На правах рукописи

Музалевский Алексей Витальевич

Апостериорные оценки точности приближенных решений некоторых задач механики и математической физики

05.13.18 – Математическое моделирование, численные методы и комплексы программ

АВТОРЕФЕРАТ
диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Санкт-Петербург – 2017

Работа выполнена в Федеральном государственном автономном образовательном учреждении высшего образования «Санкт-Петербургский политехнический университет Петра Великого» на кафедре «Прикладная математика» Института прикладной математики и механики.

Научный руководитель:	**РЕПИН Сергей Игоревич,** доктор физико-математических наук, профессор
Официальные оппоненты:	**ДЕМЬЯНОВИЧ Юрий Казимирович,** доктор физико-математических наук, профессор, заведующий кафедрой параллельных алгоритмов математико-механического факультета Федерального государственного бюджетного образовательного учреждение высшего образования «Санкт-Петербургский государственный университет»
	КОРЕНЬКОВ Андрей Николаевич, кандидат физико-математических наук, эксперт-программист в обществе с ограниченной ответственностью «Т-системс РУС»
Ведущая организация:	Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования «Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова»

Защита состоится 20 декабря 2017 года в 16-00 часов на заседании диссертационного совета Д 212.229.13 на базе ФГАОУ ВО «Санкт-Петербургский политехнический университет Петра Великого» по адресу: 195251, Санкт-Петербург, Политехническая ул., д. 29, I корпус, аудитория 41.

С диссертацией можно ознакомиться в фундаментальной библиотеке *ФГАОУ ВО "СПбПУ"* и на сайте www.spbstu.ru

Автореферат разослан «____»____________ 20___ г.

Ученый секретарь
диссертационного совета Д 212.229.13,
доктор технических наук, профессор — Григорьев Борис Семёнович

Общая характеристика работы

Актуальность темы исследования. В настоящее время методы построения оценок погрешности приближенных решений являются одним из важнейших направлений вычислительной математики. Необходимость таких методов, которые обеспечивают контроль интегральной и локальной погрешности, диктуется потребностями современных адаптивных алгоритмов. Можно утверждать, что в последнее время сформировалось новое направление численного анализа, которое посвящено методам надежных вычислений. Первые результаты в этом направлении были получены еще в середине XX века. Большинство современных вычислительных алгоритмов используют последовательную адаптацию сеток. Другими словами, адаптивные численные методы основаны на концепции, при которой эффективные приближения должны быть построены с помощью последовательности конечномерных пространств $\{V_k\}$, $k = 1, 2, \ldots$ таких, что $\mathrm{dim} V_{k+1} > \mathrm{dim} V_k$. Как правило, структура этих пространств априори неизвестна. В рамках концепции адаптивного моделирования генерация V_{k+1} основана на информации, полученной в приближении $u_k \in V_k$. По этой причине необходимо иметь вычислимые величины, предоставляющие информацию об ошибке, например с точки зрения энергетической нормы. Такие величины называются индикаторы ошибок. То есть новая дискретизация строится на основе информации, полученной из решения на предыдущей сетке. По этой информации строится индикатор тех элементов сетки, как правило, конечноэлементной, которые необходимо улучшить. Важным шагом является построение гарантированной оценки погрешности, по которой строится требуемый индикатор. Необходимость построения такого индикатора для различных задач математической физики стимулировало развитие апостериорных методов оценивания.

Математическое и компьютерное моделирование позволяет выполнять виртуальные эксперименты без дорогостоящего оборудования, строить прогнозы, основанные на предположениях, исследовать прототипы промышленных объектов и т. д. Тем не менее, без должного понимания и оценки ошибок, генерируемых в процессе моделирования, существует риск неправильных выводов на основе ненадежных численных результатов. Процесс моделирования состоит из нескольких этапов. Во-первых, физическая (или биологическая, финансовая и т. д.) задача описывается с помощью математических соотношений, которые генерируют соответствующую математическую модель. Математическая модель всегда представляет "сокращенный" вариант физического объекта, так что погрешность математической модели всегда больше нуля. Во-вторых, непрерывные (дифференциальные) модели заменяются конечномерными (дискретными) задачами. При такой замене возникают ошибки аппроксимации. В-третьих, при нахождении решения полученных конечномерных задач, как правило, используется численное интегрирование, итерационные процедуры и операции, выполняемые с ограничениями на разрядность чисел, откуда появляются численные ошибки.

Типичная схема использования методов апостериорного оценивания требует вычисления индикаторов для последовательности сеток. Для определения желаемой точности расчетов, с одной стороны, может быть использована апостериорная оценка ошибки численного решения как оценка энергетической нормы ошибки решения эллиптической задачи. Но с другой стороны, в практических вычислениях возникает ошибка из-за неточности задания данных задачи. Например, в практических задачах линейной теории упругости материальные константы всегда заданы с погрешностью. Существуют работы (см., например, [10, 14]), оценивающие ошибки численных решений из-за неточности задания данных задачи. Очевидно, что достижимая точность расчетов на практике не может превосходить ошибки, возникающей из-за неточности задания данных задач.

Важность апостериорной оценки для какой-либо краевой задачи состоит в построении как индикатора для адаптации сетки, так и оценки энергетической нормы ошибки решения. Другими словами, для краевой задачи с некоторыми заданными условиями $\mathbb{D}$ (коэффициентами, областью, граничными условиями) можно оценить разность между точным решением u и некоторой произвольной функцией v из соответствующего энергетического пространства V следующим образом:

$$\mathcal{M}_{\ominus}(v, \mathbb{D}) \leq ||u - v||_V \leq \mathcal{M}_{\oplus}(v, \mathbb{D}), \quad \forall v \in V.$$

Эта оценка является двусторонней апостериорной оценкой, которую можно использовать для определения желаемой точности расчетов произвольной конформной аппроксимации v решения данной краевой задачи. Кроме того, так как $||u-v||_V^2$, как правило, представляет собой некоторый интеграл, то разбиение области краевой задачи на подобласти некоторой сеткой и соответствующие величины апостериорной оценки ошибки на этих подобластях могут служить индикаторами для адаптации сетки.

В конце 1990-х годов С. И. Репиным [6, 12, 15] были получены новые апостериорные оценки энергетической нормы отклонения от точного решения. Эти оценки получены из общих методов функционального анализа и теории двойственности для вариационного исчисления, поэтому их можно называть апостериорными оценками функционального типа.

Диссертационная работа посвящена исследованию некоторых функциональных апостериорных оценок погрешности.

Степень разработанности темы исследования. Теория апостериорного контроля ошибок активно развивается с конца 70-х годов XX века. С 80-х годов XX века начинают развиваться методы и адаптивные алгоритмы, основанные на индикаторах, построенных по апостериорным оценкам локального распределения погрешности. Среди первых работ можно выделить работы I. Babuska и W. C. Rheinboldt, O. C. Zienkiewicz и J. Z. Zhu, R. Verfurth и других [8, 9, 16, 17].

В конце 1990-х годов С. И. Репиным [6, 12, 15] были получены новые апостериорные оценки энергетической нормы отклонения от точного решения. Диссертационная работа посвящена исследованию функциональных апостериорных оценок погрешности. В первой главе диссертационной работы разработаны и исследуются апостериорные оценки функционального типа для задач линейной теории термоупругости. Во второй главе исследуются апостериорные оценки функционального типа для задач, связанных с уравнением Максвелла. Эта глава продолжает исследования С. И. Репина, изложенные в [13]. В третьей главе разработан новый метод решения с гарантированной точностью для эллиптических задач во внешних областях. Этот метод использует как основу апостериорную оценку функционального типа для эллиптических задач во внешних областях, изложенную в работе D. Pauly и С. И. Репина [11].

Цели и задачи диссертационной работы. Целью данной диссертационной работы является разработка и исследование апостериорных оценок функционального типа для задач линейной теории термоупругости, задач, связанных с уравнением Максвелла и эллиптических краевых задач во внешних областях. А также разработка новых эффективных алгоритмов и комплексов программ на основе этих апостериорных оценок.

Для достижения поставленных целей были решены следующие задачи:

1. Получить апостериорные оценки функционального типа для задач линейной теории термоупругости и исследовать их применение.

2. Получить апостериорные оценки функционального типа для задач, связанных с уравнением Максвелла (eddy-current problem) и исследовать их возможности для эффективного контроля точности различных аппроксимаций.

3. Разработать метод позволяющий получать приближенные решения с гарантированной точностью для эллиптических задач во внешних областях.

4. Разработать программные комплексы для вычисления апостериорных оценок функционального типа для соответствующих задач.

Научная новизна. В работе впервые получены функциональные мажоранты погрешности для задач линейной термоупругости и с помощью численных экспериментов доказана их эффективность. Для задач, связанных с уравнением Максвелла (eddy-current problem), с помощью численных экспериментов впервые доказана эффективность функциональных апостериорных оценок ошибок. Предложен новый метод решения с гарантированной точностью для эллиптических задач во внешних областях, который построен на основе функциональной апостериорной оценки ошибки приближенного решения.

Теоретическая и практическая значимость. Результаты, изложенные в диссертации, могут быть использованы для контроля точности практически важных краевых задач. Полученные результаты могут быть использованы в научных исследованиях, а также для оценки результатов численных экспериментов в пакетах прикладных программ, использующих МКЭ.

Методология и методы исследования. Исследование апостериорных оценок ошибок приближенных решений основано на методах функционального анализа, математической физики и теории двойственности вариационного исчисления. При аппроксимации методом конечных элементов используются хорошо изученные кусочно-линейные и кусочно-квадратичные аппроксимации. Расчетные процедуры реализованы с привлечением пакетов Matlab и Comsol. Эффективность новых методов контроля погрешности производимых вычислений и соответствующих программных комплексов оценивалась на широком классе задач, включая и те, где точные решения могут быть получены аналитическими методами.

Положения, выносимые на защиту:

1. Получение апостериорных оценок функционального типа для задач линейной теории термоупругости и исследование их применений.

2. Получение апостериорных оценок функционального типа для задач, связанных с уравнением Максвелла (eddy-current problem) и исследование их возможностей для эффективного контроля точности различных аппроксимаций.

3. Разработка метода, позволяющего получать приближенные решения с гарантированной точностью для эллиптических задач во внешних областях.

4. Реализация эффективных численных методов оценок погрешности приближенных решений (для всех вышеперечисленных задач) в виде комплексов проблемно-ориентированных программ и проведение соответствующих вычислительных экспериментов.

Степень достоверности и апробация результатов. Основные результаты диссертации докладывались на следующих конференциях: Пятый всероссийской семинар "Сеточные методы для краевых задач и приложения", Казань, 2004; Шестой всероссийской семинар "Сеточные методы для краевых задач и приложения", Казань, 2005; "2nd Workshop on Advanced Computer Simulation Methods for Junior Scientists", Санкт-Петербург, 2009; "4th Workshop on Advanced Numerical Methods for Partial Differential Equation Analysis", Санкт-Петербург, 2011.

Представленные результаты получены при частичной поддержке грантов РФФИ № 08-01-00655-а, № 11-01-00531-а и № 14-01-00162-а.

Публикации. Материалы диссертации опубликованы в 5 печатных работах, из них 4 статьи в рецензируемых журналах [2–5] и 1 статья в сборниках трудов конференций [1].

Личный вклад автора. Содержание диссертации и основные положения, выносимые на защиту, отражают персональный вклад автора в опубликованные работы. Подготовка к публикации полученных результатов проводилась совместно с соавторами, причем вклад диссертанта был определяющим. Все представленные в диссертации результаты получены лично автором.

Структура и объем диссертации. Диссертация состоит из введения, 3 глав, заключения и библиографии. Общий объем диссертации 112 страниц, из них 110 страниц текста, включая 61 рисунок. Библиография содержит 33 наименования на 3 страницах.

Содержание работы

Во Введении обоснована актуальность диссертационной работы, сформулирована цель и аргументирована научная новизна исследований, показана практическая значимость полученных результатов, представлены выносимые на защиту научные положения.

В первой главе разработаны и исследованы апостериорные оценки функционального типа для задач линейной теории термоупругости. В *первом параграфе* изложены известные (см., например, [14]) апостериорные оценки функционального типа для эллиптических задач.

Рассматривается задача

$$\begin{aligned} \operatorname{div} A\nabla u + f &= 0 \quad \text{в } \Omega, && (1)\\ u &= u_0 \quad \text{на } \partial_1\Omega, && (2)\\ \nu\cdot A\nabla u &= F \quad \text{на } \partial_2\Omega, && (3) \end{aligned}$$

где $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ – ограниченная связная область с непрерывной по Липшицу границей $\partial\Omega$, состоящей из двух непересекающихся частей $\partial_1\Omega$ и $\partial_2\Omega$. Предполагается непустая относительная внутренность $\partial_1\Omega$, $u_0 \in \mathsf{H}^1(\Omega)$, и матрица A симметрична и удовлетворяет соотношению

$$C_1^2|\xi|^2 \le A\xi\cdot\xi \le C_2^2|\xi|^2, \quad \forall\xi \in \mathbb{R}^n. \tag{4}$$

Также, предполагаем $f \in \mathsf{L}^2(\Omega)$ и $F \in \mathsf{L}^2(\partial_2\Omega)$. Пусть

$$V_0 + u_0 = \{u = u_0 + w \mid w \in V_0\},$$

где

$$V_0 = \left\{ v \in \mathsf{H}^1(\Omega) \mid v = 0 \text{ на } \partial_1\Omega \right\}.$$

Обобщенное решение $u \in V_0 + u_0$ задачи (1)–(3) удовлетворяет интегральному тождеству

$$\int\limits_{\Omega} A\nabla u \cdot \nabla w \, dx = \int\limits_{\Omega} fw \, dx + \int\limits_{\partial_2\Omega} Fw \, d\Gamma, \quad \forall w \in V_0. \tag{5}$$

Апостериорная оценка сверху ошибки в энергетической норме $\|\!|\cdot|\!\|$ для этой задачи имеет вид

$$\|\!|\nabla(u-v)|\!\| \leq \|\!|y - A\nabla v|\!\|_* + C\left(||f + \mathrm{div} y||^2 + ||F - y\cdot\nu||^2_{\partial_2\Omega}\right)^{1/2}. \tag{6}$$

Во *втором параграфе* приводится вывод аналогичных апостериорных оценок функционального типа для задачи линейной теории упругости (см., например, [14]). В *третьем параграфе* обсуждается вывод апостериорных оценок функционального типа для задач линейной теории термоупругости.

Классическая постановка краевой задачи теории термоупругости состоит в определении тензор-функции σ и вектор-функции u, удовлетворяющей следующей системе уравнений:

$$\mathrm{div}\sigma + f + f_T = 0 \quad \text{в} \quad \Omega, \tag{7}$$

$$\sigma = \mathbb{L}\varepsilon(u) \quad \text{в} \quad \Omega, \tag{8}$$

$$\varepsilon(u) = \frac{1}{2}(\nabla u + (\nabla u)^T), \tag{9}$$

$$u = u_0 \quad \text{на} \quad \partial_1\Omega, \tag{10}$$

$$\sigma\nu = F + F_T \quad \text{на} \quad \partial_2\Omega, \tag{11}$$

где $\Omega \in \mathbb{R}^n$ – ограниченная связная область с непрерывной по Липшицу границей $\partial\Omega$, состоящей из двух непересекающихся частей $\partial_1\Omega$ и $\partial_2\Omega$, причем $\mathrm{meas}_{n-1}\{\partial_1\Omega\} > 0$. Предполагается, что

$$f \in \mathsf{L}^2(\Omega, \mathbb{R}^n), \quad F \in \mathsf{L}^2(\partial_2\Omega, \mathbb{R}^n), \quad u_0 \in \mathsf{H}^1(\Omega, \mathbb{R}^n)$$

и $\mathbb{L}$ – тензор упругих модулей, который должен удовлетворять условиям

$$c_1|\kappa|^2 \leq \mathbb{L}\kappa : \kappa \leq c_2|\kappa|^2 \quad \forall \kappa \in \mathbb{M}_s^{n\times n},$$

$$\mathbb{L}_{ijkm} = \mathbb{L}_{jikm} = \mathbb{L}_{kmij}, \quad i,j,k,m = 1,\ldots,n,$$

$$\mathbb{L}_{ijkm} \in \mathsf{L}^\infty(\Omega).$$

Кроме того, f_T, F_T – функции, связанные с тензором температурных деформаций

$$\varepsilon_T = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & 0 & 0 \\ 0 & \alpha_{22} & 0 \\ 0 & 0 & \alpha_{33} \end{pmatrix} (T - T_0),$$

соотношениями (см., например, [7])

$$f_T = -\mathrm{div}(\mathbb{L}\varepsilon_T),$$

$$F_T = \mathbb{L}\varepsilon_T \nu.$$

Здесь $\alpha_{11}, \alpha_{22}, \alpha_{33}$ – коэффициенты температурного расширения по соответствующим координатным осям, T_0 – отсчетная температура (температура, при которой отсутствуют температурные напряжения), а скалярная функция T является решением задачи теплопроводности

$$-\Delta T = q, \tag{12}$$

с граничными условиями

$$T = \theta_0 \quad \text{на} \quad \partial_3\Omega, \qquad \frac{\partial T}{\partial \nu} = Q \quad \text{на} \quad \partial_4\Omega. \tag{13}$$

Здесь q – функция, определяющая тепловые источники в области Ω, $\partial_3\Omega$ и $\partial_4\Omega$ – две непересекающиеся части границы $\partial\Omega$, которые, вообще говоря, могут не совпадать с $\partial_1\Omega$ и $\partial_2\Omega$, θ_0 и Q – заданные функции, определяющие соответственно заданную температуру на границе $\partial_3\Omega$ и тепловой поток через $\partial_4\Omega$.

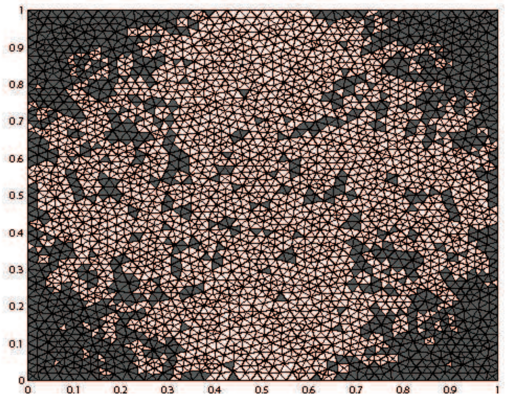
Далее приводится формулировка задачи термоупругости в виде двух связанных вариационных задач. Эта формулировка используется для вывода апостериорной оценки функционального типа для задачи термоупругости. Ниже приведена упрощенная мажоранта для $\partial\Omega_2 = \emptyset$ и $\partial\Omega_4 = \emptyset$

$$\|\varepsilon(v-u)\|^2 \leq \mathcal{M}_{\oplus}^{(4)}(v,\theta,\tau,y,\beta_1,\beta_2,\beta_3) =$$
$$= (1+\beta_1)\left(\varepsilon(v) - \mathbb{L}^{-1}\tau, \mathbb{L}\varepsilon(v) - \tau\right) +$$
$$+\left(1+\frac{1}{\beta_1}\right) C_{1\Omega}^2 \Bigg[(1+\beta_2)||\mathrm{div}\tau + f + f_\theta||^2 +$$
$$+C_{3\Omega}^2\left(1+\frac{1}{\beta_2}\right)\left[(1+\beta_3)||\nabla\theta - y||^2 + \left(1+\frac{1}{\beta_3}\right) C_{2\Omega}^2\left(||\mathrm{div}y + q||^2\right)\right]\Bigg].$$

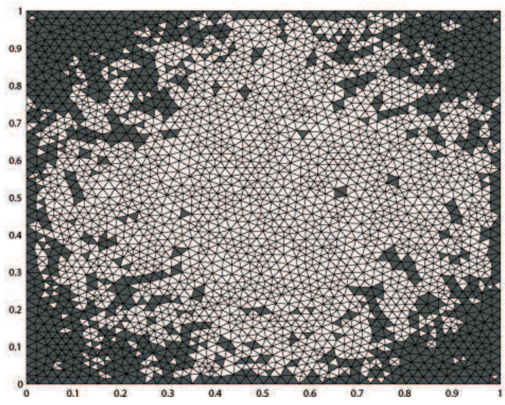
В *четвертом параграфе* приводятся апостериорные оценки функционального типа для важного частного случая – изотропной однородной задачи линейной термоупругости. В *пятом параграфе* рассматриваются результаты, полученные демонстрационным пакетом прикладных программ для проведения численных экспериментов на примере апостериорных оценок функционального типа для эллиптической задачи. В *шестом параграфе* проводится анализ результатов численных экспериментов для задач линейной теории упругости.

В *седьмом параграфе* приведены результаты подробных вычислительных экспериментов для задачи линейной термоупругости. Заметим, что типичный адаптивный алгоритм решает задачу несколько раз на последовательно улучшающихся сетках. Для таких алгоритмов апостериорная оценка ошибки используется для отметки элементов сетки, где ошибка относительно велика. В диссертации используется так называемый 30% "bulk"критерий, где отмечаются 30% элементов с наибольшим вкладом в ошибку. Пример отметки элементов сетки с помощью мажоранты и точной ошибки приведен на рис. 1.

Представляет интерес информация, насколько хорошо предлагаемая апостериорная оценка отмечает элементы сетки по сравнению с идеальным индикатором (построенным по точной ошибке). Обозначим N_{em} количество несовпадений в маркировании двумя различными индикаторами для заданной сетки. Как правило, один индикатор строится по точной ошибке (идеальный индикатор), а другой по мажоранте. Тогда, количественной характеристикой точности маркирования мажорантой служит величина $\mathbb{M} = \frac{N_{em}}{N_{elm}}$. Эта величина, а также общая точная ошибка и мажоранта для вышеизложенного тестового примера приведены в таблице 1.



а)



б)

Рис. 1. Индикаторы, построенные по точной ошибке (а) и мажоранте (б) для $N_{elm} = 5458$

N_{elm}	$\frac{\|\varepsilon(v-u)\|^2}{\|\varepsilon(v)\|^2}$,%	$\frac{M_\oplus}{\|\varepsilon(v)\|^2}$,%	$\mathbb{M}$,%
84	4.0746	19.2269	13.95
312	1.1389	5.8413	12.82
1372	0.2575	1.1714	13.99
5458	0.0649	0.2962	14.91

Таблица 1. Точная ошибка и мажоранта в зависимости от числа разбиений области

Результаты первой главы опубликованы в работах [2, 5], где автору принадлежит реализация численных экспериментов для задач линейной упругости и термоупругости, а также, совместно с С. И. Репиным, анализ и вывод апостериорных оценок для задачи линейной термоупругости.

Во второй главе разработаны и исследованы апостериорные оценки функционального типа для задач, связанных с уравнениями Максвелла.

В *первом параграфе* подробно рассматривается постановка задачи, которая получается из системы уравнений Максвелла. Обобщенная постановка задачи, связанной с уравнением Максвелла, может быть записана следующим образом: найти

$$u \in V = \left\{ v \in \mathsf{H}(\Omega, \mathbf{rot}) \;\middle|\; v \times \nu = 0 \text{ на } \partial_1\Omega \right\}$$

такое, что

$$\int\limits_\Omega \mu^{-1}\mathbf{rot}u \cdot \mathbf{rot}w + \kappa u \cdot w \, dx = \int\limits_\Omega j \cdot w \, dx, \quad \forall w \in V, \tag{14}$$

где $\mathsf{H}(\Omega, \mathbf{rot})$ обозначает Евклидово пространство с нормой

$$||u||^2_{\mathsf{H}(\Omega,\mathbf{rot})} = ||u||^2 + ||\mathbf{rot}u||^2.$$

Во *втором параграфе* приведена апостериорная оценка (см., например, [14]) для задач типа (14).

$$|||u - v||| \le ||\mu^{1/2}(y - \mu^{-1}\mathbf{rot}v)|| + C(\Omega, \mu)||j - \mathbf{rot}y||, \tag{15}$$

где константу $C(\Omega, \mu)$ находим из неравенства

$$||v|| \le C(\Omega, \mu)|||v|||, \quad \forall v \in S(\Omega, \mathbb{R}^n), \tag{16}$$

$$S(\Omega, \mathbb{R}^n) = \left\{ v \in \mathsf{L}^2(\Omega, \mathbb{R}^n) \;\middle|\; \mathrm{div}v \in \mathsf{L}^2(\Omega), \quad \int\limits_\Omega v \cdot \nabla w \, dx = 0, \quad \forall w \in \overset{\circ}{\mathsf{H}}{}^1(\Omega) \right\}.$$

В *третьем параграфе* изложены исследования другой формы апостериорной оценки функционального типа. А именно

$$|||u - v|||^2 \le 2R_1(\lambda, v, y)||\mathrm{div}v|| + R_2^2(\lambda, v, y) + R_3^2(\lambda, v, y), \tag{17}$$

где R_1, R_2 и R_3 определены как

$$R_1(\lambda, v, y) = C_F||(1 - \lambda)(j - \mathbf{rot}y - \kappa v)||, \tag{18}$$

$$R_2(\lambda, v, y) = C(\Omega, \mu)||(1 - \lambda)(j - \mathbf{rot}y - \kappa v)|| + ||\mu^{1/2}(y - \mu^{-1}\mathbf{rot}v)||, \tag{19}$$

$$R_3(\lambda, v, y) = ||\lambda \kappa^{-1/2}(j - \mathbf{rot}y - \kappa v)||. \tag{20}$$

В *четвертом параграфе* для вышеизложенных апостериорных оценок функционального типа были проведены подробные численные эксперименты. Были исследованы эффективность и проведен анализ использования этих апостериорных оценок как индикаторов для методов адаптации сеток конечных элементов.

Один из результатов приведен на рис. 2. Здесь построены зависимости от параметра κ индексов эффективности $I^{(0)}$, $I^{(1)}$ и $I^{(\lambda)}$ соответствующих $M^{(0)}$, $M^{(1)}$ и $M^{(\lambda)}$.

Результаты второй главы опубликованы в работе [3], где автору принадлежит реализация численных экспериментов, а также, совместно с соавтором I. Anjam, исследование эффективности апостериорных оценок.

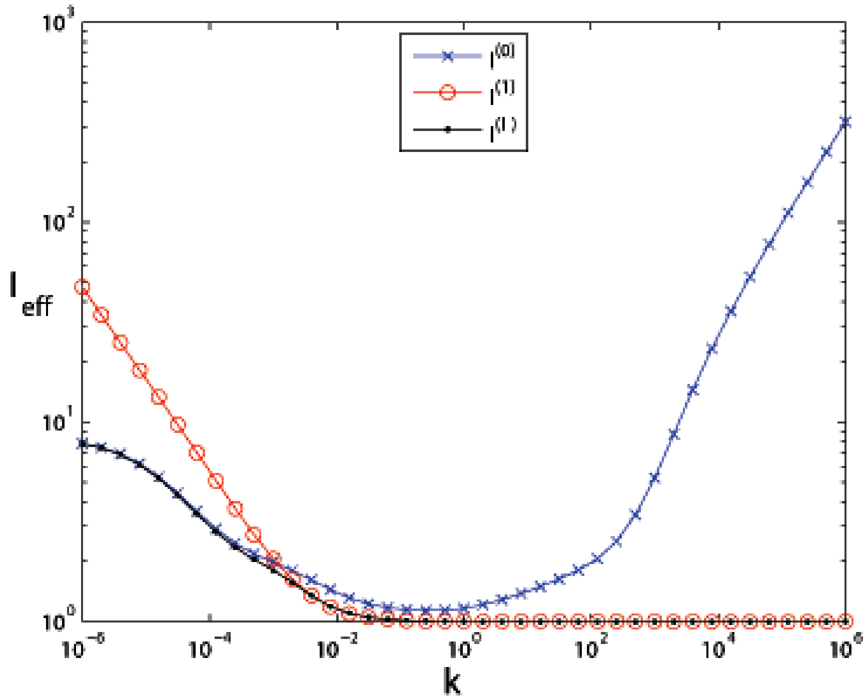


Рис. 2. Индексы эффективности для различных значений параметра κ

В третьей главе разработаны и исследованы апостериорные оценки функционального типа для эллиптических задач в некомпактных областях. В *первом параграфе* излагается постановка эллиптической задачи для некомпактной области. Рассматривается эллиптическая задача

$$-\mathrm{div}(A\nabla u) = f \quad \text{в} \quad \Omega, \tag{21}$$

$$u = u_0 \quad \text{на} \quad \partial\Omega \tag{22}$$

в некомпактной области $\Omega = \mathbb{R}^3 \setminus \overline{\omega}$, где ω – компактная область с границей $\partial\omega$, непрерывной по Липшицу. Предполагается, что A – симметричная матрица, такая что

$$\exists C_A > 0 \quad C_A|\xi|^2 \leq A(x)\xi\cdot\xi \quad \forall \xi \in \mathbb{R}^3 \quad \forall x \in \Omega. \tag{23}$$

Во *втором параграфе* приведена апостериорная оценка

$$\|\nabla(u-v)\| \leq \frac{2}{\sqrt{C_A}}||\mathrm{div}y + f||_{\mathsf{L}^2_1(\Omega)} + \|y - A\nabla v\|_*. \tag{24}$$

Эта оценка верна для любого $y \in D(\Omega)$ и $\forall v \in \overset{\circ}{\mathsf{H}}{}^1_{-1}(\Omega) + u_0$ (первоначально она была выведена в [11]).

В *третьем параграфе* на основе этой апостериорной оценки был предложен метод решения эллиптической задачи в некомпактной области с гаранти-

N_t	$\frac{M_\oplus}{\|\|\nabla v\|\|^2}, \%$	$\frac{\|\|\nabla(u-v)\|\|^2}{\|\|\nabla v\|\|^2}, \%$	$\frac{M_\ominus}{\|\|\nabla v\|\|^2}, \%$	$\mathbb{M}, \%$
2214	7.19	5.68	5.43	6.14
5264	2.82	2.55	2.51	4.52
11506	1.80	1.68	1.65	2.54

Таблица 2. Апостериорные оценки ошибки для различного числа разбиений области (R=10).

рованной точностью. Предлагается разбить Ω на две непересекающиеся подобласти $\overline{\Omega} = \overline{\Omega}_i \cup \overline{\Omega}_e$, где Ω_i – компактная область, а $\Omega_e = \mathbb{R}^3 \setminus \overline{B(0,R)}$, где $B(0,R)$ – шар с центром в начале координат.

Приходим к задаче,

$$J(u,C) = \inf_{v \in V, C \in \mathbb{R}} J(v,C), \tag{25}$$

где C – неизвестная константа и

$$V = \{v \in \mathsf{H}^1(\Omega_i) \mid v = u_0 \text{ на } \partial\Omega, \quad v = \frac{C}{R} \text{ на } \partial\Omega_e\}.$$

Эта задача допускает нахождение решения в виде итерационного процесса, причем, используя апостериорную оценку (24), получаем метод решения эллиптической задачи в некомпактной области с гарантированной точностью.

В *четвертом параграфе* были проведены подробные численные эксперименты. Были исследованы эффективность и проведен анализ использования вышеизложенной апостериорной оценки как индикатора для метода адаптации сеток конечных элементов. Для внешней задачи для сферы единичного радиуса с граничным условием Дирихле $u = 1$ в таблице 2 приведены результаты численных экспериментов.

Результаты третьей главы опубликованы в работе [4], где автору принадлежит метод решения эллиптической задачи в некомпактной области с гарантированной точностью, реализация численных экспериментов и исследование эффективности апостериорной оценки.

Заключение. Проведенные исследования показывают большую гибкость апостериорных оценок функционального типа, что позволяет их использование для различных задач, включая, в частности, составные задачи (например задачи термоупругости). Мажоранты и миноранты позволяют эффективно контролировать точность приближенных решений, построенных при помощи самых различных численных методов (в том числе МКЭ, DG и т. д.).

Данные методы могут быть успешно применены к задачам, возникающим в теории поля, к которым относятся уравнения Максвелла. Диссертация содержит исследования простейших форм таких задач, но на основании полученных результатов есть уверенность, что методы могут быть перенесены на более широкий класс задач.

Функциональный подход к получению контролируемых оценок отклонения от точного решения может быть успешно применен к внешним краевым задачам. Проведенные исследования показывают, что можно получить эффективные оценки погрешности в соответсвующей энергетической (глобальной) норме и получить достоверное распределение локальных ошибок.

По результатам проведенных исследований для ряда задач можно заключить, что исследуемые апостериорные оценки функционального типа позволяют эффективно оценить энергетическую норму погрешности приближенных решений, полученных методом конечных элементов, а также построить адаптивные расчетные сетки достаточно высокого качества. Методы, разработанные в диссертации, могут быть использованы вместе с различными пакетами прикладных программ, использующих современные методы аппроксимаций в частных производных.

Список публикаций

1. Музалевский А. В., Репин С. И. Об оценках погрешности приближенных решений в задачах линейной теории термоупругости // Материалы Пятого всероссийского семинара "Сеточные методы для краевых задач и приложения". Казань: 2004.– с. 179–183.

2. Музалевский А. В., Репин С. И. Об оценках погрешности приближенных решений в задачах линейной теории термоупругости // Изв. вузов. Матем. 2005.– Т. 1.– с. 64–72.

3. Anjam I., Mali O., Muzalevsky A., Neittaanmäki P., Repin S. A posteriori er-

ror estimates for a Maxwell type problem // Russian J. Numer. Anal. Math. Modelling. 2009.– Vol. 24.– p. 395–408.

4. Mali O., Muzalevsky A., Pauly D. Conforming and non-conforming functional a posteriori error estimates for elliptic boundary value problems in exterior domains: theory and numerical tests // Russian J. Numer. Anal. Math. Modelling. 2013.– Vol. 28.– p. 577–596.

5. Muzalevsky A., Repin S. On two-sided error estimates for approximate solutions of problems in the linear theory of elasticity // Russ. J. Numer. Anal. Math. Modelling. 2003.– Vol. 18.– p. 65–85.

Цитированная литература

6. Репин С. И. Двусторонние оценки отклонения от точного решения для равномерно эллиптических уравнений // Труды С.П. матем. общества. 2001.– Т. 9.– с. 148–179.

7. Тимошенко С. П., Гудьер Д. Теория упругости. М.: Наука.– 1979.– С. 560.

8. Ainsworth M., Oden J. T. A posteriori error estimation in finite element analysis. John Wiley & Sons, Inc.– 2000.– P. 240.

9. Babuška I., Rheinbold W. C. Error estimates for adaptive finite element computations // SIAM J. Numer. Anal. 1978.– Vol. 15.– p. 736–754.

10. Mali O., Repin S. Estimates of the indeterminacy set for elliptic boundary-value problems with uncertain data // Journal of Mathematical Sciences. 2008.– Vol. 150.– p. 1869–1874.

11. Pauly D., Repin S. Functional a posteriori error estimates for elliptic problems in exterior domains // J. of Math. Sci. 2009.– Vol. 3.– p. 393–406.

12. Repin S. A posteriori error estimation for variational problems with uniformly convex functionals // Math. Comput. 2000.– Vol. 69.– p. 481–500.

13. Repin S. Functional a posteriori estimates for Maxwell's equation // Journal of Mathematical Sciences. 2007.– Vol. 142.– p. 1821–1827.

14. Repin S. A posteriori estimates for partial differential equations. Berlin: Walter de Gruyter.– 2008.– P. 327.

15. Repin S. I. A posteriori error estimation for nonlinear variational problems by duality theory // Зап. научн. сем. ПОМИ. 1997.– Т. 243.– с. 201—214.

16. Verfürth R. A review of a posteriori error estimation and adaptive mesh-refinement techniques.– Wiley-Teubner.– 1996.– P. 134.

17. Zienkeiewicz O. C., Zhu J. A simple error estimator and adaptive procedure for practical engineering analysis // Internat. J. Numer. Methods Engrg.– 1987.– Vol. 24.– p. 337–357.