

На правах рукописи



**Елисеев Артем Андреевич**

**Математическое моделирование взаимодействия  
жидкости и твердого тела при сборке  
деформируемых конструкций**

1.2.2. Математическое моделирование, численные методы и комплексы программ

**АВТОРЕФЕРАТ**

диссертации на соискание ученой степени  
кандидата физико-математических наук

Санкт – Петербург  
2022

Работа выполнена в федеральном государственном автономном образовательном учреждении высшего образования «Санкт-Петербургский политехнический университет Петра Великого».

Научный руководитель: **Лупуляк Сергей Валерьевич**,  
кандидат физико-математических наук, доцент

Официальные оппоненты: **Задорожная Елена Анатольевна**,  
доктор технических наук, профессор, профессор кафедры «Автомобильный транспорт» федерального государственного автономного образовательного учреждения высшего образования «Южно-Уральский государственный университет (национальный исследовательский университет)» (г. Челябинск)

**Попов Игорь Викторович**,  
кандидат физико-математических наук, доцент, старший научный сотрудник федерального государственного учреждения «Федеральный исследовательский центр Институт прикладной математики им. М.В. Келдыша Российской академии наук» (г. Москва)

Ведущая организация: Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования «Московский авиационный институт (национальный исследовательский университет)»

Защита состоится «21» декабря 2022 года в 16:00 на заседании диссертационного совета У.1.2.2.03 федерального государственного автономного образовательного учреждения высшего образования «Санкт-Петербургский политехнический университет Петра Великого» (195251, г. Санкт-Петербург, Политехническая ул., 29, корпус 2, аудитория 265).

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке и на сайте <http://www.spbstu.ru> федерального государственного автономного образовательного учреждения высшего образования «Санкт-Петербургский политехнический университет Петра Великого».

Автореферат разослан «\_\_» ноября 2022 года.

Ученый секретарь  
диссертационного совета У.1.2.2.03,  
кандидат технических наук



Зайцева  
Надежда Игоревна

## ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

### **Актуальность и степень разработанности темы исследования**

В современном машиностроении одним из этапов производства является сборка готового изделия из предварительно изготовленных деталей. Данный этап имеет большое значение, поскольку качество сборки напрямую влияет на срок эксплуатации изделия. В ряде отраслей требования к качеству сборки являются особенно строгими – например, в транспортном машиностроении (в первую очередь, в авиастроении) строгость критериев качества позволяет гарантировать безопасность пассажиров в ходе перевозки. Строгость требований делает процесс сборки крайне трудоемким, поэтому сборочными инженерами предпринимаются значительные усилия для оптимизации технологий сборки с учетом существующих стандартов качества.

В настоящее время для анализа сборочных технологий инженеры все чаще пользуются инструментами компьютерного моделирования. Такой подход позволяет принять решение о модификации технологии сборки, основываясь на результатах множества вычислительных экспериментов, натурное проведение которых требует непропорционально большого количества времени и ресурсов. В основе инструментов такого рода лежат специальные математические модели, адекватно описывающие сборочный процесс. Исследования в области построения соответствующих моделей активно ведутся на протяжении последних 25 лет, и эти исследования находят свое применение при решении практических задач.

При моделировании процесса сборки в отраслях транспортного машиностроения, особенно в авиа- и автомобилестроении, необходимо учитывать гибкость собираемых деталей, а также возникающее между ними контактное взаимодействие. В то же время, современные технологии сборки предполагают нанесение дополнительных составов между собираемыми деталями. Это может делаться с целью герметизации соединений (что характерно для авиастроения) или непосредственно для сборки деталей методом клеевого соединения. При нанесении такие составы обычно находятся в жидком состоянии, поэтому процесс механического взаимодействия между составом и собираемыми деталями, который наблюдается в ходе сборки, можно охарактеризовать как процесс «взаимодействия жидкости и твердого тела» (англ. fluid-structure interaction). Данный процесс оказывает существенное влияние как на промежуточный, так и на конечный результат сборки, поэтому он должен быть описан при построении математической модели сборочного процесса.

Одновременное описание контактного взаимодействия и взаимодействия жидкости и твердого тела, наблюдаемых при сборке деформируемых конструкций, является крайне сложной задачей. Частичное решение данной проблемы было предложено в 2019 г. в работе Мато и др.<sup>1</sup> В данной работе подход к решению контактной задачи, основанный на использовании вариационной постановки и переходе к решению задачи квадратичного программирования, дополняется специальной моделью течения жидкости. На основе данной модели формулируется поправка к решению контактной задачи, которая учитывает тот факт, что нанесенный между деталями слой жидкости в ходе сборки не удастся выдавить целиком.

Подобный подход может быть назван упрощенным, поскольку в нем течение жидкости не зависит от деформации конструкции и взаимодействие между жидкостью и конструкцией описывается лишь частично. Применение такого приближения представляется недостаточным при описании сборочных операций, в которых наблюдается значительное взаимное влияние деформации твердого тела и течения жидкости, как, например, при герметизации авиационных конструкций.

Также при описании взаимодействия между жидкостью и твердым телом необходимо использовать модели течения жидкости и деформации твердого тела, которые корректно описывают поведение каждого вещества при механическом нагружении. Для современных герметизирующих и клеевых составов характерно наличие как вязких, так и упругих эффектов при нагружении, и адекватное описание явления вязкоупругости является еще одной нерешенной задачей в области моделирования взаимодействия жидкости и твердого тела в ходе сборки.

Таким образом, исследования в области математического моделирования взаимодействия жидкости и твердого тела при сборке деформируемых конструкций, несомненно, являются актуальными. В настоящее время в данной области не существует подходов, которые позволяют адекватно описать взаимное влияние деформации конструкции и течения жидкости с учетом контактного взаимодействия между элементами конструкции, а также вязкоупругого поведения жидкости при нагружении. В то же время, данные подходы крайне востребованы сборочными инженерами (в первую очередь, инженерами, работающими в области авиастроения), поскольку их появление позволит заметно усовершенствовать существующие программные инструменты моделирования процесса сборки.

---

<sup>1</sup> Mato, P.C. Enhanced bondline thickness analysis for non-rigid airframe structural assemblies / P.C. Mato, P. Webb, Y. Xu, D. Graham, A. Portsmore, E. Preston // *Aerosp. Sci. Technol.* – 2019. – V.91. – P. 434–441.

### **Цели и задачи исследования**

Целью данного исследования является разработка нового подхода к анализу взаимодействия жидкости и твердого тела, наблюдаемого при сборке деформируемых конструкций. Разрабатываемый подход должен основываться на использовании методов математического моделирования и учитывать возможное контактное взаимодействие между собираемыми деталями, вязкоупругое течение жидкости, а также влияние деформации деталей и течения жидкости друг на друга.

Для достижения указанной цели в ходе исследования было необходимо поставить и решить следующие задачи:

1. Построить новую математическую модель взаимодействия жидкости и твердого тела, наблюдаемого в ходе сборки деформируемых конструкций. Модель должна учитывать взаимное влияние течения жидкости и деформации твердого тела в ходе сборки, а также описывать контактное взаимодействие между элементами конструкции и вязкоупругий характер течения жидкости.
2. Разработать эффективные численные методы решения задач, возникающих в результате применения построенной модели.
3. Реализовать разработанные методы в виде специального модуля в одном из существующих программных комплексов, предназначенных для моделирования процесса сборки деформируемых конструкций.
4. Подтвердить адекватность разработанной модели при помощи решения серии задач, описывающих взаимодействие жидкости и твердого тела в ходе сборочных операций.

### **Научная новизна исследования**

В ходе исследования была разработана принципиально новая математическая модель взаимодействия жидкости и твердого тела в ходе сборки деформируемых конструкций, которая в настоящее время не имеет аналогов. Также была разработана новая модель вязкоупругого течения жидкости в тонком слое на основе расширенного уравнения Рейнольдса, которая может применяться не только при моделировании сборочного процесса, но и при описании вязкоупругих течений, возникающих в других предметных областях. Кроме этого, в рамках исследования был предложен новый численный метод решения задач взаимодействия жидкости и твердого тела, наблюдаемого в ходе сборки.

## **Теоретическая и практическая значимость работы**

Разработанные в ходе исследования математические модели вносят существенный вклад в развитие научных направлений, связанных с математическим моделированием сборки деформируемых конструкций, а также с описанием течения вязкоупругих жидкостей. Представленная в работе методология также имеет большое практическое значение и может быть использована при анализе технологий сборочного процесса в отраслях транспортного машиностроения (в первую очередь, в авиастроении).

## **Методология и методы исследования**

Для построения математических моделей в работе использовался аппарат механики сплошных сред, механики контактного взаимодействия, динамики вязкоупругой жидкости. При построении численных методов использовались методы вычислительной механики. Программная реализация разработанных методов велась на языках Matlab (при прототипировании) и C++ (при реализации в программном комплексе).

## **Положения, выносимые на защиту:**

1. Разработана новая математическая модель взаимодействия жидкости и твердого тела в ходе сборки деформируемых конструкций. Модель учитывает взаимное влияние между течением жидкости и деформацией конструкции, а также описывает контактное взаимодействие между элементами конструкции и вязкоупругое течение жидкости.
2. Разработана новая математическая модель течения вязкоупругой жидкости. Основу модели составляет новое расширенное уравнение Рейнольдса, которое характеризует распределение давления для вязкоупругой верхней конвективной модели Максвелла в приближении тонкого слоя.
3. Разработан новый численный метод решения задач взаимодействия жидкости и твердого тела, возникающих при моделировании сборки деформируемых конструкций. Метод представляет собой модификацию метода Эйткена вычислительной механики, которая гарантирует выполнение условий непроникновения между деталями на каждой итерации и тем самым улучшает сходимость метода.
4. Разработанные модели и численный метод интегрированы в программный комплекс ASRP (Assembly Simulation of Riveting

Process), предназначенный для моделирования сборки авиационных конструкций.

### **Степень достоверности и апробация результатов**

Достоверность полученных в ходе исследования результатов подтверждается данными численных экспериментов, которые воспроизводят характерные физические эффекты, связанные с применением жидких составов в ходе сборки деформируемых конструкций, а именно, при герметизации соединений в авиастроении. Также при исследовании модели вязкоупругого течения жидкости было получено согласие численного решения тестовой задачи с известным аналитическим решением.

Результаты исследования докладывались на следующих международных и всероссийских конференциях: международная конференция «Математические методы в технике и технологиях» (г. Санкт-Петербург, 2019), 18-ый Международный конгресс по реологии (2020), международная конференция «Aerotech® Digital Summit» (2021), международная конференция «Математическое моделирование» (2021), международная конференция «ASME 2021 International Mechanical Engineering Congress and Exposition» (2021), 30-ый Симпозиум по реологии (г. Тверь, 2021), всероссийская конференция «Неделя Науки ФизМех» (г. Санкт-Петербург, 2022). Также результаты работы обсуждались на семинарах НИЛ виртуально-имитационного моделирования ФизМех СПбПУ (2018 – 2022), на совместных семинарах НИЛ виртуально-имитационного моделирования и авиастроительной компании Airbus (2020 – 2021), на совместном семинаре научной группы Технического университета Чалмерса (г. Гётеборг, Швеция) и НИЛ виртуально-имитационного моделирования (2021), совместном семинаре НИЛ виртуально-имитационного моделирования, Горной школы Парижа (MINES ParisTech) и Университета Глазго (2021).

Исследования проводились при поддержке грантов РФФИ (20-38-90023) и РНФ (22-19-00062).

### **Публикации**

Основные результаты работы изложены в 6 публикациях, из которых 3 в изданиях, входящих в перечень рецензируемых научных журналов и изданий ВАК (индексированы в БД Scopus).

### **Структура и объем работы**

Диссертация содержит введение, пять глав, заключение, список литературы, одно приложение, 37 рисунков и одну таблицу. Общий объем работы составляет 119 страниц. В работе использовано 86 литературных источников.

## ОСНОВНОЕ СОДЕРЖАНИЕ РАБОТЫ

**Во введении** обосновывается актуальность темы исследования, формулируются цели и задачи исследования, приводятся основные положения, выносимые на защиту.

**В первой главе** дается построение математической модели взаимодействия жидкости и твердого тела в ходе сборки деформируемых конструкций. На примере операций герметизации и клеевого соединения деталей отмечаются следующие характерные особенности процесса взаимодействия:

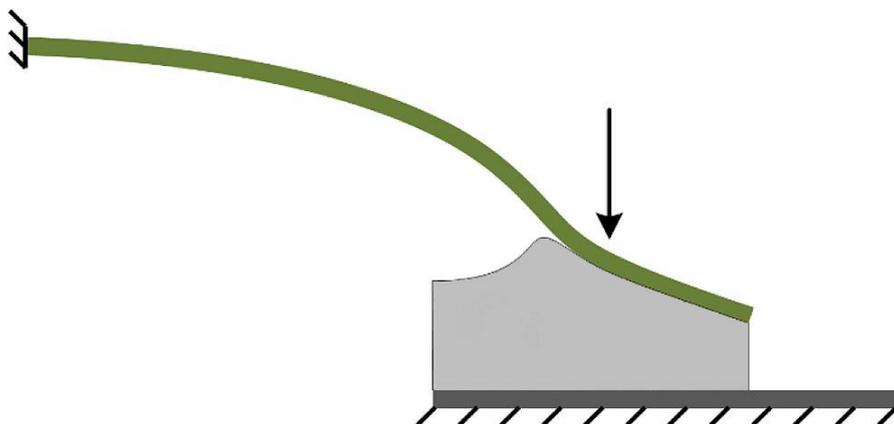


Рисунок 1 – Характерное расположение жидкости и собираемых деталей в ходе сборки (стрелкой указана сила действия крепежа)

1. Жидкие составы, используемые при сборочных операциях (герметики, клеи), обычно наносятся тонким слоем на одну из собираемых деталей.
2. Во время сборки жидкие составы заполняют лишь часть зазора между собираемыми деталями, поэтому возникающее течение имеет свободную поверхность (см. Рисунок 1).
3. В течение сборки в жидких составах происходит процесс отверждения, который приводит к значительному изменению физических свойств данных составов.

Далее дается описание моделей отдельных составляющих процесса взаимодействия – модели деформации собираемых деталей с учетом возможного контакта и предварительные соображения для модели вязкоупругого течения жидкости. Приводится построение верхней конвективной модели Максвелла, которая используется в дальнейшем для описания вязкоупругих эффектов. Выбор указанной модели основывается на двух обстоятельствах: во-первых, верхняя конвективная модель Максвелла согласуется с принципом материальной объективности, который является основным принципом в теории определяющих

уравнений. Кроме того, во многих случаях предсказания данной модели гораздо лучше согласуются с экспериментальными данными, чем предсказания других вязкоупругих моделей. Отмечается, что при описании течения жидких составов в процессе сборки имеет смысл использовать приближение тонкого слоя теории смазки. В рамках подобного приближения напряжения жидкости определяются распределением внутреннего давления. В свою очередь, данное распределение может быть найдено после решения уравнения, которое является аналогом уравнения Рейнольдса ньютоновской смазки для случая верхней конвективной модели Максвелла. Вопросы вывода подобного уравнения подробно обсуждаются в следующей главе.

Модель деформации собираемых деталей («модель деформации твердого тела») основывается на использовании вариационной постановки контактной задачи, характеризующей взаимное расположение деталей во время сборки. Подчеркивается, что при описании взаимодействия жидкости и твердого тела модель деформации деталей должна учитывать нестационарные эффекты. Пренебрегая величиной данных эффектов вне зоны стыка (области перекрытия деталей), после конечно-элементной дискретизации перемещения собираемых деталей находятся в результате решения следующей задачи квадратичного программирования:

$$\min_{AU^n \leq g} \frac{1}{2} (U^n)^T D U^n - (c^n)^T U^n, \quad (1)$$

где  $n$  – номер временного слоя,

$U^n$  – вектор нормальных перемещений узлов конечно-элементной модели, расположенных в зоне стыка,

$D$  – модифицированная матрица жесткости,

$c^n$  – модифицированный вектор внешних сил, учитывающий влияние давления жидкости,

$A$  – матрица, соответствующая парам контактных узлов,

$g$  – вектор начального зазора между деталями в зоне стыка.

Для дискретизации по времени в работе предлагается использовать обобщенный  $\alpha$ -метод, что определяет точный вид матрицы  $D$  и вектора  $c^n$  (конкретные выражения приводятся в тексте диссертации).

Затем в работе дается формулировка условий, которые характеризуют процессы, наблюдаемые на поверхности раздела собираемых деталей и жидких составов. Во-первых, наличие у жидких составов ярко выраженных вязких свойств позволяет утверждать, что на поверхности соприкосновения жидкость движется без проскальзывания по отношению к твердому телу. Кроме этого, на поверхности раздела должны быть равными внутренние напряжения,

возникающие на данной поверхности в каждой среде. Данные условия позволяют согласовать между собой решения, которые дают модели течения жидкости и деформации твердого тела.

Далее обосновывается выбор разделенного подхода для описания взаимного влияния деформации деталей и течения жидкости с учетом условий согласования на поверхности раздела сред. Отдельно отмечается, что в настоящем исследовании данное взаимное влияние рассматривается без упрощений впервые в контексте моделирования сборки деформируемых конструкций. В разделенном подходе для определения результата взаимодействия используются программные модули, которые по отдельности осуществляют решение уравнений течения жидкости и деформации твердого тела. Альтернативным вариантом является применение монолитного подхода, в котором уравнения движения сред решаются одновременно в рамках единого модуля. Отмечается, что разделенный подход является более удобным в реализации и позволяет использовать оптимизированные методы решения задачи квадратичного программирования (1) для определения деформации деталей, что является заметным преимуществом данного подхода по сравнению с монолитным.

В разделенном подходе решение задачи находится в рамках итерационного процесса, в ходе которого модули, определяющие состояние жидкости и твердого тела, обмениваются данными об изменении скоростей и напряжений на поверхности раздела сред, стремясь удовлетворить условиям согласования (см. Рисунок 2). В работе приводится простейший пример организации подобной процедуры. Отмечается, что данная процедура не позволяет достичь сходимости при решении практических задач и требует модификации. Вопросы построения соответствующих модификаций подробно обсуждаются в третьей главе диссертации.

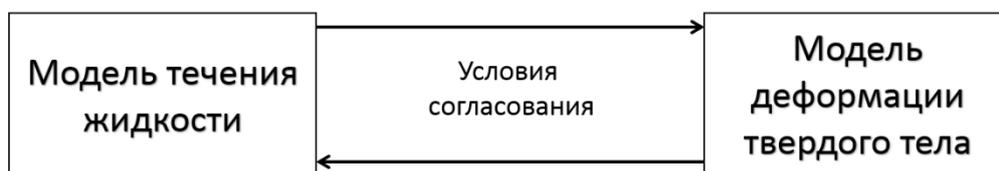


Рисунок 2 – Схема разделенного подхода

В конце главы приводятся соображения по моделированию эффектов, связанных с наличием свободной поверхности в течении жидкости. Дается описание псевдо-структурного метода, в котором положение свободной поверхности определяется с помощью дополнительной лагранжевой сетки, ребрам которой приписываются упругие свойства. Данная сетка рассматривается

как дополнительное тело в задаче квадратичного программирования (1). Это позволяет автоматически учесть условия непроникновения между жидкостью и деталями на уровне постановки данной задачи, что является главным достоинством псевдо-структурного метода.

**Во второй главе** подробно описывается модель вязкоупругого течения жидкости в тонком слое. Приводится обзор ранее разработанных моделей, в которых вязкоупругость рассматривается в рамках верхней конвективной модели Максвелла. Отмечается, что в настоящее время не существует подхода, в котором с одной стороны учитывалась бы полная структура верхней конвективной производной, а с другой – определялось точное решение задачи (в рамках приближения тонкого слоя) без дополнительных ограничений.

Для построения подобного подхода сначала выполняется безразмерный анализ определяющих уравнений верхней конвективной модели Максвелла. Подробно обсуждается выбор масштабов для напряжений жидкости, позволяющий сохранить структуру верхней конвективной производной тензора напряжений. В результате безразмерного анализа получается система уравнений тонкого слоя для верхней конвективной модели Максвелла. Далее из этой системы выводится новое расширенное уравнение Рейнольдса, описывающее распределение давления жидкости в тонком слое:

$$\frac{\partial}{\partial x'} \left( \frac{\partial p'}{\partial x'} H'^3 \right) + \frac{\partial}{\partial y'} \left( \frac{\partial p'}{\partial y'} H'^3 \right) = 6(u'_1 + u'_2) \frac{\partial H'}{\partial x'} + 6(v'_1 + v'_2) \frac{\partial H'}{\partial y'} + 12 \frac{\partial H'}{\partial t'} + \quad (2)$$

$$+ 12De \left( \frac{\partial}{\partial x'} \int_{H'_1}^{H'_2} (f'_x + g'_x) dz' + \frac{\partial}{\partial y'} \int_{H'_1}^{H'_2} (f'_y + g'_y) dz' \right),$$

где  $t'$  – время,

$x', y'$  – продольные координаты (штрихи означают, что все переменные в уравнении безразмерные),

$p'$  – давление жидкости,

$H'$  – толщина слоя жидкости,

функции  $H'_1, H'_2$  описывают положение граничных поверхностей слоя жидкости,

$u'_1, u'_2$  и  $v'_1, v'_2$  представляют собой значения безразмерных продольных скоростей на соответствующих граничных поверхностях,

комплексы  $f'_x, f'_y$  и  $g'_x, g'_y$  описывают упругие составляющие скорости жидкости,

$De$  – число Деборы.

Подчеркивается, что при моделировании взаимодействия жидкости и твердого тела величины  $H', H'_1, H'_2$  определяются в ходе решения задачи (1).

Конкретный вид комплексов  $f'_x, f'_y$  и  $g'_x, g'_y$  приводится в тексте диссертации, и отдельно отмечается, что в соответствующие выражения входят значения напряжений жидкости. Это означает, что расширенное уравнение Рейнольдса, в отличие от классического, должно решаться совместно с системой уравнений тонкого слоя. Далее в работе обсуждается соответствующая схема численного решения задач вязкоупругой смазки. В основе схемы лежит смешанный эйлерово-лагранжев подход, в котором уравнения реологического закона модели Максвелла решаются полу-лагранжевым методом, а расширенное уравнение Рейнольдса – методом конечных объемов. Приводится последовательность действий, соответствующих предлагаемой численной процедуре на фиксированном шаге по времени.

При моделировании вязкоупругих течений требуется сформулировать граничное условие для напряжений на входной части границы области течения. В задачах смазки этому условию трудно подобрать физическую интерпретацию, и в работе предлагается новый подход к определению напряжений на входной части границы. Данные напряжения вычисляются в ходе расчетной процедуры полу-лагранжева метода в результате экстраполяции на соответствующую часть границы. В таком подходе напряжения на входной части границы не являются предварительно заданными, а меняются в ходе расчета в зависимости от процессов, происходящих внутри смазочного слоя. Это обстоятельство является преимуществом предлагаемого подхода по сравнению с существующими.

Далее в работе обсуждаются результаты численного решения задачи о смазочном клине (см. Рисунок 3). Показано, что при малом числе Деборы решение расширенного уравнения Рейнольдса совпадает с известным аналитическим решением. Отмечается, что при увеличении числа Деборы решения существенно отличаются, при этом поведение численного решения поддается физическому объяснению, в отличие от аналитического.

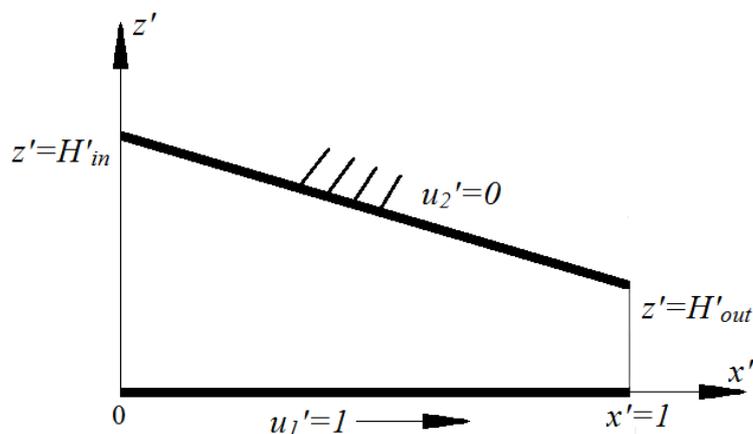


Рисунок 3 – Постановка задачи о смазочном клине

Затем на примере задачи о смазочном клине анализируется влияние выбора производной в модели Максвелла на характеристики течения. На Рисунке 4 приведены установившиеся значения несущей способности смазочного слоя, которая представляет собой интеграл от поля давлений. Результаты приведены для верхней конвективной производной (нижняя кривая), материальной производной (средняя кривая), частной производной (верхняя кривая), ньютоновской жидкости (крестиками). Теоретически обосновывается полученное совпадение результатов для модели Максвелла с частной производной и ньютоновской жидкости. Подчеркивается, что в работе впервые показано, как упрощение верхней конвективной производной до материальной или частной влияет на характеристики смазочного слоя.

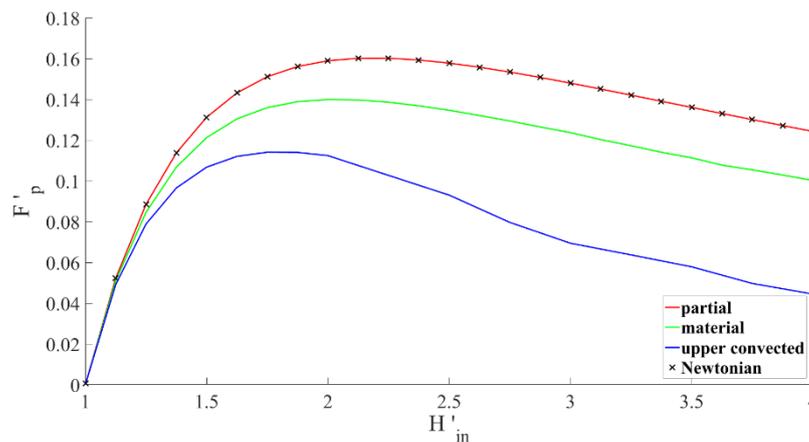


Рисунок 4 – Зависимость несущей способности смазочного слоя от толщины слоя на входной границе для различных производных

В конце главы приводятся результаты трехмерных расчетов для полной постановки задачи о смазочном клине, в которой рассматривается не одна, а две продольных координаты. Среди прочего показано, что при увеличении удлинения клина трехмерное решение оказывается близким к соответствующему двумерному, что подтверждает корректность численной реализации.

Вопросы эффективной реализации разделенного подхода к описанию взаимодействия жидкости и твердого тела подробно обсуждаются **в третьей главе**. Теоретически объясняются недостатки итерационной процедуры, приведенной в первой главе. Дается обзор существующих методов, которые модифицируют данную процедуру и позволяют достичь сходимости в рамках разделенного подхода. Отмечаются достоинства метода Эйткена, принадлежащего к группе релаксационных методов, а также «хорошего» метода Бройдена из группы квазиньютоновских методов. Подчеркивается, что прямое применение обоих методов, как и в случае исходной процедуры, не позволяет

достичь сходимости. Это объясняется тем, что в оригинальной версии методов могут нарушаться условия непроникновения между собираемыми деталями. Далее автором предлагается новая модификация метода Эйткена, которая гарантирует выполнение данных условий на каждой итерации. Приводится Алгоритм 1, реализующий предлагаемую модификацию.

**Алгоритм 1 (Реализация модифицированного метода Эйткена на данном шаге по времени)**

1. Определить начальное приближение для поля перемещений  $U^n$ , поля давлений  $P^n$ , параметра релаксации  $\alpha$ ,  $k := 0$ ,  $continueFlag := 1$ .
2. **ПОКА**  $continueFlag > 0$
3.  $U_1^n := QPSolver(P^n)$ ;
4.  $R_1^n := U_1^n - U^n$ ;
5. **ЕСЛИ**  $k > 0$  **ТО**
6. 
$$\alpha := -\frac{(R^n)^T(R_1^n - R^n)}{\|R_1^n - R^n\|_2^2} \alpha$$
;
7.  $\alpha := \min\{|\alpha|, 1\}$ ;
8.  $U_0^n := U^n$ ;
9.  $U^n := (1 - \alpha)U^n + \alpha U_1^n$ ;
10.  $R^n := R_1^n$ ;
11.  $P_0^n := P^n$ ;
12.  $P^n := ReynoldsSolver(U^n, U^{n-1})$ ;
13.  $continueFlag := checkStopCriterion(\alpha, U^n, U_0^n, P^n, P_0^n)$ ;
14.  $k := k + 1$ .

Здесь *QPSolver* и *ReynoldsSolver* – методы, осуществляющие решение задачи квадратичного программирования (1) и расширенного уравнения Рейнольдса (2) соответственно. Конкретный вид критерия останова, который проверяется в функции *checkStopCriterion*, приводится в тексте диссертации. Последняя функция возвращает 0 при выполнении критерия и 1 в противном случае.

**В четвертой главе** рассматриваются вопросы, связанные с интеграцией разработанной модели взаимодействия жидкости и твердого тела в программный комплекс ASRP по моделированию сборки авиационных конструкций. Описывается функциональность классов, реализованных на языке C++, использование которых позволяет определить результат взаимодействия собираемых деталей и жидких составов в рамках ASRP.

**В пятой главе** приводятся результаты численного моделирования сборки авиационных конструкций с учетом присутствия герметика между собираемыми деталями. Согласно технологии сборки, после нанесения герметика детали

самолета обычно соединяются при помощи так называемых временных крепежных элементов. Замена временного крепежа на постоянный происходит только после того, как герметик оказывается полностью выдавленным в окрестности каждого из крепежных элементов. В первом примере, представленном в данной главе, выполняется оценка времени выдавливания герметика в соответствующих окрестностях для модельного соединения, конечно-элементная модель которого изображена на Рисунке 5. В Таблице 1 приведены параметры сборки для проведенных численных экспериментов, а также некоторые полученные результаты.

Таблица 1 – Параметры и результаты численных экспериментов

Номер эксперимента	$f_{inst}$ (даН)	$h_{sealant}$ (мм)	$T_{squeeze}$ (с)	$g_{max}$ (мм)
0	1000	0	40.04	0.977
1	1000	0.2	41.5	1.026
2	1000	0.6	72.2	1.196
3	700	0.2	132.0	0.986

$f_{inst}$  – сила установки крепежа (даН);  $h_{sealant}$  – начальная толщина слоя герметика (мм);  $T_{squeeze}$  – полученное время выдавливания герметика (с);  $g_{max}$  – максимальный конечный зазор между деталями (мм).

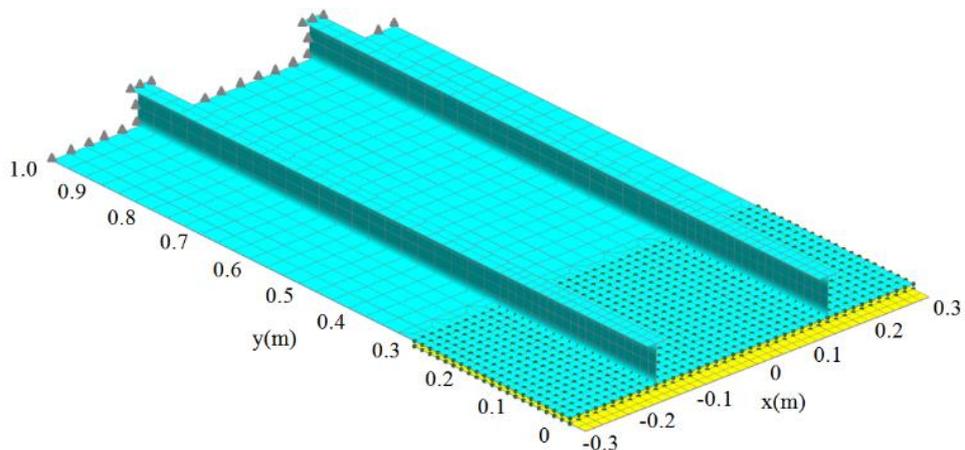


Рисунок 5 – Конечно-элементная модель соединения

На Рисунке 6 приведены распределения зазора между деталями в конце каждого из расчетов. Важно подчеркнуть, что в экспериментах № 1 – № 3 этот зазор частично заполнен герметиком. Как можно было предположить, распределение конечного зазора существенно меняется при наличии герметика. Даже в случае, когда начальная толщина слоя герметика является небольшой (эксперименты № 1, № 3), зазор между деталями близок к нулю только в районах

установки крепежных элементов (показаны черными кругами) в отличие от эксперимента № 0. При увеличении начальной толщины слоя герметика (эксперимент № 2) конечный зазор еще сильнее отличается от результата сборки без учета герметика – как видно из Таблицы 1, наибольшее значение конечного зазора в эксперименте № 2 больше соответствующего результата для эксперимента № 0 на 20 %.

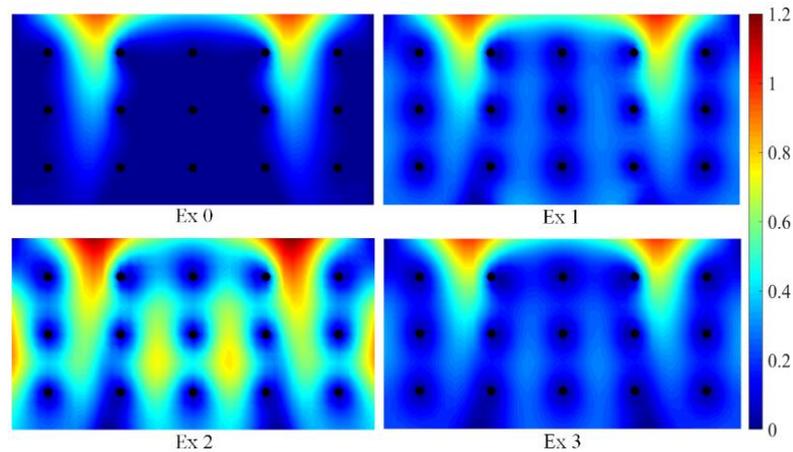


Рисунок 6 – Конечный зазор между собираемыми деталями для проведенных экспериментов

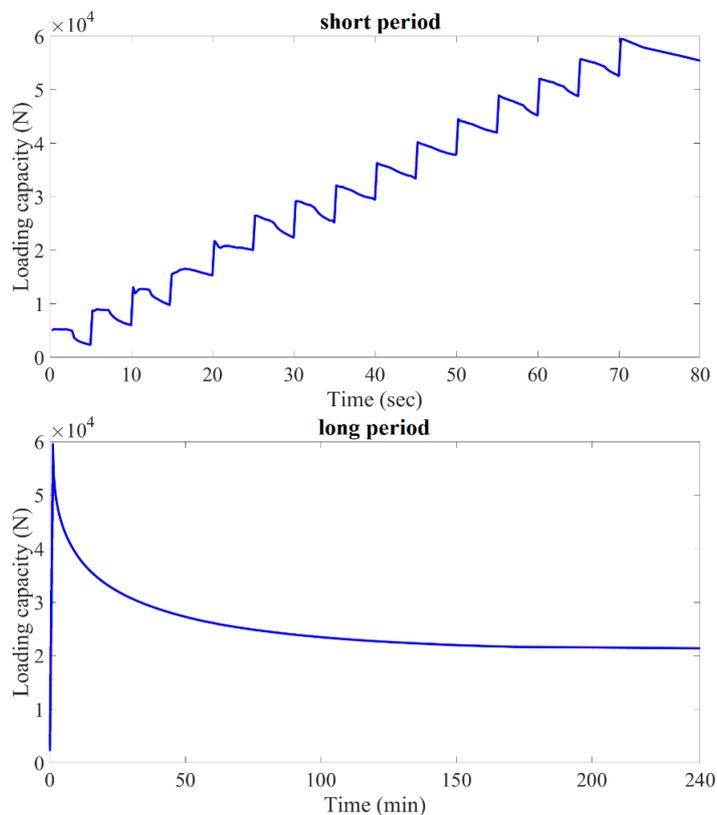


Рисунок 7 – Характерный вид зависимости несущей способности герметика от времени

Время выдавливания герметика в окрестностях крепежных элементов характеризует промежуточное, но не установившееся состояние взаимодействия герметика и собираемых деталей. Подобное состояние достигается, когда вязкость герметика приобретает крайне высокое значение вследствие процесса отверждения, и результаты моделирования данной ситуации обсуждаются в следующем примере.

На Рисунке 7 приведены графики, показывающие типичное поведение несущей способности герметика в процессе сборки. После установки каждого из крепежных элементов течение герметика резко усиливается в соответствующей области, реагируя на приложенную нагрузку. В связи с этим, несущая способность претерпевает резкие скачки, которые видны на верхнем графике. В дальнейшем течение герметика продолжается, однако происходящий параллельно процесс отверждения приводит к значительному увеличению вязкости герметика относительно начального значения (приблизительно на два порядка к завершению расчета согласно доступным экспериментальным данным). В результате течение практически останавливается, и кривая для несущей способности выходит на асимптоту, которая отчетливо видна на нижнем графике.

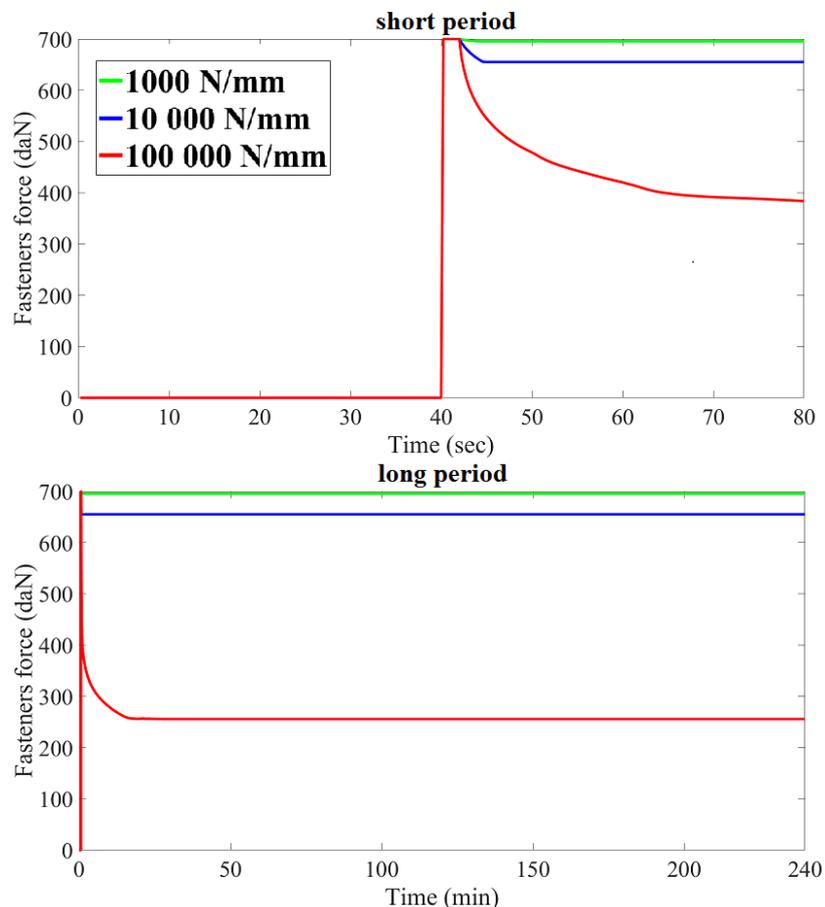


Рисунок 8 – Зависимость механической силы от времени для одного из крепежных элементов

Помимо увеличения масштаба времени, в данном примере по сравнению с предыдущим использовалась более сложная модель установки крепежных элементов. В этой модели, в отличие от первого примера, сила действия крепежа является переменной благодаря рассмотрению упругих свойств крепежных элементов. Это позволяет в ходе расчетов воспроизвести известный в авиастроительной практике эффект ослабления крепежа.

На Рисунке 8 приведены результаты, иллюстрирующие изменение механической силы от времени для одного из крепежных элементов. Было проведено три расчета, в которых рассматривались различные значения жесткости элементов –  $10^3$  (верхняя кривая),  $10^4$  (средняя кривая) и  $10^5$  (нижняя кривая) Н/мм. Рассматриваемый крепежный элемент был установлен в момент времени  $t = 40$  секунд, что объясняет резкий рост всех кривых, видный на верхнем графике. С течением времени кривые сначала демонстрируют некоторое понижение механической силы, а затем выходят на асимптоту. Для наибольшего значения жесткости, которая соответствует постоянному крепежному элементу, механическая сила упала от 700 до приблизительно 250 даН, а переходный процесс занял 20 минут. Этот результат согласуется с упоминавшимся ранее требованием к конечной сборке, в котором предварительно требуется полностью выдавить герметик в окрестностях установки временных крепежных элементов. Как показывают полученные результаты, в противном случае установленный постоянный крепеж может существенно ослабнуть в ходе сборки.

**Приложение** содержит выкладки, подтверждающие согласованность верхней конвективной производной с принципом материальной объективности.

## ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В диссертации предложен новый подход к анализу взаимодействия жидкости и твердого тела, которое наблюдается в ходе сборки деформируемых конструкций. В основе данного подхода лежит математическая модель указанного взаимодействия, которая принципиально отличается от других моделей тем, что одновременно учитывает следующие характерные особенности процесса:

- 1) Двусторонний характер взаимодействия между собираемыми деталями и жидкими составами, которые используются при проведении сборочных операций;
- 2) Гибкость деталей и возможность контактного взаимодействия между ними;
- 3) Вязкоупругий характер течения жидких составов;
- 4) Наличие у жидких составов свободной поверхности;

## 5) Отверждение жидких составов в процессе сборки.

Результаты численного моделирования процесса сборки авиационных конструкций с учетом присутствия герметика между собираемыми деталями подтверждают адекватность разработанной математической модели. Важно подчеркнуть, что представленный в диссертации подход носит достаточно общий характер и может применяться не только для анализа влияния авиационных герметиков на процесс сборки самолета. Помимо моделирования клеевого соединения деталей разработанный подход теоретически может быть применен для описания процессов, происходящих в ходе отверждения композиционных материалов в автоклаве. Безусловно, применение описанного подхода в данных задачах требует уточнения разработанной математической модели, однако принципиальная схема подхода при этом останется неизменной.

### Список работ, опубликованных по теме диссертации

#### Публикации в изданиях, входящих в перечень рецензируемых научных журналов и изданий ВАК, в том числе индексируемых Scopus и Web of Science:

1. **Eliseev, A.** Numerical simulation of aircraft assembly process with presence of sealant / A. Eliseev, S. Lupuleac, B. Grigor'ev, J. Shinder // SAE Technical Papers – 2021 – 2021-01-0001 – 8 p. [**Scopus, Q2**]
2. **Eliseev, A.** An approach to variation simulation of final aircraft assembly with presence of sealant / A. Eliseev, S. Lupuleac, B. Grigor'ev, J. Shinder // ASME Journal of Computing and Information Science in Engineering – 2022 – Vol. 22 – № 4 – 040904 – 6 p. [**Scopus, Q2**]
3. Grigor'ev, B. An extended Reynolds equation for non-Newtonian lubrication with the upper convected Maxwell model / B. Grigor'ev, **A. Eliseev** // ASME Journal of Tribology – 2022 – Vol. 144 – № 8 – 081805 – 10 p. [**Scopus, Q2**]

#### Публикации в других изданиях:

4. Григорьев, Б.С. Модель течения вязкоупругой среды в тонком слое / Б.С. Григорьев, **А.А. Елисеев** // Математические методы в технике и технологиях: сб. тр. междунар. науч. конф. / под общ. ред. А.А. Большакова – 2019 – Т. 9 – с. 159 – 162. [**РИНЦ**]
5. **Елисеев, А.А.** Математическое моделирование влияния герметика на сборку авиационных конструкций / А.А. Елисеев, С.В. Лупуляк, Б.С. Григорьев,

Ю.К. Шиндер // II Международная конференция «Математическое моделирование». 21 – 22 июля 2021 года. Москва. Тезисы – 2021 – с. 41 – 42. [РИНЦ]

6. Григорьев, Б.С. Расширенное уравнение Рейнольдса для неньютоновской смазки с верхней конвективной моделью Максвелла / Б.С. Григорьев, А.А. Елисеев // 30 Симпозиум по реологии. 26 сентября – 02 октября 2021 года. Тверь. Материалы – 2021 – с. 68 – 69. [РИНЦ]