

DOI: 10.18721/JPM.11305

УДК 537.534.7; 621.319.7

ОБОБЩЕНИЕ ПОНЯТИЯ ПСЕВДОПОТЕНЦИАЛА ДЛЯ РАДИОЧАСТОТНЫХ КВАДРУПОЛЬНЫХ ПОЛЕЙ

А.С. Бердников¹, Л.Н. Галль¹, Н.Р. Галль¹, К.В. Соловьев²

¹ Институт аналитического приборостроения Российской академии наук,
Санкт-Петербург, Российская Федерация;

² Санкт-Петербургский политехнический университет Петра Великого,
Санкт-Петербург, Российская Федерация

В работе показано, что псевдопотенциальную функцию, которая для неоднородных радиочастотных полей описывает усредненное движение заряженных частиц с точностью до квадратичных членов, для квадрупольных радиочастотных электрических полей можно заменить более точной, представленной в виде бесконечного псевдопотенциального ряда. Это позволяет расширить диапазон параметров радиочастотного поля, при котором появляется возможность не только качественного, но и количественного описания движения заряженных частиц. Но даже расширенное таким образом понятие псевдопотенциала, к сожалению, оказывается не слишком пригодным для описания движения заряженных частиц при приближении к области параметрического резонанса, где движение заряженных частиц в квадрупольных радиочастотных полях теряет устойчивость.

Ключевые слова: высокочастотное электрическое поле, квадрупольный масс-фильтр, секулярное колебание, псевдопотенциал

Ссылка при цитировании: Бердников А.С., Галль Л.Н., Галль Н.Р., Соловьев К.В. Обобщение понятия псевдопотенциала для радиочастотных квадрупольных полей // Научно-технические ведомости СПбГПУ. Физико-математические науки. 2018. Т. 11. № 3. С. 52–64. DOI: 10.18721/JPM.11305

GENERALIZATION OF THE PSEUDOPOTENTIAL CONCEPT FOR RADIO-FREQUENCY QUADRUPOLE FIELDS

A.S. Berdnikov¹, L.N. Gall¹, N.R. Gall¹, K.V. Solovyev²

¹ Institute for Analytical Instrumentation of the Russian Academy of Sciences,
St. Petersburg, Russian Federation;

² Peter the Great St. Petersburg Polytechnic University, St. Petersburg, Russian Federation

It is shown that the pseudopotential function, which describes the averaged motion of charged particles with accuracy up to quadratic terms for nonuniform radio-frequency fields, can be replaced by an infinite pseudopotential series for quadrupole radio-frequency electric fields. This replacement provides a more accurate description. It allows us to extend the parameter's range of the radio-frequency field; in this range,

it makes possible to describe the motion of charged particles quantitatively and not just qualitatively. Unfortunately, even this extended concept of pseudopotential is not suitable enough for describing the motion of charged particles when approaching the region of the parametric resonance, where the motion of charged particles loses stability in the quadrupole radio-frequency fields.

Key words: high-frequency electric field, quadrupole mass filter, secular oscillation, pseudopotential

Citation: A.S. Berdnikov, L.N. Gall, N.R. Gall, K.V. Solovyev, Generalization of the pseudopotential concept for radio-frequency quadrupole fields, St. Petersburg Polytechnical State University Journal. Physics and Mathematics. 11 (3) (2018) 52–64. DOI: 10.18721/JPM.11305

Введение

Псевдопотенциальный подход служит полезным инструментом для качественного описания движения ионов в неоднородных радиочастотных электрических полях [1 – 12]. Однако для радиочастотных квадрупольных масс-фильтров [11 – 15] и (в меньшей степени) для радиочастотных квадрупольных ловушек [16, 17] классический псевдопотенциальный подход дает слишком низкую точность, чтобы можно было всерьез признать этот метод полезным для исследования особенностей движения заряженных частиц в соответствующих устройствах. Исключениями являются псевдопотенциальные функции для стробоскопических отсчетов координат и скоростей [18 – 20], а также интерпретация матриц Флоке – Ляпунова для решений линейных дифференциальных уравнений с периодическими коэффициентами в смысле псевдопотенциальной модели движения [21, 22]. Перечисленные псевдопотенциальные функции основаны на принципиально ином математическом формализме, но эти модели движения, однако, не слишком удобны для практических вычислений.

В данной работе рассматривается разумный компромисс между классическими моделями, которые практичны, но не слишком точны в плане анализа особенностей движения заряженных частиц в квадрупольных радиочастотных полях [1 – 12], и математически точными, но не слишком практичными моделями [18 – 22]. Предлагаемые далее модели позволяют значительно расширить диапазон параметров радиочастотного квадрупольного электрического поля в пределах первой зоны устойчивости. При использовании указанных параметров достигается совпадение (не только каче-

ственное, но и количественное) приближенных траекторий движения с точными решениями соответствующих дифференциальных уравнений.

Рассматриваемые в работе псевдопотенциальные модели движения следуют общей идеологии классической теории псевдопотенциала [1 – 12] и приводят к легко вычисляемым алгебраическим выражениям. Однако эти модели плохо работают вблизи границы зоны устойчивости радиочастотных квадрупольных, соответствующей параметрическому резонансу между вынуждающим радиочастотным полем и собственными секулярными движениями заряженной частицы, где нарушаются базовые предположения о малости радиочастотной составляющей движения заряженной частицы, по сравнению с «медленной» (усредненной по радиочастотным колебаниям) компонентой движения. Кроме того, полученные формулы специфичны именно для квадрупольных радиочастотных электрических полей и не пригодны для обобщения на случай движения заряженных частиц в нелинейных радиочастотных электрических полях.

Классическая модель псевдопотенциала при движении в квадрупольном радиочастотном поле

Рассмотрим движение иона в радиочастотном электрическом поле линейного квадрупольного с гиперболическими стержнями [11 – 17]. Электрический потенциал $U(x, y, t)$ для такой системы имеет вид

$$U(x, y, t) = (U_0 + V_0 \cos(\Omega t + \varphi_0))(x^2 - y^2)/r_0^2, \quad (1)$$

где U_0 – постоянная составляющая напряжений, приложенных к электродам; V_0 – амплитуда косинусоидальной радио-

частотной составляющей напряжений, приложенных к электродам; Ω – круговая частота радиочастотного напряжения, φ_0 – фаза радиочастотного напряжения в момент начала движения иона; r_0 – кратчайшее расстояние от оси квадруполя до гиперболических электродов (характеризует межэлектродный зазор радиочастотного линейного квадруполя); x, y – декартовы координаты; t – время движения.

В безразмерных координатах траектория $x(t), y(t)$ для иона с массой m и зарядом e удовлетворяет уравнениям типа Матъё [23 – 30], которые представляют собой частный случай линейных дифференциальных уравнений с периодическими коэффициентами:

$$\frac{d^2 x}{d\xi^2} + (a + 2q \cos(2\xi + \varphi_0))x = 0, \quad (2)$$

$$\frac{d^2 y}{d\xi^2} - (a + 2q \cos(2\xi + \varphi_0))y = 0, \quad (3)$$

где $\xi = \Omega t / 2$ – безразмерное время; $a = 8eU_0 / m\Omega^2 r_0^2$, $q = 4eV_0 / m\Omega^2 r_0^2$ – безразмерные параметры; $f(\xi) = \cos(2\xi + \varphi_0)$ – косинусоидальная периодическая функция с безразмерным периодом $T' = \pi$ (безразмерной круговой частотой $\Omega' = 2$) и начальной фазой φ_0 .

Для иллюстрации особенностей классического псевдопотенциального подхода рассмотрим одномерное движение иона с массой m и зарядом e в радиочастотном электрическом поле с электрическим потенциалом общего вида

$$U(x, t) = U^0(x, t) + V(x, t) \cos(\Omega t + \varphi_0) + W(x, t) \sin(\Omega t + \varphi_0), \quad (4)$$

где $U^0(x, t)$, $V(x, t)$, $W(x, t)$ считаются «медленными» функциями времени, по сравнению с «быстро» осциллирующими синусоидальными функциями $\cos(\Omega t + \varphi_0)$, $\sin(\Omega t + \varphi_0)$.

Ньютоновские уравнения движения иона в таком электрическом поле приобретают вид

$$(m/e)\ddot{x} = -U_x^0(x, t) - V_x(x, t) \cos(\Omega t + \varphi_0) - W_x(x, t) \sin(\Omega t + \varphi_0), \quad (5)$$

где нижние индексы обозначают частные

производные, для того чтобы в дальнейшем избежать излишне громоздких математических выражений.

Для псевдопотенциальной модели движения [1 – 12] используется предположение, что решение дифференциального уравнения (5) можно с хорошей точностью представить в виде суммы

$$x(t) = x_0(t) + \delta x(t),$$

$$\delta x(t) \approx \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{\Omega^k} (x_k^c(t) \cos(\Omega t + \varphi_0) + x_k^s(t) \sin(\Omega t + \varphi_0) + x_k^{2c}(t) \cos 2(\Omega t + \varphi_0) + x_k^{2s}(t) \sin 2(\Omega t + \varphi_0) + \dots), \quad (6)$$

где «быстрая» компонента траектории $\delta x(t)$, как и ее производная по времени, обладает нулевым средним (рассчитанным за период радиочастотного поля (4)) и является малой, по сравнению с основной («медленной») компонентой траектории $x_0(t)$.

Подставим сумму (6) в уравнение (5) и разложим как сами функции $U^0(x, t)$, $V(x, t)$, $W(x, t)$, так и их частные производные в усеченные ряды Тейлора по малому приращению $\delta x(t)$. В этом случае при определенных условиях, а именно:

а) если допустить, что функции $x_k^c(t)$, $x_k^s(t)$, $x_k^{2c}(t)$, $x_k^{2s}(t)$, ... будут «медленными»,

б) если объединить вместе члены, представляющие собой базовые тригонометрические функции с одинаковыми частотами и одинаковыми степенями Ω ,

в) если потребовать, чтобы соответствующие коэффициенты (за исключением членов, соответствующих нулевой гармонике радиочастотного поля) обращались в нуль по отдельности, будут получены следующие приближенные соотношения:

$$x(t) \approx x_0(t) + \frac{e}{m\Omega^2} V_x(x_0(t), t) \cos(\Omega t + \varphi_0) + \frac{e}{m\Omega^2} W_x(x_0(t), t) \sin(\Omega t + \varphi_0) + \dots; \quad (7)$$

$$\dot{x}(t) \approx \dot{x}_0(t) + \frac{e}{m\Omega} W_x(x_0(t), t) \cos(\Omega t + \varphi_0) - \frac{e}{m\Omega} V_x(x_0(t), t) \sin(\Omega t + \varphi_0) - \dots \quad (8)$$

$$\begin{aligned}
 & -\frac{e}{m\Omega^2} [V_{xr}(x_0(t), t) + \dot{x}_0(t)V_{xx}(x_0(t), t)] \times \\
 & \times \cos(\Omega t + \varphi_0) - \frac{e}{m\Omega^2} [W_{xr}(x_0(t), t) + \\
 & + \dot{x}_0(t)W_{xx}(x_0(t), t)] \sin(\Omega t + \varphi_0) + \dots; \quad (8)
 \end{aligned}$$

$$\ddot{x}_0(t) \approx -\frac{e}{m} U_x(x_0(t), t) - \frac{e}{m} \bar{U}_x^{rf}(x_0(t), t) + \dots \quad (9)$$

Здесь сохранены степени Ω вплоть до $1/\Omega^2$, а старшие степени, представляющие собой малые поправки в силу предположения о «большой» частоте радиочастотного электрического поля, отброшены.

Следует, однако, отметить, что для получения правильного выражения для скорости $\dot{x}(t)$ (вплоть до членов вида $1/\Omega^2$) приходится в процессе выкладок, до операции дифференцирования функции $x(t)$ по времени, временно сохранять также и кубические члены $1/\Omega^3$; их можно отбросить только после корректного определения функции $\dot{x}(t)$.

Функция

$$\bar{U}^{rf}(x, t) = \frac{e}{4m\Omega^2} [(V_x(x, t))^2 + (W_x(x, t))^2] \quad (10)$$

носит название псевдопотенциала (эффективный потенциал, радиочастотный потенциал, потенциал пондеромоторной силы и т. п.), а уравнение (9) можно интерпретировать как движение иона с массой m и зарядом e в квазистационарном электрическом поле с потенциалом $U(x, t) + \bar{U}^{rf}(x, t)$.

Важно подчеркнуть, что неотъемлемой частью псевдопотенциальной модели движения является не только псевдопотенциальное уравнение (9) для «медленной» части траектории иона, но и уравнения (7), (8). Последние позволяют выразить в явном виде высокочастотные поправки для траектории и скорости иона и тем самым найти приближенное выражение для истинной траектории иона в радиочастотном электрическом поле. В частности, из уравнений (7), (8) следует, что быстро осциллирующие поправки к «медленной» части траектории иона будут прямо пропорциональны амплитуде радиочастотной компоненты напряженности электрического поля в рассматриваемой точке траектории. Кро-

ме того, с помощью нелинейных алгебраических уравнений (7), (8) функции $x_0(t)$, $\dot{x}_0(t)$ можно выразить через функции $x(t)$, $\dot{x}(t)$ в виде рядов по степеням $1/\Omega^k$:

$$\begin{aligned}
 x_0(t) \approx x(t) - \frac{e}{m\Omega^2} V_x(x(t), t) \cos(\Omega t + \varphi_0) - \\
 - \frac{e}{m\Omega^2} W_x(x(t), t) \sin(\Omega t + \varphi_0) + \dots; \quad (11)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \dot{x}_0(t) \approx \dot{x}(t) - \frac{e}{m\Omega} W_x(x(t), t) \cos(\Omega t + \varphi_0) + \\
 + \frac{e}{m\Omega} V_x(x(t), t) \sin(\Omega t + \varphi_0) + \\
 + \frac{e}{m\Omega^2} [V_{xr}(x(t), t) + \dot{x}(t)V_{xx}(x(t), t)] \times \\
 \times \cos(\Omega t + \varphi_0) + \frac{e}{m\Omega^2} [W_{xr}(x(t), t) + \\
 + \dot{x}(t)W_{xx}(x(t), t)] \sin(\Omega t + \varphi_0) + \dots, \quad (12)
 \end{aligned}$$

где сохранены члены вплоть до $1/\Omega^2$ как для $x_0(t)$, так и для $\dot{x}_0(t)$.

В частности, уравнения (11), (12) позволяют в явном виде выразить начальные условия для «медленного» движения (9) через начальные условия истинного движения (5) в радиочастотном поле.

Здесь необходимо отметить, что несоответствие начальных условий для функций $x_0(t)$, $\dot{x}_0(t)$ и $x(t)$, $\dot{x}(t)$, а также различие между усредненными траекториями $x_0(t)$, $\dot{x}_0(t)$ и приближенными траекториями $x(t)$, $\dot{x}(t)$ не всегда принимается исследователями во внимание при оценке точности псевдопотенциальной модели движения. Такое пренебрежение приводит к худшей оценке, чем она есть на самом деле.

Нормализованное уравнение движения (2) получается из уравнения (5) при следующей подстановке:

$$U^0(x, t) = ax^2/2, \quad V(x, t) = qx^2,$$

$$W(x, t) = 0, \quad \Omega = 2,$$

$$e = 1, \quad m = 1, \quad t = \xi.$$

В результате псевдопотенциальная модель движения иона (7) – (12) дает для уравнения (2) приближенное решение, записанное в безразмерной форме:

$$x_0''(\xi) \approx -\left(a + \frac{q^2}{2}\right)x_0(\xi) + \dots; \quad (13)$$

$$x_0(0) \approx x(0)\left(1 - \frac{q}{2} \cos \varphi_0\right) + \dots; \quad (14)$$

$$x_0'(0) \approx x(0)q \sin \varphi_0 + x'(0)\left(1 + \frac{q}{2} \cos \varphi_0\right) + \dots;$$

$$\begin{aligned} x(\xi) &\approx x_0(\xi)\left(1 + \frac{q}{2} \cos(2\xi + \varphi_0)\right) + \dots; \\ x'(\xi) &\approx -qx_0(\xi) \sin(2\xi + \varphi_0) + \\ &+ x_0'(\xi)\left(1 - \frac{q}{2} \cos(2\xi + \varphi_0)\right) + \dots. \end{aligned} \quad (15)$$

Здесь предполагается, что

$$a + q^2/2 = \tilde{\beta}^2 > 0,$$

где $\tilde{\beta} = \sqrt{a + q^2/2}$ – это псевдопотенциальное приближение для точного значения нормализованной секулярной частоты β [23 – 31].

Условие

$$a + q^2/2 = \tilde{\beta}^2 > 0$$

соответствует стабильному движению иона в радиочастотном квадрупольном электрическом поле в рамках псевдопотенциальной модели. Рис. 1 показывает разницу между приближенными траекториями (13) – (15) и точными (вычисленными)

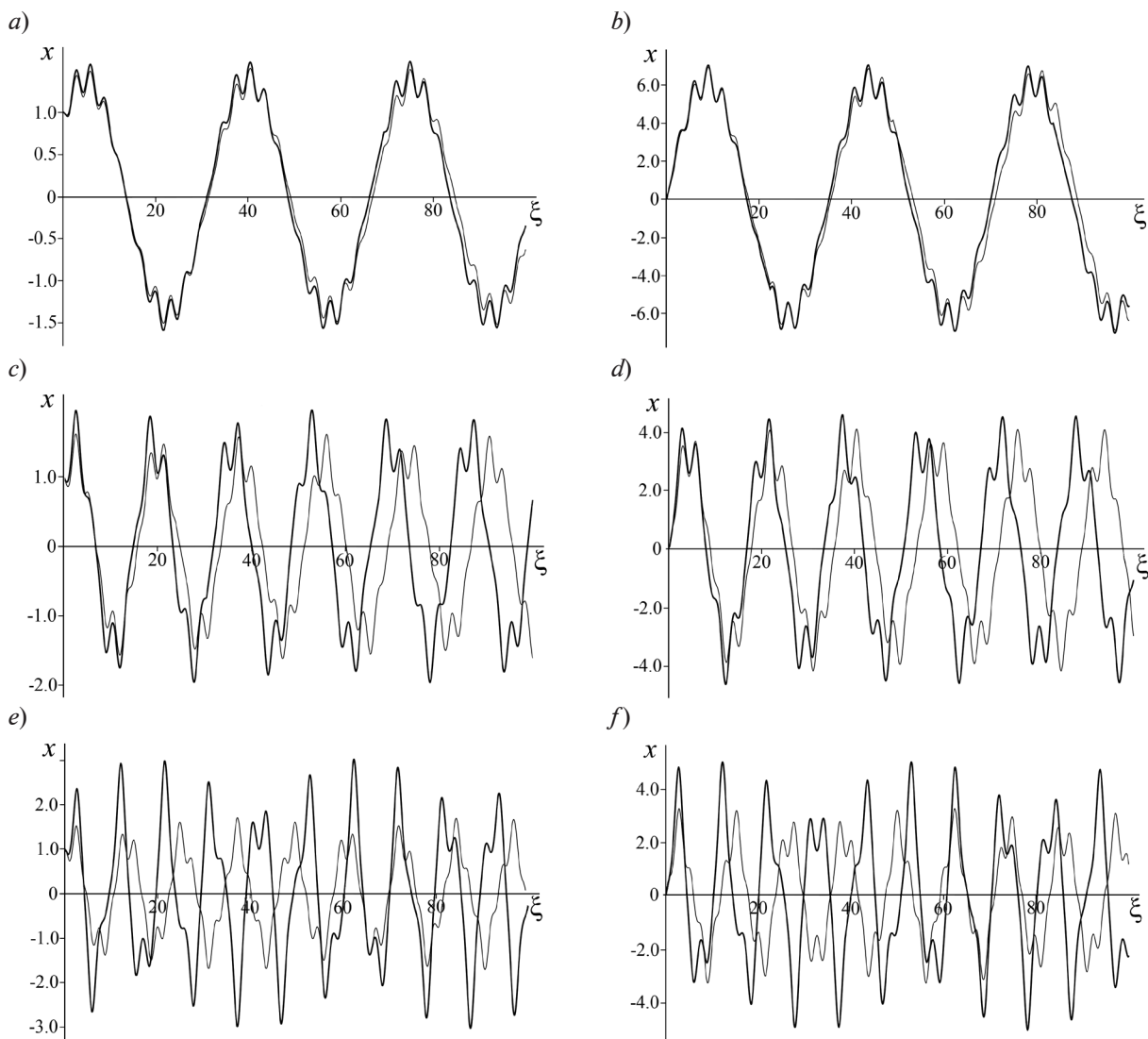


Рис. 1. Сравнение численно полученных траекторий уравнения (2) (тонкие линии) с приближенными траекториями, вычисленными с помощью теории псевдопотенциала (14), (15) (жирные линии).
Использованные значения параметров уравнения (2) приведены в таблице

Таблица

Значения параметров уравнения (2) при вычислении его точных решений

Рис. 1, 2	q	$x(0)$	$x'(0)$
a	0,25	1	0
b	0,25	0	1
c	0,50	1	0
d	0,50	0	1
e	0,75	1	0
f	0,75	0	1

Примечание. Параметр $a = 0$ для всего приведенного набора остальных параметров.

решениями уравнения (2) при $a = 0$ для разных значений параметра q .

Псевдопотенциальное разложение в бесконечный ряд

Если в разложении (6) сохранить больше степеней вида $1/\Omega^k$, то можно получить уточненные уравнения для «медленного» движения $x_0(t)$, а также уточненные уравнения связи между истинным движением $x(t)$ и «медленным» (усредненным) движением $x_0(t)$. Однако в общем случае произвольного радиочастотного электрического поля получаемые на этом пути выражения оказываются крайне сложными и уже не допускают такой изящной и физически наглядной интерпретации, как классическая модель псевдопотенциала (см., впрочем, работу [32]). Исключение составляют квадрупольные электрические поля (для них зависимость электрического потенциала от координат выражается квадратичным полиномом), для которых поправки высокого порядка по-прежнему имеют вид искусственно сконструированной псевдопотенциальной функции.

В качестве примера рассмотрим одномерное движение в косинусоидальном радиочастотном электрическом поле с квадратичным электрическим потенциалом:

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= v; \\ \frac{dv}{dt} &= -\hat{U}x - \hat{V}x \cos(\Omega t + \varphi_0), \end{aligned} \tag{16}$$

где применительно к линейному квадруполью с электрическим потенциалом (1) величина

$$(m/2e)\hat{U}x^2 = U_0 x^2/r_0^2$$

есть постоянная составляющая электрического потенциала, а величина

$$(m/2e)\hat{V}x^2 = V_0 x^2/r_0^2$$

есть амплитуда радиочастотной составляющей электрического потенциала.

Псевдопотенциальное разложение для решений системы уравнений (16) можно записать в виде специфического ряда, представляющего собой гибриды тригонометрических рядов Фурье и степенных рядов Тейлора:

$$\begin{aligned} x(t) &= x_0(t) + \\ &+ x_0(t) \sum_{k=1,\infty} \cos k(\Omega t + \varphi_0) \left(\sum_{j=k,\infty} \frac{x_{k,2j}^{(c)}}{\Omega^{2j}} \right) + \\ &+ v_0(t) \sum_{k=1,\infty} \sin k(\Omega t + \varphi_0) \left(\sum_{j=k,\infty} \frac{x_{k,2j+1}^{(s)}}{\Omega^{2j+1}} \right); \\ v(t) &= v_0(t) + \end{aligned} \tag{17}$$

$$\begin{aligned} &+ x_0(t) \sum_{k=1,\infty} \sin k(\Omega t + \varphi_0) \left(\sum_{j=k,\infty} \frac{v_{k,2j-1}^{(s)}}{\Omega^{2j-1}} \right) + \\ &+ v_0(t) \sum_{k=1,\infty} \cos k(\Omega t + \varphi_0) \left(\sum_{j=k,\infty} \frac{v_{k,2j}^{(c)}}{\Omega^{2j}} \right); \\ \dot{x}_0(t) &= v_0(t); \\ \dot{v}_0(t) &= - \left(X_0 + \sum_{j=1,\infty} \frac{1}{\Omega^{2j}} X_{2j} \right) x_0(t). \end{aligned} \tag{18}$$

В этих уравнениях $x_{k,2j}^{(c)}$, $x_{k,2j+1}^{(s)}$, $v_{k,2j-1}^{(s)}$, $v_{k,2j}^{(c)}$, X_{2j} — это неизвестные константы, которые необходимо подобрать так, чтобы решение (17), (18) удовлетворяло системе уравнений (16). Действительно, после подстановки решения (17), (18) в систему (16), а также объединения вместе коэффициентов для подобных тригонометрических членов

$$\cos k(\Omega t + \varphi_0), \sin k(\Omega t + \varphi_0)$$

и степенных членов $1/\Omega^j$, можно выразить константы $x_{k,2j}^{(c)}$, $x_{k,2j+1}^{(s)}$, $v_{k,2j-1}^{(s)}$, $v_{k,2j}^{(c)}$, X_{2j} непротиворечивым способом с помощью рекуррентных соотношений через константы \hat{U} и \hat{V} , входящие в уравнения (16). В таком случае функцию

$$\hat{U}^f(x_0) = \frac{1}{2} \left(X_0 + \sum_{j=1,\infty} \frac{1}{\Omega^{2j}} X_{2j} \right) x_0^2 = \frac{1}{2} \hat{\beta}^2 x_0^2, \tag{19}$$

с помощью которой дифференциальное уравнение (18) записывается в форме

$$\ddot{x}_0 = -d\widehat{U}^{(f)}(x_0)/dx_0,$$

можно интерпретировать как уточненный квадратичный псевдопотенциал. Последний характеризует «медленное» (секулярное) движение ионов в квадратичном радиочастотном электрическом поле.

В частности, ненулевые коэффициенты $x_{k,2j}^{(c)}$, $x_{k,2j+1}^{(s)}$, $v_{k,2j-1}^{(s)}$, $v_{k,2j}^{(c)}$, X_{2j} , которые потребуются для вычисления уравнений (17), (18) с точностью до членов вида $1/\Omega^6$, определяются как

$$\begin{aligned} X_0 &= \widehat{U}, X_2 = \frac{1}{2}\widehat{V}^2, X_4 = 2\widehat{U}\widehat{V}^2, \\ X_6 &= \widehat{V}^2\left(8\widehat{U}^2 + \frac{25}{32}\widehat{V}^2\right); \\ v_{1,1}^{(s)} &= -\widehat{V}, v_{1,3}^{(s)} = -2\widehat{U}\widehat{V}, \\ v_{1,5}^{(s)} &= -\widehat{V}\left(8\widehat{U}^2 + \frac{9}{16}\widehat{V}^2\right); \\ v_{1,2}^{(c)} &= -\widehat{V}, v_{1,4}^{(c)} = -4\widehat{U}\widehat{V}, \\ v_{1,6}^{(c)} &= -\widehat{V}\left(16\widehat{U}^2 + \frac{3}{4}\widehat{V}^2\right); \\ x_{1,2}^{(c)} &= \widehat{V}, x_{1,4}^{(c)} = 4\widehat{U}\widehat{V}, \\ x_{1,6}^{(c)} &= \widehat{V}\left(16\widehat{U}^2 + \frac{25}{16}\widehat{V}^2\right); \\ x_{1,3}^{(s)} &= -2\widehat{V}, x_{1,5}^{(s)} = -8\widehat{U}\widehat{V}; \\ v_{2,3}^{(s)} &= -\frac{1}{4}\widehat{V}^2, v_{2,5}^{(s)} = -\frac{11}{8}\widehat{U}\widehat{V}^2, \\ v_{2,4}^{(c)} &= -\frac{5}{8}\widehat{V}^2, v_{2,6}^{(c)} = -\frac{23}{8}\widehat{U}\widehat{V}^2; \\ x_{2,4}^{(c)} &= \frac{1}{8}\widehat{V}^2, x_{2,6}^{(c)} = \frac{7}{8}\widehat{U}\widehat{V}^2, x_{2,5}^{(s)} = -\frac{3}{8}\widehat{V}^2; \\ v_{3,5}^{(s)} &= -\frac{1}{48}\widehat{V}^3, v_{3,6}^{(c)} = -\frac{5}{72}\widehat{V}^3, x_{3,6}^{(c)} = \frac{1}{144}\widehat{V}^3, \dots \end{aligned} \quad (20)$$

С помощью линейных уравнений (17) можно выразить функции $x_0(t), v_0(t)$ через функции $x(t), v(t)$. Это позволяет, в частности, правильно рассчитать начальные условия для «медленного» движения $x_0(t), v_0(t)$ через начальные условия, заданные для траектории $x(t), v(t)$.

При разложении полученных выражений в степенной ряд по $1/\Omega^k$ получаются

выражения вида

$$\begin{aligned} x_0(t) &= x(t)\left(1 + \sum_{k=2,\infty} \frac{\tilde{x}_{2k}^{(0)}}{\Omega^{2k}}\right) + \\ &+ x(t) \sum_{k=1,\infty} \cos k(\Omega t + \varphi_0) \left(\sum_{j=k,\infty} \frac{\tilde{x}_{k,2j}^{(c)}}{\Omega^{2j}}\right) + \\ &+ v(t) \sum_{k=1,\infty} \sin k(\Omega t + \varphi_0) \left(\sum_{j=k,\infty} \frac{\tilde{x}_{k,2j+1}^{(s)}}{\Omega^{2j+1}}\right); \\ v_0(t) &= v(t)\left(1 + \sum_{k=2,\infty} \frac{\tilde{v}_{2k}^{(0)}}{\Omega^{2k}}\right) + \\ &+ x(t) \sum_{k=1,\infty} \sin k(\Omega t + \varphi_0) \left(\sum_{j=k,\infty} \frac{\tilde{v}_{k,2j-1}^{(s)}}{\Omega^{2j-1}}\right) + \\ &+ v_0(t) \sum_{k=1,\infty} \cos k(\Omega t + \varphi_0) \left(\sum_{j=k,\infty} \frac{\tilde{v}_{k,2j}^{(c)}}{\Omega^{2j}}\right). \end{aligned} \quad (21)$$

В частности, если подставить выражения (21) в соотношения (17) и объединить подобные члены, то можно с помощью системы рекуррентных алгебраических соотношений прямо выразить неизвестные коэффициенты $x_{k,2j}^{(c)}$, $x_{k,2j+1}^{(s)}$, $\tilde{x}_{2k}^{(0)}$, $v_{k,2j-1}^{(s)}$, $v_{k,2j}^{(c)}$, $\tilde{v}_{2k}^{(0)}$:

$$\begin{aligned} \tilde{v}_4^{(0)} &= \frac{3}{2}\widehat{V}^2, \tilde{v}_6^{(0)} = 10\widehat{U}\widehat{V}^2; \\ \tilde{x}_4^{(0)} &= \frac{3}{2}\widehat{V}^2, \tilde{x}_6^{(0)} = 10\widehat{U}\widehat{V}^2; \\ \tilde{v}_{1,1}^{(s)} &= \widehat{V}, \tilde{v}_{1,3}^{(s)} = 2\widehat{U}\widehat{V}, \tilde{v}_{1,5}^{(s)} = \widehat{V}\left(8\widehat{U}^2 + \frac{33}{16}\widehat{V}^2\right); \\ \tilde{v}_{1,2}^{(c)} &= \widehat{V}, \tilde{v}_{1,4}^{(c)} = 4\widehat{U}\widehat{V}, \\ \tilde{v}_{1,6}^{(c)} &= -\widehat{V}\left(16\widehat{U}^2 + \frac{49}{16}\widehat{V}^2\right); \\ \tilde{x}_{1,3}^{(s)} &= 2\widehat{V}, \tilde{x}_{1,5}^{(s)} = 8\widehat{U}\widehat{V}; \\ \tilde{x}_{1,2}^{(c)} &= -\widehat{V}, \tilde{x}_{1,4}^{(c)} = -4\widehat{U}\widehat{V}, \\ \tilde{x}_{1,6}^{(c)} &= -\widehat{V}\left(16\widehat{U}^2 + \frac{9}{4}\widehat{V}^2\right); \\ \tilde{v}_{2,3}^{(s)} &= \frac{1}{4}\widehat{V}^2, \tilde{v}_{2,5}^{(s)} = \frac{11}{8}\widehat{U}\widehat{V}^2, \tilde{v}_{2,4}^{(c)} = \frac{1}{8}\widehat{V}^2, \\ \tilde{v}_{2,6}^{(c)} &= \frac{7}{8}\widehat{U}\widehat{V}^2; \\ \tilde{x}_{2,5}^{(s)} &= \frac{3}{8}\widehat{V}^2, \tilde{x}_{2,4}^{(c)} = -\frac{5}{8}\widehat{V}^2, \tilde{x}_{2,6}^{(c)} = -\frac{23}{8}\widehat{U}\widehat{V}^2; \\ \tilde{v}_{3,5}^{(s)} &= \frac{1}{48}\widehat{V}^3, \tilde{v}_{3,6}^{(c)} = \frac{1}{144}\widehat{V}^3, \tilde{x}_{3,6}^{(c)} = -\frac{5}{72}\widehat{V}^3, \dots \end{aligned} \quad (22)$$

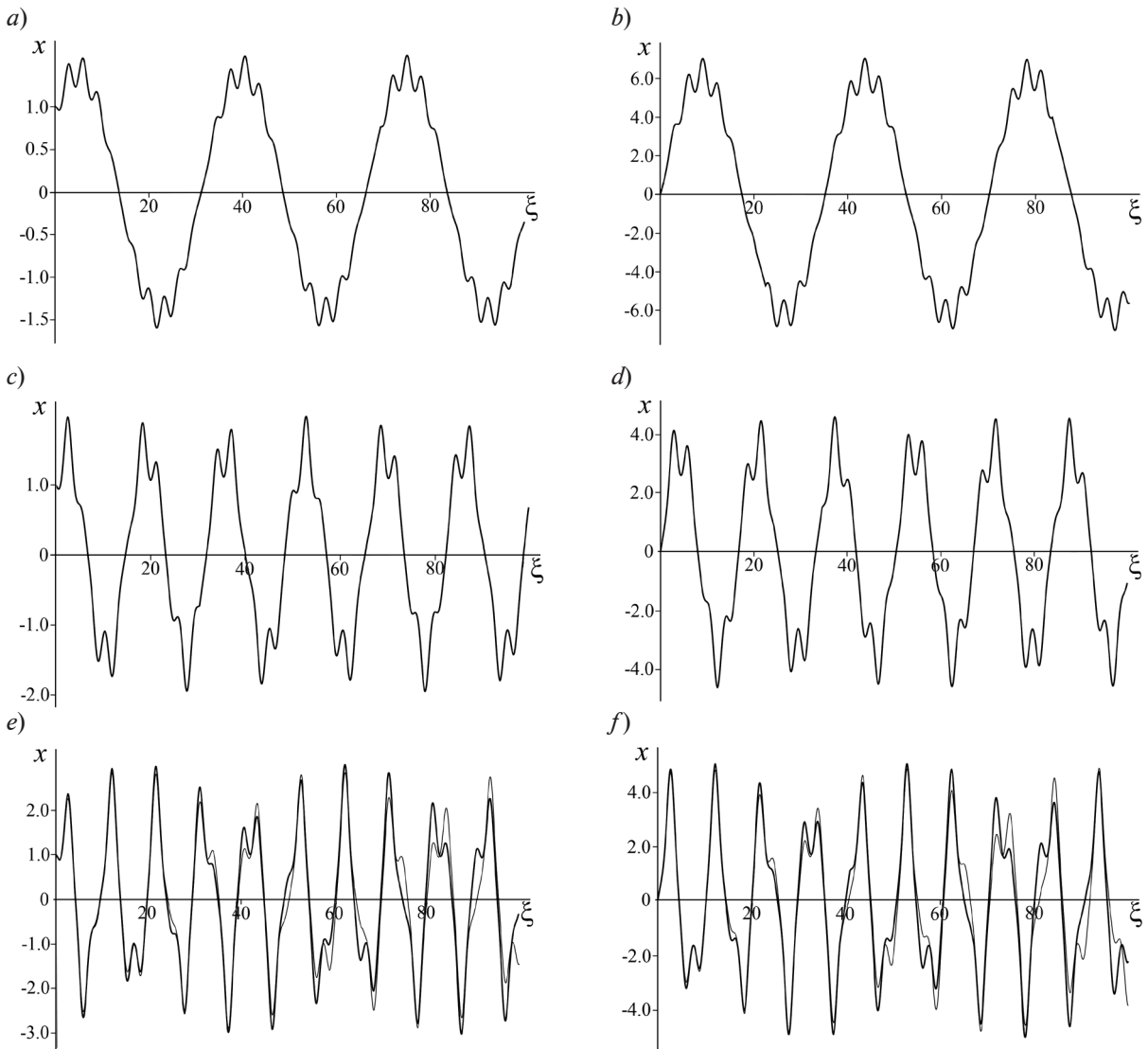


Рис. 2. Сравнение численно полученных траекторий уравнения (2) (тонкие линии) с приближенными траекториями, вычисленными с помощью псевдопотенциального разложения (17) – (22) с точностью до членов вида $1/\Omega^{14}$ (жирные линии).

Использованные значения параметров приведены в таблице. На рис. *a – d* тонкие и жирные линии налагаются друг на друга, поэтому они визуально не различимы (в отличие от графиков на рис. 1)

Для перехода от системы уравнений (16) к безразмерному уравнению используется подстановка

$$\hat{U} = a, \quad \hat{V} = 2q, \quad \Omega = 2.$$

На рис. 2 сравниваются приближенные решения, которые конструируются с помощью соотношений (17), (18), (20) и учитывают члены разложения вплоть до $1/\Omega^{14}$ с точными (численными) решениями системы уравнений (16). Как и следовало ожидать, при увеличении параметра q

(т. е. при приближении к дальней границе зоны устойчивости) точность стремительно ухудшается, так что полученные выше выражения пригодны лишь для умеренно больших q (точнее, лишь для умеренно больших секулярных частот $\beta \leq 0,62$). Расходимость при приближении к дальней границе зоны устойчивости, соответствующей секулярной частоте $\beta = 1$, вполне естественна, так как базовые предположения, на которых основано использование представления решений в форме (17), и вывод окончательных вы-

ражений не выполняются при условиях параметрического резонанса между собственными секулярными колебаниями ионов и вынужденными радиочастотными колебаниями. Последние обусловлены внешним воздействием со стороны радиочастотного электрического поля. Однако для диапазона секулярных частот $0 \leq \beta \leq 0,62$ вычисления траекторий ионов с помощью полученных приближенных формул оказываются достаточно точными.

Уравнение (19) дает улучшенный вариант приближенной формулы

$$\tilde{\beta}^2 \approx a + q^2/2$$

для частоты секулярных колебаний ионов, которая получается из классической теории псевдопотенциала:

$$\begin{aligned} \hat{\beta}^2(a, q) \approx & a + \frac{1}{2}q^2 + \frac{1}{2}aq^2 + \\ & + \left(\frac{1}{2}a^2q^2 + \frac{25}{128}q^4 \right) + \left(\frac{1}{2}a^3q^2 + \frac{273}{512}aq^4 \right) + (23) \\ & + \left(\frac{1}{2}a^4q^2 + \frac{2049}{2048}a^2q^4 + \frac{1169}{9216}q^6 \right) + \dots \end{aligned}$$

Неравенство $0 \leq \hat{\beta}^2 \leq 1$, а точнее пара неравенств

$$\beta_x^2 = \beta^2(a, q) \leq 1, \quad \beta_y^2 = \beta^2(-a, -q) \geq 0,$$

при $a \geq 0, q \geq 0$, может использоваться для

приближенного вычисления границ первой зоны устойчивости. При этом если неравенство $\beta_y^2 = \beta^2(-a, -q) \geq 0$ описывает ближнюю границу первой зоны устойчивости достаточно точно, то неравенство $\beta_x^2 = \beta^2(a, q) \leq 1$ описывает дальнюю границу первой зоны устойчивости в лучшем случае качественно.

Как следует из данных рис. 3, вблизи дальней границы первой зоны устойчивости ряд (23) расходится, поэтому по мере приближения к дальней границе первой зоны устойчивости получение разумной точности возможно лишь при использовании неимоверно большого числа членов ряда.

Заключение

В результате проведенного исследования показано, что для квадрупольных радиочастотных полей понятие псевдопотенциальной функции можно обобщить вполне конструктивным образом. Цель такого обобщения состоит в уменьшении рассогласования между точными и аналитическими решениями, получаемыми при анализе упрощенных моделей рассматриваемого объекта. При этом точные решения невозможно получить в аналитическом виде. Полученное алгебраическое выраже-

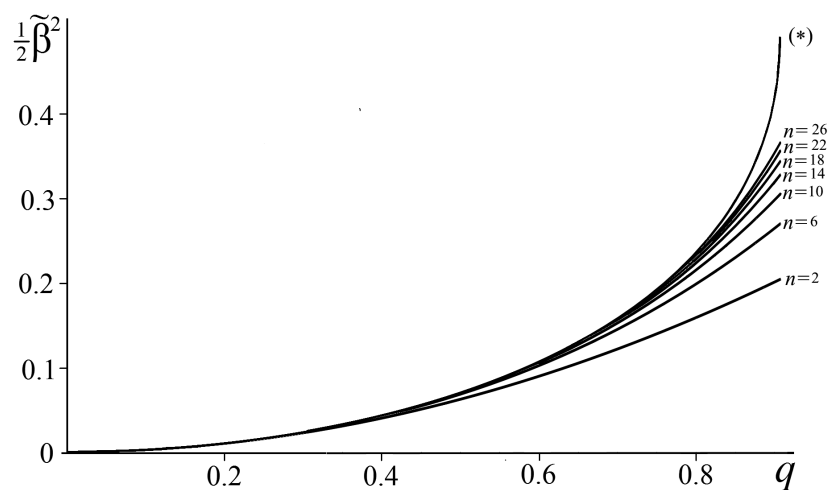


Рис. 3. Зависимость от q квадратичного коэффициента псевдопотенциальной (ПП) функции (23), вычисленного с помощью ПП-разложений (17) – (22) с разными порядками точности $1/\Omega^n$ для $n = 2 - 26$ в диапазоне $0 \leq q \leq 0,9080$ ($a = 0$). Кривая (*) соответствует функции для аналитически точного значения частоты секулярных колебаний (вычислена в соответствии с [21, 22, 31])



ние в виде усеченного псевдопотенциального ряда позволяет значительно расширить диапазон параметров радиочастотного поля. В таком диапазоне возможно не только качественное, но и количественное описание движения заряженных частиц в рамках традиционной псевдопотенциальной идеологии, для которой характерны идейная простота и физическая наглядность. Отметим, что такими преимуществами не обладают работы [21, 22].

К сожалению, расширенное таким образом понятие псевдопотенциала не слишком пригодно для описания движения заряженных частиц при приближении к области параметрического резонанса ($\beta \approx 1$), где движение заряженных частиц в квадрупольных радиочастотных полях теряет устойчивость. В этом случае предпочтительными оказываются точные, хотя и несколько громоздкие псевдопотенциальные модели [21, 22]. Для умеренно больших значений секулярных

частот, лежащих в диапазоне $0 \leq \beta \leq 0,62$, результаты оказываются вполне приемлемыми, тогда как для классической теории псевдопотенциала диапазон допустимых значений параметра β , обеспечивающих приемлемую точность вычислений, гораздо более скромный ($0 \leq \beta \leq 0,2$).

В случае больших значений секулярных частот рекомендуется пользоваться точной теорией квадратичного псевдопотенциала для квадрупольных радиочастотных полей [21, 22] вместо приближенных псевдопотенциальных разложений.

Благодарности

Авторы благодарны создателям, сотрудникам и спонсорам цифровой библиотеки Numdam [37] за возможность открытого доступа к раритетной публикации [23].

Данная работа выполнена в рамках государственного задания № 007-00229-18-00 для Института аналитического приборостроения РАН.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Курс теоретической физики. Т. 1. Механика. М.: Физматгиз, 1958. 208 с.
2. Гапонов В.А., Миллер М.А. О потенциальных ямах для заряженных частиц в высокочастотном поле // Журнал экспериментальной и технической физики. 1958. Т. 34. № 2. С. 242–243.
3. Миллер М.А. Движение заряженных частиц в высокочастотных электромагнитных полях // Известия вузов. Серия радиофизика. 1958. Т. 1. № 3. С. 110–123.
4. Литвак А.Г., Миллер М.А., Шолохов Н.В. Уточнение усредненного уравнения движения заряженных частиц в поле стоячей электромагнитной волны // Известия вузов. Серия радиофизика. 1962. Т. 5. № 6. С. 1160–1174.
5. Сивухин Д.В. Дрейфовая теория движения заряженной частицы в электромагнитных полях // В кн.: Вопросы теории плазмы. Вып.1. М.: Госатомиздат, 1963. С. 7–97.
6. Морозов А.И., Соловьев Л.С. Движение заряженной частицы в электромагнитных полях // В кн.: Вопросы теории плазмы. Вып.2. М.: Госатомиздат, 1963. С. 177–261.
7. Гейко В.И., Фрайман Г.М. О точности усредненного описания движения заряженных частиц в высокочастотных полях // Журнал экспериментальной и технической физики. 2008. Т. 134. № 6. С. 1125–1129.
8. Капица П.Л. Электроника больших мощностей // Успехи физических наук. 1962. Т. 78. № 2. С. 181–265.
9. Чирков А.Г. Асимптотическая теория взаимодействия заряженных частиц и квантовых систем с внешними электромагнитными полями. Санкт-Петербург, Изд-во Санкт-Петербургского государственного технического университета, 2001. 257 с.
10. Заславский Г.М., Сагдеев Р.З. Введение в нелинейную физику. От маятника до турбулентности и хаоса. М.: Наука, 1988. 368 с.
11. Gerlich D. Inhomogeneous RF fields: a versatile tool for the study of processes with slow ions. // C.-Y. Ng, M. Baer (Eds.), State-selected and state-to-state ion-molecule reaction dynamics. Part 1: Experiment, advances in chemical physics series. Vol. LXXXII. New York: John Wiley & Sons Inc., 1992. Pp. 1–176.
12. Yavor M.I. Optics of charged particle analyzers. Amsterdam: Academic Press, 2009. 373 p.
13. Слободенюк Г.И. Квадрупольные масс-спектрометры. М.: Атомиздат, 1974. 272 с.
14. Dawson P.H. Quadrupole mass spectrometry and its applications. Woodbury: American Institute of Physics, 1995. 372 p.
15. March R.E., Todd J.F. Quadrupole ion trap mass spectrometry. Ser. "Chemical Analysis". Vol. 165. 2nd edition. Hoboken, New Jersey: John Wiley and Sons, 2005. 346 p.

16. Major F.G., Gheorghe V.N., Werth G. Charged particle traps. Physics and techniques of charged particle field confinement. Berlin, Heidelberg, New York: Springer-Verlag, 2005. 297 p.

17. Werth G., Gheorghe V.N., Major F.G. Charged particle traps II. Applications. Berlin, Heidelberg: Springer-Verlag, 2009. 256 p.

18. Судаков М.Ю., Апацкая М.В. Концепция эффективного потенциала для описания движения ионов в квадрупольном фильтре масс // Журнал экспериментальной и теоретической физики. 2012. Т. 142. Вып. 2 (8). С. 222–229.

19. Судаков М.Ю., Мамонтов Е.В. Исследование квадрупольного фильтра масс с квадрупольным возбуждением методом уравнения огибающей // Журнал технической физики. 2016. Т. 86. Вып. 11. С. 112–120.

20. Sudakov M. Nonlinear equations of the ion vibration envelope in quadrupole mass filters with cylindrical rods // International Journal of Mass Spectrometry. 2017. Vol. 422. Pp. 62–73.

21. Douglas D.J., Berdnikov A.S., Konenkov N.V. The effective potential for ion motion in a radio frequency quadrupole field revisited // International Journal of Mass Spectrometry. 2015. Vol. 377. Pp. 345–354.

22. Berdnikov A.S., Douglas D.J., Konenkov N.V. The pseudopotential for quadrupole fields up to $q = 0.9080$ // International Journal of Mass Spectrometry. 2017. Vol. 421. Pp. 204–223.

23. Floquet G. Sur les equations différentielles linéaires à coefficients périodiques // Annales scientifiques de l'École Normale Supérieure. 2e série. 1883. Т. 12. Pp. 47–88.

24. Бондаренко Г.В. Уравнение Хилла и его применение в области технических колебаний. М.-Л.: Изд-во АН СССР, 1936. 51 с.

25. Мак-Лахлан Н.В. Теория и приложения функций Матрё. М.: Изд-во иностранной литературы, 1953. 476 с.

26. Еругин Н.П. Метод Лаппо-Данилевского в теории линейных дифференциальных уравнений. Ленинград: Изд-во ЛГУ, 1956. 106 с.

27. Еругин Н.П. Линейные системы обыкновенных дифференциальных уравнений с периодическими и квазипериодическими коэффициентами. Минск: Изд-во АН БССР, 1963. 270 с.

28. Гантмахер Ф.Р. Теория матриц. Изд. 2-е, доп. М.: Наука, 1966. 576 с.

29. Демидович Б.П. Лекции по математической теории устойчивости. М.: Наука, 1967. 472 с.

30. Якубович В.А., Старжинский В.М. Линейные дифференциальные уравнения с периодическими коэффициентами и их приложения. М.: Наука, 1972. 718 с.

31. Konenkov N.V., Sudakov M., Douglas D.J. Matrix methods to calculate stability diagrams in quadrupole mass spectrometry // Journal of American Society for Mass Spectrometry. 2002. Vol. 13. No. 6. Pp. 597–613.

32. Berdnikov A.S. A pseudopotential description of the motion of charged particles in RF fields // Microscopy and Microanalysis. 2015. Vol. 21. No. S4. Pp. 78–83.

33. Буляница А.Л., Курочкин В.Е. Исследование процессов упорядочивания в открытых системах // Научное приборостроение. 2000. Т. 10. № 2. С. 43–49.

34. Буляница А.Л., Курочкин В.Е., Бурылов Д.А. Реализация процедуры оценивания постоянного сигнала на основе метода стохастической аппроксимации в модификации Я.З. Цыпкина // Радиотехника и электроника. 2002. Т. 47. № 3. С. 343–346.

35. Евстапов А.А., Буляница А.Л., Рудницкая Г.Е., Бельский Б.Г., Петряков А.О., Курочкин В.Е. Особенности применения алгоритмов цифровой фильтрации // Научное приборостроение. 2003. Т. 13. № 2. С. 57–63.

36. Буляница А.Л. Математическое моделирование в микрофлюидике: основные положения // Научное приборостроение. 2005. Т. 15. № 2. С. 51–66.

37. Numdam, the French digital mathematics library. URL: <http://www.numdam.org/>.

Статья поступила в редакцию 18.07.2018, принята к публикации 26.07.2018.

СВЕДЕНИЯ ОБ АВТОРАХ

БЕРДНИКОВ Александр Сергеевич — доктор физико-математических наук, ведущий научный сотрудник ФГБУ науки «Институт аналитического приборостроения Российской академии наук», Санкт-Петербург, Российская Федерация.

190103, Российская Федерация, г. Санкт-Петербург, ИАП РАН, Рижский пр., 26
asberd@yandex.ru

ГАЛЛЬ Лидия Николаевна — доктор физико-математических наук, главный научный сотрудник ФГБУ науки «Институт аналитического приборостроения Российской академии наук», Санкт-Петербург, Российская Федерация.

190103, Российская Федерация, г. Санкт-Петербург, ИАП РАН, Рижский пр., 26
lngall@yandex.ru

ГАЛЛЬ Николай Ростиславович — доктор физико-математических наук, ведущий научный сотрудник ФГБУ науки «Институт аналитического приборостроения Российской академии наук», Санкт-Петербург, Российская Федерация.

190103, Российская Федерация, г. Санкт-Петербург, ИАП РАН, Рижский пр., 26
gall@ms.ioffe.ru

СОЛОВЬЕВ Константин Вячеславович — кандидат физико-математических наук, доцент Института физики, нанотехнологий и телекоммуникаций, Санкт-Петербургского политехнического университета Петра Великого, Санкт-Петербург, Российская Федерация.

195251, Российская Федерация, г. Санкт-Петербург, Политехническая ул., 29
k-solovyev@mail.ru

REFERENCES

- [1] **L.D. Landau, E.M. Lifshitz**, *Mechanics*, 2nd ed., Course of theoretical physics, Vol. 1, Pergamon Press, 1969.
- [2] **V.A. Gaponov, M.A. Miller**, Potential wells for charged particles in a high frequency electromagnetic field, *Journal of Experimental and Theoretical Physics*. 7(2) (1958) 242–243.
- [3] **M.A. Miller**, Dvizheniye zaryazhennykh chastits v vysokochastotnykh elektromagnitnykh polyakh [The motion of charged particles in the high-frequency electromagnetic fields], *Radiophysics and Quantum Electronics*. 1 (3) (1958) 110–123.
- [4] **A.G. Litvak, M.A. Miller, N.V. Sholokhov**, Utochneniye usrednennogo uravneniya dvizheniya zaryazhennykh chastits v pole stoyachey elektromagnitnoy volny [The refinement of the averaged equation of the motion of charged particles in the field of a standing electromagnetic wave], *Radiophysics and Quantum Electronics*. 5 (6) (1962) 1160–1174.
- [5] **D.V. Sivukhin**, Dreyfovaya teoriya dvizheniya zaryazhennoy chastitsy v elektromagnitnykh polyakh, V kn.: *Voprosy teorii plazmy* [Drift theory of charged particle motion in the electromagnetic fields, In a book “Plazma theory problems”], Iss. 1, Gosatomizdat, Moscow, 1963, Pp. 7–97.
- [6] **A.I. Morozov, L.S. Solovyev**, Dvizheniye zaryazhennoy chastitsy v elektromagnitnykh polyakh, V kn.: *Voprosy teorii plazmy*, [Charged particle motion in the electromagnetic fields, In a book “Plazma theory problems”], Iss. 2, Gosatomizdat, Moscow, 1963, Pp. 177–261.
- [7] **V.I. Geyko, G.M. Fraiman**, Accuracy of the averaged particles in high-frequency fields, *Journal of Experimental and Theoretical Physics*. 107 (6) (2008) 960–964.
- [8] **P.L. Kapitza**, *High power electronics*, Soviet Physics Uspekhi. 5 (5) (1963) 777–826.
- [9] **A.G. Chirkov**, Asimptoticheskaya teoriya vzaimodeystviya zaryazhennykh chastits i kvantovykh sistem s vneshnimi elektromagnitnymi polyami [Asymptotic theory of interaction of charged particles and quantum systems with external electromagnetic fields], St. Petersburg State Polytechnic University, St. Petersburg, 2001.
- [10] **R.Z. Sagdeev, D.A. Usikov, G.M. Zaslavsky**, *Nonlinear physics: from the pendulum to turbulence and chaos* (Ser. “Contemporary Concepts in Physics”, Vol. 4), Harwood Academic Publishers, Chur, London, Paris, New York, Melbourne, 1988.
- [11] **D. Gerlich**, Inhomogeneous RF fields: a versatile tool for the study of processes with slow ions, In: *State-selected and state-to-state ion-molecule reaction dynamics. Part 1: Experiment, advances in chemical physics series*, C.-Y. Ng, M. Baer (Eds.), Vol. LXXXII, John Wiley & Sons Inc., New York, 1992, Pp. 1–176.
- [12] **M.I. Yavor**, *Optics of charged particle analyzers*, Academic Press, Amsterdam, 2009.
- [13] **G.I. Slobodenyuk**, *Kvadrupolnyye mass spektrometriya* [Quadrupole mass spectrometers], Atomizdat, Moscow, 1974.
- [14] **P.H. Dawson**, *Quadrupole mass spectrometry and its applications*, American Institute of Physics, Woodbury, 1995.
- [15] **R.E. March, J.F. Todd**, *Quadrupole ion trap mass spectrometry*, Ser. “Chemical Analysis”, Vol. 165, 2nd Ed., John Wiley and Sons, Hoboken, New Jersey, 2005.
- [16] **F.G. Major, V.N. Gheorghe, G. Werth**, *Charged particle traps. Physics and techniques of charged particle field confinement*, Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, New York, 2005.
- [17] **G. Werth, V.N. Gheorghe, F.G. Major**, *Charged particle traps II, Applications*, Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, 2009.
- [18] **M.Yu. Sudakov, M.V. Apatskaya**, Concept of the effective potential in describing the motion of ions in a quadrupole mass filter, *Journal of Experimental and Theoretical Physics*. 115 (2) (2012) 194–200.
- [19] **M.Y. Sudakov, E.V. Mamontov**, Analysis of the quadrupole mass filter with quadrupole excitation by the envelope equation method, *Technical Physics*. 2016. 61 (11) (2016) 1715–1723.
- [20] **M. Sudakov**, Nonlinear equations of the ion vibration envelope in quadrupole mass filters with cylindrical rods, *International Journal of Mass*

Spectrometry. 422 (2017) 62–73.

[21] **D.J. Douglas., A.S. Berdnikov, N.V. Konenkov**, The effective potential for ion motion in a radio frequency quadrupole field revisited, *International Journal of Mass Spectrometry*. 377 (2015) 345–354.

[22] **A.S. Berdnikov, D.J. Douglas, N.V. Konenkov**, The pseudopotential for quadrupole fields up to $q = 0.9080$, *International Journal of Mass Spectrometry*. 421 (2017) 204–223.

[23] **G. Floquet**, Sur les equations différentielles linéaires à coefficients périodiques, *Annales scientifiques de l'École Normale Supérieure*, 2e série. 12 (1883) 47–88.

[24] **G.V. Bondarenko**, *Uravneniye Khilla i yego primeneniye v oblasti tekhnicheskikh kolebaniy* [The Hill equation and its application in the technical oscillation region], SA USSR, Moscow, Leningrad, 1936.

[25] **N.W. McLachlan**, *Theory and application of Mathieu functions*, Oxford Univ. Press, Oxford, 1947.

[26] **N.P. Erugin**, *Lappo-Danilevskiy metod in the theory of differential equations*, Leningrad University Press, Leningrad, 1956.

[27] **N.P. Erugin**, *Linear systems of ordinary differential equations with periodic and quasi-periodic coefficients*, Academic Press, New York, 1966.

[28] **F.R. Gantmacher**, *The theory of matrices*, Chelsea Pub. Co., USA, 1960.

[29] **B.P. Demidovich**, *Lektsii po matematicheskoy teorii ustoychivosti* [The course of lectures on the mathematical theory of stability], Moscow, Nauka, 1967.

[30] **V.A. Jakubovich, V.H. Starzhinskij**, *Linear differential equations with periodic coefficients*, Wiley, New York, 1975.

[31] **N.V. Konenkov, M. Sudakov, D.J. Douglas**, Matrix methods to calculate stability diagrams in quadrupole mass spectrometry, *Journal of American Society for Mass Spectrometry*. 13 (6) (2002) 597–613.

[32] **A.S. Berdnikov**, A pseudopotential description of the motion of charged particles in RF fields, *Microscopy and Microanalysis*. 21 (S4) (2015) 78–83.

[33] **A.L. Bulyanitsa, V.E. Kurochkin**, Studying ordering processes in open systems (on the example of pattern evolution in colonies of imperfect mycelial fungi), *Nauchnoye priborostroyeniye*. 10 (2) (2000) 43–49.

[34] **A.L. Bulyanitsa, V.E. Kurochkin, D.A. Burylov**, Implementation of the constant signal estimation procedure based on Tsympkin's modification of the stochastic approximation method, *Journal of Communications Technology and Electronics*. 47 (3) (2002) 307–309.

[35] **A.A. Evstrapov, A.L. Bulyanitsa, G.E. Rudnitskaya, et al.**, Characteristic features of digital signal filtering algorithms as applied to electrophoresis on a microchip, *Nauchnoye priborostroyeniye*. 13 (2) (2003) 57–63.

[36] **A.L. Bulyanitsa**, Mathematical modeling in microfluidics: basic concepts, *Nauchnoye priborostroyeniye*. 15 (2) (2005) 51–66.

[37] Numdam, the French digital mathematics library, URL: <http://www.numdam.org/>.

Received 18.07.2018, accepted 26.07.2018.

THE AUTHORS

BERDNIKOV Alexander S.

Institute for Analytical Instrumentation of the Russian Academy of Sciences
26 Rizhsky Ave., St. Petersburg, 190103, Russian Federation
asberd@yandex.ru

GALL Lidiya N.

Institute for Analytical Instrumentation of the Russian Academy of Sciences
26 Rizhsky Ave., St. Petersburg, 190103, Russian Federation
lngall@yandex.ru

GALL Nikolay R.

Institute for Analytical Instrumentation of the Russian Academy of Sciences
26 Rizhsky Ave., St. Petersburg, 190103, Russian Federation
gall@ms.ioffe.ru

SOLOVYEV Konstantin V.

Peter the Great St. Petersburg Polytechnic University
29 Politechnicheskaya St., St. Petersburg, 195251, Russian Federation
k-solovyev@mail.ru