

Федеральное государственное автономное образовательное учреждение
высшего образования
«Санкт-Петербургский Политехнический Университет Петра Великого»



На правах рукописи

БАХРАМИ Мохаммад Реза

**Машина для диагностики проводов линий электропередач:
конструкция и математическое моделирование**

Специальность 05.02.02 — Машиноведение, системы приводов и детали машин

Диссертация на соискание ученой степени кандидата технических наук

Научный руководитель:
доктор физико-математических наук,
профессор Елисеев В. В.

Санкт-Петербург

2016

Оглавление

Введение.....	4
Глава 1. Концепция и конструкция диагностической машины	15
1.1. Исходные требования к ДМА	15
1.2. Существующие варианты конструкции.....	17
1.3. Специфические требования для прототипа	22
1.4. Основная механическая схема ДМА	25
Выводы по главе 1	30
Глава 2. Движение ДМА по проводу в вертикальной плоскости	31
2.1. Струна с подвижной нагрузкой.....	31
2.2. Уравнения Лагранжа.....	38
2.3. Провод как нить	43
2.4. Струна с движущейся массой.....	46
2.5. Влияние сил сопротивления	50
Выводы по главе 2	55
Глава 3. Параметрические колебания системы	56
3.1. Маятник с подвижной точкой подвеса	56
3.2. Уравнения для параметрических колебаний ДМА	59
3.3 Параметрическая неустойчивость.....	63
Выводы по главе 3	65
Глава 4. Механика контактного соединения ДМА с проводом	67
4.1. Контакт твердых тел	67
4.2. Решение Герца.....	73
4.3. Контакт упругих тел	76
Выводы по главе 4	79
Глава 5. Колебания при ограниченной мощности двигателя	80
5.1. Уравнения Лагранжа для системы с двигателем	80
5.2. Алгоритм и результаты численного моделирования	82
5.3. Энергетика колебаний	86

Выводы по главе 5	88
Заключение	90
Список литературы	92
Приложения: листинги Mathcad	105
П.1. Пилообразные колебания	105
П.2. Уравнения Лагранжа.....	108
П.3. Модели провода	111
П.4. Струна с подвижной массой.....	114
П.5. Колебания с сопротивлением	117
П.6. ДМА как маятник.....	120
П.7. Контакт жестких тел	125
П.8. Контакт упругих тел	130
П.9. ДМА с двигателем.....	133

Введение

Актуальность темы диссертации. Воздушные линии электропередач (ЛЭП) являются особо важными элементами инфраструктуры и нуждаются в постоянном мониторинге. Необходим регулярный осмотр ЛЭП, который может быть наземным, воздушным и автоматическим. Наземный контроль проводится персоналом на автомобилях, снегоходах, пешком с использованием биноклей, инфракрасных камер и других средств. Воздушная инспекция с помощью вертолета, самолета или беспилотных летательных аппаратов – следующий уровень проверки.

Более перспективен автоматический контроль ЛЭП. Здесь есть ряд возможностей для автоматизации. Например, можно осматривать соединения проводов, используя роботизированный прибор на вертолете. Другая возможность – установить на линии фиксированные системы датчиков, передающих информацию (по кабелю или радио) о температуре провода, токе, магнитном поле и прогибе провода. Начинают применяться и мобильные системы датчиков, не прикрепленных к ЛЭП.

Но особого внимания достоин роботизированный осмотр с использованием автономных или дистанционно управляемых машин, способных двигаться по ЛЭП и диагностировать их состояние. Одно из основных требований к таким машинам – возможность преодолевать препятствия на проводах: изоляторы, амортизаторы, сигнализаторы опасности для самолетов, зажимы и др. Для этого в конструкции машины должны быть предусмотрены соответствующие переставляемые элементы.

Контроль воздушных ЛЭП высокого напряжения, выполняемый человеком, может быть опасен для персонала. В связи с этим в ряде стран ведутся интенсивные разработки специальных диагностических машин-автоматов (ДМА), способных заменить человека. Такие машины (роботы-инспекторы) уже применяются в некоторых энергетических компаниях. Разработка концепции,

конструирование и всестороннее математическое моделирование поведения новой ДМА и являются темой данной диссертации.

Проблема в том, что работа ДМА на проводах может быть нарушена из-за податливости проводов на прогиб. Как показано в данной диссертации, даже при медленном равномерном движении ДМА могут возникнуть опасные интенсивные колебания без каких-либо внешних возмущений. На элементы машины начинают действовать значительные инерционные нагрузки, приводящие к отказам или разрушению. Математическое моделирование движения ДМА по проводам позволяет предсказать нежелательные явления, предотвратить аварии, избежать затратных и опасных экспериментов, а также оптимизировать конструкцию и режимы работы.

Цель работы – разработка концепции новой машины (ДМА) для диагностики проводов воздушных ЛЭП, а также всестороннее математическое моделирование ее движений с выявлением допустимых режимов и работоспособных вариантов.

Соответствие паспорту специальности диссертационной работы имеет место согласно п. 6 паспорта: «Развитие фундаментальных положений родственных и смежных областей науки применительно к исследованию, проектированию и расчетам объектов машиностроения». Родственными и смежными являются специальности: 01.02.04 (Механика деформируемого твердого тела), 01.02.06 (Динамика и прочность машин), 05.02.18 (Теория машин и механизмов), 05.02.11 (Методы контроля и диагностики в машиностроении).

Задачи исследования:

1. Разработка концепции новой ДМА с механизмом для перехода препятствий и контактным упругим соединением с проводом.
2. Построение математической модели провод-ДМА и расчеты колебаний в вертикальной плоскости для различных законов перемещения.
3. Обоснование модели натянутой струны для провода.

4. Моделирование параметрических поперечных колебаний.
5. Анализ прочности контактного соединения в подвесе ДМА к проводу.
6. Исследование влияния ограниченности мощности двигателя на колебания.
7. Выработка рекомендаций по закону движения и параметрам ДМА.

Степень разработанности темы

В истории создания ДМА (глава 1) одной из первых явилась работа Аошимы (S. Aoshima) и соавт. [65] об инспекционных роботах для проверки телефонных линий. Но у первого прототипа была сложная система управления и низкая скорость движения. Савада (J. Sawada) и соавт. [124] спроектировали машину для осмотра линии волоконно-оптических кабелей. Эта ДМА была способна перемещаться на линиях с 30-градусным уклоном; однако у нее была низкая скорость движения и недостаточная стабильность исполнения функций. Хигучи (M. Higuchi) и соавт. [91] предложили новый аппарат для осмотра ЛЭП, уделив особое внимание устойчивости при проходе через препятствия. Тсуджимура (T. Tsujimura) и соавт. [130] спроектировали подвесную машину для осмотра телекоммуникационных кабелей, способную ползать по проводам. О других разработках для осмотра телекоммуникационных кабелей сообщается в статьях [89, 90].

Одним из самых современных роботов для осмотра ЛЭП был «Разведчик линии» (Line scout), который спроектировали Монтамбаулт и Поулиот (S. Montambault, N. Pouliot) в 2007 г. [106, 109]. Этот робот (рис. В.1) может пройти различные виды препятствий на проводах, причем с высокой скоростью [108, 117, 118, 123]. Машина может двигаться как по фазовой линии, так и по линии заземления. Ряд других аппаратов для осмотра ЛЭП описан в [68, 69, 97, 98].



Рис. В.1. Line scout

Инженерные решения по теме (глава 1) представлены также в работах Abdalla H.H. at al [63], Balthazar J.M. at al [69], Bühringer M. at al [71, 72], Becker M. at al [73], Cai L. at al [74], Wang C. at al [75], Debenest P. at al [76], Gonsalves R.S. at al [89, 90], Guo D. at al [77], Yang D. at al [78], Elizondo D. at al [80], Jones D.I. at al [81, 92, 95], Fang F.J. at al [82], Wu G. at al [87], Giarratano J.C. at al [84], Lu G. at al [85], Rui G. at al [86], Ostendorp M. at al [113], Peungsungwa1 S. at al [115, 119], Pinto A.V. at al [116], Rienstra S. W. at al [120],] Zhibin R. at al [121], Rocha J. at al [122], Simo J. at al [125], Fu S. at al [126], Yifeng S. at al [128], Li T. at al [131], Tanaka S. at al [132], Vidberg P. at al [133], Xiao X. at al [134], Li Z. at al [136], Zhou F.Y. at al [137].

Теоретическую основу математического моделирования динамики системы в данной работе (главы 2, 3) составляют книги А.А. Андронова, А.А. Витта А.А. и С.Э. Хайкина [3], Л.Г. Лойцянского и А.И. Лурье [39], Л.И. Мандельштама [41], В.Л. Бидермана [6], Ф.Р. Гантмахера [13], Я.Г. Пановко и И.И. Губановой [46], С.П. Тимошенко, Д.Х. Янга и У. Уивера [56].

Уравнения математической физики, используемые в работе (глава 2) , представлены в книгах Н.С. Кошлякова, Э.Б. Глинера и М.М. Смирнова [37], А.Н.

Тихонова и А.А. Самарского [57]. Вариационные методы изложены у К. Ректориса [49] и Л.Э. Эльсгольца [62].

О механике стержней и нитей (глава 2) написаны книги В.В. Елисеева [20, 21], Д.Р. Меркина [42], В.А. Светлицкого [51] и ряд статей [79, 111, 112, 114].

Различные вопросы конструирования машин (глава 1) по теме диссертации рассматривали С.Ф. Бурдаков, В.А. Дьяченко и А.Н. Тимофеев [8], М.З. Коловский, А.В. Слоущ [35], И.Б. Челпанов [60], К.В. Фролов К.В. и Е.И. Воробьев [58], В.А. Жуков [28], А.Т. Скойбеда, А.В. Кузьмин и Н.Н. Макейчик [53], Г.И. Роцин и Е.А. Самойлов [50].

Общим вопросам диагностики (глава 1) посвящены книги И.А. Биргера [7], И.И. Артоболевского, Ю.И. Бобровницкого и М.Д. Генкина [5], А.Д. Ананьина, В.М. Михлина, И.И. Габитова, А.В. Неговоры и А.С. Иванова [2], В.В. Носова [44].

Специальные вопросы диагностики воздушных ЛЭП (глава 1) рассматривали Р.С. Арбузов и А.Г. Овсянников [4], В.П. Дикой, А.А. Левандовский и В.В. Старцев [18], И.Т. Разумовский [48]

Колебания проводов воздушных ЛЭП (глава 2) изучали Л.М. Кесельман [33], Р.Ш. Гимадиев, Ф.Ф. Динмухаметов и Н.Р. Галимуллин [14], О.А. Иванова [32], А.И. Соколов [55], В.Д. Шалашилин, А.Н. Данилин, Ю.Л. Цветков и С.В. Рыжов [61], а также Irvine Н.М., Caughey Т.К. [94].

Динамике машин (главы 2, 3, 5) посвящены работы Г.А. Смирнова Г.А., А.Н. Евграфова и А.В. Слоуща [54], И.И. Вульфсона [11], В.Л. Вейца, А.Е. Кочуры и М.З. Коловского [9], Ю.А. Семенова [52].

Параметрические колебания (глава 3) рассматривались Л.И. Мандельштамом [41], Я.Г. Пановко [45], А.А. Зевиным [29].

По контактными задачам (глава 4) имеются книги Л.А. Галина [12], А.И. Лурье [40], К.Л. Джонсона [17], З.М. Левиной и Д.Н. Решетова [38], также статьи Ю.Н. Дроздова, С.Л. Соколова и Б.Н. Ушакова [19], А.С. Иванова и Б.А. Попова [30, 31], Ф.Г. Нахатакяна [43].

Особенности динамики систем с ограниченным возбуждением (глава 5) изучали В.О. Кононенко [36], А.А. Алифов и К.В. Фролов [1], В.Л. Вейц и А.Е. Кочура [10], К.К. Глухарев [15], И.Ф. Гончаревич [16], Н.В. Перепелкин и Ю.В. Михлин [47], К.Ш. Ходжаев [59].

Объем и структура диссертации

Суммарный объем работы 139 с. Основной текст занимает 107 с. Работа состоит из введения, пяти глав, заключения и 9 приложений; содержит 52 рисунка и таблицу. В списке цитируемой литературы 140 наименований.

Содержание работы

В главе 1 изложены требования к новой ДМА, главным из которых является возможность перехода через препятствия (изоляторы, амортизаторы, виброгасители, предупреждающие знаки и др.). Дан обзор существующих схем и их возможностей. Представлена новая ДМА в виде макета и компьютерной модели (рис. В.2). Детально описаны узлы ДМА. Особое внимание уделено подвесу с разъемными контактными соединениями и стяжной пружиной. В проекте технического задания предусмотрена и электромеханическая часть (двигатели и датчики).

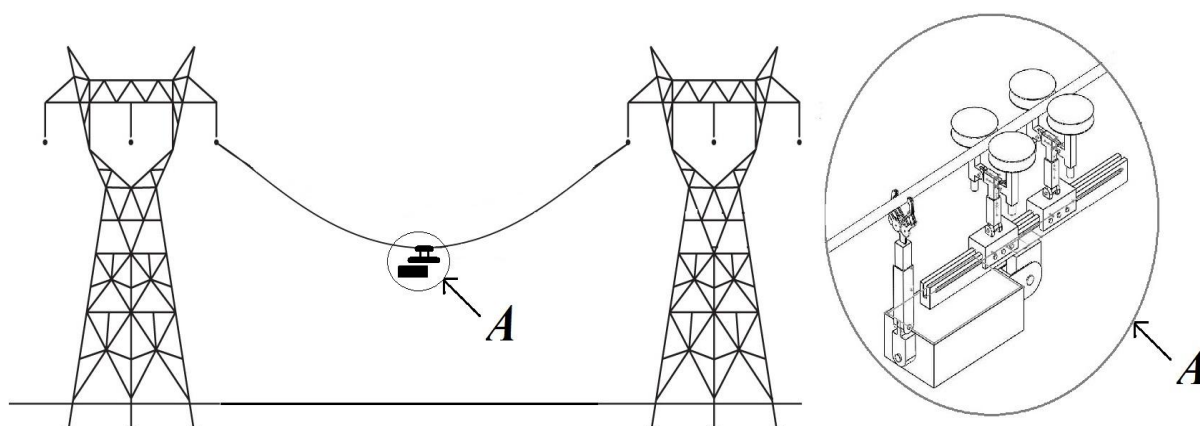


Рис. В.2. Новая ДМА

В главе 2 рассматриваются динамические прогибы в вертикальной плоскости, возникающие при движении ДМА. Глава состоит из следующих

частей: модель струны с подвижной нагрузкой, обоснование модели струны на основе механики упругих нитей, постановка и решение задачи с движущейся массой, учет сил внешнего сопротивления. Методика моделирования во всех частях включает в себя составление уравнений динамики конструкций и решение их средствами компьютерной математики (*Mathcad*).

Для провода используются модели двух видов: традиционные континуальные (с распределенными параметрами и уравнениями в частных производных) и дискретные (с уравнениями Лагранжа 2-го рода). Последние оказались очень эффективными, результаты в тех и других моделях совпали.

Уже простое точное решение (методом Фурье) показало, что даже при равномерном медленном движении нагрузки возникают пилообразные колебания большой амплитуды. Эти колебания нельзя отнести ни к одному из известных видов (свободные, вынужденные, автоколебания, параметрические).

Проделанный анализ провода как упругой нити показал, что можно ограничиться более простой моделью натянутой струны и по критерию прогиба, и по силе натяжения. При рассмотрении более сложной модели растянутого стержня с конечной изгибной жесткостью обнаружено, что влияние последней незначительно.

С уравнениями Лагранжа оказалось возможно перейти от варианта с подвижной нагрузкой к варианту с подвижной массой при произвольном законе движения. Система обыкновенных дифференциальных уравнений (ОДУ) решается в *Mathcad* даже при большом числе степеней свободы. Рассмотрены движения с различными законами, включая вариант с остановкой.

При учете сил сопротивления рассмотрено два случая: с линейной зависимостью от скорости и с квадратичной. В первом случае вычислительных трудностей не было, а во втором они оказались значительны.

Взятые вместе, все части главы дают представление о нежелательных динамических явлениях при движении ДМА и позволяют предотвратить их после соответствующих расчетов с разными законами движения.

Глава 3 является логическим продолжением предыдущей, если представить маятник с колеблющейся точкой подвеса. Центр массы ДМА находится ниже места подвеса, которое колеблется по пилообразному закону. Имеем случай параметрического возбуждения колебаний маятника – но не в «чистом» классическом виде. Можно предположить, что эти параметрические колебания окажутся еще более нежелательными и опасными, чем пилообразные (в вертикальной плоскости). Вся глава 3 – об этих колебаниях.

Постановка задачи неочевидна, поскольку трудности рассмотрения пространственных колебаний в этом случае велики. Однако считая исходное движение заданным, удалось смоделировать параметрические колебания провода с ДМА. Как и выше, методика основана на уравнениях Лагранжа и компьютерной математике. Добавилась лишь одна обобщенная координата – угол отклонения маятника. Но в проделанных расчетах колебания оказались не особо опасными. Однако все же выявлены случаи «слабого» параметрического резонанса.

Глава 4 по характеру содержания отличается от всех других. В ней рассматривается механика оригинального подвеса новой ДМА к проводу ЛЭП. Пара шкивов с желобом прижимается к проводу посредством натяжения пружинной стяжки. Здесь возникают две качественно разные контактные задачи: для твердых и для упругих тел.

В «твердотельной» задаче рассматривается сложная геометрия подвижных контактирующих тел (провода и шкивов). Выведенные уравнения аналитической статики (с учетом пружины) решаются опять-таки средствами компьютерной математики. В результате построена кривая перемещение-нагрузка, и по экстремуму на ней определена прочность соединения.

Контактная задача с учетом податливости шкивов и провода решается по классической схеме Герца (с эллиптическими интегралами). Сложности описания геометрии поверхностей контакта преодолены с помощью дифференциальной геометрии.

Глава 5 является продолжением глав 2 и 3 (о колебаниях). В ее основе – вопрос об энергетике колебаний. Хватит ли мощности двигателя на раскачку системы и не заглохнет ли он? Закон движения ДМА по проводу в этой главе не считается заданным, а определяется дополнительной обобщенной координатой.

При составлении уравнений Лагранжа крутящий момент двигателя считался функцией угловой скорости – как в известных работах об эффекте Зоммерфельда [46]. Методика с уравнениями Лагранжа и *Mathcad* позволила смоделировать и этот новый сложный случай. Но расчеты удалось провести только для упрощенной линейной динамической характеристики двигателя.

Однако и при ограниченной мощности двигателя пилообразные колебания сохранились. Для объяснения рассмотрена структура кинетической энергии всей системы; вклад ДМА в ней оказался незначительным.

Приложения (числом 9) содержат листинги алгоритмов *Mathcad* из глав 2-5. По этим листингам любой читатель диссертации может не только повторить наши расчеты, но и провести их для других параметров провода, ДМА и любого закона движения. Поэтому листинги можно рассматривать как важный практический результат работы.

Практическая ценность работы состоит в том, что:

1. разработана концепция новой ДМА с механизмом обхода препятствий и подвеса к проводу;
2. проведено всестороннее математическое моделирование системы провод-ДМА при произвольном законе перемещения;
3. определена область допустимых значений параметров и законов движения;
4. алгоритмы расчетов в виде листингов адаптированы для широкого круга пользователей.

Достоверность результатов диссертационной работы обеспечена корректным применением законов и уравнений механики системы провод-

машина, использованием проверенных алгоритмов компьютерной математики, выявлением практической сходимости вычислительных алгоритмов и многовариантностью расчетов.

Научная новизна состоит в следующем:

1. разработана новая ДМА с оригинальным механизмом для перехода препятствий и контактном разъемным упругим соединением с проводом;
2. построена математическая модель провод-ДМА при движении в вертикальной плоскости и созданы алгоритмы ее расчета средствами компьютерной математики;
3. обнаружены пилообразные колебания в вертикальной плоскости, возникающие даже при равномерном движении ДМА;
4. обоснована модель натянутой струны для провода как упругой нити;
5. исследовано влияние на пилообразные колебания различных факторов: закона движения, натяжения и изгибной жесткости провода, сил сопротивления;
6. рассмотрены параметрические поперечные колебания и выявлена их зависимость от параметров ДМА и закона движения;
7. предложена методика анализа прочности контактного соединения в подвесе ДМА к проводу и произведены расчеты конкретных вариантов;
8. разработана методика математического моделирования системы провод-ДМА с учетом характеристики двигателя с ограниченной мощности и проведены демонстрационные расчеты.

Положения, выносимые на защиту:

1. Концепция новой ДМА с механизмом для перехода препятствий и контактном упругим соединением с проводом.
2. Математическая модель провод-ДМА в вертикальной плоскости и методика численного расчета колебаний при произвольном законе движения.

3. Обоснование модели натянутой струны для провода.
4. Математическая модель и метод расчета параметрических поперечных колебаний.
5. Решение контактных задач для твердых и упругих тел в соединении подвеса ДМА к проводу.
6. Постановка и решение задач динамики ДМА при ограниченной мощности двигателя.

Апробация работы. Результаты работы докладывались на конференциях:

- 4-ой Международной научно-практической конференции «Современное Машиностроение: Наука и Образование». 19-20 июня 2014. Санкт-Петербург, Россия.
- Научном форуме с международным участием «Неделя Науки СПбПУ» 1-6 декабря 2014. Санкт-Петербург, Россия.

Публикации

По теме работы диссертации опубликовано 7 работ [23-27, 66, 67], из которых 3 [23-25] – в журналах из перечня ВАК РФ и [67] – в изданиях, индексируемых Scopus.

Глава 1. Концепция и конструкция диагностической машины

1.1. Исходные требования к ДМА

Машина для диагностики ЛЭП (ДМА) должна удовлетворять следующим очевидным исходным требованиям:

- Двигаться вдоль проводника ЛЭП;
- Проходить типичные препятствия на линии;
- Проверять выполнение определенных функций на ЛЭП;
- Поддерживать связь с базовой станцией;
- Не повреждать проводник и изоляторы;
- Не вызывать электрических разрядов.

Перед инспекцией система программируется, ДМА транспортируется к месту и поднимается на линию, где сразу начинается проверка. Пошаговый сценарий:

- Определение миссии; установка параметров для работы ДМА;
- Подъем на линию;
- Движение ДМА с инспекцией;
- Обнаружение и обход препятствий;
- Спуск;
- Сбор полученной информации;
- Поддержание ДМА.

Рассмотрим далее элементы этого списка.

Определение миссии. Это набор данных для программы осмотра: начальная и конечная координаты, какие вышки пройдет ДМА, какие будут препятствия и какие данные нужно собрать [70].

Установка ДМА на линию и спуск. Здесь можно рассматривать ряд подходов:

- Использование механических рук (с изоляцией);

- Доставка ДМА на вышку и установка с нее на провод;
- Опускание ДМА на провод с вертолета [135];
- Посредством каната, наброшенного на провод.

Механическая рука является затратным сложным вариантом. Восхождение на вышку весьма опасно. Установка же машины с вертолета противоречит одной из целей проекта – не использовать летательные аппараты. Остается единственный вариант – подъем наброшенным канатом.

Препятствия. Некоторые распространенные препятствия перечислены ниже [80, 127]: изолятор, скрутка провода с прокладками, виброгаситель, предупреждающий шар (для самолетов), натяжной зажим. При проходе препятствий первых четырех типов манипулятор ДМА должен захватить линию на другой стороне препятствия. В случае зажима требуется захват другой линии.

Инспекция. Вот список стандартных элементов поиска при инспекции ЛЭП:

- Поврежденное оборудование;
- Посторонние предметы на линии;
- Растительность в опасной близости.

Основным является осмотр оборудования и растительности. С посторонними предметами трудность в том, что они могут быть неизвестного ранее вида. Эффективность проверки зависит от используемых датчиков [64, 78, 83, 88, 96, 99-105, 107, 110].

Сбор информации. При осмотре собирается много данных: видео, фото, аудио и других. Способ представления данных и их анализ решающим образом влияет на эффективность инспекции. Необходимы автоматизированные инструменты для анализа данных.

Поддержание ДМА. Машина должна быть простой в обслуживании и ремонтнопригодной.

1.2. Существующие варианты конструкции

Чтобы предложить конструкцию машины, удовлетворяющую определенным требованиям, были изучены уже существующие варианты. Проблема может быть рассмотрена с разных точек зрения, и выбранный подход окажет большое влияние на будущее проекта. Хороший подход обеспечит быстрое строительство грубого, но функционального прототипа.

ДМА содержит много электрических и электронных систем, датчиков и механизмов. В этом разделе рассматривается механическая система. Во введении были описаны несколько ДМА, способных двигаться на ЛЭП. В этом разделе будут более подробно рассмотрены конструкции, в которых предполагается использование новых методов для движения на ЛЭП.

Конструкция А была разработана в ABB Corporate Research. Она включает в себя два набора колес на проводе (рис. 1.1). Колесные блоки присоединены к корпусу машины. Противовесы (батареи и другие тяжелые части) отстранены от колес, чтобы разместить центр массы под машиной для статической устойчивости.

Когда надо преодолевать препятствие, то сначала центр массы перемещается вперед под передним колесным блоком. Это достигается перемещением противовесов вперед. Когда центр массы находится под передним колесным блоком, другой колесный блок может отсоединиться от провода. Затем машина поворачивается и может проходить препятствие путем присоединения к другой стороне. Во время вращения противовесы регулируются таким образом, что центр массы постоянно находится под передним колесным блоком.

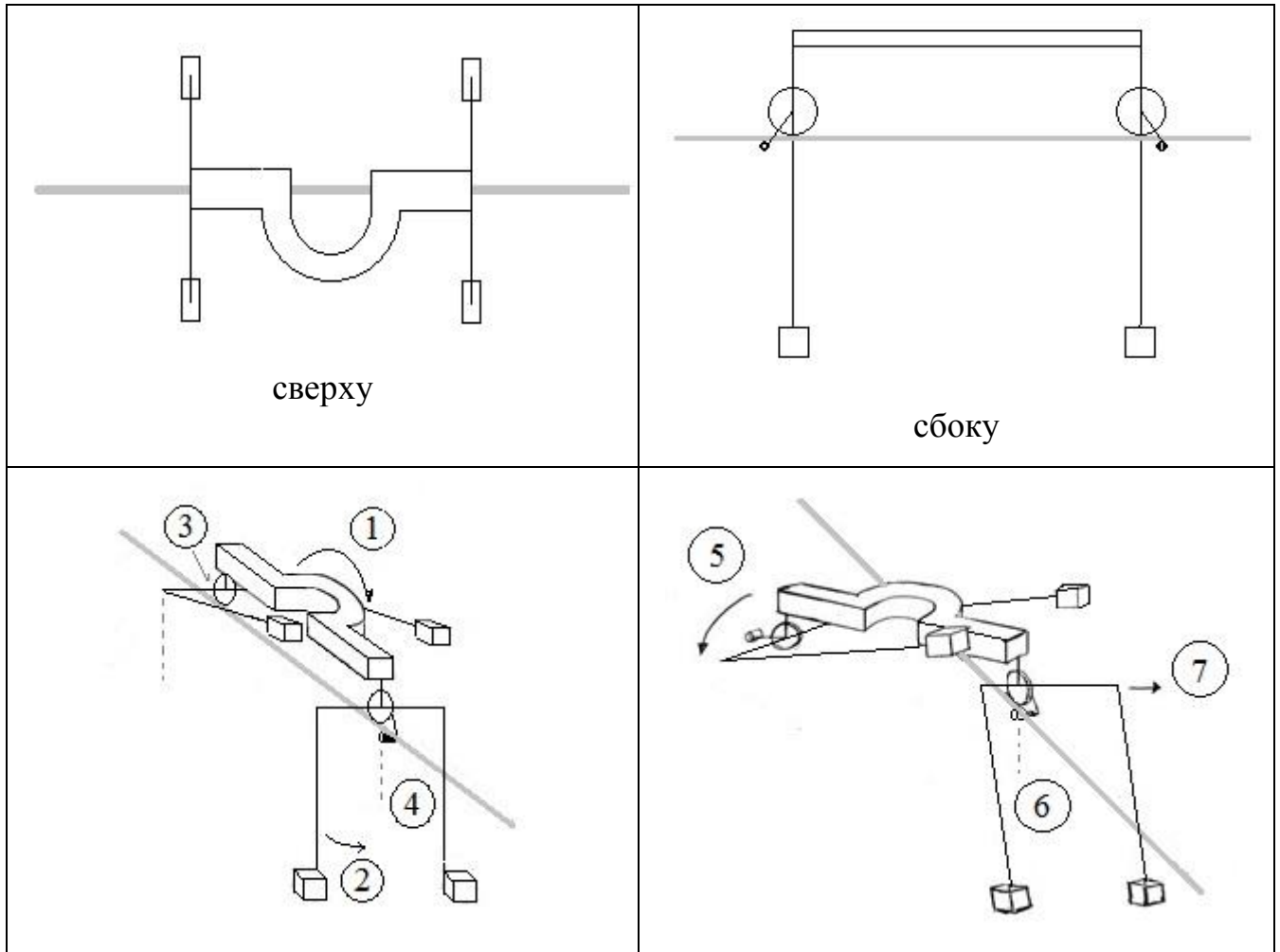


Рис. 1.1. Конструкция А

Достоинство конструкции: когда машина проходит рядом с изолятором, он хорошо виден. Недостатки:

- Минимальное расстояние между машиной и линией заземления вызывает опасения в связи с вращением при проходе препятствия;
- Устойчивость не вполне обеспечена, особенно в ветреную погоду, так как машина бывает прикреплена только одним колесным блоком.

Конструкция В машины (рис. 1.2) была изменена, для решения проблем дизайна число степеней свободы и сложность в управлении машиной пытались свести к минимуму. ДМА на основе этой конструкции является очень гибкой и может пройти почти любое препятствие. Структура машины включает в себя три

руки, которые перемещаются и могут быть приложены к проводу с разных сторон. Она может двигаться на проводе так же, как человек или шимпанзе.

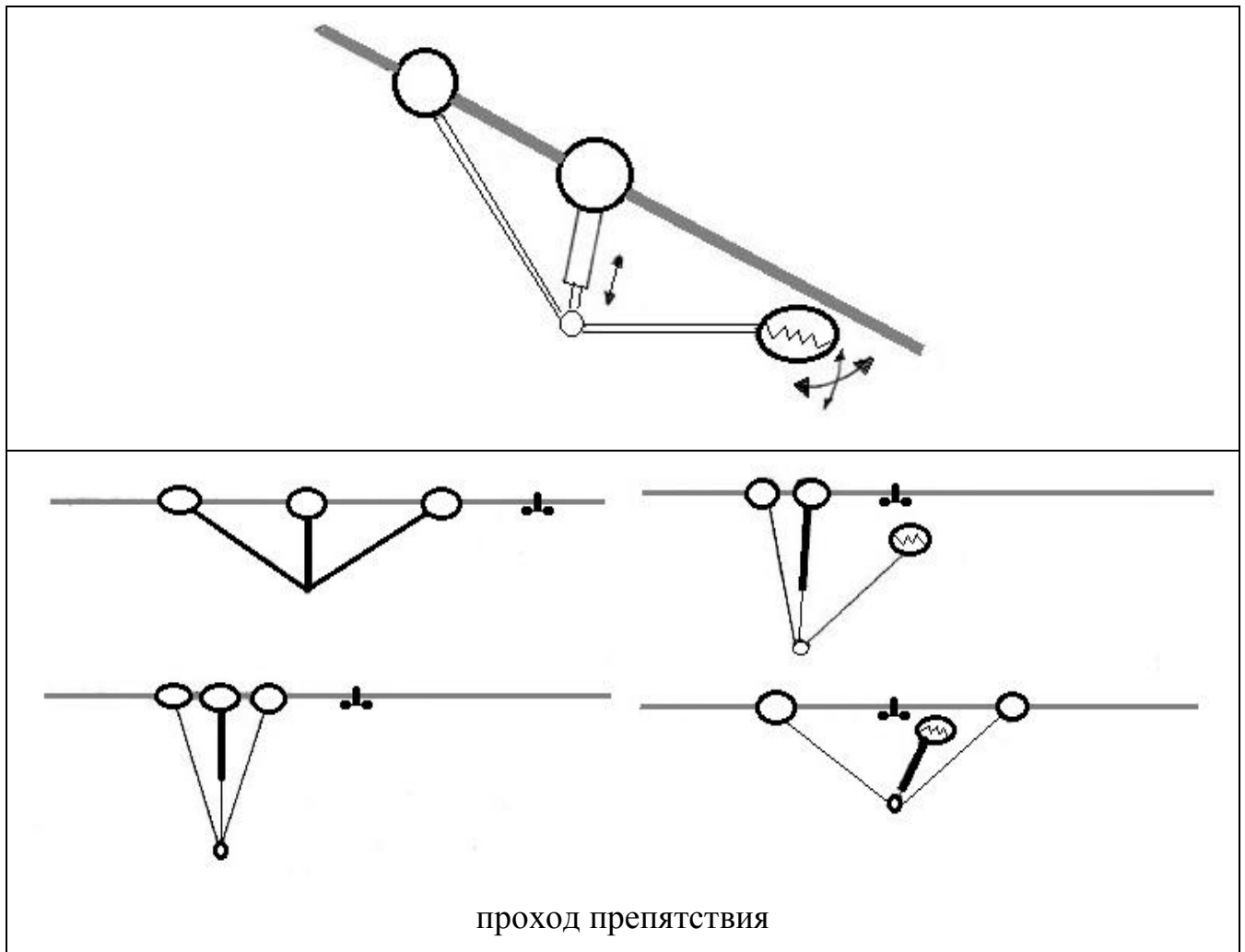


Рис. 1.2 Конструкция В

Машина отличается простотой и подвижностью. Для движения с переходом через препятствие машине нужны только 4 электродвигателя. Дополнительные двигатели нужны для выравнивания и крепления колесных блоков к проводу. Управление этой машины несложное, так как два двигателя будут одновременно работать даже в течение самых сложных операций прохождения препятствий.

Достоинства варианта: подвижность и простота (мало степеней свободы). Недостатки: находится слишком далеко от провода и имеет большое изменение импульса части конструкции при преодолении препятствий.

Конструкция С (рис. 1.3) построена с идеей быть как можно ближе к проводу в течение всего процесса, что снижает риск появления разрядов из-за

близкого расстояния до заземленной структуры. Машина, созданная на основе этой конструкции, включает в себя несколько (не менее трех) колесных блоков (рис 1.3). Блоки соединены пучками, оснащенными приводами. Приводы позволяют отсоединить индивидуальное колесо-блок от проводника во время прохождения препятствий.

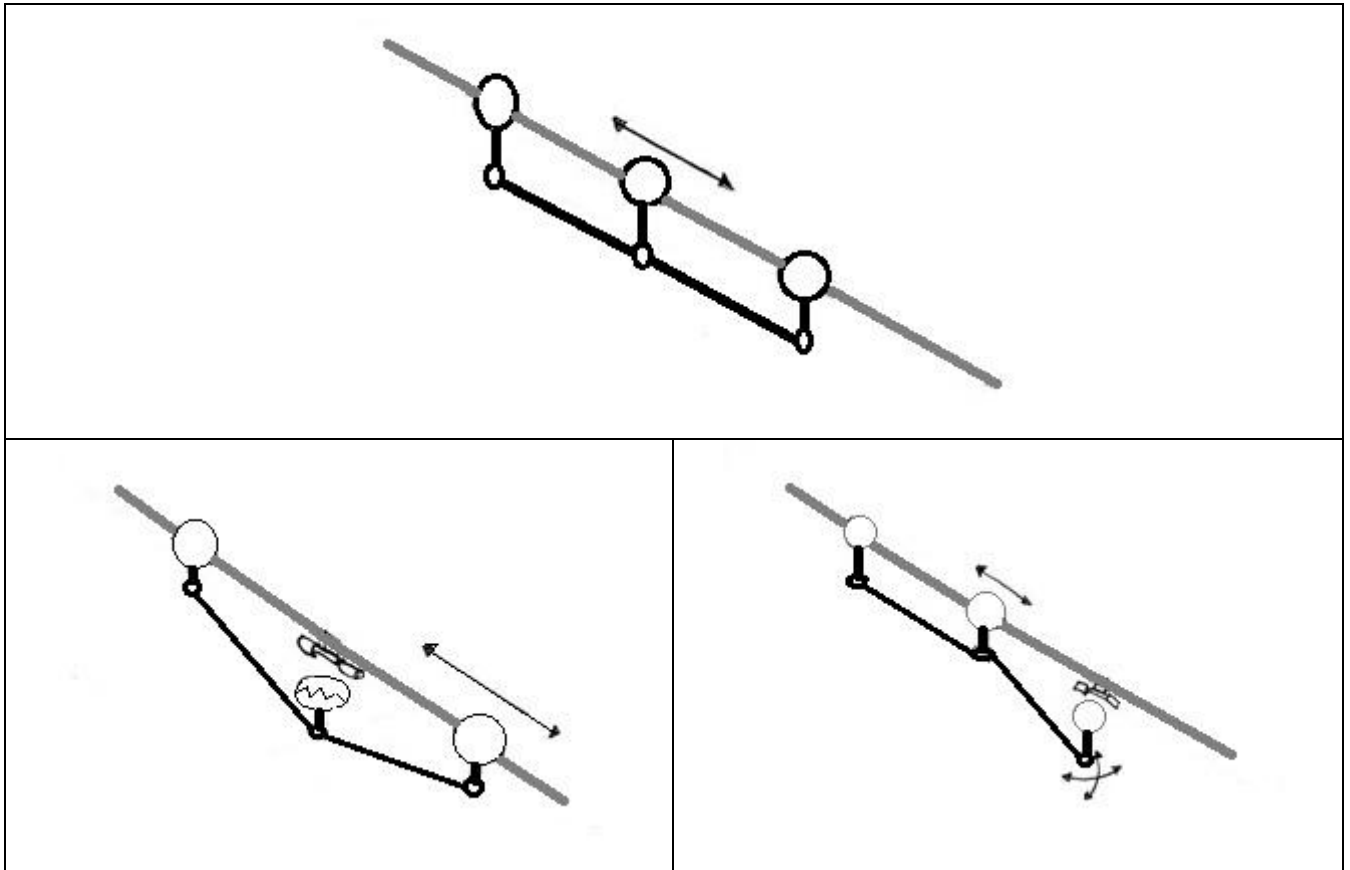


Рис. 1.3. Конструкция С

Конструкция С уникальна тем, что является раздвижной. База из трех сегментов может быть увеличена. Основные навигационные датчики и оборудование установлены в основании конструкции, а специализированные датчики и оборудование доступны через дополнительные сегменты. При работе используются только те сегменты, которые необходимы для конкретной инспекции.

Машина преодолевает препятствие путем отсоединения одного колеса-блока и продвижения вперед по проводу. Эта машина сложнее в управлении, нежели другие, но простота не была целью этого проекта.

Достоинства проекта: движение рядом с проводником и возможность добавления сегментов. Недостатки:

- Преодоление нескольких препятствий может быть проблемой;
- Большое препятствие может быть проблемой;
- Управление прохождением препятствий сложное.

Другие проекты

Машина с разветвленным движением вдоль провода (рис. 1.4) описана в [124].

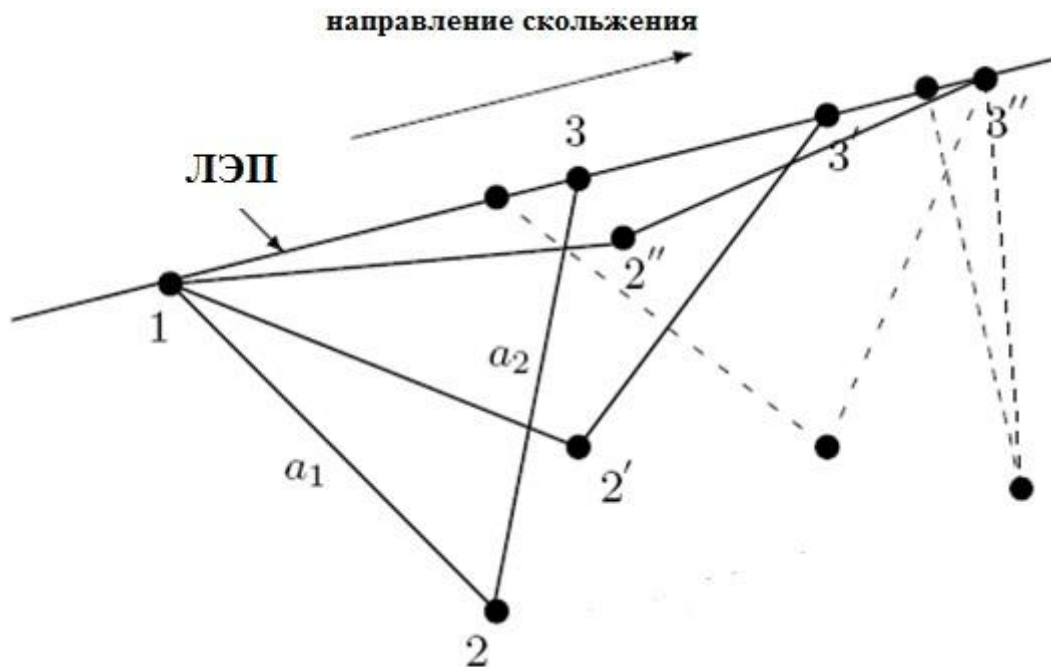


Рис. 1.4. Конструкция с разветвленным движением

Летающие конструкции. Одна из таких конструкций показана на рис. 1.5:

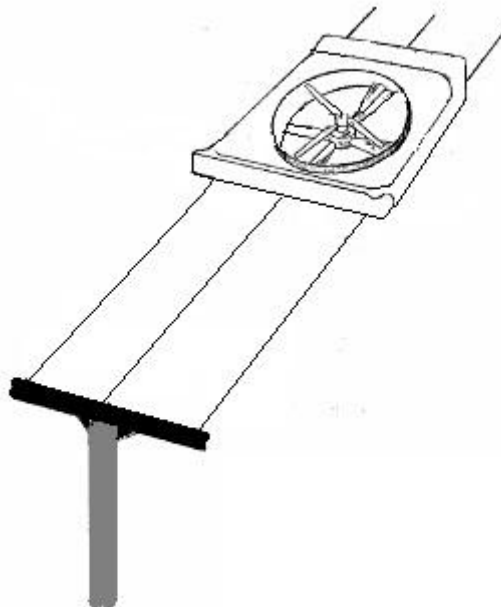


Рис. 1.5. Летающая конструкция

Здесь используются беспилотные летательные аппараты. Некоторые из таких конструкций подзаряжаются от проводов и имеют возможность пролетать над препятствиями. Машина находится в контакте с тремя фазами линии, отбирая мощность для пролета над препятствиями [93].

1.3. Специфические требования для прототипа

Необходимо предварительное исследование для правильного понимания специфики машины. Конструкция и оснащение прототипа датчиками и алгоритмами будут выбраны в зависимости от конкретных задач управления. Ниже рассматриваются специфические требования для прототипа машины.

Развертывание и снятие. Необходимы два оператора для развертывания машины на проводе ЛЭП и снятия с провода. Время не должно превышать 40 минут.

Интерфейс оператора. Он должен быть не только удобным, но и доступным на хранении, месте развертывания и в работе. С помощью этого интерфейса оператор дистанционно управляет машиной. Интерфейс должен

отображать состояние машины, позволяя оператору запрашивать и изменять параметры миссии.

Движение и остановка. После разворачивания машина должна самостоятельно двигаться согласно программе [73, 76, 100, 115, 129]. Движение продолжается до наступления одного из следующих условий:

- ЛЭП заканчивается на подстанции;
- Пройдено запрограммированное время или дистанция;
- Достигнуты запрограммированные координаты назначения;
- Машина получает команду от оператора;
- Машина достигает препятствия, которое классифицируется как невозможное для безопасного прохождения.

Любое движение машины должно осуществляться таким образом, чтобы падение с провода ЛЭП было исключено. Скорость должна не менее 0,5 м/с. Проход изолятора не должен занимать более 10 мин.

Прохождение препятствий. Машина должна самостоятельно проходить следующие препятствия: изоляторы, виброгасители, натяжные зажимы, пучки проводников. При столкновении с неизвестным препятствием машине следует остановиться и предупредить оператора.

Инспекция. Должны быть предусмотрены проверки изоляторов, провода, растительности и вышек.

Коммуникация. Машина должна иметь связь с оператором с помощью беспроводного интерфейса. Интерфейс может использовать GPRS, 3G, NMT, спутниковую связь или эквивалентные технологии.

Безопасность. Машина должна быть сконструирована таким образом, чтобы риск получения травм операторами или другими лицами был минимальным. Она не должна наносить вред системе ЛЭП или окружающей среде. Требуемый стандарт техники безопасности: CC-RU 50341 (от Шведского национального совета по электробезопасности).

Вид, габариты и вес. Внутренние и внешние детали машины должны быть выполнены аккуратно и профессионально. Размер машины должен быть не более 1 м со всех сторон. Вес не должен превосходить 60 кг.

Оборудование, используемое в машине, должно быть рассчитано на электромагнитную совместимость (ЭМС), чтобы обеспечить надлежащую работу в экстремальных условиях (например, близко к ЛЭП). Должны проводиться испытания, чтобы подтвердить совместимость.

Также должны быть установлены:

- видеочамера для проверки ЛЭП и управления движением;
- микрофон (неисправность создает характерные звуки);
- система GPS для определения местоположение машины;
- термометр, ветромер и детектор дыма;
- акселерометры.

Для работы в условиях недостаточной освещенности машина должна быть оборудована фонарем или другим устройством, чтобы датчики могли нормально работать.

Внешние воздействия. Машина должна:

- работать в штатном режиме в несильный дождь и ветреную погоду;
- работать в диапазоне температур от -40 до +60 градусов Цельсия;
- выдержать разумное количество механических ударов во время работы и транспортировки к месту эксплуатации.

Аппаратные требования относятся к микропроцессорам, датчикам и другим подсистемам. Все компоненты, включая батарею, должны быть легкодоступны для измерений, ремонта и замены. Батареи должны обеспечивать достаточную мощность не менее 30 минут работы. ДМА должна быть оборудована датчиками для выполнения необходимых проверок.

Машина должна иметь разъем для внешнего источника питания. Она может быть также оснащена устройством питания от провода посредством индукции

[82]. Это устройство должно обеспечить достаточную мощность для заряда батарей.

Навигация и движение. Любое движение ДМА должно осуществляться таким образом, чтобы падение с провода ЛЭП было исключено. Скорость должна быть не менее 0,5 м/с. Проход изолятора не должен занимать более 10 мин.

Приводы и манипуляторы. ДМА оснащается механическими манипуляторами или другими устройствами, позволяющими пройти препятствия. Подобные механические руки содержат приводы.

Индикаторы. Машина должна быть оборудована индикаторами состояния. Это может быть набор светодиодных ламп (LED), ЖК-дисплей (например, AVR Butterfly) или функционально равное устройство. Индикаторы состояния должны быть четко видны снаружи машины. С них должна считываться информация о состоянии батареи, подключении внешнего источника питания, статусе компьютера и приложений, связи. Некоторые из этих индикаторов могут быть расположены удаленно.

Коммуникация между оператором и ДМА может быть обеспечена посредством беспроводной связи.

1.4. Основная механическая схема ДМА

Устройство машины. Основную механическую схему ДМА можно видеть на рис. 1.6. Машина имеет три независимые части:

- блок с двумя парами моторизованных ведущих колес;
- рама с рукой и захватом;
- основная часть для связи в одно целое.

В предлагаемой машине активные и пассивные механизмы позволяют ей перейти через различные препятствия на проводах (амортизаторы, зажимы, предупреждающие шары и т.д.).

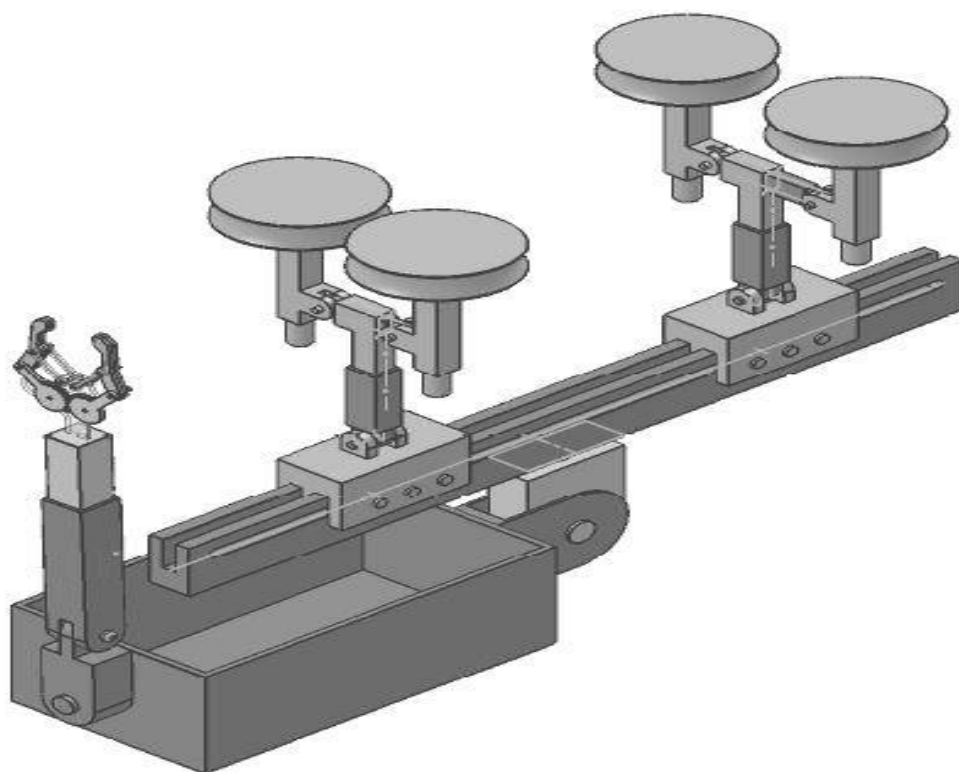


рис. 1.6. Новая ДМА

С основной частью ДМА связано около 40% всего веса машины. Эта часть должна быть достаточно жесткой, но адаптируемой к таким ситуациям, как проход натяжного зажима. Пассивные механизмы включают в себя набор пружинных амортизаторов, установленных в каждом соединении машины.

Колесный блок выполняет функции прикрепления (и отпущения) машины, перемещения, а также придания устойчивости против вращения вокруг горизонтальной оси, перпендикулярной к проводу.

Установка и снятие машины могут быть сделаны разными способами. Там может быть зажим или замок, который замыкает колесо, чтобы машина не упала с провода. Другим возможным методом является использование двух противоположных колес, которые открывают и закрывают провод. Самый простой способ – использование двойных фланцевых или желобчатых колес, находящихся на проводе без дополнительной поддержки. Но при этом возникает некоторый риск: машина может упасть из-за порывов ветра.

Для движения машины необходим хотя бы один двигатель, соединенный с колесом. Предпочтительно, чтобы все колеса были моторизованные.

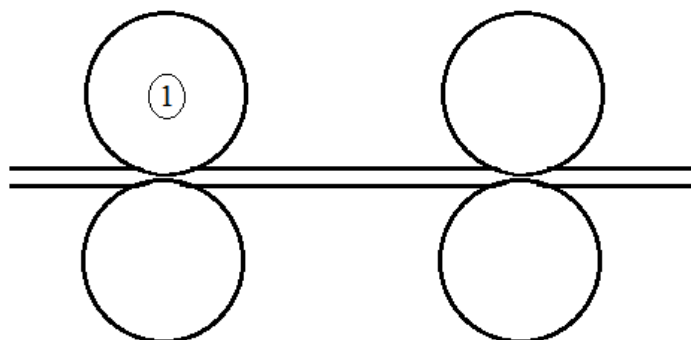


Рис. 1.7. Рама колеса

В итоге нашей конструкции необходима рама с двумя парами моторизованных ведущих колес. Этот дизайн сводит к минимуму риск падения машины. Рис. 1.7 представляет собой простой эскиз предполагаемого дизайна колесного устройства-прототипа. Движение обеспечивается за счет электродвигателя и стабильности двух колес.

Сцепление между колесами и фазовой линией должно быть достаточно хорошим, чтобы колеса не проскальзывали. Вопросы прочности соединения будут рассматриваться в главе 4.

Далее рассмотрим четыре варианта поведения машины при прохождении препятствий.

- **Движение с углом наклона** не более 30 градусов (рис. 1.8). При вращении колеса и использовании пассивных механизмов основная часть поддерживается горизонтальной частью. Это приводит к высокой стабильности и подвижности при любом наклоне провода.

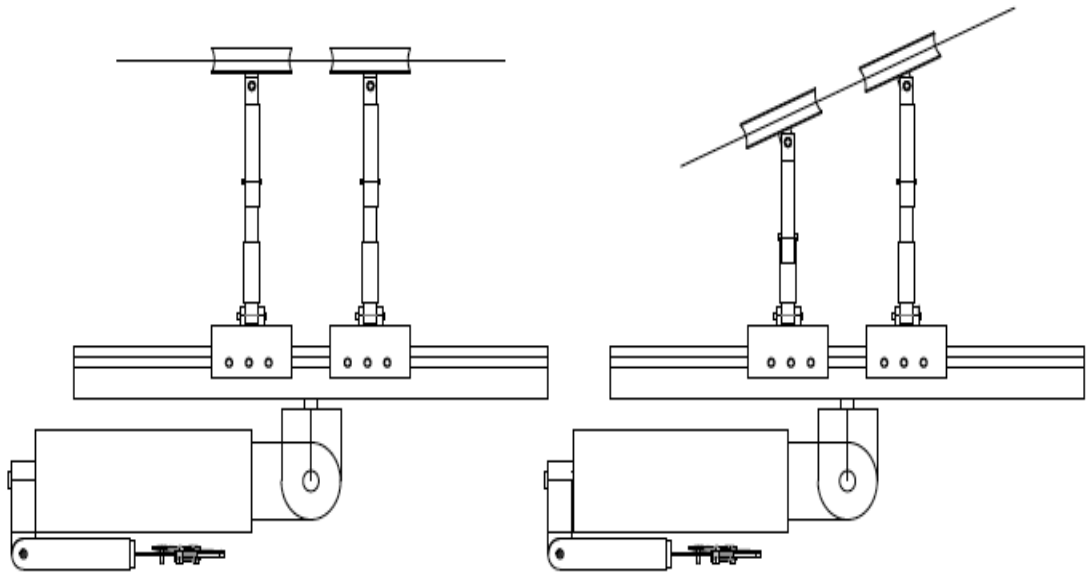


Рис. 1.8. Движение по кабелю с углом наклона не более 30 градусов

- Прохождение предупреждающего шара.** Машина может пройти предупреждающий шар через восемь стадий (рис. 1.9). При проходе используется консольная рама. В этом случае рука и захват с помощью одной пары колес может временно поддержать машину, когда другие колеса перемещаются на другую сторону шара. Сами колеса необходимы, чтобы перевернуться вниз под препятствием. Тогда консольная рамка переместится на другую сторону машины.

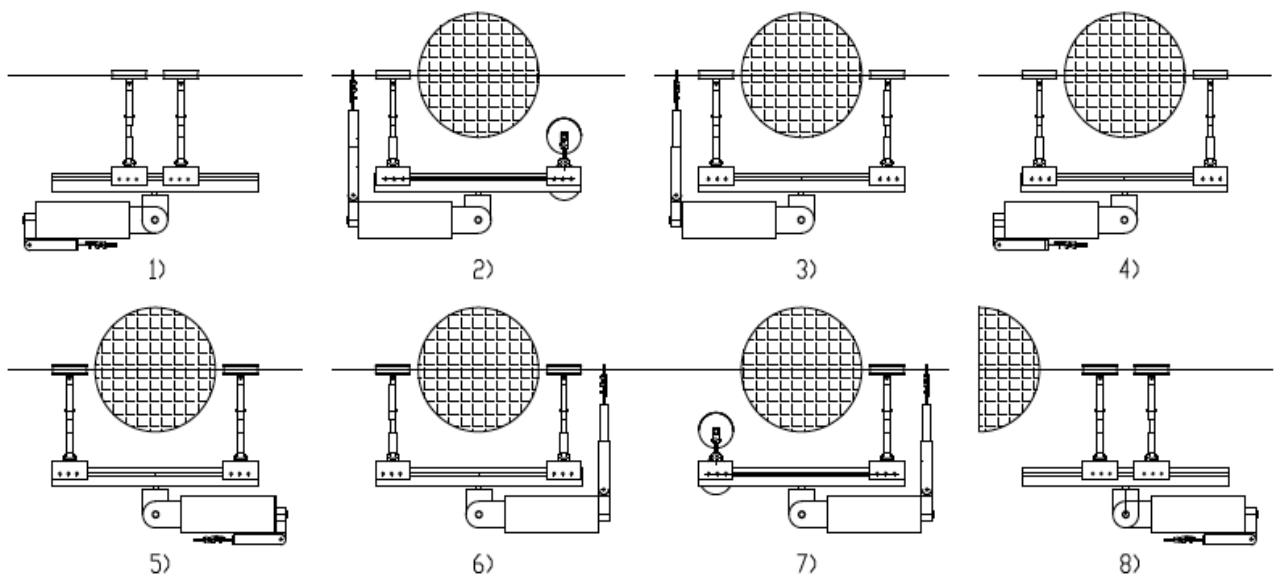


Рис. 1.9. Прохождение предупреждающего шара

- **Прохождение зажимов и амортизаторов.** Машина может пройти зажимы и амортизаторы с помощью пассивных механизмов (рис. 1.10). Сила взаимодействия между колесами и проводом за счет пассивных систем (пружины) достаточна для того, чтобы предотвратить разъединение колеса и провода.

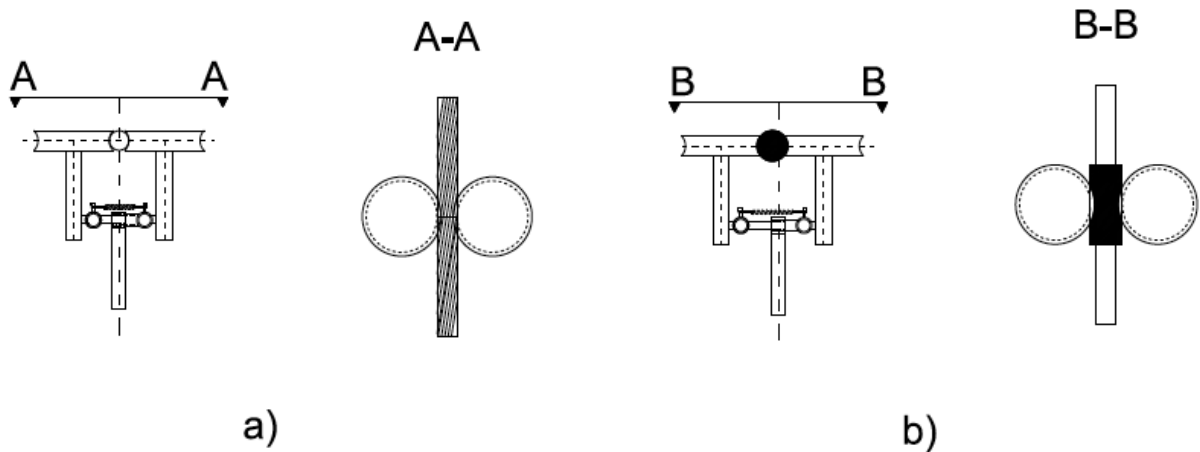


Рис. 1.10. Прохождение зажимов и амортизаторов

- **Прохождение изоляторов с вращением в горизонтальной плоскости или без него.** При подходе к изолятору используется консольная рамка. Рука и захват могут временно поддержать машину, пока колеса переходят в другую плоскость с помощью вращающихся соединений на основной части. Когда колеса захватывают провод, рамка руки возвращается в стационарное положение, и машина будет продолжать движение по проводу, который может иметь наклон (рис. 1.11).

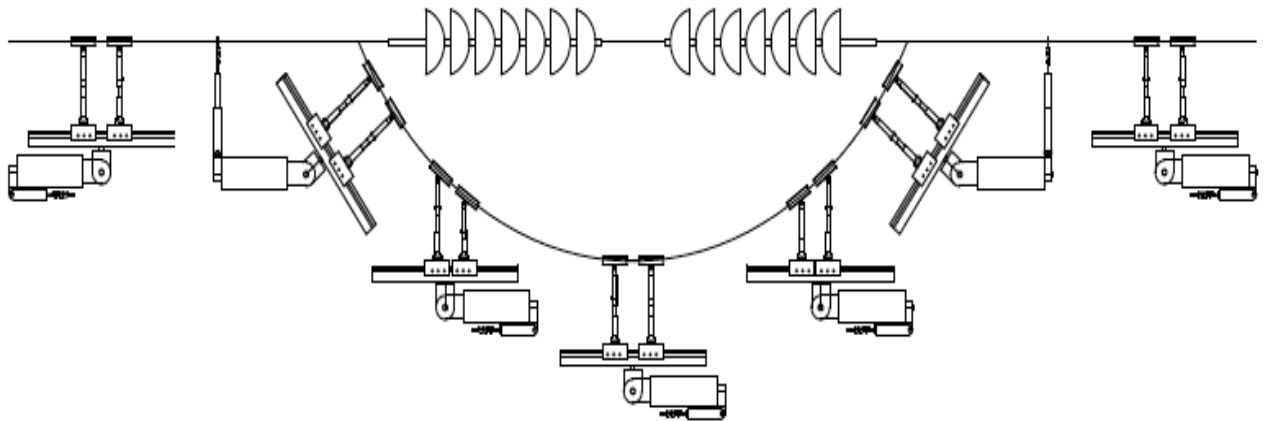


Рис. 1.11. Прохождение изоляторов с / без вращения в горизонтальной плоскости

Выводы по главе 1

1. Сформулированы требования к новой диагностической машине-автомату (ДМА), главным из которых является способность перестраивать узел подвеса для перехода препятствий. Представлена концепция новой машины.
2. Разработан перечень всех исходных требований к прототипу ДМА, включающий как исполняемые функции, так и оборудование.
3. Дан обзор существующих вариантов диагностических машин. Выделены как достоинства, так и уязвимые места этих машин.
4. Подробно описан созданный прототип новой ДМА и его детали: центральная рама, рука с захватом, узел подвеса с моторизованными колесами и стяжной пружиной.

Глава 2. Движение ДМА по проводу в вертикальной плоскости

При конструировании ДМА естественно предполагалось, что опора на провод ЛЭП достаточно жесткая. Но очевидно, что податливость провода может повлиять на работу машины и даже нарушить ее. Необходим анализ динамических прогибов провода при движении ДМА. Его можно вести с моделями различной сложности [20-22, 31, 42, 51] как для провода (струна, нить, стержень), так и для ДМА (движущаяся нагрузка, масса, система со структурой). Теоретической основой моделирования являются уравнения Лагранжа 2-го рода [6, 13, 21, 39, 52, 54]. Практической же основой – компьютерная математика (*Mathcad*) [34].

В данной главе предполагается, что машина и провод движутся в вертикальной плоскости. Материалы главы опубликованы в статье [23].

2.1. Струна с подвижной нагрузкой

Это простейшая модель системы: провод является натянутой струной, а ДМА – движущейся нагрузкой (рис. 2.1). Введение в задачу содержится в книге [46].

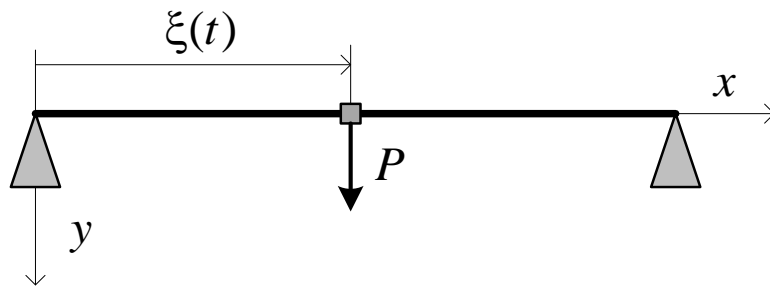


Рис. 2.1. Струна с подвижной нагрузкой

Постановка задачи для динамического прогиба струны $u(x,t)$ известна из курсов математической физики [37, 57]:

$$\begin{aligned}
Tu'' + p(x,t) &= \rho \dot{u}; \\
x=0, l: u &= 0; \\
t=0: u &= 0, \dot{u} = 0.
\end{aligned}
\tag{2.1.1}$$

Обозначено: T – сила натяжения струны, p – поперечная распределенная нагрузка, ρ – масса на единицу длины, l – длина струны; штрих и точка означают дифференцирование по координате x и времени t . Граничные условия выражают закрепление концов струны. Начальные условия соответствуют недеформированному состоянию покоя.

При нагрузке силой $P(t)$, сосредоточенной в точке $x = \xi$, будет $p(x,t) = P(t)\delta(x - \xi(t))$ – с дельта-функцией. Точка нагружения может перемещаться по произвольному закону $\xi(t)$.

Решение задачи (2.1.1) можно построить в виде ряда Фурье [37, 57]:

$$\begin{aligned}
u(x,t) &= \sum_{n=1}^{\infty} u_n(t)\varphi_n(x), \\
\varphi_n &= \sqrt{\frac{2}{l}} \sin \lambda_n x, \quad \lambda_n = \frac{n\pi}{l}; \\
\int_0^l \varphi_n \varphi_k dx &= \delta_{kn} \equiv \begin{cases} 1, & k = n \\ 0, & k \neq n \end{cases} \Rightarrow u_n = \int_0^l u \varphi_n dx.
\end{aligned}
\tag{2.1.2}$$

Функции φ_n ортогональны и нормированы. Умножив обе части уравнения (2.1.1) на $\varphi_n(x)$ и проинтегрировав по координате, получим обыкновенные дифференциальные уравнения (ОДУ) для зависящих от времени коэффициентов разложения $u_n(t)$. Они решаются посредством интеграла Дюамеля [6, 13, 21, 39, 45]:

$$\begin{aligned}
\ddot{u}_n + \omega_n^2 u_n &= P_n(t) / \rho, \\
\omega_n &= \lambda_n c, \quad c = \sqrt{\frac{T}{\rho}}, \\
u_n(t) &= \frac{1}{\rho \omega_n} \int_0^t P_n(\tau) \sin \omega_n(t - \tau) d\tau
\end{aligned}
\tag{2.1.3}$$

(при нулевых начальных условиях). Подставив в (2.1.2), получим решение задачи (2.1.1).

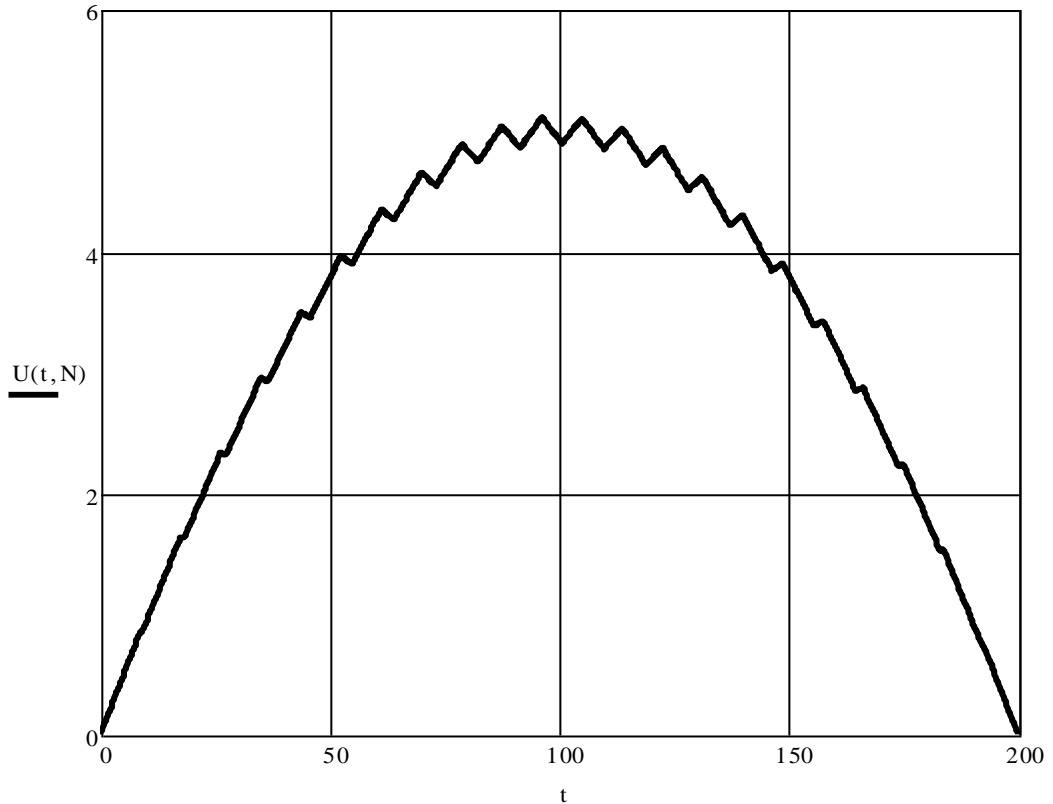
Заметим, что ω_n – это собственные частоты главных колебаний струны, φ_n – собственные формы (моды), а c есть скорость распространения волн прогиба.

При сосредоточенной нагрузке имеем $p_n(t) = \sqrt{\frac{2}{l}} P(t) \sin(\lambda_n \xi(t))$. Если функции $P(t), \xi(t)$ произвольны, то для определения $u_n(t)$ как интегралов можно использовать компьютерную математику (*Mathcad*) [34]. Но при постоянной силе $P(t) = const$ и $\xi = vt$ (нагрузка движется с постоянной скоростью v от левого конца) интеграл в (2.1.3) легко берется, и мы получим аналитическое выражение

$$\begin{aligned} u_n &= \frac{P}{\rho \omega_n} \sqrt{\frac{2}{l}} \int_0^t \sin \lambda_n v \tau \cdot \sin \omega_n (t - \tau) d\tau = \\ &= \frac{P}{\lambda_n (v^2 - c^2)} \sqrt{\frac{2}{T \rho l}} (v \sin \lambda_n c t - c \sin \lambda_n v t). \end{aligned} \quad (2.1.4)$$

Знаменатель обращается в ноль при $v = c$. Это резонансное волновое явление [44]. Для рассматриваемых далее параметров системы v порядка 1 м/с, а скорость волны c более 40 м/с, так что волновой резонанс невозможен.

Расчет по формулам (2.1.2-2.1.4) делаем посредством *Mathcad* [34]. На рис. 2.2 представлен прогиб нагруженной точки $U(t) \equiv u(vt, t)$ при следующих значениях параметров: $T = 10$ кН, $P = 1$ кН, $v = 1$ м/с, $\rho = 5$ кг/м, $l = 200$ м; число членов ряда $N = 500$.

Рис. 2.2. Прогиб $U(t)$.

Для сравнения рассмотрим квазистатическую статическую постановку задачи (2.1.1). Имеем

$$Tu'' + P\delta(x - \xi) = 0, u(0) = u(l) = 0;$$

$$u = U_s(\xi) \cdot \begin{cases} \frac{x}{\xi}, & x < \xi \\ \frac{l-x}{l-\xi}, & x > \xi \end{cases}, \quad (2.1.5)$$

$$U_s(\xi) \equiv \frac{P}{T} \xi \left(1 - \frac{\xi}{l}\right).$$

Кривая прогиба имеет параболический вид. График квазистатической зависимости $U_s(vt)$ отличается от графика на рис. 2.2 отсутствием колебаний. Разность $D(t) = U(t) - U_s(vt)$, характеризующая динамику процесса, представлена на рис. 2.3.

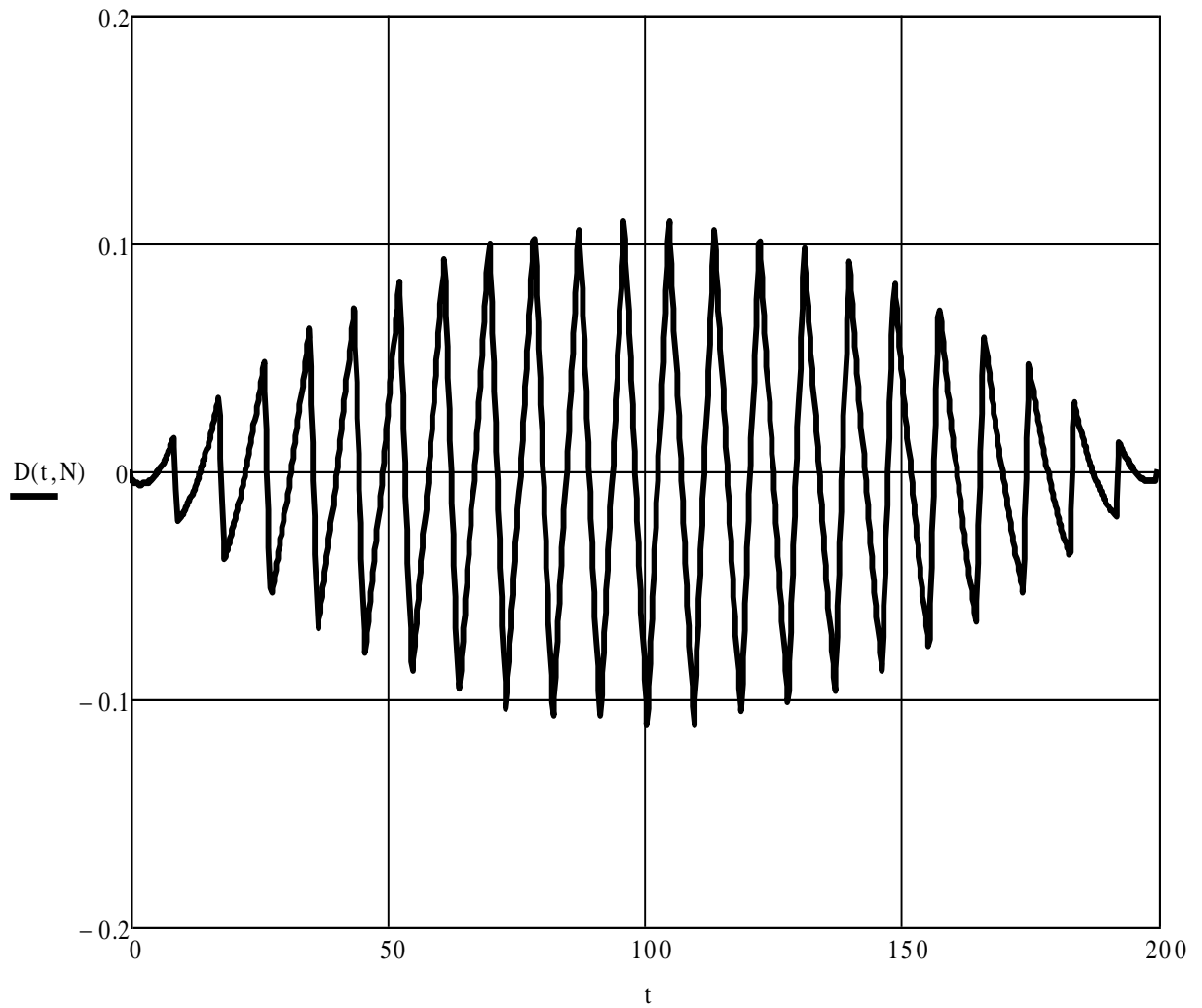


Рис. 2.3. Динамическая составляющая прогиба

Для исследования практической сходимости ряда (2.1.5) проводились вычисления с различным числом членов ряда: $N = 100, 200, \dots, 700$. Оказалось достаточно $N = 500$ (ряд сходится не очень хорошо). Результаты для $N = 100$ и $N = 500$ – на рис. 2.4.

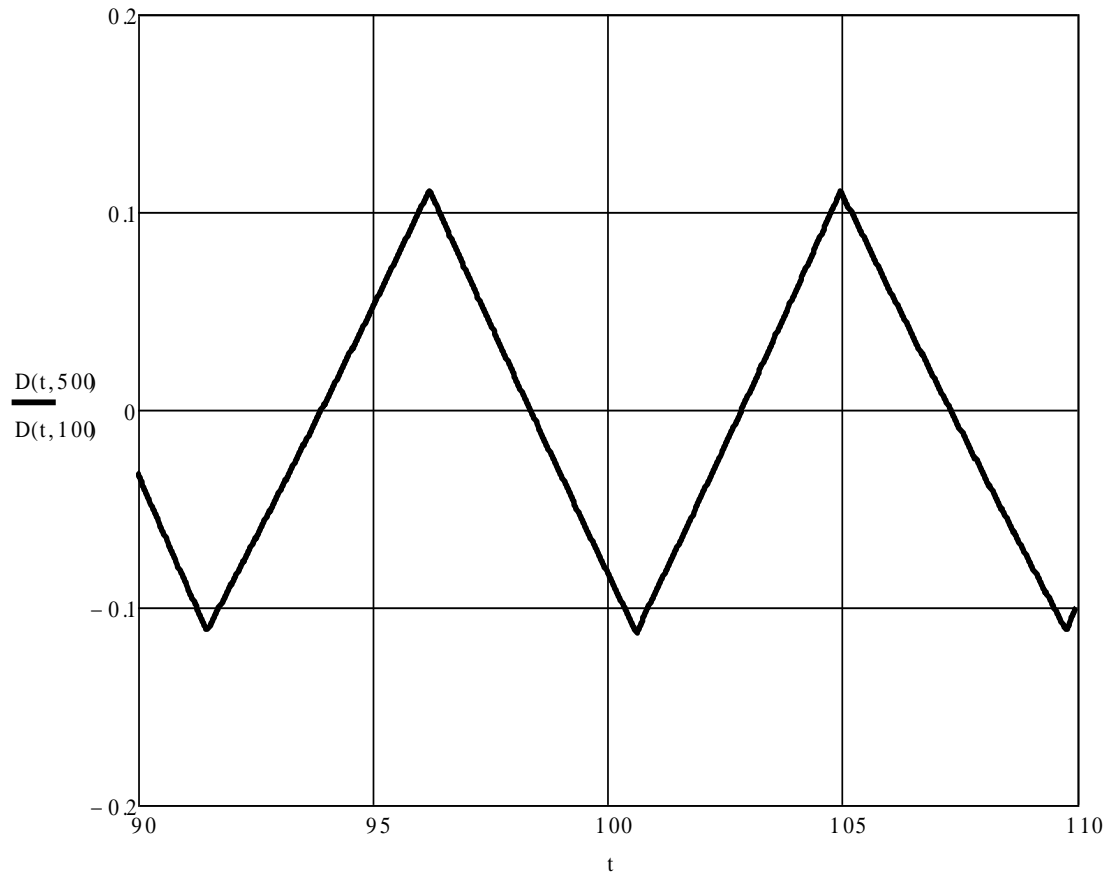


Рис. 2.4. Сходимость ряда

Колебания прогиба имеют пилообразный вид. Их появление удивительно. Эти колебания не относятся к известным типам [3, 6, 39, 41, 52, 56]:

- свободные колебания;
- вынужденные;
- автоколебания;
- параметрические.

Скорость при пилообразных колебаниях $V(t) = U'(t)$ является ступенчатой функцией с графиком на рис. 2.5. Дифференцирование найденной численно функции может производиться в *Mathcad* как непосредственно, так и с предварительной сплайн-интерполяцией. Однако почленно дифференцировать ряд нельзя из-за потери сходимости.

Скачкам скорости соответствуют ударные импульсы сил инерции (переносного движения). Расчет последствий воздействия на конструкцию ДМА этих ударных нагрузок целесообразен, но выходит за рамки данной диссертации.

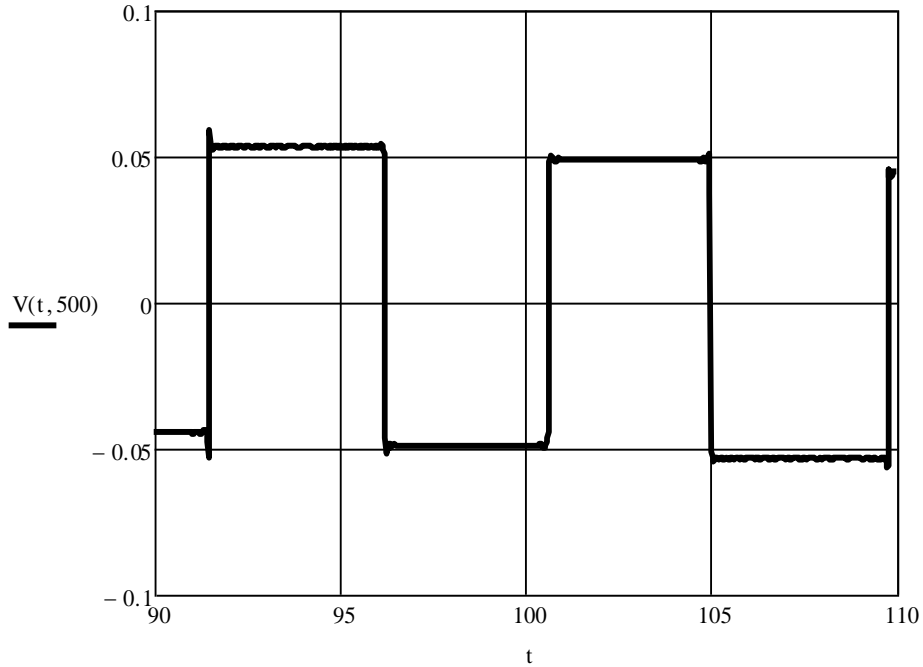


Рис. 2.5. Скорость прогиба

Проводились вычисления при различных значениях скорости движения нагрузки $\dot{\xi} = v$. Результаты для амплитуды прогиба, периода, скачка скорости в середине пролета – в следующей таблице:

Таблица 2.1

скорость (м/с)	0.5	1	1.5	2
амплитуда (м)	0.057	0.113	0.162	0.23
период (с)	9	9.2	9.3	9.6
скачок скорости (м/с)	0.05	0.102	0.14	0.21

В представленном алгоритме зависимость $\xi(t)$ может быть любой – тогда в разложении (2.1.2) можно, казалось бы, использовать интеграл (2.1.3), вычисляемый средствами компьютерной математики (*Mathcad*). Но такой подход

оказался малоэффективным; вычисление интеграла для каждого члена ряда сильно увеличивает время счета и дает большую погрешность.

При произвольной нагрузке и законе движения предпочтительнее отказаться от разложения Фурье в пользу другого способа расчета колебаний. Об этом – следующий параграф.

2.2. Уравнения Лагранжа

Рассмотрим другой подход к той же задаче о струне – вариационный метод Лагранжа-Ритца-Канторовича (ЛРК) [13, 37, 49, 62], основанный на уравнениях Лагранжа 2-го рода:

$$\left(\frac{\partial K}{\partial \dot{q}_i}\right) \cdot -\frac{\partial K}{\partial q_i} = -\frac{\partial \Pi}{\partial q_i} + Q_i . \quad (2.2.1)$$

Роль Лагранжа в названии метода – в его знаменитых уравнениях. Роль Ритца – в прямом методе решения вариационной задачи, не связанном с уравнением Эйлера [49, 62]. А вклад Канторовича – в сведении уравнений в частных производных к обыкновенным.

Кинетическая энергия системы $K(\dot{q}_i, q_i, t)$ должна быть представлена как функция обобщенных координат, скоростей и (иногда) явно входящего времени. Потенциальная энергия $\Pi(q_i, t)$ характеризует соответствующую ей часть сил. Обобщенные силы Q_i определяются из выражения суммарной виртуальной работы

$$\delta A = \sum Q_i \delta q_i$$

тех сил, которые не связаны с потенциалом Π .

Выражения кинетической и потенциальной энергии струны

$$\begin{aligned} K &= \frac{1}{2} \int_0^l \rho \dot{u}^2 dx, \\ \Pi &= \frac{T}{2} \int_0^l u'^2 dx \end{aligned} \quad (2.2.2)$$

соответствуют вариационной постановке

$$\int_{t_0}^{t_1} [\delta(K - \Pi) + \delta A] dt = 0$$

(принцип Гамильтона). Промежуток времени произволен, и на его концах координаты не варьируются. Однако обращение к этому принципу излишне, достаточно уравнений Лагранжа.

Зададим аппроксимацию прогиба с обобщенными координатами $U_i \equiv q_i$:

$$u(x, t) = \sum_{i=1}^n U_i(t) \varphi_i(x) = U(t)^T \varphi(x). \quad (2.2.3)$$

Используем матричные обозначения со столбцами обобщенных координат и координатных функций. С этим выражением можно определить кинетическую и потенциальную энергию системы, а также определить обобщенные силы:

$$\begin{aligned} K(\dot{U}) &= \frac{1}{2} \dot{U}^T M \dot{U}, \\ \Pi(U) &= \frac{1}{2} U^T C U; \\ M &= \int_0^l \rho \varphi \varphi^T dx, \\ C &= T \int_0^l \varphi' \varphi'^T dx; \\ \delta A &= \int_0^l p \delta U^T \varphi dx \Rightarrow \int_0^l p \varphi dx = \underline{Q} = M \ddot{U} + C U. \end{aligned} \quad (2.2.4)$$

Подчеркнут итог перехода к дискретной модели провода с подвижной нагрузкой – система ОДУ (линейная, с постоянными коэффициентами). Эта модель характеризуется матрицами инерции и жесткости M, C , а нагрузка на нее – столбцом обобщенных сил Q . Система (2.1.10) представляется в виде уравнений первого порядка

$$\begin{cases} \dot{U} = V \\ \dot{V} = M^{-1}(-CU + Q(t)) \end{cases}. \quad (2.2.5)$$

Далее применяем средства компьютерной математики (*Mathcad; Rkadapt, Radau*) [34]. Отметим, что необходимы именно эти встроенные функции,

специально разработанные для жестких систем. Термин «жесткость» здесь означает, что среди решений системы ОДУ есть как медленные, так и быстрые процессы.

Расчеты случая $\xi(t) = vt$ (постоянная скорость) дали результаты, идентичные точному решению с рядом Фурье. Использовались координатные функции из (2.1.2); число степеней свободы от 15 до 50. На рис. 2.6 представлена динамическая составляющая прогиба при $v = 1 \text{ м/с}$, $n = 50$ (в средней части пролета). Число шагов численного интегрирования при проходе всего пролета равнялось 1000. Сравнение с рис. 2.3 свидетельствует о точности метода ЛРК. Пилообразные колебания проявляются очень четко – даже при $n = 15$. Однако необходимо отметить, что при увеличении числа членов сверх 50 время счета значительно возрастает.

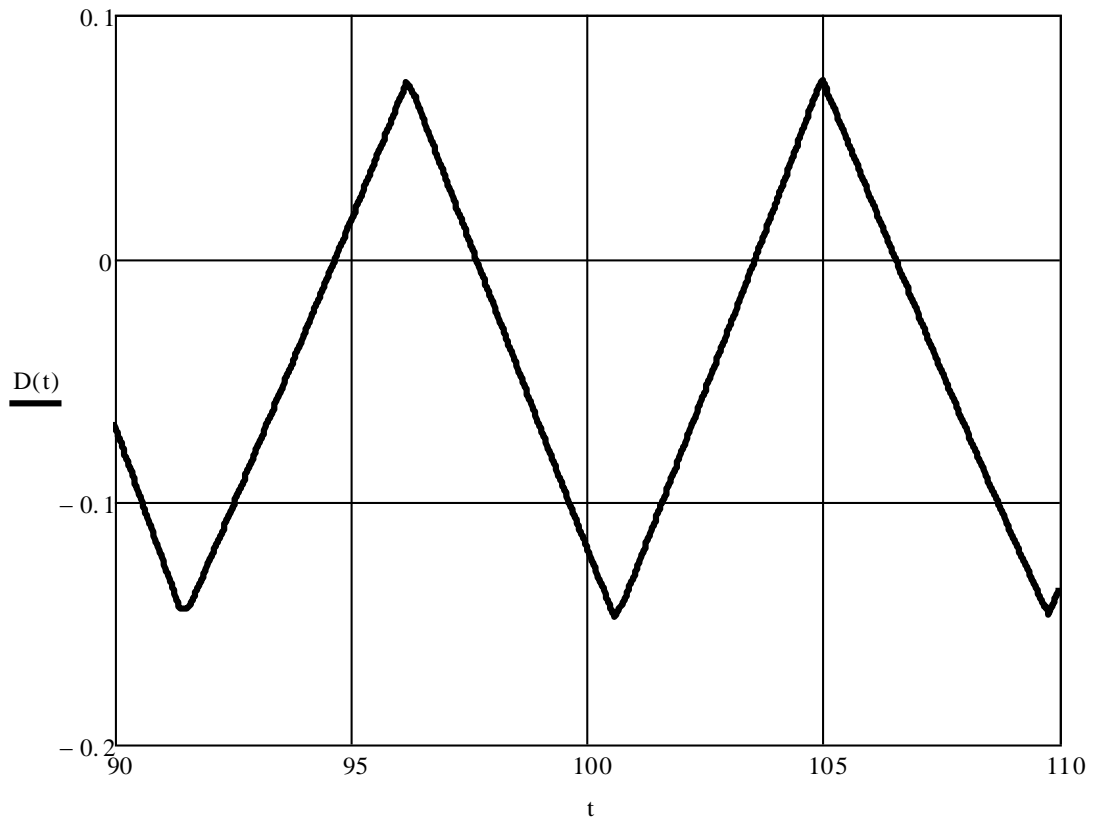


Рис. 2.6. Метод ЛРК: движение с постоянной скоростью

Большим преимуществом метода ЛРК является возможность моделирования произвольных законов движения. Например, движения с остановкой:

$$\xi(t) = \begin{cases} v_0 t, & t < t_1 \\ v_0 t_1, & t_1 < t < t_2 \\ v_0 t_1 + v_1 (t + t_1 - t_2), & t > t_2 \end{cases} .$$

(2.2.6)

Здесь v_0, v_1 – скорости до остановки и после нее, t_1 – момент остановки, t_2 – момент продолжения движения. На рис. представлен график динамической составляющей прогиба при $v_0 = v_1 = 1 \text{ м/с}$, $t_1 = 40 \text{ с}$, $t_2 = 100 \text{ с}$, $n = 50$:

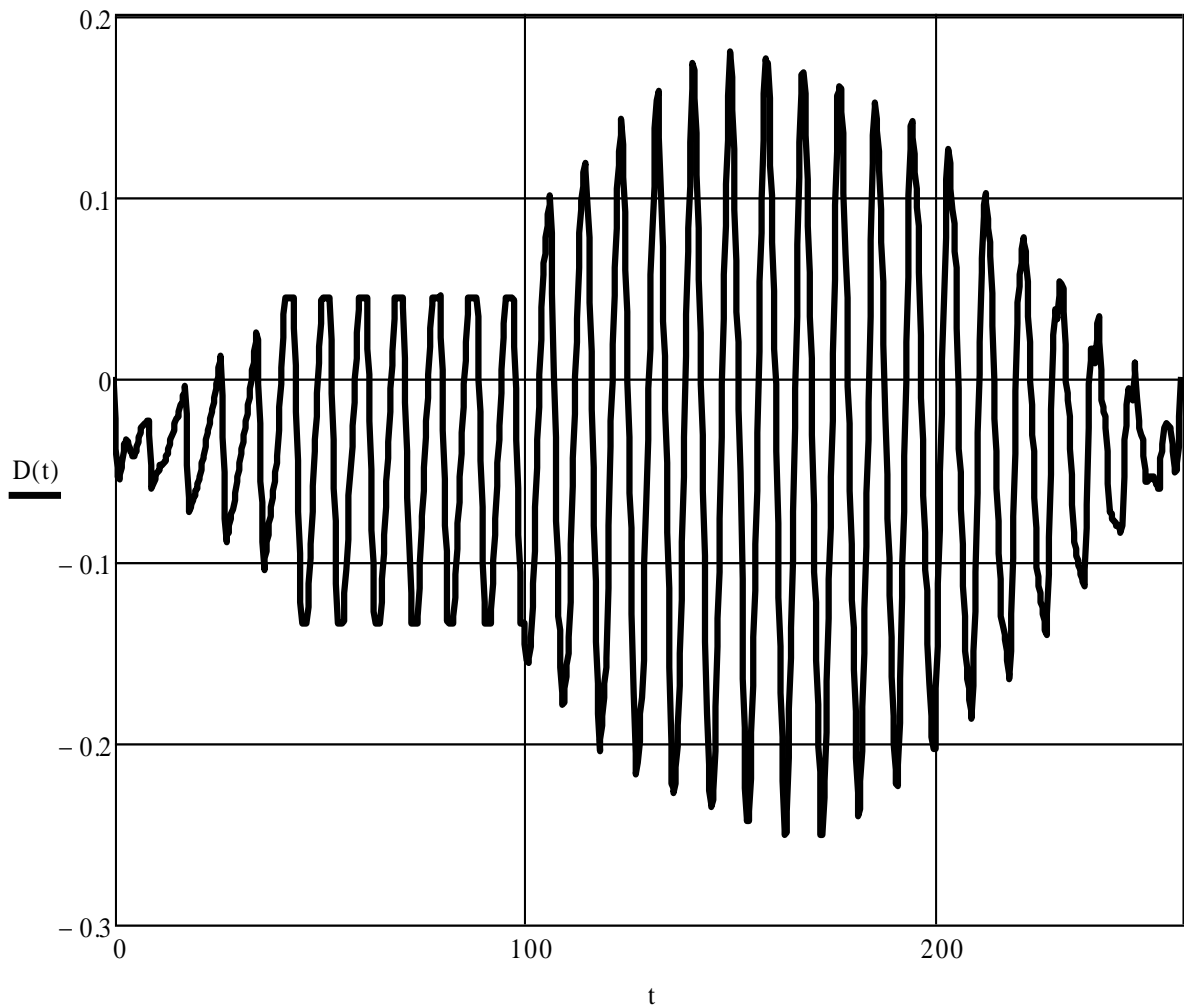


Рис. 2.7. Метод ЛРК: движение с остановкой

Внимание к подобным вариантам понятно с позиций обыденного опыта. При нарастании колебаний естественно остановиться и подождать некоторое время, а потом продолжить движение (с иной, может быть, скоростью). Здесь можно рассматривать множество вариантов с различными значениями времен и скоростей.

Сравнивая рис. 2.3 и 2.7, видим несколько странный результат: в результате остановки колебания усилились. Это можно объяснить включением переходного процесса после остановки. Дополнительная ясность появится позднее при учете сил сопротивления.

Уравнения Лагранжа предоставляют и еще одну новую возможность – учесть жесткость провода на изгиб. Известно, что уравнение струны перестает соответствовать действительности при значительной кривизне. Уточненное уравнение имеет вид [20, 21, 56]:

$$Tu'' + p(x,t) = \rho\ddot{u} + EJ u^{IV} -$$

с жесткостью на изгиб EJ . Такому уравнению соответствует потенциальная энергия

$$\Pi = \frac{1}{2} \left(T \int_0^l u'^2 dx + EJ \int_0^l u''^2 dx \right).$$

После аппроксимации прогиба получим матрицу жесткости в виде

$$C = T \int_0^l \varphi' \varphi'^T dx + EJ \int_0^l \varphi'' \varphi''^T dx. \quad (2.2.7)$$

Результат расчета с измененной матрицей при скорости $v=1$ представлен на рис. 2.8. Изгибная жесткость $EJ = 2.148 \cdot 10^4$ (СИ).

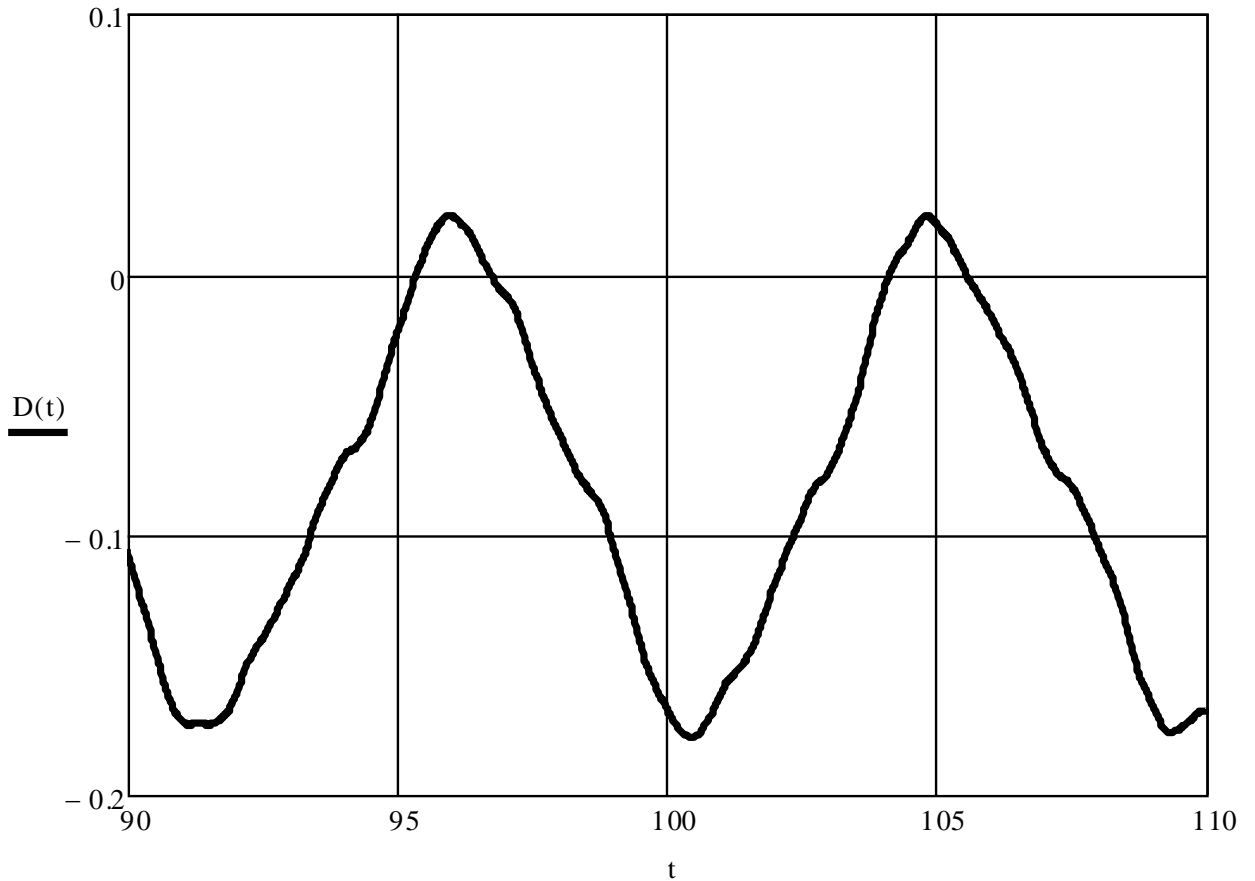


Рис. 2.8. Влияние изгибной жесткости провода

Видим, что пилообразный характер сохранился, но острота пиков снизилась.

2.3. Провод как нить

Модель струны для провода ЛЭП требует обоснования. Очевидно, правильнее представлять не струной, а упругой нитью. Нить сопротивляется только растяжению (в отличие от стержня с сопротивлением изгибу и кручению). Уравнения механики нити представлены, в частности, в [20-22, 42, 51]. Конфигурация нити определяется зависимостью $\mathbf{r}(s)$ радиус-вектора точки от материальной (лагранжевой) координаты; до деформации – $\mathbf{r}_0(s)$ (рис. 2.9). Ноликом отмечаются величины в начальном состоянии (до деформации).

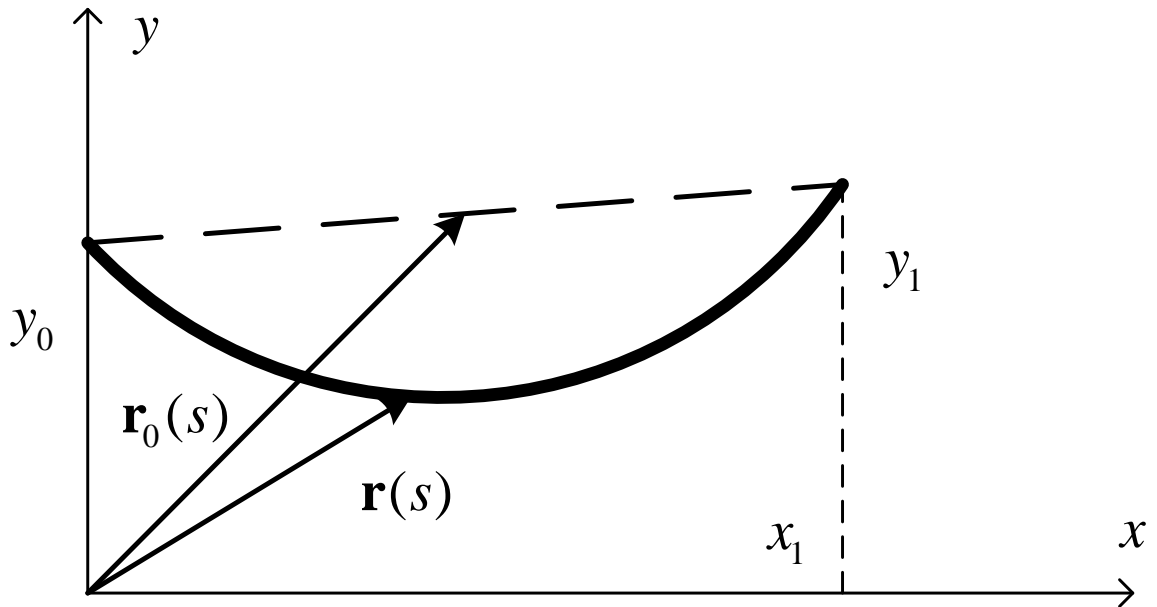


Рис. 2.9. Упругая нить

Материальная координата частицы $s \in [0, L]$ сохраняется. Обычно считают s дуговой координатой в начальном состоянии; тогда \mathbf{r}'_0 – орт касательной (штрих означает дифференцирование по s). Относительное удлинение определяется простейшей формулой $\varepsilon = |\mathbf{r}'| - 1$. Сила натяжения $Q = Q_0 + b\varepsilon$, где Q_0 – сила в начальном состоянии, b – жесткость на растяжение.

Поскольку провод от нагрузки только растягивается, можно считать $Q_0 = 0$ – начальное состояние ненапряженное. Если нагрузка такова, что может вызвать укорочение, то начальное состояние должно быть растянутым.

Учитывая уравнение баланса сил (с распределенной нагрузкой $\mathbf{q}(s)$), имеем следующую систему [20-22]:

$$\mathbf{Q}' = -\mathbf{q}, \quad \mathbf{Q} = Q\mathbf{r}' / |\mathbf{r}'| \Rightarrow \mathbf{r}' = \mathbf{Q}(b^{-1} + |\mathbf{Q}|^{-1}). \quad (2.3.1)$$

Граничные условия:

$$x(0) = 0, \quad y(0) = y_0, \quad x(L) = x_1, \quad y(L) = y_1$$

(L – начальная длина провода).

Поставленная нелинейная граничная задача для системы ОДУ решается в *Mathcad* методом стрельбы с встроенными функциями *sbval-Rkadapt* [34]. ОДУ представляется в матричном виде:

$$Y = \begin{pmatrix} Q_x \\ Q_y \\ x \\ y \end{pmatrix};$$

$$Y' = F(s, Y) = \begin{pmatrix} -q_x(s) \\ -q_y(s) \\ Y_0 G(Y) \\ Y_1 G(Y) \end{pmatrix}, \quad (2.3.2)$$

$$G(Y) = \left(\frac{1}{b} + \frac{1}{\sqrt{Y_0^2 + Y_1^2}} \right).$$

Расчеты проводились для алюминиевого провода радиусом $R = 2,5$ см и длиной $L = 200$ м. Координаты закрепленных концов: $x_0 = 0, x_1 = L, y_0 = y_1 = 0$. Распределенная нагрузка: $q_x = 0, q_y = -\rho g$ (погонный вес). Жесткость на растяжение $b = E\pi R^2$ (E – модуль Юнга). Рассчитанная конфигурация провода – на рис. 2.10.

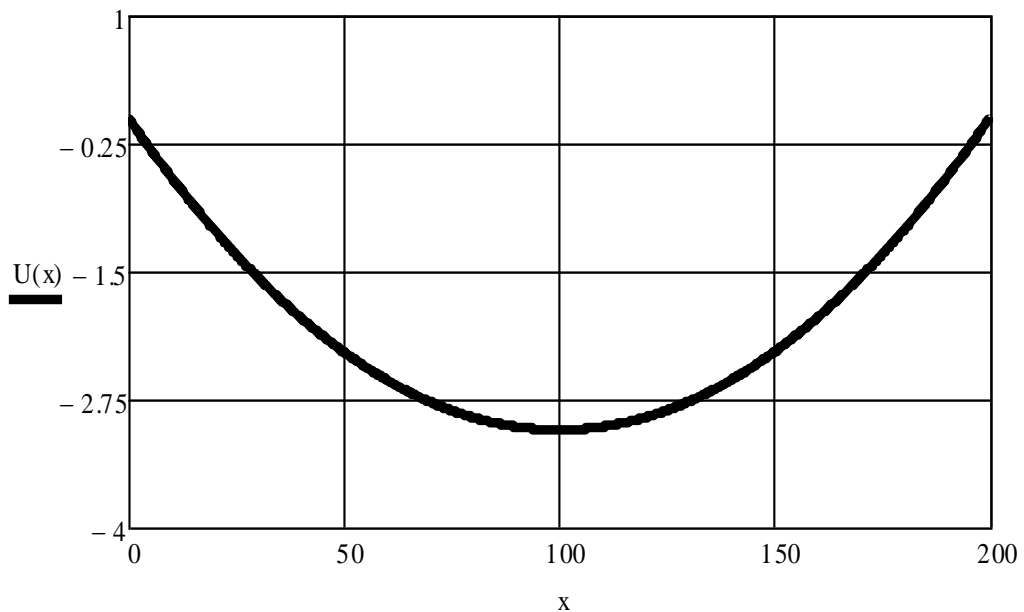


Рис. 2.10. Форма провода

Первостепенный интерес представляет сила натяжения $Q(s) = \sqrt{Q_x^2 + Q_y^2}$.

График этой функции – на рис. 2.11.

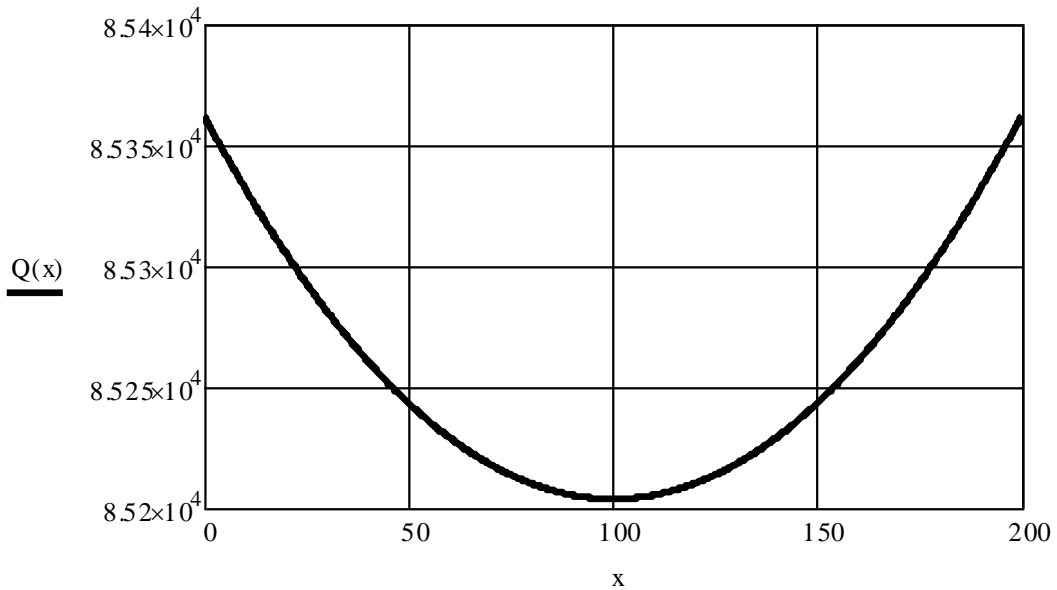


Рис. 2.11. Сила натяжения

Сила натяжения почти постоянна. Ее среднее значение

$$T = L^{-1} \int_0^L Q(s) ds = 85,26 \text{ (кН)}$$

можно использовать в расчете провода как струны. При найденном натяжении прогиб струны под собственным весом

$$u_s(x) = qx(L-x)/2T.$$

График этой функции совпадает с представленным на рис. 2.10.

Совпадения по прогибу и силе натяжения могут служить обоснованием использования модели струны для провода ЛЭП.

Заметим, что самая распространенная в прошлом модель нерастяжимой нити [42] не годится для наших рассуждений. При прямолинейной начальной форме провода (рис. 2.9) задача не будет иметь решения.

2.4. Струна с движущейся массой

От простой расчетной схемы с подвижной нагрузкой перейдем к более адекватной схеме с массой (маленький квадратик на рис. 2.1).

Координаты, скорость и ускорение движущейся массы (при прогибе струны $u(x,t)$):

$$\begin{aligned} x = \xi(t), y = u(\xi(t), t) &\Rightarrow \dot{x} = \dot{\xi}, \dot{y} = u'\dot{\xi} + \dot{u}, \\ \ddot{x} = \ddot{\xi}, \ddot{y} = u''\dot{\xi}^2 + u'\ddot{\xi} + 2\dot{u}'\dot{\xi} + \ddot{u}. \end{aligned} \quad (2.4.1)$$

По закону Ньютона определяем сосредоточенные нагрузки (вес $P = mg$) $q_x = -m\ddot{x}\delta(x - \xi)$, $q_y = m(g - \ddot{y})\delta(x - \xi)$.

Но далее вместо решения уравнения струны (2.1.1) используем подход Лагранжа (п. 2.2). Обобщенные координаты $U_i \equiv q_i$ ($i = 1 \dots n$) вводятся

аппроксимацией прогиба $u(x,t) = \sum_{i=1}^n U_i(t)\varphi_i(x) = U(t)^T \varphi(x)$. Координатные

функции φ_i можно взять как в п. 2.2.

Определим кинетическую энергию (удвоенную):

$$\begin{aligned} 2K(\dot{U}, U, t) &= m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) + \rho \int_0^l \dot{u}^2 dx = \\ &= m\dot{\xi}^2 + \dot{U}^T [M + \mu(\xi)] \dot{U} + 2\dot{\xi} U^T \eta(\xi) \dot{U} + \dot{\xi}^2 U^T \sigma(\xi) U \end{aligned} \quad (2.4.2)$$

Здесь введены матрицы инерции

$$\begin{aligned} M &= \int_0^l \rho \varphi \varphi^T dx, \\ \mu(\xi) &= m \varphi(\xi) \varphi^T(\xi), \\ \sigma(\xi) &= m \varphi'(\xi) \varphi'^T(\xi), \\ \eta(\xi) &= m \varphi'(\xi) \varphi^T(\xi). \end{aligned} \quad (2.4.3)$$

Далее найдем потенциальную энергию:

$$\begin{aligned} \Pi(U, t) &= \frac{1}{2} T \int_0^l u'^2 dx - P u(\xi, t) = \frac{1}{2} U^T C U - U^T F(\xi), \\ C &= T \int_0^l \varphi' \varphi'^T dx, \\ F &= P \varphi(\xi). \end{aligned} \quad (2.4.4)$$

Теперь можем составить уравнения Лагранжа:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial K}{\partial \dot{U}} &= (M + \mu)\dot{U} + \dot{\xi}\eta^T U, \\
\frac{\partial K}{\partial U} &= \dot{\xi}\eta\dot{U} + \dot{\xi}^2\sigma U, \\
\frac{\partial \Pi}{\partial U} &= CU - F; \\
\left(\frac{\partial K}{\partial \dot{U}}\right) \cdot - \frac{\partial K}{\partial U} &= -\frac{\partial \Pi}{\partial U} \Rightarrow \\
\Rightarrow \underline{(M + \mu)\ddot{U} + [C + \dot{\xi}^2(\eta'(\xi)^T - \sigma) + \ddot{\xi}\eta^T]U + \dot{\xi}[\mu'(\xi) + \eta^T - \eta]U} &= F.
\end{aligned} \tag{2.4.5}$$

При этом отметим, что

$$\begin{aligned}
\eta'(\xi)^T - \sigma &= \kappa, \\
\kappa(\xi) &= m\varphi\varphi''^T, \\
\mu'(\xi) + \eta^T - \eta &= 2\eta^T.
\end{aligned} \tag{2.4.6}$$

Подчеркнутое в (2.4.5) уравнение Лагранжа преобразуем к каноническому виду для последующего численного интегрирования:

$$\begin{cases} \dot{U} = V \\ \dot{V} = (M + \mu)^{-1}[F - (C + \dot{\xi}^2\kappa + \ddot{\xi}\eta^T)U + 2\dot{\xi}\eta^T V]. \end{cases} \tag{2.4.7}$$

Как и выше, численное интегрирование системы ОДУ (порядка $2n$) производится встроенными функциями *Rkadapt* или *Radau* в *Mathcad*. На рис. 2.12 представлен результат расчета прогиба под массой $U(t) = u(\xi(t), t)$ при равномерном движении массы $m = P/g = 100$ кг со скоростью $v = 1$ м/с. Число степеней свободы $n = 30$, интегрирование проводится на 1000 шагах.

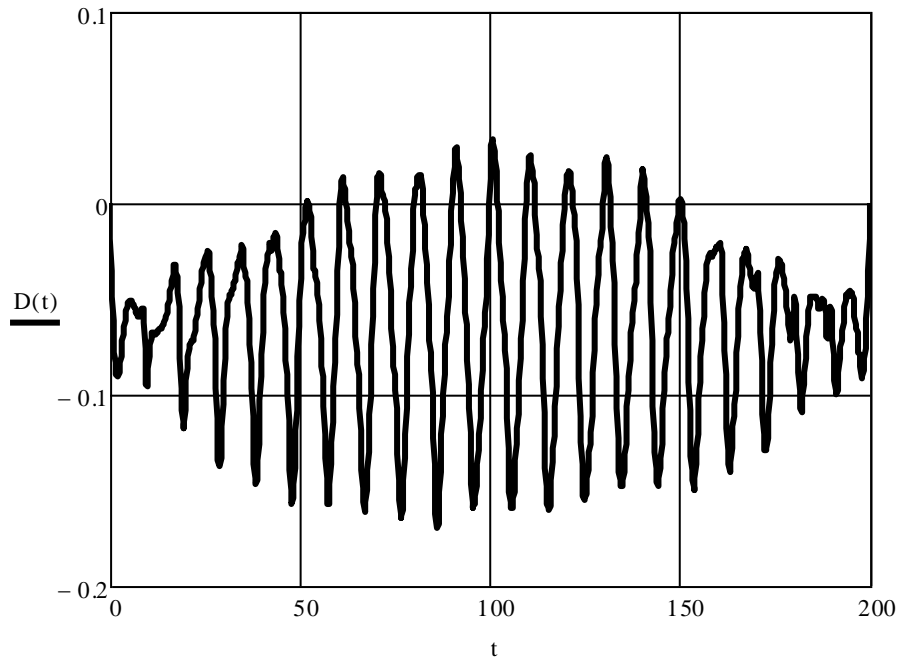


Рис. 2.12. Колебания с массой

Тот же график для средней части пролета – на рис. 2.13.

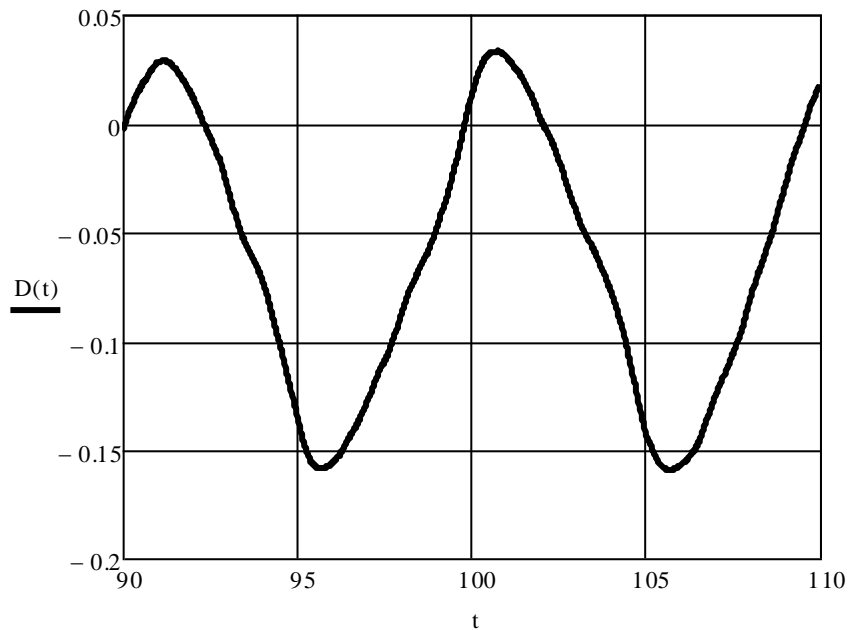


Рис. 2.13. Процесс в средней части пролета

Сравнивая с п. 2.1 и 2.2, заключаем, что пилообразный характер сохранился, но острота пиков упала. Размах колебаний около 0.19 м, период 10 с. В решении с рядом Фурье было 0.226 м и 9.2 с (отличие 17.3 и 8.3 % соответственно).

В представленном решении закон движения $\xi(t)$ может быть произвольным. Коэффициенты системы ОДУ содержат скорость $v = \dot{\xi}$ и ускорение $\varepsilon = \ddot{\xi}$ как заданные функции времени.

2.5. Влияние сил сопротивления

Для учета распределенных сил внешнего сопротивления в уравнении струны (2.1.1) можно произвести следующую замену

$$p \rightarrow p^{\text{э}} = p - \begin{cases} \beta_1 \dot{u} & \text{(линейное сопротивление)} \\ \beta_2 \dot{u} |\dot{u}| & \text{(квадратичное сопротивление)} \end{cases} \quad (2.5.1)$$

Первый вариант проще для расчета, но не вполне соответствует реальности; эквивалентное значение β_1 выбрать сложно. Зато во втором варианте можно сразу принять $\beta_2 = \rho_0 R$ (ρ_0 – плотность воздуха, R – радиус провода), что соответствует единичному коэффициенту лобового сопротивления (c_x).

Как и выше, используем метод Лагранжа [6, 13, 21, 39]. При вязком сопротивлении обобщенные силы таковы:

$$\begin{aligned} Q^{\text{э}} &= Q - BV, \\ B &= \beta_1 \int_0^l \varphi \varphi^T dx \end{aligned} \quad (2.5.2)$$

Подчеркнутое соотношение записано в матричном виде ($V = (\dot{U}_i)$). Его подставляем в уравнения струны с подвижной нагрузкой (2.2.5) и решаем в *Mathcad* с функциями *Rkadapt* и *Radau* [34]. Счет идет быстро, число степеней свободы $n = 30$ реализуемо и уже достаточно. При $\beta_1 = 0.1$, единичной скорости и тех же значениях остальных параметров, что выше, получен график на рис. 2.14.

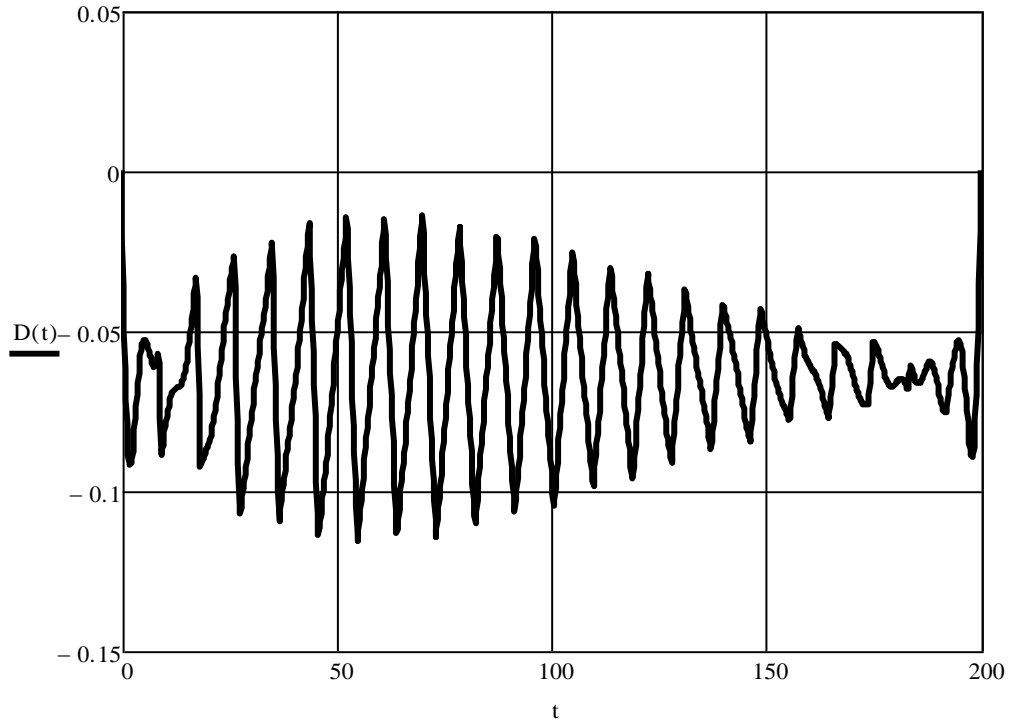


Рис. 2.14. Влияние вязкого сопротивления на всем пролете

Видим существенное отличие от случая без сопротивления. Максимум колебаний теперь не в середине пролета. Да и сами колебания уменьшились: максимальный размах – ровно вдвое (0.113 м вместо 0.226 без сопротивления).

На следующем рис. 2.15 представлен график того же процесса, но в середине пролета. Видим еще один неожиданный результат: сглаживания пиков не произошло.

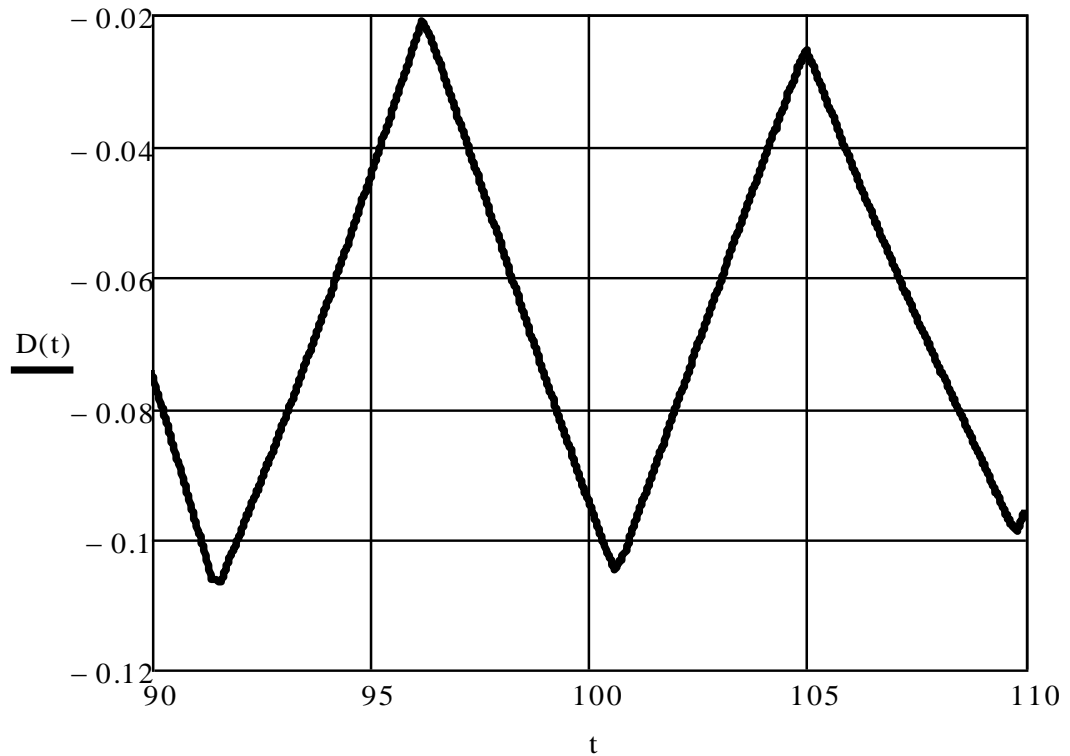
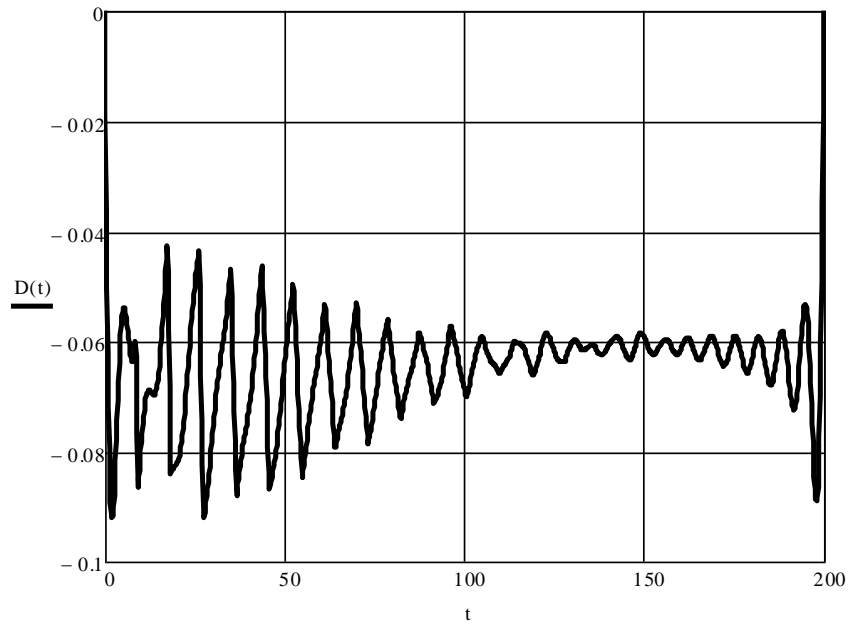
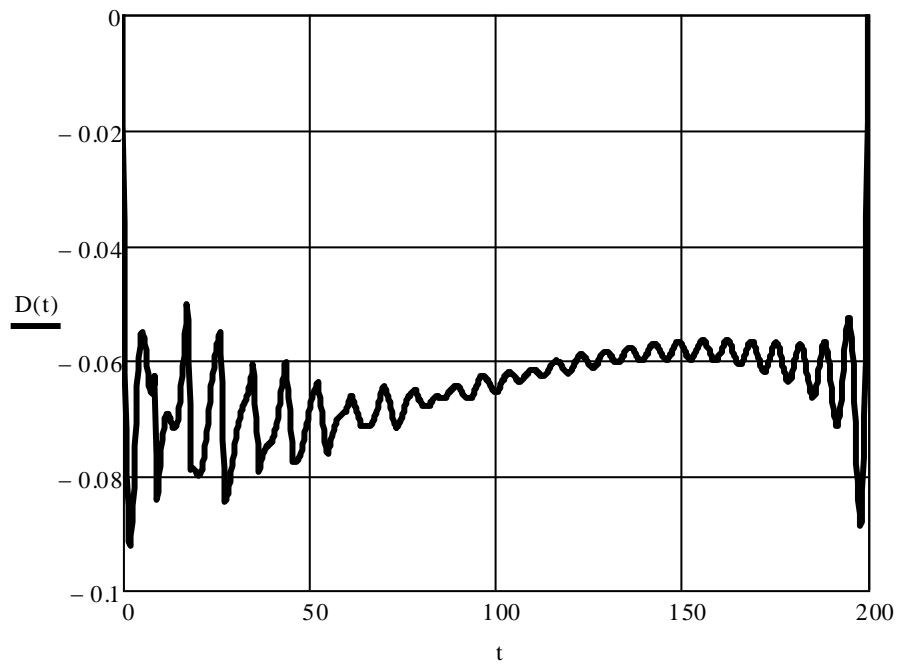


Рис. 2.15. Влияние вязкого сопротивления в середине пролета

Однако с ростом коэффициента сопротивления β_1 результаты меняются не только количественно, но и качественно. На рис. 2.16 – график для случая $\beta_1 = 0.3$, а на рис. 2.17 – $\beta_1 = 0.5$. Острота пиков в первом из этих случаев еще заметна, а во втором уже исчезла.

Рис. 2.16. Случай $\beta_1 = 0.3$ Рис. 2.17. Случай с большим сопротивлением ($\beta_1 = 0.5$)

Учет сопротивления особенно интересен при движении с остановкой. На рис. 2.18 представлены результаты расчета при законе (2. 2.6) и $\beta_1 = 0.1$:

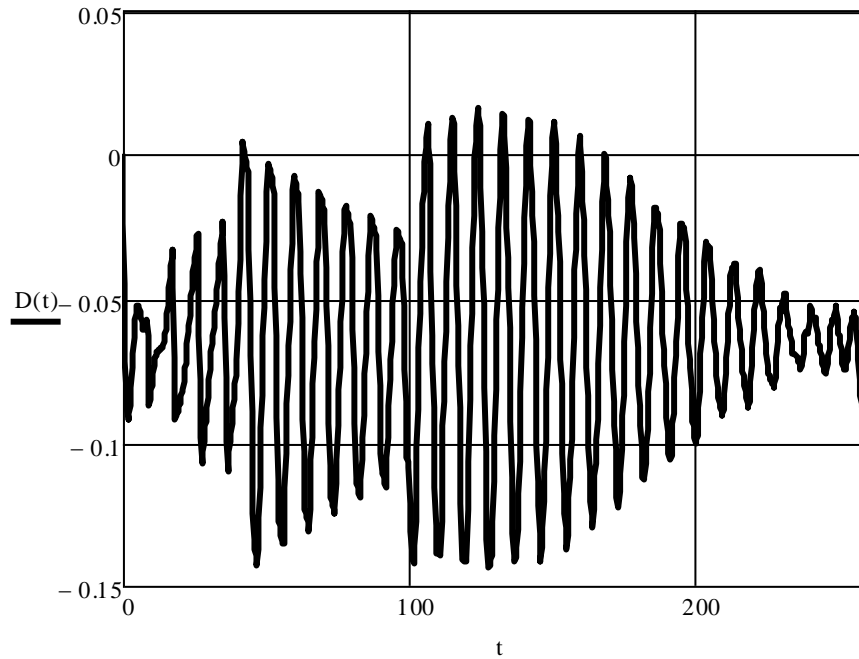


Рис. 2.18. Влияние вязкого сопротивления при остановке

Это значительно отличается от процесса без сопротивления на рис. 2.7. После остановки теперь нет возрастания колебаний, и сами колебания уменьшились: стало 0.16 м вместо 0.42.

В случае квадратичного сопротивления будет

$$Q_i^{\mathfrak{z}} = \int_0^l p^{\mathfrak{z}} \varphi_i dx = Q_i - \beta_2 \sum_{j,k=1}^n \dot{q}_j |\dot{q}_k| \int_0^l \varphi_i \varphi_j |\varphi_k| dx \Rightarrow \quad (2.5.3)$$

$$Q^{\mathfrak{z}} = Q - F(W).$$

Однако время счета растет многократно, и число степеней свободы пришлось радикально уменьшить – до $n=3$. Но с таким малым числом степеней свободы результат недостоверен и потому не приводится.

Уязвимым местом расчетов в этом пункте является назначение коэффициента сопротивления β_1 . Поэтому решение носит иллюстративный характер.

Выводы по главе 2

1. Рассмотрена динамика провода ЛЭП как натянутой струны при подвижной сосредоточенной нагрузке в вертикальной плоскости. Получено аналитическое решение в виде ряда Фурье, в котором закон движения произволен. В случае постоянной скорости ряд просуммирован средствами компьютерной математики и обнаружены пилообразные колебания значительной амплитуды.
2. Для той же задачи о колебаниях струны с подвижной нагрузкой разработан и реализован в *Mathcad* метод Лагранжа-Ритца-Канторовича (ЛРК). Достоверность результатов установлена путем сравнения с рядом Фурье. Возможности метода позволяют эффективно рассматривать произвольный закон движения. Проведены расчеты практически важного случая движения с остановкой. С помощью метода ЛРК рассмотрено влияние изгибной жесткости провода.
3. Дано обоснование модели струны для провода ЛЭП. Рассмотрены исходные уравнения провода как упругой нити. Нелинейная краевая задача решена в *Mathcad* методом стрельбы. Графики прогиба и практическое постоянство силы натяжения служат обоснованием модели струны.
4. Поставлена и решена сложная задача о струне с точечной массой, движущейся по заданному произвольному закону. Метод ЛРК в сочетании с *Mathcad* позволил смоделировать динамику с достаточно большим числом степеней свободы в аппроксимации прогиба. Установлено, что пилообразные колебания имеют место и в такой модели.
5. Выведены уравнения и проведены расчеты с учетом сил вязкого сопротивления внешней среды. Пилообразные колебания обнаружены и в этом случае. Представлены соотношения и алгоритм расчета при квадратичном законе сопротивления.

Глава 3. Параметрические колебания системы

Описанные в главе 2 пилообразные колебания ДМА на проводе в вертикальной плоскости вызывают не только инерционные нагрузки ударного типа, но также они могут возбудить поперечные параметрические колебания. Наиболее опасным случаем таких колебаний является параметрический резонанс. В данной главе выводятся уравнения для таких процессов и строятся их численные решения.

Теория и практика расчета параметрических колебаний рассмотрена во многих книгах и статьях [3, 6, 29, 41, 45, 52, 56]. Особенностью подхода в данной главе является применение лагранжевой механики твердых и упругих тел в сочетании с компьютерной математикой.

3.1. Маятник с подвижной точкой подвеса

Начнем с простейшей модели: ДМА является физическим маятником, точка подвеса которого движется по вертикали по заданному закону. Уравнение для угла отклонения $\theta(t)$ известно [3, 41, 45]:

$$J\ddot{\theta} + ml(g - a(t))\sin\theta = 0 . \quad (3.1.1)$$

Здесь J – момент инерции относительно оси подвеса, l – расстояние центра масс от этой оси, g – ускорение свободного падения, $a(t)$ – ускорение подвеса (вниз). Обычно предполагают колебания малыми и заменяют $\sin\theta$ на θ . При периодической зависимости $a(t)$ тогда получается уравнение Хилла [3, 41, 45], теория которого весьма сложна, но хорошо разработана.

Одним из запоминающихся результатов для уравнения Хилла является параметрический резонанс (ПаРез) в случае, когда полупериод $a(t)$ близок периоду свободных колебаний маятника. ПаРез очень опасен, он качественно отличается от обычного резонанса: амплитуда растет во времени по экспоненциальному закону, и возникает ПаРез в полосе частот.

При рассмотрении параметрических колебаний ДМА классические представления о параметрическом резонансе [6, 29, 45] неприменимы, поскольку пилообразные колебания все-таки не являются периодическими. Однако благодаря компьютерной математике (*Mathcad*) возможности моделирования ПаРез необычайно расширились. Можно просто решать уравнение (3.1.1) при различных начальных условиях; наличие нарастающих решений будет означать ПаРез.

Важным для последующих расчетов является ускорение точечной массы (п. 2.4):

$$a = \ddot{U} = \dot{\xi}^2 u'' + u' \ddot{\xi} + 2\dot{\xi} \dot{u}' + \ddot{u} .$$

При постоянной скорости $\dot{\xi} = v$, учитывая уравнения (2.4.7), получим

$$\begin{aligned} a(t) &= v^2 \varphi''^T U + 2v \varphi'^T \dot{U} + \varphi^T \ddot{U} = \\ &= [v^2 \varphi''^T - \varphi^T \Lambda (C + v^2 \kappa)] U + 2v (\varphi'^T - \varphi^T \Lambda \eta) V + \varphi^T \Lambda F. \end{aligned} \quad (3.1.2)$$

Так можно избежать повторного численного дифференцирования со свойственной ему большой погрешностью. Функция $a(t)$ имеет быстроосциллирующий характер (рис. 3.1). Для оценки инерционной нагрузки на ДМА представляет интерес среднее значение ее модуля

$$\langle |a| \rangle = t_*^{-1} \int_0^{t_*} |a| dt.$$

Время t_* может соответствовать проходу всей дистанции. Для графика на рис. 3.1 $\langle |a| \rangle = 0.037 \text{ м} / \text{с}^2$. Инерционная статическая нагрузка с таким ускорением очень мала, но в динамике эффект воздействия может быть значительным из-за резонансов.

Используя численное решение для провода с массой из п.2.4, определим ускорение по формуле (3.1.2) и подставим в уравнение маятника (3.1.1). Несмотря на очень сложный график функции $a(t)$, уравнение интегрируется быстро и устойчиво. В модели провода учитывалась также изгибная жесткость для сглаживания пиков.

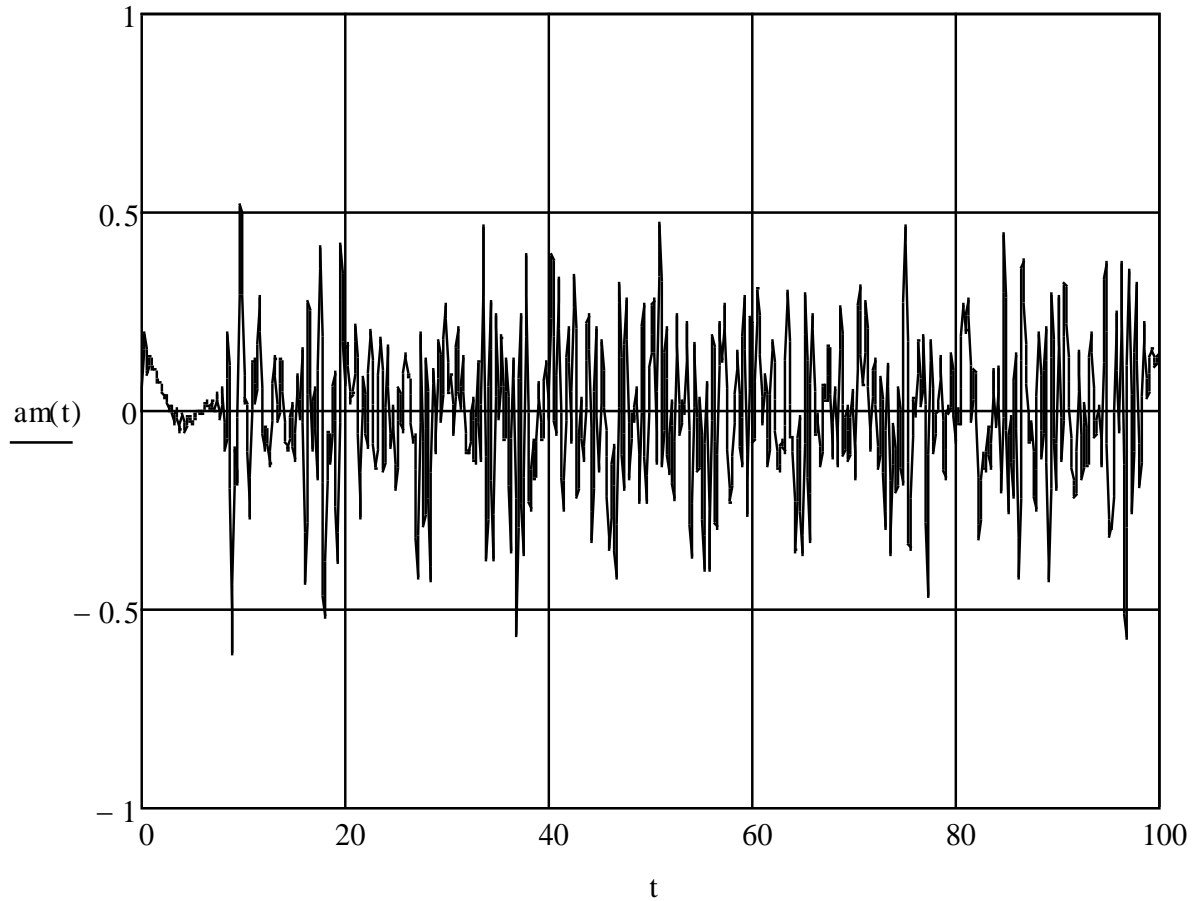


Рис. 3.1. Ускорение подвеса

Результаты для линейного маятника (θ вместо $\sin\theta$) – на рис. 3.2. Принятые значения параметров: $l = 0.331$ м, $R_i = \sqrt{J/m} = 0.3$ м (радиус инерции маятника). Начальные условия: $\theta(0) = 0.1$, $\dot{\theta}(0) = 0$.

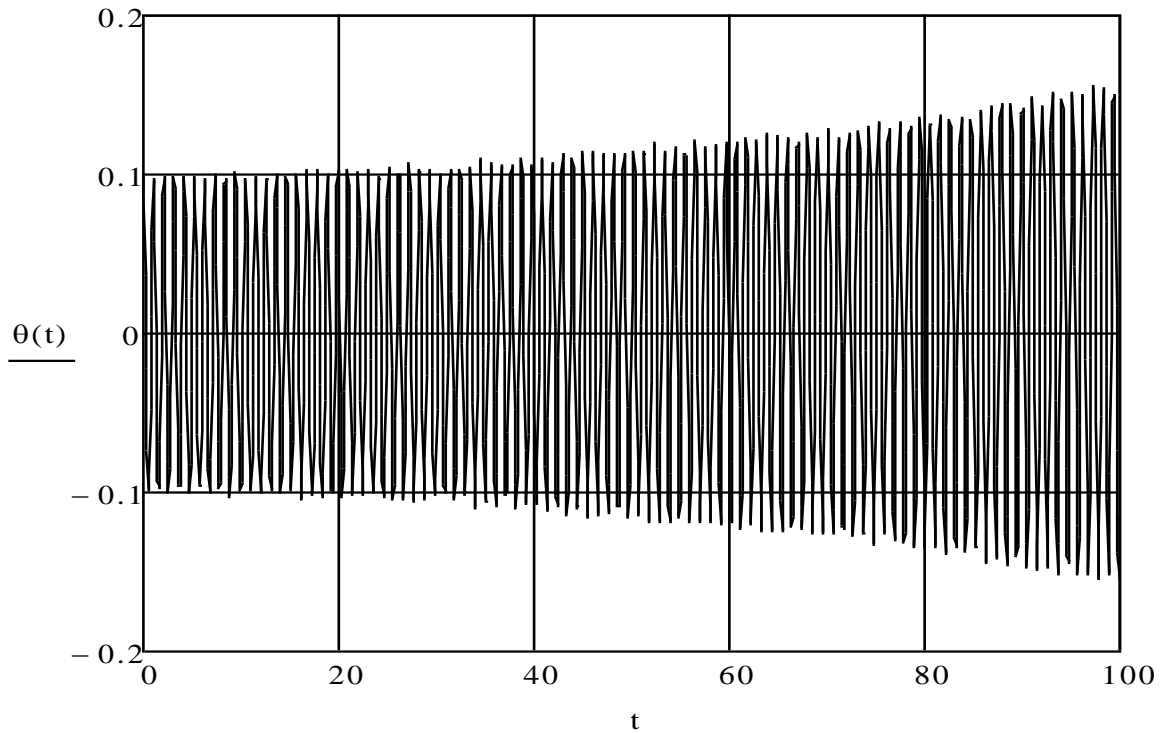


Рис. 3.2. Зависимость $\theta(t)$ для линейного маятника

На этом графике мы видим слабо выраженный параметрический резонанс (ПаРез). Длина маятника выбрана так, чтобы ПаРез наступил.

Аналогичный расчет для нелинейного маятника дал график почти такой же, как на рис. 3.2. Влияние нелинейности не проявилось из-за малости угла. Но разница не проявилась и при увеличении начального угла в три раза (до 0.3).

3.2. Уравнения для параметрических колебаний ДМА

Обратимся далее к более сложной модели с движущимся по струне физическим маятником (рис. 3.3):

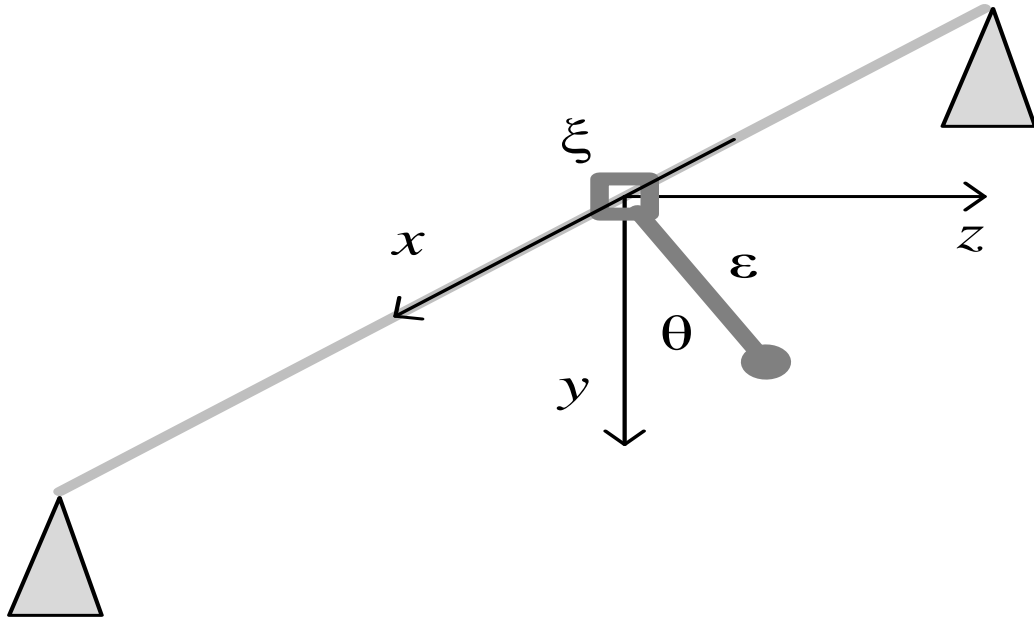


Рис. 3.3. Расчетная схема для маятниковых колебаний ДМА

Конфигурация провода пространственная, прогиб имеет две компоненты $u_y(x,t), u_z(x,t)$. Дополнительной неизвестной является угол отклонения маятника $\theta(t)$ в плоскости y, z . Определим координаты и скорость центра масс:

$$x = \xi(t), \quad y = u_y(\xi, t) + \varepsilon \cos \theta, \quad z = u_z(\xi, t) + \varepsilon \sin \theta \Rightarrow \dot{x} = \dot{\xi},$$

$$\dot{y} = u_y' \dot{\xi} + \dot{u}_y - \varepsilon \dot{\theta} \sin \theta, \quad \dot{z} = u_z' \dot{\xi} + \dot{u}_z + \varepsilon \dot{\theta} \cos \theta.$$

Здесь ε – расстояние центра масс от точки подвеса. Кинетическая энергия тела

$$K_m = \frac{1}{2}(mv_c^2 + I_c \dot{\theta}^2);$$

$$v_c^2 = \dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2 =$$

$$+ \dot{\xi}^2(1 + u_y'^2 + u_z'^2) + \dot{u}_y^2 + \dot{u}_z^2 + \varepsilon^2 \dot{\theta}^2 + 2\dot{\xi}(u_y' \dot{u}_y + u_z' \dot{u}_z) +$$

$$+ 2\dot{\xi} \varepsilon \dot{\theta}(-u_y' \sin \theta + u_z' \cos \theta) + 2\varepsilon \dot{\theta}(-\dot{u}_y \sin \theta + \dot{u}_z \cos \theta)$$

(I_c – момент инерции относительно центра масс).

Уравнения динамики с таким выражением энергии слишком сложны. Математическое моделирование на их основе не представляется возможным. Поэтому упростим постановку задачи. Положим $u_y(x,t)$ заданной функцией и линеаризуем задачу, считая u_z, θ малыми одного порядка. Вместо выражения (3.2.1) будет

$$2K_m = m[\dot{\xi}^2 u_z'^2 + \dot{u}_z^2 + 2\dot{\xi} u_z' \dot{u}_z + 2\dot{\xi} \varepsilon \dot{\theta} (-u_y' \theta + u_z') + 2\varepsilon \dot{\theta} (-\dot{u}_y \theta + \dot{u}_z)] + (m\varepsilon^2 + I_c) \dot{\theta}^2 + \dots$$

Не выписаны малые высшего порядка, а также функции одного лишь времени.

Используем вариационный метод Лагранжа-Ритца-Канторовича (ЛРК) с аппроксимацией прогибов (как выше):

$$u_z(x, t) = \sum_{i=1}^n U_i(t) \varphi_i(x) = U^T(t) \varphi(x);$$

$$2K(\dot{U}, U, \dot{\theta}, \theta, t) = \rho \int_0^l (\dot{u}_y^2 + \dot{u}_z^2) dx + m v_m^2 + I_c \dot{\theta}^2 = \quad . \quad (3.2.2)$$

$$= \dot{U}^T (M + \mu(\xi)) \dot{U} + \dot{\xi}^2 U^T \sigma(\xi) U + 2\dot{\xi} U^T \eta(\xi) \dot{U} + 2m\varepsilon \dot{\theta} (\dot{\xi} U^T \varphi'(\xi) + \dot{U}^T \varphi(\xi) - v_m \theta) + (m\varepsilon^2 + I_c) \dot{\theta}^2 + \dots$$

Здесь $v_m \equiv \dot{u}_y + v u_y'$ – скорость точки подвеса по оси y ; введены те же матрицы инерционных характеристик, что в п.2.4.

Потенциальная энергия равна сумме вкладов от натяжения струны и от тяготения:

$$\Pi(U, \theta, t) = \frac{1}{2} T \int_0^l (u_y'^2 + u_z'^2) dx - mg(u_y(\xi, t) + \varepsilon \cos \theta) = \quad . \quad (3.2.3)$$

$$= \frac{1}{2} (U^T C U + mg \varepsilon \theta^2) + \dots$$

с матрицей C из (2.4.4). Не выписаны малые величины высшего порядка, а также аддитивная константа.

Составляем уравнения Лагранжа:

$$\left(\frac{\partial K}{\partial \dot{U}} \right) - \frac{\partial K}{\partial U} = - \frac{\partial \Pi}{\partial U},$$

$$\left(\frac{\partial K}{\partial \dot{\theta}} \right) - \frac{\partial K}{\partial \theta} = - \frac{\partial \Pi}{\partial \theta}. \quad (3.2.4)$$

Считая скорость $\dot{\xi} = v$ постоянной, определим производные

$$\begin{aligned}\frac{\partial K}{\partial \dot{U}} &= (M + \mu)\dot{U} + v\eta^T U + m\varepsilon\dot{\theta}\varphi, \\ \frac{\partial K}{\partial U} &= v^2\sigma U + v(\eta\dot{U} + m\varepsilon\dot{\theta}\varphi'), \\ \frac{\partial K}{\partial \dot{\theta}} &= (m\varepsilon^2 + I_c)\dot{\theta} + m\varepsilon(\dot{U}^T \varphi(\xi) + vU^T \varphi'(\xi) - v_m \theta), \\ \frac{\partial K}{\partial \theta} &= -m\varepsilon v_m \dot{\theta}; \quad \frac{\partial \Pi}{\partial U} = CU, \\ \frac{\partial \Pi}{\partial \theta} &= mg\varepsilon\theta.\end{aligned}$$

Подставив в (3.2.4), получим систему уравнений Лагранжа

$$\begin{aligned}(M + \mu)\ddot{U} + 2v\eta\dot{U} + (v^2\kappa + C)U + m\varepsilon\ddot{\theta}\varphi &= 0, \\ (m\varepsilon^2 + I_c)\ddot{\theta} + m\varepsilon[\varphi^T \ddot{U} + 2v\varphi'^T \dot{U} + v^2\varphi''^T U + (g - a_m)\theta] &= 0.\end{aligned}\quad (3.2.5)$$

Далее разрешим относительно вторых производных, введем скорости $\dot{U} = V$, $\dot{\theta} = \omega$ и запишем систему ОДУ (3.2.5) в каноническом виде:

$$\dot{Y} = F(t, Y) = A(t)Y; \quad Y \equiv \begin{pmatrix} U \\ V \\ \theta \\ \omega \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} 0 & I & 0 & 0 \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ A_{41} & A_{42} & A_{43} & 0 \end{pmatrix}. \quad (3.2.6)$$

Используются блочные матрицы с обозначениями

$$\begin{aligned}A_{21} &= -M_0^{-1}C_0, \\ A_{22} &= -2\alpha v M_0^{-1}\eta, \\ A_{23} &= \beta\varepsilon M_0^{-1}g_0\varphi, \\ A_{41} &= \beta(\varphi^T M_0^{-1}C_0 - v^2\varphi''^T), \\ A_{42} &= -2v\beta(\varphi'^T - \alpha\varphi^T M_0^{-1}\eta), \\ A_{43} &= -\beta g_0(1 + m\beta\varepsilon\varphi^T M_0^{-1}\varphi) \\ M_0 &\equiv M + \alpha\mu, \quad \alpha \equiv \frac{r_c^2}{\varepsilon^2 + r_c^2}, \quad \beta \equiv \frac{\varepsilon}{\varepsilon^2 + r_c^2}, \quad C_0 \equiv C + v^2\alpha\kappa.\end{aligned}\quad (3.2.7)$$

Система (3.2.6) успешно решается в *Mathcad*. Поперечный прогиб $u_z(\xi, t)$ и угол $\theta(t)$ интересны в одинаковой степени.

3.3 Параметрическая неустойчивость

Для решения системы (3.2.6) используем адаптивный метод Рунге-Кутты *Rkadapt* в *Mathcad*. На рис. 3.4 и 3.5 – результаты расчета угла $\theta(t)$ и поперечного смещения $u_z(vt, t)$. Значения параметров: $\varepsilon = r_c = 0.2$ м, а все другие – как выше. Начальные условия для угла: $\theta(0) = 0.1, \dot{\theta}(0) = 0$. Число степеней свободы прогиба в каждой из двух плоскостей $n = 15$. В итоге система имеет 31 степень свободы.

Из графиков видим, что угол не превосходит начального значения 0.1, а горизонтальный прогиб порядка 8 мм. Но функции являются быстроосциллирующими и напоминают случайные процессы. Соответствующие инерционные нагрузки могут вызвать в конструкции ДМА высокочастотные вибрации. Но параметрического резонанса на графиках мы не видим.

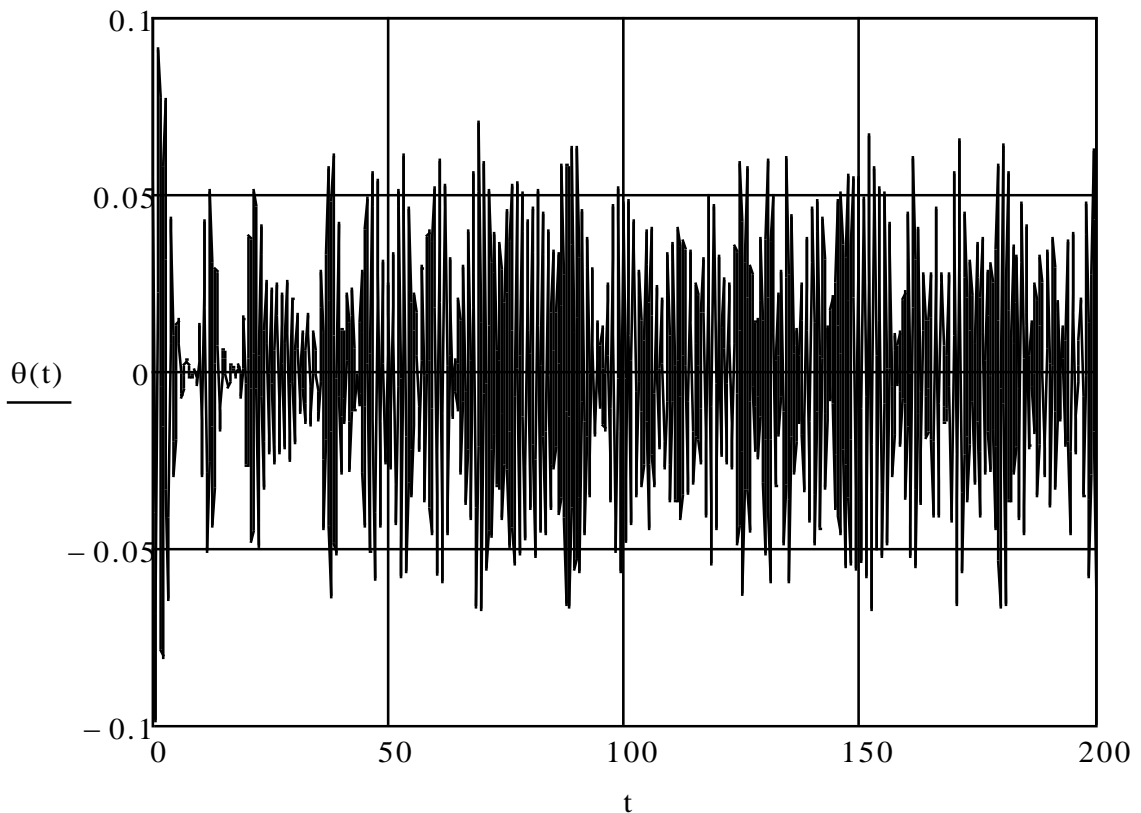


Рис. 3.4. Угол отклонения от вертикали

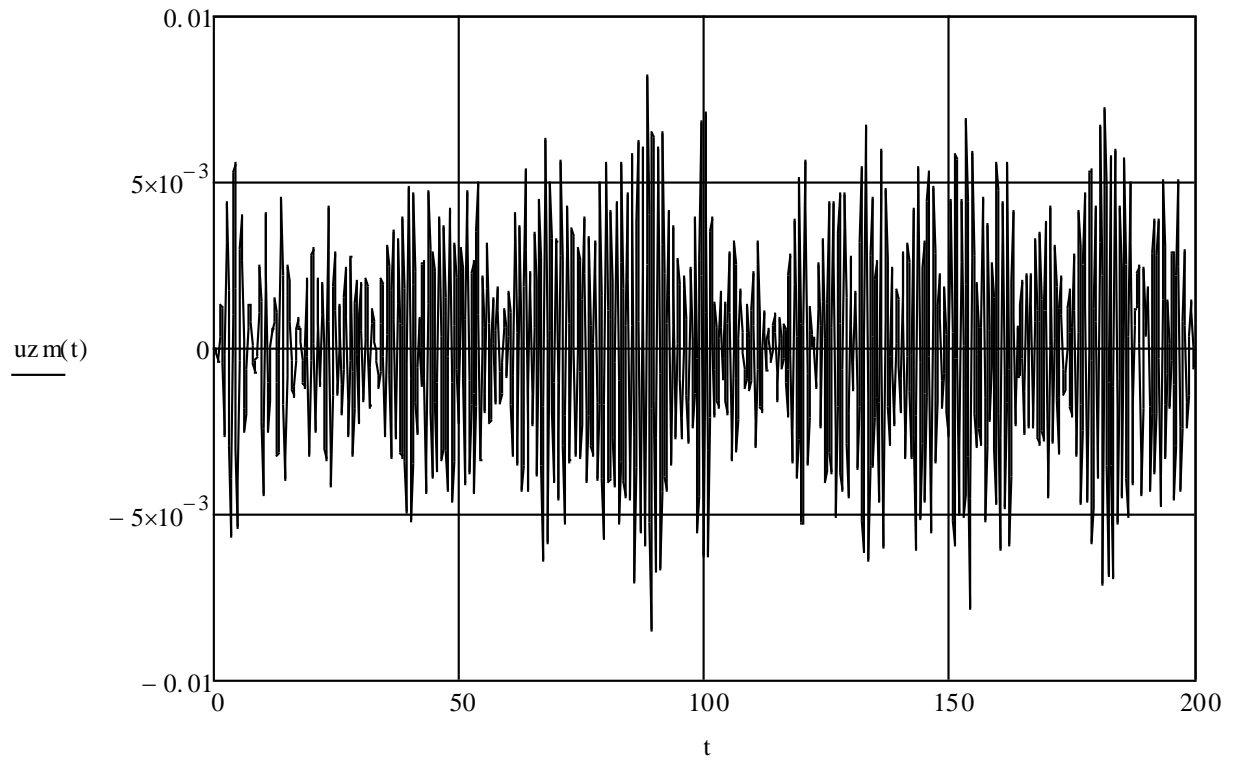


Рис. 3.5. Горизонтальный прогиб

Однако рассмотрим случай с уменьшенными параметрами: $\varepsilon = r_c = 0.02$ м. Решение изменилось не только количественно, но и качественно – см. рис. 3.6 и 3.7. Видим выраженный параметрический резонанс.

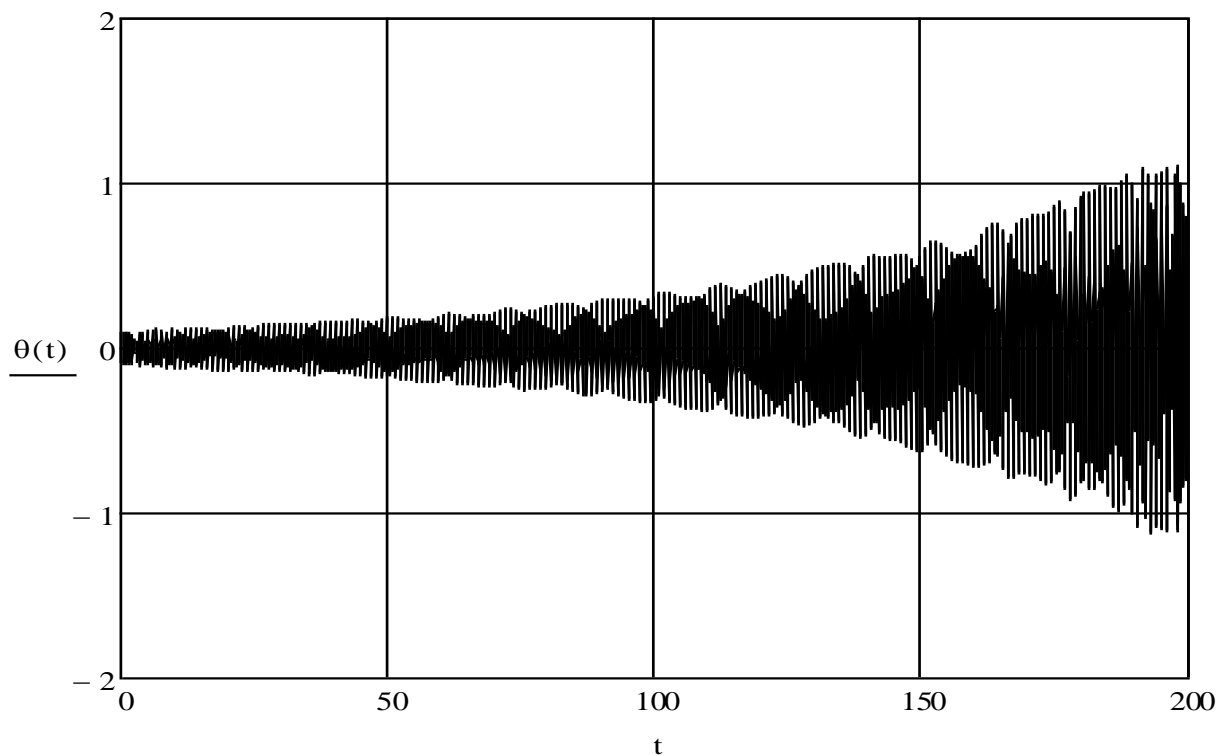


Рис. 3.6. ПаРез: угол отклонения

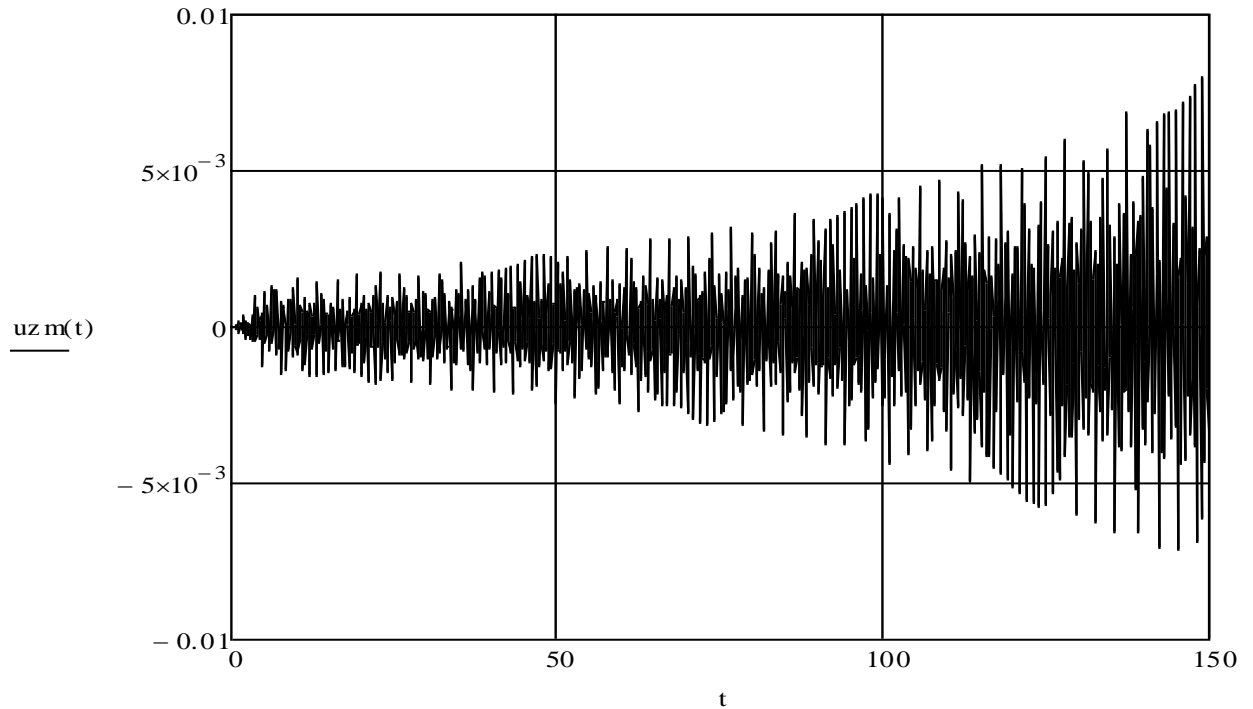


Рис. 3.7. ПаРез: горизонтальный прогиб

Вывод из этих расчетов: появление ПаРез сильно зависит от инерционных параметров ДМА как физического маятника. Положение центра масс и радиус инерции необходимо определить весьма точно – тогда математическое моделирование позволит достоверно оценить параметрическую устойчивость.

Выводы по главе 3

1. Для заданного движения провода в вертикальной плоскости рассмотрены возможные маятниковые колебания ДМА. Рассмотрены две модели физического маятника: линейная и нелинейная. Возникающие параметрические колебания смоделированы средствами *Mathcad*.
2. Выведены уравнения Лагранжа для системы провод-маятник с учетом горизонтального прогиба. Разработана методика решения соответствующей системы ОДУ средствами *Mathcad*. Проведены расчеты для 16 степеней свободы.

3. Многовариантные расчеты показали, что параметрический резонанс (неклассического типа, как нарастающие колебания) может наступить или не наступить в зависимости от сочетания параметров системы.

Глава 4. Механика контактного соединения ДМА с проводом

Важной особенностью рассматриваемой ДМА является способ крепления к проводу. Соединение разъемное, включает в себя две пары колес и стяжную пружину. Эти моторизованные колеса-шкивы, в обычном состоянии прижатые пружиной к проводу, могут расходиться для обхода препятствия (рис. В.2). Прочность и надежность такого соединения можно обеспечить с помощью предварительного математического моделирования. Повышенные требования к прочности подвеса предъявляются ввиду колебаний провода, неизбежных даже при равномерном движении. В данной главе для механизма подвеса ДМА на проводе ЛЭП поставлены и решены задачи о контакте звеньев как твердых и упругих тел. Разработана методика, позволяющая определить предельную нагрузку на подвес и выбрать значения параметров конструкции.

Соединение колес-шкивов ДМА с проводом посредством натянутой пружины схематично изображено на рис. 4.1.1 (показана половина). Для анализа прочности соединения в целом рассмотрены твердые тела (ролик и провод) с пружиной – это первая часть главы. Моделирование ролика и провода как упругих тел выполнено по классической схеме Герца – вторая часть. Синтез обоих решений позволяет оценить прочность соединения с учетом контактных деформаций.

В главе используется обширная литература по контактным задачам в виде книг [12, 17, 38, 40] и статей [19, 30, 31].

4.1. Контакт твердых тел

Расчетная схема для рассмотрения ролика и провода как твердых тел изображена на рис. 4.1. Кружок 1 – это сечение провода. Фигура 2 – это ролик (один из двух). Ролики прижимаются к проводу пружиной жесткости c . Но при достаточно большой нагрузке на соединение провод может выскочить из роликов. Начальное положение элементов показано пунктиром.

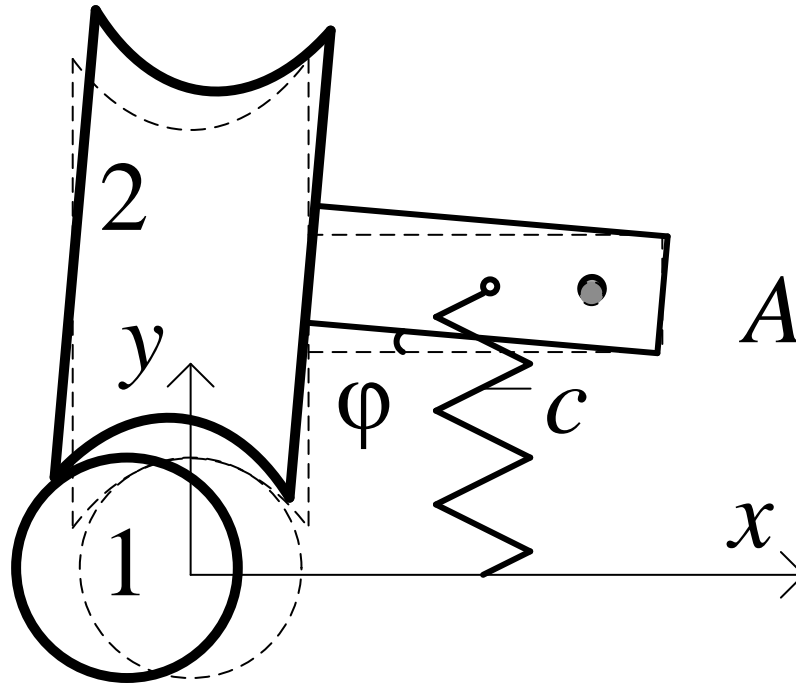


Рис. 4.1. Ролик и провод как твердые тела

Имеем контакт двух поверхностей (линий): $y = v_1(x)$, $y = v_2(x)$. В точке контакта $x = \xi$ (неизвестной) выполняются два условия:

$$v_1(\xi) = v_2(\xi), \quad v_1'(\xi) = v_2'(\xi). \quad (4.1.1)$$

Это условия касания двух кривых. В обычном рабочем состоянии угол $\varphi = 0$, контакт будет в точке $\xi = 0$.

Выведем необходимые геометрические соотношения. Пусть провод смещается влево на расстояние h , а угол наклона ролика возрастает от нуля до φ . Тогда вместо функций $v_1(x)$, $v_2(x)$ получим $v_1(x+h)$, $v_2(x, \varphi)$. Найдем выражение последней функции.

Линия границы ролика перемещается как твердое тело, поворачиваясь вокруг шарнира A (рис. 4.1) с радиус-вектором \mathbf{A} . В исходном состоянии ($\varphi = 0$) имеем

$$y = v_2(x) \Leftrightarrow x = x_0(t), \quad y = y_0(t) \Leftrightarrow \mathbf{r}_0(t) = x\mathbf{i} + y\mathbf{j}$$

(с ортами декартовых осей x, y). Введено параметрическое задание линии.

При повороте получим новый радиус-вектор \mathbf{r} (рис.)::

$$\mathbf{r} = \mathbf{A} + \boldsymbol{\rho}, \boldsymbol{\rho} = (x_0(t) - A_x)\mathbf{i}_1 + (y_0(t) - A_y)\mathbf{j}_1. \quad (4.1.2)$$

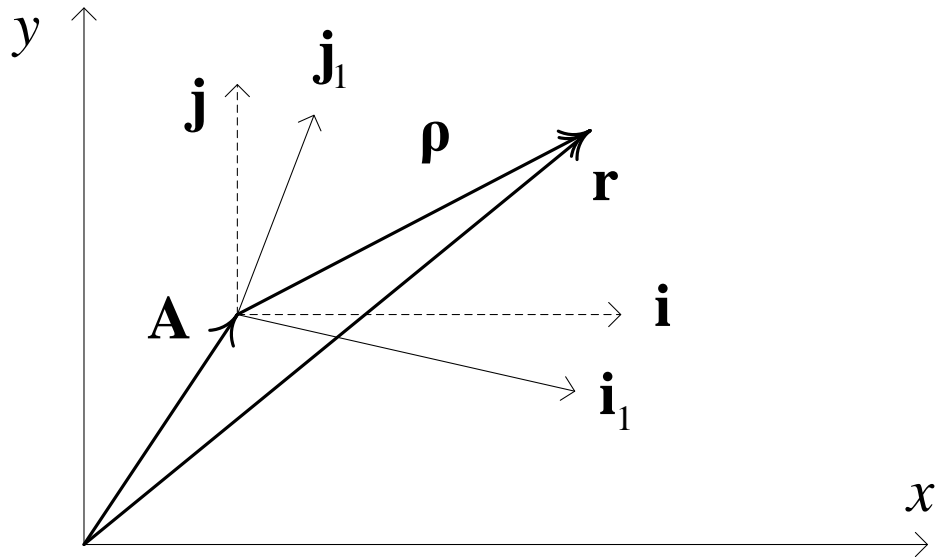


Рис. 4.2. Повернутые орты

Из векторных соотношений (4.1.2) следует

$$\begin{aligned} x = x(t, \varphi) &\equiv \mathbf{r} \cdot \mathbf{i} = A_x + (x_0(t) - A_x) \cos \varphi + (y_0(t) - A_y) \sin \varphi, \\ y = y(t, \varphi) &\equiv \mathbf{r} \cdot \mathbf{j} = A_y - (x_0(t) - A_x) \sin \varphi + (y_0(t) - A_y) \cos \varphi. \end{aligned} \quad (4.1.3)$$

Используя сначала первое из этих уравнений, а затем второе, получим искомую геометрическую зависимость:

$$t = t(x, \varphi) \Rightarrow y[t(x, \varphi), \varphi] = V_2(x, \varphi).$$

Обратную функцию $t(x, \varphi)$ можно построить численно в пакете *Mathcad*, посредством интерполяции с перестановкой массивов значений аргумента и функции [34].

Получив геометрические соотношения, приступим к силовому анализу механизма. Используем методику аналитической статики с принципом виртуальных перемещений [13, 21]:

$$P\delta h - \delta\Pi(\varphi) = 0. \quad (4.1.4)$$

Здесь P – сила, «вырывающая» провод из роликов, Π – энергия пружины. Имеем

$$\begin{aligned} \delta\Pi &= \Pi'(\varphi)\delta\varphi, \varphi = \varphi(h) \Rightarrow \\ \delta\varphi &= \varphi'(h)\delta h \Rightarrow P = \Pi'(\varphi)\varphi'(h). \end{aligned} \quad (4.1.5)$$

Функция $\varphi = \varphi(h)$ определяется из системы уравнений (4.1.1) для повернутой конфигурации:

$$\begin{aligned} v_1(\xi + h) &= V_2(\xi, \varphi), \\ v_1'(\xi + h) &= \partial_\xi V_2(\xi, \varphi). \end{aligned} \quad (4.1.6)$$

Далее примем параболическое очертание ролика:

$$\begin{aligned} v_1(x) &= \sqrt{R - x^2}, \\ v_2(x) &= R - \omega x^2 \quad (\omega < 1/2R). \end{aligned} \quad (4.1.7)$$

Второе соотношение – для окружности провода радиусом R .

В параметрическом задании для ролика примем $x_0(t) = t$; тогда $y_0(t) = R - \omega t^2$. Первое из уравнений (4.1.3) становится квадратным:

$$\alpha t^2 - 2\beta t + \gamma = 0; \quad \alpha = \omega \sin \varphi, \quad 2\beta = \cos \varphi, \quad \gamma = x - A_x(1 - \cos \varphi) - (R - A_y) \sin \varphi.$$

Решая относительно t , найдем функцию V_2 :

$$\begin{aligned} t &= \alpha^{-1}(\beta - \sqrt{\beta^2 - \alpha\gamma}) = t(x, \varphi), \\ y &= A_y - (t - A_x) \sin \varphi + (R - \omega t^2 - A_y) \cos \varphi = V_2(x, \varphi). \end{aligned} \quad (4.1.8)$$

Далее обращаемся к системе (4.1.6). Для производной используем выражение

$$\partial_\xi V_2 = \frac{\dot{y}}{\dot{x}} = -\frac{\sin \varphi + 2\omega t(\xi, \varphi) \cos \varphi}{\cos \varphi - 2\omega t(\xi, \varphi) \sin \varphi}.$$

Численно решая в *Mathcad* систему (4.1.6) с таким выражением производной (для массива значений h), находим функции $\xi(h), \varphi(h)$. Выражения функций получаются из массивов их значений интерполяцией.

В численном примере были приняты значения параметров: $R = 0.025$, $\omega = 0.97/2R$, $r_0 = 0.15$, $A_x = 0.5$, $A_y = 0.2$ (в системе СИ). Очертания контактирующих кривых показаны на рис. 4.3. График функции $\varphi(h)$ представлен на рис. 4.4 – он почти линейный.

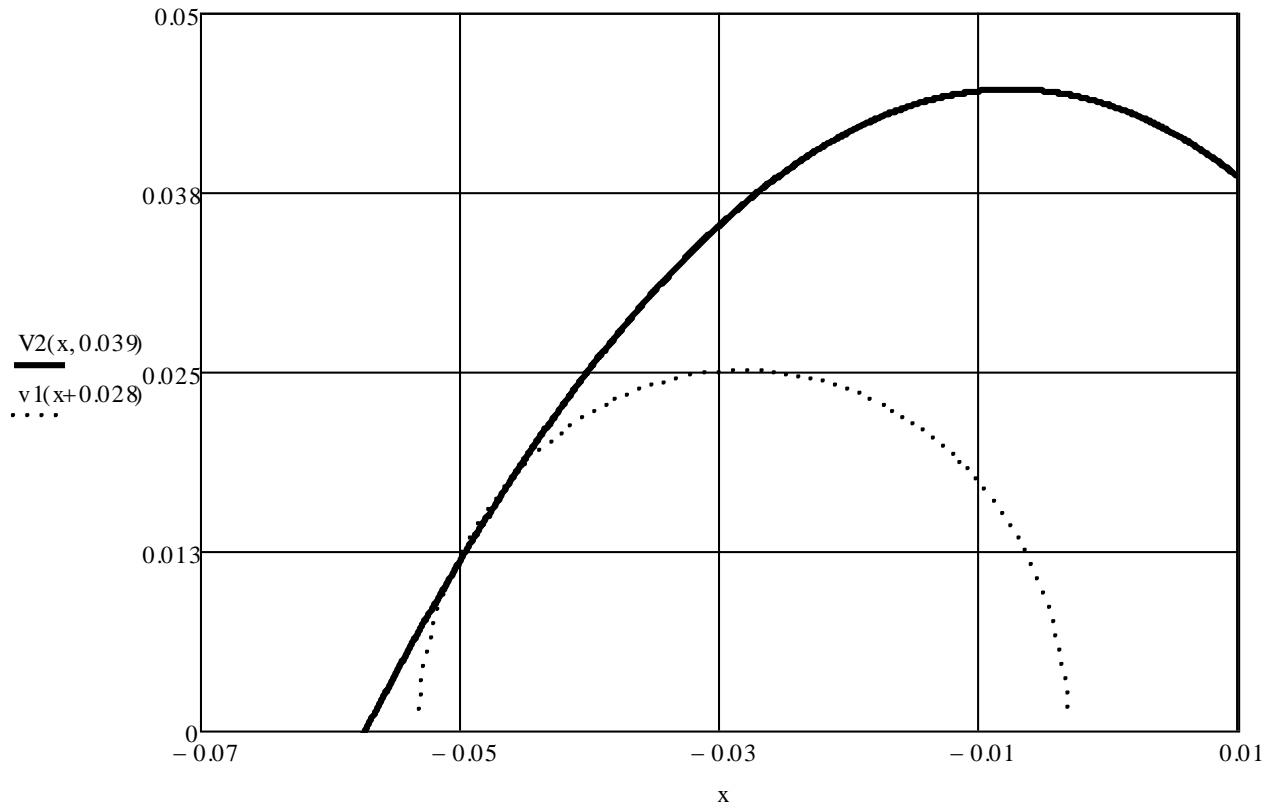


Рис. 4.3. Контактирующие поверхности (линии)

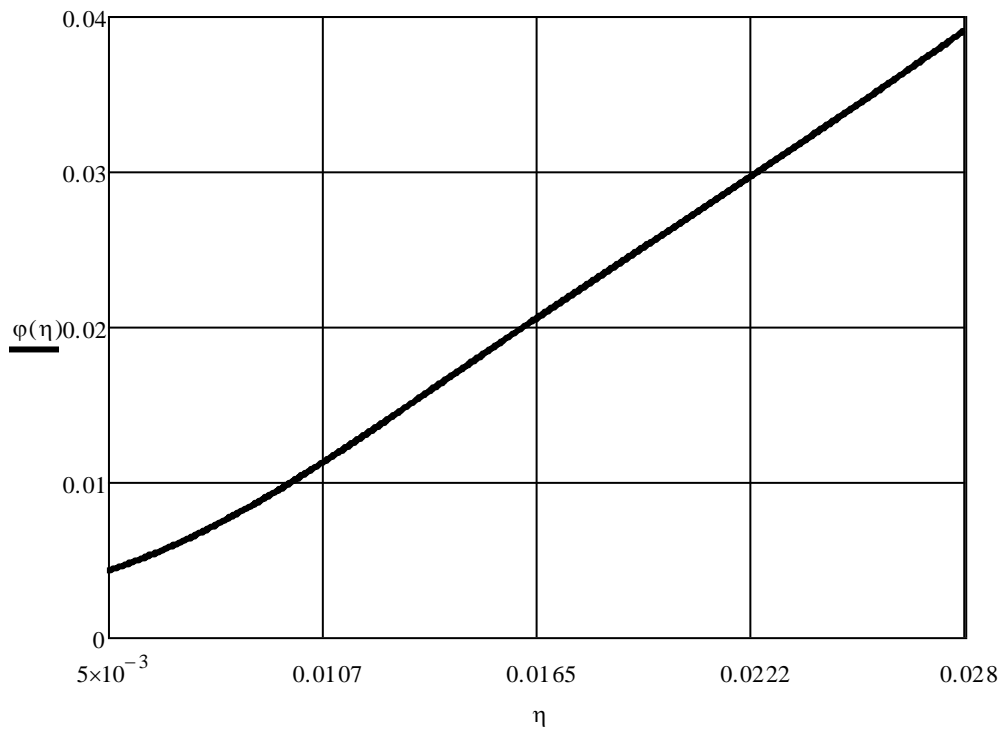


Рис. 4.4. Угол как функция смещения

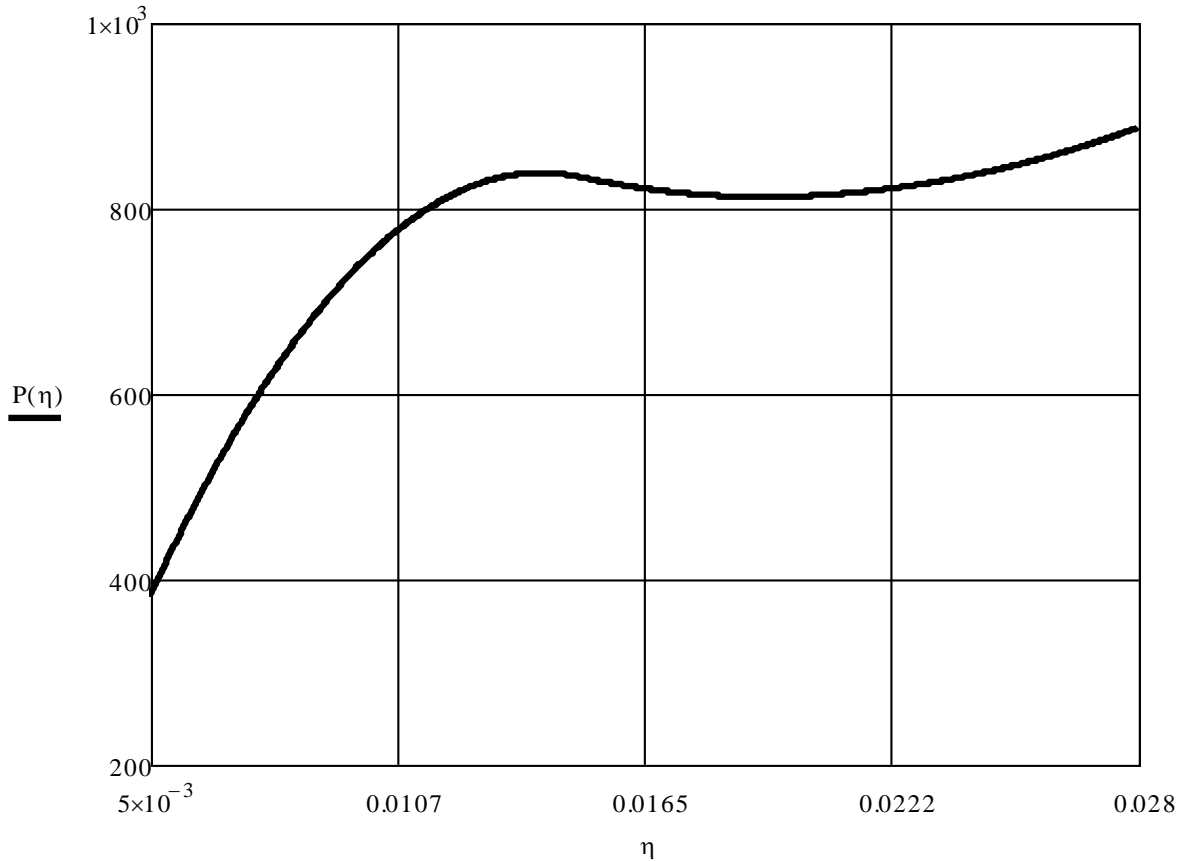


Рис. 4.5. Сила как функция смещения

Энергия деформации пружины (жесткости c) пропорциональна квадрату удлинения:

$$\begin{aligned} \Pi &= c\Delta^2/2, \Delta(\varphi) = l(\varphi) - l_0, \\ l &= \sqrt{b^2(1 - \cos \varphi)^2 + (A_y + b \sin \varphi)^2}. \end{aligned} \quad (4.1.9)$$

Здесь Δ – удлинение пружины, b – расстояние точки крепления конца пружины от шарнира A , l_0 – начальная длина (меньше A_y). В численном примере $c = 5 \cdot 10^4$, $b = l_0 = 0.1$. График функции $P(h)$, определенной согласно (4.1.6), – на рис. 4.5. Максимальная нагрузка, которую выдерживает подвес, определяется численно и составляет $P_* = 837.2$ ($h = 0.014$). Это достаточно, чтобы удержать машину такого веса статически. Но при колебаниях (а они почти неизбежны) возможна потеря прочности соединения.

И расчеты, и вид формул показывают, что предельная сила пропорциональна

жесткости пружины. Поэтому подобрать необходимую жесткость легко, если знать нагрузку с учетом сил инерции.

Найдем контактную нормальную силу N между роликом и проводом. Из уравнения моментов для ролика относительно шарнира A (рис. 4.1) получим

$$N = c\Delta(\varphi)bc \cos\varphi/L . \quad (4.1.10)$$

Здесь L – плечо нормальной силы. Принимая $L=0.4$, для «вырывающей» силы $P=837.2$ ($\varphi=0.014$), получим $N=1270$. С таким значением силы проведем расчеты в п.4.3.

Листинг Mathcad с расчетом из этого п. – в приложении П.7.

4.2. Решение Герца

В основе классического решения Герца о контакте упругих тел лежат два допущения:

1. Каждое из двух контактирующих тел можно считать полупространством, нагруженным давлением по малой площадке;
2. Поверхности тел можно задать квадратичными функциями координат в касательной плоскости.

Схема Герца изложена во многих книгах [12, 17, 21, 38, 40]. Стремясь к максимальному методическому совершенству, разные авторы предлагали свои построения. В данной работе используется известный классический подход, дополненный средствами компьютерной математики (*Mathcad*).

На рис. 4.6 показана трехмерная область контакта двух тел.

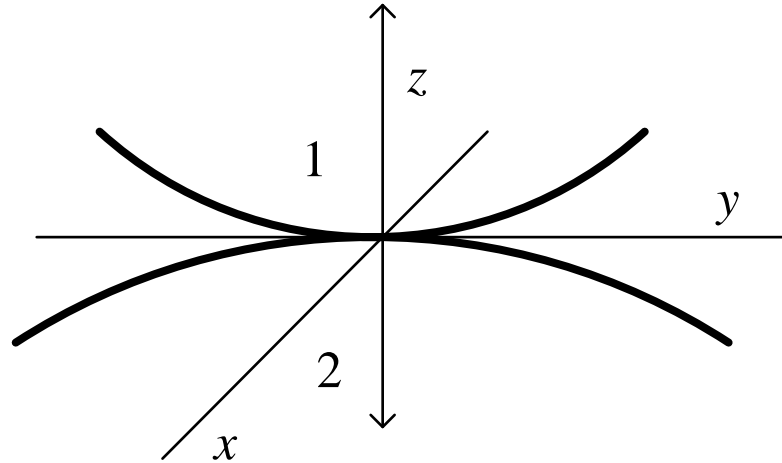


Рис. 4.6. Область контакта

Для каждого из тел имеем уравнение поверхности

$$z_{1,2} = A_{1,2}x^2 + 2B_{1,2}xy + C_{1,2}y^2 . \quad (4.2.1)$$

Здесь x, y – декартовы координаты в касательной плоскости, а ось z направлена по общей нормали (для каждого тела – внутрь).

При сближении тел на некоторое расстояние δ имеем следующее условие для перемещений w по оси z :

$$z_1 + z_2 + w_1 + w_2 = \delta . \quad (4.2.2)$$

Это условие ставится только на площадке контакта S . Она предполагается эллипсом с неизвестными полуосями a, b .

Поверхности гладкие – касательные напряжения равны нулю на всей плоскости $z=0$. Вне площадки контакта S отсутствует нормальное напряжение σ_z , а на площадке оно равно неизвестному контактному давлению со знаком минус: $\sigma_z = -p(x, y)$.

При этом считается, что

$$p = p_0 \sqrt{1 - \frac{x_1^2}{a^2} - \frac{y_1^2}{b^2}} . \quad (4.2.3)$$

Здесь p_0 – давление в центре, x_1, y_1 – координаты вдоль главных осей, повернутых относительно x, y на некоторый угол:

$$\begin{aligned}
& (A_1 + A_2)x^2 + 2(B_1 + B_2)xy + (C_1 + C_2)y^2 = \\
& = \frac{x_1^2}{a^2} + \frac{y_1^2}{b^2} = \frac{x_1^2}{2R_1} + \frac{y_1^2}{2R_2}.
\end{aligned} \tag{4.2.4}$$

В результате сложных выкладок с применением решения Папковича-Нейбера, теории потенциала и эллиптических функций [40] получены следующие формулы:

$$\begin{aligned}
\delta &= \frac{3Q\Omega}{2a} K(\varepsilon), \\
\varepsilon &\equiv \sqrt{1 - \frac{b^2}{a^2}}, \\
\Omega &\equiv \frac{1}{\pi} \left(\frac{1 - \nu_1^2}{E_1} + \frac{1 - \nu_2^2}{E_2} \right), \\
\frac{1}{R_1} &= \frac{3Q\Omega}{a^3} D(\varepsilon), \\
\frac{1}{R_2} &= \frac{3Q\Omega}{a^3} \frac{B(\varepsilon)}{1 - \varepsilon^2}.
\end{aligned} \tag{4.2.5}$$

Здесь Q – прижимающая сила, $\varepsilon = \sqrt{1 - b^2/a^2}$ – эксцентриситет эллиптической площадки контакта, $E_{1,2}, \nu_{1,2}$ – модули Юнга и коэффициенты Пуассона тел, a – полуось эллипса (большая). Присутствуют эллиптические интегралы:

$$\begin{aligned}
K(\varepsilon) &= \int_0^{\pi/2} \Delta^{-1} d\theta, \\
\Delta &\equiv \sqrt{1 - \varepsilon^2 \sin^2 \theta}, \\
E(\varepsilon) &= \int_0^{\pi/2} \Delta d\theta, \\
D(\varepsilon) &= (K - E)/\varepsilon^2, \\
B(\varepsilon) &= K - D.
\end{aligned} \tag{4.2.6}$$

Раньше для этих специальных функций использовались таблицы. Теперь же можно использовать компьютерную математику (*Mathcad*). Вычисления проходят очень быстро и дают высокую точность.

Порядок расчета таков. Сначала определяем радиусы $R_{1,2}$. Далее находим эксцентриситет ε как решение уравнения (численное)

$$R_1/R_2 = B(\varepsilon)/(1 - \varepsilon^2)D(\varepsilon) - \quad (4.2.7)$$

ε не зависит от нагрузки. График правой части как функции эксцентриситета представлен на рис. 4. 7.

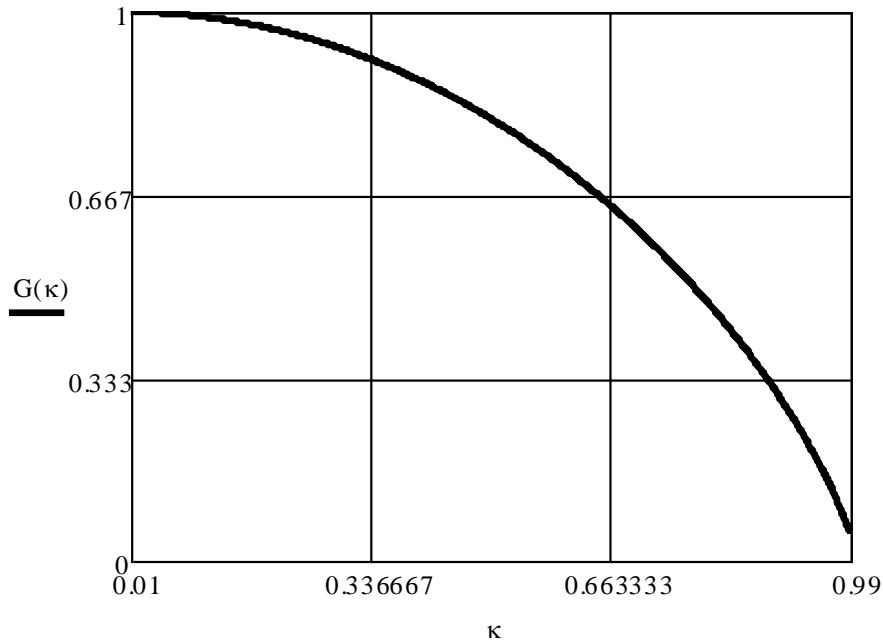


Рис. 4.7. Функция для расчета эксцентриситета

Определив ε , вычисляем по формулам (4.2.5) длину полуоси площадки контакта a и сближение тел δ – они пропорциональны $Q^{1/3}$ и $Q^{2/3}$ соответственно. Также определяем контактное давление в центре площадки $p_0 = 3Q/2\pi ab$.

Далее можно по известным сложным интегральным соотношениям определить напряженно-деформированное состояние в глубине тел [40]. Но это не требуется в данной работе.

4.3. Контакт упругих тел

В п. 4.1 ролик и провод рассматривались как твердые тела; были найдены соотношения между параметрами системы и предельной нагрузкой. Теперь

уточним решение, учитывая контактные упругие деформации. Используем классическое решение Герца, описанное в п. 4.2.

Сначала опишем геометрию поверхностей тел. Для ролика контактирующая с проводом поверхность вращения задается следующим уравнением (в цилиндрических координатах):

$$\mathbf{R}(\theta, \zeta) = r(\zeta)\mathbf{e}_r(\theta) + \zeta\mathbf{k}, \quad r(\zeta) = r_0 + \omega\zeta^2. \quad (4.3.1)$$

Обозначения координат и ортов направлений – на рис. 4.8: Ось ζ с ортом \mathbf{k} перпендикулярна плоскости ролика. В этой плоскости вводятся полярные координаты r, θ с ортами $\mathbf{e}_r, \mathbf{e}_\theta$.

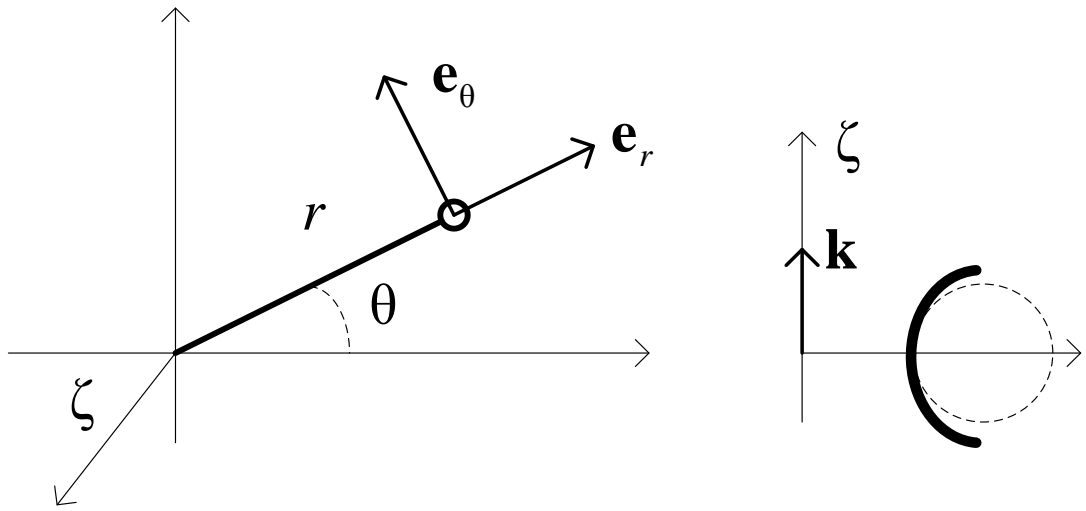


Рис. 4.8. Поверхность ролика в двух проекциях

Пунктирный кружок – это сечение провода. Коэффициент ω в $\mathbf{R}(\theta, \zeta)$ тот же, что в (4.1.6).

По правилам дифференциальной геометрии поверхностей найдем векторный базис, затем кобазис и выражение оператора Гамильтона [20, 21]:

$$\begin{aligned}
\mathbf{R}_\theta &= \partial_\theta \mathbf{R} = r \mathbf{e}_\theta, \\
\mathbf{R}_\zeta &= \partial_\zeta \mathbf{R} = \mathbf{k} + 2\omega\zeta \mathbf{e}_r, \\
\mathbf{R}^\theta &= r^{-1} \mathbf{e}_\theta, \\
\mathbf{R}^\zeta &= m^{-2} (\mathbf{k} + 2\omega\zeta \mathbf{e}_r), \\
m &\equiv \sqrt{1 + 4\omega^2 \zeta^2}; \\
\nabla &= \mathbf{R}^\theta \partial_\theta + \mathbf{R}^\zeta \partial_\zeta.
\end{aligned} \tag{4.3.2}$$

Это нужно для определения орта нормали и тензора кривизны поверхности:

$$\begin{aligned}
\mathbf{n} &= \frac{\mathbf{R}_\theta \times \mathbf{R}_\zeta}{|\mathbf{R}_\theta \times \mathbf{R}_\zeta|} = (\mathbf{e}_r - 2\omega\zeta \mathbf{k})/m, \\
\mathbf{b} &= -\nabla \mathbf{n} = -\frac{1}{rm} \mathbf{e}_\theta \mathbf{e}_\theta + \frac{2\omega}{m^5} (\mathbf{k} + 2\omega\zeta \mathbf{e}_r)(\mathbf{k} + 2\omega\zeta \mathbf{e}_r).
\end{aligned} \tag{4.3.3}$$

Направления $\mathbf{e}_\theta, \mathbf{k} + 2\omega\zeta \mathbf{e}_r$ являются главными для тензора \mathbf{b} . Величины, обратные соответствующим главным значениям – это радиусы кривизны поверхности (в перпендикулярных направлениях). При $\zeta = 0$ радиусы следующие: для θ : радиус r_0 ; линия ζ : радиус $1/2\omega$. Главные значения имеют противоположные знаки – поверхность ролика напоминает седло.

Сложим уравнения поверхностей ролика и провода, затем повернем оси для преобразования к сумме квадратов. Получим

$$R_1 = r_0, \quad R_2 = (R^{-1} - 2\omega)^{-1}. \tag{4.3.4}$$

В численном примере при радиусах $R_1 = 0.833, R_2 = 0.15$ из (4.2.7) получим $\varepsilon = 0.946$. Принимая для материалов провода и ролика $E_1 = 7 \cdot 10^{10}, E_2 = 2 \cdot 10^{11}, \nu_1 = 0.33, \nu_2 = 0.25$ и считая нагрузку $Q = 10^3$, найдем $a = 2.82 \cdot 10^{-3}, b = 9.12 \cdot 10^{-4}, \delta = 7.54 \cdot 10^{-6}, p_0 = 1.86 \cdot 10^8$. Сближение ничтожно, но контактное давление велико и может вызвать неупругие деформации.

Это почти точно соответствует варианту расчета из п. 4.1, где контактная сила равнялась 1270 Н.

Заметим, что по размерам площадки контакта можно оценить трение качения. Это будет важно в следующей главе.

В приложении П.8 представлен листинг *Mathcad* с реализацией решения Герца.

Выводы по главе 4

1. Для разъемного соединения ДМА с проводом ЛЭП поставлена и решена задача о контактном взаимодействии роликов ДМА и провода как твердых тел, стянутых пружиной. Описана геометрия контактирующих поверхностей в процессе движения. Выведена нелинейная система уравнений для геометрических параметров контакта. Создан алгоритм ее решения средствами *Mathcad*.
2. Выполнен силовой анализ соединения роликов и провода методами аналитической статики. Построена зависимость перемещения от нагрузки. Найдена предельная нагрузка, определяющая прочность соединения. Определена ее зависимость от жесткости пружины.
3. Поставлена и решена контактная задача для ролика и провода как упругих тел с использованием классической схемы Герца. Методами дифференциальной геометрии найден тензор кривизны поверхности ролика. С помощью *Mathcad* определены специальные функции в решении Герца и решено уравнение для эксцентриситета эллипса. Найдены размеры площадки контакта, сближение тел и давление в центре. Расчеты с реальными параметрами показали, что прочность контактного соединения может быть обеспечена.

Глава 5. Колебания при ограниченной мощности двигателя

В предшествующих главах закон движения машины (ДМА) по проводу считался заданной функцией времени $\xi(t)$. При этом были обнаружены интенсивные пилообразные колебания системы в вертикальной плоскости даже при равномерном движении. Но для обеспечения заданного закона движения необходим двигатель неограниченной мощности, а этого не может быть.

Поэтому на следующем этапе математического моделирования должна быть поставлена и решена задача, где функция $\xi(t)$ является дополнительной неизвестной и задана динамическая характеристика двигателя ДМА.

Подобные задачи вызывали в прошлом большой интерес [1, 10, 15, 16, 36, 47, 59]. Использовался термин «колебания систем с ограниченным возбуждением». Применялись изощренные методы теории нелинейных колебаний. Но в настоящее время возможности анализа чрезвычайно расширились благодаря компьютерной математике.

Очевидно, что отдаваемая двигателем ДМА энергия расходуется не только на полезное движение, но и на раскачку проводов. В случае же ограниченной мощности можно ожидать, что интенсивных колебаний не будет. Исследование этого вопроса в качественном и количественном отношении – цель данной главы.

Методом исследования, как и выше, является математическое моделирование. Для машины на проводах составляются уравнения лагранжевой механики, решаемые далее средствами компьютерной математики (*Mathcad*).

5.1. Уравнения Лагранжа для системы с двигателем

Расчетная схема сохраняется в виде рис. 2.1. Прогиб струны $u(x,t)$ аппроксимируется как в п. 2.4 с обобщенными координатами U_i . Но закон движения $\xi(t)$ не задан, координата ξ является дополнительной обобщенной. Сохраняются формулы (2.4.1) для декартовых координат в плоскости и для

скорости ДМА как точечной массы. Кинетическая и потенциальная энергии системы имеют прежний вид (как в п.2.4):

$$\begin{aligned}
 2K(\dot{U}, U, \dot{\xi}, \xi) &= m\dot{\xi}^2 + \dot{U}^T [M + \mu(\xi)]\dot{U} + \\
 &+ 2\dot{\xi}U^T \eta(\xi)\dot{U} + \dot{\xi}^2 U^T \sigma(\xi)U, \\
 \Pi(U, \xi) &= \frac{1}{2}U^T C U - P U^T \varphi(\xi).
 \end{aligned} \tag{5.1.1}$$

Важное отличие от п. в том, что в энергии теперь нет явной зависимости от времени (ранее была через $\xi(t)$).

Найдем обобщенные силы по виртуальной работе:

$$\begin{aligned}
 \delta A &= -\delta \Pi + H \delta \xi / r = Q^T \delta U + Q_\xi \delta \xi \Rightarrow \\
 Q &= -C U + P \varphi, \\
 Q_\xi &= P U^T \varphi'(\xi) + H / r.
 \end{aligned} \tag{5.1.2}$$

Появился новый силовой фактор H – суммарный момент двигателей. Он считается функцией угловой скорости вращения колес:

$$\begin{aligned}
 H &= H(\omega), \\
 \omega &= \dot{\xi} / r.
 \end{aligned} \tag{5.1.3}$$

Здесь r – радиус колеса.

Задание динамической характеристики двигателя (5.1.3) – важнейший шаг моделирования в данной главе. При более полном моделировании можно было бы принять $H = H(\omega, t)$, где зависимость от времени определяется внешним управлением (действиями оператора).

Вычисляем производные

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial K}{\partial \dot{U}} &= (M + \mu)\dot{U} + \dot{\xi}\eta^T U, \\
 \frac{\partial K}{\partial U} &= \dot{\xi}\eta\dot{U} + \dot{\xi}^2 \sigma U; \\
 \frac{\partial K}{\partial \dot{\xi}} &= \dot{\xi}(m + U^T \sigma U) + U^T \eta\dot{U}, \\
 \frac{\partial K}{\partial \xi} &= \frac{1}{2}\dot{U}^T \mu' \dot{U} + \dot{\xi} U^T \eta' \dot{U} + \frac{1}{2}\dot{\xi}^2 U^T \sigma' U
 \end{aligned}$$

и записываем уравнения Лагранжа

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial K}{\partial \dot{U}}\right)^{\bullet} - \frac{\partial K}{\partial U} &= Q, \\ \left(\frac{\partial K}{\partial \dot{\xi}}\right)^{\bullet} - \frac{\partial K}{\partial \xi} &= Q_{\xi} \Rightarrow \end{aligned} \quad (5.1.4)$$

$$\begin{cases} (M + \mu)\ddot{U} + \ddot{\xi}\eta^T U + 2\dot{\xi}\eta^T \dot{U} + (C + \dot{\xi}^2 \kappa)U = P\varphi, \\ \ddot{\xi}(m + U^T \sigma U) + U^T \eta \ddot{U} + 2\dot{\xi}U^T \sigma \dot{U} + \\ + \frac{1}{2}(\dot{\xi}^2 U^T \sigma' U + \dot{U}^T (\eta - \eta^T) \dot{U}) - GU^T \varphi' = H/r. \end{cases}$$

Учтены матричные соотношения п. 2.4.

Перепишем уравнения (5.1.4) в виде

$$\begin{aligned} (M + \mu)\ddot{U} + \ddot{\xi}\eta^T U &= S^U, \\ \ddot{\xi}(m + U^T \sigma U) + U^T \eta \ddot{U} &= S^{\xi}. \end{aligned} \quad (5.1.5)$$

Здесь в правых частях стоят выражения

$$\begin{aligned} S^U &\equiv P\varphi - 2\dot{\xi}\eta^T \dot{U} - (C + \dot{\xi}^2 \kappa)U, \\ S^{\xi} &\equiv H/r + PU^T \varphi' + \frac{1}{2}[\dot{U}^T (\eta^T - \eta) \dot{U} - \dot{\xi}^2 U^T \sigma' U] - 2\dot{\xi}U^T \sigma \dot{U}. \end{aligned} \quad (5.1.6)$$

Разрешим далее соотношения (5.1.5) относительно вторых производных:

$$\begin{aligned} \ddot{\xi} &= \lambda(S^{\xi} - U^T \eta \ddot{U}) \equiv \Sigma^{\xi}, \\ \ddot{U} &= \Lambda(S^U - \lambda S^{\xi} \eta^T U) \equiv \Sigma^U, \end{aligned} \quad (5.1.7)$$

где обозначено

$$\lambda \equiv (m + U^T \sigma U)^{-1}, \quad \Lambda \equiv (M + \mu - \lambda \eta^T U U^T \eta)^{-1}.$$

Количество уравнений в системе ОДУ (5.1.7) равно $n + 1$, и каждое второго порядка. Эта система решается далее средствами компьютерной математики.

5.2. Алгоритм и результаты численного моделирования

Вводя производные $\dot{U} = V$, $\dot{\xi} = v$, приведем (5.1.7) к каноническому виду системы ОДУ порядка $2n + 2$ для последующего численного интегрирования:

$$Y = \begin{pmatrix} U \\ V \\ \xi \\ v \end{pmatrix},$$

$$\dot{Y} = D(Y) = \begin{pmatrix} D^{(1)}(Y) \\ D^{(2)}(Y) \\ d^{(1)}(Y) \\ d^{(2)}(Y) \end{pmatrix}; \quad (5.2.1)$$

$$D^{(1)}(Y) = V, D^{(2)}(Y) = \Sigma^U, d^{(1)}(Y) = v, d^{(2)}(Y) = \Sigma^\xi.$$

Используя *Mathcad*, элементы столбца Y определим операцией *submatrix* [34]. Для интегрирования системы ОДУ применим методы *Rkadapt* или *Radau* (выбираются по критериям быстродействия и точности).

Поскольку целью работы является учет ограниченности мощности двигателя, примем следующее соотношение для момента:

$$H(\omega) = \underline{H_0 - H_1\omega} - H_r. \quad (5.2.2)$$

Подчеркнутые слагаемые – как при моделировании эффекта Зоммерфельда [36, 46]. Третье слагаемое – момент трения качения (можно включить в H_0). Разумеется, это выражение может быть использовано только при не слишком больших скоростях, поскольку $H > 0$. При зависимости (12) мощность двигателя $M(\omega) = (H_0 - H_1\omega)\omega$ максимальна на скорости $H_0/2H_1$.

Несмотря на высокий порядок, сложность и жесткость системы (5.2.1), вычисления проходят без затруднений. Были приняты те же параметры натянутого провода и машины, как и выше. Дополнительные характеристики: $H_0=100$ об/мин, $H_1=20$ об/мин, $H_1=1$ об/мин, $r=0.2m$ (в системе СИ). Начальная скорость $\dot{\xi}(0) = v_0 = 1m/c$. Как и везде в данной работе, $\xi(0) = 0$.

Динамическая составляющая прогиба – на рис. 5.1:

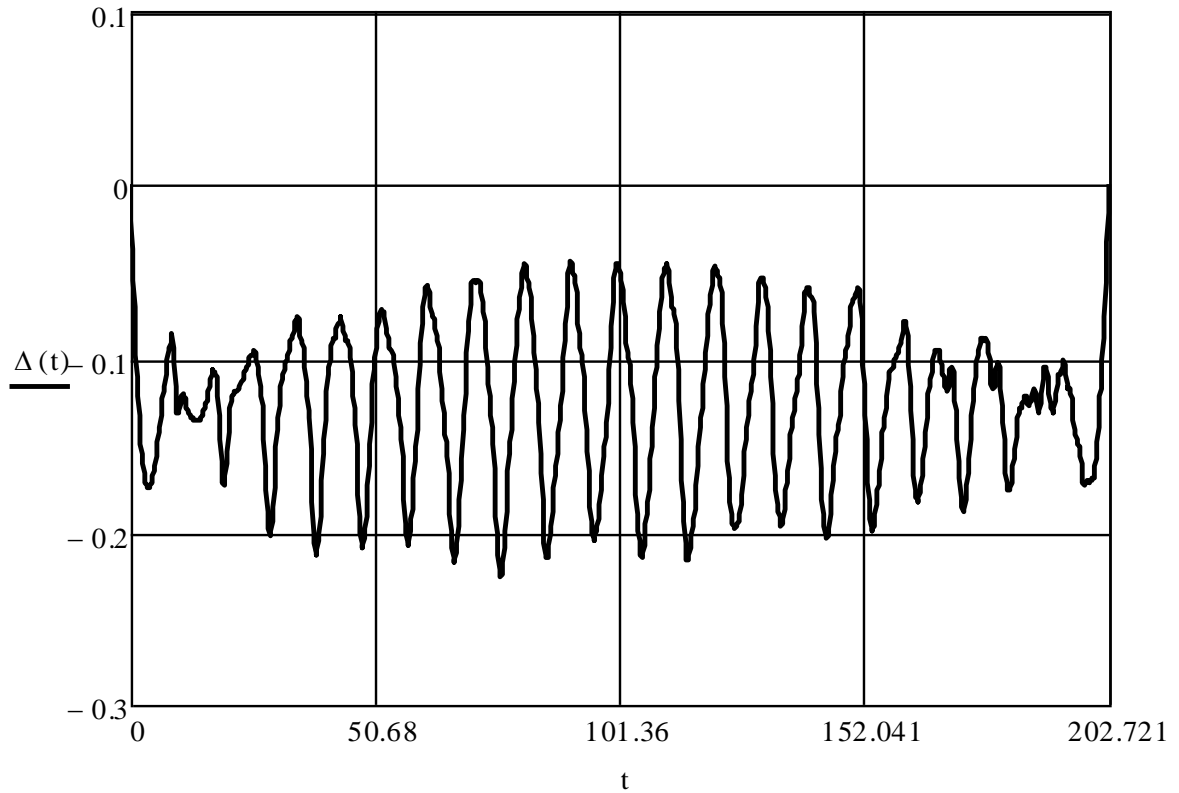


Рис. 5.1. Динамическая составляющая прогиба при учете двигателя

Пилообразные колебания сохранились, но произошло сглаживание – см. рис. 5.2. Теперь процесс не описывается одним лишь волновым уравнением (2.1.1), когда суперпозиция волн может дать острые пики.

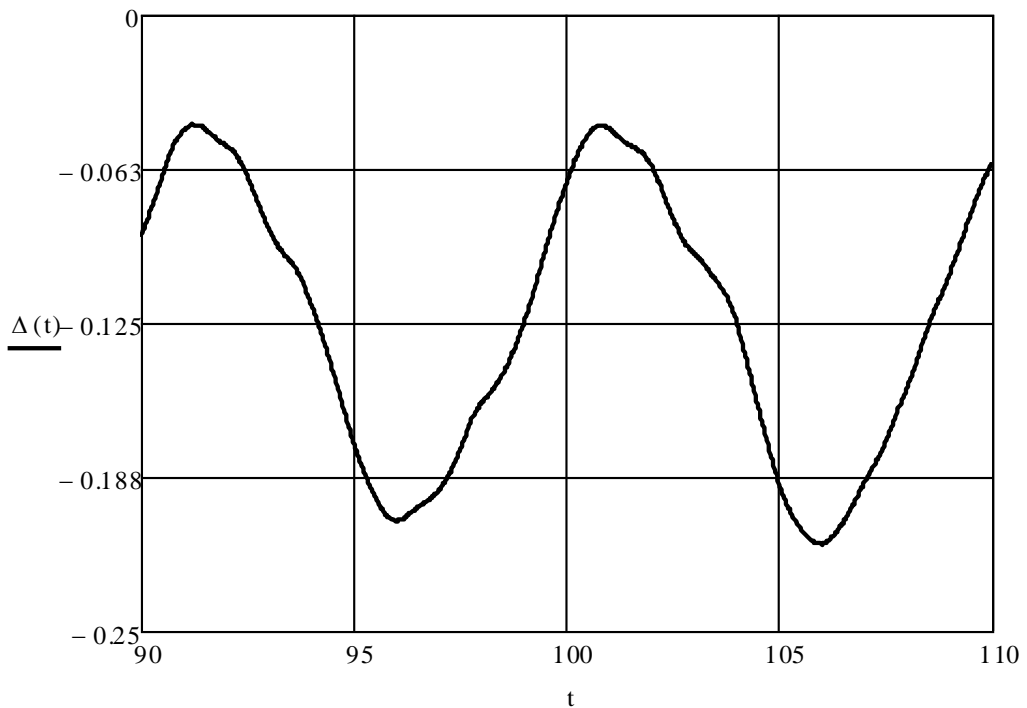


Рис. 5.2. Сглаживание пиков при учете двигателя

Особо интересным является найденный закон движения скорости $\dot{\xi} = v(t)$ на рис. 5.3:

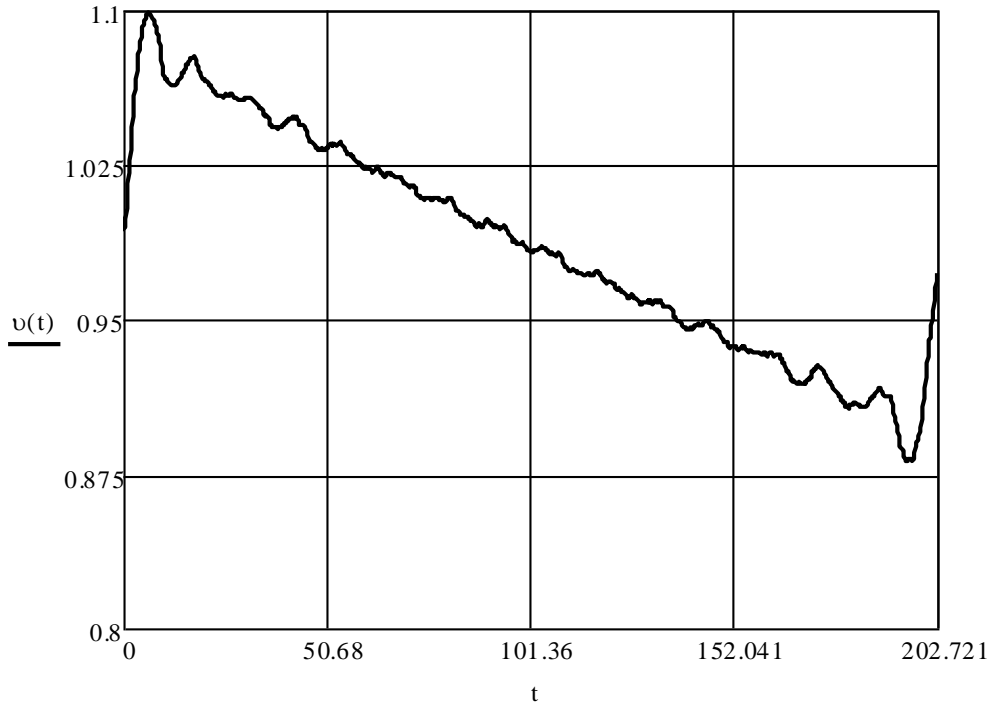


Рис. 5.3. Скорость движения по проводу

Начальная скорость назначена единичной, как выше при заданном законе движения. Но зависимость момента от скорости вызвала эффект непостоянства: скорость $v(t)$ сначала «подскакивает» на 10%, а затем медленно снижается. В конце дистанции восстанавливается начальное значение.

Время прохода t_l находится решением уравнения: $\xi(t_l) = l \Rightarrow t_l = 202.7$ с. Это лишь на 2.7 с. отличается варианта с заданной единичной скоростью.

Итак, ограниченность мощности двигателя привела к некоторому снижению остроты и амплитуд колебаний, ожидаемым по энергетическим соображениям. Но прекращение колебаний и остановка двигателя не обнаружены.

5.3. Энергетика колебаний

Однако рассмотрим подробнее распределение кинетической энергии $K(t)$ между частями системы. Имеем

$$\begin{aligned} K &= K_{m0} + K_{m1} + K_w; 2K_{m0} = mv^2, \\ 2K_{m1} &= V^T \mu V + 2vU^T \eta V + v^2 U^T \sigma U, 2K_w = V^T M V. \end{aligned} \quad (5.3.1)$$

Здесь первое слагаемое K_{m0} – энергия движения машины со скоростью v , второе – остальная часть энергии машины, а третье – энергия провода.

По результатам вычислений в п. 5.2 можно построить графики этих слагаемых как функций времени. Они на рис. 5.4-5.6.

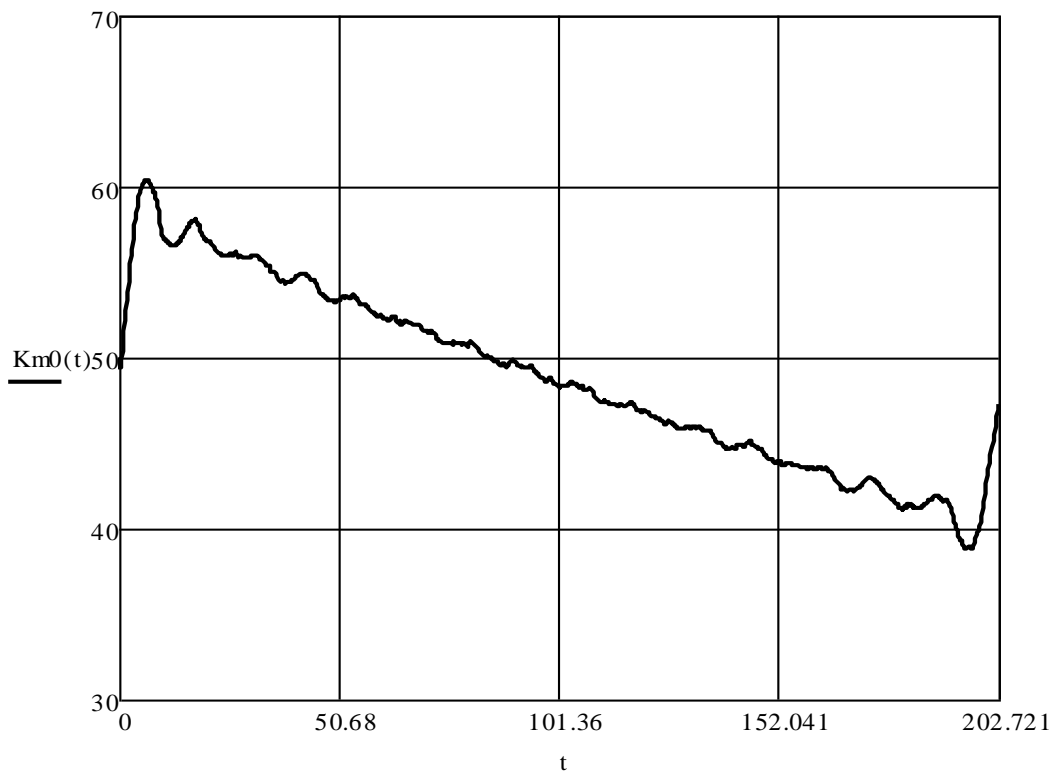
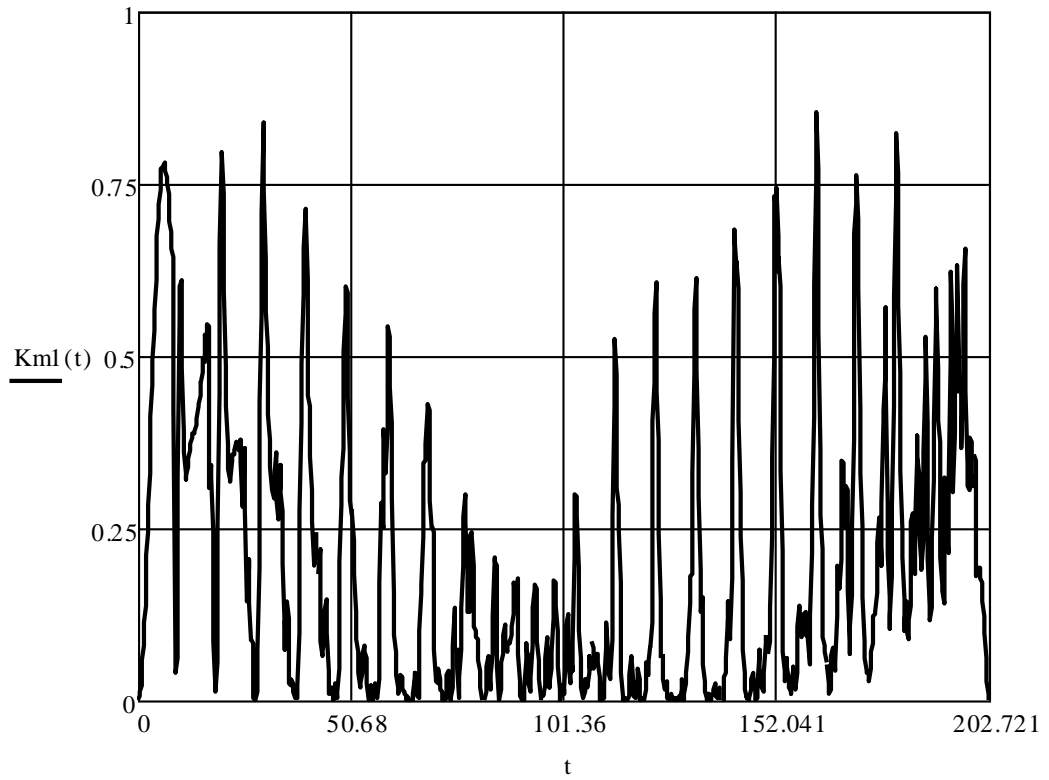
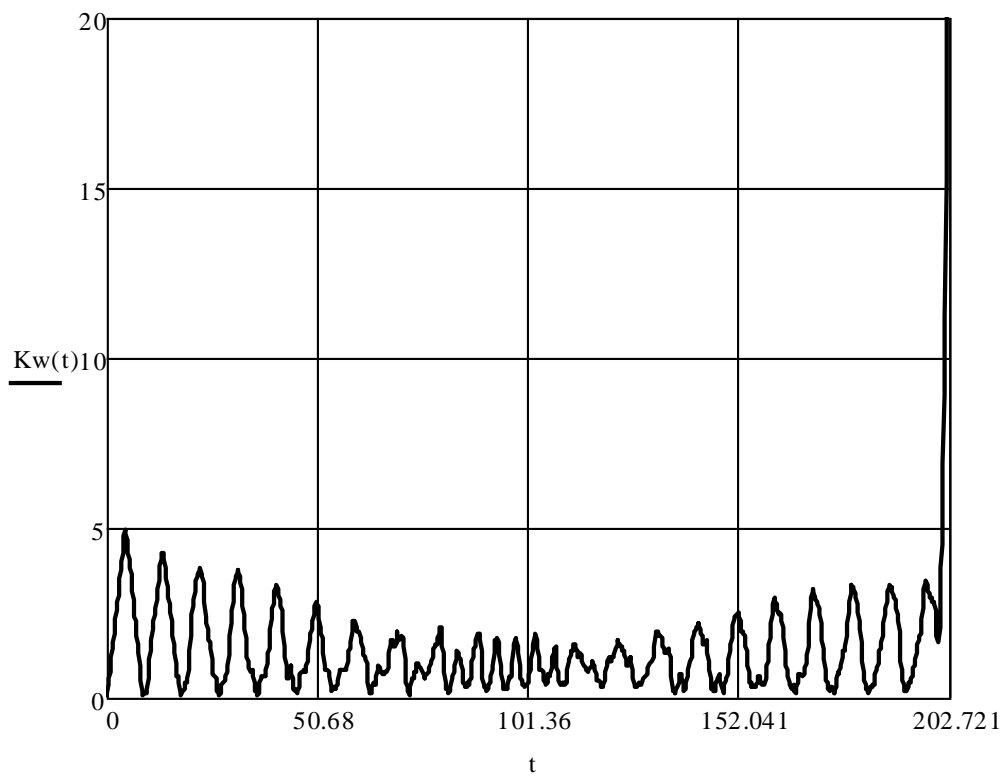


Рис. 5.4. . Зависимость от времени слагаемого $K_{m0}(t)$

Рис. 5.5. График $K_{ml}(t)$ Рис. 5.6. График $K_w(t)$

Видим, что энергия K_{m0} в формулах на порядок превосходит энергию провода K_w , а «вибрационная составляющая» K_{m1} и вовсе ничтожна. Становится ясно, почему энергетические затраты на раскачку проводов при ограниченной мощности двигателя не сыграли заметной роли.

Однако эти вычисления – лишь пример расчета. Основной интерес представляет методика моделирования. По ней предстоит провести многовариантные расчеты для заданных параметров ДМА и ее двигателей. Повышенное внимание следует уделить заданию динамической характеристики двигателя с возможным программным управлением.

Выводы по главе 5

1. Рассмотрена более сложная модель, чем в предыдущих главах: координата ДМА вдоль провода считается не заданной функцией времени, а самостоятельной неизвестной. Выведены уравнения Лагранжа для движения системы в вертикальной плоскости при заданном моменте двигателя. Основной вопрос главы: сохранятся ли пилообразные колебания при ограниченной мощности двигателя.
2. Выбран вариант динамической характеристики двигателя как зависимости момента от угловой скорости. Принята простая линейная зависимость, свойственная большинству источников энергии и давно используемая для систем с ограниченным возбуждением.
3. Система уравнений Лагранжа решена средствами компьютерной математики. И в этом случае обнаружены пилообразные колебания, но острота пиков снизилась. Предположение об исчезновении колебаний при ограниченной мощности двигателя не подтвердилось.
4. Проанализированы энергетические соотношения в системе. Численно определены все три слагаемых в кинетической энергии, вклад энергии провода

оказался минимальным. Колебания не дают заметной нагрузки на двигатель и потому сохраняются.

Заключение

Основные результаты диссертационной работы состоят в следующем:

1. Предложена концепция, сформулированы требования к прототипу и разработана конструкция новой диагностической машины-автомата (ДМА) с механизмом для перехода препятствий и контактном упругим соединением с проводом.
2. Построена математическая модель ДМА-провод при движении в вертикальной плоскости. Составлены уравнения и построены их численные решения средствами компьютерной математики. Выявлено влияние различных факторов: скорости и неравномерности движения, изгибной жесткости провода и сил сопротивления.
3. Обоснована модель натянутой струны для провода, изначально рассматриваемого как нелинейно-упругая нить.
4. Построены математические модели для расчета маятниковых колебаний ДМА при параметрическом возбуждении. Обнаружена возможность параметрического резонанса неклассического типа. Решена и более сложная связанная задача о колебаниях ДМА и провода.
5. Поставлена и решена контактная задача о взаимодействии роликов подвеса ДМА и провода ЛЭП как твердых тел. Выведены необходимые геометрические соотношения. Построен алгоритм расчета предельной нагрузки при любых значениях параметров подвеса.
6. В задаче о контакте роликов и провода учтены упругие деформации. Классическая схема Герца дополнена средствами компьютерной математики. Определено контактное давление, размеры площадки контакта и сближение тел.
7. Поставлена задача динамики системы ДМА-провод при заданной характеристике двигателя колес-шківов. Получено решение соответствующей системы ОДУ средствами компьютерной математики. Установлено, что при

ограниченной мощности двигателя колебания пилообразного типа сохраняются.

Список литературы

1. Алифов А.А., Фролов К.В. Взаимодействие нелинейных колебательных систем с источниками энергии – М.: Наука, 1989.– 328 с.
2. Ананьин А.Д., Михлин В.М., Габитов И.И., Неговора А.В., Иванов А.С. Диагностика и техническое обслуживание машин. – М.: Академия, 2008. – 428 с.
3. Андронов А.А., Витт А.А., Хайкин С.Э. Теория колебаний. – М.: Наука, 1981. – 568 с.
4. Арбузов Р.С., Овсянников А.Г. Современные методы диагностики воздушных линий электропередачи. – Новосибирск: Наука, 2009. – 135с.
5. Артоболовский И.И., Бобровницкий Ю.И., Генкин М.Д. Введение в акустическую динамику машин. – М.: Наука, 1979. – 296 с.
6. Бидерман В.Л. Теория механических колебаний.– М.: Высш. шк., 1980. – 480 с.
7. Биргер И.А. Техническая диагностика. – М.: Машиностроение, 1978. – 239 с.
8. Бурдаков С.Ф., Дьяченко В.А., Тимофеев А.Н. Проектирование манипуляторов, промышленных роботов и роботизированных комплексов. – Высш. шк., 1986. – 264 с.
9. Вейц В.Л. Коловский М.З., Кочура А.Е. Динамика управляемых машинных агрегатов. – Б.: Наука, 1984. – 352 с.
10. Вейц В.Л., Кочура А.Е. Эффект ограниченного возбуждения в силовых установках с двигателями внутреннего сгорания // «Вибротехника». 1973. 2(19). Вильнюс. – С.139–160.
11. Вульфсон И.И. Колебания машин с механизмами циклового действия. – Л.: Машиностроение, 1990. – 309 с.
12. Галин Л. А. Контактные задачи теории упругости и вязкоупругости. – М.: Наука, 1980. – 364 с.
13. Гантмахер Ф.Р. Лекции по аналитической механике. – М: Наука, 1966. – 300 с.

14. Гимадиев Р.Ш., Динмухаметов Ф.Ф., Галимуллин Н.Р. Расчет пространственной динамики ЛЭП при совместном воздействии ветровой и весовой нагрузки // Известия вузов. Проблемы энергетики. 2010. № 3-4. – С. 28-37.
15. Глухарев К.К., Фролов К.В. К теории колебаний механических систем ограниченного возбуждения // ДАН СССР. 1971. №2. Т. 199. – С.285–288.
16. Гончаревич И.Ф. Исследование вибрационных транспортирующих машин с ограниченным возбуждением. В кн.: «Нелинейные колебания и переходные процессы в машинах». М.: Наука. 1972. – С. 25–38.
17. Джонсон К.Л. Механика контактного взаимодействия. – М.: Мир, 1989. – 510 с.
18. Дикой В.П., Левандовский А.А., Арбузов Р.С., Овсянников А.Г., Старцев В.В. Мониторинг состояния воздушных линий электропередачи с использованием беспилотного летательного аппарата // Энергия единой сети. 2014. № 2 (13). – С. 16-25.
19. Дроздов Ю.Н., Соколов С.Л., Ушаков Б.Н. Расчетно-экспериментальный анализ контактных напряжений в шарнирных соединениях. // Вестник машиностроения. 2013. № 4. – С. 32-38.
20. Елисеев В.В. Механика упругих тел. – СПб.; Изд-во СПбГПУ, 2003. – 336 с.
21. Елисеев В.В. Механика деформируемого твердого тела. – СПб.: Изд-во СПбГТУ, 2006. – 231 с.
22. Елисеев В.В. Модель упругой нити для передач с гибкой связью // Научно-техн. ведомости СПбГПУ, сер. «Наука и образование», № 3(84), 2009. – С. 192-195.
23. Елисеев В.В., Бахрами М.Р. Диагностическая машина на проводах ЛЭП: устройство и проблемы механики // Научно-техн. ведомости СПбПУ. Сер. Наука и образование. 2015. № 1(214). – С. 200-207.

24. Елисеев В.В., Бахрами М.Р. Динамика проводов ЛЭП при движении по ним диагностической машины // Известия вузов. Приборостроение. 2015. № 3. Том 58. – С. 229-235.
25. Елисеев В.В., Бахрами М.Р. О прочности подвеса робота-инспектора на проводе ЛЭП // Вестник машиностроения. 2016. № 5.
26. Елисеев В.В., Бахрами М.Р. Динамика провода ЛЭП с роботом-инспектором при ограниченной мощности двигателя // Теория механизмов и машин. 2015. № 4 (28). Т. 13. – С. 6-11.
27. Елисеев В.В., Бахрами М.Р. Saw-tooth oscillations of electrical transmission line conductor as the result of moving inspection robot / Науч. форум «Неделя науки СПбПУ»: мат. науч.-практ. конф. ИММиТ СПбПУ. Ч.2. – СПб.: Изд-во Политехн. ун-та, 2015.– С. 101–105.
28. Жуков В.А. Детали машин и основы конструирования. Основы расчета соединений и передач. – Изд-во СПбГПУ, 2011. – 417 с.
29. Зевин А.А. К теории параметрических колебаний // Прикладная математика и механика. 2014. Т. 78. № 1. – С. 46-59
30. Иванов А.С. Справочные данные для расчета на контактную жесткость при конструировании машин. // Вестник машиностроения. 2005. № 2. – С. 37-40.
31. Иванов А.С., Попов Б.А. Расчет соединения с натягом с учетом контактной жесткости сопрягаемых поверхностей. // Вестник машиностроения. 2005. № 4. – С. 31-35.
32. Иванова О.А. Приближенные методы определения собственных частот колебаний проводов многопролетных линий электропередач // Вестник Московского государственного технического университета им. Н.Э. Баумана. серия: естественные науки. 2011. № 8. – С. 34-44.
33. Кесельман Л.М. Основы механики воздушных линий электропередачи. – М.: Энергоатомиздат, 1992. – 352 с.
34. Кирьянов Д.В. Mathcad 14. – СПб.: БХВ-Петербург, 2007. – 704 с.

35. Коловский М.З., Слоущ А.В. Основы динамики промышленных роботов. – М.: Наука, 1988. – 240 с.
36. Кононенко В.О. Колебательные системы с ограниченным возбуждением. – М., 1964. – 256 с.
37. Кошляков Н.С., Глинер Э.Б., Смирнов М.М. Уравнения в частных производных математической физики. – М.: Высш. школа, 1970. – 712 с.
38. Левина З.М., Решетов Д.Н. Контактная жесткость машин. – М.: Машиностроение, 1971. – 264 с.
39. Лойцянский Л.Г., Лурье А.И. Курс теоретической механики. Т.2. – М.: Наука, 1983. – 640 с.
40. Лурье А.И. Теория упругости. – М.: Наука, 1970. – 940 с.
41. Мандельштам Л.И. Лекции по теории колебаний. – М.: Наука, 1972. – 470 с.
42. Меркин Д.Р. Введение в механику нити. – М.: Наука, 1981. – 240 с.
43. Нахатакян Ф.Г. Механика контактного сближения упругих тел в задаче Герца. // Проблемы машиностроения и надежности машин. 2010. № 5. – С. 48-56.
44. Носов В.В. Диагностика машин и оборудования. – Лань, 2012. – 384 с.
45. Пановко Я.Г. Введение в теорию колебаний. М.: Наука, 1991. – 257 с.
46. Пановко Я.Г., Губанова И.И. Устойчивость и колебания упругих систем. – М.: Наука, 1979. – 384 с.
47. Перепелкин Н.В., Михлин Ю.В. Переходные и стационарные режимы в системе с ограниченным возбуждением // Вестник НТУ «ХПИ, Динамика и прочность машин». 2007. Вып. 38. – С. 108–117.
48. Разумовский И.Т. Пирометр для контроля перегрева скруток проводов линий электропередач // Известия вузов. Приборостроение. 2011. Т. 54. № 11. – С. 43-48.
49. Ректорис К. Вариационные методы в математической физике. – М.: Мир, 1985. – 590 с.

50. Рощин Г.И., Самойлов Е.А. и др. Детали машин и основы конструирования. – М.: Юрайт, 2013. – 415 с.
51. Светлицкий В.А. Механика гибких стержней и нитей. – М.: Машиностроение, 1978. – 222 с.
52. Семенов Ю.А. Динамика машин. – СПб: Изд-во Политехн. ун-та, 2010. – 318 с.
53. Скойбеда А.Т., Кузьмин А.В., Макейчик Н.Н. Детали машин и основы конструирования. – Минск: Вышэйшая школа, 2006. – 559 с.
54. Смирнов Г.А. (ред.) Механика машин. – М.: Высш. шк., 1996. – 511 с.
55. Соколов А.И. Определение частот свободных колебаний провода, находящегося в стационарном потоке // Известия высших учебных заведений. Машиностроение. 2008. № 9. – С. 25-34.
56. Тимошенко С.П., Янг Д.Х., Уивер У. Колебания в инженерном деле. – М.: Машиностроение, 1985. – 472 с.
57. Тихонов А.Н., Самарский А.А. Уравнения математической физики. – М.: Наука, 1979. – 560 с.
58. Фролов К.В., Воробьев Е.И. Механика промышленных роботов. Основы конструирования. – М.: Высш. школа, 1989. – 383 с.
59. Фролов К.В., Ходжаев К.Ш. Взаимодействие источника возбуждения с колебательной системой. В кн.: «Вибрации в технике». – М.: Машиностроение, 1979. – С. 191–214.
60. Челпанов И.Б. Устройство промышленных роботов. – СПб: Политехника, 2001. – 202 с.
61. Шалашилин В.И., Данилин А.Н., Цветков Ю.Л., Рыжов С.В. Модель провода воздушной линии электропередачи // Механика композиционных материалов и конструкций. 2005. Т. 11. № 4. – С. 564-572.
62. Эльсгольц Л.Э. Дифференциальные уравнения и вариационное исчисление. – М.: Наука, 1969. – 424 с.

63. Abdalla H.H., Karam K.Z., Farsi M. A knowledge managed multi-controller structure using CLIPS // Proceedings of the third IEEE conference control applications, 1994. Vol. 2. – pp. 1343-1344.
64. M.F. Abdul Jalal, Mohamed Sahari K.S., Anuar A., Mohd Arshad A.D., Idris M.S.. Conceptual design for transmission line inspection robot // 4th International Conference on Energy and Environment, 2013. – DOI:10.1088/1755-1315/16/1/012094.
65. Aoshima S., Tsujimura T., Yabuta T. A Wire Mobile Robot with Multi-unit Structure // Proceedings of the IEEE/RSJ International Workshop on Intelligent Robots and Systems, 1989. – pp. 414-421.
66. Bahrami M.R. A novel design of electrical transmission line inspection machine // Современное машиностроение. Наука и образование. 2014. № 4. – С. 292-298.
67. Bahrami M.R. A novel design of electrical transmission line inspection machine // Lect. Notes Mechanical Engineering: Advances in Mechanical Engineering. – ISBN: 978-3-319-29578-7.
68. Balthazar J.M., Mook D.T., Weber H.I., Brasil R.M., Fenili A., Belato D., Felix J.L.P. An Overview on Non-Ideal Vibrations // Meccanica. 2003. Vol. 38. – P. 613-621.
69. Bing J., Mamishev A. Robotic monitoring of power systems // Power Delivery, IEEE Transactions on, 2004. Vol. 19, no. 3. – pp. 912-918.
70. Boyer M. Systems integration in telerobotics: maintenance of electric power lines // Proc. Of IEEE International Conference on Robotics and Automation, 1996. – pp. 1042-1047.
71. Bühringer M., Berchtold J., Büchel M., Dold C., Bütikofer M., Feuerstein M. A new approach inspection of high voltage power lines // Autonomous System Lab. – ETH Zürich. – <http://www.iwf.mavt.ethz.ch/>
72. Bühringer M., Berchtold J., Büchel M., Dold C., Bütikofer M., Feuerstein M., Fischer W., Bermes C., Siegwart R. Cable-Crawler – Robot for the Inspection of

- High-Voltage Power Lines That Can Passively Roll Over Mast Tops // *Industrial Robot: An Int. Journal*. 2010. Vol. 37. Issue 3. – pp. 256-262.
73. Becker M., Landre J., Santos S.C. Design of mechatronic system to inspect power transmission lines and towers // *Power Electronics, Electrical Drives, Automation and Motion, SPEEDAM, International Symposium on*, 2006. – pp. 774-779.
74. Cai L., Liang Z., Hou Z.G., Tan M. Fuzzy control of the inspection robot for obstacle-negotiation // *In Proceedings of IEEE International Conference on Networking, Sensing and Control, ICNSC*, 2008. – pp. 117-122.
75. Wang C., Ye L., Zhao W., Wu G., Chen Y., Qian H., Xu Y. Design of the Line robot for power transmission lines inspection // *Robotics and Biomimetics (ROBIO), IEEE International Conference on*, 2013. – pp. 2593-2598.
76. Debenest P., Guarnieri M., Takita K., Fukushima E.F., Shigeo H., Tamura K., Kimura A., Kubokawa H., Iwama N., Shiga F. Expliner – Robot for Inspection of Transmission Lines // *IEEE International Conference on Robotics and Automation*, 2008. – pp. 3978-3984.
77. Guo D., Guo L., Wei S., Liao Q. Dynamic modeling and adaptive controller design for the track-stand motion of a front-wheel drive bicycle robot under 90 degrees front-bar steering angle // *Information and Automation (ICIA), IEEE International Conference on*, 2014. – pp. 966-971.
78. Yang D., Feng Z., Zhang X. A novel tribrachiation robot for power line inspection and its inverse kinematics analysis // *Advanced Intelligent Mechatronics (AIM), IEEE/ASME International Conference on*, 2012. – pp. 502-507.
79. Eliseev V., Vetyukov Yu. Effects of deformation in the dynamics of belt drive // *Acta Mechanica*. 2012. Vol. 223, № 8. – pp. 1657-1667.
80. Elizondo D., Gentile T., Candia H., Bell G. Overview of robotic applications for energized transmission line work – Technologies, field projects and future developments // *Applied Robotics for the Power Industry (CARPI), 1rd International Conference on*, 2010. – pp. 1-7.

81. Jones D.I., Earp G.K. Camera sightline pointing requirements for aerial inspection of overhead power lines // ELSEVIER Electric Power Systems Research, 2001. Vol. 57. Issue 2. – pp. 73-82.
82. Fang L.J., Wang H.G. Research on the motion system of the inspection robot for 500 kV power transmission lines // Applied Robotics for the Power Industry (CARPI), 1rd International Conference on, 2010. – pp. 1-4.
83. Wu G., Cao H., Xu X., Xiao H., Li S., Xu Q., Liu B., Wang Q., Wang Z., Ma Y. Design and Application of Inspection System in a Self-Governing Mobile Robot System for High Voltage Transmission Line Inspection // Power and Energy Engineering Conference, APPEEC, 2009. – pp. 1-4.
84. Giarratano J.C., Riley G. Expert Systems: Principles and Programming // CT: Thomson Learning. – 2002. – 288 p.
85. Lu G., Guo L., Wei S.; Huang Y. Dynamic modelling and simulation of wire-walking robot based on the control of balancing pole // Modelling, Identification & Control (ICMIC), Proceedings of International Conference on, 2012. – pp. 820-825.
86. Rui G., Feng Z., Lei C., Jun Y. A mobile robot for inspection of overhead transmission lines // Applied Robotics for the Power Industry (CARPI), 3rd International Conference on, 2014. – pp. 1-3.
87. Wu G., Xiao H., Xiao X., Huang Z., Li Y. Transmission Line Inspection Robot and Deicing Robot: Key Technologies, Prototypes and Applications // Applied Robotics for the Power Industry (CARPI), 1rd International Conference on, 2010. – pp. 1-6.
88. Zhao G., Wang L., Cheng S., Zhang J. Design and realization of a mobile robot for power transmission lines inspection // Mechatronics and Automation (ICMA), International Conference on, 2011. – pp. 1509 -1514.
89. Gonçalves R.S., Carvalho J.C.M. A mobile robot to be applied in high-voltage power lines // Journal of the Brazilian Society of Mechanical Sciences and Engineering. 2015. Vol. 37. Issue 1. – pp. 349-359.

90. Gonçalves R.S., Carvalho J.C.M. Graphical Simulations of a Mobile Robot Suspended on Transmission Lines Using Multibody Systems Software // Robotics Symposium and Intelligent Robotic Meeting (LARS), 2010. – pp. 1-6.
91. Higuchi M., Maeda Y., Tsutani S., Hagihara S. Development of a Mobile Inspection Robot for Power Transmission Lines // Journal of Robotic Society of Japan. 1991. Vol. 9. Issue. 4. – pp. 57-63.
92. Irvine H.M., Caughey T.K. The Linear Theory of Free Vibrations of a Suspended Cable // Proceedings of the Royal Society of London. Ser. A. 1974. Vol. 341. – pp. 299-315.
93. Jian J., Guoxian Z., Tingyu Z. Design of a mobile robot for the innovation in power line inspection and maintenance // Reconfigurable Mechanisms and Robots, ASME/IFTOMM International Conference on, 2009 – pp. 444-449.
94. Jones D.I. Power line inspection – a UAV concept // Autonomous Systems, 2005. ISSN: 0537-9989.
95. Jones D.I., Earp G.K., Williams M. Obstacle avoidance during aerial inspection of power lines // Aircraft Engineering and Aerospace Technology. 2001. Vol. 73, No. 5. – pp. 472-479.
96. Jiang B., Mamishev A. Robotic monitoring of power systems // IEEE Transactions on Power Delivery, 2004. Vol. 19, No. 3. – pp. 912-918.
97. Katrasnik J. New Robot for Power Line Inspection // RAM, 2008. pp. 1195-1200.
98. Katrasnik J., Pernus F., Likar B. New Robot for Power Line Inspection // Robotics, Automation and Mechatronics, IEEE Conference on, 2008. – pp. 1195-1200.
99. Katrasnik J., Pernus F., Likar B. A Survey of Mobile Robots for Distribution Power Line Inspection // Power Delivery, IEEE Transactions on, 2010. Vol. 25. Issue 1. – pp 485-493.
100. Wang L., Liu F., Xu S., Zhang J., Cheng S. Analysis and control of a biped line-walking robot for inspection of power transmission lines // Robotics and Automation (ICRA), IEEE International Conference on, 2011. – pp 5863-5868.

101. Wang L., Fang L., Wang J.H., Zhao M. Development and control of an autonomously obstacle-navigation inspection robot for extra-high voltage power transmission lines // In Proceedings of International Joint Conference, SICE-ICASE, 2006. – pp. 5400-5405.
102. Wang L., Liu F., Wang Z., Xu S., Cheng S., Zhang J. Development of a novel power transmission line inspection robot // Applied Robotics for the Power Industry (CARPI), 1st International Conference on, 2010. – pp. 1-6.
103. Wang L., Cheng S., Zhang J. Development of a line-walking mechanism for power transmission line inspection purpose // IROS, 2009. –pp. 3323-3328.
104. Wang L., Liu F., Wang Z., Xu S., Cheng S., Zhang J. Development of a Practical Power Transmission Line Inspection Robot Based on a Novel Line Walking Mechanism // IEEE/RSJ International Conference on Intelligent Robots and Systems, 2010. – pp. 222-227.
105. Mohamed S., Martiuez R. CLIPS implementation of the automated document distribution system // Conference Proceedings of Ninth Annual International Phoenix Conference on Computers and Communications, 1990. – pp. 779-786.
106. Montambault S., Pouliot N. Design and Validation of a Mobile Robot for Power Line Inspection and Maintenance // Proceedings of the 6th International Conference on Field and Service Robotics (FSR), 2007. – pp. 1-10.
107. Mostashfi A., Fakhari A., Badri M.A. A Novel Design of Inspection Robot for High- Voltage Power Lines // Industrial Robot: An International Journal. 2014. Vol. 41. Issue 2. – pp. 166-175.
108. Montambault S., Pouliot N. Design and Validation of a Mobile Robot for Power Line Inspection and Maintenance // Field and Service Robotics, STAR 42, 2008. – pp. 495-504.
109. Montambault S., Pouliot N. LineScout Technology: Development of an Inspection Robot Capable Transmission & Distribution Construction, Operation and Live-Line Maintenance // IEEE 11th International Conference, ESMO, 2006. ISBN: 1-4244-0724-9.

110. Nayyerloo M., Yeganehparast S., Barati A., Foumani M. Mechanical implementation and simulation of monolab, a mobile robot for inspection of power transmission lines // *International Journal of Advanced Robotic Systems*. 2007. Vol. 4. Issue 3. – pp. 381-386.
111. Nordenholz T.R., O'Reilly O.M. On steady motions of an elastic rod with application to contact problems // *Int. J. Solids Structures*. 1997. Vol. 34, No 9. – pp. 1123-1143.
112. Pakdemirli M., Ulsov A.G. Stability analysis of an axially accelerating string // *Journal of Sound and Vibration*. 1997. Vol. 203. Issue. 5. – pp. 815-832.
113. Ostendorp M. Assessing the integrity and remaining service life of vintage high voltage ceramic insulators // *2003 IEEE 10th International Conference on Transmission and Distribution Construction, Operation and Live-Line Maintenance, ESMO, 2003*. – pp. 169-175.
114. Pellicano F., Vestroni F. Complex dynamics of high-speed axially moving systems // *Journal of Sound and Vibration*. 2002. Vol. 258. Issue 1. – pp. 31-44.
115. Peungsungwal S., Pungsiri B., Chamnongthai K., Okuda M. Autonomous robot for a power transmission line inspection // *ISCAS, 2001*. Vol. 2. – pp. 121-124.
116. Pinto A.V., Sebrao M.Z., Lourenco C.R.S.H., de Almeida I.S., Saad J., Lourenco P.M. Remote detection of internal corrosion in conductor cables of power transmission lines // *Applied Robotics for the Power Industry (CARPI), 1st International Conference on, 2010*. – pp. 1-6.
117. Pouliot N., Latulippe P., Montambault S. Reliable and intuitive teleoperation of LineScout: a mobile robot for live transmission line maintenance // *Intelligent Robots and Systems, IROS, 2009*. – pp. 1703-1710.
118. Pouliot N., Montambault S. LineScout Technology: From inspection to robotic maintenance on live transmission power lines // *Robotics and Automation, ICRA, 2009*. – pp. 1034-1040.

119. Peungsungwal S., Pungsiri B., Chamnongthai K., Okuda M. Autonomous robot for a power transmission line inspection // IEEE International Symposium on Circuits and Systems, ISCAS, 2001. Vol. 3. – pp. 121-124.
120. Rienstra S. W. Nonlinear free vibration of coupled spans of overhead transmission lines. // Journal of Engineering Mathematics. 2005. Vol. 53. – pp. 337-348.
121. Zhibin R., Yi R., Yong Y., Chaoyi Z., Xu L. Control of inspection robot for the power transmission lines based on database // Control Conference, 2008. – pp. 281-285.
122. Rocha J., Sequeira J. The development of a robotic system for maintenance and inspection of power lines // Proceedings of the 35th International Symposium on Robotics, 2004. – pp. 120-125.
123. Pouliot N., Latulippe P., Montambault S. Reliable and Intuitive Teleoperation of LineScout: a Mobile Robot for Live Transmission Line Maintenance // Intelligent Robots and Systems, IROS, 2009. – pp. 1703-1710.
124. Sawada J., Kusumoto K., Munakata T., Maikawa Y., Ishikawa Y.A. Mobile Robot for Inspection of Power Transmission Lines // IEEE Transactions on Power Delivery, 1991. Vol. 6. Issue 1. – pp. 309-315.
125. Simo J., Martinea M., Morant F., Crespo A. J. Expert system for control purpose based on CLIPS // Proc. of the 7th Mediterranean Electrotechnical Conf., 1994. Vol. 1. – pp. 254-257.
126. Fu S., Liang B.Z., Hou Z., Tan M. Vision based navigation for power transmission line inspection robot // Cognitive Informatics, ICCI, 2008. – pp. 411-417.
127. Krosuri S.P., Minor M.A. A Multifunctional Hybrid Hip Joint for Improved Adaptability in Miniature Climbing robots // Proceedings of the 2003 IEEE International Conference on Robotics & Automation, 2003. – pp. 312-317.
128. Yifeng S., Hongguang W., Fengren J. Obstacle performance analysis for a novel inspection robot with passive joints // Robotics and Biomimetics (ROBIO), 2011. – pp. 926 – 931.

129. Toussaint K., Pouliot N., Montambault S. Transmission Line Maintenance Robots Capable of Crossing Obstacles: State-of-the-art Review and Challenges Ahead // Journal of Field Robotics. 2009. Vol. 26. Issue. 5. – pp. 477-499.
130. Tsujimura T., Morimitsu T. Dynamics of Mobile Legs Suspended From Wire // Robotics and Autonomous Systems. 1997. Vol. 20. Issue 1. – pp. 85-98.
131. Li T., Lijin F., Hongguang W. Obstacle-navigation control for a mobile robot suspended on overhead ground wires // Control, Automation, Robotics and Vision Conference, ICARCV, 2004. Vol. 3. – pp. 2082-2087.
132. Tanaka S., Maruyama Y., Yano K., Inokuchi H., Tomiyama T., Murai S. Work Automation with the Hot-line Work Robot System 'Phase II' // Proceedings of the 1996 IEEE International Conference on Robotics and Automation, 1996. Vol. 2. – pp. 1261-1267.
133. Vidberg P., Persson B. ROBHOT – Inspections of joints in overhead lines / 2005. – <http://www.robhot.com>.
134. Xiao X., Wu G., Li S. Dynamic Coupling Simulation of a Power Transmission Line Inspection Robot with its Flexible Moving Path when Overcoming Obstacles // Automation Science and Engineering, CASE, 2007. – pp. 326-331.
135. Xiao X., Wu G., Xiao H., Dai J. An Inspection Robot for High Voltage Power Transmission Line and Its Dynamics Study // Service Robot Applications, Yoshihiko Takahashi (Ed.). 2008. – ISBN: 978-953-7619-00-8.
136. Li Z., Wang H., Wang Y. Path planning for power transmission line inspection robot based on visual obstacle detection // Robotics and Biomimetics (ROBIO), 2013. – pp.158-163.
137. Zhou F.Y., Wang J.D., Li Y.B., Wang J., Xiao X. Control of an inspection robot for 110 kV power transmission lines based on expert system design methods // IEEE Conference on Control Applications, 2005. – pp. 1563-1568.

Приложения: листинги Mathcad

П.1. пилообразные колебания

ПИЛООБРАЗНЫЕ КОЛЕБАНИЯ

Параметры

$$P := 1000$$

$$\rho := 5$$

$$T := 10^4$$

$$l := 200$$

$$c := \sqrt{\frac{T}{\rho}} = 44.721$$

$$v := 1$$

$$tt := \frac{l}{v} = 200$$

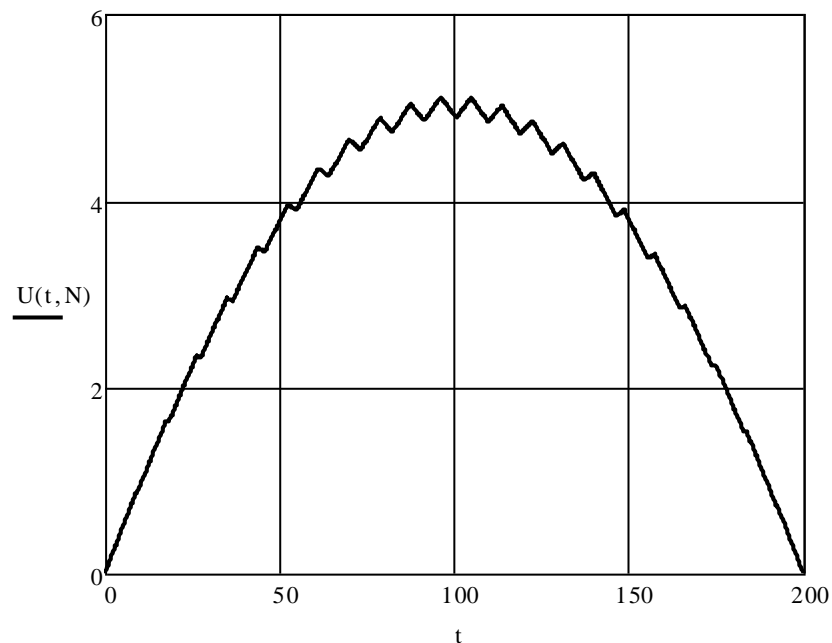
Ряд Фурье

$$\lambda(n) := \frac{n \cdot \pi}{l}$$

$$u(x, t, N) := \frac{2 \cdot P}{(v^2 - c^2) \cdot \sqrt{T \cdot \rho} \cdot l} \cdot \sum_{n=1}^N \left[\frac{\sin(\lambda(n) \cdot x)}{\lambda(n)^2} \cdot (v \cdot \sin(\lambda(n) \cdot c \cdot t) - c \cdot \sin(\lambda(n) \cdot v \cdot t)) \right]$$

$$U(t, N) := u(v \cdot t, t, N)$$

$$N := 500$$



Статическое решение

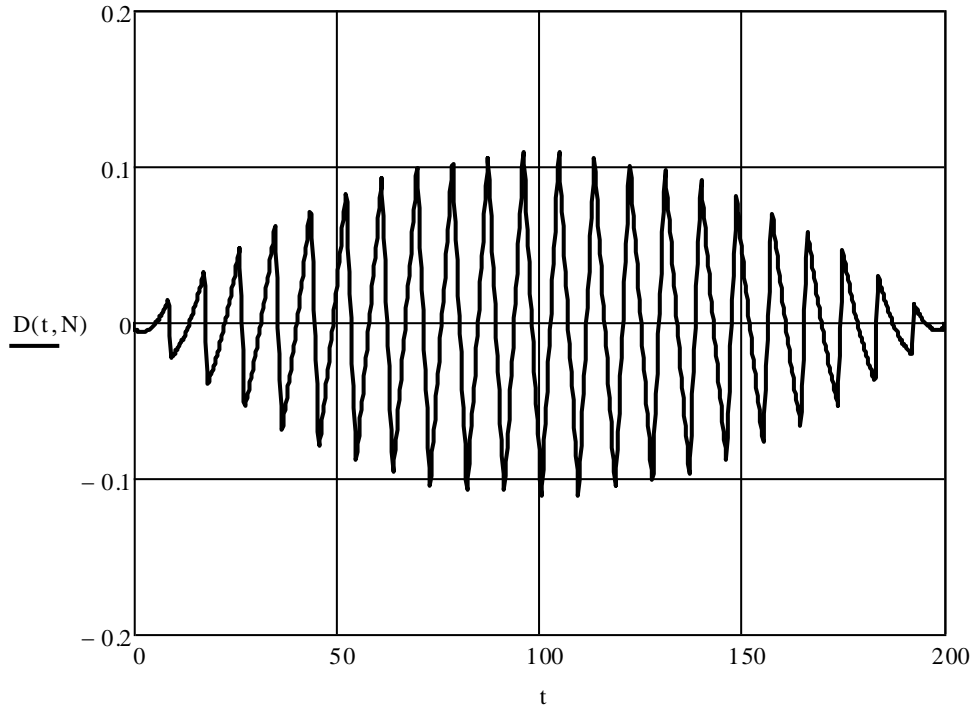
$$u0s(\xi) := \frac{P}{T \cdot l} \cdot \xi \cdot (1 - \xi)$$

$$u_s(x, \xi) := u_0s(\xi) \cdot \begin{cases} \frac{x}{\xi} & \text{if } x \leq \xi \\ \frac{1-x}{1-\xi} & \text{if } x > \xi \end{cases}$$

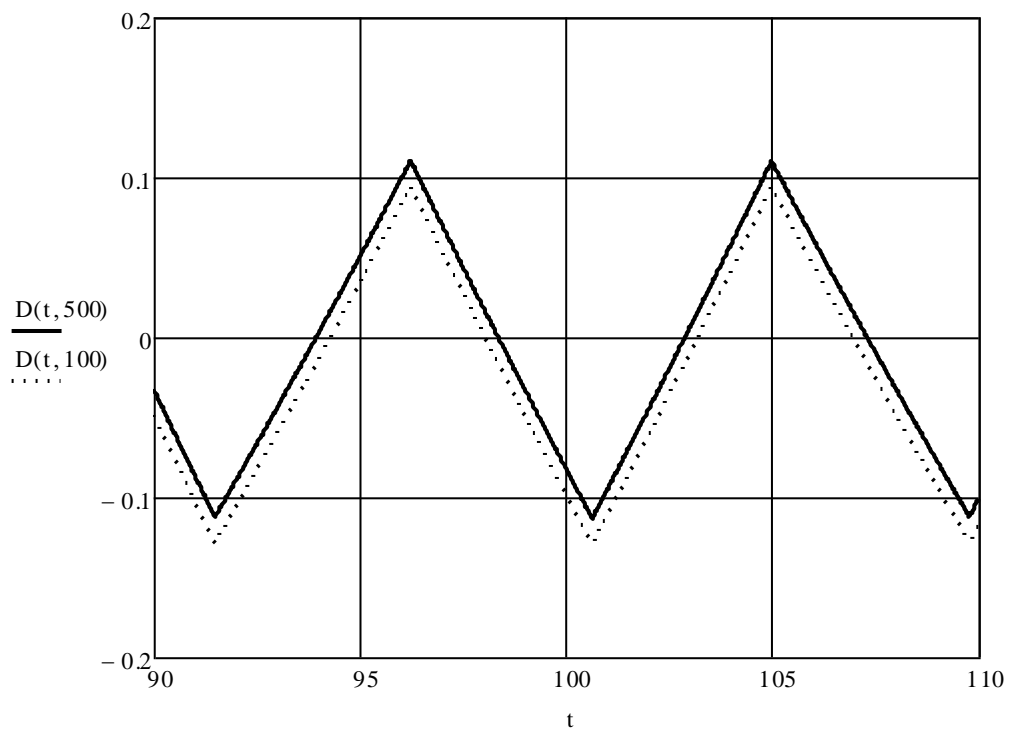
$$U_s(t) := u_0s(v \cdot t)$$

Отклонение от квазистатического решения

$$D(t, N) := U(t, N) - U_s(t)$$

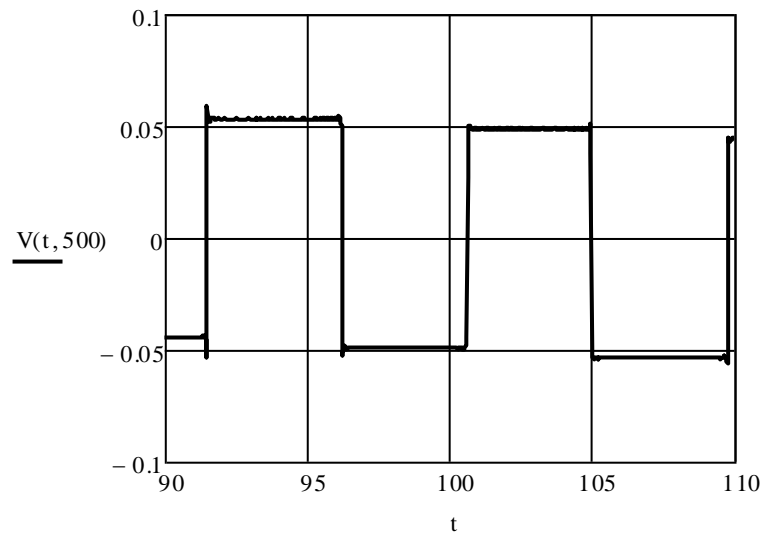


Практическая сходимость ряда



амплитуда 0.113; период 9.2

$$\dot{V}(t, N) := \frac{d}{dt} U(t, N)$$



скачок скорости 0.102

П.2. Уравнения Лагранжа

УРАВНЕНИЯ ЛАГРАНЖА, ДВИЖЕНИЕ С ОСТАНОВКОЙ

Параметры

$$P := 1000$$

$$\rho := 5$$

$$T := 10^4$$

$$l := 200$$

$$c := \sqrt{\frac{T}{\rho}} = 44.721$$

$$v_0 := 1$$

$$v_1 := 1$$

Закон движения

$$t_1 := 40$$

$$\tau := 60$$

$$t_2 := t_1 + \tau$$

$$\xi_1 := v_0 \cdot t_1$$

$$\xi(t) := \begin{cases} (v_0 \cdot t) & \text{if } t \leq t_1 \\ \xi_1 & \text{if } t_1 \leq t \leq t_2 \\ [\xi_1 + v_1 \cdot (t - t_2)] & \text{otherwise} \end{cases}$$

$$t_t := \frac{l - \xi_1}{v_1} + t_2 = 260$$

Массивы функций

$$\text{ORIGIN} := 1$$

$$n := 50$$

$$i := 1..n$$

$$j := 1..n$$

$$k_i := i$$

$$\Phi(x) := \sqrt{\frac{2}{l}} \cdot \sin\left(\frac{k \cdot \pi}{l} \cdot x\right)$$

$$\Phi_1(x) := \left(\sqrt{\frac{2}{l}} \cdot \frac{k \cdot \pi}{l} \cdot \cos\left(\frac{k \cdot \pi}{l} \cdot x\right) \right)$$

$$\Phi_2(x) := \left[-\sqrt{\frac{2}{l}} \cdot \left(\frac{k \cdot \pi}{l}\right)^2 \cdot \sin\left(\frac{k \cdot \pi}{l} \cdot x\right) \right]$$

Матрицы инерции и жесткости

$$M := \begin{cases} \text{for } i \in 1..n \\ \text{for } j \in 1..n \\ M_{i,j} \leftarrow \int_0^l \rho \cdot \Phi(x)_i \cdot \Phi(x)_j \cdot dx \end{cases}$$

M

```

C := | for i ∈ 1..n
      | for j ∈ 1..n
      | Ci,j ← T · ∫01 Φ1(x)i · Φ1(x)j dx
      | C

Q(t) := P · Φ(ξ(t))
Oi,j := 0
oi := 0

I := identity(n)
A := augment(stack(O, -M-1 · C), stack(I, O))
f(t) := stack(o, M-1 · Q(t))
y0 := stack(o, o)
F(t, y) := A · y + f(t)
S := Radau(y0, 0, tt, 1000, F)
q(t) := | for i ∈ 1..n
        | qi ← linterp(S<1>, S<i+1>, t)
        | q

u(x, t) := q(t)T · Φ(x)
U(t) := u(ξ(t), t)

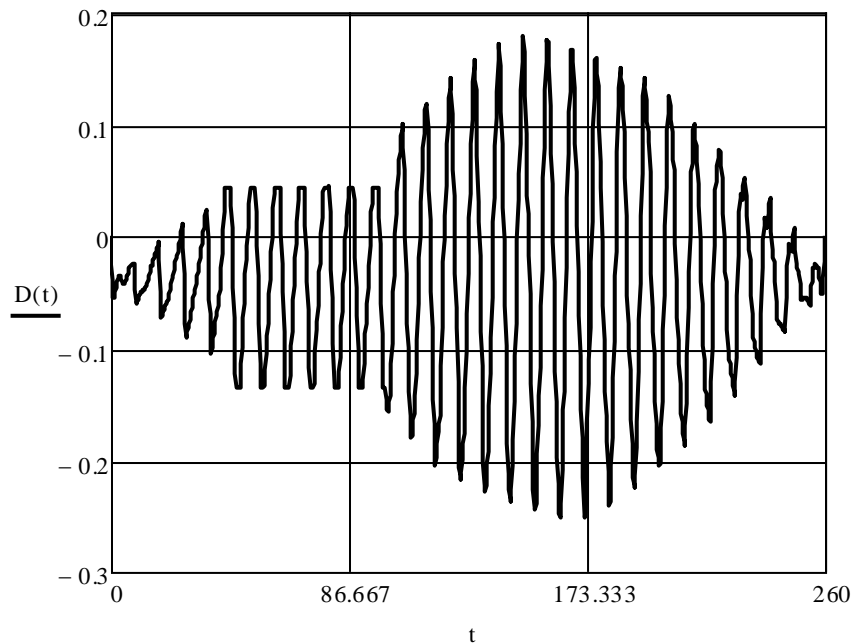
```

Отклонение от квазистатического решения

$$u0s(\xi) := \frac{P}{T \cdot l} \cdot \xi \cdot (1 - \xi)$$

$$us(x, \xi) := u0s(\xi) \cdot \begin{cases} \frac{x}{\xi} & \text{if } x \leq \xi \\ \frac{1-x}{1-\xi} & \text{if } x > \xi \end{cases}$$

$$D(t) := U(t) - u0s(\xi(t))$$





П.3. Модели провода

ПРОВОД КАК УПРУГАЯ НИТЬ

Параметры провода

$$E := 7 \cdot 10^{10}$$

$$\rho_3 := 2700$$

$$R := 0.02$$

$$\Omega := \pi \cdot R^2$$

$$\rho := \rho_3 \Omega = 5.301$$

$$b := E \cdot \Omega = 1.374 \times 10^8$$

$$q_0 := \rho \cdot 9.8$$

Система ОДУ

$$q(s) := -q_0$$

$$G(Y) := \frac{1}{\sqrt{(Y_0)^2 + (Y_1)^2}} + \frac{1}{b}$$

$$D(s, Y) := \begin{pmatrix} 0 \\ -q(s) \\ Y_0 \cdot G(Y) \\ Y_1 \cdot G(Y) \end{pmatrix}$$

Решение краевой задачи методом стрельбы

$$L := 200$$

$$x1 := 200$$

$$y0 := 0$$

$$y1 := 0$$

$$s0 := 0$$

$$s1 := L$$

$$z := \begin{pmatrix} 100 \\ 200 \end{pmatrix}$$

$$\text{load}(s0, z) := \begin{pmatrix} z_0 \\ z_1 \\ 0 \\ y0 \end{pmatrix}$$

$$\text{score}(s1, Y) := \begin{pmatrix} Y_2 - x1 \\ Y_3 - y1 \end{pmatrix}$$

$$Z := \text{sbval}(z, s0, s1, D, \text{load}, \text{score}) = \begin{pmatrix} 8.52 \times 10^4 \\ -5.201 \times 10^3 \end{pmatrix}$$

$$S := \text{rkfixed} \left[\begin{pmatrix} Z_0 \\ Z_1 \\ 0 \\ y0 \end{pmatrix}, s0, s1, 500, D \right]$$

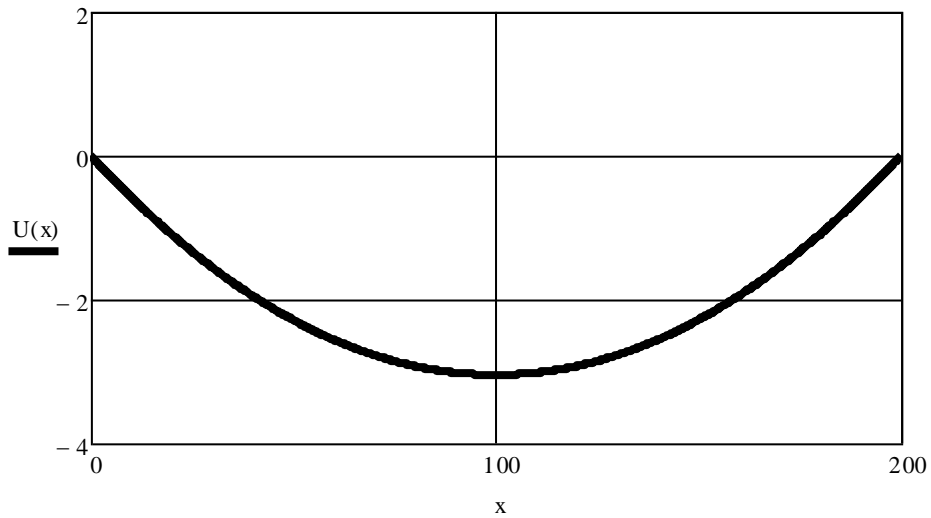
$$U(x) := \text{linterp}(S^{(3)}, S^{(4)}, x)$$

$$Q_x(s) := \text{linterp}(S^{(0)}, S^{(1)}, s)$$

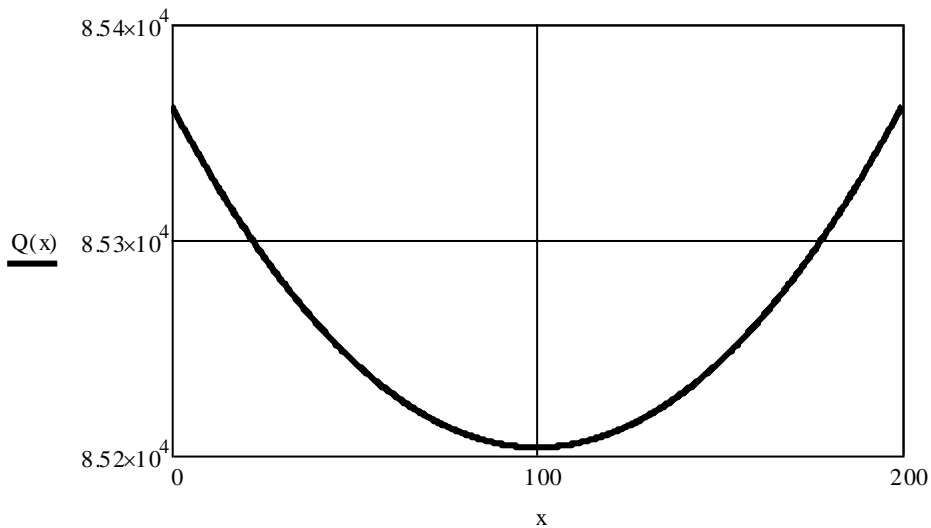
$$Q_y(s) := \text{linterp}(S^{(0)}, S^{(2)}, s)$$

$$Q(s) := \sqrt{Q_x(s)^2 + Q_y(s)^2}$$

Форма провода



Сила натяжения



Варианты силы для струны

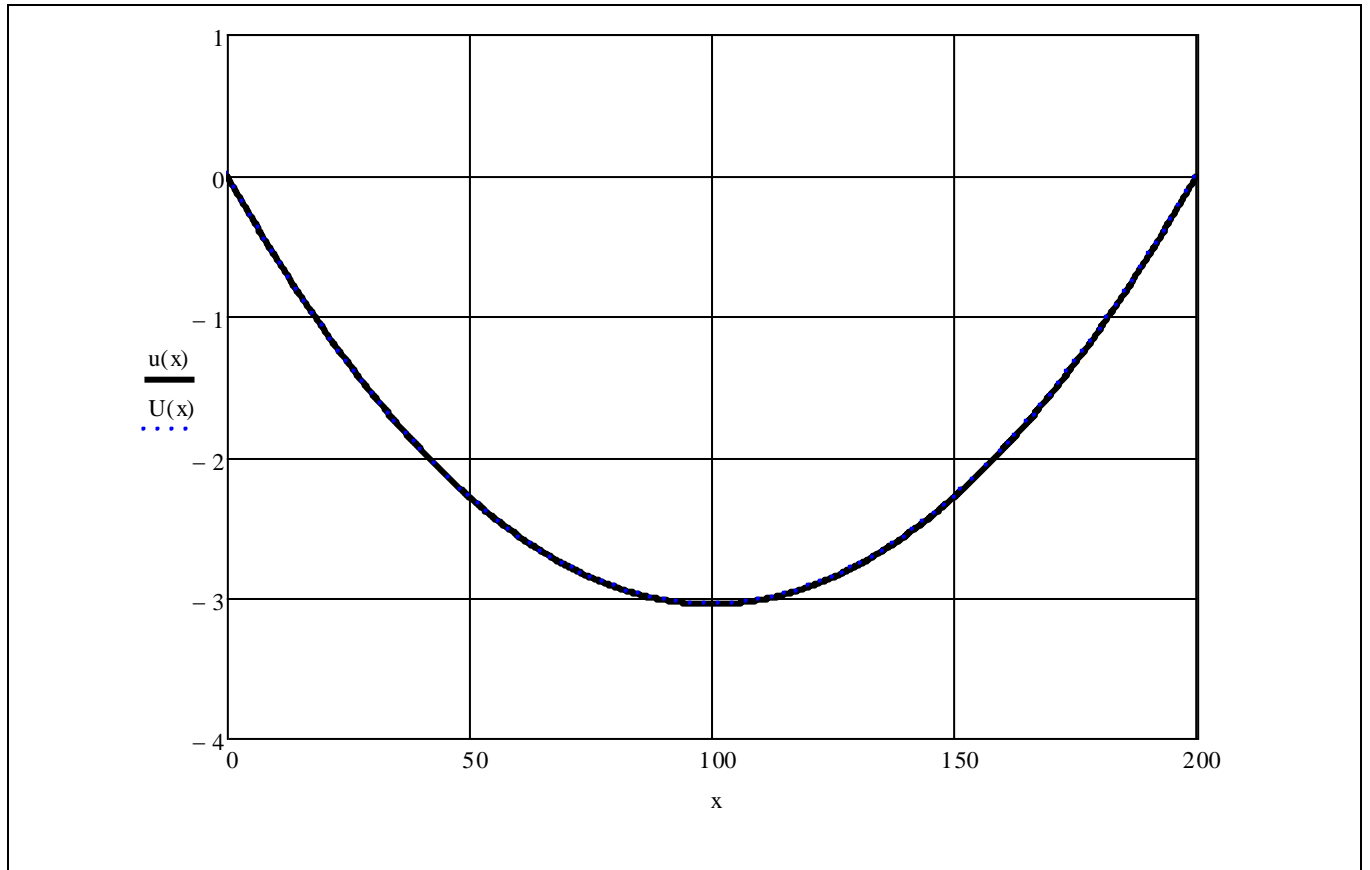
$$T1 := \frac{1}{L} \int_0^L Q(x) dx = 8.526 \times 10^4$$

$$T2 := Q\left(\frac{L}{2}\right) = 8.52 \times 10^4$$

Прогиб струны

$$u(x) := \frac{q_0}{2 \cdot T2} \cdot x(x - L)$$

Сравнение прогибов



П.4. Струна с подвижной массой

ПРОВОД С ТОЧЕЧНОЙ МАССОЙ

Параметры системы

$T := 10^4$
 $m := 100$
 $g := 9.81$
 $l := 200$
 $P := m \cdot g$
 $\rho := 5$
 $v_0 := 1$
 $\xi(t) := v_0 \cdot t$
 $v(t) := v_0$
 $\varepsilon(t) := 0$
 $\text{ORIGIN} := 1$
 $n := 30$
 $i := 1..n$
 $j := 1..n$
 $k_i := i$

Массивы функций

$\Phi(x) := \sqrt{\frac{2}{l}} \cdot \sin\left(\frac{k \cdot \pi}{l} \cdot x\right)$
 $\Phi_1(x) := \left(\sqrt{\frac{2}{l}} \cdot \frac{k \cdot \pi}{l} \cdot \cos\left(\frac{k \cdot \pi}{l} \cdot x\right) \right)$
 $\Phi_2(x) := \left[-\sqrt{\frac{2}{l}} \cdot \left(\frac{k \cdot \pi}{l}\right)^2 \cdot \sin\left(\frac{k \cdot \pi}{l} \cdot x\right) \right]$

Матрицы инерции и жесткости

$M :=$

for	$i \in 1..n$	
	for	$j \in 1..n$
	$M_{i,j} \leftarrow$	$\int_0^l \rho \cdot \Phi(x)_i \cdot \Phi(x)_j \cdot dx$
	M	

$C :=$

for	$i \in 1..n$	
	for	$j \in 1..n$
	$C_{i,j} \leftarrow T \cdot$	$\left(\int_0^l \Phi_1(x)_i \cdot \Phi_1(x)_j \cdot dx \right)$
	C	

Система ОДУ

$U(Y) := \text{submatrix}(Y, 1, n, 1, 1)$
 $V(Y) := \text{submatrix}(Y, n + 1, 2 \cdot n, 1, 1)$
 $\kappa(\xi) := m \cdot \Phi(\xi) \cdot \Phi_2(\xi)^T$

$$\begin{aligned}\mu(\xi) &:= m \cdot \Phi(\xi) \cdot \Phi(\xi)^T \\ \eta(\xi) &:= m \cdot \Phi 1(\xi) \cdot \Phi(\xi)^T \\ \sigma(\xi) &:= m \cdot \Phi 1(\xi) \cdot \Phi 1(\xi)^T \\ \Sigma u(U, V, \xi, v, \varepsilon) &:= (M + \mu(\xi))^{-1} \cdot \left[P \cdot \Phi(\xi) - 2 \cdot v \cdot \eta(\xi)^T \cdot V - (C + v^2 \cdot \kappa(\xi) + \varepsilon \cdot \eta(\xi)^T) \cdot U \right] \\ D1(Y) &:= V(Y)\end{aligned}$$

$$D2(t, Y) := \Sigma u(U(Y), V(Y), \xi(t), v(t), \varepsilon(t))$$

$$F(t, Y) := \text{stack}(D1(Y), D2(t, Y))$$

$$i := 1..n$$

$$U0_i := 0$$

$$V0_i := 0$$

$$Y0 := \text{stack}(U0, V0)$$

$$tt := \frac{1}{v0}$$

Решение задачи Коши

$$\Gamma := \text{Rkadapt}(Y0, 0, 200, 1000, F)$$

Интерполяция прогиба

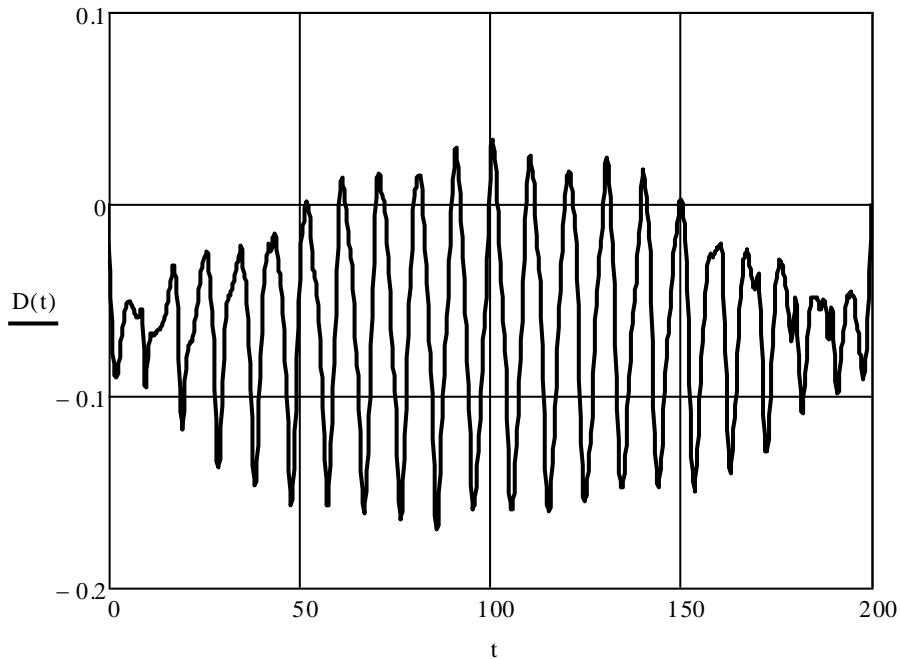
$$U(t) := \begin{cases} \text{for } i \in 1..n \\ U_i \leftarrow \text{linterp}(\Gamma^{(i)}, \Gamma^{(i+1)}, t) \\ U \end{cases}$$

$$u(x, t) := U(t)^T \cdot \Phi(x)$$

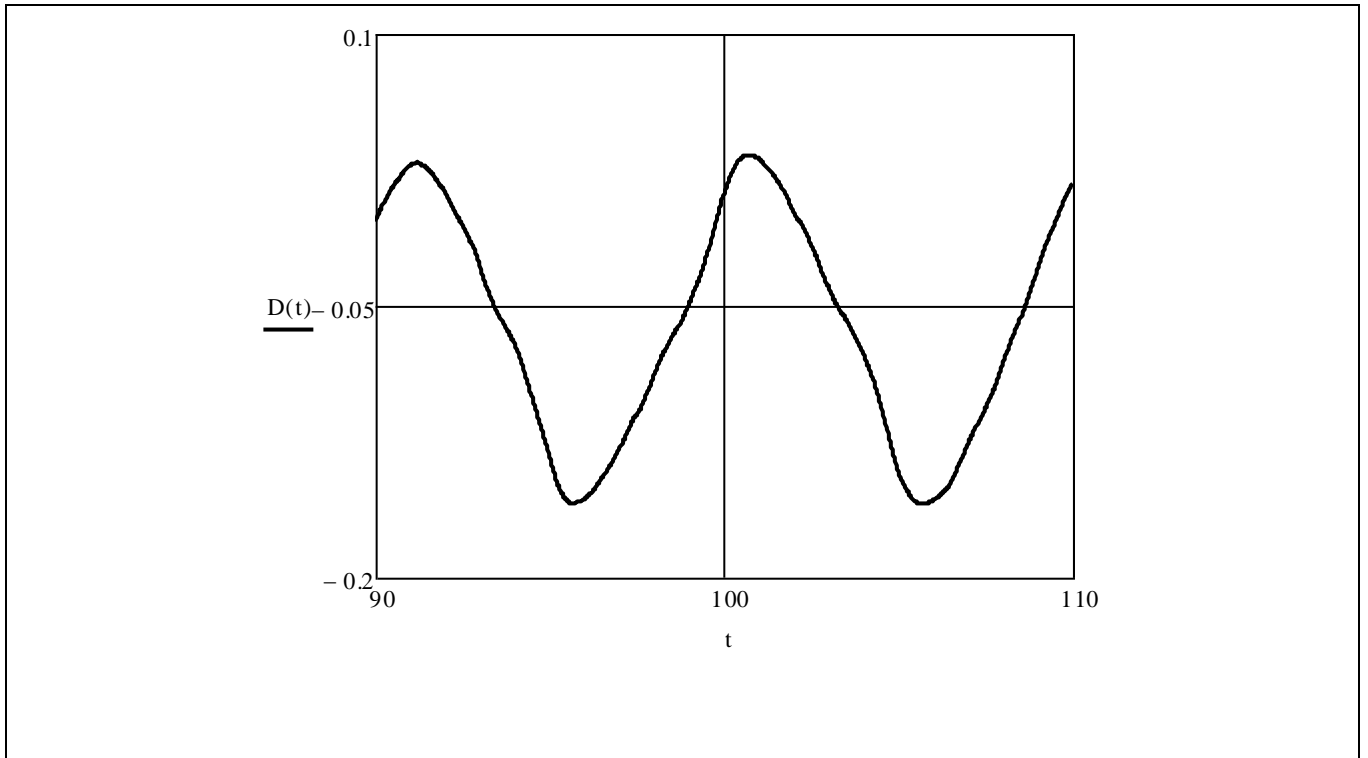
$$um(t) := u(\xi(t), t)$$

Динамическая составляющая

$$D(t) := um(t) - \frac{P}{T \cdot l} \cdot \xi(t) \cdot (1 - \xi(t))$$



Процесс в середине дистанции



II.5. Колебания с сопротивлением

УРАВНЕНИЯ ЛАГРАНЖА, СТРУНА С СИЛОЙ, ВЯЗКОЕ СОПРОТИВЛЕНИЕ

Параметры системы

$P := 1000$
 $\rho := 5$
 $T := 10^4$
 $l := 200$
 $\beta_1 := 0.1$
 $v := 1$
 $\xi(t) := v \cdot t$
 $tt := \frac{l}{v} = 200$
 $ORIGIN := 1$
 $n := 30$
 $i := 1..n$
 $j := 1..n$
 $k_i := i$
 $r := 1..n$

Массивы функций

$\Phi(x) := \sqrt{\frac{2}{l}} \cdot \sin\left(\frac{k \cdot \pi}{l} \cdot x\right)$
 $\Phi_1(x) := \left(\sqrt{\frac{2}{l}} \cdot \frac{k \cdot \pi}{l} \cdot \cos\left(\frac{k \cdot \pi}{l} \cdot x\right) \right)$

Матрицы инерции и жесткости

$M_{i,j} := \int_0^l \rho \cdot \Phi(x)_i \cdot \Phi(x)_j \cdot dx$
 $C_{i,j} := T \cdot \int_0^l \Phi_1(x)_i \cdot \Phi_1(x)_j \cdot dx$

Силы вязкого сопротивления

$B := \frac{\beta_1}{\rho} \cdot M$

$F(w) := B \cdot w$

$Q(t) := P \cdot \Phi(\xi(t))$

$O_{i,j} := 0$

$o_i := 0$

$I := \text{identity}(n)$

$I_q := \text{augment}(I, O)$

$I_v := \text{augment}(O, I)$

$y_0 := \text{stack}(o, o)$

$F(t, y) := \text{stack}\left[I_v \cdot y, M^{-1} \cdot (-C \cdot I_q \cdot y + Q(t) - F(I_v \cdot y))\right]$

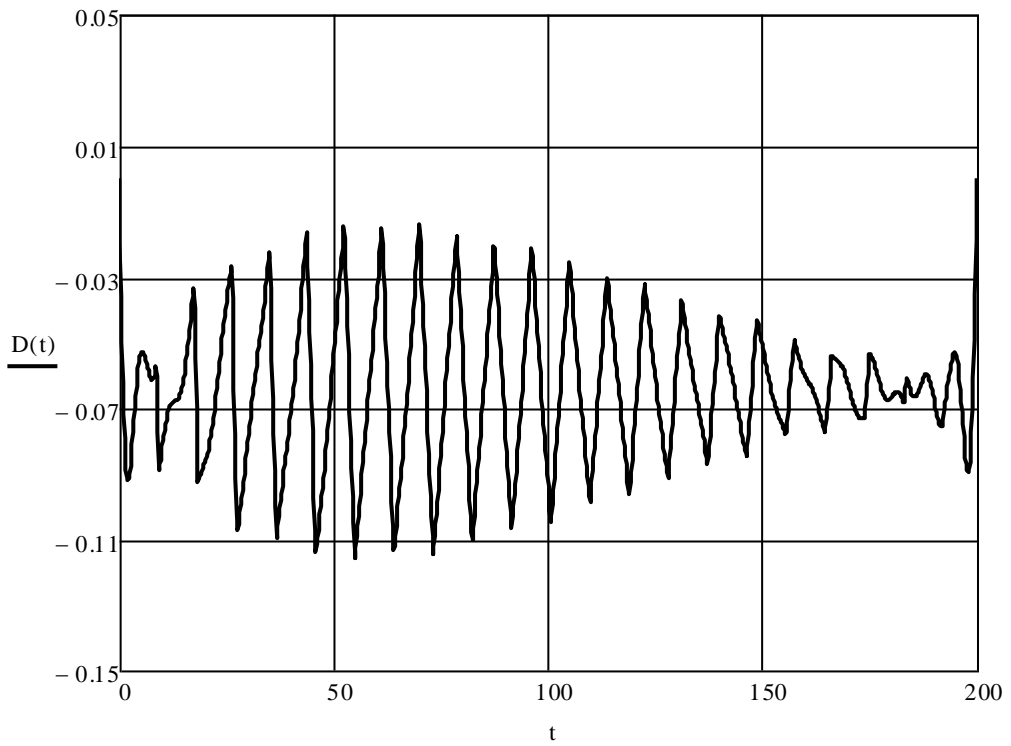
Решение системы ОДУ

$R := \text{Radau}(y_0, 0, tt, 1000, F)$

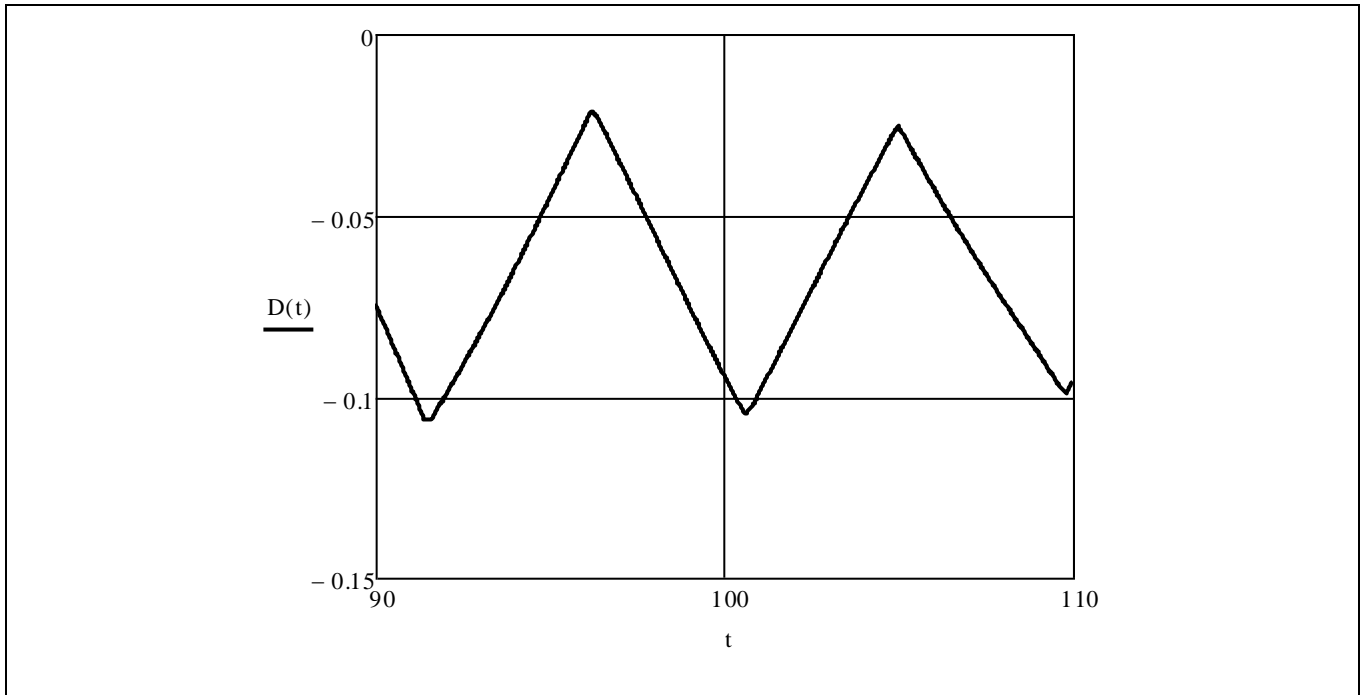
$v1(i, t) := \text{linterp}(R^{\langle 1 \rangle}, R^{\langle i+1+n \rangle}, t)$

$$\begin{aligned}
 q1(i,t) &:= \text{linterp}(R^{(i)}, R^{(i+1)}, t) \\
 q(t) &:= \begin{cases} \text{for } i \in 1..n \\ q_i \leftarrow q1(i,t) \end{cases} \\
 & \quad | \\
 & \quad q \\
 u(x,t) &:= q(t)^T \cdot \Phi(x) \\
 U(t) &:= u(\xi(t), t) \\
 \underline{\underline{v}}(t) &:= \begin{cases} \text{for } i \in 1..n \\ v_i \leftarrow v1(i,t) \end{cases} \\
 & \quad | \\
 & \quad v \\
 \underline{\underline{v}}(x,t) &:= v(t)^T \cdot \Phi(x) \\
 \underline{\underline{V}}(t) &:= v(\xi(t), t) \\
 D(t) &:= U(t) - \frac{P}{T \cdot l} \cdot \xi(t) \cdot (1 - \xi(t))
 \end{aligned}$$

Динамическая составляющая прогиба



Процесс в середине дистанции



П.6. ДМА как маятник

ПАРАМЕТРИЧЕСКИЕ КОЛЕБАНИЯ, 3D-2

Сначала СТРУНА С МАССОЙ

Параметры системы

```

T := 10^4
m := 100
g := 9.81
l := 200
P := m*g
rho := 5
v := 1
ORIGIN := 1
n := 15

-1
tt := 1/v = 200
i := 1..n
j := 1..n
k_i := i

```

Массивы функций

```

Phi(x) := sqrt(2/1) * sin(k*pi/x)
Phi1(x) := (sqrt(2/1) * k*pi / 1 * cos(k*pi/x))
Phi2(x) := [-sqrt(2/1) * (k*pi/1)^2 * sin(k*pi/x)]

```

Матрицы инерции и жесткости

```

M := | for i ∈ 1..n
      | for j ∈ 1..n
      | Mi,j ← ∫01 rho * Phi(x)i * Phi(x)j dx
      | M
C := | for i ∈ 1..n
      | for j ∈ 1..n
      | Ci,j ← T * (∫01 Phi1(x)i * Phi1(x)j dx)
      | C

```

$$\mu(t) := m \Phi(v \cdot t) \cdot \Phi(v \cdot t)^T$$

$$\eta(t) := m \Phi(v \cdot t) \cdot \Phi1(v \cdot t)^T$$

$$\sigma(t) := m \Phi1(v \cdot t) \cdot \Phi1(v \cdot t)^T$$

$$\kappa(t) := m \Phi(v \cdot t) \cdot \Phi2(v \cdot t)^T$$

$$F(t) := P \cdot \Phi(v \cdot t)$$

$$I := \text{identity}(n)$$

$$O_{i,j} := 0$$

$$o_i := 0$$

$$\Lambda(t) := (M + \mu(t))^{-1}$$

$$f(t) := \text{stack}(o, \Lambda(t) \cdot F(t))$$

$$B2I(t) := -\Lambda(t) \cdot C$$

$$B2\lambda(t) := -2 \cdot v \cdot \Lambda(t) \cdot \eta(t)$$

$$B(t) := \text{augment}(\text{stack}(O, B2I(t)), \text{stack}(I, B2\lambda(t)))$$

Решение системы ОДУ

$$D0(t, y) := B(t) \cdot y + f(t)$$

$$y0 := \text{stack}(o, o)$$

$$S := \text{Rkadapt}(y0, 0, tt, 1000, D0)$$

Интерполяция, прогиб, скорость

$$U(t) := \begin{cases} \text{for } i \in 1..n \\ U_i \leftarrow \text{linterp}(S^{(1)}, S^{(i+1)}, t) \\ U \end{cases}$$

$$u(x, t) := U(t)^T \cdot \Phi(x)$$

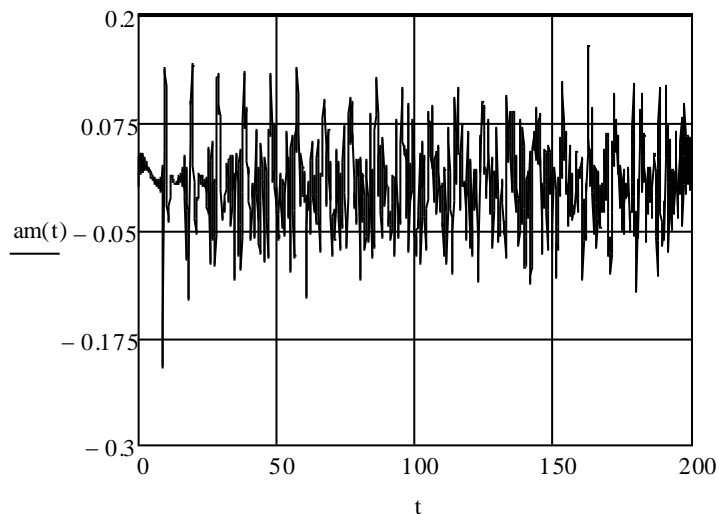
$$um(t) := u(v \cdot t, t)$$

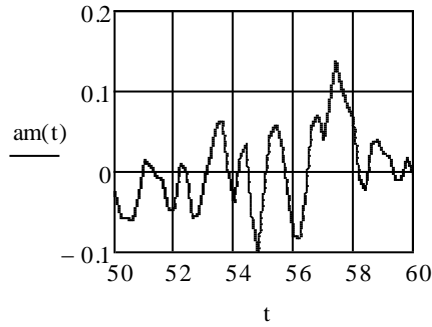
$$V(t) := \begin{cases} \text{for } i \in 1..n \\ V_i \leftarrow \text{linterp}(S^{(1)}, S^{(i+1+n)}, t) \\ V \end{cases}$$

$$a1(t) := \left[v^2 \cdot \Phi2(v \cdot t)^T - \Phi(v \cdot t)^T \cdot \Lambda(t) \cdot (C + v^2 \cdot \kappa(t)) \right] \cdot U(t)$$

Полное ускорение

$$am(t) := a1(t) + 2 \cdot v \cdot (\Phi1(v \cdot t)^T - \Phi(v \cdot t)^T \cdot \Lambda(t) \cdot \eta(t)) \cdot V(t) + \Phi(v \cdot t)^T \cdot \Lambda(t) \cdot F(t)$$





$$\frac{1}{tt} \int_0^{tt} |am(t)| dt = 0.037$$

СТРУНА С МАЯТНИКОМ

Параметры маятника

$$\varepsilon l := 0.0;$$

$$rc := 0.0;$$

$$\beta := \frac{\varepsilon l}{\varepsilon l^2 + rc^2}$$

$$\alpha := \frac{rc^2}{\varepsilon l^2 + rc^2}$$

$$g0(t) := g - am(t)$$

Струна с маятником

$$C0(t) := C + v^2 \cdot \alpha \cdot \kappa(t)$$

$$\Lambda 0(t) := (M + \alpha \cdot \mu(t))^{-1}$$

$$A21(t) := -\Lambda 0(t) \cdot C0(t)$$

$$A22(t) := -2 \cdot \alpha \cdot v \cdot \Lambda 0(t) \cdot \eta(t)$$

$$A23(t) := m \beta \cdot \varepsilon l \cdot \Lambda 0(t) \cdot g0(t) \cdot \Phi(v \cdot t)$$

$$A41(t) := \beta \cdot (\Phi(v \cdot t)^T \cdot \Lambda 0(t) \cdot C0(t) - v^2 \cdot \Phi 2(v \cdot t)^T)$$

$$A42(t) := -2 \cdot v \cdot \beta \cdot (\Phi 1(v \cdot t)^T - \alpha \cdot \Phi(v \cdot t)^T \cdot \Lambda 0(t) \cdot \eta(t))$$

$$A43(t) := -\beta \cdot g0(t) \cdot (1 + m \beta \cdot \varepsilon l \cdot \Phi(v \cdot t)^T \cdot \Lambda 0(t) \cdot \Phi(v \cdot t))$$

$$A1(t) := \text{stack}(0, A21(t), 0^T, A41(t))$$

$$A2(t) := \text{stack}(I, A22(t), 0^T, A42(t))$$

$$A3(t) := \text{stack}(0, A23(t), 0, A43(t))$$

$$A4(t) := \text{stack}(0, 0, 1, 0)$$

$$\underline{A}(t) := \text{augment}(A1(t), A2(t), A3(t), A4(t))$$

$$D(t, Y) := A(t) \cdot Y$$

$$\underline{Y}0 := \text{stack}(0, 0, 0.1, 0)$$

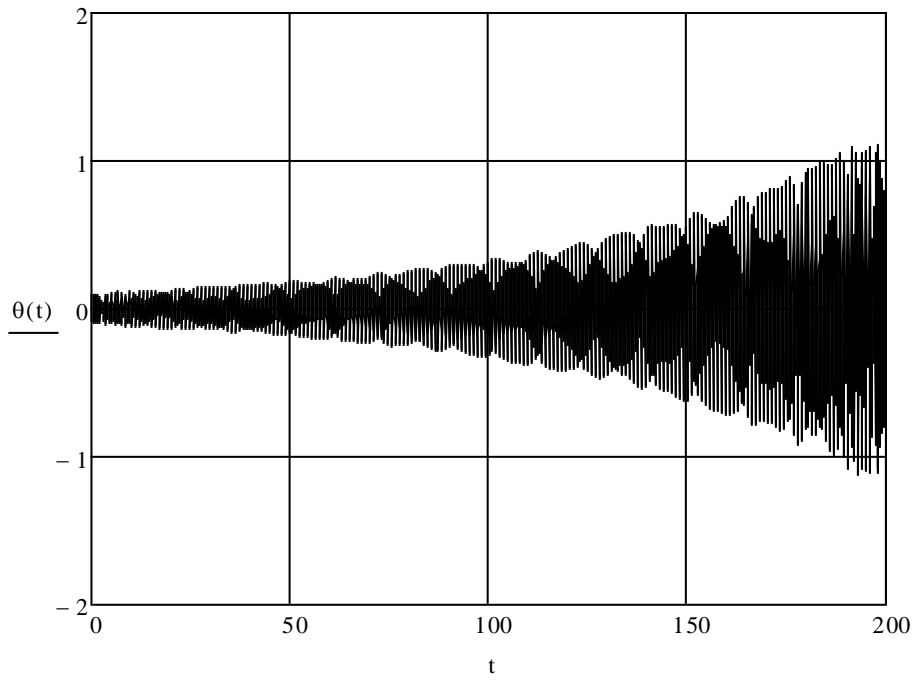
$$\Sigma := \text{Rkadapt}(\underline{Y}0, 0, tt, 1000, D)$$

$$\text{rows}(\Sigma^T) = 33$$

$$\text{rows}(\Sigma) = 1.001 \times 10^3$$

У Г О Л

$$\theta(t) := \text{linterp}(\Sigma \langle 1 \rangle, \Sigma \langle 2 \cdot n + 2 \rangle, t)$$

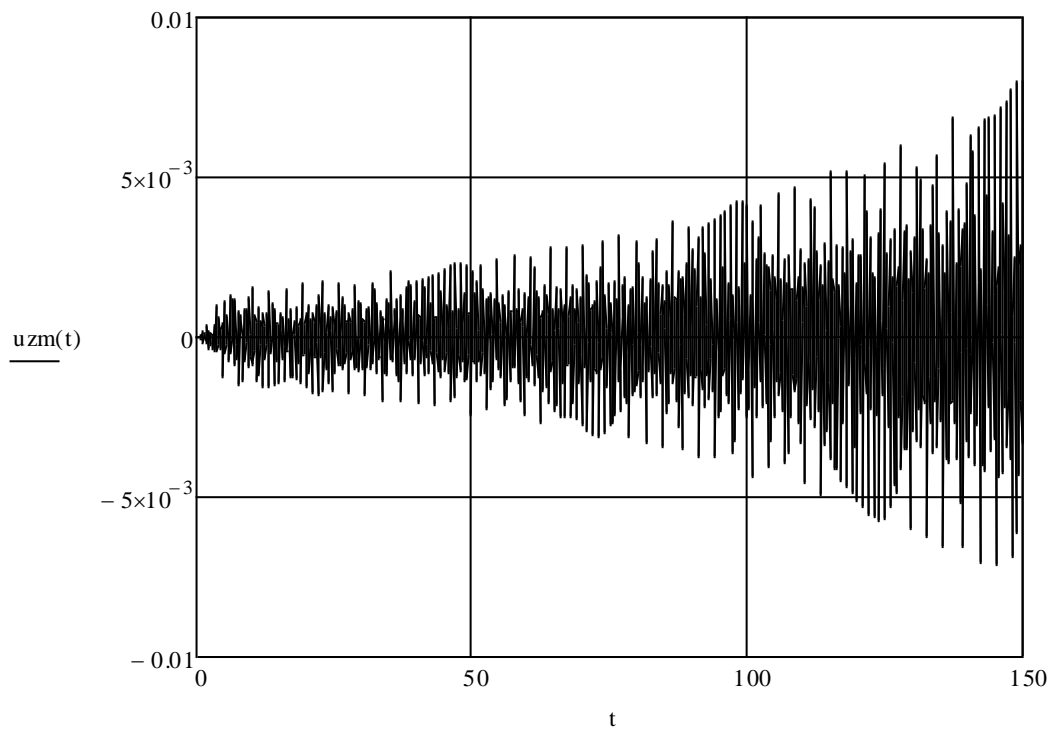


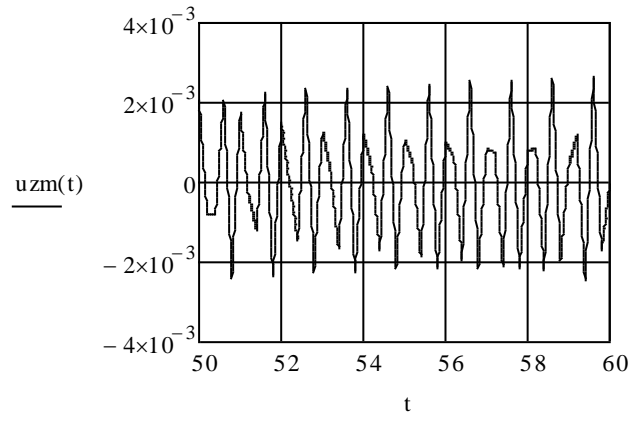
$$Uz(t) := \begin{cases} \text{for } i \in 1..n \\ Uz_i \leftarrow \text{linterp}(\Sigma^{(1)}, \Sigma^{(i+1)}, t) \\ Uz \end{cases}$$

$$uz(x, t) := Uz(t)^T \cdot \Phi(x)$$

$$uzm(t) := uz(v \cdot t, t)$$

горизонтальный прогиб





П.7. Контакт жестких тел

РОЛИКИ И ПРОВОД - КОНТАКТ ТВЕРДЫХ ТЕЛ Геометрические параметры и выражения

$$R := 0.02$$

$$\omega := \frac{0.97}{2 \cdot R}$$

$$r0 := 0.1$$

$$Ax := 0.5$$

$$Ay := 0.2$$

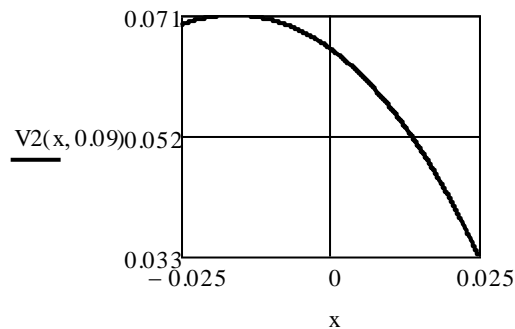
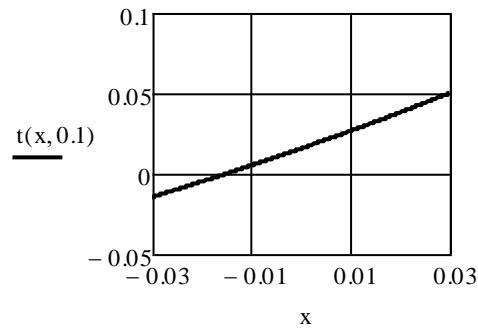
$$\alpha(\varphi) := \omega \cdot \sin(\varphi)$$

$$\beta(\varphi) := \frac{1}{2} \cos(\varphi)$$

$$\gamma(x, \varphi) := x - Ax \cdot (1 - \cos(\varphi)) - (R - Ay) \cdot \sin(\varphi)$$

$$t(x, \varphi) := \frac{1}{\alpha(\varphi)} \cdot \left(\beta(\varphi) - \sqrt{\beta(\varphi)^2 - \alpha(\varphi) \cdot \gamma(x, \varphi)} \right)$$

$$V2(x, \varphi) := Ay - (t(x, \varphi) - Ax) \cdot \sin(\varphi) + \left(R - \omega \cdot t(x, \varphi)^2 - Ay \right) \cdot \cos(\varphi)$$



$$pV2(x, \varphi) := \frac{-\sin(\varphi) - 2 \cdot \omega \cdot t(x, \varphi) \cdot \cos(\varphi)}{\cos(\varphi) - 2 \cdot \omega \cdot t(x, \varphi) \cdot \sin(\varphi)}$$

$$v1(x) := \sqrt{R^2 - x^2}$$

$$pv1(x) := \frac{-x}{\sqrt{R^2 - x^2}}$$

Определение точки контакта

$$h := 0.00$$

$$\xi := -0.01$$

$$\varphi := 0.5$$

Given

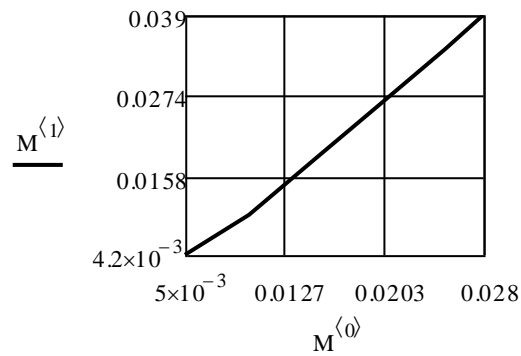
$$pv1(\xi + h) = pV2(\xi, \varphi)$$

$$v1(\xi + h) = V2(\xi, \varphi)$$

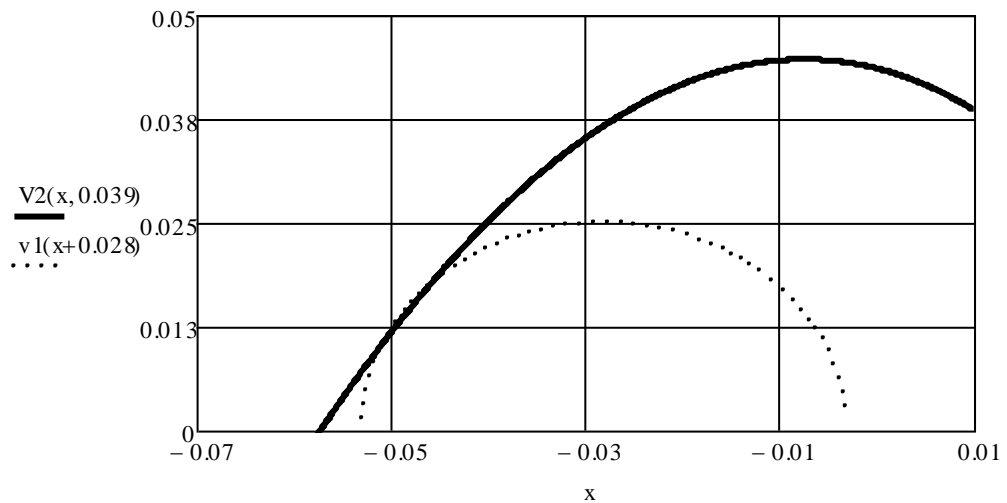
$$\text{Find}(\xi, \varphi) = \begin{pmatrix} -0.016 \\ 2.111 \times 10^{-3} \end{pmatrix}$$

Матрица результатов

$$M := \begin{pmatrix} 0.005 & 0.01 & 0.015 & 0.02 & 0.025 & 0.028 \\ 0.0042 & 0.01 & 0.018 & 0.026 & 0.034 & 0.039 \end{pmatrix}^T$$



Контактирующие поверхности



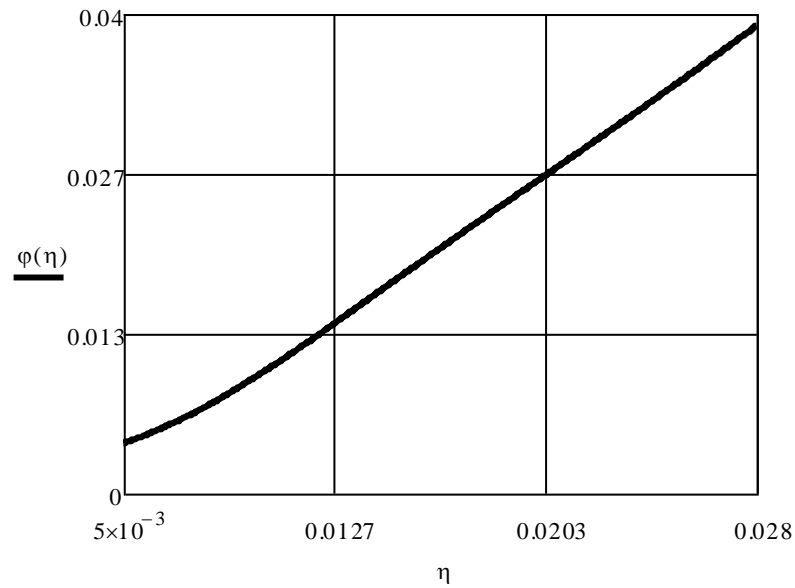
Интерполяция с регрессией

$$RS := \text{regress}(M^{(0)}, M^{(1)}, 5)$$

$$CS := \text{cspline}(M^{(0)}, M^{(1)})$$

$$g(\eta) := \text{interp}(CS, M^{(0)}, M^{(1)}, \eta)$$

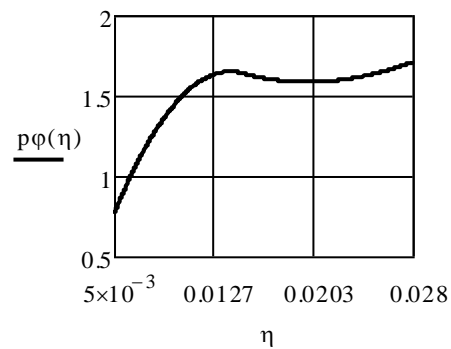
Угол как функция перемещения



Производная угла

$$p\varphi(\eta) := \frac{d}{d\eta}\varphi(\eta)$$

это производная фи по аш



Потенциальная энергия

$$l_0 := 0.1$$

$$c := 5 \cdot 10^4$$

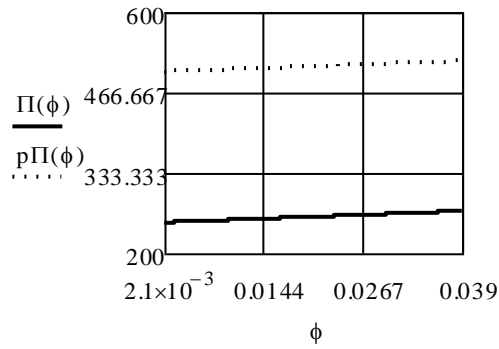
$$b := 0.1$$

$$l(\varphi) := \sqrt{b^2 \cdot (1 - \cos(\varphi))^2 + (Ay + b \cdot \sin(\varphi))^2}$$

$$\Pi(\varphi) := \frac{c}{2} (l(\varphi) - l_0)^2$$

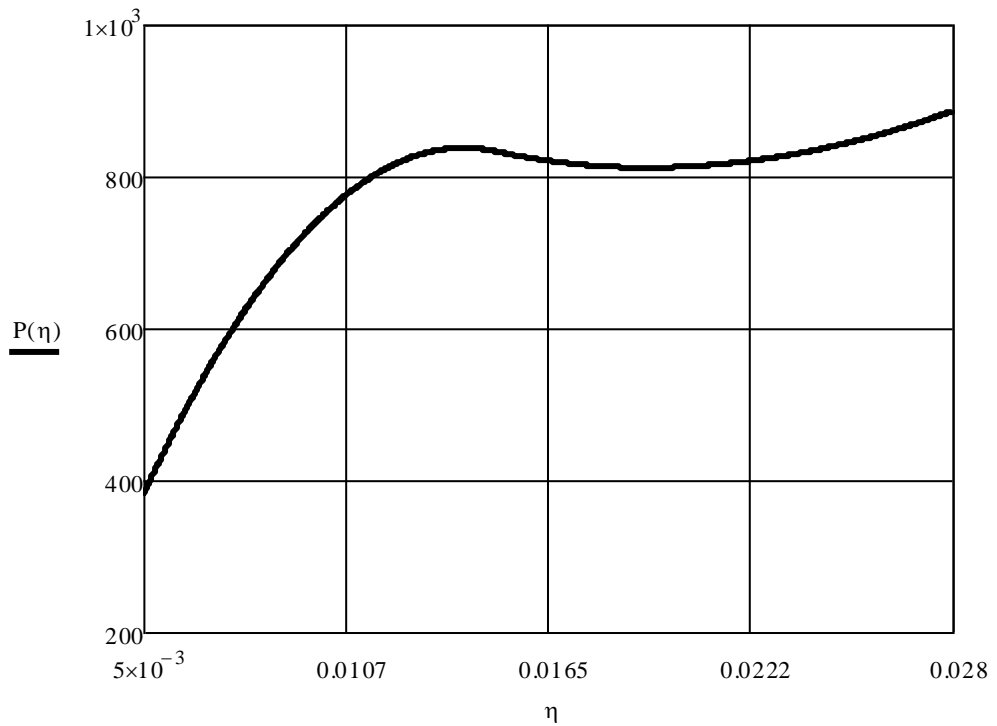
$$p\Pi(\varphi) := \frac{d}{d\varphi}\Pi(\varphi)$$

Энергия пружины



Зависимость силы от перемещения

$$P(\eta) := p\Pi(\varphi(\eta)) \cdot p\varphi(\eta)$$



Максимальная сила (прочность подвеса)

$$\eta := 0.014$$

$$\eta1 := \text{Maximize}(P, \eta)$$

$$\eta1 = 0.014$$

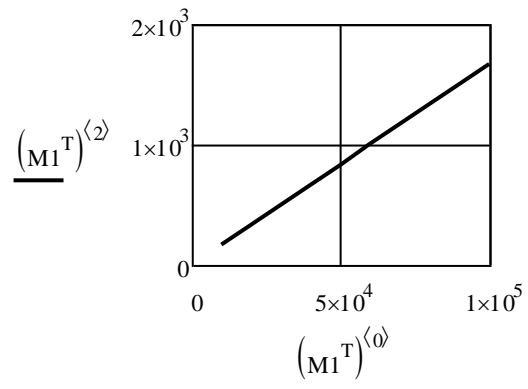
$$P(\eta1) = 837.192$$

Зависимость силы от жесткости

Матрица результатов

$$M1 := \begin{pmatrix} 10^4 & 2 \cdot 10^4 & 3 \cdot 10^4 & 4 \cdot 10^4 & 5 \cdot 10^4 & 6 \cdot 10^4 & 7 \cdot 10^4 & 8 \cdot 10^4 & 9 \cdot 10^4 & 10^5 \\ 0.014 & 0.014 & 0.014 & 0.014 & 0.014 & 0.014 & 0.014 & 0.014 & 0.014 & 0.014 \\ 167.4 & 334.9 & 502.3 & 669.8 & 837.2 & 1005 & 1172 & 1340 & 1507 & 1674 \end{pmatrix}$$

Прямая пропорциональная зависимость



П.8. Контакт упругих тел

РОЛИК И ПРОВОД - РЕШЕНИЕ ГЕРЦА эллиптические интегралы

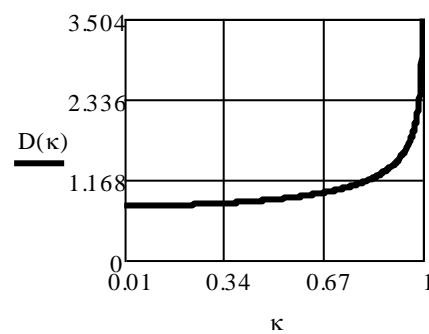
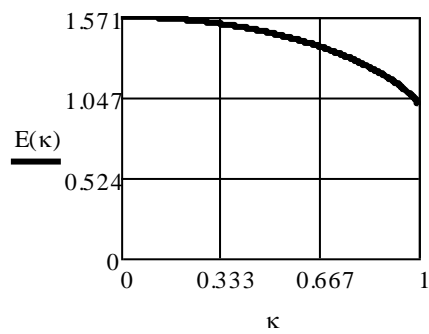
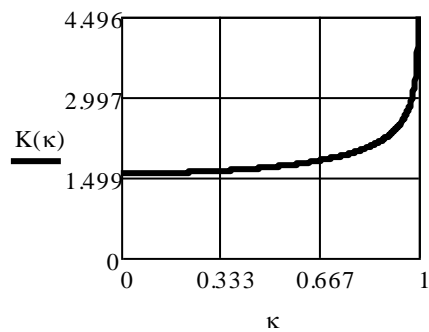
$$\Delta(\kappa, \theta) := \sqrt{1 - \kappa^2 \cdot \sin^2(\theta)}$$

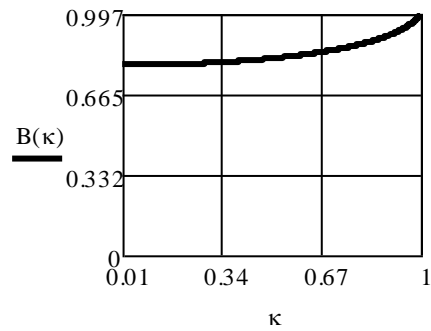
$$K(\kappa) := \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{\Delta(\kappa, \theta)} d\theta$$

$$E(\kappa) := \int_0^{\frac{\pi}{2}} \Delta(\kappa, \theta) d\theta$$

$$D(\kappa) := \frac{K(\kappa) - E(\kappa)}{\kappa^2}$$

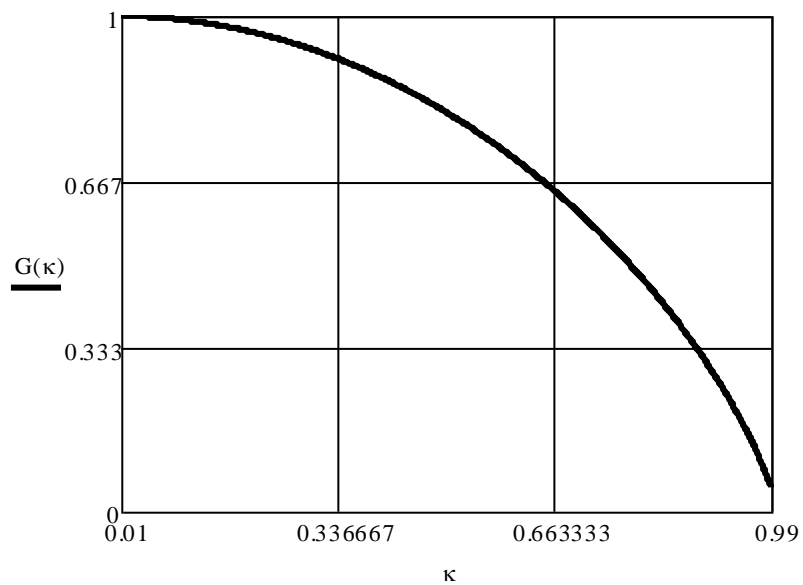
$$B(\kappa) := K(\kappa) - D(\kappa)$$





функция для вычисления эксцентриситета

$$G(\kappa) := \frac{[(1 - \kappa^2) \cdot D(\kappa)]}{B(\kappa)}$$



радиусы

$$R2 := r0 = 0.15$$

$$R1 := (R^{-1} - 2 \cdot \omega)^{-1} = 0.833$$

вычисление эксцентриситета

$$\zeta := 0.4$$

Given

$$G(\zeta) = \frac{R2}{R1}$$

$$\xi := \text{Find}(\zeta) = 0.946$$

свойства материалов и сила

$$E1 := 7 \cdot 10^{10}$$

$$E2 := 2 \cdot 10^{11}$$

$$\nu1 := 0.3$$

$$\nu2 := 0.2$$

$$\Omega := \frac{1}{\pi} \cdot \left(\frac{1 - \nu1^2}{E1} + \frac{1 - \nu2^2}{E2} \right)$$

$$Q := 100$$

полуоси эллипса

$$a := \sqrt[3]{3Q \cdot \Omega \cdot R1 \cdot D(\varepsilon)} = 2.82 \times 10^{-3}$$

$$b := a \cdot \sqrt{1 - \varepsilon^2} = 9.116 \times 10^{-4}$$

сближение

$$\delta := \frac{3 \cdot Q \cdot \Omega}{2 \cdot a} \cdot K(\varepsilon) = 7.542 \times 10^{-6}$$

давление в центре

$$p_0 := \frac{3 \cdot Q}{2 \cdot \pi \cdot a \cdot b} = 1.857 \times 10^8$$

П.9. ДМА с двигателем

ДМА С ДВИГАТЕЛЕМ ОГРАНИЧЕННОЙ МОЩНОСТИ

Параметры системы

$$\begin{aligned}
 T &:= 10^4 \\
 m &:= 100 \\
 g &:= 9.81 \\
 l &:= 200 \\
 P &:= mg \\
 \rho &:= 5 \\
 r &:= 0.2 \\
 v_0 &:= 1 \\
 H_1 &:= 20 \\
 H_r &:= 1 \\
 \omega_0 &:= \frac{v_0}{r} = 5 \\
 H_0 &:= 100
 \end{aligned}$$

Динамическая характеристика двигателя

$$H(\omega) := H_0 - H_1 \cdot \omega - H_r$$

$$\text{ORIGIN} := 1$$

$$n := 15$$

Массивы функций

$$i := 1..n$$

$$j := 1..n$$

$$k_i := i$$

$$\Phi(x) := \sqrt{\frac{2}{l}} \cdot \sin\left(\frac{k \cdot \pi}{l} \cdot x\right)$$

$$\Phi_1(x) := \left(\sqrt{\frac{2}{l}} \cdot \frac{k \cdot \pi}{l} \cdot \cos\left(\frac{k \cdot \pi}{l} \cdot x\right) \right)$$

$$\Phi_2(x) := \left[-\sqrt{\frac{2}{l}} \cdot \left(\frac{k \cdot \pi}{l}\right)^2 \cdot \sin\left(\frac{k \cdot \pi}{l} \cdot x\right) \right]$$

Матрицы инерции и жесткости

$$\begin{array}{l}
 M := \left| \begin{array}{l} \text{for } i \in 1..n \\ \text{for } j \in 1..n \\ \\ M_{i,j} \leftarrow \int_0^1 \rho \cdot \Phi(x)_i \cdot \Phi(x)_j \, dx \\ \\ M \end{array} \right.
 \end{array}$$

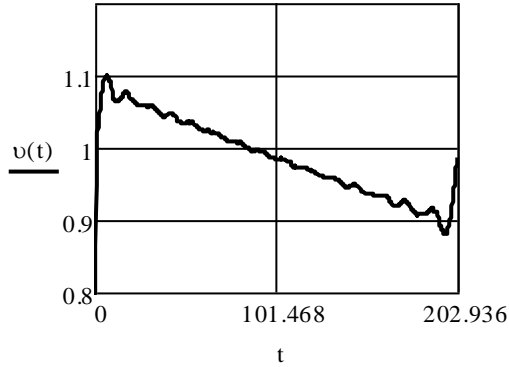
$$\begin{array}{l}
 C := \left| \begin{array}{l} \text{for } i \in 1..n \\ \text{for } j \in 1..n \\ \\ C_{i,j} \leftarrow T \cdot \left(\int_0^1 \Phi_1(x)_i \cdot \Phi_1(x)_j \, dx \right) \\ \\ C \end{array} \right.
 \end{array}$$

$$U(Y) := \text{submatrix}(Y, 1, n, 1, 1)$$

```

V(Y) := submatrix(Y, n + 1, 2*n, 1, 1)
xi(Y) := Y_{2..n+1}
v(Y) := Y_{2..n+2}
mu(xi) := m*Phi(xi)*Phi(xi)^T
eta(xi) := m*Phi1(xi)*Phi(xi)^T
sigma(xi) := m*Phi1(xi)*Phi1(xi)^T
mu1(xi) := eta(xi) + eta(xi)^T
kappa(xi) := m*Phi(xi)*Phi2(xi)^T
sigma1(xi) := m*(Phi2(xi)*Phi1(xi)^T + Phi1(xi)*Phi2(xi)^T)
Su(U, V, xi, v) := P*Phi(xi) - 2*v*eta(xi)^T*V - (C + v^2*kappa(xi))*U
Sxi(U, V, xi, v) := 1/r * H(v/r) + P*U^T*Phi1(xi) + 1/2*V^T*(eta(xi)^T - eta(xi))*V - 2*v*U^T*sigma(xi)*V - 1/2*v^2*U^T*sigma1(xi)*U
lambda(U, xi) := (m + U^T*sigma(xi)*U)^-1
Lambda(U, xi) := (M + mu(xi) - lambda(U, xi)*eta(xi)^T*U*U^T*eta(xi))^-1
Sigma_u(U, V, xi, v) := Lambda(U, xi)*(Su(U, V, xi, v) - lambda(U, xi)*Sxi(U, V, xi, v)*eta(xi)^T*U)
Sigma_xi(U, V, xi, v) := lambda(U, xi)*(Sxi(U, V, xi, v) - U^T*eta(xi)*Sigma_u(U, V, xi, v))
D1(Y) := V(Y)
D2(Y) := Sigma_u(U(Y), V(Y), xi(Y), v(Y))
d1(Y) := v(Y)
d2(Y) := Sigma_xi(U(Y), V(Y), xi(Y), v(Y))
D(t, Y) := stack(D1(Y), D2(Y), d1(Y), d2(Y))
i := 1..n
U0_i := 0
V0_1 := 0
xi0 := 0
Y0 := stack(U0, V0, xi0, 0)
tt0 := 1/v0
Gamma := Rkadapt(Y0, 0, tt0, 1000, D)
v(t) := linterp(Gamma<1>, Gamma<2..n+3>, t)
xi(t) := linterp(Gamma<1>, Gamma<2..n+2>, t)
Время прохода дистанции
t1 := ttC
Given
xi(t1) = 1
tt := Find(t1) = 202.936

```



Прогиб

$$\underline{U}(t) := \begin{cases} \text{for } i \in 1..n \\ U_i \leftarrow \text{linterp}(\Gamma^{\langle 1 \rangle}, \Gamma^{\langle i+1 \rangle}, t) \\ U \end{cases}$$

$$u(x, t) := U(t)^T \cdot \Phi(x)$$

$$um(t) := u(\xi(t), t)$$

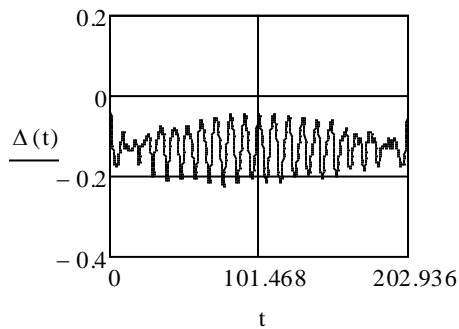
$$\underline{V}(t) := \begin{cases} \text{for } i \in 1..n \\ V_i \leftarrow \text{linterp}(\Gamma^{\langle 1 \rangle}, \Gamma^{\langle i+n+1 \rangle}, t) \\ V \end{cases}$$

Статический прогиб

$$us(x) := \frac{P}{T \cdot l} \cdot x \cdot (l - x)$$

Динамическая составляющая прогиба

$$\Delta(t) := um(t) - us(\xi(t))$$



Кинетическая энергия - 3 слагаемых Почти вся кинетическая энергия - в массе...

$$Km(t) := \frac{1}{2} \cdot m \cdot v(t)^2$$

$$Kw(t) := \frac{1}{2} \cdot V(t)^T \cdot M \cdot V(t)$$

$$Kml(t) := \frac{1}{2} \cdot \left(V(t)^T \cdot \mu(\xi(t)) \cdot V(t) + 2 \cdot v(t) \cdot U(t)^T \cdot \eta(\xi(t)) \cdot V(t) + v(t)^2 \cdot U(t)^T \cdot \sigma(\xi(t)) \cdot U(t) \right)$$

$$\underline{K}(t) := Km(t) + Kml(t) + Kw(t)$$

