Санкт-Петербургский политехнический университет Петра Великого

Институт физики, нанотехнологий и телекоммуникаций (ИФНиТ)

Кафедра экспериментальной физики

Гаспарян Р.А.

С Б О Р Н И К

ЗАДАЧ ПО ФИЗИКЕ

Часть 2

Оптика и атомная физика

Учебное пособие

Санкт-Петербург

2016

ПРЕДИСЛОВИЕ

Настоящий сборник задач предназначен для студентов, обучающихся по техническим направлениям подготовки бакалавров всех форм обучения. Сборник содержит 600 индивидуальных заданий разной степени сложности, а также краткие теоретические сведения по этим темам. Индивидуальные задания построены по принципу единства постановки задачи при разных исходных данных. Приведенные 25 задач с решениями позволяют разобрать на занятиях типовые задачи и рассмотреть общие подходы к их решению. Это должно помочь студенту в процессе самостоятельной работы выполнить вариант задания со своими исходными данными. Самостоятельное решение задач является необходимым условием успешного усвоения курса физики по оптике и атомной физики. Оно помогает уяснить физический смысл явлений, закрепить в памяти формулы, что прививает навыки практического применения теоретических знаний для подготовки, как к контрольным работам, так и к экзаменам. Выше сказанное окажется полезным также для начинающих преподавателей.

”Задача, которую вы решаете, может быть скромной,
но если она бросает вызов вашей любознательности
и заставляет вас быть изобретательными если вы
решаете ее собственными силами, то вы сможете
испытать ведущее к открытию напряжение ума и
насладиться радостью победы”.

Д. Пойя. Как решать задачу. М. ,1961.

Автор благодарен Шерману Владимиру Ефимовичу за предоставлении необходимой литературы для подготовки к изданию данного задачника, Маслаковой Марии Сергеевне за помощь в создании рисунков.

ОГЛАВЛЕНИЕ

1. Интерференция света

1.1 Основные соотношения

- Ширина интерференционной полосы:

$$\Delta x = \lambda/\varphi,$$

где λ — длина световой волны; φ — угловое расстояние между источниками.

- Длина и радиус (ширина) когерентности:

$$l_{\text{ког}} \approx \lambda^2/\Delta\lambda, \quad \rho_{\text{ког}} \approx \lambda/\psi,$$

где ψ — угловой размер источника.

- При отражении света от оптически плотной среды световой вектор $(\vec{E})$ испытывает скачок на π.

- Условие максимумов при интерференции света отраженного от тонкой пластинки толщиной b:

$$2b\sqrt{n^2 - sin^2\vartheta} - (k + 1/2)\lambda,$$

где ϑ — угол падения, k — целое число.

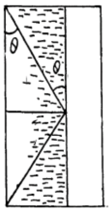
- Кольца Ньютона при отражении света от поверхностей воздушной прослойки, образованной между стеклянной пластинкой и соприкасающейся с ней выпуклой поверхностью линзы с радиусом кривизны *R.* Радиусы колец:

$$r = \sqrt{k\lambda R/2}.$$

Причем кольца светлые, если $k = 1, 3, 5, \ldots$ и темные, если $k = 2, 4, 6, \ldots$

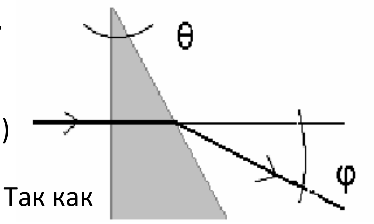
1.2 Решение задач.

1. Плоская световая волна с длиной волны $\lambda = 0{,}70$ мкм падает нормально на основание бипризмы, сделанной из стекла $(n = 1{,}520)$ с преломляющим углом $\theta = 5{,}0^{\circ} =$ $= 0{,}087$ радиан. За бипризмой находится плоскопараллельная стеклянная пластинка, и пространство меж-ду ними заполнено бензолом $(n' = 1{,}500)$. Найти ширину интерференционной полосы на экране Э, расположенном за этой системой.



Решение

Из геометрической оптики известно, что призма с малым преломляющим углом (как следует из рисунка), т.е. верхняя половинка бипризмы, отклоняет луч света, падающий на нее на угол φ, который в нашем случае будет равен:



$$\varphi = (n - n')\theta, \qquad (1)$$

напомним, что n и n' — показатели преломления стекла и бензола. Так как после бипризмы возникнут две плоские волны пересекающие друг друга с малым угловым расстоянием 2φ, то учитывая, что $(n - n') \ll n$, запишем выражение для ширины Δx интерференционной:

$$\Delta x = \lambda/2\varphi = \lambda/2[(n - n')\theta] \qquad (2)$$

Подставляя в формулу (3) численные значения величин ($\theta = 5{,}0^{\circ} = 87{,}5 \cdot 10^{-3}$ радиан) , приведенных в условии задачи , получим:

$$\Delta x = 0{,}20 \text{ мм}$$

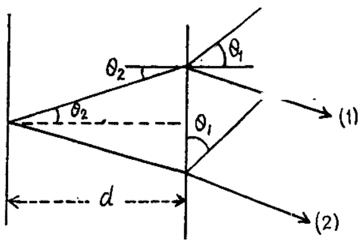
2. На тонкую пленку $(n = 1{,}33)$ падает параллельный пучок белого света. Угол падения $\theta_1 = 52^{\circ}$. При какой толщине пленки зеркально отраженный свет будет окрашен в желтый цвет($\lambda =$ $0{,}60$ *мкм*?

Решение

Оптическая разность хода лучей (1) и (2), согласно рисунку, равна:

$$\Delta = 2nd/\cos\theta_2 - 2d\, tg\ \theta_2 \sin\theta_1 =$$

$$= (2d/\cos\theta_1)(n - \sin\theta_1 \cdot \sin\theta_2), \qquad (1)$$



где n — показатель преломления пленки, d —толщина пленки. Исходя из закона преломления света на пленке $\sin\theta_1/\sin\theta_2 = n$, формула (1) запишется в виде:

$$\Delta = 2d\frac{n - sin^2\theta_1/n}{\sqrt{1 - sin^2\theta_1/n^2}} = 2d\sqrt{n^2 - sin^2\theta_1} \qquad (2)$$

Следует учесть, что при отражении от верхней поверхности пленки (от среды более плотной) происходит скачок фазы на π у отраженной волны. Тогда формула (2) примет вид:

$$\Delta = 2d\sqrt{n^2 - sin^2\theta_1} - \lambda/2. \qquad (3)$$

Максимум отражения будет надлюдаться при выполнения условия:

$$2d\sqrt{n^2 - sin^2\theta_1} - \lambda/2 = k\lambda, \qquad (k = 1, 2, 3. \; . \; . \; .). \qquad (4)$$

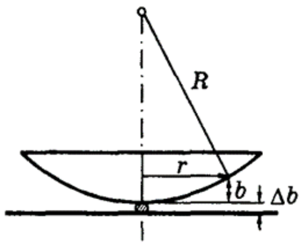
Формула (4) позволяет определить толщину пленки при которой будет наблюдаться максимум отражения для заданной длины волны света:

$$d = (\lambda/4\sqrt{n^2 - sin^2\theta_1}\,) \cdot (2k + 1) = 0{,}14(1 + 2k) \text{ мкм, где } k = 0, 1, 2, 3. \; . \; . \; .$$

3. Плоско – выпуклая стеклянная линза радиусом кривизны $R = 40$ см соприкасается выпуклой поверхностью со стеклянной пластинкой. При этом в отраженном свете радиус некоторого кольца $r = 2{,}5$ мм. Наблюдая заданным кольцом, линзу осторожно отодвинули от пластинки на $\Delta b = 5{,}0$ мкм. Каким стал радиус этого кольца?

Решение

Запишем формулу для определения радиуса $k -$ го



$$r = \sqrt{k\lambda R/2}, \qquad (1)$$

где $k -$ любое целое число. Из рисунка, до поднятии линзы над пластинкой, следует:

$$R^2 = (R - b)^2 + r^2; \qquad b = r^2/2R. \qquad (2)$$

Из формул (1) и (2) вытекает, что свет проходит, в воздушном пространстве между линзой и пластинкой, оптический путь равный:

$$r^2/R = k\lambda/2 \qquad (3)$$

При поднятии линзы над стеклянной пластинкой формула (3) изменится для этого же кольца:

$$r'^2/R + 2\Delta b = k\lambda/2. \qquad (4)$$

Уравнения (3) и (4) позволяют определить радиус r' для этого же кольца:

$$r' = \sqrt{r^2 - 2R\Delta b} = 1{,}5 \text{ мм}.$$

4. Плоско – выпуклая стеклянная линза с радиусом кривизны сферической поверхности $R =$ $=$ 12,5 см лежит на стеклянной пластинке, причем из – за попадания пылинки между выпуклой

поверхностью линзы и пластинкой нет контакта. Диаметры десятого и пятнадцатого темных колец Ньютона в отраженном свете равны $d_1 = 1{,}00$ мм и $d_2 = 1{,}50$ мм. Найти длину волны света

Решение

Формула для темных колец Ньютона имеет вид:

$$r = \sqrt{k\lambda R}\,, \qquad (k = 1, 2{,}3.\ .\ .\ .), \tag{1}$$

где k — номер темного кольца, R — радиус кривизны выпуклой поверхности линзы и λ — длина волны света. Тогда формулы диаметров заданных темных колец, согласно определению (1), запишутся в виде:

$$d_1{}^2/4 = k_1 R\lambda; \qquad d_1{}^2/4 = k_2 R\lambda, \tag{2}$$

где номера темных колец, согласно условию задачи, равны $k_1 = 10$ и $k_2 = 15.$ Из формул (1) и (2) следует, что длина волны света имеет вид:

$$\lambda = (d_2{}^2 - d_1{}^2)/4R(k_2 - k_1). \tag{3}$$

Подстановка численных значений величин, приведенных в условии задачи, в формулу (3) получим

$$\lambda = 0{,}50\ \text{мкм}.$$

5. В интерферометре Майкельсона использовалась желтая линия натрия, состоящая из двух компонент с длинами волн $\lambda_1 = 589{,}0$ нм и $\lambda_2 = 589{,}6$ нм. При перемещении одного из зеркал интерференционная картина периодически исчезала. Найти перемещение зеркала между двумя последовательными появлениями наиболее четкой картины.

Решение

Условие перехода от одной четкой картины к следующей определяется формулой:

$$k\lambda_1 = (k+1)\lambda_2, \tag{1}$$

где k — некоторое целое число. При этом максимумы k — го порядка, согласно формуле (1), будут накладываться друг на друга.
Соответствующее перемещение Δb зеркала определяется из условия:

$$2\Delta b = k\lambda_2 \approx k\lambda, \tag{2}$$

где под длиной волны λ следует понимать длины волн как λ_1 , так и λ_2 так как, согласно условию задачи, $\lambda_2 \approx \lambda_1$. Тогда из уравнений (1) и (2) следует:

$$\Delta b = \lambda_1\lambda_2/(\lambda_2 - \lambda_1) \approx \lambda^2/\Delta\lambda = 0{,}3\ \text{мм}$$

1.3. Задание №1

1. Расстояния от бипризмы Френеля до узкой и экрана равны соответственно $a = 25$ см и $b = = 100$ см. Бипризма стеклянная с преломляющим углом θ, Найти длину волны света, если ширина интерференционной полосы на экране равна Δx. Показатель преломления стекла $n =$ 1,50. Значения преломляющего угла принять равным:1) $\theta = 15' = 4{,}35 \cdot 10^{-3}$ радиан для номеров варианта с $1 -$ го по10 – е, ; 2) $\theta = 20^{э} = 5{,}80 \cdot 10^{-3}$радиан $-$ для номеров с $11 -$ го по 20 $-$е и для номеров варианта с 21 – го по 30 – е $\theta = 25' = 7{,}25 \cdot 10^{-3}$радиан. Ширина интерференционной полосы Δx приведена в таблице 1.

2. На пленку с показателем $(n = 1{,}33)$ падает свет под углом θ при которой свет длиной волны λ_{max} испытывает максимальное отражение. Определить: 1. При какой длине волны λ свет не отражается совсем. 2. Минимальную толщину пленки b_{min} . Длину волны λ_{max} и угол падения света θ взять из таблицы 1.

3. На вершине сферической поверхности плоско – выпуклой стеклянной линзы имеется сошлифованный плоский участок радиуса $r_0 = 3{,}0$ мм, которым она соприкасается со стеклянной пластинкой. Радиус кривизны поверхности линзы $R = 1{,}5$ м. Определить: радиус $k -$ го светлого кольца в отраженном свете ($k = 10$ для нечетных номеров варианта, для четных номеров $k = 6$). Длиной волны λ. Длина волны λ в нм приведена в таблице 1.

4. Сферическая поверхность плоско – выпуклой линзы соприкасается со стеклянной пластинкой. Пространство между линзой и пластинкой заполнено сероуглеродом. Показатели преломления линзы, сероуглерода и пластинки равны соответственно $n_1 = 1{,}50,$ $n_2 = 1{,}63$ и $n_3 = 1{,}70$. Радиус кривизны сферической поверхности линзы $R = 100$ см. Определить радиус $k -$ го ($k = 5$ для нечетных номеров варианта, для четных номеров $k = 9$) темного кольца Ньютона в отраженном свете с длиной волны $\lambda(\text{мкм})$, приведенной в таблице 1.

5. В двухлучевом интерферометре используется спектральная линия, состоящая из двух близких компонент с длинами волн λ_1 и λ_2, которые приведены в таблице 1. При каком наименьшем порядке интерференции четкость интерференционной картины будет наихудщей?

Таблица 1.

№ ва- -ри- -ан- -та	Δx, мм	λ_{max}, нм	θ, ра- -ди- -ан	λ, нм	λ, мкм	λ_{1}, нм	λ_{2}, нм
1	0,88	600	$\pi/6$	**635**	0,500	506,40	508,51
2	0,86	620	$\pi/4$	655	0,520	506,80	508,61
3	0,84	640	$\pi/3$	675	0,540	507,00	508,95
4	0,82	660	$\pi/6$	695	0,560	508,80	510,92
5	0,80	680	$\pi/4$	705	0,580	509,60	511,42
6	0,78	700	$\pi/6$	735	0,600	511,20	513,33
7	0,76	620	$\pi/3$	755	0,585	512,20	514,17
8	0,74	640	$\pi/4$	640	0,565	512,40	514,23
9	0,72	660	$\pi/6$	660	0,545	513,60	515,74
10	0,70	680	$\pi/4$	680	0,525	514,80	516,78
11	0,67	700	$\pi/3$	700	0,505	515,20	517,04
12	0,65	640	$\pi/6$	720	0,530	516,00	518,15
13	0,63	660	$\pi/4$	740	0,550	517,40	519,39
14	0,61	680	$\pi/3$	760	0,580	526,40	528,28
15	0,59	700	$\pi/4$	665	О,610	525,60	527,79
16	0,57	620	$\pi/3$	*685*	*0,500*	523,60	525,47
17	0,55	640	$\pi/6$	705	0,520	522,60	524,61
18	0,53	680	$\pi/4$	725	0,540	520,80	524,61
19	**0,51**	700	$\pi/3$	745	0,560	520,00	522,00
20	0,50	660	$\pi/6$	755	0,580	518,00	522,97
21	0,49	640	$\pi/4$	630	0,600	525,60	527,79
22	0,48	620	$\pi/3$	650	0,585	526,40	528,28
23	0,47	700	$\pi/6$	670	0,565	528,00	530,20
24	0,46	680	$\pi/4$	690	0,545	529,20	531,09
25	0,45	660	$\pi/3$	710	0,525	514,80	516,78
26	0,44	640	$\pi/6$	730	0,505	513,60	515,74
27	0,43	660	$\pi/4$	750	0,530	512,40	514,23
28	0,42	680	$\pi/3$	715	0,550	509,60	511,42
29	0,41	700	$\pi/6$	695	0,580	532,00	533,90
30	0,40	640	$\pi/4$	675	0,610	530,40	532,44

2. Дифракция света.

2.1. Основные соотношения.

- Радиус внешней границы $k-$й зоны Френеля:

$$r_k = \sqrt{k\lambda ab/(a+b)}\,, \qquad k = 1, 2, 3, \ldots$$

- Дифракция Фраунгофера от щели , свет падает нормально. Условие минимумов интенсивности:

$$b\sin\theta = \pm k\lambda, \quad k = 1, 2, 3, \ldots,$$

где b — ширина щели, θ — угол дифракции.

- Дифракционная решетка, свет падает нормально. Условие фраунгоферовых максимумов:

$$d\sin\theta = \pm k\lambda, \quad k = 0, 1, 2, \ldots,$$

Условие добавочных минимумов:

$$d\sin\theta = \pm k'\lambda/N, \qquad k' = 1, 2, 3, \ldots, \text{ кроме } 0,\ N, 2N, \ldots$$

- Угловая дисперсия дифракционной решетки:

$$D = d\theta/d\lambda = k/d\cos\theta$$

5. Разрешающая способность дифракционной решетки:

$$R = \lambda/\delta\lambda = kN,$$

где N — число штрихов дифракционной решетки:

- Разрешающая сила объектива:

$$R = 1/\delta\psi = D/1{,}22\lambda,$$

где $\delta\psi$ — наименьшее угловое расстояние, разрешаемое объективом, D — его диаметр.

- Формула Брэгга – Вульва. Условие дифракционных максимумов:

$$2d\sin\alpha = \pm k\lambda,$$

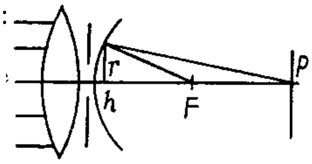
где d — межплоскостное расстояние, α — угол скольжения, $k = 1, 2, 3, \ldots$

1.2. Решение задач.

1. На пути плоской световой волны с длиной $\lambda = 0{,}54$ мкм поставили тонкую собирающую линзу с фокусным расстоянием $f = 50$ см, непосредственно за ней – диафрагму с круглым отверстием и на расстоянии $b = 75$ см от диафрагмы — экран. При каких радиусах отверстия центр дифракционной картины на зкране имеет максимальную освещенность?

Решение

Как видно из рисунках искомый радиус r можно определить исходя как из фокусного расстояния тонкой линзы f, так и используя радиус скажем $m -$ ой зоны Френеля:



$$r^2 = f^2 - (f-h)^2 = (b - m\lambda/2)^2 - (b-h)^2 \qquad (1)$$

При получении формулы (1), исходили из условия задачи, что тонкая линза примыкает непосредственно к диафрагме. Поэтому $h -$ расстояние от внешней границы $m -$ ой зоны Френеля до диафрагмы (см. [2], стр. 381). Для не слишком больших значений m малости λ и h по сравнению с численными значениями физических величин, приведенных в условии задачи, формула (1) примет вид:

$$r^2 = 2fh = -bm\lambda + 2bh \qquad (2)$$

Из формулы (2) получаем:

$$h = bm\lambda/2(b-f), \qquad (3)$$

а также, используя формулу (3), имеем:

$$r^2 = fbm\lambda/(b-f). \qquad (4)$$

Тогда можно определить искомый радиус отверстия диафрагмы когда центр дифракционной картины на экране (т.е. в точке P) из формулы (4), полагая $m = k$, где k принимает нечетные целые числа:

$$r = \sqrt{kfb\lambda/(b-f)} = 0{,}9\sqrt{k} \text{ мм}, \quad \text{где } k = 1, 3, 5, . . .$$

2. При нормальном падении света на дифракционную решетку угол дифракции для линии $\lambda_1 = 0{,}65$ мкм во втором порядке равен 45^{0} . Найти угол дифракции для линии $\lambda_2 = 0{,}50$ мкм в третьем порядке.

Решение

При нормальном падении света на дифракционную решетку, согласно дифракции Фраунгофера, условие главных максимумов имеет вид:

$$d \sin\theta = k\lambda, \quad k = 0, \pm 1 \pm 2 \pm 3, \ . \ . \ . \ . \ , \qquad (1)$$

где d — период дифракционной решетки, θ — угол дифракции для длины волны λ в k — ом порядке. Запишем уравнение (1) как для линии λ_1 во втором порядке (т.е. при $k = 2$), так и для линии λ_2 в третьем порядке:

$$d \sin \theta_1 = 2\lambda_1 \qquad (2)$$

$$d \sin \theta_2 = 3\lambda_2 \qquad (3)$$

Уравнения (2) и (3) позволяют записать формулу, определяющую искомый угол дифракции для линии λ_2:

$$\sin \theta_2 = 1{,}5(\lambda_2/\lambda_1) \sin \theta_1. \qquad (4)$$

Подставляя численные значения величин, приведенных в условии задачи, найдем величину искомого угла дифракции

$$\theta_2 = 54{,}68^{\text{o}} \approx 55^{\text{o}}$$

3. Свет с длиной волны $\lambda = 550$ нм падает нормально на дифракционную решетку. Найти ее угловую дисперсию в зависимости от угла дифракции $\theta = 60^{\text{o}}$.

Решение

Для определения угловой дисперсии дифракционной решетки, определяемая формулой:

$$D = d\theta/d\lambda, \qquad (1)$$

необходимо использовать формулу для главных фраунгоферовых максимумов, так как свет падает нормально на решетку:

$$d \sin \theta = k\lambda, \qquad k = 0,\ \pm 1,\ \pm 2, \pm 3.\ .\ .\ .\ . \qquad (2)$$

Дифференциал формулы (2): $d \cos \theta (d\theta) = k(d\lambda)$ позволяет, используя формулу (2), записать выражение для угловой дисперсии дифракционной решетки:

$$D = d\theta/d\lambda = (k/d \cos \theta) = tg\theta/\lambda. \qquad (3)$$

Подставляя числовые (чтобы угловую дисперсию выразить в угл. мин/нм необходимо выражение (3) разделить на $0{,}29 \cdot 10^{-3}$) значения величин, приведенных в условии задачи, получим:

$$D = 10{,}7 \text{ угл. мин/нм}.$$

4. Вычислить наименьшее расстояние между двумя точками на луне, которое можно разрешить рефлектором с диаметром зеркала в 5 м. Считать, что длина $\lambda = 0{,}55$ мкм.

Решение

Исходя из формулы разрешающей силы объектива:

$$R = (1/\delta\psi) = D/1{,}22\lambda, \qquad (1)$$

где наименьшее угловое расстояние $\delta\psi$, разрешимое рефлектором с диаметром зеркала D, позволит определить искомое наименьшее расстояние между двумя точками на луне:

$$(\Delta y)_{min} = L(\delta\psi) = 1{,}22\lambda L/D, \qquad (2)$$

где L — расстояние между землей и луной равно: $L = 384000$ км.

Подставляя в формулу (2) значения заданных величин, получим:

$$(\Delta y)_{min} \approx 52 \text{ м}.$$

5. Узкий пучок рентгеновских лучей падает под углом скольжения $\alpha = 60{,}0^{\circ}$ на естественную грань монокристалла $NaCl$, плотность которого $\rho = 2{,}16$ г/см^3. При зеркальном отражении от грани образуется максимум второго порядка. Определить длину волны излучения.

Решение

Запишем формулу Брэгга – Вульва для условия дифракционных максимумов при отражении от грани монокристалла:

$$2d\sin\alpha = k\lambda, \qquad (1)$$

где d — межплоскостное расстояние,

α — угол скольжения, $k = \pm1, \pm2, \pm3, \ . \ . \ .$

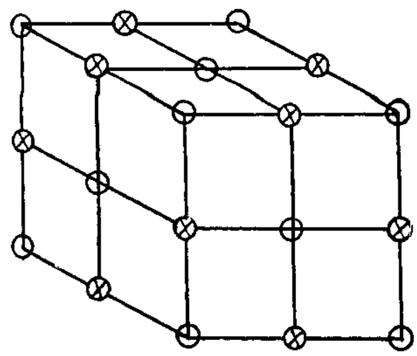
Грань монокристалла $NaCl$ как следует

из рисунка содержит четыре Na^+ и четыре

Cl^- ионов на единицу грани. Заметим, что

межплоскостное расстояние $d = a/2$, где

a — длина грани монокристалла $NaCl$.



Для определения межплоскостного расстояния d (учтено, что $d = a/2$) воспользуемся следующей формулой:

$$\rho d^3 = 0{,}5 M_{NaCl}/N_A, \qquad (2)$$

где M_{NaCl} — масса молекулы M_{NaCl} взятая в граммах, равна 58,5 г., N_A — число Авогадро равно $6{,}023 \cdot 10^{23}$.

Формулы (1) и (2) позволяют определить искомую длину волны излучения при $k = 2$:

$$\lambda = \sqrt[3]{M_{NaCl}/2\rho N_A}\sin\alpha \qquad (3)$$

Подставляя числовые значения величин в формулу (3) получим:

$$\lambda = 244{,}4 \text{ пм}.$$

2.3. Задание №2.

1. Плоская световая волна с длиной λ в нм, приведенная в таблице 2, падает нормально на поверхность стеклянного диска, который перекрывает полторы зоны Френеля для точки наблюдения P . При какой толщине этого диска интенсивность света в точке P будет максимальной? Учесть интерференцию света при прохождении диска и считать $k = 2$. Показатель преломления стекла выбрать для нечетных номеров варианта $n = 1{,}50$, а для четных вариантов считать $n = 1{,}60$.

2. Определить длину волны света λ в нм падающего нормально на дифракционную решетку с периодом d, приведенной в таблице, если угол между направлениями на фраунгоферовы максимумы первого и второго порядков равен $\Delta\theta$. Для вариантов с первого по десятое принять $\Delta\theta = 10^{o}$, считать $\Delta\theta = 15^{o}$ для номеров варианта с 11-го по 20-е и для номеров варианта с 21-го по 30-е $\Delta\theta = 20^{o}$.

3. Свет с длиной волны λ падает нормально на дифракционную решетку с периодом d, содержащую N штрихов. Найти угловую ширину фраунгоферова максимума $k -$ того порядка. 1). Для но – мера варианта с 1 – ого по 10 – ое дифракционный максимум $k = 1$. 2). Дифракционный макси - мум $k = 2$ для вариантов номеров с 11 – ого по 20 – ое. 3). Для номеров варианта с 21 – ого по 30 - - ое рассматривать дифракционный максимум третьего порядка. Значения периода дифракцион - - ной решетки d, содержащую N штрихов и длину волны λ в мкм приведены в таблице 2.

4. Имеется зрительная труба с диаметром объектива D. Определить разрешающую способность объектива трубы и минимальное расстояние между двумя точками, находящимися на расстоянии l от трубы, которое она может разрешить. Допустим , что в действительности нереально с имеющимися зрительными трубами, для номеров варианта с первого по шестое $D = 4{,}0$ см.; $l ==$ 2,7 км., для вариантов с 7 – ого по 12 - оеk $D = 4{,}5$ см.; $l = 2{,}8$ км., с 13 – ого по 18 – ое считать $D = 5{,}0$ см. $l = 2{,}9$ км. Студенты, у которых номера вариантов начинаются с 19 – ого и заканчиваются 25 – им используют при выполнении домашнего задания следующие значения: $D = 5{,}5$ см.; $l = 3{,}0$ км., номера вариантов с 25 – ого по 30 – ое считать, хотя и далеко от действительно реальных величин: $D = 6{,}0$ см.; $l = 3{,}1$ км. Что касается длины волны λ в мкм , используемая в данной задаче и приведенная в таблице 2, не имеет никакого отношения к действительным зрительным трубам.

5. При прохождении пучка рентгеновских лучей с длиной волны λ через поликристаллический образец на экране, расположенном на расстоянии l от образца, при отражении от системы плоскостей с межплоскостным расстоянием $d =$ 155 пм возникают дифракционные кольца. Определить радиус светлого кольца, соответствующему $k -$ому порядку при отражении от системы плоскостей: а). Для номеров варианта с первого по шестое при длине волны $\lambda =$ 17,4 пм $k = 1$; б) При длине волны $\lambda = 17.\text{б пм}$, варианты с 7- ого по 12 – ое порядок светлого кольца при отражении принять равным $k = 2$); в) Для номеров варианта с 13 – ого по 18- ое считать с $\lambda =$ 17,8 пм, а $k = 3$; г) Светлое кольцо ($k = 4$) наблюдается на экране при длине волны $\lambda = 18{,}0$ пм., для номеров варианта с 19 – ого по 24 – ое. Г) Студентам с номерами вариантов с 25 – ого по 30 – ое следует использовать пятое светлое кольцо ($k = 5$), наблюдаемое на экране, при длине волны $\lambda =$ 18,2 пм. Расстояние l от поликристаллического образца до экрана приведено в таблице 2.

Таблица 2.

№ варианта	λ нм	d мкм	к задаче 3. d мкм	N штрихов	λ мкм	λ, мкм	l, см
1	560	4,30	2,0	12500	0,5900	0,450	22,0
2	562	4,20	2,1	12000	0,5898		
3	564	4,10	2,2	11500	0,5896	0,470	20,0
4	566	4,00	2,3	11000	0,5894	0,480	19,0
5	568	3,90	2,4	10500	0,5892	0,490	18,0
6	570	3,80	2,5	10500	0,5890	0,500	17,5
7	572	3,70	2,6	10000	0,5888	0,510	17,0
8	574	3,60	2,7	9500	0,5886	0,520	16,5
9	576	3,50	2,8	9000	0,5884	0,530	16,0
10	578	3,40	2,9	8500	0,5882	0,540	15,5
11	580	2,40	2,0	12500	0,5880	0,550	15,0
12	582	2,35	2,1	12000	0,5882	0,560	14,5
13	584	2,30	2,2	11500	0,5884	0,570	14,0
14	586	2,25	2,3	11000	0,5886	0,560	14,5
15	588	2,20	2,4	10500	0,5888	0,550	15,0
16	589	2,15	2,5	10000	0,5890	0,540	15,5
17	587	2,10	2,6	9500	0,5892	0,530	16,0
18	585	2,05	2,7	9000	0,5894	0,520	16,5
19	583	2,00	2,8	8500	0,5896	0,550	16,0
20	581	1,95	2,9	8000	0,5898	0,560	16,4
21	579	1,60	2,0	12500	0,5900	0,570	16,8
22	577	1,55	2,1	12000	0,5898	0,580	17,2
23	575	1,50	2,2	11500	0,5896	0,590	17,6
24	573	1,45	2,3	11000	0,5894	0,600	18,0
25	571	1,40	2,4	10500	0,5892	0,620	18,0
26	569	1,35	2,5	10000	0,5890	0,610	17,8
27	567	1,30	2,6	9500	0,5888	0,600	17,6
28	565	1,25	2,7	9000	0,5886	0,590	17,4
29	563	1,20	2,8	8500	0,5884	0,580	17,2
30	560	1,15	2,9	8000	0,5882	0,570	17,0

Поляризация света.

3.1. Основные соотношения.

- Закон Малюса:

$$I = I_0 cos^2\varphi.$$

- Степень поляризации света:

$$P = \frac{I_{max} - I_{min}}{I_{max} + I_{min}} = \frac{I_{\text{пол}}}{I_{\text{полн}}}.$$

$$tg\theta_B = n_2/n_1.$$

- Формулы Френеля для интенсивности света, отраженного от границы раздела lдвух диэлектриков:

$$I'_{\perp} = I_{\perp}\frac{sin^2(\theta_1-\theta_2)}{sin^2(\theta_1+\theta_2)}; \qquad I'_{\parallel} = I_{\parallel}\frac{tg^2(\theta_1-\theta_2)}{tg^2(\theta_1+\theta_2)} ,$$

где $I_{\perp}$ и $I_{\parallel}$ — интенсивности падающего света, у которого колебания вектора соответственно перпендикулярны и параллельны плоскости падения.

- Кристаллическая пластинка между двумя поляризаторами P и P'. Если угол между плоскостью пропускания P и оптической осью OO' пластинки равен 45^{o}, то интенсивность I' света, прошедшего через поляризатор P', оказывается максимальной или минимальной при следующих условиях:

Поляризаторы P и P'	$\delta = 2\pi k$	$\delta = (2k+1)\pi$
параллельны	$I'_{\parallel} = \text{макс}$	$I'_{\parallel} = \text{мин}$
скрешены	$I'_{\perp} = \text{мин}$	$I'_{\perp} = \text{макс}$

здесь $\delta = 2\pi(n_0 - n_e)d/\lambda$ — разность фаз между обыкновенным и необыкновенным лучами, $k = 0, 1, 2. \ . \ . \ .$ Естественное и магнитное

- вращения плоскости поляризации:

$$\varphi_{\text{ест}} = \alpha l; \qquad \varphi_{\text{магн}} = VlH,$$

здесь α — постоянная вращения (для растворов $\alpha = [\alpha]c$, где $[\alpha]$ — удельная постоянная вращения, с — концентрация активного вещества), V — постоянная Верде.

3.2. Решение задач.

1. На пути частично поляризованного света поместили поляризатор. При повороте на угол $\varphi = 60^{o}$

из положения, соответствующего максимуму пропускания, интенсивность прошедшего света уменьшилась в $\eta = 3{,}0$ раза. Найти степень поляризации падающего света.

Решение

Интенсивность I_{max} прошедшего света до поворота поляризатора определяется формулой:

$$I_{max} = I_1 cos^2 45^{o} + I_2, \tag{1}$$

где $I_1 -$ интенсивность естественного света, $I_2 -$ интенсивность линейно поляризованного света.

При повороте поляризатора на угол φ максимальная интенсивность прошедшего света оказывается равной:

$$I = I_{max}/\eta = (1/2)I_1 + I_2 cos^2\varphi \tag{2}$$

Формулы (1) и (2) позволяют определить интенсивность линейно поляризованного света:

$$I_2 = I_{max}(1 - 1/\eta)cos^{-2}\varphi \tag{3}$$

Подставляя (3) в формулу (1) определим интенсивность I_1 естественного света:

$$I_1 = 2I_{max}[1 - (1 - 1/\eta)cos^{-2}\varphi] = (2I_{max}/sin^2\varphi)(1/\eta - cos^2\varphi). \tag{4}$$

Степень поляризации падающего света связана с интенсивностью I_2 линейно поляризованного света и с интенсивностью I_1 естественного света следующей формулой:

$$P = I_2/(I_1 + I_2). \tag{5}$$

Подставляя выражения (3) и (4) в формулу (5) определим искомую степень поляризации падающего света:

$$P = (\eta - 1)/(1 - \eta \cos 2\varphi) = 0{,}8.$$

2. На поверхность воды под углом Брюстера падает пучок плоско поляризованного света. Плоскость колебаний светового вектора составляет угол $\varphi = 45^{o}$ с плоскостью падения. Найти коэффициент отражения.

Решение

Амплитуда колебаний $\mathrm{A}_{\perp}$ перпендикулярной к плоскости колебаний падающего света на поверхность воды запишется в виде:

$$A_{\perp} = A_0 \sin\varphi, \tag{1}$$

где $A_0 -$ амплитуда колебаний светового вектора в плоскости падения.

Амплитуда колебаний светового вектора в плоскости параллельной к плоскости падения примет вид:

$$A_{\parallel} = A_0 \cos\varphi \qquad (2)$$

Тогда, исходя из выражений (1) и (2), интенсивности света, отраженного от воды для которых интенсивности колебания вектора соответственно перпендикулярны и параллельны плоскости падения, согласно формулам Френеля, примут вид:

$$I'_{\perp} = I_0 \frac{sin^2(\theta_1-\theta_2)}{sin^2\,(\theta_1+\theta_2)} sin^2\varphi \;: \qquad I'_{\parallel} = I_0 \frac{tg^2(\theta_1-\theta_2)}{tg^2(\theta_1+\theta_2)} cos^2\varphi. \qquad (3)$$

Так как по условию задачи угол падения равен углу Брюстера то отраженный луч полностью поляризован и колебания перпендикулярны к плоскости падения. Поэтому коэффициент отражения будет равен:

$$\eta = (I'_{\perp}/I_0) = \frac{[\sin\theta_1\cos\theta_2 - \cos\theta_1\sin\theta_2]^2}{(\sin\theta_1\cos\theta_2 + \cos\theta_1\sin\theta_2)^2} sin^2\varphi. \qquad (4)$$

Заметим, что при равенстве угла падения углу Брюстера, углы преломленного и отраженного лучей взаимно перпендикулярны. Тогда, используя закон Брюстера: $\mathrm{tg}\theta_{\mathrm{B}} = tg\theta_1 = n$ $(n = 1{,}33 -$ показатель преломления воды) формула (4) примет вид и будет равен:

$$\eta = \frac{(n^2-1)^2}{(n^2+1)^2} sin^2\varphi = 0{,}0386.$$

3. На поверхность стекла падает пучок естественного света. Угол падения равен 45°. Найти с помощью формул Френеля степень поляризации: а) отраженного света; б) преломленного света.

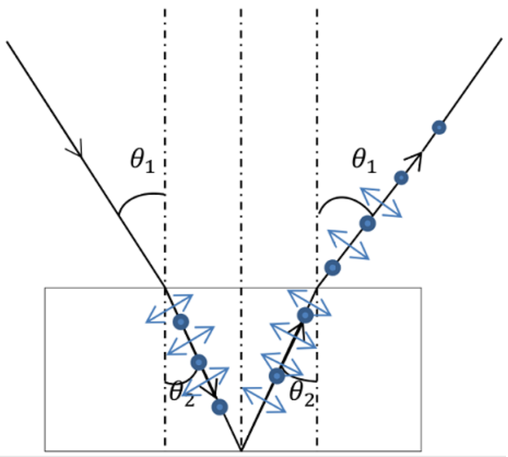
Решение

Из закона преломления света, для отраженного света, как следует из рисунка, имеем соотношение:

$$\sin\theta_2/\sin\theta_1 = (1/n), \qquad (1)$$

где $n = 1{,}50 -$ показатель преломления стекла. Формула (1) позволяет определить значение угла θ_2. Из формулы (1) следует :

$\sin\theta_2 = (1/n)\sin\theta_1 = \left(2/3\sqrt{2}\right) = 0{,}471,$



из которого находим значение угла θ_2:

$$\theta_2 = arcsin0{,}471 = 28{,}1^{o} \qquad (2)$$

Формулы Френеля для интенсивности, отраженного света от поверхности стекла, позволяют записать:

$$I'_{\perp} = I_{\perp} \frac{sin^2(\theta_1 - \theta_2)}{sin^2(\theta_1 + \theta_2)},$$

(3)

$$I'_{\parallel} = I_{\parallel} \frac{tg^2(\theta_1 - \theta_2)}{tg^2(\theta_1 + \theta_2)},$$

где $I_{\perp}$ и $I_{\parallel}$ — интенсивности падающего естественного света на поверхность стекла, у которого колебания светового вектора соответственно перпендикулярны и параллельны плоскости падения. Так как угол падения естественного света на поверхность стекла равна 45^o, то $I_{\perp} = I_{\parallel} = (1/2)I_0$, где I_0 — интенсивность естественного света. Степень поляризации P отраженного света имеет вид:

$$P = [(I_{max} - I_{min})/(I_{max} + I_{min})] = \left[\left(I'_{\perp} - I'_{\parallel}\right)/\left(I'_{\parallel} + I'_{\parallel}\right)\right]. \quad (4)$$

Подставляя уравнения системы (3), учитывая что $I_{\perp} = I_{\parallel} = (1/2)I_0$, в формулу (4) получим:

$$P = \frac{[sin^2(\theta_1 - \theta_2)/sin^2(\theta_1 + \theta_2)] - [tg^2(\theta_1 - \theta_2)/tg^2(\theta_1 + \theta_2)]}{[sin^2(\theta_1 - \theta_2)/sin^2(\theta_1 + \theta_2)] + [tg^2(\theta_1 - \theta_2)/tg^2(\theta_1 + \theta_2)]}. \quad (5)$$

Подстановка значений $\theta_1 = 45{,}0^o$ и $\theta_2 = 28{,}1^o$ в формулу (5) найдем величину степени поляризации отраженного света:

$$P = 0{,}831.$$

Применим формулу Френеля для преломленного луча. При этом следует учесть, что интенсивность света $I_{\perp}$ падающего на поверхность стекла частично отражается с интенсивностью $I'_{\perp}$. Поэтому интенсивность преломленного луча, у которого колебания светового вектора перпендикулярны плоскости падения будет равна:

$$I''_{\perp} = I_{\perp} - I'_{\perp}. \quad (6)$$

Подстановка первого уравнения системы (3) в формулу (6) получим:

$$I''_{\perp} = I_{\perp}[1 - sin^2(\theta_1 - \theta_2)/sin^2(\theta_1 + \theta_2)] \quad (7)$$

Из формулы (7) нетрудно определить выражение для интенсивности луча $I''_{\perp}$, подставляя значения $\theta_1 = 45{,}0^o$ и $\theta_2 = 28{,}1^o$, а также учитывая что $I_{\perp} = I_{\parallel} = (1/2)I_0$ (см. выше):

$$I''_{\perp} = (1/2)I_0[1 - (\sin 16{,}9/\sin 73{,}1)^2] = (1/2)I_0(1 - 0{,}0923) = (1/2)I_0 \times 0{,}9077 \quad (8)$$

Проделав те же выкладки, что при нахождении интенсивности $I''_{\perp}$ нетрудно найти выражение для интенсивности $I''_{\parallel}$ преломленного луча:

$$I''_{\parallel} = I_{\parallel} - I'_{\parallel} = (1/2)I_0[1 - (tg16{,}9^o/tg73{,}1^o)^2] = (1/2)I_0 \times 0{,}9915 \quad (9)$$

При определении степени поляризации надо учесть, что если в отраженном свете преобладают колебания светового вектора перпендикулярные плоскости падения, то в преломленном луче преобладают параллельные плоскости падения колебания светового вектора. Тогда выражение для степени поляризации запишется в виде:

$$P = \frac{I_{max} - I_{min}}{I_{max} + I_{vin}} = \frac{I_{\parallel}'' - I_{\perp}''}{I_{\parallel}'' + I_{\perp}''} = \frac{0{,}0838}{1{,}8982} = 0{,}044$$

4. Кварцевую пластинку, вырезанную параллельно оптической оси, поместили между двумя скрещенными поляризаторами. Угол между двумя скрещенными поляризаторами. Угол между плоскостями пропускания поляризаторов и оптической осью пластинки равен 45^{o}. Толщина пластинки $d = 0{,}50$ мм. При каких длинах волн в интервале $0{,}50 \div 0{,}60$ мкм интенсивность света, прошедшего через эту систему, не будет зависеть от поворота заднего поляризатора? Разность показателей преломления обыкновенных и необыкновенных лучей в этом интервале считать равной $\Delta n = n_{\text{o}} - n_{\text{e}} = 0{,}0090$.

Решение

При угле 45^{o} между плоскостями первого поляризатора и оптической осью пластинки разность фаз между обыкновенным и необыкновенным лучами равна:

$$\delta = [2\pi(n_o - n_e)d/\lambda]. \qquad (1)$$

Для того, чтобы интенсивность света, прошедшего через систему поляризаторов и оптической осью, не зависел от угла поворота необходимо на выходе кристалла получить циркулярно поляризованный свет. Тогда разность фаз (1) будет равна:

$$\delta = 2\pi(n_o - n_e)d/\lambda = (k + 1/2)\,\pi, \qquad (2)$$

где $k -$ целое число. Из формулы (2) находим:

$$\lambda = 4(n_o - n_e)d/(2k + 1) \qquad (3)$$

Из уравнения (3) следует, что в заданный интервал длин волн $\lambda = 0{,}50 \div 0{,}60$ мкм попадают при $k = 17, 16, 15$ длины волн равные:

$\lambda = 0{,}514$ мкм, 0,544 мкм и 0,581 мкм.

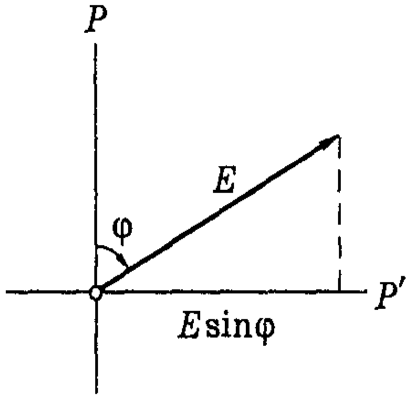
5. Естественный свет с длиной волны $\lambda = 656$ нм падает на систему из двух скрещенных поляризаторов, между которыми находится кварцевая пластинка, вырезанная перпендикулярно оптической оси. При какой минимальной толщине пластинки система будет пропускать $\eta = 0{,}30$ светового потока?

Решение

При прохождении естественного света через первый поляризатор его интенсивность станет равной $(1/2)I_0$, где $I_0 -$ интенсивность падающего света. Плоскость поляризации, прошедщего через первый поляризатор P света, кварцевая пластинка повернет на угол равный:

$$\varphi = \alpha d, \qquad (1)$$

где постоянная вращения равна $\alpha = 17{,}4$ град/мм (см. в [1] в приложении на стр. 418 в таблице естественное вращение в кварце для длины волны $\lambda = 656$ нм), d — толщина пластинки. Через второй поляризатор P' пройдет, согласно закону Малюса, и интенсивность света равная $(I_0/2)sin^2\varphi$. (см. рисунок). Тогда, учитывая что наша система пропускает световой по-ток равный:



$$\eta = \frac{(I_0/2)sin^2\varphi}{I_0} = \frac{1}{2}sin^2\varphi. \quad (2)$$

Из уравнений (2) находим:

$$\varphi = arcsin\sqrt{2\eta} \quad (3)$$

Как видно из рисунка модуль проекции вектора $\vec{E}$ на плоскость поляризатора P', равный $|E\sin\varphi|$, может быть при многих значениях угла φ и следовательно толщина d пластинки будет принимать различные значения. Так как нас интересует минимальное значение толщины пластинки то должно выполняться условие $\varphi < \pi/2$. Таким образом можно записать:

$$\varphi_{min} = \alpha\, d_{min} \quad (4)$$

Подставив это значение (3) в формулу (2) определим искомую минимальную толщину пластинки, при которой система будет пропускать $\eta = 0{,}30$ светового потока:

$$d_{min} = (1/\alpha)arcsin\sqrt{2\eta} = 2{,}9 \text{ мм}$$

3.3. Задание №3.

1. Естественный свет падает на систему из трех последовательно расположенных одинаковых поляроидов, причем плоскости пропускания среднего поляроида составляет угол φ с плоскостями пропускания двух других поляроидов. Каждый поляроид обладает поглощением таким, что при падении на него линейно поляризованного света максимальный коэффициент пропускания составляет τ. Во сколько раз уменьшится интенсивность света после прохождения этой системы? 1). Для номеров варианта с первого по шестое угол считать равным $\varphi = 40^o$. 2). Угол $\varphi = 45^o$ полагать равным для номеров варианта с 7 – ого по 12 – ое. 3). Для студентов с номерами вариантов с 13 – ого по 18 –ое угол $\varphi = 50^o$. Номера вариантов с 19 – ого по 24 – ое имеют угол р $\varphi = 55^o$. Для вариантов номеров с 25 – ого по 30 –ое надо считать, что $\varphi = 60^o$. Значения максимального коэффициента пропускания τ приведены в таблице 3.
2. Плоский пучок естественного света с интенсивностью I_0 падает под углом Брюстера на поверхность воды. При этом коэффициент отражения светового потока равен $\rho = 0{,}039$. Найти интенсивность преломленного света. Значения интенсивности падающего света приведены в таблице 3.
3. Свет интенсивностью I_0 падает нормально на идеальную прозрачную пластинку. Считая, что коэффициент отражения от каждой поверхности ее равен ρ, найти с учетом многократных

отражений интенсивность прошедшего пластинку света. 1). Для номеров варианта с первого по шестое $\rho = 7{,}5\%$. 2). Считать $\rho = 7{,}0\%$ для номеров с 7 – ого по 12 – ое. 3). Номера вариантов с 13 –ого по 18 – ое выбирают $\rho = 6{,}5\%$. 4). Значение коэффициента отражения для вариантов с 19 – ого по 24 – ое принять равным $\rho = 6{,}0\%$. 5). Для вариантов с 25 –ого по 30 – ое $\rho = 5{,}0\%$. Значения интенсивности падающего на пластинку света приведены в таблице 3.

4. Естественный свет интенсивности I проходит последовательно через поляризатор P_1, кристаллическую пластинку в полволны и поляризатор P_2. Ось пластинки установлена вертикально. Ось поляризатора P_1 образует с вертикалью угол α_1, ось поляризатора $P_2 -$ угол α_2 (углы отсчитываются от вертикали по часовой стрелке, если смотреть вдоль оси луча). Считая, что пластинка не поглощает света, а поляризаторы являются совершенными. Определить интенсивность света I_A после прохождения поляризатора P_2. Значения углов приедены в таблице 3. Величину интенсивности естественного света I падающего на поляризатор P_1 студенты выбирают сами.

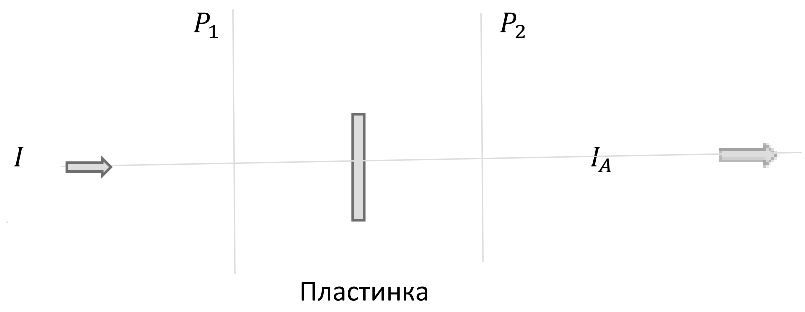


Рисунок к задаче 4.

5. Трубка с бензолом длины l находится в продольном магнитном поле соленоида, расположенного между двумя поляризаторами. Угол между плоскостями пропускания поляризаторов равен 45°. Найти минимальную напряженность магнитного поля, при которой свет с длиной волны 589 нм (заметим, что при $\lambda = 589$ нм, постоянная Верде для бензола равна $V = 2{,}59$ угл. мин/А) будет проходить через эту систему только в одном направлении. Значения длины трубки l в метрах приведены в таблице 3.

Таблица 3.

№ варианта	τ	I_0 Вт/см^2	I_0 Вт/см^2	α_1 в градусах	α_2 в градусах	l м
1	0,46	0,16	0,50	5	20	0,160
2	0,47	0,17	0,49	10	25	0,162
3	0,48	0,18	0,48	15	30	0,165
4	0,49	0,19	0,47	20	35	0,168
5	0,50	0,20	0,46	25	40	0,170
6	0,51	0,21	0,45	30	45	0,175
7	0,54	0,22	0,44	35	50	0,178
8	0,55	0,23	0,43	40	55	0,180
9	0,56	0,24	0,42	45	60	0,182
10	0,57	0,25	0,41	50	65	0,185
11	0,58	0,26	0,40	55	70	0,190
12	0,59	0,27	0,39	60	75	0,195
13	0,62	0,28	0,38	65	80	0,197
14	0,63	0,29	0,37	70	85	0,200
15	0,64	0,30	0,36	75	90	0,205
16	0,65	0,31	0,35	80	95	0,210
17	0,66	0,32	0,34	85	100	0,215
18	0,67	0,33	0,33	80	85	0,217
19	0,70	0,34	0,32	75	90	0,220
20	0,71	0,35	0,31	70	95	0,225
21	0,72	0,36	0,30	65	100	0,230
22	0,73	0,37	0,29	60	105	0,235
23	0,74	0,38	0,28	55	110	0,240
24	0,75	0,39	0,27	50	115	0,246
25	0,78	0,40	0,26	45	120	0,250
26	0,79	0,41	0,25	40	125	0,260
27	0,80	0,42	0,24	35	130	0,270
28	0,81	0,43	0,23	30	135	0,274
29	0,82	0,44	0,22	25	140	0,280
30	0,83	0,45	0,21	20	145	0,290

4. Тепловое излучение. Формула Планка.

4.1. Основные соотношения.

1. Энергетическая светимость:

$$M_э = (c/4)u,$$

где u — объемная плотность энергии теплового излучения. c — скорость света в вакууме.

2. Формула Вина и закон смещения Вина:

$$u_\omega = \omega^3\, F(\omega/T), \qquad\qquad T\lambda_m = b,$$

3. Закон Стефана – Больцмана:

$$M_э = \sigma T^4,$$

где σ — постоянная Стефана – Больцмана.

4. Формула Планка:

$$u_\omega = \frac{\hbar\omega^3}{\pi c^3}\,\frac{1}{exp(\hbar\,\omega/kT) - 1}.$$

5. Энергия и импульс фотона:

$$\varepsilon = \hbar\omega. \qquad\qquad p = (\varepsilon/c) = (\hbar\,\omega/c).$$

4.2. Решение задач.

1. Энергетическая светимость абсолютно черного тела $M_э = 3{,}0\,\frac{\text{Вт}}{\text{см}^3}$. Определить длину волны, отвечающую максимуму испускательной способности этого тела.

Решение задач.

Энергетическая светимость абсолютно черного тела, согласно закону Стефана - Больцмана, определяется формулой:

$$M_э = \sigma T^4, \tag{1}$$

Постоянная Стефана – Больцмана равна: $\sigma = 5{,}67\ 10^{-8}\ \text{Вт}/(\text{м}^2\ \text{К}^4)$. T — термодинамическая температура. Закон смещения Вина позволяет, при известной температуре абсолютно черного тела, определить длину волны, отвечающую максимуму испускательной способности нашего тела:

$$\lambda_m = b/T, \tag{2}$$

где $b = 2{,}9\ 10^{-3}$ м К.

Формулы (1) и (2) позволяют определить искомую длину волны:

$$\lambda_m = \frac{b}{(M_э/\sigma)^{1/4}}. \quad (3)$$

Подставляя численные значения в формулу (3) получим:

$$\lambda_m = 3{,}4 \text{ мкм}$$

2. Полость объемом $V = 1{,}0$ л заполнена тепловым излучением при температуре $T = 1000$ К. Найти: 1. Теплоемкость C_V; 2. Энтропию S этого излучения.

Решение

Объемная плотность энергии теплового излучения и связана с энергетической светимостью соотношением:

$$u = 4M_э/c \quad (1)$$

Тогда, согласно закону Стефана – Больцмана: $M_э = \sigma T^4$ и формуле (1), определим внутреннею энергию во всем объеме полости:

$$U = uV = (4\sigma/c)T^4V \quad (2)$$

Исходя из определения теплоемкости: $C_V = (\partial U/\partial T)_V$ получим

$$C_V = (16\sigma/c)T^3V \quad (3)$$

Подставляя в формулу (3) численные значения величин найдем:

$$C_V = 3{,}024 \cdot 10^{-9} \text{ Дж/К} = 3{,}024 \text{ нДж/К}. \quad (4)$$

Для нахождения энтропии будем исходить из второго начала термодинамики: $dS = dQ/T$. Так как в рассматриваемом случае $V = const$. $dQ = dU$ и следовательно, согласно формуле (2), имеем:

$$dS = dU/T = (16\sigma/\text{c})T^2VdT. \quad (5)$$

Учитывая, что при $T = 0$ энтропия $S_{T=0} = 0$, тогда после интегрирования окончательно определим искомую энтропию:

$$S = (16\sigma/3c)T^3V = (1/3)C_V = 1{,}008 \text{ (нДж/К)}.$$

3. Найти с помощью формулы Планка выражения, определяющие число фотонов в 1 см^3 полости при температуре T в спектральных интервалах $(\omega, \omega + d\omega)$ и $(\lambda, \lambda + d\lambda)$.

Решение

Учитывая, что согласно предположения Планка, энергия фотона равна: $\varepsilon = \hbar\omega$. Тогда число фотонов в спектральном интервале $(\omega,\ \omega + d\omega)$ примет вид:

$$n(\omega)d\omega = (u_\omega/\hbar\omega)d\omega, \qquad (1)$$

где плотность энергии, приходящая на интервал частот $d\omega$, согласно формуле Планка примет вид:

$$u_\omega d\omega = \frac{\hbar\omega^3}{\pi^2 c^3}\frac{d\omega}{exp(\hbar\omega/kT)-1} \qquad (2)$$

Подставляя (2) в формулу (1) получим:

$$n(\omega)d\omega = \frac{\omega^2}{\pi^2 c^3}\frac{1}{exp(\hbar\omega/kT)-1}d\omega \qquad (3)$$

Для записи формулы числа фотонов $n(\lambda)\, d\lambda$ в спектральном интервале $(\lambda,\ \lambda + d\lambda)$ необходимо использовать связь частоты фотонов с его длиной волны:

$$\omega = (2\pi c/\lambda); \qquad d\omega = (2\pi c/\lambda^2)d\lambda \qquad (4)$$

Тогда соотношения (4) позволяют, вместо формулы (3), записать:

$$n(\lambda)d\lambda = -n(\omega)d\omega = \frac{(2\pi c/\lambda)^2}{\pi^2 c^3}\frac{1}{exp(2\pi\hbar\lambda/kT\lambda)-1}(2\pi c/\lambda^2)d\lambda = \frac{8\pi}{\lambda^4}\frac{1}{exp(2\pi\hbar c/kT\lambda)-1}d\lambda.$$

4. Лазер излучил в импульсе длительностью $\tau = 0{,}13$ мс пучок света с энергией $E = 10$ дж. Найти среднее давление такого светового импульса, если сфокусировать в пятнышко диаметром $d = 10$ мкм на поверхность, перпендикулярную к пучку, с коэффициентом отражения $\rho = 0{,}50$.

Решение

Среднее давление, оказываемое световым импульсом на поверхность пятнышка определяется формулой:

$$< p >= F/S = 4F/\pi d^2, \qquad (1)$$

где сила F равна моменту импульса переданное поверхности в единицу времени.

При поглощении поверхности передается момент импульса света длительностью τ:

$$(1-\rho)(E/c\tau), \qquad (2)$$

а при отражении поверхности передается двойной момент импульса света равный:

$$2\rho(E/c\tau). \qquad (3)$$

Из выражений (2) и (3), что суммарный момент импульса света переданный поверхности за время τ, равен:

$$2\rho(E/c\tau) + (1-\rho)(E/c\tau) = (1+\rho)(E/c\tau). \qquad (4)$$

формула (4) позволяет определить среднее значение давления на поверхность площадью $S = (\pi d^2/4)$ оказываемое световым импульсом:

$$< p > = \frac{4E(1+\rho)}{\pi d^2 c\tau}$$

5. Найти скорость электрона, при которой его импульс равен импульсу фотона с длиной волны $\lambda = 5{,}0$ пм.

Решение

Импульс фотона определяется формулой:

$$p_{\text{ф}} = \hbar\omega/c = 2\pi\hbar/\lambda, \tag{1}$$

где $\hbar = 1{,}0546 \cdot 10^{-34}$ Дж $\cdot$ с — постоянная Планка.

Импульс электрона равен:

$$p_{\text{э}} = mv = m_0 v/\sqrt{1-(v/c)^2}, \tag{2}$$

где масса покоя электрона равна $m_0 = 0{,}911 \cdot 10^{-30}$ кг, $c = 3{,}0 \cdot 10^8$ м/с — скорость света в вакууме и v — искомая скорость электрона.

Из формул (1) и (2), согласно условию задачи, запишем:

$$m_o v/\sqrt{1-(v/c)^2} = 2\pi\hbar/\lambda \tag{3}$$

Выражение (3) нетрудно представить в виде:

$$\beta/\sqrt{1-\beta^2} = \lambda_{\text{c}}/\lambda, \tag{4}$$

где $\beta \equiv (v/c)$, $\lambda_{\text{c}} = (2\pi\hbar/m_0 c)$ — комптоновская длина волны электрона и равна λ_c =2,426 пм.

Из уравнения (4) можно записать выражение для искомой скорости электрона:

$$v = c/\sqrt{1+(\lambda/\lambda_c)^2} \tag{5}$$

Подставив в формулу (5) численные значения скорости света в вакууме, длину волны электрона Комптона и длину волны фотона, приведенную в условии задачи, получим:

$$v = 1{,}31 \cdot 10^8 \text{ м/с}.$$

4.3. Задание №4.

1. Имеются два абсолютно черных источника теплового излучения. Температура одного из них $T_1 = 2400$ К $-$ для четных номеров варианта, $T_1 = 2600$ К $-$ для нечетных номеров. Найти температуру другого источника, если длина волны, отвечающая максимуму пропускательной способности, на $\Delta\lambda$ больше длины волны, соответствующей максимуму испускательной способности первого источника. Значения $\Delta\lambda$ приведены в таблице 4.

2. Считая, что спектральное распределение энергии теплового излучения подчиняется формулу Вина $u(\omega, T) = A\omega^3 e^{-(a\omega/T)}$, где $a = 7{,}64$ пс $\cdot$ К/рад., найти для температуры T, приведенных в таблице 4, найти: 1) Частоту излучения; 2) Длину волны излучения.

3. Найти с помощью формулы Планка мощность излучения единицы поверхности абсолютно черного тела, приходящего на узкий интервал длин волн $\Delta\lambda$(нм) вблизи максимума спектраль - ной плотности излучения, при температуре тела T. Значения $\Delta\lambda$ и температура тела T приведены в таблице 4.

4. Плоская световая волна интенсивности I падает на плоскую зеркальную поверхность с коэффициентом отражения $\rho = 0{,}8$. Определить с помощью корпускулярных представлений значение давления, которое оказывает свет на эту поверхность при угле падения θ. Значения величин θ и интенсивности I приведены в таблице 4.

5. Плоская световая волна интенсивности I освещает шар с абсолютно зеркальной поверхностью. Радиус шара R. Найти с помощью корпускулярных представлений силу светового давления, испытываемую шаром. Значения радиуса шара и интенсивности световой волны приведены в таблице 4.

Таблица 4.

№ варианта	$\Delta\lambda$ мкм	T кК	$\Delta\lambda$ нм	T К	θ град.	I Вт/см^2	R см	I Вт/см^2
1	0,20	1,50	0,7	2850	12	0,10	4,6	0,74
2	0,22	1,52	0,8	2900	13	0,12	4,7	0,73
3	0,24	1,54	0,9	2950	14	0,13	4,8	0,72
4	0,25	1,56	1,0	3000	15	0,14	4,9	0,71
5	0,26	1,58	1,1	3050	20	0,15	5,0	0,70
6	0,28	1,60	1,2	3100	25	0,16	5,1	0,69
7	0,30	1,62	1,3	3150	30	0,17	5,2	0,68
8	0,32	1,64	1,4	3155	35	0,18	5,3	0,67
9	0,34	1,66	1,5	3160	40	0,19	5,4	0,66
10	0,36	1,68	1,6	3164	45	0,20	5,5	0,65
11	0,38	1,70	1,7	3166	50	0,21	5,6	0,64
12	0,40	1,72	1,8	3167	55	0,22	5,7	0,63
13	0,42	1,74	1,9	3168	60	0,23	5,8	0,62
14	0,44	1,76	2,0	3169	61	0,24	5,9	0,61
15	0,46	1,78	2,1	3170	62	0.25	6,0	0,60
16	0,48	1,80	2,2	3171	63	0,26	6,1	О,62
17	0,50	1,82	2,3	3172	64	0,26	6,2	0,63
18	0,52	1,84	2,4	3173	65	0,27	6,3	0,64
19	0,54	1,86	2,3	3174	66	0,28	6,4	0,65
20	0,56	1,88	2,2	3176	67	0,29,	6,5	0,66
21	0,58	1,90	2,1	3178	68	0,30	6,6	0,67
22	0,60	1,92	2,0	3182	69	0,31	6,7	0,68
23	0,62	1,94	1,9	3188	70	0,32	6,8	0,69
24	0,64	1,96	1,8	3194	71	0,33	6,9	0,70
25	0,66	1,98	1,7	3200	72	0,34	7,0	0,71
26	0,68	2,00	1,6	3210	73	0,35	7,1	0,72
27	0,71	2,02	1,5	3220	74	0,36	7,2	0,73
28	0,74	2,04	1,4	3250	75	0,37	7,3	0,74
29	0,77	2,07	1,3	3280	76	0,38	7,4	0,75
30	0,80	3,00	1,2	3330	77	0,39	7,5	О,76

5. Эффект Комптона и элементы атомной физики.

5.1. Основные соотношения.

1. Эффект Комптона:

$$\Delta\lambda = 2\pi\lambda_c(1-\cos\theta),$$

где $\lambda_c = \hbar/mc -$ комптоновская длина волны.

2. Длина волны де – Бройля для частицы с импульсом p:

$$\lambda = 2\pi\hbar/p.$$

3. Принцип неопределенности Гейзенберга:

$$\Delta x \cdot \Delta p_x \;\geq\; \hbar.$$

5.2 Решение задач.

1. Фотон с энергией $\hbar\omega = 250$ кэВ рассеялся под углом $\theta = 120^{\text{o}}$ на первоначально покоившемся свободном электроне. Определить энергию рассеянного фотона.

Решение.

Изменение длины волны, согласно эффекта Комптона, равна:

$$\lambda' = \lambda + \lambda_c(1-\cos\theta), \qquad (1)$$

где $\lambda_c = 2\pi\hbar/m_0c -$ комптоновская длина волны покоившевся электрона. Используя соотношение, связывающее длину волны фотона с его частотой $\lambda = 2\pi c/\omega$ формула (1) примет вид:

$$1/\omega' = 1/\omega + (\hbar\,\omega/m_0c^2)(1-\cos\theta). \qquad (2)$$

Определение энергии фотона $\varepsilon = \hbar\omega$ позволяет выражение (2) записать формулу для энергии рассеянного фотона:

$$\hbar\omega' = \frac{\hbar\omega}{1+(\hbar\omega/m_0c^2)(1-\cos\theta)} = \frac{\hbar\omega}{1+2(\hbar\omega/m_0c^2)sin^2(\theta/2)}. \qquad (3)$$

Поставляя численные значения массы покоя электрона, которая равна $m_0 = 0{,}911\cdot10^{-30}$ кг, $c == 3{,}0\cdot10^8$ м/с – скорость света в вакууме, а также численные значения приведенные в условии задачи получим:

$$\hbar\omega' = 144 \text{ кэВ}.$$

2. Узкий пучок монохроматического рентгеновского излучения падает на рассеивающее вещество. При этом длины волн смещенных составляющих излучения, рассеянного под углами $\theta_1 = 60^{\text{o}}$ и

$\theta_2 = 120^{\circ}$ отличаются друг от друга в $\eta = 2{,}0$ раза. (считать, что рассеяние происходит на свободных электронах). Найти длину волны падающего излучения.

Решение

Запишем формулу Комптона:

$$\Delta\lambda = \lambda_c(1 - \cos\theta), \tag{1}$$

$\lambda_c = 2\pi\hbar/mc -$ комптоновская длина волны частицы.

Длина волны λ_1, рассеянного под углом θ_1согласно формуле Комптона (1), примет вид:

$$\lambda_1 = \lambda + \lambda_c(1 - \cos\theta_1), \tag{2}$$

где $\lambda -$ длина волны падающего излучения.

Также находим для λ_2, рассеянного под углом θ_2, формулу:

$$\lambda_2 = \lambda + \lambda_c(1 - \cos\theta_2). \tag{3}$$

Учитывая, что согласно условия задачи выполняется соотношение:

$$\lambda_2 = \eta\lambda_1 \tag{4}$$

Формулы (2) и (3) позволяют записать (4) в виде равенства, которое позволит определить искомую длину волны λ падающего излучения:

$$\lambda + \lambda_c(1 - \cos\theta_2) = \eta[\lambda + \lambda_c(1 - \cos\theta_1)] \tag{5}$$

Выражение (5) представим в виде: $(\eta - 1)\lambda = \lambda_c[(1 - \cos\theta_2) - \eta(1 - \cos\theta_1)]$. Отсюда находим:

$$\lambda = 2\lambda_c\,[sin^2(\theta_2/2) - \eta sin^2(\theta_1/2)]/(\eta - 1). \tag{6}$$

Надеюсь вы поняли, что при получении выражения (5) использовалась формула тригонометрии: $1 - \cos\theta = 2sin^2(\theta/2)$. Подставляя численные значения $\theta_1 = 60^{\circ}$, $\theta_2 = 120^{\circ}$ и $\eta = 2{,}0$, а также комптоновскую длину волны электрона $\lambda_c = 2{,}426 \cdot 10^{-12}$ м, получим:

$$\lambda = 1{,}213 \cdot 10^{-12} \text{ м} \approx 1{,}2 \text{ пм}.$$

3. При каком значении кинетической энергии длина волны де-Бройля равна длине волны Комптона?

Решение.

Длина волны де-Бройля равна:

$$\lambda = (2\pi\hbar/p) = 2\pi\hbar\left(\sqrt{1 - (v/c)^2}/m_0 v\right), \tag{1}$$

где $v -$ скорость, которую приобретает электрон массой покоя m_0 при падении на него фотона.

Комптоновская длина волны электрона покоя равна:

$$\lambda_c = (2\pi\hbar/m_0c). \quad (2)$$

Приравняв, согласно условию задачи, формулы (1) и (2) нетрудно оптеделить:

$$(v/c) = \sqrt{1-(v/c)^2}. \quad (3)$$

Из равенства (3) находим:

$$\beta \equiv (v/c) = 1/\sqrt{2}. \quad (4)$$

Тогда, используя значение (4), получим кинетическую энергию электрона при падении фотона на покоящийся электрон:

$$E_k = \left(m_0c^2/\sqrt{1-\beta^2}\right) - m_0c^2 = \left(\sqrt{2}-1\right)m_0c^2 = 0{,}21 \text{ МэВ}.$$

4. Электрон с кинетической энергией $E_k \approx 4$эВ локализован в области размером $l \approx 1$мкм. Оценить с помощью соотношения неопределенностей относительную неопределенность его скорости.

Решение

Неопределенность координаты электрона, локализованного в области размером l, можно принять равным $\Delta x \approx l$. Тогда соотношение неопределенностей для нашего случая примет вид:

$$\Delta p_x \cdot \Delta x \geq \hbar \quad (1)$$

Из соотношения неопределенности (1) можно записать:

$$\Delta p_x \geq (\hbar/\Delta x) = \hbar/l \quad (2)$$

Учитывая, что импульс электрона p_x можно представить в виде:

$$p_x \approx 1/\sqrt{2m_0E_k}, \quad (3)$$

где $m_0 = 0{,}911 \cdot 10^{-30}$ кг – масса покоя электрона.

Отметим, что искомая относительная неопределенность $\Delta v_x/v_x$ скорости электрона равна $\Delta p_x/p_x$. Тогда, согласно уравнениям (2) и (3), определим:

$$\Delta v_x/v_x = \hbar/l\sqrt{2m_0E_k} \quad (4)$$

Подставляя численные значения, заметим что $\hbar = 1{,}0546 \cdot 10^{-34}$ Дж·с, в формулу (4) получим:

$$\frac{\Delta v_x}{v_x} = 10^{-4}.$$

5. Оценить с помощью соотношения неопределенностей минимально возможную энергию электрона в атоме водорода и соответствующее эффективное расстояние его от ядра.

Решение

Соотношение неопределенностей, применительно к атому водорода, примет вид:

$$\Delta p \cdot \Delta r \geq \hbar \qquad (1)$$

Для оценки размера атома r водорода и минимально возможной энергии E_{min} электрона в атоме водорода предположим $\Delta r \sim r$; $\Delta p \sim p$. Тогда, исходя из соотношения (1), можно записать:

$$r \cdot p \approx \hbar \qquad (2)$$

Энергия электрона в атоме водорода, согласно соотношения (2), будет равна:

$$E = (p^2/2m) - (1/4\pi\varepsilon_o)(e^2/r) = (\hbar^2/2mr^2) - (1/4\pi\varepsilon_o)(e^2/r) \qquad (3)$$

Подставляя формулу (3) в условие минимума энергии $(\partial E/\partial r) = 0$ нетрудно оценить эффективное расстояние электрона от ядра водорода:

$$r_{\text{эфф}} \approx r = 4\pi\varepsilon_o(\hbar^2/me^2) = 52{,}9 \text{ пм} \qquad (4)$$

Для оценки минимально возможной энергии электрона в атоме водорода необходимо выражение (4) подставить в формулу (3). Тогда получим:

$$E_{min} = \frac{\hbar^2}{2m}\left(\frac{1}{4\pi\varepsilon_o}\frac{me^2}{\hbar^2}\right)^2 - \frac{e^2}{4\pi\varepsilon_o}\frac{me^2}{4\pi\varepsilon_o\hbar^2} = -\left(\frac{1}{4\pi\varepsilon_o}\right)^2\frac{me^2}{2\hbar^2} = -13{,}6 \text{ эВ.}$$

5.3. Задание №5.

1. Фотон с энергией $\hbar\omega$ в МэВ рассеялся на покоившемся свободном электроне. Найти кинетическую энергию электрона отдачи, если в результате рассеяния длина волны фотона изменилась на η. 1). Для номеров варианта с первого по шестое считать $\eta = 35\%$. 2). $\eta = 30\%$ для номеров варианта с 7 - ого по 12 – ое. 3). Для номеров вариантов с 13 – ого по 18 – ое считать $\eta == 25\%$. 4). С 19 – ого по 24 – ое $\eta = 20\%$. 5). Варианты номеров с 25 – ого по 30 – ое выбирают значение $\eta = 15\%$. Значения энергии $\hbar\omega$ приведены в таблице 5.
2.Найти длину волны излучения, если максимальная кинетическая комптоновского электрона равна $E_{k,max}$, значения которых приведены в таблице 5. Следует отметить, что электрон имеет максимальную кинетическую энергию, при условии что фотон рассеялся под углом 180^{o}.
3. Какую энергию сообщить электрону, чтобы его дебройлевская длина волны уменьшилась от λ_1 до λ_2 ? Их значения приведены в таблице 5.
4. Оценить с помощью соотношения неопределенностей минимальную кинетическую энергию электрона, локализованного в области размером l в нм, приведенного в таблице 5.
5.Параллельный пучок атомов водорода со скоростью v падает нормально на диафрагму с узкой щелью, за которой на расстоянии l расположен экран. Оценить с помощью соотношения неопределенностей ширину b щели, при которой ширина изображения ее на экране будет минимальной. 1). Для номеров с первого по шестое скорость $v =$ 100 м/с. 2). Для номеров варианта с 7 ого по 12 – ое положить скорость атома водорода $v =$ 150 м/с. 3). $v =$ 300 м/с для номеров варианта с 13 – ого по 18 – ое. 4). Для вариантов с 19 – ого по 24 – ое считать, что скорость равна $v =$ 450 м/с. Значения l в см приведены в таблице 5.

Таблица 5.

№ варианта	$\hbar\omega$ МэВ	$E_{k,max}$ МэВ	λ_1 пм	λ_2 пм	l нм	l см
1	0,98	0,24	62	124	0,05	8
2	0,94	0,23	61	122	0,06	10
3	0,87	0,22	60	120	0,07	12
4	0,82	0,21	59	118	0,08	14
5	0,77	0,20	58	116	0,09	16
6	0,72	0.19	57	114	0,10	20
7	0,70	0,18	56	112	0,12	23
8	0,75	0,17	55	110	0,14	27
9	0,80	0,16	54	108	0,18	35
10	0,85	0,15	53	106	0,21	42
11	0,90	0,14	52	104	0,23	47
12	1,00	0,13	51	102	0,25	52
13	1,10	0,12	50	100	0,27	60
14	1,05	0,11	49	98	0,30	65
15	1,00	0,10	48	96	0,36	71
16	0,95	0.12	47	94	0,40	77
17	0,90	0,13	46	92	0,35	83
18	0,85	0,14	45	90	0,31	90
19	0,92	0,15	49	98	0,28	91
20	0,97	0,16	50	100	0,26	100
21	1.02	0,17	51	102	0,24	107
22	1,07	0,18	52	104	0,22	113
23	1,12	0,19	53	106	0,20	118
24	1.19	0,20	54	108	0,13	125
25	1.20	0,21	55	110	0,11	126
26	1,30	0,22	56	112	0,09	135
27	1,35	0,23	57	114	0,08	155
28	1,45	0,24	58	116	0,07	185
29	1,50	0,25	59	118	0,06	220
30	1,60	0,26	60	120	0,05	250

ЛИТЕРАТУРА.

1. Иродов И.Е. Задачи по общей физике. М.: БИНОМ. Лаборатория знаний, 2012, 431с.

2. Савельев И.В. Курс физики. Т.2. СПб.: Издательство <<Лань>> , 2008, 480с.

3. Савельев И.В. Курс физики. Т.3. СПб.: Издательство <<Лань>> , 2007, 301с.

4. Трофимова Т.И. Курс физики. М., Академия, 2007, 542с.

5. Браже Р.А. Лекции по физике. СПб.: Издательство <<Лань>>, 2013, 320с.