

Ядерная физика

Научная статья

УДК 539.12

DOI: <https://doi.org/10.18721/JPM.16210>

МОДЕЛИ МАШИННОГО ОБУЧЕНИЯ ДЛЯ ОПРЕДЕЛЕНИЯ ЗНАЧЕНИЙ НЕНАБЛЮДАЕМЫХ ПАРАМЕТРОВ, СВЯЗАННЫХ С ЦЕНТРАЛЬНОСТЬЮ, ДЛЯ ШИРОКОГО СПЕКТРА ЯДЕРНЫХ СИСТЕМ ПРИ ЭНЕРГИИ 200 ГэВ

А. А. Лобанов ✉, **Я. А. Бердников**, **Ю. М. Митранков**

Санкт-Петербургский политехнический университет Петра Великого,
Санкт-Петербург, Россия

✉ lobanov2.aa@edu.spbstu.ru

Аннотация. В работе проведен сравнительный анализ и поиск оптимальной модели машинного обучения, которая позволила бы предсказывать значения ненаблюдаемых величин, характеризующих центральность, основываясь на экспериментальных данных для наблюдаемых величин: числа заряженных частиц и числа нейтральных частиц, рождающихся во взаимодействии как тяжелых, так и легких ультрарелятивистских ядер. Искомые ненаблюдаемые величинами были число раненых нуклонов, участвующих во взаимодействии, и число бинарных нуклон-нуклонных столкновений. В качестве моделей машинного обучения были выбраны и рассмотрены линейная и полиномиальные регрессии различных степеней, дерево решений (ДР), случайный лес (СЛ) и многослойный перцептрон (МП). Точность предсказания моделей характеризовалась и проверялась коэффициентом детерминации. Установлено, что модели ДР, СЛ и МП с наибольшей точностью предсказывают искомые значения, т. е. дают одинаково хорошие результаты.

Ключевые слова: машинное обучение, столкновение ядер, регрессия, дерево решений, случайный лес, многослойный перцептрон

Для цитирования: Лобанов А. А., Бердников Я. А., Митранков Ю. М. Модели машинного обучения для определения значений ненаблюдаемых параметров, связанных с центральностью, для широкого спектра ядерных систем при энергии 200 ГэВ // Научно-технические ведомости СПбГПУ. Физико-математические науки. 2023. Т. 16. № 2. С. 111–120. DOI: <https://doi.org/10.18721/JPM.16210>

Статья открытого доступа, распространяемая по лицензии CC BY-NC 4.0 (<https://creativecommons.org/licenses/by-nc/4.0/>)

Original article

DOI: <https://doi.org/10.18721/JPM.16210>

MACHINE LEARNING MODELS TO DETERMINE UNOBSERVABLE CENTRALITY-RELATED PARAMETER VALUES FOR A WIDE RANGE OF NUCLEAR SYSTEMS AT THE ENERGY OF 200 GeV

A. A. Lobanov ✉, **Ya. A. Berdnikov**, **Iu. M. Mitrانков**

Peter the Great St. Petersburg Polytechnic University, St. Petersburg, Russia

✉ lobanov2.aa@edu.spbstu.ru

Abstract. In the paper, a comparative analysis and a search for the optimal machine learning model have been conducted. The model should predict the values of unobservable centrality-related quantities based on the experimental data for observable quantities, namely, the number of charged particles and the number of neutral ones born in the interactions of both heavy and light ultrarelativistic nuclei. The sought-for unobservable values were the numbers of wounded nucleons involved in the interactions and of the binary nucleon-nucleon collisions. Linear and polynomial regressions of various degrees, a decision tree (DT), a random forest (RF), and a multilayer perceptron (MP) were chosen and considered as machine learning models. The prediction accuracy of the models was characterized and tested by the coefficient of determination. The DT, RF, and MP models were found to predict the desired values with the highest accuracy, i.e., they gave equally good results.

Keywords: machine learning, nuclei collisions, regression, decision tree, random forest, multilayer perceptron

For citation: Lobanov A. A., Berdnikov Ya. A., Mitrankov Iu. M., Machine learning models to determine unobservable centrality-related parameter values for a wide range of nuclear systems at the energy of 200 GeV, St. Petersburg State Polytechnical University Journal. Physics and Mathematics. 16 (2) (2023) 111–120. DOI: <https://doi.org/10.18721/JPM.16210>

This is an open access article under the CC BY-NC 4.0 license (<https://creativecommons.org/licenses/by-nc/4.0/>)

Введение

Интерес к методам машинного обучения обусловлен их хорошими результатами в различных областях, начиная от речевых моделей и до генерации изображений.

Вследствие этого стоит использовать известные и разрабатывать новые алгоритмы машинного обучения в ядерной физике, физике элементарных частиц и физике высоких энергий.

Физика ультрарелятивистских столкновений ядер – одна из многообещающих и интереснейших областей современных фундаментальных исследований, связанных с необычным состоянием вещества – кварк-глюонной материей [1].

Изучение особенностей взаимодействий ядер при высоких энергиях, как правило, осуществляется в коллайдерных экспериментах, в которых измеряются характеристики частиц, рожденных в столкновениях пучков ядер [2].

Энергия пучка ядер обычно выражается величиной энергии, приходящейся на один нуклон ядра. Это позволяет сопоставлять соударения ядер с протонными соударениями; при этом предполагается, что движущиеся ядра представляют собой пучок нуклонов, а столкновение ядер – это комбинация парных столкновений нуклонов от разных ядер.

Как было установлено [3], важным свойством соударений ядер явилось значительное увеличение средней множественности (рассчитана на одно парное столкновение внутриядерных нуклонов) по отношению к средней множественности, наблюдаемой в парном столкновении свободных (не внутриядерных) нуклонов.

Количество нуклонных пар N_{coll} , которые вступали во взаимодействие, и число раненых нуклонов N_{part} при соударении ядер соответствует понятию центральности соударения [4]. Центральность определяет объем области перекрытия сталкивающихся ядер и связана с прицельным параметром соударения (рис. 1).

Объем перекрытия, в свою очередь, связан с количеством N_{coll} нуклонов-участников взаимодействия и числом раненых нуклонов N_{part} , находящихся в этом объеме и испытавших неупругое рассеяние. Для каждого столкновения ядер (события) величины N_{coll} и N_{part} невозможно определить экспериментально. Однако еще ранние данные, полученные на ускорителях RHIC (Relativistic Heavy Ion Collider – релятивистский коллайдер тяжелых ионов) и SPS (Super Proton Synchrotron – суперпротонный синхротрон) [5, 6], показали, что множественность частиц (или их суммарная поперечная энергия) прямо пропорциональны N_{coll} и N_{part} . Это означает, что для выделенных значений множественности (или суммарной поперечной энергии) можно определить величины N_{coll} и N_{part} .

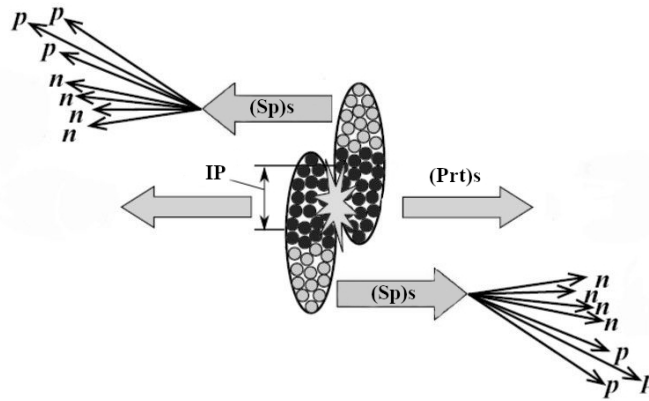


Рис. 1. Схематическое представление ядерной реакции: (Sp)s – спектаторы; (Prt)s – участники; IP – прицельный параметр. Показаны нуклоны, вступающие во взаимодействие (черные кружки), и пролетевшие мимо (серые кружки); p – протоны, n – нейтроны

Целью настоящей работы являлась разработка оптимальной модели машинного обучения, которая бы позволяла предсказывать значения ненаблюдаемых величин, характеризующих центральность.

Эти ненаблюдаемые величины – число раненых нуклонов, участвующих во взаимодействии, и число бинарных нуклон-нуклонных столкновений.

Основой предсказания должны служить величины, наблюдаемые на эксперименте: число заряженных частиц и число нейтронов, рождающихся в каждом отдельном ядро-ядерном взаимодействии.

Методика моделирования и вычислений

Модель машинного обучения должна предсказывать число раненых нуклонов N_{part} и число бинарных нуклон-нуклонных столкновений N_{coll} в ядро-ядерном столкновении при заданной начальной энергии. В качестве параметров модели были выбраны число заряженных и число нейтральных частиц в каждом событии, в интервалах псевдобыстроты $3 < |\eta| < 4$ и $5 < |\eta| < 8$ соответственно. Выбор диапазонов диктовался экспериментальными данными, и указанные интервалы были взяты близкими к используемым в экспериментах [2, 7]. С целью расширения работоспособности модели для различных систем (ядер) столкновений, к перечисленным выше параметрам были добавлены число протонов и число нейтральных частиц во взаимодействующих ядрах.

В связи с тем, что величины N_{part} и N_{coll} невозможно определить на эксперименте, для обучения были взяты N_{part} и N_{coll} , предварительно полученные в настоящей работе на основе использования генератора Монте-Карло PYTHIA8/Angantyr версии 8,307 [8].

Во всех рассматриваемых ядро-ядерных взаимодействиях энергия в системе центра масс на одно нуклон-нуклонное столкновение была выбрана равной $\sqrt{s_{NN}} = 200$ ГэВ. Данная энергия используется в большом числе экспериментов на коллайдере RHIC [2].

Число сгенерированных столкновений ядер составляло 100 тыс.

С точки зрения машинного обучения, предсказание значений N_{part} и N_{coll} в зависимости от множественностей заряженных частиц N_{ch} и нейтронов N_{neut} – это задача регрессии [9] (обучение с учителем), поэтому в качестве моделей машинного обучения были выбраны и рассмотрены методы, наиболее часто используемые для данного типа задач: линейная регрессия [10], полиномиальные регрессии различных степеней [10], дерево решений [11], случайный лес [12] и многослойный перцептрон [13].

Гиперпараметры моделей (параметры, которые не определяются в ходе обучения) были подобраны с использованием библиотеки Optuna [14]. В качестве алгоритма был выбран Tree Parzen Estimators [15].

Характеристикой точности предсказания моделей выступал коэффициент детерминации R^2 [16], который следует выражению

$$R^2 = 1 - \frac{\sum_{i=1}^N (y_i - \hat{y}_i)^2}{\sum_{i=1}^N y_i^2},$$

где y_i – эталонные значения (например, N_{coll}), \hat{y}_i – значения величины N_{coll} , предсказанные моделью, N – число значений.

Величина коэффициента детерминации R^2 имеет максимальное значение, равное 1. Чем оно ближе к единице, тем ближе к эталонным будут значения, полученные с помощью модели. Качество предсказания моделью значений N_{coll} и N_{part} характеризовалось средним арифметическим значением их коэффициентов детерминации (так как в работе предполагалось предсказывать значения двух величин). Далее под R^2 подразумевается это среднее арифметическое.

Определение доверительных интервалов и погрешностей коэффициента детерминации R^2 выполнялось методом бутстрэп (*англ.* bootstrap) [17].

Этот численный метод позволяет исследовать статистические распределения. Он основан на многократной генерации выборок методом Монте-Карло на базе имеющейся выборки (введен в 1977 году Брэдли Эфроном и основан на генерации эмпирического распределения [18] по имеющейся выборке). Использование эмпирического распределения как теоретического распределения вероятностей позволяет сгенерировать большое число псевдовыборок произвольного размера с помощью генератора случайных чисел. На полученном множестве псевдовыборок проводится оценка среднего значения, погрешности и строится доверительный интервал для исследуемой случайной величины с доверительной вероятностью $p = 0,997$.

Для каждого ядро-ядерного взаимодействия (используется 100 тыс. столкновений ядер, сгенерированных в PYTHIA8/Angantyr) можно получить значения N_{coll} , N_{part} , N_{ch} . На этой основе строится зависимость N_{coll} , N_{part} от множественности заряженных частиц N_{ch} для реакции столкновения ядер золота Au + Au при энергии $\sqrt{s_{NN}} = 200$ ГэВ (исходные данные).

На рис. 2, *a* приведена зависимость N_{coll} от N_{ch} , полученная описанным здесь образом. Видно, что N_{coll} , N_{ch} имеют некоторые распределения, возникающие при моделировании в пакете PYTHIA8/Angantyr. С целью ускорения обучения и оптимизации работы моделей, эти распределения величин были разделены на 50 интервалов, каждый из которых был охарактеризован своим средним значением физической величины. На рис. 2, *b* представлена такая усредненная зависимость числа нуклон-нуклонных столкновений (N_{coll}) от средней множественности заряженных частиц (N_{ch}).

Полученные 50 интервалов были разбиты случайным образом на 80 % для обучения моделей и на 20 % для их проверки.

Сходная расчетная картина имеет место и для зависимости N_{part} от N_{ch} .

Сравнение линейной и полиномиальной моделей машинного обучения для предсказания зависимости N_{coll} (N_{ch}) в реакции Au+Au

Как было отмечено выше, в данной работе использовались следующие модели машинного обучения: линейная регрессия, полиномиальные регрессии различных степеней, дерево решений, случайный лес и многослойный перцептрон.

Линейная и полиномиальная регрессии. Для начала рассмотрим указанные простейшие модели. В качестве модели полиномиальной регрессии были выбраны квадратичная и кубическая функции, чтобы избежать переобучения модели при более высоких степенях полинома [19]. Для их сравнения была рассмотрена система столкновения ядер золота (Au + Au) при значении энергии взаимодействия $\sqrt{s_{NN}} = 200$ ГэВ.

На рис. 2, *a* приведена аппроксимация зависимости числа нуклон-нуклонных столкновений от множественности заряженных частиц линейной, квадратичной и кубической функциями. На рис. 2, *b* представлена аппроксимация теми же тремя функциями зависимости усредненного числа раненых нуклонов (N_{coll}) от средней множественности заряженных частиц (N_{ch}).

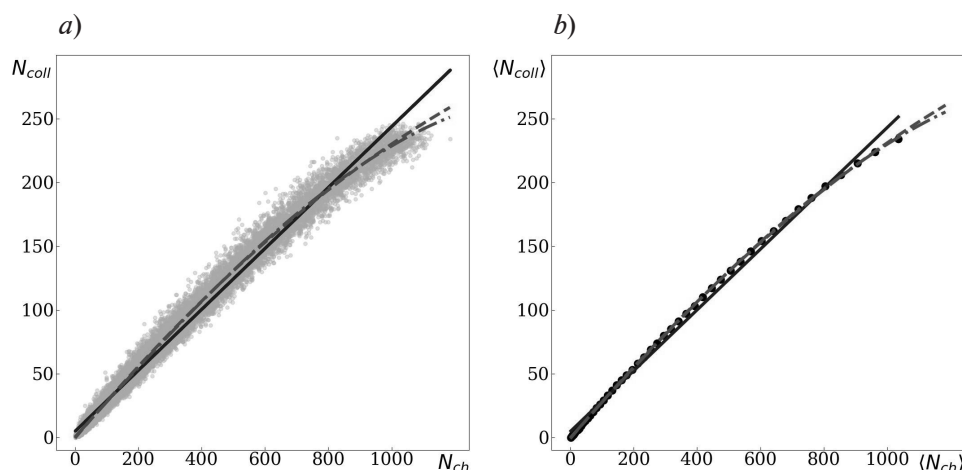


Рис. 2. Исходная (область серого цвета) (a) и усредненная (символы) (b) расчетные зависимости числа нуклон-нуклонных столкновений ядер золота от исходной (a) и усредненной (b) множественности заряженных частиц, а также аппроксимации данных различными функциями: линейной (сплошные прямые), квадратичной (пунктиры) и кубической (штрихпунктиры)

Как следует из анализа данных на рис. 2, для аппроксимации линейной функцией наблюдается систематическое завышение числа раненых нуклонов при высоких значениях множественности заряженных частиц. Поэтому далее будут рассматриваться расчетные результаты только для полиномов 2-й и 3-й степеней.

Результаты предсказания моделями машинного обучения зависимости $N_{coll}(N_{ch})$ для столкновений тяжелых ядер

Для того чтобы оценить возможности моделей по обобщению зависимостей и их определению, рассмотрим обучение моделей на симметричных системах столкновения тяжелых ядер: меди (Cu + Cu), ксенона (Xe + Xe), золота (Au + Au), свинца (Pb + Pb) и урана (U + U), а также их проверку на несимметричных системах (см. табл. 1).

Здесь представлена зависимость R^2 для различных моделей и различных ядерных систем, на которых модели не обучались. Как следует из анализа данных табл. 1, для большинства систем столкновений тяжелых ядер полиномиальная зависимость 3-й степени дает результаты, заметно худшие и отличные от остальных моделей. Для такой модели коэффициент детерминации R^2 во многих системах существенно меньше единицы. В связи с этим, ее дальнейшее рассмотрение представляется нецелесообразным.

Полученные значения коэффициента детерминации совпадают в пределах погрешностей для всех моделей (кроме полинома 3-й степени) в рамках одной системы (см. табл. 1). Исключение наблюдается для полиномиальной регрессии 3-й степени, для которой величина R^2 статистически значимо отличается от остальных моделей.

Результаты предсказания для столкновений легких ядер с тяжелыми

В данном разделе рассмотрен случай обучения моделей на столкновениях легких ядер с тяжелыми:

$$p + Au, p + Cu, d + Au, d + Cu, He + Au, He + Cu,$$

где p – протоны, d – ядра дейтерия.

При этом проверяется корректность моделей на несимметричных системах, перечисленных в табл. 2. Эта ситуация интересна тем, что она позволяет провести дальнейшее обобщение на различные (отличные от ранее рассмотренных) ядерные системы столкновений и проверить, насколько хорошо модели могут работать в данном случае.

В табл. 2 представлена зависимость коэффициента детерминации для рассматриваемых в данной работе моделей и различных ядерных систем, на которых модели не обучались. Из данных таблицы следует, что для большинства систем столкновений полиномиальная зависимость 2-й степени дает заметно худшие (статистически оправданные) результаты, в

Таблица 1

**Значения коэффициента детерминации для различных моделей
и несимметричных систем ядер**

Система ядер	Значение коэффициента детерминации R^2 для модели				
	Полином степени		Дерево решений	Случайный лес	Многослойный перцептрон
	2-й	3-й			
Cu + Xe	0,990± ±0,025	0,175± ±0,005	0,979± ±0,030	0,981± ±0,021	0,967± ±0,023
Cu + Au	0,986± ±0,023	-2,301± ±0,328	0,963± ±0,024	0,969± ±0,028	0,934± ±0,025
Cu + Pb	0,984± ±0,026	-0,087± ±0,442	0,960± ±0,027	0,963± ±0,026	0,926± ±0,024
Cu + U	0,982± ±0,029	0,460± ±0,769	0,960± ±0,026	0,961± ±0,031	0,921± ±0,024
Xe + Au	0,997± ±0,028	0,155± ±0,004	0,991± ±0,027	0,992± ±0,030	0,987± ±0,029
Xe + Pb	0,996± ±0,026	-0,284± ±0,013	0,990± ±0,026	0,991± ±0,027	0,984± ±0,029
Xe + U	0,996± ±0,028	-0,224± ±0,119	0,987± ±0,029	0,989± ±0,026	0,977± ±0,022
Au + Pb	1,000± ±0,031	0,999± ±0,025	0,998± ±0,024	0,999± ±0,026	0,999± ±0,030
Au + U	0,999± ±0,024	0,901± ±0,024	0,998± ±0,030	0,998± ±0,027	0,996± ±0,027
Pb + U	0,999± ±0,027	0,963± ±0,026	0,998± ±0,027	0,998± ±0,031	0,997± ±0,028

Примечание. Представлены данные по проверке моделей для ядерных систем, на которых модели не обучались.

Таблица 2

**Значения коэффициента детерминации для четырех моделей
и для систем столкновений легких ядер с тяжелыми**

Система ядер	Значение коэффициента детерминации R^2 для модели			
	Полином 2-й степени	Дерево решений	Случайный лес	Многослойный перцептрон
$p + U$	0,511 ± 0,016	0,988 ± 0,031	0,965 ± 0,026	0,953 ± 0,026
$p + Xe$	0,978 ± 0,029	0,990 ± 0,028	0,973 ± 0,026	0,947 ± 0,026
$d + Pb$	0,856 ± 0,022	0,996 ± 0,028	0,987 ± 0,027	0,983 ± 0,027
$d + U$	0,507 ± 0,015	0,996 ± 0,023	0,983 ± 0,027	0,983 ± 0,026
$d + Xe$	0,990 ± 0,031	0,988 ± 0,024	0,982 ± 0,024	0,973 ± 0,022
He + Pb	0,863 ± 0,023	0,996 ± 0,033	0,990 ± 0,026	0,991 ± 0,024
He + U	0,597 ± 0,016	0,993 ± 0,026	0,977 ± 0,026	0,992 ± 0,024
He + Xe	0,989 ± 0,030	0,989 ± 0,026	0,982 ± 0,024	0,983 ± 0,023

Примечание. Представлены данные по проверке моделей для ядерных систем, на которых модели не обучались.

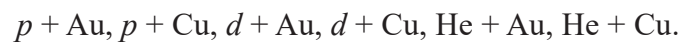
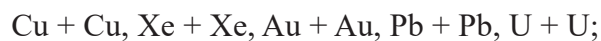


отличие от остальных моделей. Для нее коэффициент детерминации во многих системах существенно отличен от единицы. Как и в первом случае, ее дальнейшее рассмотрение представляется нецелесообразным.

Полученные значения коэффициента детерминации совпадают в пределах погрешностей для всех остальных моделей (кроме результатов для полинома 2-й степени) в рамках одной системы.

Обобщенный случай

Наибольший интерес представляет возможность применимости моделей при рассмотрении взаимодействия как легких ядер с тяжелыми, так и тяжелых с тяжелыми. Обучение моделей для таких ситуаций производилось на совокупности систем столкновений как легких, так и тяжелых ядер, рассмотренных в двух предыдущих разделах:



Проверка точности предсказания проводилась на системах взаимодействия, перечисленных в табл. 3. Там же представлены значения R^2 для различных моделей в зависимости от системы столкновения. Анализ полученных результатов приводит к заключению, что все модели дают сходные значения коэффициента детерминации с учетом погрешностей.

Таблица 3

Обобщение результатов расчетов значений коэффициента детерминации для трех моделей и различных систем ядер, на которых не проводилось обучение

Система ядер	Значение коэффициента детерминации R^2 для модели		
	Дерево решений	Случайный лес	Многослойный перцептрон
$p + \text{U}$	$0,984 \pm 0,030$	$0,954 \pm 0,026$	$0,955 \pm 0,026$
$p + \text{Xe}$	$0,984 \pm 0,029$	$0,960 \pm 0,024$	$0,956 \pm 0,025$
$d + \text{Pb}$	$0,996 \pm 0,027$	$0,982 \pm 0,024$	$0,990 \pm 0,026$
$d + \text{U}$	$0,990 \pm 0,024$	$0,974 \pm 0,025$	$0,987 \pm 0,025$
$d + \text{Xe}$	$0,984 \pm 0,022$	$0,971 \pm 0,023$	$0,971 \pm 0,026$
$\text{He} + \text{Pb}$	$0,997 \pm 0,026$	$0,985 \pm 0,024$	$0,991 \pm 0,029$
$\text{He} + \text{U}$	$0,993 \pm 0,026$	$0,981 \pm 0,029$	$0,990 \pm 0,030$
$\text{He} + \text{Xe}$	$0,985 \pm 0,024$	$0,987 \pm 0,032$	$0,987 \pm 0,026$
$\text{Cu} + \text{Xe}$	$0,980 \pm 0,025$	$0,982 \pm 0,031$	$0,990 \pm 0,027$
$\text{Cu} + \text{Au}$	$0,969 \pm 0,023$	$0,965 \pm 0,025$	$0,983 \pm 0,023$
$\text{Cu} + \text{Pb}$	$0,965 \pm 0,027$	$0,961 \pm 0,025$	$0,981 \pm 0,029$
$\text{Cu} + \text{U}$	$0,959 \pm 0,024$	$0,959 \pm 0,023$	$0,980 \pm 0,027$
$\text{Xe} + \text{Au}$	$0,991 \pm 0,023$	$0,992 \pm 0,029$	$0,996 \pm 0,024$
$\text{Xe} + \text{Pb}$	$0,991 \pm 0,027$	$0,991 \pm 0,029$	$0,995 \pm 0,028$
$\text{Xe} + \text{U}$	$0,988 \pm 0,026$	$0,987 \pm 0,025$	$0,993 \pm 0,026$
$\text{Au} + \text{Pb}$	$0,999 \pm 0,027$	$0,999 \pm 0,027$	$0,999 \pm 0,023$
$\text{Au} + \text{U}$	$0,997 \pm 0,028$	$0,998 \pm 0,026$	$0,998 \pm 0,025$
$\text{Pb} + \text{U}$	$0,998 \pm 0,025$	$0,999 \pm 0,030$	$0,999 \pm 0,028$

Заключение

В данной работе с целью определения оптимального алгоритма для получения ненаблюдаемых в эксперименте параметров, характеризующих центральность столкновения, а именно – числа раненых нуклонов и числа бинарных нуклонных столкновений, на основе наблюдаемых величин – множественности заряженных частиц и числа нейтронов, рожденных в столкновении, был проведен сравнительный анализ моделей машинного обучения. Привлекались модели полиномиальной регрессии различных степеней, дерева решений, случайного леса и многослойного перцептрона.

В результате анализа удалось установить, что дерево решений, случайный лес и многослойный перцептрон с наибольшей точностью ($R^2 \gtrsim 0,95$) предсказывают значения величин N_{part} и N_{coll} , т. е. дают одинаково хорошие результаты (в пределах ошибок), которые, однако, получены для фиксированной начальной энергии.

В качестве естественного продолжения настоящей работы предполагается ввести дополнительный параметр в виде начальной энергии $\sqrt{s_{NN}}$ сталкивающихся ядер с целью расширения диапазона применимости рассмотренных моделей на произвольный диапазон начальных энергий.

В заключение отметим, что расчеты были произведены на процессоре Intel® Core™ i9-9980XE и видеокарте NVIDIA GeForce RTX™ 2080 Ti. Объем оперативной памяти составлял 64 Гб.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Шуряк Э. В. Кварк-глюонная плазма // Успехи физических наук. 1982. Т. 138. № 2. С. 327–328.
2. Morrison D. P., Akiba Y., Alford O., et al. The PHENIX experiment at RHIC // Nuclear Physics A. 1998. Vol. 638. No. 1–2. Pp. 565c–569c.
3. ATLAS Collaboration, Aad G., Abbott B., et al. Measurement of the centrality dependence of the charged particle pseudorapidity distribution in lead-lead collisions at $\sqrt{s_{NN}} = 2.76$ TeV with the ATLAS detector // Physics Letters B. 2012. Vol. 710. No. 3. Pp. 363–382.
4. Aguiar C. E., Andrade R., Grassi F., Hama Y., Kodama T., Osada T., Socolowski Jr. O. Comparison between classification using impact parameter and using number of participants in relativistic nuclear collisions // Brazilian Journal of Physics. 2004. Vol. 34. No. 1a. Pp. 319–321.
5. Adcox K., Adler S. S., Ajitanand N. N., et al. Centrality dependence of charged particle multiplicity in Au-Au collisions at $\sqrt{s_{NN}} = 130$ GeV // Physical Review Letters. 2001. Vol. 86. No. 16. Pp. 3500–3505.
6. UAS Collaboration, Alpgård K., Ansorge R. E., et al. Charged particle multiplicities at the CERN SPS collider // Physics Letters B. 1981. Vol. 107. No. 4. Pp. 315–319.
7. Harris J. W., STAR Collaboration, Adams D. L., et al. The STAR experiment at the relativistic heavy ion collider // Nuclear Physics A. 1994. Vol. 566. 3 January. Pp. 277–285.
8. Sjöstrand T., Mrenna S., Skands P. A brief introduction to PYTHIA 8.1 // Computer Physics Communications. 2008. Vol. 178. No. 11. Pp. 852–867.
9. Фёрстер Э., Рёни Б. Методы корреляционного и регрессионного анализа. Пер. с нем. М.: Финансы и статистика, 1983. 303 с.
10. Yan X., Su X. Linear regression analysis: Theory and computing. Singapore: World Scientific, 2009. 348 p.
11. Quinlan J. R. Induction of decision trees // Machine Learning. 1986. Vol. 1. No. 1. Pp. 81–106.
12. Ho T. K. Random decision forests // Proceedings of 3rd International Conference on Document Analysis and Recognition. Montreal, QC, Canada. 14–16 August, 1995. Vol. 1. Pp. 278–282.
13. Хайкин С. Нейронные сети. Полный курс. Пер. с англ. 2-е изд. М.: Изд-во «Вильямс», 2019. 1104 с.
14. Akiba T., Sano S., Yanase T., Ohta T., Koyama M. Optuna: A next-generation hyperparameter optimization framework // Proceedings of the 25th ACM SIGKDD International Conference on Knowledge Discovery & Data Mining. 2019. Pp. 2623–2631.
15. Bergstra J., Bardenet R., Bengio Y., Kégl B. Algorithms for hyper-parameter optimization // Advances in Neural Information Processing Systems 24 (NIPS 2011). Edited by J. Shawe-Taylor, R. Zemel, P. Bartlett, F. Pereira, K. Q. Weinberger. 2011. Vol. 24. Pp. 1–6.

16. **Barten A. P.** The coefficient of determination for regression without a constant term // Heijmans R., Neudecker H. (Eds.) The practice of econometrics. International Studies in Economics and Econometrics. Vol. 15. Dordrecht: Springer, 1987. Pp. 181–189.
17. **Efron B.** Bootstrap methods: Another look at the jackknife // The Annals of Statistics. 1979. Vol. 7. No. 1. Pp. 1–26.
18. **Shorack G. R., Wellner J. A.** Empirical processes with applications to statistics (Classics in Applied Mathematics, Series No. 59). Published by Society for Industrial and Applied Mathematics, Philadelphia, USA, 2009. 348 p.
19. **Tetko I. V., Livingstone D. J., Luik A. I.** Neural network studies. 1. Comparison of overfitting and overtraining // Journal of Chemical Information and Computer Sciences. 1995. Vol. 35. No. 5. Pp. 826–833.

REFERENCES

1. **Shurjak E. V.**, The quark-gluon plasma, Phys. Usp. 25 (10) (1982) 760–761.
2. **Morrison D. P., Akiba Y., Alford O., et al.**, The PHENIX experiment at RHIC, Nucl. Phys. A. 638 (1–2) (1998) 565c–569c.
3. ATLAS Collaboration, **Aad G., Abbott B., et al.**, Measurement of the centrality dependence of the charged particle pseudorapidity distribution in lead-lead collisions at $\sqrt{s_{NN}} = 2.76$ TeV with the ATLAS detector, Phys. Lett. B. 710 (3) (2012) 363–382.
4. **Aguiar C. E., Andrade R., Grassi F., et al.**, Comparison between classification using impact parameter and using number of participants in relativistic nuclear collisions, Braz. J. Phys. 34 (1a) (2004) 319–321.
5. **Adcox K., Adler S. S., Ajitanand N. N., et al.**, Centrality dependence of charged particle multiplicity in Au–Au collisions at $\sqrt{s_{NN}} = 130$ GeV, Phys. Rev. Lett. 86 (16) (2001) 3500–3505.
6. UAS Collaboration, **Alpgård K., Ansorge R. E., et al.**, Charged particle multiplicities at the CERN SPS collider, Phys. Lett. B. 107 (4) (1981) 315–319.
7. **Harris J. W., STAR Collaboration, Adams D. L., et al.**, The STAR experiment at the relativistic heavy ion collider, Nucl. Phys. A. 566 (3 January) (1994) 277–285.
8. **Sjöstrand T., Mrenna S., Skands P.**, A brief introduction to PYTHIA 8.1, Comp. Phys. Commun. 178 (11) (2008) 852–867.
9. **Förster E., Rönz B.**, Methoden der Korrelations- und Regressionanalyse, Verlag Die Wirtschaft, Berlin, 1979.
10. **Yan X., Su X.**, Linear regression analysis: Theory and computing, World Scientific, Singapore, 2009.
11. **Quinlan J. R.**, Induction of decision trees, Mach. Learn. 1 (1) (1986) 81–106.
12. **Ho T. K.**, Random decision forests, Proc. 3rd Int. Conf. Document Analysis and Recognition, Montreal, QC, Canada. 14–16 Aug. 1995. IEEE. 1 (1995) 278–282.
13. **Haykin S.** Neural networks. A comprehensive foundation. Prentice Hall, New Jersey, USA, 1998.
14. **Akiba T., Sano S., Yanase T., et al.**, Optuna: A next-generation hyperparameter optimization framework, Proc. 25th ACM SIGKDD Int. Conf. Knowledge Discovery & Data Mining (2019) 2623–2631.
15. **Bergstra J., Bardenet R., Bengio Y., Kégl B.**, Algorithms for hyper-parameter optimization, In book: Advances in Neural Information Processing Systems 24 (NIPS 2011). Edited by J. Shawe-Taylor, R. Zemel, P. Bartlett, F. Pereira, K. Q. Weinberger. 24 (2011) 1–6.
16. **Barten A. P.**, The coefficient of determination for regression without a constant term, In book: Heijmans R., Neudecker H. (Eds.) The practice of econometrics (International Studies in Economics and Econometrics. Vol. 15). Springer, Dordrecht (1987) 181–189.
17. **Efron B.**, Bootstrap methods: Another look at the jackknife, Ann. Stat. 7 (1) (1979) 1–26.
18. **Shorack G. R., Wellner J. A.**, Empirical processes with applications to statistics (Classics in Applied Mathematics, Ser. No. 59). Publ. by SIAM, Philadelphia, USA, 2009.
19. **Tetko I. V., Livingstone D. J., Luik A. I.**, Neural network studies. 1. Comparison of overfitting and overtraining, J. Chem. Inf. Comput. Sci. 35 (5) (1995) 826–833.

СВЕДЕНИЯ ОБ АВТОРАХ

ЛОБАНОВ Андрей Александрович – студент Физико-механического института Санкт-Петербургского политехнического университета Петра Великого, Санкт-Петербург, Россия.

195251, Россия, г. Санкт-Петербург, Политехническая ул., 29

lobanov2.aa@edu.spbstu.ru

ORCID: 0000-0002-8910-4775

БЕРДНИКОВ Ярослав Александрович – доктор физико-математических наук, профессор Высшей школы фундаментальных физических исследований Санкт-Петербургского политехнического университета Петра Великого, Санкт-Петербург, Россия.

195251, Россия, г. Санкт-Петербург, Политехническая ул., 29

berdnikov@spbstu.ru

ORCID: 0000-0003-0309-5917

МИТРАНКОВ Юрий Михайлович – ассистент Высшей школы фундаментальных физических исследований Санкт-Петербургского политехнического университета Петра Великого, Санкт-Петербург, Россия.

195251, Россия, г. Санкт-Петербург, Политехническая ул., 29

mitrankovy@gmail.com

ORCID: 0000-0002-9774-2339

THE AUTHORS

LOBANOV Andrey A.

Peter the Great St. Petersburg Polytechnic University

29 Politechnicheskaya St., St. Petersburg, 195251, Russia

lobanov2.aa@edu.spbstu.ru

ORCID: 0000-0002-8910-4775

BERDNIKOV Yaroslav A.

Peter the Great St. Petersburg Polytechnic University

29 Politechnicheskaya St., St. Petersburg, 195251, Russia

berdnikov@spbstu.ru

ORCID: 0000-0003-0309-5917

MITRANKOV Iurii M.

Peter the Great St. Petersburg Polytechnic University

29 Politechnicheskaya St., St. Petersburg, 195251, Russia

mitrankovy@gmail.com

ORCID: 0000-0002-9774-2339

Статья поступила в редакцию 18.01.2023. Одобрена после рецензирования 30.01.2023. Принята 31.01.2023.

Received 18.01.2023. Approved after reviewing 30.01.2023. Accepted 31.01.2023.