

DOI: 10.18721/JPM.14105
УДК 532.542.4

ЧИСЛЕННОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ СТРУКТУРЫ И ЛОКАЛЬНОЙ ТУРБУЛИЗАЦИИ ТЕЧЕНИЯ В КРОВЕНОСНОМ СОСУДЕ С ОДНОСТОРОННИМ СТЕНОЗОМ

Я.А. Гатаулин, Е.М. Смирнов

Санкт-Петербургский политехнический университет Петра Великого,
Санкт-Петербург, Российская Федерация

В статье представлены результаты расчетов течения в модели кровеносного сосуда с односторонним стенозом 70 % при числе Рейнольдса, равном 1803. Численное решение получено методом моделирования крупных вихрей по динамической модели Джермано – Лилли для оценки подсеточной вязкости. Установлено, что непосредственно за стенозом в потоке выделяются 2 зоны: струйного течения и обширная рециркуляционная, а в каждой присутствует пара вихрей вторичного течения. Неустойчивости слоя смешения на границе струи и зоны обратного течения инициируют турбулизацию потока с образованием разномасштабных вихревых структур. Последние заполняют все поперечное сечение сосуда в окрестности точки присоединения. Турбулентные напряжения значительны по величине лишь на участке длиной около четырех калибров. Вниз по потоку течение реламинаризируется.

Ключевые слова: кровоток, стеноз, турбулентность, численное моделирование, метод моделирования крупных вихрей

Ссылка при цитировании: Гатаулин Я.А., Смирнов Е.М. Численное исследование структуры и локальной турбулизации течения в кровеносном сосуде с односторонним стенозом // Научно-технические ведомости СПбГПУ. Физико-математические науки. 2021. Т. 14. № 1. С. 72–84. DOI: 10.18721/JPM.14105

Статья открытого доступа, распространяемая по лицензии CC BY-NC 4.0 (<https://creativecommons.org/licenses/by-nc/4.0/>)

A FLOW IN THE BLOOD VESSEL WITH A ONE-SIDE STENOSIS: NUMERICAL STUDY OF THE STRUCTURE AND LOCAL TURBULIZATION

Ya.A. Gataulin, E.M. Smirnov

Peter the Great St. Petersburg Polytechnic University,
St. Petersburg, Russian Federation

In the paper, the LES results of a flow by using a model of the blood vessel with a one-side 70% stenosis, at a Reynolds number of 1803, have been presented. The Germano – Lilly model was applied to subgrid viscosity evaluation. A jet-like zone and a recirculation one were found to stand out just behind the stenosis, and a pair of secondary-flow vortices forms being within each of them. Instabilities of the mixing layer initiated the flow turbulence with formation of vortex structures of different scales at the boundary between the reverse flow zone and the jet. These structures filled the whole cross-section of the vessel about the flow attachment point. Turbulent shear stresses were significant in magnitude only at a flow section of about four-caliber length. Further downstream, the flow relaminarised.

Keywords: blood flow, stenosis, turbulence, numerical simulation, large eddy simulation

Citation: Gataulin Ya.A., Smirnov E.M., A flow in the blood vessel with a one-side stenosis: numerical study of the structure and local turbulization, St. Petersburg Polytechnical State University Journal. Physics and Mathematics. 14 (1) (2021) 72–84. DOI: 10.18721/JPM.14105

This is an open access article under the CC BY-NC 4.0 license (<https://creativecommons.org/licenses/by-nc/4.0/>)

Введение

Современная вычислительная гидродинамика (Computational Fluid Dynamics, CFD) предоставляет широчайшие возможности для расчета кровотока в различных участках сосудистого русла. В мелких и средних сосудах, где значения числа Рейнольдса Re не превосходят 1000, реализуется ламинарный режим течения. Пространственная структура ламинарного потока в моделях сонной артерии, включающих случай сосуда со стенозом (стойкое сужение его просвета), составляла предмет ряда предыдущих исследований авторов данной работы [1 – 3]. Однако поток за стенозом в крупных кровеносных сосудах характеризуется большими значениями числа Рейнольдса и представляет особую сложность для расчета. Течение за стенозом в таких сосудах фактически оказывается циклически переходным, так как на части сердечного цикла оно является локально турбулентным, в остальное время цикла — полностью ламинарным. Оработка подходов к моделированию локально возникающей турбулентности служит ключом к получению достаточно надежных предсказаний.

Традиционно для расчета турбулентных течений в стенозах используются модели, построенные на основе уравнений Навье – Стокса, осредненных по Рейнольдсу (Reynolds-Averaged Navier – Stokes equations, RANS) [4 – 7]. Было установлено, что RANS-модели способны обеспечивать хорошую согласованность расчетного поля осредненной скорости с данными измерений, однако качество предсказания ряда характеристик турбулентности, также интересных с биомедицинской точки зрения, оказывается очень низким.

В целях повышения качества численного анализа турбулентных течений в сосудах со стенозом, в последние годы все шире применяется прямое численное моделирование (Direct Numerical Simulation, DNS) [8 – 11]

и вихреразрешающие модели, к которым относится, прежде всего, метод моделирования крупных вихрей (Large Eddy Simulation, LES) [12 – 15]. В методе DNS все составляющие нестационарного вихревого движения разрешаются полностью, что предопределяет высокие вычислительные затраты на получение численного решения, которые быстро увеличиваются с ростом числа Рейнольдса. В существенно менее затратном методе LES численно воспроизводятся лишь достаточно крупные вихри, для которых характерен энергоперенос, в то время как вихри меньшего масштаба моделируются с помощью подсеточных моделей (SubGrid-Scale models, SGS).

Большинство прикладных расчетов по методу LES проводится с применением классической модели Смагоринского, вводящей подсеточную турбулентную вязкость. Эта модель была разработана в предположении достаточной развитости турбулентности, что для практических приложений сводится к условию существенного превышения значений подсеточной вязкости, по сравнению с молекулярной. Для течений с переходным характером движения (от ламинарного к турбулентному), применение модели Смагоринского с постоянным значением эмпирической постоянной (коэффициента) C_S в формуле для расчета подсеточной вязкости, является неправомерным.

Для расширения возможностей алгебраической модели Смагоринского, в том числе и на случай переходных течений, в работе М. Джермано и др. [16] была разработана так называемая динамическая модель, в которой коэффициент C_S не задается, а вычисляется на основе выражения, полученного посредством приложения процедуры двойной фильтрации поля скорости. Несколько позднее Д.К. Лилли [17] предложил важную для практических приложений модификацию динамической модели, которая заклю-

чается в обрезании локально возникающих отрицательных значений коэффициента C_S по уровню нулевого значения. В работе [14] динамическую модель Джермано – Лилли успешно применили для LES-расчетов переходных режимов статистически двумерного пульсирующего течения в канале с местным односторонним сужением (модель стеноза) на 50 %; пиковые значения числа Рейнольдса достигали 2000, по третьему направлению накладывались условия периодичности.

В настоящей работе численно исследуется переходное трехмерное течение несжимаемой вязкой жидкости в модели кровеносного сосуда с односторонним стенозом 70 % при постоянном расходе, соответствующем значению числа Рейнольдса $Re = 1803$.

Геометрия стеноза тождественна одному из вариантов, представленных в недавней экспериментальной работе [18], в которой методом цифровой трассерной визуализации (Particle Image Velocimetry, PIV) исследовалось течение с пульсирующим расходом (при пиковом значении $Re = 1803$). Расчеты с использованием программного пакета вычислительной гидродинамики ANSYS CFX 18.2 выполнены на основе метода моделирования

крупных вихрей с динамической моделью Джермано – Лилли для расчета подсеточной вязкости.

Постановка задачи и вычислительные аспекты

Геометрическая модель сосуда с односторонним стенозом (рис. 1) заимствована из экспериментальной работы [18]. За границами стеноза сосуд представляет собой трубку диаметром D . Введем декартову систему координат x, y, z , начало координат которой расположено в сечении с минимальным проходным отверстием; ось z направлена вдоль сосуда, а ось y – в сторону нестенозированной (условно, верхней) стенки. Геометрия стеноза, симметричного относительно центральной продольной плоскости $x = 0$, описывается следующими формулами:

$$\frac{d(z)}{D} = \left(1 - \frac{S}{200}\right) - \frac{S}{200} \cos\left(\frac{2z\pi}{L}\right),$$

$$-\frac{L}{2} \leq z \leq \frac{L}{2};$$

$$\frac{c(z)}{D} = 1 - \frac{d(z)}{2D}, \quad -\frac{L}{2} \leq z \leq \frac{L}{2},$$

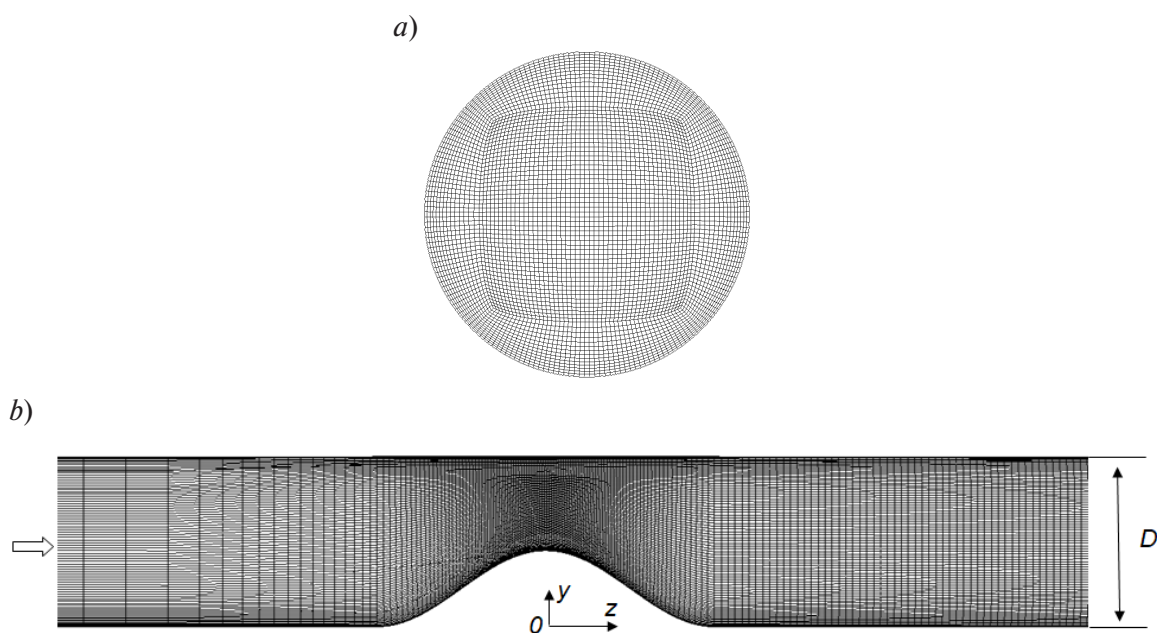


Рис. 1. Вид расчетной сетки в поперечном (а) и продольном (б) сечениях сосуда со стенозом

где d – локальный диаметр отверстия на участке стеноза, L – протяженность стеноза, c – координата центра проходного отверстия по оси y при принятом здесь и далее отсчете от нижней стенки,

$$S = (1 - d_{\min}/D) \cdot 100 \%$$

(d_{\min} – минимальный локальный диаметр d).

В рассматриваемом случае $S = 45 \%$, $L = 2D$, при этом площадь минимального проходного сечения на стенозированном участке составляет $30,25 \%$ от площади поперечного сечения трубки за пределами стеноза, т. е. рассматривается случай стеноза $69,75 \%$ (округленно, 70%).

Течение в данной модели кровеносного сосуда при $Re = 1803$ рассчитывалось по методу моделирования крупных вихрей с применением динамической модели Джермано – Лилли [16, 17]. Расчетная область включала участок стеноза, входной участок протяженностью $5D$ и выходной участок протяженностью $20D$; последний достаточен для того чтобы выходное граничное условие не оказывало сколько-нибудь существенного влияния на течение вблизи стеноза.

Расчеты выполнялись по гидродинамическому «конечно-объемному» коду общего назначения ANSYS CFX, версия 18.2. Данное программное средство оперирует размерными величинами.

Набор определяющих размерных параметров задачи представлен в таблице. Число

Рейнольдса рассчитано по данным параметрам.

На входе в расчетную область задавалось параболическое распределение скорости, отвечающее решению Пуазейля для развитого ламинарного течения в круглой трубе, на выходе – постоянное давление и «мягкие» условия для скорости. На стенках ставилось условие прилипания.

С использованием программы ICEM CFD была построена блочная расчетная гексаэдрическая сетка типа *O-grid* (см. рис. 1). На участке со стенозом и на всем выходном участке продольный шаг сетки был равномерным и составлял $0,04D$, при этом максимальный поперечный шаг составлял $0,02D$. На входном участке продольный шаг сетки плавно уменьшался до $0,04D$ при подходе к участку со стенозом. Общее число элементов сетки составляло около $4,5$ млн.

При вычислениях для аппроксимации конвективных слагаемых уравнений движения использовалась центральная схема второго порядка точности. Для продвижения по физическому времени применялась трехслойная схема Эйлера. Шаг по времени составлял $0,0002$ с, что обеспечивало локальные значения числа Куранта меньше единицы во всей расчетной области.

Выборка, использованная для получения осредненных характеристик потока, накапливалась на протяжении времени $1050t_s$, где t_s – временной масштаб задачи ($t_s = D/V_b$); предшествующий временной интервал, ох-

Расчетные параметры и их значения

Таблица

Параметр	Обозначение	Единица измерения	Значение
Диаметр сосуда (вне стеноза)	D	мм	10
Среднерасходная скорость (вне стеноза)	V_b	м/с	0,627
Плотность жидкости	ρ	кг/м ³	1000
Динамический коэффициент вязкости	μ	Па·с	0,003478
Число Рейнольдса	$Re = \rho V_b D / \mu$		1803

ватывающий около $600t_s$, был достаточен для выхода на статистически установившийся режим течения, при старте с нулевого поля скорости.

Расчеты проводились на кластере «Политехник – РСК Торнадо» суперкомпьютерного центра «Политехнический» (<http://www.scc.spbstu.ru>). Задача считалась на 18 двухпроцессорных узлах (Intel(R) Xeon(R) E5 2697v3) и распараллеливалась на 450 ядер, при этом для полного расчета требовалось около недели реального времени (76 000 ядрочасов).

Результаты и их обсуждение

Особенность моделируемого течения заключается в наличии ламинарно-турбулентного перехода в области за стенозом. Чтобы проиллюстрировать эту особенность, на рис. 2,*a* построена изоповерхность Q -критерия [19], которая раскрашена по локальным значениям модуля скорости; тем самым визуализируется область существования разномасштабных турбулентных вихревых структур, которые возникают в результате проявления гидродинамических неустойчивостей. Последние присущи формирующемуся сдвиговому течению струйного характера.

На рис. 2 представлены также две изоповерхности продольной составляющей скорости

осредненной по времени. Первая из них (см. рис. 2,*b*), построенная для значения $V_z = 3,2V_b = 2$ м/с, дает представление о размерах области с выраженным струйным характером течения, а вторая (рис. 2,*c*), отвечающая значению $V_z = -0,002V_b$, показывает наличие за стенозом двух зон рециркуляционного течения: весьма обширной (ее протяженность составляет около $5D$) зоны, возникающей непосредственно за стенозом, и очень небольшой, расположенной у противоположной стенки на расстоянии около $4D$ от центра стеноза. Перед стенозом также формируется небольшая отрывная зона.

Поля осредненных по времени составляющих скорости в трех поперечных сечениях модели сосуда приведены на рис. 3. Видно, что сформировавшаяся в области стеноза струя с относительно высокими локальными скоростями, до четырех раз превышающими среднерасходную скорость $V_b = 0,627$ м/с за пределами стеноза, характеризуется также наличием существенного по интенсивности поперечного (вторичного) течения в виде парного вихря (см. рис. 3,*a*). Фактически, эта пара вихрей, аналогичных вихрям Дина в криволинейных трубах, образуется в передней части стеноза, где течение происходит по криволинейным линиям тока, соответ-

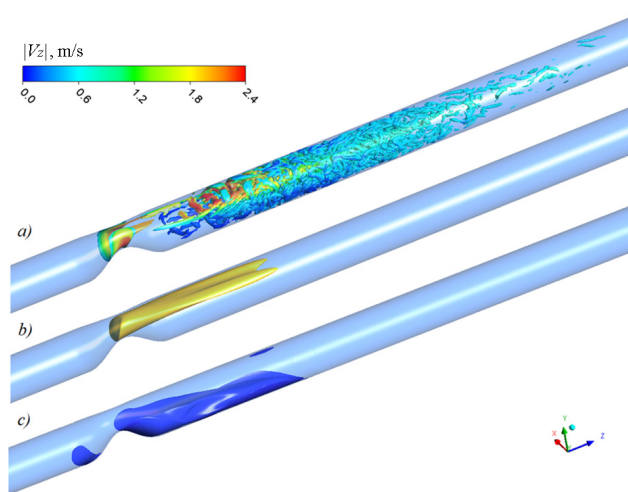


Рис. 2. Структуры течения в сосуде со стенозом, визуализированные через построения изоповерхности Q -критерия ($Q = 0,06 \text{ с}^{-2}$) (a) и двух изоповерхностей осредненной продольной скорости V_z со значениями $3,2V_b$ (b) и $-0,002V_b$ (c)

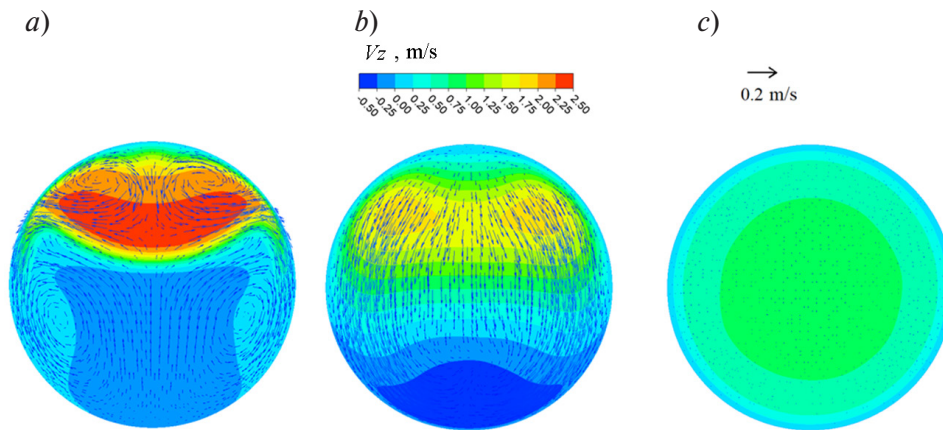


Рис. 3. Осредненное по времени поле продольной составляющей скорости с наложенным на него полем векторов поперечной скорости в трех сечениях модели сосуда: $z/D = 2$ (a), 4 (b), 10 (c)

ственно геометрии стеноза. Парный вихрь, возникший в стенозе, индуцирует, в свою очередь, вторичное течение (противоположной циркуляции) в зоне обратного течения за стенозом, а также приводит к раздвоению струи вниз по потоку (см. рис. 2, b и 3, b). На расстоянии менее $10D$ от центра стеноза осредненное поперечное течение практически полностью вырождается и распределение осредненной продольной скорости вновь приобретает осесимметричный «трубный» вид, с максимумом скорости в центре сосуда (см. рис. 3, c).

Поле осредненной продольной скорости в центральном продольном сечении (в плоскости симметрии) приведено на рис. 4, a. Здесь, а также на рис. 3, b, видно, что максимальная скорость обратного сечения в основной рециркуляционной зоне сопоставима по величине со среднерасходной скоростью V_b за пределами стеноза.

На границе струи и рециркуляционной зоны формируется высокоградиентный сдвиговый слой (слой смешения), с присущими ему явлениями, обусловленными неустойчивостью Кельвина – Гельмгольца. Визуализация мгновенного поля x -компоненты вектора завихренности (рис. 4, b), показывает, что неустойчивость Кельвина – Гельмгольца и другие гидродинамические неустойчивости, которые проявляются в условиях наличия обратного течения и вторичных токов, приводят

к турбулизации течения, с образованием разномасштабных трехмерных вихревых структур. В окрестности точки присоединения эти структуры заполняют все поперечное сечение сосуда. Однако далее, вниз по потоку, течение реламинизируется. Как можно видеть на рис. 2, a и 4, b, по мере удаления от стеноза в спектре пульсационного движения быстро исчезают мелкомасштабные структуры, а оставшиеся вихревые структуры меньшей интенсивности вытягиваются вдоль потока.

На рис. 4, c приведено поле значений одной из компонент тензора напряжений Рейнольдса, рассчитанного по численно разрешаемым составляющим пульсационного движения (помечены штрихом; черта сверху обозначает осреднение по времени). Видно, что сдвиговое турбулентное напряжение

$R_{yz} = -\overline{V'_y V'_z}$, оказывающее определяющее влияние на отбор кинетической энергии из основного потока, значительно по величине лишь на нескольких калибрах в окрестности точки присоединения, а именно при $2,5 < z/D < 6,5$. Это находится в согласии с данными измерений, приведенными в [18] для скорости генерации кинетической энергии турбулентности в момент наибольшего расхода.

Представление об уровне подсеточной кинематической вязкости, предсказываемом в настоящих расчетах динамической моделью

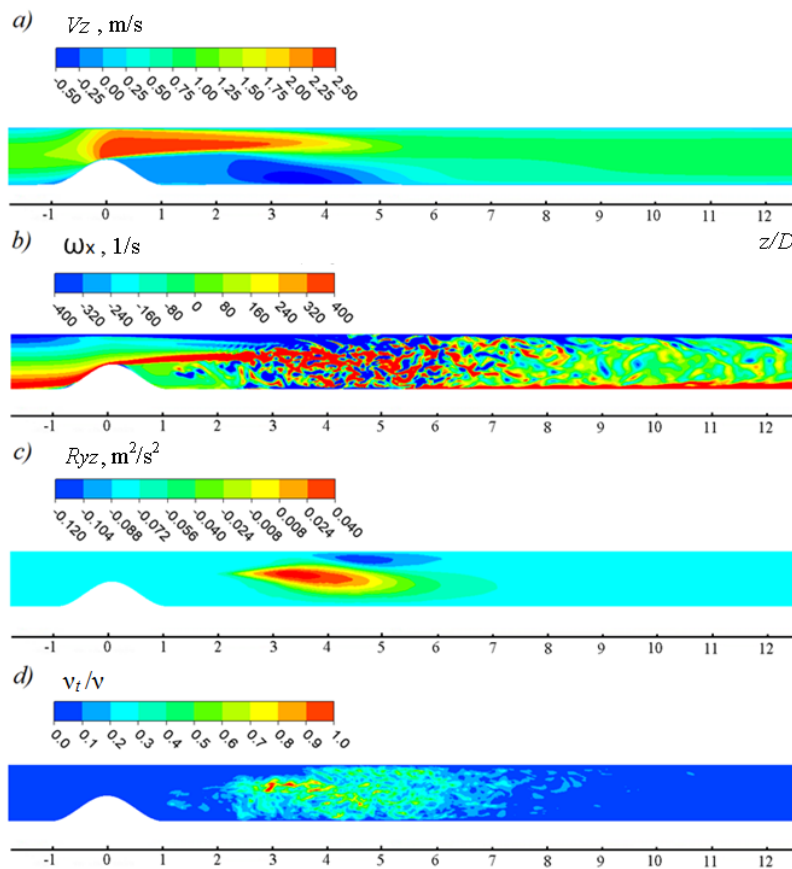


Рис. 4. Расчетные поля в плоскости симметрии сосуда: осредненная по времени продольная скорость (a), мгновенное значение x -компоненты завихренности (b), сдвиговое напряжение Рейнольдса $R_{yz} = -V'_y V'_z$ (c), мгновенное значение отношения подсеточной вихревой вязкости к молекулярной (d)

Джермано – Лилли, дает мгновенное поле отношения подсеточной вихревой вязкости к молекулярной, приведенное на рис. 4, d. Из этих данных можно заключить, что в рассматриваемой конфигурации течения, с числом $Re = 1803$, вклад подсеточной вязкости в диссипативные эффекты опять-таки существен лишь в области, охватывающей несколько калибров в окрестности точки присоединения, да и там отношение ν_t/ν не превышает единицы.

На рис. 5 для нескольких поперечных сечений потока в области стеноза (для наглядности представлено два графика) показаны профили осредненной по времени продольной составляющей скорости в плоскости симметрии, нормированной на значение среднерасходной скорости V_b . Сильное уско-

рение течения в первой половине области стеноза приводит к тому, что в центре стеноза формируются ядро потока, близкое к однородному, и сдвиговые слои на границах ядра, относительно тонкие, высокоградиентные (см. рис. 5, a). На расстоянии двух калибров от центра стеноза ($z/D = 2$), верхняя часть ядра потока уже в значительной степени размывта; в определяющей мере это обусловлено конвективным переносом низкоскоростной жидкости от стенки, который осуществляет упомянутое выше вторичное течение в виде парного вихря (см. рис. 3, a). Вместе с тем, высокоградиентный слой на нижней границе отчетливо выражен вплоть до этого сечения. В сечениях $z/D = 4$ и 5, расположенных ниже по потоку (рис. 6, b), характер профилей скорости существенно иной: их центральная

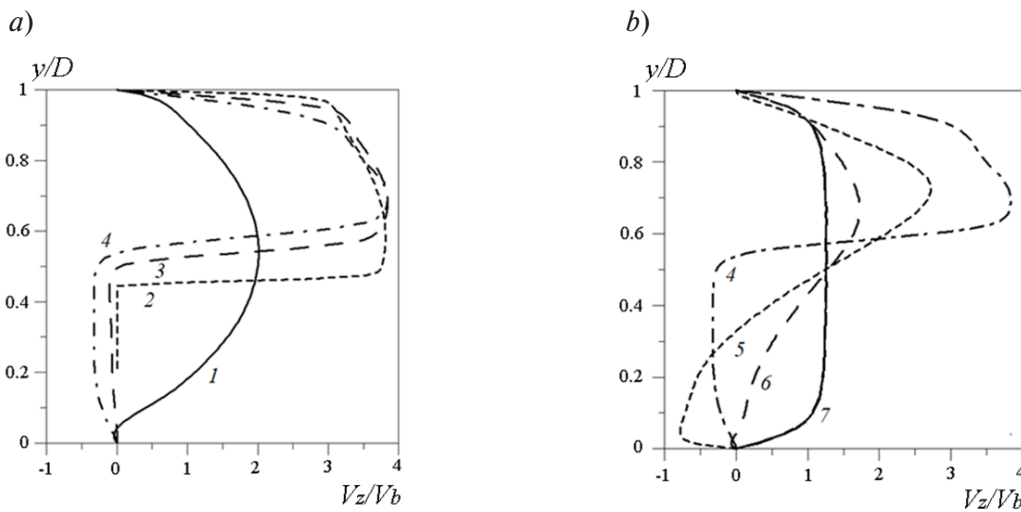


Рис. 5. Профили осредненной по времени продольной скорости в плоскости симметрии, в разных сечениях стенозированного сосуда; а): $z/D = -1$ (1), 0 (2), 1 (3), 2 (4); б): $z/D = 2$ (4), 4 (5), 5 (6), 10 (7)

часть характеризуется весьма умеренными градиентами скорости (см. рис. 5,б). Профиль скорости, относящийся к сечению $z/D = 10$, хорошо иллюстрирует последствия перемешивающего действия турбулентных структур, «живущих» в окрестности и на некотором расстоянии от точки присоединения: в результате этого перемешивания формируется центральная, практически осесимметричная область течения (см. также рис. 3,с), со скоростями, близкими к среднерасходной, и пограничный слой (постепенно нарастающий по толщине по мере удаления от данного сечения).

Продольные распределения осредненного по времени коэффициента трения на нижней и верхней стенках сосуда (в плоскости симметрии) показаны на рис. 6. Коэффициент трения вычислялся по формуле

$$C_f = \tau_w / (\rho V_b^2 / 2),$$

где τ_w – модуль вектора напряжения трения на стенке.

С целью выявления участков обратного течения, значения коэффициента трения, приведенные на графиках, рассчитаны с учетом знака продольной составляющей τ_{wz} вектора поверхностного напряжения.

В области стеноза коэффициент трения весьма высок и почти в 50 раз превышает значение 0,00887, которое получено для течения перед этой областью. Максимальные по модулю значения C_f в области возвратного течения в 7 раз выше, чем таковое до области стеноза. Согласно проведенным расчетам, точка присоединения потока в плоскости симметрии находится на расстоянии $L_r = 5,3D$ от центра стеноза. Это значение довольно близко к экспериментальной оценке $L_r \cong 4,5D$, которая следует из данных статьи [18]. Указанные данные получены для положения точки присоединения в моменты пульсирующего расхода, для которых значения числа Рейнольдса лежат в интервале 1000 – 1800.

Для четырех сечений, расположенных в области за стенозом, на рис. 7 приводятся профили двух характеристик турбулентности: кинетической энергии турбулентности k и напряжения Рейнольдса R_{yz} ; обе рассчитаны (для плоскости симметрии) по численно разрешаемым составляющим пульсационного движения и нормированы на квадрат среднерасходной скорости. Примечательно, что в сечениях $z/D = 4$ и 5 кинетическая энергия турбулентности по порядку величины близка к удельной кинетической энергии потока,

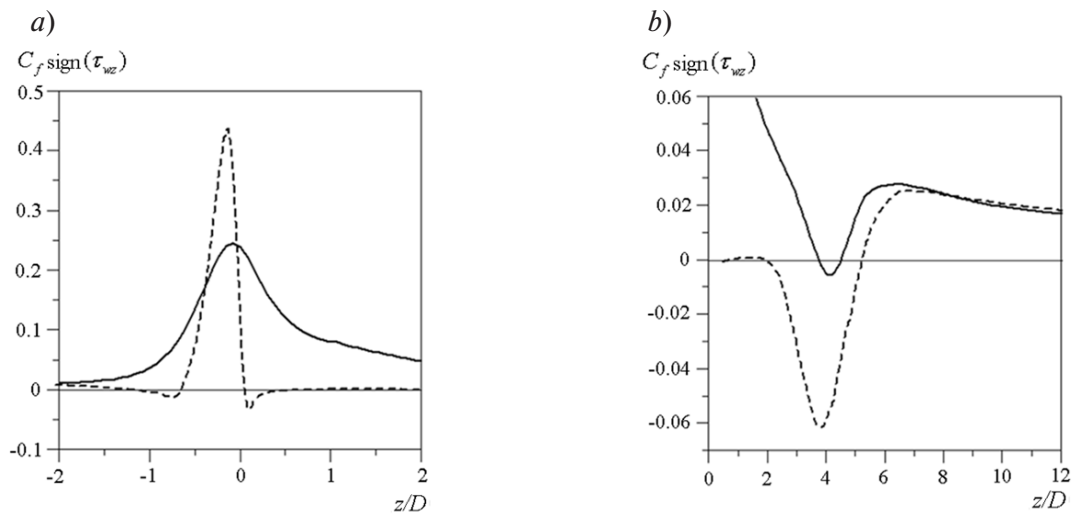


Рис. 6. Продольные изменения коэффициента трения, осредненного по времени, в области стеноза (а) и за ней (б); приведены данные для верхней (сплошная линия) и нижней (штриховая) стенок

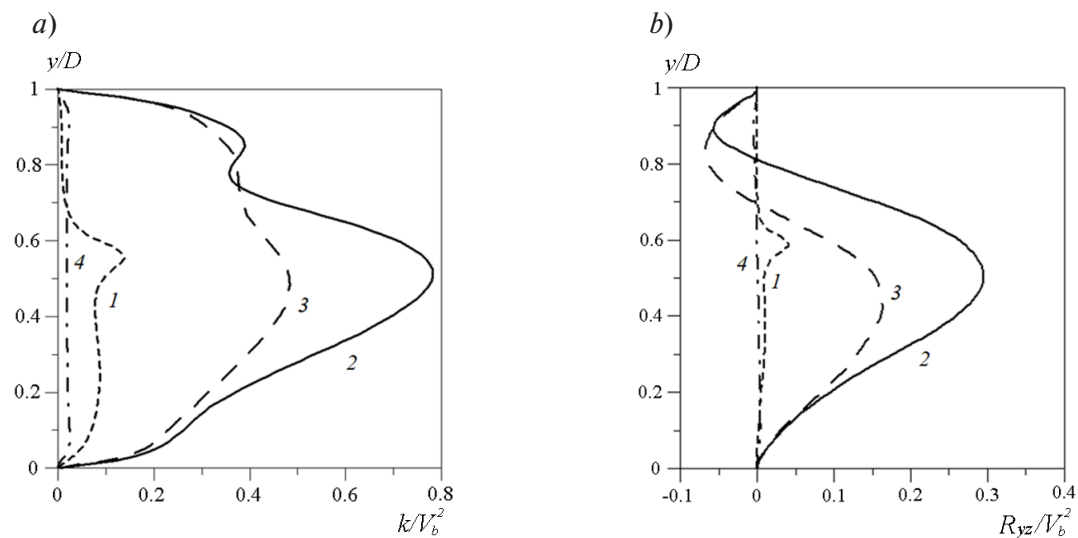


Рис. 7. Нормированные профили кинетической энергии турбулентности k (а) и напряжения Рейнольдса R_{yz} (б) в плоскости симметрии сосуда для четырех сечений, расположенных в области за стенозом: $z/D = 2$ (1), 4 (2), 5 (3), 10 (4)

входящего в область стеноза. Для каждого из этих сечений местоположения пиковых значений напряжения Рейнольдса и кинетической энергии турбулентности практически совпадают, при этом отношения $R_{yz,peak}/k_{peak}$ составляют примерно 0,38 и 0,35 для сечений $z/D = 4$ и 5 соответственно.

Представляет также интерес сопоставить для этих сечений величину численно разре-

шаемых R_{yz} и моделируемых (подсеточных) турбулентных напряжений τ_{SGS} . Оценку последних можно провести посредством умножения характерной подсеточной вязкости на максимальную величину градиента скорости, оцениваемую по профилям, приведенным на рис. 5. Согласно данным на рис. 4, за характерное значение подсеточной вязкости можно принять величину молекулярной

вязкости. Как следствие, оценочная величина $\tau_{SGS}/V_b^2 \cong 0,005$, что составляет лишь 2 – 3 % от уровня численно разрешаемых турбулентных напряжений.

По мере удаления от сечений $z/D = 4$ и 5 величины k и R_{yz} быстро убывают. Для сечения $z/D = 2$ профили обеих величин имеют локальные максимумы, расположенные при значении $y/D \cong 0,6$, т. е. там, где, с одной стороны, профиль средней скорости характеризуется большими градиентами (см. рис. 5) и, с другой стороны, уже заметно проявление гидродинамических неустойчивостей (см. рис. 4, б).

Заключение

По методу моделирования крупных вихрей с динамической моделью подсеточной вязкости Джермано – Лилли численно исследовано существенно трехмерное течение, развивающееся при значении числа Рейнольдса $Re = 1803$ в кровеносном сосуде с односторонним стенозом 70 %. Проведенные расчеты выявили следующие особенности течения.

Осредненное движение в области за стенозом характеризуется наличием двух зон рециркуляционного течения: обширной, развивающейся непосредственно за стенозом, и небольшой, расположенной у противоположной стенки сосуда.

При формировании в области стеноза струи с относительно высокими локальными скоростями развивается также существенное по интенсивности вторичное течение в виде пары вихрей, аналогичных вихрям Дина в

криволинейных трубках. Возникший в стенозе парный вихрь индуцирует, в свою очередь, вторичное течение в зоне обратного течения за областью стеноза и приводит также к раздвоению струи.

Поперечное течение практически полностью вырождается на расстоянии менее десяти калибров (диаметров сосуда) от стеноза. На границе струи и зоны обратного течения формируется высокоградиентный слой смешения. Гидродинамические неустойчивости, присущие этому слою, инициализируют турбулизацию течения, с образованием разномасштабных трехмерных вихревых структур, которые заполняют все поперечное сечение сосуда в окрестности точки присоединения, расположенной на расстоянии примерно пяти калибров от центра стеноза.

Сдвиговые турбулентные напряжения значительны по величине лишь на участке протяженностью около четырех калибров в окрестности точки присоединения. Вниз по потоку течение реламинаризируется.

Последовательное применение метода моделирования крупных вихрей, несомненно, должно повысить качество предсказания характеристик турбулентности, развивающейся при протекании крови по стенозированным участкам сосудистого русла, и, как следствие, получать более достоверные данные, представляющие интерес для биомедицины.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского научного фонда (РНФ), грант №20-65-47018.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Гатаулин Я.А., Зайцев Д.К., Смирнов Е.М., Федорова Е.А., Юхнев А.Д. Расчетно-экспериментальное исследование слабо закрученного течения в модели сосуда со стенозом // Научно-технические ведомости СПбГПУ. Физико-математические науки. 2015. № 4 (230). С. 36–47.

2. Гатаулин Я.А., Зайцев Д.К., Смирнов Е.М., Юхнев А.Д. Численное исследование про-

странственно-временной эволюции вторичного течения в модели общей сонной артерии // Научно-технические ведомости СПбГПУ. Физико-математические науки. 2016. № 4 (253). С. 48–55.

3. Гатаулин Я.А., Зайцев Д.К., Смирнов Е.М., Юхнев А.Д. Структура нестационарного течения в пространственно-извитой модели общей сонной артерии со стенозом: численное исследование

дование // Российский журнал биомеханики. 2019. Т. 23. № 1. С. 69–78.

4. **Ghalichi F., Farzan G., Deng X., Champlain A.D., Douville Y., King M., Guidoin R.** Low Reynolds number turbulence modeling of blood flow in arterial stenoses // *Biorheology*. 1998. Vol. 35. No. 4, 5. Pp. 281–294.

5. **Varghese S.S., Frankel S.H.** Numerical modeling of pulsatile turbulent flow in stenotic vessels // *Journal of Biomechanical Engineering*. 2003. Vol. 125. No. 4. Pp. 445–460.

6. **Lee T.S., Liao W., Low H.T.** Numerical study of physiological turbulent flows through series arterial stenoses // *International Journal for Numerical Methods in Fluids*. 2004. Vol. 46. No. 3. Pp. 315–344.

7. **Li M.X., Beech-Brandt J.J., John L.R., Hoskins P.R., Easson W.J.** Numerical analysis of pulsatile blood flow and vessel wall mechanics in different degrees of stenoses // *Journal of Biomechanics*. 2007. Vol. 40. No. 16. Pp. 3715–3724.

8. **Sherwin S.J., Blackburn H.M.** Three-dimensional instabilities and transition of steady and pulsatile flows in an axisymmetric stenotic flows // *Journal of Fluid Mechanics*. 2005. Vol. 533. 25 June. Pp. 297–327.

9. **Blackburn H.M., Sherwin S.J.** Instability modes and transition of pulsatile stenotic flow: pulse-period dependence // *Journal of Fluid Mechanics*. 2007. Vol. 573. February. Pp. 57–88.

10. **Varghese S.S., Frankel S.H., Fischer P.F.** Direct numerical simulation of stenotic flows. Part 1. Steady flow // *Journal of Fluid Mechanics*. 2007. Vol. 582. 10 July. Pp. 253–280.

11. **Varghese S.S., Frankel S.H., Fischer P.F.**

Direct numerical simulation of stenotic flows. Part 2. Pulsatile flow // *Journal of Fluid Mechanics*. 2007. Vol. 582. 10 July. Pp. 281–318.

12. **Mittal R., Simmons S.P., Udaykumar H.S.** Application of large-eddy simulation to the study of pulsatile flow in a modelled arterial stenosis // *Journal of Biomechanical Engineering*. 2001. Vol. 123. No. 4. Pp. 325–332.

13. **Mittal R., Simmons S.P., Najjar F.** Numerical study of pulsatile flow in a constricted channel // *Journal of Fluid Mechanics*. 2003. Vol. 485. 25 May. Pp. 337–378.

14. **Molla M.M., Paul M.C., Roditi G.** LES of additive and non-additive pulsatile flows in a model arterial stenosis // *Computer Methods in Biomechanics and Biomedical Engineering*. 2010. Vol. 13. No. 1. Pp. 105–120.

15. **Paul M.C., Molla M.M.** Investigation of physiological pulsatile flow in a model arterial stenosis using large-eddy and direct numerical simulations // *Applied Mathematical Modelling*. 2012. Vol. 36. No. 9. Pp. 4393–4413.

16. **Germano M., Piomelli U., Moin P., Cabot W.H.** A dynamic subgrid-scale eddy viscosity model // *Physics of Fluids*. 1991. Vol. 3. No. 7. Pp. 1760–1765.

17. **Lilly D.K.** A proposed modification of the Germano subgrid-scale closure method // *Physics of Fluids*. 1992. Vol. 4. No. 3. Pp. 633–635.

18. **Choi W., Park J.H., Byeon H., Lee S.J.** Flow characteristics around a deformable stenosis under pulsatile flow condition // *Physics of Fluids*. 2018. Vol. 30. No. 1. P. 011902.

19. **Jeong J., Hussain F.** On the identification of a vortex // *Journal of Fluid Mechanics*. 1995. Vol. 285. 25 February. Pp. 69–94.

Статья поступила в редакцию 29.12.2020, принята к публикации 10.02.2021.

СВЕДЕНИЯ ОБ АВТОРАХ

ГАТАУЛИН Яков Александрович — математик, заместитель директора Института прикладной математики и механики по научно-исследовательской работе студентов Санкт-Петербургского политехнического университета Петра Великого, Санкт-Петербург, Российская Федерация.

195251, Российская Федерация, г. Санкт-Петербург, Политехническая ул., 29
yakov_gataulin@mail.ru

СМИРНОВ Евгений Михайлович – доктор физико-математических наук, профессор Высшей школы прикладной математики и вычислительной физики Санкт-Петербургского политехнического университета Петра Великого, Санкт-Петербург, Российская Федерация.

195251, Российская Федерация, г. Санкт-Петербург, Политехническая ул., 29
smirnov_em@spbstu.ru

REFERENCES

1. **Gataulin Ya.A., Zaitsev D.K., Smirnov E.M., et al.**, Weakly swirling flow in a model of blood vessel with stenosis: Numerical and experimental study, St. Petersburg State Polytechnical University Journal. Physics and Mathematics. (4(230)) (2015) 36–47.
2. **Gataulin Ya.A., Zaitsev D.K., Smirnov E.M., Yukhnev A.D.**, Numerical study of spatial-temporal evolution of the secondary flow in the models of a common carotid artery, St. Petersburg State Polytechnical University Journal. Physics and Mathematics. (4(253)) (2016) 48–55.
3. **Gataulin Ya.A., Zaitsev D.K., Smirnov E.M., Yukhnev A.D.**, Structure of unsteady flow in the spatially curved model of the common carotid artery with stenosis: A numerical study, Russian Journal of Biomechanics. 23 (1) (2019) 58–66.
4. **Ghalichi F., Farzan G., Deng X., et al.**, Low Reynolds number turbulence modeling of blood flow in arterial stenosis, Biorheology. 35 (4, 5) (1998) 281–294.
5. **Varghese S.S., Frankel S.H.**, Numerical modeling of pulsatile turbulent flow in stenotic vessels, Journal of Biomechanical Engineering. 125 (4) (2003) 445–460.
6. **Lee T.S., Liao W., Low H.T.**, Numerical study of physiological turbulent flows through series arterial stenosis, International Journal for Numerical Methods in Fluids. 46 (3) (2004) 315–344.
7. **Li M.X., Beech-Brandt J.J., John L.R., et al.**, Numerical analysis of pulsatile blood flow and vessel wall mechanics in different degrees of stenosis, Journal of Biomechanics. 40 (16) (2007) 3715–3724.
8. **Sherwin S.J., Blackburn H.M.**, Three-dimensional instabilities and transition of steady and pulsatile flows in an axisymmetric stenotic flows, Journal of Fluid Mechanics. 533 (25 June) (2005) 297–327.
9. **Blackburn H.M., Sherwin S.J.**, Instability modes and transition of pulsatile stenotic flow: pulse-period dependence, Journal of Fluid Mechanics. 573 (February) (2007) 57–88.
10. **Varghese S.S., Frankel S.H., Fischer P.F.**, Direct numerical simulation of stenotic flows. Part 1. Steady flow, Journal of Fluid Mechanics. 582 (10 July) (2007) 253–280.
11. **Varghese S.S., Frankel S.H., Fischer P.F.**, Direct numerical simulation of stenotic flows. Part 2. Pulsatile flow, Journal of Fluid Mechanics. 582 (10 July) (2007) 281–318.
12. **Mittal R., Simmons S.P., Udaykumar H.S.**, Application of large-eddy simulation to the study of pulsatile flow in a modelled arterial stenosis, Journal of Biomechanical Engineering. 123 (4) (2001) 325–332.
13. **Mittal R., Simmons S.P., Najjar F.**, Numerical study of pulsatile flow in a constricted channel, Journal of Fluid Mechanics. 485 (25 May) (2003) 337–378.
14. **Molla M.M., Paul M.C., Roditi G.**, LES of additive and non-additive pulsatile flows in a model arterial stenosis, Computer Methods in Biomechanics and Biomedical Engineering. 13 (1) (2010) 105–120.
15. **Paul M.C., Molla M.M.**, Investigation of physiological pulsatile flow in a model arterial stenosis using large-eddy and direct numerical simulations // Applied Mathematical Modelling. 36 (9) (2012) 4393–4413.
16. **Germano M., Piomelli U., Moin P., Cabot W.H.**, A dynamic subgrid-scale eddy viscosity model, Physics of Fluids. 3 (7) (1991) 1760–1765.
17. **Lilly D.K.**, A proposed modification of the Germano subgrid-scale closure method, Physics of Fluids. 4 (3) (1992) 633–635.
18. **Choi W., Park J.H., Byeon H., Lee S.J.**, Flow characteristics around a deformable stenosis under pulsatile flow condition, Physics of Fluids. 30 (1) (2018) 011902.
19. **Jeong J., Hussain F.**, On the identification of a vortex, Journal of Fluid Mechanics. 285 (25 February) (1995) 69–94.

Received 29.12.2020, accepted 10.02.2021.

THE AUTHORS

GATAULIN Yakov A.

Peter the Great St. Petersburg Polytechnic University

29 Politechnicheskaya St., St. Petersburg, 195251, Russian Federation

yakov_gataulin@mail.ru

SMIRNOV Evgeny M.

Peter the Great St. Petersburg Polytechnic University

29 Politechnicheskaya St., St. Petersburg, 195251, Russian Federation

smirnov_em@spbstu.ru