармонических функций (см. Примечание 1 в конце статьи). Некоторые полезные аналитические выражения для гармонических функций, однородных по Эйлеру, которые можно использовать в качестве скалярных потенциалов, приводятся в статьях [22 – 29]. Но если ограничиваться лишь этими аналитическими выражениями при оптимизации новых электронно- и ионно-оптических систем, есть большой риск пропустить действительно оптимальное решение.

Задача вычисления однородных гармонических функций с целочисленными степенями однородности полностью решена. Точнее, с помощью дифференцирования по одной из пространственных переменных x , y или z , из любой трехмерной однородной гармонической функции $U(x, y, z)$ степени k можно получить новую трехмерную однородную гармоническую функцию степени $k - 1$. Тогда мы получаем для целочисленных степеней цепочку однородных гармонических функций с последовательно уменьшающимися степенями однородности. С помощью формулы Томсона (преобразование Кельвина) [30–41], которая имеет вид

$$V(x, y, z) = \frac{1}{r} U\left(\frac{x}{r^2}, \frac{y}{r^2}, \frac{z}{r^2}\right), \quad (4)$$

из однородных гармонических функций U с отрицательными целочисленными степенями k получаются однородные гармонические функции V с положительными целочисленными степенями $(-k - 1)$. Наконец, для однородных гармонических функций

нулевой степени и степени -1 имеются явные формулы Донкина [1, 2, 11, 24, 42–45]:

$$V_0(x, y, z) = H\left(\frac{x}{z+r}, \frac{y}{z+r}\right), \quad (5)$$

$$V_{-1}(x, y, z) = \frac{1}{r} H\left(\frac{x}{z+r}, \frac{y}{z+r}\right); \quad (6)$$

они устанавливают взаимно-однозначное соответствие между решениями $H(p, q)$ двумерного уравнения Лапласа

$$H_{pp} + H_{qq} = 0$$

и трехмерными однородными гармоническими функциями со степенями однородности 0 и -1 .

Поскольку для однородных функций обший множитель $1/r^2$ может быть вынесен из-под знака функции, формулу (4) можно записать в более удобном виде:

$$V(x, y, z) = r^{-2k-1} U(x, y, z). \quad (7)$$

Формула (7) получила название формулы Томсона для однородных функций. Очевидно, что выражение (7) будет однородной по Эйлера функцией степени $(-k-1)$, если U будет однородной по Эйлера функцией степени k . Однако прямолинейное (не использующее отсылку к общей формуле Томсона (4)) доказательство гармоничности выражения (7) при условии гармоничности функции U потребует некоторых дополнительных усилий. В частности, такое доказательство можно найти в трактате [32] (см. там приложение Б к главе 1).

Для полноты картины приведем историческую справку. Уильям Томсон, лорд Кельвин (*англ.* William Thomson, 1st Baron Kelvin) – британский физик и механик, известный своими выдающимися заслугами в чистой и прикладной науке. В литературе формула (2) называется либо формулой Томсона, либо преобразованием Кельвина, в зависимости от традиции, которой придерживается исследователь. Для формулы (3), насколько можно судить, в общепринятой математической литературе используется исключительно термин «формула Томсона», как правило, с уточняющим указанием «для однородных функций». Комбинированный же термин «преобразование Томсона» для линейных дифференциально-алгебраических операторов общего вида, преобразующих гармонические функции в новые гармонические функции, предложен авто-

рами данной статьи.

Описанный выше процесс получения формул общего вида для гармонических однородных функций (состоящий из дифференцирования формул Донкина (5) или (6) по переменным x , y или z и последующего применения формулы Томсона (4) или (7)) позволяет генерировать в широком ассортименте новые однородные гармонические функции с целочисленными степенями однородности. Его несомненным достоинством является то, что таким образом можно получить любую однородную гармоническую функцию целочисленной степени. Обоснование полноты данного процесса генерирования трехмерных однородных гармонических функций с целочисленными степенями однородности хотя и достаточно просто, но тем не менее не вполне очевидно.

Действительно, теорема о дифференцировании однородных гармонических функций [44, 46] гарантирует, что для любой однородной гармонической функции существует однородный гармонический прототип на единицу большей степени, из которого ее можно получить путем дифференцирования по любой из пространственных переменных x , y или z . Формула Томсона обладает аналогичным свойством обратимости: для любой однородной гармонической функции для нее существует однородный и гармонический прототип, из которого ее можно получить, применив преобразование (4) либо (7). Данное утверждение почти очевидно, поскольку преобразование Томсона, повторенное дважды, приводит к исходной однородной гармонической функции.

Наконец, формулы Донкина (5), (6) обеспечивают исчерпывающее описание трехмерных однородных гармонических функций со степенями однородности 0 и -1 , причем в качестве источника двумерных гармонических функций для формул Донкина можно использовать вещественные и мнимые части аналитических функций комплексного переменного [47 – 50]. В результате у любой трехмерной однородной гармонической функции целочисленной степени найдется прототип вида (5) либо (6), как правило, не единственный.

С практической точки зрения очень важно, что имеется конструктивный процесс, с помощью которого (в принципе) имеется возможность перебрать все однородные



гармонические функции с целочисленными степенями однородности, используя двумерные гармонические функции в качестве исходного материала (см. Примечание 2 в конце статьи). Более подробно описанный алгоритм получения однородных гармонических функций с целочисленными степенями однородности описывается в работах [24, 44]. К сожалению, для однородных гармонических функций с нецелочисленными степенями однородности вопрос получения и полного перечисления остается в настоящее время открытым.

Дифференцирование по переменным x , y и z является не единственным преобразованием, обладающим нужными свойствами. Будем называть линейный дифференциальный оператор оператором Донкина (по имени первооткрывателя этого класса преобразований [42 – 45]) при следующих условиях:

а) оператор преобразует произвольную однородную гармоническую функцию в новую однородную гармоническую функцию, возможно, с другой степенью однородности;

б) для любой однородной гармонической функции существует функция-прототип (также однородная и гармоническая, но, возможно, не единственная), из которой посредством рассматриваемого оператора можно получить данную однородную гармоническую функцию.

Тривиальным и не слишком интересным примером служит тождественное преобразование $L[U] = U$ (возможно, с участием произвольного ненулевого множителя). Теорема о дифференцировании однородных гармонических функций [44, 46] показывает, что операторы дифференцирования

$$L[U] = U_x, L[U] = U_y, L[U] = U_z,$$

или, в общем случае, оператор

$$L[U] = aU_x + bU_y + cU_z$$

(a, b, c – константы, не все равны нулю), несомненно, являются операторами Донкина.

Задачей настоящей работы является нахождение исчерпывающего списка операторов Донкина первого порядка для трехмерных однородных гармонических функций. Данная статья прямо продолжает и описывает исследования, начало которых

представлено в работах [40, 41].

Пример нетривиального оператора Донкина

Публикации [42, 43] являются, по всей видимости, первыми, в которых исчерпывающим образом решен вопрос о перечислении всех трехмерных однородных гармонических функций с целочисленными неотрицательными порядками однородности. Для этой цели автором был использован линейный дифференциальный оператор специального вида, исследованию которого посвящен этот раздел.

Пусть дана однородная гармоническая функция $U(x,y,z)$ со степенью однородности, равной m . Процедура конструирования новой однородной гармонической функции $V(x,y,z)$ со степенью однородности, равной $m + 1$, выглядит, согласно данным работ [42, 43], следующим образом.

1. С помощью взаимно-однозначного перехода от декартовых переменных x, y, z к сферическим r, θ, φ , т. е.

$$\begin{cases} x = r \sin \theta \cos \varphi, \\ y = r \sin \theta \sin \varphi, \\ z = r \cos \theta \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}, \\ \theta = \arctg(\sqrt{x^2 + y^2}/z), \\ \varphi = \arctg(y/x), \end{cases} \quad (8)$$

однородная по Эйлера функция U записывается в каноническом виде:

$$U(x, y, z) = r^m u(\theta, \varphi). \quad (9)$$

2. Сферическая функция $u(\theta, \varphi)$, заданная на единичной сфере, однозначным образом определяется по заданной однородной функции U . Поскольку функция U гармоническая (удовлетворяет трехмерному уравнению Лапласа), функция $u(\theta, \varphi)$ должна удовлетворять уравнению

$$\begin{aligned} & \frac{\partial^2 u(\theta, \varphi)}{\partial \theta^2} + \frac{\cos \theta}{\sin \theta} \frac{\partial u(\theta, \varphi)}{\partial \theta} + \\ & + \frac{1}{\sin^2 \theta} \frac{\partial^2 u(\theta, \varphi)}{\partial \varphi^2} + m(m+1)u(\theta, \varphi) = 0. \end{aligned} \quad (10)$$

Отсюда, в частности, следует, что

функция

$$U^*(x, y, z) = r^{-m-1}u(\theta, \varphi)$$

также будет гармонической (см. Примечание 3 в конце статьи).

3. От сферической функции $u(\theta, \varphi)$ осуществляется переход к новой сферической функции $v(\theta, \varphi)$ с помощью преобразования

$$v(\theta, \varphi) = \sin \theta \frac{\partial u(\theta, \varphi)}{\partial \theta} + (m+1) \cos \theta \cdot u(\theta, \varphi). \quad (11)$$

Можно проверить, что получившаяся функция $v(\theta, \varphi)$ должна будет удовлетворять дифференциальному уравнению

$$\begin{aligned} & \frac{\partial^2 v(\theta, \varphi)}{\partial \theta^2} + \frac{\cos \theta}{\sin \theta} \frac{\partial v(\theta, \varphi)}{\partial \theta} + \\ & + \frac{1}{\sin^2 \theta} \frac{\partial^2 v(\theta, \varphi)}{\partial \varphi^2} + \\ & + (m+1)(m+2)v(\theta, \varphi) = 0, \end{aligned} \quad (12)$$

поскольку функция $u(\theta, \varphi)$ удовлетворяет уравнению (10).

4. Новая функция V определяется в соответствии с формулой

$$V(x, y, z) = r^{m+1}v(\theta, \varphi). \quad (13)$$

Такая функция V не только будет однородной по Эйлера со степенью однородности $m+1$, но и должна будет удовлетворять трехмерному уравнению Лапласа, так как функция $v(\theta, \varphi)$ удовлетворяет уравнению (12).

Если просуммировать теперь приведенную здесь процедуру конструирования, то окажется, что новая функция V выражается через старую функцию U с помощью линейного дифференциального оператора первого порядка, явно зависящего от степени однородности гармонической функции:

$$\begin{aligned} V = L[U] = & xz \frac{\partial U}{\partial x} + yz \frac{\partial U}{\partial y} - \\ & -(x^2 + y^2) \frac{\partial U}{\partial z} + (m+1)zU. \end{aligned} \quad (14)$$

Так как функция U удовлетворяет дифференциальному соотношению Эйлера для однородных функций степени m [17, 18], т. е.

$$x \frac{\partial U}{\partial x} + y \frac{\partial U}{\partial y} + z \frac{\partial U}{\partial z} - mU = 0, \quad (15)$$

оператор (14) можно преобразовать к виду

$$\begin{aligned} V(x, y, z) = & -(x^2 + y^2 + z^2) \frac{\partial U(x, y, z)}{\partial z} + \\ & + (2m+1)zU(x, y, z). \end{aligned} \quad (16)$$

Формула (16) преобразует однородные функции в новые однородные функции со степенью однородности, большей на единицу, так как частные производные функций, однородных по Эйлера, будут однородными [17, 18].

При гармоничности функции U гармоничность функции V , заданной с помощью преобразования (16), гарантируется тождеством

$$\begin{aligned} V_{xx} + V_{yy} + V_{zz} \equiv & (2m+1)z(U_{xx} + U_{yy} + U_{zz}) - \\ & - r^2(U_{xxz} + U_{yyz} + U_{zzz}) - \\ & - 4(xU_{xz} + yU_{yz} + zU_{zz} - (m-1)U_z). \end{aligned} \quad (17)$$

Поскольку функция U должна удовлетворять как уравнению Лапласа, так и соотношению Эйлера (15), а также удовлетворять дополнительным уравнениям более высокого порядка (они получаются при дифференцировании уравнения Лапласа и соотношения Эйлера по переменной z), правая часть равенства (17) обращается в нуль.

Теорема 1. *Оператор (16) является обратимым, т. е. для любой однородной гармонической функции V степени $(m+1)$ существует прототип в виде такой однородной гармонической функции U степени m , что функции V и U будут связаны между собой условием (16).*

Доказательство. Преобразование Томсона (7) позволяет найти для однородной гармонической функции U степени m такую однородную гармоническую функцию \hat{U} степени $(-m-1)$, которая обеспечивает выполнение равенства

$$U(x, y, z) = r^{2m+1}\hat{U}(x, y, z). \quad (18)$$

Точно так же для однородной гармонической функции V степени $(m+1)$ имеется однородная гармоническая функции \hat{V} степени $(-m-2)$, которая обеспечивает выполнение равенства

$$V(x, y, z) = r^{2m+3}\hat{V}(x, y, z). \quad (19)$$

Если подставить равенства (18) и (19) в выражение (16) и упростить полученное выражение, то получим следующее условие:



$$\hat{V}(x, y, z) = -\frac{\partial \hat{U}(x, y, z)}{\partial z}. \quad (20)$$

В соответствии с теоремой о дифференцировании трехмерных однородных гармонических функций [44, 46], для заданной произвольной однородной гармонической функции \hat{V} можно найти такую трехмерную однородную гармоническую функцию-прототип \hat{U} , которая обеспечит выполнение соотношения (20). Но тогда однородная гармоническая функция U , которая получается из функции \hat{U} с помощью преобразования Томсона (7), обеспечит выполнение равенства (16).

Следовательно, линейный дифференциальный оператор (16) является обратимым на подмножестве однородных гармонических функций степени m , то есть является оператором Донкина.

Теорема 1 доказана.

Оператор Донкина (16) есть полный аналог операции дифференцирования с точки зрения генерирования полного набора однородных гармонических функций с целочисленными степенями однородности. Действительно, поскольку известно, что все однородные гармонические функции нулевой степени можно получать с помощью формулы Донкина (5), то при последовательном применении операторов вида (16) к выражениям (5) можно получать все однородные гармонические функции со степенями однородности 1, 2,

Обратимость дифференциального оператора (16) гарантирует, что ни одна однородная гармоническая функция не будет пропущена. Правда, поскольку прототип U определяется по функции V не единственным образом, большинство однородных гармонических функций будут возникать не один раз в процессе генерирования (а именно, одна и та же однородная гармоническая функция может получаться из довольно разных функций-прототипов).

С помощью преобразований Томсона (4) либо (7), из полного набора однородных гармонических функций с целочисленными степенями 0, 1, 2, ... можно получать парный полный набор однородных гармонических функций с отрицательными целочисленными степенями $-1, -2, \dots$. Тем самым оператор (16), подобно дифференцированию однородных гармонических функций по x, y или z [44, 46], позволяет решить вопрос об исчерпывающем представлении

однородных гармонических функций с целочисленными степенями однородности.

Однако, как уже отмечалось, вопрос об исчерпывающем представлении полного набора однородных гармонических функций с нецелочисленными степенями однородности по-прежнему остается актуальным, но нерешенным.

Дифференциальные формулы Томсона первого порядка

В публикации [40] приводятся дифференциальные аналоги первого порядка формулы Томсона (4) для трехмерных гармонических функций. Эти формулы преобразуют трехмерные гармонические функции в новые трехмерные гармонические функции, причем форма трансформирующих выражений сознательно выбрана таким образом, чтобы при подстановке в них функций, однородных по Эйлера, на выходе получались новые однородные по Эйлера функции, возможно, с другой степенью однородности. Указанный список формул выглядит следующим образом:

$$V(x, y, z) = U(x, y, z), \quad (21)$$

$$V(x, y, z) = U_x(x, y, z), \quad (22)$$

$$V(x, y, z) = U_y(x, y, z), \quad (23)$$

$$V(x, y, z) = U_z(x, y, z), \quad (24)$$

$$V(x, y, z) = xU(x, y, z) + (x^2 - y^2 - z^2)U_x(x, y, z) + 2xyU_y(x, y, z) + 2xzU_z(x, y, z), \quad (25)$$

$$V(x, y, z) = yU(x, y, z) + 2xyU_x(x, y, z) + (-x^2 + y^2 - z^2)U_y(x, y, z) + 2yzU_z(x, y, z), \quad (26)$$

$$V(x, y, z) = zU(x, y, z) + 2xzU_x(x, y, z) + 2yzU_y(x, y, z) + (-x^2 - y^2 + z^2)U_z(x, y, z), \quad (27)$$

$$V(x, y, z) = xU_x(x, y, z) + yU_y(x, y, z) + zU_z(x, y, z), \quad (28)$$

$$V(x, y, z) = yU_x(x, y, z) - xU_y(x, y, z), \quad (29)$$

$$V(x, y, z) = zU_x(x, y, z) - xU_z(x, y, z), \quad (30)$$

$$V(x, y, z) = zU_y(x, y, z) - yU_z(x, y, z). \quad (31)$$

В этом списке нет формул, представленных в статье [40], которые получаются при использовании преобразования Томсона в форме (4) для формул (21) – (31), поскольку такое преобразование меняет аргументы функции и дифференциальный оператор перестает иметь канонический вид. Однако после применения к операторам (21) – (31) преобразования Томсона в форме (7), к списку формул (21) – (31) добавляются операторы

$$V(x, y, z) = \frac{1}{r^{2m+1}}U(x, y, z), \quad (32)$$

$$V(x, y, z) = \frac{1}{r^{2m-1}}U_x(x, y, z), \quad (33)$$

$$V(x, y, z) = \frac{1}{r^{2m-1}}U_y(x, y, z), \quad (34)$$

$$V(x, y, z) = \frac{1}{r^{2m-1}}U_z(x, y, z), \quad (35)$$

$$V(x, y, z) = \frac{x}{r^{2m+3}}U(x, y, z) + \frac{x^2 - y^2 - z^2}{r^{2m+3}}U_x(x, y, z) + \frac{2xy}{r^{2m+3}}U_y(x, y, z) + \frac{2xz}{r^{2m+3}}U_z(x, y, z), \quad (36)$$

$$V(x, y, z) = \frac{y}{r^{2m+3}}U(x, y, z) + \frac{2xy}{r^{2m+3}}U_x(x, y, z) + \frac{-x^2 + y^2 - z^2}{r^{2m+3}}U_y(x, y, z) + \frac{2yz}{r^{2m+3}}U_z(x, y, z), \quad (37)$$

$$V(x, y, z) = \frac{z}{r^{2m+3}}U(x, y, z) + \frac{2xz}{r^{2m+3}}U_x(x, y, z) + \frac{2yz}{r^{2m+3}}U_y(x, y, z) + \frac{-x^2 - y^2 + z^2}{r^{2m+3}}U_z(x, y, z), \quad (38)$$

$$V(x, y, z) = \frac{x}{r^{2m+1}}U_x(x, y, z) + \frac{y}{r^{2m+1}}U_y(x, y, z) + \frac{z}{r^{2m+1}}U_z(x, y, z), \quad (39)$$

$$V(x, y, z) = \frac{y}{r^{2m+1}}U_x(x, y, z) - \frac{x}{r^{2m+1}}U_y(x, y, z), \quad (40)$$

$$V(x, y, z) = \frac{z}{r^{2m+1}}U_x(x, y, z) - \frac{x}{r^{2m+1}}U_z(x, y, z), \quad (41)$$

$$V(x, y, z) = \frac{z}{r^{2m+1}}U_y(x, y, z) - \frac{y}{r^{2m+1}}U_z(x, y, z). \quad (42)$$

В отличие от тех дифференциальных операторов, которые получаются из (21) – (31) после преобразования Томсона в форме (4), эти формулы сохраняют аргументы функции U неизменными. Однако теперь операторы (32) – (42) зависят от степени однородности функции в явном виде и, кроме того, генерируют новые гармонические функции только из других однородных гармонических функций. Формулы же (21) – (31) не зависят в явном виде от степени однородности преобразуемой функции, а также создают гармонические функции из произвольных трехмерных гармонических функций, не обязательно однородных по Эйлеру.

Теорема 2. *Линейные дифференциальные операторы первого порядка (21) – (27), (29) – (38), (40) – (42), преобразующие однородные гармонические функции в новые однородные гармонические функции, являются обратимыми на множестве однородных гармонических функций степени t .*

Доказательство. Формулы (32) – (42) наследуют свою обратимость и/или необратимость от формул (21) – (31), поскольку преобразование Томсона (7), безусловно, является обратимым. Поэтому для доказательства теоремы требуется доказать либо опровергнуть обратимость лишь для формул (21) – (31).

Обратимость оператора (21) тривиальна, так что в соответствии с данным ранее опре-



делением, тождественное преобразование

$$V(x, y, z) = U(x, y, z)$$

представляет собой частный, хотя и вполне бесполезный, случай оператора Донкина. Обратимость операторов (22) – (24) следует из теоремы о дифференцировании однородных гармонических функций, строгое доказательство которой приведено в работе [46].

Операторы (25) – (27) получаются путем дифференцирования формулы Томсона (4) по переменным x, y и z с последующим применением еще одного преобразования Томсона, чтобы вернуть аргументы функции к прежнему виду. Прделаем теперь эти преобразования в обратном порядке.

1. У заданной однородной гармонической функции $V(x, y, z)$ имеется однородный и гармонический прототип $V^*(x, y, z)$, из которого ее можно получить посредством преобразования (4).

2. У однородной гармонической функции $V^*(x, y, z)$ имеется однородный и гармонический прототип $U^*(x, y, z)$, из которого ее можно получить посредством дифференцирования: $V^* = U_x^*$, либо $V^* = U_y^*$, либо $V^* = U_z^*$ [44, 46].

3. У однородной гармонической функции $U^*(x, y, z)$ имеется однородный и гармонический прототип $U(x, y, z)$, из которого ее можно получить посредством преобразования (4).

В таком случае однородная гармоническая функция $U(x, y, z)$ оказывается прототипом, из которого посредством преобразования (25), либо (26), либо (27) получается заданная однородная гармоническая функция $V(x, y, z)$ (преобразования (25) – (27) представляют собой суперпозицию преобразований 1 – 3, выполненную именно в этом порядке, в чем легко убедиться с помощью прямого вычисления указанной суперпозиции).

Поэтому преобразования (25) – (27) обратимы и, следовательно, являются операторами Донкина в соответствии с данным ранее определением.

Остается разобраться с преобразованиями (28) – (31). Например, рассмотрим преобразование (29):

$$V(x, y, z) = yU_x(x, y, z) - xU_y(x, y, z). \quad (43)$$

С помощью замены координат Донкина

[1, 2, 11, 24], а именно

$$\begin{cases} p = \frac{x}{z + \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}, \\ q = \frac{y}{z + \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}, \Leftrightarrow \\ r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}, \end{cases} \quad (44)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{2pr}{1 + p^2 + q^2}, \\ y = \frac{2qr}{1 + p^2 + q^2}, \\ z = \pm \frac{r(1 - p^2 - q^2)}{1 + p^2 + q^2}, \end{cases}$$

функции U и V , которые однородны по Эйлеру со степенью однородности m , можно записать в виде

$$U(x, y, z) = r^m F\left(\frac{x}{z+r}, \frac{y}{z+r}\right), \quad (45)$$

$$V(x, y, z) = r^m G\left(\frac{x}{z+r}, \frac{y}{z+r}\right). \quad (46)$$

Для того чтобы функции $U(x, y, z)$ и $V(x, y, z)$ были гармоническими (удовлетворяли уравнению Лапласа), необходимо и достаточно, чтобы функции $F(p, q)$ и $G(p, q)$ удовлетворяли дифференциальным уравнениям

$$\frac{\partial^2 F(p, q)}{\partial p^2} + \frac{\partial^2 F(p, q)}{\partial q^2} + \frac{4m(m+1)}{(1+p^2+q^2)^2} F(p, q) = 0, \quad (47)$$

$$\frac{\partial^2 G(p, q)}{\partial p^2} + \frac{\partial^2 G(p, q)}{\partial q^2} + \frac{4m(m+1)}{(1+p^2+q^2)^2} G(p, q) = 0. \quad (48)$$

При такой подстановке уравнение (43) приобретает вид

$$q \frac{\partial F(p, q)}{\partial p} - p \frac{\partial F(p, q)}{\partial q} = G(p, q). \quad (49)$$

В полярных координатах $p = s \cos \phi$,

$q = s \sin \varphi$ функции F и G принимают вид

$$F(p, q) = F_0(\operatorname{arctg}(q/p), \sqrt{p^2 + q^2}), \quad (50)$$

$$G(p, q) = G_0(\operatorname{arctg}(q/p), \sqrt{p^2 + q^2}), \quad (51)$$

а уравнения (47), (48), (49) записываются как

$$\begin{aligned} & \frac{\partial^2 F_0(\varphi, s)}{\partial \varphi^2} + s^2 \frac{\partial^2 F_0(\varphi, s)}{\partial s^2} + \\ & + s \frac{\partial F_0(\varphi, s)}{\partial s} + \frac{4m(m+1)s^2}{(1+s^2)^2} F_0(\varphi, s) = 0, \end{aligned} \quad (52)$$

$$\begin{aligned} & \frac{\partial^2 G_0(\varphi, s)}{\partial \varphi^2} + s^2 \frac{\partial^2 G_0(\varphi, s)}{\partial s^2} + \\ & + s \frac{\partial G_0(\varphi, s)}{\partial s} + \frac{4m(m+1)s^2}{(1+s^2)^2} G_0(\varphi, s) = 0. \end{aligned} \quad (53)$$

$$\frac{\partial F_0(\varphi, s)}{\partial \varphi} + G_0(\varphi, s) = 0. \quad (54)$$

Из уравнения (54) следует, что общее решение поставленной задачи будет иметь вид

$$F_0(\varphi, s) = H(s) - \int_{\varphi_0}^{\varphi} G_0(\xi, s) d\xi, \quad (55)$$

где свободная функция $H(s)$ должна быть подобрана так, чтобы было выполнено уравнение (52).

После подстановки (55) уравнение (52) приобретает вид

$$\begin{aligned} & s^2 \frac{d^2 H(s)}{ds^2} + s \frac{dH(s)}{ds} + \\ & + \frac{4m(m+1)s^2}{(1+s^2)^2} H(s) = H_0(\varphi, s), \end{aligned} \quad (56)$$

$$\begin{aligned} H_0(\varphi, s) = & \frac{4m(m+1)s^2}{(1+s^2)^2} \int_{\varphi_0}^{\varphi} G_0(\xi, s) d\xi + \\ & + \frac{\partial G_0(\varphi, s)}{\partial \varphi} + s \int_{\varphi_0}^{\varphi} \frac{\partial G_0(\xi, s)}{\partial s} d\xi + \\ & + s^2 \int_{\varphi_0}^{\varphi} \frac{\partial^2 G_0(\xi, s)}{\partial s^2} d\xi. \end{aligned} \quad (57)$$

Чтобы у уравнения (56) было решение, функция $H_0(\varphi, s)$, стоящая в правой части, не должна зависеть от переменной φ .

Это действительно так:

$$\begin{aligned} \frac{\partial H_0(\varphi, s)}{\partial \varphi} = & \frac{4m(m+1)s^2}{(1+s^2)^2} G_0(\varphi, s) + \\ & + \frac{\partial^2 G_0(\varphi, s)}{\partial \varphi^2} + s \frac{\partial G_0(\varphi, s)}{\partial s} + \\ & + s^2 \frac{\partial^2 G_0(\varphi, s)}{\partial s^2} = 0, \end{aligned} \quad (58)$$

поскольку в соответствии с исходным условием, функция $G_0(\varphi, s)$ обязана удовлетворять уравнению (53).

Теперь из обыкновенного дифференциального уравнения (56), где в качестве правой части можно использовать функцию

$$H_0(\varphi_0, s) = \left. \frac{\partial G(\varphi, s)}{\partial \varphi} \right|_{\varphi = \varphi_0}$$

не зависящую от переменной φ , находится подходящее решение $H(s)$.

Затем из соотношения (55) находится функция $F_0(\varphi, s)$, а из равенства (50) находится функция $F(p, q)$. Поскольку для полученной функции $F(p, q)$ выполнено как уравнение (47), так и уравнение (49), то однородная функция $U(x, y, z)$, заданная с помощью формулы (47), будет гармонической и будет удовлетворять соотношению (43). Следовательно, преобразование однородных гармонических функций (29) обратимо, а линейный дифференциальный оператор (29) есть оператор Донкина. Очевидно, операторами Донкина будут также и преобразования (30) и (31) (перестановка местами пространственных координат – это обратимое преобразование).

Таким образом, дифференциальные операторы (21) – (27), (29) – (31) и, соответственно, дифференциальные операторы (32) – (38), (40) – (42) являются обратимыми для подмножества однородных гармонических функций степени m .

Теорема 2 доказана.

Оператор (28) и, соответственно, оператор (39) рассматриваются отдельно. Из соотношения Эйлера (15) для однородных функций следует, что воздействие оператора (28) на гармоническую однородную функцию U эквивалентно ее умножению на степень однородности m , так что получать с помощью оператора (28) принципиально новые однородные гармонические функции не представляется возможным. С формальной точки зрения, при $m \neq 0$ этот оператор обратим, и поэтому его следует признать



оператором Донкина. Однако при $m = 0$ результатом действия оператора (28) будет нуль, и, если только однородная гармоническая функция V нулевой степени не равна нулю, то у нее нет и быть не может однородного и гармонического прототипа U нулевой степени, из которого эту функцию можно получить посредством применения оператора (28).

Тем не менее, когда V есть однородная гармоническая функция нулевой степени, то для нее у оператора (28) существуют гармонические, но не однородные функции-прототипы. Такие функции имеют вид

$$U(x, y, z) = U_0(x, y, z) + V(x, y, z) \ln(z + r),$$

где $U_0(x, y, z)$ есть однородная функция нулевой степени, которая подбирается таким образом, чтобы обеспечить гармоничность функции U .

Действительно, после подстановки

$$V(x, y, z) = W\left(\frac{x}{z+r}, \frac{y}{z+r}\right),$$

$$U_0(x, y, z) = H\left(\frac{x}{z+r}, \frac{y}{z+r}\right),$$

которую можно использовать в силу того, что $U_0(x, y, z)$ и $V(x, y, z)$ будут однородными функциями нулевой степени, условие

$$x U_x + y U_y + z U_z = V$$

выполняется автоматически, а для гармоничности функции $U(x, y, z)$ с учетом того, что функция $W(p, q)$ удовлетворяет двумерному уравнению Лапласа по причине гармоничности функции $V(x, y, z)$, потребуются, чтобы функция $H(p, q)$ удовлетворяла двумерному уравнению Пуассона:

$$\frac{\partial^2 H}{\partial p^2} + \frac{\partial^2 H}{\partial q^2} = \frac{4}{1+p^2+q^2} \left(p \frac{\partial W}{\partial p} + q \frac{\partial W}{\partial q} \right),$$

у которого заведомо имеются решения.

Упрощенная форма для операторов Донкина

Если предположить, что функция U есть однородная функция степени m , которая подчиняется дифференциальному соотношению Эйлера (15), то выражения (25) – (27) и (36) – (38) упрощаются:

$$V(x, y, z) = (2m+1)xU(x, y, z) - r^2 U_x(x, y, z), \quad (59)$$

$$V(x, y, z) = (2m+1)yU(x, y, z) - r^2 U_y(x, y, z), \quad (60)$$

$$V(x, y, z) = (2m+1)zU(x, y, z) - r^2 U_z(x, y, z), \quad (61)$$

$$V(x, y, z) = \frac{(2m+1)x}{r^{2m+3}} U(x, y, z) - \frac{1}{r^{2m+1}} U_x(x, y, z), \quad (62)$$

$$V(x, y, z) = \frac{(2m+1)y}{r^{2m+3}} U(x, y, z) - \frac{1}{r^{2m+1}} U_y(x, y, z), \quad (63)$$

$$V(x, y, z) = \frac{(2m+1)z}{r^{2m+3}} U(x, y, z) - \frac{1}{r^{2m+1}} U_z(x, y, z), \quad (64)$$

где $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$.

В этот список не включены операторы (28) и (39). При упрощении оператор (28) приобретает вид

$$V(x, y, z) = mU(x, y, z)$$

и тем самым совпадает с оператором (21) (тождественным преобразованием) с точностью до множителя-константы.

Аналогичным образом оператор (39) приобретает вид

$$V(x, y, z) = mU(x, y, z)/r^{2m+1}$$

и тем самым совпадает с оператором (32) (преобразованием Томсона (7)) с точностью до множителя-константы.

Несмотря на очевидные отличия, формулы (59) – (64) по сути являются уже известными операторами Донкина, только записанными в другой форме. В частности, формула (61) совпадает с оператором (16), который был исследован в разделе «Пример нетривиального оператора Донкина». При этом операторы (59) – (64) алгебраически отличаются от породивших их операторов (25) – (27) и (36) – (38), так что их действие на произвольные функции $U(x, y, z)$ будет, вообще говоря, другим. Однако применительно к однородным функциям степени m использование операторов (25) – (27), (36) – (38) и операторов (59) – (61), (62) – (64)

будет приводить к одному и тому же результату.

Заключение

Исследование всех возможных представлений дифференциальных формул Томсона для трехмерных однородных гармонических функций, выполненное в работах [40, 41], показывает, что с точностью до линейных комбинаций с постоянными коэффициентами и, в частности, с точностью до умножения на константу, других операторов Донкина для трехмерных однородных гармонических функций не существует.

Утверждение, высказанное в такой сильной форме, требует некоторого разъяснения. Например, можно получить и другие соотношения, отличные от полученных ранее, если рассматривать линейные комбинации с постоянными коэффициентами, составленные из базовых соотношений (21) – (31) и (32) – (42), с одной и той же степенью однородности трансформированной функции. Другая возможность – использовать для этой цели упрощенные выражения (59) – (64). Следует отметить, что исследованию обратимости линейных комбинаций, составленных из базовых операторов Донкина (21) – (31) и (32) – (42), будет посвящена отдельная публикация.

Вместе с тем, кроме упрощенных выражений (59) – (64), существуют и другие эквивалентные формы операторов Донкина, например приведенные в предыдущем разделе; ведь если прибавить к любой из формул (21) – (31) или (32) – (42) соотношение Эйлера (16), умноженное на произвольную функцию, то получится новая трансформирующая формула с такими же свойствами. Следует отметить, что для чистоты эксперимента эта функция должна быть однородной по Эйлеру с соответствующей степенью однородности, иначе искусственную аддитивную добавку будет слишком легко вычленивать из нового выражения.

Рассмотрим, например, оператор

$$\begin{aligned}
 L[U] &= AU_x(x, y, z) + \\
 &+ BU_y(x, y, z) + CU_z(x, y, z), \\
 A &= a(2m+1)xz + b(2m+1)yz + \\
 &+ c(-mx^2 - my^2 + (m+1)z^2),
 \end{aligned} \tag{65}$$

$$\begin{aligned}
 B &= a(2m+1)xy + \\
 &+ b(-mx^2 + (m+1)y^2 - mz^2) + c(2m+1)yz, \\
 C &= a((m+1)x^2 - my^2 - mz^2) + \\
 &+ b(2m+1)xy + c(2m+1)xz,
 \end{aligned} \tag{65}$$

с произвольными константами a , b и c (в нашей статье [41] использован тот же оператор).

С алгебраической точки зрения, этот оператор отличается как от любой из полученных ранее базовых формул (21) – (31), так и от их линейной комбинации с постоянными коэффициентами, но при этом допускает представление в виде

$$\begin{aligned}
 L[U] &= (a(2m+1)xz + b(2m+1)yz + \\
 &+ c(-mx^2 - my^2 + (m+1)z^2))U_x + \\
 &+ (a(2m+1)xy + b(-mx^2 + (m+1)y^2 - mz^2) + \\
 &+ c(2m+1)yz)U_y + \\
 &+ (a((m+1)x^2 - my^2 - mz^2) + \\
 &+ b(2m+1)xy + c(2m+1)xz)U_z = \\
 &= (2m+1)(cx + by + az) \times \\
 &\times (xU_x + yU_y + zU_z - mU) + \\
 &+ mc((2m+1)xU - (x^2 + y^2 + z^2)U_x) + \\
 &+ mb((2m+1)yU - (x^2 + y^2 + z^2)U_y) + \\
 &+ ma((2m+1)zU - (x^2 + y^2 + z^2)U_z).
 \end{aligned} \tag{66}$$

Из этого тождества видно, что фактически оператор (65) ничем не отличается от линейной комбинации операторов (59), (60) и (61), пока он рассматривается на узком подмножестве, состоящем из однородных функций степени m .

Если не ограничиваться дифференциальными операторами первого порядка, то в качестве аддитивных добавок вместо соотношения Эйлера (16) можно в равной степени использовать трехмерное уравнение Лапласа, а также дифференциальные соотношения более высокого порядка, которые получаются при дифференцировании этих дифференциальных уравнений по переменным x , y или z , умноженные на произвольные функции. Однако, хотя подобные формулы могут серьезным образом отли-



чатся (в алгебраическом смысле) от формул из полученного ранее списка, все эти формулы, по своему действию в качестве генераторов новых аналитических выражений для трехмерных однородных гармонических функций, будут полностью эквивалентны базовым формулам (21) – (31) либо их линейным комбинациям с постоянными коэффициентами. Указанная связь, однако, не всегда является очевидной (см. пример в виде выражения (65)). Следует отметить, что операторы Донкина не являются в этом плане исключением и, в частности, похожие проблемы, касающиеся фактической идентичности математических выражений, не равных друг другу тождественно в алгебраическом смысле, рассматриваются, например, в работах [51 – 54], хотя и на совершенно ином содержательном материале.

Остается нерассмотренной задача о существовании и нахождении таких формул Томсона и таких операторов Донкина для однородных гармонических функций, когда аргументы функции U подвергаются замене переменных

$$x \rightarrow f(x, y, z), y \rightarrow g(x, y, z),$$

$$z \rightarrow h(x, y, z).$$

При этом для частного случая симметризованной замены переменных

$$x \rightarrow x\varphi(x, y, z), y \rightarrow y\varphi(x, y, z),$$

$$z \rightarrow z\varphi(x, y, z)$$

(см. наши статьи [40, 41]) общий множитель $\varphi(x, y, z)$ выносится из-под аргументов однородной функции U , и тем самым все такие случаи замены переменных совпадают с уже рассмотренным случаем, когда аргументы функции U остаются прежними. Однако исследование дополнительных вариантов для формул Томсона и операторов Донкина, которые могут возникать при использовании замены переменных общего вида для аргументов функции U , выходит за рамки данного исследования.

Примечания

1. Трехмерная гармоническая функция общего вида $U(x, y, z)$ полностью определяется двумя произвольными функциями двух переменных, например, значением $U^{(0)}(x, y) = U(x, y, 0)$ функции $U(x, y, z)$ вдоль плоскости $z = 0$ и значением

$$U^{(n)}(x, y) = \partial U(x, y, 0) / \partial z$$

нормальной производной функции $U(x, y, z)$ вдоль плоскости $z = 0$.

Это следует из того факта, что решение такой задачи Коши для трехмерного уравнения Лапласа однозначным образом находится (по крайней мере, в окрестности плоскости $z = 0$) с помощью ряда Шерцера по переменной z :

$$U(x, y, z) = U^{(0)}(x, y) + zU^{(n)}(x, y) - \frac{z^2}{2!} (U_{xx}^{(0)}(x, y) + U_{yy}^{(0)}(x, y)) - \frac{z^3}{3!} (U_{xx}^{(n)}(x, y) + U_{yy}^{(n)}(x, y)) + \frac{z^4}{4!} (U_{xxx}^{(0)}(x, y) + 2U_{xyy}^{(0)}(x, y) + U_{yyy}^{(0)}(x, y)) + \frac{z^5}{5!} (U_{xxx}^{(n)}(x, y) + 2U_{xyy}^{(n)}(x, y) + U_{yyy}^{(n)}(x, y)) - \dots, \quad (67)$$

где коэффициенты перед степенями переменной z выражаются однозначным образом через функции $U^{(0)}$, $U^{(n)}$ и их частные производные, поскольку функция U обязана удовлетворять уравнению Лапласа.

Для получения трехмерной однородной гармонической функции степени m необходимо и достаточно, чтобы функции $U^{(0)}(x, y) = U(x, y, 0)$ и

$$U^{(n)}(x, y) = \partial U(x, y, 0) / \partial z$$

были однородными по Эйлерау со степенями однородности m и $m - 1$ (достаточность следует из формулы (67) и того факта, что частные производные однородных функций $U^{(0)}(x, y)$ и $U^{(n)}(x, y)$ сами являются однородными функциями соответствующей степени [17, 18]). Однако однородная по Эйлерау функция двух переменных задается с помощью произвольной функции одной переменной, как это следует из ее представления в следующем виде [17, 18]:

$$f(x, y) = x^k g(y/x).$$

Тем самым трехмерные однородные функции однозначным образом определяются через две произвольные функции всего лишь одного вещественного переменного, в отличие от трехмерных гармонических

функций общего вида.

2. Неудобным моментом процесса, описанного во введении, с помощью которого есть возможность вычислить любую однородную гармоническую функцию с целочисленными степенями однородности, выступает тот факт, что одна и та же трехмерная однородная гармоническая функция может получаться многократно из разных двумерных гармонических прототипов. Формулы Донкина (5), (6) в этом плане гораздо более удобны для пользователя, так как устанавливают взаимно-однозначное соответствие между трехмерными однородными и гармоническими функциями V_0 и V_{-1} и двумерными гармоническими функциями H . Процедура же однородного гармонического дифференцирования (точнее, интегрирования) по переменным x , y и z подобным полезным свойством не обладает, поскольку прототип U для заданной функции V восстанавливается с некоторой свободой выбора [44, 46].

3. Из уравнения (10) следует, что при той же самой сферической функции $u(\theta, \varphi)$, для которой однородная функция

$$V(x, y, z) = r^m u(\theta, \varphi)$$

будет гармонической, однородная функция

$$V(x, y, z) = r^{-m-1} u(\theta, \varphi)$$

также будет гармонической.

Это связано с тем, что при замене $m \rightarrow (-m - 1)$ произведение $m(m + 1)$ в уравнении (10) для сферической функции $u(\theta, \varphi)$, которое, собственно, и обеспечивает гармоничность функции V , не меняется. Данный факт можно рассматривать как еще одно доказательство гармоничности преобразования Томсона (7) для однородных функций, поскольку

$$V(x, y, z) = r^{-m-1} u(\theta, \varphi) = r^{-2m-1} U(x, y, z).$$

Вычисления, приведенные в данной работе, выполнены с помощью программы Wolfram Mathematica [55].

Работа частично выполнена в рамках НИР 0074-2019-0009, входящей в состав государственного задания № 075-00780-19-02 Министерства науки и высшего образования Российской Федерации.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Габдуллин П.Г., Голиков Ю.К., Краснова Н.К., Давыдов С.Н. Применение формулы Донкина в теории энергоанализаторов. I. // Журнал технической физики. 2000. Т. 70. № 2. С. 91–94.
2. Габдуллин П.Г., Голиков Ю.К., Краснова Н.К., Давыдов С.Н. Применение формулы Донкина в теории энергоанализаторов. II. // Журнал технической физики. 2000. Т. 70. № 3. С. 44–47.
3. Голиков Ю.К., Краснова Н.К. Теория синтеза электростатических энергоанализаторов. СПб.: Изд-во Политехнического университета, 2010. 409 с.
4. Голиков Ю.К., Краснова Н.К. Электрические поля, однородные по Эйлеру, для электронной спектроскопии // Журнал технической физики. 2011. Т. 81. № 2. С. 9–15.
5. Краснова Н.К. Теория и синтез диспергирующих и фокусирующих электронно-оптических сред: дис. ... докт. физ.-мат. наук: 01.04.04. СПб, 2013. 259 с.
6. Голиков Ю.К., Краснова Н.К. Аналитические структуры электрических обобщенно-однородных спектрографических сред // Научное приборостроение. 2014. Т. 24. № 1. С. 50–58.
7. Голиков Ю.К., Краснова Н.К. Обобщенный принцип подобия и его применение в электронной спектроскопии // Прикладная физика. 2007. № 2. С. 5–11.
8. Аверин И.А., Бердников А.С., Галль Н.Р. Принцип подобия траекторий при движении заряженных частиц с разными массами в однородных по Эйлеру электрических и магнитных полях // Письма в Журнал технической физики. 2017. Т. 43. № 3. С. 39–43.
9. Бердников А.С., Галль Л.Н., Антонов А.С., Соловьев К.В. Синтез краевых магнитных полей для статических масс-анализаторов спектрографического типа // Масс-спектрометрия. 2018. Т. 15. № 1. С. 26–43.
10. Голиков Ю.К., Бердников А.С., Антонов А.С., Краснова Н.К., Соловьев К.В. Синтез электродных конфигураций, сохраняющих для краевых электрических полей свойство однородности по Эйлеру // Журнал технической физики. 2018. Т. 88. № 4. С. 609–613.



11. Голиков Ю.К., Бердников А.С., Антонов А.С., Краснова Н.К., Соловьев К.В. Примененные формулы Донкина в теории электростатических призм // Журнал технической физики. 2018. Т. 88. № 11. С. 1711–1719.
12. Бердников А.С., Аверин И.А. О невозможности двойной фокусировки в комбинарованных электрических и магнитных полях, однородных по Эйлеру // Масс-спектрометрия. 2016. Т. 13. № 1. С. 67–70.
13. Бердников А.С., Аверин И.А., Голиков Ю.К. Статические масс-спектрографы нового типа, использующие электрические и магнитные поля, однородные по Эйлеру. I. Общий принцип и однокаскадные схемы // Масс-спектрометрия. 2015. Т. 12. № 4. С. 272–281.
14. Бердников А.С., Аверин И.А., Голиков Ю.К. Статические масс-спектрографы нового типа, использующие электрические и магнитные поля, однородные по Эйлеру. II. Условия двойной фокусировки высокого порядка у двухкаскадной схемы // Масс-спектрометрия. 2016. Т. 13. № 1. С. 11–20.
15. Бердников А.С., Аверин И.А. Новый подход к разработке ионно-оптических схем статических масс-спектрографов на основе неоднородных полей, однородных по Эйлеру // Успехи прикладной физики. 2016. Т. 4. № 1. С. 89–95.
16. Аверин И.А., Бердников А.С. Краевые поля бессеточных электронных спектрографов с однородными по Эйлеру электростатическими полями // Успехи прикладной физики. 2016. Т. 4. № 1. С. 5–8.
17. Фихтенгольц Г.М. Курс дифференциального и интегрального исчисления. Т. 1. М.: Физматлит, 2001. 616 с.
18. Смирнов В.И. Курс высшей математики. Т. 1. М.: Наука, 1974. 480 с.
19. Бердников А.С., Аверин И.А., Краснова Н.К., Соловьев К.В. Об однородности скалярных и векторных потенциалов электрических и магнитных полей, однородных по Эйлеру // Успехи прикладной физики. 2017. Т. 5. № 1. С. 10–27.
20. Голиков Ю.К., Уткин К.Г., Чепарухин В.В. Расчет элементов электростатических электронно-оптических систем. Ленинград: Изд-во ЛПИ, 1984. 79 с.
21. Голиков Ю.К., Соловьев К.В. Электростатические ионные ловушки. СПб.: Изд-во Политехнического университета, 2008. 152 с.
22. Бердников А.С., Аверин И.А., Краснова Н.К., Соловьев К.В. Простейшие аналитические электрические и магнитные потенциалы, однородные по Эйлеру // Вестник Актубинского регионального государственного университета им. К. Жубанова. 2016. № 2 (44). С. 17–32.
23. Бердников А.С., Аверин И.А., Краснова Н.К., Соловьев К.В. Трехмерные электрические и магнитные потенциалы, однородные по Эйлеру // Вестник Актубинского регионального государственного университета им. К. Жубанова. 2016. № 2 (44). С. 147–165.
24. Бердников А.С., Аверин И.А., Краснова Н.К., Соловьев К.В. Общие формулы для трехмерных электрических и магнитных потенциалов, однородных по Эйлеру с целочисленным порядком однородности // Научное приборостроение. 2016. Т. 26. № 4. С. 13–30.
25. Бердников А.С., Аверин И.А., Краснова Н.К., Соловьев К.В. Интегральные формулы для трехмерных электрических и магнитных потенциалов, однородных по Эйлеру с нецелочисленными порядками однородности // Научное приборостроение. 2016. Т. 26. № 4. С. 31–42.
26. Бердников А.С., Аверин И.А., Краснова Н.К., Соловьев К.В. Квазиполиномиальные трехмерные электрические и магнитные потенциалы, однородные по Эйлеру // Научно-технические ведомости Санкт-Петербургского государственного политехнического университета. Физико-математические науки. 2017. Т. 10. № 1. С. 71–80.
27. Краснова Н.К., Бердников А.С., Соловьев К.В., Аверин И.А. О квазиполиномиальных трехмерных потенциалах электрических и магнитных полей // Научно-технические ведомости Санкт-Петербургского государственного политехнического университета. Физико-математические науки. 2017. Т. 10. № 1. С. 81–92.
28. Бердников А.С., Краснова Н.К., Соловьев К.В. Анализ интегральной формулы Уиттекера общего вида для электрических и магнитных потенциалов, однородных по Эйлеру // Научное приборостроение. 2017. Т. 27. № 4. С. 63–71.
29. Бердников А.С., Краснова Н.К., Соловьев К.В. Интегральная формула Уиттекера для электрических и магнитных потенциалов с нулевым порядком однородности и ее следствия // Научное приборостроение. 2017. Т. 27. № 4. С. 72–79.
30. Thomson W. Extraits de deux Lettres adressées à M. Liouville // Journal de mathématiques pures et appliquées. Tome XII. 1847. Pp. 256–264.
31. Томсон У. (лорд Кельвин), Тэт П.Г.

Трактат по натуральной философии. Часть I. Москва – Ижевск: НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», 2010. 572 с.

32. **Томсон У. (лорд Кельвин), Тэт П.Г.** Трактат по натуральной философии. Часть II. Москва – Ижевск: НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», 2011. 560 с.

33. **Сретенский Л.Н.** Теория ньютоновского потенциала. Москва, Ленинград: ОГИЗ–ГИТТЛ, 1946. 318 с.

34. **Смирнов В.И.** Курс высшей математики. Т. 4. Ч. 2. М.: Наука, 1981. 297 с.

35. **Владимиров В.С.** Уравнения математической физики. М.: Наука, 1981. 512 с.

36. **Kellogg O.D.** Foundations of potential theory. Berlin, Heidelberg, New-York: Springer-Verlag, 1967. 386 p.

37. **Уэрмлер Дж.** Теория потенциала. М.: Мир, 1980. 134 с.

38. **Helms L.L.** Potential theory. Second Ed. London, Heidelberg, New-York, Dordrecht: Springer, 2014. 485 p.

39. **Голиков Ю.К.** Аналитические способы описания гармонических функций // Вестник Актюбинского регионального государственного университета им. К. Жубанова. Физико-математические науки. 2016. № 2(44). С. 165–181.

40. **Бердников А.С., Галль Л.Н., Галль Р.Н., Соловьев К.В.** Обобщение формулы Томсона для гармонических функций общего вида // Научно-технические ведомости СПбГПУ. Физико-математические науки. 2019. Т. 12. № 2. С. 32–48.

41. **Бердников А.С., Галль Л.Н., Галль Р.Н., Соловьев К.В.** Обобщение формулы Томсона для гармонических однородных функций // Научно-технические ведомости СПбГПУ. Физико-математические науки. 2019. Т. 12. № 2. С. 49–62.

42. **Donkin W.F.** On the equation of Laplace's functions &c // Philosophical Transactions of the Royal Society of London. 1857. Vol. 147. Pp. 43–57.

43. **Donkin W.F.** On the equation of Laplace's functions &c // Proceedings of the Royal Society of London. 1856–1857. Vol. 8. Pp. 307–310.

44. **Гобсон Е.В.** Теория сферических и эллипсоидальных функций. М.: Изд-во иностранной литературы, 1952. 476 с.

45. **Уиттекер Э.Т., Ватсон Дж.** Курс современного анализа. Часть 2: Трансцендентные функции. М.: ГИФМЛ, 1963. 516 с.

46. **Бердников А.С., Краснова Н.К., Соловьев К.В.** Теорема о дифференцировании трехмерных электрических и магнитных потенциалов, однородных по Эйлеру // Научное приборостроение. 2017. Т. 27. № 3. С. 107–119.

47. **Лаврентьев М.А., Шабат Б.В.** Методы теории функций комплексного переменного. М.: Наука, 1965. 716 с.

48. **Маркушевич А.И.** Теория аналитических функций. Т. 1, 2. М.: Наука, 1968. 486 с., 624 с.

49. **Евграфов М.А.** Аналитические функции. 3-е изд., перераб. и доп. М.: Наука, 1991. 448 с.

50. **Гурвиц А., Курант Р.** Теория функций. М.: Наука, 1968. 646 с.

51. **Буляница А.Л., Курочкин В.Е.** Исследование процессов упорядочивания в открытых системах // Научное приборостроение. 2000. Т. 10. № 2. С. 43–49.

52. **Буляница А.Л., Евстапов А.А., Рудницкая Г.Е.** Метод моментов при расчете параметров каналов в микроразмерных системах // Научное приборостроение. 2003. Т. 13. № 4. С. 28–40.

53. **Евстапов А.А., Буляница А.Л., Рудницкая Г.Е., Беленький Б.Г., Петряков А.О., Курочкин В.Е.** Особенности применения алгоритмов цифровой фильтрации электрофореграмм при анализе веществ на микрочипе // Научное приборостроение. 2003. Т. 13. № 2. С. 57–63.

54. **Буляница А.Л.** Математическое моделирование в микрофлюидике: основные положения // Научное приборостроение. 2005. Т. 15. № 2. С. 51–66.

55. **Wolfram Mathematica** // URL : <http://wolfram.com/mathematica/>

Статья поступила в редакцию 20.06.2019, принята к публикации 10.07.2019.

СВЕДЕНИЯ ОБ АВТОРАХ

БЕРДНИКОВ Александр Сергеевич – доктор физико-математических наук, ведущий научный сотрудник Института аналитического приборостроения РАН, Санкт-Петербург, Российская Федерация.

190103, Российская Федерация, г. Санкт-Петербург, Рижский пр., 26
asberd@yandex.ru

ГАЛЛЬ Лидия Николаевна – доктор физико-математических наук, главный научный сотрудник Института аналитического приборостроения РАН, Санкт-Петербург, Российская Федерация.

190103, Российская Федерация, г. Санкт-Петербург, Рижский пр., 26
 lngall@yandex.ru

ГАЛЛЬ Николай Ростиславович – доктор физико-математических наук, ведущий научный сотрудник Института аналитического приборостроения РАН, Санкт-Петербург, Российская Федерация.

190103, Российская Федерация, г. Санкт-Петербург, Рижский пр., 26
 gall@ms.ioffe.ru

СОЛОВЬЕВ Константин Вячеславович – кандидат физико-математических наук, доцент кафедры физической электроники Санкт-Петербургского политехнического университета Петра Великого, младший научный сотрудник Института аналитического приборостроения РАН, Санкт-Петербург, Российская Федерация.

195251, Российская Федерация, г. Санкт-Петербург, Политехническая ул., 29
 k-solovyev@mail.ru

REFERENCES

1. **Gabdullin P.G., Golikov Yu.K., Krasnova N.K., Davydov S.N.**, The use of Donkin's formula in the theory of energy analyzers, I, Technical Physics. 45 (2) (2000) 232–235.
2. **Gabdullin P.G., Golikov Yu.K., Krasnova N.K., Davydov S.N.**, The use of Donkin's formula in the theory of energy analyzers, II, Technical Physics. 45 (3) (2000) 330–333.
3. **Golikov Yu.K., Krasnova N.K.**, Teoriya synteza elektrostatičeskikh energoanalizatorov [Theory of designing of electrostatic energy analyzers], Saint-Petersburg Polytechnic University Publishing, St.Petersburg, 2010.
4. **Golikov Yu.K., Krasnova N.K.**, Application of electric fields uniform in the Euler sense in electron spectrography, Technical Physics. 56 (2) (2011) 164–170.
5. **Krasnova N.K.**, Theory and synthesis of dispersing and focusing electron optical media, Dr. Sci. Thesis. St. Petersburg, 2013 (in Russian).
6. **Golikov Yu.K., Krasnova N.K.**, Analytical structures of generalized homogeneous electrical spectrographic media, Nauchnoe priborostroenie (Scientific Instrumentation). 24 (1) (2014) 50–58.
7. **Golikov Yu.K., Krasnova N.K.**, Generalized similarity principle of similarity in electron spectrography, Prikladnaya fizika (Applied Physics). (2) (2007) 5–11.
8. **Averin I.A., Berdnikov A.S., Gall N.R.**, The principle of similarity of trajectories for the motion of charged particles with different masses in electric and magnetic fields that are homogeneous in Euler terms, Technical Physics Letters. 43 (2) (2017) 156–158.
9. **Berdnikov A.S., Gall L.N., Antonov A.S., Soloviev K.V.**, Synthesis of fringing magnetic fields for static mass analyzers of the spectrographic type, Journal of Analytical Chemistry. 73 (14) (2018) 1301–1316.
10. **Golikov Yu.K., Berdnikov A.S., Antonov A.S., et al.**, Synthesis of electrode configurations that conserve fringing electric field homogeneity in Euler terms, Technical Physics. 63 (4) (2018) 593–597.
11. **Golikov Yu.K., Berdnikov A.S., Antonov A.S., et al.**, Application of the Donkin formula in the theory of electrostatic prisms, Technical Physics. 63 (11) (2018) 1659–1666.
12. **Berdnikov A.S., Averin I.A.**, On the impossibility of double focusing in combined electric and magnetic fields homogeneous in Euler terms, Journal of Analytical Chemistry. 71 (14) (2016) 1389–1391.
13. **Berdnikov A.S., Averin I.A., Golikov Yu.K.**, Static mass spectrometers of new type, using Euler's homogeneous electric and magnetic fields. I. General principle and single-stage systems, Journal of Analytical Chemistry. 71 (13) (2016) 1280–1287.
14. **Berdnikov A.S., Averin I.A., Golikov Yu.K.**, Static mass spectrometers of new type, using Euler's homogeneous electric and magnetic fields. II: Conditions of high-order double focusing for two-cascade schemes, Journal of Analytical Chemistry. 71 (14) (2016) 1332–1340.
15. **Berdnikov A.S., Averin I.A.**, New approach

to ion optics design for static mass spectrographs based on non-uniformed fields homogenous in Euler terms, *Uspekhi prikladnoy fiziki (Advances in Applied Physics)*. 4 (1) (2016) 89–95.

16. **Averin I.A., Berdnikov A.S.**, Fringe fields of gridless electronic spectrographs with Euler's homogeneous electrostatic fields, *Uspekhi prikladnoy fiziki (Advances in Applied Physics)*. 4 (1) (2016) 5–8.

17. **Fichtenholz G.M.**, *Differential- und Integralrechnung, I*, VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften, Berlin, 1968.

18. **Smirnov V.I.**, *A course of higher mathematics, Vol. I: Elementary calculus*, Pergamon Press, Oxford, 1964.

19. **Berdnikov A.S., Averin I.A., Krasnova N.K., Solovyev K.V.**, On homogeneity of scalar and vector potentials of electric and magnetic fields, homogeneous in Euler terms, *Uspekhi Prikladnoy Fiziki (Advances in Applied Physics)*. 5 (1) (2017) 10–27.

20. **Golikov Yu.K., Utkin K.G., Cheparuhin V.V.**, *Raschet elementov elektrosticheskikh elektronno-opticheskikh sistem [Design of elements of electron optical systems]*, Leningrad Polytechnic Inst. Publishing, Leningrad, 1984.

21. **Golikov Yu.K., Solovyov K.V.**, *Elektrosticheskkiye ionnyye lovushki [Electrostatic ion traps]*, Polytechnic University Publishing, St. Petersburg, 2008.

22. **Berdnikov A.S., Averin I.A., Krasnova N.K., Solovyev K.V.**, Prosteyshiy analiticheskiy elektricheskiy i magnitnyy potentsialy, odnorodnyye po Eyleru [The simplest analytical electric and magnetic potentials homogenous in Euler terms], *Vestnik Aktyubinskogo Regionalnogo Gosudarstvennogo Universiteta Im. K. Zhubanova*. (2 (44)) (2016) 17–32.

23. **Berdnikov A.S., Averin I.A., Krasnova N.K., Solovyev K.V.**, Trekhmernyye elektricheskiy i magnitnyy potentsialy, odnorodnyye po Eyleru [Three-dimensional electric and magnetic potentials homogenous in Euler terms], *Vestnik Aktyubinskogo Regionalnogo Gosudarstvennogo Universiteta Im. K. Zhubanova*. (2 (44)) (2016) 147–165.

24. **Berdnikov A.S., Averin I.A., Krasnova N.K., Solovyev K.V.**, General formulas for three-dimensional electric and magnetic potentials homogeneous in Euler terms with an integer order of homogeneity, *Nauchnoye priborostroyeniye (Scientific Instrumentation)*. 26 (4) (2016) 13–30.

25. **Berdnikov A.S., Averin I.A., Krasnova N.K., Solovyev K.V.**, Integral expressions for 3D electric and magnetic potentials which are uniform in Euler terms and have non-integer orders

of uniformity, *Nauchnoye priborostroyeniye (Scientific Instrumentation)*. 26 (4) (2016) 31–42.

26. **Berdnikov A.S., Averin I.A., Krasnova N.K., Solovyev K.V.**, Quasi-polynomial 3D electric and magnetic potentials homogeneous in Euler's sense, *St. Petersburg Polytechnical University Journal. Physics and Mathematics*. 3 (1) (2017) 39–46.

27. **Krasnova N.K., Berdnikov A.S., Solovyev K.V., Averin I.A.**, On the quasi-polynomial 3D potentials of electric and magnetic fields, *St. Petersburg Polytechnical University Journal: Physics and Mathematics*. 3 (1) (2017) 47–56.

28. **Berdnikov A.S., Krasnova N.K., Solovyev K.V.**, Analysis of the general Whittaker' formula for 3D electric and magnetic potentials homogeneous in Euler terms, *Nauchnoye priborostroyeniye (Scientific Instrumentation)*. 27 (4) (2017) 63–71.

29. **Berdnikov A.S., Krasnova N.K., Solovyev K.V.**, Whittaker' formula for 3D electric and magnetic potentials with a zero order of homogeneity and its consequences, *Nauchnoye priborostroyeniye (Scientific Instrumentation)*. 27 (4) (2017) 72–79.

30. **Thomson W.**, Extraits de deux Lettres adressées à M. Liouville, *Journal de mathématiques pures et appliqués*. 12 (1847) 256–264.

31. **Thomson W. (Lord Kelvin), Tait P.G.**, *Treatise on natural philosophy, 2nd Ed., Part 1*, University Press, Cambridge, 1912.

32. **Thomson W. (Lord Kelvin), Tait P.G.**, *Treatise on natural philosophy, 2nd Ed., Part 2*, University Press, Cambridge, 1912.

33. **Sretensky L.N.**, *Teoriya niyutonovskogo potentsiala [Theory of the Newtonian potential]*, Moscow, Leningrad, OGIz-GITTL, 1946.

34. **Smirnov V.I.**, *A course of higher mathematics, Vol. 4: Integral equations and partial differential equations*, Pergamon Press, Oxford, 1964.

35. **Vladimirov V.S.**, *Uravneniya matematicheskoy fiziki [Equations of mathematical physics]*, Mir Publishers, Moscow, 1984.

36. **Kellogg O.D.**, *Foundations of potential theory*, Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, New-York, 1967.

37. **Wermer J.**, *Potential theory, 2nd Ed., Ser. "Lecture Notes in Mathematics"*, Vol. 408, Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, New-York, 1981.

38. **Helms L.L.**, *Potential theory, 2nd Ed.*, Springer, London, Heidelberg, New-York, Dordrecht, 2014.

39. **Golikov Yu.K.**, Analytical ways of describing harmonic functions, *Vestnik of Aktobe's K. Zhubanov Regional State University, Physics and*



Mathematics. (2(44)) (2016) 165–181.

40. **Berdnikov A.S., Gall L.N., Gall N.R., et al.**, Generalization of the Thomson formula for harmonic functions of a general type, St. Petersburg Polytechnical State University Journal. Physics and Mathematics. 12 (2) (2019) 32–48.

41. **Berdnikov A.S., Gall L.N., Gall N.R., et al.**, Generalization of the Thomson formula for homogeneous harmonic functions, St. Petersburg Polytechnical State University Journal. Physics and Mathematics. 12 (2) (2019) 49–62.

42. **Donkin W.F.**, On the equation of Laplace's functions &c., Philosophical Transactions of the Royal Society of London. 147 (1857) 43–57.

43. **Donkin W.F.**, On the equation of Laplace's functions &c., Philosophical Proceedings of the Royal Society of London. 8 (1856–1857) 307–310.

44. **Hobson E.W.**, The theory of spherical and ellipsoidal harmonics, University Press, Cambridge, 2012.

45. **Whittaker E.T., Watson G.N.**, A course of modern analysis, University Press, Cambridge, 1950.

46. **Berdnikov A.S., Krasnova N.K., Solovyev K.V.**, The theorem on the differentiation of three-dimensional electric and magnetic potentials, homogeneous in Euler terms, Nauchnoe priborostroyeniye (Scientific Instrumentation). 27 (3) (2017) 107–119.

47. **Lavrent'ev M.A., Shabat B.V.**, Methoden der komplexen Funktionen-theorie, Verlag

Wissenschaft, 1969.

48. **Markushevich A.I.**, Theory of functions of a complex variable, Vol. 1–3, Providence, US, Amer. Math. Society Publ., 2005.

49. **Evgrafov M.A.**, Analytic functions, Dover Publ., 1978.

50. **Hurwitz A., Courant R.**, Vorlesungen Über Allgemeine Funktionentheorie und Elliptische Funktionen, Springer, Berlin. 1964.

51. **Bulyanitsa A.L., Kurochkin V.E.**, Studying ordering processes in open systems (on the example of pattern evolution in colonies of imperfect mycelial fungi), Nauchnoe priborostroyeniye (Scientific Instrumentation). 10 (2) (2000) 43–49.

52. **Bulyanitsa A.L., Evstrapov A.A., Rudnitskaya G.E.**, Calculation of microscale system channel parameters by the method of moments, Nauchnoe priborostroyeniye (Scientific Instrumentation). 13 (4) (2003) 28–40.

53. **Evstrapov A.A., Bulyanitsa A.L., Rudnitskaya G.E., et al.**, Characteristic features of digital signal filtering algorithms as applied to electrophoresis on a microchip, Nauchnoe priborostroyeniye (Scientific Instrumentation). 13 (2) (2003) 57–63.

54. **Bulyanitsa A.L.**, Mathematical modeling in microfluidics: basic concepts, Nauchnoe priborostroyeniye (Scientific Instrumentation). 15 (2) (2005) 51–66.

55. Wolfram Mathematica, URL: <http://wolfram.com/mathematica/>.

Received 20.06.2019, accepted 10.07.2019.

THE AUTHORS

BERDNIKOV Alexander S.

Institute for Analytical Instrumentation of the Russian Academy of Sciences
26 Rizhsky Ave., St. Petersburg, 190103, Russian Federation
asberd@yandex.ru

GALL Lidia N.

Institute for Analytical Instrumentation of the Russian Academy of Sciences
26 Rizhsky Ave., St. Petersburg, 190103, Russian Federation
Ingall@yandex.ru

GALL Nikolaj R.

Institute for Analytical Instrumentation of the Russian Academy of Sciences
26 Rizhsky Ave., St. Petersburg, 190103, Russian Federation
gall@ms.ioffe.ru

SOLOVYEV Konstantin V.

Peter the Great St. Petersburg Polytechnic University

29 Politechnicheskaya St., St. Petersburg, 195251, Russian Federation

k-solovyev@mail.ru



DOI: 10.18721/JPM.12304

УДК 517.51; 517.28; 517.983; 537.213, 537.8

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ ОПЕРАТОРЫ ДОНКИНА ДЛЯ ОДНОРОДНЫХ ГАРМОНИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ

А.С. Бердников¹, Л.Н. Галль¹, Н.Р. Галль¹, К.В. Соловьев^{2,1}

¹Институт аналитического приборостроения Российской академии наук,
Санкт-Петербург, Российская Федерация;

²Санкт-Петербургский политехнический университет Петра Великого,
Санкт-Петербург, Российская Федерация

Данная работа продолжает изучение операторов Донкина для однородных гармонических функций. Ранее был получен базисный список таких операторов первого порядка для трехмерных гармонических функций. Задача настоящего исследования – доказать, что любые линейные комбинации с постоянными коэффициентами, составленные из базисных операторов Донкина, – тоже операторы Донкина. Ввиду того, что свойство обратимости есть фундаментальный признак таких операторов, и поскольку из обратимости каждого из линейных дифференциальных операторов по отдельности не следует автоматически обратимость их линейной комбинации, указанное утверждение является нетривиальным и требует строгого доказательства. Оно представлено в данной статье.

Ключевые слова: электростатическое поле, магнитостатическое поле, скалярный потенциал, однородная функция, гармоническая функция

Ссылка при цитировании: Бердников А.С., Галль Л.Н., Галль Н.Р., Соловьев К.В. Дифференциальные операторы Донкина для однородных гармонических функций // Научно-технические ведомости СПбГПУ. Физико-математические науки. 2019. Т. 12. № 3. С. 45–62. DOI: 10.18721/JPM.12304

DONKIN'S DIFFERENTIAL OPERATORS FOR HOMOGENEOUS HARMONIC FUNCTIONS

A.S. Berdnikov¹, L.N. Gall¹, N.R. Gall¹, K.V. Solovyev^{2,1}

¹Institute for Analytical Instrumentation of the Russian Academy of Sciences,
St. Petersburg, Russian Federation;

²Peter the Great St. Petersburg Polytechnic University, St. Petersburg, Russian Federation

The work continues the study of the Donkin's operators for homogeneous harmonic functions. Previously, a basic list of such first-order operators for three-dimensional harmonic functions was obtained. The objective of this study is to prove that any linear combinations with constant coefficients made up of the Donkin's basic operators are again Donkin's operators. Since the reversibility property is fundamental for such operators, and since the reversibility of each of the linear differential operators taken separately does not automatically imply the reversibility of their linear combination, this statement is nontrivial and requires a strict proof. This proof has been given in this paper.

Keywords: electrostatic field, magnetostatic field, scalar potential, homogeneous function, harmonic function

Citation: Berdnikov A.S., Gall L.N., Gall N.R., Solovyev K.V., Donkin's differential operators for homogeneous harmonic functions, St. Petersburg Polytechnical State University Journal. Physics and Mathematics. 12 (3) (2019) 45–62. DOI: 10.18721/JPM.12304

Постановка задачи

Данная публикация является прямым продолжением работ [1 – 3], посвященных исследованию преобразований Томсона и операторов Донкина для трехмерных гармонических (т. е. удовлетворяющих уравнению Лапласа) функций, однородных по Эйлеру.

Электрическое или магнитное поле называется однородным по Эйлеру со степенью однородности, равной k , если напряженность электрического поля \mathbf{E} и/или индукция магнитного поля \mathbf{B} удовлетворяют тождествам

$$\forall \lambda > 0: \mathbf{E}(\lambda x, \lambda y, \lambda z) \equiv \lambda^{k-1} \mathbf{E}(x, y, z),$$

$$\forall \lambda > 0: \mathbf{B}(\lambda x, \lambda y, \lambda z) \equiv \lambda^{k-1} \mathbf{B}(x, y, z)$$

в каждой точке пространства.

Как правило, такие поля характеризуются скалярными потенциалами $U(x, y, z)$, представляющими собой однородные (точнее, положительно однородные, то есть при $\lambda > 0$) по Эйлеру функции в смысле, который придается этому термину в классическом математическом анализе [4, 5]:

$$\forall \lambda > 0: U(\lambda x, \lambda y, \lambda z) \equiv \lambda^k U(x, y, z).$$

Более подробно вопрос об однородности скалярных и векторных потенциалов для полей, однородных по Эйлеру, исследуется в работе [6]. Важно, что для дифференцируемых функций U , которые являются однородными (по Эйлеру) степени k , в каждой точке пространства выполняется дифференциальное соотношение Эйлера для однородных функций [4, 5]:

$$x \frac{\partial U}{\partial x} + y \frac{\partial U}{\partial y} + z \frac{\partial U}{\partial z} - kU = 0. \quad (1)$$

Данное соотношение является и необходимым, и достаточным. Это включает следующие утверждения:

а) если функция будет однородной со степенью однородности k и при этом всюду дифференцируемой, то для нее в каждой точке пространства выполнено равенство (1);

б) если для всюду дифференцируемой функции в каждой точке пространства выполнено равенство (1), то она является однородной по Эйлеру, со степенью однородности, равной k .

Утверждение а) имеет силу при дифференцировании тождества

$$U(\lambda x, \lambda y, \lambda z) - \lambda^k U(x, y, z) = 0$$

по параметру λ в точке $\lambda = 1$. Изящное доказательство утверждения б) можно найти, например, в книге [4].

Строгие определения терминов «преобразование Томсона» и «оператор Донкина» приводятся в статье [3] этого выпуска журнала и поэтому здесь не дублируются. Следует, однако, подчеркнуть принципиальную разницу между преобразованиями Томсона и операторами Донкина: преобразования Томсона гарантируют гармоничность и однородность функции, получаемой на выходе, но, в отличие от операторов Донкина, не гарантируют обратимость преобразования. Операторы же Донкина обратимы в том смысле, что для любой однородной гармонической функции найдется функция-прототип (также однородная и гармоническая), из которой с помощью рассматриваемого оператора получается заданная однородная гармоническая функция.

Термин «преобразование Томсона» используется, чтобы не смешивать рассматриваемые здесь линейные дифференциальные операторы общего вида с оригинальной алгебраической формулой Томсона (преобразованием Кельвина) [9 – 16]. Формула Томсона трансформирует трехмерные гармонические функции в новые трехмерные гармонические функции в соответствии с правилом

$$V(x, y, z) = \frac{1}{r} U\left(\frac{x}{r^2}, \frac{y}{r^2}, \frac{z}{r^2}\right), \quad (2)$$

где $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ (здесь и далее).

Дополнительно к тому, что формула (2) преобразует трехмерные гармонические функции U общего вида в новые трехмерные гармонические функции V (это можно проверить с помощью прямой подстановки), она также преобразует однородные функции U степени k в новые однородные функции V степени $(-k - 1)$. Для однородных функций общий множитель $1/r^2$ в формуле (2) может быть вынесен из-под знака функции, так что формулу (2) можно записать в упрощенном виде как

$$V(x, y, z) = r^{-2k-1} U(x, y, z). \quad (3)$$

Однородность математического выражения (3) очевидна, а его гармоничность для гармонических и однородных функций U следует из равенства (см. [17, 18 (приложение Б к главе 1)]):

$$V_{xx} + V_{yy} + V_{zz} \equiv r^m (U_{xx} + U_{yy} + U_{zz}) + 2mr^{m-2} (xU_x + yU_y + zU_z - kU) + m(m+2k+1)r^{m-2}U, \quad (4)$$

которое выполнено для любых функций вида

$$V(x, y, z) = r^m U(x, y, z)$$

с произвольным показателем степени m , для произвольного параметра k и при произвольной функции U .

Однако преобразование (3) больше не будет преобразовывать гармонические функции общего вида в новые гармонические функции; гармоничность выражения (3) гарантируется только для тех гармонических функций, которые будут однородными по Эйлера со степенью однородности, равной k (т. е. которые удовлетворяют дифференциальному соотношению Эйлера (1)).

Из результатов, опубликованных в статьях [1 – 3], следует, что полный список элементарных преобразований Томсона для однородных гармонических функций степени k , когда преобразование Томсона имеет вид линейного дифференциального оператора первого порядка, состоит из следующих выражений:

$$V(x, y, z) = U(x, y, z), \quad (5)$$

$$V(x, y, z) = U_x(x, y, z), \quad (6)$$

$$V(x, y, z) = U_y(x, y, z), \quad (7)$$

$$V(x, y, z) = U_z(x, y, z), \quad (8)$$

$$V(x, y, z) = (2k+1)xU(x, y, z) - r^2U_x(x, y, z), \quad (9)$$

$$V(x, y, z) = (2k+1)yU(x, y, z) - r^2U_y(x, y, z), \quad (10)$$

$$V(x, y, z) = (2k+1)zU(x, y, z) - r^2U_z(x, y, z), \quad (11)$$

$$V(x, y, z) = yU_x(x, y, z) - xU_y(x, y, z), \quad (12)$$

$$V(x, y, z) = zU_x(x, y, z) - xU_z(x, y, z), \quad (13)$$

$$V(x, y, z) = zU_y(x, y, z) - yU_z(x, y, z); \quad (14)$$

$$V(x, y, z) = \frac{1}{r^{2k+1}}U(x, y, z), \quad (15)$$

$$V(x, y, z) = \frac{1}{r^{2k-1}}U_x(x, y, z), \quad (16)$$

$$V(x, y, z) = \frac{1}{r^{2k-1}}U_y(x, y, z), \quad (17)$$

$$V(x, y, z) = \frac{1}{r^{2k-1}}U_z(x, y, z), \quad (18)$$

$$V(x, y, z) = \frac{(2k+1)x}{r^{2k+3}}U(x, y, z) - \frac{1}{r^{2k+1}}U_x(x, y, z), \quad (19)$$

$$V(x, y, z) = \frac{(2k+1)y}{r^{2k+3}}U(x, y, z) - \frac{1}{r^{2k+1}}U_y(x, y, z), \quad (20)$$

$$V(x, y, z) = \frac{(2k+1)z}{r^{2k+3}}U(x, y, z) - \frac{1}{r^{2k+1}}U_z(x, y, z), \quad (21)$$

$$V(x, y, z) = \frac{y}{r^{2k+1}}U_x(x, y, z) - \frac{x}{r^{2k+1}}U_y(x, y, z), \quad (22)$$

$$V(x, y, z) = \frac{z}{r^{2k+1}}U_x(x, y, z) - \frac{x}{r^{2k+1}}U_z(x, y, z), \quad (23)$$

$$V(x, y, z) = \frac{z}{r^{2k+1}}U_y(x, y, z) - \frac{y}{r^{2k+1}}U_z(x, y, z), \quad (24)$$

где нижние индексы x , y , и z обозначают частные производные по соответствующим переменным.

В статье [3] показано, что каждое из элементарных преобразований (5) – (24), если

его рассматривать отдельно, будет обратимым на множестве однородных гармонических функций, т. е. является базисным оператором Донкина.

Очевидно, что любая линейная комбинация с постоянными коэффициентами, составленная из базисных формул (5) – (24), соответствующих одной и той же степени однородности, будет преобразовывать однородные гармонические функции в новые однородные гармонические функции и тем самым будет принадлежать классу преобразований Томсона. Однако обратимость таких преобразований на подмножестве однородных гармонических функций с соответствующей степенью однородности не очевидна и требует изучения.

Задача данного исследования состоит в том, чтобы установить, являются ли линейные суперпозиции с постоянными коэффициентами, составленные из элементарных операторов Донкина (5) – (24), композитными операторами Донкина в смысле данных ранее определений.

Связь между трехмерными однородными гармоническими функциями и двумерными эллиптическими уравнениями

Для дальнейших выкладок потребуется переход от трехмерных однородных гармонических функций к двумерным функциям, которые удовлетворяют некоторым вспомогательным двумерным эллиптическим уравнениям. Этот прием представляет отдельный научный интерес, поэтому рассмотрим его подробнее.

Для трехмерных гармонических функций нулевой степени и степени -1 имеются формулы Донкина [7, 8, 19 – 24]:

$$V_0(x, y, z) = H\left(\frac{x}{z+r}, \frac{y}{z+r}\right), \quad (25)$$

$$V_{-1}(x, y, z) = \frac{1}{r} H\left(\frac{x}{z+r}, \frac{y}{z+r}\right), \quad (26)$$

которые устанавливают взаимно-однозначное соответствие между решениями $H(p, q)$ двумерного уравнения Лапласа

$$H_{pp} + H_{qq} = 0$$

и трехмерными однородными гармоническими функциями со степенями однородности 0 и -1 . По аналогии, любую однородную функцию $U(x, y, z)$ степени m с помощью замены координат Донкина

$$\begin{cases} p = \frac{x}{z + \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}, \\ q = \frac{y}{z + \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}, \\ r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{2pr}{1 + p^2 + q^2}, \\ y = \frac{2qr}{1 + p^2 + q^2}, \\ z = \pm \frac{r(1 - p^2 - q^2)}{1 + p^2 + q^2}. \end{cases} \quad (27)$$

можно выразить в виде

$$U(x, y, z) = r^m F\left(\frac{x}{z+r}, \frac{y}{z+r}\right). \quad (28)$$

Эта запись есть слегка модифицированная форма универсального представления

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n) = x_1^k h(x_2/x_1, \dots, x_n/x_1)$$

для однородных функций степени k [4, 5].

Для того чтобы функция (28) была гармонической (удовлетворяла трехмерному уравнению Лапласа), необходимо и достаточно, чтобы функция $F(p, q)$ удовлетворяла двумерному эллиптическому дифференциальному уравнению в частных производных:

$$\frac{\partial^2 F(p, q)}{\partial p^2} + \frac{\partial^2 F(p, q)}{\partial q^2} + \frac{4m(m+1)}{(1+p^2+q^2)^2} F(p, q) = 0. \quad (29)$$

Подстановки (28), (34) являются взаимно-однозначными. Здесь подразумевается следующее:

а) если $U(x, y, z)$ есть однородная гармоническая функция степени m , то существует такая функция $F(p, q)$, с помощью которой функцию U можно представить в виде (28), причем функция F обязана будет подчиняться уравнению (34);

б) если функция $F(p, q)$ подчиняется уравнению (34), то функция $U(x, y, z)$, вычисленная в соответствии с правилом (28), будет однородной гармонической функцией

ей степени m ;

в) разным функциям $U(x, y, z)$ соответствуют разные функции $F(p, q)$ и наоборот. Например, если требуется проанализировать дифференциальное соотношение между однородной гармонической функцией $U(x, y, z)$ степени m и однородной гармонической функцией $V(x, y, z)$ степени k , то подстановка

$$U(x, y, z) = r^m F\left(\frac{x}{z+r}, \frac{y}{z+r}\right), \quad (30)$$

$$V(x, y, z) = r^k G\left(\frac{x}{z+r}, \frac{y}{z+r}\right) \quad (31)$$

позволяет без потери общности свести задачу к анализу дифференциального соотношения между функциями двух переменных $F(p, q)$ и $G(p, q)$, которые подчиняются уравнениям

$$\frac{\partial^2 F(p, q)}{\partial p^2} + \frac{\partial^2 F(p, q)}{\partial q^2} + \frac{4m(m+1)}{(1+p^2+q^2)^2} F(p, q) = 0, \quad (32)$$

$$\frac{\partial^2 G(p, q)}{\partial p^2} + \frac{\partial^2 G(p, q)}{\partial q^2} + \frac{4k(k+1)}{(1+p^2+q^2)^2} G(p, q) = 0. \quad (33)$$

Подстановка (28) не является единственно возможной. В равной степени можно использовать подстановки

$$\left\{ \begin{aligned} U(x, y, z) &= (z+r)^m F\left(\frac{x}{z+r}, \frac{y}{z+r}\right), \\ (1+p^2+q^2) \left(\frac{\partial^2 F}{\partial p^2} + \frac{\partial^2 F}{\partial q^2} \right) - \\ -4mp \frac{\partial F}{\partial p} - 4mq \frac{\partial F}{\partial q} + 4m^2 F &= 0; \end{aligned} \right. \quad (34)$$

$$\left\{ \begin{aligned} U(x, y, z) &= r^m F\left(\frac{x}{r}, \frac{y}{r}\right), \\ (1-p^2) \frac{\partial^2 F}{\partial p^2} - 2pq \frac{\partial^2 F}{\partial p \partial q} + \\ + (1-q^2) \frac{\partial^2 F}{\partial q^2} - 2p \frac{\partial F}{\partial p} - \\ -2q \frac{\partial F}{\partial q} + m(m+1) F &= 0; \end{aligned} \right. \quad (35)$$

$$\left\{ \begin{aligned} U(x, y, z) &= z^m F\left(\frac{x}{z}, \frac{y}{z}\right), \\ (1+p^2) \frac{\partial^2 F}{\partial p^2} + 2pq \frac{\partial^2 F}{\partial p \partial q} + \\ + (1+q^2) \frac{\partial^2 F}{\partial q^2} - 2(m-1)p \frac{\partial F}{\partial p} - \\ -2(m-1)q \frac{\partial F}{\partial q} + m(m-1) F &= 0 \end{aligned} \right. \quad (36)$$

и так далее.

Выбор, какую именно подстановку следует использовать для решения конкретной задачи, определяется удобством манипулирования тем или иным двумерным эллиптическим уравнением в частных производных с точки зрения рассматриваемой задачи, а также эстетическими предпочтениями исследователя.

Полные системы уравнений в частных производных первого порядка

Теорема, рассматриваемая в этом разделе, используется как вспомогательная (лемма) для доказательства основной теоремы об обратимости линейных суперпозиций базисных операторов Донкина с общей степенью однородности; она приводится в следующем разделе.

Пусть имеются m функций f_1, f_2, \dots, f_m , зависящих от n переменных x_1, x_2, \dots, x_n . Рассмотрим систему из mn уравнений в частных производных, у которой в левой части используются все возможные частные производные первого порядка от функций f_1, f_2, \dots, f_m , по переменным x_1, x_2, \dots, x_n , а в правой находятся непрерывно дифференцируемые функции Φ_i^k , зависящие от неизвестных функций f_1, f_2, \dots, f_m и независимых переменных x_1, x_2, \dots, x_n :

$$i = 1, 2, \dots, n, \quad k = 1, 2, \dots, m;$$

$$\frac{\partial f_k}{\partial x_i} = \Phi_i^k(f_1, \dots, f_m, x_1, \dots, x_n). \quad (37)$$

Будем считать, что как функции f_1, f_2, \dots, f_m , так и функции $\Phi_1^1, \Phi_1^2, \dots, \Phi_n^m$ являются непрерывно дифференцируемыми столько раз, сколько необходимо для безопасного выполнения последующих операций дифференцирования и для справедливости соответствующих теорем о существовании и единственности решения

системы уравнений. Смешанные частные производные непрерывно дифференцируемых функций f_1, f_2, \dots, f_m по переменным x_1, x_2, \dots, x_n не зависят от порядка дифференцирования:

$$i, j = 1, 2, \dots, n, k = 1, 2, \dots, m;$$

$$\frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{\partial f_k}{\partial x_j} \right) \equiv \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{\partial f_k}{\partial x_i} \right). \quad (38)$$

Из тождества (38) следуют условия, которым необходимым образом должны удовлетворять правые части уравнений (37) и которые должны быть выполнены, если у системы уравнений (37) имеется непустое множество решений:

$$L_{ij}^k = \left(\frac{\partial \Phi_j^k}{\partial f_1} \Phi_i^1 + \dots + \frac{\partial \Phi_j^k}{\partial f_m} \Phi_i^m + \frac{\partial \Phi_j^k}{\partial x_i} \right) - \left(\frac{\partial \Phi_i^k}{\partial f_1} \Phi_j^1 + \dots + \frac{\partial \Phi_i^k}{\partial f_m} \Phi_j^m + \frac{\partial \Phi_i^k}{\partial x_j} \right) = 0. \quad (39)$$

При этом возможны следующие варианты:

а) все условия, выраженные формулой (39), тождественно равны нулю;

б) среди условий (39) имеется одно или несколько алгебраических уравнений относительно неизвестных функций f_1, f_2, \dots, f_m , которые не равны тождественно нулю и которые совместимы друг с другом, так что некоторые из функций f_1, f_2, \dots, f_m можно алгебраически выразить через оставшиеся функции и независимые переменные x_1, x_2, \dots, x_n ;

в) среди условий (39) имеется одно или несколько алгебраических уравнений относительно неизвестных функций f_1, f_2, \dots, f_m , которые не равны тождественно нулю и которые совместимы друг с другом, так что все функции f_1, f_2, \dots, f_m можно выразить алгебраически через независимые переменные x_1, x_2, \dots, x_n ;

г) среди условий (39) имеются алгебраические уравнения относительно неизвестных функций f_1, f_2, \dots, f_m , которые не совместимы друг с другом;

д) среди условий (39) найдется алгебраическое соотношение, не равное тождественно нулю и не содержащее неизвестные функции f_1, f_2, \dots, f_m , которое устанавливает алгебраическую связь между независимыми переменными x_1, x_2, \dots, x_n .

Фактически условия г) и д) можно объ-

единить в один и тот же класс вариантов. Несовместимость между собой условий (39) означает, что после того, как с помощью подмножества совместимых между собой условий (39) некоторые или все функции f_1, f_2, \dots, f_m будут алгебраически выражены через оставшиеся функции и независимые переменные x_1, x_2, \dots, x_n и подставлены в оставшиеся уравнения, образуется, по крайней мере, одно алгебраическое уравнение, не равное тождественно нулю, которое устанавливает алгебраическую связь между независимыми переменными x_1, x_2, \dots, x_n . Точно так же алгебраическое соотношение, не содержащее неизвестные функции f_1, f_2, \dots, f_m и устанавливающее алгебраическую связь между независимыми переменными x_1, x_2, \dots, x_n , может рассматриваться как алгебраическое уравнение относительно неизвестных функций f_1, f_2, \dots, f_m , не совместимое с остальными алгебраическими уравнениями.

Очевидно, что в случаях г) либо д) система уравнений (37) решений иметь не может.

В случае в) из полученных алгебраических уравнений можно найти неизвестные функции f_1, f_2, \dots, f_m , подставить их в систему (37) и либо убедиться, что найденные функции f_1, f_2, \dots, f_m действительно удовлетворяют уравнениям (37), либо убедиться, что у системы уравнений (37) решений нет.

Точно так же в случае б). После того, как некоторые из функций f_1, f_2, \dots, f_m алгебраически выражены через оставшиеся функции и независимые переменные x_1, x_2, \dots, x_n , их можно подставить в уравнения (37); затем либо получить полную систему дифференциальных уравнений вида (37) относительно меньшего числа неизвестных функций, либо, кроме дифференциальных уравнений, получить еще и новые алгебраические соотношения для неизвестных функций. Это позволит продолжить процесс алгебраического исключения функций f_1, f_2, \dots, f_m из системы уравнений (37). В частности, если будет получено отличное от нуля алгебраическое выражение, не содержащее неизвестные функции f_1, f_2, \dots, f_m , а только независимые переменные x_1, x_2, \dots, x_n , то это будет означать, что у системы уравнений (37) решений не существует.

Наконец, в случае а), когда все условия (39) тождественно равны нулю, система тождественно выполненных равенств (39) оказывается не только необходимым, но и достаточным условием для существования

решений у системы уравнений (37).

Лемма 1. Если все соотношения (39) тождественно равны нулю, то у полной системы уравнений (37) имеются решения, причем эти решения определены с точностью до t констант c_1, c_2, \dots, c_m , выбираемых произвольным образом.

Доказательство этой леммы можно найти в книге [25] (см. там гл. IV).

Случай, когда система дифференциальных уравнений в частных производных не является полной (для каких-то частных производных от неизвестных функций уравнения не заданы), будет гораздо более сложным для анализа. Соответствующую теорию можно найти в книгах [26 – 29].

Обратимость линейных комбинаций базисных операторов Донкина

Исследуем обратимость линейных комбинаций с постоянными коэффициентами, составленными из формул (5) – (14) и (15) – (24) с одинаковой степенью однородности для выходной функции. Перечисленные ниже группы элементарных преобразований из списка (5) – (24) преобразуют однородные гармонические функции степени t в однородные гармонические функции одинаковой степени:

1) формулы (5), (12) – (14) преобразуют однородную функцию степени t в новую однородную функцию степени t ;

2) формулы (6) – (8) преобразуют однородную функцию степени t в новую однородную функцию степени $t - 1$;

3) формулы (9) – (11) преобразуют однородную функцию степени t в новую однородную функцию степени $t + 1$;

4) формулы (15), (22) – (24) преобразуют однородную функцию степени t в новую однородную функцию степени $-t - 1$;

5) формулы (16) – (18) преобразуют однородную функцию степени t в новую однородную функцию степени $-t$;

6) формулы (19) – (21) преобразуют однородную функцию степени t в новую однородную функцию степени $-t - 2$.

Эти правила определяют, какие именно формулы из списка (5) – (24) могут объединяться в одной линейной комбинации с постоянными коэффициентами, чтобы на выходе получилась однородная гармоническая функция.

Теорема. Линейные комбинации с постоянными коэффициентами, составленные из базисных операторов Донкина (5), (12) –

(14), либо из базисных операторов Донкина (6) – (8), либо из базисных операторов Донкина (9) – (11), либо из базисных операторов Донкина (15), (22) – (24), либо из базисных операторов Донкина (16) – (18), либо из базисных операторов Донкина (19) – (21), являются обратимыми на подмножествах однородных гармонических функций соответствующих степеней.

Доказательство распадается на серию независимых доказательств для каждой из групп базисных операторов Донкина по отдельности.

Лемма 2. Линейные комбинации с постоянными коэффициентами, составленные из базисных операторов Донкина (6) – (8) для степени однородности $t - 1$, являются обратимыми на подмножестве однородных гармонических функций степени $t - 1$.

Доказательство. Линейная комбинация с постоянными коэффициентами формул (6) – (8) имеет вид

$$L[U] = aU_x + bU_y + cU_z$$

и соответствует дифференцированию функции U по фиксированному направлению (a, b, c) . При коэффициентах, одновременно не равных нулю, она является оператором Донкина в соответствии с данным ранее определением.

Для доказательства достаточно применить поворот системы координат относительно начала координат, при котором ненулевой вектор (a, b, c) совпадет с одной из координатных осей, и воспользоваться теоремой о дифференцировании однородных гармонических функций [23, 30]:

а) поворот относительно начала координат сохраняет и однородность, и гармоничность заданной функции V ;

б) оператор дифференцирования по одной из новых координатных осей есть базисный оператор Донкина, поэтому у преобразованной однородной и гармоничной функции V найдется однородный и гармоничный прототип U ;

в) обратный поворот относительно начала координат возвращает систему координат и функцию V к прежнему состоянию, а также сохраняет гармоничность и однородность у преобразованной функции U , одновременно устанавливая между этими функциями связь, т. е.

$$V(x, y, z) = aU_x(x, y, z) + bU_y(x, y, z) + cU_z(x, y, z)$$

Лемма 2 доказана.

Лемма 3. *Линейные комбинации с постоянными коэффициентами, составленные из базисных операторов Донкина (9) – (11) для степени однородности $t + 1$, либо из базисных операторов Донкина (16) – (18) для степени однородности $-t$, либо из базисных операторов Донкина (19) – (21) для степени однородности $-t - 2$, являются обратимыми на подмножествах однородных гармонических функций соответствующих степеней.*

Доказательство. Данное утверждение следует из тесной связи, устанавливаемой посредством формулы Томсона (3) между этими операторами и операторами дифференцирования (6) – (8), для которых, как только что было показано, линейные комбинации с постоянными коэффициентами будут обратимыми преобразованиями однородных гармонических функций.

Действительно, обратимость линейных комбинаций, составленных из формул (16) – (18), следует из обратимости линейных комбинаций, составленных из формул (6), (8), и того факта, что формула Томсона (3) является обратимой (повторное применение формул (2), (3) возвращает функцию к исходному виду). Точно так же линейные комбинации, составленные из формул (19) – (21), будут обратимыми тогда и только тогда, когда обратимыми будут линейные комбинации, составленные из формул (9) – (11). Последние, по сути, являются продуктом последовательного применения преобразования (3), преобразований (6) – (8) и еще одного преобразования (3). Например, доказательство обратимости линейных комбинаций, составленных из формул (9) – (11), выглядит следующим образом:

а) у заданной однородной гармонической функции $V(x, y, z)$ степени $t + 1$ имеется однородный и гармонический прототип $V^*(x, y, z)$ степени $-t - 2$, из которого, в соответствии с формулой Томсона (3), эта функция вычисляется как

$$V(x, y, z) = V^*(x, y, z)r^{2m+3};$$

б) у однородной гармонической функции $V^*(x, y, z)$ степени $-t - 2$ имеется однородный и гармонический прототип $U^*(x, y, z)$ степени $-t - 1$, из которого ее можно получить посредством дифференцирования по фиксированному направлению (a, b, c):

$$V^*(x, y, z) = -aU_x^*(x, y, z) - bU_y^*(x, y, z) - cU_z^*(x, y, z),$$

где не все коэффициенты a, b, c равны нулю;

в) у однородной гармонической функции $U^*(x, y, z)$ степени $-t - 1$ имеется однородный и гармонический прототип $U(x, y, z)$ степени t , из которого, в соответствии с формулой Томсона (3), ее можно вычислить как

$$U^*(x, y, z) = U(x, y, z)/r^{2m+1}.$$

В таком случае однородная гармоническая функция $U(x, y, z)$ степени t оказывается функцией-прототипом, из которой посредством преобразования

$$V(x, y, z) = (2m+1)(ax + by + cz) \times U(x, y, z) - r^2(aU_x(x, y, z) + bU_y(x, y, z) + cU_z(x, y, z)) \quad (40)$$

получается исходная однородная гармоническая функция $V(x, y, z)$ степени $t + 1$.

Отметим, что преобразование (40) представляет собой суперпозицию преобразований в) + б) + а), в чем легко убедиться с помощью прямого вычисления указанной суперпозиции.

Следовательно, линейная комбинация (40), составленная из базисных операторов Донкина (9) – (11), снова является оператором Донкина, если не все коэффициенты a, b, c равны нулю.

Лемма 3 доказана.

Лемма 4. *Линейные комбинации с постоянными коэффициентами, составленные из базисных операторов Донкина (5), (12) – (14) для степени однородности t , либо из базисных операторов Донкина (15), (22) – (24) для степени однородности $-t - 1$, являются обратимыми на подмножествах однородных гармонических функций соответствующих степеней.*

Доказательство. Из-за обратимости формулы Томсона (3) линейные комбинации, составленные из формул (15), (22) – (24), будут обратимыми тогда и только тогда, когда обратимыми будут линейные комбинации, составленные из формул (5), (12) – (14).

Исследуем обратимость линейной комбинации с постоянными коэффициентами, составленной из формул (5), (12) – (14):

$$V(x, y, z) = a(yU_z - zU_y) + b(zU_x - xU_z) + c(xU_y - yU_x) + eU, \quad (41)$$

где a, b, c, e – константы, не все из которых равны нулю.

Без ограничения общности можно считать, что либо $a \neq 0$, либо $b \neq 0$, либо $c \neq 0$ (если $a = b = c = 0$, то комбинированный оператор (41) превращается в базисный оператор (5), обратимость которого очевидна). Это требование необходимо, чтобы выражение

$$2apq - b(1 + p^2 - q^2) + 2cq,$$

на которое потребуется делить в дальнейшем, не обращалось тождественно в нуль.

После подстановки (30), (31) при $k = m$ в линейную комбинацию (41) и в уравнения Лапласа, для функций U и V получаем переопределенную систему дифференциальных уравнений в частных производных:

$$\frac{\partial^2 F(p, q)}{\partial p^2} + \frac{\partial^2 F(p, q)}{\partial q^2} + \frac{4m(m+1)}{(1+p^2+q^2)^2} F(p, q) = 0, \quad (42)$$

$$\begin{aligned} & \frac{\partial F(p, q)}{\partial p} (b(1+p^2-q^2) - 2apq - 2cq) + \\ & + \frac{\partial F(p, q)}{\partial q} (-a(1-p^2+q^2) + 2bpq + 2cp) + \\ & + 2eF(p, q) = G(p, q), \end{aligned} \quad (43)$$

которую надо исследовать на предмет существования решений для неизвестной функции F , при условии, что функция G известна и удовлетворяет уравнению

$$\frac{\partial^2 G(p, q)}{\partial p^2} + \frac{\partial^2 G(p, q)}{\partial q^2} + \frac{4m(m+1)}{(1+p^2+q^2)^2} G(p, q) = 0. \quad (44)$$

Введем в рассмотрение новую неизвестную функцию $R(p, q)$ с помощью подстановки

$$\frac{\partial F(p, q)}{\partial q} = R(p, q)F(p, q). \quad (45)$$

Из уравнения (43), с учетом соотношения (45), можно выразить производную

$$\frac{\partial F(p, q)}{\partial p} = \frac{-G(p, q) + F(p, q)(2e + R(p, q)A(p, q))}{B(p, q)}, \quad (46)$$

где

$$A(p, q) = 2bpq - a(1 - p^2 + q^2) + 2cp,$$

$$B(p, q) = 2apq - b(1 + p^2 - q^2) + 2cq.$$

Из условия равенства смешанных производных, т. е.

$$\partial(\partial F/\partial p)/\partial q = \partial(\partial F/\partial q)/\partial p,$$

получаем дополнительное линейное соотношение, которому должны удовлетворять производные $\partial R/\partial p$ и $\partial R/\partial q$.

Из условия (45), после дифференцирования по q , можно найти производную $\partial^2 F/\partial q^2$, а из условия (46), после дифференцирования по p , – производную $\partial^2 F/\partial p^2$ в виде алгебраических выражений, содержащих $F, R, \partial R/\partial p$ и $\partial R/\partial q$. Тогда уравнение (42) позволяет сконструировать еще одно независимое линейное соотношение, которому должны удовлетворять производные $\partial R/\partial p$ и $\partial R/\partial q$.

Из этих соотношений можно найти производные $\partial R/\partial p$ и $\partial R/\partial q$ как функции от $F(p, q), R(p, q), G(p, q)$, частных производных первого порядка $\partial G(p, q)/\partial p$ и $\partial G(p, q)/\partial q$, независимых переменных p, q и констант a, b, c, e .

В итоге получилась полная система дифференциальных уравнений, описанная в разделе «Полные системы уравнений в частных производных первого порядка», с неизвестными функциями $F(p, q), R(p, q)$ и независимыми переменными p, q (функция $G(p, q)$ считается известной). Можно убедиться, что при условии, что функция $G(p, q)$ удовлетворяет уравнению (44), для полученной полной системы дифференциальных уравнений, условия (39) ее разрешимости тождественно равны нулю.

Следовательно, полученная полная система дифференциальных уравнений в частных производных имеет решение (определенное с точностью до двух произвольных констант). Поэтому преобразование однородных гармонических функций (41) является обратимым на множестве однородных гармонических функций, а линейный дифференциальный оператор (41) оказывается оператором Донкина при лю-

бых константах a, b, c, e , не равных одновременно нулю.

Лемма 4 доказана.

Теорема полностью доказана.

Особый случай

В нашей статье [2] рассматривается вырожденный случай преобразования Томсона $U(x, y, z) \rightarrow V(x, y, z)$ для однородных гармонических функций, когда функции $U(x, y, z)$ и $V(x, y, z)$ имеют степени однородности 0 или -1 . Этот случай не входит в список элементарных преобразований Томсона, представленный выше, и должен рассматриваться отдельно. В этом разделе исследуется обратимость преобразования Томсона, соответствующего указанному случаю.

Для вырожденного случая преобразования Томсона, согласно формулам Донкина (25), (26), функции $U(x, y, z)$ и $V(x, y, z)$ можно представить в виде

$$\begin{cases} U(x, y, z) = F\left(\frac{x}{z+r}, \frac{y}{z+r}\right), \\ V(x, y, z) = G\left(\frac{x}{z+r}, \frac{y}{z+r}\right); \end{cases} \quad (47)$$

$$\begin{cases} U(x, y, z) = F\left(\frac{x}{z+r}, \frac{y}{z+r}\right), \\ V(x, y, z) = \frac{1}{r}G\left(\frac{x}{z+r}, \frac{y}{z+r}\right); \end{cases} \quad (48)$$

$$\begin{cases} U(x, y, z) = \frac{1}{r}F\left(\frac{x}{z+r}, \frac{y}{z+r}\right), \\ V(x, y, z) = G\left(\frac{x}{z+r}, \frac{y}{z+r}\right); \end{cases} \quad (49)$$

$$\begin{cases} U(x, y, z) = \frac{1}{r}F\left(\frac{x}{z+r}, \frac{y}{z+r}\right), \\ V(x, y, z) = \frac{1}{r}G\left(\frac{x}{z+r}, \frac{y}{z+r}\right), \end{cases} \quad (50)$$

где функции $F(p, q)$ и $G(p, q)$ удовлетворяют двумерному уравнению Лапласа.

Связь между функциями $F(p, q)$ и $G(p, q)$ устанавливается с помощью линейного дифференциального соотношения первого порядка:

$$G(p, q) = \lambda F(p, q) + v(p, q) \frac{\partial F(p, q)}{\partial p} + w(p, q) \frac{\partial F(p, q)}{\partial q}, \quad (51)$$

где λ – произвольная вещественная константа, а функции $v(p, q)$ и $w(p, q)$ удовлетворяют соотношениям Коши – Римана:

$$v_p = w_q, \quad v_q = -w_p,$$

т. е. представляют собой вещественную и мнимую части некоторой аналитической функции комплексного переменного [31 – 34] (и тем самым каждая из этих функций удовлетворяет двумерному уравнению Лапласа).

Линейные комбинации с постоянными коэффициентами, составленные из выражений вида (51) с разными константами λ_k и разными функциями $v_k(p, q)$ и $w_k(p, q)$, но с одной и той же гармонической функцией $F(p, q)$, очевидным образом снова будут выражениями вида (51) при константах λ , выбранных надлежащим образом, и функциях $v(p, q)$ и $w(p, q)$, удовлетворяющих соотношениям Коши – Римана.

Физический смысл формулы (51) вполне нагляден. Если функция $F(p, q)$ будет гармонической, то ее можно рассматривать как вещественную часть аналитической функции комплексного переменного $s = p + iq$:

$$f(s) = f(p + iq) = F(p, q) + i \hat{F}(p, q);$$

здесь функции $F(p, q)$ и $\hat{F}(p, q)$ связаны соотношениями Коши – Римана:

$$F_p = \hat{F}_q, \quad F_q = -\hat{F}_p.$$

Следует отметить, что соотношения Коши – Римана, рассматриваемые как полная система дифференциальных уравнений в частных производных относительно неизвестной функции $\hat{F}(p, q)$ (при заданной функции $F(p, q)$), в соответствии с теоремой из раздела «Полные системы уравнений в частных производных первого порядка», гарантированно имеет решение с точностью до произвольной аддитивной константы, когда $F(p, q)$ удовлетворяет уравнению Лапласа.

Возвращаясь к обсуждению физического смысла формулы (51), утверждаем, что аналогичным образом аналитической функцией комплексного переменного будет функция

$$u(s) = u(p + iq) = v(p, q) + iw(p, q),$$

когда функции $v(p, q)$ и $w(p, q)$ связаны соотношениями Коши – Римана.

В таком случае выражение

$$\lambda f(s) + u(s) df(s)/ds$$

является аналитической функцией комплексного переменного, а ее вещественная часть, совпадающая с правой частью формулы (51), обязана быть гармонической функцией (удовлетворять двумерному уравнению Лапласа).

Также можно проверить с помощью прямой подстановки, что функция (51) будет гармонической функцией, когда функция F – гармоническая:

$$\begin{aligned} G_{pp} + G_{qq} &= \lambda(F_{pp} + F_{qq}) + \\ &+ (v_{pp} + v_{qq})F_p + (w_{pp} + w_{qq})F_q + \\ &+ v(F_{ppp} + F_{ppq}) + w(F_{ppq} + F_{qqq}) + \\ &+ 2(v_p F_{pp} + w_q F_{qq}) + 2(v_q + w_p)F_{pq} = 0. \end{aligned} \quad (52)$$

Линейные комбинации с постоянными коэффициентами, составленные из выражений вида (51), очевидным образом снова будут выражениями вида (51) при константах λ , выбранных надлежащим образом, и функциях $v(p, q)$ и $w(p, q)$, удовлетворяющих соотношениям Коши – Римана.

Поскольку частные производные от функции F по p и q можно с помощью формул (47) – (49) или (50) выразить через частные производные от функции U по x и y , соотношение (51) между функциями F и G порождает линейное дифференциальное соотношение между функциями U и V , которое тем самым будет являться преобразованием Томсона для рассматриваемых однородных функций U и V .

В случае, когда соотношение (51) будет обратимым, получаемое преобразование Томсона для однородных гармонических функций будет также обратимым, т. е. будет оператором Донкина.

Как уже было отмечено, когда функция $F(p, q)$ удовлетворяет двумерному уравнению Лапласа, ее можно рассматривать как вещественную часть некоторой аналитической функции комплексного переменного:

$$f(s) = f(p + iq) = F(p, q) + i\hat{F}(p, q), \quad (53)$$

где вещественная часть $F(p, q)$ и мнимая часть $\hat{F}(p, q)$ связаны соотношениями Коши – Римана:

$$F_p = \hat{F}_q, F_q = -\hat{F}_p.$$

Соответственно, и функцию $G(p, q)$ также можно рассматривать как вещественную

часть некоторой аналитической функции комплексного переменного:

$$g(s) = g(p + iq) = G(p, q) + i\hat{G}(p, q), \quad (54)$$

где вещественная часть $G(p, q)$ и мнимая часть $\hat{G}(p, q)$ вычисляются по формулам

$$\begin{aligned} G(p, q) &= \lambda F(p, q) + v(p, q)F_p(p, q) + \\ &+ w(p, q)F_q(p, q) = \\ &= \lambda F(p, q) + v(p, q)F_p(p, q) - \\ &- w(p, q)\hat{F}_p(p, q); \end{aligned} \quad (55)$$

$$\begin{aligned} \hat{G}(p, q) &= \lambda \hat{F}(p, q) + v(p, q)\hat{F}_p(p, q) + \\ &+ w(p, q)\hat{F}_q(p, q) = \\ &= \lambda \hat{F}(p, q) + v(p, q)\hat{F}_p(p, q) + \\ &+ w(p, q)F_p(p, q). \end{aligned}$$

Можно убедиться, что функции (55) связаны между собой соотношениями Коши – Римана:

$$G_p = \hat{G}_q, G_q = -\hat{G}_p.$$

Соотношения (55) для вещественной и мнимой частей функции $g(s)$ эквивалентны обыкновенному дифференциальному уравнению первого порядка для аналитических функций комплексного переменного [35]:

$$g(s) = \lambda f(s) + u(s) \frac{df(s)}{ds}, \quad (56)$$

где

$$u(s) = u(p + iq) = v(p, q) + iw(p, q).$$

Уравнение (56), рассматриваемое на комплексной плоскости относительно неизвестной функции $f(s)$ при заданной функции $g(s)$, имеет решение

$$\begin{aligned} f(s) &= \left(C + \int_{s_0}^s \left[\frac{g(t)}{u(t)} \exp \left(\int_{s_0}^t \frac{\lambda d\tau}{u(\tau)} \right) \right] dt \right) \times \\ &\times \exp \left(- \int_{s_0}^s \frac{\lambda dt}{u(t)} \right), \end{aligned} \quad (57)$$

где C – произвольная комплексная константа.

Для формулы (57) существенно, что интеграл от аналитической функции на комплексной плоскости не зависит от пути интегрирования (для чего, возможно, потребуется добавить к комплексной плоско-

сти разрезы, устраняющие особые точки подынтегральных функций и обеспечивающие односвязность полученной области), а результатом интегрирования является аналитическая функция [35]. Поэтому дифференциальное соотношение (51) будет обратимым для подмножества двумерных гармонических функций, если $u(s) \neq 0$ (либо при $u(s) = 0$, если $\lambda \neq 0$).

Следовательно, преобразования Томсона, порождаемые для однородных гармонических функций (47) – (49) или (50) с помощью соотношений (51), являются операторами Донкина, если только не обращаются в нуль сразу все коэффициенты в формуле (51).

Вырожденные линейные комбинации

До сих пор рассматривались операторы Донкина, которые, хотя и содержат в некоторых случаях в явном виде степень однородности в качестве параметра, могут применяться к однородным гармоническим функциям любых степеней. В этом разделе исследуется возможность существования вырожденных случаев, которые работают лишь для какой-то одной степени однородности и не могут быть обобщены на произвольную степень однородности.

Действительно, при некоторых значениях m степени однородности формул из списков (5) – (14) и (15) – (24) могут пересекаться и, следовательно, эти формулы допустимо объединять в одной и той же линейной комбинации с постоянными коэффициентами. Такие комбинации могут отличаться от линейных комбинаций общего вида, рассмотренных в разделе «Особый случай». Приведем такие значения m .

1. Если $m = -1/2$, то у операторов (5), (12) – (15), (22) – (24) будет одинаковая степень однородности, равная $-1/2$ (этот случай не представляет интереса, так как группы операторов (5), (12) – (15), (22) – (24) тождественно совпадают при $k = -1/2$).

2. При $m = 0$ у операторов (5), (12) – (14), (16) – (18) будет одинаковая степень однородности, равная нулю, так что линейная комбинация операторов приобретает вид

$$L[U] = eU + U_x(cy - bz + fr) + U_y(az - cx + gr) + U_z(bx - ay + hr). \quad (58)$$

3. При $m = -1$ у операторов (5), (12) – (14), (19) – (21) будет одинаковая степень

однородности, равная -1 , так что линейная комбинация операторов приобретает вид

$$L[U] = U \left(e + \frac{fx + gy + hz}{r} \right) + U_x(cy - bz + fr) + U_y(az - cx + gr) + U_z(bx - ay + hr). \quad (59)$$

4. При $m = 0$ у операторов (6) – (8), (15), (22) – (24) будет одинаковая степень однородности, равная -1 , так что линейная комбинация операторов приобретает вид

$$L[U] = \frac{eU}{r} + U_x \left(f + \frac{cy - bz}{r} \right) + U_y \left(g + \frac{az - cx}{r} \right) + U_z \left(h + \frac{bx - ay}{r} \right). \quad (60)$$

5. При $m = 1/2$ у операторов (6) – (8), (16) – (18) будет одинаковая степень однородности, равная $-1/2$ (этот случай не представляет интереса, так как группы операторов (6) – (8) и (16) – (18) тождественно совпадают при $k = 1/2$).

6. При $m = -1/2$ у операторов (6) – (8), (19) – (21) будет одинаковая степень однородности, равная $-3/2$ (этот случай также не представляет интереса, так как группы операторов (6) – (8) и (19) – (21) тождественно совпадают при $k = -1/2$).

7. При $m = -1$ у операторов (9) – (11), (15), (22) – (24) будет одинаковая степень однородности, равная нулю, так что линейная комбинация операторов приобретает вид

$$L[U] = U(fx + gy + hz + eU) + U_x r(cy - bz + fr) + U_y r(az - cx + gr) + U_z r(bx - ay + hr). \quad (61)$$

8. При $m = -1/2$ у операторов (9) – (11), (16) – (18) будет одинаковая степень однородности, равная $1/2$ (этот случай не представляет интереса, так как группы операторов (9) – (11) и (16) – (18) тождественно совпадают при $k = -1/2$).

9. При $m = -3/2$ у операторов (9) – (11), (19) – (21) будет одинаковая степень однородности, равная $-1/2$ (этот случай также не представляет интереса, так как группы операторов (9) – (11) и (19) – (21) тождественно совпадают при $k = -3/2$).

Выражения (58) – (61) соответствуют особому случаю, рассмотренному в разделе



«Особый случай», если выбрать

$$\lambda = e,$$

$$\begin{aligned} v(p, q) &= \frac{f-b}{2} - hp + cq + \\ &+ (a-g)pq - \frac{b+f}{2}(p^2 - q^2), \quad (62) \\ w(p, q) &= \frac{a+g}{2} - cp - hq - \\ &- (b+f)pq - \frac{a-g}{2}(p^2 - q^2) \end{aligned}$$

(легко убедиться, что функции $v(p, q)$ и $w(p, q)$ удовлетворяют соотношениям Коши – Римана $v_p = w_q, v_q = -w_p$).

Следовательно, операторы (58) – (61) являются операторами Донкина по отношению к однородным гармоническим функциям соответствующих степеней при любом выборе констант a, b, c, e, f, g, h .

Заключение

Исследование всех возможных форм дифференциальных преобразований Томсона для трехмерных однородных гармонических функций показывает, что любые операторы Донкина первого порядка обязаны представлять собой линейные комбинации с постоянными коэффициентами, составленные из базисных дифференциальных формул Томсона первого порядка для однородных функций [2]. Это, естественно, не означает, что базисные дифференциальные формулы Томсона либо их линейные комбинации действительно являются операторами Донкина. Однако в работе [3] показано, что базисные дифференциальные формулы Томсона (5) – (14), (15) – (24) обратимы, т. е. являются операторами Донкина.

Исследование, представленное в данной работе, показывает, что линейные комбинации с постоянными коэффициентами, составленные из базисных операторов Донкина (5) – (14), (15) – (24), соответствующих одной степени однородности, также являются операторами Донкина. Очевидно, что других операторов Донкина первого порядка для трехмерных однородных гармонических функций не существует.

Утверждение, высказанное в такой сильной форме, требует некоторого разъяснения. Если прибавить к любой из формул (5) – (14), (15) – (24) или к их линейной ком-

бинации соотношение Эйлера, умноженное на произвольную функцию, то получится новая трансформирующая формула с точно такими же свойствами. Это связано с тем, что по своему воздействию на трехмерные однородные гармонические функции заданной степени такие формулы будут полностью эквивалентны базовым формулам (5) – (14) и (15) – (24) либо их линейным комбинациям с постоянными коэффициентами.

Для чистоты эксперимента эта функция должна быть однородной по Эйлера с соответствующей степенью однородности, иначе искусственную аддитивную добавку будет слишком легко вычленивать из нового выражения. При этом подобные формулы могут достаточно серьезным образом отличаться в алгебраическом смысле от полученного ранее списка. Например, оператор

$$\begin{aligned} L[U] &= AU_x(x, y, z) + \\ &+ BU_y(x, y, z) + CU_z(x, y, z), \\ A &= a(2m+1)xz + b(2m+1)yz + \\ &+ c(-mx^2 - my^2 + (m+1)z^2), \\ B &= a(2m+1)xy + \quad (63) \\ &+ b(-mx^2 + (m+1)y^2 - mz^2) + \\ &+ c(2m+1)yz, \\ C &= a((m+1)x^2 - my^2 - mz^2) + \\ &+ b(2m+1)xy + c(2m+1)xz, \end{aligned}$$

с произвольными константами a, b и c отличается (с алгебраической точки зрения) как от любой из полученных ранее базовых формул (5) – (14) и (15) – (24), так и от их линейной комбинации с постоянными коэффициентами.

Однако этот оператор можно представить в виде

$$\begin{aligned} L[U] &= (a(2m+1)xz + b(2m+1)yz + \\ &+ c(-mx^2 - my^2 + (m+1)z^2))U_x + \\ &+ (a(2m+1)xy + b(-mx^2 + (m+1)y^2 - mz^2) + \\ &+ c(2m+1)yz)U_y + \quad (64) \\ &+ (a((m+1)x^2 - my^2 - mz^2) + \\ &+ b(2m+1)xy + c(2m+1)xz)U_z = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= (2m+1)(cx+by+az) \times \\
 &\times (xU_x + yU_y + zU_z - mU) + \\
 &+ mc((2m+1)xU - r^2U_x) + \quad (64) \\
 &+ mb((2m+1)yU - r^2U_y) + \\
 &+ ma((2m+1)zU - r^2U_z).
 \end{aligned}$$

Из этого тождества видно, что фактически оператор (63) ничем не отличается от линейной комбинации операторов (9) – (11) по своему воздействию на однородные гармонические функции степени m .

Указанная связь, однако, не всегда очевидна. Похожие проблемы, касающиеся фактической идентичности математических выражений, не равных друг другу тождественно в алгебраическом смысле, рассма-

триваются, например, в работах [36 – 39].

Вычисления, представленные в данной работе, выполнялись с помощью программы Wolfram Mathematica [40].

Благодарности

Авторы выражают искреннюю благодарность доктору физико-математических наук Антону Леонидовичу Булянице, профессору кафедры высшей математики СПбПУ, за активное участие в обсуждении способов доказательства обратимости линейных дифференциальных операторов на подмножестве однородных гармонических функций.

Работа частично выполнена в рамках НИР 0074-2019-0009, входящей в состав государственного задания № 075-00780-19-02 Министерства науки и высшего образования Российской Федерации.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Бердников А.С., Галль Л.Н., Галль Р.Н., Соловьев К.В. Обобщение формулы Томсона для гармонических функций общего вида // Научно-технические ведомости СПбГПУ. Физико-математические науки. 2019. Т. 12 № 2. С. 32–48.
2. Бердников А.С., Галль Л.Н., Галль Р.Н., Соловьев К.В. Обобщение формулы Томсона для гармонических однородных функций // Научно-технические ведомости СПбГПУ. Физико-математические науки. 2019. Т. 12 № 2. С. 49–62.
3. Бердников А.С., Галль Л.Н., Галль Р.Н., Соловьев К.В. Базисные дифференциальные операторы Донкина для однородных гармонических функций // Научно-технические ведомости СПбГПУ. Физико-математические науки. 2019. Т. 12. № 3. С. 26–44.
4. Фихтенгольц Г.М. Курс дифференциального и интегрального исчисления. Т. 1. М.: Физматлит, 2001. 616 с.
5. Смирнов В.И. Курс высшей математики. Т. 1. М.: Наука, 1974. 480 с.
6. Бердников А.С., Аверин И.А., Краснова Н.К., Соловьев К.В. Об однородности скалярных и векторных потенциалов электрических и магнитных полей, однородных по Эйлеру // Успехи прикладной физики. 2017. Т. 5. № 1. С. 10–27.
7. Donkin W.F. On the equation of Laplace's functions &c // Philosophical Transactions of the Royal Society of London. 1857. Vol. 147. Pp. 43–57.
8. Donkin W.F. On the equation of Laplace's functions &c // Proceedings of the Royal Society of London. 1856–1857. Vol. 8. Pp. 307–310.
9. Thomson W. Extraits de deux Lettres adressées à M. Liouville // Journal de mathématiques pures et appliquées. Tome XII. 1847. Pp. 256–264.
10. Сретенский Л.Н. Теория ньютоновского потенциала. Москва, Ленинград: ОГИЗ-ГИТТЛ, 1946. 318 с.
11. Смирнов В.И. Курс высшей математики. Т. 4. Ч. 2. М.: Наука, 1981. 297 с.
12. Владимиров В.С. Уравнения математической физики. М.: Наука, 1981. 512 с.
13. Kellogg O.D. Foundations of potential theory. Berlin, Heidelberg, New-York: Springer-Verlag, 1967. 386 p.
14. Уэрмлер Дж. Теория потенциала. М.: Мир, 1980. 134 с.
15. Helms L.L. Potential theory. 2nd Ed. London, Heidelberg, New-York, Dordrecht: Springer, 2014. 485 p.
16. Голиков Ю.К. Аналитические способы описания гармонических функций // Вестник Актыбинского регионального государственного университета им. К. Жубанова. Физико-математические науки. 2016. № 2(44). С. 165–181.
17. Томсон У. (лорд Кельвин), Тэт П.Г. Трактат по натуральной философии. Ч. I. Москва, Ижевск: НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», 2010. 572 с.
18. Томсон У. (лорд Кельвин), Тэт П.Г. Трактат по натуральной философии. Ч. II.



Москва, Ижевск: НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», 2011. 560 с.

19. **Габдуллин П.Г., Голиков Ю.К., Краснова Н.К., Давыдов С.Н.** Применение формулы Донкина в теории энергоанализаторов. I. // Журнал технической физики. 2000. Т. 70. № 2. С. 91–94.

20. **Габдуллин П.Г., Голиков Ю.К., Краснова Н.К., Давыдов С.Н.** Применение формулы Донкина в теории энергоанализаторов. II. // Журнал технической физики. 2000. Т. 70. № 3. С. 44–47.

21. **Голиков Ю.К., Краснова Н.К.** Аналитические структуры электрических обобщенно-однородных спектрографических сред // Научное приборостроение. 2014. Т. 24. № 1. С. 50–58.

22. **Голиков Ю.К., Бердников А.С., Антонов А.С., Краснова Н.К., Соловьев К.В.** Применение формулы Донкина в теории электростатических призм // Журнал технической физики. 2018. Т. 88. № 11. С. 1711–1719.

23. **Гобсон Е.В.** Теория сферических и эллипсоидальных функций. М.: Изд-во иностранной литературы, 1952. 476 с.

24. **Уиттекер Э.Т., Ватсон Дж.** Курс современного анализа. Часть 2: Трансцендентные функции. М.: ГИФМЛ, 1963. 516 с.

25. **Гюнтер Н.М.** Интегрирование уравнений в частных производных первого порядка. Ленинград, Москва: ОНТИ, 1934.

26. **Рашевский П.К.** Геометрическая теория уравнений с частными производными. Москва, Ленинград: ГИТТЛ, 1947. 362 с.

27. **Фиников С.П.** Метод внешних форм Картана в дифференциальной геометрии. Москва, Ленинград: ОГИЗ, 1948. 432 с.

28. **Картан Э.** Внешние дифференциальные системы и их геометрические приложения. М.: Изд-во Московского ун-та, 1962. 237 с.

29. **Щербаков Р.Н.** Основы метода внешних форм и линейчатой дифференциальной гео-

метрии. Томск: Изд-во ТГУ, 1973. 236 с.

30. **Бердников А.С., Краснова Н.К., Соловьев К.В.** Теорема о дифференцировании трехмерных электрических и магнитных потенциалов, однородных по Эйлеру // Научное приборостроение. 2017. Т. 27. № 3. С. 107–119.

31. **Лаврентьев М.А., Шабат Б.В.** Методы теории функций комплексного переменного. М.: Наука, 1965. 716 с.

32. **Маркушевич А.И.** Теория аналитических функций. Т. 1, 2. М.: Наука, 1968. 486 с., 624 с.

33. **Евграфов М.А.** Аналитические функции. 3-е изд., перераб. и доп. М.: Наука, 1991. 448 с.

34. **Гурвиц А., Курант Р.** Теория функций. М.: Наука, 1968. 646 с.

35. **Айнс Э.Л.** Обыкновенные дифференциальные уравнения. Харьков: ОНТИ–НТТИ Украины, 1939. 719 с.

36. **Буляница А.Л., Курочкин В.Е.** Исследование процессов упорядочивания в открытых системах // Научное приборостроение. 2000. Т. 10. № 2. С. 43–49.

37. **Буляница А.Л., Евстрапов А.А., Рудницкая Г.Е.** Метод моментов при расчете параметров каналов в микроразмерных системах // Научное приборостроение. 2003. Т. 13. № 4. С. 28–40.

38. **Евстрапов А.А., Буляница А.Л., Рудницкая Г.Е., Беленький Б.Г., Петряков А.О., Курочкин В.Е.** Особенности применения алгоритмов цифровой фильтрации электрофореграмм при анализе веществ на микрочипе // Научное приборостроение. 2003. Т. 13. № 2. С. 57–63.

39. **Буляница А.Л.** Математическое моделирование в микрофлюидике: основные положения // Научное приборостроение. 2005. Т. 15. № 2. С. 51–66.

40. Wolfram Mathematica // URL : <http://wolfram.com/mathematica/>

Статья поступила в редакцию 21.06.2019, принята к публикации 16.07.2019.

СВЕДЕНИЯ ОБ АВТОРАХ

БЕРДНИКОВ Александр Сергеевич – доктор физико-математических наук, ведущий научный сотрудник Института аналитического приборостроения РАН, Санкт-Петербург, Российская Федерация.

190103, Российская Федерация, г. Санкт-Петербург, Рижский пр., 26
asberd@yandex.ru

ГАЛЛЬ Лидия Николаевна – доктор физико-математических наук, главный научный сотрудник Института аналитического приборостроения РАН, Санкт-Петербург, Российская Федерация.

190103, Российская Федерация, г. Санкт-Петербург, Рижский пр., 26
Ingall@yandex.ru

ГАЛЛЬ Николай Ростиславович – доктор физико-математических наук, ведущий научный сотрудник Института аналитического приборостроения РАН, Санкт-Петербург, Российская Федерация.

190103, Российская Федерация, г. Санкт-Петербург, Рижский пр., 26
gall@ms.ioffe.ru

СОЛОВЬЕВ Константин Вячеславович – кандидат физико-математических наук, доцент кафедры физической электроники Санкт-Петербургского политехнического университета Петра Великого, младший научный сотрудник Института аналитического приборостроения РАН, Санкт-Петербург, Российская Федерация.

195251, Российская Федерация, г. Санкт-Петербург, Политехническая ул., 29
k-solovyev@mail.ru

REFERENCES

1. **Berdnikov A.S., Gall L.N., Gall N.R., Solovyev K.V.**, Generalization of the Thomson formula for harmonic functions of a general type, St. Petersburg Polytechnical State University Journal. Physics and Mathematics. 12 (2) (2019) 32–48.
2. **Berdnikov A.S., Gall L.N., Gall N.R., Solovyev K.V.**, Generalization of the Thomson formula for homogeneous harmonic functions, St. Petersburg Polytechnical State University Journal. Physics and Mathematics. 12 (2) (2019) 49–62.
3. **Berdnikov A.S., Gall L.N., Gall N.R., Solovyev K.V.**, Basic Donkin's differential operators for homogeneous harmonic functions, St. Petersburg Polytechnical State University Journal. Physics and Mathematics. 12 (3) (2019) 26–44.
4. **Fichtenholz G.M.**, Differential- und Integralrechnung, I, VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften, Berlin. 1968.
5. **Smirnov V.I.**, A course of higher mathematics, Vol. I: Elementary Calculus, Pergamon Press, Oxford, 1964.
6. **Berdnikov A.S., Averin I.A., Krasnova N.K., Solovyev K.V.**, On homogeneity of scalar and vector potentials of electric and magnetic fields, homogeneous in Euler terms, Uspekhi Prikladnoi Fiziki (Advances in Applied Physics). 5 (1) (2017) 10–27.
7. **Donkin W.F.**, On the equation of Laplace's functions &c., Philosophical Transactions of the Royal Society of London. 147 (1857) 43–57.
8. **Donkin W.F.**, On the equation of Laplace's functions &c., Philosophical Proceedings of the Royal Society of London. 8 (1856–1857) 307–310.
9. **Thomson W.**, Extraits de deux Lettres adressées à M. Liouville, Journal de mathématiques pures et appliquées. 12 (1847) 256–264.
10. **Sretensky L.N.**, Teoriya niyutonovskogo potentsiala [Theory of the Newtonian potential], OGIZ-GITTL, Moscow, Leningrad, 1946.
11. **Smirnov V.I.**, A course of higher mathematics, Vol. 4: Integral equations and partial differential equations, Pergamon Press, Oxford, 1964.
12. **Vladimirov V.S.**, Uravneniya matematicheskoy fiziki [Equations of mathematical physics], Mir Publishers, Moscow, 1984.
13. **Kellogg O.D.**, Foundations of potential theory, Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, New-York, 1967.
14. **Wermer J.**, Potential theory, 2nd Ed., Ser. "Lecture Notes in Mathematics", Vol. 408, Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, New-York, 1981.
15. **Helms L.L.**, Potential theory, 2nd Ed., Springer, London, Heidelberg, New-York, Dordrecht, 2014.
16. **Golikov Yu.K.**, Analytical ways of describing harmonic functions, Vestnik of Aktobe's K. Zhubanov Regional State University, Physics and Mathematics. (2(44)) (2016) 165–181.
17. **Thomson W. (Lord Kelvin), Tait P.G.**, Treatise on natural philosophy, 2nd Ed., Part 1, University Press, Cambridge, 1912.
18. **Thomson W. (Lord Kelvin), Tait P.G.**, Treatise on natural philosophy, 2nd Ed., Part 2, University Press, Cambridge, 1912.
19. **Gabdullin P.G., Golikov Yu.K., Krasnova N.K., Davydov S.N.**, The use of Donkin's formula in the theory of energy analyzers, I, Technical Physics. 45 (2) (2000) 232–235.



20. **Gabdullin P.G., Golikov Yu.K., Krasnova N.K., Davydov S.N.**, The use of Donkin's formula in the theory of energy analyzers, II, *Technical Physics*. 45 (3) (2000) 330–333.
21. **Golikov Yu.K., Krasnova N.K.**, Analytical structures of generalized homogeneous electrical spectrographic media, *Nauchnoe priborostroenie (Scientific Instrumentation)*. 24 (1) (2014) 50–58.
22. **Golikov Yu.K., Berdnikov A.S., Antonov A.S., et al.**, Application of the Donkin formula in the theory of electrostatic prisms, *Technical Physics*. 63 (11) (2018) 1659–1666.
23. **Hobson E.W.**, The theory of spherical and ellipsoidal harmonics, University Press, Cambridge, 2012.
24. **Whittaker E.T., Watson G.N.**, A course of modern analysis, University Press, Cambridge, 1950.
25. **Günther N.M.**, Integrirovaniye uravneniy v chastnykh proizvodnykh pervogo poryadka [Integration of first-order partial differential equations], ONTI, Leningrad, Moscow, 1934.
26. **Rashevsky P.K.**, Geometricheskaya teoriya uravneniy s chastnymi proizvodnymi [Geometric theory of partial differential equations], OGIZ, Moscow, Leningrad, 1947.
27. **Finikov S.P.**, Metod vneshnikh form Kartana v differentsialnoy geometrii [Cartan's method of exterior forms in differential geometry], OGIZ, Moscow, Leningrad, 1948.
28. **Cartan É.**, Les systèmes différentiels extérieurs et leurs applications géométriques, Ser. "Actualités Scientifiques et Industrielles", No. 994, Hermann, Paris, 1945.
29. **Shcherbakov R.N.**, Osnovy metoda vneshnikh form i lineuchatoy differentsialnoy geometrii [Fundamentals of the method of external forms and differential line geometry], Tomsk State University Publishing House, Tomsk, 1973.
30. **Berdnikov A.S., Krasnova N.K., Solovyev K.V.**, The theorem on the differentiation of three-dimensional electric and magnetic potentials, homogeneous in Euler terms, *Nauchnoe priborostroenie (Scientific Instrumentation)*. 27 (3) (2017) 107–119.
31. **Lavrent'ev M.A., Shabat B.V.**, Methoden der komplexen Funktionen-theorie, Verlag Wissenschaft, 1969.
32. **Markushevich A.I.**, Theory of functions of a complex variable, Vol. 1–3, Providence, US, Amer. Math. Society Publ., 2005.
33. **Evgrafov M.A.**, Analytic functions, Dover Publ., 1978.
34. **Hurwitz A., Courant R.**, Vorlesungen Über Allgemeine Funktionentheorie und Elliptische Funktionen, Springer, Berlin, 1964.
35. **Ince E.L.**, Ordinary differential equations, Dover Publications, New York, 1964.
36. **Bulyanitsa A.L., Kurochkin V.E.**, Studying ordering processes in open systems (on the example of pattern evolution in colonies of imperfect mycelial fungi), *Nauchnoye priborostroyeniye (Scientific Instrumentation)*. 10 (2) (2000) 43–49.
37. **Bulyanitsa A.L., Evstrapov A.A., Rudnitskaya G.E.**, Calculation of microscale system channel parameters by the method of moments, *Nauchnoye priborostroyeniye (Scientific Instrumentation)*. 13 (4) (2003) 28–40.
38. **Evstrapov A.A., Bulyanitsa A.L., Rudnitskaya G.E., et al.**, Characteristic features of digital signal filtering algorithms as applied to electrophoresis on a microchip, *Nauchnoye priborostroyeniye (Scientific Instrumentation)*. 13 (2) (2003) 57–63.
39. **Bulyanitsa A.L.**, Mathematical modeling in microfluidics: basic concepts, *Nauchnoye priborostroyeniye (Scientific Instrumentation)*. 15 (2) (2005) 51–66.
40. Wolfram Mathematica, URL : <http://wolfram.com/mathematica/>.

Received 21.06.2019, accepted 16.07.2019.

THE AUTHORS

BERDNIKOV Alexander S.

Institute for Analytical Instrumentation of the Russian Academy of Sciences
26 Rizhsky Ave., St. Petersburg, 190103, Russian Federation
asberd@yandex.ru

GALL Lidia N.

Institute for Analytical Instrumentation of the Russian Academy of Sciences
26 Rizhsky Ave., St. Petersburg, 190103, Russian Federation
Ingall@yandex.ru

GALL Nikolaj R.

Institute for Analytical Instrumentation of the Russian Academy of Sciences
26 Rizhsky Ave., St. Petersburg, 190103, Russian Federation
gall@ms.ioffe.ru

SOLOVYEV Konstantin V.

Peter the Great St. Petersburg Polytechnic University
29 Politechnicheskaya St., St. Petersburg, 195251, Russian Federation
k-solovyev@mail.ru

**АППАРАТНО-ПРОГРАММНЫЙ КОМПЛЕКС
ДЛЯ ОПРЕДЕЛЕНИЯ ФУНКЦИОНАЛЬНОГО СОСТОЯНИЯ ЧЕЛОВЕКА
ПРИ ВОЗДЕЙСТВИИ СВЕТА С ВАРЬИРУЕМЫМИ
СПЕКТРАЛЬНО-ЦВЕТОВЫМИ ХАРАКТЕРИСТИКАМИ**

**А.В. Аладов¹, Д.Н. Берлов², А.Л. Закгейм¹,
А.Е. Черняков¹, А.Э. Фотиади³, В.П. Валюхов³**

¹Научно-технологический центр микроэлектроники и субмикронных гетероструктур РАН, Санкт-Петербург, Российская Федерация;

²Российский государственный педагогический университет им. А. И. Герцена, Санкт-Петербург, Российская Федерация;

³Санкт-Петербургский политехнический университет Петра Великого, Санкт-Петербург, Российская Федерация

В статье рассматриваются основные схемотехнические и программные аспекты создания светодиодной, динамически управляемой системы высококачественного освещения в широком диапазоне цветовых температур $T_c = 1700 - 10\,000$ К в составе экспериментальной установки аппаратно-программного комплекса для воздействия на функциональное состояние человека. Приведены результаты исследований воздействия освещения с различной цветовой температурой на организм человека на основе изменений показателей электрической активности мозга, сердечной активности, артериального давления и других параметров. Обработка результатов измерений выявила степень влияния и характер воздействия света с разными цветовыми температурами на психофизиологическое и функциональное состояния человека.

Ключевые слова: светодиод, RGB-смешение, динамическое управление светом, световое воздействие, функциональное состояние

Ссылка при цитировании: Аладов А.В., Берлов Д.Н., Закгейм А.Л., Черняков А.Е., Фотиади А.Э., Валюхов В.П. Аппаратно-программный комплекс для определения функционального состояния человека при воздействии света с варьлируемыми спектрально-цветовыми характеристиками // Научно-технические ведомости СПбГПУ. Физико-математические науки. 2019. Т. 12. № 3. С. 63–77. DOI: 10.18721/JPM.12305

**HARDWARE-SOFTWARE COMPLEX FOR CHARACTERISATION
OF A PERSON'S FUNCTIONAL STATUS ON EXPOSURE TO LIGHT
WITH THE VARIED SPECTRAL COLOR PARAMETERS**

**A.V. Aladov¹, D.N. Berlov², A.L. Zakgeim¹,
A.E. Chernyakov¹, A.E. Fotiadi³, V.P. Valyukhov³**

¹ Submicron Heterostructures for Microelectronics Research and Engineering Center of the RAS, St. Petersburg, Russian Federation;

² The Herzen State Pedagogical University of Russia, St. Petersburg, Russian Federation;

³ Peter the Great St. Petersburg Polytechnic University, St. Petersburg, Russian Federation

The article deals with the main circuitry and software aspects of the creation a LED dynamically controlled system of high-quality lighting with the broad range of color temperatures

$T_c = 1700 - 10,000$ K as a part of experimental installation of the hardware-software complex for impact on a person's functional status. The findings of investigation on impacts of lighting with a different color temperature on a human body are given. These studies were based on changes in indicators of electrical activity of the brain, heart work, arterial blood pressure and other parameters. Processing of measurement data revealed efficiency and a nature of influence of light with different color temperatures on psychophysiological and functional status.

Keywords: LED, RGB-color mixing, dynamic light control, light exposure, functional status

Citation: Aladov A.V., Berlov D.N., Zakgeim A.L., Chernyakov A.E., Fotiadi A.E., Valyukhov V.P., Hardware-software complex for characterization of a person's functional status on exposure to light with the varied spectral color parameters, St. Petersburg Polytechnical State University Journal. Physics and Mathematics. 12 (3) (2019) 63–77. DOI: 10.18721/JPM.12305

Введение

Современные жители городов длительное время находятся в условиях искусственного освещения. Свет – один из факторов окружающей среды, постоянно сопровождающий человека, поэтому задача оптимизации режимов светового воздействия на его функциональное состояние с учетом психофизиологических особенностей, утомления, индивидуальных биоритмов представляется весьма актуальной. Для ее решения наиболее привлекательны приборы на основе принципа смешения цветов в светодиодных источниках света. Такие устройства на основе многокристалльных RGB-излучателей (RGB – аббревиатура от красного, зеленого и синего цветов), получившие название «интеллектуального света» (smart light) [1], обеспечивают самые разные возможности. Во-первых, они позволяют точно регулировать параметры освещения с учетом различных внешних условий, таких как время года, суточная динамика и т. п.; во-вторых, благодаря этому создаются условия оптимизации рода и режима профессиональной деятельности работника, его индивидуальных психофизиологических параметров, а также его функционального состояния.

Прогресс в развитии технологий источников освещения позволяет выбирать режим освещения с физиологически оптимальными характеристиками и для специфических задач, связанных с применением на производстве, в жилых и общественных помещениях. Такой режим освещения может значительно влиять на психическое и физиологическое состояния человека и корректировать его в благоприятном направлении (например, устранять расстройства или облегчать действие экстремальных психологических нагрузок). Такое световое воздействие может быть не только статическим, но и динамическим, если изменять параметры освещенности и цветовой тем-

пературы в зависимости от требуемых условий (например, времени суток, состояния группы людей или одного человека). Освещение с контролируемыми параметрами имеет преимущества перед традиционным для ряда профессиональных сфер применения (например, хирургия или архитектура).

Таким образом, контролируемое светодиодное освещение выступает как важный инструмент новых медико-биологических технологий лечения и модулирования психофизиологического состояния человека [2]. Известно, например, что определенные параметры светового воздействия могут существенно перестраивать электрическую активность головного мозга [3].

Изменения в психофизиологическом статусе человека в ответ на световое воздействие можно оценивать разными методами, в том числе электроэнцефалографией. Установлено, что показатели электроэнцефалограммы (ЭЭГ) изменяются в ответ как на фотостимуляцию цветным монохроматическим светом [4], так и на световое воздействие с различной цветовой температурой T_c [5] и зависят от используемых спектральных характеристик освещения. Но при этом был также обнаружен эффект индивидуальных нейрофизиологических реакций на одно и то же световое воздействие [5].

Необходимые характеристики режима освещения, который обеспечивает на практике оптимальный физиологический эффект, являются предметом дискуссий. Результаты исследований зачастую противоречивы. Частично это объясняется многообразием режимов освещения и отсутствием единых стандартов. На практике достижение оптимального режима требует выбора источника света, позволяющего быстро и точно менять параметры освещения, а также методик диагностики психофизиологического состояния человека, позволяющих определять, какой режим освещения

необходим в каждом конкретном случае.

Имеющиеся на практике источники не обеспечивают требуемого качества цветопередачи и плавного изменения цветовой температуры.

Именно отсутствие подобной инструментальной базы объясняет тот факт, что в литературе практически нет сведений о системных и комплексных исследованиях особенностей воздействия динамически управляемого («интеллектуального») света с цветовой температурой T_c , варьируемой в диапазоне 1 700 – 10 000 К, на функциональное состояние головного мозга человека.

Цель настоящей работы – создание аппаратно-программного комплекса, позволяющего определять психофизиологическое состояние человека. За основу выбран управляемый интеллектуальный источник излучения с оптической системой, создающей равномерное по яркости и цвету поле свечения.

Выбор цветových компонент излучателя

Первая проблема, возникающая при разработке мультикристалльных полихромных излучателей, – это выбор области синтезируемых цветов по диаграмме цветности XYZ МКО 1931, а вторая, применительно к белому излучению, – выбор диапазона цветových температур и достижимых значений индексов цветопередачи. Более детальное рассмотрение включает оценку дискретности воспроизведения цветов (иными словами, количество синтезируемых цветов) и обеспечение стабильности поддержания цветových характеристик при изменении яркости и внешних условий. Сложность последней задачи связана с тем, что для полупроводниковых светодиодов (СД) характерна сильная (обычно нелинейная) зависимость мощности и спектров излучения от тока питания и, соответственно, температуры $p-n$ -перехода. Дополнительным негативным фактором при рассмотрении вопросов стабильности цветových характеристик является разная температурная зависимость спектров излучения и эффективности излучателей различного цвета.

Поддержание стабильности координат цветности в широком динамическом диапазоне есть одно из главных условий работы управляемого источника света. Если сравнивать три варианта полноцветных СД с четырьмя излучающими кристаллами, а

именно – RGBA, RGBW_c и RGBW_n, где R, G, B, A – красные, зеленые, голубые и желтые излучающие кристаллы, а W_c и W_n – кристаллы с люминофорным покрытием как источники белого света холодного и нейтрального, соответственно с $T_c \approx 6500$ и ≈ 4000 К, то можно установить [6], что величина общего индекса цветопередачи R_a для системы RGBA меняется незначительно при переходе белого света от холодного ($T_c \approx 6500$ К) к теплему ($T_c \approx 2700$ К) и в среднем равна 80.

Для системы RGBW_c и RGBW_n значение R_a составляет 90 для белого света в области холодных и нейтральных тонов белого света температур и падает до 58 в области теплых тонов.

Таким образом, система RGBA обеспечивает более равномерное распределение R_a во всем диапазоне температур белого света, по сравнению с системами RGBW.

В последнее время [7] появились светодиоды серии OSRAM OSTAR Medical LEACWUWVS2W, содержащие по четыре излучающих кристалла: янтарного (617 нм), зеленого (505 нм), теплого белого с координатами цветности $x = 0,460$, $y = 0,410$ (по XYZ МКО 1931) и холодного белого с $x = 0,305$, $y = 0,325$ (по той же диаграмме) цветов свечения. Экспериментальные исследования спектров излучения источников на светодиодах данной серии, при варьировании спектральных долей мощности различных СД, позволили синтезировать белый свет с набором значений коррелированной цветовой температуры (КТЦ) (2700, 4000, 5000, 6500, 10 000 К), общего и частных индексов цветопередачи $R_1 - R_{14}$.

Было показано, что СД этой серии позволяют достичь более высоких значений R_a (около 90), по сравнению с системой RGBA, а также больших значений специальных ($R_1 - R_{14}$) индексов цветопередачи для разных цветových температур и получить гладкий спектр (рис. 1). Таким образом, данная светодиодная система более всего отвечает поставленным требованиям для синтеза белого света.

Динамически управляемый полупроводниковый источник света

В основе экспериментальной установки лежит модифицированный вариант разработанного ранее [8] мощного управляемого RGB-осветителя на светодиодах серии OSRAM OSTAR Medical LEACWUWVS2W.

Общая структурная схема варианта светильника показана на рис. 2.

Динамически управляемый полупроводниковый источник света включает в себя источник питания (PS) и систему охлаждения (CS); излучающую матрицу (LED-M), состоящую из четырехцветных светодиодов 1–4; оптическую систему; электронику управления, в состав которой входят микроконтроллер управления (MC), драйверы токов накачки светодиодных источников (Ds), радиоканал обмена данными; управляющий компьютер (CC). В систему введены линии обратных связей по цветовой температуре и

соответствующее программное обеспечение управления драйверами питания.

Для достижения цели создания «интеллектуального» источника света как части аппаратно-программного комплекса, излучающий модуль изготовлен в виде отдельного блока, внешне подобного компьютерному монитору.

Корпус светильника выполнен методом литья из пластмассы, основная несущая деталь – плата алюминиевого радиатора с закрепленной на ней матрицей мощных многоцветных светодиодов, платами драйверов управления и вентиляторами принудитель-

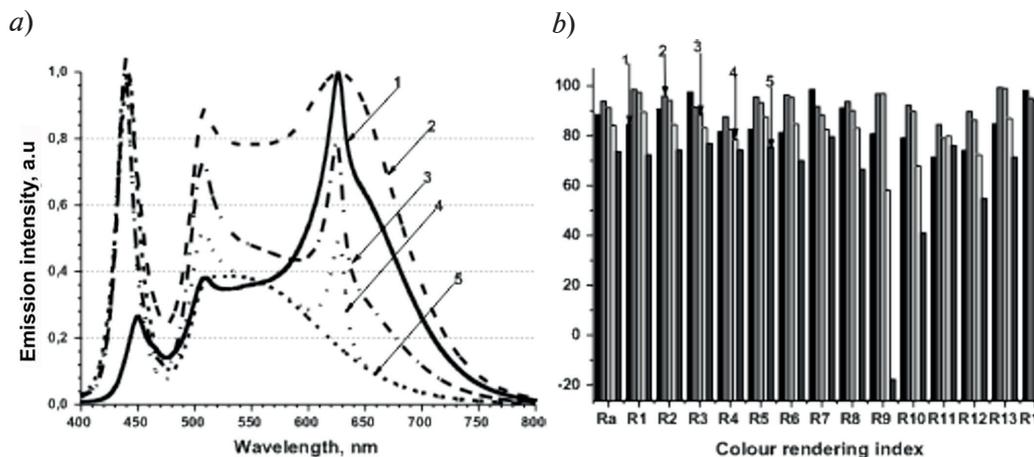


Рис. 1. Основные характеристики светодиодной системы серии OSRAM OSTAR Medical LEACWUWVS2W: *a* – спектры синтезированного белого света для различных T_c ; *b* – общий R_a и специальные ($R_1 - R_{14}$) индексы цветопередачи для различных значений T_c . Цветовые температуры T_c , К: 2700 (1), 4000 (2), 5000 (3), 6500 (4), 10 000 (5)

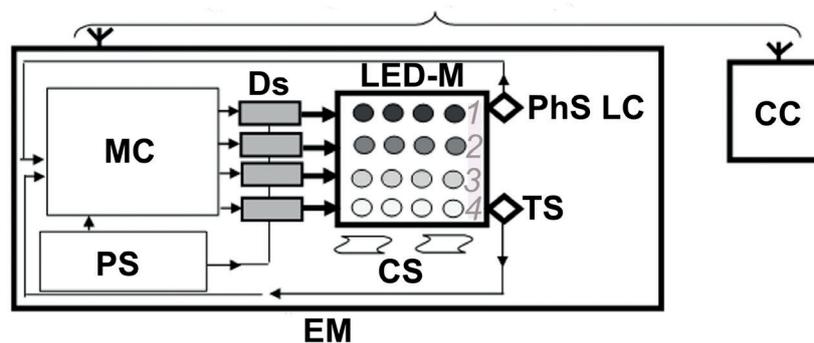


Рис. 2. Общая структурная схема динамически управляемого полупроводникового источника света (радиоканал управляется на частотах 2,4 ГГц, 868 МГц):

EM – излучающий модуль, PS – источник питания, MC – микроконтроллер, Ds – драйверы, EM – излучающий модуль, LED-M – светодиодная матрица, CS – система охлаждения, PhS LC – фотосенсор контроля света, TS – датчик температуры, CC – управляющий компьютер; светодиоды на длинах волн $\lambda = 617$ нм (1), 505 нм (2), теплый белый (3) холодный белый (4)

ного охлаждения.

Оптическая система

Для аппаратно-программного комплекса, предназначенного для определения психофизиологического состояния человека, разрабатывался мощный управляемый полупроводниковый источник света с большой площадью излучения. Оптическая система комплекса выполнена по оригинальной конструкции и необходима для создания равномерного по яркости и цвету поля свечения источника излучения [9].

Расчеты и оптимизация оптической схемы проводились в соответствии с теорией архитектуры оптимальных оптических систем. Аналогичный подход применялся также при использовании программы ZEMAX 13Release 2 SP1 Premium (64 бит, Radiant ZEMAX LLC, USA).

Отражатель представляет собой два прямоугольных короба, каждый со своим рассеивателем – экраном, одна из сторон которого имеет неоднородность, обеспечивающую заданный угол рассеяния (рис. 3, *a*). Разделение рассеивателя на первичный и вторичный позволяет достичь наилучшего соотношения между пропусканием системы и равномерностью освещенности экрана, а именно – два последовательно установленных рассеивателя обеспечивают высокую степень однородности по цвету и углу излучения. При этом один из рассеивателей создает, в первую очередь, однородность цветовых параметров, а установка следующего рассеивающего экрана обеспечивает в большей степени однородность по углу излучения.

Полихромные СД, расположенные в светильнике, создают свою совокупную карти-

ну по цвету и освещенности, в зависимости от расположения их цветовых компонент. При одинаковом пространственном расположении светодиодов совокупная картина, получаемая от множества светодиодов, даже при использовании рассеивателя, имеет большую степень неоднородности по цвету и полю свечения, что приводит к искажению цветовой гаммы подсветки. Для устранения этого недостатка, а также сведения к минимуму аберраций, получаемых в результате использования рассеивателя, был проведен скорректированный расчет для обеспечения большей однородности цветности излучения. Было рассчитано оптимальное расположение светодиодов с чередованием их ориентации на плате, что необходимо для компенсации неравномерности углового спектра излучения (рис. 3, *b*).

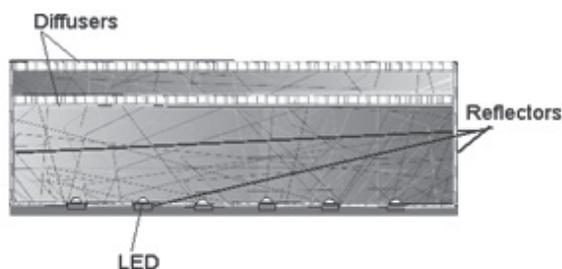
В результате такого расположения светодиодных кристаллов выходное излучение становится практически однородным по цвету, а энергетическая неоднородность составляет не более 20 %.

Результаты расчетов и экспериментов (рис. 4) показали, что при использовании такой оптической системы неоднородность излучения по цвету составляет не более 7 %, а энергетическая неоднородность – не более 20 %.

Особенности схемотехники радиоканала в динамически управляемом полупроводниковом источнике света

Динамически управляемый полупроводниковый источник света, предназначенный для аппаратно-программного комплекса, определяющего и корректирующего функциональное состояние человека, по принципу своего действия является универсальным. Поэтому его можно использовать

a)



b)

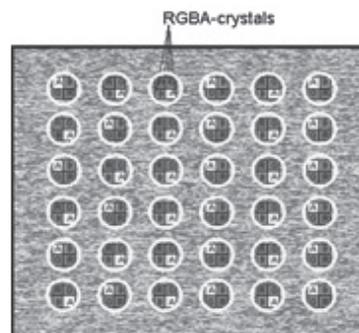


Рис. 3. Оптимизация оптической системы излучателя (схематическое изображение): *a* – вид системы с двумя рассеивателями и рефлектором, *b* – чередование расположения светодиодов на плате для создания однородности по цвету на выходе излучателя (результат расчета)

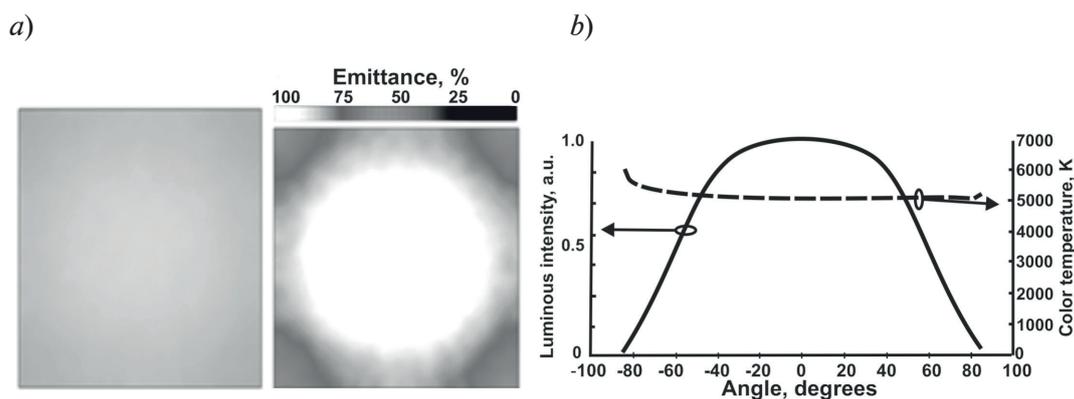


Рис. 4. Результаты расчета (а) и эксперимента (b) для характеристик распределения светового излучения: а – освещенности по цвету (слева) и светимости (справа) на выходе излучателя; б – силы света и цветовой температуры по углу

для освещения самых разных учебных и производственных помещений (например, операционных, аудиторий, спортивных залов, стадионов, супермаркетов и т. п.), имеющих, как правило, большие размеры в трех измерениях: длина, ширина, высота. В этом случае необходимо учитывать влияние земли, отражающей падающие на нее радиоволны в направлении облучаемого объекта, и связанные с этим интерференционные эффекты (Ground reflection (2-ray) model). Для численного расчета дальности действия радиоканала обычно используется модель [10], учитывающая отражения от земли при распространении радиоволн в свободном пространстве. В работе [11] эта модель дополнена с учетом специфики управления светодиодными источниками освещения.

Авторами настоящей статьи разработана и реализована в LabVIEW программа моделирования персональной радиолинии управления источниками освещения с учетом особенностей их практического применения и технических характеристик оборудования, подлежащего установке.

Выбор частотного диапазона и технологий системы управления имеет первостепенное значение, от которого зависят безопасность проведения операций (в хирургии), экологическая и психофизическая обстановка в операционной, энергоэффективность и обеспечение всех оптических и электрических характеристик светильника. При разработке динамически управляемого полупроводникового источника света были подробно рассмотрены основные технологии, используемые при построении устройств малого радиуса действия (SRD) – беспроводных персональных радиосетей:

ISM (Industrial, Scientific, Medical) с частотами 868 и 2400 МГц, Bluetooth (IEEE 802.15.1), Wi-Fi (IEEE 802.11), ZigBee (IEEE 802.15.7) [12 – 16].

Беспроводная персональная радиолиния связи представляет, помимо аппаратного воплощения, программное обеспечение, реализующее радиопrotocol. Для реализации стандартных стеков (Bluetooth, Wi-Fi, ZigBee) требуется расширенный объем флеш-памяти микроконтроллера для различных стеков протоколов от десятков килобайт для ZigBee до одного мегабайта для Wi-Fi (32 – 70 кбайт ZigBee 2,4 ГГц, 250 кбайт Bluetooth 2,4 ГГц, 1 Мбайт WLAN 2,4 ГГц). Кроме расширенного объема памяти, стандартные протоколы требуют повышенной мощности микроконтроллеров. Учитывая избыточность и сложность стандартных протоколов, разработчики беспроводных персональных радиосетей в субгигагерцовом диапазоне 868 МГц используют фирменные протоколы, так называемые проприетарные протоколы (неопубликованные и не доступные другим пользователям), которые могут оказаться менее затратными. Такой путь был использован при разработке обмена данными и взаимодействия между системами светодиодного светильника. Совместимость стандартных технологий с оборудованием других производителей здесь не имеет значения [17].

Из-за большого времени задержки при подключении хирургического светильника к сети Bluetooth (порядка 3 с), применение этой технологии в медицине оказывается проблематичным. Устройства Bluetooth в медицине применяются обычно для отладки и настройки медицинского оборудования в

дооперационный период. Данные моделирования и эксперимента показывают, что радиотехнология ISM 868 МГц имеет существенные преимущества по энергоэффективности (энергетический бюджет радиотехнологии LM (link margin)), дальности действия и экологическим факторам, по сравнению с радиотехнологией 2400 МГц по технологии ZigBee.

Энергетический бюджет радиотехнологии LM оценивается (в дБм) из выражения

$$LM = TX\ power - RX\ sensitivity + Ant\ gain - P_r,$$

где $TX\ power$ – мощность передатчика, $RX\ sensitivity$ – чувствительность приемника, $Ant\ gain$ – суммарное усиление передающей и приемной антенн, P_r – полная принимаемая энергия.

Для уверенной работы радиотехнологии необходимо значение LM не менее 10 – 20 дБм. Выделение полосы частот 863 – 870 МГц (в ЕС частота составляет 865,564 МГц) для медицинских приборов с уровнем излучательной мощности, не превышающей –10 дБм, и суммарным усилением приемной и передающей антенн, не превышающим –10 дБм, позволяет получить энергетический бюджет LM-трансивера +22 дБм, даже при уровне излучательной мощности –20 дБм. Фирмой Semtech разработано и выпускается семейство трансиверов SX123X [18]. При скорости приема 1,2 кбит/с трансивер имеет чувствительность приемника –124 дБм, регулируемый уровень мощности лежит в диапазоне от –20 до +20 дБм. Одним из основных практических применений этой серии является использование этих трансиверов в пультах дистанционного управления. Энергетический бюджет LM-трансивера SX128 (в дБм) составит:

$$LM = -20 + 124 - 10 - 71,9 = + 22,1,$$

что обеспечит успешную передачу пакетов по радиотехнологии на расстояние, определяемое для идеальной модели Фрииса.

В этом отношении ISM-диапазон 868,7 МГц имеет необходимое преимущество (с экологической точки зрения) перед ISM-диапазоном 2,4 ГГц, стандартная электронная мощность передатчика в котором обычно составляет от 0 до 3 дБм. Это обстоятельство было использовано при разработке сетевого варианта светодиодного светильника, поскольку работа обслужива-

ющего персонала и пациентов должна проходить при минимальном облучении радиочастотным сигналом.

Программное управление аппаратно-программным комплексом

Управление световыми параметрами динамически управляемого полупроводникового источника света, предназначенного для аппаратно-программного комплекса, осуществляется с удаленного компьютера, в котором используется разработанное программное обеспечение.

При этом модуль управления источником интеллектуального света работает в диапазоне частот 2,4 МГц и предоставляет следующие возможности:

автономную работу;

изменение и контроль режимов работы пользователем посредством персонального компьютера (ПК);

управление светильником с мобильных устройств с помощью операционной системы Android.

Для обеспечения связи между светильниками и ПК используется беспроводное соединение Bluetooth. Интерфейсы разработаны под Windows и Android.

В работе модуля предусмотрено создание библиотеки спектров с возможностью их коррекции по индивидуальной настройке. Однако основной режим работы – автоматический, по заданной программе освещения. Для этого в окне программирования задаются алгоритмы освещения в зависимости от задач светового воздействия. Эти программы также можно корректировать по временным и световым параметрам.

Влияние светового воздействия на психофизиологическое состояние человека

Аппаратно-программный комплекс, предназначенный для определения психофизиологического состояния человека, включает в себя мощный управляемый интеллектуальный источник света с большой площадью излучения, с учетом фактора прямого свечения на испытуемого, и электроэнцефалограф «Телепат-104Д» (г. Санкт-Петербург). Регистрация ЭЭГ проводилась монополярным способом с использованием индифферентных электродов, расположенных на мочках ушей волонтера. Запись производилась в следующих отведениях: Fp1, Fp2, F3, F4, F7, F8, C3, C4, P3, P4, T3, T4, T5, T6, O1, O2 (по си-

стеме «10-20»). Частота оцифровки сигналов составляла 250 Гц, полоса пропускания по высоким частотам – 35 Гц, постоянная времени – 0,3 с.

Целью исследования было изучение особенностей влияния динамически управляемого света от полупроводникового источника с КЦТ, варьируемой в диапазоне от 1700 до 10000 К, на функциональное состояние головного мозга человека. Световой поток источника света в зависимости от КЦТ составлял 1000 – 4000 лм.

Сначала электроэнцефалограмма у испытуемых регистрировалась в условиях затемненного помещения в течение двух минут, тем самым создавались условия исходного контрольного состояния. Затем испытуемые подвергались двухминутным световым воздействиям (последовательно, с двухминутными перерывами), включающим пять различных цветовых температур, программно предустановленных в светодиодном источнике света.

Полученные данные обрабатывались с использованием спектрального анализа, который осуществлялся с помощью программы «WinEEG Версия 1.3». Определялись значения спектральной мощности стандартных диапазонов ЭЭГ (дельта-, тета-, альфа-, и бета-ритмов), эпоха анализа при расчете спектров составляла 4 с. Усредненные спектральные показатели вычислялись для всех записанных фрагментов ЭЭГ в фоновых условиях и при световом воздействии.

Анализ результатов исследования показал наличие двух характерных типов изменений в ЭЭГ: в динамике альфа- и тета-ритмов при описанных световых воздействиях на волонтеров. В отдельных случаях наблюдались добавочные изменения спектральных характеристик дельта-ритма, но какого-либо значимого влияния используемого светового воздействия на мощность бета-ритма обнаружено не было. Таким образом, можно было считать, что повышение или понижение спектральной мощности альфа- и тета-ритмов ЭЭГ является наиболее информативным в оценке воздействия света.

При воздействии света с величиной КТЦ 10 000 К, изменения в значениях спектральной мощности альфа- и тета-ритмов ЭЭГ превышали 25 % от исходного уровня. Таким образом, отмечается существенное влияние этого режима освещения на функциональное состояние головного моз-

га человека; такое световое воздействие можно считать физиологически активным.

При воздействии света с величиной КТЦ 3800 К изменение спектральной мощности в тета-диапазоне не превышало 25%. Однако значения спектральной мощности альфа-ритма в правых средневисочной, задневисочной и затылочной областях мозга понизились более чем на 25%. Следовательно, световое воздействие с цветовой температурой 3800 К также можно признать физиологически активным. При этом выявлен эффект латерализации с более выраженным влиянием на правое полушарие.

При воздействии света с величиной КТЦ 1700 К в большинстве регистрируемых областей мозга (за исключением отведений Р4 и Т6) наблюдалось повышение спектральной мощности альфа- и тета-ритмов более чем на 25%. Таким образом, световое воздействие с КТЦ 1700 К также является физиологически активным.

При воздействии света с величиной КТЦ 7000 К, изменения в спектральной мощности альфа- и тета-ритмов не превышали 25% ни в одном из отведений; в таком случае данное световое воздействие можно охарактеризовать как физиологически нейтральное.

Исходя из полученных данных, можно сделать заключение, что при световом воздействии с цветовой температурой в диапазоне 1700 – 10 000 К показатели спектральной мощности тета- и альфа-ритмов электроэнцефалограммы отражают результирующий эффект такого воздействия и его величину. Пороговое значение в 25% относительно исходного уровня спектральной мощности можно использовать для разграничения физиологически нейтрального и физиологически активного уровней эффектов светового воздействия. В этом случае снижение спектральной мощности альфа- и тета-ритмов более чем на 25% от фоновых значений может быть связано с повышением уровня активации коры головного мозга (активирующий эффект светового воздействия), а увеличение спектральной мощности альфа-ритма более чем на 25% и тета-ритма на 25% может отражать понижение уровня активации коры головного мозга (релаксирующий эффект светового воздействия).

Соотношение же альфа- и бета-ритмов ЭЭГ можно рассматривать как отражение баланса возбуждения и торможения в ко-



ре человеческого мозга [19 – 21]; при этом альфа-ритм преимущественно связан с процессами торможения. Поэтому усиление его мощности в спектре ЭЭГ можно трактовать как релаксационный эффект вследствие усиления процессов торможения в центральной нервной системе, а ослабление мощности альфа-ритма в спектре ЭЭГ – как тонизирующий эффект в результате ослабления тормозных процессов [22 – 24].

Интерпретация роли сдвигов тета-ритма может быть более разнонаправленной, поскольку отмечено его участие в таких различных явлениях, как утомление, эмоциональная обработка, процессы внимания, памяти, обработка ошибок [25, 26]. Однако в данном случае существенной представляется однонаправленность сдвигов альфа- и тета-ритмов: изменения в мощности альфа-ритма не сопровождаются компенсаторными изменениями медленных ритмов. Подобные сочетанные сдвиги альфа- и тета-ритмов могут свидетельствовать в пользу изменения уровня бодрствования, тонизирующим или релаксационным эффектами в коре головного мозга человека [27, 28].

Заключение

Впервые разработан аппаратно-программный комплекс для определения психофизиологического состояния человека, включающий мощный управляемый интеллектуальный источник света, оптическую систему для создания равномерного по яркости и цвету поля свечения источника излучения. Использование этого комплекса как инструмента воздействия белого света с варьируемой цветовой температурой показало, что белый свет с наиболее близкими к дневному свету значениями цветовой температуры (3800, 4800 и 7000 К) не оказывает существенного влияния на спектральные характеристики основных ритмов ЭЭГ. Такое световое воздействие можно охарактеризовать как физиологически нейтральное, а светодиодные источники освещения с подобными значениями цветовых температур можно рекомендовать для продолжительного искусственного освещения бытовых и общественных помещений общего назначения, когда не предъявляются специальные требования к параметрам освещения. Напротив, белый свет с цветовыми температурами 1700 и 10 000 К является физиологически активным, его использование при-

водит к существенному изменению тета- и альфа-ритмов электроэнцефалограммы. В наибольшей степени это выражено для света с цветовой температурой 10 000 К.

Обобщая эти результаты, следует отметить, что физиологически нейтральным является белый свет, насыщенный излучением среднего участка спектра, тогда как более теплые и более холодные тона освещения, насыщенные излучением крайних участков видимого спектра, являются физиологически активными. Поскольку такое освещение влияет на параметры ЭЭГ, его можно использовать для коррекции психологических и функциональных физиологических состояний человека.

Выделены два основных типа светового воздействия: активирующий и релаксирующий, при этом характер эффекта индивидуален и может различаться для разных людей даже при использовании идентичного режима освещения. Это определяет необходимость индивидуального подбора режимов освещения для направленного изменения функционального состояния человека, с учетом характера его реакции и исходного функционального состояния. Сам тип реагирования, по-видимому, можно определить по характеру ЭЭГ-ответа на стандартизированное светодиодное освещение с определенной цветовой температурой, а величина этих изменений во время регистрации электроэнцефалограммы может служить маркером изменений функционального состояния человека.

На основании разработанных методик появляется возможность индивидуального подбора режима освещения для направленного изменения функционального состояния человека, что подтверждается испытаниями в составе АПК в ООО «Центр авиакосмической медицины» (г. Москва) [29] и в ФГУ «Государственный научно-исследовательский испытательный институт военной медицины Министерства обороны РФ» (г. Москва) [30].

Совместно с медицинскими исследовательскими учреждениями, а именно – Центром авиакосмической медицины (г. Москва), Государственным медицинским университетом им. И.П. Павлова (г. Санкт-Петербург), Национальным медицинским исследовательским центром психиатрии и неврологии им. В.М. Бехтерева (г. Санкт-Петербург), – комплекс использовался в качестве инструменталь-

ной базы при проведении медико-биологических исследований [31 – 33].

Измерения световых параметров выполнены в центре коллективного пользования (ЦКП) «Элементная база радиофотоники и нанoeлектроники: технология, диагностика, метрология».

Исследования выполнены при частичной поддержке Соглашения о субсидии с Минобрнауки России (№ соглашения ЭБ 075-02-2018-929, внутренний номер соглашения 14.604.21.0187, уникальный идентификатор проекта RFMEFI60417X0187).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Schubert, E.F., Kim J.K. Solid-state light sources getting smart // *Science*. 2005. Vol. 308. No. 5726. Pp. 1274–1278.
2. Katsuura T., Jin X., Baba Y., Shimomura Y., Iwanaga K. Effects of color temperature of illumination on physiological functions // *J. Physiol. Anthropol. Appl. Human Sci.* 2005. Vol. 24. No. 4. Pp. 321–325.
3. Зенков Л.Р. Клиническая электроэнцефалография (с элементами эпилептологии). М.: Медпресс-информ, 2004. 368 с.
4. Гуменюк В., Батова Н., Мельникова Т., Глазачёв О., Голубева Н., Климина Н., Хюбнер П. Системный анализ корректирующего действия цветомузыки // *Вестник РАМН*. 1998. № 2. С. 18–25.
5. Корсакова Е.А., Слезин В.Б., Шульц Е.В., Аладов А.В., Закгейм А.Л., Мизеров М.Н. Воздействие белого света с варьируемой цветовой температурой на электроэнцефалограмму человека // *Вестник новых медицинских технологий*. 2012. Т. 19. № 4. С. 30–33.
6. Аладов А.В., Бирючиский С.Б., Дубина М.В., Закгейм А.Л., Мизеров М.Н. Цветодинамически управляемый операционный светильник с полноцветным светодиодом // *Светотехника*. 2012. № 2. С. 13–18.
7. https://html.alldatasheet.com/html-pdf/1023757/O_S_R_A_M/_L_E_A_C_W_U_W_V_S_2_W/_1_7_8/_1/_L_E_A_C_W_U_W_V_S_2_W.html
8. Аладов А.В., Васильева Е.Д., Закгейм А.Л., Иткинсон Г.В., Лундин В.В., Мизеров М.Н., Устинов В.М., Цацульников А.Ф. О современных мощных светодиодах и их светотехническом применении // *Светотехника*. 2010. № 3. С. 8–16.
9. Аладов А.В., Бирючинский С.Б., Закгейм А.Л., Мизеров М.Н. Осветительное устройство на основе многокристалльных полихромных светодиодов. Пат. № 99589, Российская Федерация. МПК F21S 2/00.; заявитель и патентообладатель НТЦ микроэлектроники РАН. № 2010123719/07, заявл. 03.06.2010; опубл. 20.11.2010. Бюлл. № 32. 7 с., с илл.
10. Kvaksrud T.I. Range measurements in an open field environment // *Design Note DN018*. Texas Instruments, SWRA 169A, 1–14. Режим доступа: <https://www.ti.com/lit/an/swra169a/swra169a.pdf>.
11. Aladov A.V., Valyukhov V.P., Kuptsov V.D., Demin S.V., Valyukhova A.V. Special features of radio control link for energy efficient LED light sources // *St. Petersburg Polytechnical State University Journal. Physics and Mathematics*. 2017. Vol. 10. No. 2. Pp. 16–27.
12. Aladov A.V., Valyukhov V.P., Kuptsov V.D., Zakgeim A.L., Mizerov M.N., Demin S.V., Valyukhova A.V. Wireless networks of energy efficient dynamically controlled LED sources // *St. Petersburg Polytechnical State University Journal. Physics and Mathematics*. 2017. Vol. 10. No. 2. Pp. 28–37.
13. Аладов А.В., Валюхов В.П., Закгейм А.Л., Черняков А.Е., Цацульников А.Ф. Динамически управляемые светодиодные источники света для новых технологий освещения // *Научно-технические ведомости СПбПУ. Физико-математические науки*. 2014. № 4 (206). С. 38–47.
14. Аладов А.В., Валюхов В.П., Демин С.В., Закгейм А.Л., Черняков А.Е., Цацульников А.Ф. Беспроводные сети управляемых энергоэффективных светодиодных источников освещения // *Научно-технические ведомости СПбПУ. Физико-математические науки*. 2015. № 1 (213). С. 50–60.
15. Аладов А.В., Аладов В.Н., Валюхов В.П., Закгейм А.Л., Цацульников А.Ф. Светоэкология и новые технологии освещения // *Архитектура и строительные науки*. 2014. Вып. 1, 2 (18, 19). С. 2–5.
16. Аладов А.В., Бирючинский С.Б., Валюхов В.П., Закгейм А.Л., Тальнишних Н.А., Черняков А.Е. Динамически управляемая система освещения светодиодами с широким диапазоном цветовых температур (2800 – 10 000 К) и высоким качеством цветопередачи ($R_A > 90$) // *Светотехника*. 2016. № 6. С. 19–25.

17. **Пушкарев О.** Использование диапазонов 433 и 868 МГц в системах промышленной телеметрии // *Электронные компоненты*. 2012. № 2. С. 42–48.
18. SX1238 – Fully integrated transceiver with +27 dBm Tx power. Datasheet, rev.2 2014 y. Режим доступа: <http://www.semtech.com/wireless-rf/rf-transceivers/sx1238> //
19. **Павлова Л.П.** Доминанты деятельного мозга человека. Системный психофизиологический подход к анализу ЭЭГ. СПб.: Информ-навигатор, 2017. 432 с.
20. **Abdou A.M., Higashiguchi S., Horie K., Kim M., Hatta H., Yokogoshi H.** Relaxation and immunity enhancement effects of γ -aminobutyric acid (GABA) administration in humans // *Biofactors*. 2006. Vol. 26. No. 3. Pp. 201–208.
21. **Klimesch W.** Alpha-band oscillations, attention, and controlled access to stored information // *Trends in Cognitive Sciences*. 2012. Vol. 16. No. 12. Pp. 606–617.
22. **Кирой В.Н., Ермаков П.Н.** Электроэнцефалограмма и функциональные состояния человека. Ростов-на-Дону: Изд-во Ростовского ун-та, 1998. 264 с.
23. **Базанова О.М.** Современная интерпретация альфа-активности электроэнцефалограммы // *Успехи физиологических наук*. 2009. Т. 40. № 3. С. 32–53.
24. **Bazanova O.M., Vernon D.** Interpreting EEG alpha activity // *Neuroscience & Biobehavioral Reviews*. 2014. Vol. 44. No. 1. Pp. 94–110.
25. **Aftanas L.I., Golocheikine S.A.** Human anterior and frontal midline theta and lower alpha reflect emotionally positive state and internalized attention: high-resolution EEG investigation of meditation // *Neuroscience Letters*. 2001. Vol. 310. No. 1. Pp. 57–60.
26. **van Driel J., Ridderinkhof K.R., Cohen M.X.** Not all errors are alike: theta and alpha EEG dynamics relate to differences in error-processing dynamics // *Journal of Neuroscience*. 2012. Vol. 32. No. 47. Pp. 16795–16806.
27. **Cajochen C., Brunner D.P., Krauchi K., Graw P., Wirz-Justice A.** Power density in theta/alpha frequencies of the waking EEG progressively increases during sustained wakefulness // *Sleep*. 1995. Vol. 18. No. 10. Pp. 890–894.
28. **Lagopoulos J., Xu J., Rasmussen I., Vik A., Malhi G.S., Eliassen C.F., Arntsen I.E., Sæther J.G., Hollup S., Holen A., Davanger S., Ellingsen O.** Increased theta and alpha EEG activity during nondirective meditation // *The Journal of Alternative and Complementary Medicine*. 2009. Vol. 15. No. 11. Pp. 1187–1192.
29. **Аладов А.В., Закгейм А.Л., Клишин Г.Ю., Костромин В.Н., Мизеров М.Н., Потапов М.Г., Стелинговский К.В.** Разработка аппаратно-программного комплекса для определения и коррекции психофизиологического и функционального состояния человека-оператора методом аудиовизуального воздействия с применением динамически управляемого полупроводникового источника света // Итоговая конференция по результатам выполнения мероприятий за 2010 год в рамках приоритетного направления «Живые системы» ФЦП «Исследования и разработки по приоритетным направлениям развития научно-технологического комплекса России на 2007–2012 годы». Сб. тез. 25–27 ноября 2010 г., Москва. С. 141.
30. **Аладов А.В., Корсакова Е.А., Слезин В.Б., Шульц Е.В., Закгейм А.Л., Мизеров М.Н.** Динамика альфа-ритма ЭЭГ человека при воздействии белого света с различной цветовой температурой // *Научные труды III съезда физиологов СНГ*. Под ред. А.И. Григорьева и др. г. Ялта, Украина. 1–6 октября 2011. Москва, Ялта: Медицина – Здоровье, 2011. С. 105.
31. **Слезин В.Б., Корсакова Е.А., Мизеров М.Н., Закгейм А.Л., Аладов А.В., Мошко М.В.** Способ оказания активирующего воздействия на функциональное состояние человека световым излучением от светодиодного источника. Пат. № 2517367. Российская Федерация. МПК А61N 5/06, А61В 5/0476; заявитель и патентообладатель – авторы патента. № 2012133348/14, заявл. 27.07.2012; опубл. 27.05.2014. Бюлл. № 15.
32. **Слезин В.Б., Корсакова Е.А., Мизеров М.Н., Закгейм А.Л., Аладов А.В., Мошко М.В.** Способ оценки воздействия на функциональное состояние головного мозга человека светового излучения. Пат. № 2515150. Российская Федерация. МПК А61В 5/0476, А61N 5/06; заявитель и патентообладатель – авторы патента. № 2012133343/14, заявл. 27.07.2012; опубл. 10.05.2014. Бюлл. № 13.
33. **Слезин В.Б., Корсакова Е.А., Мизеров М.Н., Закгейм А.Л., Аладов А.В., Мошко М.В.** Способ оказания релаксирующего воздействия на функциональное состояние человека световым излучением от светодиодного источника. Пат. № 2514727. Российская Федерация. МПК А61N 5/06, А61В 5/0476; заявитель и патентообладатель – авторы патента. № 20121333435/14, заявл. 27.07.2012; опубл. 10.02.2014 Бюлл. № 4.

Статья поступила в редакцию 22.05.2019, принята к публикации 08.07.2019.

СВЕДЕНИЯ ОБ АВТОРАХ

АЛАДОВ Андрей Вальменович – старший научный сотрудник Научно-технологического центра микроэлектроники и субмикронных гетероструктур Российской академии наук, Санкт-Петербург, Российская Федерация.

194021, Российская Федерация, г. Санкт-Петербург, Политехническая ул., 26.
aaladov@mail.ioffe.ru

БЕРЛОВ Дмитрий Николаевич – старший преподаватель кафедры анатомии и физиологии человека и животных Российского государственного педагогического университета им. А.И. Герцена, Санкт-Петербург, Российская Федерация.

191186, Российская Федерация, г. Санкт-Петербург, наб. реки Мойки, 48
dberlov@yandex.ru

ЗАКГЕЙМ Александр Львович – кандидат технических наук, заведующий сектором Научно-технологического центра микроэлектроники и субмикронных гетероструктур Российской академии наук, Санкт-Петербург, Российская Федерация.

194021, Российская Федерация, г. Санкт-Петербург, Политехническая ул., 26.
zakgeim@mail.ioffe.ru

ЧЕРНЯКОВ Антон Евгеньевич – кандидат физико-математических наук, старший научный сотрудник Научно-технологического центра микроэлектроники и субмикронных гетероструктур Российской академии наук, Санкт-Петербург, Российская Федерация.

194021, Российская Федерация, г. Санкт-Петербург, Политехническая ул., 26.
chernyakov.anton@yandex.ru

ФОТИАДИ Александр Эпаминондович – доктор физико-математических наук, профессор кафедры физической электроники Санкт-Петербургского политехнического университета Петра Великого, Санкт-Петербург, Российская Федерация.

195251, Российская Федерация, г. Санкт-Петербург, Политехническая ул., 29
fotiadi@rphf.spbstu.ru

ВАЛЮХОВ Владимир Петрович – доктор технических наук, профессор Высшей школы прикладной физики и космических технологий Санкт-Петербургского политехнического университета Петра Великого, Санкт-Петербург, Российская Федерация.

195251, Российская Федерация, г. Санкт-Петербург, Политехническая ул., 29
Valyukhov@yandex.ru

REFERENCES

1. Schubert, E.F., Kim J.K., Solid-state light sources getting smart, Science. 308 (572) (2005) 1274–1278.
2. Katsuura T., Jin X., Baba Y., et al., Effects of color temperature of illumination on physiological functions, J. Physiol. Anthropol. Appl. Human Sci. 24 (4) (2005) 321–325.
3. Zenkov L.R., Klinicheskaya elektroentsefalografiya (s elementami epileptologii) [Kinetic electroencephalography (with epileptological elements)], Medpress-Inform, Moscow, 2004.
4. Gumenyuk V., Batova N., Melnikova T., et al., Sistemnyy analiz korriruyushchego deystviya tsvetomuzyki [System analysis of corrective function of color music], Annals of the Russian Academy of Medical Sciences. (2) (1998) 18–25.
5. Korsakova E.A., Slezin V.B., Shults E.V., et al., The effects of white light with variable color temperature on human encephalogram, Vestnik Novykh Meditsinskikh Tekhnologiy. 19(4) (2012) 30–33.
6. Aladov A.V., Biryuchiskiy S.B., Dubina M.V., et al., Tsvetodinamicheski upravlyayemyy operatsionnyy svetilnik s polnotsvetnym svetiododom [Color-dynamically controlled operating lamp with a full-color LED], Svetotekhnika. (2) (2012) 13–18.

7. <https://html.alldatasheet.com/html-pdf/1023757/OSRAM/LEACWUWVS2W/178/1/LEACWUWVS2W.html>.
8. **Aladov A.V., Vasilyeva E.D., Zakgeym A.L., et al.**, O sovremennykh moshchnykh svetodiodakh i ikh svetotekhnicheskom primenenii [On modern powerful LEDs and their lighting engineering application], *Light and Engineering*. (3) (2010) 8–16.
9. **Aladov A.V., Biryuchinskiy S.B., Zakgeym A.L., Mizerov M.N.**, Osvetitelnoye ustroystvo na osnove mnogokristalnykh polikhromnykh svetodiodov [A lighting unit based on multichip polychromatic LEDs], Pat. No.99589, Russian Federation, MPK F21S 2/00.; Submicron Heterostructures for Microelectronics Research and Engineering Center of the RAS is a declarant and patentee. No.2010123719/07, declar. 03.06.2010; publ. 20.11.2010, Bull. No. 32.
10. **Kvaksrud T.I.**, Range measurements in an open field environment, Design Note DN018, Texas Instruments, SWRA 169A, 1–14. <https://www.ti.com/lit/an/swra169a/swra169a.pdf>.
11. **Aladov A.V., Valyukhov V.P., Kuptsov V.D., et al.**, Special features of radio control link for energy efficient LED light, *St. Petersburg Polytechnical State University Journal. Physics and Mathematics*. 10 (2) (2017) 16–27.
12. **Aladov A.V., Valyukhov V.P., Kuptsov V.D., et al.**, Wireless networks of energy efficient dynamically controlled LED sources, *St. Petersburg Polytechnical State University Journal. Physics and Mathematics*. 10 (2) (2017) 28–36.
13. **Aladov A.V., Valyukhov V.P., Zakgeym A.L., et al.**, Type LED dynamically controlled light sources for novel lighting technology, *St. Petersburg Polytechnical State University Journal. Physics and Mathematics*. (4 (206)) (2014) 38–47.
14. **Aladov A.V., Valyukhov V.P., Demin S.V., et al.**, The wireless network of controlled energy effective LED lighting sources, *St. Petersburg Polytechnical State University Journal. Physics and Mathematics*. (1 (213)) (2015) 50–60.
15. **Aladov A.V., Aladov V.N., Valyukhov V.P., et al.**, Svetoekologiya i novyye tekhnologii osveshcheniya [Light ergonomics and new lighting technologies], *Arkhitektura i Stroitelnyye Nauki*. (1, 2 (18, 19)) (2014). 2–5.
16. **Aladov A.V., Biryuchinskiy S.B., Valyukhov V.P., et al.**, Dinamicheski upravlyayemaya sistema osveshcheniya svetodiodami s shirokim diapazonom tsvetovykh temperatur (2800 – 10 000 K) i vysokim kachestvom tsvetoperedachi ($R_A > 90$) [A dynamically-controlled lighting system with (2800 – 10 000 K) LEDs providing a high-quality color transfer], *Light and Engineering*. (6) (2016) 19–25.
17. **Pushkarev O.**, Ispolzovaniye diapazonov 433 i 868 MGts v sistemakh promyshlennoy teletmetrii [The use of 433 and 868 MHz ranges in the industrial telemetric systems], *Electronic Components*. (2) (2012) 42–48.
18. SX1238 – Fully integrated transceiver with +27 dBm Tx power. Datasheet, rev.2 2014 y. <http://www.semtech.com/wireless-rf/rf-transceivers/sx1238//>.
19. **Pavlova L.P.**, Dominanty deyatelnogo mozga cheloveka. Sistemnyy psikhofiziologicheskiy podkhod k analizu EEG [Dominants of an active human cerebrum. Systematic psychophysiological approach to an analysis of EEG], *Inform-Navigator*, St. Petersburg, 2017.
20. **Abdou A.M., Higashiguchi S., Horie K., et al.**, Relaxation and immunity enhancement effects of γ -aminobutyric acid (GABA) administration in humans, *Biofactors*. 26 (3) (2006) 201–208.
21. **Klimesch W.**, Alpha-band oscillations, attention, and controlled access to stored information, *Trends in Cognitive Sciences*. 16 (12) (2012) 606–617.
22. **Kiroy V.N., Ermakov P.N.**, Elektroentsefalogramma i funktsionalnyye sostoyaniya cheloveka [Electroencephalogram and a human functional status], Rostov Institute Publishing, Rostov-on-Don, 1998.
23. **Bazanova O.M.**, Sovremennaya interpretatsiya alfa-aktivnosti elektroentsefalogrammy [Modern interpretation of alpha-activity from electroencephalogram], *Uspekhi Fiziologicheskikh Nauk*. 40 (3) (2009) 32–53.
24. **Bazanova O.M., Vernon D.**, Interpreting EEG alpha activity, *Neuroscience & Biobehavioral Reviews*. 44 (1) (2014) 94–110.
25. **Aftanas L.I., Golocheikine S.A.**, Human anterior and frontal midline theta and lower alpha reflect emotionally positive state and internalized attention: high-resolution EEG investigation of meditation, *Neuroscience Letters*. 310 (1) (2001) 57–60.
26. **van Driel J., Ridderinkhof K.R., Cohen M.X.**, Not all errors are alike: theta and alpha EEG dynamics relate to differences in error-processing dynamics, *Journal of Neuroscience*. 32 (47) (2012) 16795–16806.
27. **Cajochen C., Brunner D.P., Krauchi K., et al.**, Power density in theta/alpha frequencies of the waking EEG progressively increases during sustained wakefulness, *Sleep*. 18 (10) (1995) 890–894.
28. **Lagopoulos J., Xu J., Rasmussen I., et al.**, Increased theta and alpha EEG activity

during nondirective meditation, *The Journal of Alternative and Complementary Medicine*. 15 (11) (2009) 1187–1192.

29. **Aladov A.V., Zakgeym A.L., Klishin G.Yu., et al.**, Razrabotka apparatno-programmnogo kompleksa dlya opredeleniya i korrektsii psikhofiziologicheskogo i funktsionalnogo sostoyaniya cheloveka-operatora metodom audiovizualnogo vozdeystviya s primeneniym dinamicheskii upravlyayemogo poluprovodnikovogo istochnika sveta [Hardware-software design for characterization and correction of a person-operator's functional status using technique of audiovisual impact with dynamically-controlled semiconductor light source], Summarizing conference devoted to the progress in implementation of the measures for the year 2010 in the context of the preferred direction 'Living Systems' for Federal Target Program "Research and Design in the Preferred Directions of Development of the Science and Technology Complex of Russia for 2007–2012", Collection of abstracts, November 25–27, 2010, Moscow, P. 141.

30. **Aladov A.V., Korsakova E.A., Slezin V.B., et al.**, Dinamika alfa-ritma EEG cheloveka pri vozdeystvii belogo sveta s razlichnoy tsvetovoy temperaturoy [Alpha-rhythm dynamics of a human EEG on exposure by white light with various color temperature], *Scientific Transactions of the 3D Congress for Physiologists of CIS*, Ed. by A.I. Grigoryeva et al., Yalta, Ukraine, October 1–6, 2011, "Meditsina – Zdorovye", Moscow, Yalta,

2011, P. 105.

31. **Slezin V.B., Korsakova E.A., Mizerov M.N., et al.**, Sposob okazaniya aktiviruyushchego vozdeystviya na funktsionalnoye sostoyaniye cheloveka svetovym izlucheniym ot svetodiodnogo istochnika [Method of activation influence of LED light emission on a human functional status], Pat. No. 2517367, Russian Federation, MPK A61N 5/06, A61B 5/0476; The patent authors are declarants and patentees, No. 2012133348/14, declar. 27.07.2012; publ. 27.05.2014 Bull. No. 15.

32. **Slezin V.B., Korsakova E.A., Mizerov M.N., et al.**, Sposob otsenki vozdeystviya na funktsionalnoye sostoyaniye golovnogo mozga cheloveka svetovogo izlucheniya [The light impact on the functional status of a human brain: an assessment method], Pat. No. 2515150, Russian Federation, MPK A61B 5/0476, The patent authors are declarants and patentees, No. 2012133343/14, declar. 27.07.2012; publ. 10.05.2014, Bull. No. 13.

33. **Slezin V.B., Korsakova E.A., Mizerov M.N., et al.**, Sposob okazaniya relaksiruyushchego vozdeystviya na funktsionalnoye sostoyaniye cheloveka svetovym izlucheniym ot svetodiodnogo istochnika [Method of relaxation influence of LED light emission on a human functional status], Pat. № 2514727, Russian Federation, MPK A61N 5/06, A61B 5/0476; The patent authors are declarants and patentees, No. 20121333435/14, declar. 27.07.2012; publ. 10.02.2014, Bull. No. 4.

Received 22.05.2019, accepted 08.07.2019.

THE AUTHORS

ALADOV Andrey V.

Submicron Heterostructures for Microelectronics, Research & Engineering Center, RAS
26 Politechnicheskaya St., St. Petersburg, 195251, Russian Federation
aaladov@mail.ioffe.ru

BERLOV Dmitriy N.

The Herzen State Pedagogical University of Russia
48 Moika Emb., St. Petersburg, 191186, Russian Federation

ZAKGEIM Alexader L.

Submicron Heterostructures for Microelectronics Research and Engineering Center of the RAS
26 Politekhnicheskaya St., St. Petersburg, 194021, Russian Federation
zakgeim@mail.ioffe.ru

CHERNYAKOV Anton E.

Submicron Heterostructures for Microelectronics Research and Engineering Center of the RAS
26 Politekhnicheskaya St., St. Petersburg, 194021, Russian Federation
chernyakov.anton@yandex.ru

FOTIADI Alexander E.

Peter the Great St. Petersburg Polytechnic University

29 Politechnicheskaya St., St. Petersburg, 195251, Russian Federation

fotiadi@rphf.spbstu.ru

VALYUKHOV Vladimir P.

Peter the Great St. Petersburg Polytechnic University

29 Politechnicheskaya St., St. Petersburg, 195251, Russian Federation

Valyukhov@yandex.ru

DOI: 10.18721/JPM.12306

УДК 574.24, 628.938

ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНАЯ УСТАНОВКА ДЛЯ ИССЛЕДОВАНИЯ ВЛИЯНИЯ СИНЕГО СВЕТА НА ФУНКЦИЮ ВОСПРИЯТИЯ ВРЕМЕНИ У ЛИЦ С РАЗНЫМ ТИПОМ ВЕГЕТАТИВНОЙ РЕГУЛЯЦИИ

**А.В. Аладов¹, Д.Н. Берлов², В.П. Валюхов³,
О.Л. Власова³, А.Л. Закгейм¹, А.А. Панихина², А.Э. Фотиади³**

¹ Научно-технологический центр микроэлектроники и субмикронных гетероструктур РАН, Санкт-Петербург, Российская Федерация;

² Российский государственный педагогический университет им. А. И. Герцена, Санкт-Петербург, Российская Федерация;

³ Санкт-Петербургский политехнический университет Петра Великого, Санкт-Петербург, Российская Федерация

С помощью экспериментальной установки на основе светодиодной, динамически управляемой системы освещения исследовалось влияние светового воздействия монохроматическим синим светом (длина волны – около 460 нм) на восприятие человеком коротких интервалов времени свечения, в зависимости от преобладания в его организме активности симпатического или парасимпатического отделов автономной нервной системы. Испытуемые отмеряли длительность минуты до и после светового воздействия белым (контрольная группа) или монохроматическим синим светом. Влияние синего света проявилось в преобладании возбудимости симпатического отдела автономной нервной системы. Выявлена тенденция к укорочению длительности субъективной минуты после светового воздействия. Аналогичное воздействие белым светом не привело к изменениям соответствующих показателей. Результаты исследования позволили предположить, что индивидуальный эффект влияния синего света на функцию восприятия времени может быть опосредован через регуляцию сердечного ритма.

Ключевые слова: световое воздействие, восприятие времени, светодиод, синий свет, динамически управляемый источник

Ссылка при цитировании: Аладов А.В., Берлов Д.Н., Валюхов В.П., Власова О.Л., Закгейм А.Л., Панихина А.А., Фотиади А.Э. Экспериментальная установка для исследования влияния синего света на функцию восприятия времени у лиц с разным типом вегетативной регуляции // Научно-технические ведомости СПбГПУ. Физико-математические науки. 2019. Т. 12. № 3. С. 78–91. DOI: 10.18721/JPM.12306

EXPERIMENTAL SETUP FOR STUDYING THE BLUE LIGHT EFFECT ON SENSE OF TIME AMONG THE PERSONS WITH DIFFERENT TYPE OF VEGETATIVE REGULATION

**A.V. Aladov¹, D.N. Berlov², V.P. Valyukhov³,
O.L. Vlasova³, A.L. Zakgeim¹, A.A. Panihina², A.E. Fotiadi³**

¹ Submicron Heterostructures for Microelectronics, Research & Engineering Center, RAS, St. Petersburg, Russian Federation;

² The Herzen State Pedagogical University of Russia, St. Petersburg, Russian Federation;

³ Peter the Great St. Petersburg Polytechnic University, St. Petersburg, Russian Federation;

The effect of blue illumination (wavelength is about 460 nm) on human perception of short-time intervals of light, depending on a person's predominance of activity of the sympathetic or

parasympathetic parts of the autonomic nervous system has been studied using an experimental setup based on the LED dynamically controlled lighting system. The persons measured the duration of a minute before and after exposure to white (a control group) or monochromatic blue light. The effect of blue light was manifested in the predominance of excitability of the sympathetic part of the autonomic nervous system. The same persons showed a tendency to shorten the duration of the subjective minute after the light exposure. A similar effect of white light did not lead to significant changes in the same characteristics. The results of the study suggest that the individual effect of blue light on the function of time perception can be mediated through the regulation of the heart rate.

Keywords: light exposure, sense of time, LED, blue light, dynamically controlled light source

Citation: Aladov A.V., Berlov D.N., Valyukhov V.P., Vlasova O.L., Zakgeim A.L., Panihina A.A., Fotiadi A.E., Experimental setup for studying the blue light effect on sense of time among persons with different type of vegetative regulation, St. Petersburg Polytechnical State University Journal. Physics and Mathematics. 12 (3) (2019) 78–91. DOI: 10.18721/JPM.12306

Введение

Свет — это один из экологических факторов, воздействующих на организм человека. И естественный, и искусственный свет важен не только для зрительного восприятия, но и для состояния организма. Влияние света включает как кратковременное воздействие, которое выражается в быстром изменении функциональных показателей, так и длительное, влияющее на биологические ритмы (они связаны, прежде всего, с естественными колебаниями уровня освещенности — циркадианными и циркануальными). В последние годы выяснено, что, во многом, механизм длительного воздействия связан с активацией ретиногипоталамического тракта, который начинается от светочувствительных ганглиозных клеток сетчатки глаза, содержащих зрительный пигмент меланопсин [1 – 3]. Информация об уровне освещения передается в супрахиазматические ядра гипоталамуса, где корректирует ход циркадианных ритмов [4], а также через дальнейшие морфологические пути влияет на уровень секреции мелатонина в эпифизе и уровень активации коры головного мозга [5, 6]. Этот механизм объясняет влияние параметров освещения на уровень бодрствования и активности [7, 8], когнитивные функции [5, 9], эмоции [10] и многое другое. Отмечается, что разработка и использование современных источников освещения должны учитывать эти закономерности [11].

Можно предположить, что в зависимости от параметров освещения может меняться и функция оценки человеком времени, однако в литературе практически отсутствуют данные на эту тему. Показано только, что восприятие времени меняется при измене-

нии состояния организма [12 – 14]. Предполагается, что в основе функции оценки временных интервалов может лежать учет информации от эндогенных таймеров [15, 16]. Поэтому изменение физиологических ритмических процессов (например, частоты сердечных сокращений (ЧСС)), может корректировать ход «внутренних часов». В случае повышения тонуса симпатической нервной системы (например, при стрессе и волнении) увеличение ЧСС должно приводить к субъективному ускорению времени, а замедление пульса — к замедлению времени.

Световое воздействие в этом случае может оказывать влияние на функцию восприятия времени либо через изменение тонуса коры головного мозга [6], либо через изменение работы сердца [17, 18]. Тогда свет с длиной волны, соответствующей пику чувствительности меланопсиносодержащих рецепторов, может произвести выраженный эффект [3]. Воздействие подобного рода рекомендовано, например, для лечения сезонных аффективных расстройств, когда менее яркий (освещенность — 750 люкс) белый свет, но насыщенный синей составляющей, дает столь же эффективный терапевтический эффект, что и традиционно используемый яркий белый свет (освещенность — 10 000 люкс) [19, 20]. Аналогично, как установлено опытным путем, синий светодиодный свет ($\lambda = 468$ нм) оказывал заметное действие на подавление синтеза мелатонина у лошади даже при небольшом уровне освещенности (10 люкс) [21].

Известно, что пик чувствительности меланопсиносодержащих рецепторов соответствует длине волны $\lambda \approx 480$ нм [21].

В связи с вышеизложенным, целью исследования была оценка влияния синего

света на восприятие длительности минутного интервала времени.

Методика эксперимента

Исследование выполнялось на 18 практически здоровых волонтерах возрастом от 18 до 28 лет (12 и 6 лиц женского и мужского пола соответственно). Опыты проводилось преимущественно в вечернее время, в состоянии психического и физического покоя участников. Семнадцать из восемнадцати человек спустя 3 – 4 недели участвовали в эксперименте повторно, с тем отличием, что синий свет как воздействующий фактор заменялся белым светом. Таким образом, 17 человек составили контрольную группу. В процессе исследований ее разделили на две подгруппы (далее они фигурируют как 1-я и 2-я группы). Подробное описание процедуры исследования волонтеров будет представлено ниже.

Световое воздействие. Осуществлялось белым светом (в течение 20 мин) с помощью светодиодного, динамически управляемого источника освещения с широким диапазоном коррелированных цветовых температур (КТЦ) ($T_c = 2800 - 10\,000$ К), при высоком общем индексе цветопередачи ($R_a > 90$). Прибор был разработан в Научно-технологическом центре микроэлектроники и субмикронных гетероструктур Российской академии наук (Санкт-Петербург) [22, 23] для обеспечения экологичной световой среды, оптимальной для жизнедеятельности человека в жилых и производственных помещениях. Данная разработка позволяет, в частности, воспроизводить освещение, отвечающее естественному суточному циклу, задающему биологические циркадные ритмы. Эта функция достигается плавным изменением цветовой температуры.

Для обеспечения высоких индексов цветопередачи светодиодного источника используется набор светодиодов (СД): красный (длина волны – 630 нм), синий и зеленый (длины волн – 460 и 520 нм), белый теплый W_w (КТЦ – 2800 К), белый холодный W_c (КТЦ – 8000 К).

Два последних компонента (люминофорные светодиоды) создают основной световой поток, три первых (монохроматические светодиоды) обеспечивают плавную регулировку цветовой температуры в широком

диапазоне и поддержание высоких значений всех частных индексов цветопередачи $R_1 - R_{14}$ [22].

Значения КТЦ составили (в градусах К): 2800, 3500, 4000, 5000, 6500 и 10000. Оптическая система обеспечила высокий коэффициент передачи излучения от СД к выходному окну светильника, заданное пространственное распределение излучения, а также однородность по цвету в дальнем и ближнем полях, т. е. хорошее смешение излучения отдельных СД-матриц. Решены задачи равномерного и широкого углового распределения и гомогенизации цветовых характеристик по площади излучающей поверхности и углу [22].

Программное обеспечение, пульт и система дистанционного управления источником освещения позволяют создавать по радиоканалу требуемое освещение в радиусе до 35 м, задавать любые временные алгоритмы по интенсивности и цветовой температуре освещения. Синий свет создается излучением светодиодов на длине волны 460 нм, остальные светодиоды при этом отключаются, но система управления светом остается в рабочем состоянии.

В работе [24] авторами настоящей статьи представлены результаты исследования биологического воздействия различных светодиодных источников света, а именно – оценка их влияния на концентрацию мелатонина в крови испытуемых при одном и том же зрительном эффекте (КТЦ и освещенности) по известной функции $V(\lambda)$ – относительной спектральной световой эффективности и функции $B(\lambda)$ – спектра биологического действия (подавления секреции мелатонина) (см. [24, рис. 3,6]). Как следует из указанного рисунка статьи [24], максимум интенсивности $B(\lambda)$ лежит в диапазоне длин волн 446 – 477 нм, т. е. сдвинут примерно на 200 нм влево от максимума $V(\lambda)$ и совпадает с максимумом сильной голубой полосы спектра измерения источников света на основе белых люминофорных СД.

Из результатов расчета биологического эквивалента, представленных в статье [24], следует, что из белых СД наименее опасными, с точки зрения подавления мелатонина, являются СД с КТЦ не выше 3500 – 4000 К, у которых доля излучения в сине-голубой части спектра не больше, чем в желто-оранжевой. Белые СД с КТЦ выше 4000 К представляют определенную опасность в суточные часы, ответственные за интенсив-

ный синтез мелатонина у человека.

В рамках настоящего исследования, КТЦ при излучении белого света (нейтральный белый) составляет 4000 К. Площадь под спектральными кривыми белого света с температурами 2800, 3500 и 4000 К в диапазоне длин волн $\lambda = 400 - 800$ нм существенно превышает (более чем на порядок) такую площадь для синего света с длинами волн $\lambda = 460 - 480$ нм. Это означает, что влияние сильнейшей части спектра белого света на функциональное состояние человека не должно быть столь же эффективным, как при воздействии монохроматического излучения синего светодиода с $\lambda \approx 460$ нм. Данное утверждение подтверждено экспериментально.

Оценка временных интервалов. Тест «Индивидуальная (субъективная) минута» является классической методикой на восприятие времени, хорошо известной в экспериментальной психологии. Точность отмеривания индивидуальной минуты, согласно представлению исследователей, связана с психофизиологическими аспектами времени, т. е. с работой биологических часов [14]. Разные люди, как правило, имеют тенденцию переоценивать или недооценивать временной интервал, равный астрономической минуте. При этом индивидуальная минута есть относительно устойчивая величина, которая отражает особенности индивидуума в оценке длительности времени.

Оценка функций организма. Изменение функционального состояния организма волонтера оценивалось по показателям variability и спектра сердечного ритма. Анализ variability сердечного ритма (ВСР) основан на определении последовательности интервалов $R - R$ электрокардиограммы и дает информацию о влиянии вегетативной нервной системы на работу сердца. С помощью аппаратно-программного комплекса «Поли-Спектр» (ООО «Нейрософт», г. Иваново, Россия) записывалась компьютерная ЭКГ в трех стандартных отведениях (I, II, III), в течение 5 мин, в положении волонтера сидя, при ровном дыхании [25, 26]. Для анализа данных использовались значения ЭКГ, записанные во II стандартном отведении. Используемые в работе условные обозначения показателей спектрального анализа ВСР представлены в соответствии с международными стандартами его оценки с учетом значений ориентировочных нормативов [27]. Схема экспериментальной установки представлена на рисунке.

Спектральный анализ дает объективную количественную оценку функционального статуса систем регуляции ВСР по следующим характеристикам:

- общая мощность (total power) спектра нейрогуморальной регуляции – $TP, (\text{мс})^2$;
- вклад в указанный спектр быстрых высокочастотных колебаний – $HF, 16 - 0,4$ Гц),

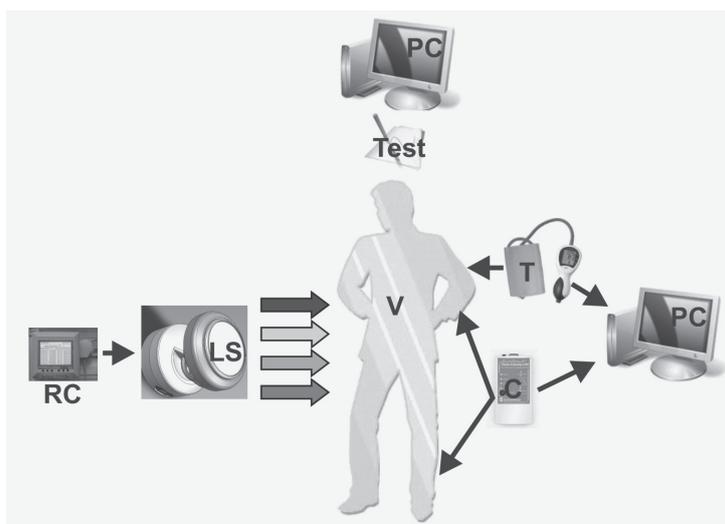


Рис. Общая схема экспериментальной установки для исследования влияния синего света на функцию восприятия времени у лиц с разным типом вегетативной регуляции:

RC – пульт дистанционного управления светильником, LS – динамически управляемый источник света, V – волонтер, Test – тест на субъективную минуту, C – кардиограф, T – тонометр, PC – компьютер

которые характеризуют активность парасимпатического отдела автономной нервной системы (АНС);

вклад медленных низкочастотных колебаний – LF-компонент – как показатель активности симпатического отдела;

вклад сверхнизкочастотных колебаний – VLF, менее 0,05 Гц, отражающих гуморально-метаболические и церебральные эрготропные влияния на модуляцию сердечного ритма.

По отношению LF/HF мы оценивали симпато-парасимпатический баланс тонуса отделов АНС в начале и в конце эксперимента.

Для оценки симпато-парасимпатического баланса использовались следующие показатели ВСР:

стандартное отклонение интервалов $R - R$ (SDNN);

амплитуда моды (MA);

индекс вегетативного равновесия (VEI) [26].

Дополнительно с помощью электрического тонометра измерялись показатели артериального давления, вычислялся вегетативный индекс Кердо (ВИК).

Каждому испытуемому предлагался личностный опросник Айзенка ЕРІ для определения уровня экстраверсии и нейротизма.

Процедура исследования. Опишем эту процедуру подробно. Сначала у каждого волонтера регистрировали значение артериального давления. Затем в течение 5 мин (300 с) производили запись электрокардиограммы для последующего анализа вариабельности сердечного ритма и определения доминирующего регуляторного влияния симпатического или парасимпатического отделов АНС на момент начала проведения эксперимента. Следующий шаг – испытуемому с помощью специальной компьютерной программы предлагалось отмерить «индивидуальную (субъективную) минуту», а именно – нажатием клавиши обозначить начало временного интервала, выждать 60 с, наблюдая за своими субъективными ощущениями, и обозначить конец временного интервала повторным нажатием клавиши. Испытуемым разрешалось отмерять минуту любым выбранным способом, включая счет про себя. При этом ставилось условие, что при повторях теста данный способ должен быть идентичным первому. Доброволец отмерял «индивидуальную минуту» дважды, затем в течение 20 мин на него оказывалось

воздействие синим светом (длина световой волны составляла примерно 440 – 485 нм, освещенность организма – 150 – 200 лк). Одновременно с этим воздействием испытуемому предлагался опросник Айзенка для определения уровня нейротизма. После светового воздействия выполнялись первые три шага в обратном порядке: тест «индивидуальная (субъективная) минута, запись ЭКГ в течение 5 мин, измерение артериального давления. Для контрольной группы ход эксперимента отличался лишь заменой синего света белым дневным с цветовой температурой 4000 К, аналогичным по длительности и интенсивности воздействия.

Полученные индивидуальные данные статистически обрабатывались с помощью методов параметрической статистики, с расчетом среднеквадратичного и среднего отклонений. Достоверность различий сравниваемых показателей определялась по t -критерию Стьюдента.

Результаты и их обсуждение

Воздействие синего света привело к весомым перестройкам вегетативного баланса в организмах испытуемых. Значения показателей общей мощности спектра ЭКГ и индекса вегетативного равновесия существенно изменялись, по сравнению с фоновыми. Для показателя TP индивидуальные изменения после воздействия составили от – 91 до +130 %, а в среднем по модулю – 45 %. Для показателя VEI индивидуальные изменения после воздействия были от – 68 до +128 %, в среднем по модулю они составляли 43 %. Однако направленность сдвигов была разнородной, в связи с чем среднее значение этих показателей после светового воздействия достоверно не изменилось ($p > 0,05$).

Известно, что усредненные значения TP характеризуют суммарную активность вегетативного воздействия на кардиоритм: активация вагуса ведет к повышению величины TP, повышение активности симпатического отдела вегетативной нервной системы вызывает противоположный эффект [25]. Можно было предположить, что полученная разнородность изменений связана с различными типами вегетативного реагирования. На основе выдвинутого предположения были сформированы две группы испытуемых.

У волонтеров 1-й группы (два лица мужского пола и девять женского) значение средней величины TP существенно снижалось ($p < 0,05$) после светового воздействия;

это указывало на преобладание активности парасимпатического отдела АНС в начале эксперимента и сдвиг вегетативного баланса в сторону преобладания симпатического отдела АНС в конце эксперимента.

У испытуемых 2-й группы (четыре лица мужского пола и три женского) наблюдалась противоположная картина: среднее значение ТР несколько повышалось, что, соответственно, указывало на повышение активности парасимпатического отдела АНС после светового воздействия.

Аналогичную закономерность демонстрировали и другие показатели, оценивающие вегетативный баланс, однако выраженность сдвигов в таком случае оставалась преимущественно на уровне тенденции.

У испытуемых 1-й группы увеличивалось отношение LF/HF – интенсивности низкочастотных колебаний к интенсивности высокочастотных, снижалось (с уровнем значимости различий $p = 0,07$) значение SDNN (мс), увеличивалось значение МА (%), увеличивалось (с $p < 0,05$) значение VEI (у.е.). Все эти показатели отражают сдвиг вегетативного баланса в сторону преобладания ак-

тивности симпатического отдела АНС.

У волонтеров 2-й группы те же показатели демонстрировали изменения противоположной направленности, а именно: значение отношения LF/HF уменьшалось, значение SDNN (мс) повышалось, МА (%) снижалось и значение VEI (у.е.) достоверно уменьшалось ($p < 0,05$). Это, в свою очередь, свидетельствует о сдвиге вегетативного баланса в сторону преобладания активности парасимпатического отдела АНС.

Для показателей, к которым не приводится статистический уровень значимости различий p , характерна лишь тенденция к изменению в указанном направлении. Численные значения всех описанных параметров приведены в табл. 1 (верхние числа в клетках таблицы).

Среднее значение индивидуальной минуты после воздействия синим светом в целом по выборке не изменилось. Однако в выделенных нами группах характер изменений имел противоположное направление. Прослеживается связь между изменением длительности субъективной минуты после воздействия синим светом и доминирующей

Таблица 1

Сравнение результатов световых воздействий на две группы испытуемых людей

Показатель	Значение показателя			
	1-я группа		2-я группа	
	До воздействия	После него	До воздействия	После него
ТР, (мс) ²	5043,6 ± 2078,69	2539,6 ± 1047,11	3914,3 ± 1660,90	5056,3 ± 1321,22
	3845,5 ± 2309,00	4340,8 ± 2554,36	4376,9 ± 1826,69	3810,3 ± 1767,47
LF/HF	3,70 ± 2,80	5,20 ± 3,96	5,50 ± 2,42	3,50 ± 2,02
	4,10 ± 2,67	4,90 ± 2,55	5,70 ± 2,28	4,30 ± 1,62
SDNN, мс	61,30 ± 15,16	49,50 ± 9,79	61,10 ± 13,59	68,30 ± 7,96
	57,70 ± 17,90	62,50 ± 18,20	63,30 ± 14,61	60,70 ± 15,39
МА, %	35,00 ± 8,09	41,40 ± 7,50	35,60 ± 4,71	26,40 ± 7,88
	35,20 ± 12,36	38,50 ± 11,29	34,90 ± 7,79	40,60 ± 9,97
VEI, у.е.	92,80 ± 32,43	149,30 ± 61,58	123,60 ± 39,96	56,80 ± 18,04
	151,20 ± 98,14	117,00 ± 53,00	130,60 ± 84,33	149,60 ± 92,76

Примечания. 1. Представлены данные по изменению значений спектрального анализа вариабельности сердечного ритма и вариационной пульсометрии по Р.М. Баевскому. 2. Уровень статистической значимости различий по t -критерию Стьюдента $p < 0,05$; 3. Верхние и нижние числа в клетках таблицы относятся к результатам облучения испытуемых синим и белым светом соответственно.

Обозначения: ТР – общая мощность спектра нейрогуморальной регуляции, LF/HF – отношение интенсивности низких частот к интенсивности высоких, SDNN – стандартное отклонение интервалов $R - R$, МА – амплитуда моды, VEI – индекс вегетативного равновесия.

активностью симпатического или парасимпатического отделов АНС на начало и конец эксперимента. В 1-й группе (после светового воздействия вегетативный баланс сдвинулся в сторону преобладания активности симпатического отдела АНС) наблюдается тенденция к укорочению субъективной минуты в усредненных значениях на 10 с (табл. 2). Во 2-й группе (после светового воздействия преобладает активность парасимпатического отдела АНС) длительность субъективной минуты практически не меняется. Стоит добавить, что в первую группу попали все участники эксперимента, уровень нейротизма которых оказался выше средних значений. Из этих данных следует предположение, что лица женского пола оказались чувствительнее к воздействию. У них же есть и тенденция к более высокому уровню нейротизма ($13,25 \pm 3,21$ против $9,33 \pm 2,78$). По уровню интро (экстра) версии различия между группами – незначительные.

При повторном эксперименте, в котором участвовали те же испытуемые, световое воздействие синим светом было заменено воздействием белым дневным. За испытуемыми была сохранена принадлежность к группам, выделенным после первого этапа исследо-

вания. Заметных сдвигов вегетативного баланса на конец эксперимента, по сравнению с началом, в этом случае отмечено не было (см. табл. 1, нижние числа в клетках).

Анализ показал, что фоновые измеряемые показатели являются устойчивыми. Каких-либо статистически значимых различий между выбранными показателями ВСР у испытуемых до светового воздействия между первым и повторным экспериментами не обнаружено.

Существенного изменения длительности субъективной минуты после воздействия дневным белым светом также не наблюдалось ни в 1-й, ни во 2-й группах (табл. 2, нижние числа в клетках).

Полученные данные показывают, что, по крайней мере, на часть испытуемых (1-я группа), синий свет оказал выраженное тонизирующее действие, сдвигая вегетативный баланс в сторону активности симпатического отдела АНС. Именно в этой группе наблюдалось выраженное уменьшение длительности индивидуальной минуты (на 20,8 %). Это согласуется с имеющимися данными, которые показывают повышение тонуса коры головного мозга [6], усиление уровня бодрствования [5, 8] при воздействии сине-

Таблица 2

Изменение длительности субъективной минуты в выделенных группах до и после световых воздействий

Показатель	Значение показателя	
	1-я группа	2-я группа
Возраст, лет	22,00 ± 1,60	22,30 ± 2,12
Уровень нейротизма, у.е.	$\frac{14,00 \pm 3,67}{13,80 \pm 4,04}$	9,40 ± 2,49
Уровень интро (экстра) версии, у.е.	$\frac{14,60 \pm 4,12}{15,50 \pm 3,30}$	15,70 ± 2,53
Длительность субъективной минуты, с		
до воздействия	$\frac{65,80 \pm 16,96}{60,80 \pm 15,04}$	$\frac{60,60 \pm 9,63}{65,10 \pm 8,63}$
после него	$\frac{55,30 \pm 8,14}{64,60 \pm 8,40}$	$\frac{61,80 \pm 7,68}{65,50 \pm 11,97}$

Примечания. 1. Верхние и нижние числа в клетках таблицы относятся к результатам облучения испытуемых синим и белым светом соответственно. Если числа одинаковы, то дано одно значение.

2. 1-я группа состояла из двух лиц мужского пола и девяти женского, 2-я группа – из четырех лиц мужского пола и трех женского (данные табл. 1 и 2 относятся к одинаковым группам).



го света ($\sim 440 - 485$ нм) через ганглиозные светочувствительные клетки сетчатки и супрахиазматические ядра гипоталамуса. Также наши данные подтверждают возможность влияния характеристик освещения на параметры variability сердечного ритма [17, 18]. Однако среднее значение частоты пульса в результате синего светового воздействия не проявило достоверных изменений. Это означает, что наши данные, связанные с изменением длительности индивидуальной минуты в 1-й группе, нельзя объяснить в рамках гипотезы о частоте пульса как возможного эндогенного «пейсмейкера», задающего скорость течения субъективного времени [15, 16]. С учетом полученных данных можно предположить, что естественным эндогенным «пейсмейкером», который используют для субъективного отмеривания временных интервалов, выступает некий иной физиологический процесс, изменяющийся в соответствии с типом вегетативной регуляции. На другую часть испытуемых людей (2-я группа) синий свет такого действия не оказал. Напротив, в ходе эксперимента вегетативный баланс отчасти сместился к преобладанию парасимпатического отдела АНС. Этот результат можно объяснить не только наличием специфического парасимпатотонического эффекта монохроматического синего света для данной группы, но и отсутствием тонизирующего влияния в сочетании с естественным ухудшением функционального состояния испытуемых к концу эксперимента вследствие утомления или монотонии. Если принять такое объяснение, то естественно предположить, что и тонизирующее действие синего монохроматического света на 1-ю группу могло бы быть выражено сильнее, чем демонстрируют полученные экспериментальные данные, поскольку оно помогло преодолеть возможное ухудшение функционального состояния.

Разнородность полученных результатов можно также объяснить другими факторами, которые не учитывались в данном эксперименте, в частности субъективным эмоциональным отношением к синему свету. Цветовые предпочтения взрослых людей зависят как от энергетических характеристик цвета, так и от информационной составляющей цветового воздействия. Предпочтительными для взрослых [28] оказались три цвета: синий, зеленый и красный. Синий – цвет моря и неба – у многих ассоциируется с покоем, поэтому разница в реагировании,

возможно, связана с функционированием разных систем – корковой и подкорковой, а тип перестроек активности отделов АНС связан с их балансом. В этом плане можно указать работу [29], в которой показано, что тип вегетативного регулирования во многом определяет характер ответной реакции организма на воздействие. У симпатотоников и нормотоников параметры работы сердца и когнитивные функции перестраивались после умственной нагрузки (30-минутное решение задач) в противоположную сторону, по сравнению с парасимпатотониками. Дальнейшие исследования могут осуществить экспериментальную проверку выдвинутых предположений.

Заключение

В ходе настоящей работы было исследовано влияние различных режимов освещения на восприятие человеком коротких временных интервалов. В частности, изучено действие синего света предположительно через ганглиозные меланопсиносодержащие клетки сетчатки на циркадианные ритмы, определяемые функциональной системой головного мозга – внутренними биологическими часами. Попытки проследить влияние различных эндогенных биоритмов на восприятие времени неоднократно предпринимались и ранее, но их роль в этом процессе по-прежнему остается во многом недостаточно исследованной.

Полученные данные показали, что особенности светового воздействия на субъективное восприятие временной длительности связаны с индивидуальным исходным состоянием человека и его личностными особенностями: уровнем нейротизма и соотношением симпатико-парасимпатического баланса. Эти показатели определили направленность вегетативных перестроек, ввиду чего было выделено две группы с различным характером реакции на синий свет. Отсутствие наблюдаемых эффектов при замене синего света белым дневным подтверждает особую силу влияния выделенной части спектра ($\sim 460 - 485$ нм) видимого излучения. Синий свет, таким образом, стимулировал преобладание возбудимости симпатического отдела АНС у одиннадцати человек из восемнадцати. Те же испытуемые продемонстрировали тенденцию к укорочению длительности субъективной минуты после светового воздействия. У остальных семи сдвиг вегетативного баланса имел противоположную

направленность без перемен в отмеривании минутного временного интервала.

Статистически значимого влияния синего света на восприятие времени по выборке в целом не установлено. У части испытуемых (1-я группа) наблюдается тенденция к укорочению субъективной минуты (примерно на 10 с) после воздействия синим светом и сдвиг вегетативного баланса в сторону преобладания активности симпатического отдела АНС. В эту группу попали все испытуемые с высоким уровнем нейротизма. У меньшей части волонтеров (2-я группа) длительность субъективной минуты после воздействия синим светом не изменилась, тогда как вегетативный баланс сместился к преобладанию активности парасимпатического отдела АНС. При воздействии белым светом с такой же длительностью и интенсивностью данные эффекты не наблюдались.

Основные итоги и выводы

1. Впервые экспериментально показано, что воздействие синим светом на человеческий организм дает существенные по величине перестройки вегетативного баланса. Так, значения показателей общей мощности спектра ТР и индекса вегетативного равновесия VEI изменялись в среднем по модулю на 45%, по сравнению с фоновыми значениями.

2. Разная направленность сдвигов вегетативного баланса связана с различными типами вегетативного реагирования. У испытуемых с высоким уровнем нейротизма активность парасимпатического отдела АНС после воздействия синего света сменялась сдвигом в сторону преобладания симпатического отдела АНС. У испытуемых

с низким уровнем нейротизма наблюдалась противоположная картина.

3. Повышение тонуса коры мозга, усиление уровня бодрствования у части испытуемых согласуются с имеющимися в литературе данными о воздействии синей части спектра видимого излучения (~440 – 485 нм) через ганглиозные светочувствительные клетки сетчатки и супрахиазматические ядра гипоталамуса.

4. Полученные экспериментальные данные подтверждают возможность влияния характеристик освещения синим светом на параметры variability ритма сердца и подтверждают особое влияние выделенной части спектра (440 – 485 нм) видимого излучения (см. пункт 3).

5. Экспериментальные результаты проведенного исследования подтверждают необходимость введения ограничений на вечерне-ночное освещение с использованием источников света (в особенности люминофорных СД холодно-белого света, имеющих максимум сильной голубой полосы в диапазоне длин волн 446 – 477 нм) [24], с заметной долей излучения с длинами волн короче 540 нм. Такие ограничения обусловлены высокой степенью их биологической активности [30].

Наиболее целесообразным представляется использование светодиодного источника света, в котором свет с длиной волн около 460 нм, вызывающий «световое загрязнение» окружающей среды [31], заменен светом с длиной волны около 490 нм и одновременно добавлен свет с длиной волны примерно 635 нм. Последний источник выполняет важную функцию – восполняет дефицит излучения в красной области [32].

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Provencio I., Rodriguez I.R., Jiand G., Hayes W.P., Moreira E.F., Rollag M.D.** A novel human opsin in the inner retina // *Journal of Neuroscience*. 2000. Vol. 20. No. 2. Pp. 600–605.

2. **Lucas R.J., Peirson S.N., Berson D.M., et al.** Measuring and using light in the melanopsin age // *Trends in Neurosciences*. 2014. Vol. 37. No. 1. Pp. 1–9.

3. **Brainard G.C., Sliney D., Hanifin J.P., et al.** Sensitivity of the human circadian system to short-wavelength (420 nm) light // *Journal of Biological Rhythms*. 2008. Vol. 23. No. 5. Pp. 379–386.

4. **Hastings M.H., Maywood E.S., Brancaccio**

M. Generation of circadian rhythms in the suprachiasmatic nucleus // *Nature Reviews Neuroscience*. 2018. Vol. 19. No. 8. Pp. 453–469.

5. **Chellappa S.L., Steiner R., Blattner P., Oelhafen P., Götz T., Cajochen C.** Non-visual effects of light on melatonin, alertness and cognitive performance: can blue-enriched light keep us alert? // *PloS One*. 2011. Vol. 6. No. 1. P. e16429.

6. **Vandewalle G., Maquet P., Dijk D.J.** Light as a modulator of cognitive brain function // *Trends in Cognitive Sciences*. 2009. Vol. 13. No. 10. Pp. 429–438.

7. **Hawes B.K., Brunyé T.T., Mahoney C.R., Sullivan J.M., Aal C.D.** Effects of four work-



- place lighting technologies on perception, cognition and affective state // *International Journal of Industrial Ergonomics*. 2012. Vol. 42. No. 1. Pp. 122–128.
8. **Lockley S.W., Evans E.E., Scheer F.A.J.L., et al.** Short-wavelength sensitivity for the direct effects of light on alertness, vigilance, and the waking electroencephalogram in humans // *Sleep*. 2006. Vol. 29. No. 2. Pp. 161–168.
9. **Cajochen C.** Alerting effects of light // *Sleep Medicine Reviews*. 2007. Vol. 11. No. 6. Pp. 453–464.
10. **Ferlazzo F., Piccardi L., Burrattini C., et al.** Effects of new light sources on task switching and mental rotation performance // *Journal of Environmental Psychology*. 2014. Vol. 39. September. Pp. 92–100.
11. **Cho J.R., Joo E.Y., Koo D.L., Hong S.B.** Let there be no light: the effect of bedside light on sleep quality and background electroencephalographic rhythms // *Sleep Medicine*. 2013. Vol. 14. No. 12. Pp. 1422–1425.
12. **Алянчикова Ю.О., Смирнов А.Г.** Связь индивидуальной минуты и тревожности у больных невротиками // *Физиология человека*. 1997. Т. 23. № 5. С. 51–54.
13. **Чилигина Ю.А.** Влияние экзаменационного стресса на субъективную оценку времени у студентов-первокурсников // *Ученые записки университета им. П.Ф. Лесгафта*. 2015. № 4 (122). С. 257–262.
14. **Симуткин Г.Г.** Искажение индивидуального времени как проявление десинхроноза при сезонных аффективных расстройствах // *Социальная и клиническая психиатрия*. 2000. Т. 10 № 3. С. 16–20.
15. **Merchant H., Harrington D.L., Meck W.H.** Neural basis of the perception and estimation of time // *Annual Review of Neuroscience*. 2013. Vol. 36. Pp. 313–336.
16. **Schwarz M.A., Winkler I., Sedlmeier P.** The heart beat does not make us tick: the impacts of heart rate and arousal on time perception // *Attention, Perception & Psychophysics*. 2013. Vol. 75. No. 1. Pp. 182–193.
17. **Grote V., Kelz Ch., Goswami N., et al.** Cardio-autonomic control and wellbeing due to oscillating color light exposure // *Physiology & Behavior*. 2013. Vol. 114. Pp. 55–64.
18. **Schäfer A., Kratky K.W.** The effect of colored illumination on heart rate variability // *Complementary Medicine Research*. 2006. Vol. 13. No. 3. Pp. 167–173.
19. **Meesters Y., Dekker V., Schlangen L.J., Bos E.H., Ruiter M.J.** Low-intensity blue-enriched white light (750 lux) and standard bright light (10 000 lux) are equally effective in treating SAD. A randomized controlled study // *BMC Psychiatry*. 2011. Vol. 11. No. 1. P. 17.
20. **Glickman G., Byrne B., Pineda C., Hauck W.W., Brainard G.C.** Light therapy for seasonal affective disorder with blue narrow-band light-emitting diodes (LEDs) // *Biological Psychiatry*. 2006. Vol. 59. No. 6. Pp. 502–507.
21. **Walsh C.M., Prendergast R.L., Sheridan J.T., Murphy B.A.** Blue light from light-emitting diodes directed at a single eye elicits a dose-dependent suppression of melatonin in horses // *The Veterinary Journal*. 2013. Vol. 196. No. 2. Pp. 231–235.
22. **Аладов А.В., Бирючинский С.Б., Валюхов В.П., Закгейм А.Л., Тальнишних Н.А., Черняков А.Е.** Динамически управляемая система освещения светодиодами с широким диапазоном цветовых температур (2800 – 10 000 К) и высоким качеством цветопередачи ($R_A > 90$) // *Светотехника*. 2016. № 6. С. 19–25.
23. **Аладов А.В., Закгейм А.Л., Мизеров М.Н., Черняков А.Е.** Полихромные спектрально-перестраиваемые осветительные приборы со светодиодами: опыт разработки и применения // *Светотехника*. 2013. № 5-6. С. 34–39.
24. **Аладов А.В., Закгейм А.Л., Мизеров М.Н., Черняков А.Е.** О биологическом эквиваленте излучения светодиодных и традиционных источников света с цветовой температурой 1800 – 10 000 К // *Светотехника*. 2012. № 3. С. 7–10.
25. **Михайлов В.М.** Вариабельность ритма сердца. Опыт практического применения. Иваново: Ивановская обл. типография, 2000. 200 с.
26. **Baevsky R.M., Chernikova A.G.** Heart rate variability analysis: physiological foundations and main methods // *Cardiometry*. 2017. No. 10. May. Pp. 66–76.
27. **Malik M.** Heart rate variability: standards of measurement, physiological interpretation, and clinical use: task force of the European society of cardiology and the North American society for pacing and electrophysiology // *Annals of Noninvasive Electrocardiology*. 1996. Vol. 1. No. 2. Pp. 151–181.
28. **Базыма Б.А.** Психология цвета: теория и практика. М.: Изд-во «Речь», 2005. 112 с.
29. **Чилигина Ю.А.** Динамика показателей функционального состояния организма после применения умственной нагрузки и холодогипоксического воздействия // *Вестник Санкт-Петербургского университета. Сер. 3. Биология*. 2003. № 1. С. 78–85.

30. Аладов А.В., Слезин В.Б., Корсакова Е.А., Шульц Е.В., Закгейм А.Л., Мизеров М.Н. Воздействие белого света с варьируемой цветовой температурой на электроэнцефалограмму человека // Вестник новых медицинских технологий. 2012. Т. 19. № 4. С. 30–33.

31. Анисимов В.Н., Виноградова И.А. Световой режим, мелатонин и риск развития рака

// Вопросы онкологии. 2006. Т. 53. № 5. С. 491–498.

32. Аладов А.В., Закгейм А.Л., Черняков А.Е. Светодиод белого света с улучшенной фотобиологической безопасностью // Описание полезной модели к патенту ПМ №136239. Опубликовано 27.12.2013. Бюлл. № 36.

Статья поступила в редакцию 03.06.2019, принята к публикации 08.07.2019.

СВЕДЕНИЯ ОБ АВТОРАХ

АЛАДОВ Андрей Вальменович – старший научный сотрудник Научно-технологического центра микроэлектроники и субмикронных гетероструктур Российской академии наук, Санкт-Петербург, Российская Федерация.

194021, Российская Федерация, г. Санкт-Петербург, Политехническая ул., 26.
aaladov@mail.ioffe.ru

БЕРЛОВ Дмитрий Николаевич – старший преподаватель кафедры анатомии и физиологии человека и животных Российского государственного педагогического университета им. А.И. Герцена, Санкт-Петербург, Российская Федерация.

191186, Российская Федерация, г. Санкт-Петербург, Наб. реки Мойки, 48
dberlov@yandex.ru

ВАЛЮХОВ Владимир Петрович – доктор технических наук, профессор Высшей школы прикладной физики и космических технологий Санкт-Петербургского политехнического университета Петра Великого, Санкт-Петербург, Российская Федерация.

195251, Российская Федерация, г. Санкт-Петербург, Политехническая ул., 29
Valyukhov@yandex.ru

ВЛАСОВА Ольга Леонардовна – доктор физико-математических наук, профессор Высшей школы биомедицинских систем и технологии Санкт-Петербургского политехнического университета Петра Великого, Санкт-Петербург, Российская Федерация.

195251, Российская Федерация, г. Санкт-Петербург, Политехническая ул., 29
olvlasova@yandex.ru

ЗАКГЕЙМ Александр Львович – кандидат технических наук, заведующий сектором Научно-технологического центра микроэлектроники и субмикронных гетероструктур Российской академии наук, Санкт-Петербург, Российская Федерация.

194021, Российская Федерация, г. Санкт-Петербург, Политехническая ул., 26.
zakgeim@mail.ioffe.ru

ПАНИХИНА Анна Андреевна – магистрант кафедры анатомии и физиологии человека и животных Российского государственного педагогического университета им. А.И. Герцена, Санкт-Петербург, Российская Федерация.

191186, Российская Федерация, г. Санкт-Петербург, Наб. реки Мойки, 48
scrimmyrim@gmail.com

ФОТИАДИ Александр Эпаминондович – доктор физико-математических наук, профессор кафедры физической электроники Санкт-Петербургского политехнического университета Петра Великого, Санкт-Петербург, Российская Федерация.

195251, Российская Федерация, г. Санкт-Петербург, Политехническая ул., 29
fotiadi@rphf.spbstu.ru



REFERENCES

1. **Provencio I., Rodriguez I.R., Jiand G., et al.**, A novel human opsin in the inner retina, *Journal of Neuroscience*. 20 (2) (2000) 600–605.
2. **Lucas R.J., Peirson S.N., Berson D.M., et al.**, Measuring and using light in the melanopsin age, *Trends in Neurosciences*. 37 (1) (2014) 1–9.
3. **Brainard G.C., Sliney D., Hanifin J.P., et al.**, Sensitivity of the human circadian system to short-wavelength (420 nm) light, *Journal of Biological Rhythms*. 23 (5) (2008) 379–386.
4. **Hastings M.H., Maywood E.S., Brancaccio M.**, Generation of circadian rhythms in the suprachiasmatic nucleus, *Nature Reviews Neuroscience*. 19 (8) (2018) 453–469.
5. **Chellappa S.L., Steiner R., Blattner P., et al.**, Non-visual effects of light on melatonin, alertness and cognitive performance: can blue-enriched light keep us alert? *PloS One*. 6 (1) (2011) e16429.
6. **Vandewalle G., Maquet P., Dijk D.J.**, Light as a modulator of cognitive brain function, *Trends in Cognitive Sciences*. 13 (10) (2009) 429–438.
7. **Hawes B.K., Bruny T.T., Mahoney C.R., et al.**, Effects of four workplace lighting technologies on perception, cognition and affective state, *International Journal of Industrial Ergonomics*. 42 (1) (2012) 122–128.
8. **Lockley S.W., Evans E.E., Scheer F.A.J.L., et al.**, Short-wavelength sensitivity for the direct effects of light on alertness, vigilance, and the waking electroencephalogram in humans, *Sleep*. 29 (2) (2006) 161–168.
9. **Cajochen C.**, Alerting effects of light, *Sleep Medicine Reviews*. 11 (6) (2007) 453–464.
10. **Ferlazzo F., Piccardi L., Burrattini C., et al.**, Effects of new light sources on task switching and mental rotation performance, *Journal of Environmental Psychology*. 39 (September) (2014) 92–100.
11. **Cho J.R., Joo E.Y., Koo D.L., Hong S.B.**, Let there be no light: the effect of bedside light on sleep quality and background electroencephalographic rhythms, *Sleep Medicine*. 14 (12) (2013) 1422–1425.
12. **Alyanchikova Yu.O., Smirnov A.G.**, Svyaz individualnoy minuty i trevozhnosti u bolnykh nevrozami [Relationship between an individual minute and an anxiety among patients with neurosis], *Fiziologiya Cheloveka* [Human Physiology]. 23 (5) (1997) 51–54.
13. **Chiligina Yu.A.**, Exam stress effect on subjective evaluation of time among the first-course students, *Scientific Theory Journal “Uchenye Zapiski Universiteta Imeni P.F. Lesgafta”*. (4 (122)) (2015) 257–262.
14. **Simutkin G.G.**, Iskazheniye individualnogo vremeni kak proyavleniye desinkhronoza pri sezonnykh affektivnykh rasstroystvakh [Distortion of an individual time as a manifestation of desynchronization in seasonal affective disorders], *Social and Clinical Psychiatry*. 2000. 10(3) (2000) 16–20.
15. **Merchant H., Harrington D.L., Meck W.H.**, Neural basis of the perception and estimation of time, *Annual Review of Neuroscience*. 36 (2013) 313–336.
16. **Schwarz M.A., Winkler I., Sedlmeier P.**, The heart beat does not make us tick: the impacts of heart rate and arousal on time perception, *Attention, Perception & Psychophysics*. 75 (1) (2013) 182–193.
17. **Grote V., Kelz Ch., Goswami N., et al.**, Cardio-autonomic control and wellbeing due to oscillating color light exposure, *Physiology & Behavior*. 114 (2013) 55–64.
18. **Schäfer A., Kratky K.W.**, The effect of colored illumination on heart rate variability, *Complementary Medicine Research*. 13 (3) (2006) 167–173.
19. **Meesters Y., Dekker V., Schlangen L.J., et al.**, Low-intensity blue-enriched white light (750 lux) and standard bright light (10 000 lux) are equally effective in treating SAD. A randomized controlled study, *BMC Psychiatry*. 11(1) (2011) 17.
20. **Glickman G., Byrne B., Pineda C., et al.**, Light therapy for seasonal affective disorder with blue narrow-band light-emitting diodes (LEDs), *Biological Psychiatry*. 59 (6) (2006) 502–507.
21. **Walsh C.M., Prendergast R.L., Sheridan J.T., Murphy B.A.**, Blue light from light-emitting diodes directed at a single eye elicits a dose-dependent suppression of melatonin in horses, *The Veterinary Journal*. 2013. 196 (2) (2013) 231–235.
22. **Aladov A.V., Biryuchinskiy S.B., Valyukhov V.P., et al.**, Dinamicheskii upravlyayemaya sistema osveshcheniyasvetodiodami shirokim diapazonom tsvetovykh temperatur (2800 – 10000 K) i vysokim kachestvom tsvetoperedachi ($R_A > 90$) [A dynamically-controlled lighting system with (2800 – 10 000 K) LEDs providing a high-quality color transfer], *Light and Engineering*. (6) (2016) 19–25.
23. **Aladov A.V., Zakgeim A.L., Mizerov M.N., Chernyakov A.E.**, Polikhromnyye spektralno-perestraivayemye osvetitelnyye pribory so svetodiodami: opyt razrabotki i primeneniya [Polychromatic spectral-tunable lighting devices

with LEDs: design practice and case history], *Light and Engineering*. (5-6) (2013) 34–39.

24. **Aladov A.V., Zakgeim A.L., Mizerov M.N., Chernyakov A.E.**, O biologicheskom ekvivalente izlucheniya svetodiodnykh i traditsionnykh istochnikov sveta s tsvetovoy temperaturoy 1800 – 10 000 K [On the biological radiation equivalents of LEDs' and traditional lighting sources with color temperatures of 1800 – 10 000 K], *Light and Engineering*. (3) (2012) 7–10.

25. **Mikhaylov V.M.**, Variabelnost ritma serdtsa. Opyt prakticheskogo primeneniya [Heart rate variability. Case history], Ivanovo, 2000.

26. **Baevsky R.M., Chernikova A.G.**, Heart rate variability analysis: physiological foundations and main methods, *Cardiometry*. (10) (2017) 66–76.

27. **Malik M.**, Heart rate variability: standards of measurement, physiological interpretation, and clinical use: task force of the European society of cardiology and the North American society for pacing and electrophysiology, *Annals of Noninvasive Electrocardiology*. 1(2) (1996) 151–181.

28. **Bazyma B.A.**, Psikhologiya tsveta: Teoriya i praktika [Physiology for color: theory and practice], “Rech” Publishing, Moscow, 2005.

29. **Chiligina Yu.A.**, Dinamika pokazateley funktsionalnogo sostoyaniya organizma posle primeneniya umstvennoy nagruzki i kholodogipoksicheskogo vozdeystviya [Indexes dynamics of functional state of an organism after a mental workload and a cold-hypoxic attack], *Biological Communications*. (1) (2003) 78–85.

30. **Aladov A.V., Slezin V.B., Korsakova E.A., et al.**, The effects of white light with variable color temperature on human electroencephalogram, *Vestnik Novykh Meditsinskikh Tekhnologiy*. 19 (4) (2012) 30–33.

31. **Anisimov V.N., Vinogradova I.A.**, Svetovoy rezhim, melatonin i risk razvitiya raka [Lighting regime, melatonin and cancer development risk], *Voprosy Onkologiy [Oncology Topics]*. 53 (5) (2006) 491–498.

32. **Aladov A.V., Zakgeim A.L., Chernyakov A.E.**, Svetodiod belogo sveta s uluchshennoy fotobiologicheskoy bezopasnostyu [A white-color LED with improved photobiological safety], Opisaniye poleznoy modeli k patentu PM № 136239 [A description of a useful model to patent PM No. 136239]. Published 27.12.2013. Bul. No. 36.

Received 03.06.2019, accepted 08.07.2019.

THE AUTHORS

ALADOV Andrey V.

Submicron Heterostructures for Microelectronics, Research & Engineering Center, RAS
26 Politechnicheskaya St., St. Petersburg, 195251, Russian Federation
aaladov@mail.ioffe.ru

BERLOV Dmitriy N.

The Herzen State Pedagogical University of Russia
48 Moika Emb., St. Petersburg, 191186, Russian Federation
dberlov@yandex.ru

VALYUKHOV Vladimir P.

Peter the Great St. Petersburg Polytechnic University
29 Politechnicheskaya St., St. Petersburg, 195251, Russian Federation
Valyukhov@yandex.ru

VLASOVA Olga L.

Peter the Great St. Petersburg Polytechnic University
29 Politechnicheskaya St., St. Petersburg, 195251, Russian Federation
olvasova@yandex.ru

ZAKGEIM Alexander L.

Submicron Heterostructures for Microelectronics Research and Engineering Center of the RAS
26 Politekhnikeskaya St., St. Petersburg, 194021, Russian Federation
zakgeim@mail.ioffe.ru

PANIHINA Anna A.

Herzen State Pedagogical University of Russia
48 Moyka Emb., St. Petersburg, 191186, Russian Federation
scrimmyrim@gmail.com

FOTIADI Alexander E.

Peter the Great St. Petersburg Polytechnic University
29 Politekhnikeskaya St., St. Petersburg, 195251, Russian Federation
fotiadi@rphf.spbstu.ru

DOI: 10.18721/JPM.12307
УДК 538.911+902/904

ОСОБЕННОСТИ ПРИМЕНЕНИЯ ЭЛЕКТРОННО-МИКРОСКОПИЧЕСКИХ МЕТОДОВ В ИСТОРИЧЕСКОМ МЕТАЛЛОВЕДЕНИИ

**Н.Н. Преснякова¹, А.Л. Васильев^{1,2},
Е.Ю. Терещенко^{1,2}, Е.Б.Яцишина¹**

¹ Национальный исследовательский центр «Курчатовский институт»,
Москва, Российская Федерация;

² Институт кристаллографии им. А.В. Шубникова ФНИЦ
«Кристаллография и фотоника» РАН, Москва, Российская Федерация

Представлен методологический подход к комплексным электронно-микроскопическим исследованиям металлических объектов культурного наследия, разработанный в процессе изучения различных экспонатов из ведущих музеев России. Применение предложенного методологического подхода позволило как историкам, так и археологам получать углубленную детальную информацию, в значительной мере дополнившую данные, имеющиеся на сегодняшний день.

Ключевые слова: металлический артефакт, просвечивающая электронная микроскопия, растровая электронная микроскопия, комплексное исследование

Ссылка при цитировании: Преснякова Н.Н., Васильев А.Л., Терещенко Е.Ю., Яцишина Е.Б. Особенности применения электронно-микроскопических методов в историческом металловедении // Научно-технические ведомости СПбГПУ. Физико-математические науки. 2019. Т. 12. № 3. С. 92–100. DOI: 10.18721/JPM.12307

ELECTRON-MICROSCOPIC METHODS IN HISTORICAL METALLURGY: FEATURES OF THE USE

**N.N. Presniakova¹, A.L. Vasiliev^{1,2},
E.Yu. Tereschenko^{1,2}, E.B. Yatsishina¹**

¹ National Research Centre "Kurchatov Institute", Moscow, Russian Federation;

² Shubnikov Institute of Crystallography of Federal Scientific Research Centre "Crystallography and Photonics" of Russian Academy of Sciences, Moscow, Russian Federation

A methodological approach to integrated electron microscopic studies of metal objects of cultural heritage, developed in studying various exhibits from leading museums of Russia, has been presented. The application of the proposed approach allowed both historians and archaeologists to obtain in-depth, detailed information, which greatly supplemented the data currently available.

Keywords: metal artifact, transmission electron microscopy, scanning electron microscopy, complex research

Citation: Presniakova N.N., Vasiliev A.L., Tereschenko E.Yu., Yatsishina E.B., Electron-microscopic methods in historical metallurgy: features of the use, St. Petersburg Polytechnical State University Journal. Physics and Mathematics. 12 (3) (2019) 92–100. DOI: 10.18721/JPM.12307

Введение

В естественнонаучных исследованиях древних металлических артефактов применяются самые разные подходы и методы. Чаще всего это физические методы, перечисленные ниже:

металлографический анализ [1];

оптико-эмиссионный спектральный анализ [2, 3];

рентгенофлуоресцентный спектральный анализ [4, 5];

электронная микроскопия (ЭМ) с энергодисперсионным рентгеновским микроанализом (ЭРМ) [6, 7].

Благодаря бурному развитию приборной электронно-микроскопической базы, за последние 20 лет появились новые методы исследования различных материалов. Они нашли широкое применение и оказались крайне востребованы и в области, которая связана с изучением объектов культурного наследия [7].

Традиционно ЭМ разделяется на два основных метода: растровую (РЭМ) [8, 9] и просвечивающую (ПЭМ) [10, 11] электронную микроскопию, хотя в современных приборах возможна реализация обоих методов [12] с параллельным использованием различных детекторов: свето- и темнопольных, вторичных и обратно рассеянных электронов и, соответственно, высокоэффективных детекторов для ЭРМ. В современных электронных микроскопах, в особенности РЭМ, существует возможность использования режима низкого вакуума или естественной среды, что в большинстве случаев снимает проблему накопления электрического заряда на непроводящей поверхности образца.

В Национальном исследовательском центре «Курчатовский институт» нами накоплен опыт по исследованию уникальных металлических экспонатов. Комплексные исследования проводились совместно со следующими организациями:

Институт археологии РАН (ИА РАН);

Государственный исторический музей (ГИМ);

Государственный музей изобразительных искусств им. А.С. Пушкина (ГМИИ);

Крымский федеральный университет им. В.И. Вернадского (КФУ) и другие.

В ходе проводимых исследований был разработан эффективный методологический подход на основе комплексных современных методов ЭМ. Этот подход представлен в данной работе.

Методика исследования объектов

Обычно исследования древних металлических артефактов проводятся в несколько этапов.

I. Выбор стратегии исследований. На первом этапе определяется комплекс методик, который обусловлен поставленными целями исследования и состоянием объекта изучения. Одна из основных проблем, от которой зависит программа дальнейших действий, — возможность отбора пробы небольшого объема (не более 1 мм³) для детальных РЭМ- или ПЭМ-исследований. Если такая возможность отсутствует, то приходится ограничиваться исключительно теми методами исследования, которые не требуют подготовки пробы [13–15].

II. Подготовка пробы. Традиционные методики подготовки — изготовление шлифов и тонких пластин для последующего микроанализа, электрохимического или ионного травления — хорошо известны [12]. Изготовление шлифов необходимо, если на поверхности исследуемого образца есть выраженный рельеф; он может привести к значительным погрешностям при определении элементного состава. Возникновение погрешности может быть обусловлено как изменением функции распределения плотности генераций рентгеновского излучения по глубине и энергетического распределения обратно рассеянных электронов, так и с различиями в поглощении характеристического рентгеновского излучения определяемых элементов в различных областях (или точках) образца из-за геометрических факторов поверхности.

Стоит отметить, что существующие на сегодняшний день программы коррекции полученных ЭРМ-данных заведомо предполагают, что поверхность образца гладкая и расположена строго перпендикулярно к электронному зонду. Поверхности же археологических объектов, зачастую, не отвечают перечисленным требованиям. Практически, на поверхностях всех металлических артефактов образуются коррозионные слои, имеющие, как правило, развитый рельеф. Их присутствие, наравне с загрязнениями, может не только значительно исказить результаты элементного анализа методом ЭРМ [16], но и привести к неверным выводам о морфологии поверхности, хотя при этом результаты исследования коррозии могут содержать полезную информацию, например, о специфике ус-

ловий археологизации артефакта [17].

Поэтому для изучения металлических артефактов рекомендуется изготовление шлифа или ламели, причем с минимальным повреждением самого артефакта. Наиболее подходящим методом подготовки пробы для этой цели служит сфокусированный ионный пучок, использующий ионы галлия или плазменный источник с ионами ксенона [17 – 21]. С помощью сфокусированного ионного пучка можно вытравливать углубления с вертикальными стенками глубиной 1 – 50 мкм, что позволяет проводить исследования по всей глубине среза, но с обязательным учетом геометрии эксперимента. Также указанный ионный пучок используется и для приготовления тонких (менее 100 нм) ламелей для ПЭМ-исследований [12]. При неинвазивном изучении поверхности с выраженным рельефом, погрешность измерений ЭРМ рекомендуется вычислять через моделирование рассеяния электронов пучка в твердом теле методом Монте-Карло, полностью задав форму рельефа поверхности.

Па. Отбор микропроб. При ЭМ-исследованиях объектов культурного наследия, размеры которых превышают размеры камеры РЭМ, или нетранспортабельных артефактов, необходим отбор микропроб с минимальными повреждениями экспонатов.

III. Исследования методом растровой электронной микроскопии. В случае низкой проводимости образца, в РЭМ возникает необходимость применять режим низкого вакуума. В приложении к металлическим артефактам отсутствие проводимости означает наличие на поверхности слоя коррозии, загрязнения или искусственного органического покрытия (например, реставрационного). В этом случае использование нескольких ускоряющих напряжений делает возможным разделение рентгеновских спектров от поверхностного слоя (коррозии и т. п.) и металлической основы. Регистрация картин дифракции обратно рассеянных электронов позволяет получать структурную информацию.

IV. Исследования методом просвечивающей растровой электронной микроскопии (ПРЭМ). Для объектов исторического наследия, в частности образцов металлов и сплавов, используется весь спектр современных методов ПРЭМ и микроанализа, в том числе высокоразрешающая ПРЭМ, различные методы электронной

дифракции и микроанализа (ЭРМ). Для ПРЭМ-исследований характерна очень высокая локальность. Особенно это существенно при определении фазового состава покрытий металлических изделий, состоящих из различных компонентов. Поэтому при исследованиях сложных объектов необходимо привлечение комплементарных методов.

Результаты исследований металлических артефактов

В рамках предложенной методологии проведено исследование ряда металлических артефактов, результаты которых представлены в данном разделе.

Металлические изделия из некрополя Левадки (КФУ им. В.И. Вернадского) [15]. Задачей исследования было определение элементного состава сплавов и морфологии поверхности ряда металлических изделий из некрополя Левадки. Для этого были использованы методы РЭМ/ЭРМ, причем необходимости в подготовке проб не было, так как измерения проводились параллельно с реставрационными работами, включавшими расчистку поверхности изделий. Полученные нами результаты продемонстрировали отсутствие цинка в сплавах изученных объектов. Это означало, что при их изготовлении не использовался традиционный источник меди – римские монеты из медно-цинкового сплава.

Бронзовые статуи из ГМИИ им. А.С. Пушкина [20]. В рамках изучения бронзовых статуй «Танцующий Амур» и «Иоанн Креститель», предположительно созданных Донателло (около 1386 – 1466 гг.), методами РЭМ/ЭРМ уточнялся состав металлической основы с целью проверки авторства. Габариты обеих статуй значительно превосходили размеры камеры для РЭМ-исследований, поэтому был проведен отбор микропроб: у статуи «Иоанн Креститель» из нескольких областей внутренней поверхности, а у статуэтки «Танцующий амур» – из каверны вблизи крепежного штифта в стопе. Микропробы были помещены в эпоксидную смолу и отшлифованы. Оказалось, что статуя «Иоанн Креститель» изготовлена из медного сплава, содержащего цинк (менее 23 ат.%), олово (менее 4,3 ат.%) и свинец (менее 7,0 ат.%), типичного для бронзовой скульптуры Донателло периода 1400 – 1430-х гг. (согласно литературным данным). Статуэтка «Танцующий амур» бы-



ла изготовлена из более популярного в этот период сплава, состоящего из меди (менее 63 ат.%), олова (менее 36 ат.%) и свинца (менее 1 ат.%), что не позволило уточнить его атрибуцию.

Наконечник копья Новосвободненской культуры 3000 – 2900 гг. до н.э. из ГИМ [17]. Целью исследования было определение элементного состава и микроструктуры верхнего слоя наконечника копья из раскопок кургана у станицы Царская (современное название – станица Новосвободная), из коллекции отдела археологических памятников ГИМ. Методами РЭМ/ЭРМ изучались поверхность и срезы металла основы и верхнего слоя. Установлено, что наконечник копья был выполнен из медно-мышьякового сплава (медь – 95,9 ат.%; мышьяк – 4,1 ат.%), а верхний слой имел сложный слоистый состав, дополнительно включающий серу, углерод и кислород, причем на поверхности были обнаружены кристаллы халькозита, несвойственные для коррозии медных сплавов:



Такой состав определяется особыми условиями археологизации объекта в сернистой атмосфере, которые способствовали естественному преобразованию коррозионного слоя меди в сульфидные минералы.

Влияние кремации на слой амальгамного золочения медных изделий X века (ГИМ) [21]. В работе проводился сравнительный анализ морфологии и состава приповерхностной области различных золоченых медных изделий X века. Это были, во-первых, изделия из кремационных захоронений, во-вторых, – из культурного слоя поселения. В первом случае изучались идол из кургана «Черная могила» (раскопки Д.Я. Самоквасова 1872 – 1873 гг., г. Чернигов) и ажурный наконечник ремня (найден в результате раскопок В.А. Городцова в 1901 г. у деревни Михайловское Московской области). Во втором случае исследовалась фибула круглая – застежка для одежды (раскопки В.В. Мурашёвой 1995 г. Гнездовского археологического комплекса, Смоленская область, Россия).

Сложная форма предметов предполагала нанесение золочения методом ртутного амальгамирования, однако в изделиях, подвергшихся кремации, исследования поверхности, проведенные различными методами, не выявили наличия ртути. Возникшее

предположение, что ртуть могла сохраниться на границе раздела металла основы (меди) и слоя золочения, потребовало изучения слоя сплава Cu-Au по глубине. Поскольку толщина слоя золота в объектах превышала 50 мкм, изучались микропробы, отобранные в зонах с наилучшей сохранностью слоя золочения. Методами РЭМ/ЭРМ были получены карты распределения элементов по глубине, которые также не показали наличия ртути в предметах из кремации, но выявили усиление пористости приповерхностной области, содержащей золото. Аналогичные исследования образца из культурного слоя (в фибуле) показали присутствие ртути во всем слое позолоты. Следовательно, отсутствие ртути в слое амальгамного золочения было вызвано вторичным нагревом изделия при кремации, который привел к полному испарению ртути.

Крест-энколпион XII века. Изделие декорировано чернью. Оно было найдено в Суздальском ополье, поступило из ИА РАН [19].

Крест-энколпион – это предмет личного благочестия, ковчег в форме креста, использовавшийся для хранения частицы мощей и других реликвий. Комплексные исследования этого артефакта методами РЭМ/ЭРМ, ПЭМ, ПРЭМ и электронной дифракции включали определение элементного состава основного металла (рис. 1, а, области 1 и 3) и черни (рис. 1, а, область 2), уточнение технологии декорирования, а также изучение влияния коррозии на приповерхностные слои объекта. Данные РЭМ/ЭРМ, полученные от поверхности объекта без предварительной подготовки пробы, не позволили точно определить состав чернения и коррозионного слоя, поэтому исследования были проведены на ламелях, полученных сфокусированным ионным пучком.

Определено, что материал основы креста – свинцово-цинково-оловянная бронза, а инкрустации – сульфид меди с включениями свинца. На этом основании было высказано предположение, что инкрустация выполнялась расплавлением порошка сульфида меди, который был помещен в углубления на поверхности, образующие рисунок.

Заключение

По результатам представленных исследований можно заключить, что цен-

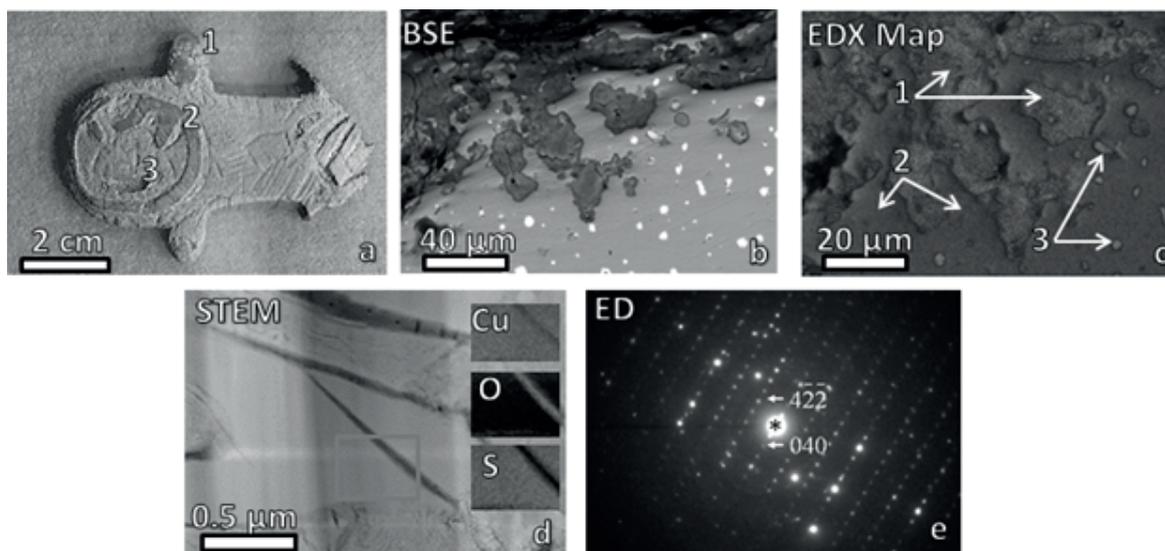


Рис. 1. Результаты комплексных ЭМ-исследований энколпиона XII века (ИА РАН):

a – фотография объекта (*1* – зона шлифа торца креста; *2, 3* – области чернения и металла основы, соответственно); *b* – РЭМ-изображение шлифа энколпиона, полученное в ОРЭ; *c* – интегральная карта распределения химических элементов от области шлифа (стрелками указаны области Sn-O-P (*1*), Cu (*2*) и Pb (*3*)); *d* – темнопольное ПРЭМ-изображение ламели из области чернения с указанной площадью картирования и картами распределения химических элементов; *e* – ЭД от области чернения (Cu_2S в проекции [102])

ность методов электронной микроскопии в приложении к историческому металловедению заключается в возможности получения подробной разнонаправленной информации об изучаемых металлических артефактах, которая позволяет сделать новые исторические выводы. При этом существенным достоинством является минимальное воздействие на экспонаты.

Благодарности

Авторы выражают искреннюю признательность коллегам из Государственного исторического музея, Музея изобразительных искусств им. А.С. Пушкина, Института археологии РАН и Крымского федерального университета им. В.И. Вернадского за

предоставленные образцы и плодотворные дискуссии в ходе исследований, которые позволили оптимизировать используемые методические подходы.

Исследования выполнены при частичной финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (№17-29-04129 п. Д), Российского научного фонда (№17-18-01399 – пп. В и Г), Тематического плана НИЦ «Курчатовский институт» (пп. А и Б) и Министерства науки и высшего образования в рамках выполнения работ по Государственному заданию ФНИЦ «Кристаллография и фотоника» РАН (в части развития методологического подхода).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Рындина Н.В. О периодизации древнейшего металлообрабатывающего производства Юго-Восточной Европы (неолит – энеолит) // Вестник Московского университета. 1992. Т. 8. № 6. С. 62–75.
2. Селимханов И.Р. Историко-химические и аналитические исследования древних пред-

- метов из медных сплавов // Академия наук АзССР. 1960. № 93. С. 183–185.
3. Черных Е.Н. Древняя металлообработка на юго-западе СССР. М.: Наука, 1976. 304 с.
4. Сапрыкина И.А., Пельгунова Л.А. Перспективы исследования археологических предметов с помощью РФА-спектрометрии

- (на примере M4 Tornado, Bruker, Германия) // Фотография. Изображение. Документ. 2013. № 4 (4). С. 80–87.
5. **Hall E.T., Metcalf D.M.** Methods of chemical and metallurgical investigations of ancient coinage // The Royal Numismatic Society. 1972. No. 8. P. 446.
6. **Dillman P., Bellot-Gurlet L., Nenner I.** (Eds.) Nanoscience and cultural heritage. France: Atlantis Press, 2016. 321 p.
7. **Васильев А.Л., Ковальчук М.В., Яцишина Е.Б.** Исследование объектов культурного наследия методами электронной микроскопии // Кристаллография. 2016. Т. 61. № 6. С. 845–857.
8. **Giumlia-Mair A., Keall E., Stock S., Shugar A.** Copper-based implements of a newly identified culture in Yemen // Journal of Cultural Heritage. 2000. Vol. 1. No. 1. Pp. 37–43.
9. **Косолапов А.И.** Естественнонаучные методы в экспертизе произведений искусства. СПб.: Изд-во Государственного Эрмитажа, 2010. 170 с.
10. **Jose-Yacamán M., Rendon L., Arenas J., Pushe M.C.S.** Maya blue paint: an ancient nanostructured material // Science. 1996. Vol. 273. No. 5272. Pp. 223–225.
11. **Pompa P., Martiradonna L., Della Torre A., Della Sala F., Manna L., De Vittorio M., Calabi F., Cingolani R., Rinaldi R.** Metal-enhanced fluorescence of colloidal nanocrystals with nanoscale control // Nature Nanotechnology. 2006. Vol. 1. Pp. 126–130.
12. **Williams D.B., Carter C.B.** Transmission electron microscopy. A textbook for materials science. USA: Springer, 2009. 832 p.
13. **Лобода А.Ю., Антипенко А.В., Колобылина Н.Н., Терещенко Е.Ю., Яцишина Е.Б.** Технология изготовления деталей конского снаряжения в предскифское время // Матер. Междунар. научн. конф. «Боспорские чтения». Вып. 19. Ред.-сост. Зинько В.Н., Зинько Е.А. Симферополь, Керчь, 2018. С. 268–274.
14. **Trifonov V.A., Shishlina N.I., Loboda A.Yu., Kolobylyina N.N., Tereschenko E.Yu., Yatsishina E.B.** The production of thin-walled jointless gold beads from the Maikop culture megalithic tomb of the early bronze age at Tsarskaya in the North Caucasus: results of analytical and experimental research // Archaeometry. 2019. Vol. 61. No. 1. Pp. 117–130.
15. **Антипенко А.В., Колобылина Н.Н., Лобода А.Ю., Терещенко Е.Ю., Мульд С.А., Смекалова Т.Н., Яцишина Е.Б.** Исследование химического состава металлических изделий из могильника Левадки // Кристаллография. 2018. Т. 63. № 4. С. 677–682.
16. **Лобода А.Ю., Терещенко Е.Ю., Антипенко А.В., Ретивов В.М., Пресняков М.Ю., Колобылина Н.Н., Кондратьев О.А., Шишлина Н.И., Яцишина Е.Б., Кашкаров П.К.** Методы определения элементного состава металла археологических объектов при коррозионных наслоениях и в ограниченных условиях пробоотбора материала // Поволжская археология. 2018. № 4 (26). С. 203–221.
17. **Лобода А.Ю., Колобылина Н.Н., Велигжанин А.А., Зубавичус Я.В., Терещенко Е.Ю., Шишлина Н.И., Яцишина Е.Б., Кашкаров П.К.** Комплексное исследование слоя покрытия наконечника копья из кургана № 1 могильника у станицы Новосвободная // Кристаллография. 2018. Т. 63. № 2. С. 320–327.
18. **Колобылина Н.Н., Грешников Э.А., Васильев А.Л., Терещенко Е.Ю., Зайцева И.Е., Макаров Н.А., Кашкаров П.К., Яцишина Е.Б., Ковальчук М.В.** Электронно-микроскопические исследования древнерусского декорированного чернью креста-энколпиона XII века // Кристаллография. 2017. Т. 62. № 4. С. 543–550.
19. **Грешников Э.А., Терещенко Е.Ю., Зайцева И.Е., Велигжанин А.А., Дороватовский П.В., Демкив А.А., Шушунов М.Н., Колобылина Н.Н., Лобода А.Ю., Яцишина Е.Б.** Древнерусский крест-тельник из селища Суворотское-1 в Суздальском Ополе (опыт комплексного технологического исследования) // Труды V (XXI) Всероссийского археологического съезда в Барнауле – Белокурихе. Сборник научных статей в 3 тт. Барнаул: Изд-во Алт. ун-та, 2017. Т. 3. С. 23–27.
20. **Глазков В.П., Коваленко Е.С., Мурашев М.М., Подурец К.М., Велигжанин А.А., Колобылина Н.Н., Расторгуев В.А., Тулубенский М.Г., Терещенко Е.Ю., Кашкаров П.К., Яцишина Е.Б., Ковальчук М.В.** Исследование бронзовых статуй «Иоанн Креститель» и «Танцующий Амур» из фондов ГМИИ им. А.С. Пушкина // Кристаллография. 2018. Т. 63. № 4. С. 670–676.
21. **Лобода А.Ю., Колобылина Н.Н., Терещенко Е.Ю., Мурашева В.В., Шевцов А.О., Васильев А.Л., Ретивов В.М., Кашкаров П.К., Яцишина Е.Б., Ковальчук М.В.** Исследование технологии золочения «идола» из кургана «Черная могила» (X век) // Кристаллография. 2018. Т. 63. № 6. С. 992–1000.

СВЕДЕНИЯ ОБ АВТОРАХ

ПРЕСНЯКОВА Наталья Николаевна — инженер-исследователь Национального исследовательского центра (НИЦ) «Курчатовский институт», Москва, Российская Федерация.
123182, Российская Федерация, г. Москва, пл. Акад. Курчатова, 1
kolobyлина@gmail.com

ВАСИЛЬЕВ Александр Леонидович — кандидат физико-математических наук, ведущий научный сотрудник НИЦ «Курчатовский институт», начальник лаборатории электронной микроскопии Института кристаллографии им. А.В. Шубникова (ФНИЦ «Кристаллография и фотоника» РАН), Москва, Российская Федерация.
123182, Российская Федерация, г. Москва, пл. Акад. Курчатова, 1;
119333, Российская Федерация, г. Москва, Ленинский проспект, 59
a.vasiliev56@gmail.com

ТЕРЕЩЕНКО Елена Юрьевна — кандидат физико-математических наук, заместитель начальника лаборатории естественнонаучных методов в гуманитарных науках НИЦ «Курчатовский институт», старший научный сотрудник Института кристаллографии им. А.В. Шубникова (ФНИЦ «Кристаллография и фотоника» РАН), Москва, Российская Федерация.
123182, Российская Федерация, г. Москва, пл. Акад. Курчатова, 1;
119333, Российская Федерация, г. Москва, Ленинский проспект, 59
elenatereschenko@yandex.ru

ЯЦИШИНА Екатерина Борисовна — кандидат философских наук, начальник лаборатории естественнонаучных методов в гуманитарных науках, заместитель директора по научной работе НИЦ «Курчатовский институт», Москва, Российская Федерация.
123182, Российская Федерация, г. Москва, пл. Акад. Курчатова, 1
Yatsishina_EV@nrcki.ru

REFERENCES

1. Ryndina N.V., O periodizatsii drevneyshego metalloobrabatyvayushchego proizvodstva Yugo-Vostochnoy Yevropy (neolit — eneolit) [On periodization of the most ancient metal-working production in the South-East Europe (neolith — eneolith)], Bulletin of Moscow University. 8 (6) (1992) 62–75.
2. Selimkhanov I.R., Istoriko-khimicheskiye i analiticheskiye issledovaniya drevnikh predmetov iz mednykh splavov [Historical-chemical and analytical studies of ancient things made of copper alloys], Akad. nauk AzSSR. 93 (1960) 183–185.
3. Chernykh E.N., Drevnyaya metalloobrabotka na yugo-zapade SSSR [The ancient metal-working in the South-West of the USSR], Nauka, Moscow, 1976.
4. Saprykina I.A., Pelgunova L.A., Perspektivy issledovaniya arkheologicheskikh predmetov s pomoshchyu RFA-spektrometrii (na primere M4 Tornado, Bruker, Germaniya) [The prospects for research of archaeological objects using RF-spectrometry (Tornado, Bruker, Germany, as an example)], Fotography. Image. Document. (4 (4)) (2013) 80–87.
5. Hall E.T., Metcalf D.M., Methods of chemical and metallurgical investigations of ancient coinage, The Royal Numismatic Society. (8) (1972). 446.
6. Dillman P., Bellot-Gurlet L., Nenner I., Nanoscience and cultural heritage, Atlantis Press, France, 2016.
7. Vasilyev A.L., Kovalchuk M.V., Yatsishina E.B., Electron microscopy methods in studies of cultural heritage sites, Crystallography Reports. 61 (6) (2016) 845–885.
8. Giumlia-Mair A., Keall E., Stock S., Shugar A., Copper-based implements of a newly identified culture in Yemen, Journal of Cultural Heritage. 1 (1) (2000) 37–43.
9. Kosolapov A.I., Yestestvennonauchnyye metody v ekspertize proizvedeniy iskusstva [Natural-scientific methods in the expertise of works of art], The State Hermitage Publishing, St. Petersburg, 2010.
10. Jose-Yacaman M., Rendon L., Arenas J., Maya blue paint: an ancient nanostructured material, Science. 273 (5272) (1996) 223 – 225.
11. Pompa P., Martiradonna L., Della Torre A., et al., Metal-enhanced fluorescence of colloidal nanocrystals with nanoscale control, Nature



Nanotechnology. 1 (2006) 126–130.

12. **Williams D.B., Carter C.B.**, Transmission electron microscopy. A textbook for materials science. US, Springer, 2009.

13. **Loboda A.Yu., Antipenko A.V., Kolobylyna N.N., et al.**, The technology of manufacturing details of horse equipment in the pre-Scythian time, Proc. of the Internat. Sci. Conf. “Bosporus Readings”, Iss. 19, Ed. by Zinko V.N., Zinko E.A., Simferopol, Kerch (2018) 268–274.

14. **Trifonov V.A., Shishlina N.I., Loboda A.Yu., et al.**, The production of thin-walled jointless gold beads from the Maikop culture megalithic tomb of the early bronze age at Tsarskaya in the North Caucasus: results of analytical and experimental research, Archaeometry. 61 (1) (2019) 117–130.

15. **Antipenko A.V., Kolobylyna N.N., Loboda A.U., et al.**, Investigations of the chemical composition of the metal finds from the Levadki necropolis, Crystallography Reports. 63 (4) (2018). 699–704.

16. **Loboda A.Yu., Tereschenko E.Yu., Antipenko A.V., et al.**, Local and integral techniques in metal compositional analysis of archeological objects with surface corrosion layers and small sample quantities, The Volga River Region Archaeology. (4 (26)) (2018) 203–221.

17. **Loboda A.Y., Kolobylyna N.N., Veligzhanin A.A., et al.**, Complex study of the spearhead

superficial crust from burial mound No. 1 near Novosvobodnaya village, Crystallography Reports. 63 (2) (2018) 295–301.

18. **Kolobylyna N.N., Greshnikov E.A., Vasilyev A.L., et al.**, Electron microscopy study of an Old Russian (XII century) encolpion cross with black inlay, Crystallography Reports. 62 (4) (2017) 529–536.

19. **Greshnikov E.A., Tereschenko E.Yu., Zaytseva I.E., et al.**, Drevnerusskiy krest-telnik iz selishcha Syvorotskoye-1 v Suzdalskom Opoliye (opyt kompleksnogo tekhnologicheskogo issledovaniya) [Old Russian cross-vest from Suvorotskoye-1 settlement in the Suzdal Opoliye (The experience of complex technological study), Transactions of the 5th (21) All-Russian Archeology Congress in Barnaul – Belokurikha. The collection of scientific papers in 3 volumes, Vol. 3 (2017) 23–27.

20. **Glazkov V.P., Kovalenko Ye.S., Murashev M.M., et al.**, Study of bronze statues “John the Baptist” and “Dancing Cupid” from the collections of the Pushkin State Museum, Crystallography Reports. 63 (4) (2018) 692–698.

21. **Loboda A.Y., Kolobylyna N.N., Tereshchenko E.Y., et al.**, Study of the gilding technology of the “Idol” from the 10th century mound “Chernaya Mogila” (“Black Grave”). Crystallography Reports. 63 (6) (2018) 1034–1042.

Received 28.06.2019, accepted 09.07.2019.

THE AUTHORS

PRESNIAKOVA Natalia N.

National Research Centre “Kurchatov Institute”

1, Akademika Kurchatova Sq., Moscow, 123182, Russian Federation
kolobylyna@gmail.com

VASILIEV Alexander L.

National Research Centre “Kurchatov Institute”,

Shubnikov Institute of Crystallography of Federal Scientific Research Centre “Crystallography and Photonics” of Russian Academy of Sciences

1, Akademika Kurchatova Sq., Moscow, 123182, Russian Federation
59 Leninskiy Ave., Moscow, 119333, Russian Federation
a.vasiliev56@gmail.com

TERESCHENKO Elena Yu.

National Research Centre “Kurchatov Institute”,

Shubnikov Institute of Crystallography of Federal Scientific Research Centre “Crystallography and Photonics” of Russian Academy of Sciences

1 Akademika Kurchatova Sq., Moscow, 123182, Russian Federation
59 Leninskiy Pr., Moscow, 119333, Russian Federation
elenatereschenko@yandex.ru

YATSISHINA Ekaterina B.

National Research Centre "Kurchatov Institute"

1, Akademika Kurchatova Sq., Moscow, 123182, Russian Federation

Yatsishina_EB@nrcki.ru

DOI: 10.18721/JPM.12308
УДК 533.9.01

СРАВНЕНИЕ СПОСОБНОСТИ ИСПУСКАНИЯ ОПТИЧЕСКОГО ИЗЛУЧЕНИЯ ЭЛЕКТРООТРИЦАТЕЛЬНОГО ТЛЕЮЩЕГО РАЗРЯДА В ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ И КООКСИАЛЬНОЙ ГЕОМЕТРИИ

А.П. Головицкий, О.А. Ремига

Санкт-Петербургский политехнический университет Петра Великого,
Санкт-Петербург, Российская Федерация

Для положительного столба электроотрицательного тлеющего разряда среднего давления в смеси хлора с инертным газом теоретически исследован переход от традиционной цилиндрической геометрии разряда к коаксиальной, когда плазма разряда локализована в зазоре между двумя коаксиально расположенными цилиндрическими трубками; при этом возникает новый механизм потерь электронов – их диффузионный уход на внутреннюю стенку. Показано, что существование разряда становится возможным лишь при существенном увеличении частоты ионизации и, соответственно, электронной температуры; последнее вызовет возрастание удельной мощности ультрафиолетового излучения разряда. Получены аналитические выражения для оценки электронной температуры плазмы указанного разряда в коаксиальной геометрии.

Ключевые слова: излучение плазмы, электроотрицательный разряд, электронная температура, частота ионизации, коаксиальная геометрия

Ссылка при цитировании: Головицкий А.П., Ремига О.А. Сравнение способности испускания оптического излучения электроотрицательного тлеющего разряда в цилиндрической и коаксиальной геометрии // Научно-технические ведомости СПбГПУ. Физико-математические науки. 2019. Т. 12. № 3. С. 101–109. DOI: 10.18721/JPM.12308

THE ELECTRONEGATIVE GLOW DISCHARGE IN THE CYLINDRICAL AND COAXIAL GEOMETRY: THE COMPARISON OF OPTICAL RADIATION EMISSION ABILITY

A.P. Golovitskii, O.A. Remiga

Peter the Great St. Petersburg Polytechnic University, St. Petersburg, Russian Federation

The transition from the traditional cylindrical discharge geometry to the coaxial one (where the discharge plasma is located in a gap between two coaxially placed cylindrical tubes) has been theoretically investigated for the positive column of an electronegative middle pressure glow discharge in the mixture of chlorine and inert gases. Here a new electron's loss mechanism appears, i.e. the electron's diffusional outgoing onto the inner wall. The discharge existence was proved to be only made possible by sufficient increasing of the ionization frequency and hence the electron temperature as well. The elevation of the electron temperature would cause a growth of the specific power of discharge ultraviolet radiation. The analytical expressions for estimating the electron temperature of the discharge plasma in the coaxial geometry were derived.

Keywords: plasma radiation, electronegative discharge, electron temperature, ionization frequency, coaxial geometry

Citation: Golovitskii A.P., Remiga O.A., The electronegative glow discharge in the cylindrical and coaxial geometry: the comparison of optical radiation emission ability, St. Petersburg Polytechnical State University Journal. Physics and Mathematics. 12 (3) (2019) 101–109. DOI: 10.18721/JPM.12308

Введение

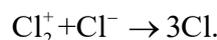
Под коаксиальной геометрией разряда будем, как и в работе [1], подразумевать, что разряд происходит в зазоре между двумя коаксиально расположенными цилиндрическими трубками, плазма имеет трубчатую форму, а продольное поле E_z и ток разряда направлены вдоль оси трубок. Подобные электроотрицательные разряды в смесях инертных газов с хлором используются на практике как рабочие среды мощных эффективных источников ультрафиолетового (УФ) излучения [2, 3], не содержащих ртути. Излучающими частицами в них являются эксимерные молекулы – хлориды инертных газов.

В нашей работе [1] отмечено, что для положительного столба электроотрицательного тлеющего газового разряда среднего давления (до 40 Тор) в коаксиальной геометрии имеет место увеличение частоты ионизации, по сравнению со случаем цилиндрической геометрии даже при малом (0,05 – 0,10) отношении R_1/R_2 – радиуса внутренней стенки разрядной трубки к радиусу внешней. Поэтому логично предположить, что при этом должны увеличиться и скорости заселения возбужденных состояний атомов газа, а также удельная мощность оптического излучения разряда. Но этот важный для практического применения газоразрядных источников света вопрос изучен не был.

Цель данной работы – показать теоретически, что переход от цилиндрической к коаксиальной геометрии названных разрядов вызовет увеличение электронной температуры T_e , а, следовательно, и концентрации эксимерных молекул в положительном столбе, а также оценить количественно прирост величины T_e и удельной мощности эксимерного УФ-излучения.

Описание модели

В плазме галогенсодержащих разрядов, как показано в работах [4, 5], среди положительных ионов преобладают молекулярные (Cl_2^+ для хлора), а доминирующим механизмом гибели отрицательных ионов Cl^- является диссоциативная ион-ионная рекомбинация:



Принятые обозначения. Введем следующие обозначения: ν_i, ν_a – частоты ионизации и прилипания; ρ_i – коэффициент

ион-ионной рекомбинации; T_j, μ_j, n_j – температура, подвижность и абсолютная концентрация заряженных частиц j -го сорта; индексы $j = e, p, n$ соответствуют электронам, положительным и отрицательным ионам; D_{ap}^*, D_{an}^* – приведенные частоты диффузии ионов; n_{e0} – максимальная электронная концентрация;

$$\begin{aligned} D_{ap}^* &= \mu_p T_e / (eR_2^2); \\ D_{ap}^* &= D_{ap}^* / \mu_{pn}; \\ \mu_{pn} &= \mu_p / \mu_n; \mu_{np} = \mu_n / \mu_p; \\ \nu &= \nu_i / D_{ap}^*; \alpha = \nu_a / D_{an}^*; \\ \eta &= n_{e0} \rho_i / D_{ap}^*; \end{aligned} \quad (1)$$

здесь ν, α, η – безразмерные приведенные частоты соответственно ионизации, прилипания и ион-ионной рекомбинации.

Далее, X – поперечная приведенная (безразмерная) радиальная координата, X_1 – приведенная координата внутренней стенки;

$$X = r/R_2; X_1 = R_1/R_2; X \leq X \leq 1;$$

$n(X), N(X), P(X)$ – относительные пространственные распределения электронов, отрицательных и положительных ионов по координате X (поперечная направлению тока); τ_p, τ_n – отношения температур ионов и электронов;

$$\begin{aligned} n(X) &= n_e(X) / n_{e0}; \\ N(X) &= n_n(X) / n_{e0}; \\ P(X) &= n_p(X) / n_{e0}; \\ \tau_j &= T_j / T_e; \tau_p \approx \tau_n \approx \tau. \end{aligned} \quad (2)$$

В излагаемой модели, как и в работах [1, 6], приняты квазинейтральность, т.е.

$$P(X) = n(X) + N(X), \quad (3)$$

а также постоянство величин $\nu_i, \nu_a, \rho_i, \mu_j$ по поперечному сечению плазмы и неизотермичность плазмы, т.е. принято $T_e \gg T_p, T_n$. Однако величины τ_p, τ_n не полагаются пренебрежимо малыми.

Математическое описание. В работах [1, 6] получены следующие уравнения для переменных N, P и n :

$$-\Delta N \cdot \tau_n + \nabla \left(\frac{N}{n} \nabla n \right) \approx \alpha n - \mu_{pn} \eta NP, \quad (4)$$



$$-\Delta P \cdot \tau_p - \nabla \left(\frac{P}{n} \nabla n \right) \approx \nu n - \eta NP \quad (5)$$

с нулевыми граничными условиями на стенках для любого типа заряженных частиц. Производные в уравнениях (4) и (5) берутся по приведенной координате X .

Известно [6 – 8], что для электроотрицательных разрядов характерно расслоение плазмы в поперечном к протеканию тока направлении на центральную область ион-ионной ($i-i$) плазмы (далее «сердцевина») с относительно малым содержанием электронов и на периферийную область электрон-ионной ($e-i$) плазмы (далее «оболочка»), почти не содержащую отрицательных ионов с режимом диффузии плазмы, близким к амбиполярному. Ограничимся случаем сильной электроотрицательности, когда $\alpha \gg 1$, и в сердцевине

$$N \approx P \gg n \sim 1, \quad (6)$$

а в оболочке

$$P \approx n \gg N, \quad (7)$$

причем оболочка тонкая и ее даже для цилиндрической геометрии разряда можно рассматривать как плоскую [7, 8].

Сложим уравнения (4) и (5). Из такой суммы, если учесть условия (6), получим для сердцевины следующее соотношение:

$$\Delta N \cdot \tau_s \approx (\mu_{pn} + 1) \eta N^2 - (\nu + \alpha), \quad (8)$$

где $\tau_s = \tau_p + \tau_n$

Если же учесть неравенство (7), справедливое для оболочки, где мало отрицательных ионов, а к тому же присутствует сильное поперечное поле E_x [7], что дает возможность пренебречь ионной диффузией, то получим:

$$\Delta n = -(\nu + \alpha)n. \quad (9)$$

Уравнение (8) исследовано нами в работе [1], где показано, что если выполняется неравенство

$$0,01 \leq \tau < 1,0, \quad (10)$$

то при условии

$$0,3 \leq R_1/R_2 < 1,0 \quad (11)$$

решение (8) для коаксиальной геометрии оказывается близким к симметричному относительно точки с координатой $(X_1+1)/2$. Такая симметрия позволяет переместить в эту точку нуль координаты X , а также записать решение как

$$N(X) \approx \frac{\nu + \alpha}{2\tau_s} X_0^2 \left[1 - \left(\frac{X}{X_0} \right)^2 \right] \quad (12)$$

и проводить дальнейшие расчеты для коаксиальной геометрии как для плоской геометрии (назовем это приближением плоской геометрии). Здесь X_0 – отсчитываемая от нового нуля координата, при которой $N(X)$ полагается равной нулю, т. е. X_0 является приведенной координатой границы между плазмами $i-i$ и $e-i$. Само значение X_0 пока неизвестно и далее подлежит расчету.

Приведенная координата внешней стенки (до сдвига координат она была равна единице) станет в приближении плоской геометрии равной

$$\sigma = \frac{R_2 - R_1}{2R_2} < \frac{1}{2},$$

а координата X будет находиться в пределах от 0 до σ .

Ввиду отсутствия данных, полученных из каких-либо реальных экспериментов, справедливость результата (12) проверялась посредством его сравнения с результатом вычислительного эксперимента (далее ВЭ) [1, 6]. Последний представляет собой модель, в которой при минимуме априорных предположений численно решается система стационарных уравнений для потоков заряженных частиц плазмы и их концентраций в положительном столбе электроотрицательного тлеющего разряда – как задача на собственные значения. В результате такого подхода удается вычислить пространственные профили концентраций электронов и ионов, величины частот плазмохимических процессов, а также провести верификацию полученных аналитических выражений и определить области их применимости. В итоге установлено, что использование выражения (12) для коаксиальной геометрии дает при соблюдении неравенств (10) и (11) погрешности величин $N(X)$ и $n(X)$ не более 12 %, а при

$$0,5 \leq R_1/R_2 < 1,0$$

– не более 6 %.

Для неизотермической плазмы величина $\tau < 1$, поэтому отрицательные ионы не попадают на стенки и гибнут только в объеме плазмы. Следовательно средние по ее сечению скорости рождения и гибели отрицательных ионов должны быть равны, т. е.

$$\alpha \int_0^{\sigma} n(X) dX = \mu_{pn} \eta \int_0^{X_0} N^2(X) dX. \quad (13)$$

Соотношение (13) будет далее использовано при расчете величины X_0 , но для взятия интеграла в левой части нужно знать функцию $n(X)$. В сердцевине (см. неравенство (6)) $n(X) \approx 1$, а в оболочке, как утверждалось в работе [6] по результатам ВЭ, зависимость распределения $n(X)$ при $\tau \geq 0,01$ близка к линейной.

Линейность зависимости $n(X)$

Теоретически подтвердим линейность зависимости $n(X)$.

Согласно выражению (9), в оболочке для приближения плоской геометрии выполняется равенство

$$n(X) = n_m \sin \left[\sqrt{\nu + \alpha} (\sigma - X) \right], \quad (14)$$

откуда получим

$$n'(X) = -n_m \sqrt{\nu + \alpha}.$$

С другой стороны, согласно уравнению (5) и условию (7), в оболочке

$$-\Delta n (1 + \tau) \approx \nu n$$

или (для приближения плоской геометрии)

$$n'(\sigma) = -\frac{\nu}{1 + \tau} \int_0^{\sigma} n(X) dX.$$

При сильной электроотрицательности оболочка тонка, а в сердцевине значение функции $n(X) \approx 1$, поэтому сердцевина даст основной вклад в величину интеграла. Тогда

да величину $n'(\sigma)$ можно оценить как

$$n'(\sigma) \approx -\frac{\nu \sigma}{1 + \tau}. \quad (15)$$

Приравняв оба выражения для $n'(\sigma)$, получим следующее выражение:

$$n_m \approx \frac{\nu \sigma}{(1 + \tau) \sqrt{\nu + \alpha}}. \quad (16)$$

Результаты расчетов по формулам (15) и (16) в сравнении с данными ВЭ приведены в табл. 1. Пример приведен для $\alpha = 8$ и для плоской геометрии, т.е. при $\sigma = 1$.

Данные табл. 1 показывают, что выражение (15) обеспечивает соответствие значения $n'(1)$ вычислительному эксперименту с погрешностью не более 22 %. Главный результат здесь, однако, в том, что значения n_m существенно превосходят единицу и растут с увеличением τ . Уравнению (9) это не противоречит. Но $n(X) \leq 1$ по определению. Поэтому зависимость $n(X)$ в оболочке должна соответствовать лишь самому началу синусоидальной зависимости (14), т.е. вблизи стенки $n(X)$ должна быть близкой к линейной, а именно (в приближении плоской геометрии):

$$n(X) \approx \frac{\nu \sigma}{1 + \tau} (\sigma - X).$$

Физически линейность $n(X)$ в оболочке при $\tau > 0$ вызвана диффузионным проникновением отрицательных ионов со стороны

Таблица 1
Результаты расчета зависимости величин $n'(1)$ и n_m
от приведенной частоты ионизации
и относительной ионной температуры

ВЭ	τ	$n'(1)$		n_m
		ВЭ	По формуле (15)	По формуле (16)
24,9	0,01	-24	-24,7	4,3
55,2	0,05	-47	-52,6	6,6
92,7	0,10	-107	-84,0	8,4
167	0,20	-177	-140	10,5

Обозначения: ν – приведенная частота ионизации, полученная в вычислительном эксперименте (ВЭ) при различных величинах относительной ионной температуры τ , $n'(1)$ – производная профиля электронной концентрации на стенке, n_m – амплитуда синусоидальной зависимости (14).

Примечание: Представлены расчетные данные для случая $\alpha = 8$ и для плоской геометрии, т.е. при $\sigma = 1$.



(*i-i*)-плазмы в оболочку против поперечного поля оболочки

$$E_x \propto \frac{\nabla n_e}{n_e},$$

которое является слабым вблизи максимума синусоидальной зависимости (14). Такое проникновение, во-первых, увеличивает размер сердцевинки при сокращении размера оболочки, а во-вторых, отрицательные ионы нейтрализуют тормозящее уходящее электронов поле E_x в той области, куда им удастся проникнуть. Электроны из этой области быстро уходят в оставшуюся часть оболочки не в амбиполярном, а в близком к свободному режиму диффузии.

В итоге для коаксиальной геометрии (в приближении плоской геометрии) можно положить, что в оболочке выполняется приближенное равенство

$$n(X) \approx (\sigma - X) / (\sigma - X_0). \quad (17)$$

Если подставить выражения (10) и (17) в равенство (13), то можно после ряда преобразований получить следующую зависимость:

$$X_0 \approx \left[\frac{15\alpha a}{2\mu_{pn}\eta} \left(\frac{\tau_s}{\nu + \alpha} \right)^2 \right]^{1/5}, \quad (18)$$

где $a = (\sigma + X_0)/2$.

Из выражения (18) можно оценить величину X_0 , входящую туда в неявной форме. Если же $a \geq 0,7\sigma$, т. е. $0,4\sigma \leq X_0 < \sigma$, то величину X_0 с погрешностью не более 5 – 10 % можно оценивать по более простой и явной формуле:

$$X_0 \approx \left[\frac{15\alpha\sigma}{2\mu_{pn}\eta} \left(\frac{\tau_s}{\nu + \alpha} \right)^2 \right]^{1/5}. \quad (19)$$

Поток положительных ионов из оболочки на стенку течет фактически в амбиполярном режиме [7, 8] (так как в оболочке $n_n \ll n_e \approx n_p$):

$$\Gamma_p \approx -D_{ap} \frac{dn_p}{dx}.$$

Поскольку в сердцевине при сильной электроотрицательности

$$n_p \approx n_n \gg n_e \text{ и } n_e \approx n_{e0}$$

(см. условие (6)), а в оболочке $n_p \approx n_e$, то, в соответствии с выражением (17),

$$\frac{dn_p}{dx} \approx -\frac{n_{e0}}{(\sigma R_2 - x_0)},$$

где x_0 – абсолютная координата границы между плазмами *i-i* и *e-i*.

Формируется поток Γ_p в сердцевине плазмы, и при x_0 он соответствует выражению

$$\Gamma_p = \nu_i \int_0^{x_0} n_e(x) dx - \rho_i \int_0^{x_0} n_p(x) n_n(x) dx.$$

Если приравнять вышеприведенные выражения для Γ_p при x_0 и учесть равенство (13), то получим следующее выражение (для приближения плоской геометрии):

$$\nu - \frac{\alpha}{2\mu_{pn}} \cdot \frac{\sigma + X_0}{X_0} \approx \frac{1}{X_0(\sigma - X_0)}. \quad (20)$$

Из этого выражения можно вычислить величину ν , подставив X_0 из формулы (19). Отметим, что расхождение данных ВЭ и расчетов значений ν по формулам (20) и (19) не превышает 18 % (табл. 2). Если же выразить ν и α как функции T_e , то последнюю также можно вычислить, рассмотрев выражение (20) как трансцендентное уравнение относительно T_e .

Таким образом, для электроотрицательного тлеющего разряда в коаксиальной геометрии выражение (20) является аналогом формулы Шоттки, используемой для оценок T_e плазмы положительного столба электроположительного тлеющего разряда в цилиндрической геометрии [9].

Пример реализации расчета

Для примера рассмотрим электроотрицательный тлеющий газовый разряд в смеси 6 Тор ксенона Xe и 0,25 Тор хлора Cl₂ (по напуску) при токе 10 мА. Примем радиус внешней цилиндрической трубки равным $R_2 = 6$ мм, температуру газа $T_g = 500$ К; концентрация ксенона с учетом термовытеснения равна

$$N_{Xe} = 1,3 \cdot 10^{17} \text{ см}^{-3},$$

а хлора, с учетом диссоциации молекул хлора электронным ударом [8], –

$$N_{Cl_2} = 1,75 \cdot 10^{14} \text{ см}^{-3},$$

Аппроксимации частоты ионизации

$$\nu_i \cong N_{Xe} \cdot 9,2 \cdot 10^{-8} \exp(-12,9/T_e) 1/\text{с}$$

и частоты прилипания

$$\nu_a \cong N_{Cl_2} 3,69 \cdot 10^{-10} \times$$

$$\times \exp(-1,68/T_e + 1,457/T_e^2 - 0,44/T_e^3) 1/\text{с}$$

(T_e – в эВ, концентрации – в см^{-3}) взяты из работы [10]. Принимаем

$$\tau_p = \tau_n = \tau = 0,05.$$

Необходимо заметить, что использование понятия электронной температуры T_e , равносильное допущению максвелловской функции распределения электронов по энергиям (ФРЭЭ), для плазмы разрядов в смесях инертных газов с хлором является упрощенной идеализацией. В действительности, если определить T_e как параметр максвелловской ФРЭЭ, адекватно описывающей возбуждение высоколежащих уровней атома инертного газа и его ионизацию электронным ударом (так называемая «температура быстрых электронов» [11]), то для указанного выше разряда в цилиндрической геометрии модель, представленная нами в работе [8], дает величину $T_e \approx 1,2$ эВ. Но если в рамках той же модели рассчитать для тех же условий разряда величины D_e и μ_e (они определяются медленными электронами), используя при этом полученную из кинетического уравнения ФРЭЭ, а затем рассчитать температуру электронов, воспользовавшись соотношением Эйнштейна, как $T_e = eD_e/\mu_e$, то значение такой температуры T_e окажется более 6 эВ.

Чтобы учесть в дальнейших расчетах разницу «температур» быстрых и медленных

электронов, величины D_{ap}^* и D_{an}^* , входящие в выражения для ν и α , рассчитывались как

$$D_{ap}^* = \mu_p \beta T_e / (eR_2^2),$$

$$D_{an}^* = \mu_n \beta T_e / (eR_2^2),$$

а величина $\beta = 6$ была подобрана для обеспечения наилучшего согласия результатов расчетов с данными вычислительного эксперимента. Коэффициент ион-ионной рекомбинации принят равным

$$\rho_i \approx 2,9 \cdot 10^{-9} \sqrt{T_g},$$

в соответствии с данными, приведенными в статьях [12, 13].

Результаты расчетов приведены в табл. 2 для цилиндрической и коаксиальной геометрии при разных значениях отношений радиусов внутренней и внешней стенок R_1/R_2 , но при сохранении постоянного значения радиуса внешней стенки R_2 . В качестве величины T_e указана «температура быстрых электронов». Под S_{rel} следует понимать относительную (по отношению к цилиндрической геометрии, при которой $R_1/R_2 = 0$) площадь поперечного сечения плазмы в коаксиальной геометрии.

Для расчета концентрации эксимерных молекул N_{XeCl^*} (удельная мощность УФ-излучения плазмы разряда пропорцио-

Таблица 2
Результаты расчета величин T_e и N_{XeCl^*} для коаксиального и цилиндрического тлеющих разрядов в газовой смеси Хе и Cl_2 в зависимости от соотношения внутреннего и внешнего радиусов разрядной трубки

R_1/R_2	S_{rel}	T_e , эВ (расчет по (20))	ν		α	N_{XeCl^*} , отн. ед.
			ВЭ	Из рассчитанной T_e		
0,00	1,00	1,20	120	99,2	8,00	1,0
0,15	0,98	1,31	231	217	7,48	1,8
0,28	0,92	1,36	330	304	7,24	2,3
0,50	0,75	1,48	–	615	6,75	4,0
0,64	0,59	1,62	1142	1174	6,31	6,6
0,80	0,35	1,94	–	3672	5,51	16,7

Обозначения: ν – приведенная частота ионизации, T_e – электронная температура, α – приведенная частота прилипания, S_{rel} – относительная площадь поперечного сечения плазмы в коаксиальной геометрии (по отношению к цилиндрической), N_{XeCl^*} – концентрация эксимерных молекул, пропорциональная удельной мощности УФ-излучения плазмы.

Примечание. Первая строка таблицы относится к случаю цилиндрической геометрии тлеющего разряда.



нальна этой концентрации) было использовано соотношение [14]:

$$N_{\text{XeCl}} \cdot \infty \langle \sigma_{0M} v_e \rangle,$$

где

$$\langle \sigma_{0M} v_e \rangle = 4,26 \cdot 10^{-9} \exp(-7,986/T_e) + 1,36 \cdot 10^{-8} \exp(-9,753/T_e),$$

а σ_{0M} – суммарное сечение возбуждения метастабильных и резонансных уровней ксенона электронным ударом (оно взято из статьи [15]).

Обсуждение результатов

Главная физическая причина увеличения T_e и удельной мощности УФ-излучения разряда при переходе от цилиндрической геометрии к коаксиальной (при сохранении постоянным значения R_2) заключается в качественном изменении условий разряда, а именно в возникновении дополнительного канала потерь электронов – их диффузионного ухода на внутреннюю стенку. Для компенсации этого ухода, т. е. для поддержания существования разряда в условиях коаксиальной геометрии, необходима увеличенная частота ионизации ν_i , по сравнению со случаем цилиндрической геометрии. Необходимостью увеличения ν_i обусловлен рост T_e при названном переходе (см. табл. 2). При дальнейшем сужении межстеночного зазора в коаксиальной геометрии, т. е. при $R_1/R_2 \rightarrow 1$, потери электронов будут еще

более возрастать, что потребует дальнейшего увеличения как ν_i , так и, соответственно, T_e (как следует из данных табл. 2). Рост T_e , в свою очередь, приведет к росту скоростей возбуждения энергетических уровней ксенона, что при наличии хлора в составе смеси газов обеспечит увеличение концентрации эксимерных молекул и удельной мощности УФ-излучения, испускаемого плазмой.

Заключение

Теоретически исследован переход от традиционной цилиндрической геометрии электроотрицательного тлеющего разряда среднего давления в коаксиальной геометрии, когда плазма разряда локализована в зазоре между двумя коаксиально расположенными цилиндрическими трубками. На примере разряда в смеси ксенона и хлора количественно исследовано воздействие дополнительного возникшего механизма потерь электронов – их диффузионного ухода на внутреннюю стенку – на электронную температуру и удельную мощность УФ-излучения плазмы разряда. Продемонстрирован существенный рост величин названных параметров плазмы разряда при переходе от цилиндрической к коаксиальной геометрии. Полученный результат может быть эффективно использован при создании и эксплуатации газоразрядных источников света и УФ-излучения.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Головицкий А.П. Коаксиальный (трубчатый) тлеющий разряд в электроотрицательных газах // ЖТФ. 2016. Т. 86. № 7. С. 38–45.
2. Skakun V.S., Lomaev M.I., Tarasenko V.F., Shitts D.V. High-power UV exilamps excited by a glow discharge // Laser and Particle Beams. 2003. Vol. 21. No. 1. Pp. 115–119.
3. Panchenko A.N., Sosnin E.A., Tarasenko V.F. Improvement of output parameters of glow discharge UV exilamps // Optics Communications. 1999. Vol. 161. No. 4–6. Pp. 249–252.
4. Rogoff G.L., Kramer J.M., Piejak R.B. A model for the bulk plasma in an RF chlorine discharge // IEEE Trans. Plasma Sci. 1986. Vol. PS-14. No. 2. Pp. 103–111.
5. Franklin R.N., Daniels P.G., Snell J. Characteristics of electric discharges in the halogens: the recombination-dominated positive column // J. Phys. D: Appl. Phys. 1993. Vol. 26. No. 10. Pp. 1638–1649.
6. Головицкий А.П. Простые аналитические формулы для оценки параметров положительного столба электроотрицательного тлеющего разряда при наличии галогенов в составе газовой смеси // ЖТФ. 2014. Т. 84. № 11. С. 21–30.
7. Цендин Л.Д. Расслоение газоразрядной плазмы в электроотрицательных газах // ЖТФ. 1989. Т. 59. № 1. С. 21–28.
8. Головицкий А.П. Моделирование положительного столба тлеющего разряда в смеси инертных газов и хлора с учетом диссоциации молекул хлора // ЖТФ. 2011. Т. 81. № 3. С. 45–54.
9. Энгель А., Штенбек М. Физика и техника электрического разряда в газах. В 2 тт. Т. 2. Свойства газовых разрядов. Технические применения. Москва, Ленинград: ОНТИ НКТП

СССР, 1936. 384 с.

10. **Lichtenberg A.J., Kouznetsov I.G., Lee Y.T., Lieberman M.A., Kaganovich I.D., Tsendin L.D.** Modelling plasma discharges at high electronegativity // *Plasma Sources Sci. Technol.* 1997. Vol. 6. No. 3. Pp. 437–449.

11. **Богданов Е.А., Кудрявцев А.А., Цендин Л.Д., Арсланбеков Р.Р., Колобов В.И., Кудрявцев В.В.** Влияние метастабильных атомов и нелокальности электронного распределения на характеристики положительного столба разряда в аргоне // *ЖТФ.* 2004. Т. 74. № 6. С. 35–42.

12. **Church M.J., Smith D.** Ionic recombination of atomic and molecular ions in flowing

afterglow plasmas // *J. Phys. D: Appl. Phys.* 1978. Vol. 11. No. 16. Pp. 2199–2206.

13. **Moratz T.J., Saunders T.D., Kushner M.J.** High temperature kinetics in He and Ne buffered XeF lasers: the effect on absorption // *Appl. Phys. Lett.* 1989. Vol. 54. No. 2. Pp. 102–104.

14. **Головицкий А.П.** Моделирование газоразрядных источников ультрафиолетового излучения с тлеющим разрядом в смеси ксенона и хлора // *ЖТФ.* 2011. Т. 81. № 3. С. 55–64.

15. **Puech V., Mizzi S.** Collision cross sections and transport parameters in neon and xenon // *J. Phys. D: Appl. Phys.* 1991. Vol. 24. No. 11. Pp. 1974–1985.

Статья поступила в редакцию 08.04.2019, принята к публикации 25.04.2019.

СВЕДЕНИЯ ОБ АВТОРАХ

ГОЛОВИЦКИЙ Александр Петрович — доктор физико-математических наук, профессор Института физики, нанотехнологий и телекоммуникаций Санкт-Петербургского политехнического университета Петра Великого, Санкт-Петербург, Российская Федерация.

195251, Российская Федерация, г. Санкт-Петербург, Политехническая ул., 29
alexandergolovitski@yahoo.com

РЕМИГА Оксана Александровна — студентка Института физики, нанотехнологий и телекоммуникаций Санкт-Петербургского политехнического университета Петра Великого, Санкт-Петербург, Российская Федерация.

195251, Российская Федерация, г. Санкт-Петербург, Политехническая ул., 29
remiga95@mail.ru

REFERENCES

1. **Golovitskii A.P.**, Coaxial (tubular) glow discharge in electronegative gases, *Tech. Phys.* 61 (7) (2016) 995–1003.

2. **Skakun V.S., Lomaev M.I., Tarasenko V.F., Shitts D.V.**, High-power UV exilamps excited by a glow discharge, *Laser and Particle Beams.* 21 (1) (2003) 115–119.

3. **Panchenko A.N., Sosnin E.A., Tarasenko V.F.**, Improvement of output parameters of glow discharge UV exilamps, *Optics Communications.* 161 (4–6) (1999) 249–252.

4. **Rogoff G.L., Kramer J.M., Piejak R.B.**, A model for the bulk plasma in an RF chlorine discharge, *IEEE Trans. Plasma Sci.* PS-14 (2) (1986) 103–111.

5. **Franklin R.N., Daniels P.G., Snell J.**, Characteristics of electric discharges in the halogens: the recombination-dominated positive column, *J. Phys. D: Appl. Phys.* 26 (10) (1993) 1638–1649.

6. **Golovitskii A.P.**, Simple analytic relations for estimating parameters of the positive column

of an electronegative glow discharge in a halogen-containing gas mixture, *Tech. Phys.* 59 (11) (2014) 1599–1609.

7. **Tsendin L.D.**, Plasma stratification in a discharge in an electronegative gas, *Sov. Phys. Tech. Phys.* 34 (1) (1989) 11–15.

8. **Golovitskii A.P.**, Simulation of the positive column of a glow discharge in an inert gas-chlorine mixture with allowance for the dissociation of chlorine molecules, *Tech. Phys.* 56 (3) (2011) 361–370.

9. **Engel A., Steenbeck M.**, *Elektrische Gasentladungen, ihre Physik und Technik: zweiter Band: Entladungseigenschaften, technische Anwendungen*, Berlin, Julius Springer-Verlag, 1934.

10. **Lichtenberg A.J., Kouznetsov I.G., Lee Y.T., et al.**, Modelling plasma discharges at high electronegativity, *Plasma Sources Sci. Technol.* 6 (3) (1997) 437–449.

11. **Bogdanov E.A., Kudryavtsev A.A., Tsendin L.D., et al.**, The influence of metastable atoms



and the effect of the nonlocal character of the electron distribution on the characteristics of the positive column in an argon discharge, *Tech. Phys.* 49 (6) (2004) 698–706.

12. **Church M.J., Smith D.**, Ionic recombination of atomic and molecular ions in flowing afterglow plasmas, *J. Phys. D: Appl. Phys.* 11 (16) (1978) 2199–2206.

13. **Moratz T.J., Saunders T.D., Kushner M.J.**, High temperature kinetics in He and Ne

buffered XeF lasers: the effect on absorption, *Appl. Phys. Lett.* 54 (2) (1989) 102–104.

14. **Golovitskii A.P.**, Simulation of gas-discharge UV sources based on a glow discharge in a xenon-chlorine mixture, *Tech. Phys.* 81 (3) (2011) 371–380.

15. **Puech V., Mizzi S.**, Collision cross sections and transport parameters in neon and xenon, *J. Phys. D: Appl. Phys.* 24 (11) (1991) 1974–1985.

Received 08.04.2019, accepted 25.04.2019.

THE AUTHORS

GOLOVITSKII Aleksander P.

Peter the Great St. Petersburg Polytechnic University

29 Politechnicheskaya St., St. Petersburg, 195251, Russian Federation
alexandergolovitski@yahoo.com

REMIGA Oksana A.

Peter the Great St. Petersburg Polytechnic University

29 Politechnicheskaya St., St. Petersburg, 195251, Russian Federation
remiga95@mail.ru

DOI: 10.18721/JPM.12309
УДК 544.77.022.823

КОМПОЗИЦИОННЫЕ ПОЛИМЕРНЫЕ МАТРИЦЫ ДЛЯ ТКАНЕВОЙ ИНЖЕНЕРИИ И ТРАНСПЛАНТОЛОГИИ

**И.П. Добровольская^{1,2}, Е.М. Иванькова^{1,2},
П.В. Попрядухин^{1,2}, В.Е. Юдин^{1,2}**

¹Институт высокомолекулярных соединений Российской академии наук,
Санкт-Петербург, Российская Федерация;

²Санкт-Петербургский политехнический университет Петра Великого,
Санкт-Петербург, Российская Федерация

В статье представлена реализация современных методов получения одно-, двух- и трехмерных композиционных матриц для тканевой инженерии на основе резорбируемых и нерезорбируемых полимеров. Описаны коагуляционный способ получения композиционных волокон на основе хитозана и наночастиц хитина, метод электроформования композиционных нановолокон, метод лиофилизации растворов хитозана и их смесей с наночастицами для получения трехмерных пористых матриц с повышенной стабильностью механических характеристик в водных средах. Приведены результаты исследования адгезии и кинетики пролиферации стволовых и соматических клеток человека и животных на разработанных матрицах. В результате экспериментов *in vivo* установлено, что материалы в виде волокон, пленок, трубчатых образцов и губок можно использовать в качестве имплантатов кровеносных сосудов и эффективных раневых покрытий. Представлены также результаты исследования кинетики резорбции исследуемых материалов в живом организме.

Ключевые слова: хитозан, наночастицы хитина, тканевая инженерия, композиционное нановолокно, композиционная губка

Ссылка при цитировании: Добровольская И.П., Иванькова Е.М., Попрядухин П.В., Юдин В.Е. Композиционные полимерные матрицы для тканевой инженерии и трансплантологии // Научно-технические ведомости СПбГПУ. Физико-математические науки. 2019. Т. 12. № 3. С. 110–122. DOI: 10.18721/JPM.12309

COMPOSITE POLYMER MATRICES FOR TISSUE ENGINEERING AND TRANSPLANTOLOGY

**I.P. Dobrovolskaya^{1,2}, E.M. Ivan'kova^{1,2},
P.V. Popryadukhin^{1,2}, V.E. Yudin^{1,2}**

¹Institute of Macromolecular Compounds RAS, St. Petersburg, Russian Federation;

²Peter the Great St. Petersburg Polytechnic University, St. Petersburg, Russian Federation

The article presents implementation of modern methods for producing one-, two-, and three-dimensional composite matrices for tissue engineering based on resorbable and nonresorbable polymers. Coagulation method for producing composite fibers based on chitosan and chitin nanofibrils, electrospinning method for composite nanofibers, lyophilization of chitosan solutions and their mixtures with nanoparticles to obtain three-dimensional porous matrices with increased stability of mechanical characteristics in aqueous media have been described. The results of the studies in the adhesion and kinetics of proliferation of stem and somatic cells of humans and animals on the developed matrices were given. *In vivo* experiments showed that materials in the form of fibers, films, tubular samples, and sponges could be used as implants

for blood vessels and effective wound dressings. Moreover, the article contains the findings of an investigation into the kinetics of resorption of the involved materials in a living organism.

Keywords: chitosan, chitin nanofibrilla, tissue engineering, composite nanofiber, composite sponge

Citation: Dobrovolskaya I.P., Ivan'kova E.M., Popryadukhin P.V., Yudin V.E., Composite polymer matrices for tissue engineering and transplantology, St. Petersburg Polytechnical State University Journal. Physics and Mathematics. 12 (3) (2019) 110–122. DOI: 10.18721/JPM.12309

Введение

В настоящее время тканевая инженерия является одной из наиболее молодых отраслей науки, базирующейся на принципах материаловедения, цитологии, молекулярной биологии и медицины. Используемый в ней междисциплинарный подход направлен на создание новых тканеинженерных препаратов для восстановления утраченных функций тканей или органов [1]. Тканеинженерный препарат, который, по сути, является биокомпозиционным материалом, состоит из полимерной, керамической или иной матрицы, а также наполнителей в виде стволовых или соматических клеток, факторов роста и других компонентов, способствующих пролиферативной активности клеток, их дифференциации, формированию новой ткани. Матрица должна иметь форму, наиболее подходящую для воссоздания нового органа или его части, т. е. быть в виде волокон, пленок, пористых трехмерных образцов с различной структурой и размерами, а также трубчатых образцов. Исследования, проведенные в последнее время, позволили сформулировать основные требования к материалам, которые могут быть использованы в тканевой инженерии и трансплантологии [2 – 4].

Как в сухом состоянии, так и в водных средах матрица должна обладать прочностными и деформационными свойствами, уровень характеристик которых не препятствовал бы манипуляциям при их стерилизации, а также при формировании тканеинженерного препарата. Полимерная матрица или тканеинженерный препарат должны обеспечивать удобство их использования в хирургических процедурах при имплантировании в тот или иной орган.

Кроме того, на материал матрицы налагаются требования биосовместимости с живой тканью, отсутствия негативного влияния на окружающие ткани как самих матриц, так и продуктов их резорбции. Поверхность матрицы должна способствовать адгезии, пролиферации и дифференциации

стволовых и соматических клеток в составе тканеинженерного препарата. С этой целью предусматривается возможность модификации поверхности для формирования оптимального рельефа для данного вида ткани [5].

Материалы и оборудование

Для получения композиционных волокон использовали хитозан (Fluka Chemie, BioChemika line) с молекулярной массой, равной 255 кДа, степенью деацетилирования 80 %, а также наночастицы хитина (Mavi Sud s.r.l, Italy).

Диспергирование наночастиц хитина в воде проводили ультразвуковой обработкой в течение 30 мин. Для получения смеси раствора хитозана с наночастицами хитина, в водную дисперсию, содержащую указанные наночастицы, добавляли хитозан в количестве, необходимом для получения 4 масс. % раствора, а хитина – 0,05 – 20 масс. % по отношению к хитозану. После этого в смесь вводили раствор уксусной кислоты, доводя концентрацию кислоты в растворителе до 2 об. %. Смесь раствора хитозана с наночастицами хитина перемешивали 90 мин, фильтровали, а затем обезвоздушивали под давлением 0,1 атм.

Волокна формировали на лабораторной установке ИВС РАН. Осадителем служила спирто-щелочная смесь, состоящая из 10%-го раствора NaOH и метанола в соотношении 1:1. Формование моноволокон проводили через фильеру диаметром 0,6 мм; скорость подачи раствора из фильеры составляла 0,1 мм/с, время осаждения – 150 с; степень фильерной вытяжки λ варьировалась от 40 до 100 %. Волокно промывали в дистиллированной воде, затем сушили при температуре 50 °С.

Электроформование нановолокон проводили на установке NANON-01A (MECC Co., Япония). Раствор с помощью инжекторного насоса подавался через электрод-фильеру радиусом 0,3 мм в электри-

ческое поле с напряжением $V = 18$ кВ. Расстояние между электродом-фильерой и приемным электродом, на котором происходило осаждение волокон, составляло 0,2 м. Для получения трубчатых образцов использовали цилиндрический электрод диаметром 1 мм, вращающийся со скоростью 600 об/мин.

Для получения пористых композитов использовали хитозан производства фирмы ALDRICH Chemistry (Исландия), с молекулярной массой 140 кДа, степенью деацетилирования 82 %. Смесь раствора хитозана и наночастиц хитина готовили способом, аналогичным использованному при формировании волокон коагуляционным методом. Готовые растворы выдерживали в течение суток в холодильнике при $t = 4^\circ\text{C}$, а затем замораживали до $t = -32^\circ\text{C}$ и выдерживали при этой температуре в течение 4 ч. Образцы лиофилизировали при $t = -5^\circ\text{C}$ и давлении 1,6 Па. Лиофилизацию и замораживание растворов проводили на установке Freeze Dry System (США). Полученные образцы обрабатывали 10%-м раствором NaOH с целью перевода хитозана из водорастворимой солевой формы в не растворимую в воде основную форму.

Структуру готовых образцов исследовали с помощью сканирующего электронного микроскопа SUPRA-55VP (Carl Zeiss, Германия). Предварительно на них напыляли тонкий слой платины.

Результаты и их обсуждение

Композиционные волокна на основе хитозана. Перспективными материалами для тканевой инженерии и трансплантологии являются одномерные полимерные матрицы – прообразы нервной и мышечной тка-

ней, а также ткани связок. Такие матрицы лучше всего соответствуют волоконной структуре.

В настоящее время актуальной задачей разработки резорбируемых одномерных матриц становится получение композиционных волокон, которые характеризуются биорезорбцией как полимера, так и наполнителя. Введение наночастиц хитина в хитозановую матрицу позволяет изготавливать полностью резорбируемые композиционные волокна с повышенными прочностными и упругими параметрами. В данной работе волокна были получены методом мокрого формования.

Из результатов электронно-микроскопических исследований следует, что волокна на основе хитозана, полученные методом коагуляционного (мокрого) формования, обладают гладкой поверхностью (рис. 1, *a*) и гомогенной внутренней структурой. Особенностью фибриллярного строения волокон, содержащего наночастицы хитина, является наличие плоских микрофибрилл – слоистых структур, которые отчетливо видны на сколе композиционного волокна в жидком азоте (рис. 1, *b*).

Процесс ориентационной вытяжки композиционных волокон с малым (до 1 масс. %) содержанием наполнителя можно описать следующей схемой.

При взаимодействии молекулы хитозана с уксусной кислотой (растворителем) происходит протонирование аминогруппы $-\text{NH}_2$: $-\text{NH}_2 \rightarrow \text{NH}_3^+$; при этом образуется соль – ацетат хитозана.

Между наночастицами хитина существует свободный объем, в котором находятся макромолекулы ацетата хитозана и уксусная кислота.

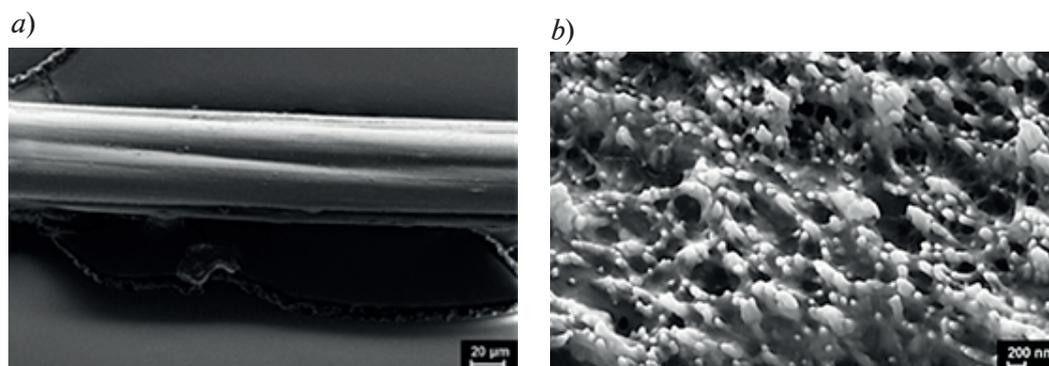


Рис. 1. Микрофотографии композиционного волокна на основе хитозана, содержащего 1 масс. % наночастиц хитина: *a* – поверхность волокна, *b* – его поперечное сечение

При прохождении через фильеру раствор попадает в поле сдвиговых напряжений, при этом происходит ориентация как частиц наполнителя, так и макромолекул ацетата хитозана. Ввиду хорошей адгезии, макромолекулы ацетата хитозана, находящиеся в приповерхностном слое нанофибрилл хитина, приобретают дополнительную ориентацию. В процессе вытяжки в осадительной ванне происходит ориентация макромолекул ацетата хитозана и образование ориентированной кристаллической структуры. Дальнейшее увеличение вытяжки при формировании композиционных волокон способствует ориентации макромолекул в межкристаллитных аморфных областях внутри фибрилл хитозана.

После прохождения раствора через фильеру и контакта струи с осадителем (спирто-щелочная смесь) происходит депротонирование макромолекул, переход полимера из солевой формы в основную. Наличие сдвиговых напряжений в фильере и вытяжка волокна после его осаждения способствуют формированию ориентированной структуры как макромолекул полимера, так и наночастиц наполнителя [6].

Отсутствие цитотоксичности волокон хитозана подтверждается эффективной адгезией мезенхимных стволовых клеток на их поверхности. На рис. 2 приведены микрофотографии поверхности волокон, на которых видны агрегации мезенхимных стволовых клеток. Клетки имеют типичную для них морфологию и структуру роста. Данные микрофотографии демонстрируют не только адгезию, но и пролиферацию клеток на поверхности волокна, так как регистрируется момент митотического де-

ления клетки. Волокно, полученное с высокой степенью вытяжки ($\lambda = 100\%$), характеризуется фибриллярной структурой поверхности, содержит неоднородности в виде каналов, расположенных вдоль волокна. Клетки на такой поверхности имеют вытянутую форму.

Влияние рельефа поверхности матрицы на форму фибробластов исследовано в работах [7, 8], где установлено, что изменение формы стволовых клеток есть один из факторов их направленной дифференцировки.

Пористые пленки на основе композиционных нановолокон

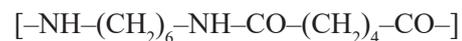
Для обеспечения метаболических процессов в клетке, ее пролиферативной активности необходимы оптимальные транспортные характеристики матрицы, в частности высокая газо- и водопроницаемость [9]. Такими свойствами обладают пленочные материалы на основе нановолокон из биосовместимых полимеров.

Высокие диэлектрические характеристики алифатического сополиамида (СПА), способность его растворов к фазовому разделению, а также экологичность растворителя позволяют его использовать для получения нановолокон методом электроформования [9].

Для изготовления требуемых нановолокон мы использовали СПА: сополимер ϵ -капролактама

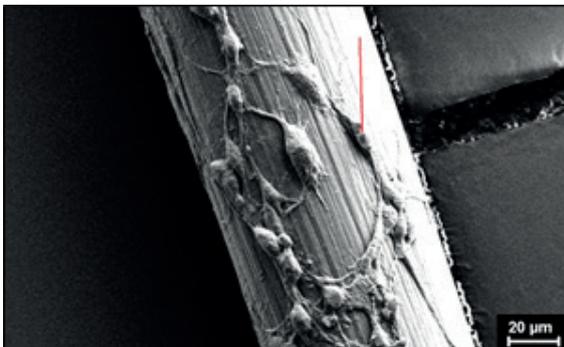


и гексаметилендиаминдипината



с соотношением компонентов 40:60.

a)



b)

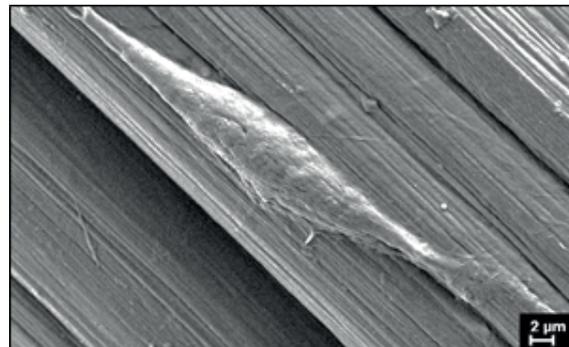


Рис. 2. Микрофотографии поверхности волокон (с разной степенью увеличения) на основе хитозана после культивации мезенхимных стволовых клеток в течение 3 сут.

Стрелка указывает на область митотического деления клетки

Авторами настоящей статьи ранее было показано, что оптимальными свойствами для электроформования волокон обладают растворы СПА с концентрацией 16 масс. % в смеси этанол + вода в соотношении 80:20.

Было установлено, что пористые пленки на основе нановолокон из СПА характеризуются сравнительно невысокими значениями прочности ($\sigma = 6,5$ МПа) и модуля упругости ($E = 55$ МПа). Однако такие механические характеристики позволяют успешно проводить манипуляции на воздухе и в жидкой среде. Пленки эластичны как в сухом, так и во влажном состояниях, и они хорошо дублируют рельеф поверхности. Материалы с такими свойствами вполне пригодны в качестве матриц для тканевой инженерии, а также в составе композиционных раневых покрытий.

Макромолекула СПА содержит амидные, карбонильные и карбоксильные группы, включающие главным образом ковалентные и водородные химические связи. Материал на основе такого полимера обладает гидрофильными свойствами. Волокна и пленки из него сохраняют свои размеры и свойства при длительном контакте с водными средами. Исходя из перечисленного, было резонно предположить, что полученные материалы должны обладать хорошей адгезией по отношению к стволовым и соматическим клеткам, обеспечивать высокую скорость пролиферации клеток как на поверхности, так и в объеме.

Вторым полимером, успешно используемым в различных областях медицины, является хитозан. В работе [15] было показано, что введение в раствор хитозана до 20 масс. % нановолокон хитина, с одной стороны, увеличивает вязкость смеси, с другой – приводит к существенному

уменьшению ее значений в поле сдвиговых напряжений. Это обусловлено образованием кластерной структуры частиц наполнителя, ориентацией нановолокон хитина под действием сдвиговых напряжений в электромагнитном поле. Наличие нановолокон хитина облегчает образование нановолокон в электрическом поле, приводит к значительному уменьшению количества дефектов.

На рис. 3 представлены электронные микрофотографии тканеинженерного препарата, включающего матрицу на основе нановолокон из СПА и мезенхимных стволовых клеток (рис. 3, *a, b*), а также хитозана и фибробластов человека (рис. 3, *c*).

На приведенных микрофотографиях виден контакт псевдоподий клетки с нановолокнами матрицы (рис. 3, *a*), а также деление стволовой клетки (рис. 3, *b*) и структура тканеинженерного препарата (рис. 3, *c*).

Имплантаты кровеносных сосудов на основе нановолокон из полилактида

Одним из наиболее перспективных методов получения имплантатов кровеносных сосудов является метод электроформования. Метод позволяет получать материалы на основе нановолокон, которые характеризуются высокими значениями пористости и удельной поверхности. Последнее особенно важно для миграции клеток и их пролиферации в объем имплантата. В то же время структура должна препятствовать просачиванию крови через стенки трубки [10 – 13]. Метод электроформования нановолокон обеспечивает необходимый уровень механических характеристик трубчатых имплантатов. Последние должны интегрироваться в живой организм, при этом их внутренняя поверхность на ранней стадии имплантиро-

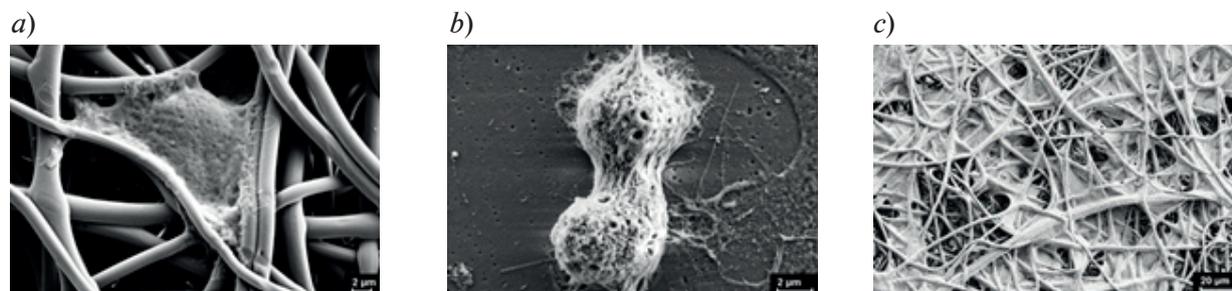


Рис. 3. Электронные микрофотографии тканеинженерных препаратов, включающих матрицы двух видов: на основе нановолокон из СПА и мезенхимных стволовых клеток (*a, b*) и на основе нановолокон из хитозана и фибробластов человека (*c*);
a – адгезия стволовой клетки на матрице, *b* – деление этой клетки

вания должна покрываться слоем эндотелия, что существенно снижает вероятность образования тромбов.

Методом электроформования нами были получены трубки с внутренним диаметром 1 мм и толщиной стенок около 250 мкм (рис. 4, *a*). Формование нановолокон проводили из раствора полилактида в дихлорэтане на вращающийся приемный электрод [13].

В экспериментах *in vivo* была проведена имплантация трубчатых образцов на основе нановолокон из ПЛА в брюшную аорту крысы. Установлено, что через четыре недели все имплантаты были проходимы; аорта была прикреплена к имплантату; снятие швов не привело к разрушению анастомоза; патологического влияния на окружающие ткани обнаружено не было.

Морфологический анализ материала [3] показал, что на внутренней стороне имплантата сформировался эндотелиальный слой, который начинается с дистальных и проксимальных анастомозов; центральная часть была покрыта неоднородным сетча-

тым фибриновым слоем. Между волокнами ПЛА, в основном со стороны адвентиции, были обнаружены ядра фибробластов; начали появляться тонкие коллагеновые волокна. Инородные тела гигантских клеток располагались на внешней стороне трансплантата. Наличие этих клеток типично для реакции организма на инородное тело, так как они активно участвуют в его разрушении. Однако в нашем случае размеры клеток не позволяли им проникать через поры внутрь имплантата, они сохраняли свою форму и структуру.

Первые признаки биорезорбции были обнаружены через 12 недель после имплантации. Через 24 недели после имплантации все имплантаты оставались проходимыми, на нановолокнах наблюдались многочисленные поперечные трещины, а значительная часть волокон была фрагментирована. Это свидетельствует об интенсивном процессе резорбции полимерной матрицы.

Анализ микрофотографии поперечного сечения, сделанный через 64 недели после имплантации (рис. 4, *b*, *c*), показал, что по-

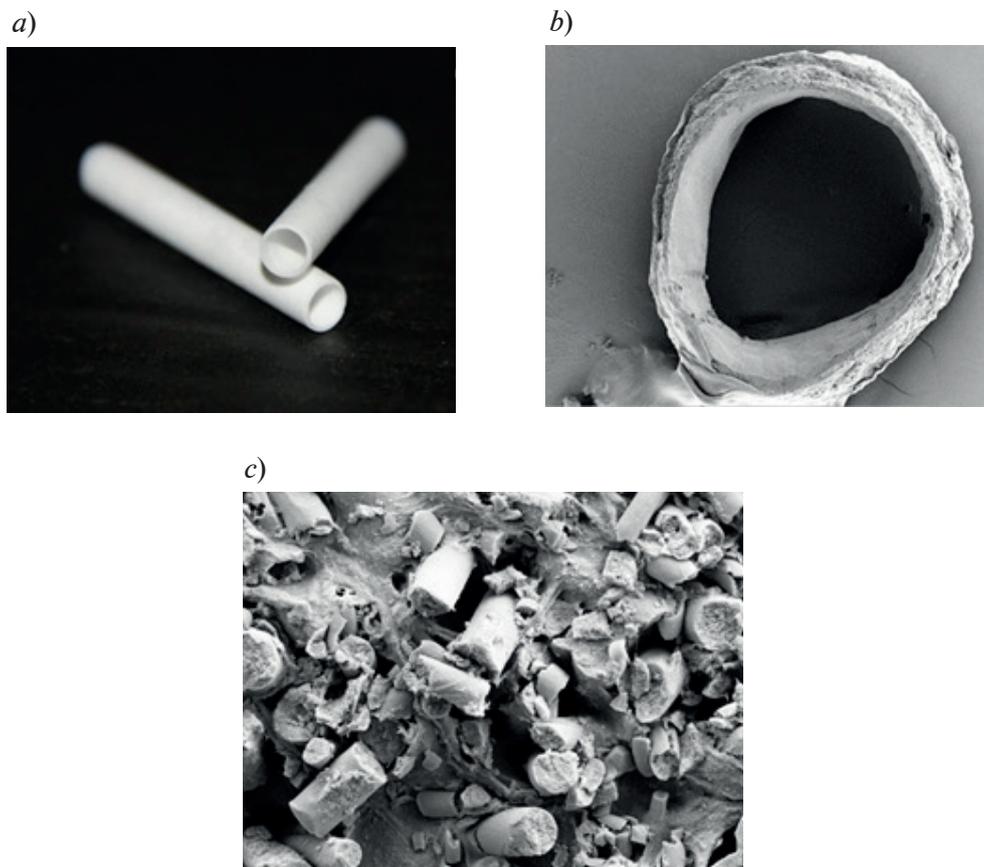


Рис. 4. Фотография имплантатов сосудов на основе нановолокон ПЛА (*a*) и микрофотографии их поперечного сечения с разным увеличением (*b*, *c*) через 64 недели после имплантации

ристость стенок имплантата существенно уменьшилась. Морфологические исследования показали, что эндотелий и субэндотелий, содержащие волокна коллагена, полностью покрывают имплантат и образовалась неоинтима. В пределах толщины имплантата между волокнами ПЛА расположены фибробласты и вновь образованные волокна коллагена. Со стороны адвентиции наблюдались многочисленные гигантские клетки инородного тела.

Раневые покрытия на основе композиционных нановолокон

Раневое покрытие должно обеспечивать газо- и влагообмен, необходимые для жизнедеятельности клеток, воспроизводить рельеф раневой поверхности, быть удобным для хирургических манипуляций. Важным свойством современного раневого покрытия является его атравматичность: при удалении его с поверхности раны, образовавшийся слой эпителия не должен травмироваться или разрушаться. Наконец, покровный материал должен предотвращать загрязнение раны патогенной микрофлорой из окружающей среды.

Эти свойства присущи пористым пленкам на основе полимерных нановолокон, полученных методом электроформования [10]. Получение нановолокон из спирторастворимого алифатического сополиамида (СПА) было описано ранее [9]; изготовление композиционных нановолокон на основе хитозана и нановолокон хитина — в работе [15].

Исходя из специфических свойств каждого материала (СПА и хитозан) и особенностей их электроформования, авторами

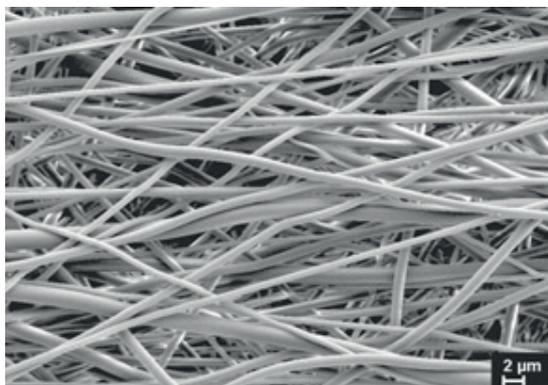
настоящей статьи предложен способ получения композиционных раневых покрытий на основе нановолокон СПА и композиционных нановолокон из хитозана и нановолокон хитина [16].

Нановолокна нерезорбируемого СПА придают материалу необходимые механические характеристики, обеспечивают обменные процессы между раной и окружающей средой, а также защиту от патогенных бактерий и грибков (рис. 5, *a*).

Слой, непосредственно контактирующий с раной, который состоит из композиционных нановолокон на основе хитозана и нановолокон хитина (рис. 5, *b*), обеспечивает атравматичность покрытия, способствует эффективной регенерации покровной ткани.

Созданный материал обладает биосовместимостью, пористой структурой, которая сохраняет форму и размеры пор в жидких биологических средах. Механические характеристики материала позволяют манипуляции с ним как в сухом, так и во влажном состоянии. При наложении на рану слой, состоящий из композиционных нановолокон на основе резорбируемых полимеров природного происхождения — хитозана и хитина и непосредственно контактирующий с поврежденной поверхностью, резорбирует под действием биологически активной среды. Как известно, активная среда включает лейкоциты, тучные клетки, плазмациты, гистиоциты, фибробласты, а также ферменты из ряда гликозидаз и хитиназ. Хитин, хитозан и продукты их биоразложения оказывают на среду бактерицидное действие, что способствует процессам грануляции и эпителизации раны.

a)



b)

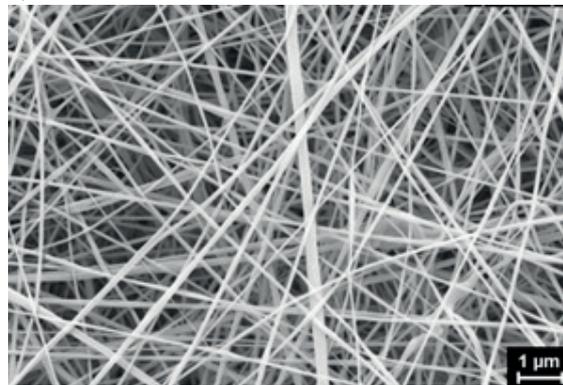


Рис. 5. Микрофотографии нановолокон из СПА (*a*) и композиционных нановолокон на основе хитозана и нановолокон хитина (*b*)

Двухслойное раневое покрытие позволяет не нарушать процессы грануляции и эпителизации раны при замене или снятии повязки за счет отделения прочного нерезорбируемого слоя. Менее прочный слой, состоящий из хитина и хитозана, подвергшийся частичной резорбции, остается на поверхности раны вплоть до полной резорбции и способствует заживлению раневой поверхности.

Полученный целевой материал мы исследовали *in vivo* в качестве раневого покрытия для лечения ожога кожи III степени (диагноз по международной классификации болезней 10-го пересмотра – МКБ-10). Эксперимент проводили на самцах крыс линии «Wistar-Kyoto» весом 200 – 250 г. В экспериментальной группе на раневую поверхность накладывали композиционное раневое покрытие. Наблюдение за животными осуществляли в течение четырех недель.

В табл. 1 приведены значения площади раневой поверхности ожога III степени после применения целевого раневого покрытия, покрытия G-DERM и контрольной группы животных.

Из приведенных в табл. 1 данных видно, что скорость заживления ожоговой раны при лечении композиционным раневым покрытием на основе нановолокон из СПА и композиционных нановолокон из хитозана и нанофибрилл хитина существенно выше, чем при использовании материала аналогичного назначения, наиболее распространенного на современном рынке, а также гораздо выше, чем у контрольной группы животных.

Трехмерные пористые композиционные матрицы

Большинство органов человека и животных представляют собой трехмерные структуры различной формы. Каждый из этих органов имеет свои важные морфологические и физиологические особенности, которые следует принимать во внимание при разработке матриц для тканеинженерных препаратов. Важным параметром трехмерных матриц для клеточных технологий является наличие открытой пористости. Размер пор должен обеспечивать равномерное заполнение свободного объема матрицы соматическими клетками, их миграцию и пролиферацию. Структура пор должна способствовать протеканию метаболических процессов, необходимых для жизнедеятельности клеток.

Известно, что некоторые полимеры способны образовывать пористые структуры различных типов [1 – 3]. Хитозан также относится к этим полимерам. Как видно на рис. 6, *a*, при замораживании смеси раствора хитозана и хитиновых нанофибрилл происходит фазовое разделение раствора. Полимер, содержащий наполнитель, образует сотовую структуру. Существенной особенностью композиционных губок, полученных лиофилизацией, является более выраженная ламинарная структура (рис. 6, *b*), по сравнению с таковой у губок из чистого хитозана.

Анализ литературы показал, что скорость резорбции матрицы хитозана зависит от степени деацетилирования, молекулярной массы полимера, пористости материалов, наличия наночастиц или других полимеров

Таблица 1
Сравнение эффективности лечения двумя раневыми покрытиями по площадям раневой поверхности ожога III степени

Срок наблюдения, сут.	Площадь раневой поверхности, см ²		
	Целевое раневое покрытие	Покрытие G-DERM	Без покрытия (контрольная группа)
0	32	32	32
3	22	27	29
7	16	19	25
15	9	12	18
21	1,5	8,0	12,5

Примечание. Эксперимент проведен на самцах крыс линии «Wistar-Kyoto» весом 200 – 250 г.

в матрице [13, 14].

На рис. 7 представлены микрофотографии поперечного сечения материала на основе хитозана. Можно видеть, что материал имеет структуру с открытыми порами; поры связаны между собой и с окружающей средой. Такая структура позволяет питательным веществам и растворенным газам свободно циркулировать внутри всей матрицы. Размер пор и извилистость каналов, соединяющих поры друг с другом, обеспечивают свободную миграцию клеток.

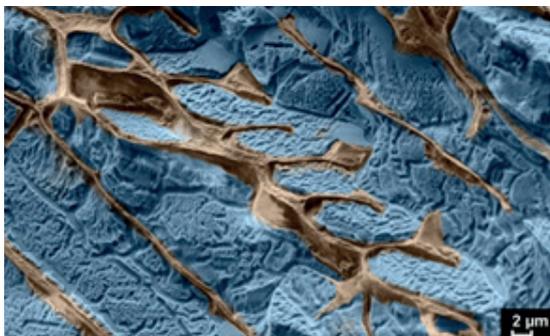
В табл. 2 приведены результаты гистологического исследования пористых хитозановых матриц. Через первую неделю после имплантации выявлено умеренно выраженное асептическое воспаление вокруг матрицы с очагами инфильтрации лейкоцитов и преобладанием сегментарных ядерных клеток. Через две недели после имплантации наблюдалось незначительное асептическое воспаление вокруг пористой матрицы, однако капсулы соединительной ткани не образовывались, и отека не было обнаружено. Через шесть недель после начала экспери-

мента вокруг пористой матрицы не образовалась и капсула из соединительной ткани. Через 3 мес (12 нед) после имплантации площадь поперечного сечения матрицы уменьшилась и составила $5,38 \cdot 10^5$ (мкм)²; это значение заметно отличается от соответствующего, измеренного через неделю после имплантации (65,9%).

Через 6 мес (24 нед) после имплантации хитозановой матрицы площадь ее поперечного сечения уменьшается и становится равной $2,64 \cdot 10^5$ (мкм)², что существенно отличается от значений, полученных через одну и шесть недель после имплантации. Через 12 мес после имплантации фрагменты хитозановой матрицы были обнаружены только в одном образце ткани. Площадь поперечного сечения матрицы уменьшилась до $1,71 \cdot 10^5$ (мкм)².

Таким образом, установлено, что полная биорезорбция полимерной хитозановой матрицы происходит через 12 мес после имплантации; рубцовая ткань не сформировалась, а изменений или повреждений в окружающих тканях обнаружено не было.

a)



b)

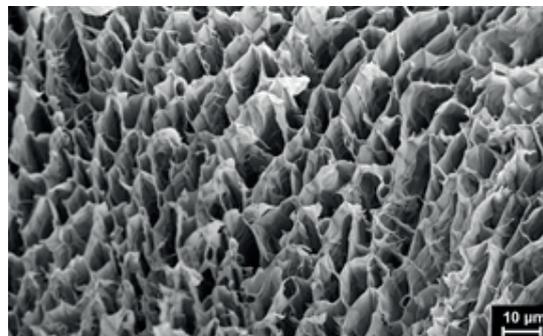
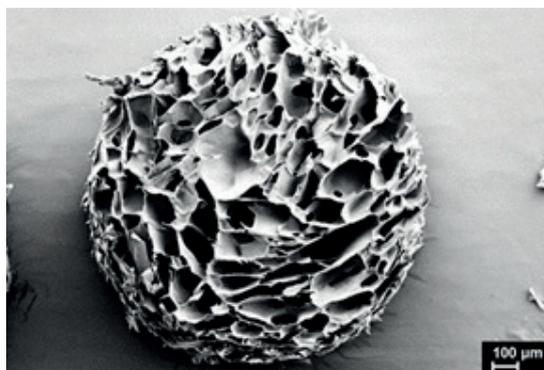


Рис. 6. Микрофотографии смеси раствора хитозана и нановолокон хитина при температуре -160°C (a) и губки после лиофильной сушки при температуре -5°C (b)

a)



b)

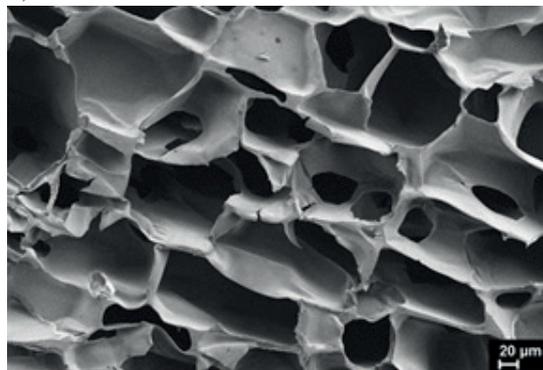


Рис. 7. Микрофотографии поперечного сечения цилиндрического образца губки: a – общий вид, b – та же губка с большим увеличением

Таблица 2

Объемное содержание компонентов в пористой композиционной матрице на основе хитозана после ее имплантации в мышцу крысы

Срок наблюдения, нед	Объемное содержание компонента, %			
	Матрица	Коллагеновые волокна	Сосуды	Лейкоциты
1	17,74	0,94	0,12	11,94
2	19,10	3,24	0,48	0,86
6	19,38	3,94	0,88	1,20
12	24,70	3,40	0,50	1,63
24	24,90	3,74	1,30	3,90

Примечание. Эксперимент проведен на самце крысы линии «Wistar-Kyoto» весом 250 г. Имплантация сделана в широчайшую спинную мышцу.

На протяжении всего эксперимента матрица демонстрировала высокую стабильность формы и сохраняла структуру открытых пор, что облегчало прорастание кровеносных сосудов и свободную миграцию клеток в объеме матрицы.

Заключение

Методами коагуляции и электроформования получены композиционные волокна и нановолокна на основе хитозана и нанофибрилл хитина. Предложен механизм формирования структуры композиционных волокон, содержащих анизометричные наночастицы. На крысах проведены (*in vivo*) исследования трубок на основе нановолокон из полилактида в качестве имплантатов кровеносных сосудов. Разработаны компо-

зиционные раневые покрытия на основе нановолокон из алифатического сополиамида и композиционных нановолокон из хитозана и нанофибрилл хитина. Исследование *in vivo* показало высокую эффективность разработанного раневого покрытия при лечении глубоких поражений кожи различной этиологии. Результаты исследования кинетики резорбции трехмерных пористых губок на основе хитозана, а также процесса образования тканей (соединительной, нервной, эпителия) позволяют рекомендовать этот материал в тканевой инженерии, в частности для реконструкции костной ткани.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского научного фонда, грант № 19-73-30003.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Spector M.** Intelligent support for instructional development: Approaches and limits // Design approaches and tools in education and training. J. van den Akker, R. Branch, et al. (Eds.). Springer Science + Business Media Dordrecht, 1999. Pp. 279–290.
2. **Reddi A.H.** Regulation of bone differentiation by local and systemic factors // Bone and Materials Research. 1985. Vol. 3. Pp. 27–47.
3. **Dobrovolskaya I.P., Yudin V.E., Popryadukhin P.V., Ivan'kova E.M.** Polymer scaffolds for tissue engineering. St. Petersburg: Media Papier, 2018. 228 p.
4. Biomaterials, artificial organs and tissue engineering. L. Hench, J. Jones (Eds.) Cambridge: Woodhead Publishing, 2005. 304 p.
5. **Atala A., Allickson J.G.** Translational regenerative medicine. Elsevier, Academic Press, 2014. 606 p.
6. **Yudin V.E., Dobrovolskaya I.P., Neelov I.M., Dresvyanina E.N., Popryadukhin P.V., Ivan'kova E.M., Elokhovskii V.Yu., Kasatkin I.A., Okrugin B.M., Morganti P.** Wet spinning of fibers made of chitosan and chitin nanofibrils // Carbohydrate Polymers. 2014. Vol. 108. Pp. 176–182.
7. **Barbucci R., Pasqui D., Wirsén A., Afrossman S.** Micro and nano-structured surfaces // Journal of Material Science. Materials in Medicine. 2003. Vol. 14. No. 8. Pp. 721–725.
8. **Lim J.Y., Donahue H.** Cell sensing and

response to micro- and nanostructured surfaces produced by chemical and topographic patterning // *Tissue Engineering*. 2007. Vol. 13. No. 8. Pp. 1879–1891.

9. **Dobrovolskaya I.P., Popryadukhin P.V., Yudin V.E., Ivan'kova E.M., Elokhovskiy V.Yu., Weishauptova Z., Balik K.** Structure and properties of porous films based on aliphatic copolyamide developed for cellular technologies // *Journal of Material Science: Materials in Medicine*. 2015. Vol. 26. No. 1. Pp. 46–52.

10. **Harskamp R.E., Lopes R.D., Baisden C.E., Winter R.J., Alexander J.H.** Saphenous vein graft failure after coronary artery bypass surgery: pathophysiology, management, and future directions // *Annals of Surgery*. 2013. Vol. 257. No. 5. Pp. 824–833.

11. **Athanasiou T., Saso S., Rao C., Vecht J., Grapsa J., Dunning J., Lemma M., Casula R.** Radial artery versus saphenous vein conduits for coronary artery bypass surgery: forty 2014s of competition – which conduit offers better patency? A systematic review and meta-analysis. Review article // *European Journal of Cardio-Thoracic Surgery*. 2011. Vol. 40. No. 1. Pp. 208–220.

12. **Hibino N., McGillicuddy E., Matsumura G., Ichihara Y., Naito Y., Breuer C., Shinoka T.**

Late-term results of tissue-engineered vascular grafts in humans // *The Journal of Thoracic and Cardiovascular Surgery*. 2010. Vol. 139. No. 2. Pp. 431–436.

13. **Popryadukhin P.V., Popov G.I., Dobrovolskaya I.P., Yudin V.E., Vavilov V.N., Yukina G.Yu., Ivan'kova E.M., Lebedeva I.O.** Vascular prostheses based on nanofibers from aliphatic copolyamide // *Cardiovascular Engineering and Technology*. 2016. Vol. 7. No. 1. Pp. 78–86.

14. **Spasova M., Manolova N., Paneva D., Rashkov I.** Preparation of chitosan-containing nanofibers by electrospinning of chitosan/poly (ethylene oxide) blend solutions // *e-Polymers*. 2004. Vol. 4. No. 1. Pp. 1–12.

15. **Dobrovolskaya I.P., Yudin V.E., Popryadukhin P.V., Ivan'kova E.M., Shabunin A.S., Kasatkin I.A., Morgantie P.** Effect of chitin nanofibrils on electrospinning of chitosan-based composite nanofibers // *Carbohydrate Polymer*. 2018. Vol. 194. Pp. 260–266.

16. **Shabunin A.S., Yudin V.E., Dobrovolskaya I.P.** Composite wound dressing based on chitin/chitosan nanofibers: processing and biomedical applications // *Cosmetics*. 2019. Vol. 6. No. 1. Pp. 16–26.

Статья поступила в редакцию 30.05.2019, принята к публикации 19.06.2019.

СВЕДЕНИЯ ОБ АВТОРАХ

ДОБРОВОЛЬСКАЯ Ирина Петровна – доктор физико-математических наук, ведущий научный сотрудник лаборатории № 8 Института высокомолекулярных соединений РАН, старший научный сотрудник Высшей школы биомедицинских систем и технологии Санкт-Петербургского политехнического университета Петра Великого, Санкт-Петербург, Российская Федерация.

199004, Российская Федерация, г. Санкт-Петербург, Большой пр. В.О., 31
zair2@mail.ru

ИВАНЬКОВА Елена Михайловна – кандидат физико-математических наук, старший научный сотрудник лаборатории № 8 Института высокомолекулярных соединений РАН, старший научный сотрудник Высшей школы биомедицинских систем и технологии Санкт-Петербургского политехнического университета Петра Великого, Санкт-Петербург, Российская Федерация.

199004, Российская Федерация, г. Санкт-Петербург, Большой пр. В.О., 31
evelen@mail.ru

ПОПРЯДУХИН Павел Васильевич – кандидат технических наук, старший научный сотрудник лаборатории № 8 Института высокомолекулярных соединений РАН и научный сотрудник Высшей школы биомедицинских систем и технологии Санкт-Петербургского политехнического университета Петра Великого, Санкт-Петербург, Российская Федерация.

199004, Российская Федерация, г. Санкт-Петербург, Большой пр. В.О., 31
dobrov@hq.macro.ru

ЮДИН Владимир Евгеньевич – доктор физико-математических наук, заведующий лабораторией № 8 Института высокомолекулярных соединений РАН, профессор Высшей шко-



лы биомедицинских систем и технологии Санкт-Петербургского политехнического университета Петра Великого, Санкт-Петербург, Российская Федерация.

199004, Российская Федерация, г. Санкт-Петербург, Большой пр. В.О., 31
yudin@hq.macro.ru

REFERENCES

1. **Spector M.**, Intelligent support for instructional development: Approaches and limits, In: Design approaches and tools in education and training; J. den Akker, R. Branch (Eds.), Kluwer, Dordrecht, 1999.
2. **Reddi A.H.**, Regulation of bone differentiation by local and systemic factors, In: Bone and Materials Research. Vol. 3, Elsevier, New-York (1985) 27–47.
3. **Dobrovolskaya I.P., Yudin V.E., Popryadukhin P.V., Ivan'kova E.M.**, Polymer scaffolds for tissue engineering, Media Papier, St. Petersburg, 2018.
4. Biomaterials, artificial organs and tissue engineering; L. Hench, J. Jones (Eds.), Woodhead Publishing, Cambridge, 2005.
5. **Atala A., Allickson J.G.**, Translational regenerative medicine, Elsevier, Academic Press, 2014.
6. **Yudin V.E., Dobrovolskaya I.P., Neelov I.M., et al.**, Wet spinning of fibers made of chitosan and chitin nanofibrils, Carbohydrate Polymer. 108 (2014) 176–182.
7. **Barbucci R., Pasqui D., Wirsen A., Afrossman S.**, Micro and nano-structured surfaces, Journal of Material Science. Materials in Medicine. 14 (8) (2003) 721–725.
8. **Lim J.Y., Donahue H.**, Cell sensing and response to micro- and nanostructured surfaces produced by chemical and topographic patterning, Tissue Engineering. 13 (2007) 1879–1891.
9. **Dobrovolskaya I.P., Popryadukhin P.V., Yudin V.E., et al.**, Structure and properties of porous films based on aliphatic copolyamide developed for cellular technologies, Journal of Material Science, Materials in Medicine. 26 (1) (2015) 46–52.
10. **Harskamp R.E., Lopes R.D., Baisden C.E., et al.**, Saphenous vein graft failure after coronary artery bypass surgery: pathophysiology, management, and future directions, Annals of Surgery. 257 (5) (2013) 824–833.
11. **Athanasiou T., Saso S., Rao C., et al.**, Radial artery versus saphenous vein conduits for coronary artery bypass surgery: forty years of competition – which conduit offers better patency? A systematic review and meta-analysis. Review Article, European Journal of Cardio-Thoracic Surgery. 40 (1) (2011) 208–220.
12. **Hibino N., McGillicuddy E., Matsumura G., et al.**, Late-term results of tissue-engineered vascular grafts in humans, The Journal of Thoracic Cardiovascular Surgery. 139 (2) (2010) 431–436.
13. **Popryadukhin P.V., Popov G.I., Dobrovolskaya I.P., et al.**, Vascular prostheses based on nanofibers from aliphatic copolyamide, Cardiovascular Engineering and Technology. 7 (1) (2016) 78–86.
14. **Spasova M., Manolova N., Paneva D., Rashkov I.**, Preparation of chitosan-containing nanofibers by electrospinning of chitosan/poly (ethylene oxide) blend solutions, e-Polymers. 4 (1) (2004) 1–12.
15. **Dobrovolskaya I.P., Yudin V.E., Popryadukhin P.V., et al.**, Effect of chitin nanofibrils on electrospinning of chitosan-based composite nanofibers, Carbohydrate Polymer. 194 (2018) 260–266.
16. **Shabunin A.S., Yudin V.E., Dobrovolskaya I.P.**, Composite wound dressing based on chitin/chitosan nanofibers: processing and biomedical applications, Cosmetics. 6 (2019) 16–26.

Received 30.05.2019, accepted 19.06.2019.

THE AUTHORS

DOBROVOLSKAYA Irina P.

Institute of Macromolecular Compounds RAS

Peter the Great St. Petersburg Polytechnic University

31 Bolshoy Ave. V.O., St. Petersburg, 199004, Russian Federation

zair2@mail.ru

IVAN'KOVA Elena M.

Institute of Macromolecular Compounds RAS

Peter the Great St. Petersburg Polytechnic University
31 Bolshoy Ave. V.O., St. Petersburg, 199004, Russian Federation
evelen@mail.ru

POPRYADUKHIN Pavel V.

Institute of Macromolecular Compounds RAS
Peter the Great St. Petersburg Polytechnic University
31 Bolshoy Ave. V.O., St. Petersburg, 199004, Russian Federation
dobrov@hq.macro.ru

YUDIN Vladimir E.

Institute of Macromolecular Compounds RAS
Peter the Great St. Petersburg Polytechnic University
31 Bolshoy Ave. V.O., St. Petersburg, 199004, Russian Federation
yudin@hq.macro.ru

DOI: 10.18721/JPM.12310
УДК 53.088.6

АНАЛИЗ МЕТОДОВ ОБРАТНОЙ СВЕРТКИ ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНЫХ ДАННЫХ ПРИ ИЗМЕРЕНИИ СЕЧЕНИЙ РОЖДЕНИЯ ПАР АДРОННЫХ СТРУЙ

А.Ю. Егоров, Я.А. Бердников, В.А. Бакаев, И.М. Никитцина

Санкт-Петербургский политехнический университет Петра Великого,
Санкт-Петербург, Российская Федерация

Представлены результаты сравнения методов устранения детекторных искажений. Рассмотрены следующие методы: поправочных коэффициентов, обращения матрицы миграции, максимизации функции правдоподобия с регуляризацией Тихонова (TUnfold), сингулярного разложения матрицы миграции (SVD), итераций Д'Агостини. Сравнение выбранных методов осуществлялось на примере обработки результатов измерения сечений рождения пар адронных струй в протон-протонных столкновениях при энергии системы центра масс протонов 2,76 ТэВ на детекторе CMS (Compact Muon Solenoid) на Большом адронном коллайдере. В результате сравнения методов выбрана оптимальная схема устранения детекторных искажений в данном измерении и даны рекомендации по построению процедуры коррекции детекторных искажений.

Ключевые слова: детекторное искажение, обратная свертка, TUnfold, SVD, итерации Д'Агостини

Ссылка при цитировании: Егоров А.Ю., Бердников Я.А., Бакаев В.А., Никитцина И.М. Анализ методов обратной свертки экспериментальных данных при измерении сечений рождения пар адронных струй // Научно-технические ведомости СПбГПУ. Физико-математические науки. 2019. Т. 12. № 3. С. 123–130. DOI: 10.18721/JPM.12310

AN ANALYSIS OF UNFOLDING METHODS FOR MEASUREMENT OF HADRON DIJET PRODUCTION CROSS SECTIONS

A.Yu. Egorov, Ya.A. Berdnikov, V.A. Bakaev, I.M. Nikittsina

Peter the Great St. Petersburg Polytechnic University, St. Petersburg, Russian Federation

The comparison results of different methods of detector's distortion elimination have been presented. The following methods were taken: bin-by-bin correction method, migration matrix inversion one, the one of maximal likelihood with Tikhonov regularisation (TUnfold), the one of singular value decomposition of the migration matrix (SVD), the one of D'Agostini iterations. The comparison of selected methods was performed through Monte Carlo simulation of hadron dijet production in proton-proton collisions at center-of-mass energy of 2.76 TeV and the simulation of a response of the CMS detector at Large Hadron Collider. The optimal scheme of unfolding was chosen for the measurement under study. Practical recommendations for building of unfolding procedure were given.

Keywords: detector effect, unfolding, TUnfold, SVD unfolding, D'Agostini iterations

Citation: Egorov A.Yu., Berdnikov Ya.A., Bakaev V.A., Nikittsina I.M., An analysis of unfolding methods for measurement of hadron dijet production cross sections, St. Petersburg Polytechnical State University Journal. Physics and Mathematics. 12 (3) (2019) 123–130. DOI: 10.18721/JPM.12310

Введение

В процессе измерения физической величины, которая часто бывает представлена в виде распределения или гистограммы, физический прибор (детектор) неизбежно вносит искажения, связанные с конечным разрешением, эффективностью регистрации и систематическими эффектами. Детекторные эффекты – это обобщающий термин, который подразумевает все возможные искажения, вносимые в процессе измерения детектором.

В настоящее время детекторы, используемые в физике высоких энергий, представляют собой многоуровневые системы, включающие в себя тысячи датчиков, сложную электронику и миллионы каналов. Примером таких детекторов могут служить детекторы ATLAS [1] и CMS (Compact Muon Solenoid) [2] на Большом адронном коллайдере (БАК, Large Hadron Collider). В таких условиях детекторные эффекты являются следствием большого числа стохастических процессов и могут приводить к существенным искажениям.

Обратная свертка – это общее название, используемое для обозначения процедуры коррекции измеренной величины, учитывающей искажения, которые внесены в процессе измерения.

Измеренное распределение, искаженное детектором, будем называть реконструированными данными. Напротив, распределение, которое могло бы быть в случае идеального детектора, будем называть истинным распределением. Истинные распределения для экспериментальных данных неизвестны. Обратная свертка предназначена для восстановления истинного распределения на основе реконструированных данных. Выполнение обратной свертки при анализе реконструированных данных необходимо, чтобы результаты измерения не зависели от деталей эксперимента и могли быть использованы за пределами лаборатории.

На сегодняшний день существует ряд методов решения задачи обратной свертки, обладающих как различными достоинствами, так и ограничениями. Выбор конкретного метода можно сделать только на основе анализа его применимости к данной конкретной задаче измерения. Это связано с тем, что задача обратной свертки является по своей сути плохо определенной математически. Уникальное решение не может быть найдено. Более того, задача ча-

сто оказывается нестабильной, т. е. малые флуктуации в реконструированных данных могут привести к большим в восстановленном распределении. Стабильность решения особенно важна, потому что измеренное распределение имеет статистические флуктуации, а они могут усиливаться в процессе обратной свертки. Применение различных техник регуляризации может быть необходимым для того, чтобы сделать решение стабильным.

Несмотря на плохую математическую определенность задачи обратной свертки и на то, что выбор оптимального метода сильно зависит от конкретной задачи измерения, все же можно выработать алгоритм проведения анализа применимости различных методов обратной свертки к данному измерению, который приведет к построению оптимальной схемы обратной свертки для данного измерения.

В настоящей работе проведен анализ применимости различных методов обратной свертки к измерению сечений рождения пар адронных струй в протонных столкновениях с помощью детектора CMS на БАК [2] при энергии в системе центра масс $\sqrt{s} = 2,76$ ТэВ.

Цель настоящей работы – построение оптимальной схемы обратной свертки в данном конкретном измерении. Дополнительной целью является выработка практических рекомендаций для проведения анализа применимости различных методов обратной свертки при измерениях.

Измеряемые физические величины

Анализ точности различных методов проведен в отношении измерения дифференциальных сечений рождения пар адронных струй

$$\sigma^{incl}, \sigma^{MN}, \sigma^{excl} \text{ и } \sigma^{excl veto},$$

где σ^{incl} – инклюзивное сечение рождения пар адронных струй, σ^{MN} – сечение рождения пар адронных струй Мюллера – Навелле, σ^{excl} – сечение рождения «эксклюзивных» пар адронных струй, $\sigma^{excl veto}$ – «эксклюзивное» сечение с вето (далее даны их характеристики).

Приведенные дифференциальные сечения измеряются как функции разделения по быстроте между струями в паре

$$\Delta y = |y_1 - y_2|,$$

где y_1, y_2 – быстроты первой и второй

адронных струй в паре, а y – быстрота, выражающаяся как

$$y = (1/2) \ln[(E + p_z)/(E - p_z)].$$

Здесь E – энергия адронной струи, p_z – импульс вдоль пучка сталкивающихся адронов.

Столкновение протонов, в котором рождены две и более адронные струи с величиной импульса, поперечного к пучку p_{\perp} , превышающей порог 35 ГэВ/с, будем называть инклюзивным событием. Все попарные комбинации адронных струй с поперечным импульсом $p_{\perp} \geq 35$ ГэВ/с в инклюзивном событии дают вклад в инклюзивное сечение рождения пар адронных струй σ^{incl} .

Сечение рождения пар адронных струй Мюллера – Навеле (MN) σ^{MN} относится к паре адронных струй (MN -пара), состоящей из адронной струи с максимальной быстротой и адронной струи с минимальной быстротой в инклюзивном событии среди адронных струй с поперечным импульсом $p_{\perp} \geq 35$ ГэВ/с. Таким образом, MN -события относятся к подклассу инклюзивных.

Подкласс инклюзивных событий, в которых рождаются строго две адронные струи с поперечным импульсом $p_{\perp} \geq 35$ ГэВ/с, называется эксклюзивным (σ^{excl} – сечение рождения). Пара адронных струй в эксклюзивном событии называется эксклюзивной парой адронных струй.

«Эксклюзивные с вето» события – подкласс эксклюзивных событий, в котором запрещены адронные струи, дополнительные к эксклюзивной паре, с поперечным импульсом $p_{\perp} \geq p_{\perp veto} = 20$ ГэВ/с ($\sigma^{excl veto}$ – «эксклюзивное с вето» сечение рождения).

Величина изменения интервала быстроты Δy определяется кинематическими ограничениями и составляет от 0 до 8,0.

Определения, приведенные выше, позволяют сделать заключения о возможных искажениях.

Во-первых, возможна миграция струй на порогах по поперечному импульсу 35 и 20 ГэВ/с по причине ограниченного разрешения детектора по поперечному импульсу струй. Такая миграция будет приводить к изменению числа событий, в разных классах. Уменьшение числа событий в классе интерпретируется как ограниченный аксептанс для этого класса. Увеличение числа событий в классе интерпретируется как фон. Указанные искажения влияют на форму и величину измеряемого сечения.

Во-вторых, возможна миграция струй по быстроте из-за ограниченного разрешения детектора по быстроте. Такая миграция приводит к тому, что события из одной ячейки истинного распределения по интервалу быстроты будут давать вклад в другие ячейки реконструированного распределения. Это приводит к изменению формы измеряемого сечения.

Процедура обратной свертки

Выборки столкновений адронов, полученные с помощью генераторов Монте-Карло (МК), используются для выполнения обратной свертки. Распределения, получаемые на основе МК-выборок столкновений до моделирования детектора, соответствуют истинным распределениям. Эти МК-распределения называются также генераторными. После моделирования детектора получают реконструированные МК-распределения.

Моделирование МК позволяет оценить потерю событий за счет эффективности и ограниченного аксептанса детектора, величину вклада от фоновых событий (событий, имитирующих сигнал) и величину миграции вкладов между ячейками гистограммы за счет ограниченного разрешения детектора. Миграция событий между ячейками гистограммы описывается матрицей миграции. Распределение на генераторном уровне, реконструированное МК-распределение и матрица миграций являются необходимыми входными данными для выполнения обратной свертки.

В настоящей работе для анализа точности различных методов обратной свертки используются две МК-модели PYTHIA8 (8135) [3] с наборами настроек 4C [4] и HERWIG++ (2.7.1) [5] с набором настроек UE-EE3C [6]. События генераторного уровня пропускаются через модель детектора CMS, выполненную на основе программного пакета GEANT4 [7]. Наличие двух различных МК-моделей позволяет проводить перекрестную проверку. Под перекрестной проверкой подразумевается выполнение обратной свертки результатов моделирования первого МК-генератора с помощью второго. Результаты, полученные с помощью первого генератора, играют при этом роль реконструированных данных. Перекрестная проверка позволяет сравнить результат выполнения обратной свертки с распределением на генераторном уровне.

Точность воспроизведения генераторного уровня будет зависеть как от работы алгоритма обратной свертки, так и от адекватности физических моделей, заложенных в генераторы.

В настоящей работе проведено сравнение следующих методов обратной свертки: поправочных коэффициентов (bin-by-bin);

обращения матрицы миграций (Matrix Inversion);

максимизации функции правдоподобия с регуляризацией Тихонова (TUnfold) [8];

сингулярного разложения матрицы миграции (Singular Value Decomposition – SVD) [9];

итераций Д’Агостини [10].

В методах TUnfold, SVD и методе итераций Д’Агостини имеется возможность использования регуляризации.

В первом из них регуляризация заключается в выборе ее типа (по абсолютной величине, регуляризация первой и второй производной) и выборе величины параметра регуляризации τ . Выбор оптимального значения этого параметра может осуществляться автоматически с помощью минимизации глобальной корреляции ρ_{\max} или с помощью метода l -кривой [8].

В методе SVD регуляризация осуществляется отбрасыванием части сингулярных чисел матрицы миграции. Выбор сингулярных чисел, которые можно отбросить, также можно сделать автоматически, с помощью параметра d_i [9].

Наконец, в методе итераций Д’Агостини ограничение числа итераций действует как регуляризация.

Следует отметить, что увеличение размера ячеек гистограммы также может действовать как регуляризация задачи. Однако увеличение размера ячеек гистограммы может приводить к смещению результата обратной свертки относительно генераторного уровня. В настоящей работе при выполнении обратной свертки исследовалась зависимость точности воспроизведения генераторного распределения от выбора размера ячеек.

При учете фоновых событий (события, ошибочно идентифицированные как сигнальные), а также при учете эффективности детектора (аксептанса) возможны различные варианты.

Первый метод мы будем называть методом расширения матрицы миграций. В

этом методе фоновые события и события, которые не были зарегистрированы за счет ограниченной эффективности и асептанса, добавляются в дополнительные строки и столбцы матрицы миграции.

Второй метод связан с вычитанием фона. Асептанс учитывается с помощью поправочных коэффициентов. Этот метод используется в случае некоррелированного фона, когда фоновые события возникают за счет независимых процессов, имеющих конечное состояние, имитирующее сигнал.

И третий метод – метод поправочных коэффициентов для учета фона и асептанса. Он применяется, когда фон и асептанс коррелированы с сигналом.

Результаты применения методов и их обсуждение

Как отмечено выше, в настоящей работе проведен анализ применимости обратной свертки для различных методов.

Различные значения регуляризационных параметров задавались вручную и с помощью методов поиска оптимального значения. Каждый из методов учета фона и асептанса применялся для каждого из методов обратной свертки.

Получены результаты перекрестной проверки для всех сечений и всех методов. Доля фоновых событий растет с увеличением интервала быстроты от 40 % при $\Delta u = 0$ до 90 % при $\Delta u = 8$. Доля неучтенных в результате ограниченной эффективности и асептанса событий составляет от 20% при $\Delta u = 0$ до 40% при $\Delta u = 8$. Миграция событий между ячейками интервала быстроты Δu не превышает 10 %, оставаясь практически постоянной во всем интервале быстроты. Миграция осуществляется в основном в соседние ячейки, что делает матрицу миграций практически диагональной.

Результаты перекрестной проверки показывают, что только метод поправочных коэффициентов для учета фона и асептанса позволяет восстановить сечения на генераторном уровне. Другие методы учета фона и асептанса приводят к тому, что результат обратной свертки сильно смещен. В рассматриваемом измерении фон и асептанс появляются за счет миграции адронных струй относительно порогов по поперечному импульсу, равных 20 и 35 ГэВ/с. Таким образом, фон и асептанс зависят от числа событий в сигнале, следовательно, коррелированы с уровнем сигнала.

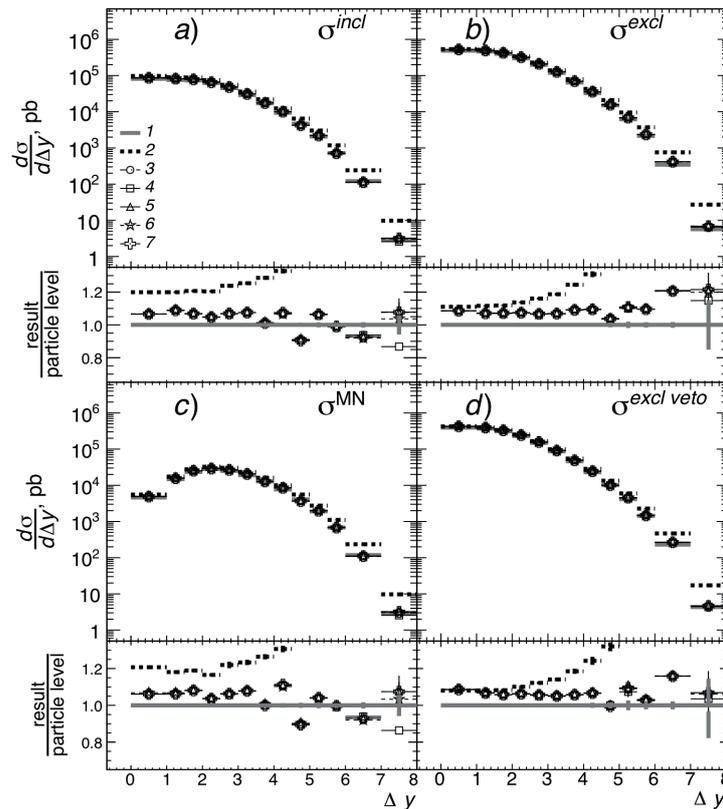
После того, как выполнен учет фона и акцептанса методом поправочных коэффициентов, методы обратной свертки дают одинаковый результат. Применение различных параметров регуляризации показывает, что оптимальным оказывается решение с минимальной или отсутствующей регуляризацией, что следует из того, что матрица миграций близка к диагональной.

Результаты перекрестной проверки для различных методов обратной свертки с коррекцией фона и акцептанса с помощью поправочных коэффициентов и оптимально выбранными параметрами регуляризации представлены на рисунке.

Как следует из результатов, приведенных на рисунке, обратная свертка воспроизводит распределение на генераторном уровне с точностью до 20 %. Анализ зависимости точности обратной свертки от размера ячеек гистограмм показывает, что результат не

зависит от выбора размера ячеек. Дополнительные исследования показывают, что отклонение результатов обратной свертки от генераторного распределения связано с различным откликом модели детектора на адронные струи, полученные с помощью разных МК-генераторов HERWIG++ и PYTHIA8. При выполнении обратной свертки для реконструированных экспериментальных данных мы не можем отдать предпочтение какому-либо МК-генератору. Выполнение обратной свертки реконструированных экспериментальных данных следует проводить двумя генераторами, а разница между результатами может служить оценкой систематической погрешности, связанной с выбором МК-модели.

На основе проведенного анализа выбор сделан в пользу обратной свертки с помощью метода TUnfold. Акцептанс и фон учитываются с помощью поправочных ко-



Результаты перекрестной проверки для дифференциальных сечений σ^{incl} (a), σ^{excl} (b), σ^{MN} (c) и $\sigma^{excl veto}$ (d).

Сечения на детекторном уровне (2) получены с помощью МК-генератора HERWIG++. Приведены результаты обратной свертки TUnfold (3), SVD (4), Д'Агостини (5), метода поправочных коэффициентов (6), обращения матрицы миграции (7), по сравнению с сечениями уровня частиц HERWIG++ (1). Обратная свертка выполнена с помощью МК-генератора PYTHIA8. Показаны отношения результатов обратной свертки к сечениям на уровне частиц (result / (particle level)), т. е. на генераторном уровне

эффициентов. Указанный выбор сделан в связи с тем, что реализация этого метода в программном пакете анализа данных ROOT [11] представляется более зрелой, чем реализации других методов; она хорошо документирована и имеет наибольшую гибкость в настройке и контроле процесса обратной свертки.

Практические рекомендации

Обратная свертка должна применяться после того, как сделана калибровка детектора и реконструкция всех объектов, необходимых для анализа (это треки заряженных частиц, башни колориметров, частицы, адронные струи). В экспериментах, даже после восстановления объектов, можно применять дополнительные коррекции, например коррекции энергии и разрешения, которые было желательно проводить еще до обратной свертки. Фазовое пространство и отборы следует определять и применять одинаково как для экспериментальных данных, так и для МК-моделирования. Поскольку задача обратной свертки плохо определена с математической точки зрения, необходимо проверять применимость различных методов обратной свертки. Совокупность имеющихся подходов не ограничивается методами, использованными в настоящей работе.

После того, как сделаны все подготовительные операции, а именно –

восстановлены и откорректированы данные;

выполнено МК-моделирование в нескольких моделях;

восстановлены МК-объекты;

отобраны экспериментальные данные и МК-модели;

выбраны методы обратной свертки, учета фона, эффективности и аксептанса, исследуется применимость различных методов в таком порядке.

1. Выбирается физическая величина, к которой применяется обратная свертка (она не обязательно должна совпадать с измеряемой физической величиной).

2. Выбирается размер ячеек гистограммы.

3. Строятся распределения генераторного уровня, реконструированного уровня и матрицы миграции для МК-моделей.

4. Тестируются различные методы обратной свертки с помощью перекрестной проверки с использованием МК-выборок событий.

5. Выбирается наилучший метод.

6. Анализируется остаточное смещение результатов обратной свертки относительно генераторного уровня.

7. Определяется влияние выбора размера ячеек гистограммы на результат обратной свертки. В случае выбора нового размера ячеек процедура повторяется для нового размера. Если остаточное смещение связано с выбором МК-моделей, используемых для обратной свертки, то остаточное смещение используется для оценки модельно-зависимой систематической неопределенности процедуры обратной свертки.

8. Выполняется обратная свертка с применением всех МК-моделей.

9. Рассчитываются (с помощью разных МК-моделей) восстановленное распределение, статистические и систематические неопределенности на основе результатов обратной свертки.

Заключение

На основе анализа различных методов обратной свертки при измерении сечений рождения пар адронных струй в протон-протонных столкновениях, при энергии системы центра масс $\sqrt{s} = 2,76$ ТэВ, с использованием детектора CMS, выбрана оптимальная схема обратной свертки экспериментальных данных в проведенном измерении. Даны практические рекомендации по построению процедуры анализа применимости различных методов обратной свертки.

Результаты настоящей работы были получены в рамках выполнения государственного задания Минобрнауки России 3.1498.2017/4.6.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Aad G., Abat E., Abdallah J., et al. (The ATLAS Collaboration). The ATLAS experiment at the CERN Large Hadron Collider // Journal of Instrumentation. 2008. Vol. 3. August. P. S08003.

2. Chatrchyan S., Hmayakyan G.,

Khachatryan V., et al. (The CMS Collaboration). The CMS experiment at the CERN LHC // Journal of Instrumentation. 2008. Vol. 3. August. P. S08004.

3. Sjöstrand T., Mrenna S., Skands P. A brief



introduction to PYTHIA 8.1 // Computer Physics Communications. 2008. Vol. 178. No. 11. Pp. 852–867.

4. **Corke R., Sjöstrand T.** Interleaved parton showers and tuning prospects // Journal of High Energy Physics. 2011. Vol. 2011. No. 3. P. 32. Pp. 1–51.

5. **Bähr M., Gieseke S., Gigg M.A., et al.** Herwig++ physics and manual // The European Physical Journal C. 2008. Vol. 58. No. 4. Pp. 639–707.

6. **Gieseke S., Grellscheid D., Hamilton K., et al.** Herwig++ 2.5 release note // arXiv preprint arXiv:1102.1672. 2011.

7. **Allison J., Amako K., Apostolakis J., et al.** Recent developments in Geant4 // Nuclear Instruments and Methods in Physics Research. Section A: Accelerators, Spectrometers, Detectors and As-

sociated Equipment. 2016. Vol. 835. November. Pp. 186–225.

8. **Schmitt S.** TUnfold, an algorithm for correcting migration effects in high energy physics // Journal of Instrumentation. 2012. Vol. 7. No. 10. P. T10003.

9. **Hoecker A., Kartvelishvili V.** SVD approach to data unfolding // Nuclear Instruments and Methods in Physics Research. Section A: Accelerators, Spectrometers, Detectors and Associated Equipment. 1996. Vol. 372. No. 3. Pp. 469–481.

10. **D'Agostini G.** Improved iterative Bayesian unfolding // arXiv preprint arXiv:1010.0632. 2010.

11. **Antcheva I., Ballintijn M., Bellenot B., et al.** Root – a C++ framework for petabyte data storage, statistical analysis and visualization // Computer Physics Communications. 2009. Vol. 180. No. 12. Pp. 2499–2512.

Статья поступила в редакцию 27.03.2019, принята к публикации 25.04.2019.

СВЕДЕНИЯ ОБ АВТОРАХ

ЕГОРОВ Анатолий Юрьевич – ассистент кафедры экспериментальной ядерной физики Санкт-Петербургского политехнического университета Петра Великого, Санкт-Петербург, Российская Федерация.

195251, Российская Федерация, г. Санкт-Петербург, Политехническая ул., 29
egorov.a@spbstu.ru

БЕРДНИКОВ Ярослав Александрович – доктор физико-математических наук, профессор, заведующий кафедрой экспериментальной ядерной физики Санкт-Петербургского политехнического университета Петра Великого, Санкт-Петербург, Российская Федерация.

195251, Российская Федерация, г. Санкт-Петербург, Политехническая ул., 29
berdnikov@spbstu.ru

БАКАЕВ Виктор Анатольевич – кандидат физико-математических наук, доцент кафедры экспериментальной ядерной физики Санкт-Петербургского политехнического университета Петра Великого, Санкт-Петербург, Российская Федерация.

195251, Российская Федерация, г. Санкт-Петербург, Политехническая ул., 29
v_bakaev@phmf.spbstu.ru

НИКИТЦИНА Инна Михайловна – магистрант кафедры экспериментальной ядерной физики Санкт-Петербургского политехнического университета Петра Великого, Санкт-Петербург, Российская Федерация.

195251, Российская Федерация, г. Санкт-Петербург, Политехническая ул., 29
nikitsinna@yandex.ru

REFERENCES

1. **Aad G., Abat E., Abdallah J., et al.** (The ATLAS Collaboration), The ATLAS experiment at the CERN Large Hadron Collider, Journal of Instrumentation. 3 (August) (2008) S08003.

2. **Chatrchyan S., Hmayakyan G., Khachatryan V., et al.** (The CMS Collaboration), The CMS experiment at the CERN LHC, Journal of

Instrumentation. 3 (August) (2008) S08004.

3. **Sjöstrand T., Mrenna S., Skands P.,** A brief introduction to PYTHIA 8.1, Computer Physics Communications. 178 (11) (2008) 852–867.

4. **Corke R., Sjöstrand T.,** Interleaved parton showers and tuning prospects, Journal of High Energy Physics. 2011 (3) (2011) 32, 1–51.

5. **Bähr M., Gieseke S., Gigg M.A., et al.**, Herwig++ physics and manual, The European Physical Journal C. 58 (4) (2008) 639–707.
6. **Gieseke S., Grellscheid D., Hamilton K., et al.**, Herwig++ 2.5 release note, arXiv preprint arXiv:1102.1672 (2011).
7. **Allison J., Amako K., Apostolakis J., et al.**, Recent developments in Geant4, Nuclear Instruments and Methods in Physics Research, Section A: Accelerators, Spectrometers, Detectors and Associated Equipment. 835 (November) (2016) 186–225.
8. **Schmitt S.**, TUnfold, an algorithm for correcting migration effects in high energy physics, Journal of Instrumentation. 7 (10) (2012) T10003.
9. **Hoecker A., Kartvelishvili V.**, SVD approach to data unfolding, Nuclear Instruments and Methods in Physics Research, Section A: Accelerators, Spectrometers, Detectors and Associated Equipment. 372 (3) (1996) 469–481.
10. **D'Agostini G.**, Improved iterative Bayesian unfolding, arXiv preprint arXiv:1010.0632. (2010).
11. **Antcheva I., Ballintijn M., Bellenot B., et al.**, ROOT – a C++ framework for petabyte data storage, statistical analysis and visualization, Computer Physics Communications. 180 (12) (2009) 2499–2512.

Received 27.03.2019, accepted 25.04.2019.

THE AUTHORS

EGOROV Anatoliy Yu.

Peter the Great St. Petersburg Polytechnic University
29 Politechnicheskaya St., St. Petersburg, 195251, Russian Federation
egorov.a@spbstu.ru

BERDNIKOV Yaroslav A.

Peter the Great St. Petersburg Polytechnic University
29 Politechnicheskaya St., St. Petersburg, 195251, Russian Federation
berdnikov@spbstu.ru

BAKAEV Victor A.

Peter the Great St. Petersburg Polytechnic University
29 Politechnicheskaya St., St. Petersburg, 195251, Russian Federation
v_bakaev@phmf.spbstu.ru

NIKITSINA Inna M.

Peter the Great St. Petersburg Polytechnic University
29 Politechnicheskaya St., St. Petersburg, 195251, Russian Federation
nikitsinna@yandex.ru

DOI: 10.18721/JPM.12311

УДК 539.126.3

ОСОБЕННОСТИ РОЖДЕНИЯ КОРОТКОЖИВУЩИХ НЕЙТРАЛЬНЫХ КАОНОВ В СТОЛКНОВЕНИЯХ ЯДЕР МЕДИ И ЗОЛОТА ПРИ ЭНЕРГИИ 200 ГэВ

**А.Я. Бердников, Я.А. Бердников, С.В. Жарко,
Д.О. Котов, П.В. Радзевич**

Санкт-Петербургский политехнический университет Петра Великого,
Санкт-Петербург, Российская Федерация

В работе проведены измерения инвариантных спектров по поперечному импульсу и факторов ядерной модификации K_S -мезонов, рожденных в столкновениях ядер меди и золота (Cu + Au) при энергии 200 ГэВ. Эти исследования выполнены на спектрометре PHENIX, который размещен на коллайдере RHIC. Полученные значения факторов ядерной модификации K_S -мезонов сравнивались с соответствующими значениями для π^0 - и η -мезонов, а также адронных струй, измеренными при тех же условиях. Кроме того, проведено сравнение полученных факторов с аналогичными данными для K_S -мезонов, рожденных в парных столкновениях ядер золота и меди (Au + Au, Cu + Cu) также при энергии 200 ГэВ. Анализ полученных результатов свидетельствует о независимости эффекта гашения адронных струй в указанных системах при энергии 200 ГэВ от реализуемой в них формы области перекрытия ядер.

Ключевые слова: кварк-глюонная плазма, эффект гашения адронных струй, фактор ядерной модификации

Ссылка при цитировании: Бердников А.Я., Бердников Я.А., Жарко С.В., Котов Д.О., Радзевич П.В. Особенности рождения короткоживущих нейтральных каонов в столкновениях ядер меди и золота при энергии 200 ГэВ // Научно-технические ведомости СПбГПУ. Физико-математические науки. 2019. Т. 12. № 3. С. 131–142. DOI: 10.18721/JPM.12311

FEATURES OF SHORT-LIVING NEUTRAL KAON PRODUCTION IN COPPER-GOLD NUCLEI COLLISIONS AT 200 GeV

**A.Ya. Berdnikov, Ya.A. Berdnikov, S.V. Zharko,
D.O. Kotov, P.V. Radzevich**

Peter the Great St. Petersburg Polytechnic University, St. Petersburg, Russian Federation

In this study, invariant transverse momentum spectra and nuclear modification factors of K_S mesons produced in collisions of copper and gold nuclei (Cu + Au) at energy of 200 GeV have been measured. The research was carried out using the PHENIX spectrometer located at RHIC. The obtained K_S meson nuclear modification factor values were compared with similar ones of η and π^0 mesons along with hadronic jets measured under the same conditions. Moreover, the obtained values mentioned were compared with the corresponding data on K_S mesons produced in binary collisions of gold and copper nuclei (Au + Au, Cu + Cu) at energy of 200 GeV as well. An analysis of the derived results pointed to the independence of the jet-quenching effect in the Cu + Au, Cu + Cu and Au + Au collisions at energy of 200 GeV from nuclear overlap form produced in these systems.

Keywords: quark-gluon plasma, jet-quenching, nuclear modification factor, ultrarelativistic heavy nuclei collisions

Citation: Berdnikov A.Ya., Berdnikov Ya.A., Zharko S.V., Kotov D.O., Radzevich P.V., Features of short-living neutral kaon production in copper-gold nuclei collisions at 200 GeV, St. Petersburg Polytechnical State University Journal. Physics and mathematics. 12 (3) (2019) 131–142. DOI: 10.18721/JPM.12311

Введение

Для описания процессов сильного взаимодействия между кварками и глюонами, обладающими цветовым зарядом, в настоящее время используется формализм квантовой хромодинамики (КХД) [1]. Наличие цветового заряда у глюона, переносчика сильных взаимодействий, приводит к конфайнменту [1]: при нормальных условиях кварки и глюоны можно обнаружить только в составе «бесцветных» частиц – адронов. Однако при подъеме температуры до значений свыше 155 МэВ кварки и глюоны высвобождаются из адронов и движутся квазисвободно. Такая система называется кварк-глюонной плазмой (КГП), а процесс квазисвободного движения кварков и глюонов – деконфайнментом [2].

Согласно представлениям, которые реализуются в современных космологических моделях (см., например, работы [3 – 5]), состояние КГП является одним из этапов эволюции Вселенной при временах порядка 10 мкс после Большого взрыва. Рождение КГП в лаборатории осуществляется через столкновение тяжелых ультрарелятивистских ионов ($A + A$). Первые результаты систематического наблюдения признаков рождения КГП в столкновениях $A + A$ были получены в экспериментах на коллайдере релятивистских тяжелых ионов (*англ.* The Relativistic Heavy Ion Collider – RHIC, Брукхейвенская национальная лаборатория, США) в столкновениях ядер золота ($Au + Au$) при энергиях столкновения в системе центра масс на один нуклон $\sqrt{s_{NN}} = 130$ и 200 ГэВ [6 – 9]. Позже признаки рождения КГП были систематически зарегистрированы в столкновениях ядер свинца ($Pb + Pb$) при $\sqrt{s_{NN}} = 2,76$ ТэВ в экспериментах на Большом адронном коллайдере (*англ.* The Large Hadron Collider – LHC, лаборатория ЦЕРН, Швейцария) [10].

Среди различных признаков рождения КГП особое место занимает эффект гашения адронных струй [2, 8 – 10], который проявляется в сильном (примерно в пять раз в центральных столкновениях ядер золота) подавлении выхода адронов в области больших значений поперечного импульса, $p_T > 4 - 6$ ГэВ/с, по сравнению с выходом тех же адронов в элементарных протон-протонных столкновениях ($p + p$), нормированным на число парных неупругих нуклон-нуклонных взаимодействий N_{coll} [11].

Эффект гашения адронных струй количественно описывается с помощью фактора ядерной модификации:

$$R_{AA}(p_T) = \frac{1}{T_{AA}} \frac{dN_{AA}/dp_T}{d\sigma_{pp}/dp_T}, \quad (1)$$

где dN_{AA}/dp_T – выход адронов в ($A + A$)-столкновениях в данном интервале поперечного импульса; $d\sigma_{AA}/dp_T$ – инклюзивное дифференциальное сечение рождения адронов в ($p + p$)-столкновениях; T_{AA} – среднее значение функции ядерного перекрытия [11].

Значение функции ядерного перекрытия равно отношению числа N_{coll} к полному сечению неупругого нуклон-нуклонного рассеяния ($\sigma_{NN} \approx 42,2$ мбн при $\sqrt{s_{NN}} = 200$ ГэВ [11]).

Выход адронов в ($A + A$)-столкновениях, а также число N_{coll} в формуле (1) определяются в конкретном классе центральности столкновений. Под центральностью понимается мера области перекрытия двух сталкивающихся ядер. Центральным столкновениям с малой величиной прицельного параметра и, как следствие, большой областью перекрытия соответствует центральность 0 – 20 %; периферическим столкновениям (с малой областью перекрытия, в столкновении принимает участие лишь малая доля нуклонов налетающих ядер) соответствует центральность 60 – 90 %.

Рождение адронов в области $p_T > 4 - 6$ ГэВ/с преимущественно обусловлено процессами фрагментации жестких партонов (кварки или глюоны), рожденных в актах глубоко неупругого рассеяния валентных кварков ядер, налетающих друг на друга. Фрагментация представляет собой конверсию жесткого партон в адронную струю (пучок адронов) и происходит в результате увеличения полной энергии партон за счет его отдаления от области ядро-ядерного взаимодействия, содержащей цветовой заряды [1]. Механизмы рождения жестких партонов в ($p + p$)-столкновениях хорошо изучены в рамках КХД в пертурбативном режиме [12, 13]: импульс, переданный партону в результате глубоко неупругого рассеяния, не изменяется в течение всего времени его жизни и равен суммарному импульсу адронов в адронной струе.

Жесткие партоны, рожденные в ($A + A$)-столкновениях, теряют часть своей энергии по мере прохождения через кварк-глюонную среду. Потери энергии



происходят преимущественно за счет торозного излучения глюонов и упругого рассеяния на валентных партонах среды. Таким образом, импульс итоговой адронной струи уменьшается, по сравнению с импульсом, переданным жесткому партону в результате глубоко неупругого рассеяния, и спектр адронов фрагментации смещается в область меньших значений поперечного импульса, по сравнению со спектром тех же адронов в $(p + p)$ -взаимодействиях. В настоящий момент не существует единого теоретического аппарата, позволяющего описать процессы потери энергии партонов в кварк-глюонной среде из первых принципов. Однако для оценки транспортных свойств КПП используется целый ряд феноменологических моделей (см., например, работы [14 – 22]), использующих результаты измерения фактора ядерной модификации при выборе внутренних параметров.

Экспериментальные исследования рождения адронов различного типа позволяют провести систематический анализ транспортных свойств кварк-глюонной среды [14 – 22] в зависимости от характеристик частиц (масса, спин, кварковый состав и др.) в конечном состоянии. Например, короткоживущий нейтральный каон (K_S -мезон) является псевдоскаляр — частицей с нулевым спином и отрицательной пространственной четностью, и содержит в своем составе странный кварк.

До настоящего времени измерение рождения K_S -мезонов проводилось в симметричных системах парного столкновения ультрарелятивистских ядер золота ($Au + Au$) [23] и меди ($Cu + Cu$) [24]. В 2012 году эксперимент PHENIX [25] на RHIC провел сбор данных в системе столкновения неэквивалентных ядер: меди и золота ($Cu + Au$), при энергии $\sqrt{s_{NN}} = 200$ ГэВ. Такая система является единственной несимметричной в столкновениях ультрарелятивистских тяжелых ядер, характеризуется особой геометрией их перекрытия, которая обладает дополнительной асимметрией вдоль оси, соединяющей центры ядер в момент их взаимодействия, в отличие от систем $Cu + Cu$ и $Au + Au$. Выяснение особенностей рождения различных частиц, и, в частности, K_S -мезонов в системе столкновений $Cu + Au$, является важным аспектом систематического исследования свойств КПП и позволит налагать дополнительные ограничения на параметры различных фе-

номенологических моделей, трактующих эффект гашения адронных струй.

В настоящей статье представлены результаты измерения инвариантных спектров рождения по поперечному импульсу и факторов ядерной модификации K_S -мезонов в системе $(Cu + Au)$ -столкновений при энергии $\sqrt{s_{NN}} = 200$ ГэВ.

Методика исследования

Описание основных характеристик детекторных подсистем спектрометра PHENIX приведено в статье [25]. Определение координаты z вдоль оси движения пучков и центральности столкновения ионов меди и золота (далее — события) осуществлялся при помощи двух счетчиков ядро-ядерных столкновений (BBC) [26], каждый из которых находился на оси движения пучков на расстоянии 144 см от номинальной точки столкновения и покрывал область $3,1 < |\eta| < 3,9$ единиц псевдобыстроты.

Все события группируются в классы по центральности с шириной 20 % (30% для периферических столкновений). Для каждого класса центральности средние геометрические параметры ядро-ядерного столкновения (например, N_{coll} , T_{AA} , число нуклонов N_{part} , участвующих в ядро-ядерном столкновении) определяются с помощью моделирования отклика счетчиков BBC методом Монте-Карло по теории Глаубера [11].

Регистрация K_S -мезонов осуществляется в канале $K_S \rightarrow \pi^0 + \pi^0$ с помощью анализа распределений по инвариантной массе m_{inv} пар кандидатов на роль π^0 -мезонов (далее — π^0 -кандидатов), которая определяется формулой

$$m_{inv} = \sqrt{E^2 - \mathbf{p}^2}, \quad (2)$$

где E , \mathbf{p} — суммарные значения энергии и импульсов зарегистрированных π^0 -кандидатов.

В свою очередь, каждый π^0 -кандидат формируется в канале $\pi^0 \rightarrow \gamma + \gamma$, а гамма-кванты регистрируются в системе электромагнитных калориметров спектрометра PHENIX [27]. Система электромагнитного калориметра состоит из восьми секторов, каждый из которых покрывает $22,5^\circ$ по азимутальному углу и 0,7 единиц по псевдобыстроте. Шесть секторов калориметра являются сцинтилляционными сэмплинг-калориметрами со свинцовым поглотителем (далее — PbSc-подсистема).

Другие два сектора представляют собой черенковские калориметры со свинцовым стеклом (далее – PbGl-подсистема). Конструкционные особенности системы электромагнитных калориметров приведены в работе [27].

При формировании π^0 -кандидатов отбираются пары гамма-квантов с энергиями, превышающими значение 0,4 ГэВ и удовлетворяющими соотношению асимметрии:

$$\frac{|E_{\gamma 1} - E_{\gamma 2}|}{E_{\gamma 1} + E_{\gamma 2}} < 0,8, \quad (3)$$

где $E_{\gamma 1}, E_{\gamma 2}$ – энергии гамма-квантов в паре.

Нижнее ограничение по энергии необходимо для снижения количества ложных сигналов в электромагнитном калориметре, которые вызваны заряженными адронами, падающими на активную площадь, и оставляют в активном объеме калориметра энергию в среднем примерно 300 МэВ. Также часть адронных ливней исключается с помощью ограничений на форму кластеров [27]. Ограничение (3) используется для увеличения отношения сигнала со стороны π^0 -кандидатов к уровню фона. Кроме того, оба гамма-кванта в паре должны быть зарегистрированы в одном и том же секторе электромагнитного калориметра.

Поперечный импульс π^0 -кандидата, зарегистрированного в подсистеме PbSc(PbGl), ограничен значениями сверху – 11 (14) ГэВ/с и снизу – 2 ГэВ/с. Нижняя граница позволяет увеличить отношение сигнала со стороны K_S -мезонов к уровню фона, а верхняя введена для исключе-

ния эффекта слияния электромагнитных кластеров, оставленных дочерними гамма-квантами [28].

Далее π^0 -кандидаты отбираются в окне 2σ (σ – ширина пика) вокруг измеренных значений массы по признаку их поперечного импульса со стороны π^0 -мезонов на распределении по инвариантной массе пар гамма-квантов; инвариантная масса также зависит от поперечного импульса π^0 -кандидата. Вследствие эффектов нелинейности и ограниченного энергетического разрешения электромагнитного калориметра, измеренные значения масс π^0 -мезонов отличаются от табличных и зависят от поперечного импульса. Поэтому после указанных выше ограничений, энергии гамма-квантов, формирующих π^0 -кандидаты, корректируются для приведения измеренных значений массы к табличному [29]. Такая процедура позволяет увеличить отношение сигнала со стороны K_S -мезонов к уровню фона.

Распределения по инвариантной массе пар π^0 -кандидатов анализируются отдельно для разных интервалов по поперечному импульсу и классов по центральности. Примеры распределений представлены на рис. 1, пики на распределениях соответствуют сигналам со стороны K_S -мезонов. Для измерения выхода K_S -мезонов, распределения аппроксимируются суммой, состоящей из функции Гаусса, описывающей сигнал, и полинома второй степени, описывающего фон (берется область вокруг сигнала). Число зарегистрированных K_S -мезонов определяется как разность между суммой числа отсчетов в области 2σ вокруг центра

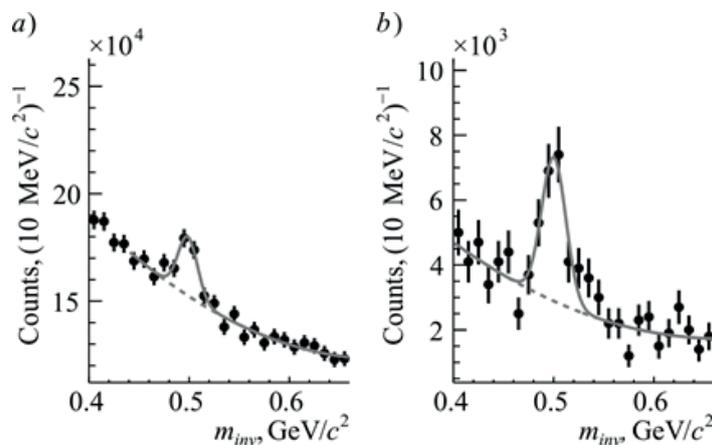


Рис. 1. Примеры распределений пар π^0 -кандидатов по их инвариантной массе в интервалах 5,0 – 5,5 (a) и 9,0 – 10,0 (b) ГэВ/с.

Пики соответствуют сигналам со стороны K_S -мезонов. Круглые маркеры обозначают экспериментальные данные, сплошная и пунктирная кривые – функции аппроксимации «сигнал + фон» и «фон» соответственно

пика и интегралом площади под полиномиальной кривой. Для определения выхода, т. е. числа мезонов, рожденных в вершине ядро-ядерных столкновений, число зарегистрированных мезонов корректируется с учетом конечности размеров акцептанса и детекторных эффектов калориметра; путем оценки эффективности регистрации учитываются также используемые кинематические ограничения. Эффективность регистрации оценивается через моделирование экспериментальной установки методом Монте-Карло в среде GEANT3[30].

Инвариантный выход K_S -мезонов определяется в соответствии со следующей формулой:

$$I_{KS} = \frac{1}{N_{event}} \frac{d^2 N}{2\pi p_T dp_T dy} = \frac{N_{KS}}{2\pi p_T \Delta p_T N_{event} \epsilon_{rec} BR}, \quad (4)$$

где N_{KS} – число зарегистрированных K_S -мезонов; ϵ_{rec} – эффективность регистрации; N_{event} – число анализируемых событий; BR – коэффициент ветвления для канала $K_S \rightarrow \pi^0 + \pi^0$, $BR = 30,69 \pm 0,05$ [29].

Систематические погрешности измерения инвариантного выхода K_S -мезона оцениваются через сравнение стандартных значений выхода со значениями, полученными при вариации параметров аппроксимации распределений по инвариантной массе, с данными моделирования (например, абсолютной энергетической шкалы и энергетического разрешения калориметра) и используемых ограничений. Основная доля систематической погрешности связана с выбором параметров аппроксимации для распределений по инвариантной массе для пар π^0 -кандидатов и конверсией фотонов в материалах детектора (5,2%). Основные параметры аппроксимации – это ее окно, степень полинома для описания фона, окно интегрирования сигнала. В областях малых, промежуточных и больших значений поперечного импульса, систематическая погрешность, связанная с аппроксимацией сигнала, составила (в процентах): 10 – 15, 8 – 12, 18 – 25.

Результаты и их обсуждение

На рис. 2 представлены измеренные инвариантные спектры рождения K_S -мезонов в зависимости от их поперечного импульса

в разных классах центральности столкновений $Cu + Au$ при $\sqrt{s_{NN}} = 200$ ГэВ. Нижняя граница диапазонов поперечного импульса определяется невозможностью выделения сигнала из фона. Верхняя граница обусловлена тем, что объем данных оказывается недостаточным для измерения выхода. Здесь и далее «усы» и «прямоугольники» возле экспериментальных точек обозначают абсолютные величины статистической и систематической погрешностей измерения.

На рис. 3 представлены отношения выходов K_S -мезонов к выходам π^0 -мезонов (I_{KS} / I_{π^0}), измеренные в разных интервалах поперечного импульса и разных классах центральности столкновений $Cu + Au$ при энергии $\sqrt{s_{NN}} = 200$ ГэВ. В качестве знаменателя используются выходы π^0 -мезонов, измеренные ранее в $(Cu + Au)$ -столкновениях [28, 31]. Относительные статистическая и систематическая погрешности для отношений I_{KS} / I_{π^0} определяются как квадратичная сумма относительных погрешностей измерения выходов K_S - и π^0 -мезонов. Измеренные отношения не зависят от поперечного импульса и центральности столкновений в пределах погрешности измерений и имеют порядок $I_{KS} / I_{\pi^0} \approx 0,4 - 0,5$, что равно в пределах погрешности таким отношениям, измеренным ранее в эксперименте PHENIX при столкновениях ядер дейтерия с ядрами золота ($d + Au$) и парных столкновениях ядер меди ($Cu + Cu$) при энергии $\sqrt{s_{NN}} = 200$ ГэВ [24].

На рис. 4 представлено сравнение факторов ядерной модификации π^0 -, η - [28, 31] и K_S -мезонов, измеренных в столкновениях $Cu + Au$ при энергии $\sqrt{s_{NN}} = 200$ ГэВ. На рисунке прямоугольники возле точек соответствуют абсолютной величине систематической погрешности измерения, корреляция которой по поперечному импульсу не известна. Прямоугольники возле единицы соответствуют относительной величине систематической погрешности, полностью коррелированной по поперечному импульсу. Для измерения фактора ядерной модификации K_S -мезонов использовались значения дифференциальных сечений K_S -мезонов в $(p + p)$ -взаимодействиях при $\sqrt{s_{NN}} = 200$ ГэВ, опубликованные в работе [32]. Значения чисел N_{coll} для разных классов центральности столкновений $Cu + Au$ представлены в таблице.

Факторы ядерной модификации π^0 -, η - [28, 31] и K_S -мезонов в $(Cu + Au)$ -столкновениях равны между собой в пределах

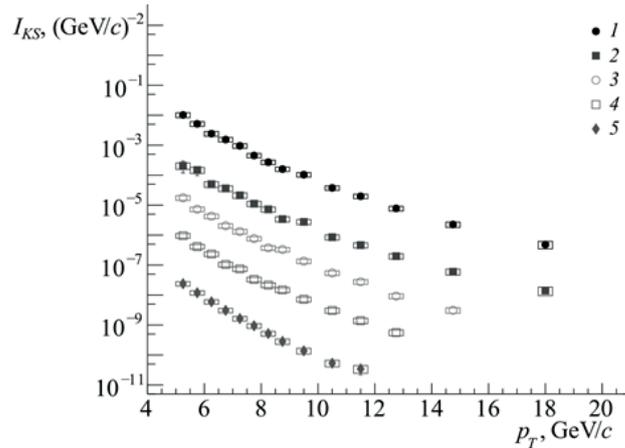


Рис. 2. Инвариантные спектры рождения K_S -мезонов по поперечному импульсу в (Cu + Au)-столкновениях в разных классах центральности, %: 0 – 20 (2), 20 – 40 (3), 40 – 60 (4), 60 – 90 (5) и без уточнения центральности (1). Для наглядности, точки масштабированы на факторы 10^1 (2), 10^0 (3), 10^{-1} (4), 10^{-2} (5), 10^3 (1)

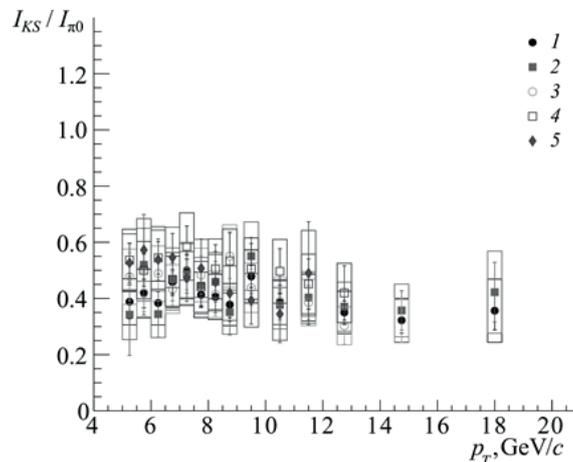


Рис. 3. Зависимости отношения I_{K_S} / I_{π^0} от поперечного импульса в (Cu + Au)-столкновениях в разных классах центральности; нумерация символов такая же, как на рис. 2

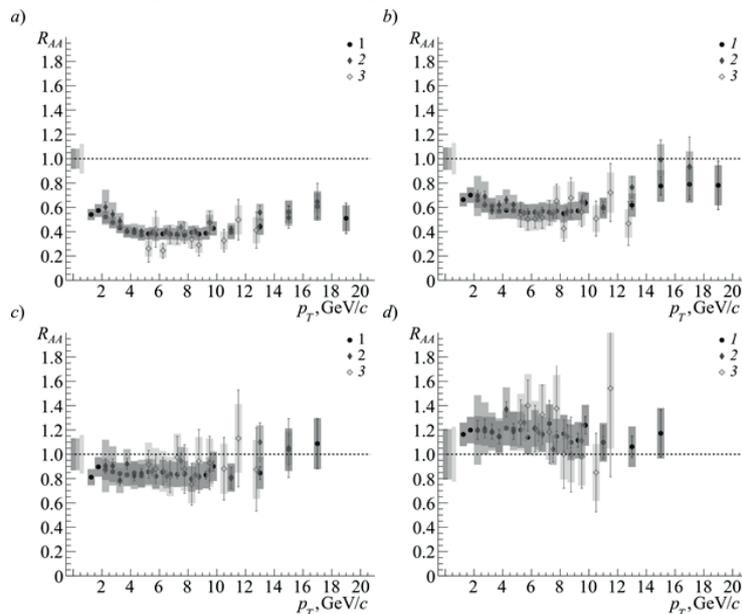


Рис. 4. Зависимости фактора ядерной модификации π^0 - (1), η - (2) [28, 31] и K_S - (3) мезонов от поперечного импульса в (Cu + Au)-столкновениях в разных классах центральности, %: 0 – 20 (a), 20 – 40 (b), 40 – 60 (c), 60 – 90 (d)

погрешности измерений в разных интервалах центральности и поперечного импульса. Кроме того, факторы ядерной модификации π^0 -, η - [28, 31] и K_S -мезонов в (Cu + Au)-столкновениях (область $p_T > 10$ ГэВ/c) равны таковым для адронных струй, измеренных в соответствующих классах центральности (Cu + Au)-столкновений [33]. Независимость фактора ядерной модификации от типа мезонов в области $p_T > 4 - 6$ ГэВ/c (π^0 , η , или K_S) говорит о том, что в (Cu + Au)-столкновениях эффект гашения адронных струй происходит на партонном уровне до фрагментации.

В центральных столкновениях (интервал 0 – 20%) факторы ядерной модификации π^0 -, η -, и K_S -мезонов принимают

значения около 0,4 (значение подавлено примерно в два раза, по сравнению с нормированным выходом в $(p + p)$ -взаимодействиях при той же энергии взаимодействия $\sqrt{s_{NN}} = 200$ ГэВ), в области промежуточных значений поперечного импульса (4 – 10 ГэВ).

На рис. 5 представлено сравнение величин фактора ядерной модификации K_S -мезонов, измеренного в системах Cu + Au, Au + Au [23] и Cu + Cu [24] при энергии $\sqrt{s_{NN}} = 200$ ГэВ, в разных интервалах поперечного импульса, при значениях числа N_{part} , имеющих порядок 100. Обозначения погрешности измерений такие же, как на рис. 4. Факторы ядерной модификации K_S -мезонов, измеренные в этих системах

Таблица

Значения основных параметров взаимодействия в столкновениях Cu + Au для разных классов центральности

Класс центральности, %	N_{coll}	N_{part}	T_{AA} , (мбн) ⁻¹
0 – 20	314	155	7,50
20 – 40	129	80	3,10
40 – 60	42	35	1,00
60 – 90	7,6	8,9	0,18
Без уточнения центральности	107	61	2,50

Обозначения: N_{coll} – среднее число парных неупругих нуклон-нуклонных взаимодействий; N_{part} – среднее число нуклонов, участвующих в ядро-ядерном столкновении; T_{AA} – среднее значение функции ядерного перекрытия.

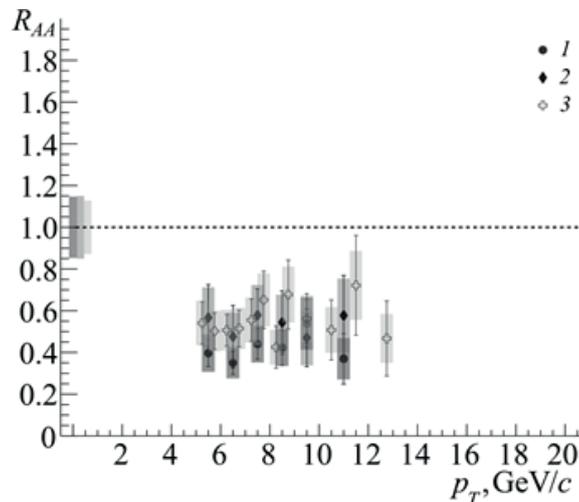


Рис. 5. Зависимости фактора ядерной модификации K_S -мезонов (3) от поперечного импульса в столкновениях Au + Au ($N_{part} = 102$; класс центральности 20 – 60 % [23]) (1), Cu + Cu ($N_{part} = 85$; 0 – 20% [24]) (2) и Cu + Au ($N_{part} = 80$; 20 – 40%) (3)

ядро-ядерных столкновений, равны друг другу в пределах погрешности измерений в разных интервалах поперечного импульса. Аналогичная картина наблюдается для факторов ядерной модификации π^0 - и η -мезонов [28, 31]. Это свидетельствует о том, что эффект гашения адронных струй в столкновениях Cu + Au, Au + Au и Cu + Cu при энергии $\sqrt{s_{NN}} = 200$ ГэВ не зависит от формы области перекрытия, реализуемой в этих системах.

Заключение

В эксперименте PHENIX измерено рождение K_S -мезонов в столкновениях ядер меди и золота при энергии $\sqrt{s_{NN}} = 200$ ГэВ в разных интервалах поперечного импульса и центральности. Отношения выходов K_S -мезонов к выходам π^0 -мезонов (I_{KS} / I_{π^0}) не зависят от центральности и поперечного импульса в пределах погрешности измерений. Порядок величины отношений I_{KS} / I_{π^0} (0,4 – 0,5) совпадает с величинами аналогичных отношений, измеренных ранее в столкновениях d + Au и Cu + Cu при энергии $\sqrt{s_{NN}} = 200$ ГэВ в эксперименте PHENIX.

Факторы ядерной модификации π^0 -, η - и K_S -мезонов в (Cu + Au)-столкновениях равны между собой в пределах погрешности измерений в разных интервалах центральности и поперечного импульса в области $p_T > 4 - 6$ ГэВ/c, а также равны факторам ядерной модификации адронных струй, измеренным в той же системе в соответствующих классах центральности. Это говорит о том, что в (Cu + Au)-столкновениях эффект гашения адронных струй происходит на партонном уровне до фрагментации.

Факторы ядерной модификации K_S -мезонов, измеренные в столкновениях Cu + Au, Au + Au и Cu + Cu при энергии $\sqrt{s_{NN}} = 200$ ГэВ, равны друг другу в пределах погрешности измерений в разных интервалах поперечного импульса. Это говорит о независимости эффекта гашения адронных струй в указанных системах при энергии $\sqrt{s_{NN}} = 200$ ГэВ от реализуемой в них формы области перекрытия.

Результаты настоящей работы были получены в процессе выполнения государственного задания Минобрнауки России 3.1498.2017/4.6.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Хелзен Ф., Мартин А.Д. Кварки и лептоны: введение в физику частиц. Пер. с англ. М.: Мир, 1987. 456 с.
2. Wang X.-N. (Ed.) Quark-gluon plasma 5. Beijing, China: World Scientific, 2016. 403 p.
3. Mendes M., Torrieri G. A quark-gluon plasma inspired model of the universe: Introduction and Inflation // arXiv preprint arXiv. 1805.02441. 2018.
4. Gromov N.A. Elementary particles in the early universe // Journal of Cosmology and Astroparticle Physics. 2016. Vol. 2016. No. 03. P. 053.
5. Husdal L. On effective degrees of freedom in the early universe // Galaxies. 2016. Vol. 4. No. 4. P. 78.
6. Arsene I., Dearden I.G., Beavis D., et al. Quark gluon plasma and color glass condensate at RHIC? The perspective from the BRAHMS experiment // Nuclear Physics A. 2005. Vol. 757. No. 1–2. Pp. 1–27.
7. Back B.B., Baker M.D., Ballintijn M., et al. The PHOBOS perspective on discoveries at RHIC // Nuclear Physics A. 2005. Vol. 757. No. 1–2. Pp. 28–101.
8. Adams J., Aggarwal M.M., Ahammed Z., et al. Experimental and theoretical challenges in the search for the quark gluon plasma: the STAR Collaboration's critical assessment of the evidence from RHIC collisions // Nuclear Physics A. 2005. Vol. 757. No. 1–2. Pp. 102–183.
9. Adcox K., Adler S.S., Afanasiev S., et al. Formation of dense partonic matter in relativistic nucleus-nucleus collisions at RHIC: experimental evaluation by the PHENIX Collaboration // Nuclear Physics A. 2005. Vol. 757. No. 1–2. Pp. 184–283.
10. Foka P., Janik M.A. An overview of experimental results from ultrarelativistic heavy-ion collisions at the CERN LHC: bulk properties and dynamical evolution // Reviews in Physics. 2016. Vol. 1. November. Pp. 154–171.
11. Miller M.L., Reygers K., Sanders S. J., et al. Glauber modeling in high-energy nuclear collisions // Annual Review of Nuclear and Particle Science. 2007. Vol. 57. Pp. 205–243.
12. Adare A., Afanasiev S., Aidala C., et al. Inclusive cross section and double helicity asymmetry for π^0 production in p + p collisions at $\sqrt{s} = 200$ GeV: implications for the polarized



- gluon distribution in the proton // *Physical Review*. D. 2007. Vol. 76. No. 5. P. 051106.
13. **Adare A., Aidala C., Ajitanand N.N., et al.** Inclusive cross section and double-helicity asymmetry for π^0 production at midrapidity in $p + p$ collisions at $\sqrt{s} = 510$ GeV // *Physical Review*. D. 2016. Vol. 93. No. 1. P. 011501.
14. **Elayavalli R.K., Zapp K.C.** Medium response in JEWEL and its impact on jet shape observables in heavy ion collisions // *Journal of High Energy Physics*. 2017. Vol. 2017. No. 7. P. 141.
15. **Park C., Jeon S., Gale C.** Jet modification with medium recoil in quark-gluon plasma // *Nuclear Physics*. A. 2019. Vol. 982. February. Pp. 643–646.
16. **Cao S., Luo T., Qin G.Y., et al.** Linearized Boltzmann transport model for jet propagation in the quark-gluon plasma: heavy quark evolution // *Physical Review*. C. 2016. Vol. 94. No. 1. P. 014909.
17. **He Y., Luo T., Wang X.N., et al.** Linear Boltzmann transport for jet propagation in the quark-gluon plasma: elastic processes and medium recoil // *Physical Review*. C. 2015. Vol. 91. No. 5. P. 054908.
18. **Chien Y.T., Vitev I.** Towards the understanding of jet shapes and cross sections in heavy ion collisions using soft-collinear effective theory // *Journal of High Energy Physics*. 2016. Vol. 2016. No. 5. P. 23.
19. **Chien Y.T., Emerman A., Kang Z.B., et al.** Jet quenching from QCD evolution // *Physical Review*. D. 2016. Vol. 93. No. 7. P. 074030.
20. **Cao S., Park C., Barbieri R.A., et al.** Multistage Monte Carlo simulation of jet modification in a static medium // *Physical Review*. C. 2017. Vol. 96. No. 2. P. 024909.
21. **Ghiglieri J.** Energy loss at NLO in a high-temperature Quark-Gluon Plasma // *Nuclear Physics*. A. 2016. Vol. 956. December. Pp. 801–804.
22. **Djordjevic M., Zigic D., Blagojevic B., et al.** Dynamical energy loss formalism: from describing suppression patterns to implications for future experiments // *Nuclear Physics*. A. 2019. Vol. 982. February. Pp. 699–702.
23. **Бердников А.Я., Иванищев Д.А., Котов Д.О., Рябов В.Г., Рябов Ю.Г., Самсонов В.М.** Подавление выхода короткоживущих нейтральных каонов в центральных столкновениях ядер золота при энергии 200 ГэВ // *Научно-технические ведомости Санкт-Петербургского государственного политехнического университета. Физико-математические науки*. 2011. № 2 (122). С. 111–116.
24. **Adare A., Afanasiev S., Aidala C., et al.** Measurement of K_{s0} and K_{s0}^* in $p + p$, $d + Au$, and $Cu + Cu$ collisions at $\sqrt{s_{NN}} = 200$ GeV // *Physical Review*. C. 2014. Vol. 90. No. 5. P. 054905.
25. **Adcox K., Adler S. S., Aizama M., et al.** PHENIX detector overview // *Nuclear Instruments and Methods in Physics Research. Section A: Accelerators, Spectrometers, Detectors and Associated Equipment*. 2003. Vol. 499. No. 2–3. Pp. 469–479.
26. **Allen M., Bennett M.J., Bobrek M., et al.** PHENIX inner detectors // *Nuclear Instruments and Methods in Physics Research. Section A: Accelerators, Spectrometers, Detectors and Associated Equipment*. 2003. Vol. 499. No. 2–3. Pp. 549–559.
27. **Aphcetché L., Awes T.C., Banning J., et al.** PHENIX calorimeter // *Nuclear Instruments and Methods in Physics Research. Section A: Accelerators, Spectrometers, Detectors and Associated Equipment*. 2003. Vol. 499. No. 2–3. Pp. 521–536.
28. **Zharko S. (PHENIX Collaboration).** Studying parton energy loss using meson production in Large Collision Systems with PHENIX // *Nuclear Physics*. A. 2017. Vol. 967. November. Pp. 552–555.
29. **Tanabashi M., Hagiwara K., Hikasa K., et al.** Review of particle physics // *Physical Review*. D. 2018. Vol. 98. No. 3. P. 030001.
30. **Brun R., Hagelberg R., Hansroul M., et al.** Geant: simulation program for particle physics experiments. User guide and reference manual // *Preprint CERN. CERN-DD-78-2-REV*. 1978.
31. **Aidala C., Ajitanand, N.N., Akiba, Y., et al.** Production of π^0 and η mesons in $Cu + Au$ collisions at $\sqrt{s_{NN}} = 200$ GeV // *Physical Review*. C. 2018. Vol. 98. No. 5. P. 054903.
32. **Adare A., Afanasiev S., Aidala C., et al.** Measurement of neutral mesons in $p + p$ collisions at $\sqrt{s} = 200$ GeV and scaling properties of hadron production // *Physical Review*. D. 2011. Vol. 83. No. 5. P. 052004.
33. **Timilsina A. (PHENIX Collaboration).** PHENIX results on reconstructed jets in $p + p$ and $Cu + Au$ collisions // *Nuclear Physics*. A. 2016. Vol. 956. December. Pp. 637–640.

Статья поступила в редакцию 20.03.2019, принята к публикации 01.04.2019.

СВЕДЕНИЯ ОБ АВТОРАХ

БЕРДНИКОВ Александр Ярославич – кандидат физико-математических наук, доцент кафедры экспериментальной ядерной физики Санкт-Петербургского политехнического университета Петра Великого, Санкт-Петербург, Российская Федерация.

195251, Российская Федерация, г. Санкт-Петербург, Политехническая ул., 29
alexber@phmf.spbstu.ru

БЕРДНИКОВ Ярослав Александрович – доктор физико-математических наук, профессор, заведующий кафедрой экспериментальной ядерной физики Санкт-Петербургского политехнического университета Петра Великого, Санкт-Петербург, Российская Федерация.

195251, Российская Федерация, г. Санкт-Петербург, Политехническая ул., 29
berdnikov@spbstu.ru

ЖАРКО Сергей Вячеславович – ассистент кафедры экспериментальной ядерной физики Санкт-Петербургского политехнического университета Петра Великого, Санкт-Петербург, Российская Федерация.

195251, Российская Федерация, г. Санкт-Петербург, Политехническая ул., 29
zharkosergey94@gmail.com

КОТОВ Дмитрий Олегович – кандидат физико-математических наук, доцент кафедры экспериментальной ядерной физики Санкт-Петербургского политехнического университета Петра Великого, Санкт-Петербург, Российская Федерация.

195251, Российская Федерация, г. Санкт-Петербург, Политехническая ул., 29
dmitriy.kotov@gmail.com

РАДЗЕВИЧ Павел Владиславович – аспирант кафедры экспериментальной ядерной физики Санкт-Петербургского политехнического университета Петра Великого, Санкт-Петербург, Российская Федерация.

195251, Российская Федерация, г. Санкт-Петербург, Политехническая ул., 29
radzevichp@gmail.com

REFERENCES

1. Halzen F., Martin A.D., Quarks and leptons: an introductory course in modern particle physics, John Wiley & sons, New York, 1984.
2. Wang X.-N., Quark-gluon plasma 5, World Scientific, Beijing, 2016.
3. Mendes M., Torrieri G., A quark-gluon plasma inspired model of the universe: introduction and inflation, arXiv preprint arXiv:1805.02441, 2018.
4. Gromov N.A., Elementary particles in the early universe, Journal of Cosmology and Astroparticle Physics. 2016 (03) (2016) 053.
5. Husdal L., On effective degrees of freedom in the early universe, Galaxies. 4 (4) (2016) 78.
6. Arsene I., Dearden I.G., Beavis D., et al., Quark gluon plasma and color glass condensate at RHIC? The perspective from the BRAHMS experiment, Nuclear Physics. A. 757 (1–2) (2005) 1–27.
7. Back B.B., Baker M.D., Ballintijn M., et al., The PHOBOS perspective on discoveries at RHIC, Nuclear Physics. A. 757 (1–2) (2005) 28–101.
8. Adams J., Aggarwal M.M., Ahammed Z., et al., Experimental and theoretical challenges in the search for the quark gluon plasma: the STAR Collaboration’s critical assessment of the evidence from RHIC collisions, Nuclear Physics. A. 757 (1–2) (2005) 102–183.
9. Adcox K., Adler S.S., Afanasiev S., et al., Formation of dense partonic matter in relativistic nucleus-nucleus collisions at RHIC: experimental evaluation by the PHENIX Collaboration, Nuclear Physics. A. 757 (1–2) (2005) 184–283.
10. Foka P., Janik M.A., An overview of experimental results from ultrarelativistic heavy-ion collisions at the CERN LHC: bulk properties and dynamical evolution, Reviews in Physics. 1 (November) (2016) 154–171.
11. Miller M.L., Reygers K., Sanders S.J., et al., Glauber modeling in high-energy nuclear collisions, Annual Review of Nuclear and Particle Science. 57 (2007) 205–243.
12. Adare A., Afanasiev S., Aidala C., et al., Inclusive cross section and double helicity



asymmetry for π^0 production in $p + p$ collisions at $\sqrt{s} = 200$ GeV: implications for the polarized gluon distribution in the proton, *Physical Review D*. 76 (5) (2007) 051106.

13. **Adare A., Aidala C., Ajitanand N.N., et al.**, Inclusive cross section and double-helicity asymmetry for π^0 production at midrapidity in $p + p$ collisions at $\sqrt{s} = 510$ GeV, *Physical Review D*. 93 (1) (2016) 011501.

14. **Elayavalli R.K., Zapp K.C.**, Medium response in JEWEL and its impact on jet shape observables in heavy ion collisions, *Journal of High Energy Physics*. 2017 (7) (2017) 141.

15. **Park C., Jeon S., Gale C.**, Jet modification with medium recoil in quark-gluon plasma, *Nuclear Physics A*. 982 (February) (2019) 643–646.

16. **Cao S., Luo T., Qin G.Y., et al.**, Linearized Boltzmann transport model for jet propagation in the quark-gluon plasma: heavy quark evolution, *Physical Review C*. 94 (1) (2016) 014909.

17. **He Y., Luo T., Wang X.N., et al.**, Linear Boltzmann transport for jet propagation in the quark-gluon plasma: elastic processes and medium recoil, *Physical Review C*. 91 (5) (2015) 054908.

18. **Chien Y.T., Vitev I.**, Towards the understanding of jet shapes and cross sections in heavy ion collisions using soft-collinear effective theory, *Journal of High Energy Physics*. 2016 (5) (2016) 23.

19. **Chien Y.T., Emerman A., Kang Z.B., et al.**, Jet quenching from QCD evolution, *Physical Review D*. 93 (7) (2016) 074030.

20. **Cao S., Park C., Barbieri R.A., et al.**, Multistage Monte Carlo simulation of jet modification in a static medium, *Physical Review C*. 96 (2) (2017) 024909.

21. **Ghiglieri J.**, Energy loss at NLO in a high-temperature Quark-Gluon Plasma, *Nuclear Physics A*. 956 (December) (2016) 801–804.

22. **Djordjevic M., Zigic D., Blagojevic B., et al.**, Dynamical energy loss formalism: from describing suppression patterns to implications for future experiments, *Nuclear Physics A*. 982 (February) (2019) 699–702.

23. **Berdnikov A.Ya., Ivanishchev P.A., Kotov D.O., et al.**, K_s -meson suppression in central Au+Au collisions at central-of-mass energy of 200 GeV nucleon pair, *St. Petersburg State*

Polytechnical University Journal. Physics and Mathematics. (2(122)) (2011) 111–116.

24. **Adare A., Afanasiev S., Aidala C., et al.**, Measurement of K_{s0} and K^*_0 in $p+p$, $d+Au$, and Cu+Cu collisions at $\sqrt{s_{NN}} = 200$ GeV, *Physical Review C*. 90 (5) (2014) 054905.

25. **Adcox K., Adler S.S., Aizama M., et al.**, PHENIX detector overview, *Nuclear Instruments and Methods in Physics Research. Section A: Accelerators, Spectrometers, Detectors and Associated Equipment*. 499 (2–3) (2003) 469–479.

26. **Allen M., Bennett M.J., Bobrek M., et al.**, PHENIX inner detectors, *Nuclear Instruments and Methods in Physics Research, Section A: Accelerators, Spectrometers, Detectors and Associated Equipment*. 499 (2–3) (2003) 549–559.

27. **Aphexcetche L., Awes T.C., Banning J., et al.**, PHENIX calorimeter, *Nuclear Instruments and Methods in Physics Research, Section A: Accelerators, Spectrometers, Detectors and Associated Equipment*. 499 (2–3) (2003) 521–536.

28. **Zharko S.** (PHENIX Collaboration), Studying parton energy loss using meson production in Large Collision Systems with PHENIX, *Nuclear Physics A*. 967 (November) (2017) 552–555.

29. **Tanabashi M., Hagiwara K., Hikasa K., et al.**, Review of particle physics, *Physical Review D*. 98 (3) (2018) 030001.

30. **Brun R., Hagelberg R., Hansroul M., et al.**, Geant: simulation program for particle physics experiments, User guide and reference manual, Preprint CERN, CERN-DD-78-2-REV, 1978.

31. **Aidala C., Ajitanand N.N., Akiba Y., et al.**, Production of π^0 and η mesons in Cu + Au collisions at $\sqrt{s_{NN}} = 200$ GeV, *Physical Review C*. 98 (5) (2018) 054903.

32. **Adare A., Afanasiev S., Aidala C., et al.**, Measurement of neutral mesons in $p+p$ collisions at $\sqrt{s} = 200$ GeV and scaling properties of hadron production, *Physical Review D*. 83 (5) (2011) 052004.

33. **Timilsina A.** (PHENIX Collaboration), PHENIX results on reconstructed jets in $p + p$ and Cu + Au collisions, *Nuclear Physics A*. 956 (December) (2016) 637–640.

Received 20.03.2019, accepted 01.04.2019.

THE AUTHORS

BERDNIKOV Alexander Ya.

Peter the Great St. Petersburg Polytechnic University
29 Politechnicheskaya St., St. Petersburg, 195251, Russian Federation
alexber@phmf.spbstu.ru

BERDNIKOV Yaroslav A.

Peter the Great St. Petersburg Polytechnic University
29 Politechnicheskaya St., St. Petersburg, 195251, Russian Federation
berdnikov@spbstu.ru

ZHARKO Sergei V.

Peter the Great St. Petersburg Polytechnic University
29 Politechnicheskaya St., St. Petersburg, 195251, Russian Federation
zharkosergey94@gmail.com

KOTOV Dmitry O.

Peter the Great St. Petersburg Polytechnic University
29 Politechnicheskaya St., St. Petersburg, 195251, Russian Federation
dmitriy.kotov@gmail.com

RADZEVICH Pavel V.

Peter the Great St. Petersburg Polytechnic University
29 Politechnicheskaya St., St. Petersburg, 195251, Russian Federation
radzevichp@gmail.com



DOI: 10.18721/JPM.12312
УДК 539.126.3

ИССЛЕДОВАНИЕ ЭФФЕКТА ГАШЕНИЯ АДРОННЫХ СТРУЙ В СТОЛКНОВЕНИЯХ ЯДЕР МЕДИ И ЗОЛОТА С ПОМОЩЬЮ ОМЕГА-МЕЗОНОВ

**А.Я. Бердников, Я.А. Бердников, С.В. Жарко,
Д.О. Котов, П.В. Радзевич**

Санкт-Петербургский политехнический университет Петра Великого,
Санкт-Петербург, Российская Федерация

В статье представлены результаты измерения инвариантных спектров рождения по поперечному импульсу и факторов ядерной модификации ω -мезонов в столкновениях ядер меди и золота ($\text{Cu} + \text{Au}$) при энергии 200 ГэВ. Исследования проведены с помощью спектрометра PHENIX на коллайдере RHIC. Измеренные значения факторов ядерной модификации ω -мезонов равны (в пределах погрешности) значениям, полученным ранее для π^0 -, η - и K_S -мезонов, а также для адронных струй в той же системе сталкивающихся ядер. Зависимости интегральных факторов ядерной модификации ω -мезонов от числа нуклонов, участвующих в ядро-ядерном взаимодействии, совпадают друг с другом (в пределах погрешности) в столкновениях $\text{Cu} + \text{Au}$, $\text{Au} + \text{Au}$ и $\text{Cu} + \text{Cu}$ при энергии 200 ГэВ. Анализ результатов свидетельствует о независимости (либо слабой зависимости) эффекта гашения адронных струй от формы области ядерного перекрытия, реализуемой в этих системах.

Ключевые слова: кварк-глюонная плазма, эффект гашения адронных струй, фактор ядерной модификации, омега-мезон

Ссылка при цитировании: Бердников А.Я., Бердников Я.А., Жарко С.В., Котов Д.О., Радзевич П.В. Исследование эффекта гашения адронных струй в столкновениях ядер меди и золота с помощью омега-мезонов // Научно-технические ведомости СПбГПУ. Физико-математические науки. 2019. Т. 12. № 3. С. 143–154. DOI: 10.18721/JPM.12312

JET-QUENCHING STUDIES IN ULTRARELATIVISTIC COPPER-GOLD NUCLEI COLLISIONS USING OMEGA MESONS

**A.Ya. Berdnikov, Ya.A. Berdnikov, S.V. Zharko,
D.O. Kotov, P.V. Radzevich**

Peter the Great St. Petersburg Polytechnic University, St. Petersburg, Russian Federation

In the paper, the measurement data on ω meson invariant transverse momentum spectra and nuclear modification factors in collisions of copper and gold nuclei ($\text{Cu} + \text{Au}$) at energy of 200 GeV have been presented. The studies were conducted with PHENIX spectrometer at RHIC. The obtained ω meson nuclear modification factors were equal (within the uncertainties) to ones derived for π^0 , η and K_S mesons and for jets as well in the same collision system. The integrated ω -meson nuclear modification factors versus the numbers of nuclei taking part in the nuclei-nuclei interaction, were in agreement (within uncertainties) with the similar dependencies for $\text{Cu} + \text{Au}$, $\text{Au} + \text{Au}$ and $\text{Cu} + \text{Cu}$ collisions at energy of 200 GeV. The analysis of results suggested that the jet-quenching effect was independent (or weakly dependent) of the shape of a nuclear overlap region realized in these systems.

Keywords: quark-gluon plasma, jet-quenching effect, nuclear modification factor, omega meson

Citation: Berdnikov A.Ya., Berdnikov Ya.A., Zharko S.V., Kotov D.O., Radzevich P.V., Jet-quenching studies in ultrarelativistic copper-gold nuclei collisions using omega mesons, St. Petersburg Polytechnical State University Journal. Physics and Mathematics. 12 (3) (2019) 143–154. DOI: 10.18721/JPM.12312

Введение

Характерной особенностью сильного взаимодействия кварков и глюонов является конфайнмент их цветового заряда, в результате которого эти частицы не могут существовать в свободном состоянии. Однако советский физик Э.В. Шуряк в конце семидесятых годов XX века предсказал возможность деконфайнмента кварк-глюонной материи при увеличении ее температуры до величин порядка нескольких сотен МэВ [1]. Данное состояние ученый назвал кварк-глюонной плазмой (КГП), подразумевая аналогию с электрон-ионной плазмой. В КГП потенциал взаимодействия между кварками и глюонами стремится к нулю ввиду малости среднего расстояния между ними; как следствие, их движение считается квазисвободным.

Для опытного наблюдения КГП Э.В. Шуряк предложил использовать столкновения ультрарелятивистских тяжелых ядер ($A + A$) [1], тем самым положив начало развитию физических программ для ряда экспериментов по столкновению тяжелых ядер на ускорителях. В восьмидесятые и девяностые годы XX века попытки обнаружения КГП предпринимались на ускорителях Бэвалак (Национальная лаборатория Лоуренса, США), AGS (Брукхейвенская национальная лаборатория, США) и SPS (ЦЕРН, Швейцария). Однако первое систематическое наблюдение признаков образования КГП было проведено на Коллайдере релятивистских тяжелых ионов – RHIC (англ. The Relativistic Heavy Ion Collider) в Брукхейвенской национальной лаборатории, США [4 – 5]. Позднее факт образования КГП был подтвержден на Большом адронном коллайдере – LHC (англ. The Large Hadron Collider) в Европейском центре ядерных исследований (ЦЕРН), Швей-

цария [6 – 8].

Одним из признаков образования КГП в ($A + A$)-столкновениях оказалось сильное подавление выхода адронов в области больших значений поперечного импульса ($p_T > 4 - 6$ ГэВ/с), по сравнению с выходом, измеренным в протон-протонных ($p + p$) взаимодействиях [5]. Для прямых же фотонов в ($A + A$)-столкновениях и для адронов в дейтрон-ядерных ($d + A$) взаимодействиях подобного подавления не наблюдали [5]. Явление подавления адронных выходов получило название эффекта гашения адронных струй; оно связывается с потерями энергии жестких партонов в результате их прохождения через кварк-глюонную среду [9].

Для типичных кинетических энергий пучков ультрарелятивистских ядер на RHIC характерны значения порядка 100 ГэВ/нуклон, которые соответствуют длине волны де Бройля (около 10^{-4} фм). Таким образом, в одном акте ядро-ядерного взаимодействия и последующем образовании КГП участвует лишь часть нуклонов ядер, налетающих друг на друга (нуклоны-участники), в то время как остальные нуклоны вырываются из сталкивающихся ядер и уходят из области взаимодействия (нуклоны-наблюдатели). По признаку степени перекрытия ядер, налетающих друг на друга, столкновения (события) классифицируются по центральности. Последняя измеряется в процентах: столкновениям с большими областью перекрытия и числом нуклонов-участников N_{part} и малым прицельным параметром b соответствуют центральности порядка 0 – 20 %, столкновениям с малыми значениями области перекрытия и числа N_{part} – порядка 60 – 90%. Центральное и периферийное ядро-ядерные столкновения схематически показаны на рис. 1.

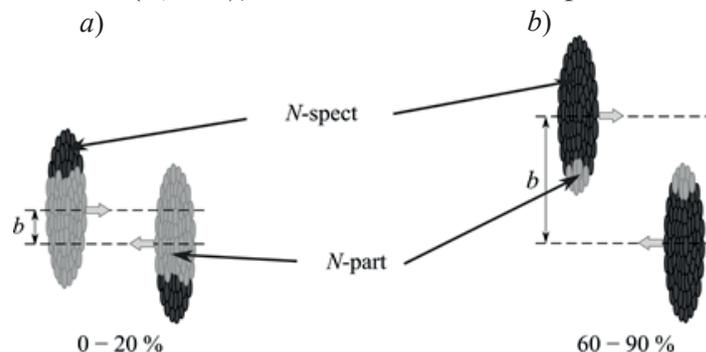


Рис. 1. Геометрическая схема ядро-ядерных столкновений: центрального (a) и периферийного (b); для них указаны значения центральности (%); N_{part} , N_{spect} – нуклоны-участники и нуклоны-наблюдатели соответственно; b – прицельный параметр

Количественное описание эффекта гашения адронных струй обычно проводится с помощью фактора ядерной модификации, который дается формулой

$$R_{AA}(p_T) = \frac{1}{N_{coll}} \frac{dN_{AA}/dp_T}{dN_{pp}/dp_T}, \quad (1)$$

где dN_{AA}/dp_T , dN_{pp}/dp_T – выходы адронов соответственно в $(A + A)$ - и $(p + p)$ -столкновениях в данном интервале поперечного импульса p_T ; N_{coll} – число неупругих нуклон-нуклонных взаимодействий.

Если $R_{AA} = 1$, то ядро-ядерное столкновение может быть интерпретировано в виде простой суперпозиции нуклон-нуклонных взаимодействий. Противное свидетельствует о наличии коллективных эффектов среды; причем эффекты, проявляющиеся как во взаимодействиях $p(d) + A$, так и в $A + A$, называются эффектами холодной ядерной материи, в то время как гашение адронных струй является эффектом горячей ядерной материи и проявляется только в $(A + A)$ -системах.

Измерение фактора ядерной модификации адронов различного типа в разных системах сталкивающихся ядер является одним из основных инструментов исследования коллективных эффектов, в том числе эффекта гашения адронных струй и их зависимости от свойств этих адронов (масса, спин, кварковый состав и т. п.). Например, ω -мезоны, так же как и π^0 -мезоны, состоят из кварков и антикварков первого поколения (u, d), но при этом ω -мезоны относятся к векторным мезонным резонансам и обладают единичным спином, а π^0 -мезоны представляют собой псевдоскалярные частицы с нулевым спином. Предыдущие исследования особенностей рождения ω -мезонов проводились в симметричных парных столкновениях ядер золота ($Au + Au$) [10] и ядер меди ($Cu + Cu$) [10].

Система столкновений ядер меди с ядрами золота ($Cu + Au$) при $\sqrt{s_{NN}} = 200$ ГэВ представляет отдельный интерес для систематического изучения свойств КГП. Она является единственной несимметричной системой столкновений ультрарелятивистских тяжелых ядер и характеризуется особой геометрией перекрытия, отличной от систем $Cu + Cu$ и $Au + Au$. Выявление особенностей рождения ω -мезонов в системе столкновений $Cu + Au$ позволит наложить дополнительные ограничения на параметры ряда феноменологических моделей энерге-

тических потерь адронов в КГП [11 – 19].

В настоящей статье представлены результаты измерения инвариантных спектров рождения по поперечному импульсу и факторов ядерной модификации ω -мезонов в столкновениях ядер меди и золота ($Cu + Au$) при энергии $\sqrt{s_{NN}} = 200$ ГэВ.

Экспериментальная установка

Измерение рождения ω -мезонов проведено с использованием спектрометра PHENIX [20], расположенного на коллайдере RHIC. Система счетчиков ядро-ядерных столкновений (BBC) [21] использована для определения центральности, координаты события вдоль оси движения пучков (z_{vertex}) [21], времени столкновения [21], а также для инициирования триггера MB [21, 22], включающего запись сигналов с детекторных подсистем спектрометра PHENIX, если в нем зарегистрировано хотя бы одно неупругое нуклон-нуклонное взаимодействие. Две группы счетчиков BBC покрывали область псевдобыстроты $3,1 < |\eta| < 3,9$ и полный азимутальный угол. Они расположены на оси движения пучков на расстоянии 144 см от номинальной точки их пересечения. Каждая группа состоит из 64 счетчиков, представляющих собой черенковские детекторы с кварцевым радиатором толщиной 3,00 см и радиусом 2,54 см, и измеряет электрический заряд, оставленный нуклонами-наблюдателями. Центральность C данного события определяется выражением

$$C = \epsilon_{MB} (1 - \delta(Q_{BBC})), \quad (2)$$

где $\epsilon_{MB} = 93 \pm 3 \%$ – эффективность триггера MB; Q_{BBC} – заряд, зарегистрированный в данном событии; $\delta(Q_{BBC})$ – доля событий, в которых зарегистрирован электрический заряд, меньший, чем Q_{BBC} .

Измерение выхода ω -мезонов выполнено в четырех классах центральности ($Cu + Au$)-столкновений: 0 – 20, 20 – 40, 40 – 60 и 60 – 90 %, а также в классе без уточнения центральности: 0 – 93 %. Геометрические параметры ядро-ядерных столкновений, такие как числа N_{part} и N_{coll} , определяются при помощи моделирования откликов BBC методом Монте-Карло по модели Глаубера [23].

Система электромагнитных калориметров (EMCal) [24] использовалась для определения энергии и точки падения гамма-квантов, рожденных в распадах ней-

тральных мезонов (π^0 , η , K_S , ω). Она состоит из двух технологически различных подсистем: PbSc – подсистемы сцинтилляционных сэмплинг-калориметров со свинцовым поглотителем и PbGl – подсистемы черенковских калориметров со свинцовым стеклом; указанные подсистемы распределены в шести и двух секторах калориметра, соответственно. Каждый сектор электромагнитного калориметра покрывает область псевдобыстроты $|\eta| < 0,35$ и азимутального угла $\Delta\phi = 22,5^\circ$; подсистема PbSc находится на расстоянии 5,1 м, а PbGl – 5,4 м от оси движения пучков тяжелых ядер. Сегментация $\delta\phi \times \delta\eta$ секторов PbSc и PbGl подсистем составляла примерно $0,010 \times 0,010$ и $0,008 \times 0,008$, соответственно. Более подробная информация о конструкции и характеристиках системы электромагнитного калориметра представлена в работе [24].

Методика определения выхода ω -мезонов

Регистрация ω -мезонов проводится в канале $\omega \rightarrow \pi^0 + \gamma$ с помощью анализа распределений пар $\pi^0\gamma$ по инвариантной массе m_{inv} . Значение инвариантной массы для каждой пары $\pi^0\gamma$ определяется с помощью выражения

$$m_{inv} = \sqrt{E^2 - \mathbf{p}^2}, \quad (3)$$

где E и \mathbf{p} – суммарные значения энергий и импульсов зарегистрированных кандидатов на роль дочерних π^0 -мезонов (π^0 -кандидатов) и дочерних γ -квантов (γ -кандидатов).

Для увеличения отношения уровня сигнала со стороны ω -мезонов к фону, на характеристики пары $\pi^0\gamma$ и формирующих их γ - и π^0 -кандидатов налагается ряд кинематических ограничений. Кластеры, зарегистрированные в электромагнитном калориметре, ассоциируются с γ -квантами, если выделенная в них энергия превышает величину 0,4 ГэВ и их форма удовлетворяет стандартным ограничениям [24]. Данные ограничения позволяют дискриминировать значительную часть кластеров, оставленных заряженными адронами. Формирование π^0 -кандидатов осуществляется в канале $\pi^0 \rightarrow \gamma + \gamma$. Оба γ -кванта в паре $\gamma\gamma$ должны быть зарегистрированы в одном и том же секторе электромагнитного калориметра, а их энергии $E_{\gamma 1}$ и $E_{\gamma 2}$ должны удовлетворять соотношению

$$\frac{|E_{\gamma 1} - E_{\gamma 2}|}{E_{\gamma 1} + E_{\gamma 2}} \leq 0,8. \quad (4)$$

Поперечный импульс π^0 -кандидата, зарегистрированного в PbSc-подсистеме (PbGl-подсистеме), должен находиться в диапазоне 2 – 11 (14) ГэВ/с. Ограничение снизу используется для дополнительного увеличения отношения уровня сигнала со стороны ω -мезонов к фону. Ограничение сверху должно исключать эффект слияния электромагнитных кластеров со стороны дочерних γ -квантов, который связан с невозможностью различить оставленные ими кластеры из-за малости угла между их импульсами. При этом в PbGl-подсистеме данный эффект развивается для больших значений поперечного импульса из-за более мелкой сегментации, и, как следствие, лучшей дискриминации кластеров.

Далее π^0 -кандидаты отбираются в окне согласно неравенству

$$|m_{\gamma\gamma} - M_{\pi}(p_T)| \leq 2\sigma_{\pi}(p_T), \quad (5)$$

где $m_{\gamma\gamma}$ – инвариантная масса пары $\gamma\gamma$, формирующей π^0 -кандидат; M_{π} , σ_{π} – параметризации положения и ширины пиков (соответственно) со стороны π^0 -мезонов на распределениях по $m_{\gamma\gamma}$ (измеренные значения массы).

Энергии γ -квантов в парах, формирующих π^0 -кандидатов и прошедших ограничение (5), корректируются для приведения измеренных значений массы к табличному [25] для увеличения отношения уровня сигнала со стороны ω -мезонов к фону, благодаря исключению разброса измеренных значений массы π^0 -кандидатов.

При формировании пары $\pi^0\gamma$, энергия γ -кандидата должна быть не ниже чем 1 ГэВ; π^0 - и γ -кандидаты должны быть зарегистрированы в одном и том же плече (западном или восточном) спектрометра PHENIX и удовлетворять условию

$$|\cos \theta^*| \leq 0,6 \quad (6)$$

где θ^* – угол между направлением движения π^0 -мезона в системе покоя пары $\pi^0\gamma$ и направлением движения этой пары в лабораторной системе координат.

По своей сути, ограничение (6) аналогично ограничению (4), принятому для пар $\gamma\gamma$.

Распределения по инвариантной массе формируются в разных интервалах поперечного импульса и центральности. Фон в распределениях по инвариантной массе пар $\pi^0\gamma$ состоит из коррелированной и некоррелированной компонент. Первая обу-

словлена продуктами распада других частиц (например, η -, η' - и K_S -мезонов). Вторая связана со случайными комбинациями частиц-кандидатов и оценивается с помощью метода смешивания событий: для каждого полученного распределения по инвариантной массе формируется дополнительное (некоррелированное) распределение, в котором каждому π^0 -кандидату ставится в соответствие десять γ -кандидатов из других событий с близкими значениями центральности и координаты z_{vertex} . Использование десяти γ -кандидатов вместо одного позволяет значительно увеличить статистическую значимость некоррелированного распределения. Полученная таким образом функция некоррелированной компоненты фона нормируется на распределение по инвариантной массе в области $m_{inv} > 2$ ГэВ/ c^2 и вычитается из него. Примеры итоговых распределений по инвариантной массе пар $\pi^0\gamma$ представлены на рис. 2. Функции некоррелированной компоненты фона здесь оценивались методом смешивания событий. Пики соответствуют сигналам со стороны ω -мезонов.

Для измерения выхода ω -мезонов, распределения аппроксимируются суммой функции Гаусса (аппроксимация сигнала) и полинома второй степени (аппроксимация

остаточной коррелированной компоненты фона), в области вокруг сигнала. Число зарегистрированных ω -мезонов определяется как площадь (интеграл) под кривой функции Гаусса.

Для определения инвариантного выхода, т. е. числа мезонов, рожденных в вершине ядро-ядерных столкновений, число зарегистрированных ω -мезонов необходимо скорректировать на ограниченность акцептанса и детекторные эффекты калориметра, а также на используемые кинематические ограничения при помощи эффективности регистрации. Эффективность регистрации оценивается через моделирование экспериментальной установки методом Монте-Карло в среде GEANT3 [26].

Для определения инвариантного выхода ω -мезонов используется формула

$$I_\omega = \frac{1}{N_{ev}} \frac{d^2N}{2\pi p_T dp_T dy} = \frac{N_\omega}{2\pi p_T \Delta p_T N_{ev} \varepsilon_{rec} BR}, \quad (1)$$

где N_ω — число зарегистрированных ω -мезонов; ε_{rec} — эффективность регистрации; N_{ev} — число анализируемых событий, BR — коэффициент ветвления для канала

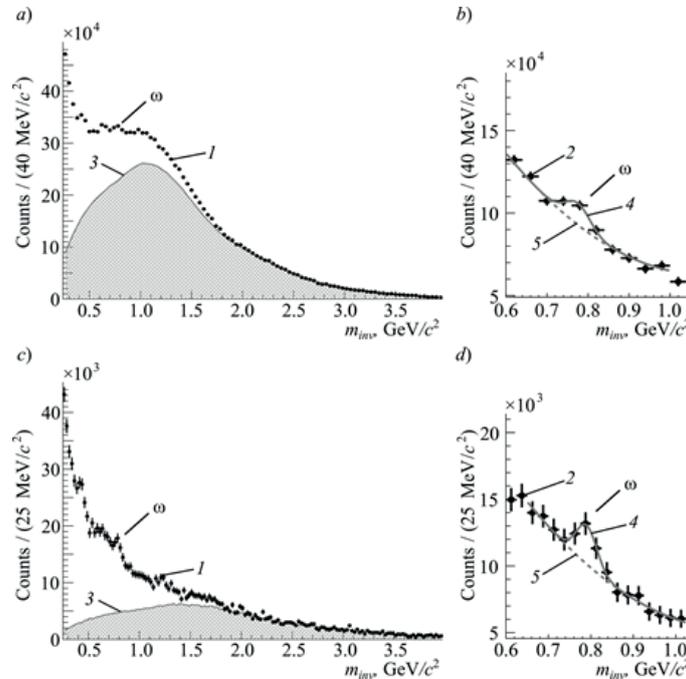


Рис. 2. Примеры исходных (a, c) и обработанных (b, d) экспериментальных распределений пар $\pi^0\gamma$ по их инвариантной массе в интервалах 6 – 7 ГэВ/c (a, b) и 8 – 10 ГэВ/c (c, d): 1, 2 – исходные и итоговые экспериментальные точки соответственно; 3 – функции некоррелированной компоненты фона; 4, 5 – функции аппроксимации сигнал + фон и фона соответственно

$\omega \rightarrow \pi^0 + \gamma$, BR = 8,40 ± 0,22 % [25].

Систематическая погрешность определения инвариантного выхода ω -мезонов оценивалась путем сравнения стандартных значений выхода со значениями, полученными при вариации параметров аппроксимации распределений по инвариантной массе, параметров моделирования (например, абсолютной энергетической шкалы и энергетического разрешения калориметра) и используемых кинематических ограничений. Основными источниками систематической погрешности являются возможные ошибки при выборе параметров аппроксимации (например, исключение некоррелированной части фона, выбор степени полинома для описания остаточного фона) распре-

делений по инвариантной массе пар $\pi^0\gamma$ (7 – 15% для разных значений поперечного импульса и центральности), возможное расхождение в работе алгоритмов описания формы кластеров (9,2 %) и конверсии фотонов в материалах детекторов (7,8 %) в модели Монте-Карло и реальных данных.

Основными источниками систематической погрешности являются:

1) возможные ошибки при выборе параметров аппроксимации распределений по инвариантной массе пар $\pi^0\gamma$ (например, исключение некоррелированной части фона, выбор степени полинома для описания остаточного фона);

2) возможное расхождение между работой алгоритмов описания формы кластеров

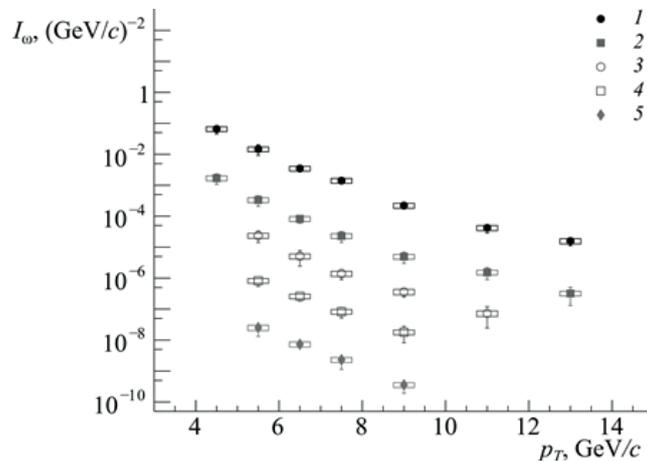


Рис. 3. Инвариантные спектры рождения ω -мезонов по поперечному импульсу в (Cu + Au)-столкновениях в разных классах центральности, %:

0 – 20 (2), 20 – 40 (3), 40 – 60 (4), 60 – 90 (5), а также без уточнения центральности (1).

Точки масштабированы на факторы 10^1 (2), 10^0 (3), 10^{-1} (4), 10^{-2} (5) и 10^3 (1)

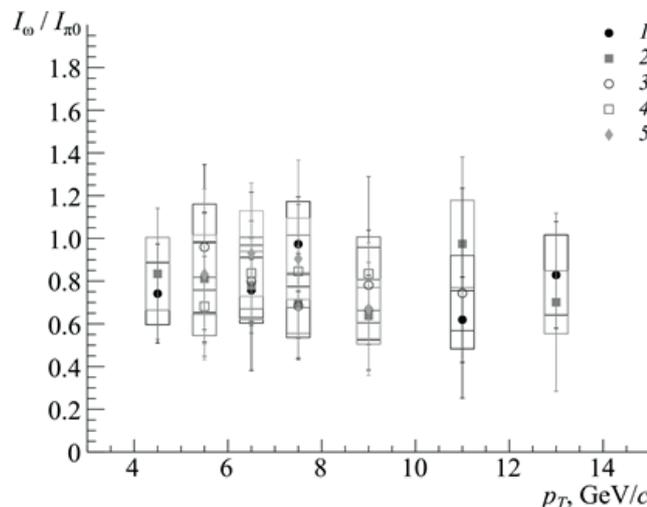


Рис. 4. Зависимость отношений I_ω / I_{π^0} от поперечного импульса в (Cu + Au)-столкновениях в разных классах центральности, %: 0 – 20 (2), 20 – 40 (3), 40 – 60 (4), 60 – 90 (5), а также без уточнения центральности (1)

в материалах детекторов;

3) возможное расхождение между работой алгоритмов описания конверсии фотонов в материалах детекторов в модели Монте-Карло и реальных данных.

В количественном отношении значения систематических погрешностей от перечисленных факторов соответственно составляют 7 – 15% (для разных значений поперечного импульса и центральности), 9,2 % и 7,8 %.

Результаты и их обсуждение

Инвариантные спектры рождения ω -мезонов, измеренные в зависимости от их поперечного импульса в разных классах центральности столкновений Cu + Au при $\sqrt{s_{NN}} = 200$ ГэВ, представлены на рис. 3. Интервалы поперечного импульса измерения спектров ограничены в связи с невозможностью выделения сигнала из фона (нижнее ограничение) и недостаточным для измерения выхода объемом данных (верхнее ограничение). На рис. 3 – 6 «усы» и «прямоугольники» возле точек обозначают абсолютные величины статистической и систематической погрешностей измерения.

На рис. 4 представлены отношения выходов ω -мезонов к выходам π^0 -мезонов, I_ω/I_{π^0} , измеренные в разных интервалах поперечного импульса и разных классах центральности столкновений Cu + Au при энергии $\sqrt{s_{NN}} = 200$ ГэВ. В качестве знаменателя используются выходы π^0 -мезонов, измеренные ранее в столкновениях Cu + Au [27, 28]. Относительные статистическая и систематическая погрешности для отношений I_ω/I_{π^0} определяются как квадратичные суммы относительных погрешностей измерения выходов ω - и π^0 -мезонов. Анализ полученных данных приводит к заключению, что в пределах погрешности, измеренные отношения не зависят от поперечного импульса и центральности. Величина отношений I_ω/I_{π^0} лежит в диапазоне около 0,7 – 0,8, что в пределах погрешности совпадает с ранее измеренными отношениями в эксперименте PHENIX в столкновениях $p + p$, $d + Au$, Cu + Cu и Au + Au при энергии $\sqrt{s_{NN}} = 200$ ГэВ [10].

На рис. 5 представлены факторы ядерной модификации π^0 - [27, 28], η - [27, 28], K_S - и ω -мезонов, измеренные в разных классах центральности (Cu + Au)-столкновений при энергии $\sqrt{s_{NN}} = 200$ ГэВ. Прямоугольники возле точек соответствуют

абсолютным величинам систематической погрешности измерения с неизвестной корреляцией по поперечному импульсу. Прямоугольники возле единицы соответствуют относительной систематической погрешности, полностью коррелированной по поперечному импульсу. При вычислении значений фактора ядерной модификации ω -мезонов в качестве знаменателя в формуле (1) используется произведение аппроксимации спектра рождения π^0 -мезонов, измеренного в системе $(p + p)$ -взаимодействий при энергии $\sqrt{s_{NN}} = 200$ ГэВ, на отношение $I_\omega/I_{\pi^0} = 0,81 \pm 0,02 \pm 0,07$, полученное в

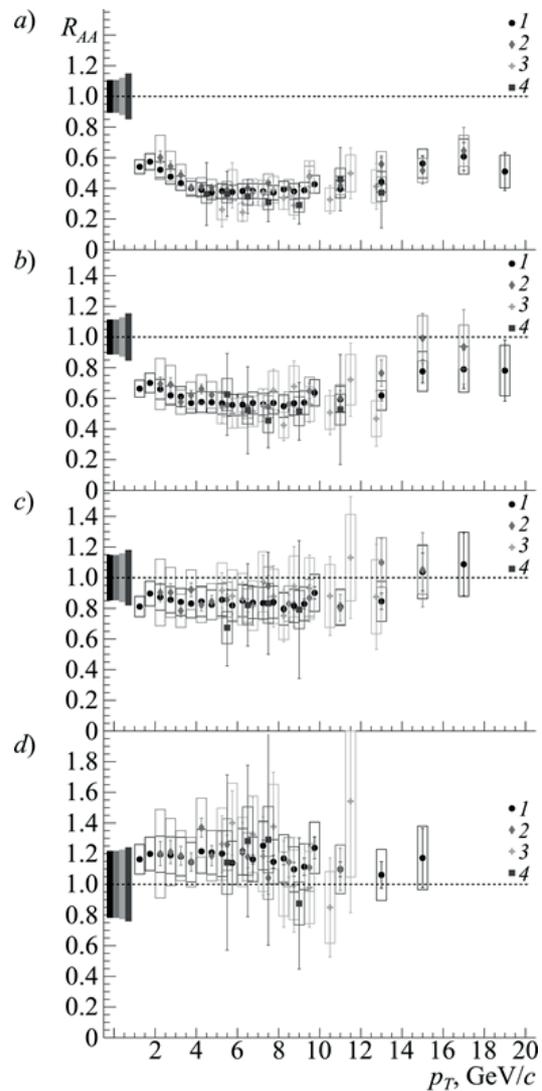


Рис. 5. Зависимости фактора ядерной модификации π^0 - (1) [27, 28], η - (2) [27, 28], K_S - (3) и ω - (4) мезонов от поперечного импульса в (Cu + Au)-столкновениях при энергии $\sqrt{s_{NN}} = 200$ ГэВ в разных классах центральности, %: 0 – 20 (a), 20 – 40 (b), 40 – 60 (c), 60 – 90 (d)

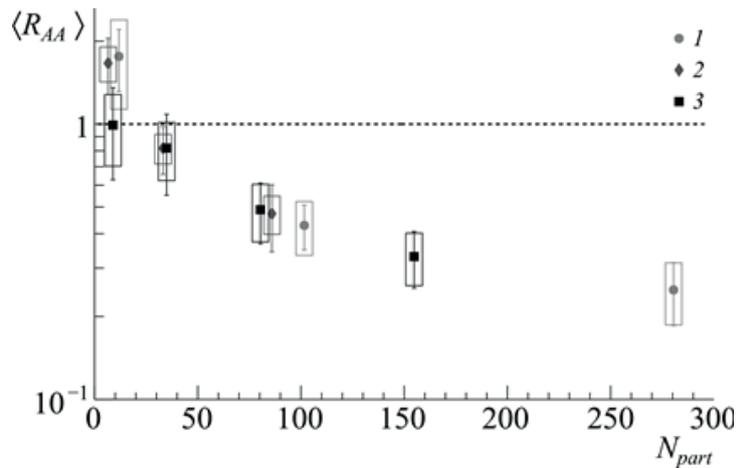


Рис. 6. Зависимость интегрального фактора ядерной модификации ω -мезонов от числа N_{part} в столкновениях Au + Au (1) [10], Cu + Cu (2) [10] и Cu + Au (3) при энергии $\sqrt{s_{NN}} = 200$ ГэВ

этой же системе [10].

Измеренные значения фактора ядерной модификации π^0 -, η -, K_S - и ω -мезонов в системе (Cu + Au)-столкновений равны между собой в пределах погрешности в разных интервалах поперечного импульса и классах центральности. Значения указанного фактора этих мезонов в области $p_T > 10$ ГэВ/с в разных классах центральности также равны таковым для адронных струй, измеренных ранее в (Cu + Au)-столкновениях [29].

Независимость фактора ядерной модификации от типа мезонов (π^0 , η , K_S , ω) свидетельствует о том, что в (Cu + Au)-столкновениях эффект гашения адронных струй происходит на партонном уровне, т. е. потери энергии жестких партонов происходят в кварк-глюонной среде до их фрагментации в адронные струи.

На рис. 6. представлены зависимости интегрального фактора ядерной модификации ω -мезонов от числа N_{part} в системах Cu + Au, Au + Au [10] и Cu + Cu [10] при энергии $\sqrt{s_{NN}} = 200$ ГэВ.

Приведенные зависимости совпадают друг с другом для различных систем сталкивающихся ядер в пределах погрешности измерений, что говорит о независимости эффекта гашения адронных струй в системах Cu + Au, Au + Au и Cu + Cu при энергии $\sqrt{s_{NN}} = 200$ ГэВ от реализуемой в них формы области перекрытия.

Заключение

В эксперименте PHENIX измерены инвариантные спектры рождения по попереч-

ному импульсу и факторы ядерной модификации ω -мезонов, а также отношения выходов ω -мезонов к выходам π^0 -мезонов в (Cu + Au)-столкновениях при энергии $\sqrt{s_{NN}} = 200$ ГэВ в зависимости от поперечного импульса и центральности.

Отношения I_ω/I_{π^0} не зависят от центральности и поперечного импульса в пределах погрешности измерений. Величина указанных отношений имеет тот же порядок ($\sim 0,7 - 0,8$) в столкновениях ядер меди и золота при энергии $\sqrt{s_{NN}} = 200$ ГэВ, что и отношения, измеренные ранее в системах $p + p$, $d + Au$, Au + Au и Cu + Cu при энергии $\sqrt{s_{NN}} = 200$ ГэВ.

Значения фактора ядерной модификации, измеренные для π^0 -, η -, K_S - и ω -мезонов в столкновениях ядер меди и золота равны между собой в пределах погрешности в разных классах центральности и интервалах поперечного импульса, а также равны факторам ядерной модификации адронных струй, измеренным в той же системе столкновений в соответствующих классах центральности. Это говорит о том, что в (Cu + Au)-столкновениях потери энергии жестких партонов происходят в кварк-глюонной среде до их фрагментации в адронные струи. Интегральные факторы ядерной модификации ω -мезонов, измеренные в столкновениях Cu + Au, Au + Au и Cu + Cu при энергии $\sqrt{s_{NN}} = 200$ ГэВ, равны друг другу в пределах погрешности измерений при близких значениях чисел N_{part} , что говорит о независимости (либо слабой зависимости) эффекта гашения адрон-



ных струй в системах Cu + Au, Au + Au и Cu + Cu при энергии $\sqrt{s_{NN}} = 200$ ГэВ от реализуемой в них формы области перекрытия.

Результаты настоящей работы были получены в рамках выполнения государственного задания Минобрнауки России 3.1498.2017/4.6.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Shuryak E.V.** Quantum chromodynamics and the theory of super dense matter // *Physics Reports*. 1980. Vol. 61. No. 2. Pp. 71–158.
2. **Arsene I., Dearden I.G., Beavis D., et al.** Quark gluon plasma and color glass condensate at RHIC? The perspective from the BRAHMS experiment // *Nuclear Physics. A*. 2005. Vol. 757. No. 1–2. Pp. 1–27.
3. **Back B.B., Baker M.D., Ballintijn M., et al.** The PHOBOS perspective on discoveries at RHIC // *Nuclear Physics. A*. 2005. Vol. 757. No. 1–2. Pp. 28–101.
4. **Adams J., Aggarwal M.M., Ahammed Z., et al.** Experimental and theoretical challenges in the search for the quark gluon plasma: the STAR Collaboration’s critical assessment of the evidence from RHIC collisions // *Nuclear Physics. A*. 2005. Vol. 757. No. 1–2. Pp. 102–183.
5. **Adcox K., Adler S.S., Afanasiev S., et al.** Formation of dense partonic matter in relativistic nucleus-nucleus collisions at RHIC: experimental evaluation by the PHENIX Collaboration // *Nuclear Physics. A*. 2005. Vol. 757. No. 1–2. Pp. 184–283.
6. **Chatrchyan S., Khachatryan V., Sirunyan A.M., et al.** Study of high- p_T charged particle suppression in Pb – Pb compared to $p + p$ collisions at $\sqrt{s_{NN}} = 2.76$ TeV // *The European Physical Journal. C*. 2012. Vol. 72. No. 3. P. 1945.
7. **Aad G., Abbott B., Abdallah J., et al.** Measurement of the jet radius and transverse momentum dependence of inclusive jet suppression in lead-lead collisions at $\sqrt{s_{NN}} = 2.76$ TeV with the ATLAS detector // *Physics Letters. B*. 2013. Vol. 719. No. 4–5. Pp. 220–241.
8. **Abelev B., Adam J., Adamova D., et al.** Centrality dependence of charged particle production at large transverse momentum in Pb–Pb collisions at $\sqrt{s_{NN}} = 2.76$ TeV // *Physics Letters. B*. 2013. Vol. 720. No. 1–3. Pp. 52–62.
9. **Bjorken J.D.** Energy loss of energetic partons in quark-gluon plasma: possible extinction of high $p(t)$ jets in hadron-hadron collisions. 1982. FermiLab-Pub-82-059-T.
10. **Adare A., Afanasiev S., Aidala C., et al.** Production of ω mesons in $p + p$, $d + Au$, Cu + Cu, and Au + Au collisions at $\sqrt{s_{NN}} = 200$ GeV // *Physical Review. C*. 2011. Vol. 84. No. 4. P. 044902.
11. **Cao S., Luo T., Qin G.Y., et al.** Linearized Boltzmann transport model for jet propagation in the quark-gluon plasma: heavy quark evolution // *Physical Review. C*. 2016. Vol. 94. No. 1. P. 014909.
12. **Cao S., Park C., Barbieri R.A., et al.** Multistage Monte Carlo simulation of jet modification in a static medium // *Physical Review. C*. 2017. Vol. 96. No. 2. P. 024909.
13. **Elayavalli R.K., Zapp K.C.** Medium response in JEWEL and its impact on jet shape observables in heavy ion collisions // *Journal of High Energy Physics*. 2017. Vol. 2017. No. 7. P. 141.
14. **Park C., Jeon S., Gale C.** Jet modification with medium recoil in quark-gluon plasma // *Nuclear Physics. A*. 2019. Vol. 982. February. Pp. 643–646.
15. **He Y., Luo T., Wang X.N., et al.** Linear Boltzmann transport for jet propagation in the quark-gluon plasma: elastic processes and medium recoil // *Physical Review. C*. 2015. Vol. 91. No. 5. P. 054908.
16. **Chien Y.T., Vitev I.** Towards the understanding of jet shapes and cross sections in heavy ion collisions using soft-collinear effective theory // *Journal of High Energy Physics*. 2016. Vol. 2016. No. 5. P. 23.
17. **Chien Y.T., Emerman A., Kang Z.B., et al.** Jet quenching from QCD evolution // *Physical Review. D*. 2016. Vol. 93. No. 7. P. 074030.
18. **Ghiglieri J.** Energy loss at NLO in a high-temperature quark-gluon plasma // *Nuclear Physics. A*. 2016. Vol. 956. December. Pp. 801–804.
19. **Djordjevic M., Zigic D., Blagojevic B., et al.** Dynamical energy loss formalism: from describing suppression patterns to implications for future experiments // *Nuclear Physics. A*. 2019. Vol. 982. February. Pp. 699–702.
20. **Adcox K., Adler S.S., Aizama M., et al.** PHENIX detector overview // *Nuclear Instruments and Methods in Physics Research. Section A: Accelerators, Spectrometers, Detectors and Associated Equipment*. 2003. Vol. 499. No. 2–3. Pp. 469–479.
21. **Allen M., Bennett M.J., Bobrek M., et al.** PHENIX inner detectors // *Nuclear Instruments and Methods in Physics Research. Section A:*

Accelerators, Spectrometers, Detectors and Associated Equipment. 2003. Vol. 499. No. 2–3. Pp. 549–559.

22. Adler S.S., Allen M., Alley G., et al. PHENIX on-line systems // Nuclear Instruments and Methods in Physics Research. Section A: Accelerators, Spectrometers, Detectors and Associated Equipment. 2003. Vol. 499. No. 2–3. Pp. 560–592.

23. Miller M.L., Reygers K., Sanders S. J., et al. Glauber modeling in high-energy nuclear collisions // Annual Review of Nuclear and Particle Science. 2007. Vol. 57. Pp. 205–243.

24. Aphetche L., Awes T.C., Banning J., et al. PHENIX calorimeter // Nuclear Instruments and Methods in Physics Research. Section A: Accelerators, Spectrometers, Detectors and Associated Equipment. 2003. Vol. 499. No. 2–3. Pp. 521–536.

25. Tanabashi M., Hagiwara K., Hikasa K.,

et al. Review of particle physics // Physical Review. D. 2018. Vol. 98. No. 3. P. 030001.

26. Brun R., Hagelberg R., Hansroul M., et al. Geant: simulation program for particle physics experiments. User guide and reference manual. Preprint CERN. CERN-DD-78-2-REV, 1978.

27. Zharko S. (PHENIX Collaboration). Studying parton energy loss using meson production in Large Collision Systems with PHENIX // Nuclear Physics. A. 2017. Vol. 967. November. Pp. 552–555.

28. Aidala C., Ajitanand N.N., Akiba Y., et al. Production of π^0 and η mesons in Cu + Au collisions at $\sqrt{s_{NN}} = 200$ GeV // Physical Review. C. 2018. Vol. 98. No. 5. P. 054903.

29. Timilsina A. (PHENIX Collaboration). PHENIX results on reconstructed jets in $p + p$ and Cu + Au collisions // Nuclear Physics. A. 2016. Vol. 956. December. Pp. 637–640.

Статья поступила в редакцию 13.03.2019, принята к публикации 01.04.2019.

СВЕДЕНИЯ ОБ АВТОРАХ

БЕРДНИКОВ Александр Ярославич – кандидат физико-математических наук, доцент кафедры экспериментальной ядерной физики Санкт-Петербургского политехнического университета Петра Великого, Санкт-Петербург, Российская Федерация.

195251, Российская Федерация, г. Санкт-Петербург, Политехническая ул., 29
alexber@phmf.spbstu.ru

БЕРДНИКОВ Ярослав Александрович – доктор физико-математических наук, профессор, заведующий кафедрой экспериментальной ядерной физики Санкт-Петербургского политехнического университета Петра Великого, Санкт-Петербург, Российская Федерация.

195251, Российская Федерация, г. Санкт-Петербург, Политехническая ул., 29
berdnikov@spbstu.ru

ЖАРКО Сергей Вячеславович – ассистент кафедры экспериментальной ядерной физики Санкт-Петербургского политехнического университета Петра Великого, Санкт-Петербург, Российская Федерация.

195251, Российская Федерация, г. Санкт-Петербург, Политехническая ул., 29
zharkosergey94@gmail.com

КОТОВ Дмитрий Олегович – кандидат физико-математических наук, доцент кафедры экспериментальной ядерной физики Санкт-Петербургского политехнического университета Петра Великого, Санкт-Петербург, Российская Федерация.

195251, Российская Федерация, г. Санкт-Петербург, Политехническая ул., 29
dmitriy.kotov@gmail.com

РАДЗЕВИЧ Павел Владиславович – аспирант кафедры экспериментальной ядерной физики Санкт-Петербургского политехнического университета Петра Великого, Санкт-Петербург, Российская Федерация.

195251, Российская Федерация, г. Санкт-Петербург, Политехническая ул., 29
radzevichp@gmail.com

REFERENCES

1. **Shuryak E.V.**, Quantum chromodynamics and the theory of super dense matter, *Physics Reports*. 61 (2) (1980) 71–158.
2. **Arsene I., Dearden I.G., Beavis D., et al.**, Quark gluon plasma and color glass condensate at RHIC? The perspective from the BRAHMS experiment, *Nuclear Physics, A*. 757 (1–2) (2005) 1–27.
3. **Back B.B., Baker M.D., Ballintijn M., et al.**, The PHOBOS perspective on discoveries at RHIC *Nuclear Physics, A*. 757 (1–2) (2005) 28–101.
4. **Adams J., Aggarwal M.M., Ahammed Z., et al.**, Experimental and theoretical challenges in the search for the quark gluon plasma: the STAR Collaboration’s critical assessment of the evidence from RHIC collisions, *Nuclear Physics, A*. 757 (1–2) (2005) 102–183.
5. **Adcox K., Adler S.S., Afanasiev S., et al.**, Formation of dense partonic matter in relativistic nucleus-nucleus collisions at RHIC: experimental evaluation by the PHENIX Collaboration, *Nuclear Physics, A*. 757 (1–2) (2005) 184–283.
6. **Chatrchyan S., Khachatryan V., Sirunyan A.M., et al.**, Study of high- p_T charged particle suppression in Pb-Pb compared to $p + p$ collisions at $\sqrt{s_{NN}} = 2.76$ TeV, *The European Physical Journal, C*. 72 (3) (2012) 1945.
7. **Aad G., Abbott B., Abdallah J., et al.**, Measurement of the jet radius and transverse momentum dependence of inclusive jet suppression in lead-lead collisions at $\sqrt{s_{NN}} = 2.76$ TeV with the ATLAS detector, *Physics Letters, B*. 719 (4–5) (2013) 220–241.
8. **Abelev B., Adam J., Adamova D., et al.**, Centrality dependence of charged particle production at large transverse momentum in Pb-Pb collisions at $\sqrt{s_{NN}} = 2.76$ TeV, *Physics Letters, B*. 720 (1–3) (2013) 52–62.
9. **Bjorken J.D.**, Energy loss of energetic partons in quark-gluon plasma: possible extinction of high $p(t)$ jets in hadron-hadron collisions (1982) FERMILAB-PUB-82-059-T.
10. **Adare A., Afanasiev S., Aidala C., et al.**, Production of ω mesons in $p + p$, $d + \text{Au}$, $\text{Cu} + \text{Cu}$, and $\text{Au} + \text{Au}$ collisions at $\sqrt{s_{NN}} = 200$ GeV, *Physical Review, C*. 84 (4) (2011) 044902.
11. **Cao S., Luo T., Qin G.Y., et al.**, Linearized Boltzmann transport model for jet propagation in the quark-gluon plasma: heavy quark evolution, *Physical Review, C*. 94 (1) (2016) 014909.
12. **Cao S., Park C., Barbieri R.A., et al.**, Multistage Monte Carlo simulation of jet modification in a static medium, *Physical Review, C*. 96 (2) (2017) 024909.
13. **Elayavalli R.K., Zapp K.C.**, Medium response in JEWEL and its impact on jet shape observables in heavy ion collisions, *Journal of High Energy Physics*. 2017 (7) (2017) 141.
14. **Park C., Jeon S., Gale C.**, Jet modification with medium recoil in quark-gluon plasma, *Nuclear Physics, A*. 982 (February) (2019) 643–646.
15. **He Y., Luo T., Wang X.N., et al.**, Linear Boltzmann transport for jet propagation in the quark-gluon plasma: elastic processes and medium recoil, *Physical Review, C*. 91 (5) (2015) 054908.
16. **Chien Y.T., Vitev I.**, Towards the understanding of jet shapes and cross sections in heavy ion collisions using soft-collinear effective theory, *Journal of High Energy Physics*. 2016 (5) (2016) 23.
17. **Chien Y.T., Emerman A., Kang Z.B., et al.**, Jet quenching from QCD evolution, *Physical Review, D*. 93 (7) (2016) 074030.
18. **Ghiglieri J.**, Energy loss at NLO in a high-temperature quark-gluon plasma, *Nuclear Physics, A*. 956 (December) (2017) 801–804.
19. **Djordjevic M., Zigic D., Blagojevic B., et al.**, Dynamical energy loss formalism: from describing suppression patterns to implications for future experiments, *Nuclear Physics, A*. 982 (February) (2019) 699–702.
20. **Adcox K., Adler S.S., Aizama M., et al.**, PHENIX detector overview, *Nuclear Instruments and Methods in Physics Research, Section A: Accelerators, Spectrometers, Detectors and Associated Equipment*. 499 (2–3) (2003) 469–479.
21. **Allen M., Bennett M.J., Bobrek M., et al.**, PHENIX inner detectors, *Nuclear Instruments and Methods in Physics Research, Section A: Accelerators, Spectrometers, Detectors and Associated Equipment*. 499 (2–3) (2003) 549–559.
22. **Adler S.S., Allen M., Alley G., et al.**, PHENIX on-line systems, *Nuclear Instruments and Methods in Physics Research, Section A: Accelerators, Spectrometers, Detectors and Associated Equipment*. 499 (2–3) (2003) 560–592.
23. **Miller M.L., Reygers K., Sanders S.J., et al.**, Glauber modeling in high-energy nuclear collisions, *Annual Review of Nuclear and Particle Science*. 57 (2007) 205–243.
24. **Aphécetche L., Awes T.C., Banning J., et al.**, PHENIX calorimeter, *Nuclear Instruments and Methods in Physics Research, Section A:*

Accelerators, Spectrometers, Detectors and Associated Equipment. 499 (2–3) (2003) 521–536.

25. **Tanabashi M., Hagiwara K., Hikasa K., et al.**, Review of particle physics, Physical Review, D. 98 (3) (2018) 030001.

26. **Brun R., Hagelberg R., Hansroul M., et al.**, Geant: simulation program for particle physics experiments. User guide and reference manual, Preprint CERN (1978) CERN-DD-78-2-REV.

27. **Zharko S.** (PHENIX Collaboration),

Studying parton energy loss using meson production in Large Collision Systems with PHENIX, Nuclear Physics, A. 967 (November) (2017) 552–555.

28. **Aidala C., Ajitanand N.N., Akiba Y., et al.**, Production of π^0 and η mesons in Cu + Au collisions at $\sqrt{s_{NN}} = 200$ GeV, Physical Review, C. 98 (5) (2018) 054903.

29. **Timilsina A.** (PHENIX Collaboration), PHENIX results on reconstructed jets in $p + p$ and Cu + Au collisions, Nuclear Physics, A. 956 (December) (2016) 637–640.

Received 13.03.2019, accepted 01.04.2019.

THE AUTHORS

BERDNIKOV Alexander Ya.

Peter the Great St. Petersburg Polytechnic University

29 Politechnicheskaya St., St. Petersburg, 195251, Russian Federation
alexber@phmf.spbstu.ru

BERDNIKOV Yaroslav A.

Peter the Great St. Petersburg Polytechnic University

29 Politechnicheskaya St., St. Petersburg, 195251, Russian Federation
berdnikov@spbstu.ru

ZHARKO Sergei V.

Peter the Great St. Petersburg Polytechnic University

29 Politechnicheskaya St., St. Petersburg, 195251, Russian Federation
zharkosergey94@gmail.com

KOTOV Dmitry O.

Peter the Great St. Petersburg Polytechnic University

29 Politechnicheskaya St., St. Petersburg, 195251, Russian Federation
dmitriy.kotov@gmail.com

RADZEVICH Pavel V.

Peter the Great St. Petersburg Polytechnic University

29 Politechnicheskaya St., St. Petersburg, 195251, Russian Federation
radzevichp@gmail.com

DOI: 10.18721/JPM.12313
УДК 535.3

ВЛИЯНИЕ ДИПОЛЬ-ДИПОЛЬНОГО ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ НА ЭВОЛЮЦИЮ МОДЫ РЕЗОНАТОРА В МОДЕЛИ ЛАЗЕРА НА НЕСКОЛЬКИХ ИЗЛУЧАТЕЛЯХ

Н.В. Ларионов

Санкт-Петербургский политехнический университет Петра Великого,
Санкт-Петербург, Российская Федерация

В работе теоретически исследуется модель лазера на двух атомах. Оба двухуровневых атома находятся в условиях некогерентной накачки, помещены в резонатор Фабри – Перо и взаимодействуют с выделенной затухающей модой. В случае выключенного поля накачки рассматривается влияние межатомного диполь-дипольного взаимодействия на эволюцию затухающей моды резонатора. Показано, что эта эволюция существенно зависит от начального суперпозиционного состояния атомов. При включенной некогерентной накачке «память» о начальном состоянии атомов в резонаторе со временем исчезает.

Ключевые слова: нанолазер, одноатомный лазер, диполь-дипольное взаимодействие, ближнее поле

Ссылка при цитировании: Ларионов Н.В. Влияние диполь-дипольного взаимодействия на эволюцию моды резонатора в модели лазера на нескольких излучателях // Научно-технические ведомости СПбГПУ. Физико-математические науки. 2019. Т. 12. № 3. С. 155–163. DOI: 10.18721/JPM.12313

IMPACT OF DIPOLE-DIPOLE INTERACTION ON THE CAVITY MODE EVOLUTION IN THE MODEL OF FEW EMITTERS LASER

N.V. Larionov

Peter the Great St. Petersburg Polytechnic University, St. Petersburg, Russian Federation

In the paper, the simple model of a two-atom laser is theoretically studied. The both dipole-dipole coupled atoms are under conditions of incoherent pump, are placed into the Fabry – Perot cavity and interact with a single damping field mode. In the switched-off pump position, the effect of dipole-dipole interaction on evolution of the damping mode has been considered. This evolution was shown to be strongly dependent on an initial atomic superposition state of atoms. In the switched-on pump position, the ‘memory’ for the initial atomic state should collapse with time.

Keywords: nanolaser, single-atom laser, dipole-dipole interaction, near-field effect

Citation: Larionov N.V., Impact of dipole-dipole interaction on the cavity mode evolution in the model of few emitters laser, St. Petersburg Polytechnical State University Journal. Physics and Mathematics. 12 (3) (2019) 155–163. DOI: 10.18721/JPM.12313

Введение

В настоящее время наблюдается интерес к системам, состоящим из одного или нескольких квантовых объектов, помещенных в определенные условия и взаимодействующих с электромагнитным полем, модифицированным этими же условиями. Ярким примером таких систем являются нанолазеры [1 – 6], т. е. лазеры, рабочую среду которых составляют либо один, либо несколько квантовых излучателей – атомов [7], ионов [8], квантовых точек (КТ) [9]. Кроме очевидного фундаментального интереса к нанолазерам как сугубо квантовым системам, существует и практический интерес. Они могут быть использованы как источники неклассических состояний поля или выступать в роли кубитов в сложных квантовых сетях [10, 11]. Здесь в качестве примера можно привести систему, представляющую собой несколько КТ, помещенных в отдельные, связанные волокном или полевыми модами, микрорезонаторы [12]. Другой пример – это атомы, внедренные в оптическое волокно и взаимодействующие с модами этого волокна [13]. Такая квазилинейная система используется для создания атомных запутанных состояний и востребована в квантово-информационных приложениях.

Если излучатели расположены на расстоянии порядка длины волны излучения относительно друг друга, то начинают проявляться коллективные эффекты, связанные с межатомным резонансным диполь-дипольным взаимодействием. Как показано в работах [14, 15], для ансамбля примесных атомов, внедренных в твердотельную матрицу, расположенную в резонаторе Фабри – Перо, или для отдельных атомов, находящихся вблизи заряженной поверхности, диполь-дипольное взаимодействие приведет к существенной модификации динамики спонтанного излучения атомов. В работах [16, 17] была продемонстрирована необходимость учета диполь-дипольного взаимодействия для корректного описания динамики запутанных состояний двух и более атомов, находящихся в резонаторе без потерь. Коллективные эффекты также могут влиять на интерференционные эффекты при рассеянии света в плотных атомных облаках, охлажденных в магнитооптических ловушках [18 – 20].

В теоретических работах [21 – 23] исследовалась система, представляющая собой

одну или две КТ, связанные с одной затухающей модой резонатора. Рассматривалось влияние отстройки частоты моды резонатора от КТ-резонансов на образующиеся коллективные состояния излучателей. В случае присутствия некогерентной накачки исследовалась генерация излучения такого лазера и были обнаружены условия, при которых происходит сильное запутывание между двумя излучателями. Также исследован стационарный режим такого лазера.

Если не учитывать специфику лазера на КТ, связанную с наличием валентной зоны и зоны проводимости, а, следовательно, соответствующего оператора взаимодействия, то рассмотренные в [21 – 23] задачи можно сопоставить с задачей о лазере на двух двухуровневых атомах.

В данной работе исследуется модель лазера на двух двухуровневых атомах с замкнутой схемой некогерентной накачки, взаимодействующих между собой через резервуар мод резонатор Фабри – Перо и связанных с выделенной затухающей модой. В отсутствие накачки изучается влияние межатомного диполь-дипольного взаимодействия на эволюцию затухающей моды резонатора. При включенной некогерентной накачке исследованы изменения начальных суперпозиционных атомных состояний. Основное отличие от упомянутых выше работ состоит в учете влияния структуры мод резонатора на различные атомные релаксационные константы, а также в учете конечного времени жизни выделенной моды резонатора.

Модель нанолазера

Лазер на двух излучателях будем описывать следующей моделью. Два одинаковых покоящихся двухуровневых атома помещены в резонатор Фабри – Перо. Размеры зеркал будем считать достаточно большими, чтобы не учитывать дифракции на их краях. Моды резонатора с потерями имеют сложную структуру [24], поэтому все атомные релаксационные константы будут вычислены в приближении идеального резонатора Фабри – Перо [14].

Выделение одной затухающей моды резонатора, с которой будут взаимодействовать атомы, является приближением, которое хорошо зарекомендовало себя в некоторых задачах для обычных лазеров (см., например, работы [25, 26]). Для нанолазера, в частности, из-за флуктуаций положения

зеркал, излучатель будет взаимодействовать с суперпозицией мод, которая характеризуется неким разбросом волновых векторов вблизи направления оси резонатора. Составляющие этой суперпозиции будут существенно влиять на поведение нанолазера. В представленной работе этот аспект не учитывается, а рассматривается упрощенная ситуация, когда атомы взаимодействуют с одной выделенной скалярной затухающей модой.

Воздействие некогерентной накачки предполагается одинаковым для обоих атомов, вне зависимости от их пространственного расположения.

Ориентируясь на соответствующие эксперименты, интенсивность внутрирезонаторного поля будем считать малой, так что среднее число фотонов в резонаторе $\langle n \rangle \ll 1$. Оценить величину $\langle n \rangle$ можно с помощью отношения скорости некогерентной накачки атомов к скорости распада моды резонатора.

Уравнение для оператора плотности рассматриваемой модели нанолазера имеет следующий вид [27]:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \hat{\rho}}{\partial t} = & -\frac{i}{\hbar} [\hat{V}, \hat{\rho}] + \frac{\kappa}{2} (2\hat{a}\hat{\rho}\hat{a}^\dagger - \hat{a}^\dagger\hat{a}\hat{\rho} - \hat{\rho}\hat{a}^\dagger\hat{a}) + \\ & + \sum_{i=a,b} \frac{\gamma_i}{2} (2\hat{\sigma}_i\hat{\rho}\hat{\sigma}_i^\dagger - \hat{\sigma}_i^\dagger\hat{\sigma}_i\hat{\rho} - \hat{\rho}\hat{\sigma}_i^\dagger\hat{\sigma}_i) + \\ & + \sum_{i=a,b} \frac{\Gamma}{2} (2\hat{\sigma}_i^\dagger\hat{\rho}\hat{\sigma}_i - \hat{\sigma}_i\hat{\sigma}_i^\dagger\hat{\rho} - \hat{\rho}\hat{\sigma}_i\hat{\sigma}_i^\dagger) + \\ & + \sum_{i \neq j=a,b} \frac{\gamma_{ij}}{2} (2\hat{\sigma}_i\hat{\rho}\hat{\sigma}_i^\dagger - \hat{\sigma}_i^\dagger\hat{\sigma}_j\hat{\rho} - \hat{\rho}\hat{\sigma}_i^\dagger\hat{\sigma}_j) - \\ & - i \sum_{i \neq j=a,b} \Omega_{ij} [\hat{\sigma}_i^\dagger\hat{\sigma}_j, \hat{\rho}]. \end{aligned} \quad (1)$$

Здесь \hat{a} , \hat{a}^\dagger – операторы рождения и уничтожения фотона в затухающей моде резонатора; $\hat{\sigma}_i = |g_i\rangle\langle e_i|$, $\hat{\sigma}_i^\dagger = |e_i\rangle\langle g_i|$, – проекционные операторы для i -го атома ($i = a, b$), где $|g_i\rangle$ и $|e_i\rangle$ – векторы основного и возбужденного состояний i -го атома, соответственно.

Оператор взаимодействия атомов с модой резонатора имеет вид

$$\begin{cases} \hat{V} = i\hbar \sum_{i=a,b} g(i) (\hat{a}^\dagger\hat{\sigma}_i - \hat{\sigma}_i^\dagger\hat{a}), \\ g(i) = \sqrt{\frac{2\pi\omega_{n_0}}{\hbar L^2 a}} d_{21} \sin(k_{n_0} z_i), \end{cases} \quad (2)$$

где $g(i)$ – константа связи для i -го атома, зависящая от его пространственного положения; $\omega_{n_0} = ck_{n_0} = 2\pi c / \lambda_{n_0}$ – частота атомного перехода $|g_i\rangle \rightarrow |e_i\rangle$, совпадающая с частотой выделенной моды резонатора.

Как и оговаривалось выше, размеры зеркал – $L \times L$, такие что $L \gg a$ (a – расстояние между ними). Второе слагаемое, в левой части уравнения (1), описывает затухание моды резонатора со скоростью κ . Третье слагаемое в уравнении (1) отвечает за независимый спонтанный распад i -го атома со скоростью γ_i , обусловленный взаимодействием с резервуаром мод резонатора. Некогерентной накачке атомов со скоростью Γ соответствует четвертое слагаемое в уравнении (1). Два последних слагаемых в нем обусловлены наличием резонансного диполь-дипольного взаимодействия между атомами, причем γ_{ij} – релаксационная константа, описывающая зависимый спонтанный распад атомов, а Ω_{ij} – соответствующий сдвиг.

Явные выражения релаксационных констант γ_i , γ_{ij} , Ω_{ij} для двухуровневых атомов (переход $J_e = 0 \rightarrow J_g = 1$) были получены в работе [14]. Для примера приведем здесь выражение для константы независимого спонтанного распада атома в резонаторе Фабри – Перо (выражения для других констант можно найти в работе [14]):

$$\begin{aligned} \frac{\gamma_i}{2} = & \frac{\pi\gamma_0}{2ak_{n_0}} + \\ & + \frac{\pi\gamma_0}{ak_{n_0}} \sum_{n=1}^{[[ak_{n_0}/\pi]]} \left(1 - \frac{k_n^2}{k_{n_0}^2} \cos^2(2k_n z_i) \right), \end{aligned} \quad (3)$$

где $\gamma_0 = \frac{2k_{n_0}^3 d_{eg}^2}{3\hbar}$, $k_n = \frac{\pi n}{a}$, $n = 1, 2, \dots$,

и обозначение $[[x]]$ означает наибольшее целое значение x , меньшее, чем величина x .

Для решения операторного уравнения (1), оно переписывалось в представлении чисел заполнения $|n\rangle$ по полевой моде и в проекциях на атомные состояния $|\alpha_i\rangle$ [3]:

$$\langle \alpha_i | \langle n | \hat{\rho} | m \rangle | \alpha_j \rangle \equiv \rho_{nm}^{\alpha_i \alpha_j},$$

где

$$\begin{cases} \hat{a}|n\rangle = \sqrt{n}|n-1\rangle, \\ \hat{a}^\dagger|n\rangle = \sqrt{n+1}|n+1\rangle; \\ |\alpha_1\rangle = |g_a\rangle|g_b\rangle, |\alpha_2\rangle = |e_a\rangle|e_b\rangle, \\ |\alpha_3\rangle = |e_a\rangle|g_b\rangle, |\alpha_4\rangle = |g_a\rangle|e_b\rangle. \end{cases} \quad (4)$$

Результаты расчетов и обсуждение

Все расчеты проведем для следующей геометрии эксперимента. Расстояние между зеркалами выберем равным $a = 50\lambda_{n_0}$, и ось резонатора направим вдоль оси z . Атомы в резонаторе расположим на расстоянии

$$r_{ab} = \sqrt{\rho_{ab}^2 + (z_a - z_b)^2} \approx \lambda_{n_0} / 2\pi$$

друг от друга, выбрав их координаты таким образом, чтобы каждый атом участвовал во взаимодействии с затухающей модой:

$$\rho_{ab} = \sqrt{(x_a - x_b)^2 + (y_a - y_b)^2} = 0, 2\lambda_{n_0},$$

$$z_a = 15, 25\lambda_{n_0}, z_b = 15, 10\lambda_{n_0};$$

при этом атомные релаксационные константы и константы связи (в единицах κ) равны:

$$\gamma_a / \kappa = 19, 7, \gamma_b / \kappa = 19, 8,$$

$$\gamma_{ab} / \kappa = 6, 0; \Omega_{ab} / \kappa = 0, 6;$$

$$g(a) / \kappa = 5, 0, g(b) / \kappa = 2, 7.$$

Сначала рассмотрим ситуацию, когда некогерентная накачка отключена. На рис. 1, а, для разных начальных состояний атомно-полевой системы

$$|\Psi_3\rangle = |\alpha_3\rangle|vac\rangle, |\Psi_4\rangle = |\alpha_4\rangle|vac\rangle,$$

представлена временная зависимость вероятности

$$p_{11}(t) = \text{Sp}_{at} [\rho_{11}^{\alpha\alpha'}]$$

обнаружения одного фотона в затухающей моде резонатора. Здесь $\text{Sp}_{at}[\dots]$ означает след по атомным переменным, а $|vac\rangle \equiv |n=0\rangle$ – вакуумное состояние затухающей моды резонатора.

Из данных рис. 1, а видно, что учет диполь-дипольного взаимодействия существенно влияет на результат. Так, для начального состояния системы $|\Psi_4\rangle$ (состояние, в котором атом b находится на возбужденном уровне, а атом a – на основном) у вероятности $p_{11}(t)$, при учете диполь-дипольного взаимодействия, появляется дополнительный максимум. Такое поведение вероятности $p_{11}(t)$ можно объяснить «перебросом» возбуждения с атома b на атом a , который, в силу выбранного пространственного расположения, сильнее взаимодействует с затухающей модой, т. е. $g(a) > g(b)$.

На рис. 1, б показаны результаты исследования случая изначально запутанных атомных состояний

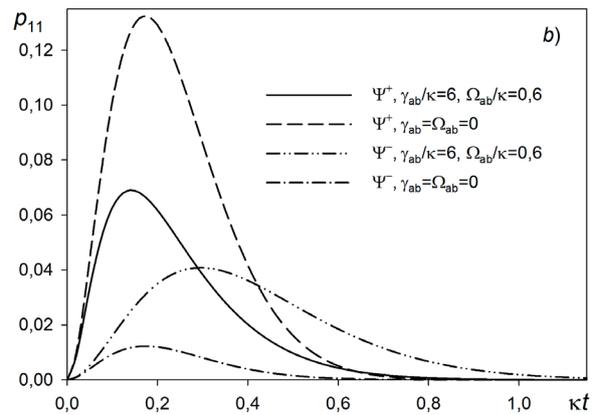
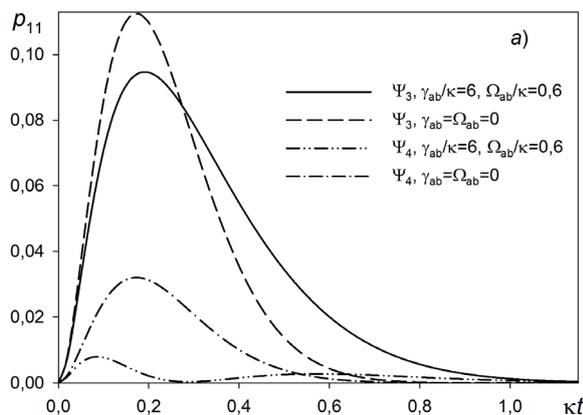


Рис. 1. Временная зависимость вероятности обнаружения одного фотона в моде резонатора для четырех различных начальных состояний: а – $|\Psi_3\rangle, |\Psi_4\rangle$; б – $|\Psi^+\rangle, |\Psi^-\rangle$. Расчеты проведены без учета (пунктир, штрихпунктир) и с учетом (сплошная линия, штрихпунктир с двумя точками) диполь-дипольного взаимодействия

$$|\Psi^\pm\rangle = (|\alpha_3\rangle \pm |\alpha_4\rangle)|vac\rangle / \sqrt{2}.$$

Так же как и для свободного пространства, наблюдаются различные скорости распада этих состояний. Здесь, вследствие симметричного распределения атомных возбуждений в начальный момент времени, в поведении временной зависимости $p_{11}(t)$, при учете диполь-дипольного взаимодействия, не наблюдается появления дополнительных максимумов, как это было в предыдущем случае.

Интересно отметить, что учет диполь-дипольного взаимодействия, в случае с состоянием $|\Psi^-\rangle$, повышает вероятность обнаружить фотон в затухающей моде, тогда как для всех других рассмотренных начальных состояний наблюдается обратная ситуация. Это связано с тем, что снятие атомного возбуждения может происходить в два канала: в выделенную затухающую моду резонатора и в резервуар мод, обуславливающий атомные релаксационные константы. Учитывая диполь-дипольное взаимодействие, мы тем самым усиливаем связь атомной подсистемы с упомянутым резервуаром. Следовательно, повышается вероятность спонтанного распада вне выделенной моды. Однако если атомы находятся в состоянии $|\Psi^-\rangle$, то распад в резервуар подавлен и атомное возбуждение снимается в другой канал.

На рис. 2 представлены временная эволюция среднего числа фотонов в резонаторе, а также их статистики – Q -параметра Манделя:

$$Q = \frac{\langle n(n-1) \rangle - \langle n \rangle^2}{\langle n \rangle}.$$

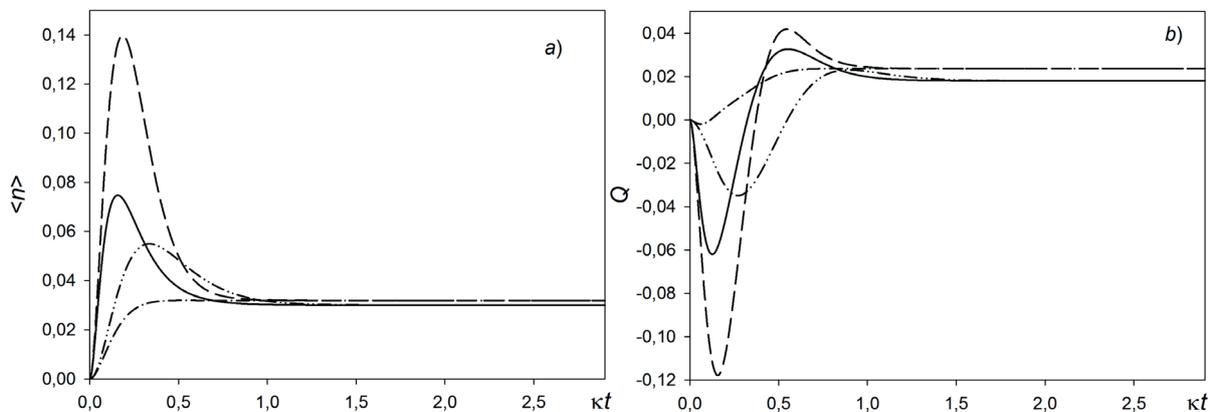


Рис. 2. Временные зависимости среднего числа фотонов в резонаторе (а) и Q -параметра Манделя (b).

Параметры системы и обозначения соответствуют приведенным на рис. 1. Скорость накачки $\Gamma/\kappa = 0,75$

Скорость накачки выбиралась такой, чтобы среднее число фотонов в резонаторе было меньше единицы ($\Gamma/\kappa < 1$). Из графиков на рис. 2 видно, что для выбранных параметров системы установление стационарного режима происходит при значениях времени порядка времени жизни фотона в резонаторе $\tau_{ph} \sim 1/\kappa$. Информация о начальных состояниях атомной подсистемы, благодаря диссипативным процессам и некогерентной накачке, исчезает.

На рис. 3 приведена временная эволюция атомной подсистемы. Можно видеть, что для данной скорости некогерентной накачки и выбранных параметров нанолазера, вероятность

$$p^{--}(t) = \text{Sp}_f [\rho_{mm}^{\alpha^- \alpha^-}]$$

обнаружить атомную подсистему в состоянии

$$|\alpha^-\rangle = (|\alpha_3\rangle - |\alpha_4\rangle) / \sqrt{2}$$

преобладает над вероятностью

$$p^{++}(t) = \text{Sp}_f [\rho_{mm}^{\alpha^+ \alpha^+}]$$

– обнаружения этой же подсистемы в состоянии

$$|\alpha^+\rangle = (|\alpha_3\rangle + |\alpha_4\rangle) / \sqrt{2}$$

(обозначение $\text{Sp}_f[\dots]$ означает след по полевым переменным).

С наибольшей вероятностью подсистема будет обнаружена в основном состоянии $|\alpha_1\rangle$, что указывает на отсутствие инверсии населенностей в рассматриваемом случае. Различие вероятностей $p^{--}(t)$ и $p^{++}(t)$, которое обнаруживается только при учете диполь-дипольного взаимодействия,

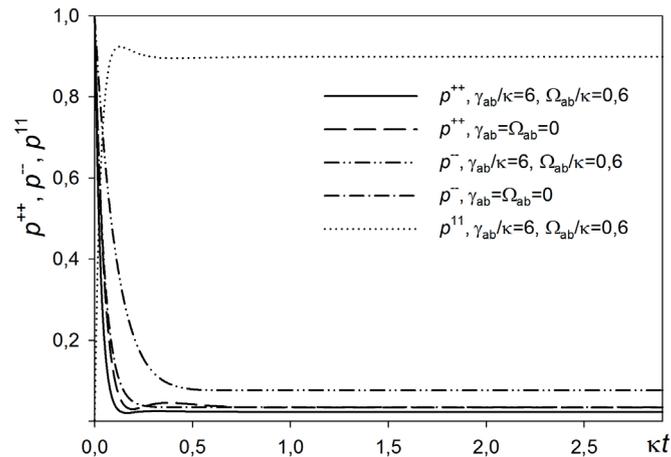


Рис. 3. Временная эволюция различных атомных состояний (с учетом и без учета диполь-дипольного взаимодействия); $p^{11}(t) = \text{Sp}_f [\rho_{mm}^{\alpha_1 \alpha_1}]$ – вероятность обнаружить атомную подсистему в состоянии $|\alpha_1\rangle$.

Параметры системы и обозначения соответствуют приведенным на рис. 1 и 2

можно объяснить, как и выше, – снятием атомного возбуждения в два (отличных друг от друга) канала (см. пояснения в тексте к рис. 1, *b*).

Заключение

В работе теоретически исследовано влияние межатомного резонансного диполь-дипольного взаимодействия на поведение лазера на нескольких излучателях. Показано, что это межатомное взаимодействие существенно влияет как на релаксацию внутрирезонаторного поля, так и на временную эволюцию атомных суперпозиционных со-

стояний.

Как было отмечено выше, более строгое описание работы лазера на нескольких излучателях требует ухода от одномодового приближения. Возможно, эту задачу можно решить с помощью подхода, разработанного в статье [28], посвященной пространственному поведению поля с неклассической статистикой.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского научного фонда (проект № 17-12-01085).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Mu Yi., Savage C.M. One-atom laser // Phys. Rev. A. 1992. Vol. 46. No. 9. Pp. 5944–5954.
2. Larionov N.V., Kolobov M.I. Quantum theory of a single-emitter nanolaser // Phys. Rev. A. 2013. Vol. 88. No. 1. P. 013843.
3. Ларионов Н.В., Баранцев К.А., Попов Е.Н. Одноатомный лазер, работающий в режиме сильной связи и низкодобротного резонатора // Научно-технические ведомости СПбГПУ. Физико-математические науки. 2018. Т. 11. № 4. С. 104–111.
4. Kilin S.Ya., Mikhalychev A.B. Single-atom laser generates nonlinear coherent states // Phys. Rev. A. 2012. Vol. 85. No. 6. P. 063817.
5. Карлович Т.Б. Влияние тепловых возбуждений резервуара на фазовую бистабильность в фундаментальной модели квантовой оптики // Оптика и спектроскопия. 2011. Т. 111. № 5. С.758–763.
6. Popov E.N., Larionov N.V. Glauber – Sudarshan P function in the model of a single-emitter laser generating in a strong-coupling regime // Proceedings of SPIE. 2016. Vol. 9917. P. 99172X.
7. McKeever J., Boca A., Boozer A.D., Buck J.R., Kimble H.J. Experimental realization of a one-atom laser in the regime of strong-coupling // Nature (London). 2003. Vol. 425. No. 6955. Pp. 268–271.
8. Dubin F., Russo C., Barros H.G., Stute A., Becher C., Piett O.S., Blatt R. Quantum to classical transition in a single-atom laser // Nature Physics. 2010. Vol. 6. No. 5. Pp. 350–353.
9. Nomura M., Kumagai N., Iwamoto S., Ota Y., Aracawa Y. Photonic crystal nanocavity laser



with a of a single-quantum dot gain // Optics Express. 2009. Vol. 17. No. 18. Pp. 15975–15982.

10. Ritter S., Nilleke C., Hahn C., et al. An elementary quantum network of single atoms in optical cavities // Nature. 2012. Vol. 484. No. 7393. Pp. 195–200.

11. Zeeb S., Noh Ch., Parkins A.S., Carmichael H.J. Superradiant decay and dipole-dipole interaction of distant atoms in a two-way cascaded cavity QED system // Phys. Rev. A. 2015. Vol. 91. No. 2. P. 023829.

12. Bellomo B., Compagno G., Lo Franco R., et. al. Entanglement dynamics of two independent cavity-embedded quantum dots // Physica Scripta. 2011. Vol. 2011. No. T143. P. 014004.

13. Corzo N.V., Raskop Jérémy, Chandra Aveek, Sheremet A.S., Gouraud B., Laurat J. Waveguide-coupled single collective excitation of atomic arrays // Nature. 2019. Vol. 566. No. 7744. Pp. 359–362.

14. Курапцев А.С., Соколов И.М. Микроскопическая теория диполь-дипольного взаимодействия в ансамблях примесных атомов в резонаторе Фабри – Перо // ЖЭТФ. 2016. Т. 150. Вып. 2. С. 275–287.

15. Курапцев А.С., Соколов И.М. Особенности межатомного диполь-дипольного взаимодействия вблизи идеально проводящей заряженной поверхности // ЖЭТФ. 2018. Т. 154. Вып. 3. С. 534–542.

16. Bashkirov E.K. Entanglement of two dipole-coupled qubits induced by a detuned thermal field // Journal of Physics: Conference Series. 2018. Vol. 1096. P. 012063.

17. Vorobiev A., Bashkirov E. Influence of dipole-dipole interaction and detuning on entanglement dynamics in two-atom Jaynes-Cummings model // Proc. SPIE. 2017. Vol. 10717 (Saratov Fall Meeting 2017 “Laser Physics and Photonics XVIII”; and “Computational Biophysics and Analysis of Biomedical Data IV”).

18. Ларионов Н.В., Соколов И.М. Влияние электрического и магнитного полей на угло-

вое распределение интенсивности света, рассеянного холодным атомным ансамблем // Оптика и спектроскопия. 2019. Т. 127. № 9. С. 405–410.

19. Ларионов Н.В., Соколов И.М. Влияние электрического и магнитного полей на интерференционные эффекты при многократном рассеянии света в холодных атомных ансамблях // ЖЭТФ. 2018. Т. 154. № 2. С. 310–320.

20. Skipetrov S.E., Sokolov I.M. Absence of Anderson localization of light in a random ensemble of point scatterers // Phys. Rev. Lett. 2014. Vol. 112. No. 2. P. 023905.

21. Del Valle E., Troiani F., Tejedor C. Cavity quantum electrodynamics for two quantum dots // AIP Conference Proceedings. 2007. Vol. 893. No. 1. Pp. 1077–1079.

22. Del Valle E., Laussy F.P., Troiani F., Tejedor C. Entanglement and lasing with two quantum dots in a microcavity // Phys. Rev. B. 2007. Vol. 76. No. 23. P. 235317.

23. Del Valle E., Fabrice P.L., Troiani F., Tejedor C. The steady state of two quantum dots in a cavity // Superlattices and Microstructures. 2008. Vol. 43. No. 5–6. Pp. 465–469.

24. Fox A.G., Li T. Resonant modes in a maser interferometer // Bell System Technical Journal. 1961. Vol. 40. No. 2. Pp. 453–488.

25. Golubeva T., Ivanov D., Golubev Yu. Broadband squeezed light from phase-locked single-mode sub-Poissonian lasers // Phys. Rev. A. 2008. Vol. 77. No. 5. P. 052316.

26. Davidovich L. Sub-Poissonian processes in quantum optics // Reviews of Modern Physics. 1996. Vol. 68. No. 1. Pp. 127–173.

27. Agarwal G.S. Quantum statistical theories of spontaneous emission and their relation to other approaches. Berlin, Heidelberg, New York: Springer-Verlag. 1974. Pp. 1–128.

28. Kolobov M.I. The spatial behavior of non-classical light // Reviews of Modern Physics. 1999. Vol. 71. No. 5. Pp. 1539–1589.

Статья поступила в редакцию 20.06.2019, принята к публикации 15.07.2019.

СВЕДЕНИЯ ОБ АВТОРЕ

ЛАРИОНОВ Николай Владимирович – кандидат физико-математических наук, доцент кафедры «Лазерные технологии» Института металлургии, машиностроения и транспорта Санкт-Петербургского политехнического университета Петра Великого, Санкт-Петербург, Российская Федерация.

195251, Российская Федерация, г. Санкт-Петербург, Политехническая ул., 29
larionov.nickolay@gmail.com

REFERENCES

1. **Mu Yi., Savage C.M.**, One-atom laser, *Phys. Rev. A.* 46 (9) (1992) 5944–5954.
2. **Larionov N.V., Kolobov M.I.**, Quantum theory of a single-emitter nanolaser, *Phys. Rev. A.* 88 (1) (2013) 013843.
3. **Larionov N.V., Barantsev K.A., Popov E.N.**, Single-atom laser with a low-finesse cavity operating in the strong-coupling regime, *St. Petersburg State Polytechnical University Journal. Physics and Mathematics.* 11 (4) (2018) 104–111.
4. **Kilin S.Ya., Mikhalychev A.B.**, Single-atom laser generates nonlinear coherent states, *Phys. Rev. A.* 85 (6) (2012) 063817.
5. **Karlovich T.B.**, Effect of thermal excitations of the reservoir on phase bistability in the fundamental model of quantum optics, *Optics and Spectroscopy.* 111 (5) (2011) 722–726.
6. **Popov E.N., Larionov N.V.**, Glauber – Sudarshan P function in the model of a single-emitter laser generating in a strong-coupling regime, *Proceedings of SPIE.* 9917 (2016) 99172X.
7. **McKeever J., Boca A., Boozer A.D., et al.**, Experimental realization of a one-atom laser in the regime of strong-coupling, *Nature (London).* 425 (6955) (2003) 268–271.
8. **Dubin F., Russo C., Barros H.G., et al.**, Quantum to classical transition in a single-atom laser, *Nature Physics.* 6 (5) (2010) 350–353.
9. **Nomura M., Kumagai N., Iwamoto S., et al.**, Photonic crystal nanocavity laser with a single-quantum dot gain, *Optics Express.* 17 (18) (2009) 15975–15982.
10. **Ritter S., Nilleke C., Hahn C., et al.**, An elementary quantum network of single atoms in optical cavities, *Nature.* 484 (7393) (2012) 195–200.
11. **Zeeb S., Noh Ch., Parkins A.S., Carmichael H.J.**, Superradiant decay and dipole-dipole interaction of distant atoms in a two-way cascaded cavity QED system, *Phys. Rev. A.* 91 (2) (2015) 023829.
12. **Bellomo B., Compagno G., Lo Franco R., et al.**, Entanglement dynamics of two independent cavity-embedded quantum dots, *Physica Scripta.* 2011 (T143) (2011) 014004.
13. **Corzo N.V., Raskop Jérémy, Chandra Aveek, et al.**, Waveguide-coupled single collective excitation of atomic arrays, *Nature.* 566 (7744) (2019) 359–362.
14. **Kuraptsev A.S., Sokolov I.M.**, Microscopic theory of dipole-dipole interaction in ensembles of impurity atoms in a Fabry – Perot cavity, *JETP.* 123 (2) (2016) 237–248.
15. **Kuraptsev A.S., Sokolov I.M.**, Specific features of interatomic dipole-dipole interaction near a perfectly conducting charged surface, *JETP.* 127 (3) (2018) 455–462.
16. **Bashkirov E.K.**, Entanglement of two dipole-coupled qubits induced by a detuned thermal field, *Journal of Physics: Conference Series.* 1096 (2018) 012063.
17. **Vorobiev A., Bashkirov E.**, Influence of dipole-dipole interaction and detuning on entanglement dynamics in two-atom Jaynes – Cummings model, *Proc. SPIE.* 10717, Saratov Fall Meeting 2017: Laser Physics and Photonics XVIII; and Computational Biophysics and Analysis of Biomedical Data IV.
18. **Larionov N.V., Sokolov I.M.**, Angle distribution of light scattered on the cold atomic ensemble under condition of static electric or magnetic field, *Optics and Spectroscopy.* 127 (9) (2019) 405–410.
19. **Larionov N.V., Sokolov I.M.**, Influence of electric and magnetic fields on interference effects upon multiple light scattering in cold atomic ensembles, *JETP.* 127 (2) (2018) 264–273.
20. **Skipetrov S.E., Sokolov I.M.**, Absence of Anderson localization of light in a random ensemble of point scatterers, *Phys. Rev. Lett.* 112 (2) (2014) 023905.
21. **Del Valle E., Troiani F., Tejedor C.**, Cavity quantum electrodynamics for two quantum dots, *AIP Conference Proceedings.* 893 (1) (2007) 1077–1079.
22. **Del Valle E., Laussy F.P., Troiani F., Tejedor C.**, Entanglement and lasing with two quantum dots in a microcavity, *Phys. Rev. B.* 76 (23) (2007) 235317.
23. **Del Valle E., Fabrice P.L., Troiani F., Tejedor C.**, The steady state of two quantum dots in a cavity, *Superlattices and Microstructures.* 43 (5–6) (2008) 465–469.
24. **Fox A.G., Li T.**, Resonant modes in a maser interferometer, *Bell System Technical Journal.* 40 (2) (1961) 453–488.
25. **Golubeva T., Ivanov D., Golubev Yu.**, Broadband squeezed light from phase-locked single-mode sub-Poissonian lasers, *Phys. Rev. A.* 77 (5) (2008) 052316.
26. **Davidovich L.**, Sub-Poissonian processes in quantum optics, *Reviews of Modern Physics.* 68 (1) (1996) 127–173.
27. **Agarwal G.S.**, Quantum statistical theories of spontaneous emission and their relation to other approaches, Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, New York, (1974) 1–128.
28. **Kolobov M.I.**, The spatial behavior of nonclassical light, *Reviews of Modern Physics.* 71 (5) (1999) 1539–1589.



Received 20.06.2019, accepted 15.07.2019.

THE AUTHOR

LARIONOV Nikolay V.

Peter the Great St. Petersburg Polytechnic University

29 Politechnicheskaya St., St. Petersburg, 195251, Russian Federation

larionov.nickolay@gmail.com

DOI: 10.18721/JPM.12314
УДК 519.24

ОСОБЕННОСТИ ИСПОЛЬЗОВАНИЯ ИНФОРМАЦИИ ПО ШЕННОНУ В ЗАДАЧАХ, СВЯЗАННЫХ С ЛИНЕЙНОЙ РЕГРЕССИЕЙ

Ю.А. Пичугин

Санкт-Петербургский государственный университет аэрокосмического
приборостроения, Санкт-Петербург, Российская Федерация

В статье рассматривается использование количества информации по Шеннону (SIQ) в задачах, связанных с линейной регрессией. Показано, что SIQ, содержащееся в компонентах отклика относительно стохастических параметров, выражается через информационную матрицу Фишера, является выпуклым функционалом на множестве компонент отклика и при достаточно большом масштабе параметров эквивалентно использованию D -критерия в задачах планирования эксперимента. Определено SIQ относительно постоянных параметров регрессии. Рассмотрена альтернативная постановка задачи оптимального планирования эксперимента (ОЕП) и проанализирована ее связь с традиционной постановкой. Рассмотрена задача информационного упорядочивания данных при использовании регрессии на базис главных компонент. Предложены алгоритмы, учитывающие ценность информации при наличии частичных пропусков данных.

Ключевые слова: количество информации по Шеннону, линейная регрессия, стохастический параметр регрессии

Ссылка при цитировании: Пичугин Ю.А. Особенности использования информации по Шеннону в задачах, связанных с линейной регрессией // Научно-технические ведомости СПбГПУ. Физико-математические науки. 2019. Т. 12. № 3. С. 164–176. DOI: 10.18721/JPM.12314

THE SHANNON INFORMATION QUANTITY IN THE TASKS ASSOCIATED WITH LINEAR REGRESSION: USAGE PATTERN

Yu.A. Pichugin

Saint-Petersburg State University of Aerospace Instrumentation,
St. Petersburg, Russian Federation

The article discusses the use of the Shannon information quantity (SIQ) in the tasks associated with linear regression. It has been shown that the SIQ contained in the response components with respect to stochastic parameters is expressed through the Fisher information matrix, is a convex functional on the set of response components, and is equivalent to the use of the D -criterion in the problems of planning the experiment at a sufficiently large scale of parameters. The SIQ relatively constant regression parameters were determined. An alternative formulation of the optimal experiment planning (OEP) problem was considered and its relation to the traditional formulation was analyzed. The problem of information ordering of data using regression on the basis of principal components was considered. Some algorithms taking into account the value of information in the presence of partial data gaps were proposed.

Keywords: Shannon information quantity, linear regression, stochastic regression parameter

Citation: Pichugin Yu.A., The Shannon information quantity in the tasks associated with linear regression: usage pattern, St. Petersburg Polytechnical State University Journal. Physics and Mathematics. 12 (3) (2019) 164–176. DOI: 10.18721/JPM.12314

Введение

Объектом исследования настоящей работы является информация по Шеннону. Кратко перечислим основные этапы развития этого понятия.

Первоначально определенное Клодом Элвудом Шенноном количество информации (SIQ -Shannon information quantity) в передаваемом сообщении тесным образом связано с понятием энтропии. Средняя энтропия $H(\xi)$, или информация, передаваемая в сообщении ξ посредством n символов (значений)

$$\{x_1, x_2, \dots, x_n\},$$

появляющихся с вероятностями

$$\{P_\xi(1), P_\xi(2), \dots, P_\xi(n)\},$$

следует выражению [1]:

$$H(\xi) = -\sum_{i=1}^n P_\xi(i) \cdot \log_2 P_\xi(i) = \sum_{i=1}^n P_\xi(i) H_i,$$

где $H_i(\xi) = -\log_2 P_\xi(i)$ есть частная энтропия.

В качестве основания логарифма, в принципе, может быть взято любое число $a > 1$, которое задает масштаб.

Если имеется другая случайная величина η , принимающая m значений, т.е.

$$\{y_1, y_2, \dots, y_m\},$$

с вероятностями

$$\{P_\eta(1), P_\eta(2), \dots, P_\eta(m)\},$$

то, согласно Шеннону, количество информации $I(\xi, \eta)$, содержащееся в сообщении ξ относительно сообщения η или в η относительно ξ (здесь имеет место симметрия), выражается как

$$I(\xi, \eta) = -\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m P_{\xi\eta}(i, j) \times \log_a \frac{P_{\xi\eta}(i, j)}{P_\xi(i)P_\eta(j)},$$

где $P_{\xi\eta}(i, j)$ – вероятность того, что ξ принимает значение x_i , а η принимает значение y_j , соответственно.

При $P_{\xi\eta}(i, j) = 0$ считается, что соответствующий член суммы равен нулю.

В своей работе И.М. Гельфанд и А.М. Яглом [2] показали, что в случае, когда ξ и η есть два случайных гауссовских вектора, то количество информации $I(\xi, \eta)$, содер-

жащееся в векторе ξ относительно вектора η и наоборот, равно

$$I(\xi, \eta) = -\frac{1}{2} \log_a \det(\mathbf{I} - \mathbf{V}_{\xi\eta} \mathbf{V}_\eta^{-1} \mathbf{V}_{\eta\xi} \mathbf{V}_\xi^{-1}), \quad (1)$$

где $\mathbf{V}_\xi, \mathbf{V}_\eta$ – матрицы взаимных ковариаций компонент векторов ξ и η , соответственно; \mathbf{I} – единичная матрица соответствующей размерности; $\mathbf{V}_{\xi\eta}$ – матрица взаимных ковариаций компонент вектора ξ и вектора η ,

$$\mathbf{V}_{\eta\xi} = \mathbf{V}_{\xi\eta}^T,$$

где T – оператор транспонирования.

При этом в работе [2] была показана независимость SIQ от масштаба переменных и инвариантность относительно линейных преобразований векторов ξ и η . Последнее позволяет представить формулу (1) в виде

$$I(\xi, \eta) = -\log_a |\sin\alpha_1 \sin\alpha_2 \dots \sin\alpha_h|, \quad (2)$$

где $\cos\alpha_j = r_j$ ($j = 1, 2, \dots, h$) есть не что иное, как геометрическая интерпретация коэффициента корреляции r_i между парой независимых (главных) компонент этих векторов. При этом $h = \min(n, m)$. Формула (1), очевидно, позволяет применять SIQ в многомерных задачах.

Из общей массы прикладных работ с применением SIQ отметим работу О.М. Покровского [3], где SIQ применяется к решению задачи оптимизации спутниковых наблюдений на основе модели линейной регрессии. Особенность этой работы состоит в том, что по своему характеру она весьма близка к задаче оптимального планирования регрессионного эксперимента (опуская слово «регрессионного», приходим к аббревиатуре ОЕР – optimal experiment planning). Но в работе [3] автор рассматривает случай стохастических параметров регрессии (см. далее раздел «Связь SIQ с информационной матрицей Фишера»), отступая и от традиционной постановки задачи ОЕР в целом (см. еще далее раздел «Традиционная и альтернативная формулировки задачи оптимального планирования эксперимента»).

Цель настоящей работы – показать связи SIQ с информационной матрицей Фишера и с критериями ОЕР в альтернативной постановке задачи, развивая при этом идеи работ [2, 3], а также раскрыть новые возможности применения этого математического аппарата в различных областях прикладной сферы.

Связь SIQ с информационной матрицей Фишера

В классической постановке задачи регрессионного анализа мы имеем следующую модель:

$$\mathbf{y} = \mathbf{F}\boldsymbol{\theta} + \boldsymbol{\varepsilon}, \quad (3)$$

где \mathbf{y} – вектор измерений размерности n ; $\boldsymbol{\theta}$ – вектор параметров, подлежащих оценке, размерности m ; \mathbf{F} – $(n \times m)$ -матрица ($n \geq m$); $\boldsymbol{\varepsilon}$ – вектор случайных ошибок.

Здесь предполагается, что компоненты вектора $\boldsymbol{\varepsilon}$ подчиняются многомерному нормальному распределению, имеют нулевые средние значения, взаимно независимы и имеют одинаковую дисперсию σ^2 , т. е.

$$\boldsymbol{\varepsilon} \sim N(\mathbf{0}, \sigma^2 \mathbf{I}),$$

где $\mathbf{0}$ – нулевой вектор.

Следовательно,

$$\mathbf{y} \sim N(\mathbf{F}\boldsymbol{\theta}, \sigma^2 \mathbf{I}),$$

т. е. $\mathbf{V}_y = \mathbf{V}_\varepsilon$.

Кроме этого, будем предполагать, что \mathbf{F} – матрица полного ранга.

Информационная матрица Фишера вектора параметров регрессии $\boldsymbol{\theta}$, которая представляет собой производное от информации, содержащейся в компонентах отклика относительно этих параметров регрессии, определяется следующей формулой [4]:

$$\mathbf{M} = -E \left\{ \frac{\partial^2 L}{\partial \theta_i \partial \theta_j} \right\},$$

где E – оператор математического ожидания, L – логарифм правдоподобия, т. е.

$$L = \ln \left\{ (2\pi)^{-\frac{n}{2}} \det^{-\frac{1}{2}} (\mathbf{V}_\varepsilon) \times \exp \left[-\frac{1}{2} (\mathbf{y} - \mathbf{F}\boldsymbol{\theta})^T \mathbf{V}_\varepsilon^{-1} (\mathbf{y} - \mathbf{F}\boldsymbol{\theta}) \right] \right\}.$$

Отсюда следует, что

$$\mathbf{M} = \sigma^{-2} \mathbf{F}^T \mathbf{F} = \mathbf{V}_\theta^{-1}, \quad (4)$$

где

$$\mathbf{V}_\theta = \sigma^2 (\mathbf{F}^T \mathbf{F})^{-1} \quad (5)$$

есть матрица взаимных ковариаций OLS-оценок (OLS – ordinary least squares) компонент вектора параметров регрессии $\boldsymbol{\theta}$

Различные выпуклые функционалы от информационной матрицы \mathbf{M} (см. далее) могут служить мерой информации, содержащейся в компонентах отклика относительно параметров регрессии (3). Вектор OLS-оценок этих параметров регрессии в данном случае выражается как

$$\hat{\boldsymbol{\theta}} = (\mathbf{F}^T \mathbf{F})^{-1} \mathbf{F}^T \mathbf{y} \quad (6)$$

(см. монографию [5]).

При нарушении предположений относительно ковариационной матрицы остатков регрессии, когда эта матрица имеет произвольную структуру, т. е.

$$\boldsymbol{\varepsilon} \sim N(\mathbf{0}, \mathbf{V}_\varepsilon) \quad (\mathbf{V}_\varepsilon \neq \sigma^2 \mathbf{I}),$$

вместо формул (4) – (6) мы имеем, соответственно, следующие выражения:

$$\mathbf{M} = \mathbf{F}^T \mathbf{V}_\varepsilon^{-1} \mathbf{F} = \mathbf{V}_\theta^{-1}, \quad (7)$$

$$\mathbf{V}_\theta = (\mathbf{F}^T \mathbf{V}_\varepsilon^{-1} \mathbf{F})^{-1}, \quad (8)$$

$$\hat{\boldsymbol{\theta}} = (\mathbf{F}^T \mathbf{V}_\varepsilon^{-1} \mathbf{F})^{-1} \mathbf{F}^T \mathbf{V}_\varepsilon^{-1} \mathbf{y}. \quad (9)$$

Формула (9) известна как обобщенный метод OLS-оценивания.

Из формул (5), (8) следует, что вектор OLS-оценки $\boldsymbol{\theta}$ имеет нормальное распределение

$$\hat{\boldsymbol{\theta}} \sim N(\boldsymbol{\theta}, \sigma^2 (\mathbf{F}^T \mathbf{F})^{-1})$$

или

$$\hat{\boldsymbol{\theta}} \sim N(\boldsymbol{\theta}, (\mathbf{F}^T \mathbf{V}_\varepsilon^{-1} \mathbf{F})^{-1})$$

(в зависимости от структуры матрицы \mathbf{V}_ε).

Каждое из этих распределений определяет соответствующую функцию правдоподобия. Вычисленные по этим функциям правдоподобия информационные матрицы Фишера вектора $\boldsymbol{\theta}$, как нетрудно проверить, совпадают с матрицами, которые даются формулами (4) и (7), соответственно.

Предположим, что параметры регрессии имеют стохастическую природу и подчиняются многомерному нормальному распределению, т. е.

$$\boldsymbol{\theta} \sim N(E\boldsymbol{\theta}, \mathbf{V}_\theta).$$

Тогда для OLS-оценок компонент вектора параметров регрессии (3) $\boldsymbol{\theta}$, несмотря на то, что распределение вектора \mathbf{y} будет уже иным, по-прежнему верны формулы (5), (6) или (8), (9), в зависимости от струк-

туры матрицы V_ε а также не изменится вид вероятностного распределения вектора $\hat{\theta}$ и информационной матрицы Фишера (см. формулы (4), (7)). Однако какой-либо выпуклый функционал от этой матрицы будет служить мерой информации относительно вектора параметров θ , содержащейся в его OLS-оценке. Именно эта информационная матрица (как более инвариантная) имеется в виду при рассмотрении случая стохастических параметров, для которого имеет место следующая теорема.

Теорема 1. *Количество информации $I(y, \theta)$, содержащееся в компонентах отклика в модели (3) относительно стохастических, нормально распределенных параметров, при условии, что F есть матрица полного ранга, связано с информационной матрицей Фишера M формулой*

$$I(y, \theta) = \frac{1}{2} \log_a \det(I + MV_\theta). \quad (10)$$

Доказательство. В предположениях стохастических параметров регрессии (3) имеем следующие равенства:

$$V_y = FV_\theta F^T + V_\varepsilon, \\ V_{y\theta} = FV_\theta \text{ и } V_{\theta y} = V_\theta F^T.$$

Используя эти выражения, преобразуем формулу (1):

$$\begin{aligned} I(y, \theta) &= -\frac{1}{2} \log_a \det(I - FV_\theta V_\theta^{-1} V_\theta F^T V_y^{-1}) = \\ &= -\frac{1}{2} \log_a \det(V_y V_y^{-1} - FV_\theta F^T V_y^{-1}) = \\ &= -\frac{1}{2} \log_a \det([V_y - FV_\theta F^T] V_y^{-1}) = \\ &= -\frac{1}{2} \log_a \det(V_\varepsilon V_y^{-1}) = \frac{1}{2} \log_a \det(V_\varepsilon^{-1} V_y) = \\ &= \frac{1}{2} \log_a \det(V_\varepsilon^{-1} [V_\varepsilon + FV_\theta F^T]) = \\ &= \frac{1}{2} \log_a \det(I + V_\varepsilon^{-1} FV_\theta F^T) = (*) \\ &= \frac{1}{2} \log_a \det(I + F^T V_\varepsilon^{-1} FV_\theta) = \\ &= \frac{1}{2} \log_a \det(I + MV_\theta). \end{aligned}$$

В равенстве (*) мы использовали алгебраическое тождество

$$\det(I + AB) = \det(I + BA),$$

которое очевидно в случае квадратных матриц и обратимости хотя бы одной из двух.

Действительно, пусть матрица A обратима. Тогда, умножая под знаком определителя левую часть этого равенства слева на A^{-1} а справа на A , получаем тождество. Такое преобразование, именуемое преобразованием подобия, как известно, не меняет значения определителя.

Пусть теперь A и B – прямоугольные матрицы; A – матрица размерности $n \times m$, B – матрица $m \times n$ ($n > m$).

Согласно формулировке теоремы, мы вправе предполагать, что A – матрица полного ранга. Не умаляя общности, будем считать, что первые m строк матрицы A линейно независимы. Достраиваем прямоугольные матрицы A и B до квадратных размерности $n \times n$:

$$A^* = (A|T) \text{ и } (B^*)^T = (B^T|T),$$

где блок T имеет размерность $n \times (n - m)$. Заполним блок T по следующему правилу:

$$t_{i+m, j} = a_{i+m, j+m}^* = \delta \quad (\delta \neq 0),$$

$$\text{если } i = j, j = 1, 2, \dots, n - m;$$

остальные элементы T заполняем нулями.

Тогда для матриц A^* и B^* требуемое тождество выполняется (см. выше). Далее, устремляя δ к нулю, имеем требуемое тождество для исходных матриц A и B .

Теорема 1 полностью доказана.

Формула (10) и ее вывод были ранее представлены автором данного исследования в работах [6, 7].

В предположении стохастических параметров регрессии (3), в процессе вывода формулы (10), обнаруживается другая формула, а именно

$$I(y, \theta) = \frac{1}{2} \log_a \det V_y - \frac{1}{2} \log_a \det V_\varepsilon.$$

Это равенство очень хорошо раскрывает суть SIQ в модели (3) при стохастических параметрах.

Традиционная и альтернативная формулировки задачи оптимального планирования эксперимента

Традиционная формулировка. В первоначальной (и ставшей традиционной) формулировке задача ОЕР в условиях модели (3) сводится к вычислению множе-

ства величин [8, 9]:

$$\mathbf{p} = \{p_1, p_2, \dots, p_n\},$$

$$p_i \geq 0; \quad i = 1, 2, \dots, n; \quad \sum_{i=1}^n p_i = 1, \quad (11)$$

именуемого планом.

Эти величины интерпретируются как относительные частоты измерения компонент отклика (отсюда название – план), аналогично закону дискретного распределения вероятностей. Нечто подобное имеет место в теории матричных игр при использовании смешанных стратегий [10], откуда, по-видимому, и заимствована эта идея. В теории ОЕР величины, составляющие план, используются для преобразования информационной матрицы, которое имеет следующий вид (в рамках указанной теории):

$$\mathbf{M} \rightarrow \mathbf{M}(\mathbf{p}) = (\mathbf{F}^T \mathbf{P} \mathbf{F}), \quad (12)$$

где $\mathbf{P} = \text{diag}(p_1, p_2, \dots, p_n)$.

При этом на план налагается требование максимизации некоторого выпуклого функционала (критерия) от этой преобразованной матрицы (см. ниже).

Таким образом, в процессе решения задачи осуществляется переход от начальных значений $p_i = 1/n$ ($i = 1, 2, \dots, n$) к оптимальным, при которых некоторый критерий от преобразованной (см. выше) информационной матрицы достигает максимума, т. е.

$$\text{crit} \mathbf{M}(\mathbf{p}) = \text{crit} \mathbf{F}^T \mathbf{P} \mathbf{F} \rightarrow \max.$$

В качестве критериев (функционалов от $\mathbf{M}(\mathbf{p})$) рассматриваются определитель (D -критерий), след (A -критерий), минимальное собственное значение матрицы $\mathbf{M}(\mathbf{p})$ (E -критерий) и иные выпуклые функционалы от этой матрицы [8, 9].

Уточняющее замечание. Как нетрудно было заметить выше, в ОЕР-теории под информационной матрицей понимается не в точности информационная матрица Фишера, равная $\sigma^{-2} \mathbf{F}^T \mathbf{F}$ (см. формулу (4)), а пропорциональная матрица $\mathbf{F}^T \mathbf{F}$ [8, 9] или $\mathbf{F}^T \mathbf{P} \mathbf{F}$ (см. выше), что для задачи максимизации функционалов от этой матрицы не имеет принципиального значения. С другой стороны, из регрессионного анализа, описанного, например, в монографии [5], следует, что переход к матрице $\mathbf{F}^T \mathbf{P} \mathbf{F}$ имеет смысл лишь тогда, когда используется оценка параметров

$$\hat{\boldsymbol{\theta}} = (\mathbf{F}^T \mathbf{P} \mathbf{F})^{-1} \mathbf{F}^T \mathbf{P} \mathbf{y},$$

известная как обобщенная OLS-оценка (см. формулу (9)), или, при диагональной структуре \mathbf{P} , как взвешенная OLS-оценка, что, собственно, мы здесь и имеем. Из теоремы же Гаусса – Маркова, доказательство которой приводится в книге [9], следует, что корректность применения такой оценки имеет место лишь в случае, когда, во-первых, $\mathbf{V}_\varepsilon \neq \sigma^2 \mathbf{I}$, а во-вторых, когда матрица \mathbf{P} обратно пропорциональна матрице \mathbf{V}_ε т. е.

$$\mathbf{P} = c \mathbf{V}_\varepsilon^{-1} \quad (c > 0).$$

Однако упоминания об этих условиях в теории ОЕР не обнаруживается [8, 9]. Остается лишь предполагать, что поспешное отбрасывание множителей σ^2 и σ^{-2} в формулах для $\mathbf{V}_{\hat{\boldsymbol{\theta}}}$ и \mathbf{M} , а иногда и ε в некоторых регрессионных уравнениях (см. [9]), привели к тому, что преобразование (12) оказалось не связанным со структурой ковариационной матрицы погрешностей регрессии (3), несмотря на то, что конечной целью является именно оценка параметров.

Альтернативная формулировка. Не менее практически значимой является следующая формулировка.

Будем рассматривать различные собственные подмножества вида

$$\mathbf{q} \subset \{1, 2, \dots, n\}$$

($\text{card} \mathbf{q}$ означает количество элементов множества \mathbf{q}).

Пусть \mathbf{y}_q есть вектор размерности $\text{card} \mathbf{q}$ в котором содержатся компоненты \mathbf{y} только с номерами из множества \mathbf{q} ; пусть \mathbf{F}_q есть матрица, которая содержит строки только с номерами из множества \mathbf{q} .

Используя вектор \mathbf{y}_q , мы также можем вычислить OLS-оценку вектора $\boldsymbol{\theta}$, т. е.

$$\hat{\boldsymbol{\theta}} = (\mathbf{F}_q^T \mathbf{F}_q)^{-1} \mathbf{F}_q^T \mathbf{y}_q. \quad (13)$$

Тогда ковариационная матрица вектора $\hat{\boldsymbol{\theta}}$ следует выражению

$$\mathbf{V}_{\hat{\boldsymbol{\theta}}} = \sigma^2 (\mathbf{F}_q^T \mathbf{F}_q)^{-1},$$

а информационная матрица Фишера –

$$\mathbf{M}_q = \sigma^{-2} \mathbf{F}_q^T \mathbf{F}_q. \quad (14)$$

В случае $\mathbf{V}_\varepsilon \neq \sigma^2 \mathbf{I}$ формулы (13) и (14) изменятся аналогично формулам (4) и (6) (см. формулы (7) и (9)). Для фиксированного значения $\text{card} \mathbf{q} = k$ ($k < n$) выберем такое



подмножество \mathbf{q} , которое доставляет максимум некоторого выпуклого функционала от информационной матрицы \mathbf{M}_q .

Такая формулировка оказывается вполне актуальной, когда ставится задача экономии средств наблюдения с минимальной потерей точности воспроизведения всех компонент \mathbf{y} . Действительно, при подстановке OLS-оценки вектора $\boldsymbol{\theta}$ по формуле (13) в модель (3) мы заинтересованы в том, чтобы все значения отклика воспроизводились с минимальной потерей точности, что, в принципе, и должна обеспечивать минимизация дисперсии OLS-оценки вектора $\boldsymbol{\theta}$.

Сравнение двух формулировок. Покажем, что альтернативная формулировка сводится к традиционной путем наложения соответствующих ограничений. Действительно, пусть $p_i = 1/k$ при условии $i \in \mathbf{q}$ и $p_i = 0$ при условии $i \notin \mathbf{q}$, что не нарушает основных требований к плану (11). Тогда информационная матрица по традиционной формулировке задачи ОЕР следует выражению

$$\mathbf{M}(\mathbf{p}) = \mathbf{F}^T \mathbf{P} \mathbf{F} = \frac{1}{k} \mathbf{F}_q^T \mathbf{F}_q = \frac{\sigma^2}{k} \mathbf{M}_q,$$

где \mathbf{M}_q определяется формулой (14), т. е. является информационной матрицей Фишера.

Однако при этом мы приходим к оценке параметров, выраженной формулой (13):

$$\begin{aligned} \hat{\boldsymbol{\theta}} &= (\mathbf{F}^T \mathbf{P} \mathbf{F})^{-1} \mathbf{F}^T \mathbf{P} \mathbf{y} = \\ &= k (\mathbf{F}_q^T \mathbf{F}_q)^{-1} \frac{1}{k} \mathbf{F}_q^T \mathbf{y} = (\mathbf{F}_q^T \mathbf{F}_q)^{-1} \mathbf{F}_q^T \mathbf{y}. \end{aligned}$$

Данная оценка не вступает в противоречие с теоремой Гаусса – Маркова.

Очевидно, что использование, например, D -критерия для решения поставленной таким образом задачи, возможно лишь при $k \geq m$, когда

$$\det(\mathbf{F}_q^T \mathbf{F}_q) \neq 0.$$

Поэтому при альтернативной формулировке наиболее удобными оказываются такие критерии, как A -критерий, E -критерий (см. выше) и т. п. Однако согласно замечанию Дж. Себера, высказанному в монографии [5], критерии, которые не зависят от масштаба величин, выступают предпочтительными. Как уже было отмечено выше, SIQ от масштаба переменных не зависит (см. формулу (2)). С другой стороны, использование SIQ подразумевает, что

параметры регрессии имеют стохастическую природу. Ниже будет показано, что в альтернативной формулировке задачи ОЕР, SIQ можно использовать и в случае, когда параметры регрессии (3) являются постоянными величинами.

Свойства SIQ как критерия ОЕР в альтернативной формулировке

Из формул (10) и (14) следует, что SIQ, содержащееся в компонентах вектора \mathbf{y}_q относительно компонент $\boldsymbol{\theta}$, имеющих стохастическую природу, выражается как

$$I(\mathbf{y}_q, \boldsymbol{\theta}) = \frac{1}{2} \log_a \det(\mathbf{I} + \mathbf{M}_q \mathbf{V}_\theta). \quad (15)$$

Формула (15) позволяет определить SIQ, содержащееся в векторе \mathbf{y}_q относительно вектора параметров регрессии $\boldsymbol{\theta}$, и в случае, когда параметры регрессии (3) не обладают стохастической природой, т. е. являются постоянными величинами.

Определение. Если в модели (3) параметры есть постоянные величины, то $I(\mathbf{y}_q, \boldsymbol{\theta})$ выражается формулой

$$\begin{aligned} I(\mathbf{y}_q, \boldsymbol{\theta}) &= \frac{1}{2} \log_a \det(\mathbf{I} + \mathbf{M}_q \mathbf{V}_\theta) = \\ &= \frac{1}{2} \log_a \det(\mathbf{I} + \mathbf{M}_q \mathbf{M}^{-1}). \end{aligned} \quad (16)$$

Комментарии.

1. В этом определении мы приравняли $I(\mathbf{y}_q, \boldsymbol{\theta})$ к $I(\mathbf{y}_q, \hat{\boldsymbol{\theta}})$, т. е. свели к случаю, когда оба вектора являются стохастическими, как того требует формула (1).

2. Если $a = 2$ (единицей информации в двоичной системе счисления является бит), то тогда

$$0 \leq I(\mathbf{y}_q, \boldsymbol{\theta}) \leq \frac{m}{2} \quad (m = \dim \boldsymbol{\theta}).$$

Далее на подмножествах вида \mathbf{q} (см. выше) определим следующий функционал:

$$\Phi(\mathbf{q}) = I(\mathbf{y}_q, \boldsymbol{\theta}).$$

Тогда имеет место следующая теорема.

Теорема 2. Функционал $\Phi(\mathbf{q})$ обладает свойством выпуклости, т. е. выполняется неравенство

$$\Phi(\alpha \mathbf{p} + \beta \mathbf{q}) \geq \alpha \Phi(\mathbf{p}) + \beta \Phi(\mathbf{q}),$$

где $\alpha, \beta \geq 0$; $\alpha + \beta = 1$; $\mathbf{p}, \mathbf{q} \subseteq \{1, 2, \dots, n\}$.

Доказательство. Преобразуем формулу (15) следующим образом:

$$I(\mathbf{y}_q, \boldsymbol{\theta}) = \frac{1}{2} \log_a \det(\mathbf{V}_\theta^{-1} + \mathbf{M}_q) + \frac{1}{2} \log_a \det \mathbf{V}_\theta. \quad (17)$$

Докажем требуемое теоремой неравенство для функционала $\Psi(\mathbf{q})$:

$$\Psi(\mathbf{q}) = \frac{1}{2} \log_a \det(\mathbf{V}_\theta^{-1} + \mathbf{M}_q). \quad (18)$$

Пусть, как и предполагается, $\mathbf{p}, \mathbf{q} \subseteq \{1, 2, \dots, n\}$. Тогда, согласно определению $\Psi(\mathbf{q})$, имеем:

$$\begin{aligned} \Psi(\alpha \mathbf{p} + \beta \mathbf{q}) &= \\ &= \frac{1}{2} \log_a \det(\mathbf{V}_\theta^{-1} + (\alpha \mathbf{M}_p + \beta \mathbf{M}_q)) = \\ &= \frac{1}{2} \log_a \det((\alpha + \beta) \mathbf{V}_\theta^{-1} + (\alpha \mathbf{M}_p + \beta \mathbf{M}_q)) = \\ &= \frac{1}{2} \log_a \det(\alpha(\mathbf{V}_\theta^{-1} + \mathbf{M}_p) + \\ &\quad + \beta(\mathbf{V}_\theta^{-1} + \mathbf{M}_q)) \geq^{(**)} \\ &\geq \frac{1}{2} \log_a (\det^\alpha(\mathbf{V}_\theta^{-1} + \mathbf{M}_p) \times \\ &\quad \times \det^\beta(\mathbf{V}_\theta^{-1} + \mathbf{M}_q)) = \\ &= \alpha \frac{1}{2} \log_a \det(\mathbf{V}_\theta^{-1} + \mathbf{M}_p) + \\ &\quad + \beta \frac{1}{2} \log_a \det(\mathbf{V}_\theta^{-1} + \mathbf{M}_q) = \\ &= \alpha \Psi(\mathbf{p}) + \beta \Psi(\mathbf{q}). \end{aligned}$$

Здесь неравенство (* *) следует из общего неравенства

$$\det(\alpha \mathbf{A} + \beta \mathbf{B}) \geq \det \mathbf{A}^\alpha \cdot \det \mathbf{B}^\beta;$$

общее неравенство выполняется при указанных ограничениях относительно α и β в случае симметричных, положительно определенных матриц \mathbf{A} и \mathbf{B} (доказательство представлено в книге [9]), каковыми являются матрицы \mathbf{V}_θ^{-1} , \mathbf{M}_q и, следовательно, их сумма.

Таким образом, мы имеем неравенство

$$\Psi(\alpha \mathbf{p} + \beta \mathbf{q}) \geq \alpha \Psi(\mathbf{p}) + \beta \Psi(\mathbf{q}).$$

Прибавляя к обеим частям этого неравенства член

$$\frac{1}{2} \log_a \det \mathbf{V}_\theta,$$

получаем следующее неравенство:

$$\begin{aligned} &\Psi(\alpha \mathbf{p} + \beta \mathbf{q}) + \frac{1}{2} \log_a \det \mathbf{V}_\theta \geq \\ &\geq \alpha \Psi(\mathbf{p}) + \beta \Psi(\mathbf{q}) + (\alpha + \beta) \frac{1}{2} \log_a \det \mathbf{V}_\theta. \end{aligned}$$

С учетом формулы (17) имеем требуемое неравенство для функционала $\Phi(\mathbf{q})$.

Теорема 2 полностью доказана.

Замечание. Из формулы (16) и доказательства теоремы 2 видно, что функционал

$$\Phi(\mathbf{q}) = I(\mathbf{y}_q, \boldsymbol{\theta})$$

обладает свойством выпуклости и в случае постоянных параметров регрессии, когда количество информации определено формулой (16).

Возвратимся к случаю стохастических параметров регрессии. Здесь имеет место следующая, почти очевидная теорема, связывающая $I(\mathbf{y}_q, \boldsymbol{\theta})$ с D -критерием (определителем от информационной матрицы, см. выше). Следует отметить, что теория ОЕР традиционно не рассматривает случая стохастических параметров, однако и не содержит на него прямого запрета.

Теорема 3. При стохастических параметрах регрессии, имеющих достаточно большой масштаб, максимизация SIQ, содержащегося в компонентах отклика относительно параметров регрессии, эквивалентна D -критерию.

Доказательство. Пусть $\mathbf{p}, \mathbf{q} \subseteq \{1, 2, \dots, n\}$ и $\text{card} \mathbf{p} = \text{card} \mathbf{q}$. Из формулы (17) следует, что и здесь есть возможность рассматривать функционал $\Psi(\mathbf{q})$, определенный формулой (18), вместо функционала

$$\Phi(\mathbf{q}) = I(\mathbf{y}_q, \boldsymbol{\theta}).$$

Вполне очевидно, что при достаточно большом масштабе стохастических параметров регрессии, а, соответственно, и малости элементов матрицы \mathbf{V}_θ^{-1} , мы непременно будем иметь эквивалентность следующих неравенств:

$$\begin{aligned} \det(\mathbf{M}_p + \mathbf{V}_\theta^{-1}) > \det(\mathbf{M}_q + \mathbf{V}_\theta^{-1}) &\Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \det(\mathbf{M}_p) > \det(\mathbf{M}_q), \end{aligned}$$

что, с учетом монотонности логарифма, и означает требуемое.

Теорема 3 полностью доказана.

Следует отметить, что для основания к применению SIQ в альтернативной формулировке задачи ОЕР как в случае стохастических, так и в случае постоянных параметров регрессии (3) вполне достаточно формул (15), (16) и утверждения теоремы 2.

Если решать задачу ОЕР в альтернативной формулировке для последовательных значений k (см. выше) от $k = 1$ до $k = n$, то мы получим последовательность компонент отклика в порядке убывания информационного вклада, а также возрастающую последовательность значений количества информации I_j . Последние удобно представлять, исключая зависимость от выбора основания логарифма a , в следующем виде:

$$I_j := (I_j/I(\mathbf{y}, \boldsymbol{\theta}))100\% \quad (j = 1, 2, \dots, n),$$

где $I(\mathbf{y}, \boldsymbol{\theta})$ – полное количество информации, когда $\mathbf{q} = \{1, 2, \dots, n\}$.

Аргументы в пользу целесообразности постановки и решения такой задачи даны в конце следующего раздела.

Использование регрессии на базис главных компонент в информационном упорядочивании и учет ценности информации при наличии пропусков данных

В большинстве практических задач мы, в лучшем случае, имеем лишь выборку наблюдений некоторого вектора

$$\{y_j, j = 1, 2, \dots, N\}.$$

Обычно такую выборку представляют в виде так называемой выборочной матрицы \mathbf{Y} размерности $n \times N$. Таким образом, столбцы матрицы \mathbf{Y} есть реализации случайного вектора \mathbf{y} . Предположим, что вектор \mathbf{y} подчиняется многомерному нормальному распределению с параметрами $\boldsymbol{\theta}_y$ и \mathbf{V}_y , т. е.

$$\mathbf{y} \sim N(\boldsymbol{\theta}_y, \mathbf{V}_y).$$

Вычислим оценки параметров распределения

$$\hat{\boldsymbol{\theta}}_y = \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N \mathbf{y}_j,$$

$$\hat{\mathbf{V}}_y = \frac{1}{N-1} \sum_{j=1}^N (\mathbf{y}_j - \hat{\boldsymbol{\theta}}_y)(\mathbf{y}_j - \hat{\boldsymbol{\theta}}_y)^T. \quad (19)$$

Далее вычислим ортогональную матрицу \mathbf{Q} такую, что выполняется равенство

$$\mathbf{Q}^T \hat{\mathbf{V}}_y \mathbf{Q} = \hat{\boldsymbol{\Lambda}} = \text{diag}(\hat{\lambda}_1, \hat{\lambda}_2, \dots, \hat{\lambda}_n)$$

$$\text{и } \hat{\lambda}_1 \geq \hat{\lambda}_2 \geq \dots \geq \hat{\lambda}_n.$$

Определим вектор размерности m ($m < n$) в виде

$$\mathbf{z} = \mathbf{Q}_{(m)}^T (\mathbf{y} - \hat{\boldsymbol{\theta}}_y),$$

где матрица $\mathbf{Q}_{(m)}$ содержит только первые m столбцов матрицы \mathbf{Q} .

Компоненты вектора \mathbf{z} обладают свойством взаимной независимости, называются выборочными главными компонентами и интерпретируются как скрытые факторы.

Матрица

$$\hat{\mathbf{V}}_z = \hat{\boldsymbol{\Lambda}}_{(m)} = \text{diag}(\hat{\lambda}_1, \hat{\lambda}_2, \dots, \hat{\lambda}_m)$$

– суть оценка матрицы взаимных ковариаций компонент \mathbf{z} .

Слово *выборочные* обычно опускается, но при этом следует помнить, что истинные главные компоненты мы бы имели лишь при известных параметрах распределения $\boldsymbol{\theta}_y$ и \mathbf{V}_y .

Наиболее корректный выбор размерности вектора \mathbf{z} ($m = \dim \mathbf{z}$) связан с проверкой статистической гипотезы

$$H: \lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_m \geq \lambda_{m+1} = \lambda_{m+2} = \dots = \lambda_n.$$

Однако существуют и относительно простые способы определения m [11].

Перейдем к центрированным значениям вектора \mathbf{y} т. е.

$$\mathbf{y} := \mathbf{y} - \hat{\boldsymbol{\theta}}_y,$$

и рассмотрим регрессию

$$\mathbf{y} = \mathbf{Fz} + \boldsymbol{\varepsilon}, \quad (20)$$

где $\mathbf{F} = \mathbf{Q}_{(m)}$

Предположим, что вектор остатков $\boldsymbol{\varepsilon}$ обладает теми же свойствами, что и в модели (3), т. е.

$$\boldsymbol{\varepsilon} \sim N(\mathbf{0}, \sigma^2 \mathbf{I}).$$

Модель (20) отличается от модели (3) прежде всего тем, что параметры регрессии в первом случае (в модели (20)), вообще говоря, стохастические. Эта модель позволяет, как отмечалось выше, решать различные практические и исследовательские задачи, связанные с информационным упорядочиванием, осуществляя последовательный отбор компонент отклика с максимизацией SIQ на каждом шаге отбора, т. е.

$$I(\mathbf{y}_q, \mathbf{z}) = \frac{1}{2} \log_a \det(\mathbf{I} + \mathbf{M}_q \hat{\boldsymbol{\Lambda}}_{(m)})$$

или какого-либо из классических критериев, например $\text{tr} \mathbf{M}_q$ [12].

Кроме того, модель (20) допускает различные подходы к определению ценности информации при наличии пропусков из-за нестабильности источников информации.

Пусть исходная выборочная матрица \mathbf{Y} содержит пропуски по отдельным компонентам. Построим матрицу \mathbf{N} той же размерности, что и \mathbf{Y} ($n \times N$), в которой каждому пропущенному измерению будет соответствовать 0, а наличествующему (не пропущенному) – 1. Тогда каждый элемент n_{ij} ($i = 1, 2, \dots, n; j = 1, 2, \dots, N$) матрицы \mathbf{N} равен нулю или единице. Пропуски в матрице \mathbf{Y} также заполним нулями. Вычислим средние значения компонент вектора \mathbf{y} по формуле

$$\bar{y}_i = \sum_{j=1}^N y_{ij} / \sum_{j=1}^N n_{ij} \quad (i = 1, 2, \dots, n)$$

и перейдем к центрированной матрице $\tilde{\mathbf{Y}}$, где

$$y_{ij} := y_{ij} - \bar{y}_i, \text{ если } n_{ij} \neq 0,$$

а значения, которым соответствует $n_{ij} = 0$, оставим без изменений, т. е. нулями.

Алгоритм 1. Теперь, если по каким-либо причинам исследователь предпочитает стабильные источники информации перед нестабильными, то оценку ковариационной матрицы компонент вектора \mathbf{y} следует вычислять по формуле

$$\tilde{\mathbf{V}}_y = \frac{1}{N} \tilde{\mathbf{Y}} \tilde{\mathbf{Y}}^T. \quad (21)$$

При отсутствии пропусков и делителе, равном $N - 1$, оценка (21) совпадает с оценкой (19). После вычисления матрицы $\mathbf{F} = \mathbf{Q}_{(m)}$ и осуществления информационного упорядочивания компонент вектора \mathbf{y} , номера компонент отклика, соответствующие нестабильной информации (пропускам), с большой вероятностью окажутся в конце этой последовательности (см. выше, конец предыдущего раздела). Оценки отдельных элементов матрицы взаимных ковариаций по формуле (21) при наличии пропусков подобны оценкам автоковариаций, которые предложили Г. Дженкинс и Д. Ваттс в своей известной книге [13]. В этих оценках делитель, независимо от величины сдвига, а, соответственно, и от числа слагаемых, равен длине ряда N , что, как показано в работе [13], не приводит к завышению

оценок длины волны. В нашем случае такой постоянный делитель снизит ценность нестабильной информации.

Алгоритм 2. Однако может оказаться так, что именно нестабильные источники информации представляют для исследователя наибольшую ценность. В этом случае элементы ковариационной матрицы следует оценивать по формуле

$$[\tilde{\mathbf{V}}_y]_{ij} = [\tilde{\mathbf{Y}} \tilde{\mathbf{Y}}^T]_{ij} / [\mathbf{N} \mathbf{N}^T]_{ij} \quad (22)$$

$(i, j = 1, 2, \dots, n)$

при $[\mathbf{N} \mathbf{N}^T]_{ij} \neq 0$ и $[\tilde{\mathbf{V}}_y]_{ij} = 0$ в противном случае.

Здесь $[*]_{ij}$ – оператор взятия элемента матрицы из i -й строки и из j -го столбца.

Формула (22) обеспечивает равенство делителя количеству ненулевых членов соответствующей суммы. При таком вычислении оценки ковариационной матрицы номера компонент отклика с пропусками данных могут оказаться и в начале информационно-упорядоченной последовательности [14].

Здесь следует напомнить, что вычисление SIQ связано со смещенным оцениванием и при гауссовском распределении имеет геометрическую интерпретацию (см. формулу (2)). Поэтому в формуле (19) можно было использовать и делитель, равный N , а в модели (20) следует использовать смещенную оценку σ^2 [11].

Замечание. Единственным серьезным критическим замечанием относительно SIQ можно считать следующее: SIQ как мера количества информации никак не учитывает субъективную ценность информации для потребителя.

Предложенные выше алгоритмы в какой-то мере решают эту проблему, поскольку их можно использовать и в самом общем случае при вычислении SIQ по формуле (1). При этом, вычисляя оценки матриц \mathbf{V}_ξ , \mathbf{V}_η , и $\mathbf{V}_{\xi\eta}$, мы должны построить и использовать соответствующие матрицы наличия данных: \mathbf{N}_ξ и $\mathbf{N}_{\eta\xi}$ (см. выше). Очевидно, что в случае высокой ценности нестабильной информации (алгоритм 2) при вычислении оценки $\mathbf{V}_{\xi\eta}$ в качестве делителей (см. формулу (22)) следует использовать соответствующие элементы матрицы $\mathbf{N}_\xi \mathbf{N}_{\eta\xi}^T$. Комбинируя алгоритмы 1 и 2, можно реализовывать любые субъективные предпочтения относительно ценности информации по отдельным ком-



понентам исследуемых векторов.

Прежде чем перейти к обсуждению и подведению итогов, отметим, что использование регрессии на базис главных компонент, а также выполнение на основе этой регрессии информационного упорядочивания (см. окончание предыдущего раздела), позволило автору решить ряд прикладных задач. Перечислим некоторые, наиболее важные из них:

оптимальное комплексирование данных спутниковых и наземных наблюдений [12];

выявление ядра коррупционной структуры [14];

определение зон, связанных с динамической неустойчивостью циркуляции атмосферы [15];

оптимизация экологического мониторинга [16];

оптимизация контроля микроэлектронного производства [17].

Достаточно широкий диапазон применимости такого подхода к решению прикладных задач, несомненно, подтверждает практическую значимость данной работы.

Обсуждение основных результатов проведенного исследования

Обозревая ситуацию в целом, следует прежде всего отдать должное исследованиям О.А. Покровского (см. раздел «Введение» в настоящей статье и его работу [3]). Он обнаружил, что и случай стохастических параметров регрессии, и альтернативная постановка задачи ОЕР являются актуальными как для исследовательских, так и для практических задач. О.А. Покровскому принадлежит (как было отмечено во введении) приоритет в использовании SIQ в задаче оптимизации спутникового зондирования атмосферы (см. также «Введение» и работу [3]). Однако тема связи SIQ с информационной матрицей Фишера (см. формулы (10), (15), (16)), равно как и другие вопросы, рассмотренные в данной работе, им не разбирались.

Относительно традиционной постановки задачи теории ОЕР отметим, что эта постановка породила ряд интересных математических результатов, связанных с тем, что такой подход позволяет подключить к решению задачи средства математического анализа при переходе к непрерывным планам. Поэтому теоретически обоснованный ответ на уточняющее замечание в разделе «Традиционная и альтернативная формули-

ровки задачи оптимального планирования эксперимента» настоящей статьи сделал бы эти результаты более ценными для практических задач.

В альтернативной же формулировке задачи ОЕР, несмотря на общую простоту и прозрачность, остается невыясненным следующий вопрос. При фиксированном значении

$$\text{card} \mathbf{q} = k_* \quad (k_* < n),$$

очевидно, существует собственное подмножество \mathbf{q} , которое дает максимум критерия оптимальности

$$\max \text{crit} \mathbf{M}_q \quad (\text{crit} \mathbf{M}_q = \text{tr} \mathbf{M}_q, I(\mathbf{y}_q, *) \text{ и т.п.}).$$

Однако нет уверенности, как и строгого доказательства, что, решая эту задачу последовательным наращиванием значения k от 1 до k_* (см. окончание раздела «Свойства SIQ как критерия ОЕР в альтернативной формулировке») с максимизацией выбранного критерия на каждом шаге последовательного отбора, мы придем именно к этому значению $\max \text{crit} \mathbf{M}_q$.

Аналогичная ситуация имеет место в задаче построения оптимальной регрессии [5]:

$$y = \beta_0 + \beta_1 x_1 + \beta_2 x_2 + \dots + \beta_{k^*} x_{k^*} + \varepsilon,$$

когда при фиксированном количестве k^* , из множества потенциальных регрессоров $\mathbf{x} (\text{card} \mathbf{x} > k^*)$ мы выбираем регрессоры, которые обеспечивают максимум значения коэффициента детерминации R^2 .

Здесь задачу также можно решать последовательным отбором регрессоров, максимизируя на каждом шаге коэффициент детерминации R^2 [5], и точно так же остается открытым вопрос о том, придем ли мы таким путем к максимальному значению R^2 .

Достаточно правдоподобным выглядит предположение, что при нормальном распределении мы можем рассчитывать на положительный ответ. На практике же эту проблему в обоих случаях обычно решают посредством процедуры включения и отбрасывания, останавливая процесс при обнаружении повторных шагов [5].

Заключение

Проведенное нами исследование позволило получить следующие результаты.

1. Доказано, что SIQ, содержащееся в компонентах отклика относительно стоха-

стических параметров,

во-первых, непосредственно связано с информационной матрицей Фишера;

во-вторых, является выпуклым функционалом на множестве компонент отклика;

в-третьих, при достаточно большом масштабе параметров эквивалентно использованию D -критерия в задаче планирования эксперимента.

2. Определено SIQ относительно постоянных параметров регрессии, где SIQ также является выпуклым функционалом на множестве компонент отклика.

3. Проанализировано соотношение традиционной и альтернативной постановок задачи планирования эксперимента.

4. Рассмотрено использование регрессии на базис главных компонент в задаче информационного упорядочивания данных.

5. Предложены алгоритмы, учитывающие субъективную ценность информации при наличии частичных пропусков данных.

И наконец, отметим, что перечисленные выше работы [3, 12, 14 – 17] в полной мере демонстрируют целесообразность использования модели регрессии со стохастическими параметрами при альтернативной постановке задачи ОЕР, а, в частности, работы [14 – 17] со всей полнотой демонстрируют практическую значимость результатов, полученных в настоящей статье.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Shannon C.E., Weaver W. A mathematical theory of communication, Urbana University Press, Chicago, 1949. (Перевод на русский язык см. в Сборнике переводов «Теория передачи электрических сигналов при наличии помех» под ред. С.А. Железнова. М.: Изд-во иностранной литературы, 1953. 288 с.)

2. Гельфанд И.М., Яглом А.М. О вычислении количества информации о случайной функции, содержащейся в другой такой функции // Успехи математических наук. 1957. Т. 12. № 1 (73). С. 3–52.

3. Покровский О.М. Об оптимальных условиях косвенного зондирования атмосферы // Известия АН СССР. Физика атмосферы и океана. 1969. Т. 5. № 12. С. 1324–1326.

4. Кендал М.Дж., Стьюарт А. Статистические выводы и связи. М.: Наука, 1973. 899 с.

5. Себер Дж. Линейный регрессионный анализ. М.: Мир, 1980. 456 с.

6. Пичугин Ю.А. О связи количества информации по Шеннону с информационной матрицей Фишера в задаче планирования регрессионного эксперимента // Межвуз. сб. науч. трудов «Информатика – исследования и инновации». Вып. 3. СПб.: РГПУ им. А.И. Герцена, 1999. С. 32–36.

7. Пичугин Ю.А. Замечания к отбору данных в задачах, связанных с линейной множественной регрессией // Заводская лаборатория. Диагностика материалов. 2002. № 5. С. 61–62.

8. Математическая теория планирования эксперимента. Под ред. С.М. Ермакова. М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит.-ры, 1983. 392 с.

9. Ермаков С.М., Жиглявский А.А. Математическая теория оптимального эксперимента.

М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит.-ры, 1987. 320 с.

10. Фон Нейман Дж., Моргенштерн О. Теория игр и экономическое поведение. М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит.-ры, 1970. 707 с.

11. Пичугин Ю.А. Замечания к использованию главных компонент в математическом моделировании // Научно-технические ведомости СПбГПУ. Физико-математические науки. 2018. Т. 11. № 3. С. 74–89.

12. Пичугин Ю.А., Покровский О.М. О методе комплексирования наземной и спутниковой метеорологической информации // Исследование Земли из космоса. 1992. № 6. С. 25–31.

13. Дженкинс Г., Ваттс Д. Спектральный анализ и его приложения. Выпуск 1. М.: Мир, 1971. 316 с.; Выпуск 2. М.: Мир, 1972. 287 с.

14. Pichugin Yu. A., Malafeyev O.A., Rylov D., Zaitseva I. A statistical method for corrupt agents detection // International Conference on Numerical Analysis and Applied Mathematics (ICNAAM 2017). AIP Conf. Proc. 1978. Pp. 100014-1–100014-4.

15. Пичугин Ю.А. География динамической неустойчивости циркуляции атмосферы в Северном полушарии (моделирование и анализ) // Известия Русского географического общества. 2005. Т. 137. № 3. С. 12–16.

16. Пичугин Ю.А. Экологический мониторинг и методы многомерной математической статистики // Астраханский вестник экологического образования. 2012. № 2. С. 101–105.

17. Гусман Ю.А., Пичугин Ю.А., Смирнов А.О. Информативность по Шеннону в контроле микроэлектронной продукции // Вопросы радиоэлектроники. 2018. № 10. С. 6–10.



Статья поступила в редакцию 22.05.2019, принята к публикации 14.06.2019.

СВЕДЕНИЯ ОБ АВТОРЕ

ПИЧУГИН Юрий Александрович – доктор физико-математических наук, профессор Института инноватики и базовой магистерской подготовки Санкт-Петербургского государственного университета аэрокосмического приборостроения, Санкт-Петербург, Российская Федерация.

190000, Российская Федерация, г. Санкт-Петербург, Большая Морская ул., 61.
yury-pichugin@mail.ru

REFERENCES

1. Shannon C.E., Weaver W., A mathematical theory of communication, Urbana University Press, Chicago, 1949.
2. Gelfand I.M., Yaglom A.M., Computation of the amount of information about a stochastic function contained in another such function, Uspekhi Matematicheskikh Nauk. 12 (1(73)) (1957) 3–52.
3. Pokrovsky O.M., Ob optimalnykh usloviyakh kosvennogo zondirovaniya atmosfery [On the optimum conditions of the atmosphere indirect sensing], Reports of AS USSR, Physics of Atmosphere and Ocean. 5 (12) (1969) 1324–1326.
4. Kendall M.G., Stuart A., The advanced theory of statistics, Vol. 2: Inference and relationship, Charles Griffin & Company limited, London, 1958 –1966.
5. Seber G.A.F., Linear regression analysis, John Wiley & Sons, New York, London, Sydney, Toronto, 1977.
6. Pichugin Yu.A., O svyazi kolichestva informatsii po Shennonu s informatsionnoy matritsey Fishera v zadache planirovaniya regressionnogo experimenta [On the relation of the amount of Shannon's information with Fisher's information matrix in the problem of regression experiment planning], The Issue of Inter-University Scientific Articles "Informatics – Research and Innovation", No. 3, Saint-Petersburg, Herzen University (1999) 32–36.
7. Pichugin Yu.A., Notes on selecting data in the tasks associated with linear multiple regression, Industrial Laboratory. Diagnostics of materials. 5(2002) 61–62.
8. Matematicheskaya teoriya planirovaniya experimenta [Mathematical theory of experiment planning], Ed. S.M. Ermakov, Nauka, Moscow, 1983.
9. Ermakov S.M., Zhiglyavskiy A.A., Matematicheskaya teoriya optimalnogo experimenta [Mathematical theory of optimal experiment], Nauka, Moscow, 1987.
10. Von Neumann J., Morgenstern O., Theory of games and economic behavior, Princeton University Press, Princeton, 1953.
11. Pichugin Yu.A., Notes on using the principal components in the mathematical simulation, St. Petersburg Polytechnical State University Journal. Physics and Mathematics. 11 (3) (2018) 74–89.
12. Pichugin Yu.A., Pokrovsky O.M., On the method of complexing the ground and spaceborne meteorologic information, Remote Sensing. (6) (1992) 25–31.
13. Jenkins G.M., Watts D.G., Spectral analysis and its applications, Holden-Day, San Francisco – Cambridge – London – Amsterdam (1969).
14. Pichugin Yu.A., Malafeyev O.A., Rylov D., Zaitseva I., A statistical method for corrupt agents detection, International Conference on Numerical Analysis and Applied Mathematics (ICNAAM 2017), AIP Conf. Proc. (1978) 100014-1–100014-4.
15. Pichugin Yu.A., Geografiya dinamicheskoy neustoychivosti tsirkulyatsii atmosfery v Severnom polusharii (modelirovanie i analiz) [Geography of dynamic instability of atmospheric circulation in the Northern hemisphere (simulation and analysis)], Reports of Russian Geographical Society. 137 (3) (2005) 12–16.
16. Pichugin Yu.A., Ekologicheskii monitoring i metody mnogomernoy matematicheskoy statistiki [Environmental monitoring and methods of multivariate mathematical statistics], Astrakhan Bulletin of Environmental Education (2) (2012) 101–105.
17. Gusman Yu.A., Pichugin Yu.A., Smirnov A.O., Shannon's informative value for control of microelectronic productions, Voprosy Radioelektroniki [Radio Electronics Issues]. (10) (2018) 6–10.

Received 22.05.2019, accepted 14.06.2019.

THE AUTHOR

PICHUGIN Yury A.

Saint-Petersburg State University of Aerospace Instrumentation

61 Bolshaya Morskaya St., St. Petersburg, 190000, Russian Federation

yury-pichugin@mail.ru

DOI: 10.18721/JPM.12315
УДК 534

ПРОЧНОСТЬ ЖЕЛЕЗОБЕТОННЫХ КОНСТРУКЦИЙ ПРИ ЭКСТРЕМАЛЬНЫХ МЕХАНИЧЕСКИХ ВОЗДЕЙСТВИЯХ

В.С. Модестов

Санкт-Петербургский политехнический университет Петра Великого,
Санкт-Петербург, Российская Федерация

В статье рассмотрены вопросы обоснования прочности ответственных железобетонных конструкций при экстремальных механических воздействиях. Главное внимание уделяется взаимодействию внешней защитной оболочки конструкции с тяжелым самолетом. Используются современные физические модели и методы непосредственного численного моделирования процессов с учетом нелинейного поведения материалов. Эти подходы верифицируются на оригинальных модельных задачах. Определяется воздействие тяжелого транспортного самолета на недеформированную железобетонную стену. Варьируются значения толщины внешней защитной оболочки реакторного здания. Исследуется прочность конструкций с учетом податливости грунтовых оснований, на которых расположены железобетонные сооружения.

Ключевые слова: прочность железобетонной конструкции, экстремальное механическое воздействие, железобетон, метод конечных элементов

Ссылка при цитировании: Модестов В.С. Прочность железобетонных конструкций при экстремальных механических воздействиях // Научно-технические ведомости СПбГПУ. Физико-математические науки. 2019. Т. 12. № 3. С. 177–187. DOI: 10.18721/JPM.12315

STRENGTH OF REINFORCED CONCRETE STRUCTURES UNDER EXTREME MECHANICAL IMPACTS

V.S. Modestov

Peter the Great St. Petersburg Polytechnic University, St. Petersburg, Russian Federation

The article deals with feasibility studies of the strength of reinforced concrete structures under extreme mechanical impacts. The focus is on the interaction of the structure's outer containment with a heavy aircraft. Modern physical models and methods of direct numerical simulation of processes are used with taking into account nonlinear behavior of materials. These approaches are verified on original model problems. The impact of a heavy transport aircraft on an undeformed reinforced concrete wall is determined. The thickness values of the outer containment of the reactor building are varied. The strength of structures with taking into account the pliability of soil bases on which reinforced concrete structures are located is also studied.

Keywords: structural strength, extreme mechanical impact, ferroconcrete, finite element method

Citation: Modestov V.S., Strength of reinforced concrete structures under extreme mechanical impacts, St. Petersburg Polytechnical State University Journal. Physics and Mathematics. 12 (3) (2019) 177–187. DOI: 10.18721/JPM.12315

Введение

Гарантия сохранения безопасности при любых нормальных и аварийных режимах работы – это важнейшее требование, предъявляемое к эксплуатации промышленных и гражданских объектов. К объектам же атомной энергетики, для которых выполнение дополнительных условий по ядерной и радиационной безопасности является обязательным, предъявляются особые, повышенные требования. В связи с этим выдвигается важный вопрос о расчетном обосновании прочности железобетонных конструкций при экстремальных механических воздействиях. К таким воздействиям относятся как атмосферные вихри (торнадо, смерч, ураган), так и техногенные катастрофы (обрушение тяжелой конструкции, падение самолета и т. п.). Особую опасность представляет падение самолета на защитную оболочку реактора атомной электростанции (АЭС).

Вопросам поведения железобетонных конструкций при экстремальных механических воздействиях посвящено большое количество публикаций. Центральное место по решению этой проблемы в российской научной литературе принадлежит, безусловно, работам А.Н. Бирбраера, А.Ю. Роледера [1, 2] и Н.А. Волкодава [3]. Учет деформируемости преграды при воздействии на нее летящего объекта выполнен Н.А. Волкодавом с помощью квазистатических методов с введением коэффициента динамичности; последний показывает, насколько динамическая нагрузка на преграду превышает статическую. В итоге разработки вязкопластической модели соударяющихся тел, этим автором было получено классическое выражение для нагрузки на неподвижную преграду со стороны самолета в процессе его разрушения – так называемая формула Риеры [4].

К сожалению, подавляющее большинство работ на данную тему содержит в своей основе весьма серьезные, но не всегда достаточно обоснованные допущения и ограничения. Более того, применяемые расчетные методики обычно носят инженерный характер. Расчеты железобетонных конструкций проводят, как правило, с помощью линейных методов определения напряженно-деформированного состояния. При этом сначала оценивается состояние бетона, и лишь затем подбирается армирование конструкции. Данный способ ока-

зывается непригодным для оценки напряженно-деформированного состояния железобетона при экстремальных воздействиях, когда значительное влияние начинают оказывать нелинейные локальные напряжения и деформации в областях взаимодействия бетона с железной арматурой. В литературе, по сути дела, отсутствует решение задачи в такой постановке.

В настоящей статье предлагается обоснование для гарантии прочности железобетонных конструкций при экстремальных механических воздействиях с использованием современных физических моделей и методов непосредственного численного моделирования процессов. При этом учитываются нелинейное поведение материалов и податливость грунтовых оснований, на которых расположены железобетонные сооружения.

Методы и алгоритмы исследования экстремальных механических воздействий

Для численного моделирования поведения железобетонных конструкций при экстремальных механических воздействиях разработано большое количество методов, учитывающих в той или иной мере нелинейные физико-механические свойства бетона и арматуры. Как правило, в разнообразных моделях реализован универсальный подход к описанию нелинейных прочностных свойств бетона (нелинейные свойства – когда бетонная матрица переходит из упругого состояния в пластическую стадию) с помощью критерия текучести F_f :

$$\sqrt{I_2} = F_f(I_1, \theta, \mathbf{k}), \quad (1)$$

где

$$I_1 = 3p = \sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3,$$

$$I_2 = \frac{1}{2} \text{tr}(S^2), I_3 = \frac{1}{3} \text{tr}(S^3)$$

– инварианты тензора напряжений (σ_i – элементы тензора напряжений σ), p – среднее нормальное напряжение); \mathbf{k} – вектор внутренних переменных материала; θ – инвариант Лоде (координата цилиндрической системы координат Лоде); в формуле для I_2 величина S – девиатор тензора напряжений,

$$S = \sigma - pE$$

(E – единичный тензор).

Практически во всех моделях железобетона есть возможность учесть наличие арматуры. При этом используются различные



методики: от добавления распределенной «жесткости» в направлениях армирования до прямого моделирования отдельных стержней арматуры, арматурной сетки и т. п.

С позиций механики, особенности матрицы композитного материала, состоящей из бетона, в основном выражаются через следующие характеристики:

нелинейная диаграмма деформирования; различные модули Юнга на сжатие и растяжение; при этом предел прочности при растяжении в десятки раз ниже, чем предел прочности при сжатии;

способность к трещинообразованию и, как следствие, – деформационная анизотропия, образование и рост трещин в областях контакта бетонной матрицы с арматурой.

Для учета этих особенностей в настоящей работе использована модель CDP (Concrete Damage Plasticity), которая обеспечивает возможности моделирования свойств бетона и других квазихрупких материалов во всех типах конструкций (стержневые, оболочечные и объемные). Эта модель основана на описании упругопластических свойств бетона и учитывает его повреждаемость и различную работу на растяжение и сжатие. CDP-модель можно использовать и для простого бетона, но прежде всего она предназначена для анализа железобетонных конструкций. В конечно-элементную модель исследуемого материала можно добавлять элементы, моделирующие арматуру. Эта модель предназначена для расчета конструкций под действием монотонных, циклических и динамических нагрузок. При использовании модели комбинируется неассоциированный закон пластического течения с закономерностями упрочнения и упругого деформирования с необратимой повреждаемостью, что дает возможность смоделировать процесс трещинообразования. Удобство использованной CDP-модели состоит также в том, что она позволяет учитывать восстановление жесткости бетона при действии циклических знакопеременных нагрузок и в ней возможен учет зависимости свойств материала от скорости деформирования.

Бетон принимается линейно-упругим при растяжении, вплоть до достижения величины напряжения, равной пределу прочности на растяжение, что соответствует началу образования микротрещин в материале. Поведение бетона после достижения

предела прочности на растяжение описывается с помощью ниспадающей ветви диаграммы деформирования и приводит к локализации напряжений в конструкции. При одноосном сжатии для бетона характерно линейное поведение до достижения предела текучести. Пластическая фаза деформирования характеризуется участком упрочнения вплоть до достижения предела прочности на сжатие с последующим ниспадающим участком диаграммы. Диаграммы деформирования приведены в статье [5] и описывают основные особенности работы неармированного бетона.

Армирование бетонных сооружений, как правило, моделируется с помощью специальных стержневых элементов, которые могут определяться по отдельности или ориентированными слоями. Для стали арматуры обычно используется упругопластическая модель деформирования материала. Эффекты, связанные с взаимодействием бетона и арматуры, такие как проскальзывание или нагельный эффект, моделируются приближенно путем внесения изменений в зависимость «напряжение – деформация» для бетона с целью учета передачи напряжений в бетоне с трещиной посредством арматуры.

Разработка и апробация методики расчета железобетонных конструкций с учетом нелинейного поведения материалов

Описанные выше, а также представленные в работах [5 – 15] методики и алгоритмы в дальнейшем применялись нами для расчета железобетонных конструкций при экстремальных механических воздействиях.

Как уже отмечалось выше, в конечно-элементных расчетах, наряду с прямым объемным моделированием стержней арматуры, известны и другие способы моделирования арматуры в бетоне. В частности, применяются такие модели, как дискретная, встроенная и распределенная.

В дискретной модели узлы стержневых элементов для арматуры совпадают с узлами объемной конечно-элементной сетки для бетона.

Во встроенной модели узлы сеток арматуры и бетона не совпадают, но связаны уравнениями совместности.

Наконец, в распределенной модели предполагается, что арматура равномерно распределена по элементам конечно-элементной сетки для бетона.

При использовании программной си-

стемы ABAQUS мы применяли методики встроенного и распределенного армирования. При этом выполнялось сравнение результатов расчетов по двум указанным методикам моделирования арматуры при решении задачи о статическом нагружении железобетонной балки. Такой анализ показал, что полученные значения напряжений в конкретной точке конструкции и энергии деформации как для встроенного, так и для распределенного армирования совпадают с точностью, достаточной для инженерных расчетов.

Рассмотрение аналогичной модельной задачи о динамическом нагружении железобетонной плиты с петлевым армированием («стыками Передерия») привело к заключению, что определяющим фактором, влияющим на несущую способность подобных конструкций, выступает возникновение радиально расположенных трещин по контуру петлевых стыков, а не первичных трещин на нижней грани плиты под областями приложения нагрузки, как это случается при простом продольном армировании. Математическое моделирование предсказало возникновение диагональных трещин в горизонтальной плоскости между соседними петлевыми стыками. Кроме того, было получено подтверждение выдвинутого предположения о том, что наличие поперечной арматуры внутри петлевых стыков («замковой арматуры») положительно (и существенно) влияет на несущую способность железобетонных плит и, в частности,

отодвигает процесс трещинообразования.

Апробация применяемой методики производилась нами также на модельной задаче о взаимодействии железобетонной плиты с деформируемым металлическим ударником. При этом армирование плиты задавалось как явным моделированием стержней арматуры балочными элементами, так и с помощью технологии распределенного армирования программной системы ABAQUS.

Расчеты показали, что распределение параметра поврежденности бетона d для двух моделей армирования (стержневого и распределенного) дают качественно аналогичные результаты. С другой стороны, эквивалентные по Мизесу напряжения в стержнях арматуры для модели распределенного армирования, как и ожидалось, дают «размазанную» картину, по сравнению с моделью стержневого армирования (рис. 1). Кроме того, значения эквивалентных напряжений по Мизесу для модели распределенного армирования оказываются меньше, чем в случае модели стержневого армирования. Расчеты также показали, что зависимости от времени величины компоненты R_z главного вектора сил реакции плиты, а также компоненты u_z вектора перемещений для центрального узла на тыльной поверхности плиты, практически полностью совпадают для двух моделей армирования. Данное обстоятельство позволило использовать в последующих расчетах модель распределенного армирования в местах, далеких от места удара, как наименее трудоемкую.

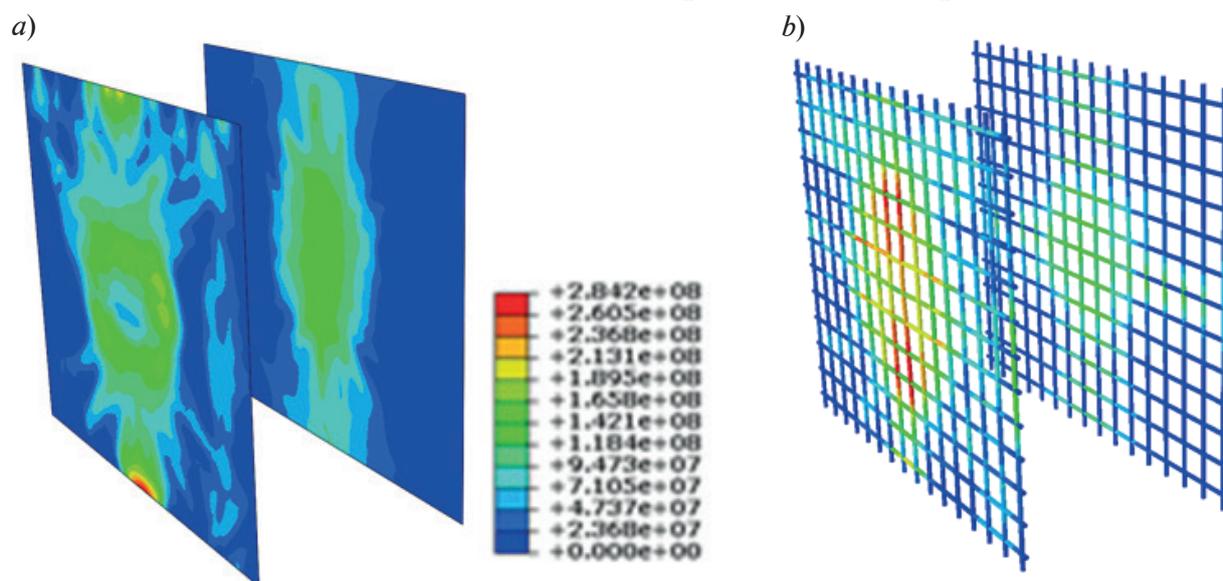


Рис. 1. Поле эквивалентных по Мизесу напряжений в стержнях арматуры по двум моделям армирования: распределенной (а) и стержневой (б)



В рамках исследуемой задачи о проби-
вании железобетонной плиты деформируе-
мым металлическим ударником было рас-
смотрено применение расширенной модели
Друккера – Прагера, допускающую задание
нескольких критериев прогрессирующего
повреждения и разрушения материала, и
применение так называемой функции «уда-
ления элементов». В терминах метода ко-
нечных элементов эта функция позволяет
последовательно выключать из расчетной
модели те элементы, в которых некоторая
мера поврежденности превышает заданную
величину.

Моделирование процесса соударения самолета с недеформируемой железобетонной плитой

С помощью методики, описанной в пре-
дыдущем разделе, мы выполнили числен-
ное моделирование процесса столкновения
крупнофюзеляжного самолета с недефор-
мируемой железобетонной плитой.

При решении данной задачи нагрузка на
неподвижную преграду со стороны самолета
в процессе его разрушения определялась
по формуле, предложенной Дж.Д. Риерой
[4]:

$$R(t) = P[\xi(t)] + \dot{\xi}^2(t) \mu[\xi(t)]. \quad (2)$$

При этом модель самолета представляла
собой жесткопластический стержень с по-
гонной массой $\mu(\xi)$ и предельной нагруз-
кой $P(\xi)$, которые распределены по длине
 ξ . Для распределений $\mu(\xi)$ и $P(\xi)$ исполь-
зовались известные из литературы данные
по самолету Boeing 707. Соответствующие
зависимости для крупнофюзеляжных само-
летов Boeing 737, Boeing 747, Airbus A380
определялись масштабированием. Пред-
полагалось, что неподвижная преграда из-
готовлена из бетона марки В40, а физико-
механические свойства арматуры соот-
ветствуют нормативам для стали А400. При
моделировании процесса столкновения для
материалов арматуры и самолета исполь-
зовалась классическая упругопластическая
модель Мизеса с изотропным упрочнением.

В данной работе за основу геометриче-
ской модели крупнофюзеляжного пасса-
жирского самолета были приняты имеющи-
еся в открытом доступе чертежи и САД-мо-
дели самолета Airbus A380. Была построена
конечно-элементная модель самолета, со-
держащая 72 354 линейных оболочечных
трех- и четырехузловых элемента, которые

обеспечивали 434 124 степеней свободы.

Было выполнено сравнительное иссле-
дование процесса столкновения крупнофю-
зеляжного самолета Airbus A380 с недефор-
мируемой преградой с применением упро-
щенного аналитического метода Риеры и
прямого численного динамического расчета
методом конечных элементов по применяе-
мой нами методике. Скорость самолета при
столкновении с преградой была принята
равной 110 м/с. Столкновение рассматри-
валось при нулевых значениях углов танга-
жа, рыскания и крена самолета.

На рис. 2 показано смоделированное
разрушение самолета при столкновении с
недеформируемой преградой в момент вре-
мени $t = 0,5$ с. В процессе расчета вычисля-
лась сила реакции связи недеформируемой
преграды, значение которой сравнивалось с
решением по методу Риеры [4].

На рис. 3 приведено сравнение числен-
ного и аналитического решений для силы
реакции железобетонной преграды. Анализ
этих данных выявляет ожидаемые каче-
ственные различия в формах зависимости
силы реакции от времени. Задание нагруз-
ки по методу Риеры приводит к гладкому
решению, а использование конечно-эле-
ментной модели – к двум численным экстремумам.

Первый экстремум на рис. 3 соответ-
ствует моменту контакта крыльев самолета
с преградой, второй – моменту удара двига-
телей. Нужно отметить, что максимальное
значение силы реакции в численном расче-
те составляет 2,25 МН, а в приближенном
расчете по методу Риеры – 1,7 МН.

Таким образом, проведенный анализ ре-
зультатов обосновывает применимость раз-
работанной конечно-элементной модели
самолета к расчету процесса его столкнове-
ния с сооружениями АЭС.

Моделирование процесса соударения самолета с конструкцией реакторного здания АЭС

При столкновении самолета с промыш-
ленным сооружением, в частности с реак-
торным зданием АЭС, возникают экстре-
мальные нагрузки на эти сооружения [1].
Поэтому необходимо проверять не только
прочность отдельных конструкций, но так-
же прочность и устойчивость как здания в
целом, так и его фундаментов.

Экстремальные механические воздей-
ствия имеют ярко выраженный динамиче-



Рис. 2. Разрушение самолета при столкновении с недеформируемой преградой в момент времени $t = 0,5$ с, полученное методом конечных элементов

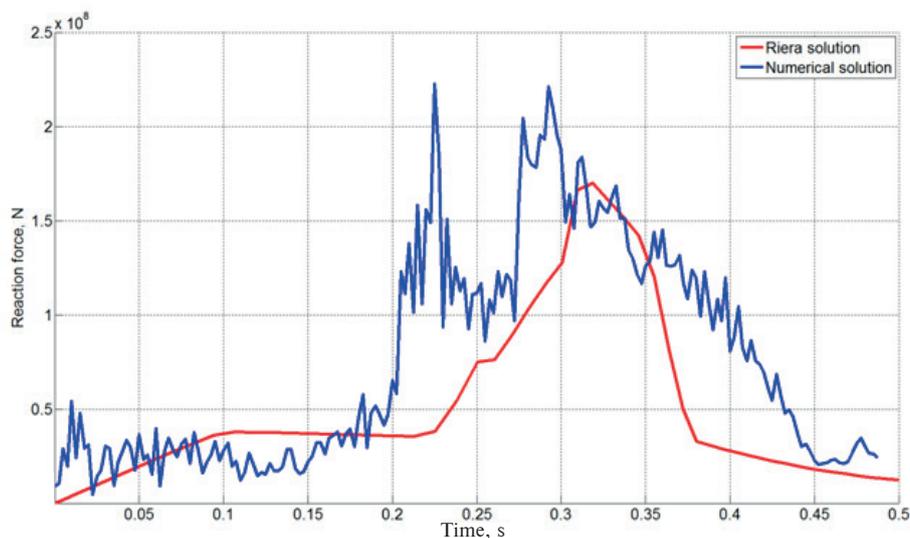


Рис. 3. Сравнение аналитического и численного решений для зависимости силы реакции железобетонной преграды от времени при столкновении с ней самолета

ский характер, поэтому расчет прочности при создаваемых ими нагрузках должен производиться либо динамическими методами, либо на квазистатическую нагрузку, найденную с использованием коэффициента динамичности.

С использованием описанного выше метода было выполнено численное моделирование процесса соударения самолета с конструкцией реакторного здания АЭС с учетом нелинейного поведения материалов.

В ходе решения задачи были разработаны геометрическая и конечно-элементная модели комплекса, включающие модели реакторного здания АЭС и здания безопасности, а также модели паровой камеры. Все эти модели соответствовали проектной документации типовой АЭС. Считалось, что здания безопасности и паровой камеры выполнены из оболочечных элемен-

тов линейно-упругой модели материала с заданными свойствами, эквивалентными нормативным свойствам бетона В40. Между защитной оболочкой здания реактора и зданиями безопасности и паровой камеры задавались условия контактного взаимодействия. Предполагалось, что защитная оболочка состоит из внешней и внутренней частей. В зоне ожидаемых наибольших деформаций было выполнено сгущение конечно-элементной сетки.

В рамках конечно-элементной модели здания реактора рассматривалось три модели материала:

линейная, со свойствами бетона В40 (модель 1);

нелинейная, для материала типа CDP, или Друккера – Прагера, со свойствами бетона В40 (модель 2);

та же, что модель 2, но со свойствами



бетона В60 (модель 3).

Для арматуры использовалась упругопластическая модель материала со свойствами арматурной стали А400. Общее число узлов конечно-элементной модели реакторного здания составляло 1 373 769, число степеней свободы – 4 221 307.

Численное моделирование поставленной задачи производилось в широком диапазоне значений толщины T внешней защитной оболочки: от 0,6 до 2,5 м.

На рис. 4 показано распределение параметра поврежденности бетона d_i в реакторном здании в результате столкновения с самолетом для различных значений толщины T .

Анализ данных на рис. 4 приводит к выводу, что в результате такого столкновения на внешней защитной оболочке будут образовываться магистральные трещины в меридиональном направлении при всех значениях толщины стенки, кроме $T = 2,5$ м. Если $T = 0,6$ м, то образующиеся трещины пронизывают практически всю поверхность защитной оболочки (за исключением купола и области вблизи фундамента). С ростом толщины оболочки размеры пораженной области уменьшаются, и при $T = 2,5$ м область повреждений носит локальный характер, по своим контурам повторяющий падающий самолет. При этом можно отметить во всех случаях возникновение маги-

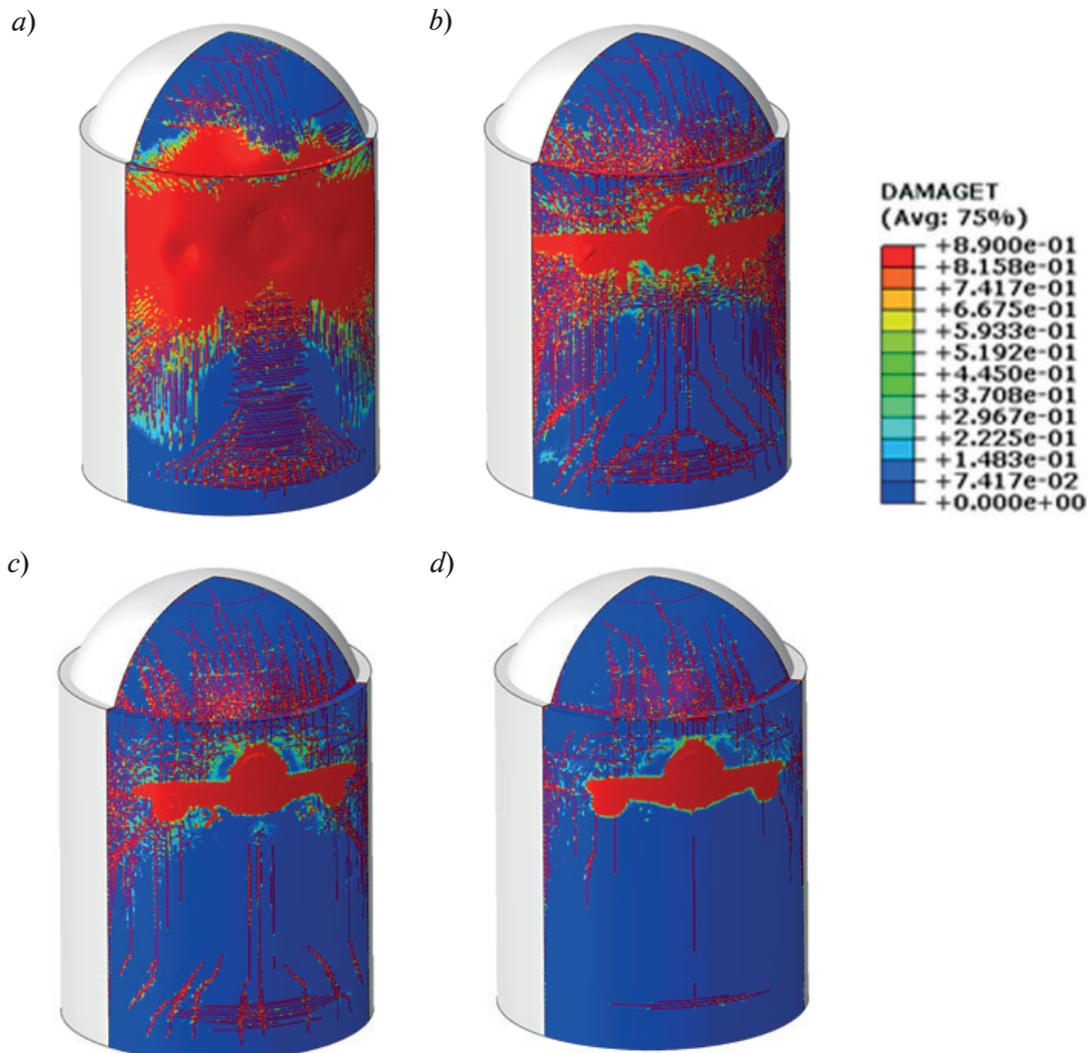


Рис. 4. Распределение параметра поврежденности бетона d_i (%) на внешней защитной оболочке реактора АЭС для различных значений толщины T , м: 0,6 (a), 1,5 (b), 2,0 (c), 2,5 (d)

стральных трещин в кольцевом направлении внешней защитной оболочки.

Расчеты показали, что при толщине внешней защитной оболочки, равной 0,6 м, отмечаются максимальные значения вектора перемещений ее точек, которые составляют примерно 1,8 м. Они являются катастрофическими, разрушительными для защитной оболочки. Отсюда следует, что при заданных параметрах соударения самолета с защитной оболочкой ее толщина $T = 0,6$ м является недопустимой. Можно утверждать, что, в соответствии с требованиями норм и на основании приведенных результатов моделирования, минимально допустимая толщина внешней защитной оболочки составляет 1,5 м.

Расчет процесса соударения самолета с реакторным зданием АЭС с учетом податливости грунтового основания

При построении алгоритма решения данной задачи моделирование грунтового основания осуществлялось с помощью упрощенного подхода, состоящего в замене пространственной модели грунта эквивалентными пружинами и демпферами, связанными с узлами конечно-элементной сетки фундамента здания. Была принята как модель абсолютно жесткого фундамента, так и упрощенная модель деформируемого фундамента с использованием упругодемпферных элементов. При этом величины эквивалентных жесткостей и демпфирований грунтового основания определялись как по

формулам стандарта ASCE, так и по формулам стандарта NIST.

В дальнейшем, в качестве исследуемой задачи, рассматривался удар самолета о цилиндрическую оболочку, геометрия которой приблизительно соответствует внешней защитной оболочке реакторного здания АЭС. Расчет проводился в программной системе ABAQUS/EXPLICIT. Количество конечных элементов было равно 17 613.

На рис. 5 приведены полученные расчетные зависимости от времени перемещений точки по поверхности защитной оболочки вблизи пятна удара в направлении оси Ox . Можно отметить существенное различие в решениях для модели абсолютно жесткого основания и упрощенной модели податливого основания. В то же время расчеты по стандартам ASCE и NIST дали достаточно близкие результаты.

Представленные данные расчетов говорят о существенном различии для случаев использования алгоритма учета податливости грунта (стандарты ASCE и NIST) и алгоритма жесткого основания (учет податливости грунта отключен).

Этот результат подчеркивает важность учета податливости грунтового основания при построении методики расчета процесса взаимодействия самолета с реакторным зданием АЭС.

Заключение

Проведено исследование прочности железобетонных конструкций при экстре-

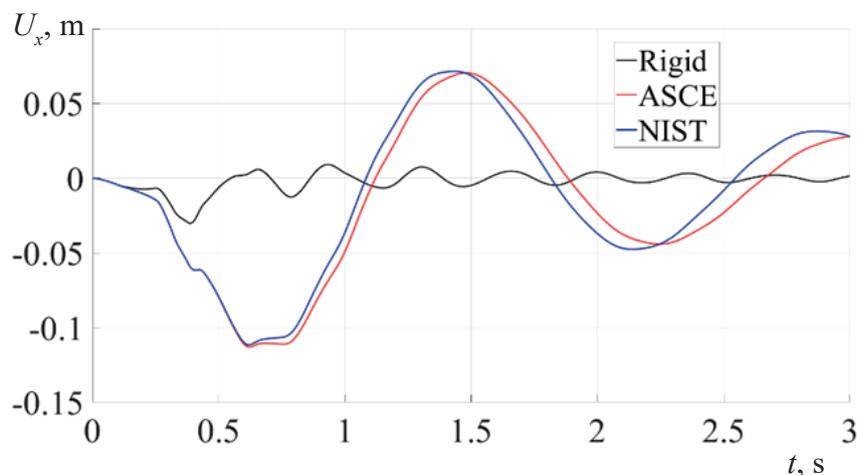


Рис. 5. Перемещения точки в защитной оболочке реакторного здания АЭС вблизи пятна удара, в направлении оси O_x . Результаты моделирования для абсолютно жесткого основания и для податливого основания по стандартам ASCE и NIST



мальных механических воздействиях. При этом достигнуты следующие результаты.

1. Разработана методика моделирования и решена задача об ударном взаимодействии железобетонной плиты с деформируемым металлическим ударником; при этом использована программная система ABAQUS для учета встроенного и распределенного армирования.

2. Получены результаты сравнительного исследования процесса взаимодействия самолета Airbus A380 с недеформируемой преградой с применением прямого численного динамического расчета методом конечных элементов и с применением упрощенного метода Риеры. Установлено существование двух экстремумов на зависимости реакции связи преграды от времени: в момент контакта крыльев самолета с преградой и в момент удара двигателей о

препятствие.

3. Разработаны конечно-элементные модели комплекса АЭС, состоящего из реакторного здания, здания безопасности и паровой камеры, на основе проектной документации типовой АЭС.

4. Получены результаты численного моделирования процесса взаимодействия самолета с конструкцией реакторного здания АЭС на основе верифицированных в работе методик расчета, учитывающих нелинейное поведение материалов. Установлено, что минимально допустимая толщина внешней защитной оболочки АЭС для принятой модели составляет 1,5 м.

5. Разработана методика и получены результаты расчетов процесса соударения самолета с реакторным зданием АЭС с учетом податливости грунта, на котором оно построено.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Бирбраер А.Н., Роледер А.Ю. Экстремальные воздействия на сооружения. СПб.: Изд-во Политехнического ун-та, 2009. 594 с.

2. Бирбраер А.Н. Расчет конструкций на сейсмостойкость. СПб.: Наука, 1998. 255 с.

3. Волкодав И.А. Методика оценки безопасности АЭС при ударах разрушающихся объектов. Дисс. ... канд. техн. наук. СПб., 2011. 174 с.

4. Riera J.D. On the stress analysis of structures subjected to aircraft impact forces // Nuclear Engineering and Design. 1968. Vol. 8. No. 4. Pp. 415–426.

5. Лукин А.В., Модестов В.С. Конечно-элементное моделирование и анализ напряженно-деформированного состояния железобетонных конструкций // Научно-технические ведомости Санкт-Петербургского государственного политехнического университета. Физико-математические науки. 2014. № 3 (201). С. 35–46.

6. Боровков А.И., Войнов И.Б., Лобачев А.М. и др. Расчетное обоснование безопасности корпуса реакторного блока при сейсмическом воздействии // Приложение к журналу «Безопасность жизнедеятельности». 2014. № 5. С. 8–12.

7. Боровков А.И., Модестов В.С., Пальмов В.А. Анализ пространственного напряженно-деформированного состояния трубных решеток методами механики композитных материалов // Научно-технические ведомости

СПбГПУ. Основной выпуск. 2008. № 4 (63). С. 37–45.

8. Пивков А.В., Лобачев А.М., Полянский В.А., Модестов В.С. Численное моделирование ультразвуковых волн в упругом изотропном слое с пьезоэлектрическим актуатором // Научно-технические ведомости Санкт-Петербургского государственного политехнического университета. Физико-математические науки. 2016. № 4 (253). С. 150–162.

9. Benin A.V., Semenov A.S., Semenov S.G., Beliaev M.O., Modestov V.S. Methods of identification of concrete elastic-plastic-damage models // Magazine of Civil Engineering. 2017. Vol. 76. No. 8. Pp. 279–297.

10. Fedorenko R.V., Kudryavtsev A.A., Lukin A.V., Modestov V.S., Murtazin I.R. Strength analysis of nuclear power plant structures in case of aircraft crash impact // Procedia Structural Integrity. 2017. Vol. 6. Pp. 244–251.

11. Лукин А.В., Модестов В.С., Смирнов А.Б., Юрченко Д.А. Анализ прочности и расчетно-экспериментальная верификация численных моделей железобетона за пределами упругих деформаций, применяемых в реакторной установке и элементах, важных для безопасности // Сборник трудов Десятой международной научно-технической конференции «Безопасность, эффективность и экономика атомной энергетики» (МНТК-2016). Москва, 25–27 мая 2016. М., 2016. С. 594–598.

12. Лукин А.В., Кудрявцев А.А., Модестов В.С., Муртазин И.Р., Федоренко Р.В. Оценка прочности строительных конструкций АЭС при падении тяжелого коммерческого самолета с учетом нелинейной работы конструкций // Сборник трудов Одиннадцатой международной научно-технической конференции «Безопасность, эффективность и экономика атомной энергетики» (МНТК-2018). Москва, 23–24 мая 2018 г. М., 2018. С. 558–564.

13. Буторин С.Л., Шульман Г.С., Шульман С.Г. Методы анализа безопасности АЭС при авиакатастрофах. М.: Энергоатомиздат, 2006. 326 с.

14. Лаврова В.А., Лукин А.В., Модестов В.С., Федоренко Р.В., Кудрявцев А.А., Муртазин И.Р., Филимохина А.И. Исследование напряженно-деформированного состояния осо-

бо опасных сооружений при падении тяжелого самолета // Сборник трудов конференции «Обеспечение безопасности АЭС с ВВЭР». 21–24 мая 2019 г. Подольск: ОАО ОКБ «Гидропресс», 2019. http://www.gidropress.podolsk.ru/files/proceedings/mntk_2019/documents/mntk2019-110.pdf

15. Лаврова В.А., Лукин А.В., Модестов В.С., Федоренко Р.В., Кудрявцев А.А., Муртазин И.Р. Обоснование использования программной системы АВАQUS для выполнения проектных и эксплуатационных расчетов // Сборник трудов конференции «Обеспечение безопасности АЭС с ВВЭР». 21–24 мая 2019 г. ОАО ОКБ «Гидропресс», Подольск: ОАО ОКБ «Гидропресс», 2019. http://www.gidropress.podolsk.ru/files/proceedings/mntk_2019/documents/mntk2019-110.pdf

Статья поступила в редакцию 10.06.2019, принята к публикации 19.08.2019.

СВЕДЕНИЯ ОБ АВТОРЕ

МОДЕСТОВ Виктор Сергеевич – директор центра «Техническая диагностика и надежность АЭС и ТЭС» Санкт-Петербургского политехнического университета Петра Великого, Санкт-Петербург, Российская Федерация.

195251, Российская Федерация, г. Санкт-Петербург, Политехническая ул., 29
vmodestov@spbstu.ru

REFERENCES

1. Birbrayer A.N., Roleder A.Yu., Ekstremalnyye vozdeystviya na sooruzheniya [Storm actions on arrangements], Polytechnical Institute Publishing, St. Petersburg, 2009.

2. Birbrayer A.N., Raschet konstruksiy na seysmostoykost [An analysis of structures for seismic stability], Nauka, St. Petersburg, 1998.

3. Volkodav I.A., Metodika otsenki bezopasnosti AES pri udarakh razrushayushchikhsya obyektov [AES safety assessment principles for impacts of objects' failure], Ph.D. Thesis, St. Petersburg, 2011.

4. Riera J.D., On the stress analysis of structures subjected to aircraft impact forces, Nuclear Engineering and Design. 8 (4) (1968) 415–426.

5. Lukin A.V., Modestov V.S., Finite element modeling and an analysis of the stress-strain state of reinforced concrete structures, St. Petersburg State Polytechnical University Journal. Physics and Mathematics. (3(201)) (2014) 35–46.

6. Borovkov A.I., Voynov I.B., Lobachev A.M., et al., Raschetnoye obosnovaniye bezopasnosti korpusa reaktornogo bloka pri seysmicheskom vozdeystvii [The feasibility study of a reactor housing safety under seismic impact], Supplement

to the “Life Safety” Journal (Bezopasnost' Zhiznedeatel'nosti). (5) (2014) 8–12.

7. Borovkov A.I., Modestov V.S., Pal'mov V.A., 3D analysis of stress-strain state of tube plates by methods of composite materials mechanics, St. Petersburg State Polytechnical University Journal. (4 (63)) (2008) 37–45.

8. Pivkov A.V., Lobachev A.M., Polyanskiy V.A., Modestov V.S., Numerical simulation of ultrasonic waves in the isotropic elastic layer with the piezoelectric actuator, St. Petersburg State Polytechnical University Journal. Physics and Mathematics. (4 (253)) (2016) 150–162.

9. Benin A.V., Semenov A.S., Semenov S.G., et al., Methods of identification of concrete elastic-plastic-damage models, Magazine of Civil Engineering. 76 (8) (2017) 279–297.

10. Fedorenko R.V., Kudryavtsev A.A., Lukin A.V., et al., Strength analysis of nuclear power plant structures in case of aircraft crash impact, Procedia Structural Integrity. 6 (2017) 244–251.

11. Modestov V.S., Lukin A.V., Smirnov A.B., et al., Strength analysis and computational-experimental verification of reinforced concrete computational models beyond elastic deformations



used in BREST OD-300 reactor and safety-related components, Proc. of the Tenth International Scientific and Technical Conference “Efficiency and economics of nuclear power industry” (MNTK-2016), Moscow, May 25–27, 2016, Pp. 594–598.

12. **Lukin A.V., Kudryavtsev A.A., Modestov V.S., et al.**, Otsenka prochnosti stroitelnykh konstruktsiy AES pri padenii tyazhelogo kommercheskogo samoleta s uchetom nelineynoy raboty konstruktsiy [AES structural strength assessment when a heavy commercial aircraft crashes taking into account the nonlinear construction work], Proc. of the Eleventh International Scientific and Technical Conference “Efficiency and economics of nuclear power industry” (MNTK-2018), Moscow, May 23–24, 2018, Pp. 558–564.

13. **Butorin S.L., Shulman G.S., Shulman S.G.**, Metody analiza bezopasnosti AES pri aviakatastrofakh [Analysis methods for AES safety in the plane crashes], Energoatomizdat,

Moscow, 2006.

14. **Lavrova V.A., Lukin A.V., Modestov V.S., et al.**, Issledovaniye napryazhenno-deformirovannogo sostoyaniya osobo opasnykh sooruzheniy pri padenii tyazhelogo samoleta [Stress-strain state study of especially dangerous buildings when a heavy plane crashes], Proc. of “The Security of AES with PWR” Conference, May 21–24, 2019, “Gidropress”, Podolsk, 2019. http://www.gidropress.podolsk.ru/files/proceedings/mntk_2019/documents/mntk2019-110.pdf

15. **Lavrova V.A., Lukin A.V., Modestov V.S., et al.**, Obosnovaniye ispolzovaniya programmnoy sistemy ABAQUS dlya vypolneniya proyektnykh i ekspluatatsionnykh raschetov [The feasibility study of using the ABAQUS software for design and experimental calculations], Proc. of “The Security of AES with PWR” Conference, May 21–24, 2019, “Gidropress”, Podolsk, 2019. http://www.gidropress.podolsk.ru/files/proceedings/mntk2019/documents/mntk_2019-110.pdf

Received 10.06.2019, accepted 19.08.2019.

THE AUTHOR

MODESTOV Victor S.

Peter the Great St. Petersburg Polytechnic University

29 Politechnicheskaya St., St. Petersburg, 195251, Russian Federation

vmodestov@spbstu.ru

ПЁТР АЛЕКСАНДРОВИЧ РОДНЫЙ

(к пятидесятилетию научной и педагогической деятельности)



Весной этого года исполнилось пятьдесят лет научной и педагогической деятельности Петра Александровича Родного – профессора кафедры экспериментальной физики Санкт-Петербургского политехнического университета Петра Великого.

Незаурядный ученый и ведущий преподаватель кафедры экспериментальной физики (КЭФ), Петр Александрович широко известен у нас в стране и за рубежом. Вся его профессиональная деятельность неразрывно связана с Политехническим институтом и кафедрой физики. Она началась со студенческих лет, с его посещения студенческого кружка под названием «Физика на английском» на втором курсе. Затем его интерес к физическим проблемам перерос в научную деятельность, в участие в хозяйственных работах кафедры (с четвертого курса); это оказалось настолько успешным, что на последнем этапе обучения П.А. Родный стал ответственным исполнителем хозяйственного договора между КЭФ и объединением «Светлана».

После окончания факультета радиоэлектроники ЛПИ им. М.И. Калинина по специальности «Физика полупроводников»

П.А. Родный получил распределение на КЭФ и занял должность младшего научного сотрудника (1969 – 1977). С 1977 года он начал преподавательскую деятельность, работал ассистентом (1977 – 1981), доцентом (1981 – 1990). С 1990 года по настоящее время Петр Александрович является профессором кафедры.

П.А. Родный – крупный специалист в области физики полупроводников, исследователь экситонных и электронно-дырочных процессов в ионных и ионно-ковалентных материалах. С 1979 года он руководит научной группой, которая занимается на КЭФ проблемами физики сцинтилляторов. За это время группа получила замечательные результаты по физике ионных и ионно-ковалентных кристаллов, а также керамик на их основе. Из множества достижений П.А. Родного в исследовании экситонных и электронно-дырочных процессов, протекающих в таких материалах, можно выделить открытие остовно-валентных переходов во фториде бария; создание физической модели этих переходов; изучение каскадной люминесценции в ионных кристаллах, легированных редкоземельными элементами; идентификацию и выявление характерных особенностей множества различных дефектов в широкозонных материалах. Полученные результаты нашли широкое практическое применение; в частности, они позволили создать новый класс быстрых сцинтилляторов для мультиспиральной рентгеновской компьютерной томографии и детекторов ионизирующих излучений, используемых в медицине и различных областях техники.

По результатам проведенных исследований Петр Александрович в 1974 году защитил диссертацию на соискание ученой степени кандидата, а в 1989 году – доктора физико-математических наук. Среди четырех книг, им написанных, следует особо выделить монографию «Физические процессы в неорганических сцинтилляторах».



В настоящее время эта книга служит основным учебным пособием для аспирантов и инженеров, занимающихся разработкой радиационных детекторов как у нас в стране, так и за рубежом.

Ценное качество работы Петра Александровича, которое присуще ему с самого начала деятельности, – это умение совмещать решение чисто научных проблем с прикладными исследованиями, ведущими к их практическому применению. Достаточно перечислить производственные организации, в интересах которых проводились такие исследования:

Научно-производственное объединение (ныне Многопрофильный холдинг, ОАО) «Светлана», г. Санкт-Петербург,

Государственный оптический институт им. С.И. Вавилова, г. Санкт-Петербург,

Опытно-конструкторское бюро на базе ЛПИ им. М.И. Калинина, возглавляемое Т.Н. Соколовым (ныне ФГУП «Научно-производственное объединение «Импульс»), г. Санкт-Петербург,

Всесоюзный научно-исследовательский институт люминофоров и особо чистых веществ (ВНИИ Люминофоров, ныне ЗАО НПФ «Люминофор»), г. Ставрополь, а также другие исследовательские институты и организации.

Следует особо отметить широкую кооперацию научной группы П.А. Родного с производителями сцинтилляторов и материалов для радиационных детекторов. Зачастую исследования свойств материалов велись параллельно с их созданием: технологи оперативно получали от Петра Александровича информацию о новых материалах, что позволяло быстро корректировать технологический процесс и получать материал с новыми, улучшенными характеристиками.

П.А. Родной пользуется большим авторитетом у международного научного сообщества. Он постоянно организует и сам участвует в таких престижных международных конференциях, как “LUMDETR” (Luminescent Detectors and Transformers of Ionizing Radiation) и “SCINT” (Scintillating Materials and their Applications), являясь членом программных комитетов этих конференций с начала их организации и проведения. П.А. Родной и руководимая им научная группа развивают многолетнее и плодотворное сотрудничество с Делфтским техническим университетом

(нидерл. Technische Universiteit Delft, TU Delft), г. Делфт, Нидерланды. Благодаря такому сотрудничеству, были выполнены совместные проекты, в частности трехлетний “NWO Project”, в рамках которого проводился постоянный обмен информацией и визитами, опубликованы десятки совместных статей. Двенадцать лет (1992 – 2004) П.А. Родной был приглашенным профессором TU Delft, где ежегодно, в течение двух месяцев, занимался научными исследованиями в Лаборатории радиационных технологий, участвовал в семинарах и заседаниях Совета по защите докторских диссертаций. В качестве приглашенного профессора П.А. Родной также работал в Лаборатории люминесценции при Лионском университете (Франция). Для научной работы и консультаций он посещал по приглашениям Синхротронную лабораторию Дарсбери (Великобритания) и Национальный институт ядерной физики в Падуе (Италия). В 2001 году Петр Александрович приехал по приглашению с визитом в фирму «Дженерал электрик» (США), где сделал четыре доклада в двух отделениях компании. Этот визит вылился в дальнейшее сотрудничество между КЭФ и этой американской фирмой, при этом за последние годы были выполнены два исследовательских проекта. Профессор П.А. Родной являлся также координатором проекта, заключенного между СПбПУ и компанией «Филипс» (Нидерланды) на 2012 – 2017 гг. Результатом выполнения этого проекта стала разработка (на основе многокомпонентных гранатов) эффективных сцинтилляторов для компьютерной и позитронно-эмиссионной томографии. Помимо этого, под руководством Петра Александровича выполнен ряд научных проектов и грантов по линиям Роснауки, Высшей школы и РФФИ.

В настоящее время научная группа П.А. Родного занята выполнением международного проекта «Разработка сверхбыстрых керамических детекторов ионизирующего излучения на основе нанокристаллов оксида цинка». Цель проекта – разработка и создание высокочувствительных радиационно-стойких детекторов для регистрации потоков тяжелых ионов.

Педагогическая деятельность Петра Александровича также весьма многогранна. Начиная с 1974 года, он ведет практические и лабораторные занятия по физике в различных учебных подразделениях СПбПУ,

читает лекции по общей физике. На протяжении десятков лет профессор создавал новые лабораторные работы и лекционные демонстрации, он постоянно совершенствует читаемый курс и в настоящее время, чему способствует его активное занятие научными исследованиями. Лекции П.А. Родного отличаются высоким научным уровнем, в них включены последние достижения как в области физики, так и смежных наук. В середине 1990-х годов он разработал специальный курс «Техническая физика», который продолжает курс общей физики (этот специальный курс впоследствии был издан отдельной книгой в издательстве «СПб Нестор»).

Педагогическая работа П.А. Родного не ограничивается обучением студентов. Профессор руководил работой восьми аспирантов, которые в итоге успешно защитили кандидатские диссертации, и кроме того, он консультировал одного докторанта. В настоящее время Петр Александрович руководит научными исследованиями одного аспиранта и двух магистрантов. Аспиранты и студенты, руководимые П.А. Родным, регулярно выигрывают гранты и призы, в том числе гранты Правительства и Президента России.

Общий список публикаций профессора П.А. Родного составляет свыше 250 наименований, и среди них 4 книги, 12 патентов, обзорные статьи и учебно-методические пособия. Его работы активно цитируются, индекс Хирша по версии РИНЦ/SCOPUS составляет 22/21. П.А. Родной также неод-

нократно награждался почетными грамотами за успешную подготовку молодых ученых. В связи со 100-летием кафедры в 2002 году, ему присвоено почетное звание «Заслуженный профессор СПбГПУ», а в 2012 году – звание «Почетный работник высшего профессионального образования».

Друзья и коллеги, кому бы ни приводилось общаться с Петром Александровичем, всегда отмечают и отмечают его интеллигентность, доброжелательность и постоянную готовность поделиться своими глубокими научными знаниями и опытом преподавательской деятельности. Каждый год в его лабораторию приходят новые ученики, защищающие впоследствии диссертации и вырастающие в прекрасных специалистов-физиков.

Петр Александрович Родной – один из достойных продолжателей славных традиций кафедры экспериментальной физики, которые были заложены еще ее основателями и выдающимися профессорами за 120-летнюю историю кафедры. Коллектив кафедры и весь университет вправе гордиться достижениями Петра Александровича во всех сферах его неутомимой и многогранной деятельности.

Коллектив кафедры экспериментальной физики и все сотрудники, принимающие участие в его исследованиях, сердечно желают Петру Александровичу здоровья, активного долголетия и дальнейших успехов в его работе. Редколлегия журнала с удовольствием присоединяется к этим пожеланиям.



АВТОРСКИЙ УКАЗАТЕЛЬ

Аладов А.В.	63, 78	Иванькова Е.М.	110
Бакаев В.А.	123	Котов Д.О.	131, 143
Бердников А.С.	26, 45	Ларионов Н.В.	155
Бердников А.Я.	131, 143	Модестов В.С.	177
Бердников Я.А.	123, 131, 143	Никитцина И.М.	123
Берлов Д.Н.	63, 78	Панихина А.А.	78
Булович С.В.	17	Пичугин Ю.А.	164
Валюхов В.П.	63, 78	Попрядухин П.В.	110
Васильев А.Л.	92	Преснякова Н.Н.	92
Власова О.Л.	78	Радзевич П.В.	131, 143
Галль Л.Н.	26, 45	Ремига О.А.	101
Галль Н.Р.	26, 45	Соловьев К.В.	26, 45
Головицкий А.П.	101	Терещенко Е.Ю.	92
Гороховатский Ю.А.	9	Фотиади А.Э.	63, 78
Гулякова А.А.	9	Фрюбинг П.	9
Добровольская И.П.	110	Черняков А.Е.	63
Егоров А.Ю.	123	Юдин В.Е.	110
Жарко С.В.	131, 143	Яцишина Е.Б.	92
Закгейм А.Л.	63, 78		

Научное издание

**НАУЧНО-ТЕХНИЧЕСКИЕ ВЕДОМОСТИ САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКОГО
ГОСУДАРСТВЕННОГО ПОЛИТЕХНИЧЕСКОГО УНИВЕРСИТЕТА.
ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЕ НАУКИ**

**«ST. PETERSBURG STATE POLYTECHNICAL UNIVERSITY JOURNAL.
PHYSICS AND MATHEMATICS»
ТОМ 12, № 2, 2019**

Учредитель и издатель – Федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего образования «Санкт-Петербургский политехнический университет Петра Великого»

Журнал зарегистрирован Федеральной службой по надзору в сфере информационных технологий и массовых коммуникаций (Роскомнадзор).
Свидетельство о регистрации ПИ № ФС77-51457 от 19.10.2012 г.

Редакция

д-р физ.-мат. наук, профессор *В.К. Иванов* – председатель ред. коллегии
д-р физ.-мат. наук, профессор *А.Э. Фотиади* – зам. председателя ред. коллегии
канд. физ.-мат. наук, доцент *В.М. Капралова* – ответственный секретарь
канд. физ.-мат. наук *О.А. Ящуржинская* – научный редактор, корректор
А.С. Колгатина – переводчик
Н.А. Бушманова – технический секретарь

Телефон редакции 294-22-85

Сайт <http://ntv.spbstu.ru>

E-mail: physics@spbstu.ru

Компьютерная верстка *Н.А. Бушмановой*

Санкт-Петербургский политехнический университет Петра Великого
Адрес университета: 195251, Санкт-Петербург, ул. Политехническая, д. 29.

УСЛОВИЯ ПУБЛИКАЦИИ СТАТЕЙ
в журнале «Научно-технические ведомости
Санкт-Петербургского государственного политехнического университета.
Физико-математические науки»

1. ОБЩИЕ ПОЛОЖЕНИЯ

Журнал «Научно-технические ведомости Санкт-Петербургского государственного политехнического университета. Физико-математические науки» является периодическим печатным научным рецензируемым изданием. Зарегистрирован в Федеральной службе по надзору в сфере информационных технологий и массовых коммуникаций (Свидетельство ПИ №ФС77-52144 от 11 декабря 2012 г.) и распространяется по подписке агентства «Роспечать» (индекс издания 71823).

С 2008 года журнал издавался в составе сериального издания "Научно-технические ведомости СПбГПУ". **Сохраняя преемственность и продолжая научные и публикационные традиции сериального издания «Научно-технические ведомости СПбГПУ», журнал издавали под двойными международными стандартными сериальными номерами ISSN 1994-2354 (сериальный) 2304-9782.** В 2012 году он зарегистрирован как самостоятельное периодическое издание **ISSN 2304-9782** (Свидетельство о регистрации ПИ № ФС77-52144 от 11 декабря 2012 г.). С 2012 г. начат выпуск журнала в двуязычном оформлении.

Издание входит в Перечень ведущих научных рецензируемых журналов и изданий (перечень ВАК) и принимает для печати материалы научных исследований, а также статьи для опубликования основных результатов диссертаций на соискание ученой степени доктора наук и кандидата наук по следующим основным научным направлениям: **Физика, Математика, Механика**, включая следующие шифры научных специальностей: 01.02.04, 01.02.05, 01.04.01, 01.04.02, 01.04.03, 01.04.04, 01.04.05, 01.04.06, 01.04.07, 01.04.10, 01.04.15, 01.04.21.

Журнал представлен в Реферативном журнале ВИНТИ РАН и включен в фонд научно-технической литературы (НТЛ) ВИНТИ РАН, а также в международной системе по периодическим изданиям «Ulrich's Periodicals Directory». Индексирован в базах данных «Российский индекс научного цитирования» (РИНЦ), Web of Science (Emerging Sources Citation Index).

Периодичность выхода журнала – 4 номера в год.

Редакция журнала соблюдает права интеллектуальной собственности и со всеми авторами научных статей заключает издательский лицензионный договор.

2. ТРЕБОВАНИЯ К ПРЕДСТАВЛЯЕМЫМ МАТЕРИАЛАМ

2.1. Оформление материалов

1. Рекомендуемый объем статей – 12-20 страниц формата А-4 с учетом графических вложений. Количество графических вложений (диаграмм, графиков, рисунков, фотографий и т.п.) не должно превышать шести.

2. Число авторов статьи, как правило, не должно превышать пяти человек.

3. Авторы должны придерживаться следующей обобщенной структуры статьи: вводная часть (актуальность, существующие проблемы – объем 0,5 – 1 стр.); основная часть (постановка и описание задачи, методика исследования, изложение и обсуждение основных результатов); заключительная часть (предложения, выводы – объем 0,5 – 1 стр.); список литературы (оформление по ГОСТ 7.0.5-2008).

В списки литературы **рекомендуется** включать ссылки на научные статьи, монографии, сборники статей, сборники конференций, электронные ресурсы с указанием даты обращения, патенты.

Как правило, **нежелательны** ссылки на диссертации и авторефераты диссертаций (такие ссылки допускаются, если результаты исследований еще не опубликованы, или не представлены достаточно подробно).

В списки литературы **не рекомендуется** включать ссылки на учебники, учебно-методические пособия, конспекты лекций, ГОСТы и др. нормативные документы, на законы и постановления, а также на архивные документы (если все же необходимо указать такие источники, то они оформляются в виде сносок).

Рекомендуемый объем списка литературы для обзорных статей – не менее 50 источников, для остальных статей – не менее 10.

Доля источников давностью менее 5 лет должна составлять не менее половины. Допустимый процент самоцитирования – не выше 10 – 20. Объем ссылок на зарубежные источники должен быть не менее 20%.

4. УДК (UDC) оформляется и формируется в соответствии с ГОСТ 7.90-2007.

5. Набор **текста** осуществляется в редакторе **MS Word**.

6. **Формулы** набираются в редакторе MathType (не во встроенном редакторе Word) (мелкие формулы, символы и обозначения набираются без использования редактора формул). **Таблицы** набираются в том же формате, что и основной текст. В тексте буква «ё» заменяется на букву «е» и оставляется только в фамилиях.

7. **Рисунки** (в формате .tiff, .bmp, .jpeg) и **таблицы** оформляются в виде отдельных файлов. Рисунки представляются только в черно-белом варианте. Шрифт – **Times New Roman**, размер шрифта основного текста – 14, интервал – 1,5. Таблицы большого размера могут быть набраны кеглем 12. Параметры страницы: поля слева – 3 см, сверху и снизу – 2 см, справа – 1,5 см. Текст размещается без переносов. Абзацный отступ – 1 см.

2.2. Представление материалов

1. Представление всех материалов осуществляется в электронном виде через электронную редакцию (<http://journals.spbstu.ru>). После регистрации в системе электронной редакции автоматически формируется персональный профиль автора, позволяющий взаимодействовать как с редакцией, так и с рецензентом.

2. Вместе с материалами статьи должно быть представлено экспертное заключение о возможности опубликования материалов в открытой печати.

3. Файл статьи, подаваемый через электронную редакцию, должен содержать только сам текст без названия, списка литературы, аннотации и ключевых слов, фамилий и сведений об авторах. Все эти поля заполняются отдельно через электронную редакцию.

2.3. Рассмотрение материалов

Предоставленные материалы (п. 2.2) первоначально рассматриваются редакционной коллегией и передаются для рецензирования. После одобрения материалов, согласования различных вопросов с автором (при необходимости) редакционная коллегия сообщает автору решение об опубликовании статьи. В случае отказа в публикации статьи редакция направляет автору мотивированный отказ.

При отклонении материалов из-за нарушения сроков подачи, требований по оформлению или как не отвечающих тематике журнала материалы не публикуются и не возвращаются.

Редакционная коллегия не вступает в дискуссию с авторами отклоненных материалов.

При поступлении в редакцию значительного количества статей их прием в очередной номер может закончиться **ДОСРОЧНО**.

Более подробную информацию можно получить по телефону редакции:

(812) 294-22-85 с 10.00 до 18.00 – Бушманова Наталья Александровна

или по e-mail: physics@spbstu.ru