

Федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего образования «Санкт-Петербургский политехнический университет Петра Великого»

На правах рукописи



ЗАЙЦЕВ Дмитрий Кириллович

Численное решение задач гидрогазодинамики и теплообмена  
с использованием блочно-структурированных сеток.

Программный комплекс SINF

05.13.18 – математическое моделирование, численные методы и комплексы программ

Диссертация на соискание ученой степени  
доктора физико-математических наук

Научный консультант:  
д-р физ.-мат. наук, профессор  
Смирнов Евгений Михайлович

Санкт-Петербург – 2016

## Оглавление

Введение .....	4
Глава 1 Состав и функциональные возможности ПК SINF .....	13
1.1 Предварительные замечания .....	13
1.1.1 Компоненты ПК SINF .....	13
1.1.2 Вклад автора в разработку ПК SINF .....	15
1.2 Расчетные модули комплекса SINF .....	17
1.2.1 Математические модели и классы решаемых задач .....	17
1.2.2 Структура данных .....	20
1.3 Создание расчетных сеток и смежные вопросы .....	24
1.4 Визуализация и обработка результатов расчета .....	36
1.5 Интегрированная учебная версия ПК SINF – пакет FLOS .....	38
Глава 2 Математические модели ПК SINF .....	42
2.1 Базовая математическая модель .....	42
2.1.1 Модель среды и определяющие уравнения .....	42
2.1.2 Моделирование турбулентности .....	49
2.1.3 Запись уравнений в обобщенной системе координат .....	58
2.2 Математические модели специализированных кодов ПК SINF .....	60
2.2.1 Модель для расчета течений жидкости со свободной поверхностью .....	60
2.2.2 Модель для расчета газодисперсных потоков .....	62
2.2.3 Комплексная модель тепломассопереноса и конденсации при течении парогазовой среды .....	66
Глава 3 Численные методы и алгоритмы ПК SINF .....	71
3.1 Аппроксимация определяющих уравнений .....	71
3.1.1 Метод конечного объема .....	72
3.1.2 Дискретизация уравнения конвективно-диффузионного переноса .....	80
3.1.3 Дискретизация уравнений высокоскоростного течения газа .....	87
3.1.4 Стыковка блоков .....	90
3.2 Алгоритм решения разностных уравнений .....	92
3.2.1 Линеаризация уравнений и формирование матрицы системы .....	92
3.2.2 Обеспечение баланса массы в низкоскоростных потоках .....	97
3.2.3 Линеаризация уравнений движения сжимаемого газа .....	105
3.2.4 Решение линеаризованных уравнений .....	109
3.3 Параллелизация вычислений .....	113
3.4 Специализированные алгоритмы ПК SINF .....	120

3.4.1	Проведение расчетов на деформируемых сетках .....	120
3.4.2	Аппроксимация уравнений при расчете течений жидкости со свободной поверхностью .....	125
3.4.3	Решение уравнений низкоскоростного течения парогазовой среды с конденсацией .....	130
Глава 4	Тестирование ПК SINF .....	132
4.1	Матрица тестирования .....	132
4.2	Сравнение с аналитическими и численными решениями .....	133
4.3	Сравнение с экспериментальными данными .....	148
Глава 5	Применение ПК SINF для решения фундаментальных и прикладных задач гидрогазодинамики и теплообмена .....	167
5.1	Исследовательские расчеты течения и теплопереноса в модельных конфигурациях .....	167
5.1.1	Энергоразделение в закрученном потоке газа .....	167
5.1.2	Свободные и вынужденные колебания тел в потоке .....	171
5.1.3	Натекание потока после обрушения «дамбы» на препятствие .....	177
5.1.4	Течение газозвеси в устройстве гомогенного смесеобразования .....	180
5.2	Течение и потери энергии в проточных частях турбомашин .....	181
5.2.1	Лопаточные решетки .....	181
5.2.2	Выхлопные патрубки паровых турбин .....	192
5.2.3	Регулирующие клапаны паровых турбин .....	196
5.2.4	Входные тракты ГПА .....	202
5.3	Конвективный теплообмен в элементах технических устройств .....	209
5.3.1	Торцевой теплообмен в турбинной решетке .....	209
5.3.2	Течение и теплообмен во вращающемся U-образном канале .....	213
5.3.3	Вентиляция хранилища отработанного ядерного топлива .....	217
5.3.4	Течение и тепломассоперенос в модели контейнента АЭС .....	222
	Заключение .....	226
	Список обозначений .....	229
	Список литературы .....	231
Приложение А	Основные модели турбулентности ПК SINF .....	249
A.1	Модели семейства $k-\varepsilon$ .....	249
A.2	Модели семейства $k-\omega$ .....	253
A.3	Прочие модели .....	258

## **Введение**

Диссертация посвящена математическому (численному) моделированию разнообразных течений жидкости и газа в модельных конфигурациях и в условиях сложной геометрии реальных технических устройств. Для проведения расчетов в диссертации разработаны соответствующие математические модели и численные методы, которые реализованы в виде комплекса программ SINF (Supersonic-to-INcompressible Flows), ориентированного на решение широкого круга задач гидрогазодинамики и теплообмена с использованием блочно-структурированных расчетных сеток. В частности, комплекс SINF позволяет проводить расчеты до- и сверхзвуковых течений газа или несжимаемой жидкости, в том числе нестационарных, неизотермических, турбулентных, с эффектами плавучести, с сопряжением неподвижных и вращающихся подобластей. Задачи теплообмена потока с твердыми телами могут решаться в полностью сопряженной постановке; имеются опции моделирования двухфазных потоков (включая течения со свободной поверхностью) и задач аэроупругости. Основу математической модели составляют общие уравнения баланса массы, импульса и энергии в потоке жидкости – уравнения Навье-Стокса (Рейнольдса); для их решения применяются высокоточные численные схемы, эффективные алгоритмы, возможности параллельных вычислений. Благодаря использованию блочно-структурированных расчетных сеток программный комплекс (ПК) SINF практически не имеет ограничений по геометрии расчетной области. Помимо гидродинамического решателя (солвера), в состав ПК SINF входят средства для создания сеток, визуализации результатов расчета, их статистической обработки и др. Таким образом, ПК SINF имеет все атрибуты современного гидродинамического программного комплекса широкого профиля.

### **Актуальность темы**

В настоящее время необходимость численного моделирования течений жидкости и газа для самых разнообразных приложений не вызывает сомнений. В практику разработки многих современных высокотехнологичных устройств прочно вошли оптимизационные и поверочные гидродинамические расчеты, направленные на отработку аэродинамики конструкции, выявление источников потерь, анализ тепловых и механических нагрузок, определение эффективности, оценку работоспособности в нештатных ситуациях и т.д. Для проведения такого рода расчетов применяются как

специализированные, так и универсальные гидродинамические (CFD<sup>1</sup>) коды. Среди наиболее известных – пакеты Fluent и CFX компании ANSYS, пакеты Star-CD и Star-CCM+ компании CD-adapco, свободно распространяемый пакет OpenFOAM. Из отечественных разработок можно упомянуть пакеты FlowVision (компания ТЕСИС, г. Москва), ЛОГОС (РФЯЦ ВНИИЭФ, г. Саров), Gas Dynamics Tool (GDT Software Group, г. Тула). Развитые гидрогазодинамические коды (преимущественно внутреннего использования) имеются также в ряде научных центров России; среди них – коды SigmaFlow, VP2/3, NTS, EWT, HSFlow, CFS3D, NOISEtte, CABARET и др. Накопленный опыт гидродинамических расчетов позволил отобрать из множества предлагавшихся в разные годы моделей турбулентности наиболее удачные и универсальные. Довольно хорошо отработаны численные схемы и алгоритмы, позволяющие решать задачи гидрогазодинамики с применением как структурированных, так и неструктурированных расчетных сеток (напр., [55, 127]); несмотря на достигнутые успехи, продолжается поиск новых, еще более надежных и эффективных моделей и методов (напр., [59]).

Двадцать лет назад, когда начиналась разработка ПК SINF, ситуация в области вычислительной гидродинамики была совершенно иной. Ни универсальных CFD кодов, ни генераторов сеток, ни развитых средств визуализации результатов гидродинамического расчета в России фактически не было. Ввиду весьма ограниченных вычислительных ресурсов была распространена практика решения задачи в упрощенной постановке (например, на основе параболизированных уравнений), часто с применением специальных систем координат и/или аналитических преобразований, отображающих расчетную область на прямоугольник. По сути, это означало разработку специальной численной схемы и отдельной компьютерной программы едва ли не для каждой конкретной проблемы. Ориентация ПК SINF на решение полных (без упрощений) уравнений Навье-Стокса с использованием многоблочных структурированных сеток, а также наличие в составе комплекса необходимых средств пре- и постпроцессинга, позволили уже в 1990-е годы (т.е. до начала активного проникновения коммерческих CFD кодов в промышленные, научные и учебные центры России) оперативно и с высоким качеством решать широкий круг практических задач гидрогазодинамики и теплообмена в условиях реальной геометрии технических устройств. Это в немалой степени способствовало расширению сотрудничества с промышленными предприятиями и повышению доверия практиков к результатам гидродинамических расчетов, что в свою очередь давало стимул к дальнейшему совершенствованию и развитию ПК SINF, который в итоге занял достойное место в ряду известных в мире CFD кодов внутреннего использования. Вышеизложенное подтверждает актуальность и практическую востребованность представляемой работы.

---

<sup>1</sup> Computational Fluid Dynamics

**Целями работы** являются: разработка математических моделей, численных схем и алгоритмов, предназначенных для моделирования различных классов течений жидкости и газа, их реализация в виде комплекса программ SINF и решение с его помощью практических и методических задач гидрогазодинамики и теплообмена. Исходя из этого, в диссертации решены следующие основные **задачи**:

- разработка и внедрение в (исходно одноблочный) гидродинамический код SINF технологии проведения расчетов на многоблочных сетках;
- разработка программных средств для создания расчетных сеток и визуализации результатов расчета;
- внедрение в код SINF широкого спектра современных моделей турбулентности;
- отработка и совершенствование численных схем и алгоритмов для повышения эффективности кода, уточнения аппроксимаций, снижения требований к качеству расчетной сетки;
- разработка и внедрение дополнительных математических моделей и численных методов для расширения классов решаемых задач (нестационарные и сверхзвуковые течения, сопряженный теплообмен, двухфазные потоки, изменяемая геометрия расчетной области и др.);
- систематическое тестирование всех элементов математической модели ПК SINF путем сравнения результатов решения модельных задач с аналитическими решениями, с результатами расчетов других авторов/кодов, с экспериментальными данными;
- проведение с помощью разработанного ПК методических и исследовательских расчетов течения и теплопереноса в модельных конфигурациях и в проточных частях реальных технических устройств.

### **Научная новизна**

В 90-е годы в России фактически отсутствовал опыт разработки универсальных программных средств, обеспечивающих возможность проведения трехмерных гидрогазодинамических расчетов применительно к реальной геометрии технических устройств. В ходе представляемого диссертационного исследования базовые численные схемы, алгоритмы и составляющие математической модели ПК SINF были отобраны из множества вариантов, протестированы, доработаны для большей эффективности и/или надежности кода. Совокупность заложенных в ПК SINF математических моделей и вычислительных технологий может рассматриваться как значимый научный результат.

В диссертации предложен ряд оригинальных элементов численной методики, в частности:

- эффективный алгоритм обеспечения баланса массы в низкоскоростных потоках, основанный на комбинации метода искусственной сжимаемости и метода SIMPLEC;
- модифицированные граничные условия и обобщенные пристенные функции, обеспечивающие снижение зависимости результатов расчета турбулентных течений от густоты сетки в пристенной области;
- метод аппроксимации уравнений гидродинамики, обеспечивающий существенное снижение требований к густоте сетки при расчете течений жидкости со свободной поверхностью по методу VOF по сравнению с традиционными схемами;
- эффективный безытерационный алгоритм деформации структурированной сетки в соответствии с перемещением ограничивающих поверхностей для проведения расчетов в областях с изменяющейся геометрией.

Посредством численного моделирования впервые показано (и впоследствии подтверждено экспериментально), что значимый эффект энергоразделения в вихревой трубе (эффект Ранка) может иметь место при ламинарном режиме течения; данный результат имеет принципиальное научное значение, поскольку считалось, что за этот эффект ответственны, главным образом, турбулентные структуры. Также обнаружено, что при натекании потока жидкости на препятствие возможно образование обширных отрывных зон в придонной области течения, которые приводят к значительным искажениям формы свободной поверхности, наблюдаемым в эксперименте.

Существенно новыми являются представленные в работе результаты многочисленных расчетов течения и теплопереноса в элементах технических устройств, выполненных с помощью ПК SINF по заказам промышленных предприятий и научных организаций. Эти расчеты позволили провести глубокий анализ структуры сложных трехмерных течений, оценить аэродинамическую эффективность исследуемых устройств, а в ряде случаев послужили основой для выработки конкретных предложений по изменению геометрии проточной части для снижения потерь давления.

### **Практическая значимость и использование результатов работы**

Разработан универсальный гидродинамический программный комплекс (ПК) SINF для численного моделирования ламинарных и турбулентных течений жидкости и газа в областях сложной геометрии, в том числе с учетом эффектов плавучести, в условиях сопряженного теплообмена, в неподвижной и вращающейся системе отсчета, в областях с подвижными границами, при наличии свободной поверхности и др.

С помощью разработанного ПК решены разнообразные методические и практические задачи гидрогазодинамики и теплообмена по заказам промышленных и научных организаций (Кировский завод, Ленинградский Металлический завод, ОАО «Теплоэнергосервис», АОЗТ «Энерготех», ВНИПИЭТ, СПБАЭП, РФЯЦ-ВНИИЭФ,

General Electric, Motor Turbo Union и др.). Проведены циклы фундаментальных исследований по грантам Российского фонда фундаментальных исследований (96-01-00764, 98-02-18127, 05-02-17189, 06-08-01334, 08-08-00400, 08-08-00977, 11-08-00590, 12-08-01208) и Российской программы поддержки ведущих научных школ (НШ-1389.2003.8, НШ-376.2006.8, НШ-5917.2008.8). Расчетные исследования с помощью кода SINF легли в основу десяти защищенных кандидатских диссертаций (две из них выполнены под непосредственным руководством автора) и нескольких десятков магистерских работ.

Специализированный код ПГС-ТК, созданный на базе ПК SINF по заказу СПБАЭП, используется для моделирования процессов тепло- и массопереноса в защитной оболочке энергоблока АЭС при анализе эффективности работы системы пассивного отвода тепла с целью оценки безопасности АЭС в условиях возможной аварии.

Упрощенная учебная версия ПК SINF – интегрированный пакет FLOS – внедрена в учебный процесс и широко используется в СПбПУ для выполнения студентами вычислительных лабораторных работ, а также для проведения научных исследований в рамках бакалаврской и магистерской подготовки.

### **Методология и методы исследования**

Для решения задач гидрогазодинамики и теплообмена в диссертации применяется метод математического моделирования, основанный на численном интегрировании системы дифференциальных уравнений в частных производных, в общем случае трехмерных и нестационарных, выражающих общие законы сохранения массы, импульса и энергии в потоке вязкой жидкости или газа. В случае турбулентного движения для замыкания уравнений привлекаются современные полуэмпирические RANS модели или вихререзающие подходы.

В качестве инструмента исследования выступает разработанный в рамках диссертации гидродинамический программный комплекс (ПК) SINF, в котором аппроксимация определяющих уравнений выполнена по методу конечного объема с ориентацией на использование многоблочных структурированных расчетных сеток. Код SINF тщательно протестирован на ряде модельных задач, для которых в литературе имеются экспериментальные и/или расчетные данные других авторов. Методология исследования также включает проведение предварительной методической проработки решаемых задач (в частности, контроль степени зависимости решения от используемой расчетной сетки и временных шагов), что обеспечивает адекватность моделирования и, соответственно, достоверность получаемых результатов.

### **Положения, выносимые на защиту**

1) Разработка совокупности математических моделей для описания различных классов течений жидкости и газа, таких как:

– до- и сверхзвуковые течения газа и несжимаемой жидкости, в общем случае турбулентные, нестационарные, неизоэтермические, в неподвижной и вращающейся системе отсчета, с эффектами плавучести;

– тепломассоперенос в условиях свободной и смешанной конвекции многокомпонентной парогазовой среды при наличии конденсации;

– течения с дисперсными частицами;

– течения в областях с изменяющейся геометрией;

– течения жидкости со свободной поверхностью.

2) Разработка численных схем и алгоритмов, с помощью которых сформулированные математические модели реализованы в виде комплекса программ SINF для решения широкого круга задач гидрогазодинамики и тепломассообмена в областях сложной геометрии с использованием блочно-структурированных расчетных сеток. Среди оригинальных элементов разработанной численной методики:

– эффективный алгоритм обеспечения баланса массы в низкоскоростных потоках, основанный на комбинации метода искусственной сжимаемости и метода SIMPLEC;

– метод постановки граничных условий (обобщенные пристенные функции), обеспечивающий снижение зависимости результатов расчета турбулентных течений от густоты сетки в пристенной области;

– метод аппроксимации конвективной части уравнений гидродинамики, обеспечивающий более высокую точность расчета течений жидкости со свободной поверхностью в методе VOF по сравнению с традиционными численными схемами;

– эффективный безытерационный алгоритм деформации структурированной сетки для проведения расчетов в областях с изменяющейся геометрией;

– алгоритм разбивки блочно-структурированной сетки на подблоки для проведения вычислений в параллельном режиме на заданном числе процессоров.

3) Разработка средств пре- и постпроцессинга для программного комплекса SINF (создание и модификация расчетных сеток, визуализация и анализ результатов расчета), обеспечивших эффективное использование комплекса задолго до появления в России доступных аналогов.

4) Комплексное численное моделирование с помощью разработанного ПК SINF сложных трехмерных течений в проточных частях турбомашин (входной тракт, регулирующие клапаны, лопаточные решетки, выхлопной патрубков и др.) с целью оценки их аэродинамической эффективности; анализ структуры течения и предложения по изменению геометрии проточной части для снижения потерь давления.

5) Исследовательские расчеты течения и теплопереноса в модельных конфигурациях и в элементах реальных технических устройств (колебание тел в потоке, вентиляция сухого хранилища отработанного ядерного топлива, теплоперенос и конденсация в защитной оболочке энергоблока АЭС и др.); в частности, посредством математического (численного) моделирования:

– впервые показано, что значимый эффект энергоразделения в вихревой трубе (эффект Ранка) может иметь место при ламинарном режиме течения;

– обнаружено, что при натекании потока жидкости на препятствие возможно образование обширных отрывных зон в придонной области течения, которые приводят к значительным искажениям формы свободной поверхности, наблюдаемым в опытах.

**Достоверность результатов**, полученных в диссертации, обеспечивается:

– обоснованным использованием математической модели, основанной на фундаментальных законах сохранения массы, импульса и энергии в потоке жидкости или газа, с привлечением хорошо апробированных моделей турбулентности;

– всесторонним тестированием разработанного кода на ряде модельных задач путем сравнения получаемых с помощью ПК SINF результатов с аналитическими решениями, с результатами расчета по другим кодам (в частности, ANSYS Fluent), с эталонными расчетами и экспериментальными данными других авторов;

– тщательной методической проработкой решаемых задач, включающей проверку степени зависимости получаемого решения от используемой расчетной сетки, модели турбулентности и т.д.

### **Апробация диссертации**

Основные результаты работы докладывались на: 3-м Минском международном форуме по тепло- и массообмену (Минск, 1996); 2<sup>nd</sup> Int. Symposium on Finite Volumes for Complex Applications (1999, Duisburg, Germany); международных научно-технических конференциях «Совершенствование турбоустановок методами математического и физического моделирования» (Харьков, 2000, 2006); ICHMT International Symposium on Heat Transfer in Gas Turbine Systems (2000, Cesme, Turkey; 2009, Antalya, Turkey); всероссийской конференции «Закрутка потока для повышения эффективности теплообменников» (Москва, 2002); 7<sup>th</sup> Int. Conference on Advanced Computational Methods in Heat Transfer (2002, Halkidiki, Greece); 5<sup>th</sup> European Conference on Turbomachinery Fluid Dynamics and Thermodynamics (2003, Praha, Czech Republic); 4<sup>th</sup>, 5<sup>th</sup>, 6<sup>th</sup> European Congress on Computational Methods in Applied Sciences and Engineering (ECCOMAS, 2004, Jyväskylä, Finland; 2008, Venice, Italy; 2012, Vienna, Austria); всероссийской научно-технической конференции «Параллельные вычисления в задачах

математической физики» (Ростов-на-Дону, 2004); XV и XVI школе-семинаре молодых ученых и специалистов под руководством акад. РАН А.И. Леонтьева «Проблемы газодинамики и теплообмена в энергетических установках» (Калуга, 2005; Санкт-Петербург, 2007); European Conference for Aerospace Sciences (EUCASS, 2005, Moscow); IX всероссийском съезде по теоретической и прикладной механике (Нижний Новгород, 2006); международных научных конференциях «Параллельные вычислительные технологии» (ПаВТ, Челябинск, 2007; Санкт-Петербург, 2008); Int. Conference on Parallel Computational Fluid Dynamics (Parallel CFD, 2007, Antalya, Turkey); 5<sup>th</sup> Baltic Heat Transfer Conference (2007, St. Petersburg); 13<sup>th</sup> Int. Symposium on Flow Visualization (ISFV, 2008, Nice, France); 5-й и 7-й международной научной конференции по механике «Поляховские чтения» (Санкт-Петербург, 2009, 2015); 6<sup>th</sup> Int. Conference on Computational Fluid Dynamics (ICCFD, 2010, St.Petersburg); XIV международной конференции «Супервычисления и математическое моделирование» (Саров, 2012); Int. Conference on Supercomputing in Nuclear Applications (2013, Paris, France); 6-й Российской национальной конференции по теплообмену (РНКТ-6, Москва, 2014); межотраслевой научно-практической конференции «Суперкомпьютерные технологии в промышленности» (Санкт-Петербург, 2014); 6<sup>th</sup> European Conference on Computational Fluid Dynamics (ECFD, 2014, Barcelona, Spain); XVI международной суперкомпьютерной конференции «Научный сервис в сети Интернет: многообразие суперкомпьютерных миров» (Новороссийск, 2014); 16<sup>th</sup> Int. Conference on Modelling Fluid Flow (CMFF, 2015, Budapest, Hungary).

### **Публикации по теме диссертации и личный вклад автора**

По материалам диссертации опубликовано 46 работ [1 – 46], в том числе 20 работ [1 – 20] в научных изданиях, включенных в Перечень ВАК или в одну из баз данных и систем цитирования Web Of Science, Scopus.

Вклад автора в создание большинства компонентов ПК SINF является определяющим. Выносимые на защиту оригинальные элементы численной методики разработаны лично автором. Большая часть представленных в диссертации расчетов (за исключением явно указанных в тексте случаев) также выполнены лично автором или при его непосредственном участии.

### **Структура и объем работы**

Диссертационная работа состоит из введения, пяти глав и заключения. В первой главе дано общее описание программного комплекса (ПК) SINF как единой системы, состоящей из многих взаимосвязанных элементов, представлены основные компоненты комплекса, очерчен вклад автора в их разработку. Во второй главе представлены

основные элементы математической модели ПК SINF, в третьей – реализованные в нем численные схемы и алгоритмы. В четвертой главе приведены результаты тестирования кода. Пятая глава посвящена применению ПК SINF для решения разнообразных задач гидрогазодинамики и теплообмена в модельных конфигурациях и в элементах технических устройств. В заключении сформулированы основные результаты работы и возможные направления дальнейшей разработки темы. В приложении к работе приведены формулировки реализованных в ПК SINF моделей турбулентности.

Общий объем диссертации 261 стр., в том числе 121 рисунок и 10 таблиц; список литературы включает 212 наименований.

## Глава 1

### Состав и функциональные возможности ПК SINF

В данной главе дано общее описание программного комплекса (ПК) SINF как единой системы, состоящей из многих взаимосвязанных элементов, представлены основные компоненты комплекса, очерчен вклад автора в их разработку.

#### 1.1 Предварительные замечания

##### 1.1.1 Компоненты ПК SINF

Основным элементом гидродинамического программного комплекса является его вычислительный модуль, обеспечивающий численное интегрирование определяющих уравнений. Ведь именно гидродинамический решатель (солвер), в меру реализованных в нем математических моделей и численных методов, определяет круг решаемых задач, качество получаемого решения, а также время расчета и необходимые вычислительные ресурсы. Однако не менее важную роль для эффективного использования комплекса играет наличие в его составе необходимых средств пре- и постпроцессинга, которые обеспечивают подготовку данных для расчета (в частности, создание расчетной сетки), а также визуализацию и анализ получаемых результатов. ПК SINF включает все эти три компонента, что дает основания говорить именно о комплексе взаимосвязанных и взаимодополняющих программ.

Вычислительная часть комплекса SINF (Supersonic-to-INcompressible Flows) представлена, в первую очередь, одноименным расчетным кодом, который обеспечивает численное интегрирование полных (без упрощений) трехмерных уравнений Навье-Стокса, дополненных той или иной полуэмпирической моделью турбулентности, с применением многоблочных структурированных расчетных сеток. Это позволяет проводить с помощью кода SINF моделирование до- и сверхзвуковых течений вязкого газа или несжимаемой жидкости, в общем случае нестационарных, неизотермических, турбулентных, развивающихся в областях сложной геометрии в неподвижной и/или вращающейся системе отсчета.

Для расширения круга решаемых с помощью ПК SINF задач, на основе базового кода SINF разработаны дополнительные расчетные модули, в которых реализованы специализированные математические модели и численные методы, а именно:

– код SINF-PCF (Particles in Carrier Flow) для моделирования турбулентных двухфазных потоков с дисперсными частицами (метод пробных частиц);

– код SINF-ALE (Arbitrary Lagrangian-Eulerian) для моделирования течений в областях с подвижными границами (включая решение задач аэроупругости) с использованием метода деформируемых сеток;

– код SINF-FS (Free Surface) для моделирования нестационарных течений жидкости со сложной динамикой свободной поверхности (плескание жидкости в баке, обрушение «дамбы», набегание волны на препятствие и т.п.) по методу VOF;

– код ПГС-ТК (Паро-Газовая Смесь – Течение и Конденсация), созданный по заказу СПбАЭП для решения задач свободной и смешанной конвекции парогазовой смеси при наличии конденсации пара (с ориентацией на моделирование процессов теплопереноса в защитной оболочке энергоблока АЭС).

Все расчетные коды ПК SINF ориентированы на использование многоблочных структурированных сеток, «вписанных» в реальную геометрию обтекаемых поверхностей. Основным инструментом создания сеток долгое время служил интерактивный генератор MIG (Mesh Interactive Generator), который затем был интегрирован в препроцессор учебного гидродинамического пакета FLOS (Flow Studio). Наряду с сеточными генераторами в состав препроцессорной части ПК SINF входят утилиты для манипуляций с сетками без изменения расстановки узлов; среди наиболее востребованных – интерактивная утилита GROT (Grid Operation Tool) для элементарных алгебраических операций с сетками (сдвиг, масштабирование и др.) и утилита ParUtil, позволяющая «разбить» сетку на более мелкие блоки для проведения расчетов в параллельном режиме.

Постпроцессорная часть ПК SINF представлена системой визуализации FLAG (Flow Analysis Graphics) для экспресс-анализа заданных на блочно-структурированной сетке скалярных и векторных полей, а также утилитами для статистической обработки результатов нестационарных расчетов (осреднение получаемого решения по времени, анализ пульсационных характеристик и т.п.).

В «полной» версии комплекса SINF все его компоненты существуют в виде отдельных приложений, а для использования расчетных кодов требуется «ручное» редактирование управляющих файлов. Чтобы облегчить начинающим пользователям работу с ПК SINF, а также обеспечить возможность начального освоения студентами современной технологии проведения гидродинамических расчетов, создана упрощенная (с «урезанным» набором опций математической модели и численных схем) учебная версия ПК SINF с Windows интерфейсом – интегрированный пакет FLOS (*Flow Studio*).

Более детальное описание перечисленных компонентов ПК SINF дано ниже (разделы 1.2 – 1.5).

### 1.1.2 Вклад автора в разработку ПК SINF

Понятно, что столь сложный «организм», как гидродинамический программный комплекс, создается не в одиночку. В разработке и тестировании ПК SINF, а также в проведении с его помощью методических и исследовательских расчетов, принимали участие более 20 человек (в основном студенты, аспиранты и сотрудники кафедры гидроаэродинамики СПбПУ). По результатам этой работы подготовлены и защищены 10 кандидатских диссертаций [47, 56, 67, 74, 77, 87, 98, 102, 107, 108] (из них две [102, 107] – под руководством автора). Поэтому в рамках настоящей квалификационной работы необходимо очертить вклад автора в разработку ПК SINF, которая берет свое начало от создания Е.М.Смирновым в 1993 г. [179] одноименного расчетного модуля.

Эта первая версия кода SINF позволяла рассчитывать стационарные течения жидкости или газа при невысоких (дозвуковых) скоростях на одноблочной структурированной сетке с применением «стандартной» [152] или низкорейнольдсовой [153]  $k$ - $\epsilon$  модели турбулентности. В последующие годы возможности математического моделирования кода SINF систематически наращивались при одновременной доработке численных методов (уточнение аппроксимаций и снижение требований к качеству сетки, внедрение более эффективных алгоритмов и др.). Так, в 1995-97 гг. был осуществлен переход к использованию многоблочных сеток, в 1997-99 гг. добавлены опции моделирования нестационарных течений и сопряженного теплообмена, в 2001 г. реализована возможность расчета сверхзвуковых потоков с ударными волнами, в 2002 г. выполнено распараллеливание вычислений на базе технологии MPI. Существенно обогатился также спектр реализованных в коде моделей турбулентности, включая модель эффективной вязкости Спаларта-Аллмараса [184], семейство  $k$ - $\omega$  моделей Уилкокса [206, 207, 208] и Ментера [159, 162],  $k$ - $\epsilon$  модели [117, 157, 211, 212], несколько гибридных RANS/LES моделей [109, 185, 192] и др.

Параллельно с развитием базовой версии кода SINF создавались специализированные коды на его основе, что конечно подразумевало разработку и реализацию соответствующих математических моделей и численных методов. Также приходилось уделять внимание созданию необходимых средств пре- и постпроцессинга – ведь в 90-х гг. в России фактически не было ни генераторов расчетных сеток, ни развитых средств визуализации результатов гидродинамического расчета.

Основные этапы развития ПК SINF отражены в таблице 1, где для характеристики вклада автора в разработку того или иного компонента используется сравнительно грубая трехступенчатая градация (более точное «измерение» вряд ли возможно): «единоличный» (приблизительно  $80 \div 100\%$ ), «определяющий» ( $40 \div 70\%$ ) и «незначительный» ( $10 \div 30\%$ ).

Таблица 1 – Основные этапы и вклад автора в развитие ПК SINF

Годы	Содержание этапа	Участники разработки	Вклад автора
	<b>Расширение возможностей кода SINF</b>		
1993	Создание кода SINF (одноблочная стационарная версия)	Е.М.Смирнов	—
1995-1997	Переход к использованию многоблочных расчетных сеток	Н.Г.Иванов, С.Б.Смирнов	<b>определяющий</b>
1997-1999	Реализация возможности расчета нестационарных течений и сопряженного теплообмена	Н.Г.Иванов	<b>определяющий</b>
1997-2003	Расширение функционала стыковки блоков (нерегулярные стыковки, вращательная периодичность, скользящий интерфейс, поверхность смещения и др.)	А.Б.Корсаков, П.Е.Смирнов	<b>определяющий</b>
1998-2009	Внедрение моделей турбулентности (SA, $k-\epsilon$ , $k-\omega$ , SST, RANS/LES и др.) и специальных поправок к ним (влияние сил плавучести, поправка Като-Лаундера, поправка на кривизну и вращение)	А.Г.Абрамов, Е.М.Смирнов, П.Е.Смирнов, А.Смирновский	<b>определяющий</b>
1996-2011	Разработка обобщенных граничных условий и пристенных функций для расчета турбулентных течений	Е.М.Смирнов	<b>определяющий</b>
2001	Внедрение HCUSP схемы для расчета сверхзвуковых течений со скачками уплотнения	М.А.Николаев	незначительный
2002	Разработка и реализация SIMPLE-подобного алгоритма для решения уравнения неразрывности	—	<b>единоличный</b>
2002	Распараллеливание вычислений на основе технологии MPI	С.А.Якубов	<b>определяющий</b>
	<b>Разработка средств пре- и постпроцессинга</b>		
1993-1994	Интерактивный генератор расчетных сеток MIG	—	<b>единоличный</b>
1993-1997	Семейство программ Flag для визуализации результатов гидродинамического расчета (скалярные и векторные поля)	—	<b>единоличный</b>
1998	Утилита WallDist (расчет расстояний до стенки)	П.Е.Смирнов	<b>определяющий</b>
2001	Windows интерфейс визуализатора Flag	С.А.Якубов	незначительный
2010	Утилита ParUtil (подготовка задачи для проведения параллельного расчета на заданном числе процессоров)	С.А.Якубов	<b>определяющий</b>
	<b>Специализированные коды на основе ПК SINF</b>		
1996	Модуль PCF (расчет движения частиц в несущем потоке)	—	<b>единоличный</b>
2000-2003	Пакет FLOS (интегрированная учебная версия ПК SINF с графическим интерфейсом)	П.Е.Смирнов, С.А.Якубов	незначительный
2004-2006	Код SINF-ALE (расчеты на деформируемых сетках, опции аэроупругости)	Н.А.Щур*	<b>определяющий</b>
2009-2013	Код SINF-FS (расчет течений со свободной поверхностью по методу VOF)	А.И.Храбрый*	<b>определяющий</b>
2009-2012	Код ПГС-ТК (моделирование тепломассообмена и конденсации в защитной оболочке АЭС)	А.Смирновский, С.А.Якубов	<b>определяющий</b>

\*) Кандидатская диссертация под руководством автора

Как можно видеть из представленных в таблице данных, на большинстве этапов вклад автора является единоличным или определяющим, что дает основания претендовать, как минимум, на одну из ключевых ролей в создании ПК SINF.

## 1.2 Расчетные модули комплекса SINF

Как было сказано, вычислительная часть комплекса SINF включает одноименный базовый расчетный код и несколько созданных на его основе специализированных кодов. Ниже дано краткое описание назначения и возможностей этих кодов. Также рассмотрены некоторые особенности программной реализации кода SINF, которые в немалой степени способствовали динамичному развитию комплекса на протяжении двух десятилетий.

### 1.2.1 Математические модели и классы решаемых задач

#### Базовый код SINF

Код SINF разрабатывался в расчете на решение возможно более широкого круга задач гидрогазодинамики и теплообмена, что подразумевает использование достаточно универсальной математической модели. Вместе с тем, при выборе модели приходится учитывать трудоемкость ее программной реализации, а также возможное влияние на точность получаемого решения, вычислительную эффективность кода и т.д. С учетом этих противоречивых требований, реализованная в коде SINF математическая модель (см. разд. 2.1) базируется на общих законах сохранения массы, импульса и энергии в потоке вязкой жидкости или газа. Математическим выражением этих законов являются уравнения Навье-Стокса (напр. [79]); в случае турбулентного течения для замыкания уравнений привлекается одна из полуэмпирических моделей турбулентности.

В рамках данной модели код SINF обеспечивает численное моделирование самых разнообразных течений жидкости и газа (от несжимаемых до сверхзвуковых), в том числе нестационарных, неизотермических, турбулентных, с эффектами плавучести и др. Задача может решаться в абсолютной и вращающейся системе отсчета, а также в условиях сопряжения неподвижных и движущихся подобластей; в последнем случае стыковка подобластей может выполняться как непосредственно на скользящем интерфейсе, так и с введением «поверхности смещения». Дополнительные возможности открывает модель анизотропного «пористого тела», позволяющая учесть воздействие на поток разного рода «полупроницаемых» препятствий (решеток, фильтров и т.п.), течение сквозь которые не разрешается на используемой расчетной сетке; введение соответствующего объемного источника в уравнение энергии обеспечивает, в рамках этой модели, учет нагрев жидкости при ее протекании сквозь теплообменник.

Конечно, представленная модель не является всеобъемлющей. За рамками возможностей кода SINF остаются течения разреженных газов, процессы лучистого теплообмена, электромагнитные эффекты и многое другое. Тем не менее, благодаря

отказу от упрощенных моделей движения (как, например, приближение пограничного слоя) и ориентации на, пожалуй, наиболее часто реализуемую на практике модель среды (ньютоновская жидкость), код SINF позволяет с высоким качеством решать множество востребованных практикой задач гидрогазодинамики и теплообмена для условий работы реальных технических устройств. Фактически, на сегодняшний день математическая модель кода SINF считается «минимально-достаточной» для отнесения гидродинамического кода к категории универсальных.

Реализованная в коде SINF методика численного интегрирования определяющих уравнений (разд. 3.1 – 3.3) предполагает использование блочно-структурированных расчетных сеток, согласованных с границами области течения, что позволяет проводить расчеты в областях весьма сложной геометрии с сохранением высокого качества разрешения тонких пристенных пограничных слоев. Дискретизация уравнений выполнена по методу конечного объема со вторым порядком точности по времени и пространству. Распараллеливание вычислений осуществлено на основе декомпозиции расчетной области по блокам сетки с применением коммуникационной библиотеки MPI.

#### Моделирование течений в областях с подвижными границами – код SINF-ALE

Гидродинамические задачи с изменяющейся геометрией расчетной области часто встречаются на практике – достаточно упомянуть о разнообразных случаях относительного перемещения тел в жидкости, об автоколебаниях плохообтекаемых тел или о деформации обтекаемых поверхностей под действием гидродинамических нагрузок. В современных гидродинамических пакетах для решения такого рода задач применяются три основных подхода (иногда в сочетании друг с другом): полная или частичная регенерация сетки (как, например, во всемирно известных пакетах CFX и STAR-CD), наложение сеток с возможностью относительного перемещения отдельных блоков сетки вместе с движущимися телами (данный подход активно используется в пакете CFD-Fastran) и деформация сетки без изменения ее размерности и топологии.

Для внедрения в код SINF был выбран последний из упомянутых подходов, удачно сочетающий относительную простоту реализации (по сути, требуется лишь небольшая модификация конвективных слагаемых в уравнениях гидродинамики, см. разд. 3.4.1), точность и универсальность. Недостатком метода фактически является лишь невозможность рассмотрения больших деформаций, что, как правило, не мешает решению широкого круга задач о колебаниях и/или деформации тел в потоке. Опция расчета на деформируемой сетке доступна во многих современных CFD пакетах (CFX, STAR-CD, CFD-Ace, OpenFOAM и др.), что служит косвенным свидетельством простоты и эффективности данного подхода.

Внедрение опции расчета на деформируемых сетках в код SINF (рабочее название разработанного кода SINF-ALE), включая возможность решения задач аэроупругости, выполнено при подготовке кандидатской диссертации [107] под руководством автора.

#### Моделирование течений со свободной поверхностью – код SINF-FS

Течения жидкости со свободной поверхностью широко распространены в природе и технике, причем во многих случаях граница раздела фаз обладает сложной динамикой, включая режимы со слиянием и разделением объемов, занимаемых жидкой и газовой фазами (плескание жидкости в баке, обрушение «дамбы», набегание волны на препятствие и т.п.). В настоящее время наибольшую популярность при численном моделировании такого рода течений получил метод VOF (Volume-Of-Fluid) [134], в котором для определения положения межфазной границы, перемещающейся по расчетной сетке, используется распределение маркер-функции, представляющей собой объемную долю жидкости в ячейках расчетной сетки (что и дало название методу). Данный подход зарекомендовал себя как достаточно простой, универсальный и относительно нетребовательный к вычислительным ресурсам. В частности, этот метод используется в известных CFD кодах Fluent, CFX, Flow-3D, Star-CD, OpenFOAM и др.

Реализация метода VOF на базе кода SINF (рабочее название разработанного кода SINF-FS) проведена при подготовке кандидатской диссертации [102] под руководством автора. Математическая формулировка метода VOF дана в разд. 2.2.1; особенности разработанной численной методики представлены в разд. 3.4.2.

#### Моделирование газодисперсных потоков – код SINF-PCF

Двухфазные потоки, в которых одна из фаз (дисперсная) присутствует в виде отдельных мелких вкраплений (твердых частиц или капель), встречаются во многих промышленных процессах (сжигание твердого и жидкого топлива, распылительная сушка и охлаждение, пескоструйная обработка, пневмотранспорт сыпучих материалов, циклонное сепарирование и т.п.). В ПК SINF для моделирования такого рода потоков используется метод пробных частиц [119] (разд. 2.2.2), в котором параметры дисперсной фазы определяются путем статистического осреднения (в пределах каждой ячейки расчетной сетки) данных большого числа пробных частиц.

Разработанный автором [22] модуль PCF (Particles in Carrier Flow), обеспечивающий расчет траекторий частиц и вычисление осредненных характеристик дисперсной фазы, реализован в виде относительно независимого набора подпрограмм. При этом используется та же внутренняя структура данных, что и в коде SINF (см. разд. 1.2.2), благодаря чему модуль PCF легко встраивается непосредственно в код SINF. Также он

может работать в виде самостоятельного кода, который обменивается с кодом SINF через файлы. В таком случае код PCF читает поля параметров несущего потока из выходных файлов кода SINF и записывает рассчитанные поля параметров дисперсной фазы (включая члены, описывающие межфазный обмен в уравнениях гидродинамики), которые читаются соответствующим образом доработанным кодом SINF и используются для уточнения поля течения несущего газа с учетом обратного влияния частиц.

### Специализированный код ПГС-ТК

При создании и совершенствовании систем безопасности энергоблоков АЭС с водо-водяными реакторами возникает широкий круг проблем, требующих детальных знаний о конвекции парогазовой среды в защитной оболочке энергоблока АЭС. Специализированный программный код ПГС-ТК (Паро-Газовая Смесь – Течение и Конденсация) [20, 40], созданный<sup>1</sup> в 2009-2011 гг. по заказу СПбАЭП на базе кода SINF, ориентирован на численное моделирование именно таких течений. Реализованные в коде модели (разд. 2.2.3) позволяют решать разнообразные задачи свободной и смешанной турбулентной конвекции многокомпонентной парогазовой смеси при наличии объемной и поверхностной конденсации пара, в том числе со стеканием пленки конденсата. Ввиду ориентации на моделирование процессов теплообмена в защитной оболочке АЭС, в коде предусмотрены специфические опции для учета работы пассивных каталитических рекомбинаторов водорода, прогрева многослойных тепловых структур и др.

Код ПГС-ТК используется в СПбАЭП при анализе эффективности работы системы пассивного отвода тепла с целью оценки безопасности АЭС в условиях возможной аварии.

### **1.2.2 Структура данных**

Одним из этапных моментов в истории развития кода SINF был переход к использованию многоблочных расчетных сеток, что потребовало кардинального изменения структуры данных кода. Новая структура данных была разработана автором и, помимо своей основной функции – поддержки многоблочности, обеспечила благоприятные условия для дальнейшего развития кода (включая внедрение новых моделей и алгоритмов). Ниже представлены основные особенности этой новой структуры данных.

---

<sup>1</sup> Основные разработчики кода ПГС-ТК – автор и А.А.Смирновский.

### Менеджер данных

Специфической особенностью программной реализации кода SINF, написанного на языке Fortran-77, является использование внутреннего менеджера данных<sup>1</sup>, который обеспечивает сохранение целочисленных, вещественных и текстовых параметров вместе с их символьными именами в двух рабочих векторах (одномерных массивах), RWK и IWK. Сохраненный параметр может быть затем извлечен из любой точки программы по его символьному имени. Кроме того, менеджер данных размещает в рабочих векторах все необходимые массивы. Таким образом, векторы RWK и IWK фактически используются как собственная «память» программы.

Использование внутреннего менеджера данных делает программу более гибкой и доступной для дальнейшего развития, поскольку введение любых дополнительных управляющих параметров, внутренних флагов, массивов и т.п. не требует изменения списка аргументов для множества вложенных подпрограмм или модификации списка глобальных переменных (например, COMMON-блоков). Вместо этого передача любых данных между любыми подпрограммами кода может быть организована через рабочие векторы. Кроме того, поскольку в коде SINF все управляющие параметры читаются из специального файла вместе со своими символьными именами, любой добавленный в этот файл параметр сразу становится доступным в нужном месте программы. При этом добавление в управляющий файл новых параметров не требует согласованного изменения процедуры чтения этого файла (которая просто читает и записывает в «память» все имеющиеся параметры), а наличие в файле символьных имен параметров делает его более читаемым и в какой-то мере предохраняет от случайной модификации пользователем «не того» параметра.

Следует отметить также, что использование внутреннего менеджера данных для динамического размещения массивов в векторах RWK и IWK (вместо применения операторов динамического выделения физической памяти) обеспечило практически «безболезненный» перенос кода SINF на разные операционные системы и компиляторы (каковых в истории развития кода было более десятка). Ведь обращение к функциям работы с физической памятью (имевшим разный синтаксис в разных компиляторах<sup>2</sup>) требовалось лишь в одном месте программы – при размещении самих рабочих векторов RWK и IWK.

С учетом ориентации на использование многоблочных сеток, менеджер данных кода SINF также является «многоблочным», т.е. позволяет сохранять параметры с

---

<sup>1</sup> Разработка и программная реализация менеджера данных выполнена лично автором.

<sup>2</sup> В стандарте языка Fortran-77 динамическое выделение памяти вообще не было предусмотрено, хотя в 1990-х годах соответствующие операторы в той или иной форме были доступны (как расширение стандарта) практически во всех компиляторах F77.

одинаковыми именами независимо для каждого блока. В частности, для всех блоков используются одинаковые имена указателей на массивы, что упрощает (унифицирует) организацию вычислений внутри блока.

В работе менеджера данных вектор RWK используется главным образом для размещения вещественных массивов и хранения значений вещественных параметров, тогда как в векторе IWK, помимо целочисленных и текстовых данных, находится вся служебная информация менеджера. В частности, здесь размещаются сведения о размере рабочих векторов и о степени их заполнения, а также списки имен параметров (отдельно для каждого блока расчетной сетки).

Требуемую длину рабочих векторов довольно сложно определить заранее, так как она зависит не только от размера расчетной сетки, но и от числа решаемых уравнений, числа параллельно запущенных процессов, параметров численной схемы, способа задания граничных условий и множества других факторов. Как показывает опыт расчетов с использованием кода SINF, в зависимости от решаемой задачи необходимая длина вектора RWK может составлять 50÷100 размеров расчетной сетки; вектор IWK обычно на порядок короче. В ПК SINF длина рабочих векторов задается пользователем вручную; при нехватке «памяти» программа выдает соответствующее сообщение; по окончании расчета выводится информация о фактически использованной «памяти».

### Символьные имена параметров

Как было сказано, менеджер данных кода SINF позволяет сохранить в рабочих векторах RWK и IWK любой параметр вместе с его символьным именем, а затем извлечь сохраненное значение по его символьному имени из любой точки программы, где доступны рабочие векторы RWK и IWK.

Имена параметров хранятся в односвязных списках, размещаемых в рабочем векторе IWK, так что число параметров может быть практически любым (на сегодняшний день их около трехсот). Поскольку последовательный поиск по длинному списку является сравнительно медленной процедурой, для ускорения доступа к параметрам используются несколько списков («нужный» список определяется по контрольной сумме имени параметра). Кроме того, имена вещественных, целочисленных и текстовых параметров хранятся в разных списках, а поиск запрашиваемого имени проводится только в тех списках, которые соответствуют типу извлекающей процедуры. Благодаря этому, при попытке извлечь, скажем, вещественный параметр с помощью «целочисленной» процедуры, запрашиваемое имя не будет найдено (т.к. оно хранится в списке вещественных, а не целочисленных параметров), что приведет к соответствующему сообщению об ошибке и останову программы. Тем самым снижается вероятность программистских ошибок при работе с параметрами.

### Массивы и указатели

Механизм символьных имен используется в коде SINF также при работе с массивами, которые по мере необходимости размещаются в рабочих векторах RWK (вещественные) и IWK (целочисленные). При размещении массива менеджер данных позволяет сохранить в виде целочисленного параметра указатель на этот массив, т.е. «адрес» его первого элемента в соответствующем рабочем векторе. Подобно любому целочисленному параметру, сохраненный указатель может быть извлечен из «памяти» в любом месте программы, что обеспечивает доступ к элементам массива. Во избежание случайной перезаписи указателя (что приведет к потере связи с ранее выделенным массивом) соответствующий параметр помечается как неизменяемый.

При работе с многоблочной расчетной сеткой для всех блоков требуются однотипные массивы (например, массивы для скорости, температуры и т.д.). В коде SINF указатели таких массивов имеют в разных блоках одно и то же символьное имя (но, естественно, разные значения), что унифицирует организацию вычислений внутри блока. При этом для унификации некоторых типовых вычислений, в коде SINF принято соглашение об именах указателей. А именно, для большинства массивов имя указателя имеет маску IP\*, где \* – условно-смысловая часть имени, поясняющая содержимое массива (например, IPTemp – температура, IPVol – объем ячеек расчетной сетки); для градиентов основных переменных используется маска IG\* (например, IGTemp – градиент температуры); при решении нестационарной задачи массивы основных переменных на предшествующих слоях по времени имеют маску JP\* (предыдущий слой) и KP\* (пред-предыдущий слой).

### Временные массивы

Помимо «именованных» (статических) массивов менеджер данных кода SINF позволяет размещать в рабочих векторах RWK и IWK временные массивы, которые нужны лишь для работы какой-либо подпрограммы и могут быть удалены после использования. Это позволяет экономить память за счет поочередного использования одного и того же участка рабочего вектора разными подпрограммами.

Временные массивы помещаются в конец рабочего вектора последовательно, в порядке их размещения. Удаление временных массивов проводится в обратном порядке (первым удаляется последний из размещенных массивов). По окончании работы программы делается проверка того, что стек временных массивов пуст – это в какой-то мере предохраняет от программистских ошибок, связанных с несогласованным размещением и удалением массивов.

### 1.3 Создание расчетных сеток и смежные вопросы

Отработка базовых алгоритмов, используемых в ПК SINF для построения структурированных расчетных сеток, «вписанных» в реальную геометрию обтекаемых поверхностей, была осуществлена в 1990-х годах, главным образом при создании интерактивного двумерного генератора сеток MIG (Mesh Interactive Generator). Впоследствии, в 2000-2003 гг., усовершенствованная многоблочная версия этого генератора была интегрирована в препроцессор учебного гидродинамического пакета FLOS (Flow Studio, см. разд. 1.5), а также послужила основой для наполнения алгоритмической части трехмерного сеточного генератора ORIGIN (Operative and Rational Interactive Grid Generation Instrument).

Наряду с сеточными генераторами в состав препроцессорной части ПК SINF входят утилиты для манипуляций с сетками без изменения расстановки узлов; среди наиболее востребованных – интерактивная утилита GROT (Grid Operation Tool) для элементарных алгебраических операций с сетками (сдвиг, масштабирование и др.) и утилита ParUtil, позволяющая «разбить» сетку на более мелкие блоки для проведения расчетов в параллельном режиме. Также постоянно используется утилита WallDist для расчета расстояний до стенки, входящих в формулировку многих моделей турбулентности, реализованных в коде SINF (см. Приложение А).

Ниже дано краткое описание перечисленных компонентов ПК SINF; наиболее значимые из них представлены в работе [17].

#### Генератор сеток MIG

Интерактивный двумерный генератор сеток MIG (*Mesh Interactive Generator*) был создан автором в 1993-1994 гг., почти сразу после появления первой версии кода SINF [179]. В то время код SINF был еще одноблочным, а персональные компьютеры работали преимущественно под управлением DOS, что, естественно, отразилось на интерфейсе и возможностях разработанного генератора.

Процесс построения сетки в генераторе MIG включает два основных этапа:

- расстановка узлов вдоль границ расчетной области;
- инициализация и, при необходимости, коррекция (улучшение) сетки.

На каждом этапе на экране отображаются объекты соответствующего уровня и система меню для работы с ними (см. рисунки 1.1 и 1.4); имеется возможность масштабирования изображения и его оцифровки (определение индексов и координат узлов сетки или положения курсора). Текущее распределение узлов на границах расчетной области, как и созданная сетка, сохраняются в текстовых (ASCII) файлах, которые могут быть загружены в генератор MIG (или другие утилиты ПК SINF) для дальнейшей обработки.

Границы расчетной области в генераторе MIG задаются с помощью опорных точек, по которым (в пределах интерактивно выделяемого сегмента) строится гладкая кривая. Для этого используется кусочно-кубическая интерполяция с непрерывной первой производной, которую можно трактовать как разновидность кубического сплайна Эрмита (см. напр. [58]). А именно, декартовы координаты кривой в интервале между опорными точками  $\mathbf{r}_{i-1}$  и  $\mathbf{r}_i$  вычисляются как линейная комбинация двух квадратичных интерполянтов Лагранжа, построенных по триплетам точек  $(i-2; i-1; i)$  и  $(i-1; i; i+1)$ :

$$\mathbf{r}(\xi) = \chi \mathbf{L}_i(\xi) + (1 - \chi) \mathbf{L}_{i-1}(\xi), \quad \chi = \frac{\xi - \xi_{i-1}}{\xi_i - \xi_{i-1}}, \quad \xi_{i-1} \leq \xi \leq \xi_i \quad (1.1a)$$

$$\mathbf{L}_i(\xi) = \mathbf{r}_i + (\mathbf{r}_{i+1} - \mathbf{r}_i) \frac{(\xi - \xi_i)(\xi - \xi_{i-1})}{(\xi_{i+1} - \xi_i)(\xi_{i+1} - \xi_{i-1})} + (\mathbf{r}_{i-1} - \mathbf{r}_i) \frac{(\xi - \xi_i)(\xi - \xi_{i+1})}{(\xi_{i-1} - \xi_i)(\xi_{i-1} - \xi_{i+1})} \quad (1.1b)$$

Здесь  $\xi$  – линейная координата, отсчитываемая вдоль ломаной линии, соединяющей опорные точки  $(\xi_i - \xi_{i-1} = |\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_{i-1}|)$ . На краях выделенного сегмента (в интервалах  $[\mathbf{r}_1; \mathbf{r}_2]$  и  $[\mathbf{r}_{N-1}; \mathbf{r}_N]$ , где  $N \geq 3$  – число опорных точек на сегменте) используется Лагранжева интерполяция (1.1б). Если выделенный сегмент не содержит внутренних опорных точек ( $N = 2$ ), то его концы просто соединяются прямой линией.

При расстановке узлов по границам блоков структурированной сетки, помимо очевидного требования равенства числа узлов на противоположных сторонах блока, обычно нужно обеспечить локальное сгущение узлов на некоторых участках (например, вблизи поверхности обтекаемого тела). В генераторе MIG, как и в большинстве современных сеточных генераторов, для этого используется функция расстановки узлов на выделенном сегменте по закону геометрической прогрессии (см. рисунок 1.1).

В дополнение к «стандартной» функции расстановки узлов по сегменту в генераторе MIG реализованы «авторские» инструменты для модификации существующего распределения узлов, которые, как показала многолетняя практика применения генератора, значительно повышают удобство и эффективность работы с граничными узлами. Среди наиболее востребованных – функции, обеспечивающие

- изменение числа узлов на сегменте (с сохранением имеющейся неравномерности их распределения);
- перемещение выбранного узла вдоль границы (с пропорциональным смещением остальных узлов на сегменте);
- «притягивание» (или отталкивание) узлов сегмента к выделенному узлу;
- прямой и инверсный перенос (копирование) распределения узлов с одного сегмента на другой.

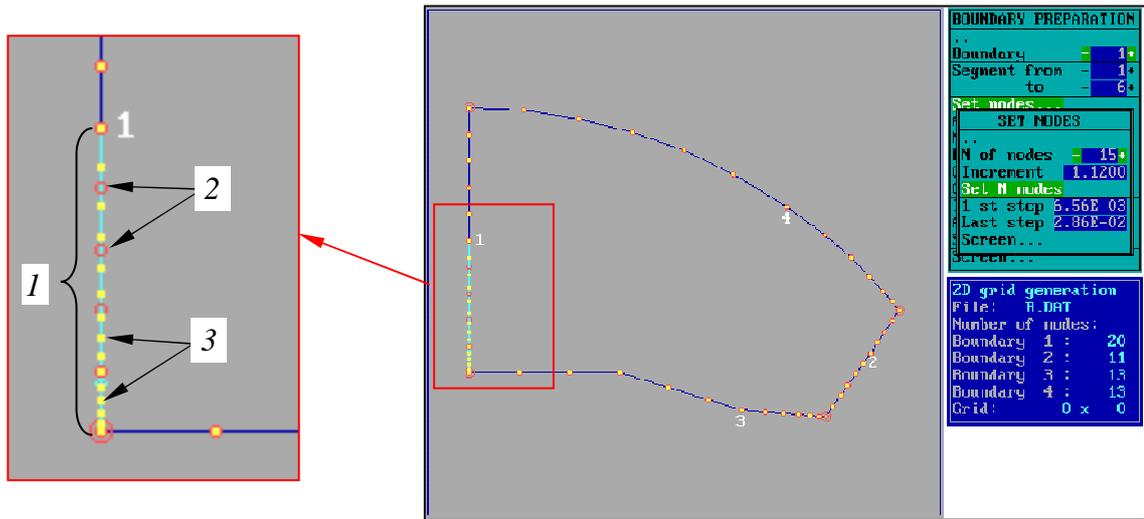


Рисунок 1.1 – Расстановка узлов вдоль границ расчетной области в генераторе MIG:

1 – активный сегмент, 2 – опорные точки, 3 – граничные узлы создаваемой сетки

Для реализации перечисленных функций используется монотонный сплайн<sup>1</sup>, аппроксимирующий текущее распределение узлов на выделенном сегменте границы, т.е. зависимость относительной координаты узлов  $\bar{\xi} = (\xi - \xi_1) / (\xi_N - \xi_1)$  от их относительного номера  $u = (i - 1) / (N - 1)$  (см. рисунок 1.2а). После того, как сплайн построен, не составляет труда воспроизвести ту же неравномерность для другого числа узлов или при расстановке узлов на другом сегменте (в прямом или обратном порядке). Перемещение узлов по сегменту реализуется с помощью преобразования их относительных номеров  $u^* = f(u)$ : для сдвига узла используется кусочно-линейное преобразование (с изломом в выбранном узле, см. рисунок 1.2б), а для «притягивания» к выбранному узлу – геометрическая прогрессия с заданным коэффициентом сгущения (или разрежения) по обе стороны от «центра притяжения».

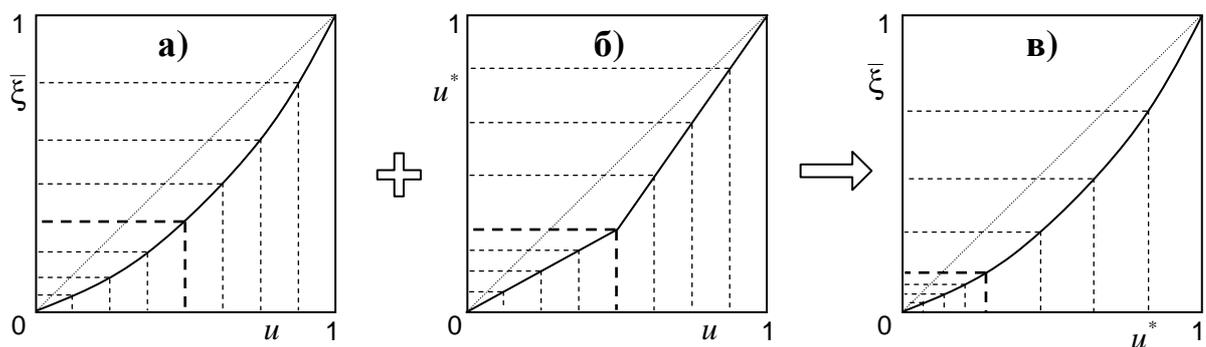


Рисунок 1.2 – Перераспределение узлов на сегменте (сдвиг узла): а) аппроксимация исходного распределения, б) сдвиг «индексов», в) итоговое распределение

<sup>1</sup> Фактически используется кусочно-кубическая интерполяция, аналогичная (1.1), однако на участках, где она оказывается немонотонной, применяется линейная интерполяция.

Для первичной расстановки внутренних узлов (инициализации) расчетной сетки в генераторе MIG используется линейный вариант метода трансфинитной интерполяции [125], алгоритм которого можно представить в виде последовательности двух (в трехмерном случае – трех) одномерных преобразований:

$$\mathbf{r}^{(1)}(\mathbf{u}) = P^{(1)}(\mathbf{r}^{(0)}), \quad P^{(i)}(\mathbf{r}) \equiv (1 - u_i) \cdot \mathbf{r}(\mathbf{u})|_{u_i=0} + u_i \cdot \mathbf{r}(\mathbf{u})|_{u_i=1} \quad (1.2a)$$

$$\mathbf{r}^{(2)}(\mathbf{u}) = \mathbf{r}^{(1)}(\mathbf{u}) + P^{(2)}(\mathbf{r}^{(0)} - \mathbf{r}^{(1)}) \quad (1.2б)$$

$$\mathbf{r}^{(3)}(\mathbf{u}) = \mathbf{r}^{(2)}(\mathbf{u}) + P^{(3)}(\mathbf{r}^{(0)} - \mathbf{r}^{(2)}) \quad (1.2в)$$

Здесь  $\mathbf{r}$  – радиус-векторы узлов сетки в физическом пространстве;  $\mathbf{u}$  – векторы их координат в пространстве относительных индексов ( $0 \leq u_i \leq 1$ ). Преобразующая функция  $P^{(i)}(\mathbf{r})$  обеспечивает интерполяцию (в данном случае – линейную) вдоль индексных линий  $i$ -го направления между противоположащими гранями расчетной области.

На «вход» алгоритма (1.2) подаются координаты узлов сетки на границе блока  $\mathbf{r}^{(0)}$  (см. рисунок 1.3а). На первом шаге (1.2а) узлы расставляются вдоль линий (в данном случае – прямых), соединяющих сходственные узлы на гранях  $u_1 = 0$  и  $u_1 = 1$  (рисунок 1.3б). На гранях  $u_2 = 0$  и  $u_2 = 1$  полученная сетка  $\mathbf{r}^{(1)}$ , вообще говоря, не совпадает с заданной поверхностной сеткой  $\mathbf{r}^{(0)}$ ; второй шаг алгоритма (1.2б) устраняет это несоответствие (рисунок 1.3в).

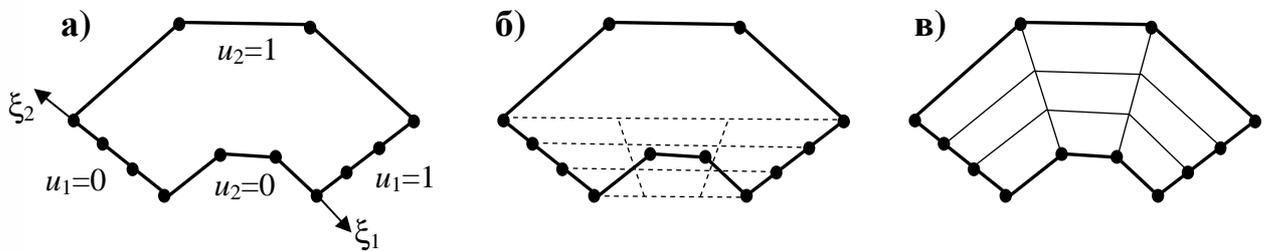


Рисунок 1.3 – Построение сетки по методу трансфинитной интерполяции (1.2):

а) узлы сетки на границе области  $\mathbf{r}^{(0)}$ , б) промежуточная сетка  $\mathbf{r}^{(1)}$ , в) итоговая сетка  $\mathbf{r}^{(2)}$

Если качество расчетной сетки, полученной в результате трансфинитной интерполяции (1.2), не удовлетворяет пользователя (например, из-за скошенности ячеек вблизи поверхности обтекаемого тела), он имеет возможность интерактивной корректировки сетки (см. рисунок 1.4). Как и при работе с границами, модификация сетки проводится внутри задаваемого пользователем сегмента (индексного прямоугольника, рисунок 1.4а), что позволяет вносить необходимые улучшения локально, без изменения всей сетки.

Алгебраические методы корректировки сетки в генераторе MIG представлены двумерными аналогами функций для работы с граничными узлами, а именно:

- изменение числа сеточных линий выбранного направления (с сохранением имеющейся неравномерности их распределения);
- перемещение выбранного узла или сеточной линии вдоль сеточных или координатных направлений (с линейно убывающим смещением остальных узлов в пределах сегмента, рисунок 1.4б);
- «притягивание» узлов сегмента к выделенному узлу или сеточной линии;
- инициализация сетки внутри сегмента в соответствии с текущим распределением узлов на его границе по методу трансфинитной интерполяции.

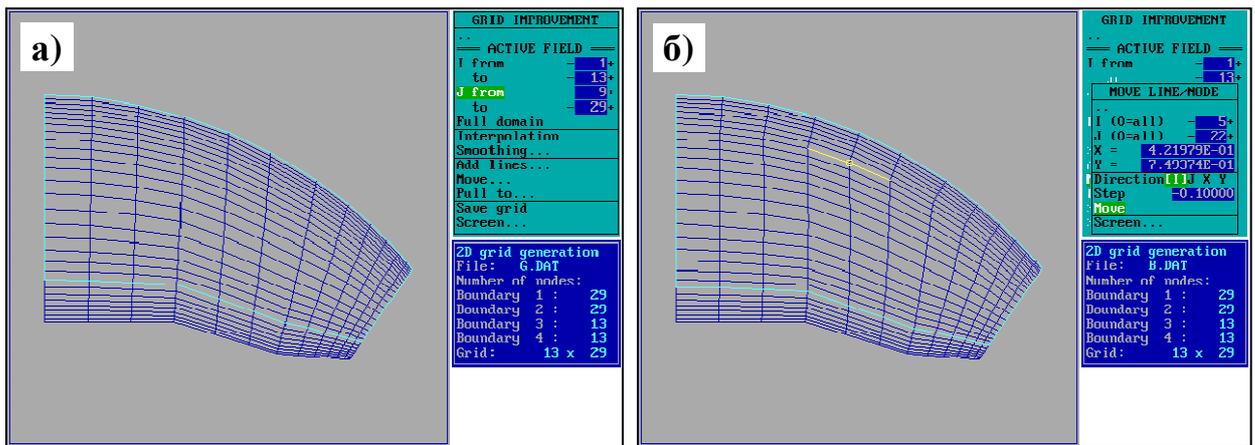


Рисунок 1.4 – Локальная коррекция сетки в генераторе MIG:

а) выбор активного сегмента, б) сдвиг узла вдоль сеточной линии

Также имеется возможность построения сетки на основании решения уравнения Пуассона (метод Томпсона, [191]) с управляющими функциями Томаса–Мидлкофа [190]. Однако в генераторе MIG данная функция обычно используется не для создания, а для сглаживания сетки (устранения изломов сеточных линий). В этом случае процесс итерационного решения уравнения Пуассона в выделенном сегменте не доводится до конца, а останавливается после каждой итерации для визуальной оценки результата; как правило, желаемый эффект сглаживания достигается уже после двух-трех итераций.

### Трёхмерный генератор ORIGIN

Как уже отмечалось, алгоритмы, отработанные автором в сеточном генераторе MIG, были использованы при создании генератора трёхмерных сеток ORIGIN<sup>1</sup> (*Operative and Rational Interactive Grid Generation Instrument*, см. рисунок 1.5), который входит в состав распределенной информационно-вычислительной системы, предназначенной для решения широкого круга задач вычислительной гидродинамики и теплообмена [61]. При этом для алгоритмов, базирующихся на интерполяции вдоль

<sup>1</sup> Генератор ORIGIN разработан сотрудниками Тверского государственного технического университета под руководством В.Д.Горячева.

кривой (расстановка узлов на ребрах, трансфинитная интерполяция, смещение узлов и др.), обобщение на трехмерный случай фактически свелось к простому добавлению третьей координаты при вычислении длины дуги и в качестве интерполируемой величины. Естественно, ориентация на работу с трехмерными сетками потребовала более развитого графического интерфейса для визуализации и навигации по объектам.

Для построения трехмерных сеток в генераторе ORIGIN предусмотрено несколько методов, простейшим из которых является «выращивание» трехмерной сетки из двумерной (поверхностной) посредством поворота или линейного смещения. Также имеется возможность трансляции двумерной сетки вдоль заданных направляющих (прямолинейных или криволинейных) с соответствующим линейным растяжением и поворотом начальной сетки или, в более общем случае, с плавным переходом от одной сетки к другой (например, от квадратной к круглой). Это позволяет быстро строить сетки, в частности, для расчета течения в трубах, диффузорах, переходниках и других каналах с плавно изменяющимся сечением.

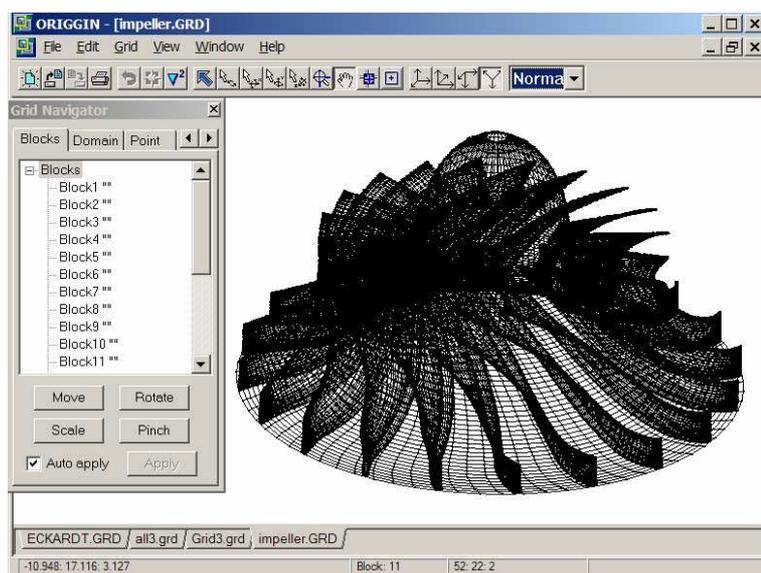


Рисунок 1.5 – Сеточный генератор ORIGIN: создание сетки для расчета течения в колесе центробежного компрессора

В условиях более сложной геометрии для создания (инициализации) трехмерной сетки в генераторе ORIGIN применяется трансфинитная интерполяция, которая в общем случае требует задания сетки на всех шести ограничивающих поверхностях (гранях топологического куба). Сетки для плоских граней строятся как обычные двумерные (с возможностью их пространственного смещения и поворота); для искривленных поверхностей используется метод проецирования плоской сетки (напр. [191]). С целью экономии затрат на построение поверхностных сеток предусмотрены также «неполные» варианты трансфинитной интерполяции – по четырем граням и по 12

ребрам; при этом недостающие поверхностные сетки создаются автоматически, с помощью трансфинитной интерполяции по двум индексным направлениям.

Среди дополнительных полезных опций, реализованных в генераторе ORIGIN, можно отметить функцию ортогонализации сетки вблизи выбранной границы, которая является модификацией описанной ранее функции смещения узлов со специально подобранным законом изменения величины смещения при удалении от границы.

### Утилита GROT

Полезным дополнением к описанным генераторам сеток служит утилита GROT<sup>1</sup> (*Grid Operation Tool*) для манипуляций со структурированными сетками без изменения расстановки узлов (рисунок 1.6). Утилита позволяет, в частности, выполнить поворот, смещение и масштабирование сетки, отразить сетку относительно ее грани или координатной плоскости, изменить порядок и направление индексов, «разрезать» сетку на отдельные блоки или объединить пару блоков в единую сетку. Утилита работает как с двумерными, так и с трехмерными сетками; также имеется возможность создания трехмерной сетки из двумерной посредством поворота или линейного смещения с заданным коэффициентом неравномерности. Графический интерфейс позволяет визуально контролировать выполнение всех операций с возможностью масштабирования и оцифровки изображения.

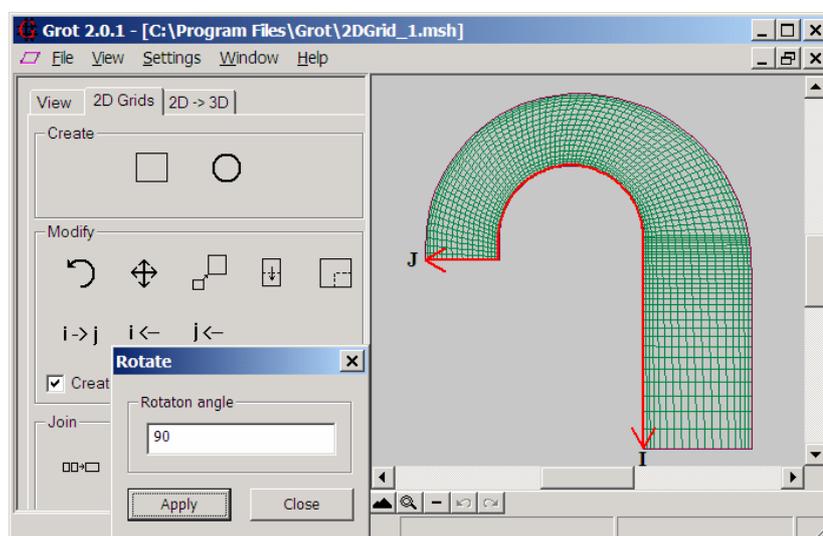


Рисунок 1.6 – Утилита для манипуляций с сетками GROT

### Утилита ParUtil

Распараллеливание вычислений в коде SINF выполнено по блокам расчетной сетки (см. разд. 3.3), поэтому число параллельно запускаемых процессов ограничено

<sup>1</sup> Утилита GROT разработана С.А.Якубовым.

числом блоков сетки, а при неодинаковом размере блоков могут возникать сложности с обеспечением равномерного распределения вычислительной нагрузки по процессам. Для небольшого числа процессов разбику расчетной области на блоки подходящего размера можно выполнить вручную – на этапе создания сетки или путем «разрезания» имеющихся блоков на более мелкие (например, с помощью утилиты GROT). Однако в настоящее время, когда стали доступными вычислительные кластеры с десятками и сотнями ядер, «ручная» разбику сетки на необходимое число блоков становится слишком трудоемкой, тем более, что с увеличением числа блоков растет и количество стыковок, каждую из которых нужно правильно описать.

Утилита *ParUtil*, созданная автором совместно с С.А.Якубовым, практически полностью автоматизирует подготовку задачи к запуску кода SINF в параллельном режиме. В частности, утилита разрезает крупные блоки исходной сетки на более мелкие и группирует их с таким расчетом, чтобы обеспечить по возможности равномерную загрузку заданного числа процессов, не допуская при этом неоправданного увеличения размера межблочных границ и появления слишком маленьких (по числу ячеек) блоков. Одновременно с разбику сетки утилита формирует новые управляющие файлы для кода SINF, в которых указано предлагаемое распределение созданных блоков по процессам, описаны возникшие при разрезании блоков дополнительные стыковки и обновлена индексная привязка граничных условий и т.п.

В разработанном автором алгоритме разбику сетки, который реализован в утилите *ParUtil*, нагрузка на процесс оценивается по суммарному размеру (числу ячеек) приписанных к этому процессу блоков сетки. При этом, поскольку для структурированной сетки невозможно менять размер блоков с точностью до ячейки, максимально разрешенная нагрузка  $P_{max}$  задается с небольшим запасом:

$$P_{max} = \frac{B_{\Sigma}}{N_p} \cdot (1 + \delta) \quad (1.3)$$

Здесь  $B_{\Sigma}$  – суммарный размер всех блоков сетки,  $N_p$  – число процессов, на которые требуется «разбить» сетку,  $\delta$  – коэффициент запаса. Уменьшение  $\delta$  чревато ростом числа блоков «разбитой» сетки, что может отрицательно сказаться на эффективности использования процессов из-за увеличения объема межблочных обменов. С другой стороны, поскольку разработанный алгоритм «старается» максимально загружать процессы, задание слишком большого значения  $\delta$  может привести к тому, что часть процессов будет работать с большой недогрузкой или останется вообще «без работы». Обычно разумный компромисс между числом блоков и неравномерностью загрузки процессов обеспечивается при значении  $\delta \approx 0.5/N_p$ , которое используется в утилите *ParUtil* «по умолчанию».

При разбивке сетки используется динамический список «активных» блоков, которые подлежат разрезанию и/или привязке к одному из  $N_p$  процессов. Первоначально этот список формируется из блоков исходной сетки в порядке убывания их размера. По ходу работы алгоритма те блоки, которые удалось привязать к одному из процессов удаляются из списка, а образующиеся при разрезании новые блоки помещаются в его конец. Собственно разбивка сетки осуществляется путем циклического повторения двух шагов, а именно:

- 1) распределение по процессам имеющихся «мелких» блоков (с исключением их из списка активных блоков; если распределены все блоки, то разбивка окончена);
- 2) разрезание одного из оставшихся «крупных» блоков и возврат к шагу 1.

На первом шаге последовательно просматривается список активных блоков и каждый блок с размером  $B_i \leq P_{max}$  «пробуется» к доступному «свободному месту» на всех процессах (в порядке убывания их текущей загрузки  $P_j$ ). Если обнаруживается достаточно «свободный» для рассматриваемого блока процесс ( $P_j \leq P_{max} - B_i$ ), то данный блок исключается из списка и приписывается к этому процессу (с соответствующим увеличением его загрузки  $P_j$ ), после чего просмотр блоков возобновляется. Таким образом, по окончании первого шага в списке активных остаются только «крупные» блоки, которые «не поместились» ни в один из процессов и, соответственно, должны быть так или иначе разрезаны на части (что и делается на шаге 2). Если активных блоков не осталось, то разбивка сетки завершена – все блоки распределены по процессам без превышения разрешенной нагрузки ( $P_j \leq P_{max}$ ).

Одним из ключевых моментов описываемого алгоритма разбивки сетки является способ разрезания крупных блоков на шаге 2. В принципе, это можно делать как угодно, например, просто разрезая блоки пополам или отрезая от них «ломтики» нужного размера. Однако при этом могут появляться многочисленные чересчур мелкие и/или слишком «плоские» блоки с неоправданно большой межблочной границей, что чревато снижением эффективности распараллеливания. Поэтому в разработанном алгоритме разбивка крупных блоков выполняется с учетом того, как полученные при разрезании дочерние блоки «впишутся» в имеющееся свободное место. Набор используемых при разбивке блока правил можно сформулировать следующим образом.

*a)* Разрезается блок наименьшего размера (он находится в конце списка активных блоков), причем разрез делается по самой «длинной» (в индексном пространстве) стороне блока<sup>1</sup>.

---

<sup>1</sup> Это позволяет более аккуратно (с меньшей дискретностью) выбрать место разреза и обеспечивает минимальный размер возникающей в результате разреза новой межблочной границы.

б) Блок разрезается на две части так, чтобы размер каждого из дочерних блоков был не менее 28% размера «родителя»<sup>1</sup>.

в) В пределах ограничений, заданных предыдущими правилами, место разреза выбирается так, чтобы удовлетворить одному из трех условий (в порядке понижения приоритета):

– если имеется пара процессов, в которые целиком «помещаются» оба дочерних блока, то обеспечивается возможно более полная загрузка более занятого процесса;

– иначе, если имеется свободное место для наименьшего дочернего блока, то среди подходящих процессов выбирается наиболее занятый и обеспечивается его возможно более полная загрузка;

– иначе свободное место нескольких процессов (начиная с менее загруженных) суммируется, пока оно не превысит размер наименьшего дочернего блока, после чего обеспечивается возможно более полное заполнение этого составного свободного места<sup>2</sup>.

г) Разрезанный блок удаляется из списка активных блоков, а дочерние блоки помещаются в его конец (в порядке убывания их размера).

В качестве примера работы утилиты *ParUtil* на рисунке 1.7 показана разбивка двухблочной сетки для запуска задачи на 16 процессах. Блоки исходной сетки имеют размер 100×50 и 50×25 ячеек (рисунок 1.7а). В результате разбивки получено 17 блоков (рисунок 1.7б), наименьший из которых имеет размер 18×7 ячеек (32% средней загрузки одного процесса). Фактическая загрузка процессов не превышает 103% от средней; 14 из 16 процессов имеют загрузку не ниже 98%.

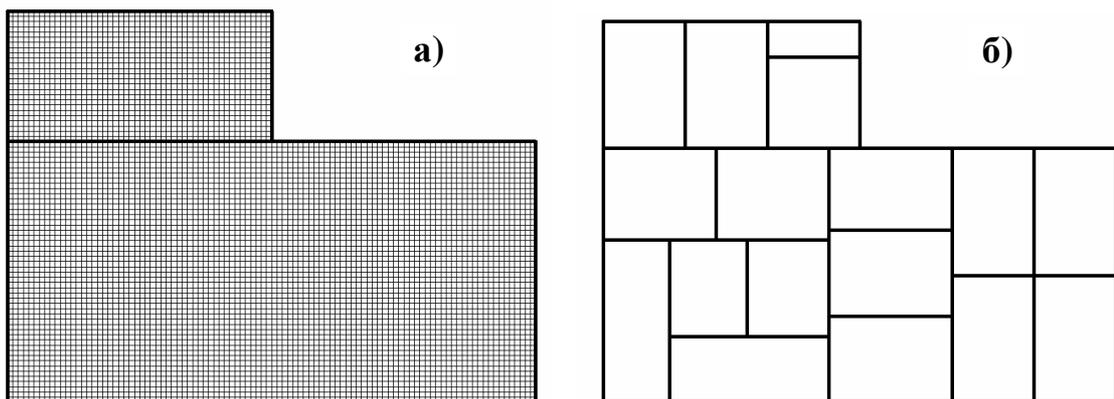


Рисунок 1.7 – Разбивка сетки на более мелкие блоки с помощью утилиты *ParUtil*

<sup>1</sup> Ограничитель подобран экспериментально. Отчасти такой выбор ограничителя можно объяснить тем, что он позволяет отрезать от блока, скажем, половину или треть, но не четверть. В последнем случае выгоднее сначала разрезать блок пополам, с тем чтобы в следующий заход более обоснованно (с учетом изменившихся размеров блока) выбрать место нового разреза.

<sup>2</sup> Как правило, полученный дочерний блок впоследствии легко делится на крупные куски без мелких «обрезков».

### Утилита WallDist

Для работы многих моделей турбулентности требуются данные о расстоянии от текущей точки расчетной сетки до ближайшей стенки<sup>1</sup>. Код SINF читает эти данные из заранее подготовленных файлов, для создания которых и служит утилита *WallDist*, разработанная автором совместно с П.Е.Смирновым. Для определения расстояний до стенки используются геометрические соображения; выбор наименьшего расстояния для текущей точки осуществляется путем перебора поверхностных ячеек (граней).

Алгоритм поиска наименьшего расстояния от произвольной точки  $M$  до стенки включает следующие основные этапы (см. рисунок 1.8).

#### 1) Поиск ближайшей ячейки на стенке

Осуществляется просмотр лежащих на поверхности расчетной области ячеек (граней) с граничным условием типа «стенка», вычисляется расстояние  $|\mathbf{r}_M - \mathbf{r}_O|$  до центра текущей грани и выбирается минимум. На последующих этапах алгоритма вычисляется расстояние от точки  $M$  до выбранной грани (а не до ее центра), которое и принимается за расстояние до стенки.

#### 2) Проверка попадания проекции на грань

Вычисляются координаты проекции точки  $M$  на плоскость грани<sup>2</sup> (точка  $P$  на рисунке 1.8):

$$\mathbf{r}_P = \mathbf{r}_M - \mathbf{n}[(\mathbf{r}_M - \mathbf{r}_O) \cdot \mathbf{n}] \quad (1.4)$$

Вычисляются векторные произведения  $S_{AB}$ ,  $S_{BC}$ ,  $S_{CD}$ ,  $S_{DA}$  (1.5), составленные из последовательных пар векторов, проведенных из точки  $P$  к вершинам грани (в порядке их следования при обходе конура в «положительном» направлении, см. рисунок 1.8б).

$$S_{\alpha\beta} = (\mathbf{r}_\alpha - \mathbf{r}_P) \times (\mathbf{r}_\beta - \mathbf{r}_P) \quad (1.5)$$

Когда точка  $P$  находится внутри грани (как на рисунке 1.8а), все четыре вектора  $S_{\alpha\beta}$  сонаправлены с нормалью  $\mathbf{n}$ , т.е. положительны их скалярные произведения:  $\mathbf{n} \cdot S_{\alpha\beta} > 0$ . Если же среди таких скалярных произведений есть хоть одно отрицательное, то точка  $P$  лежит вне грани (например, в ситуации, показанной на рисунке 1.8б, отрицательным является произведение  $\mathbf{n} \cdot S_{AB} < 0$ ).

#### 3) Вычисление расстояния до грани

Если по результатам проведенной проверки точка  $P$  находится внутри грани, то искомое расстояние до грани (стенки) – это расстояние  $H = |\mathbf{r}_M - \mathbf{r}_P|$  (см. рисунок 1.8а). В

<sup>1</sup> Это относится практически ко всем низкорейнольдсовым и гибридным RANS/LES моделям.

<sup>2</sup> Точнее, на плоскость, проходящую через центр грани  $O$  и перпендикулярную к ее нормали  $\mathbf{n}$ .

противном случае производится вычисление расстояний от точки  $M$  до всех ребер грани и выбирается наименьшее из них.

Для определения расстояния до ребра рассматривается треугольник с основанием на этом ребре и вершиной в точке  $M$  (например, треугольник  $MAB$  на рисунке 1.8б). Если оба угла при основании треугольника острые (что соответствует выполнению условия  $AB^2 > |MA^2 - MB^2|$ , т.е. квадрат основания больше разности квадратов боковых сторон), то расстояние от точки  $M$  до ребра есть высота треугольника  $h$  (см. рисунок 1.8б). В противном случае выбирается меньшее из расстояний  $MA$  и  $MB$ .

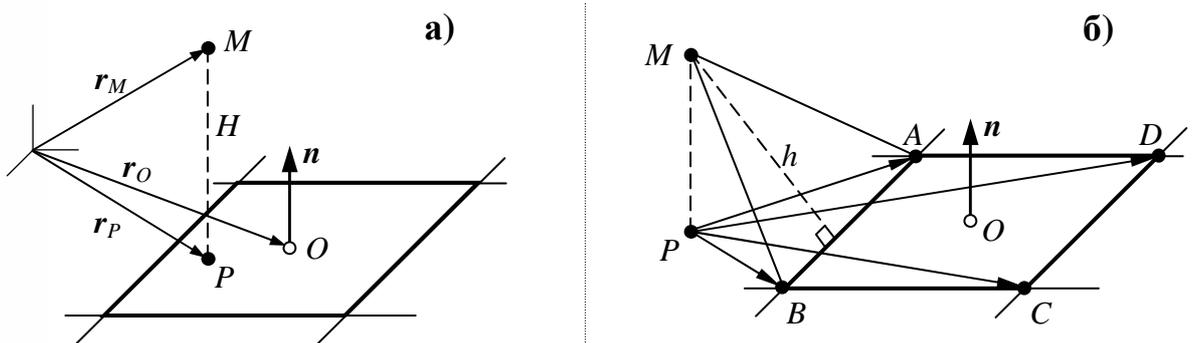


Рисунок 1.8 – К определению расстояния до стенки

Следует отметить, что наиболее затратной частью представленного алгоритма, которая в первую очередь влияет на его быстродействие, является поиск ближайшей грани (этап 1). Именно поэтому на данном этапе делается максимально быстрая (хотя и приближенная<sup>1</sup>) оценка расстояния до грани – точное (как на этапах 2 и 3) вычисление расстояния до каждой грани привело бы к катастрофическому замедлению алгоритма. Кроме того, значительное ускорение поиска ближайшей грани (ячейки) достигается благодаря исключению из просмотра целых граней заведомо далеких от текущей точки блоков расчетной сетки – для этого до начала работы алгоритма определяются границы стенок по граням блоков вдоль каждого из координатных направлений. Для ускорения поиска также используется информация о расстоянии до стенки и расположении ближайшей грани для ранее просмотренных точек.

Параллелизация вычислений в утилите *WallDist* выполнена на основе технологии MPI с декомпозицией задачи по блокам расчетной сетки. А именно, в каждом из параллельно запускаемых процессов рассчитываются расстояния до стенок для тех точек, которые расположены в приписанных к данному процессу блоках сетки. При этом, поскольку в разработанном алгоритме вычисления для каждой точки выполняются практически независимо, межблочный обмен данными не требуется.

<sup>1</sup> Ясно, что грань с ближайшим центром не всегда является ближайшей в строгом понимании. Однако подобные ситуации встречаются редко (главным образом, для сеток «плохого» качества – сильно скошенных и/или крайне неравномерных), а возникающая при этом погрешность определения кратчайшего расстояния очень невелика.

## 1.4 Визуализация и обработка результатов расчета

### Средства визуализации: семейство программ Flag

Одновременно с появлением в 1993 г. первой версии кода SINF [179], который позволял проводить расчет течения на произвольной структурированной сетке, возникла потребность в визуализации результатов таких расчетов. Традиционная для того времени техника построения профилей, например, скорости в отдельных сечениях потока не позволяла составить представление о картине течения в целом, особенно в условиях сложной геометрии расчетной области. Доступных специализированных средств визуализации гидродинамических полей тогда еще не было, а немногие «заменители» были далеки от совершенства. В частности, можно вспомнить программу геодезической направленности *Surfer*, которая позволяла строить изолинии двумерного поля, но в общем случае включала этап переинтерполяции исходных данных на вспомогательную декартову сетку. При этом терялась информация о фактическом разрешении исходной сетки, возникали проблемы с прорисовкой изолиний вблизи границ непрямоугольной расчетной области, не говоря уже о весьма ощутимых затратах времени на проведение самой интерполяции.

Решением проблемы стало создание автором в 1993-1994 гг. набора программ FLAG (*Flow Analysis Graphics*, рисунок 1.9) для визуализации скалярных и векторных полей, заданных на произвольной структурированной сетке. В 1997 г., с учетом новых возможностей кода SINF, визуализатор FLAG стал многоблочным, а в 2001 г. приобрел современный Windows-интерфейс<sup>1</sup> (рисунок 1.10).

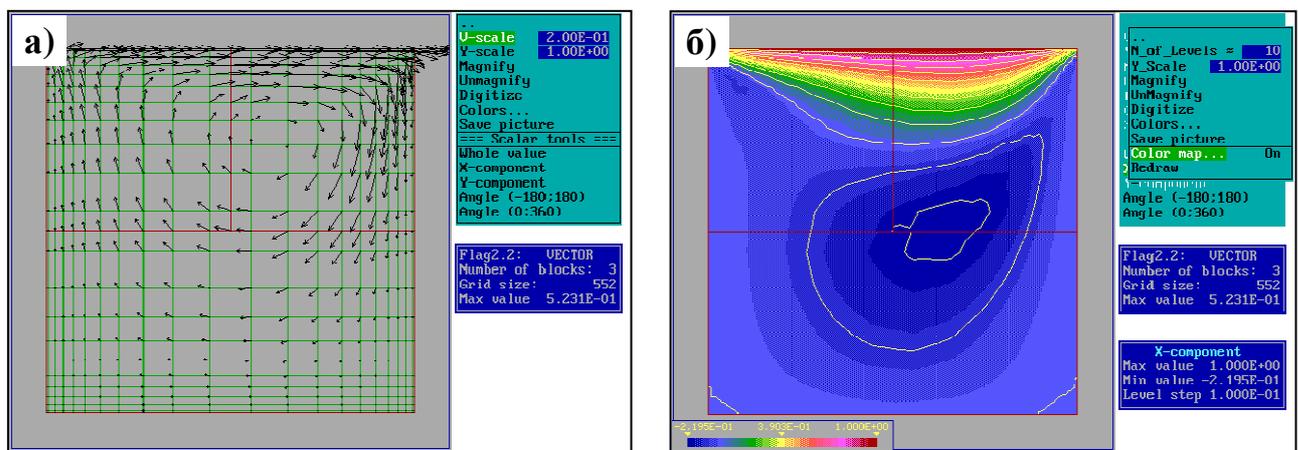


Рисунок 1.9 – Визуализация течения в полости с движущейся крышкой с помощью утилиты FLAG (DOS-версия; экран VGA 640×480, 16 цветов)

<sup>1</sup> Windows-версия визуализатора FLAG разработана С.А.Якубовым.

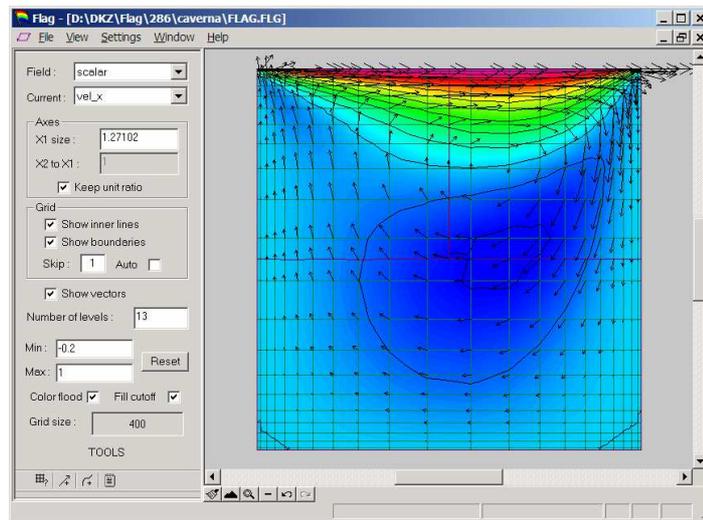


Рисунок 1.10 – Современный Windows-интерфейс утилиты FLAG для визуализации скалярных и векторных полей

В двумерном режиме визуализатор FLAG позволяет строить изолинии и/или делать цветовую заливку скалярных полей, а также показывать векторы, сеточные линии и/или границы блоков расчетной сетки. Для сеток большой размерности полезна опция прореживания показываемых векторов и сеточных линий. Имеется возможность масштабирования изображения (в т.ч. аффинного) и его оцифровки (включая опции привязки курсора к узлам сетки и измерения расстояний между точками). По сути, это – перечень основных опций любого современного визуализатора.

Трехмерные возможности утилиты FLAG более скромны. По сути, для трехмерных полей используется двумерный визуализатор, перед вызовом которого можно выбрать ориентацию вида, а также задать положение секущей плоскости или показываемые сеточные сечения для каждого блока (см. рисунок 1.11). Сделанные настройки вида можно сохранить для повторного использования.

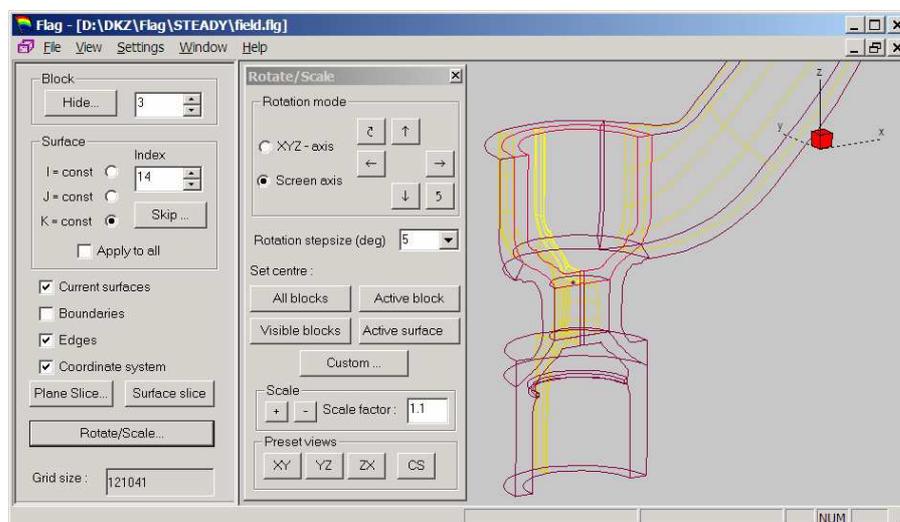


Рисунок 1.11 – Утилита FLAG для визуализации скалярных и векторных полей

В большинстве случаев, перечисленных возможностей утилиты FLAG вполне хватает для визуализации и экспресс-анализа результатов расчета. Для получения более сложных презентационных картинок в настоящее время используется коммерческий визуализатор *TecPlot*; записать данные в соответствующем формате можно из утилиты FLAG или прямо из кода SINF.

### Статистическая обработка результатов расчета

При проведении нестационарных расчетов часто требуется осреднение по времени получаемых полей гидродинамических величин. Это можно сделать с помощью утилиты *UtilAver*<sup>1</sup>, которая позволяет осреднять любые скалярные и векторные поля (в т.ч. поверхностные распределения), выводимые кодом SINF. Для управления утилитой используется текстовый файл, в котором задается начальный и конечный номер обрабатываемого временного слоя, шаг по времени, а также перечень подлежащих осреднению полей (для каждого поля указывается имя выводного файла и маска имени в последовательности входных файлов с мгновенными полями). Выводные файлы с осредненными полями содержат также данные о суммарном времени осреднения, что позволяет проводить операцию в несколько этапов, продолжая процесс по мере появления новых мгновенных полей.

Более широкими возможностями по статистической обработке результатов нестационарных расчетов (особенно при использовании вихреразрешающих подходов к моделированию турбулентности) обладает утилита *TStat*<sup>2</sup>. Помимо расчета средних величин, утилита позволяет вычислять их среднеквадратичные отклонения (пульсации) и одноточечные корреляции (моменты) второго порядка, причем указанные действия могут выполняться для любого сегмента (индексного параллелепипеда) в пределах блока расчетной сетки. Кроме того, утилита *TStat* дает возможность рассчитывать автокорреляционную функцию и двухточечные корреляции для отдельных точек поля, извлекать из трехмерных полей подобласти (сегменты) произвольного размера, и выполнять некоторые другие операции. Управляющие параметры могут быть заданы в текстовом файле или прямо в командной строке, что является удобным для написания типовых сценариев обработки.

## **1.5 Интегрированная учебная версия ПК SINF – пакет FLOS**

Как было сказано в разд. 1.1.1, программный комплекс SINF имеет в своем составе решатель (солвер), а также средства пре- и постпроцессинга, т.е. все

---

<sup>1</sup> Утилита *UtilAver* разработана А.Б.Корсаковым.

<sup>2</sup> Утилита *TStat* разработана С.И.Долгополовым в ходе его магистерской работы под руководством А.Г.Абрамова.

необходимые элементы современного гидродинамического программного комплекса. Однако эти компоненты ПК SINF существуют в виде отдельных приложений и для их использования требуется «ручное» редактирование управляющих файлов, что с точки зрения молодых пользователей, привыкших к графическому интерфейсу современных компьютерных программ, выглядит несколько архаично. Кроме того, ввиду ориентации кода SINF на проведение разнообразных научных исследований в области вычислительной гидродинамики (включая отработку численных схем и алгоритмов, тестирование моделей турбулентности и т.д.), он имеет большое число опций и, соответственно, управляющих параметров, в которых неопытному пользователю разобраться довольно сложно. С учетом этого, для обеспечения возможности начального освоения студентами технологии проведения гидродинамических расчетов с использованием современных программных средств, в 2000-2003 гг. была создана упрощенная (с «урезанным» набором опций математической модели и численных схем) учебная версия ПК SINF с современным Windows интерфейсом – интегрированный пакет FLOS (*Flow Studio*)<sup>1</sup>.

Процесс построения расчетной сетки в препроцессоре пакета FLOS включает три последовательных этапа: построение геометрической модели, расстановку граничных узлов, инициализацию и, при необходимости, коррекцию (улучшение) сетки. На каждом этапе на экране отображаются объекты соответствующего уровня и инструменты для работы с ними; имеется возможность масштабирования и оцифровки изображения, а также просмотра детальной информации об активном объекте.

На этапе геометрического моделирования создаются границы расчетной области, а также вспомогательные границы для разбиения области на блоки (см. рисунок 1.12). Границы состоят из опорных точек, которые соединяются друг с другом прямолинейными отрезками, дугами окружности или NURB-сплайнами (напр. [191]). Сплайн задается набором базовых точек, через которые проходит кривая (предусмотрена возможность чтения координат базовых точек из текстового файла); при необходимости пользователь может менять также положение вспомогательных точек, влияющих на кривизну линии между базовыми точками. Для задания структуры будущей сетки в каждом ее блоке назначаются вершины топологического прямоугольника (попутно определяется ориентация «индексной» системы координат в блоке) и указываются геометрические элементы, образующие границы блока.

Опции пакета FLOS по расстановке граничных узлов и созданию (коррекции) сетки в каждом блоке полностью дублируют (как «идеологически», так и программно) соответствующие опции разработанного автором генератора MIG (см. разд. 1.3). Хотя

---

<sup>1</sup> Основной вклад в разработку и реализацию графического интерфейса пакета FLOS внесен студентами кафедры прикладной математики СПбГПУ П.Е.Смирновым и С.А.Якубовым.

геометрический модельер и сеточный генератор пакета FLOS являются двумерными, имеется возможность импорта созданных вне пакета (например, с помощью утилиты GROT, см. разд. 1.3) трехмерных сеток.

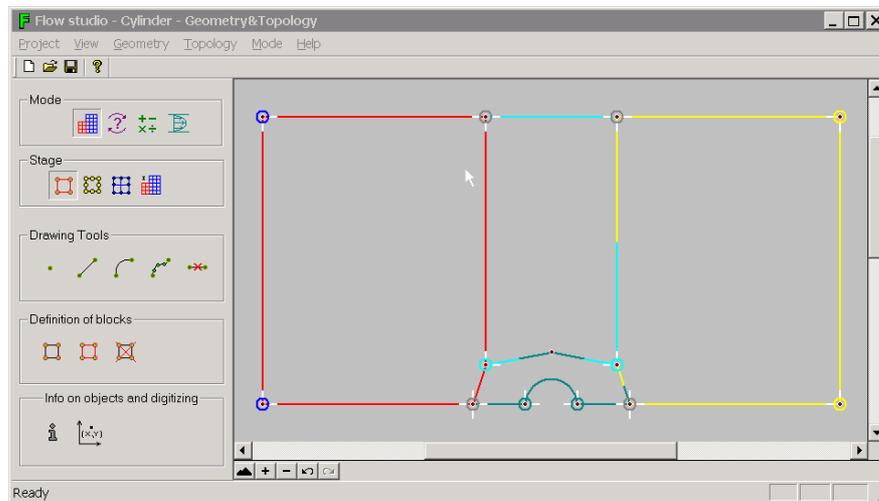


Рисунок 1.12 – Пакет FLOS: создание многоблочной геометрической модели

Следующий этап подготовки данных для решения задачи в пакете FLOS (подобно многим современным коммерческим пакетам) – выбор математической модели (рисунок 1.13а), задание соответствующих параметров (например, свойств среды) и постановка граничных условий (рисунок 1.13б). При этом в зависимости от выбранной модели (стационарное/нестационарное, ламинарное/турбулентное течение и т.д.) меняется набор параметров, подлежащих заданию в соответствующих диалоговых окнах.

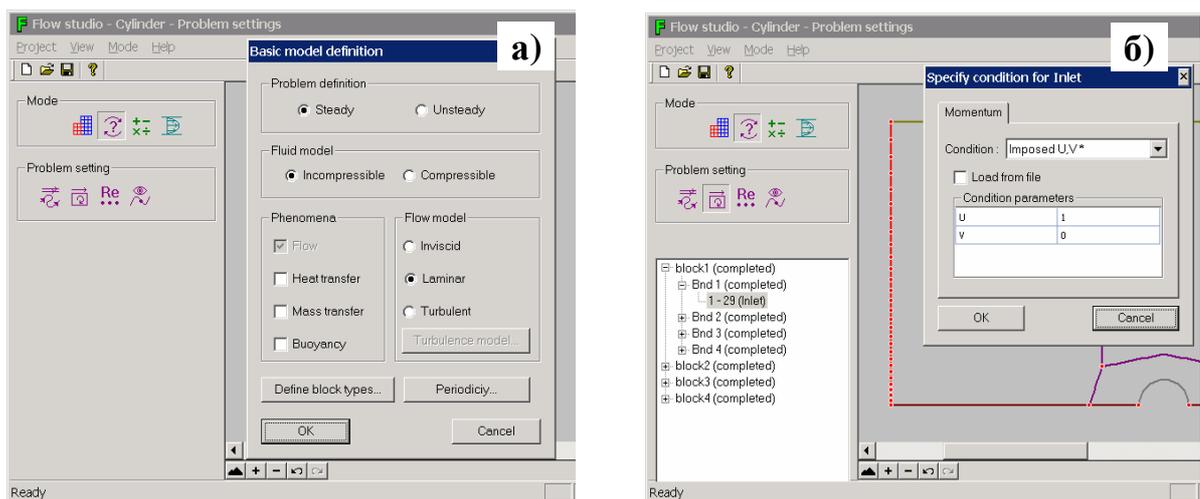


Рисунок 1.13 – Пакет FLOS: выбор математической модели (а)  
и задание граничных условий (б)

После выбора математической модели пользователь может назначить положение точек мониторинга, выбрать численную схему для каждого из уравнений, задать необходимые итерационные параметры и, наконец, запустить процесс итераций, ход

которого (невязки всех уравнений) отображается на экране (рисунок 1.14). Фактически, в момент запуска итераций оболочка пакета FLOS формирует необходимые управляющие файлы и вызывает код SINF, адаптированный для оперативного взаимодействия с оболочкой. При необходимости, итерации могут быть в любой момент остановлены (например, для изменения параметров численной схемы) и возобновлены с текущего или с одного из ранее сохраненных решений. Для просмотра решения используется визуализатор Flag (рисунок 1.15).

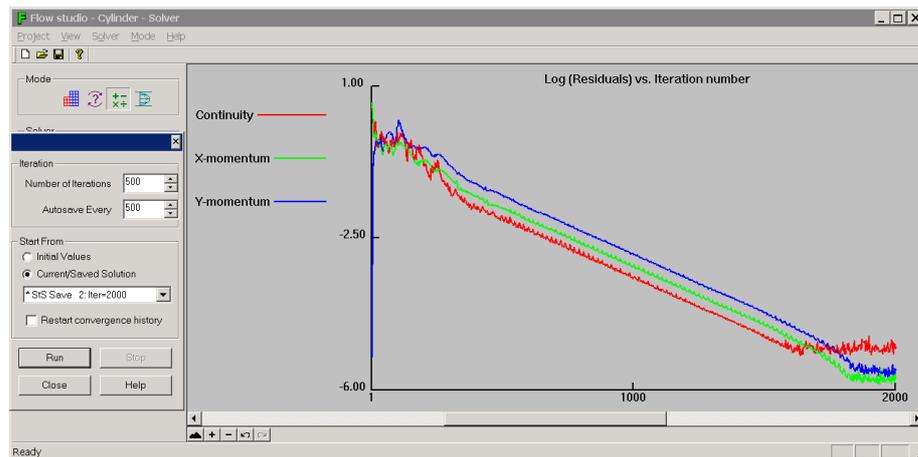


Рисунок 1.14 – Пакет FLOS: итерационный процесс решения поставленной задачи

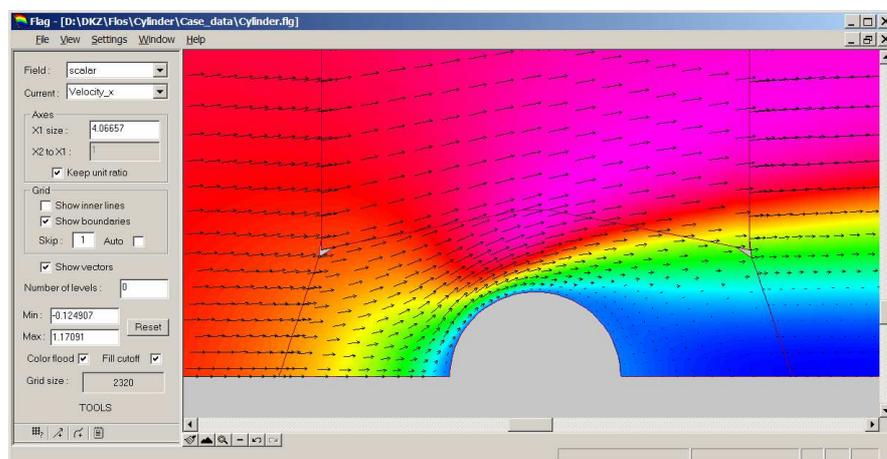


Рисунок 1.15 – Пакет FLOS: визуализация результатов расчета

В настоящее время пакет FLOS широко используется в СПбПУ как для выполнения студентами циклов вычислительных лабораторных работ, обеспечивающих начальное освоение методов инженерного анализа в гидродинамике с применением современных программных средств, так и для проведения исследовательских расчетов при подготовке выпускных бакалаврских работ и магистерских диссертаций.

## Глава 2

### Математические модели ПК SINF

#### 2.1 Базовая математическая модель

В данном разделе представлены основные элементы математической модели базовой версии кода SINF. Специфические особенности математических моделей специализированных версий кода рассмотрены в разд. 2.2.

##### 2.1.1 Модель среды и определяющие уравнения

###### Общие законы сохранения

С учетом ориентации кода SINF (Supersonic-to-INcompressible Flows) на решение широкого круга задач гидрогазодинамики и конвективного теплообмена, основу его математической модели составляют полные уравнения Навье-Стокса (Рейнольдса), выражающие общие законы баланса массы (2.1а), импульса (2.1б) и энергии (2.1в) в потоке жидкости переменной плотности (см., например, [79]):

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{V}) = 0 \quad (2.1a)$$

$$\rho \frac{d\mathbf{V}}{dt} = \rho \mathbf{F} - \nabla p + \nabla \cdot \boldsymbol{\tau} \quad (2.1б)$$

$$\rho \frac{de}{dt} = \boldsymbol{\tau} \cdot \nabla \mathbf{V} - p \nabla \cdot \mathbf{V} - \nabla \cdot \mathbf{q} + \rho Q \quad (2.1в)$$

Здесь  $\rho$  – плотность жидкости;  $\mathbf{V}$  – скорость потока;  $\mathbf{F}$  – плотность распределения объемной силы;  $p$  – давление;  $\boldsymbol{\tau}$  – тензор напряжений;  $e$  – удельная внутренняя энергия;  $\mathbf{q}$  – вектор плотности потока тепла;  $Q$  – внешний источник тепла.

###### Замыкающие соотношения

Уравнения (2.1) справедливы для любой сплошной среды, однако в коде SINF рассматривается только однородная по составу жидкость, плотность которой в общем случае определяется давлением  $p$  и температурой  $T$ . Предусмотрены три варианта уравнения состояния (2.2): а) жидкость с постоянной плотностью, б) жидкость с почти

постоянной плотностью и заданным коэффициентом объемного расширения  $\beta$  (учет эффектов плавучести в приближении Буссинеска) и в) совершенный газ.

$$\rho = const \quad (2.2a)$$

$$\rho \approx const, \quad \beta = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial \rho}{\partial T} \approx const \quad (2.2б)$$

$$\frac{\rho}{\rho_{ref}} = \frac{P/P_{ref}}{T/T_{ref}} \quad (2.2в)$$

Теплоемкость жидкости считается постоянной, так что внутренняя энергия  $e$  явно выражается через температуру:

$$e = C_v T \quad (2.3)$$

Для коэффициента динамической вязкости  $\mu$  принимается степенная зависимость от температуры (2.4а); коэффициент теплопроводности  $\lambda$  вычисляется в предположении постоянства числа Прандтля  $Pr$  (2.4б).

$$\mu = \mu_0 \cdot (T/T_0)^n \quad (2.4a)$$

$$\lambda = \mu C_p / Pr \quad (2.4б)$$

Турбулентные напряжения моделируются в рамках гипотезы Буссинеска с введением в закон Ньютона (2.5) турбулентной (вихревой) вязкости  $\mu_T$ ; вклад турбулентных пульсаций в давление ( $2\rho k/3$ ) считается пренебрежимо малым.

$$\boldsymbol{\tau} = 2\mu\tilde{\mathbf{S}} + \boldsymbol{\tau}_T, \quad \boldsymbol{\tau}_T \approx 2\mu_T\tilde{\mathbf{S}}, \quad \tilde{\mathbf{S}} = \frac{1}{2}(\nabla\mathbf{V} + (\nabla\mathbf{V})^T) - \frac{1}{3}(\nabla \cdot \mathbf{V})\mathbf{I} \quad (2.5)$$

Коэффициент турбулентного теплопереноса  $\lambda_T$  выражается через турбулентную вязкость с использованием «турбулентного» числа Прандтля  $Pr_T$ , как это принято в большинстве существующих моделей турбулентности (обычно  $Pr_T = 0.9$ ). Радиационный теплообмен не рассматривается.

$$\mathbf{q} = -(\lambda + \lambda_T)\nabla T = -C_p \left( \frac{\mu}{Pr} + \frac{\mu_T}{Pr_T} \right) \nabla T \quad (2.6)$$

### Объемные силы и гидростатическое давление

Одной из особенностей реализации представленной математической модели в коде SINF является то, что в объемной силе  $\mathbf{F}$  выделяется ее потенциальная часть  $\mathbf{F}_h$  и

вводится в рассмотрение характерное гидростатическое давление  $p_h$ , отвечающее равновесию жидкости с плотностью  $\rho_h$  в поле сил  $\mathbf{F}_h$ :

$$\mathbf{F} = \mathbf{F}^* + \mathbf{F}_h, \quad \mathbf{F}_h = -\nabla\Pi, \quad \nabla p_h = \rho_h \mathbf{F}_h \quad (2.7)$$

Тогда уравнение (2.1б) можно переписать в эквивалентной форме (2.8), где явно выписана сила плавучести  $\mathbf{F}_b$  и используется модифицированное (редуцированное) давление  $p^*$ , которое является избыточным по отношению к гидростатическому давлению  $p_h$ . Преимуществом такой формы записи является то, что в численном решении не нужно итерационно выстраивать поле гидростатического давления  $p_h$ , перепады которого во многих случаях значительно превышают перепады избыточного давления  $p^*$ .

$$\rho \frac{d\mathbf{V}}{dt} = \rho(\mathbf{F}^* + \mathbf{F}_b) - \nabla p^* + \nabla \cdot \boldsymbol{\tau}, \quad \rho \mathbf{F}_b = (\rho - \rho_h) \mathbf{F}_h, \quad p^* = p - p_h \quad (2.8)$$

Для несжимаемой жидкости ( $\rho = const$ ) в качестве «гидростатической» плотности  $\rho_h$  при вычислении гидростатического давления  $p_h$ , естественно, используется сама плотность жидкости  $\rho$ ; при этом дефект плотности  $(\rho - \rho_h)$  в силе плавучести  $\mathbf{F}_b$  (2.8) может полагаться равным нулю (2.2а) или (в приближении Буссинеска) вычисляться на основании коэффициента объемного расширения  $\beta$  (2.2б). Для газа (2.2в) предусмотрены три варианта: в качестве  $\rho_h$  можно выбрать некое характерное для рассматриваемой задачи значение  $\rho_{ref}$  (2.9а) или же использовать распределение давления и плотности при изотермическом (2.9б) или адиабатическом (2.9в) равновесии (здесь значения  $p_{ref}$  и  $\rho_{ref}$  отвечают точке с нулевым потенциалом  $\Pi$ ).

$$p_h = p_{ref} - \rho_h \Pi, \quad \rho_h = \rho_{ref} \quad (2.9а)$$

$$p_h = p_{ref} \exp\left(-\frac{\rho_{ref} \Pi}{p_{ref}}\right), \quad \rho_h = \rho_{ref} \frac{p_h}{p_{ref}} \quad (2.9б)$$

$$p_h = p_{ref} \left[1 - \frac{\gamma - 1}{\gamma} \frac{\rho_{ref} \Pi}{p_{ref}}\right]^{\frac{\gamma}{\gamma - 1}}, \quad \rho_h = \rho_{ref} \left(\frac{p_h}{p_{ref}}\right)^{\frac{1}{\gamma}} \quad (2.9в)$$

Среди реализованных в коде SINF объемных сил – потенциальные поля силы тяжести и центробежной силы (2.10а), а также сила Кориолиса (2.10б). Здесь  $\mathbf{g}$  – постоянное ускорение свободного падения,  $\boldsymbol{\omega}$  – угловая скорость вращения системы отсчета; радиус-вектор  $\mathbf{r}$  отсчитывается от оси вращения. В реализации SINF потенциал  $\Pi$  не зависит от времени, поэтому учет силы тяжести во вращающейся системе отсчета возможен лишь при условии параллельности векторов  $\mathbf{g}$  и  $\boldsymbol{\omega}$ .

$$\mathbf{F}_h = \mathbf{g} - \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}) \quad \Rightarrow \quad \Pi = -\mathbf{g} \cdot \mathbf{r} - (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r})^2 / 2 \quad (2.10a)$$

$$\mathbf{F}^* = -2\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{V} + \dots \quad (2.10б)$$

Также в коде SINF внедрена модель анизотропного «пористого тела» с линейным или квадратичным сопротивлением, позволяющая учесть воздействие на поток разного рода «полупроницаемых» препятствий (решеток, фильтров и т.п.), течение сквозь которые не разрешается на используемой расчетной сетке. Аналогичным образом, задав соответствующий объемный источник  $Q$  в уравнении энергии (2.1в), в рамках модели «пористого тела» можно учесть, например, нагрев жидкости при ее протекании сквозь теплообменник.

### Различные формы уравнения энергии

В зависимости от решаемой задачи в коде SINF используются различные формы записи уравнения энергии (2.1в). В частности, для капельной жидкости, с учетом условия несжимаемости ( $\nabla \cdot \mathbf{V} = 0$ ), уравнение принимает вид (2.11).

$$\rho \frac{de}{dt} = \boldsymbol{\tau} \cdot \nabla \mathbf{V} - \nabla \cdot \mathbf{q} + \rho Q \quad (2.11)$$

Однако если в приближении несжимаемой жидкости рассматривается течение газа, то отбрасывать слагаемое  $p \nabla \cdot \mathbf{V}$  (работа сил давления) в уравнении (2.1в) нельзя, поскольку пренебрежимо малая в других уравнениях дивергенция скорости здесь умножается на большое абсолютное давление  $p$ . В связи с этим для газа вместо уравнения (2.1в) используется эквивалентное ему уравнение баланса энтальпии (2.12), причем для принятой модели совершенного газа с постоянной теплоемкостью энтальпия  $h$  явно выражается через температуру:

$$\rho \frac{dh}{dt} = \frac{\partial p}{\partial t} + \mathbf{V} \cdot \nabla p + \boldsymbol{\tau} \cdot \nabla \mathbf{V} - \nabla \cdot \mathbf{q} + \rho Q, \quad h = e + \frac{p}{\rho} = C_p T \quad (2.12)$$

Для сверхзвуковых потоков со скачками уплотнения используется уравнение баланса полной энтальпии  $H$ , которая не претерпевает разрыва на скачке:

$$\rho \frac{dH}{dt} = \frac{\partial p}{\partial t} + \rho \mathbf{F} \cdot \mathbf{V} + \nabla \cdot (\boldsymbol{\tau} \cdot \mathbf{V}) - \nabla \cdot \mathbf{q} + \rho Q, \quad H = h + \frac{V^2}{2} \quad (2.13)$$

Когда расчет ведется во вращающейся системе отсчета (например, для рабочего колеса турбины), работа объемной силы  $\mathbf{F} = -2\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{V} - \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r})$  (второе слагаемое в правой части уравнения (2.13)) учитывается явным образом: работа силы Кориолиса,

очевидно, равна нулю, а потенциал центробежной силы включается в полную энтальпию  $H^R$  (которую в этом случае иногда называют ротальной):

$$\rho \frac{dH^R}{dt} = \frac{\partial p}{\partial t} + \nabla \cdot (\boldsymbol{\tau} \cdot \mathbf{V}) - \nabla \cdot \mathbf{q} + \rho Q, \quad H^R = h + \frac{V^2}{2} - \frac{(\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r})^2}{2} \quad (2.14)$$

В коде SINF также предусмотрена возможность решения тепловой задачи в сопряженной постановке, с учетом теплопроводности в твердом теле. В этом случае для тех блоков расчетной сетки, которые являются «твердыми», решается только уравнение теплопроводности:

$$\rho C \frac{\partial T}{\partial t} = \nabla \cdot (\lambda \nabla T) + \rho Q \quad (2.15)$$

### Граничные условия

Реализованные в коде SINF граничные условия позволяют решать широкий круг практических задач гидродинамики и теплопереноса. В частности, на ограничивающих поток стенках можно задать произвольное распределение температуры  $T_w$  или теплового потока  $q_w$  или же использовать условие внешнего теплообмена  $q_w = \alpha_{ext} \cdot (T_w - T_{ext})$ . Также можно задать вектор скорости потока  $\mathbf{V}_w$ , что позволяет моделировать движение (скольжение) стенки и/или вдув (отсос) жидкости через проницаемую поверхность.

На входе в расчетную область задаются (для дозвукового потока):

- вектор скорости  $\mathbf{V}_{in}$   
или давление торможения  $p_{0,in}^*$  и вектор направления потока;
- температура  $T_{in}$   
или температура торможения  $T_{0,in}$  (для газа);
- параметры турбулентности (в соответствии с используемой моделью).

На выходе из расчетной области обычно задается давление  $p_{out}^*$  или его среднее по сечению значение; для остальных параметров потока выполняются «мягкие» условия (экстраполяция). Для высокоскоростных газовых потоков применяется «неотражающая» схема экстраполяции (2.16), которая дает возможность скачкам уплотнения беспрепятственно пересекать выходную границу. В этой схеме «выходная» плотность  $\rho_{out}$  определяется по параметрам в примыкающей к границе ячейки с помощью изэнтропической или «ударной» адиабаты (в зависимости от соотношения давлений  $p$  и  $p_{out}$ ), а нормальная составляющая скорости потока  $V_{n,out}$  вычисляется в предположении постоянства инварианта Римана.

$$\rho_{out} = \begin{cases} \rho(p_{out}/p)^{1/\gamma}, & p > p_{out} \\ \rho \frac{p_{out}(\gamma+1) + p(\gamma-1)}{p_{out}(\gamma-1) + p(\gamma+1)}, & p < p_{out} \end{cases} \quad (2.16a)$$

$$V_{n,out} = V_n + \frac{2}{\gamma-1} \left( \sqrt{\gamma \frac{p}{\rho}} - \sqrt{\gamma \frac{p_{out}}{\rho_{out}}} \right) \quad (2.16b)$$

Если на назначенной выходной границе возникают (в ходе итераций или в окончательном решении) небольшие обратные токи, то, во избежание «развала» решения и для получения физически осмысленного результата, осуществляется автоматическое переключение на специальное «полумягкое» условие. При этом вектор скорости по-прежнему экстраполируется на границу изнутри расчетной области, статическое давление определяется из интеграла Бернулли по заданному внешнему давлению (которое трактуется как давление торможения) и нормальной составляющей скорости втекающего потока, а остальным переменным приписываются заданные значения. Реализован и другой вариант – «отсечка» обратных токов, как если бы в соответствующем месте выходной границы находилась стенка.

Помимо перечисленных, в коде SINF доступны очевидные условия зеркальной симметрии, условия трансляционной и вращательной периодичности, а также некоторые специфические граничные условия для решения частных задач (например, условия заданного касательного напряжения на свободной поверхности).

### Пристенные функции

При расчете турбулентных течений обработка граничных условий на стенке может выполняться с применением т.наз. пристенных функций, аппроксимирующих экспериментальные данные о распределении скорости и температуры вблизи стенки. Начало активного использования данного подхода связывают с выходом работы [152], где были сформулированы «стандартные» пристенные функции, отражающие свойства «логарифмической» зоны пристенного течения:

$$U_{log} = \frac{u_\tau}{\kappa} \log(Ey^+), \quad u_\tau \equiv \sqrt{\frac{\tau_w}{\rho}}, \quad y^+ \equiv \frac{u_\tau d}{\nu} \quad (2.17a)$$

$$q_w = \frac{u_\tau \rho C_p \Delta T}{T_{log}^+}, \quad T_{log}^+ = \frac{Pr_T}{\kappa} \log(Ey^+) + 9 Pr_T \left( \frac{Pr}{Pr_T} - 1 \right) \left( \frac{Pr_T}{Pr} \right)^{0.25} \quad (2.17b)$$

Здесь  $U$  – касательная составляющая скорости относительно стенки,  $u_\tau$  – т.наз. динамическая скорость или «скорость трения» ( $\tau_w$  – напряжение трения на стенке),  $y^+$  – нормированная пристенная координата ( $d$  – расстояние до стенки),  $q_w$  – тепловой поток на стенке,  $\Delta T$  – избыточная (по отношению к стенке) температура,  $Pr$  – число Прандтля,

$Pr_T$  – его «турбулентный» аналог,  $\kappa \approx 0.41$  – константа Кармана,  $E \approx 9$ . В ходе итераций соотношения (2.17а) используются для вычисления трения на стенке  $\tau_w$  в зависимости от текущего значения скорости в первой расчетной точке  $U_1$ ; формулы (2.17б) дают явную связь между тепловым потоком  $q_w$  и перепадом температур  $\Delta T_1$ .

Для обоснованного применения стандартных пристенных функций (2.17) требуется, чтобы первая расчетная точка располагалась в «логарифмической» области пограничного слоя (примерно,  $y^+ > 30$ ), что при расчетах сложных течений может вызывать определенные проблемы. При этом, если условие  $y^+ > 30$  нарушается, то дальнейшее измельчение сетки приводит лишь к ухудшению точности расчета (напр., [132]). Поэтому в настоящее время вместо стандартных пристенных функций обычно используют более общие аппроксимации, которые включают в себя известное аналитическое решение для вязкого подслоя и применимы вплоть до стенки.

В коде SINF вместо логарифмического закона (2.17а) можно использовать двухслойную (2.18а) или трехслойную [4] (2.18б) аппроксимацию (как это было принято в 80-х и 90-х годах) или весьма популярную ныне аппроксимацию (2.18в) [127].

$$U_1 = \min(U_{vis}, U_{log}), \quad U_{vis} = u_\tau y^+ \quad (2.18а)$$

$$\begin{cases} U_1 = U_{vis}, & y^+ < 5 \\ U_1 = \min(U_{buf}, U_{log}), & y^+ > 5 \end{cases} \quad U_{buf} = u_\tau \cdot \left( 5 \ln\left(\frac{y^+}{5}\right) + 5 \right) \quad (2.18б)$$

$$U_1 = (U_{vis}^{-4} + U_{log}^{-4})^{-1/4} \quad (2.18в)$$

Для вычисления теплового потока можно применить стандартную двухслойную схему (с заменой  $T_{log}^+$  в знаменателе (2.17б) на  $\min(T_{log}^+, Pr y^+)$ ) или использовать более точную аппроксимацию (2.19) [141].

$$q_w = \frac{u_\tau \rho C_p \Delta T_1}{e^{-\Gamma} Pr y^+ + e^{-1/\Gamma} T_{log}^+}, \quad \Gamma = \frac{0.01 (Pr y^+)^4}{1 + 5 Pr^3 y^+}, \quad T_{log}^+ = 2.12 \ln(Pr(1 + y^+)) + (3.85 Pr^{1/3} - 1.3)^2 \quad (2.19)$$

В настоящее время в ПК SINF «по умолчанию» используется формулировка пристенных функций (2.18в), (2.19). Другие варианты сохраняются в основном для обеспечения возможности тестирования кода SINF путем сравнения с данными, полученными с помощью других кодов.

## 2.1.2 Моделирование турбулентности

Проведение гидродинамических расчетов для реальных технических устройств, как правило, невозможно без использования моделей турбулентности. А поскольку «самой лучшей» универсальной модели, пригодной для расчета любых течений, не существует, современные CFD-коды предоставляют пользователю несколько моделей турбулентности. И код SINF здесь не исключение – в нем реализовано более десятка моделей, многие из которых имеют несколько модификаций.

### RANS модели

Решение осредненных по Рейнольдсу уравнений Навье-Стокса (*Reynolds Averaged Navier-Stokes*, RANS) является наиболее распространенным подходом к моделированию турбулентных течений. Основные RANS модели турбулентности кода SINF перечислены в Таблице 2 (формулировка моделей дана в Приложении А).

Таблица 2 – Основные модели турбулентности кода SINF

№ п/п	Решаемые уравнения	Формулировка модели	Распространенное название
1	$k-\varepsilon^*$	Launer, Spalding, 1974 [152]	«Стандартная» $k-\varepsilon$
2	$k-\varepsilon$	Launer, Sharma, 1974 [153]	
3	$k-\varepsilon$	Chien, 1982 [117]	
4	$k-\varepsilon^*$	Yakhot, Orszag, 1992 [211]	RNG
5	$k-\varepsilon$	Yang, Shih, 1993 [212]	
6	$k-\varepsilon$	Lien, Leschziner, 1999 [157]	
7	$k-\omega^*$	Wilcox, 1988 [206]	
8	$k-\omega$	Wilcox, 1993 [207]	
9	$k-\omega$	Menter et al., 2003 [162]	SST (MSST)
10	$k-\omega$	Langtry, Sjolander, 2002 [151]	
11	$\nu_t$	Spalart, Allmaras, 1992 [184]	SA
12	$k$	Wolfstein, 1969 [210]	
13	$k-\varepsilon-\nu^2-f$	Medic, Durbin, 2003 [158]	$\nu^2-f$
14	$k-\varepsilon-\zeta-f$	Hanjalic et al, 2004 [134]	

\*) Высокорейнольдсовая модель.

Основными факторами, влиявшими на выбор моделей турбулентности для кода SINF, были:

– приспособленность модели для трехмерных расчетов, т.е. отсутствие «привязки» к определенной системе координат, отсутствие нелокальных параметров (таких как толщина пограничного слоя) и т.п.;

– наличие положительных отзывов о модели, особенно в отношении точности, универсальности и вычислительной стабильности;

– необходимость тестирования кода путем прямого сравнения результатов расчета с данными других авторов и/или коммерческих кодов, что подразумевает идентичность используемых моделей турбулентности.

С учетом последнего обстоятельства для многих моделей турбулентности в коде SINF реализованы разные версии. В частности, для модели SST (№9 в Таблице 2), наряду с формулировкой [162], которая в настоящее время является основной, доступны более ранние версии [159, 160]. Аналогично, для  $k$ - $\omega$  модели Уилкокса (№8) реализована также версия [208], оптимизированная для расчета переходных режимов.

В дополнение к «авторским» формулировкам в коде SINF имеется возможность включения в модели турбулентности часто используемых «сторонних» модификаций. В частности для моделей, содержащих уравнение переноса кинетической энергии турбулентности  $k$ , можно использовать поправку [143], которая предотвращает нефизичную генерацию турбулентности в областях с преобладанием деформации сжатия/растяжения (например, в окрестности точки торможения потока); данная поправка сводится к простой замене квадрата скорости деформации  $S^2$  в генерационном члене  $P_k$  на произведение  $S\Omega$  (2.20а) ( $\Omega$  – модуль завихренности). Также можно учесть дополнительную генерацию турбулентности от сил плавучести (2.20б) (при использовании приближения Буссинеска (2.2б) градиент плотности выражается через градиент температуры).

$$P_k = \mu_T S^2 \rightarrow \mu_T S\Omega, \quad S = \sqrt{2S_{ij}S_{ij} - \frac{2}{3}S_{ii}S_{ii}}, \quad \Omega = |\nabla \times V| \quad (2.20a)$$

$$P_k \rightarrow P_k + P_B, \quad P_B = -\frac{\mu_T}{\rho \text{Pr}_T} \mathbf{F}_h \cdot \nabla \rho \approx \frac{\mu_T \beta}{\text{Pr}_T} \mathbf{F}_h \cdot \nabla T \quad (2.20b)$$

Для  $k$ - $\epsilon$  моделей реализована поправка [154], учитывающая влияние на турбулентность кривизны линий тока и вращения системы отсчета путем модификации диссипативного члена уравнения для  $\epsilon$ . Сходная по назначению поправка [186] для модели SA и ее версия [180] для  $k$ - $\omega$  моделей вводится в генерационный член соответствующих уравнений (см. Приложение А).

Гибридные RANS/LES подходы

Известно, что RANS модели не всегда обеспечивают приемлемую точность моделирования эффектов турбулентного перемешивания, особенно если в потоке присутствуют крупномасштабные когерентные вихревые структуры, которые определяются конкретной геометрией течения и имеют мало общего с характерными для тонких сдвиговых слоев универсальными хаотичными вихрями, на моделирование которых «настроены» RANS модели. Более надежны вихреразрешающие подходы, в частности, метод моделирования крупных вихрей (*Large Eddy Simulation, LES*), в котором вводимая турбулентная вязкость моделирует перемешивающее действие лишь универсальных вихрей из мелкомасштабной части турбулентного спектра, а более крупные вихри явно воспроизводятся в численном решении. Однако, это требует решения трехмерных нестационарных уравнений на довольно подробных расчетных сетках, что делает такой подход весьма затратным по сравнению с RANS.

Особенно жесткими оказываются требования к расчетной сетке вблизи стенок, где турбулентные вихри более мелкие, так что на сегодняшний день применение метода LES для моделирования пристенных течений фактически ограничено задачами довольно простой геометрии (например, установившееся течение в канале) и сравнительно небольшими числами Рейнольдса. Более распространены комбинированные подходы, в которых вблизи стенки LES модель заменяется на RANS, что позволяет использовать преимущества каждого из подходов в соответствующих областях течения.

В коде SINF сочетание RANS и LES подходов обеспечивается тем, что во всей области течения используется одна и та же модель турбулентности, которая у стенки ведет себя как обычная RANS модель, а по мере удаления от стенки автоматически трансформируется в «подсеточную» LES модель. Такая трансформация основывается на сравнении двух масштабов – масштаба турбулентных вихрей  $L^{RANS}$ , явно или неявно присутствующего в «базовой» RANS модели, и масштаба разрешаемых на сетке вихрей  $L^{LES}$ , пропорционального размеру сеточной ячейки  $\Delta$ <sup>1</sup>. Приоритет отдается меньшему из двух масштабов (2.21), который подменяет масштаб  $L^{RANS}$  в формулировке модели. В результате, если  $L^{RANS} < L^{LES}$ , т.е. турбулентные вихри слишком малы для разрешения на сетке (например, вблизи стенки), то модель работает в исходной RANS моде. В противном случае модель переходит в LES режим с использованием размера ячейки в качестве линейного масштаба моделируемой части вихрей.

$$L^{RANS} \rightarrow L^* = \min(L^{RANS}, L^{LES}), \quad L^{LES} = C^{LES} \cdot \Delta \quad (2.21)$$

<sup>1</sup> Как правило, под  $\Delta$  понимается максимальный размер ячейки, но в некоторых работах в качестве характерного размера ячейки используется корень кубический из ее объема. В коде SINF реализованы оба варианта.

По-видимому, впервые данная идея была реализована в работе [185], где гибридная модель, базирующаяся на RANS модели SA [184], составила основу широко известного ныне метода DES (*Detached Eddy Simulation*). В настоящее время предложено несколько вариантов такого рода гибридных моделей, которые базируются на разных RANS моделях и различным образом вводят модифицированный масштаб  $L^*$  в исходную модель. В коде SINF реализованы три гибридные модели – [185] (на основе модели SA), [192] (на основе модели SST) и [109] (на основе  $k$ -модели [210]); описание моделей дано в Приложении А.

### Пристенные функции

При использовании высокорейнольдсовых моделей турбулентности граничные условия на ограничивающих поток стенках обычно ставятся с применением пристенных функций, которые отражают поведение параметров турбулентности в равновесной («логарифмической») зоне пристенного течения. «Стандартные» пристенные функции для  $k$ - $\varepsilon$  модели турбулентности были сформулированы в работе [152]; соответствующие выражения для  $k$ - $\omega$  модели [206], по сути, отличаются лишь обозначениями ( $\varepsilon = C_\mu k \omega$ ,  $C_\mu = \beta^*$ ):

$$k_{log} = \frac{u_\tau^2}{\sqrt{C_\mu}}, \quad \varepsilon_{log} = \frac{u_\tau^3}{\kappa d}, \quad \omega_{log} = \frac{u_\tau}{\kappa d \sqrt{\beta^*}}, \quad v_{T,log} = \kappa d u_\tau \quad (2.22)$$

Здесь  $u_\tau$  – динамическая скорость (2.17),  $d$  – расстояние до стенки,  $\kappa \approx 0.41$  – константа Кармана,  $C_\mu = \beta^* = 0.09$ . Формулы (2.22) задают значения параметров турбулентности в первой (ближайшей к стенке) расчетной точке; соответствующие уравнения переноса для этой точки не решаются.

Как и в случае с пристенными функциями для скорости и температуры (2.17), для обоснованного применения стандартных пристенных функций (2.22) необходимо, чтобы первая расчетная точка располагалась в «логарифмической» области (примерно,  $y^+ > 30$ ), причем нарушение данного требования ведет к значительному снижению точности расчета. Как следствие, в 1980-х и 1990-х годах предлагались различные варианты «расширенных» пристенных функций, позволяющих несколько улучшить качество расчета с использованием высокорейнольдсовых моделей турбулентности при попадании расчетных точек в область  $y^+ < 30$ . В частности, в известном коммерческом пакете CFX (от «старинного» CFX-TASCflow до современного ANSYS-CFX) доступна опция «масштабируемых» (scalable) пристенных функций, что, по сути, означает использование стандартных пристенных функций с ограничением подставляемого в них значения пристенной координаты ( $y^+ \rightarrow \tilde{y}^+ = \max(y^+, 11)$ ).

Попытки расширения области применимости стандартных пристенных функций предпринимались и в коде SINF. В частности, предусмотрена возможность введения в выражения для  $k_1$  и  $\varepsilon_1$  или  $\omega_1$  (значения в первой расчетной точке) демпфирующего коэффициента  $D$  в соответствии с выражениями (2.23а) для моделей  $k$ - $\varepsilon$  и (2.23б) для  $k$ - $\omega$  [4]. Как нетрудно видеть, данная модификация стандартных пристенных функций обеспечивает снижение турбулентной вязкости ( $\nu_{T,1} = \nu_{T,\log} \cdot D$ ), если первая расчетная точка находится слишком близко к стенке.

$$k_1 = k_{\log} \cdot D^q, \quad \varepsilon_1 = \frac{\varepsilon_{\log}}{D^{1-2q}}, \quad D = \min\left(1, \left(\frac{y^+}{33}\right)^2\right), \quad q = 0.35 \quad (2.23a)$$

$$k_1 = k_{\log}, \quad \omega_1 = \frac{\omega_{\log}}{D}, \quad D = \min\left(1, \frac{\sqrt{\beta^*} (y^+)^{0.6}}{5 \cdot \kappa}\right) \quad (2.23b)$$

Не следует забывать, однако, что высокорейнольдсовые модели турбулентности изначально не предназначены для расчета течения вплоть до стенки. «Расширенные» пристенные функции позволяют избежать существенного ухудшения точности расчета при малых значениях  $y^+$ , но не обеспечивают адекватного учета вязких эффектов в пристенной области сложных течений. Это ограничивает область применения данного подхода случаям относительно простых потоков, поэтому в настоящее время предпочтение отдается низкорейнольдсовым моделям.

Однако низкорейнольдсовые модели турбулентности (в их исходной формулировке) предполагают полное разрешение пристенной области течения, что приводит к необходимости сильного сгущения расчетной сетки около стенки для попадания первой расчетной точки область вязкого подслоя. Как правило, для нормальной работы модели требуется обеспечить значение  $y^+ < 1$ , причем нарушение данного требования ведет к значительному снижению точности расчета. Для уменьшения чувствительности низкорейнольдсовых моделей турбулентности к густоте сетки в пристенной области в коде SINF разработаны два подхода – модификация граничных условий и применение обобщенных пристенных функций.

Потенциальные возможности первого подхода продемонстрированы в работе [31], где предложены модифицированные граничные условия для  $k$ - $\omega$  моделей Ментера [160] (SST) и Уилкокса [207]. Особенностью этих моделей является то, что физически оправданную величину  $\omega_w$  (значение на стенке) задать нельзя, поскольку аналитическое решение для  $\omega$  вблизи стенки (в вязком подслое) имеет сингулярность (2.24а). В работе [206] предлагалось задавать значение  $\omega_1 = \omega_{vis}$  в первой расчетной точке, однако в настоящее время для всех низкорейнольдсовых  $k$ - $\omega$  моделей используется условие (2.24б), предложенное в работе [159].

$$\omega_{vis} = \frac{6v}{\beta d^2} = \frac{80v}{d^2} \quad (2.24a)$$

$$\omega_w = 10 \cdot \omega_{vis} = \frac{800v}{d^2} \quad (2.24б)$$

Следует подчеркнуть, что множитель 10 в выражении (2.24б) выбран достаточно произвольно. Как указывается в работе [159], модели турбулентности на основе  $\omega$ -уравнения дают правильный результат, если значение  $\omega$  вблизи стенки является «достаточно большим», так что упомянутый множитель 10 – это просто «достаточно большое» число, не влияющее на результат расчета. Однако, как показали методические расчеты автора [31], выбор значения  $\omega_w$  может существенно влиять на чувствительность решения к густоте сетки вблизи стенки, причем «стандартное» граничное условие (2.24б) в этом отношении отнюдь не является оптимальным – вместо него лучше использовать условие (2.25а) для модели SST [160] и условие (2.25б) для  $k$ - $\omega$  модели [207]. При этом для кинетической энергии турбулентности ставится естественное условие  $k_w = 0$ .

$$\omega_w = 5 \cdot \omega_{vis} = \frac{400v}{d^2} \quad (2.25a)$$

$$\omega_w = \frac{400v}{d^2} \cdot \left( 1 + \frac{y^{+2}}{150} \right) \quad (2.25б)$$

Как нетрудно видеть, условие (2.25а) отличается от (2.24б) лишь множителем, а в условие (2.25б) введен дополнительный ограничитель. Однако, несмотря на внешнюю простоту, предложенная модификация «стандартного» граничного условия (2.24б) обеспечивает существенное снижение сеточной зависимости результатов расчета. В частности, по данным [31], при расчете турбулентного течения Куэтта на основе модели SST с граничным условием (2.24б), для определения трения на сетке с погрешностью<sup>1</sup> 5% требовалась сетка со значением нормированной пристенной координаты первой расчетной точки  $y^+ < 0.5$ , а при  $y^+ < 4$  погрешность доходила до 10%. Для сравнения: при использовании граничного условия (2.25а) погрешность 5% обеспечивалась при  $y^+ < 10$ , а погрешность 10% – при любых  $y^+$  вплоть до нескольких сотен (верхний предел определялся ограничением на шаг сетки, который не превышал 1/20 высоты канала).

Несмотря на впечатляющие предварительные результаты, подход, связанный с модификацией граничного условия для параметров турбулентности на стенке не

<sup>1</sup> Отклонение от «предельного» значения, получаемого на сетке с  $y^+ \rightarrow 0$ .

получил дальнейшего развития в коде SINF. Более удобным и универсальным оказался альтернативный подход, в котором для реализации граничных условий используются обобщенные пристенные функции, моделирующие поведение параметров турбулентности вплоть до стенки, а не только в «логарифмической» области. Благодаря этому, при достаточно малых значениях  $y^+$  (порядка единицы) получаемое решение практически совпадает с тем, которое может быть найдено при использовании исходных «низкорейнольдсовых» граничных условий, а при огрублении сетки до  $y^+ > 30$  расчетные результаты стремятся к получаемым на основе «стандартных» пристенных функций (2.22). Эта концепция получила свое развитие в течение последнего десятилетия, однако общепринятой «стандартной» формулировки до сих пор нет; разные способы построения обобщенных пристенных функций предлагались в работах [126, 142, 170] и др.

В коде SINF реализован оригинальный вариант обобщенных пристенных функций [20], разработанных для модели SST [162] и для  $k$ - $\epsilon$  модели [157]. В рамках предложенного подхода для вычисления трения и теплового потока на стенке используются универсальные пристенные функции (2.18в) и (2.19), а значения параметров турбулентности в первой расчетной точке задаются в соответствии с аппроксимациями (2.26а) для модели SST и (2.26б) для модели  $k$ - $\epsilon$  (соответствующие уравнения переноса для этой точки не решаются).

$$k_1 = u_\tau^2 \left( \frac{1}{0.002 y^{+3.5}} + 0.3 \right)^{-1}, \quad \omega_1 = \frac{u_\tau^2}{\nu} \left[ \left( \alpha_{vis} \cdot \frac{80}{y^{+2}} \right)^2 + \left( \frac{1}{0.3 k y^+} \right)^2 \right]^{1/2} \quad (2.26a)$$

$$k_1 = u_\tau^2 \left( \frac{1}{0.016 y^{+2}} + 0.3 \right)^{-1}, \quad \epsilon_1 = \frac{u_\tau^4}{\nu} \left[ \left( 0.032 (1 + 0.1 y^{+2}) \right)^{-2} + \left( \frac{1}{k y^+} \right)^{-2} \right]^{-1/2} \quad (2.26b)$$

Выражение (2.26а) для скорости диссипации  $\omega$  является обобщением аппроксимации [126], в которой скомбинировано аналитическое решение для вязкого подслоя (2.24а) и решение (2.22) для «логарифмического» участка; дополнительный множитель  $\alpha_{vis} = 0.7$  введен для уменьшения чувствительности результатов к значению  $y^+$ . Остальные аппроксимации (2.26) тоже построены как комбинация «логарифмического» и «вязкого» участков. При этом в «логарифмической» области используется равновесное решение (2.22), а в «вязкой» области, за неимением аналитического решения, для  $k$  и  $\epsilon$  задается распределение, полученное при численном решении задачи о пограничном слое на пластине (или для другого простого случая, как,

например, течение Куэтта) по соответствующей модели турбулентности с использованием «низкорейнольдсовых» граничных условий<sup>1</sup>.

Отметим, что предложенный способ получения обобщенных пристенных функций с использованием численного решения частной задачи применим для любой низкорейнольдсовой модели турбулентности. Отметим также, что разные модели турбулентности дают разное поведение кинетической энергии турбулентности  $k$  в области вязкого подслоя, поэтому в данном случае использовать экспериментальные данные нежелательно.

Вышеприведенные обобщенные пристенные функции с успехом используются в коде SINF, однако, как показывает опыт расчетов, для сложных течений с локальным отрывом и последующим присоединением потока область их применимости ограничена сравнительно мелкими сетками ( $y^+ \leq 5$ ). Это связано с тем, что при огрублении сетки обобщенные пристенные функции переходят в «стандартные», которые по сути настроены на закономерности развитого пограничного слоя и не воспроизводят некоторые существенные особенности неравновесного пристенного течения. В частности, расчет на грубой («высокорейнольдсовой») сетке с пристенными функциями дает качественно неверный результат, предсказывая минимум теплоотдачи в точке присоединения потока, тогда как в экспериментах (как и в расчете на достаточно мелкой сетке) в этом месте наблюдается максимум.

В настоящее время определенный прогресс в решении данной проблемы достигнут в коммерческих CFD кодах, хотя используемые для этого приемы зачастую не имеют ясного физического обоснования, т.е. являются чисто вычислительными. Представляемая ниже усовершенствованная формулировка [45] пристенных функций для SST модели турбулентности, внедренная в код SINF, в главных чертах следует опции Automatic Wall Treatment пакета CFX (насколько ее можно воспроизвести по имеющемуся описанию).

В данной формулировке вместо стандартного пристенного масштаба скорости  $u_\tau$  и нормированного расстояния до стенки  $y^+$  (2.17а) фигурируют их аналоги – масштаб  $w^*$  и нормированное расстояние  $y^*$ , определяемые согласно (2.27а). В частности,  $w^*$  и  $y^*$  замещают  $u_\tau$  и  $y^+$  в выражении (2.19) для теплового потока  $q_w$ . Для вычисления трения на стенке  $\tau_w$  используется явное выражение (2.27б), которое, в отличие от уравнения (2.18в), не требует итераций. Значение диссипативной переменной  $\omega$  в первой расчетной точке задается в соответствии с аппроксимацией (2.27в), которая отличается от (2.26а) заменой  $u_\tau$  и  $y^+$  на  $w^*$  и  $y^*$ , а также значениями коэффициентов.

---

<sup>1</sup> В работе [142] численное решение задачи о пограничном слое на пластине используется в качестве обобщенных пристенных функций в табулированном виде, без какой-либо аппроксимации.

$$w^* = \left[ \left( \sqrt{\frac{\nu U_1}{d_1}} \right)^4 + (\sqrt{0.31k_1})^4 \right]^{1/4}, \quad y^* = \frac{w^* d_1}{\nu} \quad (2.27a)$$

$$\tau_w = \rho w_\tau w^*, \quad w_\tau = \left[ \left( \sqrt{\frac{\nu U_1}{d_1}} \right)^4 + \left( \frac{\kappa U_1}{\ln(Ey^*)} \right)^4 \right]^{1/4} \quad (2.27б)$$

$$\omega_1 = \frac{w^{*2}}{\nu} \left[ \left( \frac{80}{y^{*2}} \right)^2 + \left( \frac{1}{0.31\kappa y^*} \right)^2 \right]^{1/2} \quad (2.27в)$$

В «логарифмической» области пограничного слоя (где  $k = u_\tau^2/0.3$ ), как и в вязком подслое (где  $k \approx 0$ ), масштабы  $w^*$  и  $u_\tau$  близки друг к другу, а значит  $y^* \approx y^+$ . Однако вблизи точки присоединения потока, где из-за малого трения значение  $y^+$  «уходит» в ноль даже на грубой сетке, величина  $y^*$  остается конечной, что и открывает путь к решению вышеупомянутой проблемы нефизичного падения теплоотдачи на грубой сетке.

Следует подчеркнуть, что в обсуждаемой методике уравнение переноса кинетической энергии турбулентности  $k$  решается вплоть до стенки, где ставится граничное условие нулевого градиента ( $\partial k/\partial n = 0$ ). Получаемое в ходе решения значение  $k_1$  в первой расчетной точке подставляется в (2.27а) и, следовательно, влияет на точность всей методики. Таким образом, для первой расчетной точки возникает проблема вычисления модуля тензора скоростей деформации ( $S^2 = 2S_{ij}S_{ij}$ ), входящего в генерационный член уравнения для  $k$ . За неимением соответствующих указаний или ссылок на литературу в описании кода CFX, в коде SINF данная проблема решается путем вычисления градиента скорости в первой пристенной точке с помощью специально подобранной аппроксимации (2.28) [45], в которой «смешиваются» решения для вязкого подслоя и для «логарифмической» зоны.

$$\left( \frac{\partial U}{\partial n} \right)_1 = \frac{\tau_w}{\mu} \cdot \frac{1 + \sigma / (\kappa y^*)}{1 + \sigma}, \quad \sigma = \left( \frac{y^*}{5.5} \right)^4 \quad (2.28)$$

Кроме того, аналогично (2.26а), для уменьшения чувствительности результатов к значению  $y^+$ , в выражение (2.27в) вводится дополнительный множитель  $\alpha_{vis}$ :

$$\alpha_{vis} = \frac{0.3 + (y^*/3)^3}{1 + (y^*/3)^3} \quad (2.29)$$

Один из примеров применения разработанных обобщенных пристенных функций, подтверждающий их эффективность, представлен на рисунке 4.24 (разд. 4.3).

### 2.1.3 Запись уравнений в обобщенной системе координат

В предыдущих разделах определяющие уравнения, используемые в коде SINF для описания течения жидкости, записаны в инвариантной векторной форме. При этом фактически задача решается в декартовой системе координат, т.е. расчетная сетка задается декартовыми координатами ее узлов, а в уравнениях фигурируют декартовы компоненты вектора скорости. Однако некоторые алгоритмы, применяемые в коде SINF, записываются в пространстве индексных «координат» структурированной сетки.

Переход к «индексным» координатам можно пояснить на примере уравнения конвективно-диффузионного переноса некой величины  $\phi$ , которое может быть записано в неконсервативной (2.30а) или в эквивалентной консервативной (2.30б) форме:

$$\rho \frac{d\phi}{dt} \equiv \rho \frac{\partial \phi}{\partial t} + \rho \mathbf{V} \cdot \nabla \phi = \Phi + \nabla \cdot (\Gamma \nabla \phi) \quad (2.30а)$$

$$\frac{\partial \rho \phi}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{V} \phi - \Gamma \nabla \phi) = \Phi \quad (2.30б)$$

Здесь  $\rho$  – плотность среды,  $\mathbf{V}$  – вектор скорости,  $\Phi$  – плотность распределения объемных источников,  $\Gamma$  – коэффициент диффузии. В качестве  $\phi$  может фигурировать, например, кинетическая энергия турбулентности или внутренняя энергия текущей среды. С некоторой долей условности, под  $\phi$  можно понимать и сам вектор скорости  $\mathbf{V}$  (с очевидными оговорками, касающимися вычисления диффузионного потока).

Координатная форма записи уравнения (2.30) в декартовой системе очевидна (здесь и далее подразумевается суммирование по повторяющемуся «координатному» индексу):

$$\rho \frac{\partial \phi}{\partial t} + \rho V_k \frac{\partial \phi}{\partial x_k} = \frac{\partial \rho \phi}{\partial t} + \frac{\partial \rho V_k \phi}{\partial x_k} = \Phi + \frac{\partial}{\partial x_k} \left( \Gamma \frac{\partial \phi}{\partial x_k} \right) \quad (2.31)$$

Формально, переход к «индексным» координатам осуществляется с помощью обычных формул преобразования координат (см. напр. [100]):

$$\frac{\partial \phi}{\partial x_k} = \frac{\partial \phi}{\partial \xi_i} \xi_{i,k} = J \frac{\partial}{\partial \xi_i} \left( \frac{\xi_{i,k}}{J} \phi \right), \quad \xi_{i,k} = \frac{\partial \xi_i}{\partial x_k} = \left( \frac{\partial \xi}{\partial \mathbf{r}} \right)_{i,k}, \quad J = \det \left( \frac{\partial \xi}{\partial \mathbf{r}} \right) \quad (2.32)$$

Здесь  $(x_1, x_2, x_3)$  – исходные декартовы координаты,  $(\xi_1, \xi_2, \xi_3)$  – обобщенные криволинейные координаты, отвечающие сеточным индексам  $(i, j, k)$ ,  $J$  – Якобиан преобразования (определитель матрицы Якоби  $\partial \xi / \partial \mathbf{r}$ ).

Непосредственное вычисление производных  $\partial \xi_i / \partial x_k$  обычно не представляется возможным (если только расчетная сетка не задана аналитически), однако с помощью конечно-разностных формул легко найти производные  $\partial x_k / \partial \xi_i$ , т.к. координаты узлов структурированной сетки, по сути, дают явную (хотя и дискретную) связь  $\mathbf{r}(\xi)$ . Поэтому на практике матрица Якоби  $\partial \xi / \partial \mathbf{r}$  определяется как обратная к матрице  $\partial \mathbf{r} / \partial \xi$ :

$$\frac{\partial \xi}{\partial \mathbf{r}} = \left( \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \xi} \right)^{-1}, \quad \left( \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \xi} \right)_{k,i} = \frac{\partial x_k}{\partial \xi_i}, \quad J^{inv} = \det \left( \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \xi} \right) = \frac{1}{J} \quad (2.33)$$

Отметим, что в физическом пространстве вектор  $\partial \mathbf{r} / \partial \xi_i$  (столбец матрицы  $\partial \mathbf{r} / \partial \xi$ ) направлен по касательной к координатной (сеточной) линии  $\xi_i$ , смешанное произведение векторов  $\partial \mathbf{r} / \partial \xi_i$  дает обратный Якобиан  $J^{inv}$ , а векторное произведение (например,  $\partial \mathbf{r} / \partial \xi_2 \times \partial \mathbf{r} / \partial \xi_3$ ) впрямую связано с вектором  $\partial \xi_1 / \partial \mathbf{r}$  (строка матрицы  $\partial \xi / \partial \mathbf{r}$ ; другие комбинации индексов получаются круговой перестановкой):

$$\frac{\partial \xi_1}{\partial \mathbf{r}} = \frac{1}{J^{inv}} \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \xi_2} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \xi_3}, \quad J^{inv} = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \xi_1} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \xi_2} \cdot \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \xi_3} \quad (2.34)$$

При этом (напр., [100]), если в вычислительном пространстве  $(\xi_1, \xi_2, \xi_3)$  шаги расчетной сетки положить равными  $\Delta \xi_1 = \Delta \xi_2 = \Delta \xi_3 = 1$ , то вектор  $\partial \mathbf{r} / \partial \xi_i$  можно соотнести с ребром сеточной ячейки, Якобиан – с ее объемом  $\Omega$ , а метрические коэффициенты  $\xi_{i,k}$  – с площадью и ориентацией ее граней (вектор  $\mathbf{S}^{(i)}$  перпендикулярен сеточной поверхности  $\xi_i = const$ , а его модуль равен площади соответствующей грани):

$$\frac{\partial \xi_i}{\partial \mathbf{r}} = \{ \xi_{i,1}, \xi_{i,2}, \xi_{i,3} \} = \frac{1}{\Omega} \mathbf{S}^{(i)} \quad J = \frac{1}{J^{inv}} = \frac{1}{\Omega} \quad (2.35)$$

Понятно, что такая связь между метрическими коэффициентами и параметрами ячеек расчетной сетки до некоторой степени условна и подразумевает использование интерполяции. Ведь объем ячейки фактически определен только в ее центре, а вектор площади грани – в центре этой грани, тогда как метрические коэффициенты считаются непрерывными функциями, которые можно вычислить в любой точке.

С учетом (2.32) и (2.35), уравнение конвективно-диффузионного переноса величины  $\phi$  (2.30) в «индексной» системе координат  $(\xi_1, \xi_2, \xi_3)$  может быть записано следующим образом:

$$\rho \frac{\partial \phi}{\partial t} + \frac{Q^{(i)}}{\Omega} \frac{\partial \phi}{\partial \xi_i} = \Phi + \frac{1}{\Omega} \frac{\partial}{\partial \xi_i} (\Gamma \mathbf{S}^{(i)} \cdot \nabla \phi), \quad Q^{(i)} = \rho \mathbf{V} \cdot \mathbf{S}^{(i)} \quad (2.36a)$$

$$\frac{\partial \rho \phi}{\partial t} + \frac{1}{\Omega} \frac{\partial}{\partial \xi_i} (Q^{(i)} \phi - \Gamma S^{(i)} \cdot \nabla \phi) = \Phi, \quad \nabla \phi = \frac{S^{(j)}}{\Omega} \frac{\partial \phi}{\partial \xi_j} \quad (2.366)$$

Отметим, что используемое здесь выражение для  $\nabla \phi$  является частым случаем представления векторной производной  $\nabla \otimes \phi$  (где  $\phi$  – скаляр, вектор или тензор, а  $\otimes$  – любое подходящее по смыслу умножение), которое также следует из (2.32) и (2.35):

$$\nabla \otimes \phi = \frac{S^{(i)}}{\Omega} \otimes \frac{\partial \phi}{\partial \xi_i} = \frac{1}{\Omega} \frac{\partial}{\partial \xi_i} (S^{(i)} \otimes \phi) \quad (2.37)$$

## 2.2 Математические модели специализированных кодов ПК SINF

В данном разделе представлены специфические особенности математической модели трех специализированных расчетных кодов ПК SINF, а именно:

- SINF-FS (течения жидкости со свободной поверхностью),
- SINF-PCF (течения газозвеси),
- ПГС-ТК (тепломассоперенос при течении парогазовой смеси с конденсацией).

Математическая модель специализированного кода SINF-ALE (течения в областях с изменяющейся геометрией) здесь не обсуждается, поскольку она формально не отличается от представленной выше базовой модели – изменения затрагивают только способ аппроксимации уравнений на движущейся (деформируемой) расчетной сетке (соответствующие пояснения даны в разд. 3.4.1).

### 2.2.1 Модель для расчета течений жидкости со свободной поверхностью

Среди методов, разработанных для решения задач о течении жидкости со свободной поверхностью, наибольшее распространение получил метод VOF (Volume-Of-Fluid) [134], позволяющий моделировать сложные течения с сильной деформацией свободной поверхности, включая случаи слияния и разделения объемов, занимаемых жидкой и газовой фазами. Данный метод относительно нетребователен к вычислительным ресурсам и, судя по имеющимся в литературе описаниям, довольно прост в реализации. С учетом отмеченных достоинств метода VOF, именно он был выбран для внедрения в ПК SINF (специализированный код SINF-FS).

Исходная идея метода VOF [134] достаточно проста – для определения положения межфазной границы, перемещающейся по расчетной сетке, используется распределение маркер-функции  $C(\mathbf{r}, t)$ , представляющей собой объемную долю жидкости в ячейках сетки: при  $C = 1$  ячейка заполнена жидкостью, при  $C = 0$  ячейка пуста. Значения  $0 < C < 1$  формально отвечают частично заполненным ячейкам, через которые проходит

граница раздела фаз, хотя в численном решении эта граничная зона может быть «размыта» по толщине на несколько ячеек сетки; в таком случае «точное» положение межфазной границы обычно соотносят с изоповерхностью  $C = 0.5$ .

В отсутствие фазовых переходов динамика величины  $C$  описывается уравнением конвективного переноса (2.38), выражающим тот очевидный факт, что в процессе движения «частицы» каждой из фаз не меняют свою фазовую принадлежность, т.е. межфазная граница движется вместе с потоком.

$$\frac{dC}{dt} \equiv \frac{\partial C}{\partial t} + \mathbf{V} \cdot \nabla C = 0 \quad (2.38)$$

В т.наз. одножидкостной формулировке метода VOF, используемой в ПК SINF, уравнения гидродинамики для системы жидкость-газ записываются как для единой среды с переменной плотностью  $\rho$  и другими материальными свойствами, выражаемыми через объемную долю жидкости  $C$  (индексы  $ж$  и  $г$  относятся к жидкости и газу соответственно):

$$\rho = C\rho_{ж} + (1 - C)\rho_{г} \quad (2.39a)$$

$$\mu = C\mu_{ж} + (1 - C)\mu_{г} \quad (2.39б)$$

В пренебрежении сжимаемостью фаз (при  $\rho_{г} = const$  и  $\rho_{ж} = const$ ) уравнение неразрывности (2.1а), с учетом уравнения (2.38) и линейной связи (2.39а) между  $\rho$  и  $C$ , может быть преобразовано к условию несжимаемости (2.40).

$$\nabla \cdot \mathbf{V} = 0 \quad (2.40)$$

В свою очередь уравнение конвективного переноса маркер функции (2.38), с учетом (2.40), можно записать в эквивалентной консервативной форме (2.41), которая используется для аппроксимации уравнения по методу конечного объема (разд. 3.1.1).

$$\frac{\partial C}{\partial t} + \nabla \cdot (\mathbf{V}C) = 0 \quad (2.41)$$

Уравнение баланса импульса (2.1б) (как и другие уравнения гидродинамики, в частности, уравнения переноса параметров турбулентности) для условной единой среды жидкость-газ сохраняет свою обычную форму:

$$\frac{\partial \rho \mathbf{V}}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{V} \mathbf{V}) = \rho \mathbf{g} - \nabla p + \nabla \cdot \boldsymbol{\tau} \quad (2.42)$$

В литературе описан способ учета эффектов поверхностного натяжения путем введения в это уравнение дополнительной объемной силы [114]  $f_{\sigma} = \sigma K \nabla C$  (здесь  $\sigma$  –

коэффициент поверхностного натяжения,  $K = -\nabla \cdot \mathbf{n}$  – локальная кривизна межфазной границы,  $\mathbf{n} = \nabla C / |\nabla C|$  – нормаль к границе). Эта фиктивная объемная сила действует в зоне межфазной «границы»  $0 < C < 1$  и ее суммарное (проинтегрированное по толщине «границы») влияние на поток эквивалентно действию силы поверхностного натяжения. В коде SINF-FS данная опция пока не реализована.

### 2.2.2 Модель для расчета газодисперсных потоков

При моделировании поведения дисперсной фазы (например, частиц или капель) в несущем потоке находят применение два основных подхода, связываемые с именами Эйлера и Лагранжа. Для подхода Эйлера характерно введение в рассмотрение некоего условного «газа» частиц и трактовка обеих фаз как взаимопроникающих континуумов. При этом течение описывается обычными уравнениями гидродинамики для смеси и ее компонентов с дополнительными членами, учитывающими межфазное взаимодействие [53, 85, 106]. Моделирование этого взаимодействия является одной из основных проблем подхода Эйлера, поскольку эффективные коэффициенты переноса для «газа» частиц в турбулентном несущем потоке зависят не только от локальных характеристик турбулентности, но и от предыстории движения частиц в потоке. Как следствие, все существующие модели турбулентной диффузии «газа» частиц в той или иной степени нуждаются в «настройке» на рассматриваемый класс течений. Слабым местом данного подхода является также моделирование взаимодействия частиц со стенкой, поскольку в рамках концепции единого «газа» частиц трудно учесть различие параметров падающих и отраженных частиц.

По сравнению с подходом Эйлера, моделирование поведения дисперсной фазы в рамках подхода Лагранжа (т.наз. метод пробных частиц), является более корректным физически и простым в реализации (хотя и более ресурсоемким). В рамках данного подхода рассчитываются траектории множества пробных частиц в несущем потоке, а поля параметров дисперсной фазы и слагаемые, описывающие межфазный обмен в уравнениях несущей фазы, определяются путем осреднения по всем частицам [119]. Воздействие турбулентности на частицы моделируется преимущественно введением случайных флуктуаций несущего поля [130]; для описания взаимодействия дисперсной фазы со стенкой достаточно задать модель отражения частицы [103]; при необходимости могут учитываться столкновения частиц друг с другом [54]. Таким образом, метод пробных частиц нуждается лишь в относительно простых и физически ясных замыкающих соотношениях на уровне взаимодействия отдельных частиц, а адекватное моделирование поведения дисперсной фазы в целом применительно к

конкретным условиям исследуемого течения обеспечивается наиболее «естественным» путем – рассмотрением достаточно большого числа пробных частиц.

Отмеченные достоинства метода пробных частиц послужили основанием для его внедрения в ПК SINF. При этом, разработанный автором [22] модуль PCF (Particles in Carrier Flow), обеспечивающий расчет траекторий частиц, был реализован в виде относительно независимого набора подпрограмм, который может функционировать как в составе специализированного кода SINF-PCF, так и виде отдельного кода, который обменивается с кодом SINF через файлы.

В литературе описано несколько модификаций метода пробных частиц, различающихся особенностями генерации квази-турбулентных флуктуаций несущего потока и учитываемыми физическими эффектами. Представленная ниже модель, реализованная в модуле PCF, предназначена для расчета стационарного (в среднем) течения газа с твердыми или жидкими условно-сферическими частицами. Тепло- и массообмен между фазами не учитывается. Объемная доля дисперсной фазы считается достаточно малой (до 0.1%), чтобы пренебречь столкновениями частиц друг с другом.

Движение каждой частицы описывается уравнением (2.43а), в котором наряду с аэродинамической силой  $F_p$  учитываются внешние массовые силы, представленные в общем случае силой тяжести, силой Кориолиса и центробежной силой (2.43б).

$$m \frac{du}{dt} = mG + F_p; \quad \frac{dr}{dt} = u \quad (2.43a)$$

$$G = g - \omega \times (\omega \times r) - 2\omega \times u \quad (2.43b)$$

Для мелких частиц аэродинамическая может быть представлена как сумма нескольких составляющих (напр., [85] – силы сопротивления  $F_D$ , Магнуса  $F_M$ , Саффмена  $F_S$ , Архимеда  $F_A$ , присоединенных масс  $F_{vm}$  и др. (2.44а). В течениях газозвеси основное значение имеет сила сопротивления, для вычисления которой в модуле PCF используется аппроксимация (2.44б); роль других составляющих обычно невелика (в текущей версии кода они не учитываются).

$$F_p = F_D [ + F_M + F_S + F_A + F_{vm} + \dots ] \quad (2.44a)$$

$$F_D = -3\pi\mu\delta w \cdot f_D(Re_p), \quad w = u - \tilde{V} \quad (2.44b)$$

$$f_D \approx 1 + 0.179\sqrt{Re_p} + 0.013Re_p, \quad Re_p = w\delta/\nu < 6 \cdot 10^3$$

Для моделирования турбулентной диффузии частиц, мгновенная скорость несущего газа  $\tilde{V}(r, t)$  представляется в виде суммы местной средней скорости  $V(r)$ , определяемой из решения гидродинамической задачи, и некоторой флуктуации  $V'$  (2.45). Следуя [130], флуктуация случайным образом выбирается из нормального

распределения с дисперсией, отвечающей турбулентной энергии  $k$  (предполагается, что для описания турбулентности несущей фазы использована  $k$ - $\varepsilon$  модель). Турбулентный моль, с которым ассоциируется данная флуктуация, имеет характерный размер  $l_e$  и время жизни  $t_e$  в соответствии с локальными характеристиками турбулентности; константа  $C_T = 0.28$  выбрана из условия совпадения результатов расчета с данными по турбулентной диффузии частиц-маркеров в однородном потоке [101]. Созданная флуктуация считается неизменной внутри моля в течение времени его жизни  $t_e$ ; как только время жизни истекает или частица покидает моль, формируется новая случайная флуктуация.

$$\mathbf{V} = \bar{\mathbf{V}} + \mathbf{V}'; \quad \overline{V_i'^2} = \frac{2k}{3}; \quad t_e = C_T \frac{k}{\varepsilon}; \quad l_e = t_e \sqrt{\frac{2k}{3}} \quad (2.45)$$

По результатам расчета большого числа пробных частиц можно найти распределение параметров дисперсной фазы, используя обычные правила осреднения. Например, для определения объемной доли частиц  $\alpha$  нужно просто просуммировать объемы  $v_p$  всех частиц в единице объема, а среднемассовая скорость дисперсной фазы  $\bar{\mathbf{u}}$  вычисляется как отношение суммарного импульса частиц к их массе:

$$\alpha = \langle v_p \rangle, \quad \bar{\mathbf{u}} = \frac{\langle m\mathbf{u} \rangle}{\langle m \rangle}, \quad \langle \psi \rangle \equiv \frac{1}{\Omega} \sum_i \psi_i \Delta N_i \quad (2.46)$$

Здесь  $\Delta N_i$  – число физических частиц, ассоциированных с пробной частицей; суммирование производится по всем пробным частицам, находящимся в контрольном объеме  $\Omega$  (ячейка расчетной сетки).

Понятно, что для получения статистически установившегося результата число пробных частиц в каждой ячейке должно быть достаточно большим (порядка 100). В общем случае это приводит к необходимости расчета огромного числа частиц (как минимум, на два порядка больше числа ячеек расчетной сетки), что делает метод пробных частиц весьма ресурсоемким как по времени счета, так и по требуемой оперативной памяти. Однако для стационарного течения вычислительные затраты можно значительно уменьшить, т.к. вместо расчета множества одинаковых частиц, движущихся друг за другом вдоль одной и той же траектории, достаточно сосчитать эту траекторию только один раз. При этом вместо пространственного осреднения (2.46) используется пространственно-временное осреднение (2.47):

$$\langle \psi \rangle \equiv \frac{1}{\Omega} \sum_j \int_{T_j} \psi_j \eta_j dt \quad (2.47)$$

Здесь  $T_j$  – время пребывания пробной частицы в ячейке  $\Omega$ ;  $\eta_j$  – числовой поток физических частиц (число частиц в единицу времени), ассоциированных с пробной частицей; суммирование производится по всем траекториям, проходящим через ячейку. Естественно, для вычисления интеграла в выражении (2.47) требуется аккуратно фиксировать моменты входа и выхода каждой частицы из ячейки. Для получения статистически установившегося результата число траекторий, проходящих через ячейку, должно быть достаточно большим (по опыту расчетов – 10...20), но все же в несколько раз меньше, чем потребное число частиц при пространственном осреднении (2.46).

Модуль РСФ обеспечивает расчет траекторий пробных частиц в заданном потоке несущего газа и вычисление требуемых осредненных параметров дисперсной фазы в каждой ячейке расчетной сетки. В частности, суммирование аэродинамических сил отдельных частиц  $\mathbf{F}_p$  дает силу межфазного взаимодействия, которая может быть включена в уравнения движения несущего газа (2.48а); также можно учесть вклад этих сил в генерацию турбулентности (дополнительный член  $P_p$  в уравнениях «стандартной»  $k$ - $\varepsilon$  модели (2.48б)). Учет обратного влияния частиц на несущий поток достигается за счет глобальных итераций.

$$\begin{aligned} \nabla \cdot (\rho \mathbf{V}) &= 0 \\ \nabla \cdot (\rho \mathbf{V} \mathbf{V} + p \mathbf{I} - \boldsymbol{\tau}) &= -\langle \mathbf{F}_p \rangle \end{aligned} \quad (2.48a)$$

$$\begin{aligned} \nabla \cdot (\rho \mathbf{V} k - (\mu + \mu_T / \sigma_k) \nabla k) &= P_k - \rho \varepsilon + P_p \\ \nabla \cdot (\rho \mathbf{V} \varepsilon - (\mu + \mu_T / \sigma_\varepsilon) \nabla \varepsilon) &= \frac{\varepsilon}{k} (C_{\varepsilon 1} P_k - C_{\varepsilon 2} \rho \varepsilon + C_{\varepsilon 3} P_p) \end{aligned}, \quad \text{где} \quad \begin{aligned} P_p &= -\langle \mathbf{V}' \cdot \mathbf{F}_p \rangle \\ C_{\varepsilon 3} &\approx 1.0 \end{aligned} \quad (2.48b)$$

Для численного интегрирования уравнений движения частицы (2.43) в модуле РСФ используется экспоненциальная схема [111], в которой на каждом шаге по времени строится аналитическое решение локально линеаризованных уравнений. Это позволяет выбирать шаг интегрирования  $\Delta t$  вне зависимости от времени релаксации частицы  $\tau_D = m / (3\pi\mu\delta)$ , что особенно важно при рассмотрении мелких частиц. Для определения параметров несущего газа вдоль траектории пробной частицы используется линейная интерполяция по каждому из индексных направлений.

Поскольку траектории частиц рассчитываются независимо друг от друга, алгоритм легко распараллеливается. Траектории рассчитываются последовательно, одна за другой, что значительно уменьшает объем требуемой оперативной памяти. По мере расчета траектории частицы в каждой из проходимых ячеек накапливается информация, необходимая для получения параметров дисперсной фазы на основе пространственно-временного осреднения (2.47). В частности, фиксируется время  $T$  пребывания пробной частицы в ячейке, определяется соответствующее ему число физических частиц  $\Delta N = \eta T$ , их суммарная масса, импульс, аэродинамическая сила и т.д.

По окончании работы модуля *PCF* (т.е. после расчета заданного числа пробных частиц), полученные данные о параметрах межфазного взаимодействия используются модулем *SINF* для уточнения поля течения несущего газа, после чего вновь запускается расчет пробных частиц, вновь корректируется несущий поток и т.д. Как правило, при не слишком высокой загрузке потока (массовая доля частиц до 0.5), для учета влияния дисперсной фазы на течение несущего газа достаточно двух-трех таких глобальных итераций.

### 2.2.3 Комплексная модель тепломассопереноса и конденсации при течении парогазовой среды

Представляемая математическая модель реализована в специализированном коде ПГС-ТК (Паро-Газовая Смесь – Течение и Конденсация), который был создан по заказу СПбАЭП для моделирования процессов тепло- и массопереноса в защитной оболочке энергоблока АЭС с целью анализа эффективности работы системы пассивного отвода тепла и оценки безопасности АЭС в условиях возможной аварии. Если отвлечься от узкоспециальных возможностей кода ПГС-ТК (как, например, учет работы пассивных каталитических рекомбинаторов водорода), то речь идет моделировании свободной и смешанной конвекции многокомпонентной парогазовой смеси при наличии объемной и поверхностной конденсации пара. Основные элементы математической модели, разработанной для решения данного класса задач, представлены ниже.

#### Определяющие уравнения

Основу математической модели кода ПГС-ТК составляет система уравнений (2.49), выражающая баланс массы, импульса и энергии при низкоскоростном (существенно дозвуковом) течении многокомпонентной паро-газовой смеси [76]. В данной формулировке влажный пар рассматривается как составной компонент, содержащий газовую (собственно пар) и конденсированную составляющие. Капли конденсата считаются достаточно мелкими, чтобы пренебречь скоростной и температурной неравновесностью фаз. Химические реакции отсутствуют.

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{V}) = 0 \quad (2.49a)$$

$$\frac{\partial \rho \mathbf{V}}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{V} \mathbf{V}) = -\nabla p^* + \nabla \cdot \boldsymbol{\tau} + (\rho - \rho_h) \mathbf{g}, \quad p^* = p - p_h, \quad \nabla p_h \equiv \rho_h \mathbf{g} \quad (2.49б)$$

$$\frac{\partial \rho h}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{V} h) = \frac{\partial p_a}{\partial t} - \nabla \cdot \left( \mathbf{q} + \sum_i m_i h_i \right), \quad \mathbf{q} = - \left( \lambda + \frac{\mu_T C_p}{Pr_T} \right) \nabla T \quad (2.49в)$$

$$\frac{\partial \rho y_i}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{V} y_i) = -\nabla \cdot \mathbf{m}_i, \quad \mathbf{m}_i \approx -\left(\rho D_i + \frac{\mu_T}{Sc_T}\right) \nabla y_i \quad (2.49г)$$

Здесь  $y_i = \rho_i / \rho$  – массовая доля  $i$ -го компонента смеси ( $\rho_i$  – парциальная плотность),  $h_i$  – его удельная энтальпия,  $\mathbf{m}_i$  – плотность диффузионного потока. Суммирование уравнений переноса компонентов смеси (2.49г) дает уравнение неразрывности для смеси (2.49а), т.е. одно из уравнений (2.49г) является «лишним». В коде ПГС-ТК исключается уравнение для основного компонента смеси ( $i = 0$ , обычно воздух или азот), массовая доля которого определяется вычитанием из единицы долей остальных компонентов (пар, кислород, водород и т.д.).

В рамках принятого односкоростного приближения уравнения баланса массы (2.49а) и импульса (2.49б) для смеси по сути совпадают с соответствующими уравнениями (2.1а) и (2.8) для однокомпонентной среды. Для существенно дозвукового течения можно пренебречь преобразованием механической энергии потока во внутреннюю, поэтому из уравнения энергии (2.49в) исключены (ср. с (2.12)) слагаемые  $\boldsymbol{\tau} \cdot \nabla \mathbf{V}$  (диссипация) и  $\mathbf{V} \cdot \nabla p$  и учитывается изменение во времени лишь среднего давления  $p_a$ . Относительный «вес» отброшенных слагаемых имеет порядок квадрата числа Маха.

Удельная энтальпия смеси  $h$  складывается из энтальпий ее компонентов  $h_i$ , а энтальпия каждого компонента – из энтальпий его газовой и конденсированной составляющих. Для совершенных газов с постоянной теплоемкостью  $C_{p,i}$  и с учетом теплового равновесия фаз энтальпия явно выражается через температуру  $T$ :

$$h = \sum_i y_i h_i, \quad h_i = (1 - \gamma_i) h_i^{gas} + \gamma_i h_i^{cond} = h_{0,i} + C_{p,i} (T - T_0) - \gamma_i L_i \quad (2.50а)$$

$$\gamma_i = \frac{\rho_i^{cond}}{\rho_i} = \frac{w_i}{y_i}, \quad L_i = L_{0,i} - (C_i^{cond} - C_{p,i}) (T - T_0) \approx L_{0,i}, \quad w_i \equiv \frac{\rho_i^{cond}}{\rho} \quad (2.50б)$$

Здесь  $C_{p,i}$  – теплоемкость газовой составляющей  $i$ -го компонента при постоянном давлении,  $C_i^{cond}$  – теплоемкость его конденсированной части,  $h_{0,i}$  – энтальпия образования при температуре  $T_0$ ,  $L_i$  – скрытая теплота парообразования. В коде ПГС-ТК предусмотрено наличие лишь одного конденсирующегося компонента – водяного пара ( $i = v$ ); зависимость теплоты парообразования от температуры не учитывается ( $L \approx L_0$ ).

С учетом уравнений (2.49г) и выражений (2.50), уравнение баланса энергии (2.49в) можно переписать в эквивалентной полуконсервативной форме (2.51). Слагаемое  $Q^{cond}$  учитывает выделение тепла при конденсации пара («избыточный» индекс  $v$  в обозначениях параметров конденсата опущен).

$$C_p \left[ \frac{\partial \rho T}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{V} T) \right] = \frac{\partial p_a}{\partial t} - \nabla \cdot \mathbf{q} - \sum_i C_{p,i} \mathbf{m}_i \cdot \nabla T + Q^{cond} \quad (2.51a)$$

$$Q^{cond} \approx L \left\{ \frac{\partial \rho w}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{V} w) + \nabla \cdot (\mathbf{m}_v \gamma) \right\}, \quad C_p = \sum_i y_i C_{p,i} \quad (2.51b)$$

В пренебрежении объемной долей конденсата плотность среды  $\rho$  определяется из уравнения состояния для смеси совершенных газов:

$$p_a = \sum_i p_i = \frac{\rho R T}{M}, \quad p_i = \frac{\rho_i^{gas} R T}{M_i}, \quad M \equiv \left[ \sum_i \frac{y_i - w_i}{M_i} \right]^{-1} \quad (2.52)$$

Здесь  $R$  – универсальная газовая постоянная,  $p_i$  и  $M_i$  – парциальное давление и молярная масса  $i$ -го компонента,  $M$  – эквивалентная молярная масса смеси. Как и ранее, индексы  $^{gas}$  и  $^{cond}$  относятся к газовой и конденсированной фазе соответственно.

### Модель конденсации пара

Для конденсации пара в коде ПГС-ТК принято равновесное приближение, в рамках которого парциальное давление пара  $p_v$  не может стать выше давления его насыщенных паров  $p_s(T)$  – лишняя влага конденсируется. Иными словами, при  $p_v < p_s$  конденсации нет ( $w = 0$ ), а при  $w > 0$  имеет место равновесие  $p_v = p_s$ . С учетом соотношений (2.52) данное условие можно записать в виде (2.53): конденсация происходит, если массовая доля пара  $y_v$  превышает пороговое значение  $y_v^*$  или, что то же самое, если относительное давление насыщенных паров  $\bar{y}_s$  ниже порогового уровня  $\bar{y}_s^*$ .

$$w = y_v - y_v^*, \quad y_v^* = \frac{M_v \bar{y}_s}{1 - \bar{y}_s} \cdot \sum_{k \neq v} \frac{y_k}{M_k}, \quad \bar{y}_s \equiv \frac{p_s(T)}{p_a} \quad (2.53a)$$

$$w > 0 \Leftrightarrow y_v > y_v^* \Leftrightarrow \bar{y}_s < \bar{y}_s^* = \frac{y_v}{M_v} \cdot \left[ \sum_k \frac{y_k}{M_k} \right]^{-1} \quad (2.53b)$$

При равновесной конденсации на охлаждаемой поверхности парциальное давление пара на поверхности пленки конденсата равно давлению насыщенных паров при соответствующей температуре вне зависимости от количества конденсата в смеси. Это значит, что для определения доли конденсата на поверхности требуется задать дополнительное условие, т.к. из условия равновесия (2.53a) нельзя найти одновременно и  $w$  и  $y_v$ . В качестве такого дополнительного условия в коде ПГС-ТК задается условие постоянства доли конденсата в смеси при приближении к стенке ( $\partial w / \partial n = 0$ ). При этом равенство (2.53a), которое можно записать в виде (2.54), используется как граничное

условие для массовой доли пара на поверхности пленки (индекс  $\delta$ ) при текущем уровне влажности  $w$ .

$$y_{v,\delta} = y_v^*(T_\delta) + w, \quad \partial w / \partial n = 0 \quad (2.54)$$

Независимо от наличия конденсата в смеси, полный (включающий конвективную и диффузионную составляющие) массовый поток уходящей в пленку влаги равен массовому потоку смеси, что дает граничное условие (2.55а) для нормальной составляющей скорости на поверхности пленки. Равенство нулю полных потоков неконденсирующихся компонентов смеси дает для их массовых долей граничное условие третьего рода (2.55б).

$$m_{\Sigma,v} = \rho y_{v,\delta} V_{n,\delta} - \rho D_v \left( \frac{\partial y_v}{\partial n} \right)_\delta = \rho V_{n,\delta} \Rightarrow V_{n,\delta} = - \frac{D_v}{1 - y_{v,\delta}} \left( \frac{\partial y_v}{\partial n} \right)_\delta \quad (2.55a)$$

$$m_{\Sigma,i} = \rho y_{i,\delta} V_{n,\delta} - \rho D_i \left( \frac{\partial y_i}{\partial n} \right)_\delta = 0, \quad i \neq v \quad (2.55b)$$

При определении полного теплового потока на стенке  $q_\Sigma$  необходимо наряду с переносом тепла за счет теплопроводности учитывать тепло, выделяющееся на стенке при конденсации пара; естественно, падающие на стенку капли не дают вклада в конденсационный поток тепла:

$$q_\Sigma = q_{n,\delta} + q^{cond} = -\lambda \left( \frac{\partial T}{\partial n} \right)_\delta + L\rho(1-w)V_{n,\delta} \quad (2.56)$$

### Модель стекания пленки конденсата

В коде ПГС-ТК реализована модель локально равновесного стекания пленки конденсата; капиллярные явления и касательные напряжения на межфазной границе не рассматриваются. Изменение толщины пленки вдоль поверхности контролируется балансом массы в пленке (2.57).

$$\frac{\partial \delta}{\partial t} + \nabla_\tau \cdot (\bar{U}\delta) = \frac{\dot{m}_{\Sigma,v}}{\rho_L}, \quad \bar{U} = \frac{1}{\delta} \int_0^\delta V_i d\xi \quad (2.57)$$

Здесь  $\delta$  – толщина пленки,  $\bar{U}$  – средняя скорость в пленке,  $m_{\Sigma,v}$  – массовый поток поступающей в пленку влаги (2.55а),  $\rho_L$  – плотность жидкости. В рамках равновесного приближения профиль скорости в пленке определяется локальными условиями течения и не зависит от предыстории движения жидкости. В частности, при ламинарном режиме течения профиль скорости является параболическим, что дает следующие выражения

для скорости стекания  $\bar{U}$  и скорости на поверхности пленки  $U_\delta$  (здесь  $g_\tau$  – касательная составляющая ускорения силы тяжести):

$$\bar{U} = \frac{\rho_L \delta^2}{3\mu_L} g_\tau, \quad U_\delta = \frac{3}{2} \bar{U} = \frac{\rho_L \delta^2}{2\mu_L} g_\tau \quad (2.58)$$

Баланс тепла в тонкой пленке при ее безынерционном течении сводится к простому одномерному уравнению теплопроводности:

$$q_\Sigma = \lambda_L \frac{T_\delta - T_w}{\delta} \quad (2.59)$$

Здесь  $q_\Sigma$  – суммарный поток тепла на межфазной границе (2.56),  $T_\delta$  и  $T_w$  – температура на поверхности пленки и на стенке соответственно. При заданной температуре стенки  $T_w$  выражение (2.59) является граничным условием третьего рода для  $T_\delta$ . Если задан тепловой поток  $q_\Sigma$ , то из (2.59) определяется температура стенки. Также возможна комбинация условия (2.59) с условием внешнего или сопряженного теплообмена.

## Глава 3

### Численные методы и алгоритмы ПК SINF

В данной главе представлены численные схемы и алгоритмы, используемые в ПК SINF для дискретизации исходной гидродинамической задачи и решения полученной системы алгебраических уравнений. В разделах 3.1 – 3.3 описаны схемы и алгоритмы базовой версии кода SINF; отличительные особенности специализированных версий кода рассмотрены в разделе 3.4.

#### 3.1 Аппроксимация определяющих уравнений

В коде SINF аппроксимация определяющих уравнений выполнена по методу конечного объема (МКО), который в настоящее время используется в большинстве популярных гидродинамических пакетов, таких как ANSYS Fluent и ANSYS CFX, Star-CD и Star-CCM, FINE Numeca, CFD-ACE, OpenFoam, FlowVision, SigmaFlow, ЛОГОС и др. Основными достоинствами МКО являются его наглядность и простота (в отличие от метода конечных элементов), приспособленность к использованию любых типов расчетных сеток (в отличие от метода конечных разностей), консервативность получаемых численных схем и др.

Другой важной особенностью численного метода кода SINF является ориентация на использование многоблочных структурированных расчетных сеток. Такой подход, с одной стороны, практически не накладывает ограничений на геометрию расчетной области, а с другой – в сравнении с неструктурированными сетками – менее трудоемок в реализации, менее требователен к вычислительным ресурсам (в частности, оперативной памяти), позволяет использовать более точные аппроксимации и эффективные алгоритмы (например, метод прогонки).

Во многом именно благодаря использованию блочно-структурированных сеток и МКО код SINF, развиваемый силами небольшой университетской группы, менее чем за 10 лет превратился в современный программный комплекс, позволяющий решать разнообразные задачи гидрогазодинамики и теплообмена в областях произвольной геометрии, включающий широкий спектр моделей турбулентности, использующий высокоточные численные схемы, эффективные алгоритмы и возможности параллельных вычислений.

Ниже представлены основные положения МКО, а также особенности реализации метода в коде SINF.

### 3.1.1 Метод конечного объема

#### Дискретизация уравнения переноса

Основные положения МКО можно рассмотреть на примере «стандартного» уравнения конвективно-диффузионного переноса величины  $\phi$  (2.30), которое может быть представлено в эквивалентной интегральной форме (3.1), выражающей баланс величины  $\phi$  в произвольном объеме  $\Omega$ , ограниченном поверхностью  $S = \sum S_m$  с внешней нормалью  $\mathbf{n}$ :

$$\int_{\Omega} \frac{\partial \rho \phi}{\partial t} d\Omega + \sum_m \int_{S_m} \mathbf{n} \cdot \mathbf{f} dS = \int_{\Omega} \Phi d\Omega, \quad \mathbf{f} = \rho \mathbf{V} \phi - \Gamma \nabla \phi \quad (3.1)$$

Здесь  $\mathbf{f}$  – вектор плотности потока величины  $\phi$ , включающий конвективную и диффузионную составляющие,  $\Phi$  – плотность распределения объемных источников,  $\Gamma$  – коэффициент диффузии. Отметим, что дифференциальная форма записи (2.30), в силу более частого использования в литературе, иногда считается первичной, а более общая интегральная формулировка закона сохранения (3.1) «выводится» из дифференциальной путем интегрирования по объему.

Для получения дискретного аналога уравнения (3.1) в коде SINF, как и в большинстве современных CFD кодов<sup>1</sup>, в качестве контрольного объема  $\Omega$  выбирается ячейка расчетной сетки, значения искомых величин приписываются геометрическому центру ячейки, а для аппроксимации входящих в уравнение интегралов используются квадратурные формулы (3.2).

$$F_m \equiv \int_{S_m} \mathbf{n} \cdot \mathbf{f} dS \approx S_m \cdot \mathbf{f}_m, \quad S_m \equiv S_m \mathbf{n}_m \quad (3.2a)$$

$$\int_{\Omega} \Phi d\Omega \approx \Phi_p \Omega \quad (3.2b)$$

Здесь индекс  $p$  отвечает центру выбранной ячейки, индекс  $m$  – центру ее  $m$ -й грани.

Следует подчеркнуть, что для соприкасающихся ячеек поток  $F_m$  по их общей грани должен вычисляться идентично. В противном случае не будет обеспечена консервативность численной схемы, т.е. точное (в рамках принятого способа вычисления интегралов) соблюдение баланса  $\phi$  согласно уравнению (3.1) для всей области течения.

<sup>1</sup> Одним из немногих исключений является пакет ANSYS CFX, в котором переменные «привязаны» к узлам сетки и контрольные объемы строятся вокруг этих узлов.

Геометрические характеристики ячеек

При дискретизации уравнения (3.1) с использованием квадратурных формул (3.2) важно, чтобы геометрические характеристики ячеек сетки (объемы, площади граней и др.) удовлетворяли определенным геометрическим тождествам. В частности (напр., [200]), сумма векторов площадей граней ячейки должна равняться нулю (3.3а), а объем группы ячеек должен быть равен сумме объемов всех ячеек группы (3.3б). Последнее условие означает, что ячейки именно соприкасаются, без образования пустот или наложений между ними. Нарушение указанных требований чревато появлением в дискретном аналоге уравнения (3.1) паразитных источников (например, для однородного поля  $\phi$  может получиться ненулевое значение градиента  $\nabla\phi$ , зависящее от величины  $\phi$ ).

$$\sum_m \mathbf{S}_m = 0 \quad (3.3a)$$

$$\sum \Omega_i = \Omega_\Sigma \quad (3.3b)$$

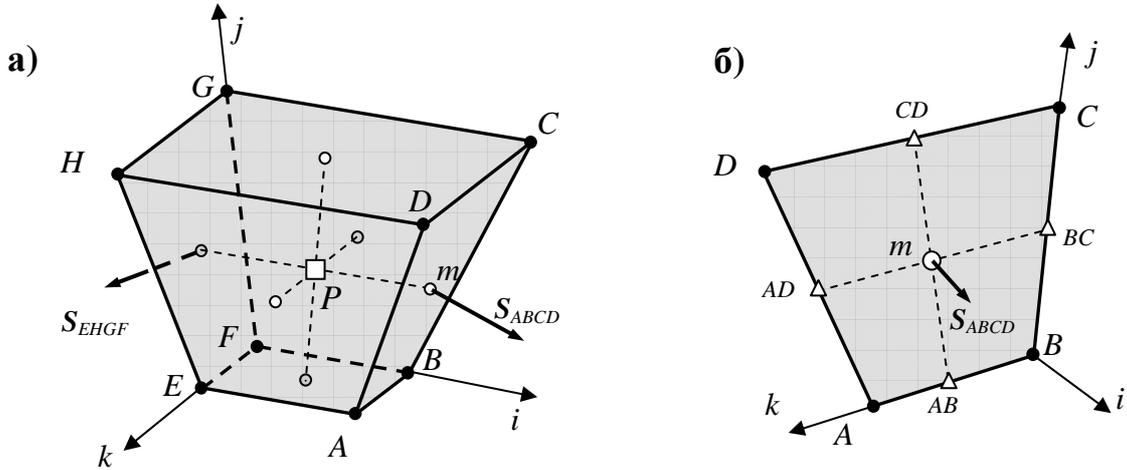
Код SINF ориентирован на использование структурированных расчетных сеток, ячейки которых имеют форму гексаэдра (топологического параллелепипеда) с необязательно плоскими гранями. Для вычисления вектора площади грани ее обычно разбивают на два треугольника (по одной из диагоналей) или на четыре (с введением вспомогательной точки в центре грани). Результат суммирования векторов площадей вспомогательных треугольников не зависит от способа разбиения и удовлетворяет условию (3.3а). Наиболее употребительны следующие экономичные формулировки (напр., [200]) (обозначения вершин показаны на рисунке 3.1):

$$\mathbf{S}_{ABCD} = \frac{1}{2}(\mathbf{r}_C - \mathbf{r}_A) \times (\mathbf{r}_D - \mathbf{r}_B) = (\mathbf{r}_{CD} - \mathbf{r}_{AB}) \times (\mathbf{r}_{AD} - \mathbf{r}_{CB}), \quad \mathbf{r}_{AB} \equiv \frac{\mathbf{r}_A + \mathbf{r}_B}{2} \quad (3.4)$$

Согласно (3.4), вектор площади грани можно вычислить как векторное произведение ее диагоналей или (формально с тем же результатом, но фактически с меньшими ошибками округления) как произведение отрезков (векторов), соединяющих центры противоположных ребер. Указанные отрезки всегда лежат в одной плоскости и пересекаются в точке, которая делит их пополам (см. рисунок 3.1б). В коде SINF данная точка, координаты которой можно вычислить и как среднее арифметическое координат вершин грани (3.5а), принимается за геометрический центр грани. Аналогично, геометрический центр ячейки, определенный как среднее арифметическое координат ее вершин (3.5б), находится в точке пересечения отрезков, соединяющих центры противоположных граней, и делит эти отрезки пополам (см. рисунок 3.1а).

$$\mathbf{r}_m = \mathbf{r}_{ABCD} = \frac{1}{4}(\mathbf{r}_A + \mathbf{r}_B + \mathbf{r}_C + \mathbf{r}_D) = \frac{1}{2}(\mathbf{r}_{AB} + \mathbf{r}_{CD}) = \frac{1}{2}(\mathbf{r}_{AD} + \mathbf{r}_{BC}) \quad (3.5a)$$

$$\mathbf{r}_P = \frac{1}{8}(\mathbf{r}_A + \mathbf{r}_B + \dots + \mathbf{r}_H) = \frac{1}{2}(\mathbf{r}_{ABCD} + \mathbf{r}_{EFGH}) = \frac{1}{2}(\mathbf{r}_{EADH} + \mathbf{r}_{FBCG}) = \dots \quad (3.5b)$$



● – узел сетки, □ – центр ячейки, ○ – центр грани, Δ – центр ребра

Рисунок 3.1 – Ячейка структурированной расчетной сетки (а) и ее грань (б)

В отличие от вектора площади грани  $S_m$ , объем ячейки с неплоскими гранями зависит от способа триангуляции ее граней. Причем для выполнения условия (3.3б) необходимо, чтобы для соприкасающихся ячеек применялся одинаковый способ триангуляции их общей грани. Данному требованию удовлетворяет, в частности, формула (3.6) [146], отвечающая разбиению ячейки на шесть тетраэдров (каждая грань ячейки разбивается на два треугольника) с диагональю  $DF$  в качестве их общего ребра (обозначения вершин показаны на рисунке 3.1).

$$\Omega = \frac{1}{3}(S_{FEHG} + S_{FGCB} + S_{FBAE}) \cdot (\mathbf{r}_F - \mathbf{r}_D) = \frac{1}{3}(S_{DABC} + S_{DCGH} + S_{DHEA}) \cdot (\mathbf{r}_D - \mathbf{r}_F) \quad (3.6)$$

Выражение (3.6) можно интерпретировать и как сумму объемов трех пирамид, основаниями которых служат грани ячейки, содержащие узел  $F$ , а вершина находится в противоположном узле  $D$  (диагональ  $DF$  является общим ребром всех пирамид). Тот же результат получится, если общую вершину трех пирамид поместить в узел  $F$  (вторая часть равенства 1.43). Однако, при выборе в качестве общего ребра пирамид другой диагонали ( $AG$ ,  $BH$  или  $CE$ ) для ячейки с неплоскими гранями может получаться иное значение объема. Для одноблочной сетки это не приводит к негативным последствиям, поскольку на практике «главная» диагональ во всех ячейках выбирается одинаково, например, из узла  $(i, j, k)$  в узел  $(i+1, j+1, k+1)$ . Однако для многоблочной сетки (при

несогласованном выборе «главных» диагоналей в разных блоках) могут иметь место пустоты или наложения ячеек на межблочном интерфейсе.

Один из способов решения данной проблемы – вычисление объема ячейки как среднего арифметического из значений (3.6) для всех четырех вариантов выбора главной диагонали ячейки [136]. Тот же результат получается при суммировании объемов шести пирамид (3.7а), имеющих произвольную общую вершину  $\mathbf{r}_0$  и эквивалентное плоское основание с вектором площади  $\mathbf{S}_m$  (3.4), проходящее через геометрический центр соответствующей грани  $\mathbf{r}_m$  (3.5а). Наиболее экономичным является вариант данного алгоритма (3.7б) [200], в котором в качестве общей вершины шести пирамид  $\mathbf{r}_0$  выбран центр одного из ребер ячейки (в данном случае – центр ребра  $EF$ , т.е. точка  $\mathbf{r}_{EF}$ ).

$$\Omega = \frac{1}{3} \sum_m \mathbf{S}_m \cdot (\mathbf{r}_m - \mathbf{r}_0) \quad (3.7a)$$

$$\Omega = \frac{1}{3} (\mathbf{S}_{CGHD} + \mathbf{S}_{GCBF}) \cdot (\mathbf{r}_{GC} - \mathbf{r}_{EF}) + \frac{1}{3} (\mathbf{S}_{DABC} + \mathbf{S}_{ADHE}) \cdot (\mathbf{r}_{AD} - \mathbf{r}_{EF}) \quad (3.7b)$$

Подчеркнем, что в выражениях для объема ячейки (3.6) и (3.7) фигурируют внешние векторы площадей ее граней. Это соответствует порядку перечисления вершин грани в ее обозначении (движение против часовой стрелки при взгляде с конца вектора:  $\mathbf{S}_{ABCD} = \mathbf{S}_{BCDA} = -\mathbf{S}_{DCBA}$ ) при условии, что индексная «система координат»  $(i,j,k)$  является правой (как на рисунке 3.1). Для левой системы координат  $(i,j,k)$  направление внешней нормали меняется на противоположное, что соответствует изменению порядка векторов в произведении (3.4). В коде SINF фактически используются векторы площадей граней  $\mathbf{S}^{(i)}$  (2.35), которые ориентированы по соответствующей индексной линии  $\xi_i$  (в сторону увеличения индекса); это однозначно определяет, является ли данный вектор внешним или внутренним по отношению к рассматриваемой примыкающей ячейке.

### Порядок аппроксимации

Заслуживает обсуждения вопрос о порядке аппроксимации уравнения (3.1) при использовании квадратурных формул (3.2). Раскладывая величину  $\Phi$  в ряд Тейлора относительно точки  $P$  (подразумевается суммирование по повторяющемуся индексу)

$$\Phi = \Phi_P + \Phi_P^{(i)} \Delta x_i + \frac{1}{2} \Phi_P^{(i,j)} \Delta x_i \Delta x_j + \dots, \quad \Phi_P^{(i)} \equiv \left. \frac{\partial \Phi}{\partial x_i} \right|_P, \quad \Phi_P^{(i,j)} \equiv \left. \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x_i \partial x_j} \right|_P \quad (3.8)$$

и вычисляя интеграл (3.2б), будем иметь:

$$\langle \Phi \rangle \equiv \frac{1}{\Omega} \int_{\Omega} \Phi d\Omega = \Phi_P + \Phi_P^{(i)} \underbrace{\langle \Delta x_i \rangle}_{\Delta x_{C,i}} + \frac{1}{2} \Phi_P^{(i,j)} \underbrace{\langle \Delta x_i \Delta x_j \rangle}_{O(l^2)} + \dots, \quad \Delta \mathbf{r} \equiv \{\Delta x_i\} = \mathbf{r} - \mathbf{r}_P \quad (3.9)$$

Здесь угловые скобки означают осреднение по объему ячейки,  $l$  – характерный размер ячейки, индексы  $C$  и  $P$  относятся к центру тяжести ячейки и к ее геометрическому центру (3.5б) соответственно.

Казалось бы, из (3.9) следует, что квадратурная формула (3.2б) обеспечивает второй порядок точности лишь при условии, что геометрический центр ячейки  $P$  совпадает с центром тяжести  $C$  (что справедливо, например, для сетки с ячейками в форме параллелепипедов), тогда как в общем случае ( $\Delta \mathbf{r}_C \neq 0$ ) порядок аппроксимации понижается до первого. В действительности это не совсем так, поскольку для «нормальных» структурированных сеток (без вырожденных ячеек в форме, например, пирамиды), которые обычно используются в расчетах, при измельчении сетки смещение центра тяжести  $\Delta \mathbf{r}_C$  уменьшается пропорционально не первой, а второй степени характерного размера ячейки  $l$ .

В качестве иллюстрации сказанного можно рассмотреть двумерную ячейку в форме трапеции с основаниями  $S_1$  и  $S_2$  (см. рисунок 3.2а). Вычисление положения центра тяжести такой ячейки не составляет труда: он находится на линии центров  $(m_1 m_2)$  на расстоянии

$$\Delta r_C = \frac{l}{6} \cdot \frac{q-1}{q+1} \approx \frac{l}{12} (q-1), \quad q = \frac{S_2}{S_1}, \quad l = |m_1 m_2| \quad (3.10)$$

от геометрического центра  $P$  (3.5б). При этом отношение площадей оснований  $q$  можно выразить через линейный размер ячейки  $l$  и расстояние  $L$  до точки пересечения боковых граней

$$q = 1 + \frac{l}{L} \quad \Rightarrow \quad \Delta r_C \approx \frac{l}{12} (q-1) = \frac{l^2}{12L} \sim l^2, \quad (3.11)$$

что и доказывает уменьшение  $\Delta r_C \sim l^2$  при измельчении сетки (здесь и далее « $\sim$ » – знак пропорциональности).

В общем случае (см. рисунок 3.2б) аналогом выражения (3.10) является оценка (3.12) для контравариантных компонент вектора  $\Delta \mathbf{r}_C$  в локальной «индексной» системе координат  $(\xi, \eta, \zeta)$ .

$$\Delta r_C^\alpha \approx \frac{l^{(\alpha)}}{12} (q^{(\alpha)} - 1), \quad q^{(\alpha)} = \frac{S_{+, \alpha}^{(\alpha)}}{S_{-, \alpha}^{(\alpha)}}, \quad S_{\pm, \alpha}^{(\alpha)} = \mathbf{S}_{\pm}^{(\alpha)} \cdot \frac{\mathbf{l}^{(\alpha)}}{l^{(\alpha)}} \quad (3.12)$$

Здесь  $l^{(\alpha)}$  – длина вектора  $l^{(\alpha)}$ , соединяющего центры противоположных граней ячейки;  $S_{\alpha}^{(\alpha)}$  – проекция вектора площади грани  $S^{(\alpha)}$  на одноименное индексное направление; индекс  $\alpha$  принимает значения  $\xi, \eta, \zeta$  (суммирование по повторяющемуся индексу не проводится).

При измельчении сетки длина векторов  $l^{(\alpha)}$ , естественно, уменьшается пропорционально характерному размеру ячейки  $l$ . Одновременно, аналогично (3.11), коэффициенты  $q^{(\alpha)}$  приближаются к единице (ячейка приближается к параллелепипеду), так что смещение центра тяжести уменьшается пропорционально  $l^2$ :

$$q^{(\alpha)} = \left(1 + \frac{l^{(\alpha)}}{L_1^{(\alpha)}}\right) \left(1 + \frac{l^{(\alpha)}}{L_2^{(\alpha)}}\right) \approx 1 + \frac{l^{(\alpha)}}{L^{(\alpha)}} \Rightarrow \Delta r_C^{\alpha} \sim l^{(\alpha)2} \Rightarrow |\Delta r_C| \sim l^2 \quad (3.13)$$

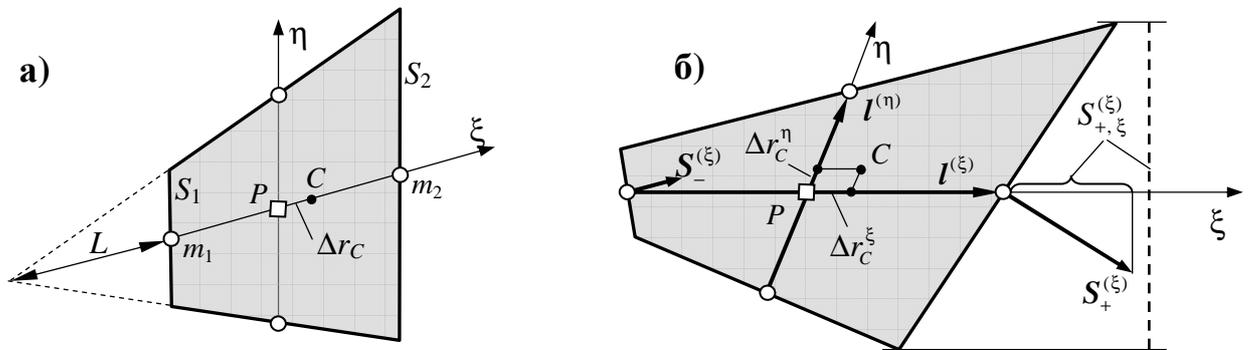


Рисунок 3.2 – К определению положения центра тяжести ячейки: двумерная трапециевидная ячейка (а) и общий случай (б)

Понятно, что все вышесказанное о порядке точности квадратурной формулы (3.2б) относится и к вычислению интеграла по площади грани с помощью (3.2а). Понятно также, что второй порядок точности формулы (3.2а) будет иметь место при условии, что значение интегрируемой величины в центре грани определено с погрешностью не более  $O(l^2)$ . Однако вычисление поверхностных интегралов со вторым порядком точности, т.е. с абсолютной погрешностью  $O(S_m \cdot l^2)$ , формально обеспечивает лишь первый порядок аппроксимации уравнения (3.1), поскольку эту погрешность нужно относить не к площади грани  $S_m = O(l^2)$ , а к объему ячейки  $\Omega = O(l^3)$ . Тем не менее, при использовании достаточно «хороших» (например, равномерных декартовых) расчетных сеток возможно сохранение второго порядка аппроксимации уравнения благодаря частичной компенсации ошибок при суммировании интегралов по граням ячейки.

Поясним сказанное на примере вычисления градиента  $\nabla\phi$  на одномерной сетке (см. рисунок 3.3). В таком случае грани «ячеек» сетки имеют единичную площадь, роль

«объема»  $\Omega$  играет шаг сетки  $l$ , а конечно-объемная аппроксимация градиента с использованием квадратурных формул (3.2) записывается следующим образом:

$$(\nabla\phi)_P \approx \frac{1}{\Omega} \sum_m S_m \phi_m \longrightarrow \left( \frac{d\phi}{dx} \right)_P \approx \frac{1}{l} (\phi_{m_2} - \phi_{m_1}) \quad (3.14)$$

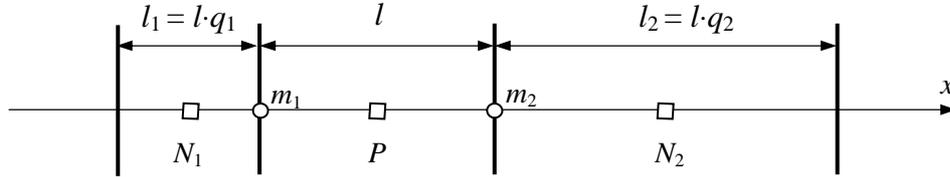


Рисунок 3.3 – К оценке порядка аппроксимации: одномерная расчетная сетка

Входящие в (3.14) значения величины  $\phi$  в центрах граней  $m_1$  и  $m_2$  можно вычислить (с погрешностью  $O(l^2)$ ), используя линейную интерполяцию (3.15а) из центров смежных ячеек, что дает итоговую аппроксимацию (3.15б).

$$[\phi_{mN}] = \frac{l\phi_N + l_N\phi_P}{l + l_N} = \frac{\phi_N + q_N\phi_P}{1 + q_N}, \quad q_N \equiv \frac{l_N}{l} \quad (N = 1, 2) \quad (3.15a)$$

$$\left[ \frac{d\phi}{dx} \right]_P \equiv \frac{[\phi_{m_2}] - [\phi_{m_1}]}{l} = \frac{1}{l} \left( \frac{\phi_2}{1 + q_2} - \frac{\phi_1}{1 + q_1} + \frac{\phi_P(q_2 - q_1)}{(1 + q_1)(1 + q_2)} \right) \quad (3.15b)$$

Здесь  $\phi_1$  и  $\phi_2$  – значения  $\phi$  в центрах ячеек  $N_1$  и  $N_2$  соответственно (см. рисунок 3.3), квадратные скобки означают дискретный аналог вычисляемой величины.

Для оценки порядка точности полученной аппроксимации разложим  $\phi(x)$  в ряд Тейлора относительно точки  $P$

$$\phi = \phi_P + \phi'_P \Delta x + \phi''_P \frac{\Delta x^2}{2} + \phi'''_P \frac{\Delta x^3}{6} + \dots, \quad \Delta x \equiv x - x_P \quad (3.16)$$

и подставим вычисленные с его помощью значения  $\phi_1$  и  $\phi_2$  в (3.15б):

$$\left[ \frac{d\phi}{dx} \right]_P = \phi'_P + \frac{\phi''_P}{8} l \cdot (q_2 - q_1) + \frac{\phi'''_P}{12} \underbrace{(\Delta x_2^2 + \Delta x_1^2)}_{\approx 2l^2} + \dots \quad (3.17)$$

Разложение (3.17) показывает, что в общем случае аппроксимация (3.15) формально имеет первый порядок точности, и лишь при  $q_1 = q_2$  (в частности,  $q_1 = q_2 = 1$ , что соответствует равномерной сетке) обеспечивается второй порядок аппроксимации благодаря компенсации погрешностей вычисления значений  $\phi_{m_1}$  и  $\phi_{m_2}$  (3.15а). Однако, если шаги сетки изменяются от ячейки к ячейке плавно, без резких скачков (например, по закону геометрической прогрессии), то при измельчении сетки коэффициенты

неравномерности  $q_1$  и  $q_2$  будут приближаться к единице, а их разность будет убывать пропорционально шагу сетки  $l$ , что согласно (3.17) обеспечит второй порядок точности аппроксимации (3.15б) (убывание погрешности пропорционально  $l^2$ ):

$$(q_N - 1) \sim l \quad \Rightarrow \quad (q_2 - q_1) \sim l \quad \Rightarrow \quad \left[ \frac{d\phi}{dx} \right]_P = \phi'_P + O(l^2) \quad (3.18)$$

Следует подчеркнуть, что такая компенсация погрешностей возможна лишь при условии, что для вычисления  $[\phi_{m1}]$  и  $[\phi_{m2}]$  использованы аппроксимации с одинаковой (в формульном выражении) погрешностью. Если же, к примеру, на грани  $m_2$  использовать линейную интерполяцию (3.15а) (погрешность  $[\phi_m] - \phi_m = \phi'' l^2 q / 8 + O(l^3)$ ), а на грани  $m_1$  – более точную схему (3.19а) (квадратичная интерполяция по узлам  $P, N_1, N_2$ ; погрешность  $O(l^3)$ ), то компенсация погрешностей не произойдет, и результирующая схема вычисления градиента будет иметь лишь первый порядок точности (3.19б).

$$[\phi_{m1}] = \phi_P + \frac{(\phi_1 - \phi_P)(2 + q_2)}{(1 + q_1)(2 + q_1 + q_2)} - \frac{(\phi_2 - \phi_P)q_1}{(1 + q_2)(2 + q_1 + q_2)}, \quad [\phi_{m2}] = \frac{\phi_2 + q_2 \phi_P}{1 + q_2} \quad (3.19а)$$

$$\left[ \frac{d\phi}{dx} \right]_P = \phi'_P + \frac{\phi''_P}{8} l \cdot q_2 + O(l^2) \quad (3.19б)$$

Отметим также, что для компенсации погрешностей вычисления поверхностных интегралов, помимо плавного изменения шагов сетки, в общем случае требуется, чтобы достаточно плавными, без явных изломов, были сеточные линии (что, в конечном счете, обеспечивает плавное изменение от ячейки к ячейке площади и ориентации граней). Указанные требования обычно ассоциируются с понятием «хорошей» расчетной сетки (см., например, [161]).

Подводя итог можно сказать, что, если потоки  $f_m$  на гранях ячейки вычислены с погрешностью  $O(l^2)$ , то на «хорошей» сетке квадратурные формулы (3.2) позволяют обеспечить второй порядок аппроксимации уравнения (3.1) (убывание абсолютной погрешности пропорционально  $\Omega l^2$ ), тогда как на «плохой» сетке (в области излома сеточных линий и/или скачкообразного изменения размеров ячеек) порядок точности снижается до первого<sup>1</sup>. Понижение точности вычисления  $f_m$  немедленно сказывается на порядке точности численной схемы в целом. Для обеспечения же порядка аппроксимации выше второго потребовалось бы не только повысить точность вычисления  $f$  на гранях ячейки, но и использовать вместо (3.2) более точные квадратурные формулы, учитывающие изменение  $f$  вдоль поверхности (то же относится и к вычислению интегралов по объему). Это, конечно, возможно (см., например, [104]),

<sup>1</sup> Иногда в такой ситуации говорят, что схема имеет условно второй порядок точности (строго второй порядок обеспечивается на равномерной декартовой сетке).

но неоправданно сложно и нетехнологично, в связи с чем схемы повышенного порядка точности в рамках МКО почти не используются (что, впрочем, и не требуется для большинства практических приложений).

Результаты некоторых тестов, доказывающих фактическое обеспечение второго порядка точности численного решения кода SINF, представлены в разд. 4.2 (см. комментарии к рисункам 4.4 и 4.7 и таблице 4).

### 3.1.2 Дискретизация уравнения конвективно-диффузионного переноса

#### Схемы вычисления конвективного потока

Рассмотрим особенности вычисления конвективной части потока  $F_m$  в выражении (3.2a):

$$F_m^{conv} = S_m \cdot (\rho V \phi)_m = Q_m \phi_m, \quad Q_m = S_m \cdot (\rho V)_m \quad (3.20)$$

Как правило (если речь не идет о расчете сверхзвуковых течений), массовый расход жидкости через грань ячейки,  $Q_m$ , вычисляется при аппроксимации уравнения неразрывности (2.1a) и затем используется для всех остальных уравнений. Таким образом, вопрос расчета конвективной составляющей потока  $F_m^{conv}$  сводится к определению значения переносимой величины  $\phi_m$  в центре грани.

Достаточную точность вычисления  $\phi_m$  обеспечивает линейная интерполяция. В коде SINF используется ее простейший одномерный вариант (3.21) – интерполяция вдоль сеточной линии  $\xi$  по значениям  $\phi_U$  и  $\phi_D$  в центрах прилегающих к грани ячеек с учетом расстояний  $mU$  и  $mD$  (см. рисунок 3.4a). Здесь и далее, полученные таким образом значения любых величин на грани ячейки, обозначаются чертой сверху.

$$\bar{\phi}_m = \phi_U + \chi(\phi_D - \phi_U), \quad \chi = \frac{|mU|}{|mU| + |mD|} \quad (3.21)$$

Известно, однако, что основанная на интерполяции (3.21) численная схема в определенном смысле эквивалентна<sup>1</sup> конечно-разностной схеме с симметричной (центрально-разностной) аппроксимацией конвективных производных (отсюда часто используемое обозначение такой схемы: CDS – Central Differencing Scheme), которая в условиях малой величины физической диффузии неустойчива (напр. [100]).

Для подавления такого рода неустойчивости в разностную схему искусственно вводится дополнительная (численная) диссипация. Наиболее распространенный способ

<sup>1</sup> Для равномерной декартовой сетки схемы совпадают.

– это аппроксимация конвективных производных односторонними разностями «против потока», что в рамках МКО можно трактовать как приоритетный учет информации о значениях величины  $\phi$  в ячейках, расположенных выше по потоку от рассматриваемой грани.

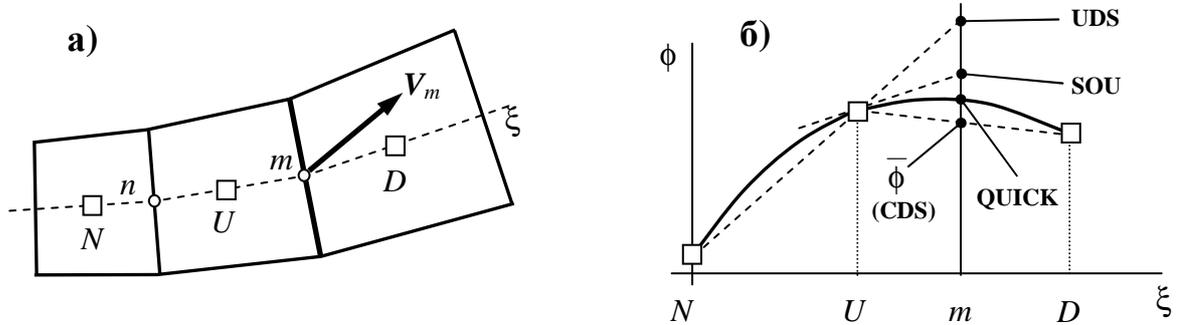


Рисунок 3.4 – К расчету конвективного потока через грань  $m$ :

а) примыкающие ячейки и б) варианты интерполяции

Применительно к ситуации, показанной на рисунке 3.4а (жидкость течет от  $U$  к  $D$ ), простой снос на грань значения  $\phi$  из ячейки  $U$  дает схему FOU (First Order Upwind), которая эквивалентна противопоточной аппроксимации конвективных производных с первым порядком точности:

$$\phi_m^{FOU} = \phi_U \quad (3.22)$$

Линейная экстраполяция вдоль сеточной линии из ячеек  $U$  и  $N$  эквивалентна противопоточной аппроксимации конвективных производных со вторым порядком точности (UDS – Upwind Differencing Scheme):

$$\phi_m^{UDS} = \phi_U + \chi(\phi_U - \phi_N), \quad \chi = \frac{|mU|}{|nU| + |nN|}, \quad |nU| = |mU| = \frac{|mn|}{2} \quad (3.23)$$

В современных CFD кодах, работающих с неструктурированными сетками, широко применяется другой вариант противопоточной схемы второго порядка точности (SOU – Second Order Upwind) – экстраполяция значения  $\phi$  из ячейки  $U$  с использованием градиента  $(\nabla\phi)_U$ :

$$\phi_m^{SOU} = \phi_U + (\nabla\phi)_U \cdot (\mathbf{r}_m - \mathbf{r}_U) \quad (3.24)$$

Для структурированной сетки данную схему можно трактовать как экстраполяцию вдоль сеточной линии с использованием производной  $(\partial\phi/\partial\xi)_U$  или как комбинацию схем UDS и CDS:  $\phi^{SOU} \approx (\phi^{UDS} + \bar{\phi})/2$  (для равномерной сетки имеет место строгое равенство). Отметим, что, хотя и схема SOU и схема UDS имеют второй

порядок точности, погрешность аппроксимации для схемы SOU в три раза меньше (см. рисунок 3.46).

Отдельного упоминания заслуживает схема QUICK [155], которая в одномерном приближении отвечает квадратичной интерполяции по значениям  $\phi_D$ ,  $\phi_U$  и  $\phi_N$ . Оставаясь схемой второго порядка точности ввиду погрешности квадратурной формулы (3.2а), данная схема является наиболее точной (наименее диссипативной) из всех рассмотренных схем. Одномерную схему QUICK можно интерпретировать и как комбинацию схемы CDS со схемой UDS:  $\phi^{QUICK} \approx (3\phi^{UDS} + \bar{\phi})/4$ . В коде SINF реализована схема (3.25) с регулируемой степенью противоточности, которая включает в себя все три схемы.

$$\begin{aligned} \phi_m &= \bar{\phi}_m + \sigma \cdot (\phi_m^{UDS} - \bar{\phi}_m), & \sigma^{QUICK} &= 0.25 \\ & & \sigma^{SOU} &= 0.5 \\ & & \sigma^{UDS} &= 1.0 \end{aligned} \quad (3.25)$$

Следует отметить, что при использовании противоточных схем второго порядка точности (особенно в сочетании с недостаточно мелкой расчетной сеткой) возможно развитие нефизических осцилляций решения, которые могут приводить к неприемлемым результатам (например, к появлению отрицательных значений кинетической энергии турбулентности). Одним из способов борьбы с нежелательными осцилляциями является введение специальных ограничителей, которые в «опасных» местах понижают порядок точности схемы, делая ее монотонной. В коде SINF для этого используется ограничитель *minmod* в сочетании со схемой UDS:

$$\phi_m^{minmod} = \phi_U + \min mod(\phi_m^{UDS} - \phi_U; \phi_D - \phi_U) \quad (3.26a)$$

$$\min mod(u, v) = \min(|u|, |v|) \cdot \begin{cases} u/|u|, & uv > 0 \\ 0, & uv \leq 0 \end{cases} \quad (3.26b)$$

Известно также (напр. [57]), что при использовании вихререзающих подходов к моделированию турбулентности (см. разд. 2.1.2) противоточные схемы второго порядка точности оказываются слишком диссипативными. В связи с этим в коде SINF реализована оригинальная низкодиссипативная схема (3.27), в которой значение  $\hat{\phi}_m$  вычисляется с помощью кубической интерполяции вдоль сеточной линии (при этом используются по две ячейки с каждой стороны от грани  $m$ ), а «вес» противоточной добавки  $\sigma$  выбирается возможно малым (обычно  $\sigma = 0.01 \div 0.05$ ).

$$\phi_m = \hat{\phi}_m + \sigma \cdot (\phi_m^{UDS} - \hat{\phi}_m) \quad (3.27)$$

Схемы вычисления диффузионного потока

Аппроксимация диффузионной составляющей потока  $F_m$  в выражении (3.2а), в отличие от конвективной, не требует специальных мер для обеспечения устойчивости схемы. В частности, для коэффициента диффузии в коде SINF используется линейная интерполяция (3.21):

$$F_m^{diff} = S_m \cdot (-\Gamma \nabla \phi)_m = -S_m \bar{\Gamma}_m (\mathbf{n} \cdot \nabla \phi)_m = -S_m \bar{\Gamma}_m \left( \frac{\partial \phi}{\partial n} \right)_m \quad (3.28)$$

Производную  $\mathbf{n} \cdot \nabla \phi \equiv \partial \phi / \partial n$  в центре грани в коде SINF можно вычислить двумя способами. В первом используется гибридный подход (3.29) [127], сочетающий конечно-разностную аппроксимацию производной вдоль сеточной линии  $\xi$  с градиентной поправкой на скошенность ячеек, см. рисунок 3.5а.

$$\left( \frac{\partial \phi}{\partial n} \right)_m = \left( \frac{\partial \phi}{\partial \xi} + (\mathbf{n} - \mathbf{e}_\xi) \cdot \nabla \phi \right)_m \approx \frac{\phi_M - \phi_P}{|\mathbf{r}_M - \mathbf{r}_P|} + \left( \mathbf{n} - \frac{\mathbf{r}_M - \mathbf{r}_P}{|\mathbf{r}_M - \mathbf{r}_P|} \right) \cdot (\nabla \phi)_m \quad (3.29)$$

Для определения  $\nabla \phi$  в центрах ячеек используется МКО аппроксимация интегрального представления градиента (3.30); значение на грани вычисляется с помощью линейной интерполяции (3.21).

$$\int_{\Omega} \nabla \phi d\Omega = \sum_m \int_{S_m} \mathbf{n} \phi dS \Rightarrow (\nabla \phi)_P \approx \frac{1}{\Omega} \sum_m S_m \bar{\phi}_m \quad (3.30)$$

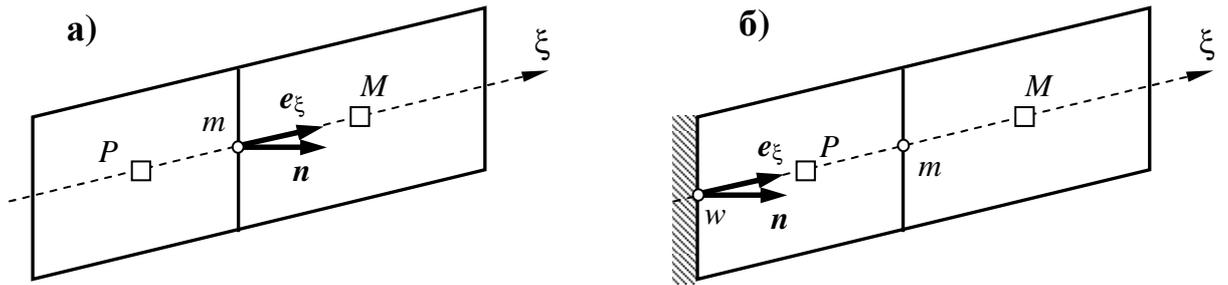


Рисунок 3.5 – К расчету диффузионного потока через грань ячейки внутри блока (а) и на его границе (б)

При вычислении диффузионного потока импульса в уравнении движения (2.1б) гибридная схема (3.29) используется для аппроксимации «главного» слагаемого  $(\mathbf{n} \cdot \nabla \mathbf{V})_m$ ; остальные составляющие тензора напряжений (2.5) интерполируются на грань в соответствии с (3.21):

$$(\mathbf{n} \cdot \nabla V)_m = \frac{V_M - V_P}{|\mathbf{r}_M - \mathbf{r}_P|} + (\mathbf{n} - \mathbf{e}_\xi) \cdot \overline{(\nabla V)}_m, \quad (\nabla V)_m^T = \overline{(\nabla V)}_m^T \quad (3.31)$$

Аналогичный подход используется и для определения диффузионного потока на границе блока (например, теплового потока на стенке) с той лишь разницей, что для вычисления  $(\partial\phi/\partial\xi)_w$  и  $(\nabla\phi)_w$  применяются «односторонние» формулы (см. рисунок 3.5б):

$$\left(\frac{\partial\phi}{\partial n}\right)_w = \left(\frac{\partial\phi}{\partial\xi} + (\mathbf{n} - \mathbf{e}_\xi) \cdot \nabla\phi\right)_w, \quad \left(\frac{\partial\phi}{\partial\xi}\right)_w = \frac{(\phi_P - \phi_w)(1 + \chi)^2 - (\phi_M - \phi_w)\chi^2}{|mP|(1 + \chi)} \quad (3.32a)$$

$$\nabla\phi_w = \nabla\phi_P + \chi(\nabla\phi_P - \nabla\phi_M), \quad \chi = \frac{|mP|}{|mP| + |mM|} \quad (3.32б)$$

Альтернативный способ вычисления производной  $\mathbf{n} \cdot \nabla\phi \equiv \partial\phi/\partial n$  в центре грани, также реализованный в коде SINP, не требует предварительного расчета градиентов в центрах ячеек. В данном подходе, как это принято в методе конечных разностей, выполняется переход в локальную «индексную» систему координат (см. разд. 2.1.3) и градиент (точнее, его нормальная составляющая) вычисляется непосредственно на грани с помощью центрально-разностной аппроксимации формулы (2.37). А именно, если принять, что на рисунке 3.5а ячейка  $P$  имеет индексы  $(i, j, k)$ , ячейка  $M - (i+1, j, k)$ , а грань  $m - (i+1/2, j, k)$ , то производная  $\partial\phi/\partial n$  в центре грани вычисляется в соответствии с аппроксимацией (3.33). Для других граней используются аналогичные выражения со сдвигом и/или перестановкой индексов.

$$\left(\frac{\partial\phi}{\partial n}\right)_m = \mathbf{n} \cdot (\nabla\phi)_m = \mathbf{n} \cdot \left( S^{(1)} \frac{\partial\phi}{\partial\xi_1} + S^{(2)} \frac{\partial\phi}{\partial\xi_2} + S^{(3)} \frac{\partial\phi}{\partial\xi_3} \right)_m \frac{1}{\Omega_m} \quad (3.33a)$$

$$\left(\frac{\partial\phi}{\partial\xi_1}\right)_m = \phi_{i+1, j, k} - \phi_{i, j, k}, \quad S_m^{(1)} = S_{i+\frac{1}{2}, j, k}^{(1)}, \quad \Omega_m = \frac{\Omega_{i, j, k} + \Omega_{i+1, j, k}}{2} \quad (3.33б)$$

$$\left(\frac{\partial\phi}{\partial\xi_2}\right)_m = \frac{\phi_{i, j+1, k} - \phi_{i, j-1, k} + \phi_{i+1, j+1, k} - \phi_{i+1, j-1, k}}{4}, \quad S_m^{(2)} = \frac{S_{i, j+\frac{1}{2}, k}^{(2)} + S_{i+1, j+\frac{1}{2}, k}^{(2)} + S_{i, j-\frac{1}{2}, k}^{(2)} + S_{i+1, j-\frac{1}{2}, k}^{(2)}}{4} \quad (3.33в)$$

$$\left(\frac{\partial\phi}{\partial\xi_3}\right)_m = \frac{\phi_{i, j, k+1} - \phi_{i, j, k-1} + \phi_{i+1, j, k+1} - \phi_{i+1, j, k-1}}{4}, \quad S_m^{(3)} = \frac{S_{i, j, k+\frac{1}{2}}^{(3)} + S_{i+1, j, k+\frac{1}{2}}^{(3)} + S_{i, j, k-\frac{1}{2}}^{(3)} + S_{i+1, j, k-\frac{1}{2}}^{(3)}}{4} \quad (3.33г)$$

Отметим, что для прямоугольных и для равномерных ортогональных сеток аппроксимации (3.29) и (3.33) дают идентичный результат. Имеющийся опыт расчетов (с использованием сеток «нормального» качества – не слишком скошенных и не слишком неравномерных) не выявил явного преимущества одной из этих двух формулировок или

ощутимого различия получаемых результатов. В настоящее время, когда отпала необходимость в жесткой экономии оперативной памяти компьютера, в коде SINF используется, главным образом, гибридный подход (3.29).

### Вычисление потока массы

Как уже говорилось, поток массы через грань ячейки  $Q_m = S_m \cdot (\rho V)_m$  вычисляется при аппроксимации уравнения неразрывности (2.1а) и затем используется для вычисления конвективных потоков (3.20) во всех остальных уравнениях. При этом, однако, нельзя просто вычислить плотность и скорость в центре грани с помощью одной из рассмотренных ранее интерполяционных схем, т.к. это чревато развитием «четно-нечетных» пространственных осцилляций поля давления (напр. [95]). Для подавления этих осцилляций в настоящее время широко используется корректирующая процедура [173], которая вводит в выражение для расхода  $Q_m$  стабилизирующую поправку, зависящую от давления. В коде SINF данный подход реализован следующим образом (обозначение узлов соответствует рисунку 3.5а):

$$Q_m = S_m \cdot (\rho V)_m = S_m \cdot \overline{(\rho V)}_m - S_m \overline{(\alpha_{RC})}_m \left[ \left( \frac{\partial p}{\partial \xi} \right)_m - \overline{\left( \frac{\partial p}{\partial \xi} \right)}_m \right] \quad (3.34а)$$

$$\alpha_{RC} = C_{RC} \frac{\rho \Omega}{A_p^V}, \quad A_p^V \approx \sum_m \left[ \frac{1}{2} |S_m \cdot \overline{(\rho V)}_m| + \frac{S_m (\bar{\mu} + \bar{\mu}_t)_m}{|\mathbf{r}_M - \mathbf{r}_P|} \right] \quad (3.34б)$$

$$\left( \frac{\partial p}{\partial \xi} \right)_m = \frac{p_M - p_P}{|\mathbf{r}_M - \mathbf{r}_P|}, \quad \overline{\left( \frac{\partial p}{\partial \xi} \right)}_m = \mathbf{e}_\xi \cdot \overline{(\nabla p)}_m \quad (3.34в)$$

Здесь  $A_p^V$  – коэффициент при «центральном» значении  $V_P$  в аппроксимации уравнения движения (2.1б); приближенное выражение (3.34б) соответствует аппроксимации конвективных и диффузионных слагаемых с помощью схем (3.22) и (3.31). Необязательный множитель  $C_{RC}$  позволяет регулировать «вес» вводимой поправки (обычно для эффективного подавления осцилляций достаточно  $C_{RC} = 0.1 \div 0.5$ ). Черта сверху, как и ранее, обозначает линейную интерполяцию (3.21).

Как нетрудно видеть, вводимая поправка реагирует на отклонение производной на грани  $(\partial p / \partial \xi)_m$  от ее «среднего» значения, полученного интерполяцией из центров примыкающих ячеек. Сохраняя принятые при обсуждении формул (3.33) обозначения узлов (т.е. приписывая грани  $m$  индекс  $i+1/2$ ), производные (3.34в) можно записать в приближенной (без учета неравномерности сетки) «индексной» форме (3.35), которая показывает, что для неосциллирующего решения поправка пропорциональна третьей производной  $\partial^3 p / \partial \xi^3$  и имеет второй порядок малости.

$$\left(\frac{\partial p}{\partial \xi}\right)_m = \frac{p_{i+1} - p_i}{\Delta \xi}, \quad \overline{\left(\frac{\partial p}{\partial \xi}\right)}_m \approx \frac{1}{2} \left[ \frac{p_{i+2} - p_i}{2\Delta \xi} + \frac{p_{i+1} - p_{i-1}}{2\Delta \xi} \right] \quad (3.35a)$$

$$\left(\frac{\partial p}{\partial \xi}\right)_m - \overline{\left(\frac{\partial p}{\partial \xi}\right)}_m \approx \frac{p_{i-1} - 3p_i + 3p_{i+1} - p_{i+2}}{4\Delta \xi} \approx -\frac{\Delta \xi^2}{4} \left(\frac{\partial^3 p}{\partial \xi^3}\right)_m \quad (3.35b)$$

### Аппроксимация по времени

При решении нестационарной задачи возникает необходимость вычисления производной по времени в уравнении (3.1), конечно-объемная аппроксимация которого может быть представлена в следующей компактной форме:

$$\frac{\partial \Phi}{\partial t} + \Lambda = 0, \quad \Lambda = \frac{1}{\Omega} \sum_m F_m - \Phi, \quad \Phi \equiv \rho \phi \quad (3.36)$$

Существует множество схем аппроксимации данного уравнения (напр., [100, 127]), отличающихся способом продвижения по времени (явные и неявные схемы), порядком точности, устойчивостью (ограничением на шаг по времени), числом используемых слоев по времени, числом промежуточных шагов и т.п. Учитывая сложность вычисления оператора  $\Lambda$ , в коде SINF реализованы схемы, которые требуют вычисления  $\Lambda$  только на одном временном слое – явная (3.37a) и неявная (3.38) схемы Эйлера (первый порядок точности) и трехслойная неявная схема второго порядка точности (3.39) (индекс  $N$  относится к номеру текущего временного слоя, на котором решение известно).

$$\frac{\Phi^{N+1} - \Phi^N}{\Delta t} + \Lambda^N = 0 \quad (3.37a)$$

$$\left| 1 - \Delta t \cdot \frac{\partial \Lambda}{\partial \Phi} \right| < 1 \quad \Rightarrow \quad \Delta t < \left( \frac{2\Gamma}{\Delta l^2} + \frac{|V|}{\Delta l} \right)^{-1} \quad (3.37b)$$

$$\frac{\Phi^{N+1} - \Phi^N}{\Delta t} + \Lambda^{N+1} = 0 \quad (3.38)$$

$$\frac{3\Phi^{N+1} - 4\Phi^N + \Phi^{N-1}}{2\Delta t} + \Lambda^{N+1} = 0 \quad (3.39)$$

Схема (3.37a), дающая явное выражение для  $\Phi^{N+1}$ , является устойчивой лишь при достаточно малом шаге по времени  $\Delta t$  (3.37b) ( $\Delta l$  – шаг сетки), что может быть весьма обременительным ограничением, особенно при использовании мелких расчетных сеток (например, в пограничном слое). Неявные схемы устойчивы при любом шаге по времени (с точностью до нелинейности пространственного оператора  $\Lambda$ ), но требуют итераций на каждом шаге по времени из-за привязки оператора  $\Lambda$  к новому слою по

времени  $(N+1)$ . Тем не менее, предпочтение обычно отдается неявным схемам, особенно при расчете медленно развивающихся процессов, причем в большинстве случаев используется более точная трехслойная схема (3.39).

### 3.1.3 Дискретизация уравнений высокоскоростного течения газа

При численном моделировании сверхзвуковых течений со скачками уплотнения особую важность имеет способ аппроксимации конвективных слагаемых в уравнениях Навье-Стокса. Основными требованиями, предъявляемыми к «сверхзвуковой» численной схеме, является разрешение ударных волн с возможно меньшим числом внутренних точек, отсутствие осцилляций решения в окрестности скачков и, конечно, выполнение основных балансовых соотношений (в частности, сохранение полной энтальпии) для правильного определения параметров потока за скачком.

Указанным требованиям удовлетворяют, в частности, получивший широкое распространение метод  $Ro_u$  [174], основанный на решении линеаризованной задачи Римана о распаде разрыва. Однако в трехмерном случае матричные операции, необходимые для вычисления конвективных потоков в схеме  $Ro_u$ , становятся весьма затратными. В связи с этим в коде SINF реализована более экономичная схема CUSP (Convective Upwind and Split Pressure) [140], которая не уступает схеме  $Ro_u$  по качеству получаемых решений (в частности, обеспечивает разрешение скачка с единственной внутренней точкой), но не требует матричных операций при вычислении конвективного потока. В работах [188, 189] выполнено довольно подробное тестирование схемы CUSP и ее сравнение с другими схемами. Обобщение схемы CUSP на трехмерный случай предложено<sup>1</sup> М. А. Николаевым [86, 87], которому принадлежит основная заслуга во внедрении данной схемы в код SINF.

Не вдаваясь в обсуждение принципов построения и вариантов схемы CUSP, которые подробно описаны в упомянутых выше работах, рассмотрим реализацию схемы в коде SINF. Для этого запишем в компактной матричной форме (3.40) конечно-объемную аппроксимацию (3.1), (3.2) уравнений баланса массы (2.1а), импульса (2.1б) и полной энтальпии (2.13):

$$\frac{\partial W}{\partial t} + \frac{1}{\Omega} \sum_m (f^C + f^D)_m \cdot S_m = \Phi \quad (3.40a)$$

<sup>1</sup> В работах Джемсона (в частности, [140]) основное внимание уделяется обоснованию схемы CUSP и дается лишь ее одномерная формулировка, хотя тестовые расчеты выполнены, в том числе, и для трехмерного течения (трансзвуковое обтекание крыла конечного размаха).

$$W = \begin{pmatrix} \rho \\ \rho \mathbf{V} \\ \rho H \end{pmatrix}, \quad f^C = \begin{pmatrix} \rho \mathbf{V} \\ \rho \mathbf{V} \mathbf{V} + p \mathbf{I} \\ \rho \mathbf{V} H \end{pmatrix} = W \mathbf{V} + f^P, \quad f^P = \begin{pmatrix} 0 \\ p \mathbf{I} \\ 0 \end{pmatrix} \quad (3.40б)$$

Здесь  $W$  – вектор консервативных переменных,  $f^C$  – конвективная часть плотности потока, в которой учтен вклад давления  $f^P$ . Диффузионная часть потока  $f^D$ , как и источник  $\Phi$ , вычисляются обычным образом (см. разд. 3.1.2).

Конвективный поток через грань ячейки в схеме CUSP представляется в виде суммы «центральной» части (отвечающей центрально-разностной аппроксимации) и искусственной диссипации:

$$F_m^{conv} \equiv f_m^C \cdot S_m = \overline{f_m^C} \cdot S_m - D_m \quad (3.41)$$

Здесь черта сверху, как и ранее, обозначает величину, вычисляемую по значениям из центров прилегающих к грани ячеек с помощью линейной интерполяции (3.21). Подчеркнем, что на грань интерполируются именно потоки  $f^C$ , а не отдельные переменные  $(\rho, \mathbf{V}, H)$  с последующим вычислением на их основе потока через грань.

Для обеспечения устойчивости схемы в выражение конвективного потока (3.41) введена матрица искусственной диссипации  $D_m$  (положение ячеек  $P$  и  $M$  относительно вектора  $S_m = S_m \mathbf{n}$  соответствует рисунку 3.5а):

$$\begin{aligned} D_m &= \frac{1}{2} (\alpha \tilde{c} S_m \Delta W + \beta \Delta f^C \cdot S_m) = \\ &= \frac{1}{2} S_m (\alpha \tilde{c} + \beta \hat{U}_m) \Delta W + \frac{1}{2} \beta (\hat{W}_m \Delta \mathbf{V} + \Delta f^P) \cdot S_m \end{aligned} \quad (3.42а)$$

$$\Delta X \equiv \Delta_P^M X = X_M - X_P, \quad \hat{X}_m \equiv \frac{X_P + X_M}{2}, \quad U \equiv \frac{\mathbf{V} \cdot S_m}{S_m} \quad (3.42б)$$

Коэффициенты  $\alpha \tilde{c}$  и  $\beta$  определяются следующими формулами:

$$\alpha \tilde{c} = \begin{cases} |\tilde{U}|, & \beta = 0 \\ -(1 + \beta) \tilde{\lambda}^-, & 0 < \beta < 1 \\ (1 - \beta) \tilde{\lambda}^+, & -1 < \beta < 0 \\ 0, & |\beta| = 1 \end{cases} \quad \begin{cases} |\tilde{U}| < \tilde{c} \\ |\tilde{U}| \geq \tilde{c} \end{cases} \quad (3.43а)$$

$$\beta = \begin{cases} + \max \left( 0, \min \left( \frac{\tilde{U} + \tilde{\lambda}^-}{\tilde{U} - \tilde{\lambda}^-}, 1 \right) \right), & \tilde{U} > 0 \\ - \max \left( 0, \min \left( \frac{\tilde{U} + \tilde{\lambda}^+}{\tilde{U} - \tilde{\lambda}^+}, 1 \right) \right), & \tilde{U} < 0 \end{cases} \quad (3.43б)$$

$$\tilde{\lambda}^{\pm} = \frac{\gamma+1}{2\gamma} \tilde{U} \pm \sqrt{\left(\frac{\gamma+1}{2\gamma} \tilde{U}\right)^2 + \frac{\tilde{c}^2 - \tilde{U}^2}{\gamma}}, \quad \tilde{c} = \sqrt{(\gamma-1) \left( \tilde{H} - \frac{\tilde{V}^2}{2} \right)} \quad (3.43\text{в})$$

Здесь  $\tilde{c}$  и  $\tilde{U}$  – скорость звука и нормальная составляющая скорости потока на грани, рассчитанные на основе переменных  $\text{Роу}$  (3.44),  $\tilde{\lambda}^{\pm}$  – собственные числа матрицы  $\text{Роу } \partial f^c / \partial \tilde{W}$ ,  $\gamma$  – показатель адиабаты.

$$\tilde{\rho} = \sqrt{\rho_P \rho_M}, \quad \tilde{V} = \frac{V_P \sqrt{\rho_P} + V_M \sqrt{\rho_M}}{\sqrt{\rho_P} + \sqrt{\rho_M}}, \quad \tilde{H} = \frac{H_P \sqrt{\rho_P} + H_M \sqrt{\rho_M}}{\sqrt{\rho_P} + \sqrt{\rho_M}} \quad (3.44)$$

Отметим, что в соответствии с определением (3.43),  $\alpha$  является четной, а  $\beta$  – нечетной функцией числа Маха  $\tilde{M} = \tilde{U}/\tilde{c}$ . При  $\tilde{M} > 1$ , когда  $\alpha = 0$  и  $\beta = \text{sign}(M)$ , схема является полностью противопоточной. Выбор  $\alpha = |\tilde{M}|$  при  $\beta = 0$  ( $|\tilde{M}| < (2\gamma+2)^{-1/2}$ ) обеспечивает непрерывность функции  $\alpha(\tilde{M})$  и низкий уровень диссипации в дозвуковой части потока, что является привлекательным свойством при расчете вязких течений. Если же диссипация оказывается недостаточной (что может проявляться, например, в развитии осцилляций решения в окрестности точки торможения), можно использовать дополнительный ограничитель [189]  $\alpha = 0.5(\varepsilon + \tilde{M}^2/\varepsilon)$  при  $|\tilde{M}| < \varepsilon$ .

Описанный способ вычисления численной диссипации отвечает аппроксимации первого порядка точности. Для повышения точности применяется метод типа MUSCL (Monotone Upstream Scheme for Conservation Laws) [199]. В данном подходе диссипативный поток  $D_m$  вычисляется по формулам (3.42) – (3.44), в которых вместо значений переменных в центрах примыкающих к грани  $m$  ячеек  $P$  и  $M$  используются значения «слева» и «справа» от грани. Эти вспомогательные значения рассчитываются на основе «левого» ( $W_L$ ) и «правого» ( $W_R$ ) векторов состояния, которые определяются приближенной экстраполяцией из близлежащих ячеек с введением ограничителя, обеспечивающего переход к схеме первого порядка в окрестности экстремумов консервативных переменных (что предотвращает появление осцилляций в окрестности скачков). Следуя [140], «левый» и «правый» вспомогательные векторы вычисляются следующим образом:

$$\begin{aligned} W_L &= W_P + \frac{1}{2} L(\Delta_{PP}^P W, \Delta_M^{MM} W) \\ W_R &= W_M - \frac{1}{2} L(\Delta_{PP}^P W, \Delta_M^{MM} W) \end{aligned}, \quad L(u, v) = \frac{u+v}{2} \cdot \left( 1 - \frac{|u-v|}{|u|+|v|} \right)^q, \quad q \geq 2 \quad (3.45)$$

Здесь разности  $\Delta_{PP}^P W$  и  $\Delta_M^{MM} W$  вычислены согласно (3.42б) (ячейка  $PP$  находится слева от ячейки  $P$  на рисунке 3.5а, а ячейка  $MM$  – справа от ячейки  $M$ ). Предложенный

Джемесоном ограничитель  $L(u, v)$  обращается в ноль, если  $u$  и  $v$  имеют разные знаки (что обеспечивает переход к схеме первого порядка в окрестности экстремума), и дает некое среднее значение при одинаковых знаках  $u$  и  $v$ . При  $q = 1$  ограничитель  $L(u, v)$  переходит в ограничитель *minmod* (3.26б), при  $q = 2$  – в ограничитель Ван Лира ( $2u|v|/(|u| + |v|)$ ), при  $uv > 0$ ), а при  $q \rightarrow \infty$  приближается к среднему арифметическому с ограничением  $L = 0$  при  $uv \leq 0$ . В коде SINF обычно используется значение  $q = 2$ .

### 3.1.4 Стыковка блоков

Необходимым элементом организации вычислений на многоблочных сетках является стыковка блоков, т.е. обмен данными между блоками для обеспечения связности решения. В коде SINF, который ориентирован на использование соприкасающихся (не накладывающихся друг на друга) блоков сетки, стыковки могут быть как регулярными (с продолжением «нормальных» к межблочной границе сеточных линий из блока в блок, рисунок 3.6а), так и нерегулярными (с обрывом сеточных линий на межблочной границе, рисунок 3.6б). При этом допускается любая ориентация индексных координатных линий в стыкуемых блоках, а блоки могут стыковаться как всей гранью, так и отдельными сегментами (индексными «прямоугольниками»).

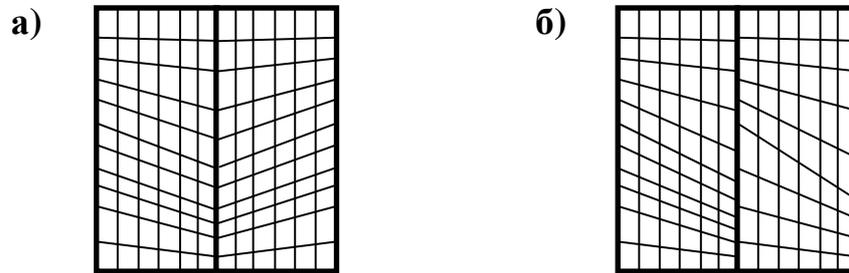


Рисунок 3.6 – Пример регулярной (а) и нерегулярной (б) стыковки блоков

В коде SINF для организации стыковки используется оригинальный подход, основанный на использовании *виртуальных* блоков. А именно, для каждого сегмента стыковки формируется вспомогательный виртуальный блок (см. рисунок 3.7), в который копируются данные из двух слоев приграничных ячеек каждого из стыкуемых блоков. Все вычисления, связанные с определением конвективных и диффузионных потоков на интерфейсе стыковки, проводятся внутри виртуального блока по тем же правилам, что и в обычных блоках<sup>1</sup>. Сосчитанные потоки вместе со значениями переменных на

<sup>1</sup> Строго говоря, это не совсем так. В частности, для вычисления диффузионных потоков в виртуальном блоке всегда используется аппроксимация (3.33), а поток массы определяется без введения поправки (3.34). Однако эти отличия практически не сказываются на получаемом решении, т.к. на стыковки обычно приходится крайне мала часть из общего числа граней ячеек сетки.

интерфейсе передаются в стыкуемые физические блоки и используются для расчета невязок, что обеспечивает «прозрачность» стыковки и сохранение консервативных свойств численной схемы в случае регулярной стыковки (с продолжением сеточных линий из блока в блок).

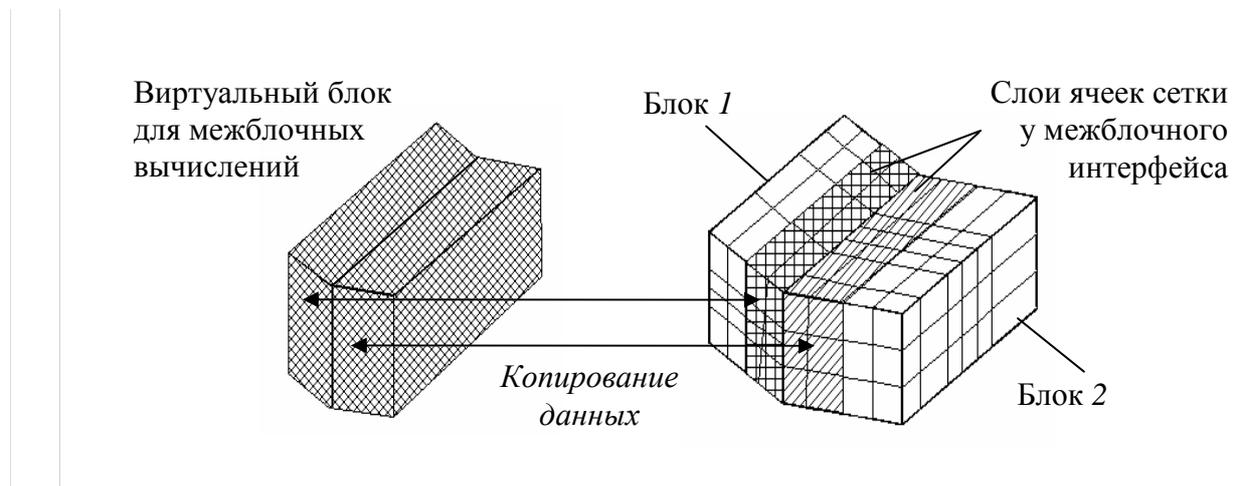


Рисунок 3.7 – Схема межблочного обмена данными в коде SINF

В случае нерегулярной стыковки для каждого из стыкуемых блоков формируется отдельный виртуальный блок, в котором данные из приграничных ячеек смежного блока переинтерполируются на вспомогательную сетку. Ячейки этой вспомогательной сетки «выращиваются» из поверхностных граней ячеек «своего» блока, но с использованием шага сетки и ориентации «нормальных» к границе сеточных линий смежного блока. Помимо дополнительных затрат на переинтерполяцию и дублирование вычислений в стыкуемых блоках, нерегулярная стыковка не является строго консервативной, т.е. не гарантирует точного сохранения потоков (в частности, расхода) при переходе из блока в блок. Для снижения вносимой в решение погрешности, нерегулярные стыковки располагают, по возможности, в областях более или менее однородного течения, тогда как в «ответственных» местах предпочтение отдается регулярным стыковкам.

Помимо своей основной функции – межблочного обмена – виртуальные блоки в коде SINF могут выполнять дополнительную обработку данных. В частности, имеется возможность поворота векторов для обеспечения условий вращательной периодичности. Также в виртуальном блоке осуществляется пересчет скоростей на интерфейсе, где соприкасаются неподвижные и движущиеся (в частности, вращающиеся) блоки сетки; при этом доступны традиционные для современных CFD кодов опции, а именно:

- полный учет относительного скольжения сеток (sliding mesh);
- «замороженный» ротор (frozen rotor): на интерфейсе стыковки пересчитываются скорости, но взаимное положение сеток с течением времени не меняется;
- поверхность смешения (mixing plane): выполняется осреднение параметров потока вдоль направления скольжения, после чего в блок, расположенный сверху по

потоку, передается осредненное давление, а вниз – осредненные скорости (или полное давление) и остальные параметры потока.

## 3.2 Алгоритм решения разностных уравнений

### 3.2.1 Линеаризация уравнений и формирование матрицы системы

Описанная в разделе 3.1 дискретизация заменяет исходные дифференциальные уравнения и граничные условия, описывающие течение жидкости или газа (в общем случае турбулентное и неизотермическое), системой разностных<sup>1</sup> уравнений, которую можно представить в компактной матричной форме:

$$R(X) \equiv A(X) \cdot X - b(X) = 0, \quad A(X) \approx \partial R / \partial X \quad (3.46)$$

Здесь  $X$  – вектор переменных, включающий в себя все неизвестные во всех узлах (ячейках) расчетной сетки;  $R(X)$  – нелинейный матричный оператор, аппроксимирующий исходные уравнения;  $A$  – матрица системы (так или иначе выделенная «линейная» часть оператора  $R$ ), коэффициенты которой могут зависеть от искомого вектора  $X$  (например, из-за конвективных слагаемых). Вектор правых частей  $b$  включает в себя те элементы оператора  $R$ , которые не вошли в матрицу  $A$  (например, источниковые члены исходных дифференциальных уравнений). Для нестационарной задачи система (3.46) решается на каждом шаге по времени.

В общем случае система (3.46) является нелинейной, поэтому для ее решения организуется итерационный процесс, который можно представить в т.наз.  $\Delta$ -форме (3.47а), с введением вектора приращений  $\Delta X$ , или в эквивалентной форме простых итераций (3.47б). Одним из достоинств формулировки в приращениях, которая используется в коде SINF, является то, что не нужно вычислять вектор правых частей  $b^n$ . Кроме того, при численном решении линейной системы (3.47а) не требуется явно задавать начальное приближение, что несколько упрощает реализацию линейного солвера.

$$A^n \cdot \Delta X = -R^n, \quad X^{n+1} = X^n + \Delta X, \quad R^n \equiv R(X^n) \quad (3.47a)$$

$$A^n \cdot X^{n+1} = b^n, \quad A^n \equiv A(X^n), \quad b^n = A^n \cdot X^n - R^n \quad (3.47b)$$

<sup>1</sup> Строго говоря, в рамках МКО применение термина «разностный» для обозначения дискретной численной схемы, аппроксимирующей исходную задачу, является жаргоном. Ведь в отличие от метода конечных разностей, МКО исходит из потоковой формулировки и не подразумевает замены производных *разностями* (хотя в некоторых случаях оба метода дают в итоге одну и ту же численную схему).

Здесь индекс  $n$  отвечает номеру текущей итерации, для которой все величины известны;  $R^n$  – вектор невязок, характеризующий точность выполнения уравнений (3.46) для пробного решения  $X^n$ .

Следует подчеркнуть, что способ формирования матрицы  $A$  является до некоторой степени произвольным – результатом сошедшегося итерационного процесса (3.47) в любом случае будет решение исходной системы  $R(X) = 0$  (3.46). Однако выбор матрицы  $A$  влияет на сходимость итераций и общие вычислительные затраты. Можно ожидать, что чем полнее линеаризованная система (3.47) учитывает задаваемые оператором  $R(X)$  взаимосвязи между элементами вектора  $X$  (т.е. чем точнее вычислен Якобиан  $\partial R/\partial X$ ), тем меньше потребуется итераций для сходимости итерационного процесса (3.47), но тем более затратным будет решение линейной системы (3.47) на каждой итерации. Таким образом, для обеспечения высокой вычислительной эффективности кода нужно при выборе матрицы  $A$  соблюсти некий разумный баланс между сложностью решения системы (3.47) и возможным выигрышем в количестве глобальных итераций. Ниже представлены общие принципы, по которым в коде SINF формируется матрица  $A$  для «стандартного» уравнения переноса (2.30); особенности решения уравнения неразрывности и уравнений высокоскоростного течения газа описаны в последующих разделах.

Начнем с того, что при вычислении Якобиана  $\partial R/\partial X$  для уравнения конвективно-диффузионного переноса величины  $\phi$  (2.30) «замораживаются» (считается независимым от решения  $X$ ) коэффициент диффузии  $\Gamma$ , поток массы  $\rho V$  в конвективном слагаемом и плотность  $\rho$  в нестационарном члене, а в источнике  $\Phi$  учитывается зависимость только от переменной  $\phi$ . В результате этих упрощений уравнение для приращения  $\Delta\phi$  может решаться отдельно от других уравнений, т.е. соответствующая часть системы (3.47) может быть выделена в изолированную подсистему. Благодаря этому кардинально сокращается время решения линейной системы (3.47), а число глобальных итераций, как правило, увеличивается незначительно.

Далее, линеаризация уравнения переноса величины  $\phi$  фактически выполняется для уравнения, записанного в неконсервативной форме (2.30а), поскольку при записи уравнения в консервативной форме (2.30б) (или, что по сути то же самое, в интегральной форме (3.1)) неточное соблюдение баланса массы в ячейке на промежуточных итерациях ведет к нарушению баланса конвективных потоков переносимой величины  $\phi$ . Как следствие, недосведенное уравнение неразрывности провоцирует «ненужное» возмущение поля  $\phi$  (например, возмущение температуры в изотермическом потоке), что не влияет на окончательное решение, но может замедлять процесс сходимости.

В матричной форме записи переход к неконсервативным уравнениям эквивалентен умножению системы (3.47) на матрицу перехода от консервативных переменных  $W = (\rho, \rho\phi)$  к неконсервативным  $X = (\rho, \phi)$ :

$$B = \frac{\partial W}{\partial X} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \phi & \rho \end{pmatrix}, \quad B^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\phi/\rho & 1/\rho \end{pmatrix} \quad (3.48)$$

Результирующая неконсервативная формулировка внешне отличается от исходной лишь обозначениями:

$$A^* \cdot \Delta X = -R^*, \quad A^* = B^{-1}A \approx \partial R^* / \partial X, \quad R^* = B^{-1}R \quad (3.49a)$$

$$A^* \cdot X^{n+1} = b^*, \quad b^* = A^* \cdot X^n - R^* \quad (3.49б)$$

$$R = \begin{pmatrix} R_\rho \\ R_\phi \end{pmatrix}, \quad R^* = \begin{pmatrix} R_\rho \\ R_\phi^* \end{pmatrix}, \quad R_\phi^* = \frac{1}{\rho}(R_\phi - \phi R_\rho) \quad (3.49в)$$

Здесь  $R_\rho$  – невязка уравнения неразрывности (2.1a),  $R_\phi$  – невязка уравнения переноса, записанного в консервативной форме (2.30б),  $R_\phi^*$  – условная невязка неконсервативного уравнения:

$$R_\phi^* \approx \left( \frac{\partial \phi}{\partial t} + \mathbf{V} \cdot \nabla \phi - \frac{1}{\rho} [\Phi + \nabla \cdot (\Gamma \nabla \phi)] \right)^n \quad (3.50)$$

Важно подчеркнуть, что в разностном представлении преобразование невязок (3.49в) не эквивалентно прямому вычислению «неконсервативной» невязки (3.50). Использование преобразования (3.49в) сохраняет консервативные свойства решения, т.к. по достижении сходимости итерационного процесса (при  $R_\rho = R_\phi^* = 0$ ) будет обеспечено равенство нулю исходных «консервативных» невязок  $R_\phi$ . В отличие от невязок, матрица  $A^*$  системы (3.49) не вычисляется как произведение  $B^{-1}A$ , а формируется именно для неконсервативного уравнения переноса (2.30a) путем его приближенной линеаризации (с «замораживанием» коэффициентов при производных).

Еще один шаг, способствующий уменьшению затрат на решение уравнения для  $\Delta\phi$  это его упрощенная дискретизация. А именно, для аппроксимации конвективных производных линеаризованного уравнения (2.3ба) используется противопоточная схема первого порядка (3.51б), а диффузионные слагаемые вычисляются приближенно, в предположении «почти» ортогональной сетки (3.51в). Благодаря такой упрощенной дискретизации шаблон аппроксимации уравнения для  $\Delta\phi$  в ячейке  $(i,j,k)$  включает ячейки с номерами  $(i\pm 1, j, k)$ ,  $(i, j\pm 1, k)$  и  $(i, j, k\pm 1)$ , т.е. матрица  $A^*$  имеет только семь ненулевых диагоналей (в двумерном случае – пять), что позволяет использовать

экономичные алгоритмы решения системы (в частности, метод переменных направлений, см. напр. [96]).

$$\Lambda^* \cdot \Delta\phi = \sum_{l=1}^3 \Lambda^{(l)} \cdot \Delta\phi \Leftrightarrow \mathbf{V} \cdot \nabla \Delta\phi - \frac{1}{\rho} \nabla \cdot (\Gamma \nabla \Delta\phi) \quad (3.51a)$$

$$\Lambda_C^{(l)} \cdot \Delta\phi = \frac{Q^{(l)}}{\rho\Omega} \frac{\partial \Delta\phi}{\partial \xi_l}, \quad Q^{(l)} = \frac{Q_{\alpha+\frac{1}{2}}^{(l)} + Q_{\alpha-\frac{1}{2}}^{(l)}}{2}, \quad \frac{\partial \Delta\phi}{\partial \xi_l} = \begin{cases} \Delta\phi_\alpha - \Delta\phi_{\alpha-1}, & Q^{(l)} > 0 \\ \Delta\phi_{\alpha+1} - \Delta\phi_\alpha, & Q^{(l)} < 0 \end{cases} \quad (3.51б)$$

$$\Lambda_D^{(l)} \cdot \Delta\phi = \frac{-1}{\rho\Omega} \frac{\partial}{\partial \xi_l} \left( \Gamma \frac{S^{(l)2}}{\Omega} \frac{\partial \Delta\phi}{\partial \xi_l} \right) = \frac{Y_{\alpha-\frac{1}{2}}^{(l)} - Y_{\alpha+\frac{1}{2}}^{(l)}}{\rho\Omega}, \quad Y_{\alpha+\frac{1}{2}}^{(l)} = \frac{2\bar{\Gamma}_{\alpha+\frac{1}{2}} S_{\alpha+\frac{1}{2}}^{(l)2}}{\Omega_{\alpha+1} + \Omega_\alpha} (\Delta\phi_{\alpha+1} - \Delta\phi_\alpha) \quad (3.51в)$$

Здесь под  $\alpha$  понимается значение сеточного индекса  $\xi_l$ , вдоль которого берутся производные (т.е. при  $l = 1$  индекс  $\alpha$  заменяется на  $i$ , при  $l = 2$  – на  $j$ , а при  $l = 3$  – на  $k$ ).

Отметим, наконец, что ввиду нелинейности исходной системы (3.46), а также учетом приближенной линеаризации и упрощенной дискретизации уравнений, точное решение линейной системы (3.49) на каждой глобальной итерации, вообще говоря, не требуется. Более того, слишком сильное изменение решения за одну глобальную итерацию может привести к расходимости итерационного процесса, что ведет к необходимости введения релаксации, например:

$$A^* \cdot X^* = b^*, \quad X^{n+1} = X^n + \varpi(X^* - X^n), \quad \varpi < 1 \quad (3.52a)$$

или то же самое в  $\Delta$ -форме записи алгоритма (3.49а):

$$A^* \cdot \Delta X^* = -R^*, \quad \Delta X = \varpi \Delta X^* \Leftrightarrow A^{**} \cdot \Delta X = -R^*, \quad A^{**} = \frac{1}{\varpi} A^* \quad (3.52б)$$

Как видно из (3.52б) такая схема введения релаксации, называемая *явной*, эквивалентна простому масштабированию матрицы  $A^*$ , т.е. ее замене на  $A^*/\varpi$ . Однако с точки зрения скорости решения линейной системы выгоднее масштабировать не всю матрицу, а лишь ее диагональные элементы  $A_p$ , усиливая тем самым диагональное преобладание. Это так называемая *неявная* релаксация [89], которую можно интерпретировать и как вариант схемы установления с продвижением по псевдовремени с помощью неявной схемы (3.38):

$$A^{**} = A^* + \frac{1-\varpi}{\varpi} A_p \rightarrow A^* + \frac{1}{\Delta\tau} \quad (3.53a)$$

$$\frac{\Delta X}{\Delta\tau} + A^* \cdot \Delta X = -R^* \Leftrightarrow \frac{X^{n+1} - X^n}{\Delta\tau} + A^* \cdot X^{n+1} = b^* \quad (3.53б)$$

В отличие от шага по физическому времени  $\Delta t$  в схеме (3.38), шаг по псевдо-времени  $\Delta\tau$  обычно назначается индивидуально в каждой ячейке расчетной сетки, что позволяет ускорить сходимость итераций. Чтобы в каждой ячейке продвижение по псевдовремени шло максимально быстро, шаг  $\Delta\tau$  можно определить, например, основываясь на оценке допустимого шага по времени для явных схем (3.37б) с введением в нее регулируемого множителя  $CFL$ , который часто называют числом Куранта:

$$\Delta\tau_{CFL} = CFL \cdot \left( \frac{1}{\Delta\tau_{conv}} + \frac{1}{\Delta\tau_{diff}} \right)^{-1}, \quad \Delta\tau_{conv} = \frac{\Delta l}{|V|}, \quad \Delta\tau_{diff} = \frac{\Delta l^2}{2\Gamma} \quad (3.54)$$

В коде SINF для разных уравнений можно задать разные значения коэффициента  $CFL$ , что позволяет ускорить процесс сходимости для «хороших» уравнений, а для более «капризных» – предотвратить развитие возмущений, ведущих к замедлению и даже расходимости итерационного процесса. В качестве трехмерного аналога оценки (3.54) используются следующие соотношения:

$$\Delta\tau_{CFL} = CFL \cdot \left( \frac{1}{\Delta\tau_{conv}} + \frac{1}{\Delta\tau_{diff}} \right)^{-1}, \quad \Delta\tau_{conv} = \frac{\rho\Omega}{\tilde{Q}}, \quad \Delta\tau_{diff} = \frac{\rho\Omega^2}{2\Gamma\tilde{S}^2} \quad (3.55a)$$

$$\tilde{Q} = \max |Q^{(l)}|, \quad \tilde{S} = \max(S^{(l)}) \quad (3.55b)$$

$$\tilde{Q} = \sum_{l=1}^3 |Q^{(l)}| = \frac{1}{2} \sum_{m=1}^6 |Q_m|, \quad \tilde{S}^2 = \sum_{l=1}^3 S^{(l)2} = \frac{1}{2} \sum_{m=1}^6 S_m^2 \quad (3.55b)$$

Здесь, как и ранее,  $\Gamma$  – коэффициент диффузии,  $\rho$  – плотность,  $\Omega$  – объем ячейки,  $S^{(l)}$  – площадь ее грани для  $l$ -го индексного направления,  $Q^{(l)}$  – расход через эту грань. Характерные для ячейки значения расхода  $\tilde{Q}$  и площади грани  $\tilde{S}$  могут определяться по-разному. Применительно к аппроксимации (3.51) вариант (3.55б) отвечает приложению квази-одномерной оценки (3.54) к каждому индексному направлению с выбором наиболее жесткого ограничения на шаг  $\Delta\tau$  (отдельно для его «конвективной» и «диффузионной» части); вариант (3.55в) приближенно соответствует масштабированию диагональных элементов матрицы  $\Lambda^*$  с параметром релаксации  $\varpi = (1+CFL)^{-1}$  в схеме (3.53). В коде SINF опробовались и другие способы обобщения оценки (3.54) на трехмерный случай, однако в целом схема (3.55б) и почти не уступающая ей схема (3.55в) показывают наилучшие результаты.

С учетом всех высказанных соображений, для «стандартного» уравнения переноса величины  $\phi$  (2.30) в коде SINF решается следующая линейная система разностных уравнений на каждом шаге итерационного процесса (3.47а):

$$\left(\frac{1}{\Delta\tau} + \Lambda^*\right) \cdot \Delta\phi = -R_\phi^*, \quad \frac{1}{\Delta\tau} = \frac{1}{\Delta\tau_{CFL}} + \frac{3}{2\Delta t} - \min\left(0, \frac{1}{\rho} \frac{\partial\Phi}{\partial\phi}\right) \quad (3.56)$$

Здесь условная невязка неконсервативного уравнения  $R_\phi^*$  вычисляется согласно (3.49в); матрица  $\Lambda^*$  отвечает приближенной аппроксимации (3.51) конвективных и диффузионных членов исходного уравнения, записанного в неконсервативной форме. Помимо пространственных производных, при формировании матрицы системы (3.56) учитываются те слагаемые в источнике  $\Phi$ , которые усиливают диагональное преобладание; это не только делает итерационный процесс более устойчивым (что особенно актуально для уравнений модели турбулентности, содержащих большие источниковые члены), но и ускоряет решение линейной системы. По тем же соображениям, для нестационарной задачи учитывается вклад производной по физическому времени; коэффициент  $3/2$  в выражении для  $\Delta\tau$  (3.56) соответствует использованию неявной схемы второго порядка точности (3.39).

### 3.2.2 Обеспечение баланса массы в низкоскоростных потоках

При численном моделировании течений несжимаемой жидкости и низкоскоростных потоков газа, в которых плотность практически не зависит от локальных изменений давления, возникает парадоксальная ситуация. Для определения поля скорости со всей очевидностью служит уравнение движения (2.1б), которое формально может быть решено при любом распределении давления, однако полученное поле скорости должно удовлетворять уравнению неразрывности (2.1а). Таким образом, «правильное» распределение давления в низкоскоростном потоке нужно найти из уравнения неразрывности, в которое давление фактически не входит. При рассмотрении двумерных течений данную проблему можно обойти, например, формулируя задачу в переменных функция тока – завихренность (см. напр. [100]). Однако в общем случае, для численного решения задачи о течении несжимаемой или слабо сжимаемой жидкости требуется тем или иным способом ввести давление в уравнение неразрывности (например, комбинируя его с уравнением движения), т.е. обеспечить «перевязку» давления и скорости (pressure-velocity coupling). В коде SINF реализованы три алгоритма такой «перевязки» – метод искусственной сжимаемости, метод SIMPLEC, а также оригинальный алгоритм, в котором объединены оба метода.

Метод искусственной сжимаемости

Данный метод был предложен независимо (и в слегка различной формулировке) в работах [51] и [118]. Изначально он позиционировался как метод расчета течений несжимаемой жидкости, однако тот же алгоритм с успехом применяется и для газовых потоков.

Основная идея метода искусственной сжимаемости состоит в том, что в рамках итерационного процесса установления (3.53) в уравнение неразрывности искусственно вводится «производная» от давления по псевдовремени, например:

$$\frac{1}{\beta} \frac{\partial p}{\partial \tau} + \left[ \frac{\partial p}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{V}) \right] = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{\beta} \frac{\Delta p}{\Delta \tau} = -R_p, \quad \beta = \bar{\beta} U_0^2 \quad (3.57)$$

Здесь  $\Delta \tau$  – шаг по псевдовремени,  $R_p$  – невязка уравнения неразрывности,  $U_0$  – характерная скорость потока,  $\bar{\beta}$  – безразмерный коэффициент (т.наз. коэффициент искусственной сжимаемости; наилучшую сходимость итераций обычно обеспечивает значение  $\bar{\beta}$  в диапазоне 0.5÷2.5). Параметр искусственной сжимаемости  $\beta$  является аналогом квадрата скорости звука и определяет скорость распространения волн давления в псевдо-нестационарном процессе установления. Благодаря этим псевдо-акустическим волнам в процессе итераций обеспечивается требуемая эволюция поля давления для выполнения баланса массы, а по достижении сходимости искусственно введенная «производная» обращается в ноль и, следовательно, не влияет на окончательное решение ( $R_p = 0 \Leftrightarrow \Delta p = 0$ ).

Реализация метода искусственной сжимаемости в форме (3.57) чрезвычайно проста, но неэффективна, поскольку в данной схеме не учитывается взаимное влияние приращений давления и скорости, что приводит к медленной сходимости глобальных итераций (3.47). Поэтому в коде SINF при линеаризации уравнения неразрывности учитывается вклад приращений скорости  $\Delta \mathbf{V}$  в расход, а в линеаризованном уравнении движения сохраняется градиент приращения давления  $\Delta p$ :

$$\frac{1}{\beta} \frac{\Delta p}{\Delta \tau} + \nabla \cdot (\rho \Delta \mathbf{V}) = -R_p \quad (3.58a)$$

$$\frac{\Delta \mathbf{V}}{\Delta \tau} + \mathbf{V} \cdot \nabla (\Delta \mathbf{V}) + \frac{1}{\rho} \nabla (\Delta p) - \frac{1}{\rho} \nabla \cdot [(\mu + \mu_T) \nabla (\Delta \mathbf{V})] = -\mathbf{R}_v^* \quad (3.58b)$$

Здесь  $\mathbf{R}_v^*$  – невязка уравнения движения, преобразованная к «неконсервативной» форме аналогично (3.49в).

Подчеркнем, что ввиду взаимного влияния уравнений система (3.58) не распадается на «стандартные» скалярные уравнения вида (3.56), поэтому для ее решения

приходится использовать специализированный линейный солвер (см. разд. 3.2.4). С другой стороны, при совместном решении уравнений для компонент вектора скорости можно без дополнительного усложнения алгоритма учесть вклад силы Кориолиса  $2\rho\boldsymbol{\omega}\times\Delta V$ , что способствует сходимости итераций при решении задачи в быстро вращающейся системе отсчета.

Отметим также, что для системы (3.58) оценку оптимального шага  $\Delta\tau$  (3.55) можно уточнить, основываясь на приближенном анализе устойчивости явной схемы для системы связанных уравнений. А именно, следуя рассуждениям [195], запишем упрощенный одномерный аналог конвективной части системы (3.58) в виде (3.59а). Отсюда легко найти собственные числа  $\lambda_{1,2}$  матрицы  $A$  (3.59б), что дает искомое уточненное выражение для «конвективного» компонента  $\Delta\tau_{conv}$  в формуле (3.54):

$$\frac{\Delta q}{\Delta\tau} + A \frac{\partial \Delta q}{\partial x} = b, \quad \Delta q = \begin{pmatrix} \Delta p \\ \Delta V \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} 0 & \beta\rho \\ 1/\rho & V \end{pmatrix} \quad (3.59a)$$

$$\lambda_{1,2} = \frac{1}{2} \left( V \pm \sqrt{V^2 + 4\beta} \right) \Rightarrow \Delta\tau_{conv} = \frac{\Delta l}{\max(|\lambda_i|)} = \frac{2\Delta l}{|V| + \sqrt{V^2 + 4\beta}} \quad (3.59b)$$

Аналогичные рассуждения [195] для случая записи уравнения движения в консервативной форме приводят к более жесткому ограничению на шаг  $\Delta\tau$ :

$$\lambda_{1,2} = V \pm \sqrt{V^2 + \beta} \Rightarrow \Delta\tau_{conv} = \frac{\Delta l}{\max(|\lambda_i|)} = \frac{\Delta l}{|V| + \sqrt{V^2 + \beta}} \quad (3.60)$$

Обобщение одномерных оценок (3.59б) и (3.60) на трехмерный случай выполняется аналогично (3.55б):

$$\Delta\tau_{conv} = \frac{\rho\Omega}{\tilde{Q}_\beta}, \quad \tilde{Q}_\beta = \max \left( |\alpha Q^{(i)}| + \sqrt{(\alpha Q^{(i)})^2 + \beta(\rho S^{(i)})^2} \right), \quad \alpha = \begin{bmatrix} 0.5 \\ 1.0 \end{bmatrix} \quad (3.61)$$

Как показал опыт расчетов с использованием кода SINF, эффективность схемы (3.58) существенным образом зависит от величины коэффициента  $C_{RC}$ , который регулирует вес стабилизирующей поправки [173] в выражении для расхода  $Q_m$  (3.34). По сути, схема (3.58) эффективна лишь при значениях  $C_{RC} < 0.05$ . Если же для подавления осцилляций давления требуется увеличить значение коэффициента  $C_{RC}$ , то для сохранения устойчивости итерационного процесса приходится уменьшать шаг по псевдвремени, что ведет к замедлению сходимости.

Полностью решить данную проблему в коде SINF удалось путем учета вклада поправки [173] в расход при линеаризации уравнения неразрывности [6]. Чтобы пояснить суть разработанной методики можно отвлечься от привязки выражения (3.34а)

к грани ячейки расчетной сетки и трактовать его как способ вычисления «стабилизированного» потока массы:

$$\mathbf{G} = \rho \mathbf{V} - \alpha_{RC} [\nabla p - \overline{(\nabla p)}] \quad (3.62)$$

Здесь  $\nabla p$  – «локальный» градиент давления, который фактически вычисляется непосредственно на грани;  $\overline{(\nabla p)}$  – его «сглаженное» значение, полученное осреднением (интерполяцией) из центров соседних ячеек; коэффициент  $\alpha_{RC}$  определяется согласно (3.34б). Принимая, что приращения давления  $\Delta p$  дают вклад в «локальный» градиент  $\nabla p$ , но не изменяют значение  $\overline{(\nabla p)}$ , получим вместо (3.58а) линеаризованное уравнение неразрывности в форме (3.63) с дополнительным «диффузионным» слагаемым (уравнение движения (3.58б) остается без изменения).

$$\frac{1}{\beta} \frac{\Delta p}{\Delta \tau} + \nabla \cdot (\rho \Delta \mathbf{V}) - \nabla \cdot [\alpha_{RC} \nabla (\Delta p)] = -R_p \quad (3.63)$$

Как и для «стандартного» уравнения переноса (2.30), дискретизация уравнений (3.63) и (3.58б) выполняется в обобщенной «индексной» системе координат (см. разд. 2.1.3), причем диффузионные слагаемые записываются приближенно, в предположении «почти» ортогональной сетки, а для их аппроксимации используется схема (3.51в):

$$\frac{\Delta p}{\Delta \tau} + \frac{\beta}{\Omega} \sum_{l=1}^3 \left[ \mathbf{S}^{(l)} \cdot \frac{\partial(\rho \Delta \mathbf{V})}{\partial \xi_l} - \frac{\partial}{\partial \xi_l} \left( \alpha_{RC} \frac{S^{(l)2}}{\Omega} \frac{\partial \Delta p}{\partial \xi_l} \right) \right] = -\beta R_p \quad (3.64a)$$

$$\frac{\Delta \mathbf{V}}{\Delta \tau} + \frac{1}{\rho \Omega} \sum_{l=1}^3 \left[ \mathbf{S}^{(l)} \frac{\partial \Delta p}{\partial \xi_l} + Q^{(l)} \frac{\partial \Delta \mathbf{V}}{\partial \xi_l} - \frac{\partial}{\partial \xi_l} \left( (\mu + \mu_T) \frac{S^{(l)2}}{\Omega} \frac{\partial \Delta \mathbf{V}}{\partial \xi_l} \right) \right] = -\mathbf{R}_V^* \quad (3.64б)$$

Рассмотрим способ аппроксимации конвективной части уравнений (3.64), предложенный в работе [116]. Для этого запишем уравнения в матричной форме

$$\frac{\Delta q}{\Delta \tau} + \sum_{l=1}^3 \Lambda^{(l)} \cdot \Delta q = -R^*, \quad \Delta q = \begin{pmatrix} \Delta p \\ \Delta \mathbf{V} \end{pmatrix}, \quad R^* = \begin{pmatrix} \beta R_p \\ \mathbf{R}_V^* \end{pmatrix} \quad (3.65a)$$

$$\Lambda_C^{(l)} \cdot \Delta q = A^{(l)} \frac{\partial \Delta q}{\partial \xi_l}, \quad A^{(l)} = \frac{1}{\Omega} \begin{pmatrix} 0 & \beta \rho \mathbf{S}^{(l)} \\ \frac{1}{\rho} \mathbf{S}^{(l)} & \frac{Q^{(l)}}{\rho} \mathbf{I} \end{pmatrix} \quad (3.65б)$$

и разложим матрицу конвективного оператора  $A^{(l)}$  на две составляющие:

$$A^{(l)} = A^{(l,+)} + A^{(l,-)}, \quad A^{(l,\pm)} = \frac{1}{2} \left( A^{(l)} \pm \tilde{\alpha} |\lambda^{(l)}|_{max} \mathbf{I} \right)$$

где  $\tilde{\alpha} > 1$  – схемный параметр (обычно  $\tilde{\alpha} = 1.01 \div 1.05$ ),  $I$  – единичная матрица,  $|\lambda^{(l)}|_{max}$  – максимальное по модулю собственное значение матрицы  $A^{(l)}$ :

$$\lambda_{1,2}^{(l)} = \frac{1}{\Omega} \left( \frac{Q^{(l)}}{2\rho} \pm \sqrt{\left( \frac{Q^{(l)}}{2\rho} \right)^2 + \beta S^{(l)2}} \right), \quad \lambda_{3,4}^{(l)} = \frac{Q^{(l)}}{\rho\Omega}$$

$$\Rightarrow |\lambda^{(l)}|_{max} = \frac{1}{\Omega} \left( \left| \frac{Q^{(l)}}{2\rho} \right| + \sqrt{\left( \frac{Q^{(l)}}{2\rho} \right)^2 + \beta S^{(l)2}} \right)$$

При таком разложении матрица  $A^{(l,+)}$  имеет только положительные собственные значения, а матрица  $A^{(l,-)}$  – только отрицательные. Заменяя производные при этих матрицах соответствующими односторонними разностями получим следующую схему аппроксимации конвективного оператора (3.65б):

$$\begin{aligned} \Lambda_c^{(l)} \cdot \Delta q &= A^{(l)} \frac{\partial \Delta q}{\partial \xi_l} = A^{(l,+)} (\Delta q_\alpha - \Delta q_{\alpha-1}) + A^{(l,-)} (\Delta \phi_{\alpha+1} - \Delta \phi_\alpha) = \\ &= A^{(l)} \frac{\Delta q_{\alpha+1} - \Delta q_{\alpha-1}}{2} - \frac{\tilde{\alpha} |\lambda^{(l)}|_{max}}{2} I (\Delta q_{\alpha+1} - 2\Delta q_\alpha + \Delta q_{\alpha-1}) \end{aligned} \quad (3.66)$$

Как и ранее, здесь под  $\alpha$  понимается значение сеточного индекса  $\xi_l$ , вдоль которого берутся производные (т.е. при  $l = 1, 2, 3$  индекс  $\alpha$  заменяется на  $i, j, k$ ). Из последнего равенства видно, что в данной схеме к центрально-разностной аппроксимации производной  $\partial \Delta q / \partial \xi_l$  добавляется искусственная диссипация первого порядка с коэффициентом, пропорциональным спектральному радиусу.

Наряду со схемой (3.66), которая в настоящее время является основной, в коде SINF доступна более простая схема аппроксимации конвективной части уравнений (3.64). В этой схеме слагаемые, отвечающие конвективной производной  $V \cdot \nabla(\Delta V)$ , вычисляются по противопоточной схеме (3.51б), а для производных  $\nabla \cdot (\rho \Delta V)$  и  $\nabla(\Delta p)$  используется центрально-разностная аппроксимация. Однако, как показал опыт расчетов, в целом схема (3.66) является более стабильной и обеспечивает более высокую скорость сходимости глобальных итераций (3.47).

### Метод SIMPLEC

Альтернативой методу искусственной сжимаемости может служить группа методов, в которых для получения поля давления, обеспечивающего выполнение уравнения неразрывности, решается специальным образом «сконструированное» уравнение Пуассона. В настоящее время методы этой группы используются в

большинстве коммерческих CFD-кодов; среди наиболее известных можно назвать методы SIMPLE, SIMPLER, SIMPLEC, PISO (см. напр. [127]).

В коде SINF реализован подход, основанный на методе SIMPLEC (SIMPLE Consistent, [198]), который является одной из модификаций метода SIMPLE (Semi-Implicit Method for Pressure-Linked Equations, [169]). В отличие от своего прототипа, метод SIMPLEC не использует дополнительных релаксационных параметров (и, соответственно, не требует их «ручной» настройки) и по оценке авторов метода обеспечивает более быструю сходимость итераций.

В своей изначальной формулировке метод SIMPLEC ориентирован на решение системы уравнений для переменных  $p$  и  $V$  в рамках итерационного процесса (3.47б) и описывается через коэффициенты матрицы  $A$  в аппроксимации уравнения движения; при этом особое внимание приходится уделять согласованности аппроксимаций уравнения неразрывности и уравнения Пуассона для поправки давления. В коде SINF идеи метода SIMPLEC перенесены на итерационный процесс «в приращениях» (3.47а), в котором способ аппроксимации левой части уравнений не столь критичен [6]. Не претендуя на разработку некоего принципиально нового метода и не вдаваясь в детальный разбор его связи с методом SIMPLEC, рассмотрим лишь основные моменты реализованного в коде SINF алгоритма.

Прежде всего, уберем из линеаризованного уравнения неразрывности (3.63) искусственно введенную в него «производную» от давления по псевдовремени, а уравнение движения (3.58б) перепишем в компактной форме аналогично (3.56):

$$\nabla \cdot (\rho \Delta V - \alpha_{RC} \nabla(\Delta p)) = -R_p \quad (3.67a)$$

$$\frac{\Delta V}{\Delta \tau} + \Lambda^* \cdot \Delta V = -\frac{1}{\rho} \nabla(\Delta p) - R_v^* \quad (3.67б)$$

$$\Lambda^* \cdot \Delta V \Leftrightarrow V \cdot \nabla(\Delta V) - \frac{1}{\rho} \nabla \cdot [(\mu + \mu_T) \nabla(\Delta V)] \quad (3.67в)$$

Далее, представив приращение скорости  $\Delta V$  в виде суммы предикторного значения  $\Delta V'$  и поправки  $\Delta V''$ , разобьем решение уравнения (3.67б) на два шага:

$$\frac{\Delta V'}{\Delta \tau} + \Lambda^* \cdot \Delta V' = -R_v^* \quad (3.68a)$$

$$\frac{\Delta V''}{\Delta \tau} = -\frac{1}{\rho} \nabla(\Delta p), \quad \Delta V = \Delta V' + \Delta V'' \quad (3.68б)$$

Предикторный шаг (3.68а) соответствует решению линеаризованного уравнения движения (3.67б) при «замороженном» распределении давления, поэтому полученное решение, вообще говоря, не удовлетворяет уравнению неразрывности (3.67а).

Корректирующий шаг (3.68б) учитывает влияние приращения давления  $\Delta p$  на поле скорости, а это приращение должно быть таким, чтобы итоговое приращение скорости удовлетворяло уравнению неразрывности (3.67а). Таким образом, подставляя (3.68б) в (3.67а), получаем уравнение Пуассона (3.69а) для приращения давления  $\Delta p$ , градиент которого определяет поправку скорости (3.68б), обеспечивающую выполнение уравнения неразрывности (3.67а).

$$\nabla \cdot [(\Delta\tau + \alpha_{RC})\nabla(\Delta p)] = R_p + \nabla \cdot (\rho\Delta V') \quad (3.69a)$$

$$\Delta V = \Delta V' + \Delta V'' = \Delta V' - \frac{\Delta\tau}{\rho} \nabla(\Delta p) \quad (3.69b)$$

Подводя итог, реализованный в коде SINF алгоритм SIMPLEC «в приращениях» включает три шага:

- решение уравнения (3.68а) для первой поправки скорости  $\Delta V'$ ,
- решение уравнения Пуассона (3.69а) для поправки давления  $\Delta p$ ,
- вычисление итоговой поправки скорости  $\Delta V$  согласно (3.69б).

Аппроксимация линеаризованных уравнений (3.68а) и (3.69а) выполняется по приближенной схеме (3.51) в предположении «почти» ортогональной сетки.

Отметим, что в отличие от уравнения (3.58б) в методе искусственной сжимаемости, уравнение (3.68а) распадется на отдельные уравнения для компонент вектора  $\Delta V'$ , которые решаются с помощью общего для всех скалярных уравнений линейного солвера. С другой стороны, для решения уравнения Пуассона (3.69а) приходится использовать специализированный солвер, поскольку матрица данного уравнения не имеет выраженного диагонального преобладания, которое требуется для эффективной работы «стандартного» линейного солвера кода SINF (см. разд. 3.2.4).

### Комбинированный метод

Одним из недостатков метода искусственной сжимаемости является значительное снижение его эффективности (вплоть до несходимости итерационного процесса) при расчете течения в длинных каналах, тогда как метод SIMPLEC в этих условиях показывает себя с самой лучшей стороны. В то же время, в задачах с преобладанием рециркуляционного движения (как, например, течение в каверне с движущейся крышкой) метод искусственной сжимаемости оказывается более экономичным. Чтобы использовать положительные качества каждого из этих методов в коде SINF реализован оригинальный подход [6], в котором объединены оба метода.

Подобно методу SIMPLEC, в комбинированном методе приращения скорости и давления представляются в виде суммы предикторного значения и поправки:

$$\Delta V = \Delta V' + \Delta V'', \quad \Delta p = \Delta p' + \Delta p'' \quad (3.70)$$

На предикторном шаге решаются уравнения метода искусственной сжимаемости:

$$\frac{1}{\beta} \frac{\Delta p'}{\Delta \tau} + \nabla \cdot (\rho \Delta V') - \nabla \cdot [\alpha_{RC} \nabla(\Delta p')] = -R_p \quad (3.71a)$$

$$\frac{\Delta V'}{\Delta \tau} + \Lambda^* \cdot \Delta V' = -\frac{1}{\rho} \nabla(\Delta p') - \mathbf{R}_V^* \quad (3.71b)$$

Полученное решение, вообще говоря, не удовлетворяет уравнению неразрывности (3.67a), поэтому вводится корректирующая поправка скорости  $\Delta V''$ , связанная с поправкой давления аналогично (3.68б):

$$\Delta V'' = -\frac{\Delta \tau}{\rho} \nabla(\Delta p'') \quad (3.72)$$

Подстановка (3.70) и (3.72) в уравнение (3.67a) дает уравнение Пуассона (3.73) для поправки давления  $\Delta p''$ , градиент которой, определяет поправку скорости  $\Delta V''$  (3.72), обеспечивающую выполнение уравнения неразрывности (3.67a).

$$\nabla \cdot [(\Delta \tau + \alpha_{RC}) \nabla(\Delta p'')] = R_p + \nabla \cdot (\rho \Delta V' - \alpha_{RC} \nabla(\Delta p')) \quad (3.73)$$

Как нетрудно видеть, если исключить уравнение (3.71a) и положить  $\Delta p' = 0$ , то представленный комбинированный алгоритм совпадает с методом SIMPLEC. Таким образом, данный метод можно трактовать как метод SIMPLEC с улучшенным предикторным шагом. С другой стороны, его можно рассматривать и как метод искусственной сжимаемости, дополненный корректирующей процедурой на основе уравнения Пуассона.

В качестве примера, иллюстрирующего эффективность комбинированного метода, на рисунке 3.8 представлены графики истории сходимости итераций при решении модельной задачи о течении в лабиринтном уплотнении (с учетом разного времени выполнения одной итерации в разных методах, данные о числе итераций пересчитаны в условные единицы процессорного времени – Time units). Как можно видеть, в данном случае комбинированный метод оказался почти на 30% быстрее, чем метод SIMPLEC, а метод искусственной сжимаемости – в пять (!) раз медленнее.

Как показывает опыт расчетов, относительная эффективность разных методов решения уравнения неразрывности может меняться от задачи к задаче, однако в целом разработанный комбинированный метод не уступает по скорости методу SIMPLEC, являясь при этом более надежным и универсальным. В коде SINF при расчете слабо сжимаемых и несжимаемых течений данный подход используется по умолчанию.



Рисунок 3.8 – К сравнению разных методов решения уравнения неразрывности:

а) схема течения (линии тока), б) история сходимости итераций

### 3.2.3 Линеаризация уравнений движения сжимаемого газа

В данном разделе представлены основные особенности линеаризации уравнений высокоскоростного течения газа, аппроксимация которых рассмотрена в разд. 3.1.3.

Как разъяснено в разд. 3.2.1, в коде SINF линеаризация фактически выполняется для уравнений, записанных в неконсервативной форме, тогда как невязки исходных консервативных уравнений пересчитываются в «неконсервативные» путем умножения на соответствующую матрицу перехода (3.48). Применительно к системе уравнений высокоскоростного течения газа (3.40) указанная матрица перехода имеет вид (3.74а), а пересчет невязок выполняется в соответствии с преобразованием (3.74б):

$$B = \frac{\partial W}{\partial X} = \begin{pmatrix} 1 & \mathbf{0} & 0 \\ \mathbf{V} & \rho \mathbf{I} & \mathbf{0} \\ H & \rho \mathbf{V} & \rho C_p \end{pmatrix}, \quad B^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & \mathbf{0} & 0 \\ -\frac{1}{\rho} \mathbf{V} & \frac{1}{\rho} \mathbf{I} & \mathbf{0} \\ \frac{V^2 - H}{\rho C_p} & \frac{-\mathbf{V}}{\rho C_p} & \frac{1}{\rho C_p} \end{pmatrix} \quad (3.74a)$$

$$W = \begin{pmatrix} \rho \\ \rho \mathbf{V} \\ \rho H \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} \rho \\ \mathbf{V} \\ T \end{pmatrix}, \quad R = \begin{pmatrix} R_p \\ \mathbf{R}_V \\ R_H \end{pmatrix}, \quad R^* = B^{-1} \cdot R = \begin{pmatrix} R_p \\ \mathbf{R}_V^* \\ R_T^* \end{pmatrix} \quad (3.74б)$$

$$\mathbf{R}_V^* = \frac{\mathbf{R}_V - \mathbf{V} R_p}{\rho}, \quad R_T^* = \frac{R_H - \mathbf{V} \cdot \mathbf{R}_V^*}{C_p}, \quad R_H^* = \frac{R_H - H R_p}{\rho} \quad (3.74в)$$

Здесь, как и ранее,  $\rho$  – плотность газа,  $\mathbf{V}$  – скорость,  $T$  – абсолютная температура,  $H = C_p T + V^2/2$  – полная энтальпия;  $W$  и  $X$  – векторы консервативных и неконсервативных переменных соответственно;  $R$  – вектор «консервативных» невязок, включающий

невязки уравнений баланса массы, импульса и полной энтальпии;  $R^*$  – условные невязки соответствующих неконсервативных уравнений.

Вводя в рассмотрение дополнительный вектор переменных  $q = (p, \mathbf{V}, T)$ , систему линейаризованных уравнений для приращений давления, скорости и температуры можно записать следующим образом:

$$\frac{\partial X}{\partial q} \cdot \frac{\Delta q}{\Delta \tau} + (\Lambda_c^* + \Lambda_D^*) \cdot \Delta q = -R^*, \quad q = \begin{pmatrix} p \\ \mathbf{V} \\ T \end{pmatrix}, \quad \frac{\partial X}{\partial q} = \begin{pmatrix} \gamma/c^2 & \mathbf{0} & -\rho/T \\ \mathbf{0} & \mathbf{I} & \mathbf{0} \\ 0 & \mathbf{0} & 1 \end{pmatrix} \quad (3.75a)$$

$$\Lambda_c^* \cdot \Delta q \Leftrightarrow \begin{pmatrix} \frac{\gamma}{c^2} \mathbf{V} \cdot \nabla(\Delta p) + \rho \nabla \cdot (\Delta \mathbf{V}) - \frac{\rho}{T} \mathbf{V} \cdot \nabla(\Delta T) \\ \frac{1}{\rho} \nabla(\Delta p) + \mathbf{V} \cdot \nabla(\Delta \mathbf{V}) + \mathbf{0} \\ -\frac{1}{\rho C_p} \mathbf{V} \cdot \nabla(\Delta p) + 0 + \mathbf{V} \cdot \nabla(\Delta T) \end{pmatrix} \quad (3.75b)$$

$$\Lambda_D^* \cdot \Delta q \Leftrightarrow -\frac{1}{\rho} \nabla \cdot [\Gamma \nabla(\Delta q)], \quad \Gamma = \text{diag} \left\{ 0, (\mu + \mu_T) \mathbf{I}, \left( \frac{\mu}{Pr} + \frac{\mu_T}{Pr_T} \right) \right\} \quad (3.75b)$$

Здесь  $\gamma = C_p/C_v$  – показатель адиабаты,  $c^2 = (\gamma - 1)C_p T$  – квадрат скорости звука, матричные операторы  $\Lambda_c^*$  и  $\Lambda_D^*$  представляют соответственно конвективную и диффузионную части линейаризованной системы.

Особенностью системы (3.75) является то, что в низкоскоростных потоках, когда скорость звука становится относительно большой, матрица  $\partial X/\partial q$  вырождается, в чем легко убедиться, перейдя к безразмерным величинам:

$$\frac{\partial X'}{\partial q'} = \begin{pmatrix} \gamma M_0^2 / T' & \mathbf{0} & -\rho' / T' \\ \mathbf{0} & \mathbf{I} & \mathbf{0} \\ 0 & \mathbf{0} & 1 \end{pmatrix}, \quad \rho' = \frac{\rho}{\rho_0}, \quad \mathbf{V}' = \frac{\mathbf{V}}{U_0}, \quad M_0 = \frac{U_0}{c_0} \quad (3.76)$$

$$T' = \frac{T}{T_0} = \frac{c^2}{c_0^2}, \quad p' = \frac{p - p_0}{\rho_0 U_0^2}$$

На практике это приводит к существенному замедлению сходимости итераций (3.47) в низкоскоростных потоках из-за сильного различия характерных времен процессов конвективного переноса и распространения акустических волн. Чтобы обеспечить работоспособность метода при любых значениях характерного числа Маха  $M_0$ , в коде SINF применяется т.наз. метод масштабирования сжимаемости [99], который можно трактовать как обобщение метода искусственной сжимаемости на случай сжимаемых потоков. Суть данного метода состоит в том, что матрица  $\partial X/\partial q$  в системе (3.75) заменяется на регуляризованную матрицу  $\tilde{B}$ :

$$\tilde{B} = \begin{pmatrix} 1/\beta & \mathbf{0} & -\rho/T \\ \mathbf{0} & \mathbf{I} & \mathbf{0} \\ 0 & \mathbf{0} & 1 \end{pmatrix}, \quad \tilde{B}^{-1} = \begin{pmatrix} \beta & \mathbf{0} & \beta\rho/T \\ \mathbf{0} & \mathbf{I} & \mathbf{0} \\ 0 & \mathbf{0} & 1 \end{pmatrix}, \quad \beta \equiv \beta_0 T'$$

$$\beta_0 = \min\left(\frac{c_0^2}{\gamma}, \bar{\beta} U_0^2\right)$$

Как нетрудно видеть, в высокосортном потоке  $\beta = c^2/\gamma$  и матрица  $\tilde{B}$  совпадает с  $\partial X/\partial q$ , т.е. решается исходная система (3.75). Если же число Маха  $M_0$  мало, то скорость звука  $c_0$  в коэффициенте при  $\Delta p/\Delta\tau$  заменяется на величину порядка характерной скорости потока  $U_0$  (соответственно, число Маха в матрице  $\partial X'/\partial q'$  (3.76) заменяется на величину порядка единицы) подобно тому, как это делается в методе искусственной сжимаемости (3.57).

Умножив регуляризованную по методу масштабирования сжимаемости систему (3.75) на матрицу  $\tilde{B}^{-1}$ , приведем ее к каноническому виду:

$$\frac{\Delta q}{\Delta\tau} + \tilde{B}^{-1}(\Lambda_c^* + \Lambda_D^*) \cdot \Delta q = -\tilde{R}, \quad \tilde{R} = \tilde{B}^{-1}R^* = \begin{pmatrix} \beta R_p + \beta\rho R_T^*/T \\ R_V^* \\ R_T^* \end{pmatrix} \quad (3.77a)$$

$$\tilde{B}^{-1}\Lambda_c^* \cdot \Delta q \Leftrightarrow \begin{pmatrix} \frac{\beta}{c^2} \mathbf{V} \cdot \nabla(\Delta p) + \beta\rho \nabla \cdot (\Delta \mathbf{V}) & +0 \\ \frac{1}{\rho} \nabla(\Delta p) + \mathbf{V} \cdot \nabla(\Delta \mathbf{V}) & +\mathbf{0} \\ \frac{-1}{\rho C_p} \mathbf{V} \cdot \nabla(\Delta p) & +0 & +\mathbf{V} \cdot \nabla(\Delta T) \end{pmatrix} \quad (3.77b)$$

Важно отметить, что согласно (3.77б) конвективные части первых двух (в скалярной форме – четырех) уравнений системы (3.77а) не зависят от приращения температуры  $\Delta T$ . С учетом этого, в коде SINF диффузионный оператор  $\Lambda_D^*$  в системе (3.77а) фактически не умножается на  $\tilde{B}^{-1}$ , чтобы в уравнение неразрывности не вошли диффузионные слагаемые уравнения для  $\Delta T$ . Как следствие, можно сначала решить уравнения для приращений давления и скорости, а затем – скалярное уравнение для приращения температуры, что требует гораздо меньше вычислительных ресурсов, чем совместное решение всех трех (пяти) уравнений системы (3.77а).

Коль скоро в первое уравнение системы (3.77а) не включаются диффузионные слагаемые уравнения для  $\Delta T$ , возникает вопрос о целесообразности добавления члена  $\beta\rho R_T^*/T$  к  $R_p$  в преобразованном векторе невязок  $\tilde{R}$ . Как показал опыт расчетов, введение этого слагаемого может дестабилизировать итерационный процесс в задачах, где теплопроводность играет существенную роль (в частности, в задачах естественной конвекции), поэтому в коде SINF обсуждаемое слагаемое вводится с регулируемым «весом»  $K_p$ .

С учетом сказанного, вместо (3.77а) в коде SINF фактически решается система (3.78), в которой диффузионный оператор (3.75в) не умножается на  $\tilde{B}^{-1}$ , а в преобразованный вектор невязок  $\tilde{R}$  введен дополнительный коэффициент  $\kappa_p$ . Кроме того, следуя принятой в коде SINF концепции, предусмотрена возможность использования разных шагов по псевдовремени в уравнениях для  $\Delta V$  и  $\Delta T$  ( $\Delta\tau_T = \kappa_T \Delta\tau$ ).

$$\frac{\Delta q}{\Delta\tau} + K_\tau (\tilde{B}^{-1} \Lambda_C^* + \Lambda_D^*) \cdot \Delta q = -K_\tau \tilde{R}, \quad \tilde{R} = \begin{pmatrix} R_p^* \\ R_V^* \\ R_T^* \end{pmatrix}, \quad R_p^* = \beta \left( R_p + \kappa_p \frac{\rho}{T} R_T^* \right) \quad (3.78)$$

$$K_\tau = \text{diag}\{1, \mathbf{I}, \kappa_T\}$$

В обобщенной «индексной» системе координат (см. разд. 2.1.3) матрица конвективного оператора системы (3.78) может быть представлена в виде (3.79а); ее собственные значения определяются выражениями (3.79б).

$$K_\tau \tilde{B}^{-1} \Lambda_C^* \cdot \Delta q = \sum_{l=1}^3 A^{(l)} \frac{\partial \Delta q}{\partial \xi_l}, \quad A^{(l)} = \frac{1}{\Omega} \begin{pmatrix} \frac{\beta}{c^2} \frac{Q^{(l)}}{\rho} & \beta \rho S^{(l)} & 0 \\ \frac{1}{\rho} S^{(l)} & \frac{Q^{(l)}}{\rho} \mathbf{I} & \mathbf{0} \\ -\kappa_T \frac{Q^{(l)}}{\rho C_p} & \mathbf{0} & \frac{\kappa_T Q^{(l)}}{\rho} \end{pmatrix} \quad (3.79a)$$

$$\lambda_{1,2}^{(l)} = \frac{1}{\Omega} \left( \frac{Q^{(l)}}{2\rho} \left( 1 + \frac{\beta}{c^2} \right) \pm \sqrt{\left[ \frac{Q^{(l)}}{2\rho} \left( 1 - \frac{\beta}{c^2} \right) \right]^2 + \beta S^{(l)2}} \right), \quad \lambda_{3,4}^{(l)} = Q^{(l)}/(\rho\Omega) \quad (3.79b)$$

$$\lambda_5^{(l)} = \kappa_T Q^{(l)}/(\rho\Omega)$$

Аналогично оценке (3.61) в методе искусственной сжимаемости, максимальное по модулю собственное значение (3.79б) дает оценку для «конвективного» компонента шага по псевдовремени  $\Delta\tau_{conv}$  в формуле (3.55):

$$\Delta\tau_{conv} = \frac{1}{\max(|\lambda_i^{(l)}|)} \quad (3.80)$$

Для аппроксимации конвективной части системы (3.78) используется рассмотренная ранее схема [117] (3.66). Аппроксимация диффузионных слагаемых выполняется по приближенной схеме (3.51в) в предположении «почти» ортогональной сетки.

### 3.2.4 Решение линеаризованных уравнений

#### Уравнения конвективно-диффузионного переноса

С учетом (3.51), линейная система разностных уравнений (3.56), которую необходимо решать на каждом шаге итерационного процесса (3.47), может быть записана следующим образом:

$$\left(\frac{1}{\Delta\tau} + \Lambda^*\right) \cdot \Delta\phi = -R_\phi^*, \quad \Lambda^* = \Lambda^{(1)} + \Lambda^{(2)} + \Lambda^{(3)} \quad (3.81)$$

Согласно (3.51), каждая из матриц  $\Lambda^{(l)}$ , отвечающих приближенной аппроксимации пространственных производных линеаризованного уравнения (2.36а) вдоль индексного направления  $\xi_l$ , является трехдиагональной, что позволяет использовать для решения системы (3.81) метод переменных направлений в сочетании с эффективным алгоритмом прогонки (см. напр. [96]).

В коде SINF используется один из вариантов метода переменных направлений – метод приближенной факторизации [113]. А именно, в предположении достаточной малости шага по псевдовремени  $\Delta\tau$ , сумма матриц приближенно заменяется произведением (3.82а), что равносильно переходу от трехмерной задачи (3.81) к последовательности трех одномерных (3.82б). При этом каждая из одномерных задач решается без применения итераций, с помощью экономичного алгоритма прогонки, что делает данный метод приближенного решения системы (3.81) чрезвычайно эффективным.

$$\left(\frac{1}{\Delta\tau} + \Lambda^{(1)} + \Lambda^{(2)} + \Lambda^{(3)}\right) \approx \frac{1}{\Delta\tau} (I + \Delta\tau\Lambda^{(1)})(I + \Delta\tau\Lambda^{(2)})(I + \Delta\tau\Lambda^{(3)}) \quad (3.82а)$$

$$\left(\frac{1}{\Delta\tau} + \Lambda^*\right) \cdot \Delta\phi = -R_\phi^* \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} (I + \Delta\tau\Lambda^{(1)}) \cdot \Delta\phi' = -\Delta\tau R_\phi^* \\ (I + \Delta\tau\Lambda^{(2)}) \cdot \Delta\phi'' = -\Delta\phi' \\ (I + \Delta\tau\Lambda^{(3)}) \cdot \Delta\phi = -\Delta\phi'' \end{cases} \quad (3.82б)$$

Тот же подход используется в коде SINF и при решении систем связанных уравнений (3.64), (3.71), (3.78); единственное отличие – вместо скалярной прогонки для решения каждой из одномерных задач (3.82б) применяется блочная (матричная) прогонка с размером блоков  $4 \times 4$ .

Отметим, что, если поменять порядок следования «одномерных» матриц в произведении (3.82а) (и, соответственно, в последовательности задач (3.82б)), то изменится и результат решения факторизованной системы, что может повлиять на ход итерационного процесса (3.47). Чтобы сделать алгоритм независимым от ориентации

индексов расчетной сетки, в коде SINF предусмотрена возможность циклического изменения привязки сеточных индексов  $i, j, k$  к индексным направлениям  $\xi_1, \xi_2, \xi_3$  по ходу итераций.

Отметим также, что при использовании многоблочной сетки факторизованная система (3.82) решается независимо для каждого блока расчетной сетки, а на межблочных границах ставится граничное условие  $\Delta\phi = 0$ . Это упрощает реализацию линейного солвера и снижает количество межблочных обменов данными, что улучшает эффективность параллелизации кода. Понятно, что при такой организации вычислений можно ожидать замедления сходимости итерационного процесса (3.47) при достаточно большом числе блоков расчетной сетки, однако имеющийся опыт расчетов на сетках с числом блоков до нескольких десятков не выявил серьезного ухудшения эффективности кода SINF.

#### Уравнение Пуассона для поправки давления

Уравнение Пуассона для поправки давления, фигурирующее в методе SIMPLEC (3.69a) и в комбинированном методе (3.73), имеет две существенные особенности, которые мешают использовать для его решения метод приближенной факторизации (3.82). Во-первых, в отличие от (3.81), матрица данного уравнения не содержит члена  $1/\Delta\tau$ , обеспечивающего необходимое для факторизации (3.82a) диагональное преобладание. И, во-вторых, поскольку поправка давления подлежит дифференцированию для определения поправки скорости, уравнение Пуассона нужно решить довольно точно и обязательно для всей расчетной области в целом, а не отдельно для каждого блока сетки. В коде SINF для решения данной задачи используется т.наз. метод сопряженных градиентов, который является одним из самых эффективных методов решения систем линейных уравнений с симметричной положительно определенной матрицей, каковой является матрица уравнения Пуассона, аппроксимируемого согласно (3.51в)<sup>1</sup>.

Идея метода сопряженных градиентов состоит в генерации оптимальной последовательности приближений к точному решению с использованием векторов направлений, сопряженных по отношению к матрице системы. Оставляя в стороне теоретическое обоснование метода (см. напр. [60, 112]), рассмотрим основные моменты его реализации в коде SINF применительно к решению линейной системы (3.83).

$$A \cdot x = b \tag{3.83}$$

---

<sup>1</sup> Строго говоря, положительно определенной является матрица для уравнения Пуассона с граничными условиями первого рода. Чтобы сохранить это свойство при наличии граничных условий второго рода в коде SINF в соответствующих приграничных ячейках вводится небольшое (около 0.1%) диагональное преобладание.

Для повышения устойчивости метода и ускорения сходимости итераций, вместо решения исходной системы (3.83) можно искать решение системы (3.84).

$$AM^{-1}Mx = b \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} AM^{-1}u = b \\ Mx = u \end{cases} \quad (3.84a)$$

$$(3.84b)$$

Здесь  $M$  – матрица предобуславливателя, которая тем или иным образом аппроксимирует матрицу  $A$ , но легче обращается, т.е. система (3.84б) с матрицей  $M$  решается проще, чем исходная. Понятно, что чем ближе матрица  $M$  к матрице  $A$ , тем ближе матрица  $AM^{-1}$  к единичной и, соответственно, тем быстрее сходится итерационный процесс решения системы (3.84а).

Алгоритм метода сопряженных градиентов с предобуславливателем  $M$  можно записать, используя интуитивно понятный язык «псевдокода» (рисунок 3.9).

```

Задать начальное приближение  $x^{(0)}$  (напр.  $x^{(0)} = 0$ )
Вычислить:  $r^{(0)} = b - Ax^{(0)}$ ,  $z^{(0)} = M^{-1}r^{(0)}$ ,  $p^{(0)} = z^{(0)}$ 
For  $j = 0, 1, \dots, \text{maxiter}$ 
   $\alpha = (r^{(j)}, z^{(j)}) / (Ap^{(j)}, p^{(j)})$ 
   $x^{(j+1)} = x^{(j)} + \alpha p^{(j)}$ 
   $r^{(j+1)} = r^{(j)} - \alpha Ap^{(j)}$ 
  Если сходимость – выход
   $z^{(j+1)} = M^{-1}r^{(j+1)}$ 
   $\beta = (r^{(j+1)}, z^{(j+1)}) / (r^{(j)}, z^{(j)})$ 
   $p^{(j+1)} = z^{(j+1)} + \beta p^{(j)}$ 
End For

```

Рисунок 3.9 – Алгоритм метода сопряженных градиентов с предобуславливателем

Здесь и далее под  $(a, b)$  понимается скалярное произведение векторов  $a$  и  $b$  (сумма произведений их одноименных компонент  $a_i b_i$ ). В качестве критерия сходимости для выхода из цикла служит понижение нормы невязки до заданного уровня  $(r, r) / (r, r)_0 < \varepsilon$ . Вычисление произведения матрицы  $M^{-1}$  на вектор подразумевает решение системы (3.85); при этом явное выражение для  $M^{-1}$  фактически не требуется.

$$z = M^{-1}r \quad \Leftrightarrow \quad Mz = r \quad (3.85)$$

Рисунок 3.10 иллюстрирует реализацию показанного на рисунке 3.9 алгоритма в коде SINF при использовании многоблочной расчетной сетки. В этом случае надо учитывать, что фигурирующие в описании алгоритма матрицы и векторы фактически разбиты на подмножества, отвечающие блокам сетки. В рамках такой многоблочной

структуры при вычислении, например, скалярного произведения векторов в каждом блоке вычисляется своя часть произведения, а затем происходит суммирование по всем блокам. Поскольку вычисление произведения матрицы на вектор подразумевает использование значений переменных из соседних блоков, до вычисления такого произведения требуется межблочный обмен данными, который в случае параллельных вычислений реализуется через функции MPI. На рисунке 3.10 операции, требующие обмена данными между блоками, выделены жирным шрифтом.

```

1) В каждом блоке:
    задать начальное приближение  $x=0$ ,  $r=b$ 
    решить  $Mz=r$ 
    вычислить  $p=z$ ,  $rr_0=(r,r)$ 
2) Просуммировать по блокам  $rr_0$ 
3) For  $iter=0,1,\dots,maxiter$ 
    а) Обменяться между блоками значениями  $p$ 
    б) В каждом блоке:
        вычислить  $\alpha_1 = (r, z)$ 
        вычислить  $\eta = Ap$ 
        вычислить  $\alpha_2 = (\eta, p)$ 
    в) Просуммировать по блокам  $\alpha_1, \alpha_2$ 
    г) Вычислить  $\alpha = \alpha_1 / \alpha_2$ 
    д) В каждом блоке:
        вычислить  $x = x + \alpha p$ 
        вычислить  $r = r - \alpha \eta$ 
        вычислить  $rr=(r,r)$ 
    е) Просуммировать по блокам  $rr$ 
    ж) Если  $rr/rr_0 < \varepsilon$  – выход
    з) В каждом блоке:
        решить  $Mz=r$ 
        вычислить  $\beta_1 = (r, z)$ 
    и) Просуммировать по блокам  $\beta_1$ 
    к) Вычислить  $\beta = \beta_1 / \alpha_1$ 
    л) В каждом блоке:
        вычислить  $p = z + \beta r$ 
End For

```

Рисунок 3.10 – Алгоритм метода сопряженных градиентов для многоблочных сеток

Как уже говорилось, наличие предобуславливателя  $M$  ускоряет сходимость итераций и повышает устойчивость метода, но не влияет на итоговое решение. Исходя из соображений разумного баланса между простотой и эффективностью, в коде SINF используется локальный предобуславливатель, т.е. система (3.85) решается отдельно в

каждом блоке расчетной сетки (с нулевыми граничными условиями на межблочном интерфейсе), что значительно снижает интенсивность межблочного обмена данными.

В качестве такого локального предобуславливателя в коде SINF используется схема приближенной факторизации матрицы  $A$ , внешне сходная с факторизацией (3.82а):

$$M = D(I + D^{-1}A^{(1)})(I + D^{-1}A^{(2)})(I + D^{-1}A^{(3)}), \quad A = D + A^{(1)} + A^{(2)} + A^{(3)} \quad (3.86a)$$

$$Mz = r \Rightarrow \begin{cases} (I + D^{-1}A^{(1)}) \cdot z' = D^{-1}r \\ (I + D^{-1}A^{(2)}) \cdot z'' = z' \\ (I + D^{-1}A^{(3)}) \cdot z = z'' \end{cases} \quad (3.86b)$$

Здесь  $A^{(l)}$  – элементы матрицы  $A$ , отвечающие смещению от ее диагонали  $D$  вдоль индексного направления  $\xi_l$  (по сути, это коэффициенты аппроксимации (3.51в)). Как и для системы (3.82б), каждая из подсистем последовательности (3.86б) решается методом прогонки.

Другой вариант локального предобуславливателя в коде SINF строится как вложенный метод сопряженных градиентов (в одноблочной формулировке, см. рисунок 3.9) с предобуславливателем SGS (Symmetric Gauss-Seidel):

$$M = (D + L)D^{-1}(D + U), \quad A = L + D + U \quad (3.87)$$

Здесь  $D$  – диагональ матрицы  $A$ , а  $L$  и  $U$  – ее нижняя и верхняя треугольные (без диагонали) части. Решение системы (3.85) с факторизованной матрицей  $M$  (3.87) выполняется за два прохода: сначала решается система с нижней треугольной матрицей (3.88а), а затем – с верхней (3.88б).

$$Mz = r \Rightarrow \begin{cases} (D + L)w = r \\ (D + U)z = Dw \end{cases} \quad (3.88a)$$

$$(3.88b)$$

Согласно имеющемуся опыту расчетов, из двух предобуславливателей более эффективен вариант (3.86).

### 3.3 Параллелизация вычислений

Сегодня основным способом ускорения гидродинамических расчетов является использование параллельных вычислений на распределенных системах кластерного типа, которые сравнительно дешевы и легко масштабируются как по числу процессоров, так и по объему оперативной памяти.

Параллельная версия кода SINF была создана<sup>1</sup> в 2002г., что открыло реальную возможность проведения массовых расчетов сложных трехмерных течений в условиях реальной геометрии технических устройств. К настоящему времени накоплен большой и весьма положительный опыт применения ПК SINF для решения ресурсоемких задач с размерностью сетки до 40 миллионов ячеек на различных кластерах с использованием до 900 процессоров (ядер) [40]. Правда, указанные цифры пока являются «рекордными» для кода SINF (главным образом, ввиду сравнительно малой доступности достаточно мощных кластеров), однако расчеты на сетках порядка миллиона ячеек с использованием нескольких десятков ядер уже стали вполне рядовыми.

Распараллеливание вычислений в коде SINF выполнено на основе открытой библиотеки MPI (*Message Passing Interface*) в рамках концепции SPMD (*Single Program Multiple Data*) с декомпозицией задачи по блокам расчетной сетки. При работе программы в параллельном режиме специальный MPI загрузчик обеспечивает одновременный запуск требуемого числа процессов, в каждом из которых исполняется отдельный экземпляр кода SINF. Каждый экземпляр кода «знает» порядковый номер своего процесса и производит вычисления только для «приписанных» к этому процессу блоков сетки. При этом организация вычислений внутри блока не зависит от того, в каком процессе обрабатывается данный блок, однако для проведения стыковки блоков, находящихся в разных процессах, требуется обмен данными между этими процессами с применением функций MPI.

Помимо стыковки блоков, межпроцессорный обмен требуется также для сбора информации по всем блокам сетки (например, при определении максимальных невязок), однако доля таких операций в общем объеме межпроцессорного обмена обычно невелика. Поэтому при параллелизации кода SINF особое внимание было уделено эффективности межпроцессорной передачи данных при стыковке блоков. В частности, все необходимые данные по стыковкам передаются из одного процесса в другой единым пакетом, а для пересылки используются неблокирующие процедуры MPI\_ISEND и MPI\_IRECV.

В однопроцессорной версии кода SINF важную роль в организации стыковки блоков играет вспомогательный виртуальный блок, в который копируются данные из двух слоев приграничных ячеек каждого из стыкуемых блоков и выполняются необходимые вычисления (см. разд. 3.1.4). При этом пересылка данных и вычисления в виртуальном блоке производятся последовательно, поле за полем, с использованием общей памяти (рисунок 3.7). Сохранение подобной концепции в «параллельной» версии

---

<sup>1</sup> Начальное внедрение технологии параллельных вычислений в код SINF выполнено С.А.Якубовым в 2002г. Впоследствии автором проведена доработка соответствующих модулей для обеспечения большей эффективности и полнофункциональности при работе кода в параллельном режиме.

кода привело бы к необходимости выполнения для каждой стыковки многократного MPI-копирования относительно небольших пакетов данных, что не очень эффективно – более предпочтительна межпроцессорная пересылка всех данных единым пакетом.

Чтобы обеспечить эффективную передачу данных между процессами, не затрагивая при этом уже реализованные алгоритмы работы с виртуальным блоком, в коде SINF использован следующий прием (см. рисунок 3.11). В том процессе, где происходит обработка одного из стыкуемых блоков (Блок 1), создается дополнительный блок 2\*, являющийся копией приграничных слоев ячеек реального блока 2. Копирование необходимых для стыковки данных из блока 2 в блок 2\* осуществляется единым пакетом при помощи функций MPI. Далее выполняется обычная обработка стыковки блоков 1 и 2\* с использованием виртуального блока, после чего проводится MPI-копирование данных из блока 2\* в блок 2.

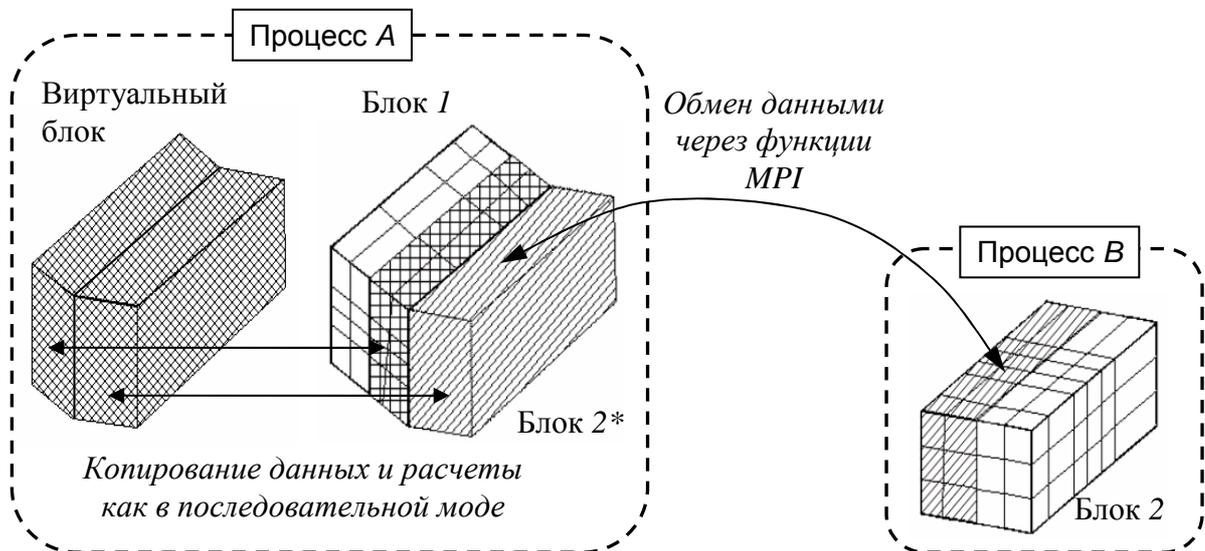


Рисунок 3.11 – Схема межблочного обмена данными в параллельной версии кода SINF

Качество распараллеливания программы обычно оценивают по ускорению ее работы (по сравнению с последовательной версией)  $S_P$  или по эффективности использования процессоров (ядер)  $E_P$ :

$$S_P = \frac{T_1}{T_P}, \quad E_P = \frac{S_P}{P} = \frac{T_1}{P \cdot T_P} \quad (3.89)$$

Здесь  $T_1$  – время работы программы в последовательном режиме,  $T_P$  – время работы параллельной программы на  $P$  ядрах.

В идеале коэффициент ускорения должен быть равен числу используемых ядер (соответственно, эффективность  $E_P = 1$ ), однако на практике он всегда<sup>1</sup> меньше ввиду наличия в алгоритме некоторой последовательной (непараллелизуемой) части. Связь максимального ускорения с долей последовательных вычислений  $\beta$  дается известным законом Амдала (напр. [52]):

$$S_P = \frac{P}{1 + \beta \cdot (P - 1)}, \quad E_P = \frac{1}{1 + \beta \cdot (P - 1)} \quad (3.90)$$

Как следует из (3.90), с ростом числа ядер  $P$  эффективность их использования снижается, а коэффициент ускорения асимптотически приближается к  $S_{max} = 1/\beta$ . При этом значение  $P_{0.5}$  (3.91), отвечающее эффективности  $E_P = 0.5$ , можно считать неким ориентиром для разумного верхнего предела числа используемых ядер.

$$P_{0.5} = 1 + \frac{1}{\beta} \quad (3.91)$$

Строго говоря, закон Амдала дает оценку возможного ускорения расчета на идеальной вычислительной системе с независимыми процессорами и мгновенной передачей данных между ними. Однако с его помощью можно попытаться найти «эффективное» значение  $\beta$  по измеренным значениям ускорения  $S_P$  с тем, чтобы оценить потенциальные возможности параллельной программы в реальных условиях. Результаты одного такого теста показаны на рисунке 3.12, где представлены данные по ускорению кода SINF в зависимости от числа процессов при решении задачи о течении жидкости в квадратной каверне с движущейся крышкой. Расчеты проводились в 2003 г. на кластере с весьма скромными по современным меркам параметрами: 12 двухпроцессорных узлов Pentium-III 1.2 ГГц, связанных сетью Myrinet со скоростью передачи данных до 2 Гбит/с. С учетом доступного числа процессоров расчетная сетка состояла из 24 одинаковых блоков (по 4000 ячеек в каждом блоке); во всех расчетах было обеспечено равномерное распределение блоков по процессам.

Как видно из рисунка 3.12, в данном случае при использовании 24-х процессоров достигнуто 20-кратное ускорение расчета (эффективность  $E_P = 0.84$ ). При этом полученная зависимость ускорения от числа процессов соответствует закону Амдала (3.90) со значением  $\beta = 0.008$ , что дает оценку числа эффективно используемых процессоров  $P_{0.5} = 126$  (фактически, на момент проведения теста доступных кластеров такой мощности еще не было). Даже сейчас такая эффективность параллелизации гидродинамических расчетов считается очень неплохой (хотя и не выдающейся), а в то

<sup>1</sup> Иногда наблюдается т.наз. суперлинейное ускорение ( $S_P > P$ ), которое может быть обусловлено, например, более эффективным использованием локального кэша ядер мелкими блоками.

время, к примеру, набиравший популярность коммерческий пакет Fluent (версия 6) мог эффективно использовать не более трех (!) процессоров.

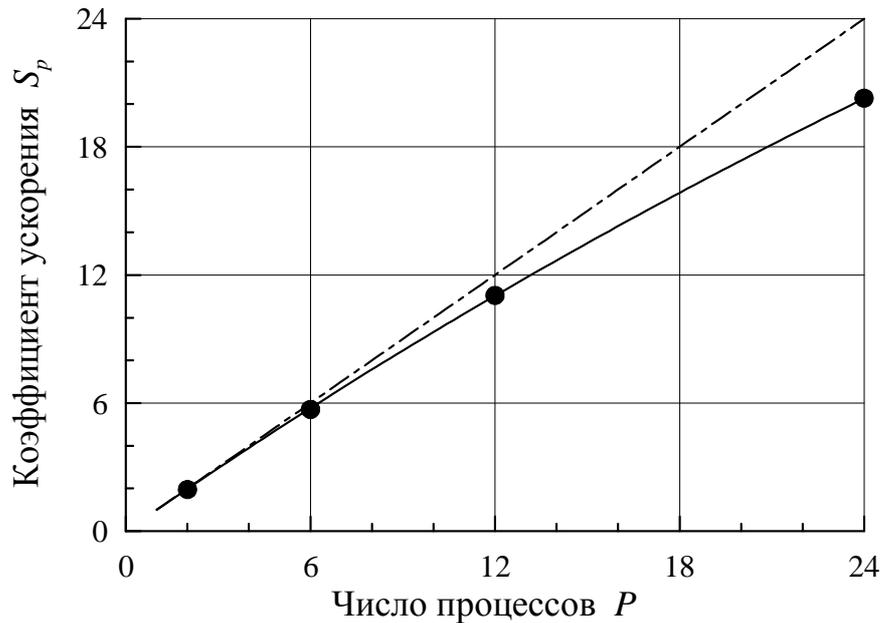


Рисунок 3.12 – Оценка качества распараллеливания кода SINF: точки – фактическое ускорение расчета, сплошная линия – закон Амдала (3.90) при  $\beta = 0.008$

Следует отметить, что вышеприведенные результаты получены с привлечением для решения уравнения неразрывности метода искусственной сжимаемости (см. разд. 3.2.2). При использовании метода SIMPLEC в аналогичных тестах того времени (напр. [14]) эффективность получалась несколько хуже ( $\beta \approx 0.03$ ), поскольку решение уравнения Пуассона для поправки давления в этом методе требует большого числа дополнительных стыковок при относительно малом (по сравнению с другими уравнениями) объеме вычислений внутри блока. На более современных кластерах с высокоскоростной сетью Infiniband эффективность параллелизации почти не зависит от используемого метода решения уравнения неразрывности (представляемые ниже результаты получены с использованием метода SIMPLEC).

Как показывает опыт расчетов, для современных кластеров с многоядерными процессорами существенное влияние на эффективность может оказывать также степень загрузки процессоров. Показательны в этом отношении результаты теста<sup>1</sup>, представленные на рисунке 3.13. Расчеты проводились на кластере, имеющем в своем составе 8 узлов по два 4-х ядерных процессора Xeon 2.5 ГГц с сетью Infiniband 10 Гбит/с. С учетом доступного числа ядер расчетная сетка состояла из 64 одинаковых блоков (по  $32^3$  ячеек), что позволяло обеспечивать равномерную загрузку  $2^n$  процессоров.

<sup>1</sup> Тест 2010 г. Решалась задача о естественной конвекции в кубической полости.

Как можно видеть из рисунка 3.13, в данном тесте эффективность параллелизации практически не зависит от числа задействованных узлов кластера (при фиксированном числе процессов на узел), т.е. время межпроцессорного обмена пренебрежимо мало по сравнению с временем вычислений. При этом, если на каждом узле запускается один или два процесса (не более одного на процессор), то эффективность близка к единице. При запуске на узле 4-х процессов эффективность составляет 0.75 (иными словами, из 4-х задействованных ядер в среднем работают только три). Наконец, при полной загрузке процессоров (8 процессов на узел) эффективность падает до 0.41, т.е. в среднем по-прежнему работают лишь три ядра. Можно предположить, что в данном случае ядра одного процессора в той или иной форме конкурируют между собой за доступ к памяти, что и приводит к фактическому замедлению их работы при увеличении загрузки процессора.

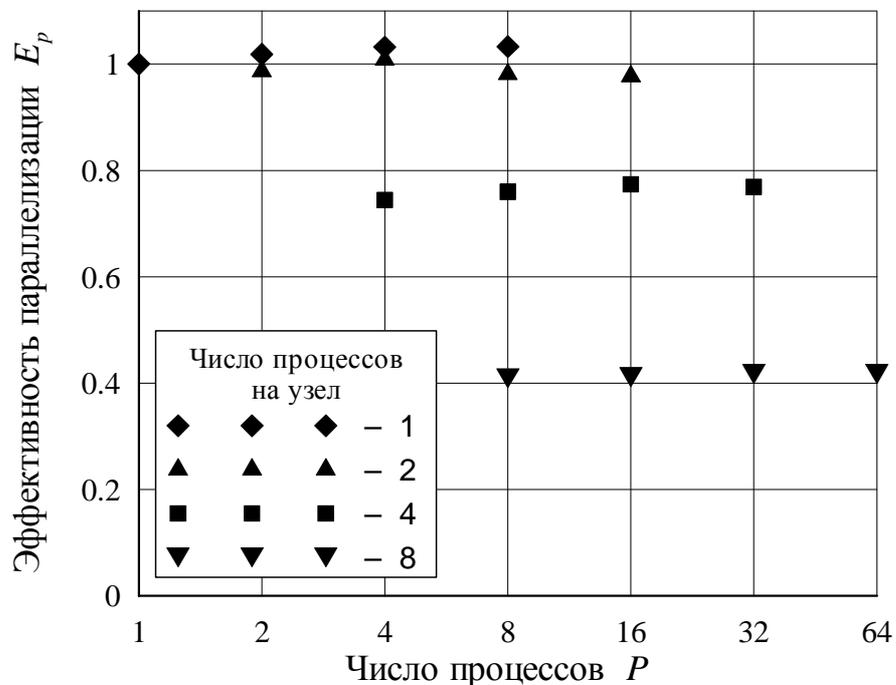


Рисунок 3.13 – Эффективность параллелизации кода SINF в зависимости от числа процессов и их распределения по узлам кластера

Сходные явления наблюдались при выполнении того же теста на более современном кластере, узлы которого имеют по четыре 16-ядерных процессора Opteron 2.3 ГГц и связаны сетью InfiniBand 40 Гбит/с. Для проведения теста было выделено 4 узла; в пределах каждого узла запускаемые процессы распределялись по процессорам последовательно (с циклическим сдвигом). Результаты теста представлены на рисунке 3.14. Как можно видеть, в данном случае при запуске на каждом узле до 16 процессов (не более 4-х на процессор) эффективность параллелизации практически не зависит от распределения процессов по узлам и соответствует закону Амдала (3.90) со значением

$\beta = 0.0055$ . При половинной загрузке процессоров (32 процесса на узел) эффективность снижается почти на 25%. При полной загрузке процессоров (все 64 процесса запущены на одном узле) эффективность падает еще в три раза<sup>1</sup>, так что ускорение расчета получается даже меньше, чем при запуске 16 процессов. Таким образом, аналогично предыдущему тесту, с ростом числа процессов, запускаемых на одном узле (процессоре), эффективность параллелизации падает, а при использовании всех ядер процессора реально работает менее половины из них.

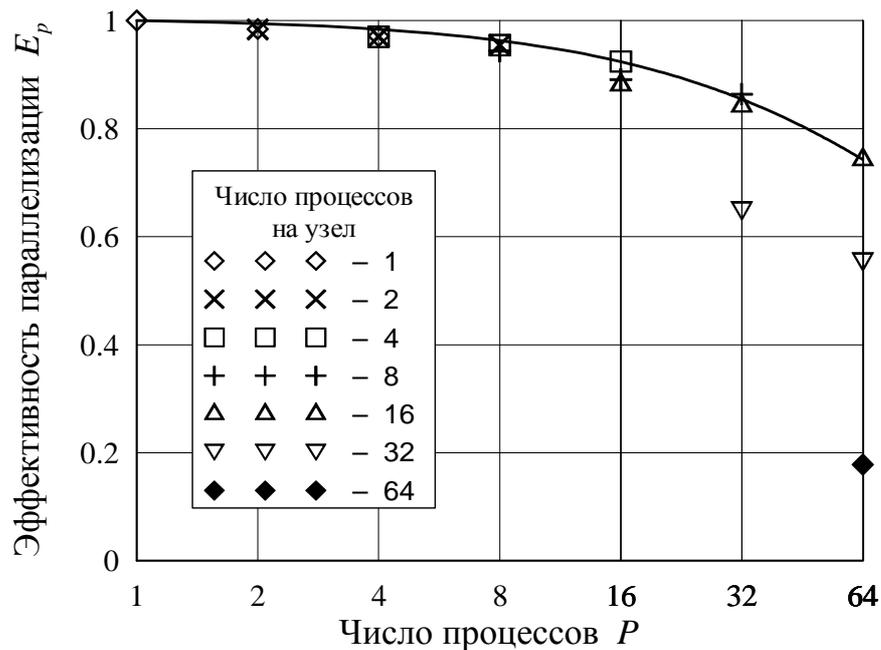


Рисунок 3.14 – Эффективность параллелизации кода SINF в зависимости от числа процессов и их распределения по узлам кластера: символы – фактические данные, линия – закон Амдала (3.90) при  $\beta = 0.0055$

Подводя итог, можно сказать, что распараллеливание вычислений в коде SINF выполнено на достаточно высоком уровне, а одним из «узких мест» на пути к потенциально достижимой эффективности параллельных расчетов являются специфические особенности используемого кластера.

<sup>1</sup> Снижения эффективности при переходе от половинной к полной загрузке процессоров удавалось избежать, если вместо «привязки» запускаемых процессов к процессорам (опция bind-to-socket) использовать режим «привязки» к ядрам (bind-to-core). Однако такой режим оказывался менее эффективным при меньшей загрузке процессоров. Кроме того, его использование чревато сильным замедлением расчета, если на используемом узле запущен любой дополнительный расчет, пусть даже непараллельный.

### 3.4 Специализированные алгоритмы ПК SINF

Большая часть из представленных выше численных методов базового кода SINF используется и в созданных на его основе специализированных кодах. Однако в ряде случаев специфика математических моделей этих кодов потребовала разработки специальных алгоритмов, описанию которых и посвящен данный раздел.

#### 3.4.1 Проведение расчетов на деформируемых сетках

Как уже говорилось, в специализированном коде SINF-ALE для обеспечения возможности проведения гидродинамических расчетов в областях с изменяющейся геометрией использован метод деформируемых сеток, удачно сочетающий простоту реализации, точность и универсальность. В данном методе расчетная сетка деформируется в соответствии с движением обтекаемой поверхности, так что для внедрения метода в имеющийся гидродинамический код требуется решить, как минимум, две задачи – обеспечить аппроксимацию уравнений гидродинамики на подвижной сетке и разработать алгоритм деформации сетки. Ниже представлены соответствующие элементы численной методики кода SINF-ALE.

##### Метод аппроксимации уравнений

Особенности аппроксимации уравнений гидродинамики на деформируемой сетке можно рассмотреть на примере «стандартного» уравнения конвективно-диффузионного переноса (3.1), описывающего баланс некой величины  $\phi$  в произвольном объеме  $\Omega$ , ограниченном поверхностью  $S = \sum S_m$  с внешней нормалью  $\mathbf{n}$ :

$$\int_{\Omega} \frac{\partial \rho \phi}{\partial t} d\Omega + \int_S \rho \phi \mathbf{V} \cdot \mathbf{n} dS = \int_{\Omega} \Phi d\Omega + \int_S \mathbf{n} \cdot (\Gamma \nabla \phi) dS \quad (3.92)$$

Если объем  $\Omega$  движется, первое слагаемое в уравнении (3.92) можно преобразовать к более удобному для аппроксимации виду, используя трехмерный аналог правила Лейбница для производной от интеграла с переменными пределами:

$$\frac{d}{dt} \int_{\Omega} \phi d\Omega = \int_{\Omega} \frac{\partial \phi}{\partial t} d\Omega + \int_S \phi \frac{d\mathbf{r}_b}{dt} \cdot \mathbf{n} dS = \int_{\Omega} \frac{\partial \phi}{\partial t} d\Omega + \int_S \phi \mathbf{v}_b \cdot \mathbf{n} dS \quad (3.93)$$

Здесь  $\mathbf{r}_b$  – радиус-вектор точки на поверхности объема, а  $\mathbf{v}_b = d\mathbf{r}_b/dt$  – местная скорость движения поверхности. Подстановка (3.93) в (3.92) дает искомое уравнение баланса величины  $\phi$  в произвольном движущемся (деформирующемся) объеме  $\Omega$ , который в данный момент времени ограничен контрольной поверхностью  $S$ :

$$\frac{d}{dt} \int_{\Omega} \rho \phi d\Omega + \int_S \rho \phi (\mathbf{V} - \mathbf{v}_b) \cdot \mathbf{n} dS = \int_{\Omega} \Phi d\Omega + \int_S \mathbf{n} \cdot (\Gamma \nabla \phi) dS \quad (3.94)$$

При  $\mathbf{v}_b = 0$  уравнение (3.94) переходит в соответствующее уравнение для неподвижного объема; в случае  $\mathbf{v}_b = \mathbf{V}$  (объем движется вместе с жидкостью) получаем уравнение в форме Лагранжа. Учитывая произвольность движения объема  $\Omega$ , запись балансовых уравнений в виде (3.94) часто называют *ALE* (Arbitrary Lagrangian-Eulerian) формулировкой.

Формально, как следует из сравнения уравнений (3.92) и (3.94), для внедрения расчета на деформируемой сетке в существующий код требуется лишь слегка изменить вычисление конвективных потоков и производной по времени. Нетривиальным моментом при дискретизации уравнения (3.94) является необходимость выполнения кинематического тождества (3.95), непосредственно следующего из (3.93) при  $\phi = 1$ . Нарушение данного требования приводит к появлению в уравнениях баланса массы, импульса и др. паразитных источников, обусловленных деформацией сетки, что чревато искажением численного решения (см., например, [127]).

$$\frac{d}{dt} \int_{\Omega} d\Omega = \int_S \mathbf{v}_b \cdot \mathbf{n} dS \quad (3.95)$$

Фактически, соотношение (3.95) накладывает ограничение на способ вычисления скорости движения сетки  $\mathbf{v}_b$ , который должен быть согласован со способом аппроксимации поверхностных интегралов и производных по времени в уравнении (3.94); наиболее очевидный подход – прямое дифференцирование координат сетки – в данном случае неприемлем.

При использовании квадратурных формул (3.2) и неявной трехслойной схемы второго порядка точности по времени (3.39), дискретный аналог соотношения (3.95) для ячейки расчетной сетки может быть записан в следующем виде:

$$\frac{3\Delta\Omega^N - \Delta\Omega^{N-1}}{2\Delta t} = \sum_m (\mathbf{v}_b \cdot \mathbf{n})_m S_m \quad (3.96)$$

Здесь  $\Delta\Omega^N = \Omega^{N+1} - \Omega^N$  – приращение объема ячейки при переходе с временного слоя  $N$  на слой  $N+1$ . Из геометрических соображений ясно, что приращение объема ячейки равно алгебраической сумме объемов, ометаемых гранями ячейки (см. рисунок 3.15а):

$$\Delta\Omega^N = \sum_m \delta\Omega_m^N \quad (3.97)$$

Подстановка последнего равенства в уравнение (3.96) приводит к соотношению (3.98а), которое и определяет «правильный» способ вычисления скорости движения грани  $v_b$  при аппроксимации уравнения (3.94). Аналогично, при использовании схемы первого порядка точности по времени (3.38) ( $d\Omega/dt \approx \Delta\Omega^N/\Delta t$ ) получим для скорости движения грани выражение (3.98б):

$$(\mathbf{v}_b \cdot \mathbf{n})_m S_m = \frac{3\delta\Omega_m^N - \delta\Omega_m^{N-1}}{2\Delta t} \quad (3.98a)$$

$$(\mathbf{v}_b \cdot \mathbf{n})_m S_m = \frac{\delta\Omega_m^N}{\Delta t} \quad (3.98b)$$

Подчеркнем, что тождество (3.95) и вытекающие из него соотношения (3.98) регламентируют способ вычисления нормальной составляющей скорости движения сетки на грани ячейки. Касательная составляющая скорости, которая фактически используется лишь в граничных условиях на движущейся поверхности, может быть определена простым дифференцированием координат сетки.

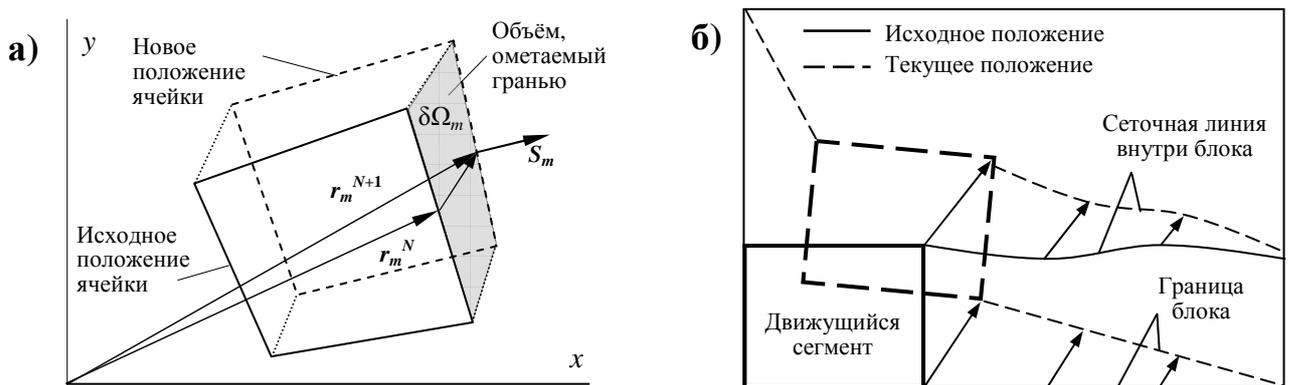


Рисунок 3.15 – К организации расчета на деформируемой сетке: а) положение двумерной ячейки на двух слоях по времени и объем ометаемый гранью ячейки, б) деформация блока структурированной сетки при движении выделенного сегмента

### Алгоритм деформации расчетной сетки

Необходимым элементом расчета на деформируемой сетке является алгоритм деформации сетки в соответствии с движением границ расчетной области. В частности, находят применение модели, в которых сетка трактуется как некая упругая система (см. напр. [191]). Подобные подходы достаточно универсальны, но требуют дополнительных итераций для отыскания текущего «равновесного» состояния сетки. Для реализации в коде SINF-ALE был разработан более простой и эффективный алгоритм, ориентированный на использование блочно-структурированных сеток.

Разработанный алгоритм деформации исходит из того, что в рассматриваемом блоке определен сегмент сетки, координаты всех узлов которого в данный момент времени известны. Сегмент может покрывать весь блок, занимать некоторую область внутри блока или располагаться непосредственно на его поверхности; возможно также задание сразу двух сегментов, расположенных на противоположащих гранях блока, что необходимо для деформации многоблочных сеток. Деформация сетки осуществляется путем поочередного смещения узлов на сеточных линиях, идущих от выделенного сегмента к границам блока. Для каждой сеточной линии вектор смещения задается разностью текущего и исходного положения соответствующего узла на границе сегмента и линейно уменьшается до нуля по мере приближения к границе блока (см. рисунок 3.15б). После обработки всех сеточных линий одного индексного направления процедура повторяется для линий другого направления, причем узлы сетки, координаты которых были определены на предыдущем этапе, включаются в состав сегмента, что обеспечивает последовательное смещение всех узлов сетки.

Нетрудно видеть, что в рамках описанного алгоритма текущие координаты узлов сетки определяются их исходным положением и заданным смещением выделенного сегмента; промежуточные положения сетки никак не сказываются на конечном результате. Алгоритм чрезвычайно экономичен – смещение узлов рассчитывается без итераций, по простым алгебраическим формулам, причем каждый узел смещается только один раз. Несмотря на то, что вычисления в каждом блоке выполняются независимо, алгоритм обеспечивает совместность деформации смежной границы соприкасающихся блоков. Достоинством алгоритма является также возможность задания движения не только на границе блока, но и в некотором примыкающем объеме, что позволяет, в частности, избежать ухудшения качества сетки вблизи поверхности движущегося тела. К недостаткам метода можно отнести отсутствие контроля за качеством получаемой сетки.

В коде SINF-ALE конфигурация движущихся сегментов и параметры их движения задаются в специальном управляющем файле. Предусмотрена возможность задания простейших форм движения сегмента (линейное смещение, вращение, гармонические колебания и др.); не составляет большого труда запрограммировать любую другую форму предписанного движения. Также реализована возможность решения отдельных задач аэроупругости – с определением текущего положения сегмента на основании решения дополнительной задачи о движении или деформации рассматриваемого тела с учетом действующих на него гидродинамических нагрузок; соответствующие примеры даны в разд. 5.1.2.

### Тестирование численной методики

Для проверки правильности реализации методики аппроксимации уравнений гидродинамики на деформируемой сетке был решен ряд тестовых задач. В первой серии тестов были рассмотрены стационарные потоки, которые, однако, рассчитывались как нестационарные из-за искусственной деформации сетки внутри расчетной области. При этом использовались схемы как первого, так и второго порядка точности по времени, а также различные опции численной диссипации и разные виды стыковки блоков. В качестве примера на рисунке 3.16 показаны результаты расчета течения в квадратной камере с движущейся крышкой.

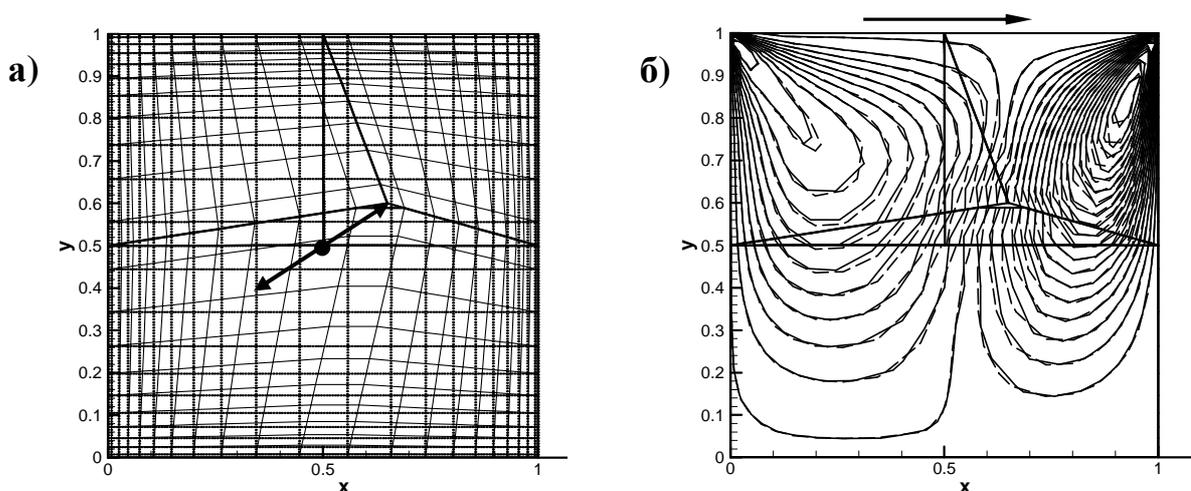


Рисунок 3.16 – Расчетная сетка (а) и изолинии вертикальной составляющей скорости (б) в камере с движущейся крышкой при  $Re=100$ , в моменты времени с максимальной (сплошные линии) и с нулевой (пунктир) деформацией сетки

Расчет проводился на трёхблочной сетке (рисунок 3.16а), деформация которой задавалась движением точки, находящейся на пересечении границ блоков: выбранная точка колебалась под углом  $30^\circ$  с относительной амплитудой 0.2 и единичной частотой. На рисунке 3.16б представлены мгновенные поля скорости, полученные для двух моментов времени, отвечающих максимальной и нулевой деформации сетки. Видно, что поля немного отличаются друг от друга, но на общую картину течения это не влияет. Как показал более детальный анализ, отмеченное различие полей обусловлено, главным образом, погрешностью аппроксимации на сравнительно грубой скошенной сетке, на фоне которой возмущения, создаваемые движением сетки, незначительны.

В качестве второго теста использовалась задача о внезапном приведении в движение тела в безграничной жидкости (рассматривалось поперечное обтекание цилиндра и шара). Задача решалась в двух математически эквивалентных постановках – в абсолютной и в относительной системе отсчета. В первом случае тело движется с постоянной скоростью в изначально покоившейся жидкости (при этом расчетная сетка

деформируется в соответствии с движением тела). Во втором – тело неподвижно (сетка фиксирована), а вся жидкость начинает движение с заданной скоростью. Сопоставление полученных нестационарных решений проводилось как по параметрам потока в точках мониторинга, так и по интегральным характеристикам – гидродинамической нагрузке на тело, времени возникновения отрыва и др.

Во всех случаях возмущения, вносимые в решение движением сетки, не превышали погрешностей аппроксимации.

### **3.4.2 Аппроксимация уравнений при расчете течений жидкости со свободной поверхностью**

В данном разделе представлены специальные схемы аппроксимации определяющих уравнений в коде SINF-FS, обеспечившие значительное улучшение точности моделирования течений жидкости со свободной поверхностью по методу VOF (см. разд. 2.2.1) благодаря снижению чувствительности результатов расчета к густоте расчетной сетки и шагу по времени.

#### *Выбор схемы для уравнения переноса маркер-функции*

Важным элементом программной реализации метода VOF в специализированном коде SINF-FS является способ аппроксимации уравнения переноса маркер-функции (2.41). Использование для интерполяции на грань ячейки обычных противопоточных аппроксимаций (см. разд. 3.1.2) приводит к сильному «размытию» межфазной границы из-за численной диффузии. Для уменьшения данного нежелательного эффекта в литературе предложен ряд специальных «сжимающих» схем. По результатам специально проведенного комплексного тестирования [16], для реализации в коде SINF-FS была отобрана недавно предложенная сжимающая схема M-CICSAM [202] в сочетании со схемой Кранка-Николсон для аппроксимации производной по времени. Среди опробованных схем (в числе которых были, в частности, доступные в коде Fluent схемы HRIC [166] и CICSAM [197]), такая комбинация обеспечила наименее жесткие ограничения как по густоте и качеству расчетной сетки, так и по шагу по времени (числу Куранта).

В качестве иллюстрации преимуществы схемы M-CICSAM перед другими схемами на рисунке 3.17 представлены результаты расчета сноса круглого «пятна» жидкости однородным потоком. Расчет проводился на сравнительно грубой декартовой сетке (на диаметр круга приходилось всего 12 ячеек); шаг по времени соответствовал числу Куранта  $CFL = V\Delta t/\Delta l \approx 0.3$ ; смещение «пятна» за время расчета составляло примерно восемь диаметров. На рисунке показана конечная форма «пятна», полученная при

использовании трех вышеупомянутых сжимающих схем. Как можно видеть, в отличие от семы M-CICSAM (рисунок 3.17а), схемы CICSAM и HRIC не обеспечили сохранение формы «пятна», которое фактически из круга превратилось в квадрат. Более того, при увеличении шага по времени до  $CFL = 0.7$  в расчете по схеме CICSAM наблюдалось сильное размытие межфазной границы (более, чем на половину диаметра пятна), а при использовании схемы HRIC численная диффузия привела к полному размытию пятна (максимальное значение маркер-функции  $C$  опустилось ниже уровня 0.5), тогда как схема M-CICSAM дала практически такой же результат, как на рисунке 3.17а.

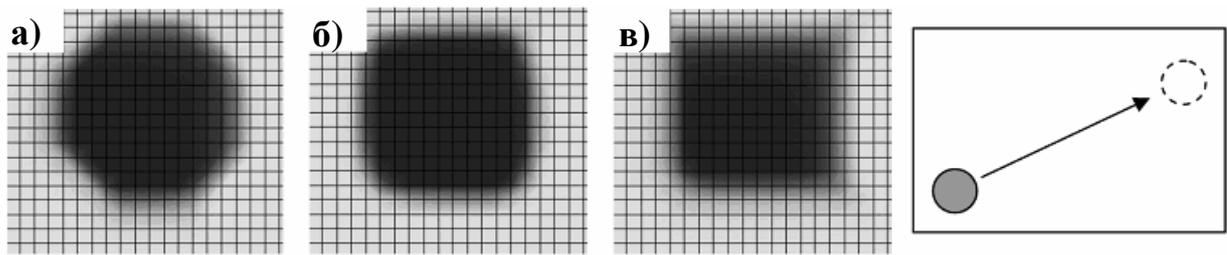


Рисунок 3.17 – Итоговая форма изначально круглого «пятна» в однородном потоке: расчет по схеме M-CICSAM (а), CICSAM (б) и HRIC (в)

#### Разработка схемы аппроксимации уравнений гидродинамики

Нетривиальным моментом реализации метода VOF оказался также способ аппроксимации конвективной части уравнений гидродинамики (прежде всего, уравнения движения (2.42)). Ведь плотность среды в окрестности границы жидкость-газ изменяется на несколько порядков, так что способ интерполяции плотности на грань ячейки при вычислении конвективных потоков может сильно влиять на их значения, а значит, и на решение в целом. Поясним сказанное на примере уравнения конвективно-диффузионного переноса (2.30), «обычная» аппроксимация конвективной части которого по методу конечного объема (см. разд. 3.1.2) может быть представлена следующим образом:

$$\frac{\partial \rho \phi}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{V} \phi) \approx \left( \frac{\partial \rho \phi}{\partial t} \right)_P + \frac{1}{\Omega} \sum_m \rho_m Q_m^{vol} \phi_m \quad (3.99)$$

Здесь  $Q_m^{vol} = (\mathbf{V} \cdot \mathbf{S})_m$  – объемный расход через грань ячейки, который вычисляется при аппроксимации уравнения неразрывности (2.40) (с введением стабилизирующей поправки Рхи-Чоу [173], см. (3.34)) и используется для расчета конвективных потоков во всех остальных уравнениях, включая уравнение переноса маркер-функции (2.41).

Подчеркнем, что потоки  $Q_m^{vol}$  обеспечивают выполнение условия несжимаемости (2.40) в (сошедшемся) численном решении, что необходимо для использования

консервативной формы записи (2.41) конвективного уравнения (2.38). С другой стороны, консервативная форма записи (3.99) конвективных слагаемых уравнения конвективно-диффузионного переноса (2.30) предполагает, что в численном решении выполнено уравнение баланса массы (2.1а) – в противном случае в уравнении (2.30) появится паразитный источник. Фактически данное требование означает необходимость использовать согласованные аппроксимации для  $C$  в уравнении (2.41) и  $\rho$  в выражении (3.99), например, как это делалось в работе [196], где для аппроксимации производной по времени в обоих уравнениях применялась одна и та же схема, а при вычислении потоков импульса через грани ячеек использовались значения плотности, вычисленные согласно (2.39а) через значения величины  $C$  на тех же гранях.

В коде SINF-FS по ряду причин было решено отказаться от данной концепции. В частности, поскольку ограничение на шаг по времени для уравнений гидродинамики мягче, чем для уравнения переноса маркер-функции (2.41), в коде предусмотрена возможность на каждом шаге по времени для уравнений гидродинамики выполнять несколько дробных шагов (со значением числа Куранта  $CFL \approx 0.5$ ) для уравнения (2.41). Чтобы уйти от необходимости согласовывать аппроксимации уравнений, можно, как это делается в некоторых работах, записать левую часть уравнения (2.30) в неконсервативной форме (3.100а) или в форме (3.100б) (последняя следует из (3.100а) с учетом (2.40)). В обеих формулировках плотность не входит под знак производной, так что вопрос о способе интерполяции плотности на грань ячейки отпадает.

$$\rho \frac{\partial \phi}{\partial t} + \rho \mathbf{V} \cdot \nabla \phi \approx \rho_P \left( \frac{\partial \phi}{\partial t} \right)_P + \frac{\rho_P \mathbf{V}_P}{\Omega} \cdot \sum_m \mathbf{S}_m \phi_m \quad (3.100a)$$

$$\rho \frac{\partial \phi}{\partial t} + \rho \nabla \cdot (\mathbf{V} \phi) \approx \rho_P \left( \frac{\partial \phi}{\partial t} \right)_P + \frac{\rho_P}{\Omega} \sum_m Q_m^{vol} \phi_m \quad (3.100b)$$

Однако, как выяснилось в ходе методических расчетов, даже в случаях относительно простых течений использование схем (3.100) для аппроксимации конвективной части уравнения движения (2.42) приводит к сильной деформации межфазной границы. В качестве примера, на рисунке 3.18 приведены результаты решения модельной двумерной задачи о падении круглого «пятна» жидкости в воздухе под действием силы тяжести. Расчеты велись с достаточно малым шагом по времени (число Куранта  $CFL < 0.25$ ) чтобы погрешность аппроксимации по времени можно было считать пренебрежимо малой. Тем не менее, для обеих схем (3.100) уже после перемещения пятна на расстояние, меньшее его диаметра, обнаруживаются заметные нефизичные искажения формы пятна, обусловленные неточным соблюдением баланса импульса в ячейках расчетной сетки.

В коде SINF-FS для ухода от требований, предъявляемых к способу интерполяции плотности, использован оригинальный подход [18], в котором конвективная часть уравнения (2.30) записана в форме (3.101), получающейся путем вычитания из (3.99) уравнения неразрывности (2.1а), умноженного на  $\phi$  (во втором и третьем слагаемом аппроксимации (3.101) используется один и тот же способ вычисления плотности  $\rho_m$  на гранях). Благодаря такому вычитанию частично компенсируются ошибки, связанные с неточным выполнением условия баланса массы в ячейке сетки.

$$\rho \frac{\partial \phi}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{V} \phi) - \phi \nabla \cdot (\rho \mathbf{V}) \approx \rho_p \left( \frac{\partial \phi}{\partial t} \right) + \frac{1}{\Omega} \sum_m \rho_m \mathcal{Q}_m^{vol} \phi_m - \frac{\phi_p}{\Omega} \sum_m \rho_m \mathcal{Q}_m^{vol} \quad (3.101)$$

Результаты расчетов с использованием схемы (3.101) приведены на рисунке 3.18 (точечная линия 3). Видно, что искажения формы пятна практически отсутствуют. При этом одной линией отображены визуально неотличимые результаты двух расчетов с разными способами вычисления значений плотности  $\rho_m$  на гранях ячеек: по соответствующим значениям маркер функции  $C_m$  (как это необходимо при использовании аппроксимации (3.99)) и как среднее геометрическое плотностей в центрах смежных ячеек. Таким образом, дискретизация, основанная на записи конвективной части уравнений гидродинамики в форме (3.101), обеспечивает высокое качество решения и его малую чувствительность к способу вычисления плотности на гранях ячеек.

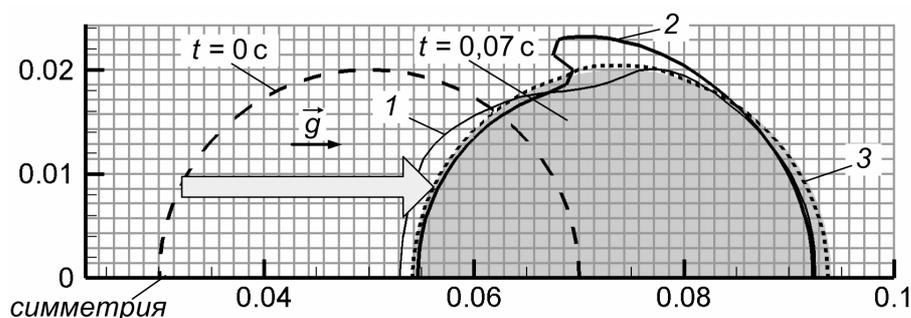


Рисунок 3.18 – Искажение формы падающего круглого пятна: 1 – расчет по схеме (3.100а), 2 – (3.100б), 3 – (3.101); фоновой заливкой показано неискаженное пятно

### Сравнительная оценка точности разработанной численной методики

В качестве теста, подтверждающего высокую точность разработанной численной методики расчета течений со свободной поверхностью, рассмотрим модельную задачу о натекании потока воды, возникшего в результате обрушения «дамбы», на прямоугольное препятствие (см. рисунок 3.19). В начальный момент времени вода занимает объем  $1.2 \times 0.55$  м у левой торцевой стенки канала. Удерживающая воду

вертикальная перегородка мгновенно убирается и жидкость под действием силы тяжести начинает растекаться по каналу в направлении прямоугольного препятствия высотой 16 см, расположенного на дне канала на расстоянии 2.37 м от его левого торца<sup>1</sup>. После удара о препятствие, головная часть потока сначала взлетает вверх, а затем начинает падать, принимая к моменту времени  $t = 1.2$  с характерную форму, показанную на рисунке. Степень чувствительности этой конечной формы свободной поверхности к густоте расчетной сетки и являлась предметом проверки в представляемом тесте.

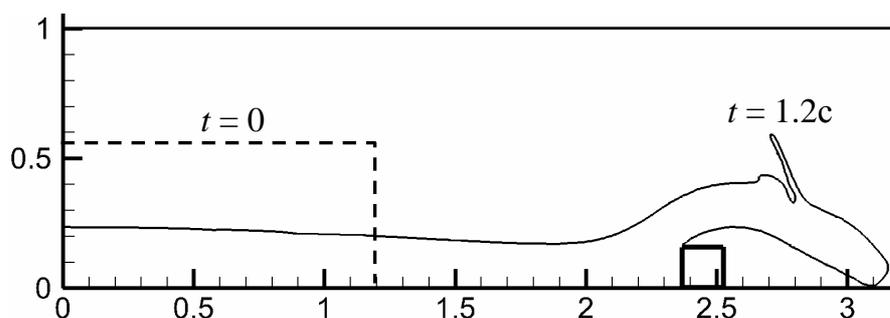


Рисунок 3.19 – Натекание потока после обрушения «дамбы» на препятствие (схема)

Расчеты были проведены с помощью ПК SINF и коммерческого пакета ANSYS Fluent (версия 13) на трех равномерных декартовых сетках с шагами  $\Delta = 0.5, 1$  и  $2$  см по обоим направлениям. Основываясь на данных предварительных тестов, шаг по времени  $\Delta t$  в каждом из расчетов был достаточно малым, чтобы его влиянием на итоговый результат можно было пренебречь: в расчетах SINF для трех упомянутых сеток шаг  $\Delta t$  составлял 0.001, 0.002 и 0.004 с соответственно (типичные значения числа Куранта 0.8), в расчетах Fluent<sup>2</sup> приходилось задавать шаг по времени на порядок меньше.

Полученные в разных расчетах конфигурации свободной поверхности жидкости (изолинии объемной доли жидкости  $C = 0.5$ ) на момент времени  $t = 1.2$  с показаны на рисунке 3.20. Видно, что решение, полученное с помощью ПК SINF на средней сетке ( $\Delta = 1$  см), можно считать уже почти сеточно-сошедшимся, тогда как для коммерческого пакета Fluent даже более мелкая сетка ( $\Delta = 0.5$  см) является еще явно недостаточной.

В целом, по результатам теста можно заключить, что реализованная в ПК SINF оригинальная численная методика расчета течений со свободной поверхностью менее требовательна к густоте расчетной сетки и шагу по времени, чем аналогичная (по назначению и возможностям) схема коммерческого пакета Fluent.

<sup>1</sup> Геометрические параметры отвечают условиям эксперимента MARIN, в котором, однако, препятствие занимало лишь часть ширины канала. Результаты соответствующих трехмерных расчетов, выполненных с помощью ПК SINF, представлены в работах [18, 41].

<sup>2</sup> Использовалась лучшая из реализованных в пакете Fluent схема расчета течений со свободной поверхностью – метод геометрической реконструкции свободной поверхности в сочетании с безытерационным методом дробных шагов для продвижения по времени.

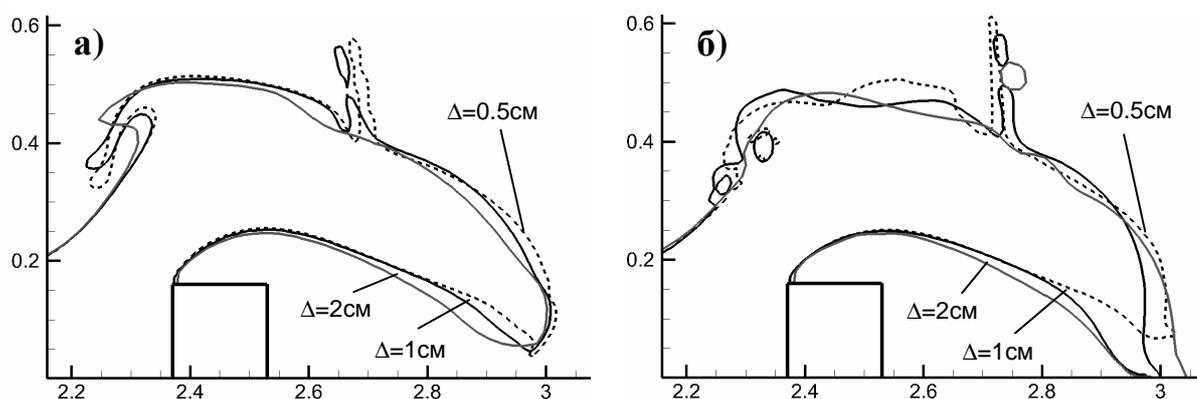


Рисунок 3.20 – Натекание потока на препятствие: форма свободной поверхности на момент времени  $t = 1.2$  с, полученная в расчетах SINF (а) и Fluent (б) на разных сетках

### 3.4.3 Решение уравнений низкоскоростного течения парогазовой среды с конденсацией

Специализированный код ПГС-ТК, разработанный для моделирования процессов теплопереноса в защитной оболочке (ЗО) АЭС, унаследовал от базового кода SINF большую часть численных схем и алгоритмов, описанных в разд. 3.1 и п.3.2. Однако специфика разработанной математической модели (разд. 2.2.3), помимо увеличения числа решаемых уравнений, потребовала и некоторой доработки численной методики. Рассмотрим лишь наиболее важные из этих нововведений.

#### Алгоритм определения давления в замкнутом объеме

Одной из особенностей математической модели кода ПГС-ТК (см. разд. 2.2.3) является наличие двух формально независимых давлений: избыточного давления  $p^*$  в уравнении движения (2.49б) и абсолютного давления  $p_a$  (характерный уровень давления) в уравнении состояния (2.52). При этом уравнения (2.49) позволяют рассчитать течение (и, в частности, найти распределение избыточного давления  $p^*$ ) при любом уровне давления  $p_a$ . В условиях повышения давления в объеме ЗО АЭС за счет нагрева и подачи пара и/или газа, для определения текущего уровня давления  $p_a$  требуется дополнительное условие, которое, по сути, выражает интегральный баланс массы в расчетной области.

С учетом герметичности ЗО АЭС, в коде ПГС-ТК реализован оригинальный алгоритм определения текущего уровня давления  $p_a$  [20, 40], основанный на условии сохранения массы одного из компонентов смеси. Обычно таким «стационарным» компонентом является воздух (или азот, если требуется моделировать «сжигание» кислорода в рекомбинаторах водорода). Начальная масса воздуха определяется при заданном начальном давлении, температуре и составе смеси, после чего на каждой

глобальной итерации уровень давления  $p_a$  корректируется так, чтобы обеспечить ту же массу воздуха при текущем распределении температуры и концентрации компонентов смеси.

Данный алгоритм применим как для стационарных, так и для нестационарных задач. Он обеспечивает правильное изменение давления как при изменении массы смеси (например, за счет подачи и/или конденсации пара), так и при изменении температуры (в т.ч. при адиабатическом нагреве, связанном с увеличением массы). Разумеется, поддержание постоянной массы воздуха не предполагает его подвода и/или отвода; при необходимости, подачу воздуха в расчетную область можно моделировать, подавая примесь со свойствами воздуха. Один из тестов, подтверждающих правильную работу разработанного алгоритма, представлен в разделе 4.2 (рисунок 4.14).

### Реализация модели равновесной конденсации

Формально, реализованная в коде ПГС-ТК модель равновесной конденсации сводится к расчету доли конденсата  $w$  по известным значениям давления, температуры и концентрации компонентов парогазовой смеси (2.53). Однако при непосредственном применении выражений (2.53) для вычисления доли конденсата  $w$  наблюдалась расходимость глобального итерационного процесса решения определяющих уравнений (2.49), (2.51). Для стабилизации вычислений был разработан оригинальный алгоритм определения доли конденсата в ходе итераций [40], в который введена дополнительная «обратная связь». А именно, количество конденсата  $w^{n+1}$  на каждой итерации определяется с учетом того, как изменение  $w$  по сравнению с предыдущей итерацией скажется на температуре смеси (при неизменной энтальпии), причем соответствующая поправка вводится и в температуру:

$$w^{n+1} = w^n + \Delta w, \quad \Delta w = w(\bar{y}_s(T^{n+1})) - w^n, \quad T^{n+1} = T^* + \Delta w \cdot L/C_p \quad (3.102)$$

Здесь  $w(\bar{y}_s)$  – выражение (2.53а),  $T^*$  – температура, полученная в результате решения уравнения энергии (2.51) на текущей итерации,  $T^{n+1}$  – значение температуры, скорректированное с учетом изменения количества конденсата.

## Глава 4

### Тестирование ПК SINF

#### 4.1 Матрица тестирования

В процессе создания и развития ПК SINF проводилось тщательное тестирование всех реализуемых в нем моделей и алгоритмов. Ведь ошибки в любом элементе – будь то модель турбулентности или стыковка блоков – могут сделать расчетный код непригодным для использования. Проводимые тесты можно условно разделить на внутренние, подтверждающие корректность и само-согласованность алгоритмов кода, и внешние, демонстрирующие правильность получаемых результатов.

Тесты первой группы обычно не «привязаны» к конкретной задаче. Предметом проверки может быть, например, нечувствительность результатов расчета к нумерации индексов в блоках, правильность передачи данных на стыковках, корректное продолжение расчета с ранее сохраненного решения и т.п. Сюда же можно отнести эквивалентность решений, получаемых во вращающейся и в неподвижной системе отсчета (для осесимметричных задач) и/или при произвольных поворотах расчетной сетки в пространстве. Как правило, прохождение таких тестов считается само собой разумеющимся и не требующим «документального подтверждения».

Тесты второй группы направлены на подтверждение правильности реализации математической модели (т.наз. верификация) и проверку адекватности используемой модели (ее соответствие реальности; т.наз. валидация). Основой для верификации кода могут служить задачи с известным аналитическим или полуаналитическим решением, задачи, для которых в литературе имеются достаточно надежные «эталонные» численные решения, а также задачи, решение которых получено с помощью другого кода в рамках той же математической модели (кросс-верификация кодов). Валидация подразумевает сравнение численного решения задачи с данными эксперимента.

Конечно, как и любая классификация, деление тестов на верификационные и валидационные до некоторой степени условно. Ведь аналитические решения часто имеют прямое экспериментальное подтверждение, а для многих экспериментов в литературе имеются данные численных расчетов. Кроме того, в последнее время эталонные (benchmark) расчеты ламинарных течений нередко расцениваются как равноценная замена физическому эксперименту. То же относится к аккуратным DNS расчетам турбулентных течений, результаты которых часто используются для валидации RANS моделей турбулентности как данные численного «эксперимента».

В общей сложности, матрица тестирования ПК SINF включает около 50 задач. Ниже представлены наиболее важные тесты, среди которых расчеты стационарных и нестационарных, изотермических и неизотермических течений жидкости и газа (вплоть до сверхзвуковых скоростей), в том числе турбулентных, с эффектами плавучести и т.д. В совокупности, эти тесты обеспечивают достаточно полную и разностороннюю проверку всех основных элементов математической модели ПК SINF. За рамками настоящей работы оставлен ряд тестов, в проведении которых автор не принимал значимого участия (моделирование турбулентной конвекции в подогреваемых снизу полостях на основе вихреразрешающих подходов [47, 48], расчеты течения во вращающихся полостях [67, 74] и др.).

## 4.2 Сравнение с аналитическими и численными решениями

### *Развитое течение в кольцевом канале с эксцентриситетом*

Одним из самых простых случаев, для которых известно аналитическое решение уравнений Навье Стокса, является развитое (установившееся) стационарное течение несжимаемой вязкой жидкости по каналу постоянного сечения. При этом, как следует из уравнений Навье Стокса в предположении неизменности профилей скорости вдоль канала (напр., [79]), поперечные составляющие скорости равны нулю, градиент избыточного давления постоянен и направлен вдоль канала (в поперечном сечении канала давление не меняется), а распределение продольной составляющей скорости потока описывается уравнением Пуассона:

$$\mu \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) = \frac{dp}{dz} \quad (4.1)$$

Здесь  $w(x,y)$  – скорость потока (продольная составляющая),  $x,y$  – декартовы координаты в поперечном сечении канала,  $\mu$  – коэффициент вязкости,  $dp/dz$  – продольный градиент давления. Граничным условием для уравнения (2.1) является условие прилипания ( $w = 0$ ) на стенках канала. Градиент давления  $dp/dz$  может быть задан как параметр задачи или определен по заданному расходу.

Хорошо известны (напр., [79]) аналитические решения уравнения (4.1) для плоского и круглого каналов (течение Пуазейля), а также для каналов с сечением в форме кольца, равностороннего треугольника, эллипса и прямоугольника (в последнем случае решение записывается в виде бесконечного ряда).

Ниже представлен менее известный случай с решением в виде бесконечного ряда – кольцевой канал с эксцентриситетом (см. рисунок 4.1). В литературе предложено

несколько вариантов решения данной задачи [122, 181, 204], однако наиболее простое и компактное решение (напр., [175, 181]) получается при использовании биполярных координат  $(\alpha, \beta)$ , которые связаны с декартовыми координатами  $(x, y)$  соотношениями (4.2).

$$x = \frac{a \cdot \sinh(\alpha)}{\cosh(\alpha) - \cos(\beta)}, \quad y = \frac{a \cdot \sin(\beta)}{\cosh(\alpha) - \cos(\beta)}, \quad \begin{matrix} \alpha_2 \leq \alpha \leq \alpha_1 \\ 0 \leq \beta \leq 2\pi \end{matrix} \quad (4.2)$$

где 
$$a = \frac{R_2 - R_1}{2\varepsilon} \left[ \left( \frac{R_1 + R_2}{R_2 - R_1} - \varepsilon^2 \right)^2 - \left( \frac{2R_1\varepsilon}{R_2 - R_1} \right)^2 \right]^{1/2}, \quad \begin{matrix} \alpha_1 = \operatorname{arc\,sinh}(a/R_1) \\ \alpha_2 = \operatorname{arc\,sinh}(a/R_2) \end{matrix}$$

Здесь  $\varepsilon = e/(R_2 - R_1)$  – относительный эксцентриситет; граничным значениям  $\alpha_1$  и  $\alpha_2$  отвечают окружности  $R_1$  и  $R_2$  на рисунке 4.1; изменение  $\beta$  от 0 до  $2\pi$  соответствует движению точки по окружности.

При переходе к биполярным координатам уравнение (4.1) преобразуется к виду (4.3). Его решение, удовлетворяющее условиям прилипания ( $w = 0$ ) при  $\alpha = \alpha_1$  и  $\alpha = \alpha_2$ , может быть представлено в форме ряда (4.4).

$$\frac{\mu}{h^2} \left( \frac{\partial^2 w}{\partial \alpha^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial \beta^2} \right) = \frac{dp}{dz}, \quad h = \frac{a}{\cosh(\alpha) - \cos(\beta)} \quad (4.3)$$

$$w = -\frac{dp}{dz} \cdot \frac{a^2}{\mu} \cdot \left[ F + E\alpha - \frac{\coth(\alpha)}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} [A_n e^{n\alpha} + (B_n - \coth(\alpha)) e^{-n\alpha}] \cos(n\beta) \right] \quad (4.4)$$

где 
$$F = \frac{\alpha_1 \coth(\alpha_2) - \alpha_2 \coth(\alpha_1)}{2(\alpha_1 - \alpha_2)}, \quad E = \frac{\coth(\alpha_1) - \coth(\alpha_2)}{2(\alpha_1 - \alpha_2)}$$

$$A_n = \frac{\coth(\alpha_1) - \coth(\alpha_2)}{\exp(2n\alpha_1) - \exp(2n\alpha_2)}, \quad B_n = \frac{\exp(2n\alpha_1) \coth(\alpha_2) - \exp(2n\alpha_2) \coth(\alpha_1)}{\exp(2n\alpha_1) - \exp(2n\alpha_2)}$$

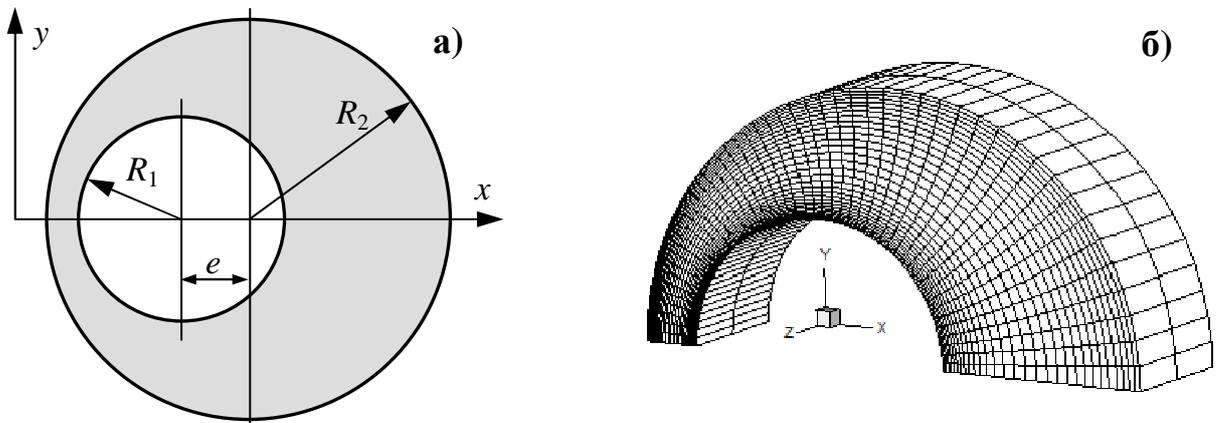


Рисунок 4.1 – К расчету развитого течения в кольцевом канале с эксцентриситетом:  
а) схема и геометрические параметры сечения канала, б) расчетная сетка

Численный расчет развитого течения в призматической трубе, направленный на верификацию кода, может быть выполнен, как минимум, двумя способами. Первый вариант – расчет развивающегося течения на начальном участке достаточно длинной трубы вплоть до выхода на установившийся режим, когда профиль скорости и продольный градиент давления уже не меняются от сечения к сечению. При этом на входе в канал задается профиль скорости (например, однородный), который определяет расход жидкости, а продольный градиент давления  $dp/dz$  выстраивается по ходу решения задачи и может сравниваться с аналитическим решением наряду со сравнением профилей скорости.

Второй подход – непосредственный расчет развитого течения без рассмотрения начального участка. Для этого можно рассчитать течение на небольшом участке трубы с условиями периодичности на входе и выходе, задав вместо продольного градиента давления эквивалентную объемную силу  $\rho F_z = -dp/dz$ . При этом расход жидкости заранее не задается, а определяется в процессе решения задачи. Именно этот подход, как более экономичный, использован при проведении настоящего теста.

Расчет проводился для канала с радиусами внутреннего и внешнего цилиндров соответственно  $R_1 = 1$  и  $R_2 = 2$  при эксцентриситете  $e = 0.6$  (см. рисунок 4.1а). С учетом симметрии задачи расчетная сетка покрывала половину канала (см. 2.22б); размер сетки 30 ячеек в «радиальном» направлении (с небольшим сгущением к стенкам канала), 50 – в «окружном» и 2 – в продольном. Наложенный продольный градиент давления (объемная сила) полагался равным  $(dp/dz)/\mu = -12$ , что примерно соответствует единичной средней скорости в канале с нулевым эксцентриситетом.

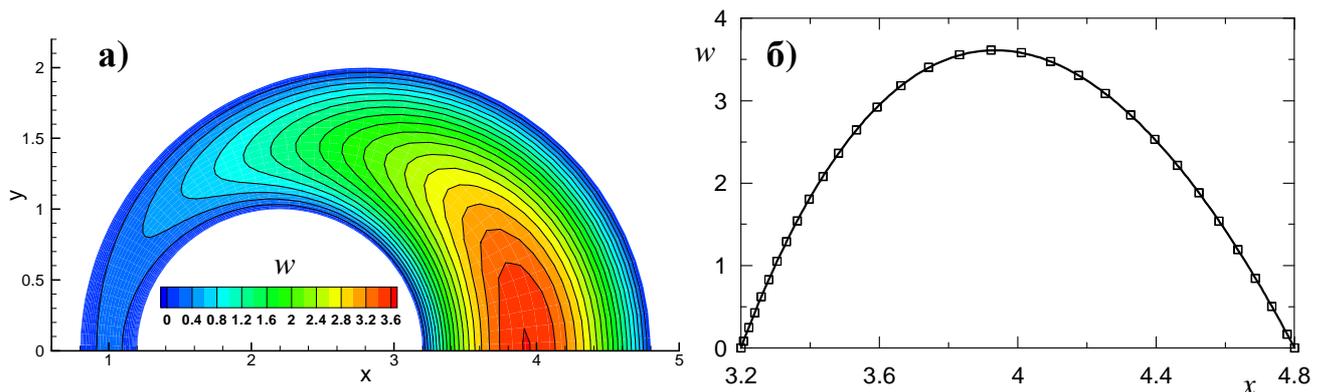


Рисунок 4.2 – Установившееся течение в кольцевом канале с эксцентриситетом:  
а) изолинии продольной скорости, б) профиль скорости в максимальном сечении  
(символы – расчет SINF, линии – аналитическое решение)

Результаты расчета представлены на рисунке 4.2. Изолинии продольной скорости в сечении канала (рисунок 4.2а) демонстрируют существенную неоднородность течения в окружном направлении; максимальные скорости в области наименьшего и

наибольшего зазоров (соответственно, 0.25 и 3.61) отличаются более, чем на порядок. Данные рисунка 4.2б, где показан радиальный профиль скорости в плоскости симметрии (со стороны большего зазора), свидетельствуют о прекрасном соответствии численного (точки) и аналитического (сплошная линия) решений.

### Смешанная конвекция в вертикальном плоском канале

Задача о развитом течении вязкой жидкости по каналу постоянного сечения может быть решена в неизотермической постановке с учетом эффектов плавучести, что обеспечивает более комплексное тестирование кода, чем для чисто напорного течения. Одна из задач такого рода – смешанная конвекция в вертикальном плоском канале с разнонагретыми изотермическими стенками (см. рисунок 4.3а).

Примем, что жидкость является несжимаемой (силы плавучести учитываются в приближении Буссинеска), а коэффициенты переноса (вязкость и теплопроводность) не зависят от температуры. В таком случае безразмерные распределения избыточной температуры  $\theta(y) \equiv (T - T^*)/\Delta T$  и продольной составляющей скорости  $w(y)$  описываются уравнениями (4.5) с очевидными граничными условиями.

$$\frac{d^2\theta}{dy^2} = 0. \quad \theta(0) = -0.5, \quad \theta(1) = 0.5 \quad (4.5a)$$

$$\frac{1}{Re} \frac{d^2w}{dy^2} = \frac{dp}{dz} - \frac{Gr}{Re^2} \cdot \theta, \quad w(0) = w(1) = 0 \quad (4.5b)$$

Здесь  $Re = WH/\nu$  – число Рейнольдса,  $Gr = g\beta\Delta TH^3/\nu^2$  – число Грасгофа ( $\beta$  – коэффициент объемного расширения жидкости). В качестве масштабов приняты: ширина канала  $H$ , среднерасходная скорость  $W$  и перепад температуры  $\Delta T = T_h - T_c$ . Характерная температура  $T^* = (T_h + T_c)/2$  определена как полусумма температур стенок канала. Продольный градиент давления  $dp/dz$  определяется из условия нормировки скорости:

$$\int_0^1 w dy = 1 \quad (4.6)$$

Решением уравнения (4.5а) является линейный профиль температуры  $\theta = y - 0.5$ . Его подстановка в уравнение движения (4.5б) дает с учетом условия нормировки (4.6) следующее выражение для профиля скорости  $w(y)$ :

$$w = 6(y - y^2) - \frac{B}{12}(y - 3y^2 + 2y^3), \quad \frac{dp}{dz} = -\frac{12}{Re}, \quad B \equiv \frac{Gr}{Re} \quad (4.7)$$

Как нетрудно видеть, при значении параметра плавучести  $B = 72$  производная  $(dw/dy)_{y=0}$  обращается в ноль; при  $B > 72$  вблизи левой стенки канала ( $y = 0$ ) появляется область нисходящего течения ( $w < 0$ ). Отметим также, что величина градиента давления  $dp/dz$  не зависит от наличия сил плавучести и соответствует закону сопротивления для чисто напорного течения в плоском канале (течение Пуазейля; см. [79]).

Как и в предыдущем тесте, численный расчет течения проводился для небольшого участка канала с наложением условий периодичности на границах  $AE$  и  $CD$  (см. рисунок 4.3а). Использовалась декартова расчетная сетка, содержащая 2 ячейки вдоль и 26 ячеек поперек канала с симметричным сгущением к стенкам по закону геометрической прогрессии; минимальный поперечный шаг  $\Delta y_{min} = 0.02$ , максимальный  $\Delta y_{max} = 0.064$ , отношение шагов соседних ячеек (знаменатель геометрической прогрессии)  $q = 1.1$ .

Расчет проводился при значении расчетного (ожидаемого) числа Рейнольдса  $Re = 100$ ; для этого безразмерная вязкость полагалась равной 0.01, а наложенный продольный градиент давления (объемная сила) задавался в соответствии с решением (4.7)  $(dp/dz) = -0.12$ . Ускорение силы тяжести варьировалось с таким расчетом, чтобы обеспечить изменение числа Грасгофа в диапазоне  $0 \leq Gr \leq 14400$  (соответственно, параметр плавучести  $0 \leq B \leq 144$ ). Полученные профили скорости представлены на рисунке 4.3б, где расчетные данные (точки) наложены на решение (4.7) (линии). Налицо прекрасное согласие численного и аналитического решения при разных значениях параметра плавучести.

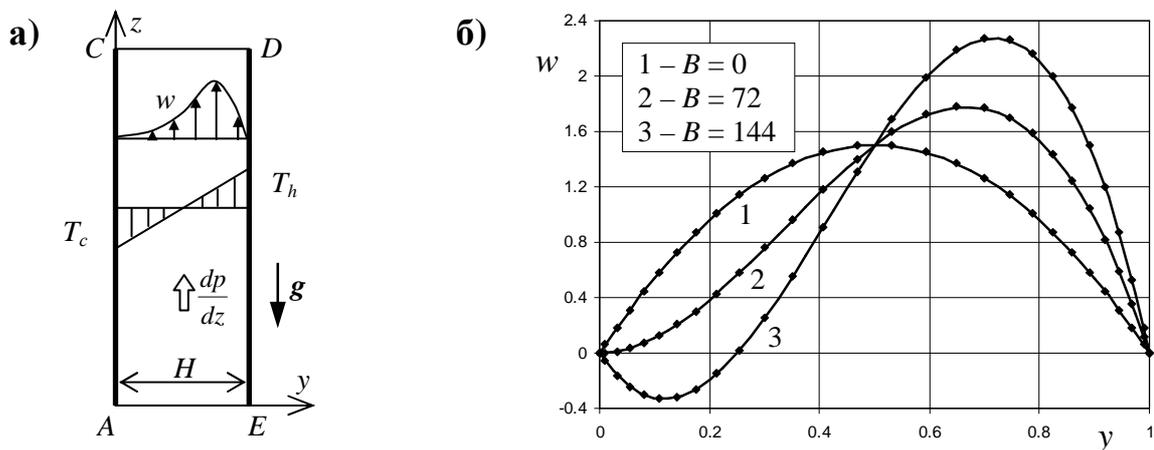


Рисунок 4.3 – Установившееся течение в вертикальном канале с разнонагретыми стенками: а) схема, б) профили скорости (символы – расчет SINF, линии – аналитическое решение)

Интегральной количественной мерой точности расчета может служить отклонение фактического (полученного в расчете) расхода жидкости от ожидаемого (единичного). В представленных выше расчетах это отклонение составляло менее 0.4%. Для оценки

степени сеточной зависимости решения были проведены дополнительные расчеты чисто напорного ( $B = 0$ ) течения в канале на сетках различной густоты и неравномерности.

Были построены две серии сеток – равномерные (с числом ячеек поперек канала  $N = 5, 10, 20$ ) и неравномерные ( $N = 8, 16, 32$ ). Для неравномерных сеток применялось симметричное сгущение к стенкам канала. Для сетки с  $N = 8$  коэффициент сгущения (отношение соседних шагов) составлял  $q = 1.2$ ; более мелкие сетки получались делением каждой ячейки на две (неравные) части с таким расчетом, чтобы обеспечить одинаковый коэффициент сгущения для всех ячеек. Результаты расчетов представлены на рисунке 4.4.

На рисунке 4.4а показан профиль скорости, полученный на равномерной сетке с числом ячеек  $N = 5$ . Несмотря на использование столь грубой сетки расчетные значения скорости (символы) в точности соответствуют аналитическому решению (линия). Более того, как показывает анализ численной схемы кода SINF (см. разд. 3.1.2), такое точное воспроизведение параболического профиля скорости на равномерной прямоугольной сетке обеспечивается при любом числе ячеек  $N \geq 2$ .

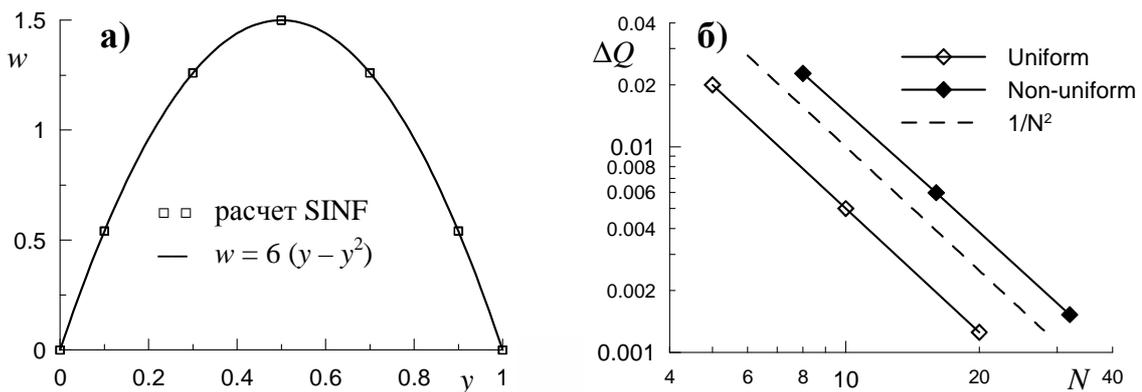


Рисунок 4.4 – К оценке точности расчета течения в плоском канале: а) профиль скорости, полученный на равномерной сетке с  $N = 5$ ; б) погрешность определения расхода в зависимости от числа ячеек  $N$  для равномерной и неравномерной сетки

На рисунке 4.4б представлены сводные данные о влиянии числа ячеек сетки  $N$  на погрешность вычисления расхода  $\Delta Q$ . Для равномерных сеток, ввиду точного расчета значений скорости, эта погрешность определяется точностью вычисления интеграла и составляет  $\Delta Q = 0.5/N^2$ . Для неравномерных сеток (сплошные символы на рисунке 4.4б) погрешность примерно в три раза больше, но также убывает по закону  $1/N^2$ , что свидетельствует о втором порядке точности численной схемы, используемой в коде SINF для аппроксимации диффузионных слагаемых.

Течение в квадратной полости с движущейся крышкой

Рассмотренные выше задачи об установившемся течении в канале не позволяют проверить правильность расчета конвективной части уравнений, поскольку в этом случае жидкость движется без ускорения. Одной из часто используемых тестовых задач, где существенную роль играют и конвективные и диффузионные слагаемые, является течение в квадратной полости с движущейся крышкой (см. рисунок 4.5а). Основными особенностями данной задачи, делающими ее весьма привлекательной для тестирования гидродинамических кодов, являются: двумерность, простота геометрии и граничных условий, стационарность (ламинарного) решения и, что немаловажно, наличие большого числа опубликованных расчетов. Одними из самых надежных считаются расчеты [128]; работа содержит довольно подробные табличные данные по профилям скорости и структуре потока в широком диапазоне чисел Рейнольдса.

Формулировка задачи крайне проста: рассматривается двумерное стационарное течение несжимаемой вязкой жидкости в квадратной полости, одна из стенок которой («крышка») движется с постоянной скоростью, см. рисунок 4.5а. В качестве масштабов используются: размер полости (сторона квадрата)  $L$  и скорость скольжения крышки  $U$ .

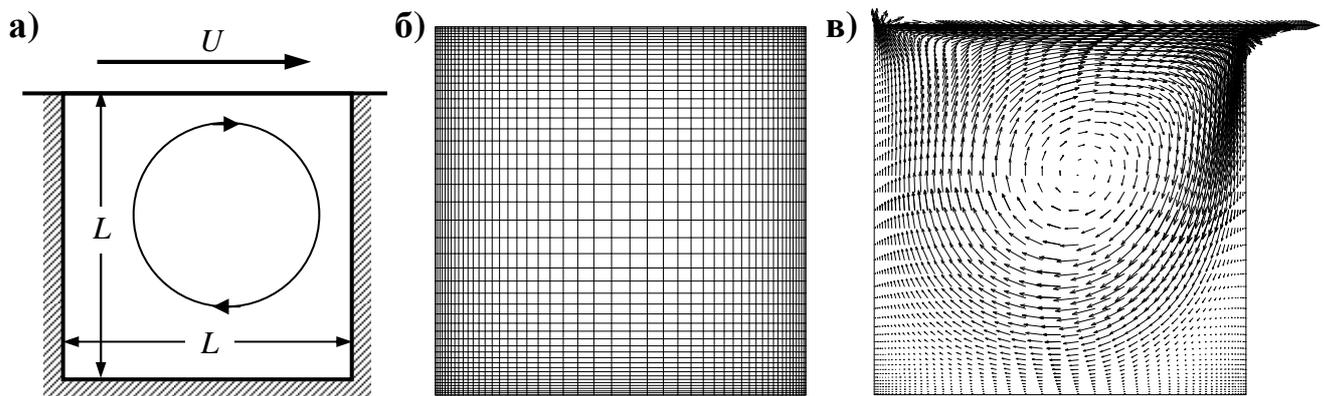


Рисунок 4.5 – Течение в квадратной полости с движущейся крышкой: а) схема, б) расчетная сетка  $49 \times 49$  ячеек, в) векторы скорости при  $Re = 400$  (расчет SINF)

Основная расчетная сетка, содержащая  $49 \times 49$  ячеек, показана на рисунке 4.5б. Сетка сгущена ко всем стенкам по закону геометрической прогрессии; минимальный (пристенный) шаг сетки  $\Delta_{min} \approx 0.005$ , максимальный  $\Delta_{max} \approx 0.05$ , отношение шагов соседних ячеек (знаменатель геометрической прогрессии)  $q \approx 1.1$ .

Расчеты выполнены для значений числа Рейнольдса  $Re \equiv UL/\nu = 100, 400$  и  $1000$ . В качестве примера на рисунке 4.5в показано поле скорости при  $Re = 400$ . На рисунке 4.6 представлены профили вертикальной  $v(x)$  и горизонтальной  $u(y)$  компоненты скорости соответственно в горизонтальном и вертикальном сечениях, проходящих через геометрический центр полости. Как можно видеть из рисунка 4.6, результаты

настоящего расчета (линии) полностью соответствуют «эталонным» данным [128] (символы) для всех значений числа Рейнольдса.

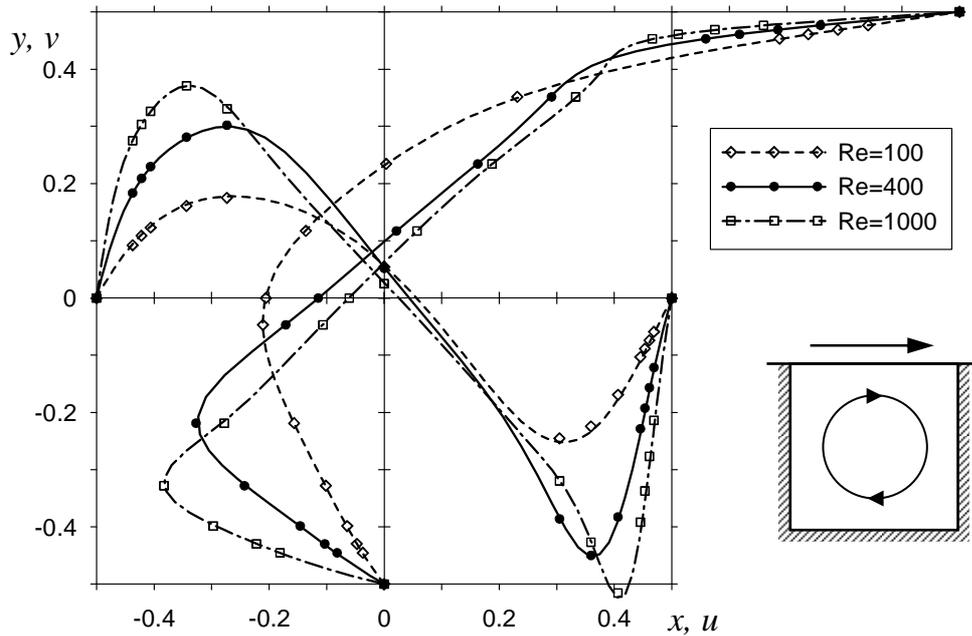


Рисунок 4.6 – Профили горизонтальной  $u(y)$  и вертикальной  $v(x)$  компоненты скорости в квадратной полости с движущейся крышкой: линии – расчет SINF, символы – эталонное решение [128]

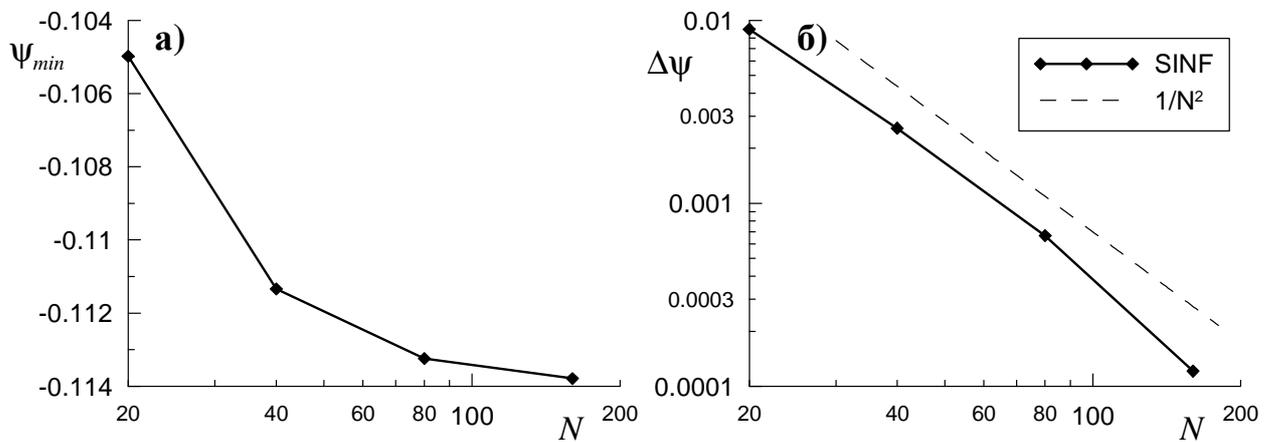


Рисунок 4.7 – К оценке точности расчета течения в полости с движущейся крышкой: изменение минимального значения функции тока (а) и его отклонения от «эталонного» значения [128] (б) в зависимости от числа ячеек равномерной сетки  $N \times N$

Для оценки степени сеточной зависимости решения были проведены расчеты при  $Re = 400$  на различных сетках. Все сетки данной серии были равномерными и содержали  $N \times N$  ячеек (со значениями  $N = 20, 40, 80$  и  $160$ ). Интегральной мерой точности расчета

служило отклонение  $\Delta\psi$  минимального значения функции тока<sup>1</sup>  $\psi_{min}$  от «эталонного» значения -0.113909 [128]. Результаты расчетов представлены на рисунке 4.7. Как можно видеть, при измельчении сетки величина  $\psi_{min}$  (рисунок 4.7а) монотонно приближается к «эталонному» значению, причем погрешность  $\Delta\psi$  (рисунок 4.7б) убывает пропорционально  $1/N^2$ , что соответствует второму порядку точности численной схемы.

#### Свободная конвекция в полости с разнагретыми стенками

Задача о свободной конвекции воздуха в кубической полости (см. рисунок 4.8а), две боковые стенки которой поддерживаются при разных температурах, а остальные стенки теплоизолированы, активно применяется для тестирования гидродинамических кодов. Согласно данным [148], стационарное решение является устойчивым вплоть до чисел Рэлея  $Ra = (3.2 \div 3.5) \cdot 10^7$  (в указанной области наблюдается гистерезис). Эталонными можно считать расчеты [193, 194], выполненные для чисел Рэлея от  $10^3$  до  $10^7$  с применением псевдоспектрального метода Чебышева с числом полиномов до  $111^3$  (по оценке авторов погрешность не превышала 0.02%).

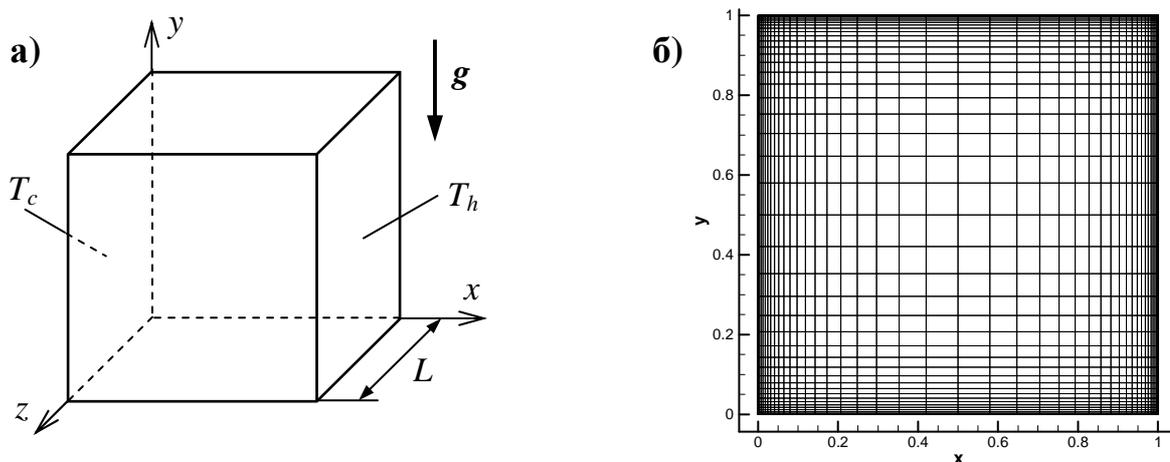


Рисунок 4.8 – Естественная конвекция в прямоугольной полости с разнагретыми боковыми стенками: а) схема, б) расчетная сетка

Для двумерного случая (квадратная полость) весьма аккуратные данные для чисел Рэлея  $Ra = 10^3 \div 10^6$  были получены в работе [120] (расчеты на нескольких сетках с экстраполяцией по Ричардсону для получения сеточно-независимого решения; заявленная погрешность менее 1%). Уточненные данные представлены в работе [194] (погрешность 0.02%, отклонение от данных [120] менее 0.3%).

<sup>1</sup> Минимум функции тока отвечает центру основного «вихря», так что значение  $\psi_{min}$  характеризует величину циркулирующего в полости расхода.

Следуя условиям упомянутых эталонных расчетов, тестовые расчеты с помощью кода SINF выполнялись при числе Прандтля  $Pr = 0.71$  для значений числа Рэлея  $Ra = 10^4$ ,  $10^5$  и  $10^6$ . Для трехмерных расчетов использовалась сетка размерностью  $40^3$  ( $40 \times 40 \times 40$ ) ячеек со сгущением ко всем стенкам полости (см. рисунок 4.8б): по направлениям  $X$  и  $Y$  (в плоскости основного течения) шаг сетки изменялся от 0.003 до 0.08, по направлению  $Z$  – от 0.01 до 0.05. Аналогичная сетка (с единственной ячейкой по направлению  $Z$ ) применялась для двумерных расчетов. При представлении результатов в качестве масштабов используются: размер полости  $L$ , разность температур «горячей» и «холодной» стенок  $\Delta T = T_h - T_c$  и скорость плавучести  $V_b = \sqrt{g\beta\Delta TL}$ .

Результаты трехмерного расчета при  $Ra = 10^6$  проиллюстрированы на рисунке 4.9: на рисунке 4.9а показаны изолинии температуры и векторы скорости в плоскости симметрии течения  $z = 0.5$ , а на рисунке 4.9б – поле скорости (касательные векторы и изолинии нормальной составляющей) в центральном горизонтальном сечении  $y = 0.5$ . Как можно видеть из рисунка 4.9б, трехмерные эффекты проявляются в основном вблизи торцевых (теплоизолированных) стенок полости, где интенсивность вторичных токов составляет около 10% от скорости восходящего течения. При этом поле течения в плоскости симметрии (рисунок 4.9а) визуально почти неотличимо от получаемого в двумерном расчете (отличия как по скорости, так и по температуре не превышают 3%).

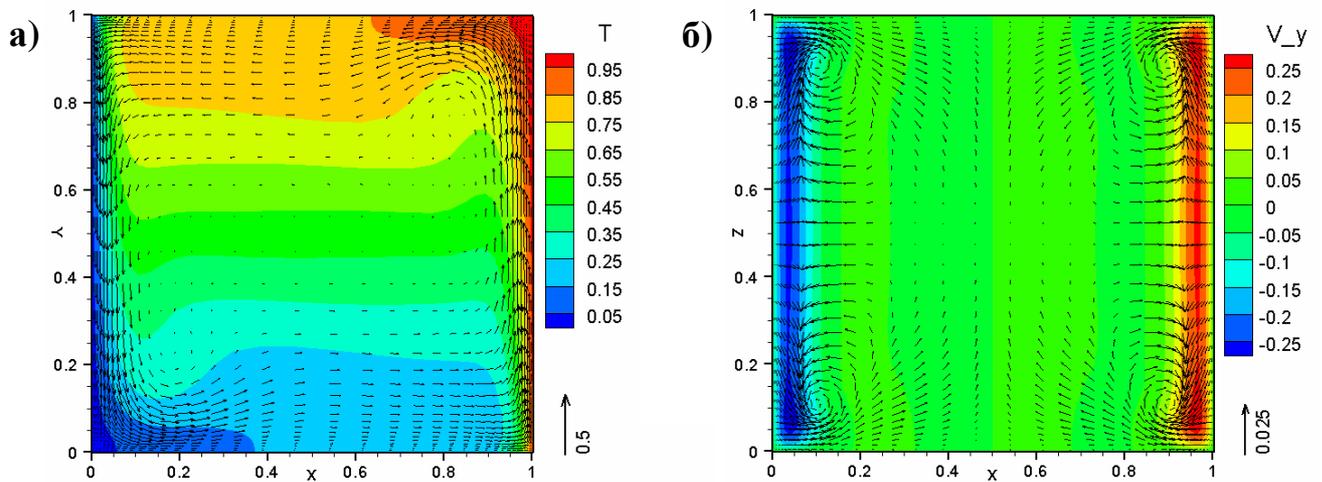


Рисунок 4.9 – Естественная конвекция в кубической полости при  $Ra=10^6$ : а) поле температуры и векторы скорости в сечении  $z = 0.5$ , б) поле скорости в сечении  $y = 0.5$

В сводной таблице 3 представлены данные по максимальным значениям компонент вектора скорости и средним числам Нуссельта, полученные в рамках двумерных (2D) и трехмерных (3D) расчетов при разных значениях числа Рэлея. Как можно видеть, во всех случаях отклонение результатов расчета SINF от «эталонных» данных [194] не превышает 1%, что можно считать очень неплохим уровнем точности для использованной в расчетах SINF сравнительно грубой сетки.

Таблица 3 – Естественная конвекция в кубической (3D) и квадратной (2D) полости: результаты, полученные с помощью кода SINF и в работе [194]

	$Ra = 10^4$		$Ra = 10^5$		$Ra = 10^6$	
	[194]	SINF	[194]	SINF	[194]	SINF
$u_{max,3D}$	0.1984	0.1980	0.1648	0.1661	0.1507	0.1518
$v_{max,3D}$	0.2253	0.2261	0.2667	0.2661	0.2809	0.2807
$w_{max,3D}$	0.0256	0.0255	0.0364	0.0362	0.0303	0.0303
$Nu_{3D}$	2.054	2.046	4.337	4.325	8.640	8.622
$v_{max,2D}$	0.2330	0.2345	0.2574	0.2575	0.2617	0.2643
$Nu_{2D}$	2.245	2.237	4.522	4.510	8.825	8.809

Чтобы удостовериться, что причиной отмеченного расхождения данных является именно грубость сетки в расчетах SINF, были проведены расчеты течения в квадратной полости при  $Ra = 10^6$  на двух дополнительных сетках, полученных из базовой (40×40 ячеек, рисунок 4.8б) путем двукратного огрубления (20×20) и измельчения (80×80) по каждому индексному направлению. Результаты этих расчетов представлены в таблице 4. Как можно видеть, разность чисел Нуссельта для «соседних» сеток меняется в 4 раза при переходе от одной пары сеток к другой, что соответствует второму порядку точности дискретизации по пространству (которая и используется в коде SINF). Экстраполяция по Ричардсону дает предельное значение числа Нуссельта  $Nu_{\infty} = 8.8258$ , полностью соответствующее эталонному значению 8.825 [194].

Таблица 4 – Естественная конвекция в квадратной полости при  $Ra = 10^6$ : влияние размера сетки на среднее число Нуссельта (расчет SINF)

Размер сетки	$Nu$	Разность $Nu$ между «соседними» сетками
20×20	8.7589	} 0.0501 (0.57%)
40×40	8.8090	
80×80	8.8216	} 0.0126 (0.14%)

#### Квази-одномерное течение со скачком уплотнения в сопле Лавалья

Расчет квази-одномерного невязкого течения идеального газа в сопле Лавалья с прямым скачком уплотнения является одним из тестов для проверки работы «сверхзвуковой» части кода SINF (схема CUSP, см. разд. 3.1.3)<sup>1</sup>. Аналитическое

<sup>1</sup> Расчеты проведены М.А.Николаевым в его диссертации [87] при внедрении схемы CUSP в код SINF.

решение задачи строится из известных соотношений для параметров газа на скачке и изэнтропических формул (напр., [79]).

Численный расчет проводился для достаточно длинного плоского сопла (см. рисунок 4.10), чтобы течение было практически одномерным. Площадь сечения изменялась по длине сопла в 2.5 раза, уклон образующей не превышал  $0.014$  ( $0.8^\circ$ ). Использовалась «равномерная» (с точностью до изменения высоты сечения канала) сетка  $100 \times 20$  узлов. На входе в канал задавались параметры торможения (температура  $T_{0,in}$  и давление  $p_{0,in}$ ), на выходе – статическое давление, отвечающее нерасчетному режиму работы сопла ( $p_{0,in} / p_{out} = 1.2871$ ).

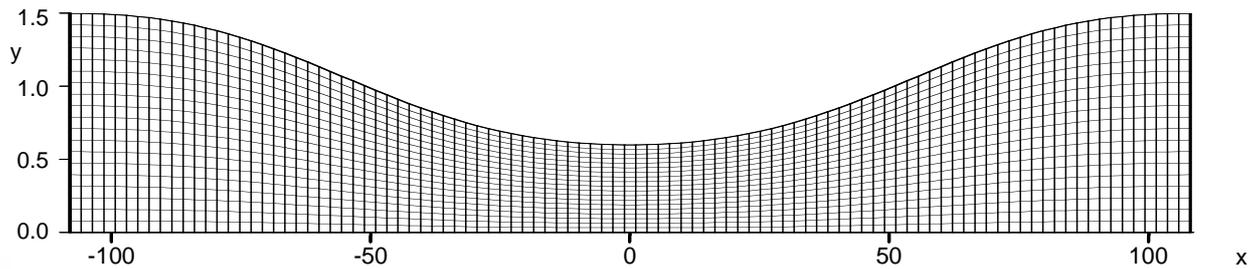


Рисунок 4.10 – Квази-одномерное течение газа в сопле Лаваля: расчетная сетка

На рисунке 4.11 показано полученное распределение числа Маха, плотности и температуры торможения вдоль оси канала. Видно, что результаты расчета хорошо согласуются с аналитическим решением, причем скачок уплотнения разрешается с единственной внутренней точкой. Отметим также, что на графике температуры торможения (рисунок 4.11в) отсутствуют какие бы то ни было паразитные осцилляции при переходе через скачок.

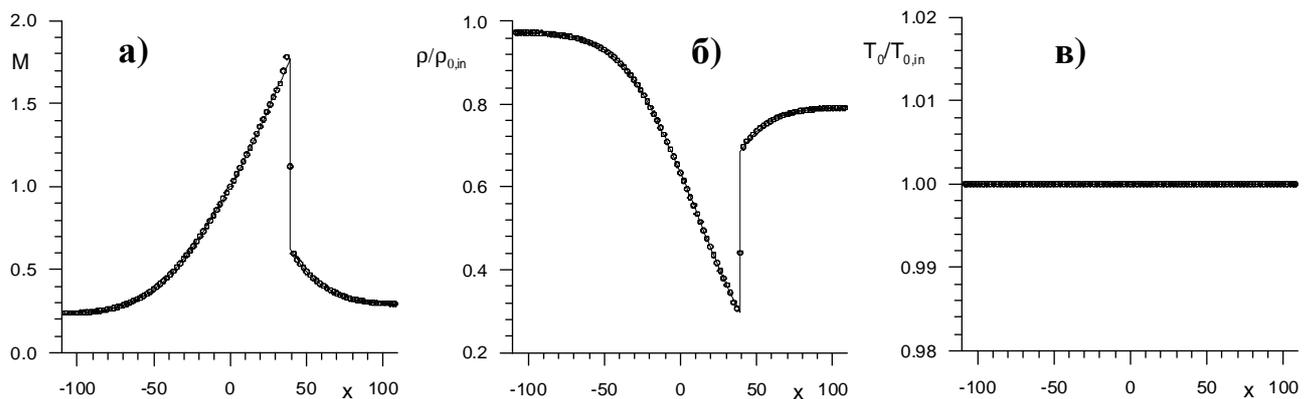


Рисунок 4.11 – Изменение числа Маха (а) относительной плотности (б) и температуры торможения (в) вдоль сопла Лаваля: точки – расчет SINF, линии – аналитическое решение [79]

Трансзвуковое обтекание крылового профиля

Расчет трансзвукового обтекания крылового профиля обеспечивает проверку работы «сверхзвуковой» части кода SINF в условиях, когда скачок уплотнения (в отличие от предыдущего теста) не ориентирован по линиям расчетной сетки.

Следуя условиям «эталонных» расчетов [140, 188], рассматривалось двумерное невязкое обтекание профиля NACA-0012 (напр., [100]) однородным потоком с числом Маха  $M_\infty = 0.8$  под углом атаки  $\alpha_\infty = 1.25^\circ$ . Внешняя граница расчетной области имела форму окружности, радиус которой в 100 раз больше хорды профиля  $C$ . Для расчета использована O-сетка, содержащая 640 ячеек в «окружном» направлении (вдоль поверхности профиля) и 167 ячеек – в «радиальном».

Результаты расчета<sup>1</sup> представлены на рисунке 4.12. На картине изолиний числа Маха (рисунок 4.12а) отчетливо видны два скачка уплотнения – более сильный на верхней стороне профиля и сравнительно слабый на нижней. Сильный скачок разрешается с двумя внутренними точками, слабый – с одной.

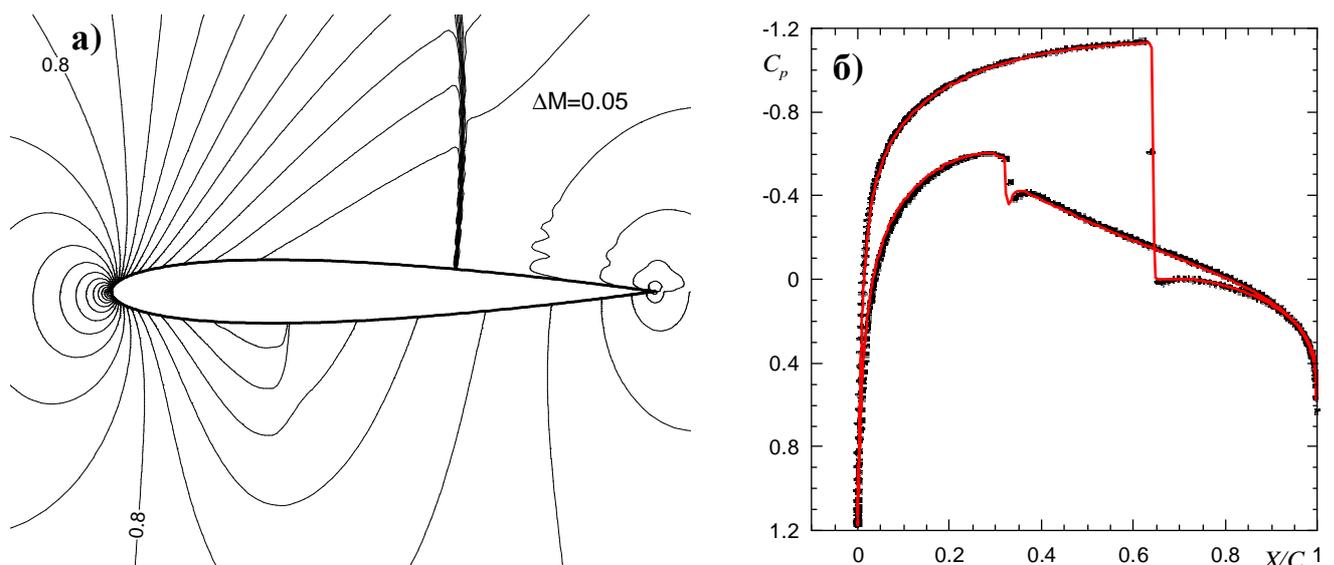


Рисунок 4.12 – Трансзвуковое обтекание профиля NACA-0012 ( $M_\infty = 0.8$ ,  $\alpha_\infty = 1.25^\circ$ ):  
а) изолинии числа Маха, б) распределение коэффициента давления  $C_p$  вдоль профиля  
(результаты расчета SINF (линия) наложены на данные [140])

На рисунке 4.12б графики распределения коэффициента давления по поверхности профиля, полученные с помощью кода SINF, наложены на соответствующий рисунок из работы [140]; можно отметить достаточно хорошее совпадение результатов обоих расчетов как по положению скачков, так и по уровню давлений. Полученные значения коэффициентов подъемной силы  $C_L = 0.3569$  и силы волнового сопротивления

<sup>1</sup> Расчеты выполнены М.А.Николаевым [86, 87].

$C_D = 0.02224$  также хорошо согласуются с данными работы [188], где аналогичные расчеты на сетке (768×128 ячеек) дали значения  $C_L = 0.3582$ ,  $C_D = 0.02278$ .

Объемная конденсация в потоке с распределенным отводом тепла

Данный тест обеспечивает проверку реализации в специализированном коде ПГС-ТК модели конденсации пара (разд. 2.2.3). Рассматривается одномерное течение паро-воздушной смеси вдоль оси  $x$  (рисунок 4.13а). На входе в расчетную область задан однородный поток с температурой выше порога конденсации; по всему объему равномерно распределен источник (сток) тепла мощностью  $Q < 0$ ; эффекты диффузии считаются пренебрежимо малыми. В таких условиях из уравнений (2.49а) и (2.49г) следует постоянство удельного расхода  $\rho V$  и массовой доли пара (включая конденсат)  $y_v$ , а уравнение (2.51) (при учете источника  $Q$ ) принимает следующий вид:

$$C_p \frac{\partial \rho V T}{\partial x} = Q + L \frac{\partial \rho V w}{\partial x} \quad \Rightarrow \quad C_p \frac{\partial T}{\partial x} = \frac{Q}{\rho V} + L \frac{\partial w}{\partial x} \quad (4.8)$$

Как следует из (4.8), в отсутствие конденсации ( $w = 0$ ) равномерный отвод тепла приводит к линейному уменьшению температуры  $T(x)$ , а после начала конденсации должно иметь место почти линейное (с точностью до незначительного изменения температуры) увеличение доли конденсата  $w(x)$ :

$$\frac{\partial T}{\partial x} = \frac{Q}{\rho V C_p} \quad \text{при } w = 0 \quad (4.9a)$$

$$\frac{\partial w}{\partial x} = \frac{C_p}{L} \frac{\partial T}{\partial x} - \frac{Q}{\rho V L} \approx -\frac{Q}{\rho V L} \quad \text{при } w > 0 \quad (4.9b)$$

Расчет проводился на сетке размером 50×2 ячеек с небольшим сгущением ко входу в расчетную область для лучшей фиксации точки начала конденсации. Полученные данные по изменению температуры  $T(x)$  и массовой доли конденсата  $w(x)$  представлены на рисунке 4.13б; для сравнения там же показано аналитическое решение (4.9). Как можно видеть, на начальном участке течения расчет предсказывает стремительное снижение температуры в полном соответствии с решением (4.9а). После начала конденсации снижение температуры резко замедляется и наблюдается почти линейный рост доли конденсата. При этом приближенное равенство (4.9б), не учитывающее изменение температуры в зоне конденсации (пунктирная линия на рисунке 4.13б), дает слегка завышенную оценку скорости конденсации. Однако, если в выражение (4.9б) подставить полученный в расчете градиент температуры

( $dT/dx \approx -6.3$  К/м, сплошная линия), то аналитическое решение полностью совпадает с данными численного расчета.

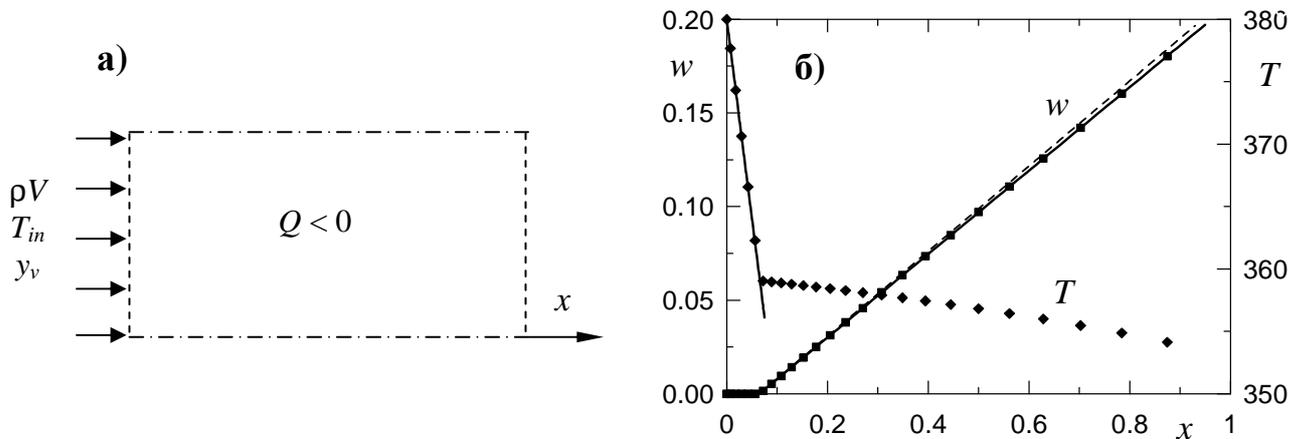


Рисунок 4.13 – Конденсация в потоке с распределенным отводом тепла: а) схема, б) сравнение результатов расчета (точки) с аналитическим решением (линии)

#### Накачка давления в замкнутой полости

Одной из особенностей численной методики специализированного кода ПГС-ТК является использование оригинального алгоритма определения давления в замкнутом объеме при подаче в него дополнительного пара или иной примеси (разд. 3.4.3). Для проверки данного алгоритма рассмотрим модельную задачу, в которой в заполненную газом теплоизолированную полость объемом  $\Omega$  нагнетается тот же газ с постоянным массовым расходом  $G_{in}$  и температурой  $T_{in}$ . Для таких условий из уравнений (2.49) – (2.52) следует простой линейный закон изменения средней плотности и давления в полости (4.10), проверка выполнения которого и является предметом теста.

$$\frac{d\langle\rho\rangle}{dt} = \frac{G_{in}}{\Omega}, \quad \frac{d\langle\rho T\rangle}{dt} = \frac{M}{R} \frac{dp_a}{dt} = \frac{C_p G_{in} T_{in}}{\Omega C_v} \quad (4.10)$$

Задача решалась в двумерной постановке для полости размером  $1 \times 1$  м (условный объем  $\Omega = 1 \text{ м}^3$ ). В начальный момент времени воздух<sup>1</sup> в полости неподвижен, его температура  $T_0 = 300$  К, давление  $p_0 = 10^5$  Па. Дополнительный газ (примесь, идентичная воздуху) подавался в полость через щель с расходом  $G_{in} = 0.1$  кг/с и температурой  $T_{in} = 300$  К.

Расчет течения в полости проводился для интервала времени  $\Delta t = 20$  с. Поле течения в конце рассмотренного интервала времени проиллюстрировано на рисунке

<sup>1</sup> Для обеспечения ламинарного режима течения вязкость газа была увеличена до  $5 \cdot 10^{-3}$  Па·с.

4.14а. Можно видеть, что входная струя порождает в области циркуляционное течение, причем имеет место существенная неоднородность поля температуры – при среднем уровне 376 К максимальная температура достигает 404 К. Тем не менее, в полном соответствии с аналитическим решением (4.10), нарастание плотности и давления с течением времени происходит строго линейно (рисунок 4.14б), причем давление растет быстрее из-за повышения температуры при сжатии газа. Изменение средней плотности за время  $\Delta t = 20$  с составило  $\Delta\langle\rho\rangle = 1.99997$  кг/м<sup>3</sup> (точное значение 2.0); прирост давления  $\Delta p_a = 240829$  Па (точное значение 240833). Таким образом, результат теста можно считать вполне успешным.

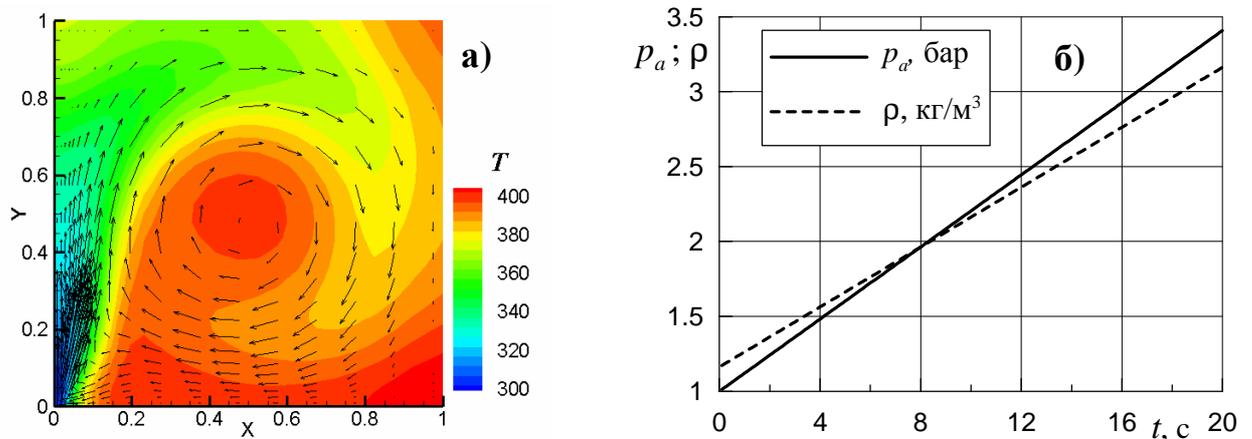


Рисунок 4.14 – Нагнетание газа в замкнутую полость: а) поле температуры и векторы скорости при  $t = 20$  с, б) изменение средней плотности и давления с течением времени

### 4.3 Сравнение с экспериментальными данными

#### Двумерное нестационарное обтекание цилиндра

Как известно (напр., [79]), при числах Рейнольдса  $Re = U_\infty D/\nu > 40$  поперечное обтекание одиночного кругового цилиндра однородным потоком (см. рисунок 4.15а) является нестационарным: то с одной то с другой стороны цилиндра поочередно срываются вихри, которые сносятся потоком, образуя т.наз. «дорожку Кармана». При этом для чисел Рейнольдса  $Re < 180$  течение в следе за цилиндром является двумерным (точнее, двумерное течение является устойчивым, хотя и не единственно возможным [209]), что делает физически корректным решение задачи в двумерной постановке. При проведении теста «индикатором» правильности работы кода служит зависимость числа Струхала  $Sh = 2\pi f_s D/U_\infty$ , характеризующего частоту схода вихрей  $f_s$ , от числа Рейнольдса; в качестве «эталоны» выступают данные тщательных измерений [209].

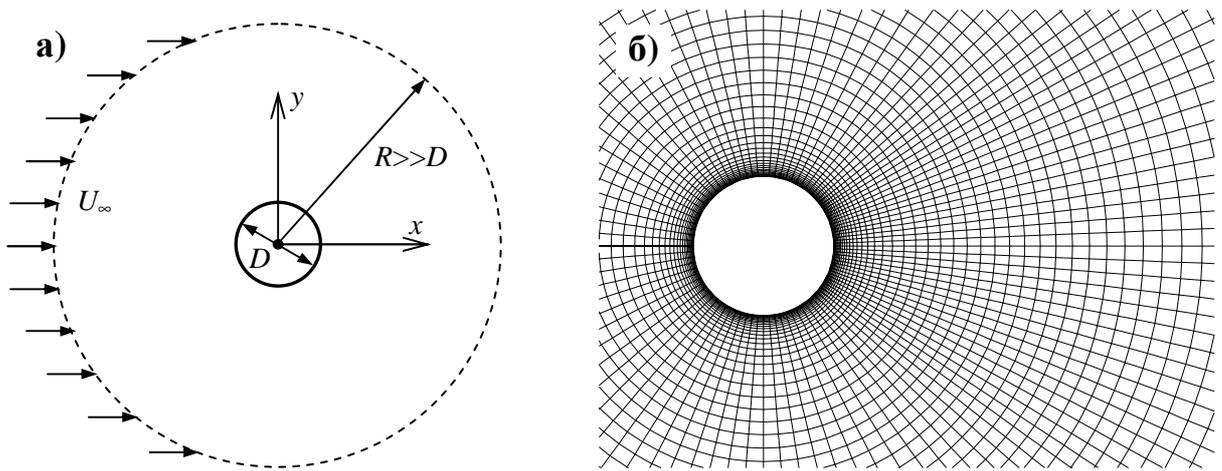


Рисунок 4.15 – Нестационарное обтекание цилиндра: а) схема расчетной области, б) базовая расчетная сетка (фрагмент)

Расчетная область имеет форму кольца, наружный диаметр которого равен  $90D$  (см. рисунок 4.15а). Расчетная сетка, фрагмент которой показан на рисунке 4.15б, содержит 80 ячеек по радиальному направлению и 100 – по окружному. Сетка сгущена по радиусу к поверхности цилиндра (первый пристенный шаг  $0.003D$ ); для лучшего разрешения вихревых структур в следе за цилиндром, сетка в этой области сгущена также по угловому направлению.

Для проверки сеточной сходимости и выбора оптимального шага по времени была проведена серия расчётов при  $Re = 100$ . В каждом расчете определялась амплитуда и частота колебаний коэффициента подъёмной силы, а также среднее (за период) значение коэффициента сопротивления. Полученные результаты сведены в таблицу 5. Как можно видеть, для шага по времени  $\Delta t = 0.125$  (около 50 шагов на период колебаний) все параметры отличаются от сошедшихся ( $\Delta t \rightarrow 0$ ) значений менее чем на 1%, причем имеет место квадратичный характер убывания погрешности  $Sh$  и  $C_{y,max}$  при уменьшении  $\Delta t$  (что соответствует второму порядку аппроксимации по времени). Двукратное измельчение расчетной сетки по обоим направлениям (сетка  $160 \times 200$ ) привело к изменению числа Струхала всего на 0.1%.

С учетом результатов этого методического исследования, основная серия расчетов по определению зависимости  $Sh(Re)$  выполнялась на сетке ( $80 \times 100$ ) с шагом по времени  $\Delta t = 0.125$ . Результаты представлены на рисунке 4.16, где данные, полученные с помощью кода SINF (крупные точки), наложены на рисунок из работы [209]. Налицо прекрасное согласие результатов расчета SINF с данными измерений.

Таблица 5 – Влияние шага по времени  $\Delta t$  и размера сетки на число Струхала  $Sh$ , амплитуду колебаний подъемной силы  $C_y$  и силу сопротивления  $C_x$  при  $Re = 100$

Размер сетки	$\Delta t$	$Sh$	$C_{y,max}$	$\langle C_x \rangle$
80×100	0.25	0.16089	0.3033	1.31804
	0.125	0.16413	0.3143	1.32366
	0.05	0.16493	0.3162	1.32391
	0.02	0.16503	0.3164	1.32383
160×200	0.02	0.16488	0.3213	1.32810

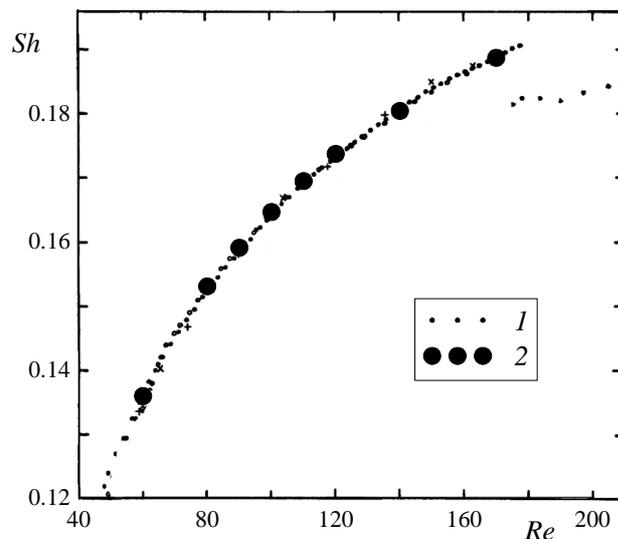


Рисунок 4.16 – Зависимость числа Струхала от числа Рейнольдса для цилиндра:

1 – экспериментальные данные из работы [209], 2 – расчет SINF

#### Свободная конвекция около горизонтального цилиндра

В литературе имеются обширные экспериментальные и расчетные данные по теплоотдаче от горизонтального цилиндра в широком диапазоне чисел Рэлея и Прандтля. В рамках представляемого теста рассматривается порождаемое эффектами плавучести двумерное стационарное ламинарное течение около цилиндра с диаметром  $D$  (см. рисунок 4.17а). Цилиндр нагретый до температуры  $T_w$  находится в покоящейся на бесконечности жидкости с температурой  $T_\infty < T_w$ . Ускорение силы тяжести  $g$  перпендикулярно оси цилиндра и направлено в сторону, противоположную оси  $x$  (для удобства представления результатов ось  $x$  на рисунке 4.17 горизонтальна). Жидкость считается несжимаемой (эффекты плавучести учитываются в приближении Буссинеска), число Прандтля  $Pr = 0.7$ , число Грасгофа  $Gr = g\beta\Delta TD^3/\nu^2$  варьируется от  $10^2$  до  $10^4$ .

С учетом симметрии задачи относительно плоскости  $y = 0$  рассматривается лишь верхняя (на рисунке 4.17а) полуплоскость течения. На внешних границах расчетной

области ставятся условия свободного подтекания жидкости; размер области  $L = 10D$  задан достаточно большим, чтобы пренебречь влиянием внешних границ на течение около цилиндра. Многоблочная расчетная сетка, фрагмент которой показан на рисунке 4.17б, содержит около 8000 ячеек; на полупериметр цилиндра приходится 97 ячеек. Сетка сгущена к поверхности цилиндра (первый пристенный шаг  $0.01D$ ) и в области всплывающего «факела».

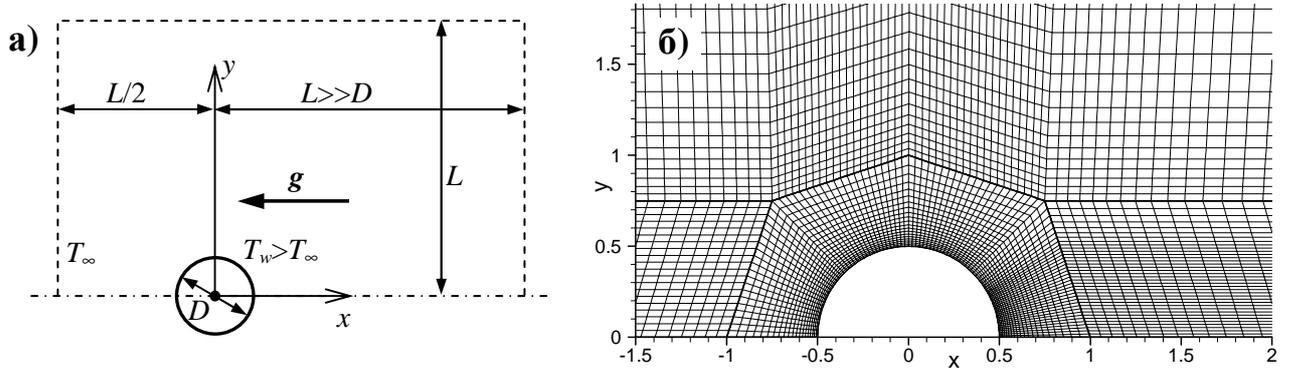


Рисунок 4.17 – Естественная конвекция около горизонтального цилиндра:  
а) схема расчетной области, б) расчетная сетка (фрагмент)

В качестве примера на рисунке 4.18 проиллюстрировано рассчитанное поле течения в окрестности цилиндра при значении числа Грасгофа  $Gr = 10^4$ . Показано распределение избыточной температуры  $\theta \equiv (T - T_\infty) / \Delta T$  и скорости (отнесенной к скорости плавучести  $V_b = \sqrt{g\beta\Delta TD}$ ); изолинии проведены с шагом 0.1. Виден всплывающий (движущийся навстречу силе тяжести, т.е. вправо по рисунку) «факел» горячего воздуха с типично струйным распределением скоростей.

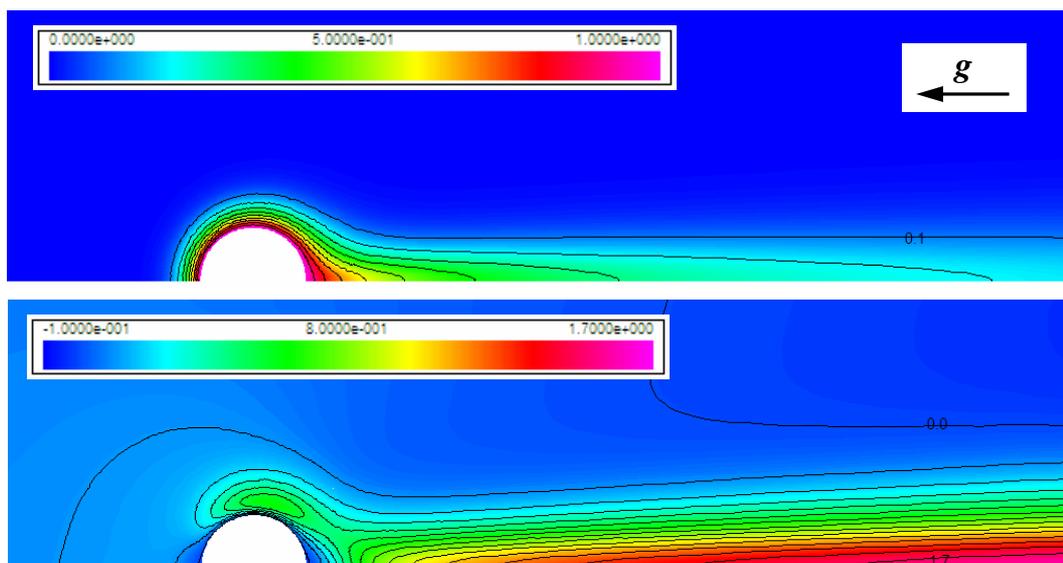


Рисунок 4.18 – Естественная конвекция около горизонтального цилиндра:  
поле температуры (вверху) и  $x$ -компоненты скорости (внизу) при  $Gr = 10^4$

На рисунке 4.19 приведены данные по суммарной теплоотдаче цилиндра (среднему числу Нуссельта  $Nu$ ) в зависимости от числа Рэлея  $Ra$ . Результаты расчетов SINF наложены на сводный график, заимствованный из работы [172]. Помимо расчетов, выполненных авторами указанной работы, на рисунке представлены классические расчеты [147], «эталонные» (bench-mark) расчеты [177], а также экспериментальные данные [164]. Представленные данные демонстрируют прекрасное (в пределах точности построения графика) совпадение результатов расчета SINF с данными других авторов. Отличие данных кода SINF от эмпирической формулы [164] ( $Nu = 0.85 \cdot Ra^{0.188}$ ) не превышает 2%.

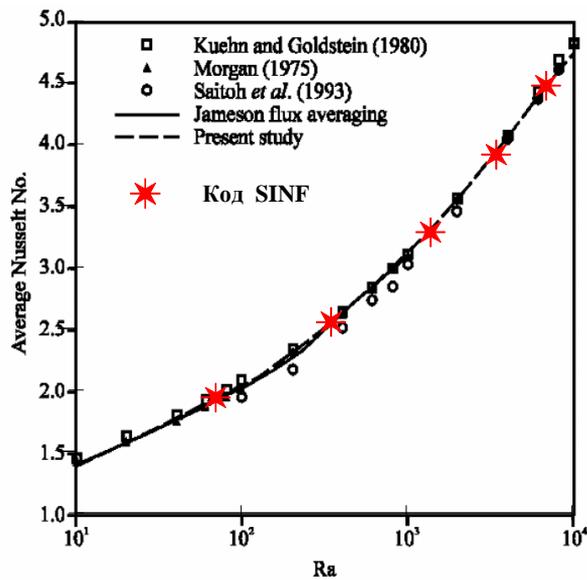


Рисунок 4.19 – Теплоотдача горизонтального цилиндра при естественной конвекции: сравнение данных разных авторов (из [172]) и результатов расчета SINF

#### Трение и теплообмен в турбулентном пограничном слое на пластине

Рассматривается турбулентное обтекание изотермической гладкой бесконечно тонкой пластины однородным потоком (см. рисунок 4.20а). Следуя условиям эксперимента [205], жидкость считается несжимаемой (в опытах число Маха не превышало 0.1), число Рейнольдса  $Re = U_\infty L / \nu = 10^7$ . Число Прандтля полагается равным  $Pr = 0.72$ . В качестве основных масштабов используются: длина пластины  $L$ , скорость набегающего потока  $U_\infty$  и перепад температур  $\Delta T = T_w - T_\infty$ .

Представляемые результаты получены с применением низкорейнольдсовой  $k-\omega$  модели турбулентности [207]. Интенсивность турбулентности входного потока полагалась равной  $Tu = 1\%$  (кинетическая энергия  $k = 1.5 \cdot 10^{-4}$ ), турбулентная вязкость  $\nu_t = 5\nu$ .

Для расчетов использовалась сетка размером  $125 \times 75$  ячеек (см. рисунок 4.20б) со сгущением к поверхности пластины ( $\Delta y_{min} \approx 10^{-6}$ ) и к ее передней кромке ( $\Delta x_{min} \approx 5 \cdot 10^{-4}$ ). На большей части пластины значение нормированной пристенной координаты первой расчетной точки  $y^+ = y \sqrt{\tau_w / \rho} / \nu < 0.3$  (в области выхода – около 0.2). Высота расчетной области  $h = 0.25$ , что на два порядка больше толщины вытеснения пограничного слоя. Входная граница  $AD$  немного смещена вверх по потоку от передней кромки пластины, чтобы обеспечить ее естественное обтекание.

На входе в расчетную область (граница  $AD$  на рисунке 4.20а) задавался однородный поток, на выходе (граница  $CE$ ) – постоянное давление  $p = 0$ , на поверхности пластины  $BC$  – постоянная температура, на участках  $AB$  и  $DE$  – условия симметрии. Отметим, что задание на внешней границе  $DE$  условия свободного вытекания ( $p = 0$ ) вместо условия симметрии, равно как и уменьшение входной турбулентной вязкости до уровня  $\nu_t = 0.5\nu$  не оказывали сколько-нибудь заметного влияния на результаты расчета трения и теплоотдачи.

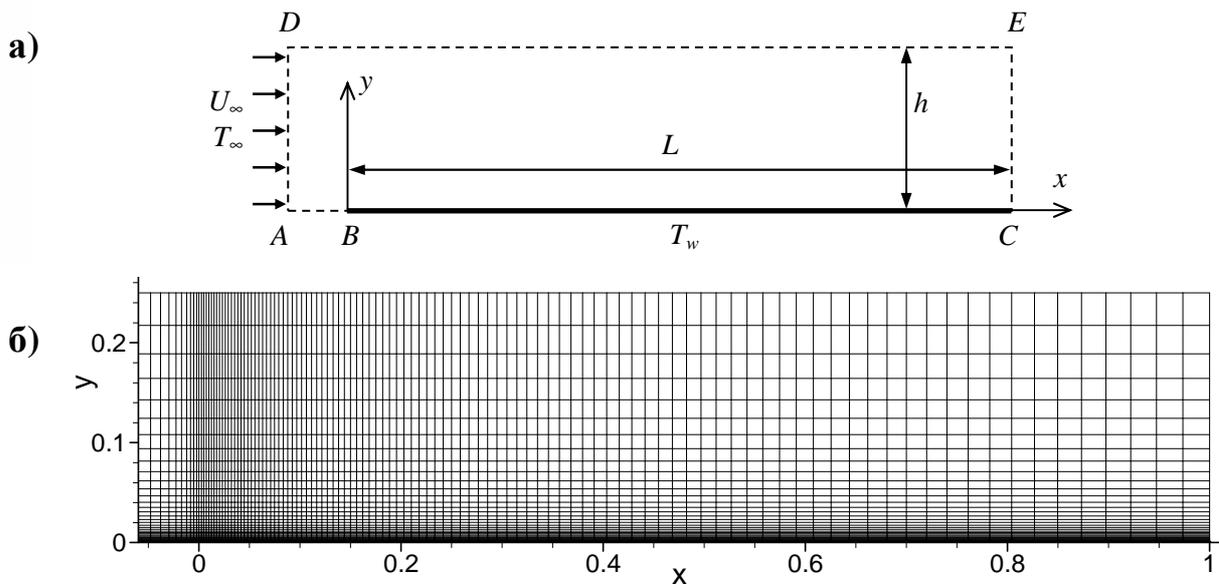


Рисунок 4.20 – Схема расчетной области (вверху) и расчетная сетка (внизу) для задачи о турбулентном пограничном слое на пластине

Полученные распределения коэффициента трения  $C_f = 2\tau_w / (\rho U_\infty^2)$  и числа Стэнтона  $St = q_w / (\rho U_\infty C_p \Delta T)$  по длине пластины (в зависимости от числа Рейнольдса  $Re_x$ ) представлены на рисунке 4.21а вместе с данными измерений [205]. Отметим, что в опытах [205] измерялось только трение; для получения «экспериментальных» данных по числу Стэнтона использована аналогия Рейнольдса (4.11) (значение коэффициента  $K$ , выбрано в соответствии с рекомендациями [115] для  $Pr \sim 0.7$ ). Расхождение расчетных и экспериментальных данных по трению не превышает 3%, по теплоотдаче – 5%.

$$St = \frac{1}{2} C_f \cdot K_r, \quad K_r = 1.16 \quad (4.11)$$

Свойства турбулентного пограничного слоя часто соотносят с числом Рейнольдса, построенным не по текущей координате ( $Re_x$ ), а по толщине потери импульса ( $Re_\theta$ ). На рисунке 4.21б данные представлены именно в таком виде (правая граница графика,  $Re_\theta = 4 \cdot 10^3$ , приблизительно соответствует значению  $Re_x \approx 2 \cdot 10^6$ ). Помимо результатов расчета SINF и опытных данных [205], на рисунке 4.21б приведены известные экспериментальные корреляции  $C_f(Re_\theta)$  [115] (4.12) и [177] (4.13) (соответствующие зависимости для числа Стэнтона получены с помощью аналогии Рейнольдса (4.11)), а также данные измерений [81]. Как можно видеть, данные SINF (кривая 1) лежат в пределах разброса экспериментальных зависимостей.

$$C_f = \frac{0.01013}{\log_{10} Re_\theta - 1.02} - 0.00075 \quad (4.12)$$

$$C_f = \frac{0.0586}{\log_{10}(2Re_\theta) \cdot [\log_{10}(2Re_\theta) + 0.868]} \quad (4.13)$$

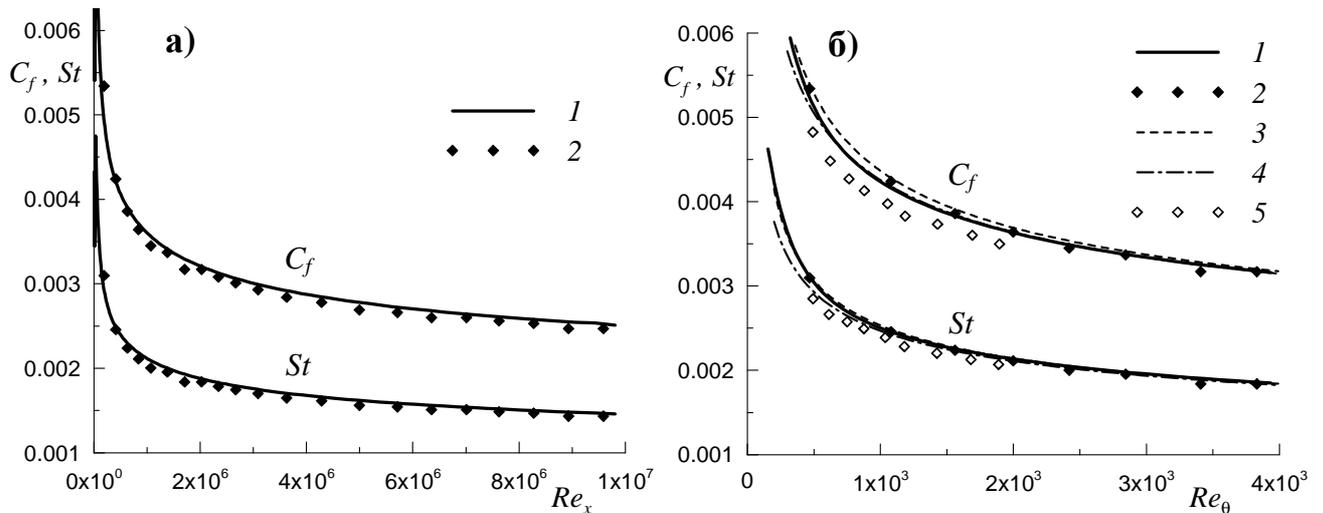


Рисунок 4.21 – Расчетные (1) и экспериментальные данные по трению и теплоотдаче в турбулентном пограничном слое на пластине:  
1 – SINF, 2 – [205], 3 – [115], 4 – [177], 5 – [81]

Отметим в заключение, что успешное прохождение данного теста с применением  $k-\omega$  модели турбулентности [207] вовсе не означает, что эта модель будет столь же хорошо работать в других условиях, или что другие модели в данном тесте покажут столь же хорошие результаты. Речь в данном случае идет лишь о демонстрации одного из множества тестов, выполненных для проверки кода SINF. Сравнение и оценка возможностей различных моделей турбулентности выходят за рамки настоящей работы.

Турбулентное течение и теплообмен за обратным уступом

Рассматривается турбулентное неизотермическое течение несжимаемой жидкости в плоском канале с внезапным односторонним расширением (обратный уступ, рисунок 4.22а). Для моделирования турбулентности используется модель SST [162]. Результаты расчетов по коду SINF сопоставляются с данными измерений [110, 201], а также с результатами аналогичных расчетов (на тех же сетках и с той же моделью турбулентности), полученными с помощью коммерческих кодов ANSYS Fluent и ANSYS CFX (версия 13.0).

Геометрия расчетной области показана на рисунке 4.22а. В соответствии с условиями экспериментов [110, 201], число Рейнольдса  $U_0 H / \nu = 28000$  (в качестве масштабов используется высота уступа  $H$  и максимальная скорость во входном сечении  $U_0$ ), число Прандтля  $Pr = 0.71$ . На нижней стенке канала (за уступом) задан постоянный тепловой поток  $q_w$ , остальные стенки теплоизолированы. Для получения параметров потока во входном сечении расчетной области была решена вспомогательная задача о развитии течения в подводящем канале; входные профили скорости и параметров турбулентности для основной задачи извлекались в том сечении канала, где имело место наилучшее согласие рассчитанных параметров пограничного слоя ( $\delta_{99}$ ,  $\theta$ ,  $C_f$ ) с данными измерений (примерно  $76H$  от входа в канал).

Расчеты проводились на многоблочных декартовых сетках со сгущением ко всем стенкам канала. Было построено 9 сеток, отличающихся степенью сгущения к нижней (обогреваемой) стенке канала. От сетки к сетке первый пристенный шаг  $\Delta y_1$  на нижней стенке менялся от  $0.0003H$  до  $0.12H$ , что отвечает изменению типичного значения нормированной пристенной координаты первой расчетной точки  $y^+$  от 0.1 до 40. На остальных стенках величина пристенного шага  $\Delta y_1$  для всех сеток составляла  $0.005H$  ( $y^+ < 3$ ). Общий размер сеток варьировался от 8 до 13 тысяч ячеек. В качестве примера на рисунке 4.22б представлен фрагмент одной из сеток в окрестности уступа (на нижней стенке  $y^+ \sim 2$ ; для лучшей читаемости показана каждая вторая сеточная линия).

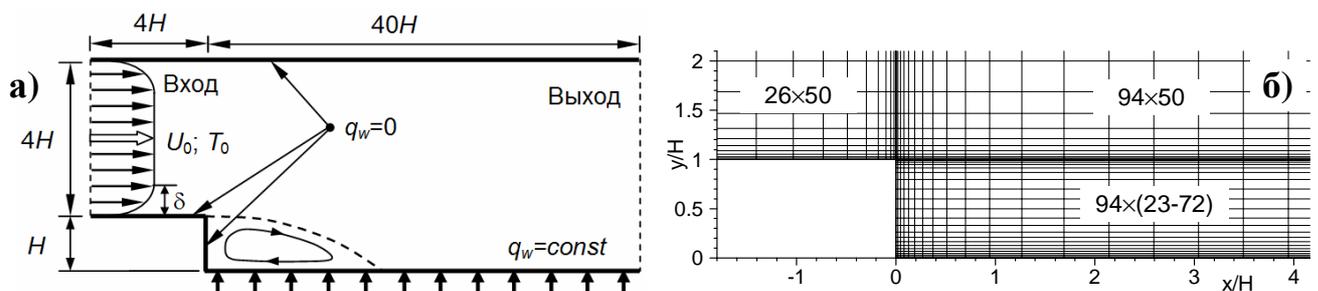


Рисунок 4.22 – Течение за обратным уступом: а) схема, б) расчетная сетка (фрагмент)

На рисунке 4.23 результаты, полученные в расчетах на самой мелкой сетке ( $y^+ \sim 0.1$ ), сопоставляются с данными измерений [110] (трение и профили скорости) и [201] (теплоотдача). На рисунке 4.23а показаны распределения коэффициента трения  $C_f = 2\tau_w/(\rho U_0^2)$  и числа Стэнтона  $St = q_w/(\rho U_0 C_p (T_w - T_0))$  вдоль нижней стенки канала за уступом. Как можно видеть, расчеты с помощью всех трех кодов (SINF, Fluent и CFX) дали практически одинаковый результат – отличия не превышают 3%. При этом расчет довольно хорошо воспроизводит экспериментальные данные по длине рециркуляционной зоны (точка смены знака  $C_f$ ), но заметно завышает уровень трения внутри этой зоны и, напротив, занижает трение ниже по потоку, в области  $x/H > 15$ . Тем более удивительным выглядит хорошее совпадение результатов расчета и эксперимента по теплоотдаче на стенке.

На рисунке 4.23б рассчитанные профили скорости в различных сечениях  $x/H$  за уступом наложены на рисунок из отчета [110] с данными соответствующих измерений. Как можно видеть, в целом имеет место довольно хорошее согласие расчетных и экспериментальных данных, хотя вблизи нижней стенки расчет несколько занижает скорость пристенного течения, особенно при  $x/H > 10$  (что согласуется с заниженным уровнем трения в этой области, см. рисунок 4.23а). По-видимому, (использованная) модель турбулентности недооценивает интенсивность турбулентного перемешивания в существенно неравновесном течении за точкой присоединения потока.

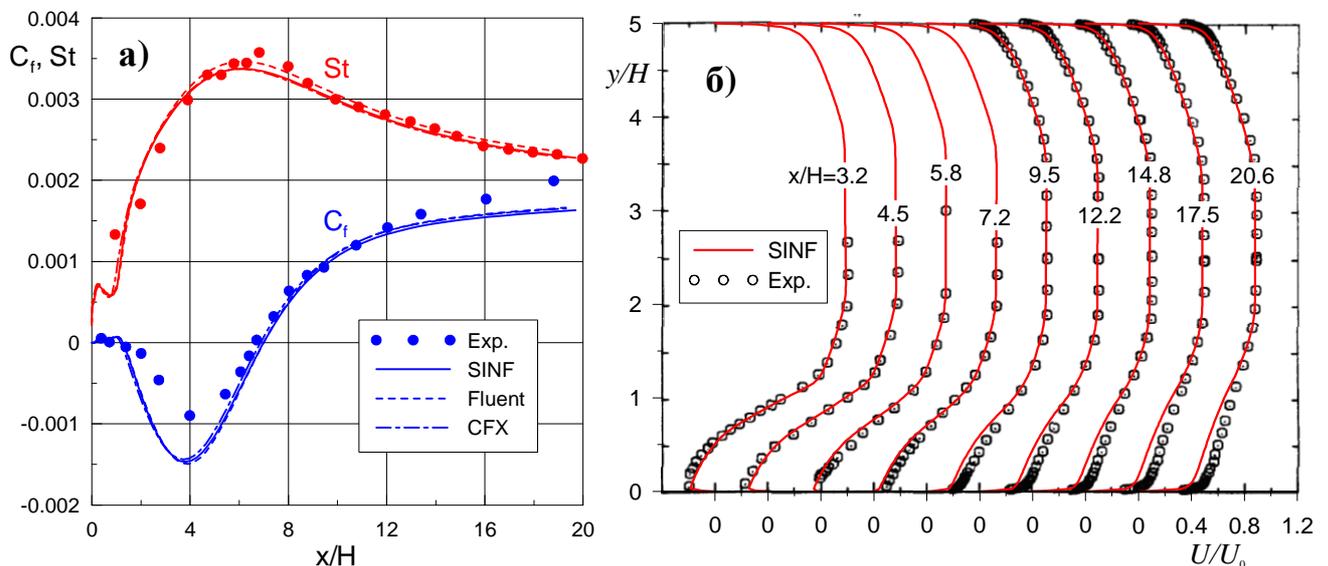


Рисунок 4.23 – Течение за обратным уступом: а) изменение коэффициента трения и числа Стэнтона вдоль обогреваемой стенки, б) профили скорости в разных сечениях  $x/H$

Помимо проверки правильности реализации и качества работы модели турбулентности, в рамках представляемого теста проверялась работа пристенных функций, призванных снизить чувствительность решения к густоте расчетной сетки у стенки. Для этого были проведены расчеты на сетках с различной степенью сгущения к

нижней обогреваемой стенке канала, результаты которых представлены на рисунке 4.24. В расчетах SINP (рисунок 4.24а) использовались оригинальные обобщенные пристенные функции в формулировке (2.27) – (2.29), в расчетах Fluent (рисунок 4.24б) – опция «Enhanced Wall Functions», формулировка которой в описании пакета Fluent раскрыта не полностью (что не позволило реализовать ее в ПК SINP).

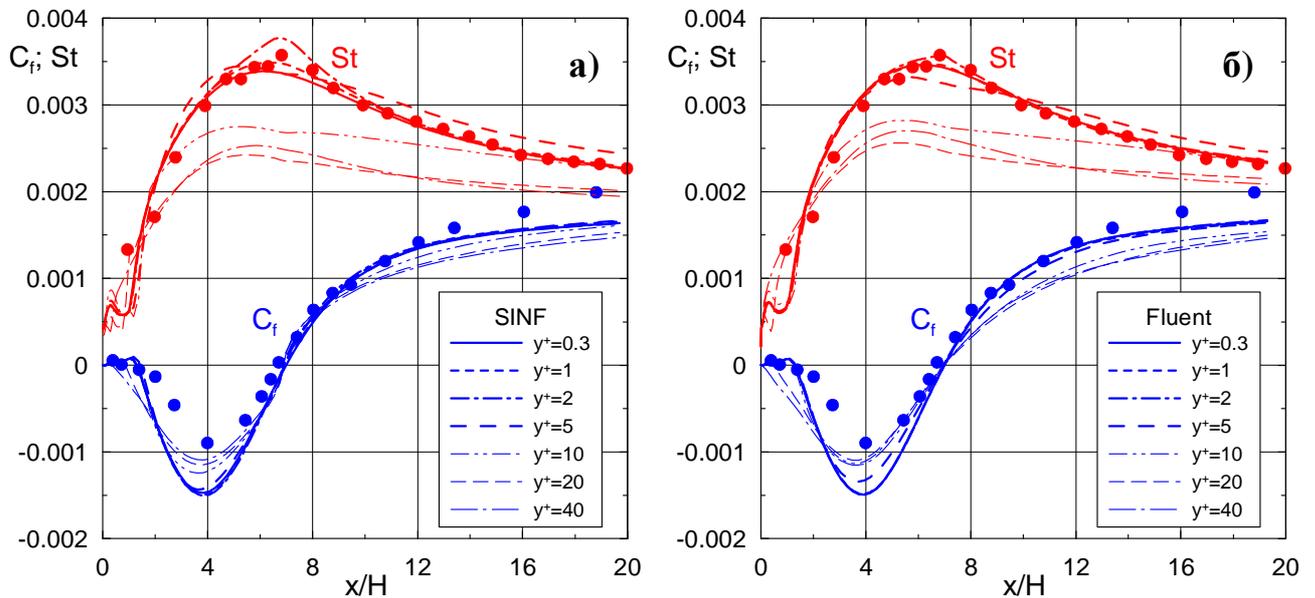


Рисунок 4.24 – Данные по теплоотдаче и трению за обратным уступом, полученные на разных по густоте сетках с применением обобщенных пристенных функций

Как можно видеть из данных рисунка 4.24, уровень сеточной зависимости решения, который обеспечивают пристенные функции кода SINP, практически такой же (чуть лучше по трению, чуть хуже по теплоотдаче), как в коммерческом коде ANSYS Fluent. В частности, при  $y^+ \leq 1$  решение от сетки не зависит (с точностью до толщины линий на графиках), а при  $y^+ \leq 5$  отклонение от сеточно-сошедшегося решения не превышает 10%. Дальнейшее огрубление сетки приводит к значительному ухудшению точности расчета теплоотдачи, тогда как данные по трению вплоть до  $y^+ \sim 40$  отклоняются от «точных» значений не более, чем на 20%, что можно считать вполне приемлемым для столь грубых сеток (например, для сетки с  $y^+ \sim 10$  первая расчетная точка находится вне пограничного слоя в зоне рециркуляции, а сетки с  $y^+ \geq 20$  у нижней стенки разрежены, а не сгущены).

#### Развитое турбулентное течение в плоском вращающемся канале

Рассматривается турбулентное течение несжимаемой жидкости в длинном плоском канале, который вращается с постоянной угловой скоростью  $\omega$  вокруг оси, перпендикулярной плоскости течения (см. рисунок 4.25а). Для такой конфигурации влияние вращения на поток на участке установившегося течения проявляется в том, что

у стенки, на которой сила Кориолиса понижает давление (т.наз. сторона разрежения; правая на рисунке 4.25а), интенсивность турбулентного перемешивания уменьшается, а у противоположной стенки (сторона давления) – увеличивается. Как следствие, профиль средней скорости  $U(y)$  становится несимметричным (максимум смещается к стороне разрежения), причем в его средней части образуется линейный участок с наклоном  $\partial U/\partial y \approx 2\omega$ , отвечающим нулевой завихренности потока в абсолютном движении.

В рамках RANS подхода, для учета влияния вращения в модель турбулентности вводится поправка (как правило, модифицируется генерационный или деструктивный член в уравнениях переноса турбулентных характеристик), реагирующая на вращение системы отсчета и локальную кривизну линий тока. В представляемом тесте для моделирования турбулентности используется модель SST [162] с поправкой на кривизну/вращение [180]. Результаты расчетов по коду SINF сопоставляются с данными DNS расчетов [149].

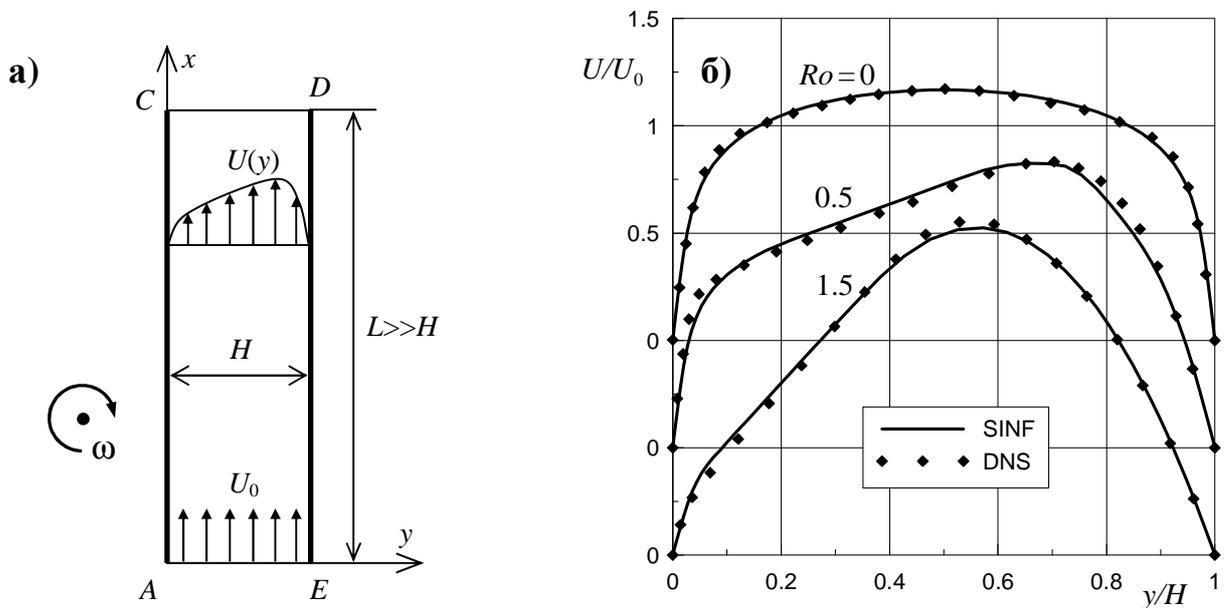


Рисунок 4.25 – Течение во вращающемся канале: а) схема, б) профили скорости на участке установившегося течения при разных значениях числа Россби  $Ro = \omega H/U_0$  (линии – расчет SINF, символы – DNS [149])

Постановка задачи проиллюстрирована на рисунке 4.25а. Расчетная область покрывает начальный участок канала достаточно длинный ( $L = 200H$ ), чтобы выйти на режим установившегося течения. На входе в канал (граница  $AE$ ) задан однородный поток со скоростью  $U_0$ . В соответствии с условиями «эталонных» расчетов [149], число Рейнольдса  $U_0 H/\nu = 5000$ ; относительная скорость вращения канала (число Россби  $Ro = \omega H/U_0$ ) варьируется от 0 до 1.5. Расчетная сетка имеет размер  $50 \times 100$  ячеек (поперек и вдоль канала соответственно); поперечный шаг  $\Delta y$  изменяется от  $0.05H$  на

оси канала до  $0.005H$  у стенок (на участке развитого течения значение нормированной пристенной координаты первой расчетной точки  $y^+ < 1$  на всех режимах).

Полученные с помощью кода SINF профили скорости на участке установившегося течения показаны на рисунке 4.25б (линии) вместе с «эталонными» данными DNS расчета [149] (символы). Как можно видеть, влияние вращения на профили скорости весьма значительно, причем для всех рассмотренных режимов поправка на кривизну/вращение [180] обеспечила вполне адекватный учет этого влияния. Уместно подчеркнуть, что без упомянутой поправки расчет SINF дал бы один и тот же профиль скорости для всех трех режимов, т.к. исходная модель турбулентности SST [162] вообще не «чувствует» вращения.

### Свободно-конвективный пограничный слой на вертикальной пластине

Задача о свободно-конвективном течении около вертикальной пластины широко используется для тестирования гидродинамических кодов и моделей турбулентности. В рамках представляемого теста рассматривается изотермическая пластина, нагретая до температуры  $T_w > T_\infty$  (см. рисунок 4.26а); эффекты плавучести учитываются в приближении Буссинеска. В соответствии с условиями эксперимента [167], число Прандтля равно  $Pr = 0.71$  (воздух), число Рэлея  $Ra = Pr \cdot g \beta \Delta T L^3 / \nu^2 = 2.15 \cdot 10^{11}$  (где  $\beta$  – коэффициент объемного расширения жидкости,  $L$  – длина пластины,  $\Delta T = T_w - T_\infty$  – избыточная температура поверхности).

При таком числе Рэлея турбулизация пограничного слоя происходит на значительном удалении от нижнего края пластины (в опытах [167] – около  $0.2L$ ). Это создает особые сложности для моделирования турбулентности, поскольку широко распространенные RANS модели «настроены» на расчет именно турбулентных течений и, вообще говоря, не обеспечивают адекватного предсказания перехода. С учетом этого, в рамках представляемого теста был опробован целый ряд низкорейнольдсовых моделей турбулентности, а именно:

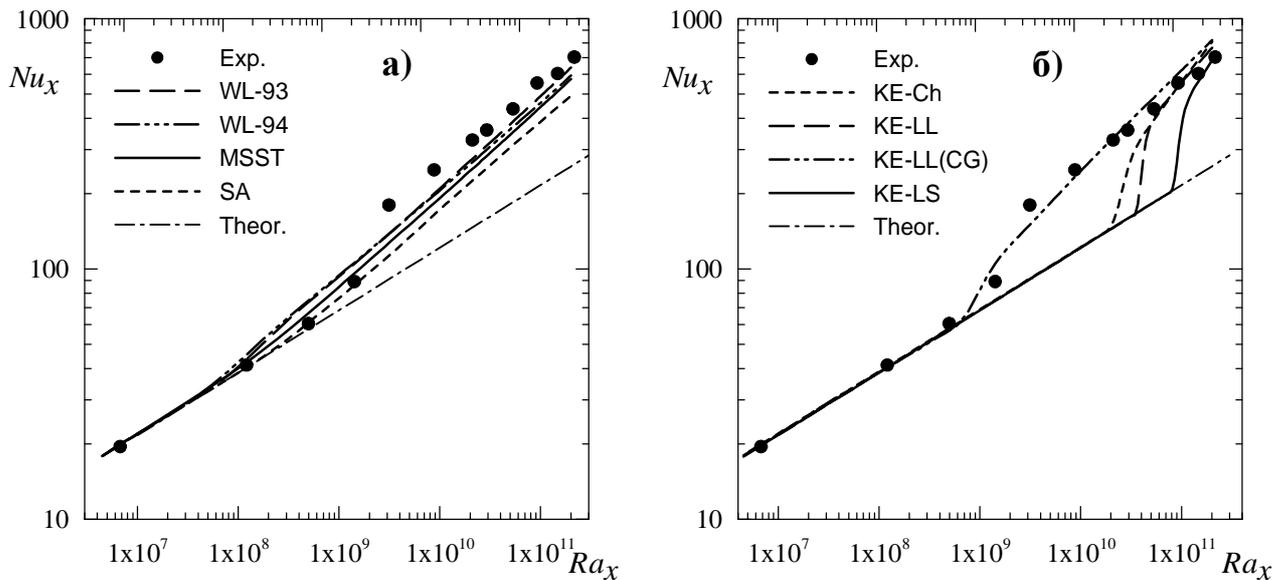
- $k$ - $\omega$  модель Уилкокса [207] и ее «transition» версия [208],
- SST модель Ментера [162],
- модель вихревой вязкости Спаларта-Аллмараса [184],
- $k$ - $\epsilon$  модели Янга-Ши [212] и Лиина-Лещинера [157], претендующие на расчет переходных режимов, а также
- «обычные»  $k$ - $\epsilon$  модели Лаундера-Шармы [154] и Чена [117].

Показанная на рисунке 4.26а расчетная область представляет собой прямоугольник  $ABCD$  размером  $1.3L \times 0.4L$ . Участок  $AE$  границы  $AD$  отвечает поверхности пластины с заданной температурой  $T_w$ . На участке  $ED$  (выше пластины)



расстояния до стенки  $y^+$  для трех использованных сеток, полученные в расчетах с  $k$ - $\varepsilon$  моделью турбулентности [157].

На рисунке 4.27 показано изменение локального числа Нуссельта  $Nu_x = q_w x / \lambda \Delta T$  в зависимости от локального числа Рэлея  $Ra_x = Pr \cdot g \beta \Delta T x^3 / \nu^2$ ; результаты расчетов SINF с разными моделями турбулентности наложены на данные измерений [167]. Из рисунка видно, что на ламинарном участке все модели дают вполне приемлемое согласие с экспериментом и с известным аналитическим решением для ламинарного пограничного слоя  $Nu_x^{theor} = 0.385 Ra_x^{1/4}$  (напр., [105]).



Модели турбулентности: WL-93 –  $k$ - $\omega$  [207], WL-94 – «transition»  $k$ - $\omega$  [208], MSST –  $k$ - $\omega$  SST [162], SA – [184], KE-Ch –  $k$ - $\varepsilon$  [117], KE-LL –  $k$ - $\varepsilon$  [157] (CG – «грубая» сетка), KE-LS –  $k$ - $\varepsilon$  [153]

Рисунок 4.27 – Свободная конвекция у вертикальной пластины: изменение числа Нуссельта  $Nu_x$  вдоль пластины (линии – расчеты SINF с разными моделями турбулентности, точки – эксперимент [167])

Вместе с тем, можно отметить принципиальные отличия в результатах, полученных по моделям  $k$ - $\omega$  и SA (рисунок 4.27а) и по  $k$ - $\varepsilon$  моделям (рисунок 4.27б). В частности,  $k$ - $\varepsilon$  модели предсказывают более поздний и более резкий по сравнению с экспериментом переход<sup>1</sup>, причем в области турбулентного течения расчетные данные довольно хорошо согласуются с результатами измерений. Напротив, для моделей  $k$ - $\omega$ , как и для модели Спаларта-Аллмараса (SA) (рисунок 4.27а), характерно отсутствие выраженной области ламинарно-турбулентного перехода: полученные зависимости  $Nu_x(Ra_x)$  чрезмерно сглажены по сравнению с опытными данными. При этом на участке

<sup>1</sup> В расчетах по модели [212] пограничный слой был ламинарным на всей пластине, а турбулизация течения происходила только в свободно-конвективной струе над пластиной (на рисунке данные для этой модели не приведены, т.к. они совпадают с теоретической зависимостью для ламинарного пограничного слоя).

турбулентного пограничного слоя расчетные значения числа Нуссельта для моделей данной группы существенно занижены (до 40%), причем данное рассогласование сохраняется даже при увеличении в несколько раз уровня турбулентной вязкости и/или кинетической энергии турбулентности в подтекающем потоке.

Требования к густоте расчетной сетки в области вязкого подслоя для  $k$ - $\epsilon$  моделей оказалась более жесткими. Если для моделей  $k$ - $\omega$  и SA расчеты на сетках  $A$ ,  $B$  и  $C$  (с типичными значениями  $y^+ \approx 0.3, 0.6$  и  $1.2$  соответственно, см. рисунок 4.26б) давали практически одинаковый результат, то при использовании  $k$ - $\epsilon$  моделей сетка  $C$  ( $y^+ \approx 1.2$ ) оказалась недостаточно мелкой для получения сеточно-независимого решения. В частности, на рисунке 4.27б видно кардинальное отличие результатов, полученных по модели [157] на базовой сетке  $B$  и на огрубленной сетке  $C$ ; аналогичным образом реагировала на огрубление сетки и модель [117]. Понятно, что в такой ситуации довольно хорошее согласование результатов (включая положение точки перехода), полученных по модели [157] на сетке  $C$ , с данными измерений является случайным. Отметим также, что значительное смещение точки турбулизации пограничного слоя в расчетах по модели [157] наблюдалось не только при огрублении сетки, но и при увеличении турбулентной вязкости и/или кинетической энергии турбулентности в подтекающем потоке.

#### Пограничный слой на вертикальной пластине при наличии конденсации пара

Задача о конденсации пара на вертикальной поверхности из паровоздушной смеси имеет важное значение для тестирования математической модели специализированного кода ПГС-ТК (разд. 2.2.3). Постановка задачи аналогична предыдущему тесту (рисунок 4.26а) с той лишь разницей, что пластина является холодной и, соответственно, течение направлено вниз. Переменная по высоте пластины температура поверхности  $T_w$  и параметры паровоздушной смеси «на бесконечности» (давление  $p_a$ , температура  $T_\infty$  и массовая доля пара  $y_{v,\infty}$ ) задавалась в соответствии с данными измерений [121]. Для моделирования турбулентности использовалась  $k$ - $\epsilon$  модель [157].

Результаты расчетов и данные измерений [121] по среднему тепловому потоку на пластине сведены в таблице 6. Можно отметить, что согласие данных расчета и эксперимента вполне приемлемое. Дополнительные методические расчеты показали, что влияние термического сопротивления пленки конденсата в данном случае несущественно, тогда как учет стекания пленки приводит к заметному (до 15%) увеличению теплового потока на стенке, что обусловлено интенсификацией движения паровоздушной смеси из-за стекания пленки по поверхности.

Таблица 6 – Результаты расчета и эксперимента [121]

Условия эксперимента			Средний тепловой поток, кВт/м <sup>2</sup>		Отклонение расчета от эксперимента
$p_a$ , кПа	$T_\infty$ , К	$y_{v,\infty}$	Эксперимент	ПГС-ТК	
300	398	0.66	28.7	26.51	7.6 %
450	410	0.65	37.7	36.15	4.1 %

Уместно отметить, что в эксперименте [121] рассматривалась конденсация пара на вертикальном цилиндре, однако измеренные значения теплового потока на цилиндре были пересчитаны авторами эксперимента на случай конденсации пара на плоской пластине и представлены в виде корреляционной зависимости (4.14), в которую входит средняя по высоте разность температур паровоздушной смеси и стенки  $\langle \Delta T \rangle$  (К), высота поверхности конденсации  $H$  (м), давление в паровой камере  $p_a$  (атм) и массовая доля пара на «бесконечности»  $y_{v,\infty}$ . Представленные в таблице 6 «экспериментальные» значения теплового потока рассчитаны именно по этой формуле.

$$q_m = \langle \Delta T \rangle^{0.75} H^{0.05} [(3.7 + 28.7 p_a) - (2438 + 458.3 p_a) \cdot \lg(1 - y_{v,\infty})] \quad (4.14)$$

#### Турбулентная диффузия частиц в однородном потоке

Одним из тестов, использованных для проверки реализации метода пробных частиц в модуле PCF (см. разд. 2.2.2), была модельная задача о турбулентной диффузии частиц в однородном потоке воздуха за турбулизирующей решеткой, для которой имеются опытные данные [182]. В эксперименте частицы вводились в поток поштучно, что полностью исключает их влияние на несущий поток. Через определенные промежутки времени проводилось фотографирование частиц и по данным для большого числа частиц определялась их дисперсия (средний квадрат поперечного смещения). Параметры исследованных частиц приведены в Таблице 7.

Таблица 7 – Параметры частиц в эксперименте [182]

№ п/п	Материал частиц	Диаметр, мкм	Плотность, г/см <sup>3</sup>	Время релаксации, мс	Скорость оседания, см/с	Число Рейнольдса
1	Пористое стекло	46.5	0.26	1.7	1.67	0.05
2	Кукурузная пыльца	87.0	1.0	20	19.8	1.10
3	Литое стекло	87.0	2.5	45	44.2	2.48
4	Медь	46.5	8.9	49	48.3	1.45

В расчете параметры несущего потока задавались в соответствии с данными измерений: скорость потока равна 6.5 м/с (поток направлен вертикально вверх), интенсивность турбулентности меняется от 5 до 1% (с известным затуханием вниз по потоку). Типичные расчетные траектории тяжелых и легких частиц показаны на рисунке 4.28а,б; разброс траекторий обусловлен псевдо-турбулентными флуктуациями скорости несущего потока (2.45). Видно, что тяжелые частицы (рисунок 4.28а) летят более «кучно» и не столь быстро реагируют на скачкообразные изменения скорости потока при переходе пробной частицы из одного «турбулентного» моля в другой. Рисунок 4.28в демонстрирует хорошее согласие расчетных и экспериментальных данных по турбулентной дисперсии частиц всех видов (номера кривых отвечают порядковому номеру частицы в таблице 7). Для получения статистически установившегося решения требовался расчет около 10000 траекторий.

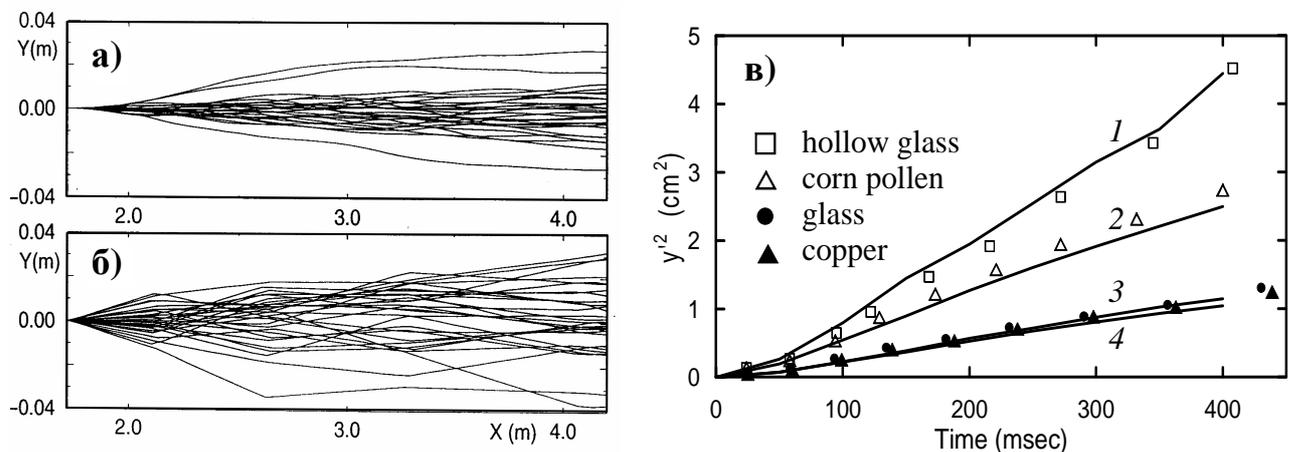


Рисунок 4.28 – Результаты расчета турбулентной диффузии частиц в однородном потоке: типичные траектории тяжелых (а) и легких (б) частиц, а также расчетные (линии) и экспериментальные (символы) данные по поперечному смещению частиц (в)

#### Натекание потока после обрушения «дамбы» на трапецевидное препятствие

Задача о натекании потока, возникшего в результате обрушения «дамбы», на трапецевидное препятствие, для которой имеются недавно опубликованные экспериментальные данные [168], была одним из тестов для проверки модели и численного метода расчета течений со свободной поверхностью (разд. 2.2.1, 3.4.2). В эксперименте использовался открытый с одного из торцов горизонтальный канал прямоугольного сечения, схема которого показана на рисунке 4.29. Перед началом эксперимента часть канала у его закрытого торца была заполнена водой (затененная область на рисунке 4.29). В начальный момент времени сдерживающая воду вертикальная перегородка резко убиралась (моделируя разрушение дамбы) и поток

устремлялся к расположенному на дне канала (на всю его ширину) препятствию в форме равнобедренной трапеции. Положения свободной поверхности в различные моменты времени фиксировались расположенными сбоку фотокамерами.

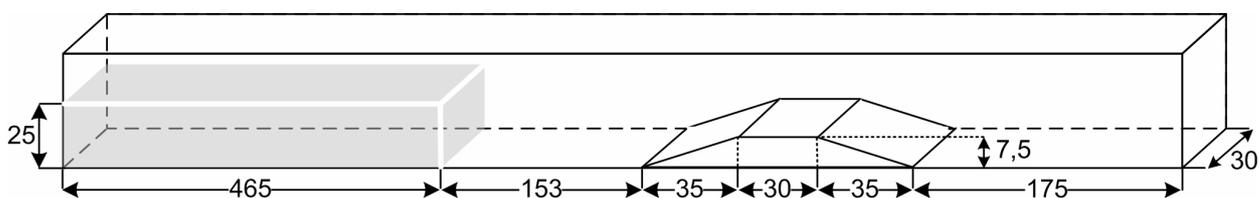


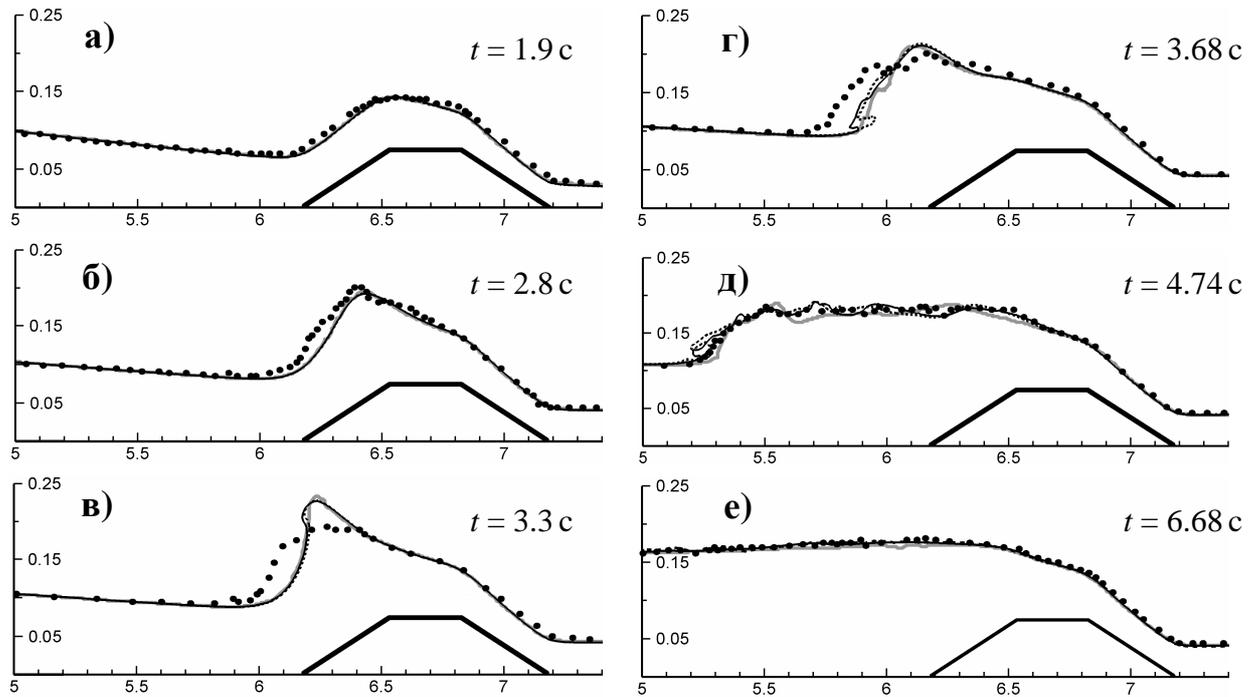
Рисунок 4.29 – Натекание потока на трапециевидное препятствие: схема (эксперимент [168]; все размеры даны в сантиметрах)

Помимо экспериментальных данных в работе [168] представлены результаты расчета с использованием коммерческого кода Flow-3D, предназначенного именно для моделирования течений жидкости со свободной поверхностью. Расчет проводился на сетке с ячейками, имеющими размер 5 мм во всех направлениях.

Расчет с помощью ПК SINF проводился в двумерной постановке на сетке с почти прямоугольными ячейками (с небольшой скошенностью над трапецией) длиной 10 мм и высотой 5 мм; для экономии вычислительных ресурсов сетка была плавно огрублена в вертикальном направлении в верхней части расчетной области (выше начального уровня жидкости) и в горизонтальном направлении слева от разделяющей перегородки. Для проверки независимости получаемого решения от сетки, был проведен также расчет на сетке, измельченной в два раза по каждому направлению. Шаг по времени в обоих расчетах подбирался автоматически так, чтобы максимальное по всем ячейкам сетки значение числа Куранта не превышало 0.8 (при этом на каждый шаг решения уравнений гидродинамики приходилось два дробных шага для уравнения (2.41)).

На рисунке 4.30 показана форма свободной поверхности в окрестности препятствия в разные моменты времени. Результаты настоящих расчетов на обеих сетках приведены вместе с данными эксперимента и расчета [168]. Видно, что результаты, полученные на мелкой и грубой сетках достаточно близки, что позволяет считать их сеточно-независимыми. Также имеет место практически полное совпадение с данными расчета [168], выполненного с помощью коммерческого кода Flow-3D.

Для большинства моментов времени наблюдается прекрасное согласие расчета с экспериментом. Заметное расхождение можно отметить лишь на рисунках 4.30в и г, а именно: в эксперименте фронт отразившейся от препятствия волны слегка опережает расчетный. Вместе с тем, можно заметить, что в эксперименте общий объем жидкости на рисунке 4.30г явно больше, чем в расчете, хотя для более позднего момента времени (рисунок 4.30д) такого расхождения нет.



крупные точки – данные эксперимента, сплошная серая линия – расчет Flow-3D [168];  
 точечная линия – расчет SINF-FS на исходной сетке, сплошная черная – на измельченной  
 Рисунок 4.30 – Натекание потока на трапециевидное препятствие после обрушения  
 «дамбы»: положение свободной поверхности в разные моменты времени

Для прояснения возможных причин отмеченного несоответствия, на рисунке 4.31 расчетная форма свободной поверхности наложена на приведенную в работе [168] фотографию эксперимента для момента времени  $t = 3.66$  с. Видно, что на фотографии в окрестности фронта волны располагается широкая область, имеющая более светлый оттенок, чем находящаяся ниже вода (экспериментальные точки на рисунке 4.30в соответствуют верхнему краю этой области). В работе [168] не поясняется, какой именно эффект имел место в данной области. Можно предположить, что свободная поверхность была неоднородной по ширине канала, что и привело к увеличению «видимого» на фотографии объема жидкости. Понятно, что данный трехмерный эффект не мог быть воспроизведен в двумерном расчете. В остальном же, результаты настоящего расчета хорошо согласуются с экспериментальными данными.

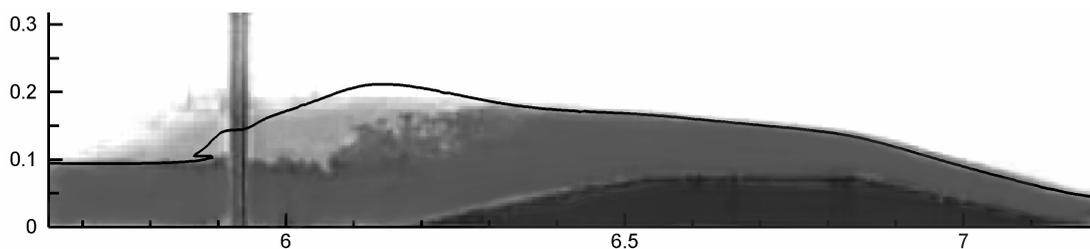


Рисунок 4.31 – Натекание потока на препятствие: фотография течения на момент времени  $t = 3.66$  с с наложенным расчетным положением свободной поверхности

## Глава 5

### Применение ПК SINF для решения фундаментальных и прикладных задач гидрогазодинамики и теплообмена

За свою двадцатилетнюю историю программный комплекс (ПК) SINF с успехом применялся для решения разнообразных методических и прикладных задач гидрогазодинамики и теплообмена. В качестве объектов моделирования выступали процессы термоконвекции [33, 47] и струйной защиты [9, 98], течение в завихрителях [73] и вращающихся полостях [145], тепло- и массоперенос в контейнменте АЭС [21, 94] и в установках выращивания кристаллов по методу Чохральского [29, 68] и др. Значительная часть прикладных расчетов была направлена на анализ структуры потока в проточных частях турбомашин (напр., [97]) и других технических устройств с целью оценки и/или улучшения их аэродинамических характеристик для повышения эффективности.

Реализованные в ПК SINF математические модели и численные методы позволили уже в 90-е гг., задолго до широкого распространения в России коммерческих CFD кодов, проводить трехмерные гидродинамические расчеты для реальной геометрии технических устройств. При этом на всех этапах развития ПК SINF проводимые с его помощью исследования по уровню сложности и точности стояли в ряду лучших (для того времени) не только в России, но и в мире. Ниже представлены лишь некоторые из этих расчетов, выполненные лично автором или при его непосредственном участии.

#### 5.1 Исследовательские расчеты течения и теплопереноса в модельных конфигурациях

##### 5.1.1 Энергоразделение в закрученном потоке газа

Эффект Ранка, который состоит в энергетическом разделении закрученного потока газа, известен уже более восьмидесяти лет [171]. Устройства на его основе (т. наз. вихревые трубы) применяются для охлаждения элементов приборов и агрегатов, кондиционирования воздуха, а также для нагрева, охлаждения, осушки и сепарирования газов в технологических процессах (напр., [82]). Однако, несмотря на широкое практическое применение, общепризнанного теоретического обоснования эффекта Ранка до сих пор нет – дискуссии ведутся даже о ведущем механизме, обеспечивающем

перераспределение энергии в вихревых трубах. В частности, широко распространено мнение, что главную роль в энергетическом разделении играют турбулентные пульсации с адиабатическим расширением/сжатием турбулентных вихрей при их радиальных перемещениях в неоднородном поле давления (довольно подробный критический анализ различных теорий вихревого эффекта можно найти, например, в обзоре [62]).

Альтернативная точка зрения на эффект Ранка состоит в возможности его объяснения на основе положений, равным образом пригодных для ламинарных и турбулентных течений. По-видимому, впервые возможность реализации практически значимого разделения энергии в вихревом устройстве при ламинарном режиме течения была доказана в представляемых расчетах автора [1, 2, 23], причем эффект Ранка был сначала обнаружен при численном моделировании закрученного потока газа в канале, а затем воспроизведен в специально спланированном эксперименте. В настоящее время работ по численному моделированию эффекта энергоразделения в вихревых трубах довольно много (напр. [49, 88, 90, 92]).

Представляемый расчет закрученного потока вязкого газа (воздуха) проведен для вихревого устройства модельной конфигурации, схема которого показана на рисунке 5.1. Газ из завихрителя подается в длинную круглую трубу радиуса  $R$  через кольцевую щель в средней части трубы и симметрично растекается к ее концам. При достаточном уровне закрутки потока на оси трубы возникает обширная зона рециркуляции, наличие которой обычно считается непременным условием эффективного энергоразделения в вихревых трубах. Ниже по потоку восстанавливается однонаправленное течение с характерным М-образным профилем продольной скорости.

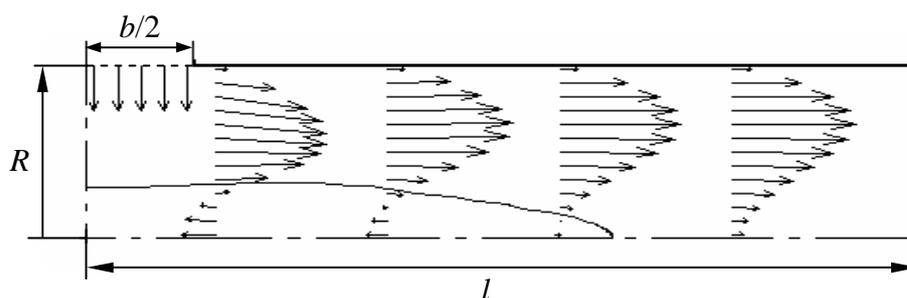


Рисунок 5.1 – Схема к расчету закрученного потока газа в канале

Задача решается в стационарной осесимметричной постановке. Длина расчетной области (от плоскости симметрии до конца трубы) составляет  $l = 10R$ . Расчетная сетка имеет размер  $50 \times 25$  ячеек с небольшим сгущением к оси канала и к кромке входной щели. Ширина щели  $b = R$  обеспечивает равенство входной и выходной площадей.

Граничные условия формулируются следующим образом. На входе в канал (т.е. в выходном сечении кольцевой щели завихрителя) задается радиальная  $V$  и окружная  $W$

компоненты скорости (осевая составляющая полагается равной нулю) и температура потока; на выходе ставятся мягкие условия. Стенки трубы считаются адиабатическими. Для давления всюду ставятся мягкие условия; при этом среднее по сечению входной щели давление (и, соответственно, расход) поддерживается на заданном уровне.

При анализе эффекта Ранка в рассматриваемом вихревом устройстве основное внимание уделялось влиянию на интенсивность энергоразделения числа Маха  $M$  и закрутки  $\Omega$  входного потока, а также числа Рейнольдса  $Re$ . Последние два параметра определяются следующими формулами:

$$Re = \frac{2\rho UR}{\mu} = \frac{2\rho Vb}{\mu}, \quad U = \frac{G}{2\pi R^2\rho} = \frac{Vb}{R} \quad (5.1a)$$

$$\Omega = \frac{L}{GUR} = \frac{WR}{Vb} \quad (5.1б)$$

где  $U$  – характерная скорость, посчитанная по расходу  $G = 2\pi RbV$  и входной плотности  $\rho$ ,  $\mu$  – вязкость газа,  $L = GWR$  – вносимый в трубу момент количества движения.

Картина течения в вихревом устройстве, полученная при  $M = 0.5$ ,  $Re = 200$ ,  $\Omega = 2$ , проиллюстрирована на рисунках 5.1 и 5.2. На рисунке 5.1 показаны векторы скорости и нулевая линия тока, очерчивающая границу рециркуляционной зоны; скорость возвратного течения в этой зоне достигает до  $-0.6U$ , однако из-за сильного разрежения на оси трубы, вызванного вращением потока, циркулирующий расход составляет всего 0.6% общего расхода.

На рисунке 5.2 показаны изолинии окружной скорости (а), числа Маха (б), а также статической (в) и полной (г) температуры, отнесенной к температуре торможения  $T_0$  на входе в канал. Прежде всего, заслуживает внимания поле температуры торможения (рисунок 5.2г), свидетельствующее о наличии ярко выраженного эффекта энергоразделения. Область пониженных температур занимает почти половину (по радиусу) сечения трубы, а в самой холодной точке, расположенной на оси трубы у плоскости симметрии, эффект превышает 15%.

Анализ представленной на рис 3.38. картины течения позволяет также выявить механизм энергоразделения в рассматриваемом вихревом устройстве. По характеру изменения окружной скорости (рисунок 5.2а) поток можно разделить на две части: у оси трубы имеет место почти квазитвердое вращение, а во внешней области окружная скорость изменяется по закону свободного (потенциального) вихря. Разгон газа в потенциальном вихре сопровождается увеличением числа Маха (рисунок 5.2б) и почти изэнтропическим охлаждением (рисунок 5.2в) (об изэнтропичности процесса свидетельствует почти неизменная температура торможения, см. рисунок 5.2г). Прямо противоположная картина наблюдается в вихревом ядре потока: здесь квазитвердое

вращение создает условия для радиального выравнивания температуры газа за счет теплопроводности (рисунок 5.2в), а уменьшение окружной скорости при приближении к оси ведет к соответствующему снижению температуры торможения (рисунок 5.2г). В результате температура торможения на оси трубы оказывается близкой к статической температуре на границе вихревого ядра, которая в свою очередь определяется изэнтропическим разгоном газа в потенциальном вихре и всегда ниже входной температуры торможения.

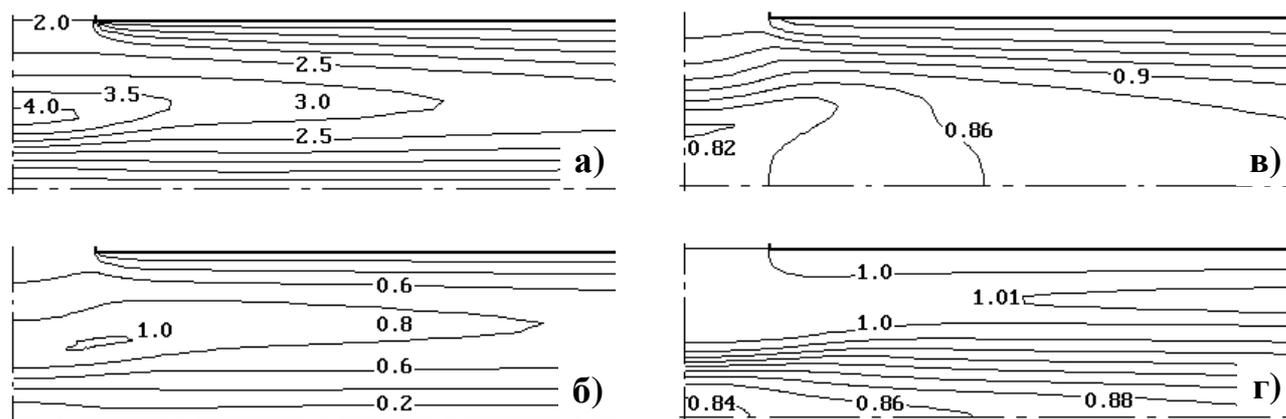


Рисунок 5.2 – Результаты расчета течения в вихревом устройстве при  $M=0.5$ ,  $\Omega=2$ ,  $Re=200$ : изолинии окружной скорости (а), числа Маха (б), статической температуры (в) и температуры торможения (г)

Характер влияния основных режимных параметров на эффект энергоразделения в вихревом устройстве проиллюстрирован на рисунке 5.3. В качестве характеристики интенсивности эффекта используется разность температур торможения на входе в канал и в наиболее холодной точке потока (на оси трубы у плоскости симметрии); перепад температур  $\Delta T$  отнесен к температуре торможения входного потока  $T_0$ .

В полном соответствии с описанным выше механизмом энергоразделения, увеличение входного числа Маха (рисунок 5.3а) ведет к более интенсивному охлаждению газа в потенциальном вихре и, соответственно, к снижению температуры «холодной» зоны. При исчезающе малых числах Маха (в несжимаемой жидкости) адиабатический разгон потока не сопровождается охлаждением газа и энергоразделение отсутствует. Как можно заключить из рисунка 5.3б, эффекты вязкости оказывают незначительное влияние на энергоразделение. Лишь при весьма низких значениях числа Рейнольдса неадиабатичность разгона газа во внешней части вихря становится заметной и температура на границе вихревого ядра (а, значит, и в «холодной» зоне) повышается за счет теплопроводности.

На рисунке 5.3в бросается в глаза немонотонность представленных кривых: при малых значениях параметра закрутки  $\Omega$  его увеличение ведет к усилению эффекта

энергоразделения, тогда как в сильно закрученном потоке тенденция меняется на противоположную. Уровень закрутки входного потока, обеспечивающий (при прочих равных условиях) максимальное энергоразделение, близок к порогу возникновения зоны обратных токов (отмечен на каждом графике жирной точкой). Таким образом, вопреки устоявшимся представлениям, наличие зоны рециркуляции не является необходимым условием эффективного энергоразделения в вихревых трубах.

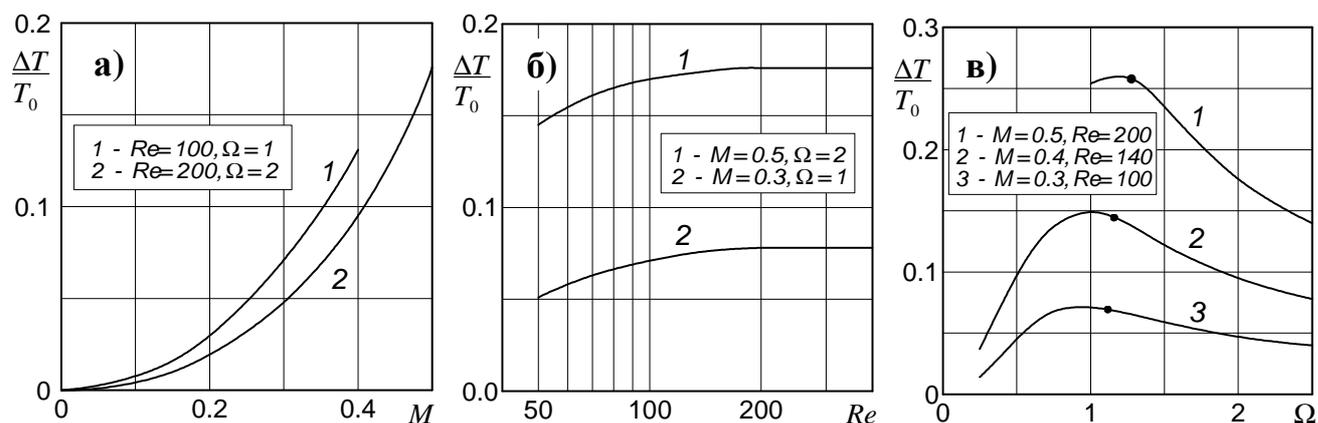


Рисунок 5.3 – Интенсивность охлаждения в зависимости от входного числа Маха (а), числа Рейнольдса (б) и закрутки потока (в)

Заслуживают упоминания некоторые результаты, не нашедшие отражения на представленных выше графиках. Было установлено, в частности, что изменение ширины входной щели  $b$  в интервале от  $0.2R$  до  $2R$  (при сохранении закрутки потока  $\Omega$ ) практически не сказывается на температуре холодной зоны. К столь же незначительным изменениям приводит отказ от теплоизоляции стенок трубы (в дополнительной серии расчетов температура стенок принималась равной температуре торможения входного потока). А вот введение стенки вместо плоскости симметрии привело к практически полному исчезновению эффекта энергоразделения – вариации температуры торможения в потоке не превышали одного процента. Возможно, именно последний результат объясняет тот факт, что до проведения настоящего расчета, результаты которого, как уже говорилось, были подтверждены экспериментально [1], значимый эффект энергоразделения в вихревом устройстве наблюдался лишь в турбулентных потоках.

### 5.1.2 Свободные и вынужденные колебания тел в потоке

В данном разделе представлены расчеты, демонстрирующие возможности ПК SINF по моделированию течений в областях с изменяющейся геометрией с применением деформируемых расчетных сеток (разд. 3.4.1). Первый пример – расчет автоколебаний упруго закрепленного цилиндра в потоке жидкости – имеет в основном методический и

тестовый характер. Второй – моделирование течения, индуцируемого колебаниями упругой пластины пьезоventилятора – направлен на исследование малоизученного и весьма сложного трехмерного течения.

### Автоколебания цилиндра в потоке

Проблема автоколебаний цилиндрических тел в потоке жидкости встречается в морской нефтедобыче, строительстве и многих других областях. Источником колебаний является периодическое изменение гидродинамической силы, обусловленное попеременным срывом вихрей то с одной стороны цилиндра то с другой. Если частота схода вихрей близка к частоте собственных колебаний цилиндра, наблюдается увеличение амплитуды колебаний, что приводит к кардинальной перестройке потока и, в частности, к синхронизации частоты схода вихрей с частотой собственных колебаний цилиндра (т.н. захват частоты). В свою очередь, синхронизация вынуждающей силы с движением цилиндра ведет к дальнейшему резонансному нарастанию амплитуды колебаний.

Ниже рассмотрены поперечные колебания упруго закрепленного круглого цилиндра в турбулентном потоке (рисунок 5.4а). Несмотря на двумерность геометрии, задача решена в трехмерной постановке ввиду необходимости моделирования трехмерной структуры вихревого следа за цилиндром. Размер расчетной области вдоль оси цилиндра составлял два диаметра (в тестовых расчетах – до шести диаметров); на соответствующих границах области накладывались условия периодичности. Моделирование турбулентности выполнено с использованием гибридного RANS/LES подхода на основе SST модели (см. разд. 2.1.2). Расчетная сетка (рисунок 5.4б) содержит около 200 тысяч ячеек; сгущение сетки к поверхности цилиндра обеспечивает нормированное расстояние до стенки  $y^+ < 1$ ; в следе за цилиндром уверенно разрешаются не менее шести вихрей «дорожки Кармана».

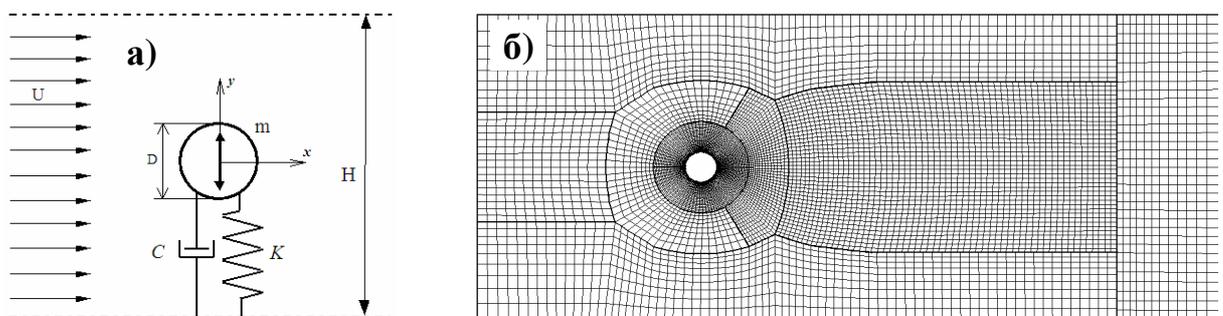


Рисунок 5.4 – Схема (а) и фрагмент расчетной сетки (б) к задаче об автоколебаниях цилиндра в потоке

Следуя условиям, в которых получены экспериментальные данные [144], рассмотрены колебания цилиндра в канале шириной  $H = 10D$ . Приведенная масса цилиндра составляла  $m^* = 4m/(\pi\rho LD^2) = 3.3$ . Относительная скорость потока  $U^* = U/Df_n$  изменялась от 2 до 11 (соответственно, число Рейнольдса от 1200 до 7000), что обеспечило варьирование частоты схода вихрей вблизи собственной частоты колебаний цилиндра  $f_n$ . Коэффициент демпфирования подвески (декремент затухания) полагался равным 0.004. Пограничные слои на стенках канала в расчете не разрешались (задавались условия скольжения). Результаты расчетов представлены на рисунке 5.5.

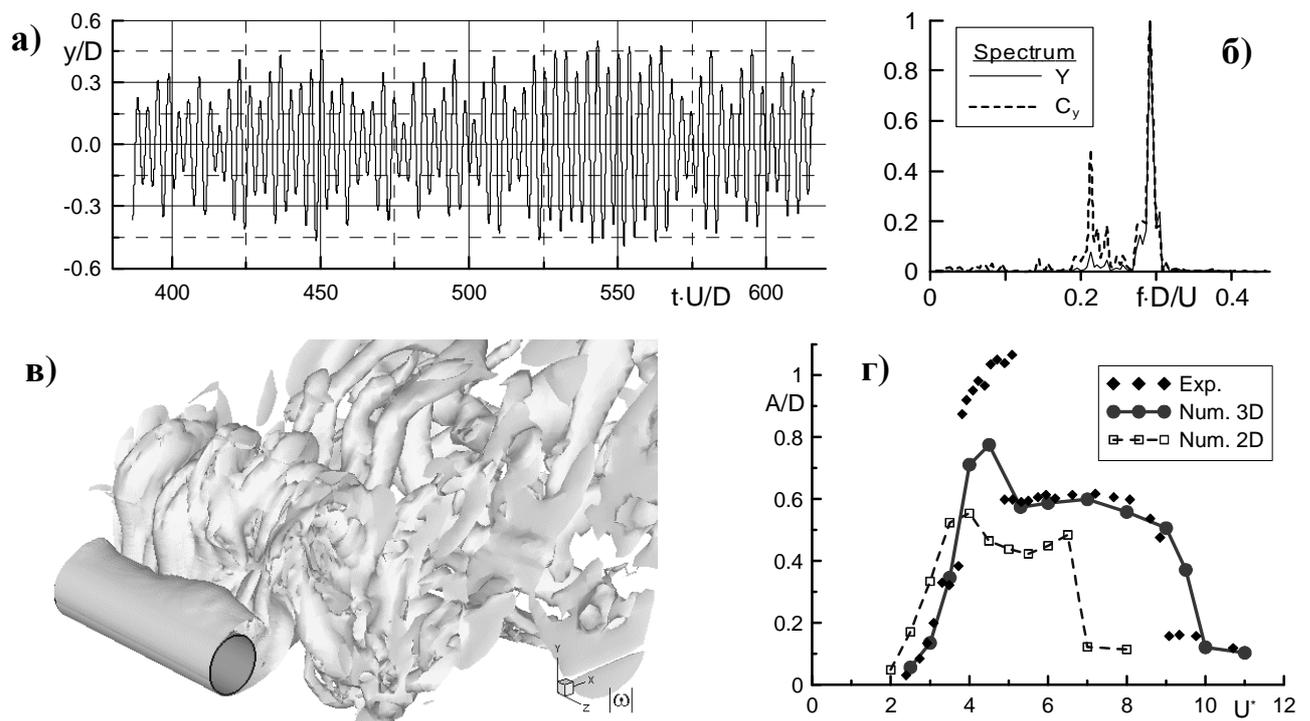


Рисунок 5.5 – Расчет автоколебаний цилиндра: а) типичная эволюция смещения цилиндра, б) спектр колебаний, в) структура следа, г) амплитудная характеристика колебаний

Типичная история колебаний цилиндра показана на рисунке 5.5а. В целом движение имеет ярко выраженный нерегулярный характер (обусловленный как турбулентными пульсациями в следе, так и сложным нелинейным взаимодействием потока с колеблющимся цилиндром), что приводит к необходимости расчета сотен периодов колебаний для получения статистически установившихся результатов. Обычно расчет одного варианта на кластере из 16 процессоров занимал около трех суток.

В спектре колебаний (рисунок 5.5б) присутствуют два ярко выраженных пика с безразмерными частотами около 0.3 и 0.22, которые отвечают собственной частоте колебаний цилиндра и частоте схода вихрей с неподвижного цилиндра соответственно. Разность этих частот просматривается на истории колебаний (рисунок 5.5а) в виде более

или менее регулярных биений амплитуды с периодом около 13 единиц безразмерного времени.

Мгновенная изоповерхность модуля завихренности, показанная на рисунке 5.5в, демонстрирует существенно трехмерную структуру вихревого следа за цилиндром. Типичный размер крупномасштабных вихревых структур вдоль оси цилиндра примерно равен двум диаметрам, что определяет минимально допустимую ширину расчетной области. Более длинноволновые структуры имеют сравнительно малую амплитуду и быстро разрушаются (в частности, на рисунке 5.5в можно видеть структуру длиной  $4D$  вблизи поверхности цилиндра), а потому не оказывают существенного влияния на колебания цилиндра.

Представленные на рисунке 5.5г данные по амплитуде колебаний цилиндра демонстрируют вполне удовлетворительное согласие результатов трехмерного расчета и эксперимента [144]. Некоторое рассогласование наблюдается лишь в области т.наз. верхнего участка резонансной кривой ( $4 < U^* < 5$ ), где амплитуда колебаний в эксперименте превышала диаметр цилиндра. Специально проведенные методические расчеты позволяют утверждать, что отмеченное рассогласование не связано с недостаточной густотой сетки и/или протяженностью расчетной области вдоль оси цилиндра. Возможно, причина кроется во влиянии неучтенных факторов, имевших место в эксперименте, таких как сравнительно небольшая длина погруженной в гидрлоток части цилиндра (всего  $10D$ ), наличие свободной поверхности и т.п. Следует отметить также, что по сравнению с другими подобными расчетами, уже сам факт заметного повышения амплитуды колебаний в обсуждаемой области можно считать большим достижением.

В отличие от представленного трехмерного расчета, моделирование обтекания цилиндра в рамках упрощенной двумерной постановки задачи (пунктирная линия на рисунке 5.5г) дает заниженную амплитуду резонансных колебаний и явно недооценивает ширину области захвата частоты.

#### Течение, индуцированное колебаниями упругой пластины

Рассматривается модельная задача о колебаниях упругой консольной пластины пьезовентилятора длины  $L$  (рисунок 5.6а) в несжимаемой жидкости. Колебания пластины создают струю, которая распространяется вдоль оси  $x$ . Для определения текущего положения пластины решается динамическое уравнение изгиба балки (в приближении малых деформаций) с учетом гидродинамических сил, получаемых из расчета движения жидкости. В представляемых расчетах колебания пластины создаются заданным на расстоянии  $0.1L$  от заземленного конца смещением, которое изменяется во времени по гармоническому закону с частотой  $\omega$ , равной собственной частоте первой

моды свободных (в отсутствие жидкости) колебаний пластины. Величина смещения такова, что на конце пластины амплитуда колебаний составляет  $Z_{\max} = 0.1L$ . С учетом параметров реально существующих устройств такого рода, ширина пластины  $b/L = 0.25$ , безразмерная масса  $M/(\rho L^2) = 10$ , число Рейнольдса  $\omega L^2/\nu = 2 \cdot 10^5$ .

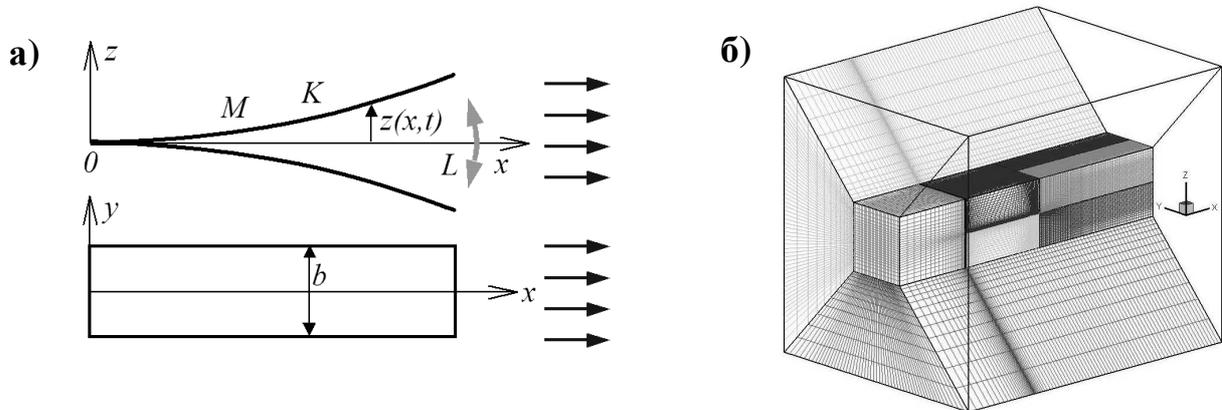


Рисунок 5.6 – Схема к задаче о колебаниях упругой пластины

Использованная для расчетов сетка показана на рисунке 5.6б. Сетка состоит из 12 блоков, содержит около 800 тысяч ячеек и имеет сгущение к поверхности и краям пластины. Величина первого пристенного шага сетки равна  $0.001L$ , что обеспечивает нормированное расстояние до стенки  $y^+ < 3$ . Задача решается в полной трёхмерной постановке (без наложения условия симметрии в срединной плоскости  $y=0$ ); размер расчетной области  $3 \times 3 \times 4 L$ . На входе в область задан слабый спутный поток (примерно 1.5% скорости конца пластины), на выходе фиксирован уровень давления, на боковых границах наложены условия симметрии.

В качестве начальных условий был задан однородный поток (в соответствии с условиями на входе). Развитый режим течения был достигнут после расчета 200 периодов колебаний; еще 100 периодов потребовалось для получения осредненных полей. Расчет был выполнен в 2007 г. на кластере с использованием 10 процессоров и занял более трех месяцев. Ввиду столь высокой ресурсоемкости задачи, проведение каких-либо параметрических исследований было весьма проблематично, поэтому на сегодняшний день полученные результаты ограничиваются единственным расчетом (заметим в скобках, что это, по-видимому, первый в мире расчет такого рода).

Некоторое представление о сложной пространственной структуре струи, индуцируемой колебаниями пластины пьезовентилятора, дает проиллюстрированное на рисунке 5.7 мгновенное поле скорости. Среди особенностей течения можно отметить довольно большой угол раскрытия струи (до  $45^\circ$ ), а также высокую степень хаотичности и наличие большого количества вихрей; полученная картина качественно согласуется с данными наблюдений [203].

В поперечном сечении струи на расстоянии  $0.3L$  от свободного конца пластины (рисунок 5.7б) бросается в глаза провал скорости на оси струи и четыре локальных максимума, в которых скорость превышает 30% от скорости конца пластины. Расположение максимумов скорости в вершинах почти правильного квадрата позволяет связать их происхождение со сложным трехмерным взаимодействием вихрей, сходящихся с конца и с боковых ребер пластины. Величина осредненной скорости в данном сечении достигает 20% от скорости конца пластины, причем на оси струи скорость отрицательная, т.е. имеет место попятное движение жидкости.

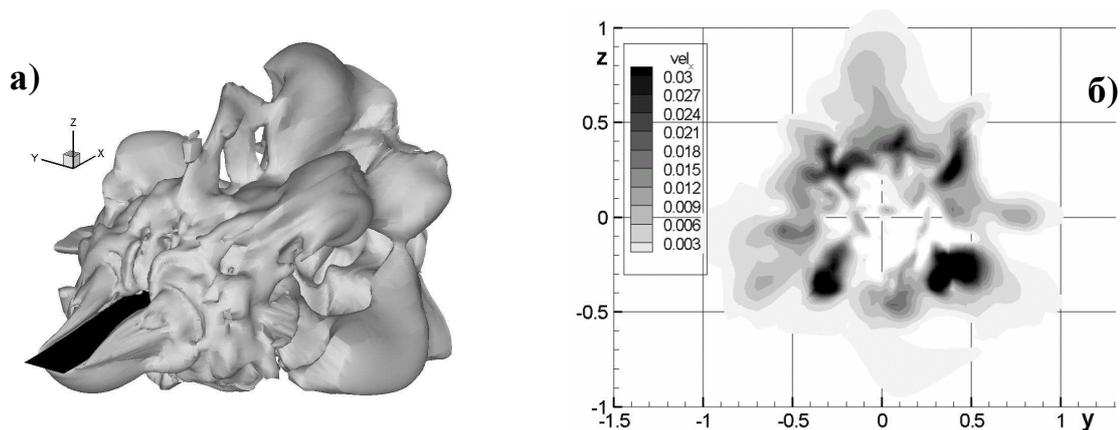


Рисунок 5.7 – Мгновенная изоповерхность продольной составляющей скорости (а) и ее распределение в поперечном сечении ( $x=1.3$ ) струи пьезовентилятора (б)

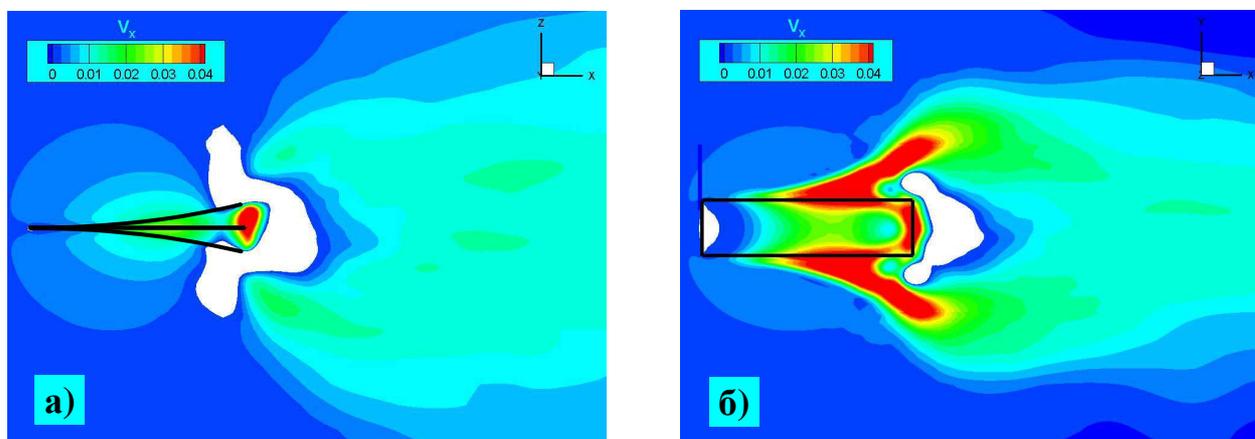


Рисунок 5.8 – Осреднённое поле продольной составляющей скорости в сечениях  $y = 0$  (а) и  $z = 0$  (б) струи пьезовентилятора

Распределение осредненной скорости в продольных сечениях (плоскостях симметрии) струи показано на рисунке 5.8. Видно, что приосевая зона обратных токов имеет сложную пространственную конфигурацию и, в частности, «охватывает» колеблющуюся пластину сверху и снизу (рисунок 5.8а). На расстоянии  $0.4L$  от свободного конца пластины зона обратных токов заканчивается, а еще чуть дальше (примерно на расстоянии  $L$ ) благодаря интенсивному перемешиванию исчезает и провал

скорости на оси струи; типичный уровень скоростей в этой «дальней» части струи 10–15% от скорости конца пластины. Можно отметить также, что, судя по рисунку 5.8б, основную роль в создании течения играют боковые кромки пластины. Именно здесь формируются две мощные струи, которые огибают застойную зону перед передней кромкой пластины и, сливаясь, формируют общую струю.

### 5.1.3 Натекание потока после обрушения «дамбы» на препятствие

Некоторые тестовые расчеты натекания потока со свободной поверхностью на препятствие были показаны ранее (см. рисунки 3.20 и 4.30). В данном разделе представлена задача, в которой, на основании анализа результатов численного моделирования, были обнаружены ранее неизвестные особенности такого рода течений.

Конфигурация моделируемого течения соответствует условиям эксперимента [183] (см. рисунок 5.9). В начальный момент времени вода удерживается вертикальной перегородкой у торца длинного горизонтального канала прямоугольного сечения (затененная область на рисунке 5.9). После того, как перегородка убирается, моделируя мгновенное разрушение «дамбы», жидкость устремляется к расположенному на дне канала препятствию в виде треугольной призмы, частично отражаясь и частично перетекая через него.

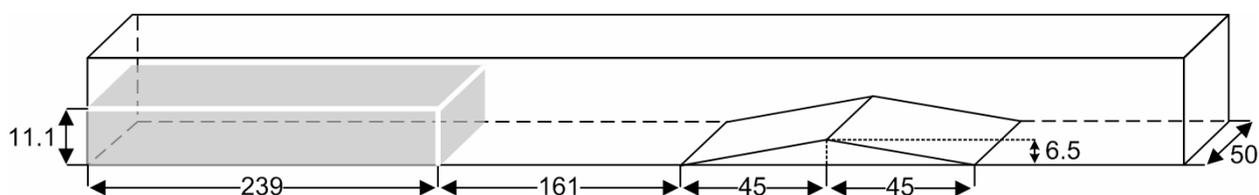


Рисунок 5.9 – Натекание потока на треугольное препятствие: схема  
(эксперимент [183]; все размеры даны в сантиметрах)

Численное моделирование течения проводилось в двумерной и в трехмерной постановке. Двумерная сетка имела в основной области течения ячейки размером  $5 \times 5$  мм; сгущение к нижней стенке канала обеспечило значение нормированной пристенной координаты  $y^+ < 1$ ; общий размер сетки – 25 тысяч ячеек (проверка сеточной сходимости показала достаточность такой сетки). Для проведения трехмерного расчета эта сетка была оттранслирована в поперечном направлении со сгущением к боковой стенке (расчетная область покрывала половину ширины канала); размер сетки составил  $10^6$  ячеек. Для оценки роли эффектов пристеночного трения, помимо расчетов с естественными условиями прилипания на стенках, был произведен модельный расчет с наложением условий проскальзывания. Во всех случаях для учета эффектов турбулентного перемешивания использовалась модель SST [162].

Полученная в результате расчетов картина взаимодействия потока с препятствием во многом аналогична показанной на рисунке 4.30, но есть и существенное отличие. В данном случае начальная высота жидкости в два с лишним раза меньше, чем в опытах [168] (см. рисунок 4.29). Как следствие, натекающий на препятствие поток оказывается более тонким и медленным, а конфигурация свободной поверхности – более сложной. В качестве примера на рисунке 5.10 показана форма свободной поверхности на момент времени  $t = 3.7$  с после обрушения «дамбы» (результаты для трех вариантов расчета наложены на фотографию эксперимента [183]).

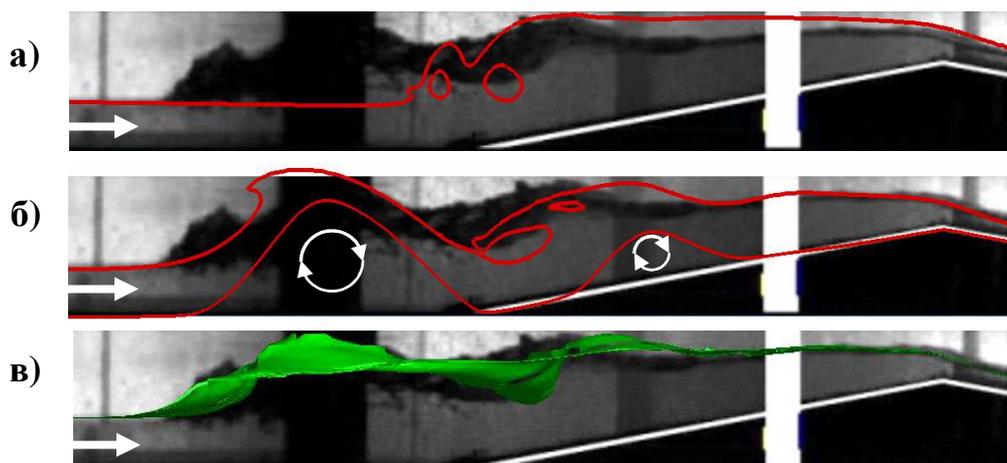


Рисунок 5.10 – Натекание потока на препятствие: фотография течения на момент времени  $t = 3.7$  с с наложенным положением свободной поверхности, полученным в двумерном (б) и трехмерном (в) расчете, а также в расчете без учета трения о стенки (а)

Сопоставляя представленные на рисунке данные можно отметить, что форма свободной поверхности, полученная в расчете с наложением искусственных условий проскальзывания на стенке (рисунок 5.10а) кардинально отличается от более правильного (с условиями прилипания) решения на рисунке 5.10б, причем последнее гораздо лучше согласуется с экспериментом. Таким образом, эффекты пристеночного трения играют в рассматриваемой задаче существенную роль и, следовательно, для получения правильной картины течения (в частности, формы свободной поверхности) необходимо эти эффекты моделировать достаточно аккуратно. Именно поэтому в представляемых расчетах использовалась «низкорейнольдсовая» сетка, обеспечивающая разрешение пристенной области течения вплоть до стенки (включая вязкий подслой).

Детальный анализ результатов численного моделирования позволил выявить механизм влияния пристеночного трения на форму свободной поверхности. Как оказалось, «встречный» градиент давления, возникающий при натекании потока на препятствие, приводит к развитию обширных отрывных зон с попятным движением жидкости в пристенной области, которые показаны на рисунке 5.10б. На свободной поверхности эти отрывные зоны проявляются в виде наблюдаемых в эксперименте (см.

рисунок) характерных «холмов», которые особенно отчетливы в условиях относительно малой толщины слоя жидкости (как это имеет место в рассматриваемом случае – в отличие от показанного на рисунке 4.30, где слой воды гораздо толще). Понятно, что в расчете без учета трения о стенку (рисунок 5.10а) отрывные зоны не возникают и, соответственно, «холмы» на свободной поверхности не образуются. Насколько известно автору, в представляемых расчетах [42, 46], выполненных с помощью ПК SINF, описанный эффект (образование обширных отрывных областей в придонной области и, как следствие, появление «холмов» на свободной поверхности при натекании потока на препятствие) обнаружен впервые.

Хотя согласие расчетных и экспериментальных данных на рисунке 5.10б гораздо лучше, чем в расчете без учета трения (рисунок 5.10а), заметные отличия все же имеются. Кроме того, видимая на фотографиях эксперимента граница жидкости сильно «размыта», что наводит на мысль о неоднородности свободной поверхности по ширине канала, т.е. о существенно трехмерном характере течения (аналогичное «размытие» свободной поверхности было отмечено на рисунке 4.31). Для проверки последнего предположения был проведен трехмерный расчет, результаты которого проиллюстрированы на рисунке 5.11. Видно, что форма свободной поверхности отклоняется от двумерной почти на половине ширины канала, причем это отклонение затрагивает главным образом упоминавшиеся «холмы» над отрывными зонами. Судя по сложной форме вихревых линий, «выпущенных» из центральной части вихря в плоскости симметрии, влияние трения о боковую стенку сказалось на конфигурации отрывных зон в угловой области канала, что и привело к изменению формы свободной поверхности. На виде сбоку (рисунок 5.10в) полученная в трехмерном расчете форма свободной поверхности почти идеально соответствует фотографии эксперимента.

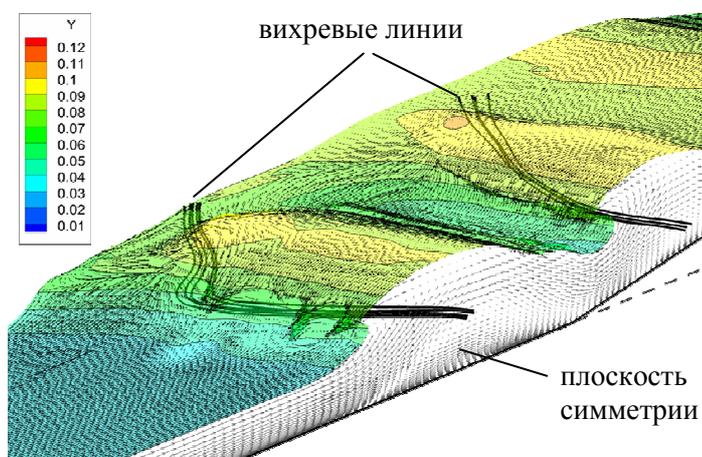


Рисунок 5.11 – Трехмерный расчет натекания потока на препятствие после обрушения «дамбы»: форма свободной поверхности на момент времени  $t = 3.7$  с

### 5.1.4 Течение газозвеси в устройстве гомогенного смесеобразования

В качестве примера применения метода пробных частиц (см. разд. 2.2.2) для моделирования сложного двухфазного потока с частицами, на рисунке 5.12 показаны результаты расчета течения газозвеси в модельной конфигурации устройства гомогенного смесеобразования [13]. Устройство состоит из улиточного завихрителя, цилиндрической испарительной камеры, на горячих стенках которой под действием центробежных сил должны оседать и испаряться капли топлива, и двух отводящих каналов (на рисунке не показаны). Целью исследования являлась оценка доли и степени равномерности оседания капель разного размера на поверхности испарителя.

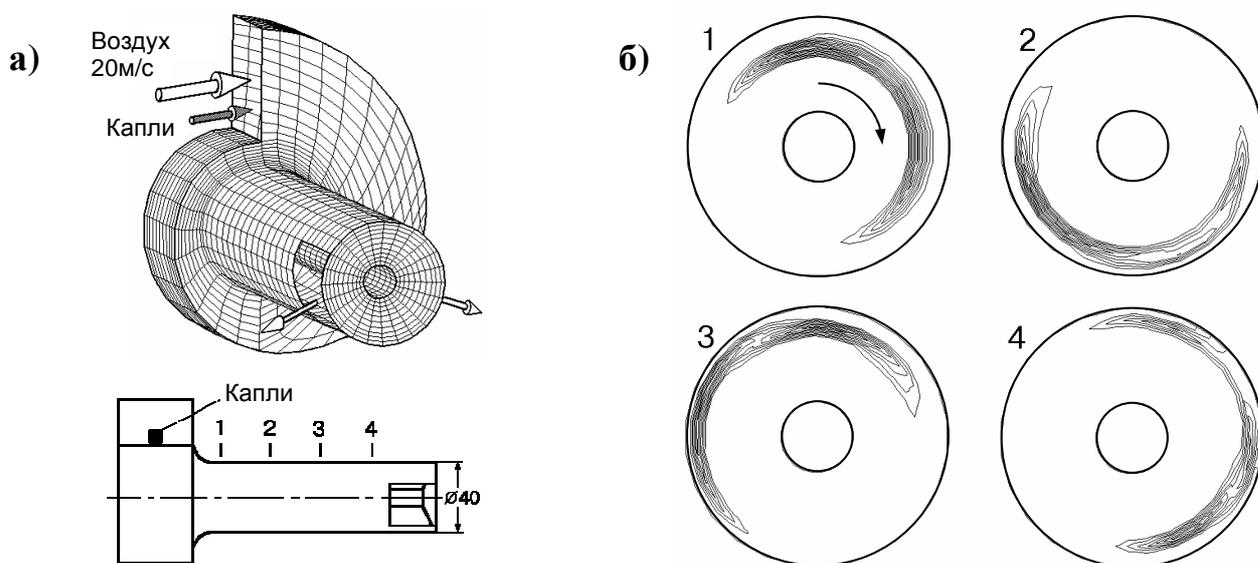


Рисунок 5.12 – Расчет течения газозвеси в модельной конфигурации устройства гомогенного смесеобразования: а) схема, б) изолинии концентрации частиц фракции 1 мкм в сечениях испарительной камеры, показанных на схеме

Расчеты проводились для полидисперсных капель с диаметром от 1 до 100 мкм. В окрестности форсунки объемная доля капель доходила до 0.5% (массовая доля 80%), но на большей части течения концентрация капель была достаточно малой (менее 0.1%) для обоснованного применения «бесстолкновительного» варианта метода пробных частиц, реализованного в ПК SINF. Всего было рассчитано более 200 тысяч траекторий пробных частиц, что обеспечило получение статистически установившегося результата. Показанные на рисунке 5.12 изолинии концентрации капель фракции 1 мкм в четырех сечениях испарительной камеры свидетельствуют, что, несмотря на интенсивное вращение потока, такие мелкие капли почти полностью выносятся из испарителя и не оседают на его стенках. Напротив, капли самой крупной фракции (100 мкм) оседали еще в завихрителе и почти не попадали в испарительную камеру.

## 5.2 Течение и потери энергии в проточных частях турбомашин

### 5.2.1 Лопаточные решетки

Лопаточные аппараты являются едва ли не самым ответственным элементом проточной части турбомашин, отвечающим за эффективность преобразования энергии. Аэродинамические профили для решеток турбомашин обычно строятся на основе реального прототипа и/или обобщенных опытных данных для подходящего класса решеток, в соответствии с результатами газодинамического расчета проточной части турбомашин (число Маха, углы входа и выхода потока), с учетом прочностных и технологических ограничений.

До недавнего времени оценка аэродинамических качеств профиля базировалась на решении сравнительно простой задачи плоского потенциального обтекания решетки. Это позволяло выявить нежелательные участки с большим встречным градиентом давления и при необходимости скорректировать профиль, а расчет пограничного слоя на поверхности профиля давал оценку потерь на трение. Однако такой способ не давал полной уверенности в высоких аэродинамических качествах решетки (особенно при трансзвуковом обтекании), поэтому спроектированную решетку обычно приходилось подвергать дорогостоящему и трудоемкому экспериментальному исследованию.

Развитие методов вычислительной гидродинамики позволило ставить вопрос о замене части испытаний более дешевыми расчетами на основе двумерного или трехмерного численного моделирования потока в решетке. Правда поначалу численные результаты не встречали доверия практиков, поэтому приходилось доказывать, что аккуратно выполненный гидродинамический расчет дает не только «красивые картинки», иллюстрирующие структуру потока, но и позволяет получить достаточно надежные количественные данные о потерях в решетке. По мере накопления опыта ситуация коренным образом изменилась и сейчас численные гидродинамические расчеты прочно вошли в практику проектирования решеток турбомашин (и не только).

В период с 1998 по 2006 г. ПК SINF активно использовался для численного моделирования течения в решетках турбомашин по заказам научных и промышленных организаций (ЛМЗ, ОАО «Теплоэнергосервис», АОЗТ «Энерготех», GE, MTU и др.). Ниже представлены некоторые результаты этих расчетов.

#### Двумерные расчеты

Представляемые расчеты обтекания плоских решеток выполнены в стационарной двумерной постановке при натуральных значениях чисел Маха и Рейнольдса. Дискретизация уравнений выполнена со вторым порядком точности на основе схемы

CUSP (см. разд. 3.1.3), обеспечивающей хорошее разрешение скачков уплотнения; для низкоскоростных режимов применялась противопоточная схема QUICK (разд. 3.1.2).

На входе в расчетную область (вдалеке перед решеткой) задавались параметры торможения и направление потока. На выходе поддерживался необходимый уровень статического давления; остальные параметры экстраполировались с соблюдением условия сохранения инвариантов Римана (2.16), что обеспечивало прозрачность выходной границы для скачков уплотнения. Поверхность лопаток считалась гладкой; теплообмен со стенками не учитывался.

Как показывает опыт расчетов, использование высокорейнольдсовых моделей турбулентности не обеспечивает приемлемой точности определения коэффициента сопротивления лопаточных решеток; довольно типичным является значительное (иногда в 2-3 раза) завышение профильных потерь из-за переоценки толщины пограничных слоев. В представленных расчетах эффекты турбулентного перемешивания учитывались с помощью низкорейнольдсовой модели Спаларта-Аллмараса [184].

В качестве первого примера рассмотрим расчет течения газа сквозь решетку направляющих лопаток (далее – решетка №1), для которой в Атласе ЦИАМ [50, стр. 42] имеются экспериментальные данные в широком диапазоне режимов (вплоть до умеренных сверхзвуковых скоростей). Схема решетки и ее основные геометрические параметры представлены на рисунке 5.13.

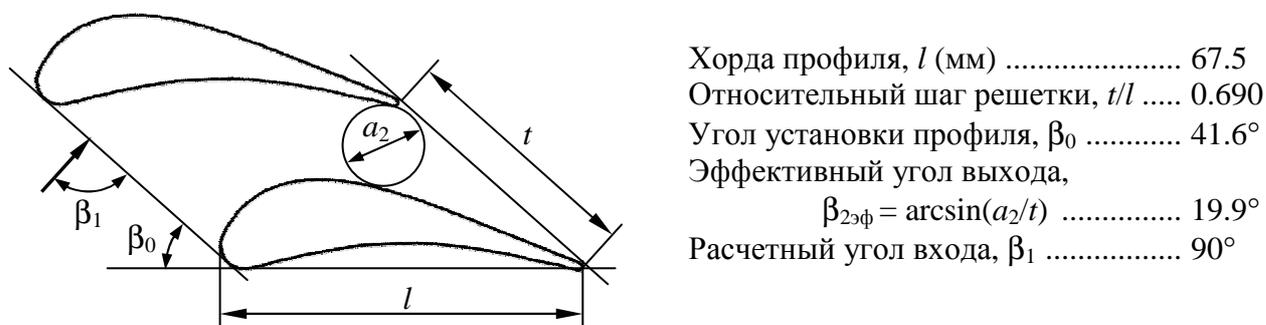


Рисунок 5.13 – Схема лопаточной решетки №1 и ее геометрические параметры

Для проведения расчетов использовалась трехблочная сетка Н-О-Н топологии, показанная на рисунке 5.14а: О-сетка кольцом окружает лопатку, а Н-сетки покрывают входной и выходной участки расчетной области. Сетка сгущена к поверхности лопатки для аккуратного разрешения пограничных слоев; величина первого пристенного шага сетки составляла  $3 \cdot 10^{-5} l$ , что обеспечило приемлемое значение нормированной пристенной координаты первой расчетной точки  $y^+ < 2$  на всей поверхности лопатки (типичные числа Рейнольдса – порядка  $10^6$ ). С учетом известных рекомендаций (напр., [100]), сетка у стенки почти ортогональная, с коэффициентом неравномерности

(отношение шагов соседних ячеек) не более 1.2. Как показали методические расчеты, для получения правильного уровня потерь важно обеспечить хорошее разрешение течения не только в пограничных слоях, но и в окрестности задней кромки лопатки. При этом для получения сеточно-независимого решения (с неопределенностью в величине потерь в пределах нескольких процентов) расчетная сетка должна иметь около 100 ячеек поперек межлопаточного канала и 150–200 ячеек по конуру лопатки (из них порядка 20 ячеек на толщину задней кромки, см. рисунок 5.14а).

Следуя условиям экспериментов [50], расчеты проводились для воздуха, с неизменным полным давлением перед решеткой (равном атмосферному) при разных уровнях давления на выходе. В качестве примера на рисунке 5.14б представлено поле числа Маха при трансзвуковом режиме течения. Отчетливо видна система косых скачков уплотнения вблизи выходной кромки профиля. Образовавшийся на кромке скачок пересекает межлопаточный канал, взаимодействует с пограничным слоем на спинке лопатки и отражается от него. Отраженный скачок попадает в область кромочного следа и пересекает его.

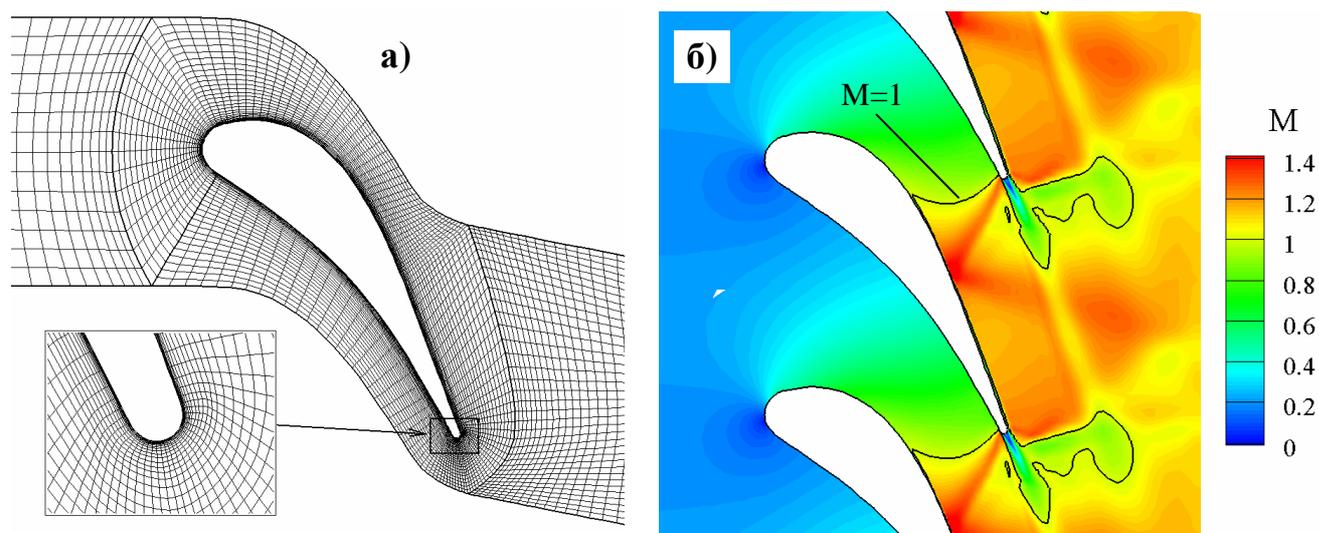


Рисунок 5.14 – Расчет течения в решетке №1: а) базовая расчетная сетка, б) поле числа Маха (коэффициент скорости на выходе  $\lambda_{2ад} = 1.089$ )

Расчетные и экспериментальные данные о распределении давления по обводу профиля №1 при различных перепадах давления на решетке приведены на рисунке 5.15а. Следуя [50], давления на лопатке представлены адиабатическим коэффициентом скорости  $\lambda_{ад}$  (5.2а), а в качестве режимного параметра выступает коэффициент скорости на выходе из решетки  $\lambda_{2ад}$  (5.2б):

$$\lambda_{ад} = \sqrt{\frac{\gamma+1}{\gamma-1} \left[ 1 - \left( \frac{p}{p_{1,0}} \right)^{(\gamma-1)/\gamma} \right]} \quad (5.2а)$$

$$\lambda_{2\text{ад}} = \sqrt{\frac{\gamma+1}{\gamma-1} \left[ 1 - \left( \frac{p_{2,\text{ср}}}{p_{1,0}} \right)^{(\gamma-1)/\gamma} \right]} \quad (5.26)$$

Здесь  $p$  – статическое давление,  $p_{1,0}$  – давление торможения перед решеткой,  $\gamma$  – показатель адиабаты,  $p_{2,\text{ср}}$  – среднее давление в условно-выходном сечении «2», расположенном на расстоянии от решетки, равном ее «горлу»  $a_2$  (см. рисунок 5.13а). Отметим, что в силу неоднородности потока давление  $p_{2,\text{ср}}$  отличается от давления, задаваемого в качестве граничного условия на выходе из расчетной области (особенно если, как на рисунке 5.14б, в сечении «2» присутствуют скачки уплотнения), поэтому для «попадания» в нужный режим  $\lambda_{2\text{ад}}$  выходное давление приходится подбирать.

Как видно из рисунка 5.15а, имеет место вполне удовлетворительное согласие расчетных и экспериментальных данных во всем диапазоне скоростей. Заметим, однако, что согласие с опытными данными по распределению давления нельзя считать достаточным признаком правильного расчета, особенно применительно к определению потерь энергии в решетке – ведь при безотрывном обтекании распределение давления неплохо воспроизводится даже в приближении идеальной жидкости (по теории потенциального течения).

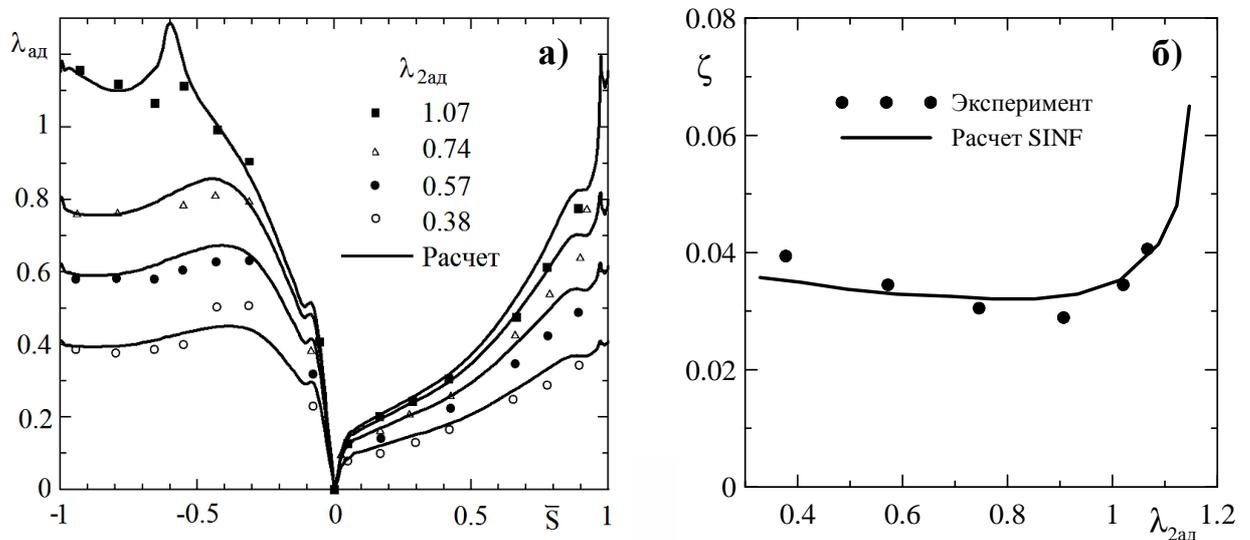


Рисунок 5.15 – Расчет течения в решетке №1: а) распределение давления по обводу профиля, б) зависимость коэффициента потерь от коэффициента скорости на выходе

Изменение коэффициента потерь решетки  $\zeta$  в зависимости от скорости потока на выходе показано на рисунке 5.15б. Коэффициент потерь определен следующим образом:

$$\zeta = 1 - \frac{V_{2,\text{ср}}^2}{V_{2,\text{ад}}^2}, \quad V_{2,\text{ад}} = \sqrt{\frac{2\gamma}{\gamma-1} \frac{p_{1,0}}{\rho_{1,0}} \left[ 1 - \left( \frac{p_{2,\text{ср}}}{p_{1,0}} \right)^{(\gamma-1)/\gamma} \right]}, \quad (5.3)$$

где  $V_{2,ср}$  – средняя скорость потока в сечении «2» за решеткой (осреднение производится по потоку массы),  $V_{2,ад}$  – адиабатическая скорость потока, посчитанная по параметрам торможения перед решеткой и среднему давлению  $p_{2,ср}$  за ней.

Как можно видеть на рисунке 5.15б, в области дозвуковых режимов ( $0.3 < \lambda_{2ад} < 0.9$ ) коэффициент потерь меняется слабо, причем с ростом скорости (и, соответственно, числа Рейнольдса) потери несколько снижаются благодаря уменьшению толщины пограничного слоя на поверхности лопатки. В области  $\lambda_{2ад} > 0.9$  потери растут с увеличением скорости из-за появления в потоке зон сверхзвукового течения и скачков уплотнения. В целом согласие результатов расчета и эксперимента для решетки №1 во всем диапазоне чисел Маха можно считать вполне удовлетворительным.

Представленные расчеты, выполненные в конце 90-х гг., продемонстрировали возможность адекватного определения профильных потерь и учета влияния числа Маха на основе численного моделирования течения в турбинной решетке. Этот и другие подобные тесты во многом способствовали росту доверия практиков к результатам численных расчетов и позволили активно использовать код SINF для численного моделирования течения в решетках турбомашин по заказам научных и промышленных организаций.

Один из таких расчетов относится к трансзвуковому обтеканию периферийного сечения лопаток рабочего колеса последней ступени паровой турбины конструкции ЛМЗ (решетка №2). Геометрия решетки представлена на рисунке 5.16а. Как и в предыдущем расчете, расчетная сетка (рисунок 5.16б) имеет Н-О-Н топологию и содержит около 15 тысяч ячеек; сетка сгущена к поверхности лопатки, к ее передней и задней кромке, а также в местах ожидаемого появления скачков уплотнения.

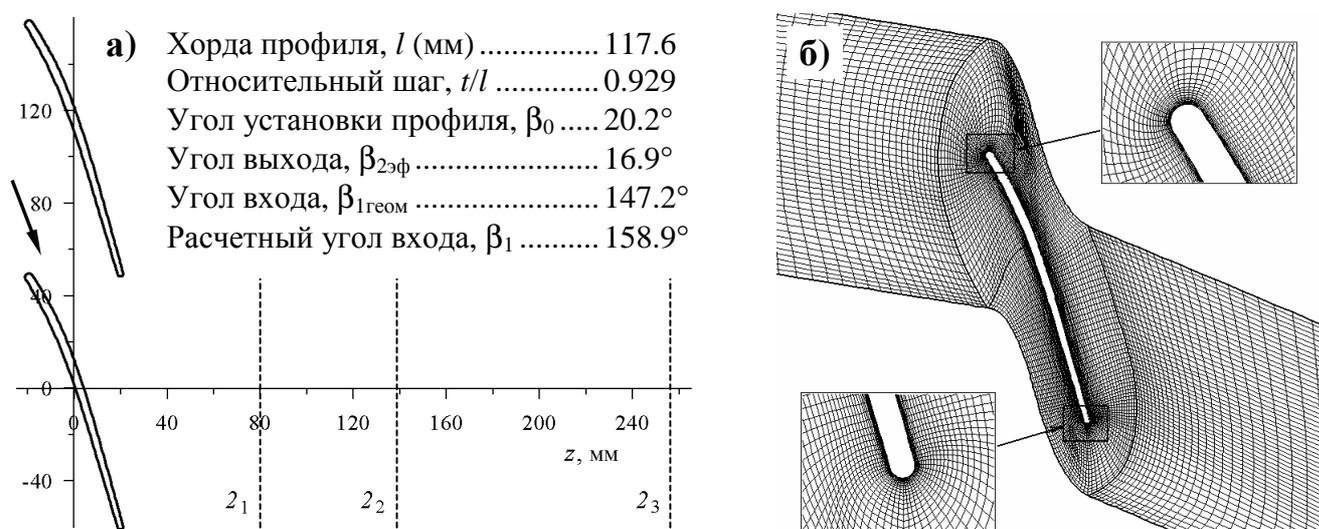


Рисунок 5.16 – Трансзвуковая лопаточная решетка №2: а) схема решетки, ее геометрические параметры и положение выходных сечений, б) расчетная сетка

Результаты расчета течения в решетке №2 представлены на рисунке 5.17. На выходе из решетки отчетливо виден мощный кромочный скачок уплотнения, доходящий до выходной границы расчетной области. Число Маха на выходе из решетки всюду больше единицы. Более того, режим истечения соответствует случаю, когда осевая (расходная) составляющая скорости тоже сверхзвуковая.

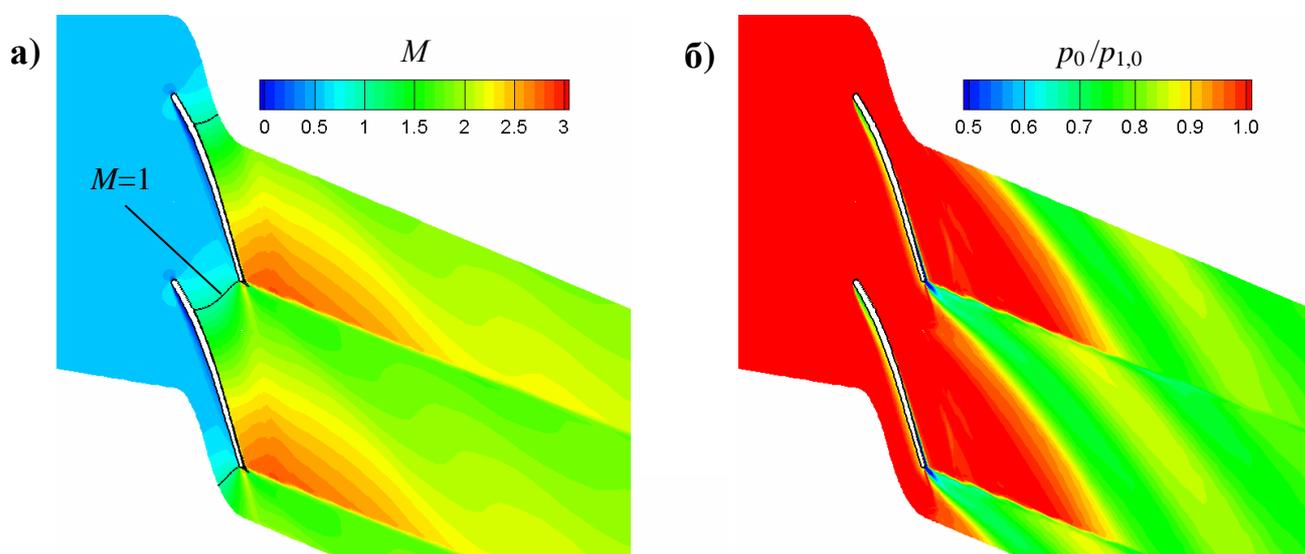


Рисунок 5.17 – Распределение числа Маха (а) и полного давления (б) в решетке №2

Таблица 8 – Осредненные параметры потока и коэффициент потерь в решетке №2

Угол входа потока, $\beta_1$	Число Маха на входе, $M_1$	Выходное сечение	Число Маха на выходе, $M_{2,ср}$	Угол выхода потока, $\beta_{2,ср}$	Коэффициент потерь $\zeta$ , %
158.95°	0.549	2 <sub>1</sub>	2.026	38.65°	4.494
		2 <sub>2</sub>	1.966	37.97°	6.282
		2 <sub>3</sub>	1.956	37.83°	8.080
151.0°	0.370	2 <sub>1</sub>	2.030	38.63°	4.309
		2 <sub>2</sub>	1.975	37.96°	5.973
		2 <sub>3</sub>	1.965	37.83°	7.803
143.06°	0.286	2 <sub>1</sub>	2.043	38.54°	4.170
		2 <sub>2</sub>	1.989	37.90°	5.825
		2 <sub>3</sub>	1.978	37.78°	7.645

В сводной таблице 8 приведены данные об осредненных по шагу параметрах потока и потерях в решетке. Коэффициент потерь рассчитывался согласно (5.3). Выходные параметры определялись в трех сечениях за решеткой (рисунок 5.16а): на расстоянии половины хорды от задней кромки лопаток, где обычно измеряют потери при продувках плоских решеток (сечение 2<sub>1</sub>), а также на расстоянии одной и двух хорд (сечения 2<sub>2</sub> и 2<sub>3</sub> соответственно). Наряду с номинальным значением угла входа потока,

$\beta_1 = 158.95^\circ$ , расчеты выполнены при двух меньших значениях  $\beta_1$  ( $151.0^\circ$  и  $143.06^\circ$ ); при этом, поскольку решетка заперта по расходу, изменение угла входа сопровождается изменением числа Маха.

Представленные в таблице 8 данные показывают, что из-за потерь энергии в кромочном скачке (см. рисунок 5.17) коэффициент потерь заметно увеличивается вниз по потоку: его значение в «стандартном» выходном сечении  $2_1$  почти вдвое меньше, чем в сечении  $2_3$ . Сравнительно низкие значения коэффициента потерь ( $4\div 4.5\%$ ) указывают на аэродинамическое совершенство решетки; они качественно коррелируют с данными [63] для решеток похожего типа (правда, полученными при несколько меньших числах Маха  $M_2 < 1.6$ ). При уменьшении угла входа потери несколько снижаются из-за уменьшения отрывного пузыря, расположенного на вогнутой стороне профиля.

Отметим также, что интенсивный скачок уплотнения, сходящий с задней кромки профиля, является причиной значительной шаговой неравномерности покидающего решетку потока. В частности, в сечении  $2_1$  локальный угол потока  $\beta_2$  меняется от  $27^\circ$  до  $47^\circ$  (при среднем значении  $\beta_{2,ср} \approx 38^\circ$ ), а число Маха  $M_2$  – от 1.7 до 2.6.

### Трехмерные расчеты

В общем случае течение в турбинной решетке является трехмерным, особенно в ступенях высокого давления с их относительно короткими лопатками. В таком случае для адекватного моделирования структуры потока и определения потерь, существенный вклад в которые могут вносить обусловленные влиянием торцевой стенки вторичные токи, требуется трехмерный расчет.

В качестве примера рассмотрим расчет трехмерного течения через прямую решетку рабочих лопаток активного типа конструкции ЛМЗ (решетка №3). Схема решетки и ее геометрические характеристики представлены на рисунке 5.18а. Течение существенно дозвуковое (номинальное число Маха на выходе  $M_2 = 0.23$ ), поэтому расчет проводился в приближении несжимаемой жидкости. Число Рейнольдса, сосчитанное по хорде профиля и выходной скорости составляло  $3.4 \cdot 10^5$ . Для учета турбулентности использовалась модель Спаларта-Аллмараса.

На рисунке 5.18б представлены результаты предварительных двумерных расчетов при разных углах входа потока. Можно отметить хорошее согласие рассчитанных значений коэффициента потерь (5.3) с данными измерений ЛМЗ, хотя в области малых углов натекания видна тенденция к некоторому завышению расчетных потерь<sup>1</sup>.

<sup>1</sup> Любопытно, что при сдвиге экспериментальных точек на  $4^\circ$  совпадение с расчетом было бы идеальным, что наводит на мысль о возможной систематической погрешности измерения углов входа.

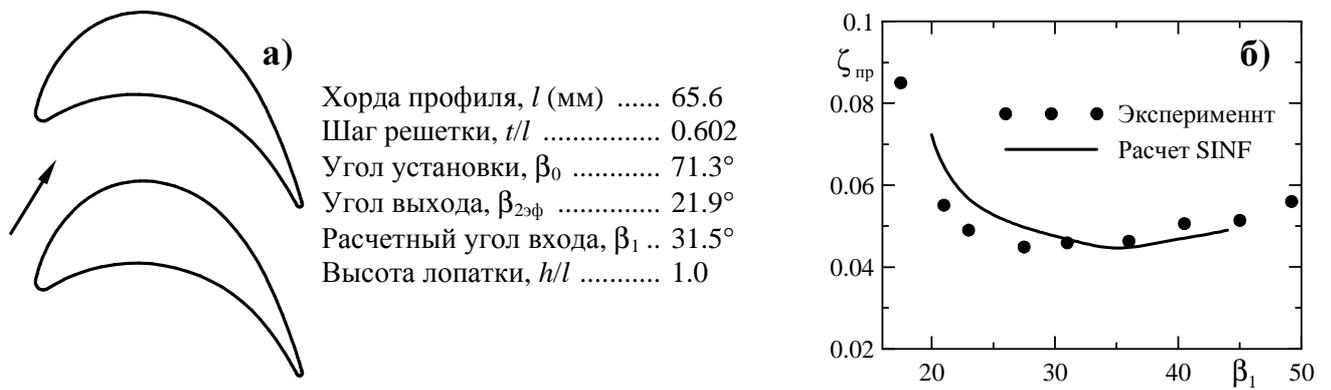


Рисунок 5.18 – Лопаточная решетка №3: а) схема и геометрические параметры решетки, б) зависимость коэффициента профильных потерь  $\zeta_{\text{пр}}$  от угла входа потока

Трехмерный расчет течения в решетке №3 проводился в предположении симметрии потока относительно срединной плоскости, поэтому расчетная область покрывала половину высоты лопатки. Представленная на рисунке 5.19а расчетная сетка со сгущением к поверхности лопатки и к торцевой стенке содержит около 140 тысяч ячеек. Толщина торцевого пограничного слоя на входе в расчетную область (на расстоянии 0.5 хорды от решетки) составляла 3% хорды.

Некоторое представление о сложной трехмерной картине течения в решетке дает показанное на рисунке 5.19б распределение коэффициента трения (совместно с выборкой векторов поверхностного трения) на лопатке и части торцевой стенки. В частности, на торцевой стенке вблизи передней кромки лопатки можно видеть возвратное течение, связанное с отрывом натекающего на лопатку пограничного слоя (так называемый подковообразный вихрь), а на «спинке» лопатки пропечатался след от канального вихря, обусловленного перетеканием жидкости по торцевому пограничному слою.

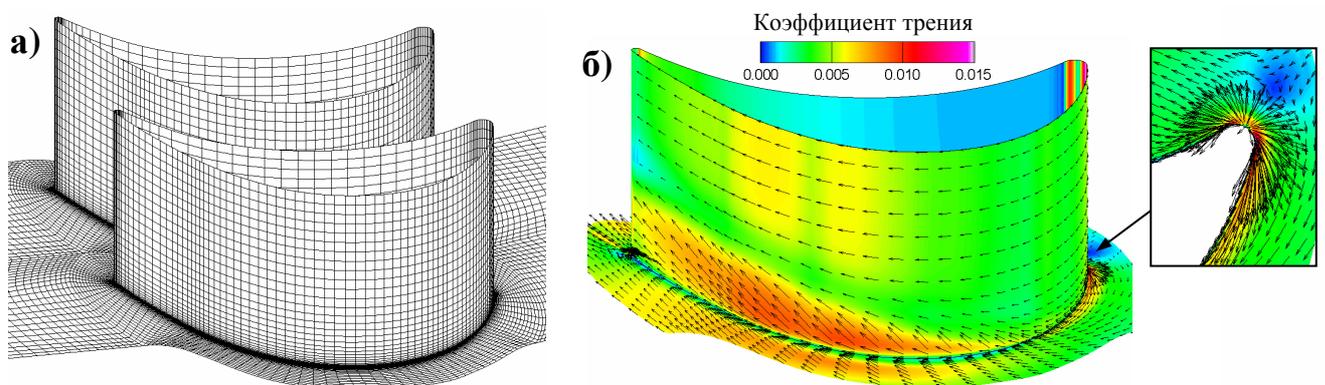


Рисунок 5.19 – Расчетная сетка (а) и поле напряжений трения на стенках (б) в лопаточной решетке №3

Развитие канального вихря проиллюстрировано на рисунке 5.20б, где показаны векторы скорости и распределения полного давления в трех поперечных сечениях межлопаточного канала. Отчетливо прослеживается формирование области, где из-за вторичных течений пограничный слой на спинке профиля утолщен, а уровень потерь полного давления существенно повышен.

На рисунке 5.20а показано изменение по высоте лопатки осредненного по шагу решетки коэффициента потерь давления. Характер полученной в расчетах зависимости полностью согласуется с устоявшимися представлениями, базирующимися на результатах многочисленных экспериментов по изучению концевых эффектов.

В целом, можно заключить, что область влияния обусловленных наличием торцевой стенки вторичных токов простирается на  $2/3$  высоты лопатки. Отметим также, что суммарный расчетный коэффициент потерь решетки составил 8.5% против 4.6% (см. рисунок 5.18б), полученных в рамках двумерной постановки для профильных потерь.

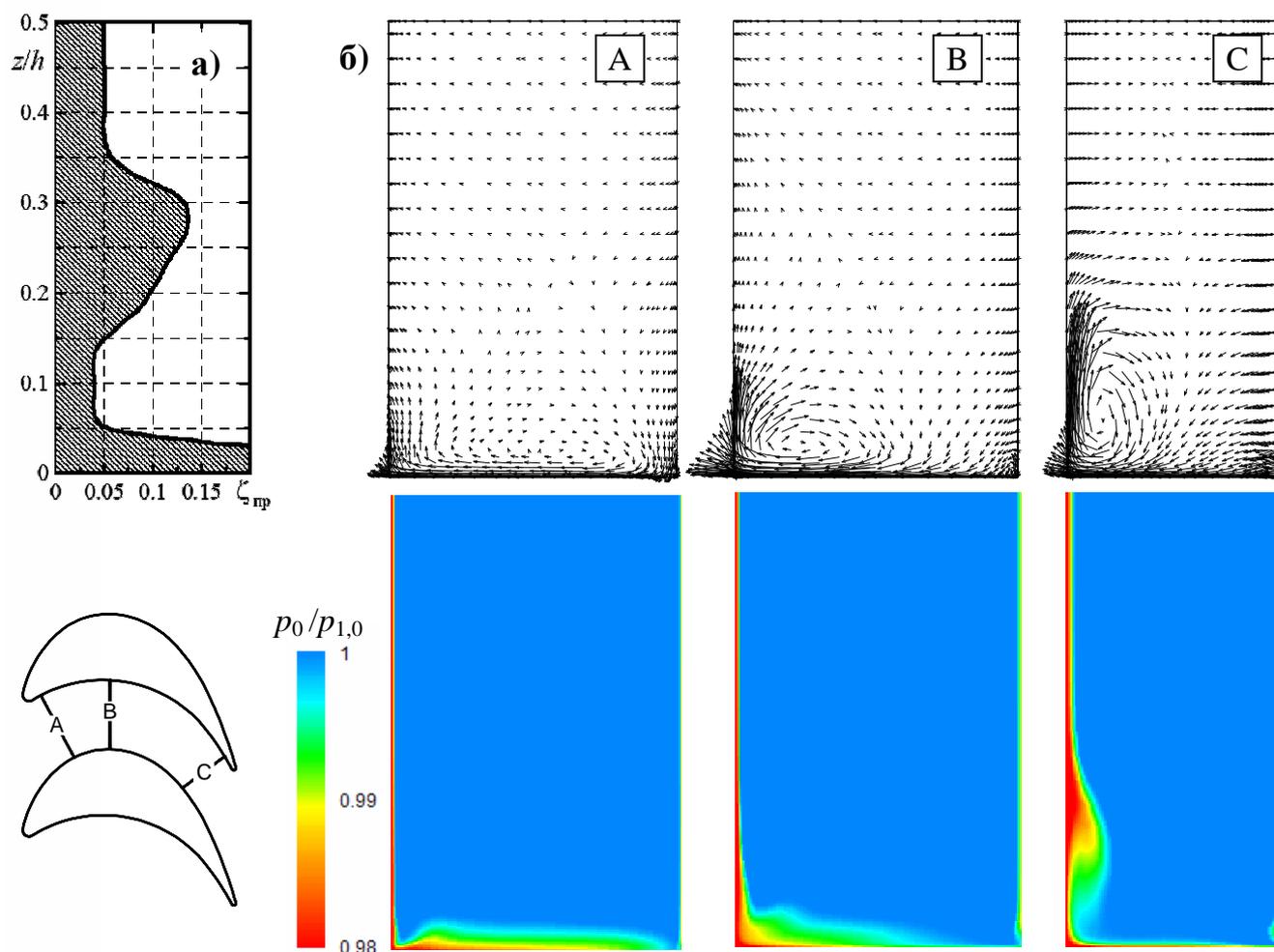


Рисунок 5.20 – Решетка №3: а) изменение коэффициента потерь по высоте лопатки, б) векторы скорости и поля полного давления в сечениях межлопаточного канала

Расчет течения в компрессорной решетке является одной из проблемных задач современной вычислительной гидродинамики, поскольку наличие сильного встречного градиента давления чревато возникновением нестабильных отрывных зон, которые не всегда поддаются достоверному описанию на основе существующих RANS моделей турбулентности. Эффективным решением проблемы является использование гибридных RANS/LES подходов (см. разд. 2.1.2) в рамках нестационарной формулировки задачи.

Для демонстрации возможностей кода SINF при моделировании предотрывных режимов течения в рабочем колесе осевого компрессора с помощью метода DES рассмотрим течение в одиночном роторе с 16-ю лопатками, экспериментальное исследование которого выполнено в работе [138]. Схема установки показана на рисунке 5.21а, а расчетная модель колеса – на рисунке 5.21б (фактически рассматривалось обтекание одной лопатки с условиями периодичности на соответствующих границах расчетной области, см. рисунок 5.21в).

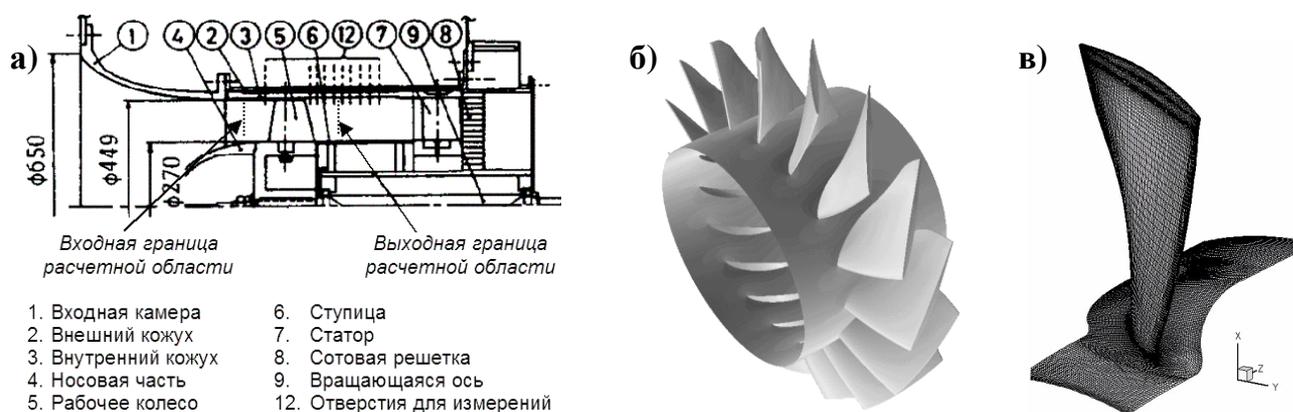


Рисунок 5.21 – Расчет течения в рабочем колесе осевого компрессора: а) схема экспериментальной установки, б) расчетная модель ротора, в) расчетная сетка

Особенностью экспериментальной установки [138] является сравнительно большой концевой зазор (5.5%) между лопаткой и кожухом, что приводит к проявлению сильных эффектов перетекания газа. Статорные лопатки расположены достаточно далеко вниз по потоку, что позволяет пренебречь их влиянием на течение в роторе. Число Рейнольдса, построенное по радиусу лопатки  $R_{tip}$  и значению окружной скорости  $V_{tip}$  на ее конце, составляет  $4.8 \cdot 10^5$ . Число Маха не превышает 0.1, поэтому задача решается в приближении несжимаемой жидкости. Использованная для расчетов сетка имеет Н-О-Н топологию и содержит 1.7 миллиона ячеек; надлежащее сгущение сетки обеспечивает нормированное расстояние от стенки до центра ближайшей ячейки  $y^+ < 1$ ; на толщину концевой зазора приходится 32 ячейки.

Режим работы ротора задается коэффициентом расхода  $\bar{Q}$ , а его производительность оценивается по коэффициенту мощности  $\bar{W}$ , которые определяются следующими соотношениями:

$$\bar{Q} = \frac{4Q}{V_{ip}\pi(D^2 - D_h^2)}, \quad \bar{W} = \frac{8W}{\rho V_{ip}^3 \pi(D^2 - D_h^2)} \quad (5.4)$$

Здесь  $Q$  – общий расход,  $D$  – внутренний диаметр кожуха,  $D_h$  – диаметр ступицы,  $W$  – мощность на валу (произведение крутящего момента и угловой скорости ротора). Основному режиму работы компрессора отвечает значение коэффициента расхода  $\bar{Q} = 0.455$ ; расчеты выполнялись при изменении  $\bar{Q}$  от 0.3 до 0.6.

Некоторые результаты расчета<sup>1</sup> течения в рабочем колесе осевого компрессора представлены на рисунке 5.22. Радиальное распределение осевой компоненты скорости за ротором, показанное на рисунке 5.22а, демонстрирует прекрасное согласие расчетных и экспериментальных данных для основного режима ( $\bar{Q} = 0.455$ ). Отметим, что для этого режима осредненные по времени результаты расчета по методу DES практически совпадают с данными стационарного расчета на основе RANS модели турбулентности (в расчетах использовалась модель Спаларта-Аллмараса). Однако для предотрывного режима ( $\bar{Q} = 0.35$ ) принципиальное расхождение результатов двух подходов очевидно: стационарный расчет предсказывает наличие возвратного течения в периферийной области, тогда как по результатам более надежного DES подхода возвратного течения нет и, соответственно, уровень скоростей вблизи ступицы заметно ниже.

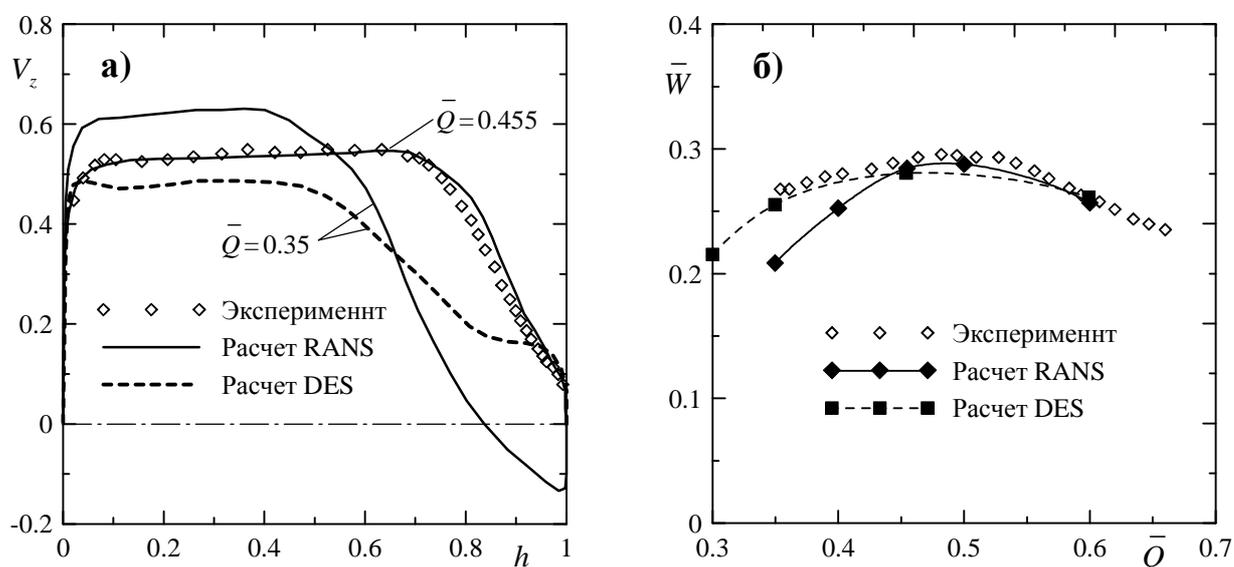


Рисунок 5.22 – Расчет течения в рабочем колесе осевого компрессора: а) осредненное по шагу решетки радиальное распределение осевой компоненты скорости за ротором, б) коэффициент мощности на валу

Сравнение расчетных и экспериментальных данных по интегральным характеристикам компрессора (рисунок 5.22б) подтверждает, что нестационарная

<sup>1</sup> Расчеты выполнены С.А.Якубовым

формулировка задачи обеспечивает более правильное моделирование предотрывных режимов работы ротора с проявлением сильных эффектов перетекания газа через концевой зазор, тогда как для  $\bar{Q} > 0.45$  можно ограничиться более дешевым стационарным расчетом.

### 5.2.2 Выхлопные патрубки паровых турбин

Важным элементом проточной части мощной паровой турбины, влияющим на ее эффективность, является выхлопной патрубок, призванный обеспечить отвод пара из последней ступени турбины в конденсатор с минимальными потерями энергии потока. До недавнего времени проектирование патрубков базировалось на одномерных методиках, обобщающих обширные опытные данные (напр., [64, 80]), и лабораторных испытаниях. Прогресс в численном моделировании позволяет заменить часть дорогостоящих испытаний поверочными расчетами течения пара в патрубке, а получаемая при этом детальная информация о локальной структуре потока облегчает выявление «узких» мест и открывает возможность более целенаправленного совершенствования конструкции.

Один из примеров применения кода SINF для моделирования гидродинамики выхлопного патрубка и оптимизации его проточной части – расчет трансзвукового течения в патрубке мощной паровой турбины конструкции ЛМЗ, выполненный в 2000 г. Особенностью данной турбины была ее сравнительно малая длина; как следствие, жесткие ограничения накладывались и на осевую протяженность выхлопного патрубка, что привело к неприемлемо высокому уровню потерь в спроектированном патрубке. В результате экспериментальной отработки конструкции патрубка в лаборатории ЛМЗ потери удалось значительно снизить, главным образом, за счет подбора оптимальной формы осерадиального диффузора и установки в нем кольцевого профилированного дефлектора. Однако при приближении к номинальному режиму наблюдался быстрый рост потерь, что наводило на мысль о развитии в потоке волновых явлений, тогда как по результатам предварительных гидравлических расчетов ЛМЗ ожидалось дозвуковое течение. Для прояснения ситуации и поиска оптимального решения проблемы и был привлечен аппарат численного моделирования.

Расчеты [28] проводились для уменьшенной (1:25) модели патрубка, испытанной на воздушном стенде в лаборатории ЛМЗ. Схема патрубка с кольцевым дефлектором в осерадиальном диффузоре показана на рисунке 5.23а. В радиальной части диффузора (сразу за дефлектором) поток разделяется внутренней перегородкой на две части: нижняя часть проходит прямо в сборную камеру вдоль ее передней (правой на рисунке 5.23а) стенки, тогда как верхняя часть разворачивается у наружного края диффузора и,

огибая корпус турбины, попадает в сборную камеру вдоль ее задней (левой) стенки. К нижнему краю внутренней стенки диффузора присоединена вертикальная разделительная пластина, которая препятствует преждевременному смешению верхнего и нижнего потоков, обеспечивая последнему более благоприятные условия для восстановления давления. В лабораторной модели перед патрубком установлен обтекатель (показан на рисунке 5.23а пунктиром); расположенные перед входом в натуральный патрубок лопатки последней ступени турбины в эксперименте (и расчете) не моделировались.

Рисунок 5.23б дает представление об использованной для расчетов сетке, в которой воспроизводятся все вышеупомянутые особенности проточной части патрубка. Сетка состоит из 14 блоков и содержит 240 тысяч ячеек.

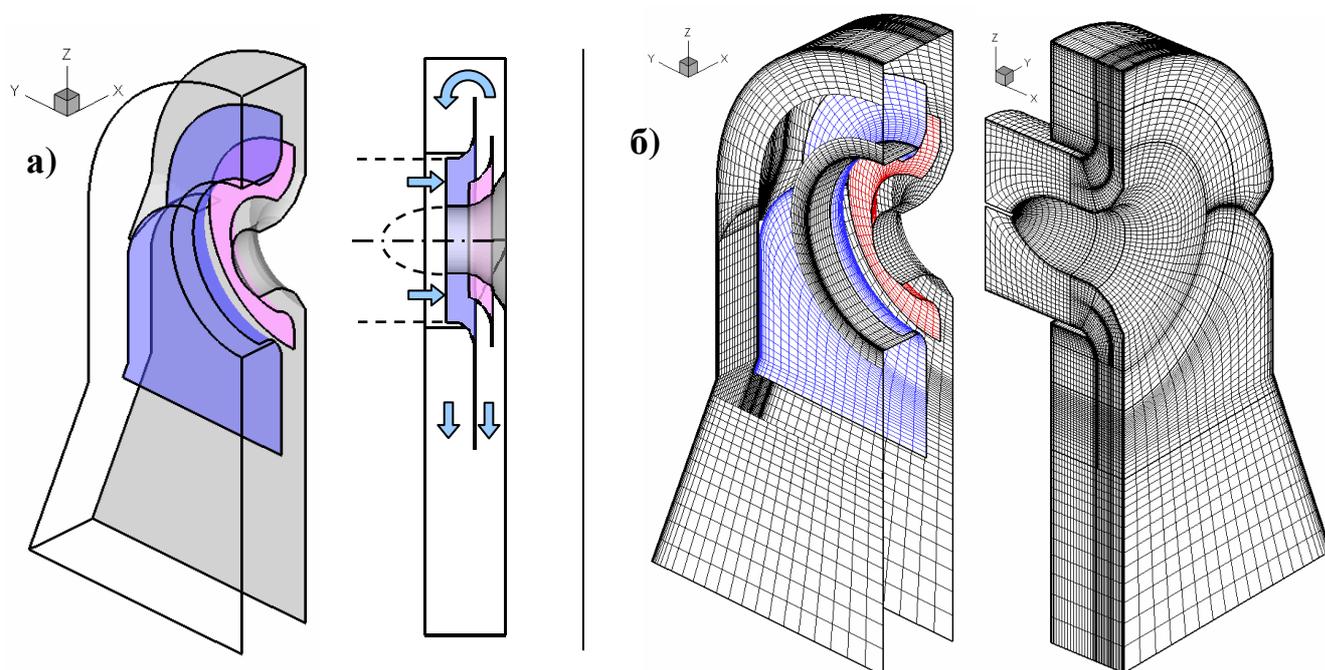


Рисунок 5.23 – Модель выхлопного патрубка паровой турбины:

а) схема, б) расчетная сетка

Расчеты проводились для нескольких вариантов геометрии патрубка при различных режимных параметрах. Для моделирования турбулентности использовалась «стандартная»  $k$ - $\epsilon$  модель [152] с поправкой, препятствующей нефизичной генерации турбулентности в потенциальном ядре потока [143]. При анализе течения в диффузоре проводились также расчеты с применением низкорейнольдсовой модели [184].

Роль установленного в диффузоре дефлектора проиллюстрирована на рисунке 5.24. В отсутствие дефлектора при дозвуковом режиме течения (рисунок 5.24а) выпуклая (наружная) стенка диффузора обтекается без отрыва, так что на выходе из диффузора поток почти однородный и скорость его невелика, что свидетельствует о достаточно хорошем аэродинамическом качестве диффузора. Однако, как видно на

рисунке 5.24б, при приближении к номинальному режиму (проектное значения числа Маха во входном сечении патрубка  $M_1 = 0.65$ ) у наружной стенки диффузора появляется локальный скачок уплотнения, который провоцирует глобальный отрыв пограничного слоя с последующим разгоном потока до сверхзвуковых скоростей, что чревато большими волновыми потерями. Установка дефлектора (рисунок 5.24в) позволяет предотвратить отрыв и, несмотря на наличие локальных сверхзвуковых областей, избежать появления скачков уплотнения и обеспечить дозвуковой режим течения на выходе из диффузора.

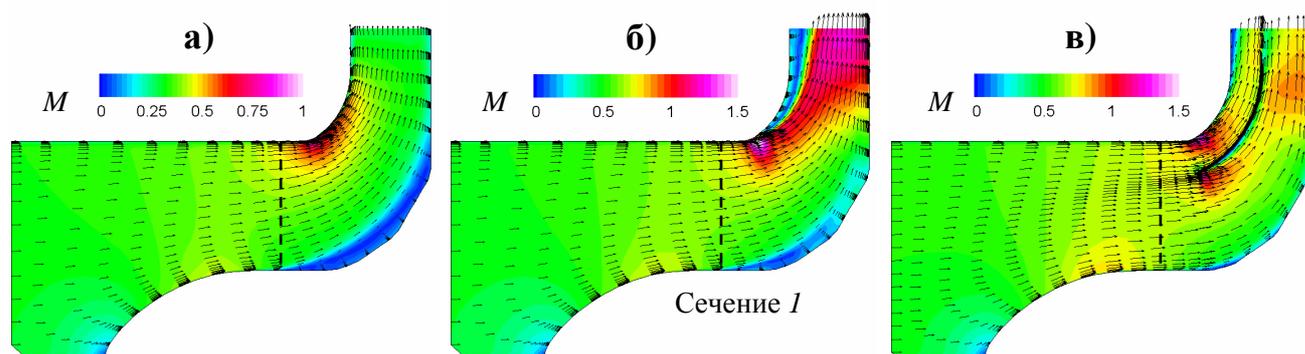


Рисунок 5.24 – Векторы скорости и поле числа Маха в осерадиальном диффузоре:  
а)  $M_1 \approx 0.3$ , б)  $M_1 \approx 0.6$ , в) то же при наличии дефлектора

Как показали трехмерные расчеты, из-за обратного влияния патрубка течение в диффузоре является существенно несимметричным. В частности, расход через нижнюю половину диффузора несколько больше, чем через верхнюю. В качестве иллюстрации чрезвычайно сложного пространственного характера течения в патрубке, на рисунке 5.25 показана конфигурация сверхзвуковой области и распределение в ней числа Маха для режима, близкого к номинальному (число Маха на входе в патрубок  $M_1 = 0.63$ ). Видно, что сверхзвуковое течение имеет место, главным образом, на выходе из осерадиального диффузора в его нижней части, тогда как в верхней части диффузора поток дозвуковой.

Как показал анализ полученного решения, форма дефлектора ЛМЗ не отвечала линиям тока «естественного» течения в диффузоре, что приводило к значительному отличию скоростей в каналах по разные стороны от дефлектора и способствовало более раннему «запиранию» одного из каналов. Исходя из этого была предложена новая, улучшенная форма дефлектора, которая, судя по результатам расчета, представленным на рисунке 5.26, обеспечила уменьшение интенсивности скачков (по сравнению с рисунком 5.25 максимальное значение числа Маха понизилось с 1.7 до 1.5), что, в свою очередь, привело к снижению потерь напора в патрубке (о чем свидетельствует увеличение входного числа Маха  $M_1$  при неизменном перепаде давления).

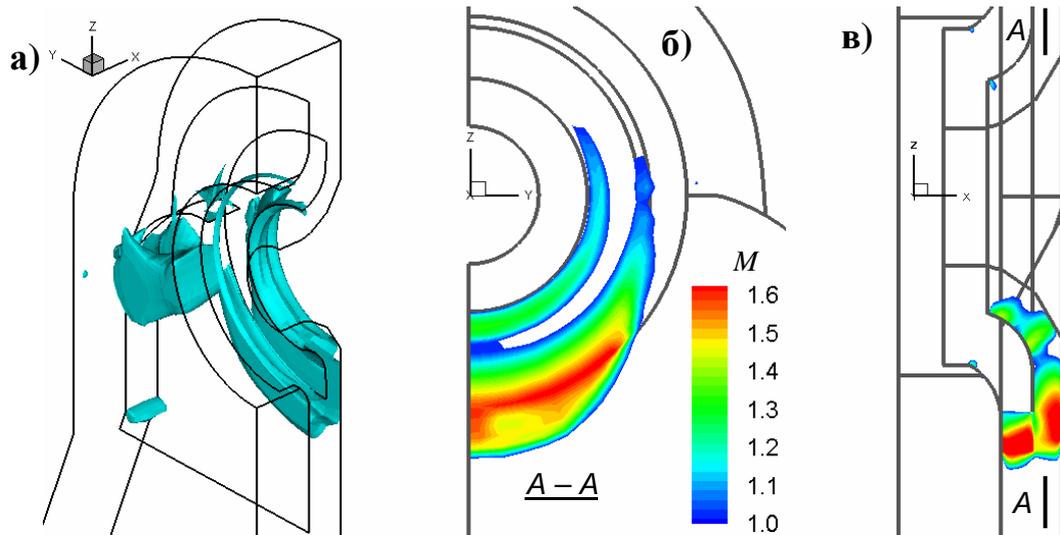


Рисунок 5.25 – Область сверхзвукового течения в модели выхлопного патрубка ЛМЗ: изоповерхность  $M = 1$  (а) и распределение числа Маха (б,в) при  $M_1 = 0.63$

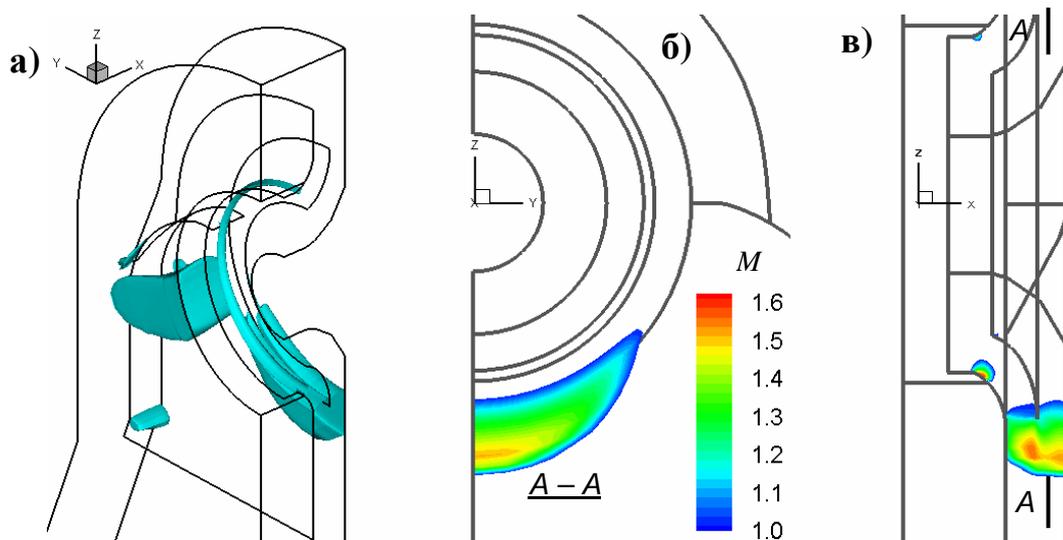


Рисунок 5.26 – То же для патрубка с улучшенным дефлектором при  $M_1 = 0.68$

Следуя методике испытаний, коэффициент полных потерь патрубка определялся следующим образом:

$$\zeta = \frac{1 - (p_2 / p_{0,1})^{(\gamma-1)/\gamma}}{1 - (p_1 / p_{0,1})^{(\gamma-1)/\gamma}} = \left[ 1 - (p_2 / p_{0,1})^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} \right] \cdot \left[ 1 + \frac{2}{(\gamma-1)M_1^2} \right] \quad (5.5)$$

Здесь  $p_2$  – статическое давление на выходе из патрубка, которое в опытах было равно атмосферному,  $p_{0,1}$  – полное давление на входе (в опытах – давление во входном ресивере),  $\gamma$  – показатель адиабаты. Характерное число Маха на входе в патрубок  $M_1$

определялось по измеряемому расходу воздуха  $G$  и параметрам во входном ресивере с помощью изэнтропических соотношений (напр. [79]):

$$G = S_1 \sqrt{\gamma p_{0,1} \rho_{0,1}} M_1 \left( 1 + \frac{\gamma - 1}{2} M_1^2 \right)^{\frac{-(\gamma+1)}{2(\gamma-1)}}, \quad (5.6)$$

где  $S_1$  – площадь входного сечения.

Сводные данные по коэффициенту потерь для модели выхлопного патрубка с исходным и улучшенным вариантом дефлектора представлены на рисунке 5.27. Как можно видеть, для исходного варианта рассчитанные значения коэффициента потерь весьма близки к результатам измерений в лаборатории ЛМЗ во всем диапазоне чисел Маха, что свидетельствует о достоверности результатов расчета. Предложенное небольшое изменение формы дефлектора, проиллюстрированное на рисунке 5.27б, обеспечило двукратное снижение потерь на номинальном режиме.

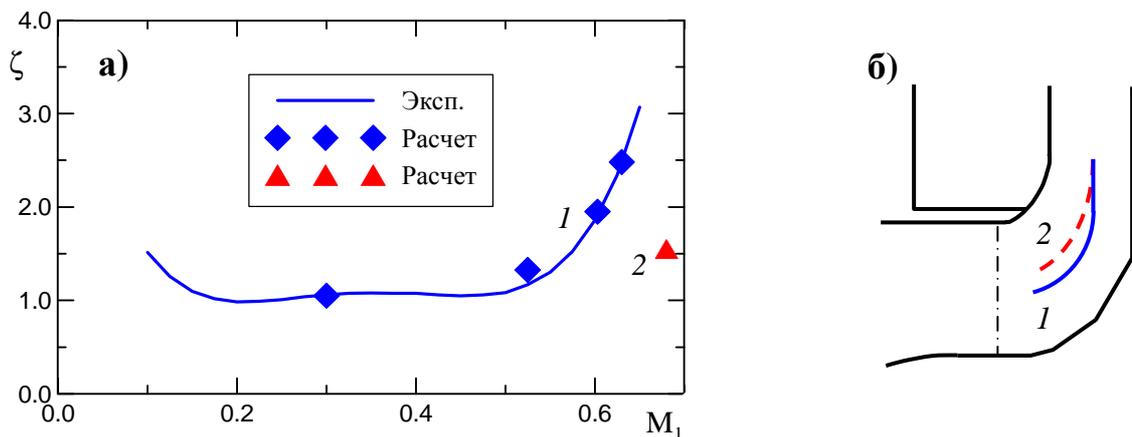


Рисунок 5.27 – Расчетные и опытные данные по коэффициенту потерь для модели выхлопного патрубка (1 – исходная форма дефлектора, 2 – предлагаемый вариант)

### 5.2.3 Регулирующие клапаны паровых турбин

Одним из «проблемных» узлов мощных паровых турбин, работающих в условиях высокой суточной неравномерности нагрузки, являются регулирующие клапаны (РК). Основной причиной отказа клапанов является вибрация, которая может возникать из-за срывного обтекания чашки клапана (напр. [84]). Расчетно-экспериментальные исследования и конструкторские разработки клапанов, обладающих улучшенными характеристиками надежности при малых потерях давления, выполнялись многими исследователями (напр., [65, 66, 91, 93]). Однако опыт эксплуатации серийных конструкций РК все же указывает на их недостаточную надежность, что диктует необходимость дальнейшей отработки проточной части клапана.

Внедрение численных методов в практику проектирования РК существенно сокращает материальные и временные затраты на отработку их конструкции при одновременном повышении уровня представлений о локальных свойствах течения, влияющих на потери давления. Последнее обстоятельство, в связи с неизбежно ограниченными возможностями физического эксперимента, является особенно ценным при использовании методов численного моделирования.

Один из примеров применения кода SINF для моделирования аэродинамики проточной части РК – сопоставительный анализ течения и потерь давления в клапанах исходной и новой улучшенной конструкции [75]. Представляемые расчеты [3, 26] проводились в 1998-99 гг. с использованием «стандартной» высокорейнольдсовой  $k$ - $\epsilon$  модели турбулентности [152] (с модификацией [143], для исключения нефизического роста эффективной вязкости в конфузурных областях).

На рисунке 5.28а проиллюстрированы основные детали геометрии улучшенного клапана и использованная для расчетов сетка, содержащая 80 тысяч ячеек (с учетом симметрии клапана сетка покрывает половину проточной части). Учтены такие особенности реальной проточной части РК, как:

- входной цилиндрический патрубок длиной 2 калибра, плавно сопрягающийся паровой коробкой (на рисунке показана лишь часть патрубка);
- сама паровая коробка сложной яйцевидной формы с внутренним ребром и центральным телом (без каналов системы разгрузки клапана);
- профилированная чашка клапана с кольцевой канавкой перед ней;
- седло клапана и выходной диффузор;
- выходной цилиндрический патрубок длиной 5 калибров (на рисунке не показан).

Необходимость проведения расчета в трехмерной постановке обусловлена боковым подводом пара в паровую коробку. В то же время наиболее ответственные элементы (чашка клапана, седло, выходной диффузор) обладают осевой симметрией, что дает возможность использовать упрощенную осесимметричную постановку для предварительного анализа структуры течения и потерь давления в РК. На рисунках 5.28б и 5.28в показаны соответствующие расчетные сетки для улучшенного и исходного вариантов проточной части, содержащие около трех тысяч ячеек каждая. Отличие двух вариантов геометрии клапана проиллюстрировано на рисунке 5.28г. Клапаны имеют одинаковый посадочный диаметр и проходное сечение, однако в исходном варианте проточная часть аэродинамически менее отработана: чашка клапана – тарельчатой формы, седло имеет посадочную выемку, а в диффузорной части клапанного канала расположены два обратных уступа.

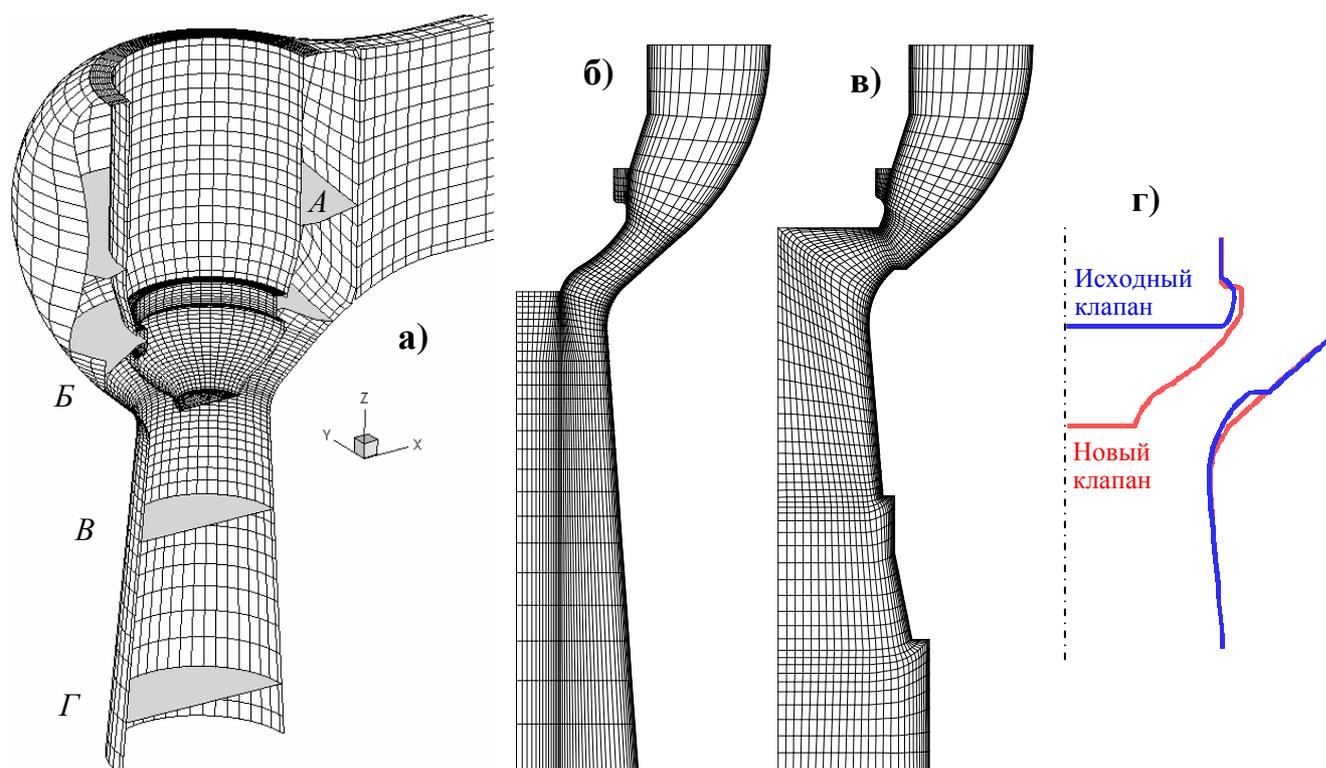


Рисунок 5.28 – Расчет течения в регулирующем клапане паровой турбины: а) сетка и положение контрольных сечений, б) и в) сетки для осесимметричного расчета РК новой (б) и исходной (в) конструкции, г) модификация геометрии клапана

Результаты осесимметричного расчета РК представлены на рисунке 5.29. Расчет проведен для двух моделей клапана, испытанных на воздушном стенде [75]. Характеристики воздуха на входе в клапан отвечали нормальным условиям; расход равен половине критического; число Рейнольдса, сосчитанное по посадочному диаметру и характерной скорости (среднерасходная скорость в пересчете на посадочный диаметр), составляло  $4.5 \cdot 10^5$ .

Как можно видеть на рисунке 5.29а,б, для улучшенного варианта проточной части в донной области за клапаном формируется сравнительно небольшая зона отрыва, след от которой сохраняется вплоть до выходного сечения диффузора; на внешней стенке реализуется безотрывное течение. Распределение числа Маха демонстрирует существенную неоднородность потока поперек канала в окрестности горла: у внешней стенки канала скорость потока максимальна ( $M \approx 0.6$ ), на противоположной стенке (во “впадине” чашки клапана)  $M < 0.3$ . Наибольший дефект полного давления имеет место в зоне отрыва за клапаном. Существенный вклад в потери вносит также внешняя область потока в диффузоре, толщина которой гораздо больше толщины пристенного пограничного слоя. Эта область формируется высокоскоростным потоком, вытекающим из кольцевого зазора между седлом и чашкой под большим углом к оси клапана. Таким образом, главным источником потерь давления в РК оказываются вихревые потери,

связанные с неоднородностью профиля скорости, а не трение о стенки канала. Это, в частности, предопределяет успешное использование высокорейнольдсовой  $k - \epsilon$  модели турбулентности, наиболее пригодной для расчета течений со свободными сдвиговыми слоями. По данным расчета потери полного давления на рассмотренном участке (до выхода из диффузора) равны 1.5% от входного давления. С учетом дополнительных потерь, связанных с расширением на уступе за диффузором (на рисунках не показан) и последующим выравниванием потока в выходном цилиндрическом патрубке длиной 5 калибров, суммарные потери давления составили 2.1%.

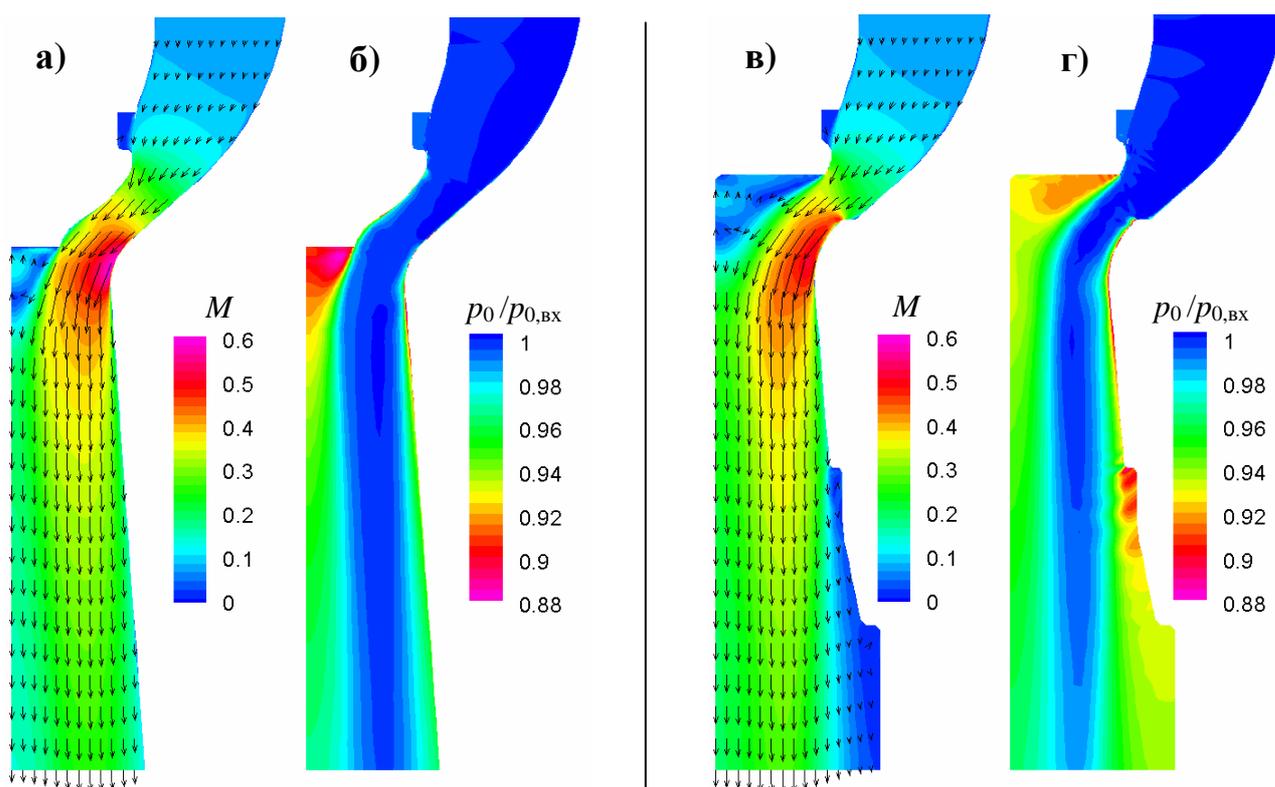


Рисунок 5.29 – Осесимметричное течение в РК новой (а,б) и исходной (в,г) конструкции: а,в) поле числа Маха и векторы скорости, б,г) поле полного давления

По сравнению с улучшенным клапаном, в исходном варианте (рисунок 5.29в,г) немного уменьшилось максимальное число Маха ( $M \approx 0.6$ ), а рециркуляционная зона за клапаном заметно увеличилась. Налицо неудачная форма выходного диффузора: уже после первого уступа течение принимает ярко выраженный струйный характер с обширной областью вихревых потерь на периферии. Суммарные потери давления возросли до 4%.

Результаты трехмерного расчета для клапана с улучшенной проточной частью представлены на рисунке 5.30: показаны векторы скорости, а также распределения числа Маха и полного давления в плоскости симметрии. Сравнивая рисунки 5.30 и 5.29а,б, можно судить о характере влияния бокового подвода и реальной геометрии

паровой коробки на течение в окрестности клапана и за ним. Видно, что паровая коробка не обеспечивает равномерного подвода воздуха к клапану. Скорость потока в зазоре между клапаном и седлом со стороны подводящего патрубка заметно выше и, соответственно, сильнее разрежение. Это приводит к значительной величине боковой силы, действующей на клапан, а также к деформации отрывной зоны за клапаном и смещению низкоскоростного следа вправо, в сторону подводящего патрубка.

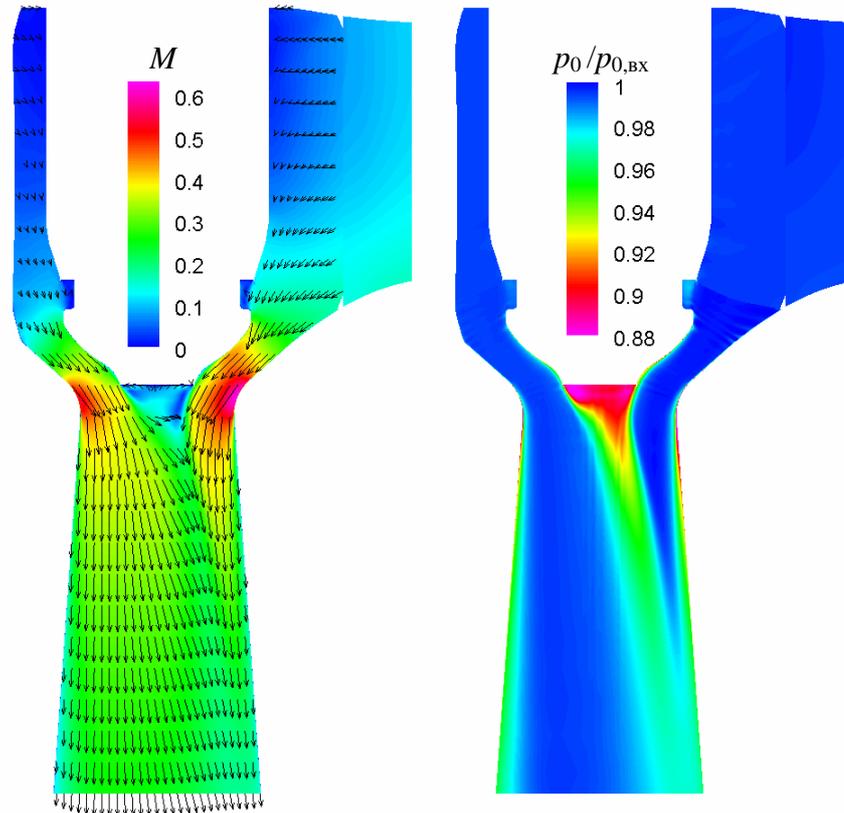


Рисунок 5.30 – Распределение числа Маха (слева) и поле полного давления (справа) в плоскости симметрии клапана с улучшенной проточной частью

Для более ясного понимания трехмерной структуры потока рассмотрим поля скоростей в четырех поперечных сечениях проточной части клапана (сечения *A* – *Г* на рисунке 5.28а), представленные на рисунке 5.31. В сечениях *A* и *B* паровой коробки (рисунок 5.31а) поля скорости существенно неоднородны. Непосредственно перед тарелкой клапана (в сечении *B*) скорости возрастают, но степень неоднородности скорости сохраняется прежней. Поперечное обтекание центрального тела клапана в целом не изменяется от сечения *A* к сечению *B*. Внутри канавки скорости сравнительно невелики. Транзитный поток проходит мимо канавки без образования развитой зоны отрыва, так что на структуру течения в РК и на потери давления ее влияние невелико.

Закрутка потока, вызванная обтеканием центрального тела в паровой коробке, в сочетании с дефектом скорости за центральным телом приводит к образованию за клапаном пары интенсивных продольно ориентированных вихревых жгутов (см.

рисунк 5.31б). В сечении  $B$  максимальная поперечная скорость достигает 40% среднерасходной скорости; в сечении  $\Gamma$  она снижается до 25%. Вблизи плоскости симметрии существует интенсивное поперечное течение, направленное в сторону входного патрубка, что согласуется с отмеченным на рисунке 5.30 смещением низкоскоростного следа за клапаном.

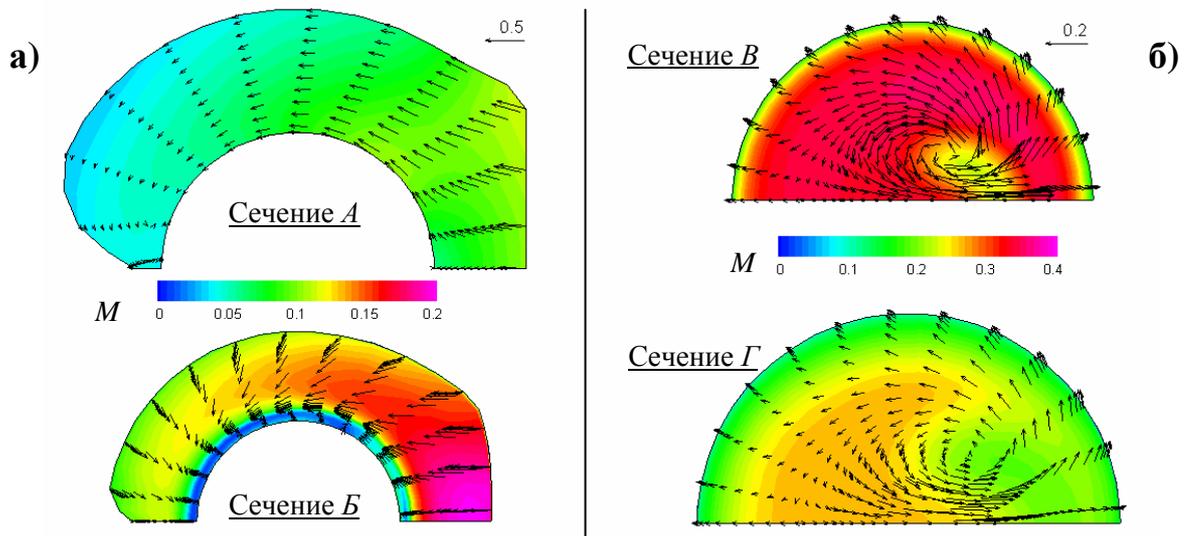


Рисунок 5.31 – Векторы скорости и поле числа Маха в сечениях паровой коробки (а) и выходного диффузора (б) клапана с улучшенной проточной частью (положение сечений показано на рисунке 5.28а)

Заметим, что направление поперечного течения в вихревых жгутах за клапаном противоположно направлению вторичных токов, наблюдаемых в изогнутых трубах и каналах. На обнаружение сходных вихревых структур в выходном диффузоре, полученных путем трехмерного численного моделирования течения, указывается также в [75]. Можно предположить, что в реальности эти вихревые жгуты совершают интенсивные перемещения в направлении, поперечном к плоскости симметрии проточной части, вызывая, среди прочего, низкочастотные пульсации давлений, действующих на клапан, т.е. являются одной из причин вибрации РК. Для исследования этого вопроса, помимо отказа от условий зеркальной симметрии, требуется проведение трехмерных расчетов в нестационарной постановке.

По результатам трехмерного расчета потери давления в РК с улучшенной проточной частью: во входном патрубке и паровой коробке – 0.15%, от сечения перед канавкой до выхода из диффузора – 1.56%, в выходном цилиндрическом патрубке – 0.61%. Сводные данные о потерях давления для всех рассмотренных вариантов представлены в таблице 9. Как можно видеть, потери давления, полученные при трехмерном моделировании, мало отличаются от результатов осесимметричного расчета, что позволяет сделать вывод о слабом влиянии неосесимметричности подвода

пара на потери давления для рассмотренных вариантов проточной части. Расчетные данные по потерям хорошо согласуются с результатами стендовых испытаний.

Таблица 9 – Расчетные и экспериментальные данные по потерям давления в РК со стандартной и улучшенной проточной частью

	Потери давления $\Delta p_0/p_{0,вх}$ [%]	
	Исходный клапан	Новый клапан
Осесимметричный расчет	4.0	2.1
Трехмерный расчет	---	2.3
Данные измерений	3.8	2.0

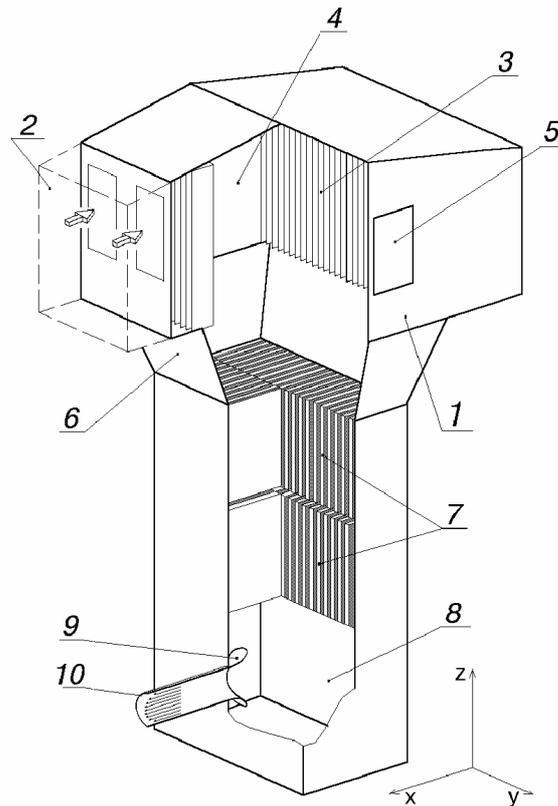
Таким образом, проведенные расчеты продемонстрировали, что реализованные в ПК SINF математические модели и численные методы позволяют проводить адекватное моделирование пространственных турбулентных течений для реальной геометрии РК. По результатам моделирования можно объективно оценивать качество проточной части РК и получать детальную информацию о локальных источниках потерь давления. В то время (а речь, напомним, идет о конце 90-х гг., когда коммерческие CFD коды еще не получили широкого распространения) это способствовало повышению доверия практиков к результатам гидродинамических расчетов и, в частности, позволило с помощью ПК SINF выполнить по заказам промышленных предприятий ряд проектов, направленных на совершенствование аэродинамики проточных частей РК.

#### 5.2.4 Входные тракты ГПА

Моделирование течения во входных трактах газоперекачивающих агрегатов (ГПА) «Нева-16» и «Нева-25» с помощью кода SINF было выполнено в 1995 г. по заказу АО «Кировский завод». Это один из первых примеров применения кода SINF для расчета сложных трехмерных течений в условиях реальной геометрии технических устройств. Ниже представлены основные результаты расчетов [25] для ГПА «Нева-16»; вариант «Нева-25» имеет идентичную компоновку воздухоподводящего тракта и, по сути, отличается лишь расходом воздуха и размерами некоторых элементов.

Входные тракты ГПА предназначены для подвода циклового воздуха к двигателю и, среди прочего, должны обеспечить необходимую для устойчивой работы компрессора достаточно малую степень неравномерности входного воздушного потока (порядка 1%) при минимально возможном уровне гидравлических потерь во входном тракте. Для удовлетворения этих, по сути, взаимоисключающих требований и был привлечен аппарат численного моделирования пространственных турбулентных течений.

Схема воздухоподводящего тракта ГПА «Нева» показана на рисунке 5.32. Основными элементами конструкции являются: воздухоочистительное устройство (ВОУ), шумоглушитель и камера всасывания с воздухонаправляющим патрубком. На рисунке показан вариант «продольной» установки ВОУ над блоком шумоглушителей, в котором воздух поступает в верхнюю камеру вдоль оси воздухонаправляющего патрубка. Возможен и другой, «поперечный» вариант, когда верхняя камера ВОУ повернута на  $90^\circ$  и воздух втекает в камеру перпендикулярно оси патрубка.



1 – воздухоочистительное устройство (ВОУ); 2 – отсек ВОУ с циклонами; 3 – фильтры тонкой очистки; 4 – центральная камера ВОУ; 5 – байпасный проем; 6 – переходная камера ВОУ; 7 – шумоглушитель; 8 – камера всасывания; 9 – конфузор; 10 – воздухонаправляющий патрубок

Рисунок 5.32 – Схема воздухоподводящего тракта ГПА «Нева»

Воздухоочистительное устройство имеет две степени очистки входящего воздуха: грубую – в батареях циклонов, установленных симметрично с двух сторон ВОУ, и тонкую – в зигзагообразных тканевых фильтрах. На одной из сторон ВОУ расположены два байпасных проема, открывающиеся в случае аварийного превышения давления на фильтрах ВОУ.

Переходная камера между ВОУ и шахтой шумоглушителя в случае, показанном на рисунке 5.32, представляет собой конфузор с небольшой степенью поджатия по проходному сечению (около 15%). В другом варианте установки ВОУ переходная камера обладает диффузорностью по одному направлению и конфузорностью по

другому, однако в целом остается конфузуром с той же степенью поджатия. Шахта шумоглушителя разделена на две равные части вертикальной непроницаемой перегородкой. Каждая из частей включает по 48 вертикально ориентированных шумопоглощающих пластин, размещенных в два яруса со сдвигом на половину шага установки пластин. Между ярусами имеется зазор для перетекания воздуха.

Камера всасывания, конфузор и воздухонаправляющий патрубок – элементы входного тракта, которые должны обеспечить требуемую равномерность потока на входе в осевой компрессор двигателя ГПА. Внутренние обводы конфузора выполнены по лемнискате. За конфузуром располагается цилиндрический воздухонаправляющий патрубок, длина которого может меняться в процессе доводки конструкции.

Расчеты проводились в приближении несжимаемой жидкости с использованием хорошо апробированной в прикладных аэродинамических расчетах «стандартной» высокорейнольдсовой  $k$ - $\epsilon$  модели турбулентности [152]. Для учета влияния на поток фильтров тонкой очистки и пластин шумоглушителя в некоторых случаях использовалась модель анизотропного «пористого тела» (см. разд. 2.1.1). Поскольку выполнить сквозной расчет всего входного тракта ГПА не представлялось возможным (в то время код SINF еще «не умел» работать с многоблочными сетками), расчеты проводились поэлементно, с частичным наложением рассматриваемых участков для учета их взаимного влияния.

Течение в ВОУ и переходной камере моделировалось начиная от выхода из отсека с циклонами с учетом струйного характера потока, развивающегося вблизи выхода из батарей циклонов (в каждом из выходных сечений батарей циклонов принималось однородное распределение скорости). Для учета специфического влияния на поток фильтров тонкой очистки, которые представляют собой матерчатые клинья, частично нависающие над переходной камерой, была построена модель гидравлического сопротивления фильтров применительно к конкретным условиям их компоновки, основанная на результатах предварительного моделирования трехмерного течения в образованных матерчатыми клиньями каналах. А именно, при расчете течения в ВОУ полагалось, что фильтры имеют анизотропный коэффициент сопротивления, у которого «горизонтальная» составляющая равна  $\zeta_x = 53$  для чистых фильтров и  $\zeta_x = 159$  для максимально загрязненных, а «вертикальная» составляющая  $\zeta_z$  периодически меняется от  $\zeta_x$  до нуля, что обеспечивает возможность вертикального перетекания потока внутри фильтров. На рисунке 5.33 представлены поля скорости в трех вертикальных сечениях ВОУ при чистых фильтрах. На рисунке 5.33а совмещены два сечения, лежащие напротив выхода из батареи циклонов (в одном сечении  $\zeta_z = 53$ , в другом  $\zeta_z = 0$ ), чтобы показать роль введенной в модель анизотропии сопротивления фильтров. На рисунке 5.33б вертикальное сечение находится в промежутке между батареями циклонов.

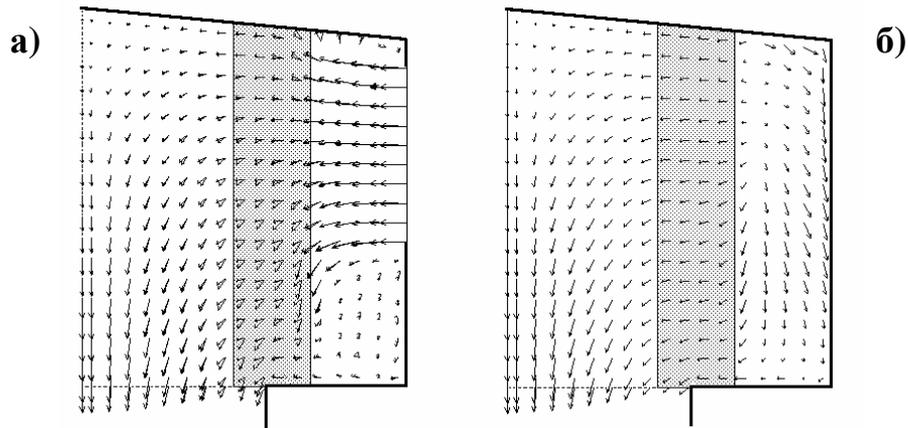


Рисунок 5.33 – Векторы скорости в вертикальных сечениях ВОУ (затененная область – фильтры тонкой очистки): а) два сечения напротив выхода из батареи циклонов, б) сечение в промежутке между батареями

Сопоставление картин течения в области, соответствующей центральной камере ВОУ, указывает на сильное выравнивающее действие фильтров тонкой очистки. По данным расчетов эффект загрязненности фильтров проявляется, главным образом, в увеличении вертикального перетекания воздуха в пределах фильтров, однако в большей части потока картина течения практически не изменяется.

Обработка задачи течения воздуха через фильтры тонкой очистки позволила перейти к расчету течения воздуха в центральной камере ВОУ и переходной камере. Расчеты проводились для продольного и поперечного расположения ВОУ относительно воздухонаправляющего патрубка, а также для трех вариантов подачи воздуха в ВОУ: а) симметричная подача, при которой расход воздуха через все батареи циклонов одинаковый, б) несимметричная подача, при которой из-за ветрового давления воздух поступает только с одной стороны ВОУ и в) подача воздуха в аварийном режиме, когда расход через циклоны падает до 35% от номинального, а 65% расхода поступает через байпасные клапаны.

Расчетная область формировалась с учетом симметрии потока относительно одной или двух вертикальных плоскостей и покрывала часть ВОУ (центральная камера и примерно половина толщины слоя фильтров тонкой очистки), переходную камеру и часть шахты шумоглушителя. На входе в расчетную область задавалось распределение скорости в соответствующих сечениях, полученное при расчете течения через фильтры тонкой очистки. При открытых байпасных клапанах на них задавался однородный поток (для учета эффекта поджатия потока при протекании через отверстие площадь клапанов была уменьшена на 40% против прототипа).

Обратное влияние шумоглушителей на течение в переходной камере учитывалось в рамках модели анизотропного «пористого тела». А именно, на части расчетной сетки,

приходящейся на шахту шумоглушителя, полосами, ориентированными вдоль пластин шумоглушителя, задавалось ступенчатое распределение коэффициента сопротивления, меняющегося от достаточно большого значения, фактически запирающего поток, до значения, которое обеспечивало реальный уровень перепада давления на полной длине шумоглушителя. На выходе из расчетной области задавалось условие постоянства давления, отражающее реальную ситуацию в камере всасывания.

В качестве примера на рисунке 5.34а показано поле скорости для варианта с продольным расположением ВОУ при симметричном подводе воздуха. Видно, что поток при подходе к шумоглушителю успевает в основном выровняться: неравномерность выходной скорости по отдельным проточным полосам и по их размаху не превышает 10%. Для вариантов с несимметричным подводом воздуха и/или с поперечным расположением ВОУ неравномерность составила 10...15%. Таким образом, несимметрия подвода воздуха, как и разворот ВОУ, почти не сказывается на характеристиках поля скорости на входе в шахту шумоглушителя, что обусловлено сравнительно малым уровнем скоростей на выходе из фильтров (соответствующий скоростной напор на порядок меньше, чем перепад давления на шумоглушителе).

На рисунке 5.34б показана картина течения при аварийном режиме работы ВОУ, при котором 65% расхода поступает через байпасные клапаны. Из-за высокой скорости байпасного потока течение в центральной камере ВОУ и в переходной камере имеет ярко выраженный струйный характер, что приводит к существенно неравномерному распределению скорости вдоль пластин шумоглушителя (до  $\pm 45\%$  относительно среднего значения). При этом расход через разные "проточные" полосы отличается не более, чем на 20%.

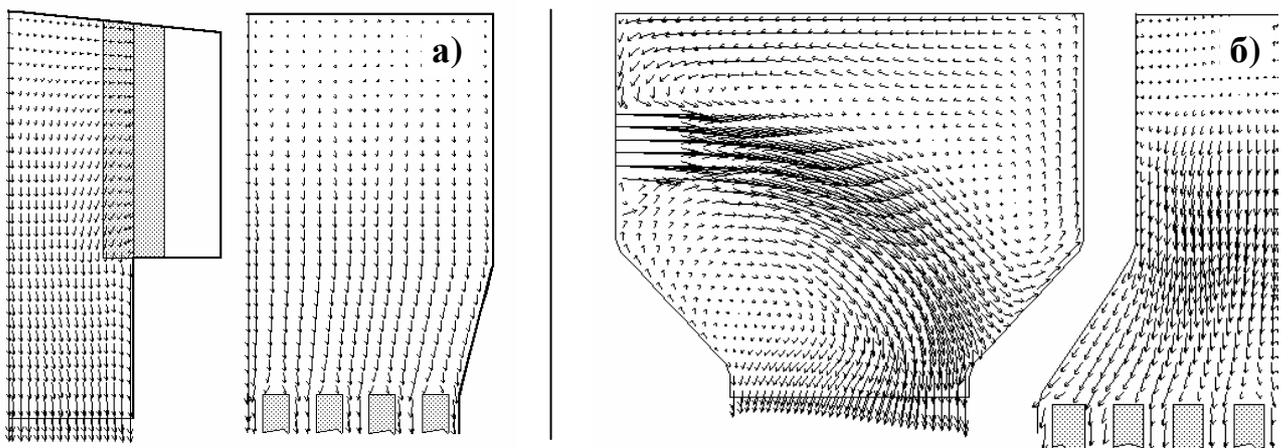


Рисунок 5.34 – Векторы скорости в вертикальных сечениях ВОУ и переходной камеры:

- а) вариант с продольным расположением ВОУ и симметричным подводом воздуха,
- б) вариант с открытыми байпасными клапанами и поперечным расположением ВОУ

Расчет течения в шумоглушителе, состоящем из двух ярусов с шахматным расположением пластин, проводился для узкого щелевого канала, образованного стенками пластин (по одной в каждом ярусе) и двумя плоскостями симметрии (затененная область на рисунке 5.35а). На входе в расчетную область профиль скорости полагался равномерным поперек зазора; распределение скорости по ширине пластин задавалось на основании результатов расчета течения в переходной камере.

Расстояние между пластинами шумоглушителя много меньше их высоты (около 6%), поэтому течение в большей части расчетной области близко к установившемуся. Поле скорости в наиболее сложной области – в зазоре между ярусами – показано на рисунке 5.35б. Хорошо видна отрывная зона за пластинами верхнего яруса и прижим потока к плоскости симметрии нижней части зазора. Можно видеть также небольшую отрывную область у кромки пластины нижнего яруса.

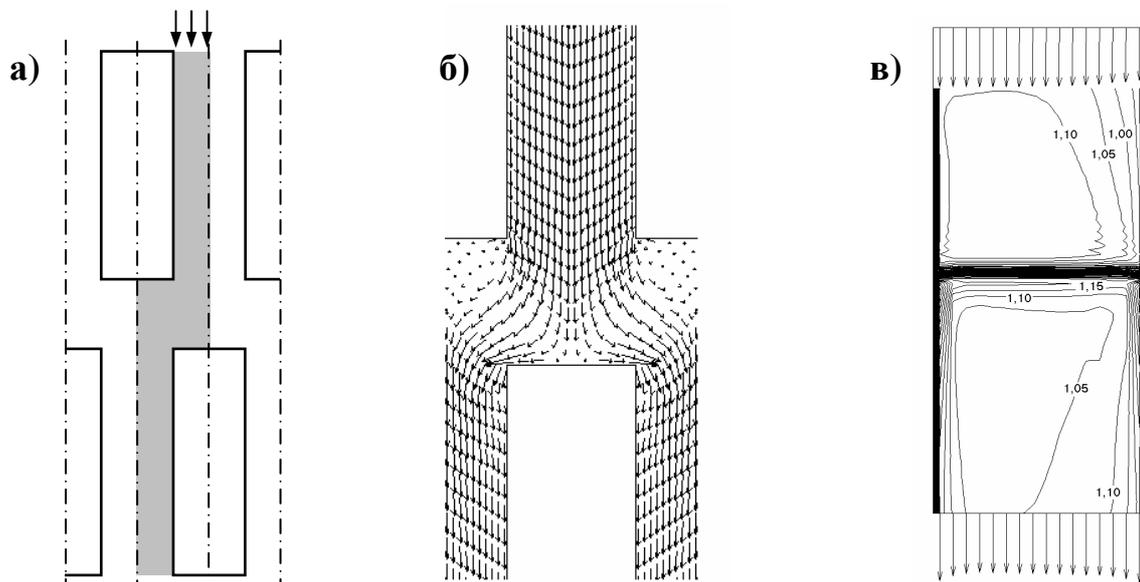


Рисунок 5.35 – Расчет течения в шумоглушителе: а) схема расчетной области (поперечное сечение канала), б) векторы скорости в зазоре между ярусами, в) изолинии полной скорости вдоль зазора между пластинами (в плоскостях симметрии)

На рисунке 5.35в показаны распределения скорости в плоскостях симметрии зазоров верхнего и нижнего яруса шумоглушителя (масштаб – среднерасходная скорость на входе в зазор). Входной профиль отвечает несимметричной подаче воздуха в ВОУ. Несколько неожиданный результат данного расчета заключается в «переворачивании» входной неравномерности с формированием М-образного профиля скорости после прохождения потоком зазора между ярусами (на возможность такого эффекта указывается, например, в [72]). Возникшая М-образность профиля скорости не успевает выродиться на высоте нижнего яруса и сохраняется в выходном сечении шумоглушителя, где уровень неравномерности профиля скорости составляет примерно

$\pm 10\%$ . В случае открытия байпасных клапанов расходы воздуха через две части шахты шумоглушителя различаются в 1.7 раза.

Задача о течении в камере всасывания и воздухонаправляющем патрубке является наиболее сложной из рассмотренных задач поэлементного расчета входного тракта. Это обусловлено как сложностью геометрии, так и повышенными требованиями к точности расчета для выявления неравномерностей поля скорости в патрубке на уровне долей процента.

Использованная для расчетов сетка показана на рисунке 5.36а. В сетку включено центральное тонкое тело вращения для предотвращения вычислительных трудностей, связанных с сингулярностью в окрестности оси полярной сетки внутри патрубка (вытесняющее действие этого тела ничтожно мало и не сказывается сколько-нибудь существенно на характеристиках потока). Подчеркнем, что использование в патрубке равномерной по углу полярной сетки принципиально необходимо, так как только в этом случае можно избежать генерации окружной неравномерности потока, вызванной сеточными эффектами.

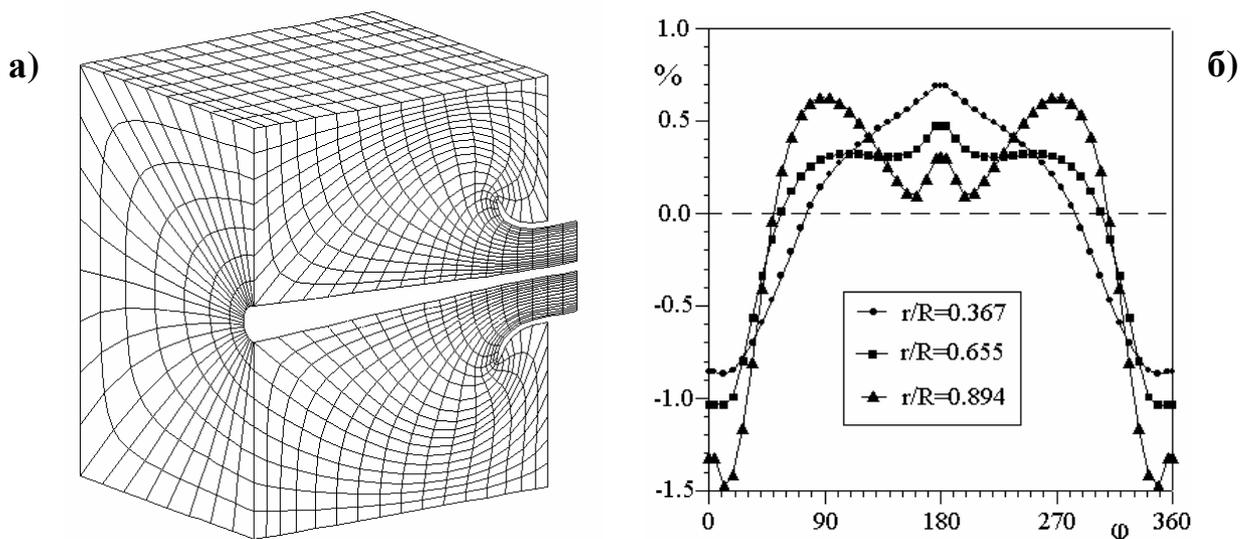


Рисунок 5.36 – Расчет течения в камере всасывания и воздухонаправляющем патрубке:  
а) расчетная сетка, б) окружная неравномерность скорости на выходе из патрубка

Распределение скорости на входе в камеру всасывания вдоль оси патрубка задавалось с учетом неравномерности профиля скорости вдоль пластин шумоглушителя. В поперечном к оси патрубка направлении скорость на входе полагалась равномерной. Специальные расчеты показали, что струйно-периодический характер течения в области за пластинами шумоглушителя быстро вырождается при подходе к конфузору.

Окружная неравномерность потока на выходе из воздухонаправляющего патрубка оценивалась для нескольких радиусов в сечении, расположенном на расстоянии 2.4 калибра от конца конфузора (от начала цилиндрического участка). В качестве примера

на рисунке 5.36б представлены графики отклонения полной скорости от среднего по окружности значения (в процентах), полученные для аварийного режима работы ВОУ (с открытыми байпасными клапанами) при его поперечном расположении, который характеризуется наибольшей неравномерностью потока перед шумоглушителем (см. рисунок 5.34б). Несмотря на выравнивающее действие шумоглушителя, влияние этой неравномерности проникло вплоть до входа в конфузор и, как видно на рисунке 5.36б, создало на выходе из патрубка окружную неравномерность потока порядка  $\pm 1.5\%$ . При симметричном подводе воздуха в ВОУ выходная неравномерность потока была на порядок ниже, что косвенно свидетельствует о достаточно хорошей работе камеры всасывания и конфузора.

По результатам проведенного поэлементного расчета входного тракта в сочетании с опытными данными [71] общие потери в тракте (после выхода из циклонов) на номинальном режиме составили 0.6% при чистых фильтрах тонкой очистки и 0.8% – при максимально загрязненных. Основной вклад потери вносят фильтры тонкой очистки (0.1–0.3%), вихреобразование в зазорах между ярусами шумоглушителя (0.1%) и трение в пограничном слое на стенке воздухонаправляющего патрубка (0.3%).

### **5.3 Конвективный теплообмен в элементах технических устройств**

#### **5.3.1 Торцевой теплообмен в турбинной решетке**

Наряду с представленными в разд. 5.2.1 задачами анализа структуры потока и определения потерь энергии в лопаточных решетках, важное значение для газовых турбин имеет моделирование теплоотдачи на лопатках и торцевых поверхностях. Подобные расчеты с помощью кода SINF выполнялись неоднократно (напр. [69, 70, 77, 78, 139]). Ниже представлены результаты тестового расчета [39] трехмерного течения и теплообмена в модели сопловой турбинной решетки, для которой в литературе имеются довольно подробные экспериментальные данные [131, 137, 150]. Расчеты выполнены с использованием двух низкорейнольдсовых моделей турбулентности (с целью оценки их применимости для данного класса течений) –  $k$ - $\omega$  модели [207] (с поправкой [143]) и SST модели [160].

Геометрия решетки и расчетная сетка проиллюстрированы на рисунке 5.37. Сетка покрывает половину высоты лопатки и содержит около 1.1 миллиона ячеек. Для аккуратного разрешения пограничных слоев сетка сгущена к стенкам: величина первого пристенного шага сетки равна  $10^{-4}b_x$  (где  $b_x$  – ширина решетки), что обеспечило значение нормированной пристенной координаты первой расчетной точки  $y^+ < 1$  на большей части поверхности.

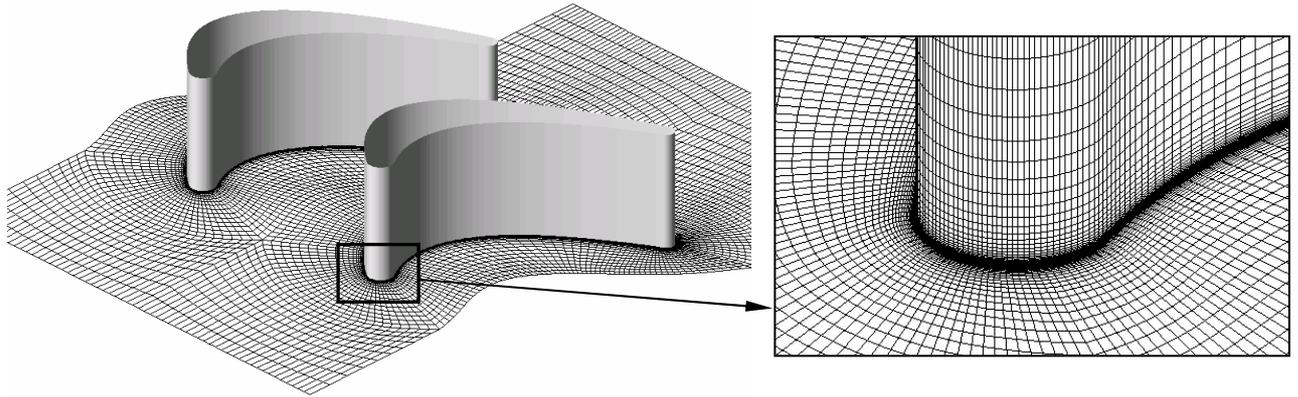


Рисунок 5.37 – Расчет течения и теплообмена в модели турбинной решетки:  
расчетная сетка

Геометрия решетки, граничные условия и параметры потока задавались в соответствии с условиями измерений [131]. В частности, хорда профиля  $l = 1.2242 b_x$ , шаг решетки  $t = 0.9555 b_x$ , высота лопатки  $h = 0.9888 b_x$ , угол входа потока  $\beta_1 = 44.7^\circ$  (обозначения те же, что в разд. 5.2.1). Течение воздуха в решетке существенно дозвуковое (скорость на входе в решетку  $V_1 = 33.5$  м/с), поэтому расчет проводился в рамках модели несжимаемой жидкости. Число Рейнольдса  $Re = b_x V_1 / \nu = 6.45 \cdot 10^5$ .

Для получения распределения скорости и параметров турбулентности на входе в расчетную область был проведен вспомогательный двумерный расчет пограничного слоя на плоской пластине. Сечение, в котором извлекались входные профили для основной задачи, выбиралось так, чтобы наилучшим образом удовлетворить опытными данным по толщине пограничного слоя на торцевой стенке в контрольном сечении, расположенном на расстоянии  $2.35 b_x$  перед решеткой (толщина вытеснения  $0.0133 b_x$ , толщина потери импульса  $0.0099 b_x$ ).

На рисунке 5.38 показаны предельные линии тока на торцевой стенке, полученные в эксперименте [137] и в расчете с применением двух моделей турбулентности. Как можно видеть, по сравнению с моделью SST [160], модель  $k-\omega$  [207] дает картину пристенного течения более простую и, на первый взгляд, более близкую к наблюдаемой в эксперименте. Однако в действительности, за исключением «лишней» полосы на рисунке 5.38в, по локальным углам наклона линий тока результаты расчета SST лучше согласуются с опытными данными.

Как можно заключить из рисунка 5.39, упомянутая «лишняя» полоса на картине пристенных линий тока в расчете SST является отпечатком дополнительного вихря (с противоположным по отношению к подковообразному вихрю направлением вращения), который в расчете по  $k-\omega$  модели подавляется из-за гораздо более высокого уровня турбулентной вязкости в придонной области пограничного слоя. Можно предположить, что в эксперименте этот вторичный вихрь не был замечен из-за недостаточного

разрешения измерений и/или из-за вполне вероятного небольшого низкочастотного «блуждания» данного вихря, которое в рамках стационарного расчета, естественно, не моделировалось.

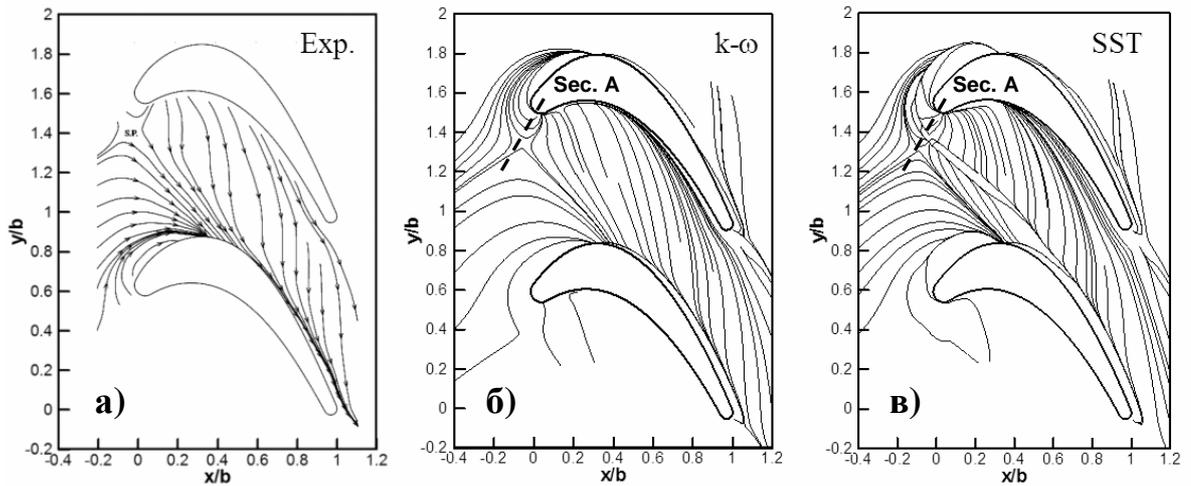


Рисунок 5.38 – Предельные линии тока на торцевой стенке модели турбинной решетки

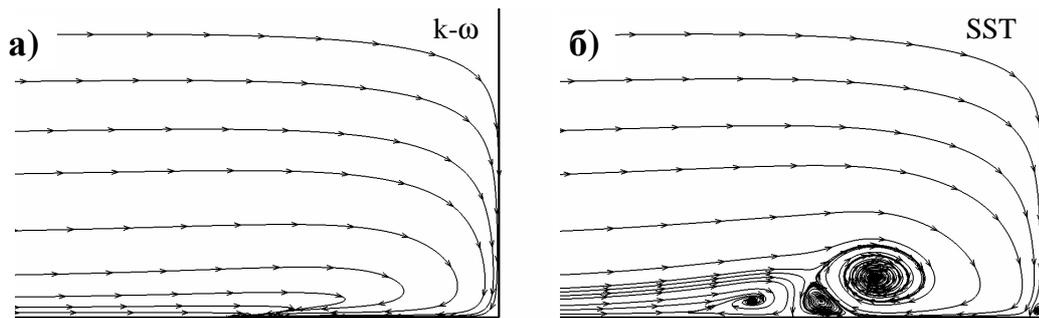


Рисунок 5.39 – Линии тока в сечении *A* (см. рисунок 5.38) перед лопаткой

Косвенным свидетельством того, что показанная на рисунке 5.39б (или близкая к ней) сложная вихревая структура имела место в действительности, могут служить представленные на рисунке 5.40 картины распределения давления. Как в эксперименте (рисунок 5.40а), так и в расчете по модели SST (рисунок 5.40в) вторичный вихрь оставил на изобарах отчетливо видимый отпечаток в виде полосы пониженного давления, который отсутствует в расчете по  $k-\omega$  модели (рисунок 5.40б).

Расчетные и экспериментальные данные по коэффициенту трения на торцевой стенке представлены на рисунке 5.41. Как можно видеть, обе модели турбулентности правильно предсказывают положение локального минимума трения (в окрестности седловой точки придонных линий тока, см. рисунок 5.38), но явно недооценивают скорость «размытия» следа за лопаткой. Последнее, скорее всего, связано с нестационарностью потока, сходящего с довольно толстой задней кромки лопатки. В среднем, расчетные значения коэффициента трения на 15÷20% выше, чем измеренные.

Аналогично рисунку 5.40, упоминавшийся ранее вторичный вихрь оставил отчетливый след в виде полосы повышенного трения в расчете по модели SST (рисунок 5.41в) и в эксперименте [137] (рисунок 5.41а). В последнем случае след более «размыт», что согласуется с высказанным ранее предположением о возможном «блуждании» данного вихря.

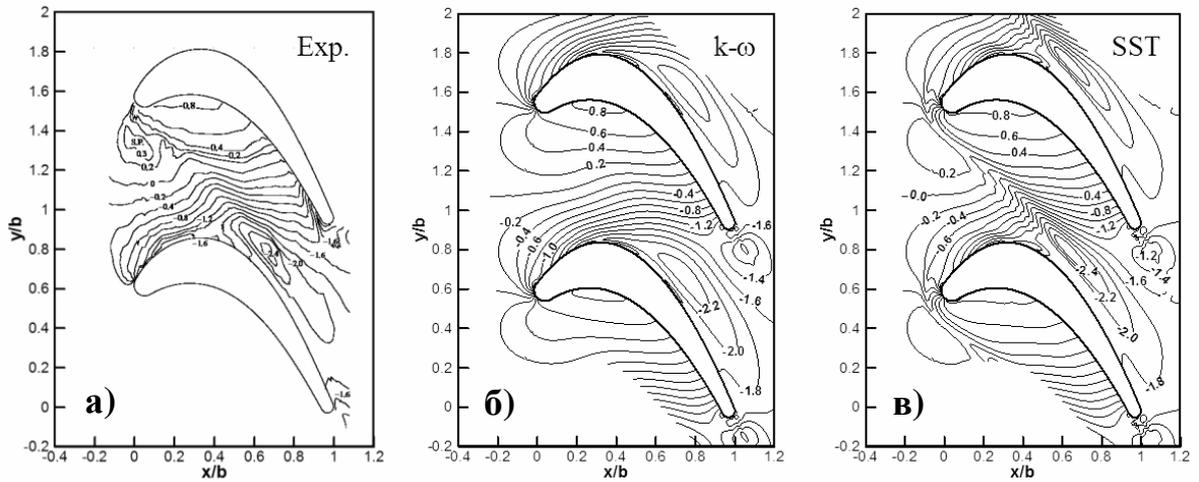


Рисунок 5.40 – Изолинии коэффициента давления  $2(p - p_1)/\rho V_1^2$  на торцевой стенке

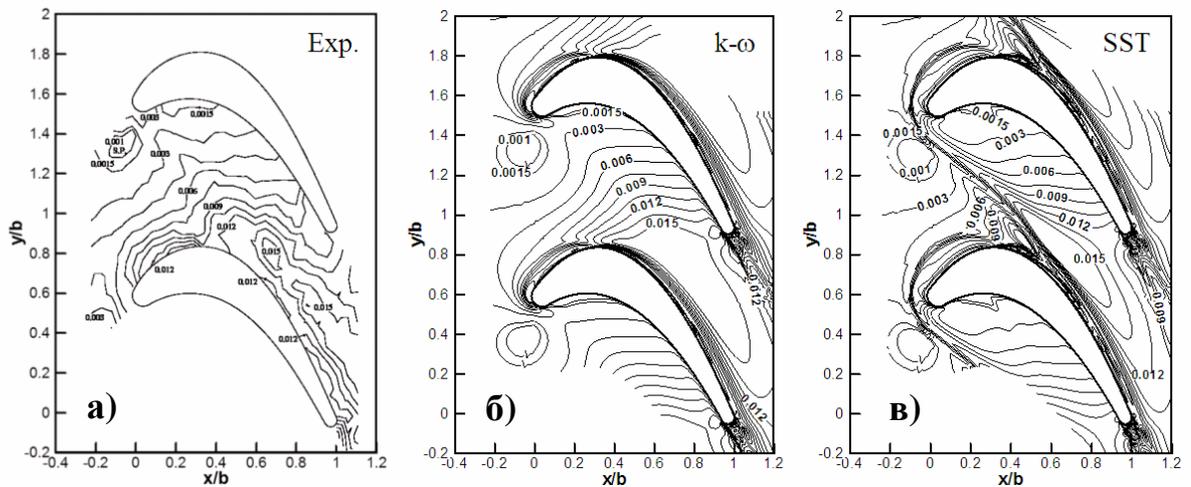


Рисунок 5.41 – Изолинии коэффициента трения  $2\tau_w/\rho V_1^2$  на торцевой стенке

На рисунке 5.42 представлены данные по распределению коэффициента теплоотдачи, характеризуемого числом Стэнтона  $St = q_w/\rho V_1 C_p (T_w - T_1)$  (где  $q_w$  – заданный тепловой поток,  $T_w$  – локальная температура стенки,  $T_1$  – температура потока на входе в решетку). Принимая во внимание сложность моделируемого течения, согласие результатов расчета с данными измерений [131] можно считать вполне удовлетворительным. Как и ранее, SST модель обеспечивает более правильное предсказание некоторых характерных особенностей в распределении числа Стэнтона (концентрация изолиний в середине межлопаточного канала, обширная зона пониженной теплоотдачи у вогнутой стороны лопатки и др.). Однако ближе к выходу из решетки и особенно в следе за

лопатками рассогласование между измеренным и рассчитанным распределением числа Стэнтона становится все более значительным. В качестве наиболее вероятной причины такого рассогласования можно назвать существенную нестационарность потока, сходящего с довольно толстой задней кромки лопатки, а также наличие низкочастотных пульсаций крупномасштабных вихревых структур в межлопаточном канале.

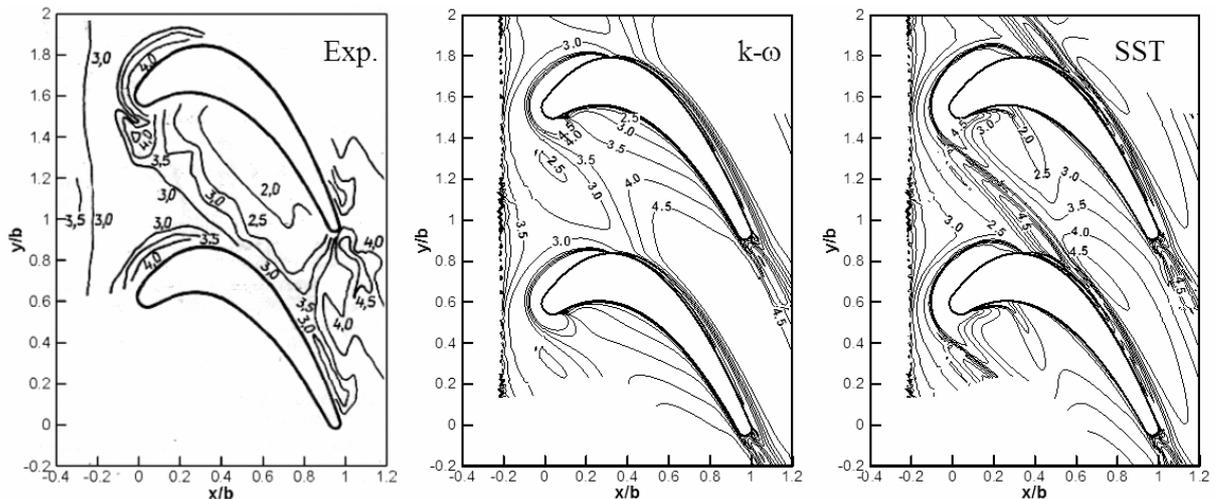


Рисунок 5.42 – Изолинии числа Стэнтона ( $St \times 10^3$ ) на торцевой стенке

Подводя итог, можно сказать, что в рассмотренном примере стационарный расчет на основе SST модели турбулентности обеспечил приемлемое качество моделирования сложного трехмерного течения и теплоотдачи в приторцевой области межлопаточного канала. Для более адекватного моделирования, видимо, требуется решение задачи в нестационарной постановке. Модель  $k-\omega$  в данном случае дает слишком упрощенную картину течения из-за завышенного уровня турбулентной вязкости.

### 5.3.2 Течение и теплообмен во вращающемся U-образном канале

Вращающийся вокруг поперечной оси U-образный канал является типичным элементом системы внутреннего охлаждения роторных лопаток газовых турбин. И без того непростая картина течения в канале с довольно крутым 180-градусным поворотом кардинально усложняется из-за действия силы Кориолиса и, в меньшей степени, эффектов плавучести в поле центробежных сил. Представляемый расчет [4] сложного неизотермического течения во вращающемся U-образном канале применительно к условиям эксперимента [124], выполнен с помощью кода SINF в 1999 г.

Схема канала представлена на рисунке 5.43. Канал имеет квадратное сечение  $D \times D$ ; входной и выходной прямолинейные участки канала ориентированы по радиусу; ось вращения параллельна плоскости поворота. Обогрев канала производится в его периферийной части на участке длиной  $L = 12D$ ; средний радиус обогреваемой зоны

$R_m = R_0 + L/2 = 55D$ . Число Рейнольдса  $Re = W_m D / \nu = 5000$ ; параметр вращения (число Россби)  $Ro = \omega D / W_m = 0.15$ ; температурный фактор (относительный перегрев стенок канала на обогреваемом участке)  $\varepsilon_T = (T_w - T_{вх}) / T_{ср} = 0.13$ ; рабочая среда – воздух.

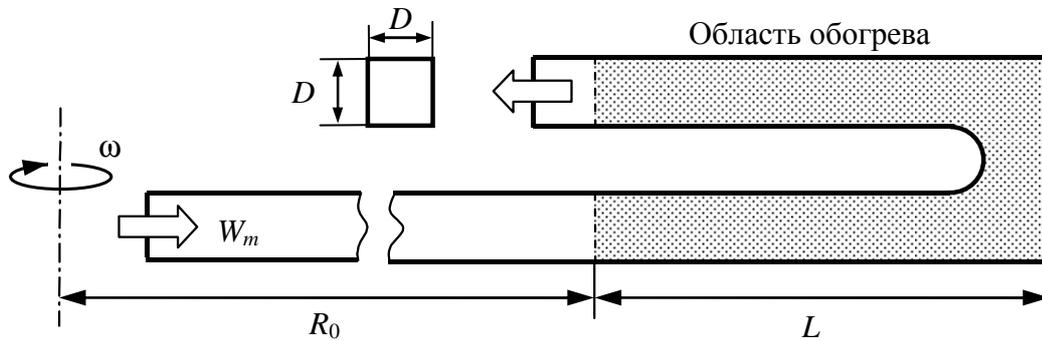


Рисунок 5.43 – Течение и теплообмен во вращающемся U-образном канале: схема

Задача решалась в стационарной постановке, в рамках модели несжимаемой жидкости; эффекты плавучести в поле центробежных сил учитывались в приближении Буссинеска (роль сил тяжести в данном случае пренебрежимо мала). Использовалась  $k$ - $\varepsilon$  модель турбулентности [152]; наряду со стандартными пристенными функциями (2.17), (2.22) применялась их модифицированная формулировка (2.18б), (2.23а), которая обеспечивает работоспособность модели вплоть до сравнительно малых значений нормированной пристенной координаты  $y^+ \approx 3 \div 5$  (вместо обычного для стандартных пристенных функций ограничения  $y^+ > 30$ ). Это позволило обеспечить достаточно аккуратное разрешение пограничных слоев (что крайне важно для адекватного моделирования столь сложного трехмерного течения) при относительно небольших (по сравнению с использованием низкорейнольдсовой модели турбулентности) вычислительных затратах.

Расчетная область покрывала обогреваемый участок канала с небольшими (один калибр) адиабатическими участками до и после него. При использовании стандартных пристенных функций расчетная сетка имела размер  $112 \times 20 \times 20$  ячеек со сгущением к стенкам канала и в области поворота. В случае модифицированных пристенных функций сетка была дополнительно измельчена поперек канала ( $112 \times 32 \times 32$  ячеек). Входные профили скорости и параметров турбулентности были получены из решения вспомогательной двумерной задачи о развитом течении в канале (в опытах [124] обогреваемому участку предшествовал достаточно длинный,  $40D$ , прямолинейный канал).

Следует отметить, что при рассмотренных значениях чисел Рейнольдса и Россби решение упомянутой двумерной задачи является нестационарным. Конечно, уравнения допускают и стационарное решение (его можно получить, например, рассматривая

половину канала с наложением условий симметрии) – при этом имеет место показанная на рисунке 5.44а характерная четырех-вихревая картина вторичных токов с дополнительной парой вихрей вблизи плоскости симметрии на стороне давления (на рисунке – в нижней части канала). Однако при решении задачи в полной нестационарной постановке (без наложения условия симметрии) указанная пара вихрей совершает низкочастотные горизонтальные колебания, что приводит к более интенсивному перемешиванию потока в этой части канала. Сравнивая показанное на рисунке 5.44б осредненное по времени поле скорости (которое и было использовано в качестве входного условия для основной задачи) с данными рисунка 5.44а можно заключить, что расчет с наложением условий симметрии неадекватно оценивает воздействие на поток обсуждаемой пары вихрей.

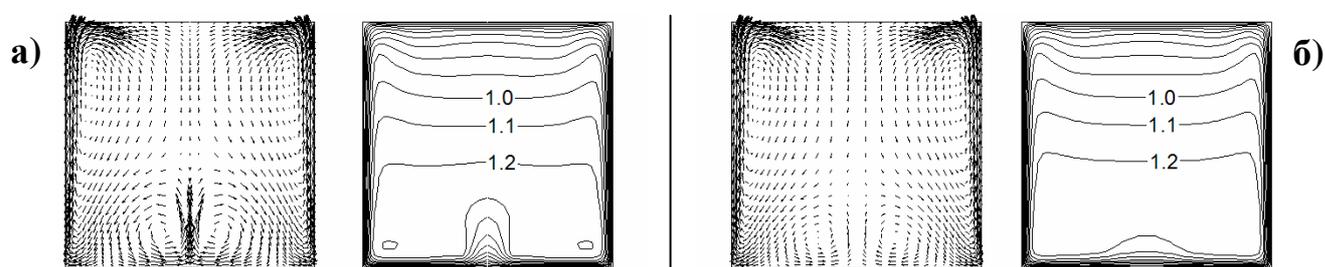
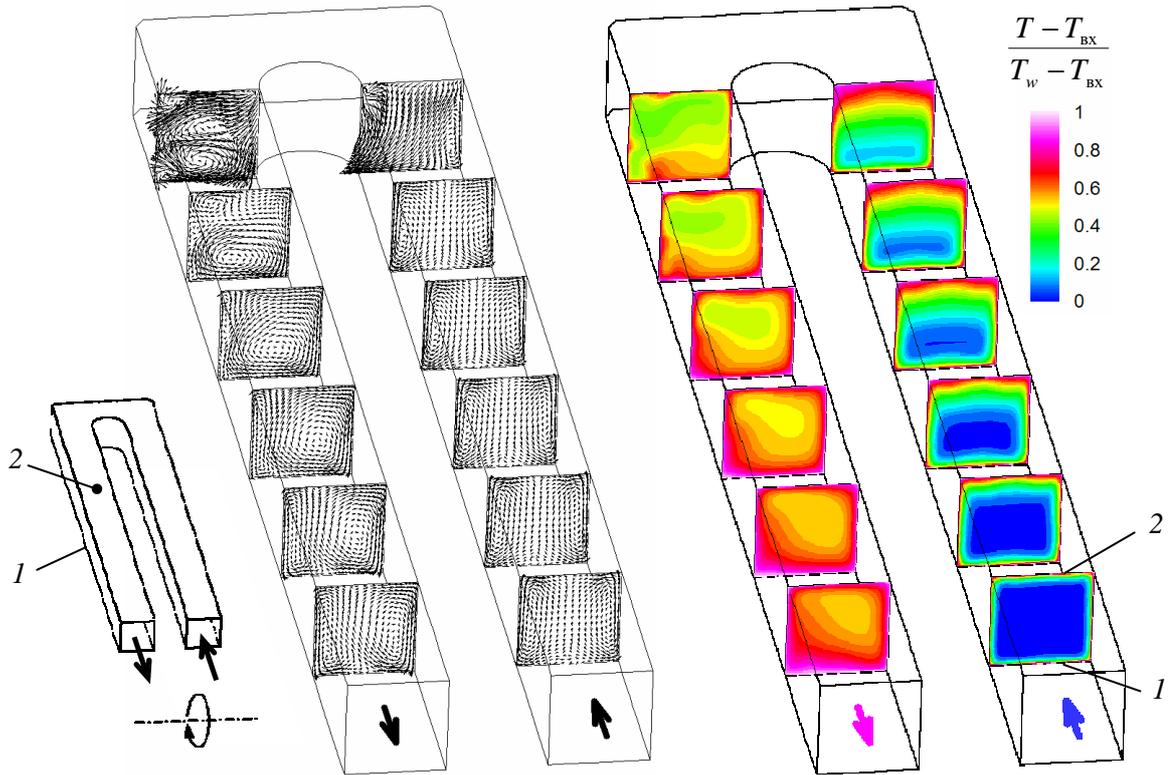


Рисунок 5.44 – Векторы скорости и изолинии продольной скорости при развитом течении во вращающемся канале: а) стационарное решение, б) осредненные по времени результаты нестационарного расчета

На рисунке 5.45 представлены векторы скорости и распределения относительной температуры в нескольких поперечных сечениях канала. Как можно видеть, до поворота профили температуры напоминают профили скорости на рисунке 5.44б: из-за вторичных токов экстремум температуры смещен к «задней» стенке канала (которая в данном случае является стороной давления); соответственно, по сравнению с противоположной «передней» стенкой, здесь выше градиент температуры на стенке и, следовательно, больше коэффициент теплоотдачи. После поворота сторона давления и сторона разрежения меняются местами (минимум температуры смещается к «передней» стенке), однако возникшая в области поворота асимметрия потока сохраняется вплоть до выхода их канала.

Некоторое представление о сложной трехмерной структуре потока в области поворота дают представленные на рисунке 5.46 линии тока. Векторы скорости на рисунке 5.47 демонстрируют существенное различие картин течения вблизи «передней» и «задней» стенки канала. Примечательно, что область возвратного течения у «передней» стенки канала (вблизи наружной угловой стенки) проникает довольно далеко во входной участок канала.



1 – «задняя» стенка канала (trailing wall), 2 – «передняя» стенка (leading wall)

Рисунок 5.45 – Векторы скорости и поле температуры в поперечных сечениях вращающегося канала

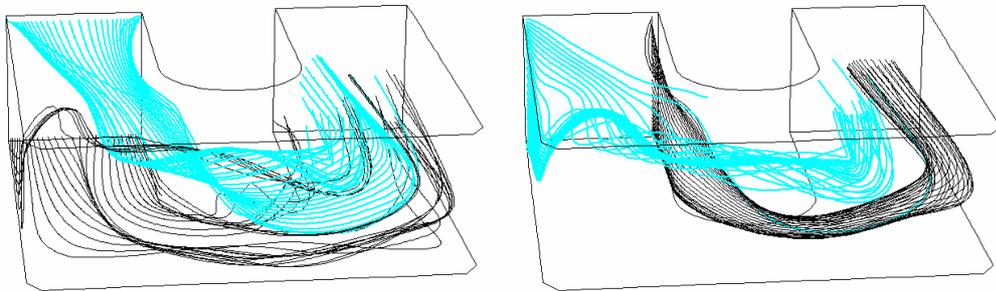


Рисунок 5.46 – Линии тока в области 180-градусного поворота во вращающемся канале

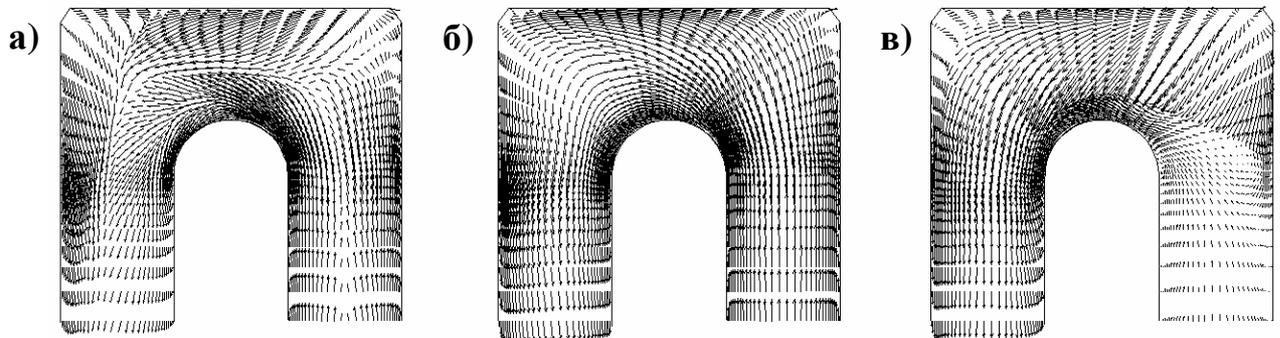
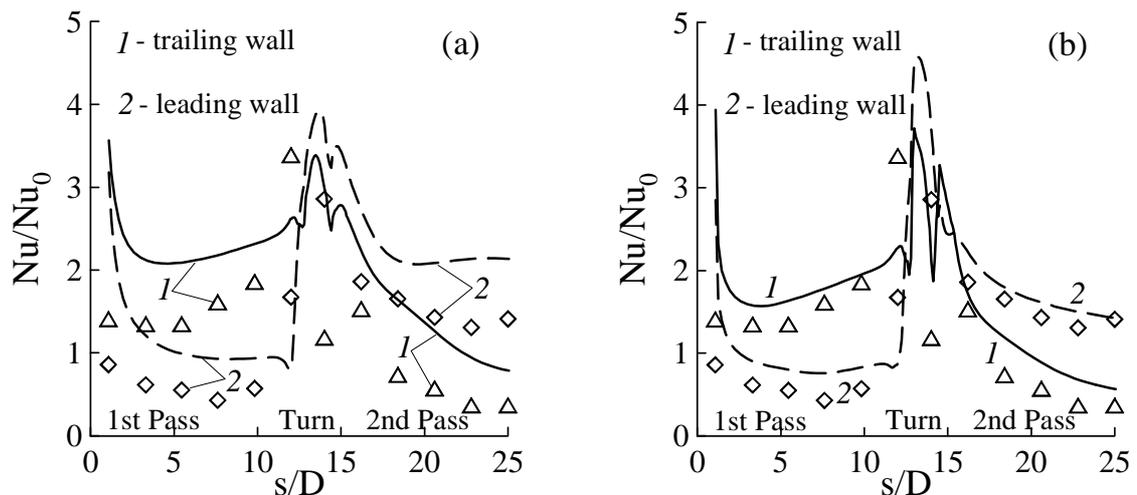


Рисунок 5.47 – Векторы скорости в трех продольных сечениях: а) на расстоянии  $0.02D$  от «задней» стенки, б) посередине канала, в) на расстоянии  $0.02D$  от «передней» стенки

Расчетные и экспериментальные данные по теплоотдаче на «передней» и «задней» стенках вращающегося канала представлены на рисунке 5.48а: по оси ординат отложено среднее по ширине канала число Нуссельта, отнесенное к его значению для развитого течения в неподвижном канале; по оси абсцисс – относительное расстояние (вдоль средней линии канала) от начала обогреваемого участка. Как можно видеть, переход от стандартных пристенных функций (рисунок 5.48а) к модифицированным (рисунок 5.48б) значительно улучшил согласие результатов расчета с данными измерений. Вместе с тем, можно отметить, что расчет заметно завышает теплоотдачу на стороне разрежения, т.е. на «передней» стенке входного участка канала (до поворота) и на «задней» стенке выходного. Вполне вероятно, это связано с тем, что в использованной модели не учитывался эффект подавления турбулентности у стороны разрежения под действием силы Кориолиса (это можно сделать введением в модель турбулентности специальной поправки [154], см. Приложение А).

В целом, достигнутый уровень соответствия расчетных и экспериментальных данных для столь сложного течения является, по меркам 90-х годов, очень хорошим.



1 – «задняя» стенка (trailing wall), 2 – «передняя» стенка (leading wall) (см. рисунок 5.45);

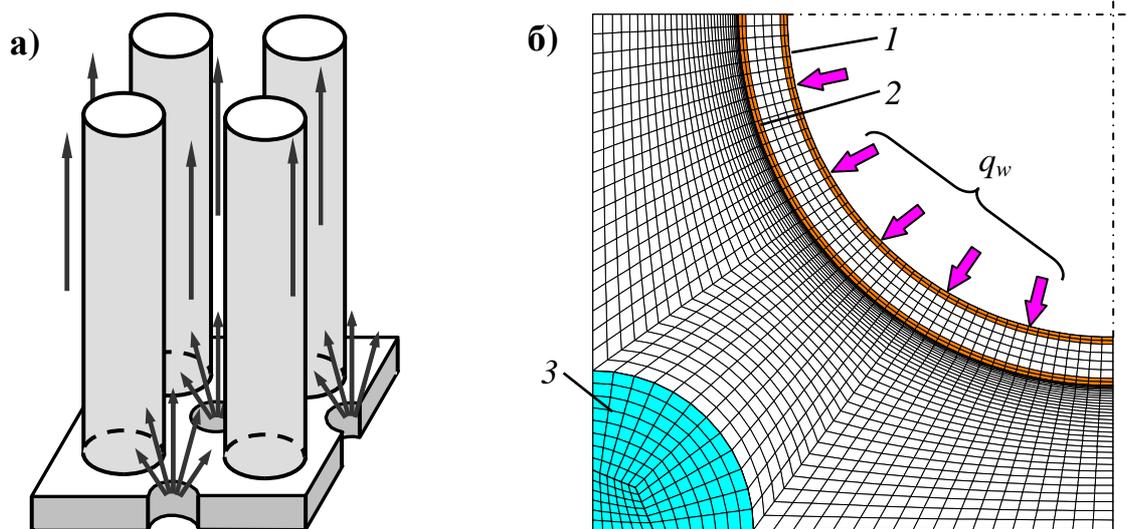
(а) – расчет со стандартными пристенными функциями. (б) – с модифицированными

Рисунок 5.48 – Сравнение результатов расчета (линии) и эксперимента [124] (символы) по теплоотдаче на «передней» и «задней» стенке вращающегося канала

### 5.3.3 Вентиляция хранилища отработанного ядерного топлива

Из множества задач свободной и смешанной конвекции, решенных с помощью ПК SINF, рассмотрим в качестве примера расчеты течения и теплопереноса в камере сухого хранения отработанного ядерного топлива (ОЯТ), выполненные в 2002-2003 гг. по заказу ВНИПИЭТ [5, 7, 35].

Одним из условий безопасного хранения ОЯТ является обеспечение допустимой температуры тепловыделяющих элементов (ТВЭЛ) и элементов конструкции хранилища. В рассматриваемом варианте хранилища пеналы со сборками ТВЭЛ помещаются в вертикальные цилиндрические гнезда, охлаждение которых обеспечивается естественной конвекцией воздуха в камере хранения (рисунок 5.49а). Охлаждающий воздух поступает в камеру через отверстия в полу и отводится через сборный коллектор в верхней части помещения (на схеме не показан).



1 – стенка пенала, 2 – стенка гнезда хранения, 3 – область подвода охлаждающего воздуха

Рисунок 5.49 – Моделирование свободной конвекции в камере хранения ОЯТ: а) схема расположения гнезд и подвода охлаждающего воздуха, б) сечение расчетной сетки

На первом этапе расчет проводился для одиночной ячейки в средней части камеры (без учета влияния стенок камеры и наличия транзитного потока в ее верхней части). Главной задачей численного моделирования являлся анализ структуры течения охлаждающего воздуха в окрестности гнезда хранения ОЯТ, а также определение теплового состояния гнезда и коэффициента теплоотдачи с его поверхности, оценка гидравлического сопротивления данного участка тракта и др. Тепловая задача решалась в сопряженной постановке, с учетом теплового сопротивления тонкой воздушной прослойки между металлическим стенкам пенала и гнезда хранения. Основными входными данными для расчета были: изменяющийся по высоте тепловой поток, поступающий от сборки ТВЭЛ к стенке пенала, и расход охлаждающего воздуха, определенный на основании предварительного теплогидравлического расчета всего вентиляционного тракта.

Для моделирования турбулентности использовалась низкорейнольдсовая модель [184]. С учетом условий симметрии рассматривалась четверть ячейки. Сечение расчетной сетки показано на рисунке 5.49б; цветом выделены стенки гнезда хранения

ОЯТ и пенала с ТВЭЛ, а также зона подвода охлаждающего воздуха (входное отверстие). Сгущение сетки у наружной стенки гнезда обеспечивает хорошее разрешение вязкого подслоя (безразмерное расстояние от первой расчетной точки до стенки составляет  $y^+ \approx 0.8$ ). Общая размерность сетки – 220 тысяч ячеек (из них 180 тысяч приходится на область течения, 40 тысяч – на составную стенку); на поверхности гнезда в горизонтальной плоскости содержится 48 ячеек, по высоте камеры – 104 ячейки. Для проверки сеточной сходимости также использовалась сетка, измельченная по каждому индексному направлению в 1.5 раза.

Отдельные результаты расчета приведены на рисунке 5.50. Картина линий тока (рисунок 5.50а) дает представление о чрезвычайно сложном пространственном течении охлаждающего воздуха в нижней части ячейки хранения ОЯТ (цветом показана избыточная температура); хорошо видны зоны рециркуляции воздуха и сложные поперечные токи. При этом на большей части высоты ячейки восходящее течение сосредоточено в тонких пристенных слоях с типичными для свободно-конвективных потоков профилями скорости и температуры. На рисунке 5.50б показано распределение тепловых потоков по высоте ячейки: сплошная линия отвечает задаваемому модельному распределению на внутренней поверхности пенала со сборками ТВЭЛ; символами показан тепловой поток на наружной поверхности гнезда хранения, рассчитанный с учетом перераспределения тепла вдоль стенки и ее охлаждения потоком воздуха. Наконец, рисунок 5.50в иллюстрирует изменение по высоте ячейки избыточной температуры стенки гнезда и коэффициента теплоотдачи.

Рисунок 5.51 иллюстрирует влияние на картину обтекания гнезд хранения ОЯТ транзитного потока в верхней части камеры. Расчет проведен для одного удаленного от межкамерных стен ряда гнезд хранения, включая центральный, промежуточный и концевой отсеки ( $3+4+4=11$  гнезд) с вертикальными перегородками между ними. Расчетная сетка, состоящая из 64-х блоков, включала 2.2 миллиона ячеек; к окну выхода воздуха в верхней части камеры пристыкован горизонтальный канал, который не моделирует действительную геометрию коллектора вытяжной трубы, а служит для уменьшения влияния выходного граничного условия на течение внутри камеры.

Из рисунка 5.51 видно, что на большей части высоты камеры течение охлаждающего воздуха строго вертикально; лишь над перегородками, делящими камеру на отсеки, имеет место интенсивное горизонтальное течение воздуха к выходу из камеры. Как показал анализ, основные потери давления в камере наблюдаются при обтекании гнезд хранения горизонтальным потоком в верхней части камеры (главным образом, в концевом отсеке), а также при перетекании воздуха через перегородки и на входе в вытяжной канал. Установлено также, что наихудшие условия охлаждения гнезд хранения наблюдаются в центральном отсеке камеры.

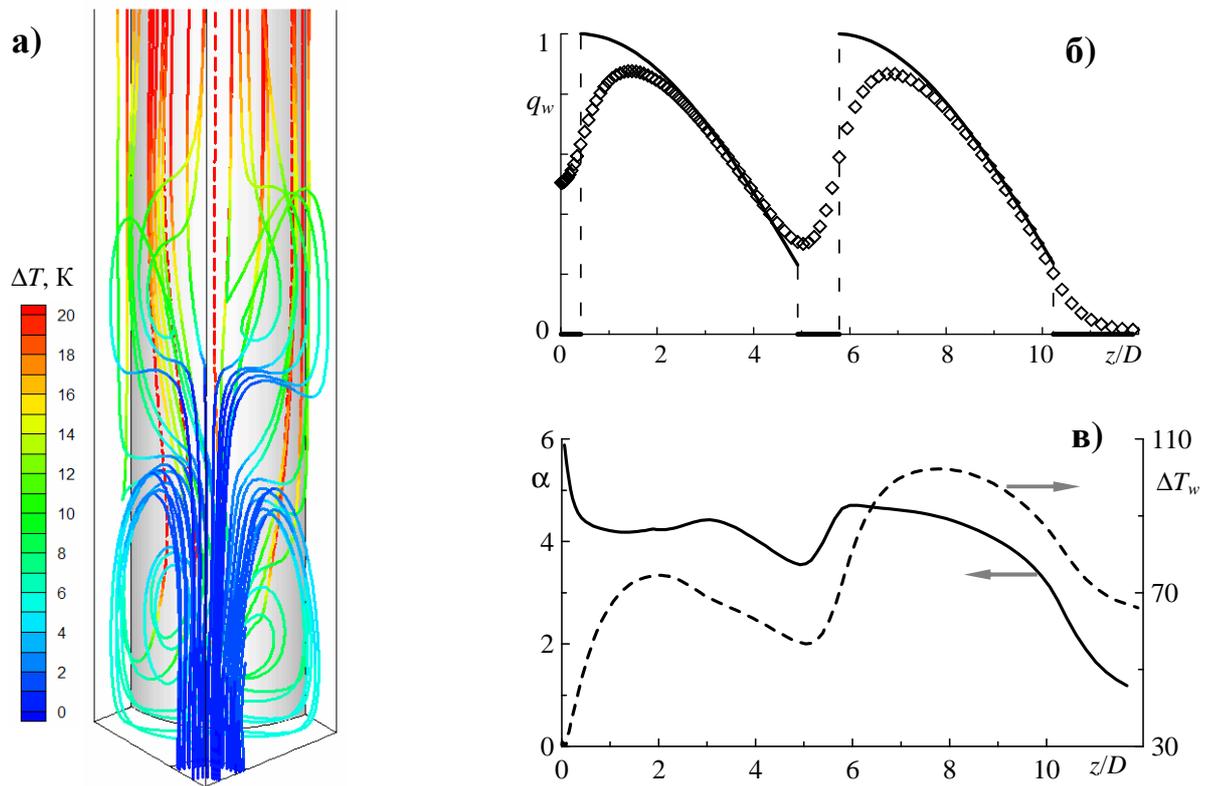


Рисунок 5.50 – Линии тока охлаждающего воздуха в нижней части ячейки хранения ОЯТ (а); распределение по высоте ячейки теплового потока (б), температуры стенки гнезда и коэффициента теплоотдачи (в)

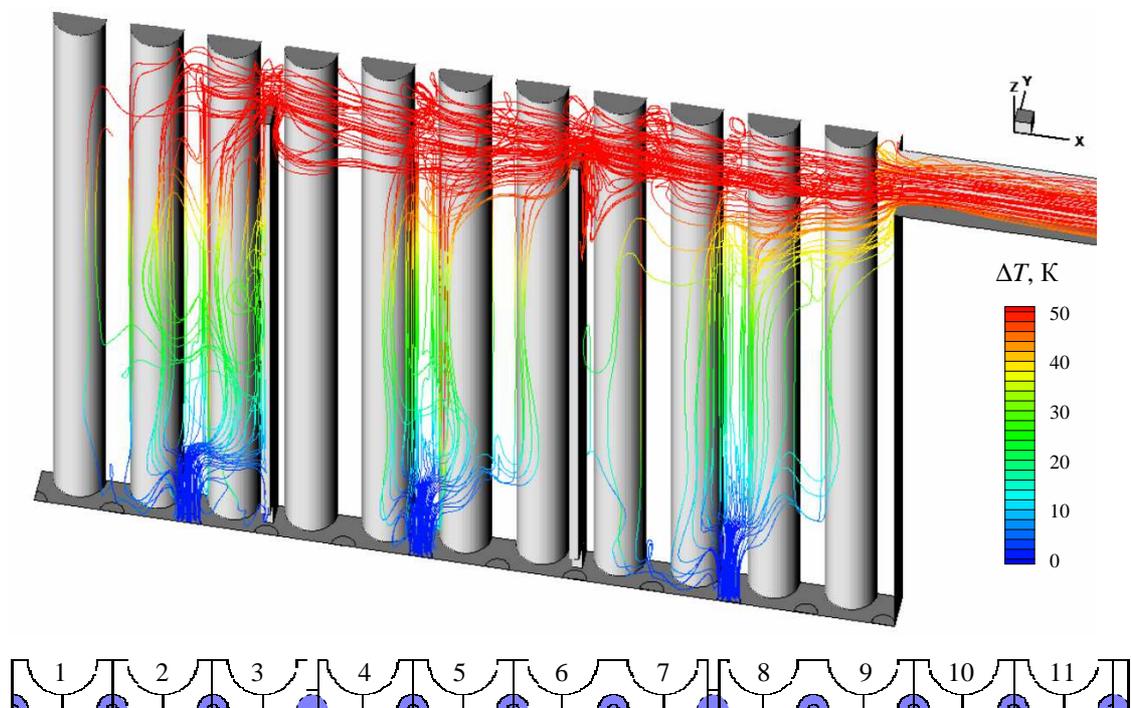


Рисунок 5.51 – Линии тока охлаждающего воздуха в камере хранения ОЯТ (расчет для одного ряда из 11 гнезд в средней части камеры). Цветом показана избыточная температура потока

Дополнительный расчет с фиксированной температурой потолка камеры дал возможность оценить величину коэффициента теплоотдачи к потолку. Полученное в распределение локального коэффициента теплоотдачи представлено на рисунке 5.52. Видно, что распределение носит крайне неравномерный характер: в пределах одной ячейки коэффициент теплоотдачи может меняться от 1 до 15 Вт/(м<sup>2</sup>·К). В центральном отсеке камеры (рисунок 5.52а) с «подветренной» стороны каждого гнезда наблюдается отчетливый максимум теплоотдачи, обусловленный натеканием на потолок в этих местах вертикальных нагретых потоков воздуха. По мере продвижения к выходу вертикальные восходящие потоки воздуха сносятся и размываются интенсивным горизонтальным течением. В результате теплоотдача к потолку в целом несколько выравнивается; исключения составляют ячейки, расположенные в концевом отсеке сразу за перегородкой и непосредственно перед выходным отверстием, в которых наблюдается повышенная теплоотдача (рисунок 5.52в).

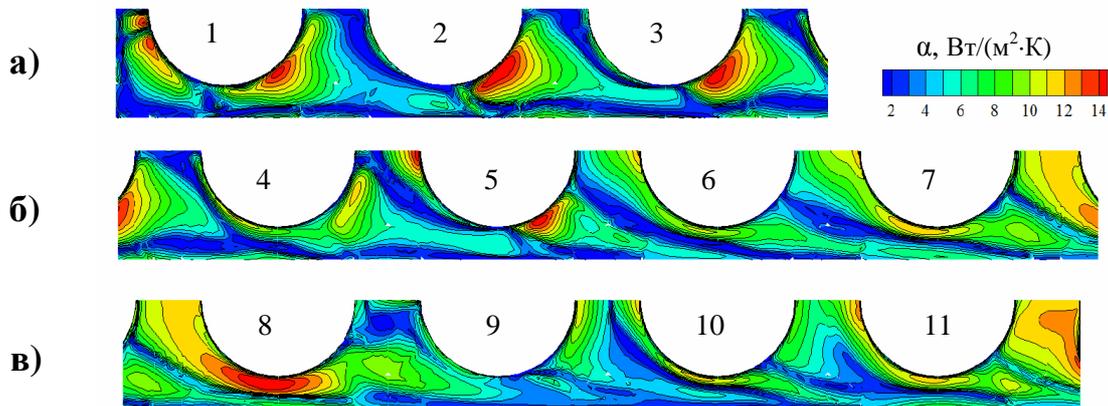


Рисунок 5.52 – Распределение коэффициента теплоотдачи к потолку камеры хранения ОЯТ в центральном (а), промежуточном (б) и выходном (в) отсеках

На рисунке 5.53 показаны результаты аналогичного расчета для трех примыкающих к стенке камеры хранения рядов гнезд в центральном отсеке (в общей сложности 9 гнезд; расчетная сетка 3.1 млн. ячеек). Видно, что в пристенной области, как и для случая одного удаленного от стенок камеры ряда гнезд, течение охлаждающего воздуха на большей части высоты камеры является вертикальным. Струи воздуха, выходящие из отверстий в полу камеры, быстро размываются, и поток прилипает к поверхности гнезд. Горизонтальное течение воздуха наблюдается лишь в верхней части камеры. Влияние стенки на распределение коэффициента теплоотдачи к потолку (рисунок 5.53б), как и на тепловое состояние гнезд в целом, также крайне невелико.

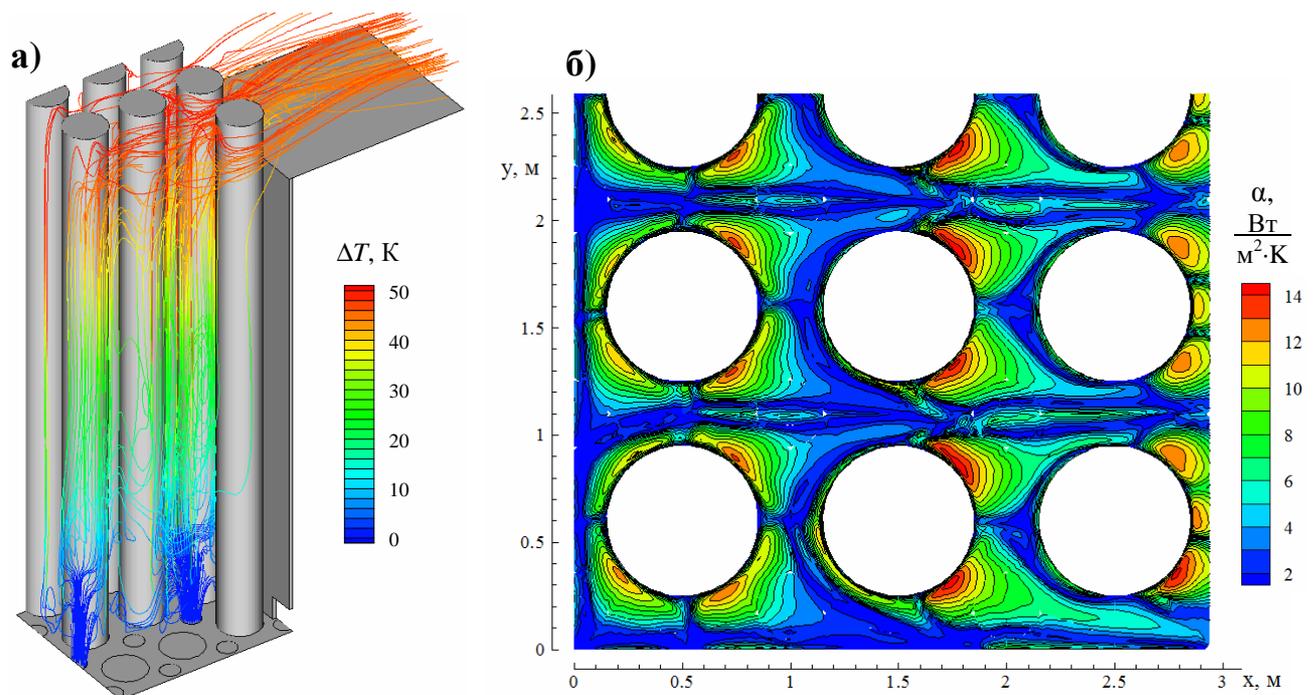


Рисунок 5.53 – Линии тока охлаждающего воздуха (а) и распределение коэффициента теплоотдачи к потолку камеры хранения ОЯТ (б) в трех примыкающих к стенке камеры рядах гнёзд в центральном отсеке

Таким образом, численное моделирование течения в камере хранения ОЯТ с помощью кода SINF позволило прояснить вопрос о структуре потока, оценить степень неравномерности коэффициентов теплоотдачи, сравнить тепловое состояние гнезд в разных отсеках, определить уровень гидравлических потерь для камеры в целом и для каждого входного отверстия. Эти сведения дают базис для более достоверной оценки надежности и безопасности проекта хранилища ОЯТ при разных режимах его эксплуатации.

#### 5.3.4 Течение и тепломассоперенос в модели контейнента АЭС

Численное моделирование процессов тепломассопереноса в защитной оболочке (контейненте) энергоблока АЭС имеет важное значение для анализа эффективности работы системы пассивного отвода тепла и оценки безопасности АЭС в условиях возможной аварии. По заказу СПбАЭП, для обеспечения возможности проведения такого рода расчетов, математическая модель ПК SINF была дополнена моделью свободной и смешанной конвекции многокомпонентной парогазовой смеси при наличии объемной и поверхностной конденсации пара (см. разд. 2.2.3). Соответствующий расчетный модуль был реализован в виде независимого специализированного кода ПГС-ТК и передан заказчику. Ниже, в качестве примера практического применения этого кода, представлены результаты расчета течения паро-воздушной смеси [20, 44]

для условий экспериментов на крупно-масштабном стенде (КМС) со всеми основными процессами, определяющими пассивный отвод тепла от защитной оболочки в условиях, максимально приближенных к натурным [83].

Геометрия расчетной области проиллюстрирована на рисунке 5.54а. В подкупольном пространстве стенда находятся четыре трубчатых теплообменника, которые в расчете моделируются изогнутыми по радиусу пластинами с той же площадью теплосъема (на рисунке они обозначены цифрами 1 – 4). Водяной пар поступает в расчетную область через отверстие *B* в полу подвального яруса стенда КМС. Из подвала пар попадает на первый этаж стенда через отверстие *C* и далее на второй этаж через отверстие *F*; через дверные проемы *D*, *E*, *G*, *H* пар проходит в кольцевой зазор, откуда поступает в подкупольное пространство стенда и, частично, на третий этаж через проемы *L* и *M*. Шахта лифта *J* соединена с подкупольным пространством через отверстие *K*.

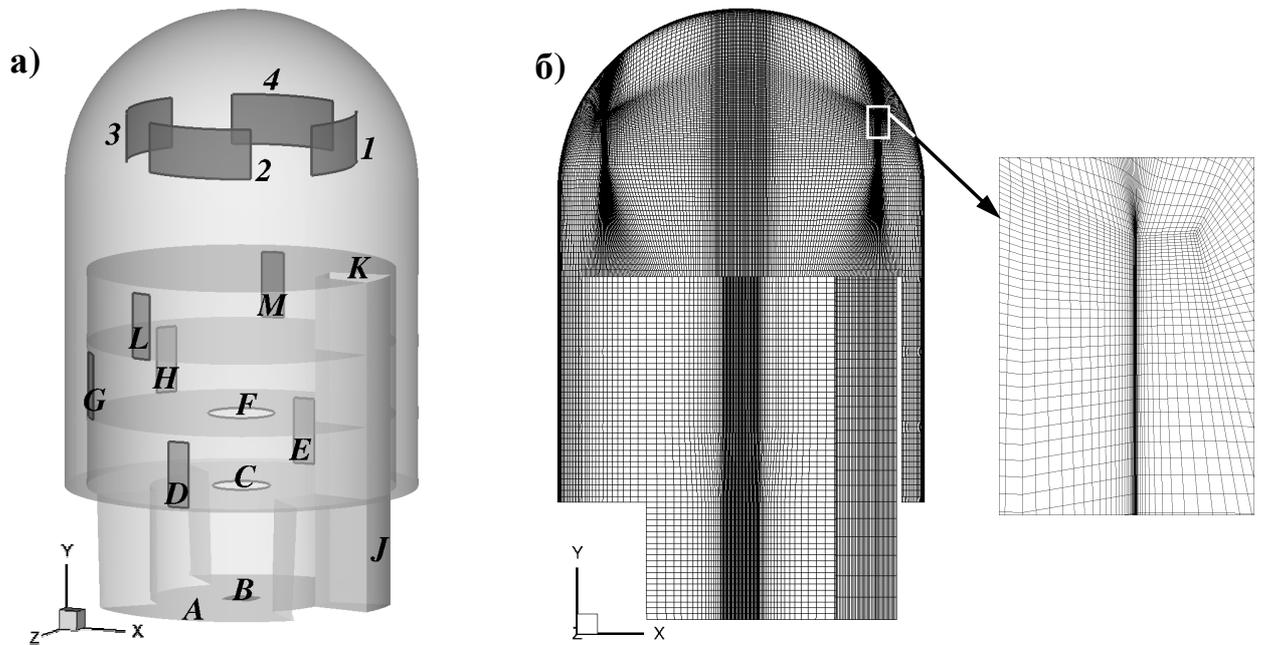


Рисунок 5.54 – Расчетная область (а) и расчетная сетка (б) для стенда КМС

Сечение расчетной сетки показано на рисунке 5.54б. Сетка содержит  $3 \cdot 10^6$  ячеек; для лучшего расчета теплоотдачи сетка сгущена к поверхностям теплосъема, что обеспечивает значение нормированной пристенной координаты  $y^+$  для центра первой (пристенной) ячейки около 1 на поверхности теплообменников и около 3 на внешних стенках КМС. На теплообменниках задавалось условие сопряженного теплообмена с учетом термического сопротивления стенок теплообменника и теплоотдачи в охлаждающую воду. На наружных стенках КМС задавалось условие внешнего теплообмена. Остальные поверхности считаются адиабатическими.

Расчеты проводились с учетом возможной конденсации пара как в объеме, так и на охлаждаемых поверхностях (со стеканием пленки конденсата); использовалась модель турбулентности  $k-\varepsilon$  [157]. Масса воздуха в расчетной области отвечает нормальным условиям (до подачи пара). В данном расчете основной интерес представлял не процесс накачки давления, а установившийся режим работы системы пассивного отвода тепла, поэтому расчет стартовал не с нормальных условий, а с ожидаемого уровня температуры и влажности (и, соответственно, давления).

Полученные результаты демонстрируют существенную нестационарность течения и некоторую асимметрию поступления пара в подкупольное пространство, связанную с ориентацией проемов. В качестве иллюстрации на рисунке 5.55 показаны линии тока, окрашенные по значениям локальной температуры, и мгновенное поле массовой доли пара в среднем сечении расчетной области. Можно отметить довольно хорошее перемешивание среды почти по всему объему стенда КМС. Вместе с тем, сложные и довольно хаотичные линии тока свидетельствуют о наличии крупных вихревых структур, которые могут перемещаться в области, создавая пульсации теплового потока на теплообменниках (в расчете амплитуда этих пульсаций составляла около 10%).

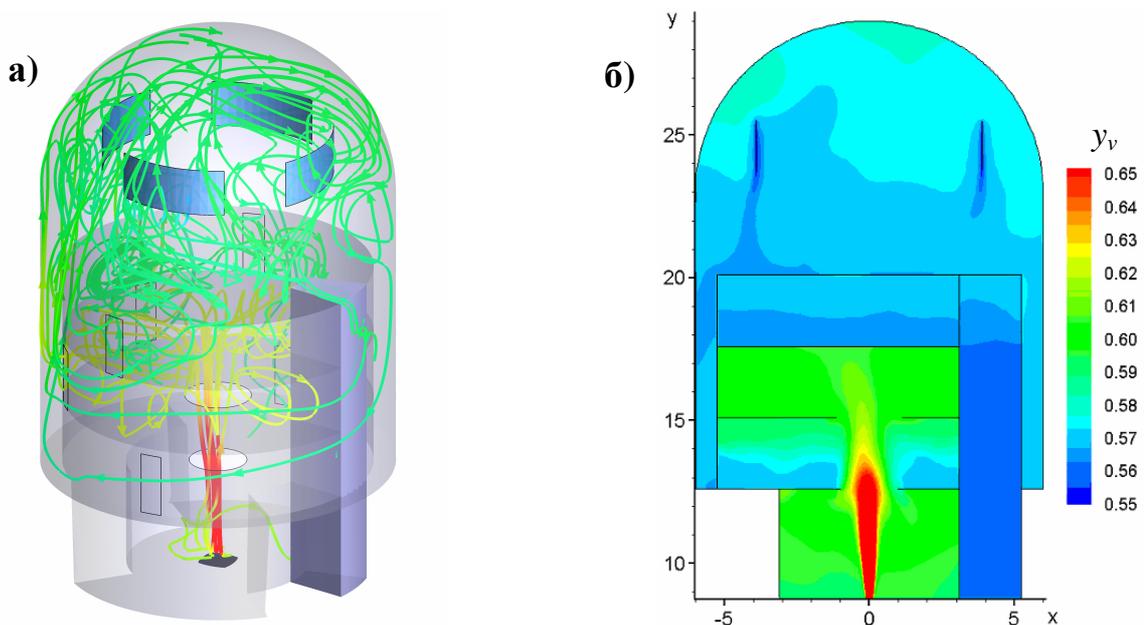


Рисунок 5.55 – Расчет течения в стенде КМС: а) линии тока, б) поле массовой доли пара

В таблице 10 представлены расчетные и экспериментальные данные по уровню давления и температуры в защитной оболочке, а также по средней мощности теплосъема для каждого теплообменника. Наряду с данными расчета по коду ПГС-ТК [20] приведены результаты аналогичного расчета, выполненного с помощью коммерческого пакета Star-CD<sup>1</sup>. В целом расчетные данные, полученные с помощью

<sup>1</sup> Расчеты с помощью пакета Star-CD выполнены сотрудниками СПБАЭП.

двух кодов, неплохо согласуются между собой и с экспериментальными данными. Небольшие отличия в распределении тепловых потоков по теплообменникам обусловлены разной конфигурацией межбоксовых проемов (о чем стало известно после проведения расчета по коду ПГС-ТК). Отличие в суммарной снимаемой мощности, как и в уровне давления, составляет около 5%.

Таблица 10 – Экспериментальные и расчетные данные для стенда КМС

Параметр		Эксперимент	ПГС-ТК	Star-CD
Мощность, снимаемая теплообменниками, кВт	1	82±3	76	74
	2	79±3	71	78
	3	79±3	80	79
	4	77±3	74	79
Давление в защитной оболочке, кПа		374±2	352	370
Температура в защитной оболочке, °С		122±2	117.5	119.9

В настоящее время код ПГС-ТК используется в СПБАЭП для моделирования тепломассопереноса (включая транспорт водорода) и анализа эффективности работы различных вариантов системы пассивного отвода тепла с целью оценки безопасности АЭС в условиях возможной аварии.

## Заключение

В диссертации получены следующие основные результаты.

1) Разработаны математические модели для описания различных классов течений, таких как: до- и сверхзвуковые течения газа и несжимаемой жидкости, течения с дисперсными частицами, течения в областях с изменяющейся геометрией, свободная и смешанная конвекция многокомпонентной парогазовой смеси при наличии конденсации, течения жидкости со свободной поверхностью.

Основу математической модели составляют общие уравнения баланса массы, импульса и энергии в потоке вязкой жидкости переменной плотности – уравнения Навье-Стокса. В случае турбулентного течения для замыкания уравнений используется одна из полуэмпирических моделей турбулентности. Для моделирования специальных классов течений привлекаются: метод пробных частиц (Лагранжево описание дисперсной фазы), модель диффузионного массопереноса и равновесной конденсации в многокомпонентной среде, метод деформируемых расчетных сеток, метод VOF (Volume of Fluid).

2) Разработаны численные схемы и алгоритмы, с помощью которых сформулированные математические модели реализованы в виде комплекса программ SINF для решения широкого круга задач гидрогазодинамики и тепломассопереноса с использованием блочно-структурированных расчетных сеток, «вписанных» в границы области течения. Аппроксимация определяющих уравнений выполнена по методу конечного объема со вторым порядком точности по времени и пространству. Для решения системы линейных уравнений относительно приращений искомых величин используются эффективные проекционные методы на основе подпространств Крылова. Распараллеливание вычислений осуществлено по технологии MPI с декомпозицией задачи по блокам расчетной сетки.

3) Разработаны программы для создания и модификации расчетных сеток, а также для визуализации и анализа результатов расчета. Наличие собственных средств пре- и постпроцессинга в составе программного комплекса (ПК) SINF обеспечило эффективное использование комплекса задолго до появления в России доступных аналогов.

4) В ходе отработки и совершенствования численных схем и алгоритмов ПК SINF предложены оригинальные элементы разработанной численной методики, такие как:

– эффективный алгоритм обеспечения баланса массы в потоках несжимаемой жидкости и низкоскоростных потоках газа, основанный на комбинации метода искусственной сжимаемости и метода SIMPLEC;

– метод постановки граничных условий (обобщенные пристенные функции), обеспечивающий снижение зависимости результатов расчета турбулентных течений от густоты сетки в пристенной области;

– метод аппроксимации конвективной части уравнений гидродинамики, обеспечивающий более высокую точность расчета течений жидкости со свободной поверхностью в методе VOF по сравнению с традиционными схемами;

– эффективный безытерационный алгоритм деформации структурированной сетки в соответствии с перемещением ограничивающих поверхностей для проведения расчетов в областях с изменяющейся геометрией;

– алгоритм разбивки блочно-структурированной сетки на подблоки для проведения вычислений в параллельном режиме на заданном числе процессоров.

5) Проведено систематическое тестирование математической модели и численной методики ПК SINF путем сравнения результатов решения модельных задач с известными аналитическими решениями, с имеющимися в литературе «эталонными» численными решениями, с результатами расчета по другим кодам (в частности, ANSYS Fluent), с данными измерений.

6) Выполнены исследовательские расчеты течения и теплопереноса в модельных конфигурациях (колебание тел в потоке, натекание потока на препятствие и др.) для лучшего понимания структуры исследуемых потоков и выявления присущих им особенностей и закономерностей. В частности, посредством математического (численного) моделирования:

– впервые показано, что значимый эффект энергоразделения в вихревой трубе (эффект Ранка) может иметь место при ламинарном режиме течения;

– обнаружено, что при натекании жидкости на препятствие возможно образование обширных отрывных зон в придонной области течения, которые приводят к значительным искажениям формы свободной поверхности, наблюдаемым в эксперименте.

7) С помощью ПК SINF по заказам промышленных предприятий выполнены расчеты сложных трехмерных течений в проточных частях турбомашин (входной тракт, регулирующие клапаны, лопаточные решетки, выхлопной патрубков) с целью оценки их аэродинамической эффективности. Проведен глубокий анализ структуры течения, выявлены основные источники потерь. В ряде случаев выработаны конкретные

рекомендации по изменению геометрии проточной части для снижения потерь давления.

8) Проведено численное моделирование течения и тепломассопереноса в элементах энергетических устройств для более достоверной оценки их надежности и безопасности. В частности, исследованы особенности охлаждения тепловыделяющих элементов при естественной вентиляции сухого хранилища отработанного ядерного топлива. Выполнено моделирование течения и конденсации пара в защитной оболочке энергоблока АЭС для анализа работы системы пассивного отвода тепла в условиях возможной аварии.

Наиболее перспективными направлениями дальнейшего развития программного комплекса SINF представляются: переход к использованию неструктурированных расчетных сеток; дальнейшее повышение вычислительной эффективности кода SINF (в частности, реализация многосеточного метода решения системы линейных уравнений для приращений искомых величин); расширение класса решаемых задач (например, внедрение моделей горения и переноса тепла излучением).

### Список обозначений

$A, b$  – матрица системы алгебраических уравнений и ее правая часть ( $A \cdot X = b$ );

$C_p, C_v$  – удельная теплоемкость при постоянном давлении/объеме, Дж/(кг·К);

$d$  – кратчайшее расстояние до стенки, м;

$F = F^* + F_h$  – вектор плотности распределения объемной силы, м/с<sup>2</sup>;

$F_h = -\nabla\Pi$  – потенциальная часть объемной силы, м/с<sup>2</sup>;

$F_m \equiv \int_{S_m} \mathbf{n} \cdot (\rho \mathbf{V}\phi - \Gamma \nabla\phi) dS$  – поток величины  $\phi$  через грань ячейки расчетной сетки;

$\mathbf{g}$  – ускорение силы тяжести (вектор), м/с<sup>2</sup>;

$h, H = h + V^2/2$  – статическая и полная удельная энтальпия, Дж/кг;

$J = \det(\partial\xi/\partial\mathbf{r})$  – Якобиан преобразования координат;

$k$  – удельная кинетическая энергия турбулентных пульсаций, м<sup>2</sup>/с<sup>2</sup>;

$\mathbf{n}$  – вектор (орт) нормали;

$p, p^* = p - p_h$  – абсолютное и модифицированное (избыточное) давление, Па;

$p_h$  – характерное гидростатическое (равновесное) давление ( $\nabla p_h \equiv \rho_h \mathbf{F}_h$ ), Па;

$Pr = \mu \cdot C_p / \lambda$  – число Прандтля;

$\mathbf{q}$  – вектор плотности диффузионного потока тепла (теплопроводность), Вт/м<sup>2</sup>;

$Q_m, Q^{(i)}$  – поток массы (расход) через грань ячейки расчетной сетки, кг/с;

$R$  – газовая постоянная, Дж/(кмоль·К);

$R(X)$  – вектор невязок;

$\mathbf{r} = (x_1, x_2, x_3)$  – радиус-вектор (декартовы координаты), м;

$S = 0.5(\nabla\mathbf{V} + (\nabla\mathbf{V})^T)$  – тензор скоростей деформации;

$S_m, S^{(i)}$  – вектор площади грани ячейки расчетной сетки, м<sup>2</sup>;

$T$  – абсолютная температура, К;

$t$  – время, с;

$u_\tau = \sqrt{\tau_w / \rho}$  – «скорость трения» (пристенный масштаб скорости), м/с;

$U$  – касательная составляющая скорости относительно стенки;

$\mathbf{V}$  – вектор скорости потока, м/с;

$X, x$  – вектор решения (совокупность значений во всех расчетных точках);

$y^+ = \rho u_\tau d / \mu$  – нормированная пристенная координата;

$\beta = -(\partial\rho/\partial T)/\rho$  – коэффициент объемного теплового расширения жидкости;

$\beta$  – коэффициент искусственной сжимаемости;

$\gamma = C_p/C_v$  – показатель адиабаты;

$\Gamma$  – коэффициент переноса (диффузии) величины  $\phi$ ;

$\Delta\tau$  – шаг по псевдовремени в методе установления;

$\Delta\phi, \Delta X$  – вектор приращения решения на текущей итерации;

$\varepsilon$  – скорость диссипации кинетической энергии турбулентности,  $\text{м}^2/\text{с}^3$ ;

$\kappa \approx 0.41$  – константа Кармана;

$\lambda$  – коэффициент теплопроводности,  $\text{Вт}/(\text{м}^2 \cdot \text{К})$  ;

– собственные значения;

$\Lambda$  – дискретный оператор (матрица) пространственной части уравнения переноса;

$\mu, \nu$  – динамический (Па·с) и кинематический ( $\text{м}^2/\text{с}$ ) коэффициент вязкости,;

$\xi = (\xi_1, \xi_2, \xi_3) = (i, j, k)$  – индексные «координаты»;

$\xi$  – координата вдоль индексной линии, м;

$\rho$  – плотность,  $\text{кг}/\text{м}^3$ ;

$\rho_h$  – характерная «гидростатическая» плотность,  $\text{кг}/\text{м}^3$ ;

$\tau$  – тензор напряжений;

$\tau_w$  – напряжение трения на стенке, Па;

$\phi$  – переносимая потоком величина;

$\Phi$  – источник в уравнении переноса величины  $\phi$ ;

$\Omega$  – объем ячейки расчетной сетки,  $\text{м}^3$ ;

$\omega$  – вектор угловой скорости вращения системы отсчета,  $1/\text{с}$ ;

$\omega$  – характерная частота турбулентных пульсаций в  $k$ - $\omega$  моделях турбулентности,  $1/\text{с}$ ;

#### Нижние индексы:

$\log$  – «логарифмическая» область пристенного течения;

$m$  – значение в центре  $m$ -й грани ячейки сетки;

$p$  – значение в центре ячейки;

$T$  – турбулентный;

$vis$  – вязкий подслой;

$w$  – значение на стенке;

$1$  – значение в первой (ближайшей к стенке) расчетной точке;

#### Верхние индексы:

$(i)$  – относящийся к индексному направлению  $\xi_i$  (или к соответствующей грани ячейки);

$n$  – номер текущей итерации, для которой все величины известны;

$N$  – номер текущего временного слоя, на котором решение известно.

## Список литературы

### *Публикации автора по теме диссертации*

1. Baranov, V.A. The Ranque's effect in a laminar flow / V.A. Baranov, E.M. Smirnov, Yu.A. Vikultsev, D.K. Zaitsev // *Journal of Engineering Thermophysics*. – 1996. – Vol. 6, No. 4. – P. 291-306.
2. Zaitsev D.K., Smirnov E.M. Effect of compressibility on vortex breakdown in a gas flow in a circular tube // *Fluid Dynamics*. – 1996. – Vol. 31, Issue 5. – P. 661-665. [Оригинал: Влияние сжимаемости на разрушение вихря при течении газа по круглой трубе / Д.К. Зайцев, Е.М. Смирнов // *Изв. РАН. Механика жидкости и газа*. – 1996. – № 5. – С. 37-43].
3. Агафонов, Б.Н. Турбулентный поток в регулирующих клапанах паровых турбин: возможности численного моделирования в условиях реальной геометрии / Агафонов Б.Н., Д.К. Зайцев, А.И. Кириллов, В.Г. Колыванов, В.В. Рис, Е.М. Смирнов // *Известия РАН. Энергетика*. – 2000. – № 3. – С. 39-46.
4. Kirillov, A.I. Numerical simulation of local heat transfer in rotating two-pass square channels / A.I. Kirillov, V.V. Ris, E.M. Smirnov, D.K. Zaitsev // *Annals of the New York Academy of Sciences*. – 2001. – Vol. 934. – P. 456-463.
5. Смирнов, Е.М. Метод конечных объемов в приложении к задачам гидрогазодинамики и теплообмена в областях сложной геометрии / Е.М. Смирнов, Д.К. Зайцев // *Научно-технические ведомости Санкт-Петербургского технического университета*. – 2004. – № 2 (36). – С. 70-81.
6. Smirnov, E. Computations of internal flows using an artificial-compressibility solver enhanced with an elliptic pressure-correction procedure / E. Smirnov, D. Zaitsev // *ECCOMAS 2004 – European Congress on Computational Methods in Applied Sciences and Engineering*. – 13 p. (URL: <http://www.mit.jyu.fi/eccomas2004/proceedings/pdf/161.pdf>)
7. Blinov, M.A. Natural and mixed convection heat transfer of a cooling air in fissile material and spent fuel storage facilities / M.A. Blinov, M.E. Lebedev, I.S. Mukhina, L.A. Feldberg, B.S. Fokin, D.K. Zaitsev, E.L. Kitanin, V.Yu. Mityakov, V.V. Ris, E.M. Smirnov, Yu.S. Chumakov et al. // *Heat Transfer Research*. – 2005. – Vol. 36, No. 4. – P. 295-309.
8. Зайцев, Д.К. Применение деформируемых сеток для численного моделирования течений в областях с подвижными границами / Д.К. Зайцев, Н.А. Щур // *Научно-технические ведомости СПбГТУ*. – 2006. – № 5/1 (47). – С. 15-22.
9. Зайцев, Д.К. Опыт параллелизации вычислений при расчете отрывных течений на основе трехмерных нестационарных формулировок / Д.К. Зайцев, Е.М. Смирнов, П.Е.

Смирнов, Н.А. Щур, С.А. Якубов // Вычислительные методы и программирование. – 2007. – Т. 8, № 1. – С. 99-106.

10. Ermolaev, V.V. Development of elements for the modernized flow path of a T-100-12.8 steam turbine by the methods of computational aerodynamics / V.V. Ermolaev, N.N. Gudkov, A.N. Babiev, V.I. Kirillov, S.A. Koshelev, D.K. Zaitsev, V.V. Ris, E.M. Smirnov // Thermal Engineering. – 2007. – Vol. 54, No. 4. – P. 276-281. [Оригинал: Отработка элементов модернизированной проточной части паровой турбины Т–100–12,8 средствами вычислительной аэродинамики / В.В. Ермолаев, Н.Н. Гудков, А.Н. Бабиев, В.И. Кириллов, С.А. Кошелев, Д.К. Зайцев, В.В. Рис, Е.М. Смирнов // Теплоэнергетика. – 2007. – № 4. – С. 22-27].

11. Кириллов, А.И. Опыт тестовых и параметрических расчетов турбулентного течения через трансзвуковые турбинные решетки / А.И. Кириллов, Д.К. Зайцев, Е.М. Смирнов, С.А. Галаев // Вестник Брянского государственного технического университета. – 2008. – № 2 (18). – С. 72-81.

12. Shchur, N.A. Numerical simulation of turbulent flows for free and forced vibrations of bodies in a flow / N.A. Shchur, D.K. Zaitsev // Heat Transfer Research. – 2008. – Vol. 39. – No. 8. – P. 661-670.

13. Зайцев, Д.К. Моделирование турбулентных течений газозвеси в областях сложной геометрии на основе подхода Лагранжа-Эйлера / Д.К. Зайцев // Научно-технические ведомости СПбГПУ. – 2008. – № 3 (59). – С. 61-67.

14. Зайцев, Д.К. Параллелизация гидродинамических расчетов на блочно-структурированных сетках / Д.К. Зайцев, Е.М. Смирнов, С.А. Якубов // Программные продукты и системы. – 2009. – № 3. – С. 148-150.

15. Zaitsev, D.K. Numerical simulation of 3D turbulent flows around bodies subjected to vortex-induced and forced vibration / D.K. Zaitsev, N.A. Schur, E.M. Smirnov // Lecture Notes in Computational Science and Engineering. – 2009. – Vol. 67. – P. 347-354.

16. Khrabry, A.I. Solving the convective transport equation with several high-resolution finite volume schemes. Test computations / A.I. Khrabry, E.M. Smirnov, D.K. Zaitsev // In: Computational Fluid Dynamics 2010. – Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 2011. – 954p. – P. 535-540.

17. Зайцев, Д.К. Комплекс программ для создания блочно-структурированных сеток / Д.К. Зайцев, П.Е. Смирнов, С.А. Якубов, М.Е. Балашов // Программные продукты и системы. – 2012. – № 2. – С. 32-35.

18. Храбрый, А.И. Влияние модели турбулентности на результаты расчета обтекания препятствия потоком воды после обрушения дамбы / А.И. Храбрый, Е.М. Смирнов, Д.К. Зайцев // Научно-технические ведомости СПбГПУ. – 2013. – № 1 (165). – С. 182-187.

19. Храбрый, А.И. Численное моделирование течений со свободной поверхностью на основе метода VOF / А.И. Храбрый, Д.К. Зайцев, Е.М. Смирнов // Труды ЦНИИ им. акад. А.Н.Крылова. – 2013. – Вып. 78 (362). – С. 53-64.
20. Zaitsev, D.K. Numerical modeling of steam-gas flow in NPP containment with VVER and passive heat removal / D.K. Zaitsev, E.M. Smirnov, A.A. Smirnovskii, V.V. Bezlepkin, M.A. Zatevakhin, O.I. Simakova, S.E. Semashko, R.A. Sharapov // Atomic Energy. – 2014. – Vol. 115, No. 4. – P. 246-252. [Оригинал: Численное моделирование течения парогазовой смеси в защитной оболочке при пассивном отводе тепла / Д.К. Зайцев, Е.М. Смирнов, А.А. Смирновский, В.В. Безлепкин, М.А. Затевахин, О.И. Симакова, С.Е. Семашко, Р.А. Шарапов // Атомная энергия. – 2013. – Т. 115, Вып. 4. – С. 197-200].
21. Баранов, В.А. Экспериментальное и численное моделирование трехмерной циркуляции парогазовой среды при ее струйном истечении в подкупольное пространство контейнента / В.А. Баранов, Ю.А. Викульцев, Д.К. Зайцев, В.В. Рис, Е.М. Смирнов // Препринт ЭНИЦ N L-14-06-95. – Электрогорск. – 1995. – 21 с.
22. Zaitsev, D. Numerical simulation of turbulent particle-laden flows using lagrangian modelling of dispersed phase behaviour / D. Zaitsev // Report of the grant «Research in Brussels-95». – VUB, Brussels, 1996. – 114 p.
23. Зайцев, Д.К. Об условиях возникновения возвратного течения в неизотермическом закрученном потоке газа / Д.К. Зайцев, Е.М. Смирнов // В кн: Процессы горения и охрана окружающей среды. Сб. трудов РГАТА, Ч.1. – Рыбинск, 1997. – с.19-22.
24. Зайцев, Д.К. Метод пробных частиц в приложении к расчету течений газа с частицами / Д.К. Зайцев // В кн.: «Внутрикамерные процессы, горение и динамика дисперсных систем» (Сб. материалов 2-й международной школы-семинара, Санкт-Петербург, 30 июня - 5 июля 1997г.). – СПб.: БГТУ, 1997. – 190 с. – С. 107-109.
25. Кувайцева, И.Р. О проектировании входных трактов ГПА "Нева-16" и "Нева-25" на основе численного моделирования пространственных течений / И.Р. Кувайцева, С.Х. Сизова, В.М. Юрочкин, Д.К. Зайцев, А.И. Кириллов, В.В. Рис, Э.А. Рудинский, Е.М. Смирнов // Турбины и компрессоры. – 1998. – Вып. 6,7. – С. 5-13.
26. Agaphonov, V.N. Simulation of 3D turbulent flow through steam-turbine control valve / V.N. Agaphonov, V.D. Goryachev, V.G. Kolyvanov, V.V. Ris, E.M. Smirnov, D.K. Zaitsev // In: Finite Volumes for Complex Applications II. – Hermes Sci. Publ., Paris, 1999. – 889 p. – P. 743-750.
27. Зайцев, Д.К. Численное моделирование турбулентных отрывных течений газа в осерадиальных диффузорах турбомашин / Д.К. Зайцев, М.А. Николаев, В.В. Рис, Е.М. Смирнов // В кн.: Совершенствование турбоустановок методами математического и физического моделирования (Труды международной научно-техн. конф., Харьков, 18-22 сентября 2000г.). – Харьков. – 2000. – С. 257-264.

28. Epiphanov, V.K. Effect of deflector vane geometry on performance of large-scale turbine exhaust hood at transonic flow conditions: air-test experiments and 3D numerical simulation / V.K. Epiphanov, V.D. Gaev, A.S. Lisyanskiy, A.I. Kirillov, M.A. Nikolaev, E.M. Smirnov, D.K. Zajtsev // Proc. 5-th European Conference on Turbomachinery Fluid Dynamics and Thermodynamics, March 17-22, 2003, Prague, Czech Republic. Ed. by: M.Stastny, C.H.Sieverding, G.Bois. – Prague, 2003. – 1238 p. – P. 803-812.

29. Смирнов, Е.М. Применение параллельных вычислений для моделирования турбулентных течений в областях сложной геометрии / Е.М. Смирнов, А.Г. Абрамов, Д.К. Зайцев, Н.Г. Иванов, П.Е. Смирнов, С.А. Якубов // Труды Всероссийской научно-технической конференции «Параллельные вычисления в задачах математической физики», 21-25 июня 2004г., Ростов-на-Дону. – РГУ, 2004. – С. 132-141.

30. Щур, Н.А. Применение метода деформируемых сеток для моделирования автоколебаний цилиндра в однородном потоке / Н.А. Щур, Д.К. Зайцев // Тр. XV школы-семинара молодых ученых и специалистов под руководством акад. РАН А.И. Леонтьева «Проблемы газодинамики и тепломассообмена в энергетических установках», 23 - 27 мая 2005 г., Калуга, т. 1. – М.: Изд. МЭИ, 2005. – С. 125-129.

31. Smirnov, E.M. Modification of wall boundary conditions for Low-Re  $k-\omega$  turbulence models aimed at grid sensitivity reduction / E.M. Smirnov, D.K. Zaitsev // European Conference for Aerospace Sciences, July 4-7, 2005, Moscow (EUCASS 2005), CD-ROM proceedings. – Paper ID 2.09.06. – 7p.

32. Ермолаев, В.В. Применение численного моделирования пространственных течений вязкого газа для совершенствования элементов проточной части ЦВД турбины Т-100-130 / В.В. Ермолаев, Н.Н. Гудков, А.Н. Бабиев, В.И. Кириллов, С.А. Кошелев, Е.М. Смирнов, В.В. Рис, Д.К. Зайцев // Международная науч.-техн. конф. «Совершенствование турбоустановок методами математического и физического моделирования», 19-22 сентября 2006, Харьков, (CD-ROM). – 11 с.

33. Абрамов, А.Г. Вопросы обучения технологиям параллельных вычислений и использования распараллеленных программных средств на удаленных компьютерах / А.Г. Абрамов, В.Д. Горячев, Д.К. Зайцев, Е.М. Смирнов // Электронное издание «Наука и образование».– 2006.– № 9.– 5 с. (URL: <http://technomag.edu.ru/doc/60390.html>).

34. Щур, Н.А. Численное моделирование турбулентных течений для свободных и вынужденных колебаний тел в потоках / Н.А. Щур, Д.К. Зайцев // Труды XVI школы-семинара молодых ученых и специалистов под руководством акад. РАН А.И. Леонтьева «Проблемы газодинамики и тепломассообмена в энергетических установках», 21 - 25 мая 2007 г., С.-Петербург, Т.2. – М.: Изд. МЭИ, 2007. – С.197-200.

35. Fokin, B.S. Simulation of the cooling air heat transfer and convection in the spent nuclear fuel storage / B.S. Fokin, V.N. Fromzel, M.E. Lebedev, M.A. Blinov, D.K. Zaitsev,

E.L. Kitanin, V.V. Ris, E.M. Smirnov, A.G. Fedorov, Yu.S. Chumakov // *Advances in Heat Transfer (Proc. 5<sup>th</sup> Baltic Heat Transfer Conference, 19-21 Sept., 2007, St. Petersburg) [CD-ROM]*. – St. Petersburg. – 2007. – 7p.

36. Zaitsev, D.K. Numerical simulation of 3D turbulent flows around bodies subjected to vortex-induced and forced vibration / D.K. Zaitsev, N.A. Schur, E.M. Smirnov // *Int. Conf on Parallel Computational Fluid Dynamics, May 21-24, 2007, Antalya, Turkey (Parallel CFD 2007)*. CD-ROM Proceedings. – 2007. – Paper ParCFD-2007-072. – 5 p.

37. Зайцев, Д.К. Численное исследование турбулентных течений около колеблющихся тел на основе трехмерных вихре-разрешающих подходов / Д.К. Зайцев, Е.М. Смирнов, Н.А. Щур // *Труды международной научной конференции «Параллельные вычислительные технологии» (ПаВТ'2008, Санкт-Петербург, 28 января – 1 февраля 2008г.)*. – Челябинск: Изд. ЮУрГУ, 2008. – 599 с. – С. 101-106.

38. Zaitsev, D. Visual analysis of turbulent whirl over a cantilevered flexible blade after 3D numerical simulation / D. Zaitsev, N. Schur, E. Smirnov, V. Goryachev // *Proc. 13th Int. Symp. on Flow Visualization (ISFV13), July 1-4, 2008, Nice, France*. – Vol.1. – 595p. – P. 309-318.

39. Levchenya, A.M. Numerical simulation of the endwall heat transfer in the Langston cascade / A.M. Levchenya, E.M. Smirnov, D.K. Zaytsev // *Int. Symp. on Heat Transfer in Gas Turbine Systems, 9-14 August, 2009, Antalya, Turkey (Turbine-09)*. CD-ROM proceedings.– Begell House, Redding, 2009. – Paper 9 EW. – 8 p.

40. Зайцев, Д.К. Опыт разработки и верификации 4D-кода для расчетного анализа тепломассообменных процессов при течении парогазовой среды в областях сложной геометрии / Д.К. Зайцев, Е.М. Смирнов, А.А. Смирновский, В.В. Безлепкин, С.Е. Семашко, Р.А. Шарапов // *Труды XIV международной конференции «Супервычисления и математическое моделирование» (г. Саров, 1-5 октября 2012 г.)*. – Саров: ФГУП «РФЯЦ ВНИИЭФ», 2013. – 624 с. – С. 282-292.

41. Зайцев, Д.К. Расчет течений со свободными поверхностями: влияние схемных факторов и модели турбулентности / Д.К. Зайцев, Е.М. Смирнов, А.И. Храбрый // *Труды XIV международной конференции «Супервычисления и математическое моделирование» (г. Саров, 1-5 октября 2012 г.)*. – Саров: ФГУП «РФЯЦ ВНИИЭФ», 2013. – 624 с. – С. 292-301.

42. Khrabry, A.I. Numerical study of wall friction effects on dam-break flows in the presence of an obstacle / A.I. Khrabry, E.M. Smirnov, D.K Zaytsev // *6<sup>th</sup> European Conference on Computational Fluid Dynamics (ECFD VI), Barcelona, Spain, July 20-25, 2014*. – Paper A2973. – 2p. (URL: <http://www.wccm-ecfd2014.org/admin/files/fileabstract/a2973.pdf>)

43. Храбрый, А.И. Численное моделирование нестационарного натекания потока воды на один и два ряда трехмерных препятствий / А.И. Храбрый, Д.К. Зайцев, Е.М.

Смирнов, В.Д. Горячев // Труды международной суперкомпьютерной конференции «Научный сервис в сети Интернет: многообразие суперкомпьютерных миров», Новороссийск, 22-27 сентября 2014. – М.: Изд-во МГУ, 2014. – 497с. – С.388-394.

44. Смирнов, Е.М. Опыт разработки суперкомпьютерных кодов для решения сложных задач теплогидродинамики в объектах ядерной энергетики / Е.М. Смирнов, Д.К. Зайцев, А.А. Смирновский // Межотраслевая научно-практическая конференция «Суперкомпьютерные технологии в промышленности – 2014», 17 октября 2014, Санкт-Петербург. Сборник докладов. – СПб.: Изд-во Крыловского научного центра, 2014. – 96 с. – С.45-55.

45. Зайцев, Д.К. Расчет течения и теплоотдачи в турбулентных потоках с локализованными отрывными областями на основе метода обобщенных пристенных функций / Д.К. Зайцев, Е.М. Смирнов // Труды Шестой Российской национальной конференции по теплообмену (РНКТ-6) (27-31 октября 2014, Москва). [CD-ROM]. – М.: МЭИ, 2014. – ID C1-17. – 4 с.

46. Khrabry, A. Numerical study of separation phenomena in the dam-break flow interacting with a triangular obstacle / A. Khrabry, E. Smirnov, D. Zaytsev, V. Goryachev // 16th Int. Conference on Modelling Fluid Flow (CMFF'15), Budapest, Hungary, September 1-4, 2015. [CD-ROM]. Paper CMFF15-144. – 8 p.

### *Прочие публикации*

47. Абрамов, А.Г. Метод моделирования крупных вихрей в приложении к задачам турбулентной конвекции в подогреваемых снизу емкостях: варианты и возможности : дис. канд. физ.-мат. наук : 01.02.05 / Абрамов Алексей Геннадьевич. – СПб., СПбГПУ, 2003. – 219 с.

48. Абрамов А.Г., Смирнов Е.М. Численное моделирование турбулентной конвекции воздуха в подогреваемой сбоку полости квадратного сечения // Теплофизика высоких температур, 2006. Т. 44, №1, С. 90-97.

49. Аликина, О.Н. Гидродинамика и теплообмен в вихревой трубке Ранка-Хилша : дис. ... канд. физ.-мат. наук : 01.02.05 / Аликина Ольга Николаевна. – Пермь, ПГУ, 2003. – 122с.

50. Венедиктов, В.Д. Атлас экспериментальных характеристик плоских решеток охлаждаемых газовых турбин / В.Д.Венедиктов, А.В.Грановский. – ЦИАМ, 1990. – 393с.

51. Владимирова, Н.М. Численный расчет симметричного обтекания пластинки плоским потоком вязкой несжимаемой жидкости / Н.М. Владимирова, Б.Г. Кузнецов, Н.Н. Яненко // Некоторые вопросы вычислительной и прикладной математики. – Новосибирск, 1966. – С.186-192.

52. Воеводин, В.В. Параллельные вычисления / В.В. Воеводин, Вл.В. Воеводин. – СПб.: БХВ-Петербург, 2002. – 608 с.
53. Волков, Э.П. Моделирование горения твердого топлива / Э.П. Волков, Л.И. Зайчик, В.А. Першуков. – М.: Наука, 1994. – 320 с.
54. Волков, А.Н. Влияние моно- и полидисперсной примеси на течение и теплообмен при сверхзвуковом обтекании затупленного тела потоком газозвеси / А.Н. Волков, Ю.М. Циркунов, В.В. Семёнов // Математическое моделирование, 2004, т.16, №7, С.6-12.
55. Волков, К.Н. Вычислительные технологии в задачах механики жидкости и газа / К.Н. Волков, В.Н. Емельянов. – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2012. – 468 с.
56. Галаев, С.А. Численное моделирование течения вязкого газа в решетках осевых турбомашин: методика и результаты применения современных программных средств : дис. ... канд. техн. наук : 05.04.12 / Галаев Сергей Александрович. – СПб., СПбГПУ, 2006. – 166 с.
57. Гарбарук, А.В. Моделирование турбулентности в расчетах сложных течений: учебное пособие / А.В. Гарбарук, М.Х. Стрелец, М.Л. Шур. – СПб.: Изд-во Политехн. ун-та, 2012. – 88 с.
58. Голованов, Н.Н. Геометрическое моделирование. – М.: Физматлит, 2002, 472 с.
59. Головизнин, В.М. Новые алгоритмы вычислительной гидродинамики для многопроцессорных вычислительных комплексов: Монография / В.М. Головизнин, М.А. Зайцев, С.А. Карабасов, И.А. Короткин. – Изд-во Московского университета, 2013. – 472 с. – (Серия «Суперкомпьютерное образование»).
60. Голуб, Дж. Матричные вычисления / Дж. Голуб, Ч. Ван Лоун. – М.: Мир, 1999. – 553 с.
61. Горячев, В.Д. Распределенная информационно-вычислительная система моделирования методами вычислительной гидродинамики / В.Д. Горячев, М.Е. Балашов, Д.С. Рыков, Е.М. Смирнов // Программные продукты и системы. – 2004, №3. – С. 2-7.
62. Гуцол, А.Ф. Эффект Ранка // Успехи физических наук. – 1997. – т.167, №6. – С. 665-687.
63. Дейч, М.Е. Газодинамика решеток турбомашин. – М.: Атомиздат, 1996. – 528с.
64. Дейч, М.Е. Газодинамика диффузоров и выходных патрубков турбомашин / М.Е. Дейч, А.Е. Зарянкин. – М.: Энергия, 1970. – 384 с.
65. Зарянкин, А.Е. Новые регулирующие клапаны паровых турбин, их характеристики и опыт эксплуатации / А.Е. Зарянкин, Б.П. Симонов // Теплоэнергетика. – 1996. – № 1. – С. 18-22.
66. Зарянкин, А.Е. Аэродинамические принципы проектирования регулирующих клапанов паровых турбин / А.Е. Зарянкин, В.И. Черноштан // Теплоэнергетика. – 1997. – № 1. – С. 51-54.

67. Иванов, Н.Г. Трехмерная нестационарная конвекция в емкостях, вращающихся вокруг вертикальной оси: Численное моделирование для малых чисел Прандтля : дис. ... канд. физ.-мат. наук : 01.02.05 / Иванов Николай Георгиевич. – СПб., СПбГТУ, 2000. – 218 с.
68. Иванов, Н.Г. Численное моделирование трехмерной нестационарной конвекции расплава кремния в емкости, типичной для установок метода Чохральского / Н.Г. Иванов, Е.М. Смирнов // Инженерно-физический журнал. – 2002. – Т. 75, №3. – С. 63-69.
69. Иванов, Н.Г. Расчет трехмерного течения и теплообмена в экспериментальной модели решетки рабочих лопаток на основе одно- и двухпараметрических моделей турбулентности / Н.Г. Иванов, А.М. Левченя, В.В. Рис, Е.М. Смирнов // Тр. Третьей Российской национальной конференции по теплообмену (РНКТ 3). Том 2. – М.: Изд-во МЭИ, 2002. – С.147-150.
70. Иванов, Н.Г. Численное моделирование трехмерного течения и теплообмена в трансзвуковой турбинной решетке на основе модели турбулентности Спаларта-Аллмараса / Н.Г. Иванов, М.А. Николаев, Д.С. Тельнов // Тр. XIV школы-семинара под руководством акад. РАН А.И. Леонтьева «Проблемы газодинамики и тепломассообмена в энергетических установках». Том 2. – М.: Изд-во МЭИ, 2003. – С.70-73.
71. Идельчик, И.Е. Справочник по гидравлическим сопротивлениям. – М.: Машиностроение, 1975. – 559 с.
72. Идельчик, И.Е. Аэрогидродинамика технологических аппаратов. – М.: Машиностроение, 1983. – 351 с.
73. Кириллов, А.И. Численное моделирование турбулентного течения и теплообмена в трубе с ленточным завихрителем / А.И. Кириллов, В.В. Рис, Е.М. Смирнов // Тр. 2-ой Российской национальной конференции по теплообмену (РНКТ-2). Том 6. – М.: Изд. МЭИ, 1998. – С.132-136.
74. Китанина, Е.Э. Численное моделирование течения и теплообмена при свободной и смешанной конвекции в быстровращающихся кольцевых полостях : дис. ... канд. техн. наук : 01.04.14 / Китанина Екатерина Эдуардовна. – СПб., СПбГТУ, 2002. – 154 с.
75. Колыванов, В.Г. Регулирующий клапан паровой турбины / В.Г. Колыванов, Б.Н. Агафонов // Патент № 2109143, Роспатент, 1998. – 15 с.
76. Лапин, Ю.В. Внутренние течения газовых смесей / Ю.В. Лапин, М.Х. Стрелец. – М: Наука, 1989. – 368 с.
77. Левченя, А.М. Численное исследование трехмерного течения и теплообмена в месте сопряжения цилиндрических тел с пластиной и в приторцевых областях турбинных решеток : дис. ... канд. физ.-мат. наук : 01.02.05 / Левченя Александр Михайлович. – СПб., СПбГПУ, 2010. – 142 с.
78. Левченя, А.М. Тестирование моделей турбулентности применительно к расчетам трехмерного течения и торцевого теплообмена в решетках утолщенных сопловых

лопатонок / А.М. Левченя, В.В. Рис, Е.М. Смирнов // Тр. 4-й Российской национальной конференции по теплообмену (РНКТ-4). Том 2. – М.: Изд-во МЭИ, 2006. – С. 167-170.

79. Лойцянский, Л.Г. Механика жидкости и газа. – М.: Наука, 1987. – 840 с.

80. Мигай, В.К. Проектирование и расчет выходных диффузоров турбомашин / В.К. Мигай, Э.И. Гудков. – Л.: Машиностроение, 1981. – 272 с.

81. Михайлова, Н.П. Исследование теплообмена и аналогии Рейнольдса в турбулентном пограничном слое при высоком уровне турбулентности набегающего потока / Н.П. Михайлова, Е.У.Репик, Ю.П. Соседко // Известия РАН. Механика жидкости и газа. – 2000. – № 2. – С. 61-71.

82. Меркулов, А.П. Вихревой эффект и его применение в технике. – М.: Машиностроение, 1969. – 183 с.

83. Мигров, Ю.А. Экспериментальное исследование внутриконтентейментных процессов и пассивных систем безопасности проекта АЭС-2006 на стенде КМС / Ю.А. Мигров, В.К. Ефимов, В.К. Засуха и др. // В сб.: 6-я Международная научно-техническая конференция «Обеспечение безопасности АЭС с ВВЭР» (26-29 мая 2009г., Подольск). – Подольск: ОКБ «Гидропресс», 2009. – 145с., С. 62.

84. Мутуль, В.В. Причины вибрации регулирующих клапанов паровых турбин // Труды ЦКТИ. – 1986. – Вып. 149. – С. 19-26.

85. Нигматулин, Р.И. Основы механики гетерогенных сред. – М.: Наука, 1978. – 336с.

86. Николаев, М.А. Сочетание CUSP схемы с методом масштабирования сжимаемости при расчете трансзвуковых течений в областях сложной геометрии // Тр. XIII Школы-семинара молодых ученых и специалистов под руководством акад. РАН А.И. Леонтьева. – М.: Изд-во. МЭИ, 2001, Том 1. – С. 108-111.

87. Николаев, М.А. Численное моделирование трансзвуковых пространственных течений вязкого газа в проточных частях турбомашин на основе CUSP схемы : дис. ... канд. физ.-мат. наук : 01.02.05 / Николаев Максим Александрович. – СПб., СПбГПУ, 2006. – 177 с.

88. Пархимович, А. Ю. Имитационное моделирование температурной стратификации закрученных потоков в вихревых хладогенераторах : дис. ... канд. техн. наук : 05.04.13 / Пархимович Александр Юрьевич. – Уфа, УГАТУ, 2008. – 124с.

89. Патанкар, С. Численные методы решения задач теплообмена и динамики жидкости. – М.: Энергоатомиздат, 1984. – 152 с.

90. Пиралишвили, Ш.А. Численное моделирование закрученных течений в вихревых трубах / Ш.А. Пиралишвили, О.В. Казанцева, А.А. Фузеева // Теплофизика высоких температур. – 2005. – Т. 43, № 4. – С. 606-611.

91. Погорелов, С.И. Комплексное исследование и разработка новых регулирующих клапанов паровых турбин с целью повышения их надежности и

экономичности : дис. ... канд. техн. наук : 05.04.12 / Погорелов Сергей Иванович. – М., МЭИ, 1989. – 214 с.

92. Полянский, А.Ф. Моделирование течений жидкости и газа в вихревой трубе и струе / А.Ф. Полянский, Л.И. Скурин // Математическое моделирование. – 2001. – Т.13, №7. – С. 116-120.

93. РД 24.033.03 88. Клапаны регулирующие паровых турбин. Методы повышения надежности. – Л.: НПО ЦКТИ, 1990. – 48 с.

94. Рис, В.В. Смешанная конвекция парогазовой смеси в подкупольном пространстве контейнента / В.В. Рис, Е.М. Смирнов // Тр. 2-ой Российской национальной конференции по теплообмену (РНКТ-2). Т.3. – М.: Изд. МЭИ, 1998. – С. 128-131.

95. Роуч, П. Вычислительная гидродинамика / П. Роуч. – М.: Мир, 1980. – 616 с.

96. Самарский, А.А. Введение в теорию разностных схем. – М.: Наука, 1971, 552с.

97. Смирнов, Е.М. Опыт численного анализа пространственных турбулентных течений в турбомашинах / Е.М. Смирнов, А.И. Кириллов, В.В. Рис // Научно-технические ведомости СПбГПУ. – 2004. – №2 (36). – С. 55-70.

98. Смирнов, П.Е. Численное моделирование трехмерного течения и теплообмена в условиях, типичных для организации пленочного охлаждения : дис. ... канд. физ.-мат. наук : 01.02.05 / Смирнов Павел Евгеньевич. – СПб., СПбГПУ, 2005. – 117 с.

99. Стрелец, М.Х. Метод масштабирования сжимаемости для расчета стационарных течений вязкого газа при произвольных числах Маха / М.Х. Стрелец, М.Л. Шур // Журнал вычислительной математики и математической физики. – 1988. – Т. 28, №2. – С. 254-266.

100. Флетчер, К. Вычислительные методы в динамике жидкости. – М.: Мир, 1991. – Т.1. 502с., Т.2. 552с.

101. Хинце, И.О. Турбулентность. – М.: Физматгиз, 1963. – 680 с.

102. Храбрый, А.И. Численное моделирование нестационарных турбулентных течений жидкости со свободной поверхностью : дис. ... канд. физ.-мат. наук : 01.02.05 : защищена 22.01.15 / Храбрый Александр Иосифович. – СПб., СПбПУ, 2014. – 154 с.

103. Циркунов, Ю.М. Полуэмпирическая модель ударного воздействия дисперсной частицы примеси с поверхностью, обтекаемой потоком газозвеси / Ю.М. Циркунов, С.В. Панфилов, М.Б. Клычников // Инженерно-физический журнал. – 1994. – Т. 67, №5-6. – С. 379-387.

104. Широбоков, Д.А. Метод конечных объемов третьего порядка точности на треугольной сетке // Журнал вычислительной математики и математической физики. – 2011. – Т. 51, № 10. – С. 1918–1930.

105. Шлихтинг, Г. Теория пограничного слоя. – М.: Наука, 1974. – 712 с.

106. Шрайбер, А.А. Турбулентные течения газовзвеси / А.А. Шрайбер, Л.Б. Гавин, В.А. Наумов, В.П. Яценко. – Киев: Наукова думка, 1987. – 240 с.
107. Щур, Н.А. Численное исследование свободных и вынужденных колебаний тел в потоке : дис. ... канд. физ.-мат. наук : 01.02.05 / Щур Николай Алексеевич. – СПб., СПбГПУ, 2007. – 105 с.
108. Якубов, С.А. Метод моделирования отсоединенных вихрей в приложении к задачам отрывного обтекания решеток : дис. ... канд. физ.-мат. наук : 01.02.05 / Якубов Сергей Ансарович. – СПб.: СПбГПУ, 2005. – 143 с.
109. Abramov, A.G. Numerical study of high-Ra Rayleigh-Benard mercury and water convection in confined enclosures using a hybrid RANS/LES technique / A.G. Abramov, N.G. Ivanov, E.M. Smirnov // In: Heat transfer in unsteady and transitional flows (Proc. Eurotherm Seminar, March 23-26, 2003, Eindhoven, the Netherlands). – 2003. – P. 33.
110. Adams, E.W. Experiments on the structure of turbulent reattaching flow / E.W. Adams, J.P. Johnston, J.K. Eaton. – Stanford University. – 1984. – Report MD-43.
111. Balashazy, I. Simulation of particle trajectories in bifurcating tubes // Journal of Computational Physics. – 1994. – Vol. 110, Issue 1. – P. 11-22.
112. Barret, R. Templates for the solution of linear systems: building blocks for iterative methods / R. Barret, M.W. Berry, T.F. Chan et al. – SIAM, Philadelphia. – 1993. – 112 p.
113. Beam, R.M. An implicit factorized scheme for the compressible Navier-Stokes equations / R.M. Beam, R.F. Warming // AIAA Journal. – 1978. – Vol. 16. – P. 393-402.
114. Brackbill, J.U. A continuum method for modeling surface tension / J.U. Brackbill, D.B. Kothe, C. Zemach // Journal of Computational Physics. – 1992. – Vol. 100, No.2. – P. 335-354.
115. Cebeci, T. Physical and computational aspects of convective heat transfer / T. Cebeci, P. Bradshaw. – Berlin: Springer, 1984. – 487 p.
116. Chen, K.H. A diagonally-dominant coupled strongly implicit procedure for 3D viscous flows // In: Computational Fluid Dynamics (Proc. 1<sup>st</sup> Asian CFD Conference, Jan. 16-19, 1995, Hong-Hong). – Hong Kong: Hong Kong University of Science and Technology, 1995. – 1256 p. – P. 325-333.
117. Chien, K.Y. Predictions of channel and boundary-layer flows with a low-Reynolds-number turbulence model // AIAA Journal. – 1982. – Vol.20, No.1. – P. 33-38.
118. Chorin, A.J. A numerical method for solving incompressible viscous flow problems // Journal of Computational Physics. – 1967. – No. 2. – P. 12-26.
119. Crowe, C.T. The particle-source-in cell (PSI-CELL) model for gas-droplet flows / C.T. Crowe, M.P. Sharma, D.E. Stock // Journal of Fluids Engineering. – 1977. – Vol. 99, No. 2. – P. 325-332.

120. De Vahl Davis, G. Natural convection of air in a square cavity: a bench-mark numerical solution // *Int. J. Numerical Methods in Fluids*. – 1983. – Vol. 3. – P. 249-264.
121. Dehby, A. Condensation experiments in steam-air and steam-air-helium mixtures under turbulent natural convection / A. Dehby, M. Golay, M. Kazimi // *AIChE Symposium Series*. – 1991. – Vol. 87, No. 283. – P. 19-28.
122. DiPrima, R.C. Flow between eccentric rotating cylinders / R.C. DiPrima, J.T. Stuart // *Journal of Lubrication Technology (Trans. ASME, Ser. F)*. – 1972. – Vol. 94. – P. 266-274.
123. Durbin, P.A. Separated flow computations with the  $k-\epsilon-v_2$  model // *AIAA Journal*. – 1995. – Vol. 33. – P. 659-664.
124. Dutta, S. Local heat transfer in rotating smooth and ribbed two-pass square channels with three channel orientations / S. Dutta, J.-C. Han // *Journal of Heat Transfer*. – 1996. – Vol. 118, No. 3. – P. 578-584.
125. Eriksson, L.E. Generation of boundary-conforming grids around wing-body configurations using transfinite interpolation // *AIAA Journal*. – 1982. – Vol. 20, No. 10. – P. 1313-1320.
126. Esch, T. Heat transfer predictions based on two-equation turbulence models with advanced wall treatment / T. Esch, F. Menter // In: *Turbulence, Heat and Mass Transfer 4 (Proc. 4th Int. Symp, 12 - 17 October 2003, Antalya, Turkey)*. – Begell House, 2003. – 1208 p. – P. 633-640.
127. Ferziger, J.H. *Computational methods for fluid dynamics* / J.H. Ferziger, M. Peric. – Berlin: Springer, 2002. – 389 p.
128. Ghia, U. High-Re solutions for incompressible flow using the Navier-Stokes equations and a multigrid method / U. Ghia, K.N. Ghia, C.T. Shin // *Journal of Computational Physics*. – 1982. – Vol. 48, No. 3. – P. 387-411.
129. Ghosal S. An analysis of numerical errors in large-eddy simulations of turbulence // *Journal of Computational Physics*, 1996, Vol. 125, No. 1, P. 187–206.
130. Gosman, A.D. Aspects of computer simulation of liquid-fuelled combustors / A.D. Gosman, E. Ioannides // *AIAA Paper 81-0323*. – 1981. – (also: *AIAA Journal of Energy*. – 1983. – Vol. 7, No. 6. – P. 482-490).
131. Graziani, R.A. An experimental study of endwall and airfoil surface heat transfer in a large scale turbine blade cascade / R.A. Graziani, M.F. Blair, J.R. Taylor, R.E. Mayle // *Journal of Engineering for Gas Turbines and Power*. – 1980. – Vol. 102. – P. 257-267.
132. Grotjans, H. Wall functions for industrial applications / H. Grotjans, F.R. Menter // In: *Computational Fluid Dynamics'98*. – ECCOMAS, John Wiley & Sons. 1998. – Vol.1, Part 2. – P. 1112-1117.

133. Hanjalic, K. A robust near-wall elliptic-relaxation eddy-viscosity turbulence model for CFD / K. Hanjalic, M. Popovac, M. Hadziabdic // *Int. J. Heat and Fluid Flow*. – 2004. – Vol. 25. – P. 1047-1051.
134. Hirt, C.W. Volume of fluid (VOF) method for the dynamics of free boundaries / C.W. Hirt, B.D. Nichols // *Journal of Computational Physics*. – 1981. – Vol. 39. – P. 201–226.
135. Hsien, K.J. Numerical modeling of buoyancy-driven turbulent flows in enclosures / K.J. Hsien, F.S. Lien // *Int. J. Heat and Fluid Flow*. – 2004. – Vol. 25. – P. 659-670.
136. Holmes, D.G. A three-dimensional Euler solver for turbomachinery blade rows / D.G. Holmes, S.S. Tong // *Journal of Engineering for Gas Turbines and Power*. – 1985. – Vol. 107, No. 2. – P. 258-264.
137. Holley, B.M. Surface shear stress and pressure measurements in a turbine cascade / B.M. Holley, L.S. Langston // *Journal of Turbomachinery*. – 2009. – Vol. 131. – P. 031014-(1-8).
138. Inoue, M. Behavior of tip leakage flow behind an axial compressor rotor / M. Inoue, M. Kuroumaru, M. Fukuhara // *Journal of Engineering for Gas Turbines and Power*. – 1986. – Vol. 108. – P. 7-14.
139. Ivanov, N.G. Numerical simulation of endwall heat transfer in a transonic turbine cascade / N.G. Ivanov, V.V. Ris, E.M. Smirnov, D.S. Telnov // In: *Proc. of the Conference on Modelling Fluid Flow (CMFF'03)*. – Budapest, Hungary, 2003. – P. 1121-1128.
140. Jameson, A. Positive schemes and shock modeling for compressible flow // *Int. J. Numerical Methods in Fluids*. – 1995. – Vol. 20. – P. 743-776.
141. Kader, B.A. Temperature and concentration profiles in fully turbulent boundary layers // *Int. J. Heat and Mass Transfer*. – 1981. – Vol. 24. – P. 1541-1544.
142. Kalitzin, G. Near-wall behavior of RANS turbulence models and implications for wall functions / G. Kalitzin, G. Medic, G. Iaccarino, P. Durbin // *Journal of Computational Physics*. – 2005. – Vol. 204, Issue 1, No. 20. – P. 265–291.
143. Kato, M. The modelling of turbulent flow around stationary and vibrating square cylinders / M. Kato, B.E. Launder // *Proc. 9<sup>th</sup> Symposium on Turbulent Shear Flows*, Aug. 16-18, 1993, Kyoto, Japan. – 1993. – P. 10.4.1-10.4.6.
144. Khalak, A. Motions, forces and mode transitions in vortex-induced vibrations at low mass-damping / A. Khalak, C.H.K. Williamson // *Journal of Fluids and Structures*. – 1999. – Vol. 13. – P. 813-851.
145. Kirillov, A.I. Numerical simulation of laminar and turbulent flow in a toroidal rotating cavity with axial throughflow of cooling air / A.I. Kirillov, V.V. Ris, E.M. Smirnov // In: *Computational Fluid Dynamics'96*. – John Wiley & Sons, 1996. – P. 617-626.
146. Kordulla, W. Efficient computation of volume in flow predictions / W. Kordulla, M. Vinokur // *AIAA Journal*. – 1983. – Vol. 21. – P. 917-918.

147. Kuehn, T.H. Numerical solution to the Navier-Stokes equations for laminar natural convection about a horizontal isothermal circular cylinder / T.H. Kuehn, R.J. Goldstein // *Int. J. Heat and Mass Transfer*. – 1980. – Vol. 23. – P. 971-979.

148. Labrosse, G. A direct (pseudo-spectral) solver of the 2D/3D Stokes problem: Transition to unsteadiness of natural-convection flow in a differentially heated cubical cavity / G. Labrosse, E. Tric, H. Khallouf, B. Betrouni // *Numerical Heat Transfer, Part B*. – 1997. – Vol. 31. – P. 261-276.

149. Lamballais, E. Effects of spanwise rotation on the stretching in transitional and turbulent channel flow / E. Lamballais, M. Lesieur, O. Metais // *Int. J. Heat and Fluid Flow*. – 1996. – Vol. 17, No. 3. – P. 324-332.

150. Langston, L.S. Three-dimensional flow within a turbine cascade passage / L.S. Langston, M.L. Nice, R.M. Hooper // *Journal of Engineering for Gas Turbines and Power*. – 1977. – Vol. 99, No. 1. – P. 21-28.

151. Langtry, R.B. Prediction of transition for attached and separated shear layer in turbomachinery / R.B. Langtry, S.A. Sjolander // *AIAA Paper 2002-3643*. – 2002. – 13 p.

152. Launder, B.E. The numerical computation of turbulent flows / B.E. Launder, D.B. Spalding // *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*. – 1974. – Vol. 3, No. 2. – P. 269-289.

153. Launder, B.E. Application of the energy-dissipation model of turbulence to the calculation of flow near a spinning disk / B.E. Launder, B.I. Sharma // *Letters in Heat and Mass Transfer*. – 1974. – Vol.1, No.2. – P.131-138.

154. Launder, B.E. The calculation of turbulent boundary layers on spinning and curved surfaces / B.E. Launder, C.H. Priddin, B.I. Sharma // *Journal of Fluids Engineering*. – 1977. – Vol. 99. – P. 231-239.

155. Leonard, B.P. A stable and accurate convective modelling procedure based on quadratic upstream interpolation // *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*. – 1979. – Vol. 19. – P. 59-98.

156. Lien, F.S. Non-linear  $v_2$ - $f$  modeling with application to aerodynamics flows / F.S. Lien, P.A. Durbin, S. Parneix // *Proc. 11<sup>th</sup> Symp. on Turbulent Shear Flows*. – 1997. – Paper 6-19. – 6 p.

157. Lien, F.S. Computational modelling of a transitional 3D turbine-cascade flow using a modified low-Re  $k$ - $\epsilon$  model and a multi-block scheme / F.S. Lien, M.A. Leschziner // *Int. J. Computational Fluid Dynamics*. – 1999. – Vol. 12. – P. 1-15.

158. Medic, G. RANS simulation for film-cooling analysis and design / G. Medic, P. Durbin // *Proc. Conf. on Modelling Fluid Flow*, 3-6 Sept. 2003, Budapest, Hungary. 2003. – Vol.1. – P. 127-134.

159. Menter, F.R. Zonal two equation  $k-\omega$  turbulence models for aerodynamic flows // AIAA Paper. – 1993. – AIAA-93-2906.
160. Menter, F.R. Two equation eddy-viscosity turbulence models for engineering applications // AIAA Journal. – 1994. – Vol. 32. – P. 1598-1605.
161. Menter, F. CFD best practice guidelines for CFD code validation for reactor safety applications / F. Menter, B. Hemstrom et al. // Rep. EVOL–ECORA–D01, Contract No. FIKS-CT-2001-00154.– 2002.– 46p. (URL: <https://domino.grs.de/ecora%5Cecora.nsf/pages/Public>)
162. Menter, F.R. Ten years of industrial experience with the SST turbulence model / F.R. Menter, M. Kuntz, R. Langtry // Turbulence, Heat and Mass Transfer 4. – Begell House, 2003. – P. 625 – 632.
163. Menter, F. The SST turbulence model with improved wall treatment for heat transfer predictions in gas turbines / F. Menter, J.C. Ferreira, T. Esch, B. Konno // Proc. Int. Gas Turbine Congress (IGTC-2003), Nov. 2-7, 2003, Tokyo, Japan. – Paper TS-059. – 7 p.
164. Morgan, V.T. The overall convection heat transfer from smooth circular cylinder // Adv. Heat Transfer. – 1975. – Vol. 11. – P. 199–212.
165. Mostafa, A.A. Evolution of particle-laden jet flows: A Theoretical and experimental study / A.A. Mostafa, H.C. Mongia, V.G. McDonell, G.S. Samuelsen // AIAA Journal. – 1989. – Vol.27, No.2. – P. 167-183.
166. Muzaferija, S. A two-fluid Navier-Stokes solver to simulate water entry / S. Muzaferija, M. Peric, P. Sames, T. Schelin // In: 22 Symp. Naval Hydrodynamics. – Washington, 1998. – P. 277-289.
167. Nagano, Y. Characteristics of a turbulent natural convection boundary layer along a vertical flat plate / Y. Nagano, T. Tsuji // Int. J. Heat and Mass Transfer. – 1988. – Vol. 31, No. 8. – P. 1723-1734.
168. Ozmen-Cagatay, H. Dam-break flow in the presence of obstacle: experiment and CFD simulation / H. Ozmen-Cagatay, S. Kocaman // Eng. Applications of Computational Fluid Mechanics. – 2011. – Vol. 5. – P. 541 552.
169. Patankar, S.V. A calculation procedure for heat, mass and momentum transfer in three-dimensional parabolic flows / S.V. Patankar, D.B. Spalding // Int. J. Heat and Mass Transfer. – 1972. – Vol. 15, Issue 10. – P. 1787-1806.
170. Popovac, M. Compound wall treatment for RANS computation of complex turbulent flows and heat transfer / M. Popovac, K. Hanjalic // Flow Turbulence and Combustion. – 2007. – Vol. 78. – P. 177-202.
171. Ranque, G.J. Exprience sur la d'tente giratoire avec productions simultan es d'un chappement d'air chaud et d'un chappement d'air froid // Journal de Physique et le Radium. – 1933. – No. 4. – P. 112-114.

172. Razavi, S.E. Characteristics-based finite-volume solution for natural convection around a horizontal cylinder / S.E. Razavi, F. Barar, V. Farhangmehr // *Journal of Applied Sciences*. – 2008. – Vol. 8, No. 10. – P. 1905-1911.
173. Rhie, C.M. Numerical study of the turbulent flow past an airfoil with trailing edge separation / C.M. Rhie, W.L. Chow // *AIAA Journal*. – 1983. – Vol.21, N. 11. – P. 1525-1532.
174. Roe, P.L. Approximate Riemann solvers, parameter vectors, and difference schemes // *Journal of Computational Physics*. – 1981. – Vol. 43. – P. 357-372.
175. Saadjan, E. Stokes flow heat transfer in an annular, rotating heat exchanger / E. Saadjan, A.J.S. Rodrigo, J.P.B. Mota // *Applied Thermal Engineering*. – 2011. – Vol. 31, No. 8–9. – P. 1499–1507.
176. Saitoh, T. Bench mark solutions to natural convection heat transfer problems around a horizontal circular cylinder / T. Saitoh, T. Sajik, K. Maruhara // *Int. J. Heat and Mass Transfer*. – 1993. – Vol. 36, No. 5. – P. 1251-1259.
177. Schoenherr, K.E. Resistance of flat surfaces moving through a fluid // *Transactions of the Society of Naval Architects and Marine Engineers*. – 1932. – Vol. 40. – P. 279–313.
178. Shur, M.L. Turbulence modeling in rotating and curved channels: assessing the Spalart-Shur correction / M.L. Shur, M.K. Strelets, A.K. Travin, P.R. Spalart // *AIAA Journal*. – 2000. – Vol. 38, No. 5. – P. 784-792.
179. Smirnov, E.M. Numerical simulation of turbulent flow and energy loss in passages with strong curvature and rotation using a three-dimensional Navier-Stokes solver // Report for «Research in Brussels'92» Action. – VUB, Brussels, 1993. – 122p.
180. Smirnov, P. Sensitization of the SST turbulence model to rotation and curvature by applying the Spalart-Shur correction / P. Smirnov, F. Menter // *Journal of Turbomachinery*. – 2009. – Vol. 131, No. 4. – Article ID 041010. – P. 1-8.
181. Snyder, W.T. An analysis of fully developed laminar flow in an eccentric annulus / W.T. Snyder, G.A. Goldstein // *AIChE Journal*. – 1965. – No. 11. – P. 462-467.
182. Snyder, W.H. Some measurements of particle velocity auto-correlation functions in a turbulent flow / W.H.Snyder, J.L.Lumley // *Journal of Fluid Mechanics*. – 1971. – Vol. 48 (1). – P. 41-71.
183. Soares-Fraza, S. Experiments of dam-break wave over a triangular bottom sill // *Journal of Hydraulic Research*. – 2007. – Vol. 45, extra issue. – P. 19-26.
184. Spalart, P.R. A one-equation turbulence model for aerodynamic flows / P.R. Spalart, S.R. Allmaras // *AIAA Paper 92-0439*. – 1992.
185. Spalart, P.R. Comments on the feasibility of LES for wings and on a hybrid RANS/LES approach / P.R. Spalart, W.H. Jou, M. Strelets, S.R. Allmaras // In: *Advances in DNS/LES (Proc. 1<sup>st</sup> AFOSR Int. Conf. on DNS/LES. Ruston, Louisiana, Aug. 4-8, 1997)*. – Greyden Press, 1997. – 657 p. – P. 137-147.

186. Spalart, P.R. On the sensitization of turbulence models to rotation and curvature / P.R. Spalart, M.L. Shur // *Aerospace Science and Technology*. – 1997. – No. 5. – P. 297-302.
187. Strelets, M. Detached eddy simulation of massively separated flows / M. Strelets // 39<sup>th</sup> AIAA Aerospace Sciences Meeting. – AIAA Paper 2001-0879. – 2001. – 18 p.
188. Swanson, R. Comparison of several dissipation algorithms for central difference schemes / R.Swanson, R.Radespiel, E.Turkel // AIAA Paper 97-1945. – 1997. – 19 p. [NASA Report 201726. URL: <http://ntrs.nasa.gov/archive/nasa/casi.ntrs.nasa.gov/19970028851.pdf>].
189. Tatsumi, S. A new high resolution scheme for compressible viscous flow with shocks / S. Tatsumi, L. Martinelli, A. Jameson // AIAA Paper 95-0466. – 1995. – 15p.
190. Thomas, P.D. Direct control of the grid point distribution in meshes generated by elliptic equations / P.D. Thomas, J.D. Middlecoff // *AIAA Journal*. – 1980. – Vol. 18, No. 6. – P. 652-656 (перевод: Ракетная техника и космонавтика. – 1980. – т. 18, № 7. – С. 55-61).
191. Thompson, J.F. Handbook of grid generation / J.F. Thompson, B.K. Soni, N.P. Weatherill (eds.). – CRC Press, 1998. – 1136 p.
192. Travin, A. Physical and numerical upgrades in the Detached-Eddy Simulation of complex turbulent flows / A. Travin, M. Shur, M. Strelets, P.R. Spalart // *Series: Fluid Mechanics and its Applications*. – 2002. – Vol. 65. – P. 239-254 (*Advances in LES of Complex Flows*. – Kluwer Academic Publishers, 2002. – 387p.)
193. Tric, E. Accurate solutions of natural convection flow of air in a differentially heated cubic cavity / E. Tric, M. Betrouni, G. Labrosse // *In: Computational Fluid Dynamics - 98*. – John Wiley & Sons, 1998. – P.979-982.
194. Tric, E. A first incursion into the 3D structure of natural convection of air in a differentially heated cubic cavity, from accurate numerical solutions / E. Tric, G. Labrosse, M. Betrouni // *Int. J. Heat and Mass Transfer*. – 2000. – Vol. 43, No. 21. – P. 4043-4056.
195. Turkel, E. Preconditioned method for solving the incompressible and low speed compressible equations // *Journal of Computational Physics*. – 1987. – Vol. 72. – P. 277-298.
196. Ubbink, O. Numerical prediction of two fluid systems with sharp interfaces : PhD thesis / O. Ubbink. – University of London, 1997. – 136 p.
197. Ubbink, O. A method for capturing sharp fluid interfaces on arbitrary meshes / O. Ubbink, I. Issa // *Journal of Computational Physics*. – 1999. – Vol. 153. – P. 26-50.
198. Vandoormaal, J.P. Enhancements of the SIMPLE method for predicting incompressible fluid flows / J.P. Vandoormaal, G.D. Raithby // *Numer. Heat Transfer*. – 1984. – Vol. 7. – P. 147-163.
199. Van Leer, B. Towards the ultimate conservative difference scheme. II. Monotonicity and conservation combined in a second order scheme // *Journal of Computational Physics*. – 1974. – Vol. 14. – P. 361-370.

200. Vinokur, M. An analysis of finite-difference and finite-volume formulations of conservation laws // *Journal of Computational Physics*. – 1989. – Vol. 81. – P. 1-52.
201. Vogel, J.C. Combined heat transfer and fluid dynamic measurements downstream of a backward-facing step / J.C. Vogel, J.K. Eaton // *Journal of Heat Transfer*. – 1985. – Vol.107. – P. 922-929.
202. Waclawczyk, T. Remarks on prediction of wave drag using VOF method with interface capturing approach / T. Waclawczyk, T. Koronowicz // *Archives of civil and mechanical engineering*. – 2008. – Vol. 8. – P. 5-14.
203. Wait, M. Piezoelectric fans using higher flexural modes for electronics cooling applications / M. Wait, S. Basak, S.V. Garimella, A. Raman // TCPT-2005-086, Computer and Information Technology, Purdue University, 2005. – 19p.
204. Wannier, G.H. A contribution to the hydrodynamics of lubrication // *Quarterly of Applied Mathematics*. – 1950. – No. 8. – P. 1-32.
205. Wieghardt, K. On the turbulent friction layer for rising pressure / K. Wieghardt, W. Tillmann // *NACA TM-1314*. – 1951. – 48 p.
206. Wilcox, D.C. Reassessment of the scale-determining equation for advanced turbulence models // *AIAA Journal*. – 1988. – Vol. 26, No. 11. – P. 1299-1310.
207. Wilcox, D.C. A two-equation turbulence model for wall-bounded and free-shear flows // *AIAA Paper 93-2905*. – 1993.
208. Wilcox, D.C. Simulation of transition with a two-equation turbulence model // *AIAA Journal*. – 1994. – Vol. 32. – P. 247-255.
209. Williamson, C.H.K. Oblique and parallel modes of vortex shedding in the wake of a circular cylinder at low Reynolds numbers // *Journal of Fluid Mechanics*. – 1989. – Vol. 206. – P. 579-627.
210. Wolfshtein, M. The velocity and temperature distribution in one-dimensional flow with turbulence augmentation and pressure gradient // *Int. J. Heat and Mass Transfer*. – 1969. – Vol. 12, No.3. – P. 301-318.
211. Yakhot, V. Development of turbulence models for shear flows by a double expansion technique / V. Yakhot, S.A. Orszag, S. Thangam, T.B. Gatski, C.G. Speziale // *Phys. Fluids*. – 1992. – Vol. A4, No. 7. – P. 1510–1520.
212. Yang, Z. A k-e model for turbulence and transitional boundary layer / Z. Yang, T.H. Shih // In: *Near-Wall Turbulent Flows*. – Elsevier-Science Publishers, 1993. – 1048 p. – P. 165-175.

## Приложение А

### Основные модели турбулентности ПК SINF

#### Некоторые обозначения

$d$  – расстояние от текущей расчетной точки до ближайшей стенки;

$D_{k\omega} = \frac{2\rho}{\omega} (\nabla k) \cdot (\nabla \omega)$  – кросс-диффузия в  $\omega$ -уравнении ( $k$ - $\omega$  модели);

$P_k = \tau_T \cdot \nabla V$  – генерация кинетической энергии турбулентности ( $k$ ,  $k$ - $\varepsilon$ ,  $k$ - $\omega$  модели):

- «стандарт»:  $P_k = \mu_T S^2$ ;
- коррекция [143] (Kato, Launder, 1993):  $P_k = \mu_T S^2 \rightarrow \mu_T S \Omega$ ;
- дополнительная генерация от сил плавучести:  $P_k \rightarrow P_k + P_B$ ;

$P_B = -\frac{\mu_T}{\rho \text{Pr}_T} F_h \cdot \nabla \rho \approx \frac{\mu_T \beta}{\text{Pr}_T} F_h \cdot \nabla T$  – дополнительная генерация от сил плавучести;

$S = \sqrt{2S_{ij}S_{ij} - \frac{2}{3}(\nabla \cdot V)^2}$  – скорость деформации;

$\Delta$  – характерный размер ячейки (сеточный масштаб для LES моделей):

- стандарт DES:  $\Delta = \max(\Delta_1, \Delta_2, \Delta_3)$  (максимальный из размеров ячейки);
- опционально:  $\Delta = \text{Vol}^{1/3}$  (Vol – объем ячейки);

$\Omega = \sqrt{2\Omega_{ij}\Omega_{ij}} = |\nabla \times V|$  – модуль завихренности;

#### **А.1 Модели семейства $k$ - $\varepsilon$**

##### **А.1.1 «Стандартная» $k$ - $\varepsilon$ модель [152] (Launder, Spalding, 1974)**

Высокореинольдсовая модель. Определяющие уравнения:

$$\rho \frac{dk}{dt} = \nabla \cdot \left( \left( \mu + \frac{\mu_T}{\sigma_k} \right) \nabla k \right) + P_k - \rho \varepsilon \quad (\text{A.1a})$$

$$\rho \frac{d\varepsilon}{dt} = \nabla \cdot \left( \left( \mu + \frac{\mu_T}{\sigma_\varepsilon} \right) \nabla \varepsilon \right) + C_{\varepsilon 1} \frac{\varepsilon}{k} P_k - C_{\varepsilon 2} \frac{\rho \varepsilon^2}{k} \quad (\text{A.1б})$$

Замыкающие соотношения:

$$\mu_T = C_\mu \rho k^2 / \varepsilon \quad (\text{A.2})$$

Константы модели:

$$\sigma_k = 1.0, \quad \sigma_\varepsilon = 1.3, \quad C_{\varepsilon 1} = 1.44, \quad C_{\varepsilon 2} = 1.92, \quad C_\mu = 0.09 \quad (\text{A.3})$$

Граничные условия («стандартные» пристенные функции;  $y^+ > 30$ ):

$$k_1 = \frac{u_\tau^2}{\sqrt{C_\mu}}, \quad \varepsilon_1 = \frac{u_\tau^3}{\kappa d_1} \quad (\text{A.4})$$

### A.1.2 K-ε модель [153] (Launder, Sharma, 1974)

Определяющие уравнения:

$$\rho \frac{dk}{dt} = \nabla \cdot \left( \left( \mu + \frac{\mu_T}{\sigma_k} \right) \nabla k \right) + P_k - \rho \varepsilon - 2\mu (\nabla \sqrt{k})^2 \quad (\text{A.5a})$$

$$\rho \frac{d\varepsilon}{dt} = \nabla \cdot \left( \left( \mu + \frac{\mu_T}{\sigma_\varepsilon} \right) \nabla \varepsilon \right) + C_{\varepsilon 1} \frac{\varepsilon}{k} P_k - C_{\varepsilon 2} f_2 \frac{\rho \varepsilon^2}{k} + C_{\varepsilon 3} \nu \mu_T [(\nabla \nabla V) \dots (\nabla \nabla V)] \quad (\text{A.5б})^1$$

Замыкающие соотношения:

$$\mu_T = C_\mu f_\mu \frac{\rho k^2}{\varepsilon}, \quad f_\mu = \exp\left(\frac{-3.4}{(1+0.02 \text{Re}_T)^2}\right) \quad (\text{A.6a})$$

$$\text{Re}_T = k^2 / (\nu \varepsilon), \quad f_2 = 1 - 0.3 \exp(-\text{Re}_T^2) \quad (\text{A.6б})$$

Константы модели:

$$\sigma_k = 1.0, \quad \sigma_\varepsilon = 1.3, \quad C_{\varepsilon 1} = 1.44, \quad C_{\varepsilon 2} = 1.92, \quad C_{\varepsilon 3} = 2.0, \quad C_\mu = 0.09 \quad (\text{A.7})$$

Граничные условия:

$$k_W = 0, \quad \varepsilon_W = 0 \quad (\text{A.8})$$

### A.1.3 K-ε модель [117] (Chien, 1982)

Определяющие уравнения:

<sup>1</sup> В SINF тензор  $(\nabla \nabla V)$  вычисляется приближенно, без строгого учета кривизны сетки

$$\rho \frac{dk}{dt} = \nabla \cdot \left( \left( \mu + \frac{\mu_T}{\sigma_k} \right) \nabla k \right) + P_k - \rho \varepsilon - \frac{2\mu k}{d^2} \quad (\text{A.9a})$$

$$\rho \frac{d\varepsilon}{dt} = \nabla \cdot \left( \left( \mu + \frac{\mu_T}{\sigma_\varepsilon} \right) \nabla \varepsilon \right) + C_{\varepsilon 1} \frac{\varepsilon}{k} P_k - C_{\varepsilon 2} f_2 \frac{\rho \varepsilon^2}{k} - \frac{2\mu \varepsilon}{d^2} \exp(-C_4 y^+) \quad (\text{A.9б})$$

Замыкающие соотношения:

$$\mu_T = C_\mu f_\mu \rho k^2 / \varepsilon, \quad f_\mu = 1 - \exp(-C_3 y^+) \quad (\text{A.10a})$$

$$f_2 = 1 - 0.22 \exp\left(-(\text{Re}_T/6)^2\right), \quad \text{Re}_T = k^2 / (\nu \varepsilon) \quad (\text{A.10б})$$

Константы модели:

$$\begin{aligned} \sigma_k = 1.0, \quad \sigma_\varepsilon = 1.3, \quad C_{\varepsilon 1} = 1.35, \quad C_{\varepsilon 2} = 1.8, \\ C_3 = 0.0115, \quad C_4 = 0.5, \quad C_\mu = 0.09 \end{aligned} \quad (\text{A.11})$$

Граничные условия:

$$k_W = 0, \quad \varepsilon_W = 0 \quad (\text{A.12})$$

#### A.1.4 RNG модель [211] (Yakhot, Orszag, 1992)

Высокореинольдсовая модель. Определяющие уравнения:

$$\rho \frac{dk}{dt} = \nabla \cdot \left( \left( \mu + \frac{\mu_T}{\sigma_k} \right) \nabla k \right) + P_k - \rho \varepsilon \quad (\text{A.13a})$$

$$\rho \frac{d\varepsilon}{dt} = \nabla \cdot \left( \left( \mu + \frac{\mu_T}{\sigma_\varepsilon} \right) \nabla \varepsilon \right) + C_{\varepsilon 1} \cdot \frac{\varepsilon}{k} P_k - F_2(\eta) \cdot \frac{\rho \varepsilon^2}{k} \quad (\text{A.13б})$$

Замыкающие соотношения:

$$\mu_T = C_\mu \frac{\rho k^2}{\varepsilon}, \quad F_2 = C_{\varepsilon 2} + \frac{C_\mu \eta^3 \cdot (1 - \eta/4.38)}{1 + 0.012 \eta^3}, \quad \eta = \frac{Sk}{\varepsilon} \quad (\text{A.14})$$

Константы модели:

$$\sigma_k = \sigma_\varepsilon = 0.7179, \quad C_{\varepsilon 1} = 1.42, \quad C_{\varepsilon 2} = 1.68, \quad C_\mu = 0.0845 \quad (\text{A.15})$$

Граничные условия («стандартные» пристенные функции;  $y^+ > 30$ ):

$$k_1 = \frac{u_\tau^2}{\sqrt{C_\mu}}, \quad \varepsilon_1 = \frac{u_\tau^3}{\kappa d_1} \quad (\text{A.16})$$

### A.1.5 K-ε модель [212] (Yang, Shih, 1993)

Определяющие уравнения:

$$\rho \frac{dk}{dt} = \nabla \cdot \left( \left( \mu + \frac{\mu_T}{\sigma_k} \right) \nabla k \right) + P_k - \rho \varepsilon \quad (\text{A.17a})$$

$$\rho \frac{d\varepsilon}{dt} = \nabla \cdot \left( \left( \mu + \frac{\mu_T}{\sigma_\varepsilon} \right) \nabla \varepsilon \right) + \frac{1}{T} (C_{\varepsilon 1} P_k - C_{\varepsilon 2} \rho \varepsilon) + C_{\varepsilon 3} \nu \mu_T (\nabla \cdot \nabla V)^2 \quad (\text{A.17б})^1$$

Замыкающие соотношения:

$$\mu_T = C_\mu f_\mu k T, \quad f_\mu = \sqrt{1 - \exp(-c_1 Re_y - c_2 Re_y^3 - c_3 Re_y^5)} \quad (\text{A.18a})$$

$$T = \frac{k}{\varepsilon} + \sqrt{\frac{\nu}{\varepsilon}}, \quad Re_y = \frac{\rho \sqrt{k} d}{\mu} \quad (\text{A.18б})$$

Константы модели:

$$\begin{aligned} \sigma_k = 1.0, \quad \sigma_\varepsilon = 1.3, \quad C_{\varepsilon 1} = 1.44, \quad C_{\varepsilon 2} = 1.92, \quad C_{\varepsilon 3} = 1.5 \\ C_\mu = 0.09, \quad c_1 = 1.5 \cdot 10^{-4}, \quad c_2 = 5 \cdot 10^{-7}, \quad c_3 = 10^{-10} \end{aligned} \quad (\text{A.19})$$

Граничные условия:

$$k_W = 0, \quad \varepsilon_W = 2\nu (\nabla \cdot \sqrt{k})^2 \quad (\text{A.20})$$

### A.1.6 K-ε модель [157] (Lien, Leschziner, 1999)

Определяющие уравнения:

$$\rho \frac{dk}{dt} = \nabla \cdot \left( \left( \mu + \frac{\mu_t}{\sigma_k} \right) \nabla k \right) + P_k + P_B - \rho \varepsilon \quad (\text{A.21a})$$

$$\begin{aligned} \rho \frac{d\varepsilon}{dt} = \nabla \cdot \left( \left( \mu + \frac{\mu_t}{\sigma_\varepsilon} \right) \nabla \varepsilon \right) + C_{\varepsilon 1} \frac{\varepsilon}{k} [P_k + \max(P_B, 0)] - \\ - C_{\varepsilon 2} \frac{\varepsilon}{k} (1 - 0.3 \exp(-Re_T^2)) (\rho \varepsilon - P'') + C_{\varepsilon 4} \rho \varepsilon \nabla \cdot \mathbf{V} + Y_{ap} \end{aligned} \quad (\text{A.21б})$$

Замыкающие соотношения:

<sup>1</sup> В коде SINF член  $(\nabla \cdot \nabla V)^2$  вычисляется приближенно, без строгого учета скошенности сетки

$$\mu_t = C_\mu \frac{\rho k^2}{\varepsilon} (1 - \exp(-0.0198 Re_y)) \cdot \left(1 + \frac{5.29}{Re_y}\right), \quad Re_y = \frac{\rho \sqrt{k} d}{\mu} \quad (\text{A.22a})$$

$$P'' = \left(P_k + 2\mu \frac{k}{d^2}\right) \exp(-0.00375 Re_y^2), \quad Re_T = \frac{\rho k^2}{\mu \varepsilon} \quad (\text{A.22б})$$

$$Y_{ap} = C_{Y_{ap}} \cdot \max\left(0.83 \frac{\rho \varepsilon^2}{k} \left(\frac{k^{3/2}}{2.5 \varepsilon d} - 1\right) \left(\frac{k^{3/2}}{2.5 \varepsilon d}\right)^2, 0\right) \quad (\text{A.22в})$$

Константы модели<sup>1</sup>:

$$\begin{aligned} C_\mu &= 0.09, & C_{\varepsilon_1} &= 1.44, & C_{\varepsilon_2} &= 1.92, & C_{\varepsilon_4} &= -0.33 \\ \sigma_k &= 1.0, & \sigma_\varepsilon &= 1.219, & \sigma_h &= 0.9, & C_{Y_{ap}} &= 0 \end{aligned} \quad (\text{A.23})$$

Граничные условия (в первой пристенной ячейке уравнение для  $\varepsilon$  не решается):

$$k_W = 0, \quad \varepsilon_1 = \frac{2\mu k_1}{\rho d_1^2} \quad (\text{A.24})$$

### A.1.7 Поправка [154] на кривизну линий тока и вращение системы отсчета

Модифицируется коэффициент  $C_{\varepsilon_2}$  в диссипативном члене уравнения для  $\varepsilon$ :

$$C_{\varepsilon_2} \rightarrow C_{\varepsilon_2} \cdot f_R, \quad f_R = 1 - 0.2 Ri_T, \quad 0.6 < f_R < 1.4 \quad (\text{A.25})$$

В работе [154] были предложены формулы для вычисления турбулентного числа Ричардсона  $Ri_T$  для некоторых частных конфигураций. В коде SINF реализована инвариантная формулировка [179]:

$$Ri_T = 2 \left(\frac{k}{\varepsilon}\right)^2 (\mathbf{K}^{rot} + \boldsymbol{\omega}^{rot}) \cdot (\nabla \times \mathbf{V} + 2\boldsymbol{\omega}^{rot}), \quad \mathbf{K} = \frac{\mathbf{b}}{R_c} = \frac{\mathbf{V} \times (\mathbf{V} \cdot \nabla \mathbf{V})}{V^3} \quad (\text{A.26})$$

Здесь  $\boldsymbol{\omega}^{rot}$  – скорость вращения системы отсчета,  $R_c$  и  $\mathbf{b}$  – радиус кривизны и вектор бинормали линии тока.

## A.2 Модели семейства $k$ - $\omega$

### A.2.1 $K$ - $\omega$ модель [206] (Wilcox, 1988)

Высокорейнольдсовая модель. Определяющие уравнения:

<sup>1</sup> В формулировке [135]  $C_{Y_{ap}} = 1$ ; в некоторых публикациях  $\sigma_\varepsilon = 1.3$

$$\rho \frac{dk}{dt} = \nabla \cdot ((\mu + \sigma_k \mu_T) \nabla k) + P_k - \rho \beta^* k \omega \quad (\text{A.27a})$$

$$\rho \frac{d\omega}{dt} = \nabla \cdot ((\mu + \sigma_\omega \mu_T) \nabla \omega) + \alpha \frac{\omega}{k} P_k - \rho \beta \omega^2 \quad (\text{A.27б})$$

Замыкающие соотношения:

$$\mu_T = \rho k / \omega \quad (\text{A.28})$$

Константы модели:

$$\sigma_k = 0.5, \quad \sigma_\omega = 0.5, \quad \alpha = 5/9, \quad \beta = 0.075, \quad \beta^* = 0.09 \quad (\text{A.29})$$

Граничные условия («стандартные» пристенные функции;  $y^+ > 30$ ):

$$k_1 = \frac{u_\tau^2}{\sqrt{\beta^*}}, \quad \omega_1 = \frac{u_\tau}{d_1 \kappa \cdot \sqrt{\beta^*}} \quad (\text{A.30})$$

### A.2.2 K- $\omega$ модель [207] (Wilcox, 1993)

Определяющие уравнения:

$$\rho \frac{dk}{dt} = \nabla \cdot ((\mu + \sigma_k \mu_T) \nabla k) + P_k - \rho \beta^* \omega k \quad (\text{A.31a})$$

$$\rho \frac{d\omega}{dt} = \nabla \cdot ((\mu + \sigma_\omega \mu_T) \nabla \omega) + \alpha \frac{\omega}{k} P_k - \rho \beta \omega^2 + \sigma_d \max(D_{k\omega}, 0) \quad (\text{A.31б})$$

Замыкающие соотношения:

$$\mu_T = \alpha^* \frac{\rho k}{\omega}, \quad \alpha^* = \frac{0.025 + Re_T / R_k}{1 + Re_T / R_k}, \quad Re_T = \frac{\rho k}{\mu \omega} \quad (\text{A.32a})$$

$$\beta^* = 0.09 \frac{5/18 + (Re_T / R_\beta)^4}{1 + (Re_T / R_\beta)^4}, \quad \alpha = \frac{\alpha_1}{\alpha^*} \cdot \frac{0.1 + Re_T / R_\omega}{1 + Re_T / R_\omega} \quad (\text{A.32б})$$

Константы модели:

$$\begin{aligned} \sigma_k = 1, \quad \sigma_\omega = 0.6, \quad \beta = 0.075, \quad \sigma_d = 0.15 \\ \alpha_1 = 0.5, \quad R_\beta = 8, \quad R_k = 6, \quad R_\omega = 2.2 \end{aligned} \quad (\text{A.33a})$$

Граничные условия [159]:

$$k_w = 0, \quad \omega_w = 800\nu/d_1^2 \quad (\text{A.33б})$$

Версия [208] (Wilcox, 1994)

Т.наз. «transition» версия  $k$ - $\omega$  модели, оптимизированная Уилкоксом для расчета переходных режимов. Отличается от [207] значениями нескольких констант:

$$\sigma_k = \sigma_\omega = 0.5, \quad \sigma_d = 0, \quad \alpha_1 = 5/9, \quad R_\omega = 2.7$$

**A.2.3 SST модель [162] (Menter et al., 2003)**

Хотя модель сформулирована в переменных  $k$  и  $\omega$ , она фактически представляет собой комбинацию  $k$ - $\omega$  и  $k$ - $\epsilon$  моделей (с плавным переходом от первой ко второй по мере удаления от стенки), сочетающую в себе их сильные стороны.

Определяющие уравнения:

$$\rho \frac{dk}{dt} = \nabla \cdot [(\mu + \sigma_k \mu_T) \nabla k] + \tilde{P}_k - \rho \beta^* \omega k \quad (\text{A.34a})$$

$$\rho \frac{d\omega}{dt} = \nabla \cdot [(\mu + \sigma_\omega \mu_T) \nabla \omega] + \frac{\rho \alpha}{\mu_T} \tilde{P}_k - \rho \beta \omega^2 + (1 - F_1) \sigma_{\omega 2} D_{k\omega} \quad (\text{A.34b})^1$$

Замыкающие соотношения:

$$\mu_T = \frac{a_1 \rho k}{\max(a_1 \omega, SF_2)} \quad (\text{A.35a})$$

$$F_2 = th(\arg_2^2), \quad \arg_2 = \max\left(\frac{2\sqrt{k}}{\beta^* d \omega}, \frac{500\nu}{d^2 \omega}\right) \quad (\text{A.35b})$$

$$\tilde{P}_k = \min(P_k, 10\beta^* \rho k \omega) \quad (\text{A.35b})$$

«Взвешивание» внутренней (пристенной,  $k$ - $\omega$ , индекс  $_1$ ) и внешней ( $k$ - $\epsilon$ , индекс  $_2$ ) ветвей модели:

$$\phi = F_1 \phi_1 + (1 - F_1) \phi_2, \quad \phi = \{\sigma_k, \sigma_\omega, \beta, \alpha\} \quad (\text{A.36a})$$

$$F_1 = th(\arg_1^4), \quad \arg_1 = \min\left[\max\left(\frac{\sqrt{k}}{\beta^* \omega d}, \frac{500\nu}{d^2 \omega}\right), \frac{4\rho \sigma_{\omega 2} k}{\tilde{D}_{k\omega} d^2}\right] \quad (\text{A.36b})$$

$$\tilde{D}_{k\omega} = \max(\sigma_{\omega 2} D_{k\omega}, 10^{-10}) \quad (\text{A.36b})$$

Константы модели:

$$\begin{aligned} \sigma_{k1} = 0.85, \quad \sigma_{\omega 1} = 0.5, \quad \beta_1 = 3/40, \quad \alpha_1 = 5/9, \quad \beta^* = 0.09 \\ \sigma_{k2} = 1.0, \quad \sigma_{\omega 2} = 0.856, \quad \beta_2 = 0.0828, \quad \alpha_2 = 0.44, \quad a_1 = 0.31 \end{aligned} \quad (\text{A.37})$$

<sup>1</sup> В работе [162] генерационный член  $\omega$ -уравнения записан в виде  $\alpha \rho S^2$ , что является опечаткой

Граничные условия:

$$k_w = 0, \quad \omega_w = 800v/d_1^2 \quad (\text{A.38})$$

Версия [160] (Menter, 1994)

Отличается от [162] заменой  $S$  на  $\Omega$  в выражении для турбулентной вязкости (A.35а), отсутствием ограничителя генерации (A.35в), величиной ограничителя в (A.36в), значениями констант  $\alpha_1, \alpha_2$  (A.37):

$$\mu_T = \frac{a_1 \rho k}{\max(a_1 \omega, \Omega F_2)}, \quad \tilde{P}_k = P_k, \quad \tilde{D}_{k\omega} = \max(\sigma_{\omega 2} D_{k\omega}, 10^{-20}) \quad (\text{A.39a})$$

$$\alpha = \frac{\beta}{\beta^*} - \frac{\sigma_{\omega} \kappa^2}{\sqrt{\beta^*}} \Rightarrow \begin{cases} \alpha_1 = 0.5531667 \\ \alpha_2 = 0.4403547 \end{cases} \quad (\text{A.39б})$$

Т.наз. базовая (base-line, BSL) версия отличается от модели SST [160] значением константы  $\sigma_{k1}$  и отсутствием SST ограничителя турбулентной вязкости:

$$\mu_T = \rho k / \omega, \quad \sigma_{k1} = 0.5 \quad (\text{A.40})$$

В [159] рекомендуется в уравнении для  $k$  (но не для  $\omega$ ) использовать ограничитель генерации, аналогичный (A.35в):

$$\tilde{P}_k = \min(P_k, 20\beta^* \rho k \omega) \quad (\text{A.41})$$

Гибридная RANS/LES модель [187, 192]

$$L^{RANS} = \frac{k^{1/2}}{\omega \beta^*} \rightarrow L^* = \min(L^{RANS}, L^{LES}) \quad (\text{A.42a})$$

$$D_k = \rho \beta^* \omega k \rightarrow D_k \frac{L^{RANS}}{L^*} = \frac{\rho k^{3/2}}{L^*} \quad (\text{A.42б})$$

$$L^{LES} = C^{LES} \cdot \Delta, \quad C^{LES} = F_1 \cdot 0.78 + (1 - F_1) \cdot 0.61 \quad (\text{A.42в})$$

#### A.2.4 K- $\omega$ модель [151] (Langtry, Sjolander, 2002)

Определяющие уравнения:

$$\rho \frac{dk}{dt} = \nabla \cdot [(\mu + \sigma_k \mu_t) \nabla k] + PTM \cdot \tilde{P}_k - \rho \beta^* \omega k \quad (\text{A.43a})$$

$$\rho \frac{d\omega}{dt} = \nabla \cdot [(\mu + \sigma_{\omega} \mu_T) \nabla \omega] + \frac{\rho \alpha}{\mu_T} \tilde{P}_k - \rho \beta \omega^2 + (1 - F_1) \sigma_{\omega 2} D_{k\omega} \quad (\text{A.43б})$$

Замыкающие соотношения:

$$\mu_T = \min\left(\alpha^* \frac{\rho k}{\omega}, \frac{a_1 \rho k}{\Omega F_2}\right), \quad F_2 = th(\arg_2^2), \quad \arg_2 = \max\left(\frac{2\sqrt{k}}{\beta^* d \omega}, \frac{500v}{d^2 \omega}\right) \quad (\text{A.44a})$$

$$\tilde{P}_k = \mu_T \min(S^2, \Omega^2), \quad PTM = 1 - (PTM_1 + PTM_2) \cdot F_3 \quad (\text{A.44б})$$

$$PTM_1 = \begin{cases} 1 - (3.28 \cdot 10^{-4} Re_v - 3.94 \cdot 10^{-7} Re_v^2 + 1.43 \cdot 10^{-10} Re_v^3), & Re_v < 1000 \\ 1 - (0.12 + 1.0 \cdot 10^{-5} Re_v) & , \quad Re_v > 1000 \end{cases} \quad (\text{A.44в})$$

$$PTM_2 = \begin{cases} -|K|^{0.4} \cdot Re_v / 80, & K < 0 \\ 0 & , \quad K > 0 \end{cases}, \quad K = -\frac{\mu}{\rho^2 U^3} (1 - M^2) \frac{dp}{ds} \quad (\text{A.44г})$$

$$Re_v = \rho d^2 \Omega / \mu, \quad F_3 = A_3 \exp(-(Re_T / B_3)^4), \quad Re_T = \rho k / \mu \omega \quad (\text{A.44д})$$

Взвешивание внутренней (индекс 1) и внешней (индекс 2) ветвей модели:

$$\phi = F_1 \phi_1 + (1 - F_1) \phi_2, \quad \phi = \{\sigma_k, \sigma_{\omega}, \beta, \beta^*, \alpha, \alpha^*\} \quad (\text{A.45a})$$

$$F_1 = \max[th(\arg_1^4), \exp(-(Re_y / 120)^8)], \quad Re_y = \rho d \sqrt{k} / \mu \quad (\text{A.45б})$$

$$\arg_1 = \min\left[\max\left(\frac{\sqrt{k}}{\beta^* \omega d}, \frac{500v}{d^2 \omega}\right), \frac{4\rho \sigma_{\omega 2} k}{\tilde{D}_{k\omega} d^2}\right], \quad \tilde{D}_{k\omega} = \max(\sigma_{\omega 2} D_{k\omega}, 10^{-20}) \quad (\text{A.45в})$$

Константы модели:

$$\alpha_1^* = \frac{0.025 + Re_T / R_k}{1 + Re_T / R_k}, \quad \beta_1^* = 0.09 \frac{5/18 + (Re_T / R_{\beta})^4}{1 + (Re_T / R_{\beta})^4}, \quad \alpha_1 = \frac{5}{9} \cdot \frac{0.1 + Re_T / R_{\omega}}{1 + Re_T / R_{\omega}} \quad (\text{A.46a})$$

$$\sigma_{k1} = 0.85, \quad \sigma_{\omega 1} = 0.5, \quad \beta_1 = 0.075, \quad a_1 = 0.31, \quad R_{\beta} = 8, \quad R_k = 6, \quad R_{\omega} = 2.7 \quad (\text{A.46б})$$

$$\sigma_{k2} = 1.0, \quad \sigma_{\omega 2} = 0.856, \quad \beta_2 = 0.0828, \quad \beta_2^* = 0.09, \quad \alpha_2 = 0.4403, \quad \alpha_2^* = 1$$

$$\text{В исходной формулировке [151]:} \quad A_3 = 1; \quad B_3 = 6.5 \quad (\text{A.46в})$$

$$\text{В формулировке [163]:} \quad A_3 = 0.94; \quad B_3 = 5.0$$

Граничные условия:

$$k_w = 0, \quad \omega_w = 800v / d_1^2 \quad (\text{A.47})$$

## А.2.5 Поправка [180] на кривизну линий тока и вращение системы отсчета

Модифицируется выражение для генерационного члена  $P_k$  (в обоих уравнениях):

$$P_k \rightarrow P_k f_{r1}, \quad f_{r1} = \max\{0.0, \min(f_{rotation}, 1.25)\} \quad (\text{A.48})$$

где

$$f_{rotation} = (1 + c_{r1}) \frac{2r^*}{1 + r^*} [1 - c_{r3} \tan^{-1}(c_{r2} \tilde{r})] - c_{r1}, \quad r^* = \frac{S}{\tilde{\Omega}} \quad (\text{A.49a})$$

$$\tilde{r} = \frac{2\tilde{\Omega}_{ik} S_{jk}}{\tilde{\Omega} D^3} \left[ \frac{DS_{ij}}{Dt} + (\varepsilon_{imn} S_{jn} + \varepsilon_{jmn} S_{in}) \omega_m^{rot} \right], \quad D^2 = \max(S^2, 0.09\omega^2) \quad (\text{A.49б})$$

$$S_{ij} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right), \quad \tilde{\Omega}_{ij} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} - \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) + \varepsilon_{mji} \omega_m^{rot}, \quad \begin{aligned} S^2 &= 2S_{ij}S_{ij} \\ \tilde{\Omega}^2 &= 2\tilde{\Omega}_{ij}\tilde{\Omega}_{ij} \end{aligned} \quad (\text{A.49в})$$

Значения эмпирических констант:

$$c_{r1} = 1, \quad c_{r2} = 2, \quad c_{r3} = 1 \quad (\text{A.50})$$

### А.3 Прочие модели

#### А.3.1 Модель SA [184] (Spalart, Allmaras, 1992)

Основное уравнение<sup>1</sup>:

$$\rho \frac{d\tilde{v}}{dt} = \nabla \cdot \left( \frac{\mu + \rho\tilde{v}}{\sigma} \nabla \tilde{v} \right) + \rho \left[ C_{b1} \tilde{S} \tilde{v} + \frac{C_{b2}}{\sigma} (\nabla \tilde{v})^2 - C_{w1} f_w \left( \frac{\tilde{v}}{d} \right)^2 \right] \quad (\text{A.51})$$

Здесь:

$$v_t = f_{v1} \tilde{v}, \quad f_{v1} = \frac{\chi^3}{\chi^3 + C_{v1}^3}, \quad \chi = \frac{\tilde{v}}{v} \quad (\text{A.52a})$$

$$f_w = g \left( \frac{1 + C_{w3}^6}{g^6 + C_{w3}^6} \right)^{1/6}, \quad g = r + C_{w2} (r^6 - r), \quad r = \frac{\tilde{v}}{\tilde{S} \kappa^2 d^2} \quad (\text{A.52б})$$

$$\tilde{S} = \Omega + f_{v2} \frac{\tilde{v}}{\kappa^2 d^2}, \quad f_{v2} = 1 - \frac{\chi}{1 + \chi f_{v1}} \quad (\text{A.52в})$$

Константы модели:

$$\begin{aligned} \sigma &= 2/3, \quad \kappa = 0.41, \quad C_{b1} = 0.1355, \quad C_{b2} = 0.622 \\ C_{w1} &= \frac{C_{b1}}{\kappa^2} + \frac{(1 + C_{b2})}{\sigma}, \quad C_{w2} = 0.3, \quad C_{w3} = 2, \quad C_{v1} = 7.1 \end{aligned} \quad (\text{A.53})$$

Граничные условия:

<sup>1</sup> Без т. наз. trip-функций, инициирующих турбулизацию пограничного слоя в предписанной точке

$$\tilde{v}_w = 0 \quad (\text{A.54})$$

Версия RANS-LES [185] (Spalart et al., 1997)

$$d \rightarrow L = \min(d, C_{LES} \Delta), \quad C_{LES} = 0.65 \quad (\text{A.55})$$

Поправка [186] на кривизну линий тока и вращение системы отсчета

Работа [186] содержит опечатки. Ниже дана исправленная формулировка [178].

Генерационный член  $C_{b1} \tilde{S} \tilde{v}$  (A.51) домножается на функцию вращения  $f_{r1}$ :

$$f_{r1} = (1 + c_{r1}) \frac{2r^*}{1 + r^*} [1 - c_{r3} \tan^{-1}(c_{r2} \tilde{r})] - c_{r1} \quad (\text{A.56})$$

где

$$r^* = \frac{S}{\tilde{\Omega}}, \quad \tilde{r} = \frac{2\tilde{\Omega}_{ik} S_{jk}}{D^4} \left[ \frac{DS_{ij}}{Dt} + (\varepsilon_{imn} S_{jn} + \varepsilon_{jmn} S_{in}) \omega_m^{rot} \right], \quad D^2 = \frac{1}{2} (S^2 + \tilde{\Omega}^2) \quad (\text{A.57})$$

Значения эмпирических констант:

$$c_{r1} = 1, \quad c_{r2} = 12, \quad c_{r3} = 1 \quad (\text{A.58})$$

### A.3.2 K-модель [210] (Wolfstein, 1969)

Определяющее уравнение:

$$\rho \frac{dk}{dt} = \nabla \cdot \left( \left( \mu + \frac{\mu_T}{\sigma_k} \right) \nabla k \right) + P_k - \rho \varepsilon, \quad \varepsilon = \frac{k^{3/2}}{L} \quad (\text{A.59})$$

Замыкающие соотношения:

$$L = \kappa C_\mu^{-3/4} d \cdot F_\varepsilon, \quad F_\varepsilon = 1 - \exp(-\text{Re}_y / A_\varepsilon), \quad \text{Re}_y = \sqrt{k} d / \nu \quad (\text{A.60a})$$

$$\mu_T = C_\mu f_\mu \rho k^2 / \varepsilon = C_\mu f_\mu \rho k^{1/2} L, \quad f_\mu = 1 - \exp(-\text{Re}_y / A_\mu) \quad (\text{A.60б})$$

Константы:

$$\sigma_k = 1.0, \quad A_\varepsilon = 2\kappa C_\mu^{-3/4} = 5.1, \quad A_\mu = 70, \quad C_\mu = 0.09 \quad (\text{A.61})$$

Граничные условия:

$$k_w = 0 \quad (\text{A.62})$$

Версия RANS-LES [109] (Abramov et al., 2003)

$$L^{RANS} = L \rightarrow L^* = \min(L^{RANS}, L^{LES}) \quad (\text{A.63a})$$

$$f_\mu \rightarrow 1 - \exp\left(-\frac{Re_y}{A_\mu} \cdot \frac{L^*}{L^{RANS}}\right) \quad (\text{A.63б})$$

$$L^{LES} = C^{LES} \cdot \Delta, \quad C^{LES} = 1.33, \quad A_\mu = 10 \quad (\text{A.63в})$$

### A.3.3 K-ε-v<sup>2</sup>-f модель [156, 158]

Это т.наз. «code-friendly» версия v<sup>2</sup>-f модели Дурбина [123].

Определяющие уравнения:

$$\rho \frac{dk}{dt} = \nabla \cdot \left( \left( \mu + \frac{\mu_T}{\sigma_k} \right) \nabla k \right) + P_k - \rho \varepsilon, \quad (\text{A.64a})$$

$$\rho \frac{d\varepsilon}{dt} = \nabla \cdot \left( \left( \mu + \frac{\mu_T}{\sigma_\varepsilon} \right) \nabla \varepsilon \right) + C_{\varepsilon 1} \frac{P_k}{T} - C_{\varepsilon 2} \frac{\rho \varepsilon}{T} \quad (\text{A.64б})$$

$$\rho \frac{d\overline{v^2}}{dt} = \nabla \cdot \left( \left( \mu + \frac{\mu_T}{\sigma_k} \right) \nabla \overline{v^2} \right) + \rho k f - \rho N \overline{v^2} \frac{\varepsilon}{k} \quad (\text{A.64в})$$

$$f - L^2 \nabla^2 f = (C_1 - 1) \frac{2/3 - \overline{v^2}/k}{T} + C_2 \frac{P_k}{k} + (N - 1) \frac{\overline{v^2}}{kT} \quad (\text{A.64г})$$

Здесь:

$$\mu_T = C_\mu \rho \overline{v^2} T, \quad T = \max\left(\frac{k}{\varepsilon}, 6\sqrt{\frac{\nu}{\varepsilon}}\right), \quad L = C_L \max\left[\frac{k^{3/2}}{\max(\varepsilon, \sqrt{3\nu^2} C_\mu S)}, C_\eta \left(\frac{\nu^3}{\varepsilon}\right)^{1/4}\right] \quad (\text{A.65})$$

Константы модели:

$$\begin{aligned} C_\mu &= 0.22, & \sigma_k &= 1.0, & \sigma_\varepsilon &= 1.3, & C_{\varepsilon 1} &= 1.4 \left(1 + 0.05 \sqrt{k/\overline{v^2}}\right) \\ C_{\varepsilon 2} &= 1.9, & N &= 6, & C_1 &= 1.4, & C_2 &= 0.3, & C_L &= 0.23, & C_\eta &= 70 \end{aligned} \quad (\text{A.66})$$

Граничные условия:

$$k_w = 0, \quad \overline{v^2}_w = 0, \quad \varepsilon_w = 2\nu k_1/d_1^2, \quad f_w = 0 \quad (\text{A.67})$$

### А.3.4 К-ε-ζ-f модель [133] (Hanjalic et al, 2004)

Вариант модели Дурбина [123], сформулированный с использованием переменной  $\zeta = \overline{v^2} / k$  вместо  $\overline{v^2}$ .

Определяющие уравнения:

$$\rho \frac{dk}{dt} = \nabla \cdot \left( \left( \mu + \frac{\mu_T}{\sigma_k} \right) \nabla k \right) + P_k - \rho \varepsilon, \quad (\text{A.68a})$$

$$\rho \frac{d\varepsilon}{dt} = \nabla \cdot \left( \left( \mu + \frac{\mu_T}{\sigma_\varepsilon} \right) \nabla \varepsilon \right) + C_{\varepsilon 1} \frac{P_k}{T} - C_{\varepsilon 2} \frac{\rho \varepsilon}{T} \quad (\text{A.68б})$$

$$\rho \frac{d\zeta}{dt} = \nabla \cdot \left( \left( \mu + \frac{\mu_T}{\sigma_\zeta} \right) \nabla \zeta \right) + \rho f - \frac{\zeta}{k} P_k \quad (\text{A.68в})$$

$$f - L^2 \nabla^2 f = \frac{1}{T} \left[ (C_1 - 1) + C_2 \frac{P_k}{\varepsilon} \right] \cdot \left( \frac{2}{3} - \zeta \right) \quad (\text{A.68г})$$

Здесь:

$$\mu_T = C_\mu \rho \zeta k T, \quad T = \max \left( \frac{k}{\varepsilon}, 6 \sqrt{\frac{\nu}{\varepsilon}} \right), \quad L = C_L \cdot \max \left( \frac{k^{3/2}}{\varepsilon}, C_\eta \left( \frac{\nu^3}{\varepsilon} \right)^{1/4} \right) \quad (\text{A.69})$$

Константы модели:

$$\begin{aligned} C_\mu = 0.22, \quad \sigma_k = 1.0, \quad \sigma_\varepsilon = 1.3, \quad \sigma_\zeta = 1.2, \quad C_{\varepsilon 1} = 1 + 0.012/\zeta \\ C_{\varepsilon 2} = 1.9, \quad C_1 = 1.4, \quad C_2 = 0.65, \quad C_L = 0.36, \quad C_\eta = 85 \end{aligned} \quad (\text{A.70})$$

Граничные условия:

$$k_w = 0, \quad \zeta_w = 0, \quad \varepsilon_w = 2\nu k_1 / d_1^2, \quad f_w = -2\nu \zeta_1 / d_1^2. \quad (\text{A.71})$$