

Научная статья

УДК 629.7.036

DOI: <https://doi.org/10.18721/JPM.16111>

## МЕТОД ЗАДАНИЯ ЦЕНТРОБЕЖНЫХ НАГРУЗОК ВАЛОВ ПРИ РАСЧЕТЕ ДИСБАЛАНСНОГО ПОВЕДЕНИЯ РОТОРОВ

А. Р. Усманов ✉, В. С. Модестов

Санкт-Петербургский политехнический университет Петра Великого,

Санкт-Петербург, Россия

✉ [ysman2d@gmail.com](mailto:ysman2d@gmail.com)

**Аннотация.** В статье предложен расчетный метод задания центробежных нагрузок роторов свободной турбины, учитывающий дисбаланс ее валов. Традиционный метод этот эффект не учитывает, тогда как при приближении к критическим частотам дисбаланс может привести к значительным прогибам ротора. На примере системы из трех валов описан метод задания центробежных нагрузок при решении задачи теории упругости в балочной аппроксимации с применением метода конечных элементов и метода разложения по формам собственных колебаний. Рассмотрены нагрузки от разнотолщинности, биения наружной поверхности и биения посадочных поверхностей. Проведен эксперимент, который состоял в вибрационных испытаниях газотурбинного двигателя. На тестовой задаче показано, что учет дисбаланса валов приводит к результатам, более близким к экспериментальным.

**Ключевые слова:** дисбаланс, прогиб вала, центробежная нагрузка, разнотолщинность, разностенность, радиальное биение, допуск

**Для цитирования:** Усманов А. Р., Модестов В. С. Метод задания центробежных нагрузок валов при расчете дисбалансного поведения роторов // Научно-технические ведомости СПбГПУ. Физико-математические науки. 2023. Т. 16. № 1. С. 132–139. DOI: <https://doi.org/10.18721/JPM.16111>

Статья открытого доступа, распространяемая по лицензии CC BY-NC 4.0 (<https://creativecommons.org/licenses/by-nc/4.0/>)

Original article

DOI: <https://doi.org/10.18721/JPM.16111>

## METHOD OF SPECIFYING THE CENTRIFUGAL LOADS OF SHAFTS IN CALCULATION OF THE ROTOR UNBALANCE BEHAVIOR

A. R. Usmanov ✉, V. S. Modestov

Peter the Great St. Petersburg Polytechnic University, St. Petersburg, Russia

✉ [ysman2d@gmail.com](mailto:ysman2d@gmail.com)

**Abstract.** In the paper, a calculation method for specifying the centrifugal loads (SCLM) of free turbine rotors (turbine shaft unbalance method) has been put forward. The traditional method does not take this effect into account whereas the unbalance can lead to significant rotor deflections when approaching the critical frequencies. The SCLM in the solution of the problem within the elasticity theory in beam approximation using the finite element method (FEM) and the eigenfunction expansion method was exemplified by a three shaft system. The

loads caused by thickness variation, radial runout of outside surfaces and the one of mounting surfaces were considered. An experiment consisting of vibration tests of a gas turbine engine was carried out. The test task showed that taking the shaft unbalance into account gave results being closer to the experimental ones.

**Keywords:** unbalance, shaft deflection, centrifugal load, thickness variation, radial runout, tolerance

**For citation:** Usmanov A. R., Modestov V. S., Method of specifying the centrifugal loads of shafts in calculation of the rotor unbalance behavior, St. Petersburg State Polytechnical University Journal. Physics and Mathematics. 16 (1) (2023) 132–139. DOI: <https://doi.org/10.18721/JPM.16111>

This is an open access article under the CC BY-NC 4.0 license (<https://creativecommons.org/licenses/by-nc/4.0/>)

### Введение

Наиболее распространенной причиной появления рабочего прогиба ротора является смещение центров тяжести его сечений из-за неточности изготовления деталей.

Основной метод снижения рабочего прогиба ротора – это его балансировка путем добавления масс, компенсирующих дисбаланс деталей. В работе [1] показано, что балансировка гибкого ротора как жесткого может привести к увеличению нагрузок на опоры при работе на критических скоростях вращения. Другой подход к снижению рабочего прогиба гибких роторов заключается в оптимизации их конструкции через математическое моделирование.

Для того чтобы задать исходные нагрузки при расчетном определении рабочего прогиба гибких роторов, в настоящее время применяется задание дисбаланса рабочих колес и остаточного дисбаланса в плоскостях балансировки ротора [2 – 5]. При этом не учитывается дисбаланс вала, который при приближении к критическим частотам может привести к значительным прогибам ротора.

Цель настоящей статьи – разработать такой метод задания центробежных нагрузок, который бы учитывал дисбаланс валов, и сравнить его возможности с традиционным методом.

### Методы исследования

Задача теории упругости в балочной аппроксимации с применением метода конечных элементов и метода разложения по формам собственных колебаний сводится к системе уравнений следующего вида [6]:

$$\bar{M}\ddot{e} + \sum_{i=1}^{n_L} \bar{C}_d(i)\dot{e} + \bar{K}e = \bar{Q}(t), \quad (1)$$

где  $e$  – вектор-столбец модальных координат;  $\bar{C}_d(i)$  – матрица демпфирования  $i$ -го демпфера;  $n_L$  – число демпферов;  $\bar{M} = q^T M q$ ;  $\bar{K} = q^T K q$ ;  $\bar{Q} = q^T Q q$ ; ( $M$  – матрица инерции,  $K$  – матрица жесткости,  $Q$  – вектор-столбец обобщенных внешних сил в узлах системы,  $q$  – матрица собственных форм);  $t$  – время.

Если перейти к вращающейся системе координат для вращающихся участков и пренебречь уравновешенными центробежными нагрузками, то можно показать, что система инерционных сил на этих участках сводится к действию неуравновешенных центробежных нагрузок и гироскопических моментов [7].

С учетом этого утверждения система (1) принимает вид

$$\bar{M}\ddot{e} + \left[ \bar{C}_g + \sum_{i=1}^{n_L} \bar{C}_d(i) \right] \dot{e} + \bar{K}e = \bar{Q}(t), \quad (2)$$

где  $\bar{C}_g$  – суммарная гироскопическая матрица.

В этом случае неуравновешенные нагрузки задаются как составная часть внешней нагрузки  $Q$ .

Элементы матрицы  $\bar{C}_a(i)$  определяются, исходя из аналитического решения уравнений Рейнольдса в области масляной пленки в зазорах между ротором и статором [8].

На примере системы простых цилиндрических валов можно показать (см. доклад [9]), что неуровновешенные центробежные нагрузки валов вызваны воздействием следующих факторов:

- разнотолщинность,
- радиальное биение наружной поверхности,
- радиальное биение посадочных поверхностей.

Покажем, что дисбаланс некоторого сечения вала определяется по формуле

$$\bar{D} = m\mathbf{r}, \quad (3)$$

где  $\mathbf{r}$  – радиус-вектор центра тяжести сечения,  $m$  – масса сечения.

Разобьем сечение вала на элементарные участки  $\Delta S_i$ , как это показано на рис. 1.

Тогда дисбаланс сечения определяется по формуле

$$\bar{D} \approx \sum_{i=1}^N m_i r_i = \sum_{i=1}^N \rho \Delta S_i h r_i, \quad (4)$$

где  $h$  – толщина сечения,  $\rho$  – плотность его материала.

Проекция  $D_y$  дисбаланса сечения выражается как

$$D_y \approx \sum_{i=1}^N \rho \Delta S_i h y_i. \quad (5)$$

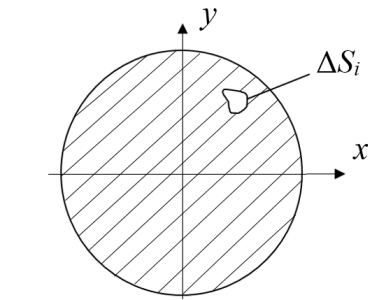


Рис. 1. Сечение вала, на котором показан элементарный участок разбиения  $\Delta S_i$

Переходя к пределу, получаем точную формулу для определения проекции  $D_y$ :

$$D_y = \lim_{\max_i \Delta S_i \rightarrow 0} \sum_{i=1}^N \rho \Delta S_i h y_i = \rho h \int_S y dS = \rho h S \frac{\int_S y dS}{S} = \rho h S y_c = m y_c, \quad (6)$$

где  $S$  – площадь сечения вала,  $y_c$  – проекция вектора  $\mathbf{r}$  на ось  $OY$ .

Аналогично можно показать, что

$$D_x = m x_c. \quad (7)$$

В итоге доказано, что дисбаланс некоторого сечения вала определяется по формуле (3).

Модуль дисбаланса в случае разнотолщинности, с учетом формулы (3), определяется выражением:

$$D = m y_c = \frac{m d_0^2 s}{2(d^2 - d_0^2)}, \quad (8)$$

где  $m$  – масса вала;  $d$ ,  $d_0$  – внешний и внутренний диаметры сечения вала соответственно;  $s$  – значение разнотолщинности, понимаемой как разность между максимальным и минимальным значениями толщины сечения вала.

В случае биения наружной поверхности модуль дисбаланса определяется по формуле

$$D = m a, \quad (9)$$

где  $a$  – значение биения наружной поверхности вала относительно его опорных поверхностей.

В случае биения посадочной поверхности вала модуль дисбаланса, отнесенного к единице длины вала, определяется по формуле

$$dD(x) = \left( b_1 - \frac{x}{x_{II}} b_1 \right) \rho_l dx, \quad (10)$$

где  $\rho_l$  – плотность вала на единицу длины,  $b_1$  – значение биения первой посадочной поверхности,  $x_{II}$  – координата второй посадочной поверхности.



В случае дисбаланса рабочего колеса  $d_{run}$  и остаточного дисбаланса в плоскостях балансировки  $d_{res}$  модуль дисбаланса определяется по формулам:

$$D = d_{run}, \quad (11)$$

$$D = d_{res}. \quad (12)$$

В общем случае действия на систему пространственной системы, состоящей из  $n$  сил, формулы проекций перемещений в произвольно выбранных точках в количестве  $m$  примут вид:

$$\delta_i^x = D_0 \delta_{i0} \cos \varphi_0 + D_1 \delta_{i1} \cos \varphi_1 + \dots + D_n \delta_{in} \cos \varphi_n, \quad (13)$$

$$\delta_i^y = D_0 \delta_{i0} \sin \varphi_0 + D_1 \delta_{i1} \sin \varphi_1 + \dots + D_n \delta_{in} \sin \varphi_n, \quad (14)$$

где  $\delta_i^x, \delta_i^y$  – проекции перемещения в  $i$ -й точке ( $i = 1, 2, \dots, m$ );  $\delta_{ij}$  – перемещение в  $i$ -й точке от единичного  $j$ -го дисбаланса  $D_j$ ;  $\varphi_j$  – угол  $j$ -го дисбаланса.

Допустим теперь, что случайные величины  $s, b, a, \varphi_i, d_{run}, d_{res}$  являются равномерно распределенными и независимыми, причем каждая случайная величина  $\varphi_i$  распределена в интервале  $[0, 2\pi]$ , а максимальные значения всех шести случайных величин определяются значениями допусков.

Если считать каждый фактор независимым, то можно смоделировать случайные величины  $\delta_i^x, \delta_i^y$  генерируя  $s, b, a, \varphi_i, d_{run}, d_{res}$  и проводя преобразования по формулам (8) – (14).

Компенсированный дисбаланс, вызванный балансировкой, является неслучайным и рассчитывается исходя из условия равновесия ротора для каждой реализации случайных величин  $s, b, a, \varphi_i, d_{run}$ , без учета  $d_{res}$ .

При наличии экспериментальных значений  $\delta_i^E$  нулевая гипотеза формулируется следующим образом:

*моделируемая и экспериментальная выборки  $\delta_i, \delta_i^E$  принадлежат одной генеральной совокупности.*

### Постановка задачи

Рассмотрим ротор свободной турбины, состоящий из трех валов. Их поперечные сечения показаны на рис. 2, *a*; область решения уравнений (2) с граничными условиями представлена на рис. 2, *b*. Требуется рассчитать вертикальную скорость в точке замера.

На рис. 2, *b* показаны и обозначены следующие граничные условия:

$$\begin{aligned} 2 - F_i^{x,y} / U_i^{x,y} = K; \quad 3 - F_i^{x,y} / U_i^{x,y} = K_{x,y}; \\ 4 - U_i^{x,y} = U_j^{x,y}, \quad \theta_i^{x,y} = \theta_j^{x,y}; \\ 5 - (F_i^{x,y} - F_j^{x,y}) / (U_i^{x,y} - U_j^{x,y}) = K_{x,y}, \end{aligned}$$

где  $F, U$  и  $\theta$  – узловое сила, перемещение и угол поворота, соответственно;  $K$  – коэффициент жесткости.

Расчет проводился в шесть этапов.

1. Определение амплитуды вертикальной скорости  $\delta_{ij}$  в точке замера МР от действия единичных дисбалансов.

2. Генерация выборки  $s, b, a, \varphi_i, d_{run}$ .

3. Вычисление для каждой реализации  $s, b, a, \varphi_i, d_{run}$  компенсирующих дисбалансов, действующих в плоскостях балансировки ротора и уравнивающих систему сил, которые вызваны этими факторами.

4. Генерация выборки  $d_{res}, \varphi$ , модуля и фазы остаточных дисбалансов в плоскостях балансировки.

5. Вычисление выборки вертикальной скорости в точке замера МР по формулам (8) – (14).

6. Проверка гипотезы о принадлежности расчетной и экспериментальной выборок одной генеральной совокупности по критерию Вилькоксона.

Сформированы два расчетных случая, различающихся действием нагрузок.

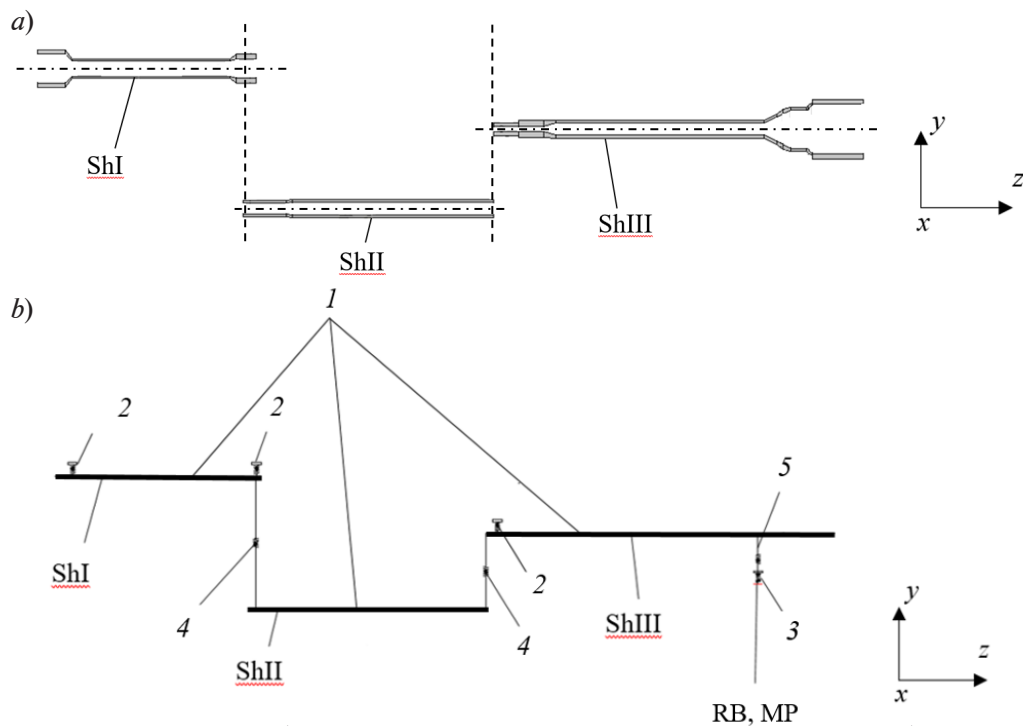


Рис. 2. Схематические изображения к постановке задачи о роторе свободной турбины, состоящем из трех валов (ShI, ShII, ShIII): *a* – поперечные сечения валов; *b* – область решения уравнений (2) с граничными условиями (2 – 5), *1* – область решения;

RB – жесткая балка; MP – точка замера.

Граничные условия не представлены на рис. ввиду громоздкости (см. текст)

*Случай 1.* Нагрузки обусловлены разнотолщинностью валов ShI, ShII, ShIII (см. рис. 2), биениями наружной поверхности этих валов, биениями посадочных поверхностей вала ShII, дисбалансом рабочего колеса, а также компенсирующими и остаточными дисбалансами в плоскостях балансировки ротора.

*Случай 2.* Нагрузки вызваны дисбалансом рабочего колеса, компенсирующими и остаточными дисбалансами в плоскостях балансировки ротора.

Расчет проводился для критической частоты вращения ротора, ближайшей к максимальной частоте рабочего диапазона вращения.

Вертикальную скорость от единичных дисбалансов находили с использованием ПО Dynamics R4, а выборку вертикальной скорости вычисляли при помощи оригинальной авторской программы, написанной на языке Python.

### Описание эксперимента

Эксперимент состоял в вибрационных испытаниях свободной турбины в составе газотурбинного двигателя (рис. 3).

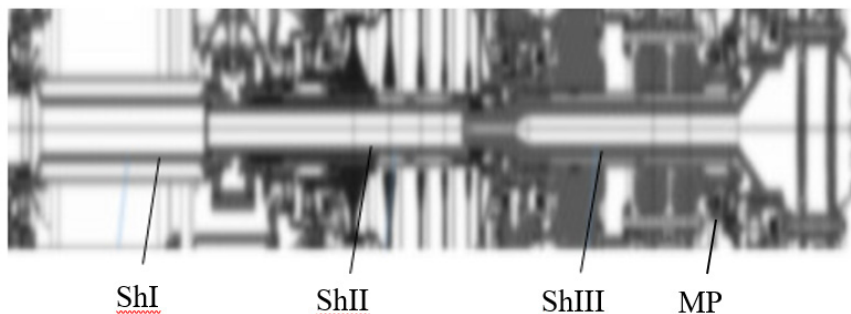


Рис. 3. Фотоснимок фрагмента свободной турбины: ShI, ShII, ShIII – валы ротора; MP – точка замера скоростей на жесткой балке RB (см. рис. 2, *b*)

В заданной точке МР двигателя (см. рис. 3), в каждый момент времени фиксировались значения вертикальной виброскорости при постоянной угловой частоте вращения валов ShI – ShIII. Гармоническая составляющая виброскорости с частотой, соответствующей угловой частоте вращения трех валов, выделялась с помощью алгоритма прямого преобразования Фурье. Замеры проводились для 13 двигателей, в которых значения параметров  $s, b, a, \varphi_i, d_{run}, d_{res}$  для ротора свободной турбины лежат в пределах допусков. Вариация параметров неизбежна вследствие промышленной погрешности при производстве деталей.

Экспериментальное тестирование газотурбинного двигателя позволило сформировать выборку из амплитуд вертикальных виброскоростей.

#### Анализ результатов

На рис. 4 приведено сравнение экспериментальных и расчетных гистограмм распределения вертикальной виброскорости.

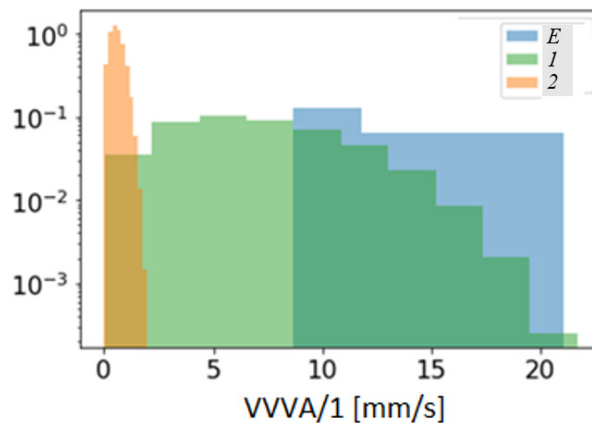


Рис. 4. Сравнение экспериментальной ( $E$ ) и двух расчетных гистограмм (случаи  $1$  и  $2$ ) распределения амплитуд обезразмеренной вертикальной виброскорости ( $VVVA/1$ [mm/s]) контрольной точки МР (см. рис. 2,  $b$  и 3).

По вертикальной оси отложены безразмерные значения плотности вероятности

Результаты проверки гипотезы о принадлежности расчетных и экспериментальной выборок одной генеральной совокупности приведены в таблице. Анализ полученных результатов показывает, что при учете дисбаланса валов уровень значимости значительно выше, что говорит о более близком соответствии расчетного случая  $1$  результатам эксперимента.

Таблица

#### Результаты проверки гипотезы с использованием критерия Вилькоксона

Номер расчетного случая	Расчетное значение	
	статистики	уровня значимости
$1$	23,0	0,1159
$2$	0,0	0,0015

Примечание. При нахождении расчетных значений статистики и уровня значимости использованы расчетная и экспериментальная выборки.

### Заключение

Предложен метод задания нагрузок при определении рабочего прогиба ротора, учитывающий дисбаланс валов.

На примере решения тестовой задачи показано, что учет дисбаланса валов дает результаты, более близкие к экспериментальным данным.

Важно отметить, что проведенное исследование предполагало постоянство значений параметров  $s$  и  $a$  по длине вала, что ограничивает область применения разработанного метода значением длины вала; метод применим только для непротяженных валов.

В дальнейшем для получения более надежных (с большим значением уровня значимости) результатов необходимо провести углубленные исследования, учитывающие влияние таких факторов, как нелинейность жесткости подшипников, переходные процессы в роторе (например, непостоянство крутящего момента) и т. п., а также тестирование газотурбинного двигателя с расширенным объемом экспериментальных выборок.

### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Ласкин А. С., Себелев А. А., Забелин Н. А. Энергетические машины. Вибропрочность и устойчивость элементов турбомашин. Санкт-Петербург: ПОЛИТЕХ-ПРЕСС, 2018. 128 с.
2. Хаймович А. И., Болотов М. А., Печенина Е. Ю. Модель виртуального уравнивания жестких роторов // Вестник Самарского университета. Аэрокосмическая техника, технологии и машиностроение. 2022. Т. 21. № 1. С. 99–109.
3. Fegade R., Patel V., Nehete R. S., Bhandarkar B. M. Unbalanced response of rotor using ANSYS parametric design for different bearings // International Journal of Engineering Sciences & Emerging Technologies. 2014. Vol. 7. No. 1. Pp. 506–515.
4. Ahobal N., Ajit prasad S. L. Study of vibration characteristics of unbalanced overhanging rotor // IOP Conference Series: Materials Science and Engineering. 2019. Vol. 577. P. 012140.
5. Longxi Zh., Shengxi J., Jingjing H. Numerical and experimental study on the multiobjective optimization of a two-disk flexible rotor system // International Journal of Rotating Machinery. 2017. Vol. 2017. January. Pp. 1–10.
6. Леонтьев М. К., Иванов А. В. Модальный анализ динамических систем роторов // Известия высших учебных заведений. Авиационная техника. 2005. № 3. С. 31–35.
7. Биргер И. А., Шорр Б. Ф., Иосилевич Г. Б. Расчет на прочность деталей машин. М.: Машиностроение, 1993. 640 с.
8. Леонтьев М. К. Конструкция и расчет демпферных опор роторов ГТД. М.: Изд-во МАИ, 1998. 44 с.
9. Усманов А. Р., Модестов В. С. Определение центробежных нагрузок, вызванных разнотолщинностью валов // Неделя науки ФизМех: сборник статей Всероссийской научной конференции. 4–9 апреля 2022., г. Санкт-Петербург: ПОЛИТЕХ-ПРЕСС, 2022. С. 248–250.
10. Брюханов С. А., Крисанов А. Е., Жариков В. В., Филянкин С. В. Влияние теплового дисбаланса на ротор насосно-компрессорного и турбинного оборудования // Евразийский союз ученых. 2015. № 12-5 (21). С. 35–37.
11. Murillo-Marrodán A., García E., Barco J., Cortés F. Analysis of wall thickness eccentricity in the rotary tube piercing process using a strain correlated FE model // Metals. 2020. Vol. 21. No. 8. P. 1045.

### REFERENCES

1. Laskin A. S., Sebelev A. A., Zabelin N. A., Energeticheskie mashiny. Vibroprochnost i ustoychivost elementov turbomashin [Energy machines. Vibration resistance and stability of turbomachine elements], POLITEKH-PRESS, St. Petersburg, 2018 (in Russian).
2. Hajmovich A. I., Bolotov M. A., Pechenina E. E., Model of virtual balancing of rigid rotors, Vestnik of Samara University. Aerospace and Mechanical Engineering. 21 (1) (2022) 99–109 (in Russian).
3. Fegade R., Patel V., Nehete R. S., Bhandarkar B. M., Unbalanced response of rotor using ANSYS parametric design for different bearings, Int. J. Eng. Sci. Technol. 7 (1) (2014) 506–515.
4. Ahobal N., Ajit prasad S. L., Study of vibration characteristics of unbalanced overhanging



rotor, IOP Conf. Ser.: Mater. Sci. Eng. 577 (2019) 012140.

5. Longxi Zh., Shengxi J., Jingjing H., Numerical and experimental study on the multiobjective optimization of a two-disk flexible rotor system, Int. J. Rot. Machinery. 2017 (January) (2017) 1–10.

6. Ivanov A. V., Leont'ev M. K., Modal analysis of dynamic rotor systems, Russian Aeronautics. 48 (3) (2005) 45–53.

7. Birger I. A., Shorr B. F., Iosilevich G. B., Raschet na prochnost' detaley mashin [The calculation of machine parts strength], Mashinostroenie [Mechanical Engineering], Moscow, 1993 (in Russian).

8. Leont'ev M. K., Konstruktsiya i raschet dempfernykh opor rotorov GTD [Design and calculation of GTE rotors damper supports], Moscow Aviation Institute Publ., Moscow, 1998 (in Russian).

9. Usmanov A. R., Modestov V. S., Determination of centrifugal loads caused by shaft thickness variation, Proceeding of the All-Russian Scientific Conference “Week of Science at FizMekh”, 4 – 9 Apr. 2022, POLITEKH-PRESS, St. Petersburg, 2022. 248–250 (in Russian).

10. Bryukhanov S. A., Krisanov A. E., Zharikov V. V., Filyankin S. V., The effect of thermal unbalance on the rotor of pump-compressor and turbine equipment, Eurasian Union of Scientists. (12-5 (21)) (2015) 35–37 (in Russian).

11. Murillo-Marrodán A., García E., Barco J., Cortés F., Analysis of wall thickness eccentricity in the rotary tube piercing process using a strain correlated FE model, Metals. 21 (8) (2020) 1045.

### СВЕДЕНИЯ ОБ АВТОРАХ

**УСМАНОВ Антон Равильевич** – аспирант Высшей школы механики и процессов управления Санкт-Петербургского политехнического университета Петра Великого, Санкт-Петербург, Россия.

195251, Россия, г. Санкт-Петербург, Политехническая ул., 29

ysman2d@gmail.com

ORCID: 0000-0003-1574-4638

**МОДЕСТОВ Виктор Сергеевич** – ведущий программист Высшей школы механики и процессов управления Санкт-Петербургского политехнического университета Петра Великого, Санкт-Петербург, Россия.

195251, Россия, г. Санкт-Петербург, Политехническая ул., 29

vmodestov@spbstu.ru

ORCID: 0000-0003-0845-638X

### THE AUTHORS

**USMANOV Anton R.**

*Peter the Great St. Petersburg Polytechnic University*

29 Politechnicheskaya St., St. Petersburg, 195251, Russia

ysman2d@gmail.com

ORCID: 0000-0003-1574-4638

**MODESTOV Victor S.**

*Peter the Great St. Petersburg Polytechnic University*

29 Politechnicheskaya St., St. Petersburg, 195251, Russia

vmodestov@spbstu.ru

ORCID: 0000-0003-0845-638X

*Статья поступила в редакцию 17.06.2022. Одобрена после рецензирования 11.12.2022. Принята 11.12.2022.*

*Received 17.06.2022. Approved after reviewing 11.12.2022. Accepted 11.12.2022.*