

Научная статья

УДК 536.25

DOI: <https://doi.org/10.18721/JPM.15304>

## ОПЫТ ПРИМЕНЕНИЯ ПОЛУЭМПИРИЧЕСКИХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ МОДЕЛЕЙ ТУРБУЛЕНТНОСТИ ДЛЯ РАСЧЕТА КОНВЕКЦИИ ЖИДКОГО МЕТАЛЛА В ПОДОГРЕВАЕМОМ СНИЗУ ЦИЛИНДРЕ

С. И. Смирнов <sup>✉</sup>, Е. М. Смирнов

Санкт-Петербургский политехнический университет Петра Великого,

Санкт-Петербург, Россия

<sup>✉</sup> [sergeysmirnov92@mail.ru](mailto:sergeysmirnov92@mail.ru)

**Аннотация.** Статья содержит оценку возможностей трех известных RANS-моделей турбулентности ( $k$ - $\omega$  SST,  $k$ - $\varepsilon$  RNG и одной из дифференциальных RSM-моделей) по предсказанию локальных и интегральных характеристик статистически трехмерной рэлей-бенаровской конвекции жидкого металла с определяющей ролью крупномасштабной циркуляции (КМЦ). Расчеты на основе Unsteady-RANS-подхода на различных по измельченности сетках проведены при числе Рэлея  $10^6$  и числе Прандтля 0,025 для подогреваемой снизу цилиндрической емкости при равенстве ее диаметра высоте. Рассмотрен случай слабого наклона объекта, когда в нем КМЦ принимает «зафиксированное» азимутальное положение. Работоспособность использованных моделей турбулентности оценивается через сопоставление результатов с ранее полученными данными прямого численного моделирования для тех же условий.

**Ключевые слова:** конвекция Рэлея – Бенара, крупномасштабная циркуляция, турбулентность, осредненные по Рейнольдсу уравнения

**Финансирование:** Исследование частично финансировалось Министерством науки и высшего образования Российской Федерации в рамках программы стратегического академического лидерства «Приоритет 2030» (Соглашение 075-15-2021-1333 от 30.09.2021).

**Для цитирования:** Смирнов С. И., Смирнов Е. М. Опыт применения полуэмпирических дифференциальных моделей турбулентности для расчета конвекции жидкого металла в подогреваемом снизу цилиндре // Научно-технические ведомости СПбГПУ. Физико-математические науки. 2022. Т. 15. № 3. С. 43–60. DOI: <https://doi.org/10.18721/JPM.15304>

Статья открытого доступа, распространяемая по лицензии CC BY-NC 4.0 (<https://creativecommons.org/licenses/by-nc/4.0/>)

Original article

DOI: <https://doi.org/10.18721/JPM.15304>

## EXPERIENCE OF USING SEMIEMPIRICAL DIFFERENTIAL MODELS OF TURBULENCE FOR CALCULATION OF LIQUID-METAL CONVECTION IN A BOTTOM HEATED CYLINDER

S. I. Smirnov <sup>✉</sup>, E. M. Smirnov

Peter the Great St. Petersburg Polytechnic University, St. Petersburg, Russian Federation

<sup>✉</sup> [sergeysmirnov92@mail.ru](mailto:sergeysmirnov92@mail.ru)

**Abstract.** The paper deals with assessments of ability of the three RANS turbulence models ( $k$ - $\omega$  SST,  $k$ - $\varepsilon$  RNG and one of the differential RSM formulations) to predict local and integral characteristics of the statistically 3D Rayleigh – Bénard liquid-metal convection with a key role of large-scale circulation (LSC). URANS-based calculations at the Rayleigh number of  $10^6$  and the Prandtl number of 0.025 have been performed for a bottom heated cylindrical container with equal diameter to height, using computational grids of varied cell sizes. The case of the slightly tilted container was considered where the LSC azimuth position being fixed. The suitability of the used turbulence models was evaluated by comparing the obtained results with the direct numerical simulation data obtained earlier for the same conditions.

**Keywords:** Rayleigh – Bénard convection, large scale circulation, RANS model, turbulence, cylinder

**Funding:** The research has been funded in part by the Ministry of Science and Higher Education of the Russian Federation, within the framework of strategic academic leadership “Priority 2030” (Agreement No. 075-15-2021-1333 dated September 30, 2021).

**For citation:** Smirnov S. I., Smirnov E. M., Experience of using semiempirical differential models of turbulence for calculation of liquid-metal convection in a bottom heated cylinder, St. Petersburg Polytechnical State University Journal. Physics and Mathematics. 15 (3) (2022) 43–60. DOI: <https://doi.org/10.18721/JPM.15304>

This is an open access article under the CC BY-NC 4.0 license (<https://creativecommons.org/licenses/by-nc/4.0/>)

### Введение

Характерная особенность свободноконвективного течения, которое развивается в цилиндрической емкости, подогреваемой снизу, – это наличие крупномасштабных вихревых структур, занимающих всю область (см., например, обзорные работы [1, 2]). В частности, при равенстве диаметра цилиндра его высоте, ведущей структурой конвективного течения оказывается единичный вихрь, называемый также конвективной ячейкой, или крупномасштабной циркуляцией (КМЦ) [3 – 7]. При строго вертикальной ориентации емкости и осесимметричных граничных условиях, у КМЦ нет выделенного азимутального расположения и, соответственно, ничто ей не препятствует время от времени совершать случайные перемещения в азимутальном направлении. Это подтверждают как экспериментальные [8 – 11], так и численные [12 – 15] исследования турбулентной конвекции Рэлея – Бенара в цилиндрических емкостях. При экспериментальных исследованиях конкретное азимутальное поведение КМЦ определяется малыми, сложно контролируемыми отклонениями от осевой симметрии, неизбежно присутствующими в лабораторной модели. Азимутальная неустойчивость конвективной ячейки обычно проявляется и в численных исследованиях, где в качестве «внешнего» фактора, влияющего на случайные осцилляции КМЦ, выступает несимметричность вычислительной сетки или особенности реализации численных алгоритмов.

Случайные азимутальные перемещения конвективной ячейки сильно затрудняют процесс получения статистических данных о ее трехмерной структуре, в том числе величин, характеризующих «фоновую» турбулентность: полей рейнольдсовых напряжений и турбулентного потока тепла. Однако есть возможность подавить указанные низкочастотные перемещения и, таким образом, «зафиксировать» КМЦ в определенном азимутальном положении, если искусственно ввести стабилизирующий внешний фактор; в качестве последнего может выступать, например, небольшой наклон емкости. Данный способ «фиксации» КМЦ используется в экспериментальных [8, 16 – 20] и численных [20 – 24] исследованиях.

На сегодняшний день для описания турбулентной рэлей-бенаровской конвекции в областях с относительно простой геометрией широко используется метод прямого численного моделирования (Direct Numerical Simulation (DNS)). Данный подход предполагает разрешение всех масштабов турбулентного движения жидкости и, как следствие, оказывается наиболее информативным (см., например, работы [25 – 30] для случая вертикально ориентированного цилиндра и работы [23, 24] для случая слегка наклоненной емкости). Однако разрешение всего спектра масштабов сопряжено с большими вычислительными затратами, очень быстро возрастающими при увеличении числа Рэлея.

Снизить затраты позволяет применение метода моделирования крупных вихрей (Large Eddy Simulation (LES)), в частности, в его «упрощенном» варианте Implicit LES (ILES), при реализации которого подсеточная турбулентная вязкость в уравнения переноса явно не вводится, а роль физической вязкости на малых масштабах играют диссипативные свойства численной схемы. Опыт применения ILES-подхода к моделированию турбулентной конвекции Рэлея – Бенара в цилиндрических емкостях содержится в работах [22, 31, 32]. В недавней работе [33] методом ILES исследованы вопросы анизотропии турбулентного переноса в смешаноконвективном течении, развивающемся в тигле установки по выращиванию кристаллов кремния методом Чохральского.

Хорошо известно, однако, что с увеличением числа Рэлея расчет конвективных течений по методу LES требует все большего измельчения расчетной сетки в пристеночных слоях, при этом измельчение требуется по всем пространственным направлениям. Как следствие, получение достоверных численных данных для широкого круга практических задач, характеризуемых большими числами Рэлея, опять-таки, сопряжено с очень большими вычислительными затратами.

В этих условиях сохраняется значительный интерес к численному моделированию турбулентных свободно- и смешаноконвективных течений на основе осредненных по Рейнольдсу уравнений Навье – Стокса (Reynolds-Averaged Navier – Stokes (RANS)), замкнутых по той или иной полуэмпирической дифференциальной модели турбулентности. Здесь, однако, сразу следует отметить, что в случае конвекции рэлей-бенаровского типа возможность получения стационарного RANS-решения весьма ограничена и зависит от применяемой модели турбулентности. Это предопределяет интерес к постановке задачи, изначально предполагающей проведение расчетов на основе нестационарных уравнений Рейнольдса. Данный подход трактуется как Unsteady RANS (URANS) или Transient RANS (TRANS).

В работах [34 – 36] были обстоятельно изучены возможности URANS-подхода для воспроизведения нестационарных когерентных структур и интенсивности турбулентного переноса в «классическом», статистически одномерном случае свободной конвекции между двумя разнонагретыми горизонтальными пластинами. Авторами этих работ особо отмечается наличие в движении двух различных масштабов: больших амплитуд, связанных с плюмами, термиками и конвективными ячейками, а также турбулентности, возникающей в основном в пристеночных пограничных слоях и переносимой крупномасштабными структурами. Эта особенность делает турбулентную конвекцию Рэлея – Бенара весьма подходящим объектом для расчетов на основе нестационарных уравнений Рейнольдса. Результаты расчетов [34 – 36], проведенных по методу URANS с замыканием по трехпараметрической модели турбулентности, показывают, что осредненный профиль температуры, моменты второго порядка и интегральная теплопередача находятся в хорошем согласии с данными большинства DNS-расчетов и экспериментальными данными по конвекции между горизонтальными пластинами.

В последние годы возрос интерес к RANS-расчетам свободноконвективных течений с замыканием по какому-либо варианту из семейства моделей Рейнольдсовых напряжений (Reynolds Stress Model (RSM)) на основе либо стационарных, либо нестационарных формулировок [37 – 41]. В общем случае RSM-модель предполагает решение дифференциальных уравнений переноса всех компонент тензора Рейнольдсовых напряжений и вектора турбулентного потока тепла. Стремление несколько упростить модель и уменьшить вычислительные затраты обуславливает интерес к применению «урезанных» формулировок, согласно которым дифференциальные уравнения переноса решаются только для Рейнольдсовых напряжений, а расчет турбулентного потока тепла проводится на основе градиентной гипотезы через осредненные параметры потока.

Представленный в литературе опыт применения моделей Рейнольдсовых напряжений для расчета турбулентных свободноконвективных течений в поле силы тяжести охватывает, в основном, модельные конфигурации с разнонагретыми вертикальными стенками или же случай пограничного слоя у вертикальной нагретой поверхности [37 – 41].

В настоящей работе одна из хорошо известных RSM-моделей (реализованная, в частности, в программном пакете ANSYS Fluent) применяется для URANS-расчетов конвекции ртути в слегка наклоненном цилиндре, подогреваемом снизу. Аналогичные расчеты проводятся также по двум моделям турбулентности с изотропной вязкостью, из семейств  $k-\omega$  и  $k-\varepsilon$  моделей. Результаты расчетов статистических характеристик первого и второго порядков сравниваются с данными работы [23], полученными ранее для рассматриваемой конфигурации на основе DNS-подхода.

#### Постановка задачи и математическая модель

Рассматривается турбулентная конвекция жидкости в подогреваемой снизу цилиндрической емкости с единичным отношением ее диаметра к высоте ( $\Gamma = D/H = 1$ ). Емкость наклонена на небольшой угол ( $\varphi = 2^\circ$ ) по отношению к вектору гравитационного ускорения  $\mathbf{g}$  (рис. 1, а).

На всех границах емкости задаются условия непроницаемости и прилипания. Горизонтальные стенки полагаются изотермическими: нижняя стенка имеет температуру  $T_h$ , большую, чем верхняя ( $T_c$ ). Боковая стенка полагается теплоизолированной.

Безразмерными определяющими параметрами задачи являются число Прандтля  $Pr$  и число Рейлея  $Ra$ :

$$Pr = \mu C_p / \lambda, \quad Ra = Pr \cdot (\rho^2 g \beta \Delta T H^3 / \mu^2),$$

где  $\mu$  – коэффициент динамической вязкости;  $C_p$  – удельная теплоемкость при постоянном давлении;  $\lambda$  – коэффициент теплопроводности;  $\rho$  – плотность;  $\beta$  – коэффициент объемного расширения;  $g$  – ускорение свободного падения;  $\Delta T$  – температурный перепад между горячей и холодной стенками,  $\Delta T = T_h - T_c$ .

Характерной (масштабной) скоростью течения (скорость плавучести) служит величина  $V_b = (g\beta\Delta TH)^{0.5}$ . Масштабом времени является характерное конвективное время  $t_b = H/V_b$ .

Представляемые расчеты были проведены при значениях гидродинамических чисел  $Pr = 0,025$  и  $Ra = 10^6$ .

Конвективное движение рассчитывается на основе системы нестационарных осредненных по Рейнольдсу уравнений динамики и теплопереноса (1) – (3), которая включает уравнения Навье – Стокса, записанные в приближении Буссинеска для учета эффектов плавучести в поле гравитационной силы, уравнение неразрывности и уравнение энергии:

$$\frac{\partial V_j}{\partial x_j} = 0, \quad (1)$$

$$\rho \frac{\partial V_i}{\partial t} + \rho V_j \frac{\partial V_i}{\partial x_j} = -\frac{\partial p}{\partial x_i} + \frac{\partial (\tau_{ij} + \tau_{t,ij})}{\partial x_j} - \rho \beta (T - T_0) g_i, \quad (2)$$

$$\rho C_p \frac{\partial T}{\partial t} + \rho C_p V_j \frac{\partial T}{\partial x_j} = \frac{\partial}{\partial x_j} (q_j + q_{t,j}). \quad (3)$$

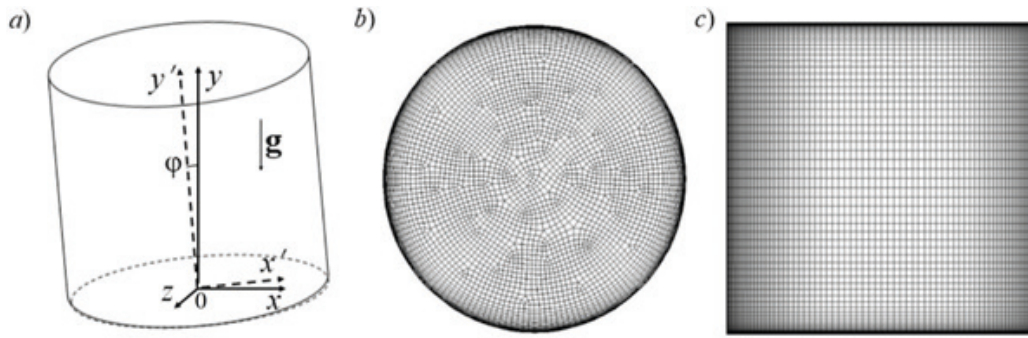


Рис. 1. Изображения цилиндрической емкости к постановке задачи: *a* – геометрия вычислительной области; *b, c* – характерный вид расчетных сеток в горизонтальном (*b*) и центральном вертикальном (*c*) сечениях

Уравнения решаются в системе координат, связанной с цилиндрической емкостью  $x_j = (x', y', z' = z)$ , показанной на рис. 1, *a*. Буквами  $V_i$  и  $T$  обозначены компоненты осредненной по Рейнольдсу скорости ( $i(j) = 1, 2, 3$ ) и температуры;  $\tau_{ij}$ ,  $q_j$  – компоненты тензора вязких напряжений и вектора плотности диффузионного потока тепла, вычисляемые через осредненные по Рейнольдсу величины:

$$\tau_{ij} = \mu \left( \frac{\partial V_i}{\partial x_j} + \frac{\partial V_j}{\partial x_i} \right), \quad (4)$$

$$q_j = -\lambda \frac{\partial T}{\partial x_j}. \quad (5)$$

Входящие в уравнения (2), (3) величины  $\tau_{t,ij}$ ,  $q_{t,j}$  – это компоненты тензора турбулентных (рейнольдсовых) напряжений и вектора турбулентного потока тепла, возникающих при рейнольдсовом осреднении и отражающих наличие в актуальном движении относительно высокочастотных флуктуаций скорости  $v_i$  и температуры  $\theta$ .

Соответственно,

$$\tau_{t,ij} = -\overline{\rho v_i v_j}, \quad (6)$$

$$q_{t,j} = -\overline{\rho C_p v_j \theta}, \quad (7)$$

где черта сверху указывает на осреднение по Рейнольдсу.

Система уравнений (1) – (3) не замкнута. Для замыкания системы требуется определить метод (модель) для расчета величин  $\tau_{t,ij}$  и  $q_{t,j}$ .

Представляемые в настоящей работе расчетные данные получены при замыкании системы (1) – (3) по трем моделям.

**Модели  $k$ - $\varepsilon$  RNG и  $k$ - $\omega$  SST.** Данные модели принадлежат к классу дифференциальных двухпараметрических моделей турбулентности, основанных на концепции изотропной турбулентной вязкости (гипотезе Буссинеска). Согласно этой концепции, компоненты тензора турбулентных напряжений и вектора турбулентного потока тепла связаны с осредненными по Рейнольдсу параметрами течения следующим образом:

$$\tau_{t,ij} = \mu_t \left( \frac{\partial V_i}{\partial x_j} + \frac{\partial V_j}{\partial x_i} \right) - \frac{2}{3} k \delta_{ij}, \quad (8)$$

$$q_{t,j} = -\lambda_t \frac{\partial T}{\partial x_j}, \quad (9)$$

где  $\mu_t$  – коэффициент турбулентной вязкости, определяемый через рассчитываемые параметры турбулентности ( $k$ ,  $\varepsilon$  или  $\omega$ );  $\lambda_t$  – коэффициент турбулентной теплопроводности,  $\lambda_t = C_\mu \mu_t / \text{Pr}_t$  ( $\text{Pr}_t$  – турбулентное число Прандтля (в настоящих расчетах полагалось равным 0,8));  $k$  – кинетическая энергия турбулентных пульсаций.

Полная формулировка моделей  $k$ - $\varepsilon$  RNG и  $k$ - $\omega$  SST дается в работах [42] и [43, 44] соответственно.

**Модель рейнольдсовых напряжений.** В настоящей работе применялась дифференциальная модель рейнольдсовых напряжений, реализованная в пакете ANSYS Fluent 18.2. Эта модель предполагает решение уравнений переноса только для турбулентных напряжений, при этом компоненты вектора турбулентного потока тепла вычисляются через осредненные параметры потока на основе градиентной гипотезы.

Уравнения переноса рейнольдсовых напряжений в общем случае формулируются в следующем виде:

$$\rho \frac{\partial(\overline{v_i v_j})}{\partial t} + \rho V_j \frac{\partial(\overline{v_i v_j})}{\partial x_j} = D_{ij}^m + D_{ij}^t + R_{ij} + G_{ij} + \Phi_{ij} - \varepsilon_{ij}, \quad (10)$$

где  $D_{ij}^m$ ,  $D_{ij}^t$  – слагаемые, отражающие молекулярный ( $m$ ) и турбулентный ( $t$ ) диффузионные переносы;  $R_{ij}$ ,  $G_{ij}$  – слагаемые, характеризующие процессы получения энергии от осредненного движения и генерации за счет сил плавучести, соответственно;  $\Phi_{ij}$  – величина, отвечающая за перераспределение энергии между тензорами напряжений и скоростей деформации;  $\varepsilon_{ij}$  – диссипативный член.

Совместно с уравнениями для рейнольдсовых напряжений решается дифференциальное уравнение переноса величины  $\omega$  – удельной скорости диссипации кинетической энергии, используемой для замыкания уравнений (10). Из опций, доступных пользователю пакета ANSYS Fluent и определяющих конкретный вид данного уравнения, при проведении представляемых расчетов была выбрана опция “Stress Omega”.

Компоненты вектора турбулентного потока тепла  $v_i \theta$  вычисляются по формулам:

$$\overline{v_i \theta} = \frac{\mu_t}{\rho \text{Pr}_t} \frac{\partial T}{\partial x_i}, \quad \mu_t = \frac{\rho k}{\omega}, \quad k = \frac{1}{2} \overline{v_i v_i}, \quad (11)$$

где  $\text{Pr}_t = 0,8$  (как и ранее).

Описание составляющих модели рейнольдсовых напряжений содержится в работах [45 – 47], а также в пользовательской документации к программному пакету ANSYS Fluent 18.2.

### Аспекты вычислений и обработки данных

Сопоставительные расчеты по реализованному в пакете ANSYS Fluent методу конечных объемов выполнялись на двух сетках, состоявших из гексагональных элементов, размерностью 0,47 млн. (сетка C1) и 3,7 млн. ячеек (C2). Структура сеток в поперечном и продольном (центральном) сечениях иллюстрируется на рис. 1, *b*, *c*. Сетки сгущались к стенкам, при этом размер пристенного элемента составлял  $1,5 \cdot 10^{-4} H$ . Характерной особенностью сеток было наличие центральной «неструктурированной» (асимметричной) подобласти диаметром около  $0,8D$  (см. рис. 1, *b*).

Предварительные расчеты привели к заключению о невозможности получения стационарного решения задачи ни по одной из примененных моделей турбулентности. Все последующие расчеты были выполнены в нестационарной постановке. Продвижение по времени проводилось на основе метода дробных шагов второго порядка. Временной шаг составлял около одной сотой от масштабного времени задачи  $t_b$ , и примерно в 10 раз превышал тот, который использовался в работе [23] при расчетах по методу DNS.

Пространственная аппроксимация конвективных слагаемых в уравнениях переноса осуществлялась по схеме QUICK, имеющей номинально третий порядок точности. Диффузионные члены аппроксимировались по центрально-разностной схеме второго порядка точности.



Все расчеты стартовали с нулевого начального поля скорости и однородного температурного поля, с предписанным значением  $(T_c + T_h)/2$ . Выборки для временного осреднения, выполнявшегося по прошествии переходного участка, во всех расчетах составляли  $3000t_b$ .

Обработка расчетных данных для получения статистических характеристик первого и второго порядка основывалась на следующих предпосылках.

Во-первых, считалось, что актуальные значения скорости и температуры, присутствующие в реальном течении (помечены звездочкой), можно разложить на низко- и высокочастотную составляющие:

$$V_i^* = V_i + v_i, T^* = T + \theta. \quad (12)$$

Во-вторых, полагалось, что осредненное по Рейнольдсу движение содержит лишь низкочастотные «крупномасштабные» составляющие полей скорости и температуры, т. е.

$$\overline{V_i^*} = V_i, \overline{T^*} = T, \quad (13)$$

которые, в свою очередь, можно разложить на средние величины, полученные осреднением по достаточно большой временной выборке  $t_{avr}$ , и пульсационные составляющие:

$$V_i = \langle V_i \rangle + V_i', T = \langle T \rangle + T'. \quad (14)$$

Здесь угловые скобки  $\langle \dots \rangle$  указывают на временное осреднение, а штрихом помечается пульсация.

При этом

$$\langle V_i^* \rangle = \langle V_i \rangle, \langle T^* \rangle = \langle T \rangle. \quad (15)$$

Введем далее обозначения для статистических характеристик второго порядка (вторых моментов):

$$P_{ij}^t = \langle V_i^* V_j^* \rangle - \langle V_i^* \rangle \langle V_j^* \rangle, \quad (16)$$

$$Q_i^t = \langle V_i^* T^* \rangle - \langle V_i^* \rangle \langle T^* \rangle, \quad (17)$$

которые представляют собой компоненты тензора (взятые с обратным знаком) полных турбулентных напряжений и полного вектора турбулентного потока тепла.

Учитывая разложения (12), (14), получим:

$$P_{ij}^t = \langle V_i' V_j' \rangle + \langle v_i v_j \rangle + \langle V_i' v_j \rangle + \langle v_i V_j' \rangle, \quad (18)$$

$$Q_i^t = \langle V_i' T' \rangle + \langle v_i \theta \rangle + \langle V_i' \theta \rangle + \langle v_i T' \rangle. \quad (19)$$

В правых частях выражений (18) и (19) первые слагаемые отражают вклад численно разрешаемых составляющих движения, вторые – вклад моделируемых составляющих, третьи и четвертые – так называемые перекрестные члены, которые вынужденно отбрасываются (как и в работах [34 – 36]), ввиду предположения о слабой скоррелированности низко- и высокочастотной составляющих движения. Приемлемость такого предположения в случае непрерывного спектра пульсаций в актуальном турбулентном течении обычно оценивается апостериори, т. е. по итогам сравнения с «эталонными» данными численных и экспериментальных исследований.

Таким образом, для сравнения с данными статьи [23], полученными нами ранее на основе метода DNS, значения полных турбулентных напряжений, компонент полного вектора турбулентного потока тепла и суммарной кинетической энергии пульсационного движения рассчитывались как

$$P'_{ij} = \langle V'_i V'_j \rangle + \langle \overline{v_i v_j} \rangle, \quad (20)$$

$$Q'_i = \langle V'_i T' \rangle + \langle \overline{v_i \theta} \rangle, \quad (21)$$

$$K^t = \frac{1}{2} P'_{ii}. \quad (22)$$

При вычислениях по модели рейнольдсовых напряжений, вклад моделируемой части величины  $P'_{ij}$  определялся через осреднение рейнольдсовых напряжений, полученных за время  $t_{avr}$  при решении уравнений переноса (10).

Вклад моделируемой составляющей в суммарный вектор турбулентного потока тепла оценивался следующим образом:

$$\langle \overline{v_i \theta} \rangle = \left\langle \frac{\mu_t}{\rho Pr_t} \frac{\partial T}{\partial x_i} \right\rangle \approx \frac{\langle \mu_t \rangle}{\rho Pr_t} \frac{\partial \langle T \rangle}{\partial x_i}. \quad (23)$$

Данное выражение получено на основе градиентной гипотезы (11) в предположении о слабой скоррелированности пульсаций турбулентной вязкости и численно разрешаемых пульсаций температуры.

### Результаты расчетов и их обсуждение

Ниже представлены результаты расчетов в безразмерном виде. Значения координат отнесены к высоте емкости  $H$ . При этом подразумевается следующее соответствие:

$$x_{i(j)} = x', y', z' \text{ при } i(j) = 1, 2, 3.$$

Составляющие скорости отнесены к скорости плавучести  $V_b$ , турбулентные напряжения  $P'_{ij}$  и кинетическая энергия  $K^t$  – к квадрату скорости плавучести; составляющие вектора турбулентного потока тепла  $Q'_i$  нормированы на произведение  $V_b \Delta T$ .

**Средние по времени поля течения и локальная теплоотдача.** Рис. 2, *a* иллюстрирует осредненную картину конвекции ртути в подогреваемом снизу цилиндре с отчетливо выраженной КМЦ, предсказываемой по результатам URANS-расчетов для различных моделей турбулентности.

На рис. 2, *b* приводится поле осредненной по времени осевой составляющей скорости  $\langle V_{y'} \rangle$  в центральном поперечном сечении цилиндра. Видно, что при «фиксации» КМЦ в данном азимутальном положении течение симметрично относительно плоскости  $x'0y'$ . Распределения осредненной осевой скорости вдоль координаты  $x'$  в том же сечении (рис. 2, *c*), рассчитанные для различных RANS-моделей, практически идентичны и очень близки к распределению, полученному в нашей работе [23] по DNS-методу.

Распределения средней температуры вдоль центральной оси емкости, рассчитанные для трех RANS-моделей, сопоставляются между собой и с данными DNS на рис. 2, *d*. Наблюдается в целом хорошая согласованность результатов, полученных по различными моделям/подходам: в частности, все из них предсказывают наличие протяженной центральной зоны с обратным градиентом температуры. Вместе с тем, более детальный анализ распределений в области, прилегающей к торцевой стенке (см. увеличенный фрагмент на рис. 2, *d*) позволяет заключить, что в случае  $k$ - $\epsilon$  RNG-модели градиент температуры в этой области, а значит и локальный тепловой поток на стенке, несколько меньше (на 2 – 3 %), чем в случае двух других RANS-моделей, которые предсказывают значения градиента, практически совпадающие с результатом DNS-расчета.

На рис. 3 приведены распределения осредненного по времени локального числа Нуссельта на нижней стенке, иллюстрирующие, в частности, сильную пространственную неоднородность данной величины, которая обусловлена наличием КМЦ. Результаты RANS-расчетов находятся в весьма удовлетворительном согласии с DNS-данными, особенно для варианта RSM-модели: в этом случае воспроизводится не только серповидная зона максимальной теплоотдачи, но и ясно очерченная область наименьших значений числа Нуссельта.



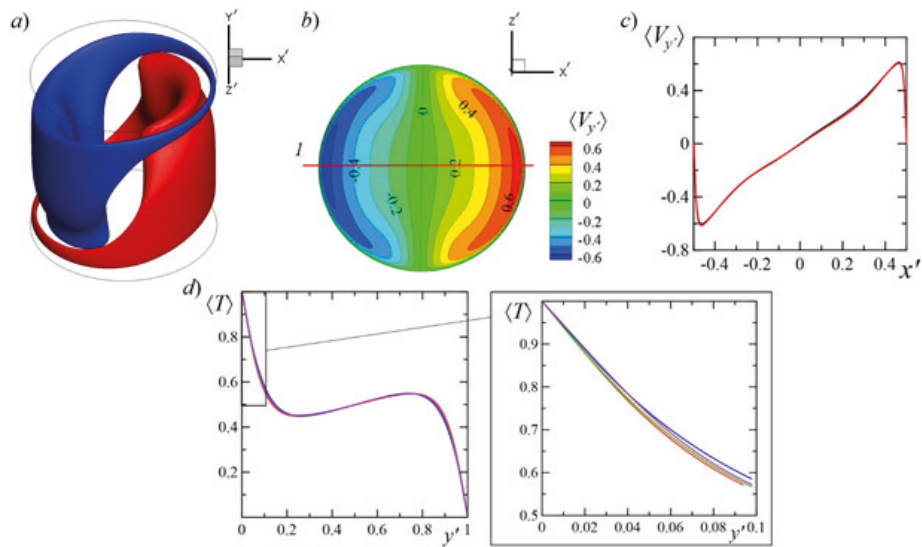


Рис. 2. Сопоставление графиков расчетных величин задачи, полученных с использованием разных моделей: URANS (*a, b*), URANS, DNS (*c*), DNS, RSM,  $k-\omega$  SST,  $k-\epsilon$  RNG (*d*). Представлены изоповерхности осредненной по времени осевой компоненты скорости восходящего (красный цвет) и нисходящего (синий) течений,  $\langle |V_{y'}| \rangle = 0,3$  (*a*); поле осредненной осевой составляющей скорости в центральном поперечном сечении (*b*), а также распределения этой скорости вдоль линии  $l$  (две кривые совпадают) (*c*); распределения осредненной температуры вдоль оси емкости по моделям DNS (красные кривые), RSM (зеленые),  $k-\omega$  SST (синие),  $k-\epsilon$  RNG (лиловые) (*d*)

Осреднение по поверхности стенки распределений, показанных на рис. 3, дает интегральные числа Нуссельта, приведенные в таблице. Видно, что эти значения, полученные по разным RANS-моделям, отличаются от данных DNS не более, чем на 3,6 %: в случае  $k-\epsilon$  RNG-модели отклонение наблюдается в меньшую сторону, а для двух других моделей – в большую. Результат, наиболее близкий к полученному методом DNS, дает модель реинольдсовых напряжений.

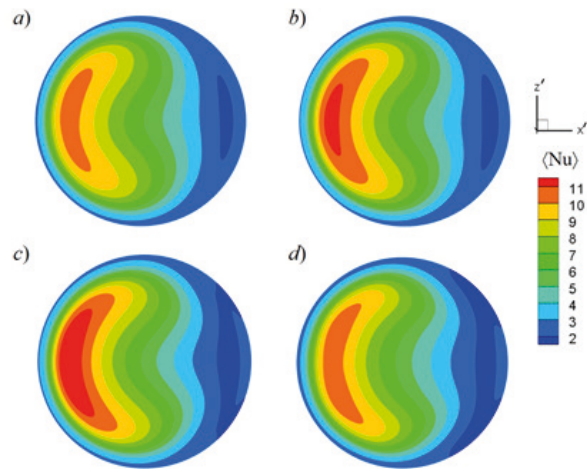


Рис. 3. Распределения на нижней стенке цилиндра осредненного по времени локального числа Нуссельта, полученные с помощью моделей: DNS [23] (*a*), RSM (*b*),  $k-\omega$  SST (*c*) и  $k-\epsilon$  RNG (*d*)

Таблица

Сравнение значений интегрального числа Нуссельта, полученных по разным RANS-моделям, с данными DNS

Модель	$k$ - $\epsilon$ RNG	$k$ - $\omega$ SST	RSM	DNS [23]
Nu	5,46	5,84	5,78	5,64

В завершение данного подраздела отметим, что представленные в нем данные URANS-расчетов были получены с использованием сетки C1. Аналогичные расчеты были выполнены на сетке C2, содержащей большее число ячеек (почти на порядок). Было установлено, что осредненные по времени распределения/профили скорости, температуры и локального числа Нуссельта, рассчитанные на двух сетках, практически совпадают (с точностью до толщины визуализирующих линий). Интегральные числа Нуссельта отличались лишь в четвертом знаке. Таким образом, применительно к родственным задачам о трехмерной рэлей-бенаровской конвекции жидкого металла можно заключить, что размерности сеток около полумиллиона ячеек достаточно для предсказания статистических данных первого порядка на основе URANS-подхода при значениях числа Рэлея порядка  $10^6$ .

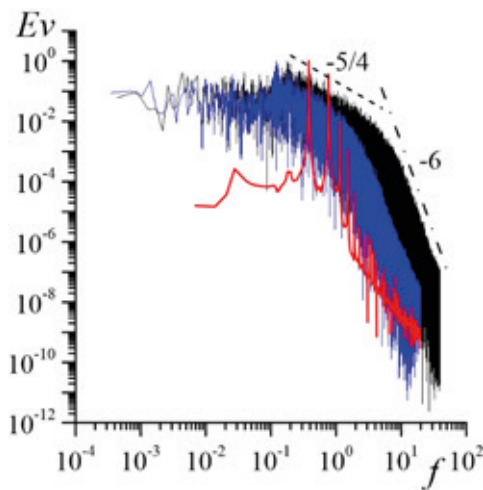


Рис. 4. Энергетические спектры пульсаций осевой компоненты скорости  $V_y$  в точке при  $x' = 0,35$  на линии пересечения плоскости  $x'Oy'$  и центрального поперечного сечения (см. рис. 1, а); данные получены по разным моделям:

DNS [23] (черная кривая), RSM (синяя),  $k$ - $\epsilon$  RNG (красная); аппроксимации функциями  $Ev \sim f^{-5/4}$  (штриховая линия) и  $f^{-6}$  (штрихпунктирная)

**Спектральные характеристики.** На рис. 4 показаны энергетические спектры пульсаций осевой компоненты скорости в точке, расположенной при  $x' = 0,35$  на линии пересечения плоскости  $x'Oy'$  и центрального поперечного сечения. Спектры, полученные в расчетах на измельченной сетке (C2, 3,7 млн. ячеек) для моделей RSM и  $k$ - $\epsilon$  RNG сравниваются со спектром из работы [23], вычисленным по методу DNS на сетке, содержащей около 15 млн. ячеек. Отметим, что спектр, рассчитанный по модели  $k$ - $\omega$  SST, практически накладывается на спектр, полученный по модели рейнольдсовых напряжений (на рис. 4 не показан).

В случае модели RSM (а также  $k$ - $\omega$  SST) полученный спектр указывает на численное разрешение турбулентных пульсаций в заметной части квазиинерционного интервала, более выраженного в случае DNS-расчетов и указывающего на убывание спектральной плотности пропорционально  $f^{5/4}$ ; данный темп убывания близок к классическому закону  $Ev \sim f^{5/3}$  ( $Ev$  – спектральная плотность энергии, обезразмеренная на свое максимальное значение,  $f$  – безразмерная частота) для инерционного интервала в случае развитой изотропной турбулентности. Соответственно происходит более ранний, по сравнению с DNS, переход на выраженный «диссипативный» участок очень быстрого убывания, приблизительно пропорционального  $f^6$ . В противоположность этому, согласно модели  $k$ - $\epsilon$  RNG, предсказывается нестационарный режим конвекции с квазипериодическими пульсациями, охватывающими область промежуточных частот. Различие в результатах, полученных по моделям  $k$ - $\omega$  SST и  $k$ - $\epsilon$  RNG, обусловлено прежде всего тем, что последняя генерирует существенно более высокий уровень турбулентной вязкости, по сравнению с  $k$ - $\omega$  SST-моделью.

**Турбулентные напряжения и турбулентный поток тепла.** Далее перейдем к рассмотрению результатов, полученных по RANS-моделям для моментов второго порядка.

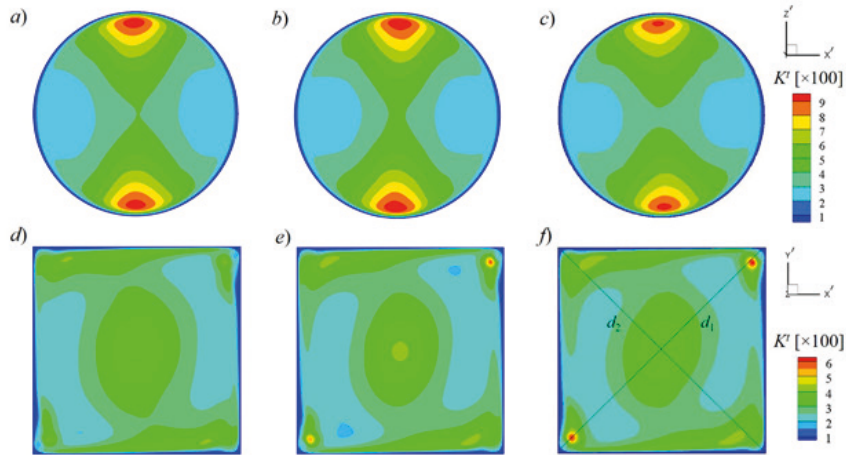


Рис. 5. Распределения кинетической энергии турбулентности в двух центральных сечениях цилиндра, полученные по моделям RSM (*a, b, d, e*) и DNS [23] (*c, f*), а также с использованием сеток C1 (*a, d*) и C2 (*b, e*)

Рис. 5 иллюстрирует влияние размерности расчетной сетки на качество предсказания RSM-моделью характерных особенностей, наблюдаемых в поле кинетической энергии турбулентности, в сопоставлении с данными DNS.

Указанные особенности заключаются в следующем:

1) наиболее интенсивный уровень пульсаций (красно-желтые зоны на рис. 5, *a – c*) наблюдается в слоях смешения, формирующихся при взаимодействии восходящего и нисходящего потоков в КМЦ;

2) в областях интенсивных восходящего и нисходящего потоков наблюдается крайне слабое пульсационное движение, и кинетическая энергия принимает в этих областях минимальные значения;

3) небольшие по размеру зоны с повышенными значениями кинетической энергии наблюдаются в угловых областях (красно-желтые «пятна» на рис. 5, *e, f*), где формируются стационарные в среднем, угловые вихри (это показано в работе [23]) и, соответственно, слои смешения с глобальным вихрем в виде КМЦ. В расчетах по RSM-модели первые две особенности хорошо воспроизводятся на обеих сетках, тогда как третью не удастся предсказать при использовании огрубленной сетки (см. рис. 5, *d*). То же относится и к полям турбулентных напряжений в угловых областях, которые анализируются далее.

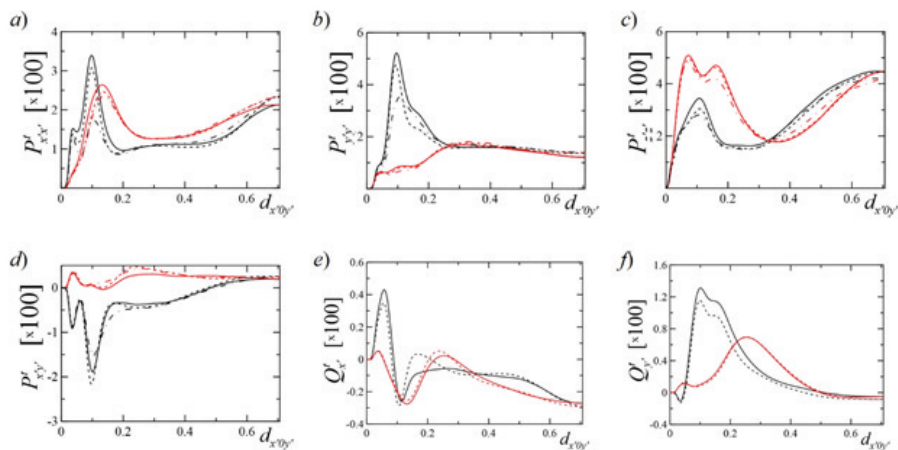


Рис. 6. Распределения компонент тензора турбулентных напряжений (*a – d*) и компонент вектора турбулентного потока тепла (*e, f*) вдоль диагоналей  $d_1$  (черные кривые) и  $d_2$  (красные) (см. рис. 5, *f*).

Данные получены по разным моделям: DNS [23] (сплошные кривые), URANS-расчеты по RSM-модели (остальные), а также с использованием сеток C1 (штрихпунктиры) и C2 (пунктиры)

На рис. 6 представлены рассчитанные распределения компонент тензора полных турбулентных напряжений и вектора турбулентного потока тепла вдоль диагоналей центрального продольного сечения емкости (см. рис. 5, *f*). Анализ факторов, определяющих вид представленных кривых, проведен в нашей работе [23]. В случае URANS-расчетов по RSM-модели кривые отражают суммарный вклад двух составляющих рассматриваемых величин: численно разрешаемой и моделируемой. Видно, что результаты URANS-вычислений на сетке C2 весьма удовлетворительно согласуются с данными DNS. Как отмечалось выше, на огрубленной сетке C1 не воспроизводятся особенности статистики второго порядка в слоях смещения, формирующихся при взаимодействии угловых вихрей и КМЦ: этот недостаток отчетливо прослеживается по расчетным результатам, представленным на рис. 6, *a, b*. С учетом этого факта результаты URANS-вычислений вектора турбулентного потока тепла (см. рис. 6, *e, f*) показаны только для измельченной сетки. Здесь также можно видеть в целом хорошую согласованность с данными DNS.

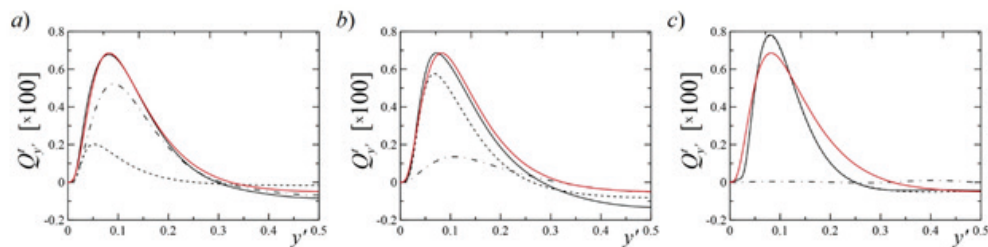


Рис. 7. Распределения осевой компоненты турбулентного потока тепла вдоль оси цилиндра; сравнение между расчетными данными разных RANS-моделей (черные кривые) и данными DNS [23] (красные), а также между вкладами составляющих турбулентного потока: моделируемой (пунктиры), численно разрешаемой (штрихпунктиры) и суммарной двух составляющих (сплошные линии). RANS-модели: RSM (*a*),  $k-\omega$  SST (*b*),  $k-\varepsilon$  RNG (*c*)

Профили осевой компоненты вектора турбулентного потока тепла, полученные по различным моделям турбулентности для линии, совпадающей с осью цилиндра, сопоставляются с данными DNS на рис. 7, где отражены вклады численно разрешаемой и моделируемой составляющих потока, а также их суммарный вклад. Видны сильные различия между результатами вычислений по различным RANS-моделям. Для области  $|y'| < 0,2$  с большими градиентами средней температуры (см. рис. 2, *d*) модель рейнольдсовых напряжений дает сопоставимые по величине значения для обеих составляющих полного потока, но с выраженным преобладанием разрешаемой составляющей.

В случае модели  $k-\omega$  SST (рис. 7, *b*), наоборот, преобладает моделируемая составляющая, а при использовании  $k-\varepsilon$  RNG-модели вклад разрешаемой составляющей практически отсутствует. Последнее обстоятельство, очевидно, связано с повышенным уровнем турбулентной вязкости в случае  $k-\varepsilon$  RNG-модели и относительно низкой интенсивностью предсказываемого квазипериодического течения. Соответственно, и профиль полного турбулентного теплового потока хуже всего оценивается в случае  $k-\varepsilon$  RNG.

На рис. 7 видно, что результаты, полученные по модели рейнольдсовых напряжений, находятся в очень хорошем согласии с данными DNS, несмотря на то, что для оценки моделируемой составляющей использовался упрощенный подход, основанный на применении градиентной гипотезы. Следовательно, можно заключить, что в случае URANS-расчетов рэлей-бенаровской конвекции с трехмерной КМЦ, проведенных по модели рейнольдсовых напряжений на достаточно измельченных сетках, нет необходимости решать дифференциальные уравнения переноса для компонент вектора турбулентного потока тепла.

### Заключение

В работе проведена оценка возможностей трех различных RANS-моделей турбулентности ( $k$ - $\omega$  SST,  $k$ - $\varepsilon$  RNG и одной из хорошо известных дифференциальных RSM-моделей) по предсказанию локальных и интегральных характеристик статистически трехмерной рэлей-бенаровской конвекции жидкого металла с определяющей ролью крупномасштабной циркуляции (КМЦ). Сформулированные выводы основаны на результатах нестационарных расчетов конвекции (Unsteady RANS), проведенных для слабо наклоненной цилиндрической емкости при числе Рэлея  $Ra = 10^6$  и числе Прандтля  $Pr = 0,025$ , в сопоставлении с ранее полученными данными прямого численного моделирования (DNS) для тех же условий.

По результатам тестовых расчетов установлено, что при использовании программного средства, реализующего численные схемы второго порядка точности, размерности сеток около полумиллиона ячеек достаточно для предсказания осредненных по времени полей скорости, температуры, локальной и интегральной теплоотдачи. Этот вывод может быть распространен на случай близких по геометрии задач о трехмерной рэлей-бенаровской конвекции жидкого металла. Для аккуратного предсказания статистических данных второго порядка (полных турбулентных напряжений и составляющих вектора турбулентного потока тепла) требуются сетки с числом ячеек, бóльшим на порядок.

Все использованные RANS-модели турбулентности предсказывают осредненные во времени поля скорости и температуры, а также локальную теплоотдачу на торцевых стенках, которые хорошо согласуются с данными DNS. Интегральные значения числа Нуссельта, полученные по разным RANS-моделям, отличаются от данных DNS не более, чем на 3,6 %; при этом в случае  $k$ - $\varepsilon$  RNG-модели наблюдается отклонение в меньшую сторону, а для двух других моделей – в бóльшую. Результат, наиболее близкий к полученному по методу DNS, дает модель рейнольдсовых напряжений.

При использовании моделей  $k$ - $\omega$  SST и RSM численное решение, полученное на сетке размерностью 3,7 млн. ячеек, имеет турбулентный характер, со сплошным спектром разрешаемых пульсаций, вносящих большой вклад в статистические характеристики второго порядка. В противоположность этому, модель  $k$ - $\varepsilon$  RNG предсказывает нестационарный режим конвекции с квазипериодическими пульсациями малой интенсивности, и практически весь вклад в моменты второго порядка дает моделируемая составляющая. Наилучшее согласие с данными DNS по суммарным моментам второго порядка получено при использовании модели рейнольдсовых напряжений.

С учетом вышеизложенного, представленный в настоящей работе опыт применения данного подхода для решения модельной задачи может быть полезен при численном исследовании широкого круга промышленных и геофизических проблем, связанных с изучением конвекции рэлей-бенаровского типа, в которой важную или даже определяющую роль играет статистически трехмерная крупномасштабная циркуляция.

### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Ahlers G., Grossmann S., Lohse D. Heat transfer and large scale dynamics in turbulent Rayleigh – Bénard convection // *Reviews of Modern Physics*. 2009. Vol. 81. No. 2. Pp. 503–538.
2. Chilla F., Schumacher J. New perspectives in turbulent Rayleigh – Bénard convection // *The European Physical Journal. E*. 2012. Vol. 35. No. 7. P. 58.
3. Castaing B., Gunaratne G., Heslot F., Kadanoff L., Libchaber A., Thomae S., Wu X.-Z., Zaleski S., Zanetti G. Scaling of hard thermal turbulence in Rayleigh – Bénard convection // *Journal of Fluid Mechanics*. 1989. Vol. 204. July. Pp. 1–30.
4. Ahlers G., Xu X. Prandtl-number dependence of heat transport in turbulent Rayleigh – Bénard convection // *Physical Review Letters*. 2001. Vol. 86. No. 15. Pp. 3320–3323.
5. Shishkina O., Thess A. Mean temperature profiles in turbulent Rayleigh – Bénard convection of water // *Journal of Fluid Mechanics*. 2009. Vol. 633. 25 August. Pp. 449–460.
6. Li Y.-R., Ouyang Y.-Q., Peng L., Wu S.-Y. Direct numerical simulation of Rayleigh – Bénard convection in a cylindrical container of aspect ratio 1 for moderate Prandtl number fluid // *Physics of Fluids*. 2012. Vol. 24. No. 7. P. 074103.

7. **Lakkaraju R., Stevens R. J. A. M., Verzicco R., Grossmann S., Prosperetti A., Sun C., Lohse D.** Spatial distribution of heat flux and fluctuations in turbulent Rayleigh – Bénard convection // *Physical Review. E*. 2012. Vol. 86. No. 5. P. 056315.
8. **Cioni S., Ciliberto S., Sommeria J.** Experimental study of high-Rayleigh-number convection in mercury and water // *Dynamics of Atmospheres and Oceans*. 1996. Vol. 24. No. 1. Pp. 117–127.
9. **Qui X.-L., Tong P.** Large-scale velocity structures in turbulent thermal convection // *Physical Review. E*. 2001. Vol. 64. No. 3. P. 036304.
10. **Sreenivasan K. R., Bershadskii A., Niemela J. J.** Mean wind and its reversal in thermal convection // *Physical Review. E*. 2002. Vol. 65. No. 5. P. 056306.
11. **Zürner T., Schindler F., Vogt T., Eckert S., Schumacher J.** Combined measurement of velocity and temperature in liquid metal convection // *Journal of Fluid Mechanics*. 2019. Vol. 876. 10 October. Pp. 1108–1128.
12. **Abramov A. G., Ivanov N. G., Smirnov E. M.** Numerical study of high-Ra Rayleigh – Bénard mercury and water convection in confined enclosures using a hybrid RANS/LES technique // *Proceedings of the Eurotherm Seminar 74 “Heat Transfer in Unsteady and Transitional Flows”*. March 23–26, 2003; Eindhoven, the Netherlands. Ed. by H. C. de Lange, A. A. van Steenhoven, TUE, 2003. Pp. 33–38.
13. **Stevens R. J. A. M., Clercx H. J. H., Lohse D.** Effect of plumes on measuring the large scale circulation in turbulent Rayleigh – Bénard convection // *Physics of Fluids*. 2011. Vol. 23. No. 9. P. 095110.
14. **Mishra P. K., De A. K., Verma M. K., Eswaran V.** Dynamics of reorientations and reversals of large-scale flow in Rayleigh – Bénard convection // *Journal of Fluid Mechanics*. 2011. Vol. 668. 10 February. Pp. 480–499.
15. **Schumacher J., Bandaru V., Pandey A., Scheel J. D.** Transitional boundary layers in low-Prandtl-number convection // *Physical Review Fluids*. 2016. Vol. 1. No. 8. P. 084402.
16. **Chilla F., Rastello M., Chaumat S., Castaing B.** Long relaxation times and tilt sensitivity in Rayleigh – Bénard turbulence // *The European Physical Journal. B*. 2004. Vol. 40. No. 2. Pp. 223–227.
17. **Brown E., Ahlers G.** Rotations and cessations of the large-scale circulation in turbulent Rayleigh – Bénard convection // *Journal of Fluid Mechanics*. 2006. Vol. 568. 10 December. Pp. 351–386.
18. **Xi H.-D., Xia K.-Q.** Azimuthal motion, reorientation, cessation, and reversal of the large-scale circulation in turbulent thermal convection: A comparative study in aspect ratio one and one-half geometries // *Physical Review. E*. 2008. Vol. 78. No. 3. P. 036326.
19. **Ji D., Bai K., Brown E.** Effects of tilt on the orientation dynamics of the large-scale circulation in turbulent Rayleigh – Bénard convection // *Physics of Fluids*. 2020. Vol. 32. No. 7. P. 075118.
20. **Zwirner L., Khalilov R., Kolesnichenko I., Mamykin A., Mandrykin S., Pavlinov A., Shestakov A., Teimurazov A., Frick P., Shishkina O.** The influence of the cell inclination on the heat transport and large-scale circulation in liquid metal convection // *Journal of Fluid Mechanics*. 2020. Vol. 884. 10 February. P. A18.
21. **Shishkina O., Horn S.** Thermal convection in inclined cylindrical containers // *Journal of Fluid Mechanics*. 2016. Vol. 790. 10 March. P. R3.
22. **Smirnov S. I., Abramov A. G., Smirnov E. M.** Numerical simulation of turbulent Rayleigh – Bénard mercury convection in a circular cylinder with introducing small deviations from the axisymmetric formulation // *Journal of Physics: Conference Series*. 2019. Vol. 1359. No. 1. P. 012077.
23. **Смирнов С. И., Смирнов Е. М.** Прямое численное моделирование турбулентной конвекции Рэлея – Бенара в слегка наклоненном цилиндрическом контейнере // *Научно-технические ведомости СПбГПУ. Физико-математические науки*. 2020. Т. 13. № 1. С. 14–25.
24. **Smirnov S., Smirnovsky A., Bogdanov S.** The emergence and identification of large-scale coherent structures in free convective flows of the Rayleigh – Bénard type // *Fluids*. 2021. Vol. 6. No. 12. Pp. 431–450.
25. **Van der Poel E. P., Stevens R. J. A. M., Lohse D.** Comparison between two- and three-dimensional Rayleigh – Bénard convection // *Journal of Fluid Mechanics*. 2013. Vol. 736. 10 December. Pp. 177–194.
26. **Horn S., Shishkina O.** Toroidal and poloidal energy in rotating Rayleigh – Bénard convection // *Journal of Fluid Mechanics*. 2015. Vol. 762. 10 January. Pp. 232–255.

27. **Scheel J. D., Schumacher J.** Global and local statistics in turbulent convection at low Prandtl numbers // *Journal of Fluid Mechanics*. 2016. Vol. 802. 10 September. Pp. 147–173.
28. **Sakievich P. J., Peet Y. T., Adrian R. J.** Large-scale thermal motions of turbulent Rayleigh – Bénard convection in a wide aspect-ratio cylindrical domain // *International Journal of Heat and Fluid Flow*. 2016. Vol. 61. No. 2. Pp. 193–196.
29. **Kooij G. L., Botchev M. A., Frederix E. M. A., Geurts B. J., Horn S., Lohse D., van der Poel E. P., Shishkina O., Stevens R. J. A. M., Verzicco R.** Comparison of computational codes for direct numerical simulations of turbulent Rayleigh – Bénard convection // *Computers & Fluids*. 2018. Vol. 166. 30 April. Pp. 1–8.
30. **Wan Z.-H., Wei P., Verzicco R., Lohse D., Ahlers G., Stevens R. J. A. M.** Effect of sidewall on heat transfer and flow structure in Rayleigh – Bénard convection // *Journal of Fluid Mechanics*. 2019. Vol. 881. 25 December. Pp. 218–243.
31. **Смирнов С. И., Смирнов Е. М., Смирновский А. А.** Влияние теплопереноса в торцевых стенках на турбулентную конвекцию ртути во вращающемся цилиндре // *Научно-технические ведомости СПбПУ. Физико-математические науки*. 2017. Т. 10. № 1. С. 31–46.
32. **Смирнов С. И., Смирновский А. А.** Численное моделирование турбулентной свободной конвекции ртути в подогреваемом снизу цилиндре при нулевой и конечной толщине горизонтальных стенок // *Тепловые процессы в технике*. 2018. Т. 10. № 3–4. С. 94–100.
33. **Borisov D. V., Kalaev V. V.** ILES of melt turbulent convection with conjugated heat transfer in the crucible and gas flow for Czochralski silicon crystal growth system // *Journal of Crystal Growth*. 2021. Vol. 573. No. 3. P. 126305.
34. **Kenjereš S., Hanjalić K.** Transient analysis of Rayleigh – Bénard convection with a RANS model // *International Journal of Heat and Fluid Flow*. 1999. Vol. 20. No. 3. Pp. 329–340.
35. **Hanjalić K., Kenjereš S.** Reorganization of turbulence structure in magnetic Rayleigh – Bénard convection: a T-RANS study // *Journal of Turbulence*. 2000. Vol. 1. No. 8. Pp. 1–22.
36. **Kenjereš S., Hanjalić K.** LES, T-RANS and hybrid simulations of thermal convection at high Ra numbers // *International Journal of Heat and Fluid Flow*. 2006. Vol. 27. No. 5. Pp. 800–810.
37. **Choi S.-K., Han J.-W., Choi H.-K.** Performance of second-moment differential stress and flux models for natural convection in an enclosure // *International Communications in Heat and Mass Transfer*. 2018. Vol. 99. December. Pp. 54–61.
38. **Clifford C. E., Kimber M. L.** Assessment of RANS and LES turbulence models for natural convection in a differentially heated square cavity // *Numerical Heat Transfer. Part A*. 2020. Vol. 78. No. 10. Pp. 560–594.
39. **Левченя А. М., Трунова С. Н., Колесник Е. В.** Оценка возможностей RANS-моделей турбулентности по результатам расчетов свободной конвекции, развивающейся вблизи внезапно нагретой вертикальной пластины // *Научно-технические ведомости СПбГПУ. Физико-математические науки*. 2020. Т. 13. № 2. С. 27–40.
40. **Katsamis C., Craft T., Iacovides H., Uribe J. C.** Use of 2-D and 3-D unsteady RANS in the computation of wall bounded buoyant flows // *International Journal of Heat and Fluid Flow*. 2022. Vol. 93. February. P. 108914.
41. **Левченя А. М., Смирнов Е. М., Трунова С. Н.** Влияние периодической макрошероховатости на развитие турбулентной свободной конвекции у внезапно нагреваемой вертикальной пластины // *Письма в Журнал технической физики*. 2022. Т. 48. № 3. С. 47–50.
42. **Orszag S. A., Yakhot V., Flannery W. S., Boysan F., Choudhury D., Maruzewski J., Patel B.** Renormalization group modeling and turbulence simulations // *Proceedings of the International Conference on Near-Wall Turbulent Flows, Tempe, Arizona, USA, 15–17 March 1993*. P. 1031.
43. **Menter F. R.** Two-equation eddy-viscosity turbulence models for engineering applications // *AIAA Journal (Journal of the American Institute of Aeronautics and Astronautics)*. 1994. Vol. 32. No. 8. Pp. 1598–1605.
44. **Menter F. R., Kuntz M., Langtry R.** Ten 222s of industrial experience with the SST turbulence model // *Turbulence, Heat and Mass Transfer*. Vol. 4. *Proceedings of the Fourth International Symposium on Turbulence, Heat and Mass Transfer*. Antalya, Turkey, 12–17 October, 2003. Pp. 625–632.
45. **Launder B. E., Reece G. J., Rodi W.** Progress in the development of a Reynolds-stress turbulence closure // *Journal of Fluid Mechanics*. 1975. Vol. 68. No. 3. Pp. 537–566.
46. **Gibson M. M., Launder B. E.** Ground effects on pressure fluctuations in the atmospheric

boundary layer // *Journal of Fluid Mechanics*. 1978. Vol. 86. No. 3. Pp. 491–511.

47. **Wilcox D. C.** Turbulence modeling for CFD. 2nd edition. La Canada, California: DCW Industries, 1998. 457 p.

## REFERENCES

1. **Ahlers G., Grossmann S., Lohse D.**, Heat transfer and large scale dynamics in turbulent Rayleigh – Bénard convection, *Rev. Mod. Phys.* 81 (2) (2009) 503–538.
2. **Chilla F., Schumacher J.**, New perspectives in turbulent Rayleigh – Bénard convection, *Eur. Phys. J. E.* 35 (7) (2012) 58.
3. **Castaing B., Gunaratne G., Heslot F., et al.**, Scaling of hard thermal turbulence in Rayleigh – Bénard convection, *J. Fluid Mech.* 204 (July) (1989) 1–30.
4. **Ahlers G., Xu X.**, Prandtl-number dependence of heat transport in turbulent Rayleigh – Bénard convection, *Phys. Rev. Lett.* 86 (15) (2001) 3320–3323.
5. **Shishkina O., Thess A.**, Mean temperature profiles in turbulent Rayleigh – Bénard convection of water, *J. Fluid Mech.* 633 (25 August) (2009) 449–460.
6. **Li Y.-R., Ouyang Y.-Q., Peng L., Wu S.-Y.**, Direct numerical simulation of Rayleigh – Bénard convection in a cylindrical container of aspect ratio 1 for moderate Prandtl number fluid, *Phys. Fluids.* 24 (7) (2012) 074103.
7. **Lakkaraju R., Stevens R. J. A. M., Verzicco R., et al.**, Spatial distribution of heat flux and fluctuations in turbulent Rayleigh – Bénard convection, *Phys. Rev. E.* 86 (5) (2012) 056315.
8. **Cioni S., Ciliberto S., Sommeria J.**, Experimental study of high-Rayleigh-number convection in mercury and water, *Dyn. Atmos. Oceans.* 24 (1) (1996) 117–127.
9. **Qui X.-L., Tong P.**, Large-scale velocity structures in turbulent thermal convection, *Phys. Rev. E.* 64 (3) (2001) 036304.
10. **Sreenivasan K. R., Bershadskii A., Niemela J. J.**, Mean wind and its reversal in thermal convection, *Phys. Rev. E.* 65 (5) (2002) 056306.
11. **Zürner T., Schindler F., Vogt T., et al.**, Combined measurement of velocity and temperature in liquid metal convection, *J. Fluid Mech.* 876 (10 October) (2019) 1108–1128.
12. **Abramov A. G., Ivanov N. G., Smirnov E. M.**, Numerical study of high-Ra Rayleigh – Bénard mercury and water convection in confined enclosures using a hybrid RANS/LES technique, *Proc. Eurotherm Seminar 74 “Heat Transfer in Unsteady and Transitional Flows”*, March 23–26, 2003, Eindhoven, the Netherlands; Ed. by H. C. de Lange, A. A. van Steenhoven, TUE (2003) 33–38.
13. **Stevens R. J. A. M., Clercx H. J. H., Lohse D.**, Effect of plumes on measuring the large scale circulation in turbulent Rayleigh – Bénard convection, *Phys. Fluids.* 23 (9) (2011) 095110.
14. **Mishra P. K., De A. K., Verma M. K., Eswaran V.**, Dynamics of reorientations and reversals of large-scale flow in Rayleigh – Bénard convection, *J. Fluid Mech.* 668 (10 February) (2011) 480–499.
15. **Schumacher J., Bandaru V., Pandey A., Scheel J. D.**, Transitional boundary layers in low-Prandtl-number convection, *Phys. Rev. Fluids.* 1 (8) (2016) 084402.
16. **Chilla F., Rastello M., Chaumat S., Castaing B.**, Long relaxation times and tilt sensitivity in Rayleigh – Bénard turbulence, *Eur. Phys. J. B.* 40 (2) (2004) 223–227.
17. **Brown E., Ahlers G.**, Rotations and cessations of the large-scale circulation in turbulent Rayleigh – Bénard convection, *J. Fluid Mech.* 568 (10 December) (2006) 351–386.
18. **Xi H.-D., Xia K.-Q.**, Azimuthal motion, reorientation, cessation, and reversal of the large-scale circulation in turbulent thermal convection: A comparative study in aspect ratio one and one-half geometries, *Phys. Rev. E.* 78 (3) (2008) 036326.
19. **Ji D., Bai K., Brown E.**, Effects of tilt on the orientation dynamics of the large-scale circulation in turbulent Rayleigh – Bénard convection, *Phys. Fluids.* 32 (7) (2020) 075118.
20. **Zwirner L., Khalilov R., Kolesnichenko I., et al.**, The influence of the cell inclination on the heat transport and large-scale circulation in liquid metal convection, *J. Fluid Mech.* 884 (10 February) (2020) A18.
21. **Shishkina O., Horn S.**, Thermal convection in inclined cylindrical containers *J. Fluid Mech.* 790 (10 March) (2016) R3.
22. **Smirnov S. I., Abramov A. G., Smirnov E. M.**, Numerical simulation of turbulent Rayleigh – Bénard mercury convection in a circular cylinder with introducing small deviations from the axisymmetric formulation, *J. Phys. Conf. Ser.* 1359 (1) (2019) 012077.



23. **Smirnov S. I., Smirnov E. M.**, Direct numerical simulation of the turbulent Rayleigh – Bénard convection in a slightly tilted cylindrical contain, *St. Petersburg State Polytechnical University Journal. Physics and Mathematics*. 13 (1) (2020) 14–25 (in Russian).
24. **Smirnov S., Smirnovsky A., Bogdanov S.**, The emergence and identification of large-scale coherent structures in free convective flows of the Rayleigh – Bénard type, *Fluids*. 6 (12) (2021) 431–450.
25. **Van der Poel E. P., Stevens R. J. A. M., Lohse D.**, Comparison between two- and three-dimensional Rayleigh – Bénard convection, *J. Fluid Mech.* 736 (10 December) (2013) 177–194.
26. **Horn S., Shishkina O.**, Toroidal and poloidal energy in rotating Rayleigh – Bénard convection, *J. Fluid Mech.* 762 (10 January) (2015) 232–255.
27. **Scheel J. D., Schumacher J.**, Global and local statistics in turbulent convection at low Prandtl numbers, *J. Fluid Mech.* 802 (10 September) (2016) 147–173.
28. **Sakievich P. J., Peet Y. T., Adrian R. J.**, Large-scale thermal motions of turbulent Rayleigh–Bénard convection in a wide aspect-ratio cylindrical domain, *Int. J. Heat Fluid Flow*. 61 (2) (2016) 193–196.
29. **Kooij G. L., Botchev M. A., Frederix E. M. A., et al.**, Comparison of computational codes for direct numerical simulations of turbulent Rayleigh – Bénard convection, *Comp. & Fluids*. 166 (30 April) (2018) 1–8.
30. **Wan Z.-H., Wei P., Verzicco R., et al.**, Effect of sidewall on heat transfer and flow structure in Rayleigh – Bénard convection, *J. Fluid Mech.* 881 (25 December) (2019) 218–243.
31. **Smirnov S. I., Smirnov E. M., Smirnovskiy A. A.**, Endwall heat transfer effects on the turbulent mercury convection in a rotating cylinder, *St. Petersburg State Polytechnical University Journal. Physics and Mathematics*. 10 (1) (2017) 31–46 (in Russian).
32. **Smirnov S. I., Smirnovskiy A. A.**, Numerical simulation of turbulent mercury natural convection in a heated-from-below cylinder with zero and non-zero thickness of the horizontal walls, *Teplovyye Protsessy v Tekhnike [Thermal Processes in Technology]*. 10 (3–4) (2018) 94–100 (in Russian).
33. **Borisov D. V., Kalaev V. V.**, ILES of melt turbulent convection with conjugated heat transfer in the crucible and gas flow for Czochralski silicon crystal growth system, *J. Cryst. Growth*. 573 (3) (2021) 126305.
34. **Kenjereš S., Hanjalić K.** Transient analysis of Rayleigh – Bénard convection with a RANS model, *Int. J. Heat Fluid Flow*. 20 (3) (1999) 329–340.
35. **Hanjalić K., Kenjereš S.**, Reorganization of turbulence structure in magnetic Rayleigh – Bénard convection: a T-RANS study, *J. Turbul.* 1 (8) (2000) 1–22.
36. **Kenjereš S., Hanjalić K.**, LES, T-RANS and hybrid simulations of thermal convection at high Ra numbers, *Int. J. Heat Fluid Flow*. 27 (5) (2006) 800–810.
37. **Choi S.-K., Han J.-W., Choi H.-K.**, Performance of second-moment differential stress and flux models for natural convection in an enclosure, *Int. Commun. Heat Mass Transf.* 99 (December) (2018) 54–61.
38. **Clifford C. E., Kimber M. L.**, Assessment of RANS and LES turbulence models for natural convection in a differentially heated square cavity, *Numer. Heat Transf. Part A*. 78 (10) (2020) 560–594.
39. **Levchenya A. M., Trunova S. N., Kolesnik E. V.**, Assessment of RANS turbulence models capabilities based on computational results for free convection developing near a suddenly heated vertical plate, *St. Petersburg State Polytechnical University Journal. Physics and Mathematics*. 13 (2) (2020) 27–40 (in Russian).
40. **Katsamis C., Craft T., Iacovides H., Uribe J. C.**, Use of 2-D and 3-D unsteady RANS in the computation of wall bounded buoyant flows, *Int. J. Heat Fluid Flow*. 93 (February) (2022) 108914.
41. **Levchenya A. M., Smirnov E. M., Trunova S. N.**, Vliyaniye periodicheskoy makrosherokhovatosti na razvitiye turbulentnoy svobodnoy konveksii u vnezapno nagrevayemoy vertikalnoy plastiny [The influence of periodical macroroughness on the development of free turbulent convection near a suddenly heated vertical plate], *Pisma v Zhurnal Tekhnicheskoy Fiziki*. 48 (3) (2022) 47–50 (in Russian).
42. **Orszag S. A., Yakhot V., Flannery W. S., et al.**, Renormalization group modeling and turbulence simulations, *Proc. Int. Conf. Near-Wall Turbulent Flows*, Tempe, Arizona, USA, 15–17 March (1993) 1031.
43. **Menter F. R.**, Two-equation eddy-viscosity turbulence models for engineering applications, *AIAA J.* 32 (8) (1994) 1598–1605.

44. **Menter F. R., Kuntz M., Langtry R.**, Ten 2022s of industrial experience with the SST turbulence model, In Book: Turbulence, Heat and Mass Transfer. Vol. 4. Proc. Fourth Int. Symp. Turbulence, Heat & Mass Transfer. Antalya, Turkey, 12–17 October (2003) 625–632.

45. **Launder B. E., Reece G. J., Rodi W.**, Progress in the development of a Reynolds-stress turbulence closure, J. Fluid Mech. 68 (3) (1975) 537–566.

46. **Gibson M. M., Launder B. E.**, Ground effects on pressure fluctuations in the atmospheric boundary layer, J. Fluid Mech. 86 (3) (1978) 491–511.

47. **Wilcox D. C.**, Turbulence modeling for CFD. 2nd edition, DCW Industries, La Canada, California, 1998.

### СВЕДЕНИЯ ОБ АВТОРАХ

**СМИРНОВ Сергей Игоревич** – кандидат физико-математических наук, инженер научно-образовательного центра «Компьютерные технологии в аэродинамике и теплотехнике» Санкт-Петербургского политехнического университета Петра Великого, Санкт-Петербург, Россия.

195251, Россия, г. Санкт-Петербург, Политехническая ул., 29

sergeysmirnov92@mail.ru

ORCID: 0000-0002-3972-9259

**СМИРНОВ Евгений Михайлович** – доктор физико-математических наук, профессор Высшей школы прикладной математики и вычислительной физики Санкт-Петербургского политехнического университета Петра Великого, Санкт-Петербург, Россия.

195251, Россия, г. Санкт-Петербург, Политехническая ул., 29

smirnov\_em@spbstu.ru

ORCID: 0000-0002-7218-6372

### THE AUTHORS

**SMIRNOV Sergei I.**

*Peter the Great St. Petersburg Polytechnic University*

29 Politechnicheskaya St., St. Petersburg, 195251, Russia

sergeysmirnov92@mail.ru

ORCID: 0000-0002-3972-9259

**SMIRNOV Evgeny M.**

*Peter the Great St. Petersburg Polytechnic University*

29 Politechnicheskaya St., St. Petersburg, 195251, Russia

smirnov\_em@spbstu.ru

ORCID: 0000-0002-7218-6372

*Статья поступила в редакцию 01.04.2022. Одобрена после рецензирования 06.06.2022. Принята 06.06.2022.*

*Received 01.04.2022. Approved after reviewing 06.06.2022. Accepted 06.06.2022.*