Министерство образования и науки Российской Федерации

САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКИЙ
ПОЛИТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ ПЕТРА ВЕЛИКОГО

Л. Г. Герчиков

Квантовая теория рассеяния

Учебное пособие

Санкт-Петербург
2017

Курс предназначен для студентов 4го курса, обучающихся в бакалавриате . Основной задачей курса является, с одной стороны, создание у студентов общих представлений о характере процессов рассеяния, с другой стороны, задачей курса является ознакомление студентов с основными методами решения задач рассеяния, возникающими в различных областях современной физической науки: физике твердого тела, атомной физике, физике атомных ядер и элементарных частиц. Поэтому значительное внимание в курсе лекций уделяется рассмотрению наиболее общих, универсальных, свойств процессов рассеяния, таких как аналитические свойства матрицы рассеяния, характеристика резонансных процессов и т.п.

Важной составляющей курса является решение задач. В конце каждого раздела курса находиться список задач по соответствующей тематике.

Данный курс опирается на следующие дисциплины: математический анализ, линейная алгебра, теория функций комплексной переменной и квантовая механика, нерелятивистская теория. Все необходимые сведения по «квантовой теории многих тел», необходимые для понимания теории многочастичного рассеяния, включены в программу данного курса.

1. Потенциальное (упругое) рассеяние

Общая постановка задачи, основные понятия и определения

Уравнение Шредингера для частица массы m **в поле рассеивающего потенциала** $U(r)$**:**

$$\left(\frac{\hat{p}^2}{2m} + U(r)\right)\psi(r) = \varepsilon\psi(r)$$

Волновая функция $\psi(r)$ **вдали от рассеивателя** $\mathbf{r} \to \infty$

$$\psi_{\mathbf{k}}(\mathbf{r}) = e^{i\mathbf{kr}} + \frac{f(\vartheta)}{r}e^{ikr}$$

$k = (2m\varepsilon)^{1/2}/\hbar$ - волновой вектор, $f(\theta)$ - амплитуда рассеяния

Определение сечения рассеяния

j **– плотность потока частиц,** v ***– их скорость,*** N **– число актов рассеяния в единицу времени**

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{dN}{jd\Omega}, \qquad dN = v|\psi|^2 dS = \frac{v|f|^2}{r^2}r^2 d\Omega$$

Дифферен-циальное сечение рассеяния

$$\boxed{\frac{d\sigma}{d\Omega} = |f(\vartheta)|^2}$$

$$\boxed{\sigma = \int |f(\vartheta)|^2 d\Omega}$$

Полное сечение рассеяния

Задача

1. Оценить полное сечение рассеяния частицы массы m в потенциале, убывающем на больших расстояниях как α/r^n.

2. Теория возмущений

2.1 Приближение Борна

Условие приближения: потенциал рассеивателя является малым возмущением

$$mUa^2/\hbar^2 << 1, \quad Ua \ /\hbar v << 1 \quad ka >> 1$$

Вероятность рассеяния Вычисляется по правилу Ферми:

$$dW = \frac{2\pi}{\hbar}\left|\langle \mathbf{k}'|U|\mathbf{k}\rangle\right|^2 \delta\left(\frac{\hbar^2 k^2}{2m} - \frac{\hbar^2 k'^2}{2m}\right)\frac{d\mathbf{k}'}{(2\pi)^3}$$

Дифференциальное сечение рассеяния:

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{dW}{jd\Omega} = \frac{2\pi}{\hbar v}\int\left|\langle \mathbf{k}'|U|\mathbf{k}\rangle\right|^2 \delta\left(\frac{\hbar^2 k^2}{2m} - \frac{\hbar^2 k'^2}{2m}\right)\frac{k'^2\, dk'}{(2\pi)^3} = \boxed{\frac{m^2}{(2\pi\hbar^2)^2}\left|\langle \mathbf{k}'|U|\mathbf{k}\rangle\right|^2},$$

$$\langle \mathbf{k}'|U|\mathbf{k}\rangle = \int U(\mathbf{r})e^{i(\mathbf{k}-\mathbf{k}')\mathbf{r}}d\mathbf{r} = U(\mathbf{q}), \quad \mathbf{q} = \mathbf{k}' - \mathbf{k},$$

$$U(\mathbf{q}) = 4\pi\int_0^\infty U(r)\frac{\sin(qr)}{q}rdr, \quad \boxed{\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{4m^2}{\hbar^4}\left[\int_0^\infty U(r)\frac{\sin(qr)}{q}rdr\right]^2}$$

Получено дифференциальное сечение рассеяния в Борновском приближении

Задачи

1. Найти в борновском приближении дифференциальное сечение рассеяния быстрой частицы массы m на прямоугольной сферической потенциальной яме глубины U и радиуса R. Указать пределы применимости борновского приближения.
2. Найти в борновском приближении дифференциальное сечение рассеяния частицы массы m на потенциальной яме $U(r)=-\alpha\delta(r-R)$.
3. Найти в борновском приближении дифференциальное сечение рассеяния заряженной частицы на Кулоновском потенциале. Указать пределы применимости борновского приближения.
4. Найти в борновском приближении дифференциальное сечение рассеяния частицы с массой m на нелокальном сепарабельном потенциале U, $\langle \mathbf{r}'|U|\mathbf{r}\rangle = \alpha v(\mathbf{r}')v(\mathbf{r})$, где $v(\mathbf{r})$ некоторая вещественная функция, достаточно быстро спадающая с ростом r.

2.2 Метод функций Грина (метод последовательных приближений)

Последовательные приближения решения уравнения Шредингера:

$$\left(\frac{\hat{p}^2}{2m} + U(\mathbf{r})\right)\psi(\mathbf{r}) = \varepsilon\psi(\mathbf{r}),$$

$$\left(\varepsilon - \hat{H}_0\right)\psi(\mathbf{r}) = U(\mathbf{r})\psi(\mathbf{r}), \quad \hat{H}_0 = \frac{\hat{p}^2}{2m}$$

***H_0 – невозмущенный гамильтониан, $U(r)$* – малое возмущение,**
Ряд последовательных приближений для волновой функции:

$$\psi = \psi^{(0)} + \psi^{(1)} + \psi^{(2)} + \ldots$$

$$\psi^{(0)} = e^{i\mathbf{kr}}, \quad \psi^{(1)}(r \to \infty) = \frac{f^{(1)}(\vartheta)}{r} e^{ikr}$$

Уравнение для поправки первого порядка к волновой функции:

$$(\varepsilon - \hat{H}_0)\psi^{(0)}(\mathbf{r}) = 0, \quad \psi^{(0)}(\mathbf{r}) = e^{i\mathbf{kr}},$$

$$(\varepsilon - \hat{H}_0)\psi^{(1)}(\mathbf{r}) = U(\mathbf{r})\psi^{(0)}(\mathbf{r}),$$

$$\psi^{(1)}(\mathbf{r}) = (\varepsilon - \hat{H}_0)^{-1} U(\mathbf{r})\psi^{(0)}(\mathbf{r}).$$

Функция Грина (резольвента дифференциального уравнения):

$$\hat{G}(\varepsilon) = (\varepsilon - \hat{H}_0)^{-1}, \quad (\varepsilon - \hat{H}_0)\hat{G}(\varepsilon) = \hat{1}.$$

$$\psi^{(1)}(\mathbf{r}) = \hat{G}(\varepsilon)U(\mathbf{r})\psi^{(0)}(\mathbf{r}) = \int \hat{G}(\varepsilon,\mathbf{r},\mathbf{r}')U(\mathbf{r}')\psi^{(0)}(\mathbf{r}')d\mathbf{r}'.$$

Нахождение функция Грина свободной частицы

$$(\varepsilon - \frac{\hat{p}^2}{2m})G(\varepsilon,\mathbf{r},\mathbf{r}') = \delta(\mathbf{r}-\mathbf{r}').$$

$$G(\varepsilon,\mathbf{r},\mathbf{r}') = G(\varepsilon,|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|) = G(\varepsilon,r) = A\frac{e^{ikr}}{r},$$

$$k = \sqrt{2m\varepsilon}/\hbar,$$

$$r \to 0 \quad \frac{\hbar^2\Delta}{2m}G(\varepsilon,r) = \delta(\mathbf{r}),$$

$$\Delta\varphi = -4\pi\rho = -4\pi q\delta(\mathbf{r}), \quad \varphi = \frac{q}{r},$$

$$A = -\frac{2m}{4\pi\hbar^2}, \quad G(\varepsilon,r) = -\frac{m}{2\pi\hbar^2}\frac{e^{ikr}}{r}$$

Определение константы А из аналогии с уравнением Пуассона

Явное выражение для поправки первого порядка к волновой функции:

$$\psi^{(1)}(\mathbf{r}) = -\frac{m}{2\pi\hbar^2}\int \frac{e^{ik|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} U(\mathbf{r}')e^{i\mathbf{k}\mathbf{r}'}d\mathbf{r}',$$

$$r \to \infty \quad \psi^{(1)}(\mathbf{r}) = -\frac{m}{2\pi\hbar^2 r}\int e^{ik|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} U(\mathbf{r}')e^{i\mathbf{k}\mathbf{r}'}d\mathbf{r}',$$

Асимптотическое поведение волновой функции:

$$|\mathbf{r}-\mathbf{r}'| = r - \mathbf{r}\mathbf{r}'/r, \quad \psi^{(1)}(\mathbf{r}) = -\frac{me^{ikr}}{2\pi\hbar^2 r}\int e^{-ik\frac{\mathbf{r}\mathbf{r}'}{r}} U(\mathbf{r}')e^{i\mathbf{k}\mathbf{r}'}d\mathbf{r}',$$

$$\mathbf{k}' = k\frac{\mathbf{r}}{r}, \quad f^{(1)} = -\frac{m}{2\pi\hbar^2}\int U(\mathbf{r})e^{-i\mathbf{q}\mathbf{r}}d\mathbf{r}, \quad \mathbf{q} = \mathbf{k}' - \mathbf{k}$$

Формула Борна $\quad f^{(1)}(\mathbf{k}',\mathbf{k}) = -\dfrac{m}{2\pi\hbar^2}U(\mathbf{q}), \quad \mathbf{q} = \mathbf{k}' - \mathbf{k}$

Последующие приближения

$$\left(\varepsilon - \hat{H}_0\right)\psi(\mathbf{r}) = U(r)\psi(\mathbf{r}),$$

$$\psi = \psi^{(0)} + \psi^{(1)} + \psi^{(2)} + \ldots, \quad \psi^{(0)} = e^{i\mathbf{kr}}, \quad \psi^{(1)}(\mathbf{r}) = \hat{G}(\varepsilon)U(\mathbf{r})\psi^{(0)}(\mathbf{r}),$$

$$\left(\varepsilon - \hat{H}_0\right)\psi^{(n)}(\mathbf{r}) = U(\mathbf{r})\psi^{(n-1)}(\mathbf{r}), \quad \psi^{(n)} = \left(\varepsilon - \hat{H}_0\right)^{-1} U(\mathbf{r})\psi^{(n-1)}(\mathbf{r}),$$

$$\psi^{(n)}(\mathbf{r}) = \hat{G}(\varepsilon)U(\mathbf{r})\psi^{(n-1)}(\mathbf{r}) = \int \hat{G}(\varepsilon,\mathbf{r},\mathbf{r}')U(\mathbf{r}')\psi^{(n-1)}(\mathbf{r}')d\mathbf{r}',$$

Суммирование ряда теории возмущений:

$$\psi = \psi^{(0)} + \hat{G}(\varepsilon)U\psi^{(0)} + \hat{G}(\varepsilon)U\hat{G}(\varepsilon)U\psi^{(0)} + \ldots,$$

$$\psi = \psi^{(0)} + \hat{G}(\varepsilon)\left(U + U\hat{G}(\varepsilon)U + \ldots\right)\psi^{(0)} = \psi^{(0)} + \hat{G}(\varepsilon)\hat{T}\psi^{(0)}$$

Оператор перехода (T ***– матрица)***

$$\hat{T} = U + U\hat{G}(\varepsilon)U + U\hat{G}(\varepsilon)U\hat{G}(\varepsilon)U + \ldots$$

Амплитуда рассеяния, разложение в ряд теории возмущений

$$f(\mathbf{k}',\mathbf{k}) = f^{(1)}(\mathbf{k}',\mathbf{k}) + f^{(2)}(\mathbf{k}',\mathbf{k}) + \ldots$$

Выражение амплитуда рассеяния через T - матрицу

$$\psi(\mathbf{r}) - e^{i\mathbf{kr}} = \hat{G}(\varepsilon)\hat{T}\psi^{(0)} = \int \hat{G}(\varepsilon,\mathbf{r},\mathbf{r}')\hat{T}(\mathbf{r}',\mathbf{r}'')\psi^{(0)}(\mathbf{r}'')d\mathbf{r}'d\mathbf{r}'' =$$

$$= -\frac{m}{2\pi\hbar^2}\int \frac{e^{ik|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}\hat{T}(\mathbf{r}',\mathbf{r}'')e^{i\mathbf{kr}''}d\mathbf{r}'d\mathbf{r}'',$$

$$r \to \infty \quad \psi(\mathbf{r}) - e^{i\mathbf{kr}} = -\frac{m}{2\pi\hbar^2 r}\int e^{ik|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}\hat{T}(\mathbf{r}',\mathbf{r}'')e^{i\mathbf{kr}''}d\mathbf{r}'d\mathbf{r}'' =$$

$$|\mathbf{r}-\mathbf{r}'| = r - \mathbf{rr}'/r, \quad \psi(\mathbf{r}) - e^{i\mathbf{kr}} = -\frac{me^{ikr}}{2\pi\hbar^2 r}\int e^{-ik\frac{\mathbf{rr}'}{r}}\hat{T}(\mathbf{r}',\mathbf{r}'')e^{i\mathbf{kr}''}d\mathbf{r}'d\mathbf{r}'',$$

$$\psi(\mathbf{r}) - e^{i\mathbf{kr}} = -\frac{me^{ikr}}{2\pi\hbar^2 r}\int e^{-ik\frac{\mathbf{rr}'}{r}}\hat{T}(\mathbf{r}',\mathbf{r}'')e^{i\mathbf{kr}''}d\mathbf{r}'d\mathbf{r}'',$$

$$\psi(\mathbf{r}) - e^{i\mathbf{kr}} = \frac{f(\mathbf{k}',\mathbf{k})}{r}e^{ikr}, \quad \mathbf{k}' = k\frac{\mathbf{r}}{r}, \quad k\frac{\mathbf{rr}'}{r} = \mathbf{k}'\mathbf{r}'$$

$$f(\mathbf{k}',\mathbf{k}) = -\frac{m}{2\pi\hbar^2}\int e^{-i\mathbf{k}'\mathbf{r}'}\hat{T}(\mathbf{r}',\mathbf{r}'')e^{i\mathbf{kr}''}d\mathbf{r}'d\mathbf{r}'' = -\frac{m}{2\pi\hbar^2}\hat{T}(\mathbf{k}',\mathbf{k}),$$

$$\hat{T}(\mathbf{k}',\mathbf{k}) = \int e^{-i\mathbf{k}'\mathbf{r}'}\hat{T}(\mathbf{r}',\mathbf{r}'')e^{i\mathbf{kr}''}d\mathbf{r}'d\mathbf{r}'' = \left\langle \mathbf{k}' \middle| \hat{T} \middle| \mathbf{k} \right\rangle.$$

$$\boxed{f(\mathbf{k}',\mathbf{k}) = -\frac{m}{2\pi\hbar^2}\hat{T}(\mathbf{k}',\mathbf{k})}$$

Амплитуда рассеяния в импульсном представлении

$$f(\mathbf{k}',\mathbf{k}) = -\frac{m}{2\pi\hbar^2}\int e^{-i\mathbf{k}'\mathbf{r}}\hat{T}(\mathbf{r},\mathbf{r}')e^{i\mathbf{kr}'}d\mathbf{r}d\mathbf{r}',$$

$$\hat{T}(\mathbf{r},\mathbf{r}') = U(\mathbf{r})\delta(\mathbf{r}-\mathbf{r}') + U(\mathbf{r})\hat{G}(\varepsilon,\mathbf{r},\mathbf{r}')U(\mathbf{r}') + \ldots,$$

Функция Грина в импульсном представлении

$$G(\varepsilon,\mathbf{r}-\mathbf{r}') = -\frac{m}{2\pi\hbar^2}\frac{e^{ik|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} = \int G(\varepsilon,\mathbf{p})e^{i\mathbf{p}(\mathbf{r}-\mathbf{r}')}\frac{d\mathbf{p}}{(2\pi\hbar)^3},$$

$$G(\varepsilon,\mathbf{p}) = \int G(\varepsilon,\mathbf{r})e^{-i\mathbf{p}\mathbf{r}}d\mathbf{r} = \frac{1}{\varepsilon - \dfrac{p^2}{2m} + i\delta}$$

$$f^{(1)}(\mathbf{k}',\mathbf{k}) = -\frac{m}{2\pi\hbar^2}\int U(\mathbf{r})e^{-i(\mathbf{k}'-\mathbf{k})\mathbf{r}}d\mathbf{r} = -\frac{m}{2\pi\hbar^2}U(\mathbf{k}'-\mathbf{k})$$

$$f^{(2)}(\mathbf{k}',\mathbf{k}) = -\frac{m}{2\pi\hbar^2}\iiint d\mathbf{r}d\mathbf{r}'\, e^{-i\mathbf{k}'\mathbf{r}}U(\mathbf{r})\frac{e^{i\mathbf{p}(\mathbf{r}-\mathbf{r}')}}{\varepsilon - \dfrac{p^2}{2m} + i\delta}U(\mathbf{r}')e^{i\mathbf{k}\mathbf{r}'}\frac{d\mathbf{p}}{(2\pi\hbar)^3} =$$

$$= -\frac{m}{2\pi\hbar^2}\int U(\mathbf{k}'-\mathbf{p})\frac{1}{\varepsilon - \dfrac{p^2}{2m} + i\delta}U(\mathbf{p}-\mathbf{k})\frac{d\mathbf{p}}{(2\pi\hbar)^3}$$

Уравнение Липмана-Швингера

для волновой функции

$$\left(\varepsilon - \hat{H}_0\right)\psi(\mathbf{r}) = U(\mathbf{r})\psi(\mathbf{r})$$

$$\psi = \psi^{(0)} + \hat{G}(\varepsilon)U\psi^{(0)} + \hat{G}(\varepsilon)U\hat{G}(\varepsilon)U\psi^{(0)} + \ldots,$$

$$\psi = \psi^{(0)} + \hat{G}(\varepsilon)U\left(\psi^{(0)} + \hat{G}(\varepsilon)U\psi^{(0)} + \ldots\right) = \psi^{(0)} + \hat{G}(\varepsilon)U\psi,$$

$$\boxed{\psi = \psi^{(0)} + \hat{G}(\varepsilon)U\psi}$$

для оператора перехода

$$\hat{T} = U + U\hat{G}(\varepsilon)U + \ldots = U + U\hat{G}(\varepsilon)\left(U + U\hat{G}(\varepsilon)U + \ldots\right) =$$

$$= U + U\hat{G}(\varepsilon)\hat{T} = U + \hat{T}\hat{G}(\varepsilon)U.$$

$$\boxed{\hat{T} = U + U\hat{G}(\varepsilon)\hat{T}}$$

Выражение для амплитуда рассеяния через матричный элемент потенциала рассеивателя:

$$f(\mathbf{k}',\mathbf{k}) = -\frac{m}{2\pi\hbar^2}\left\langle \psi^{(0)}_{\mathbf{k}'} \middle| \hat{T} \middle| \psi^{(0)}_{\mathbf{k}} \right\rangle,$$

$$\psi_{\mathbf{k}} = \psi^{(0)}_{\mathbf{k}} + \hat{G}(\varepsilon)U\psi^{(0)}_{\mathbf{k}} + \ldots,$$

$$U\psi_{\mathbf{k}} = \left(U + U\hat{G}(\varepsilon)U + \ldots\right)\psi^{(0)}_{\mathbf{k}} = \hat{T}\psi^{(0)}_{\mathbf{k}}.$$

$$\boxed{f(\mathbf{k}',\mathbf{k}) = -\frac{m}{2\pi\hbar^2}\left\langle \psi^{(0)}_{\mathbf{k}'} \middle| U \middle| \psi_{\mathbf{k}} \right\rangle}$$

Задачи

1. Получить выражение для амплитуды рассеяния частицы с массой m на нелокальном сепарабельном потенциале U, $\langle \mathbf{r}'|U|\mathbf{r}\rangle = \alpha v(\mathbf{r}')v(\mathbf{r})$, где $v(\mathbf{r})$ некоторая вещественная функция, достаточно быстро спадающая с ростом r.

2. Найти сечение рассеяния медленной частицы с массой m на точечном сепарабельном потенциале U, $\langle \mathbf{r}'|U|\mathbf{r}\rangle = \alpha v(\mathbf{r}')v(\mathbf{r})$, радиус действия которого много меньше длины волны частицы. Исследовать поведение сечения рассеяния при наличии у потенциала мелкого реального или виртуального уровня.
3. Получить выражение для амплитуды упругого рассеяния медленной частицы с массой m на паре одинаковых, нелокальных сепарабельных потенциалов U, каждый из которых описывается матричным элементом $\langle \mathbf{r}'|U|\mathbf{r}\rangle = \alpha v(\mathbf{r}')v(\mathbf{r})$, где $v(\mathbf{r})$ некоторая вещественная функция, радиус действия которой много меньше длины волны частицы. Расстояние между центрами потенциалов равно R.
4. Исследовать резонансное рассеяние рассеяния медленной частицы с массой m на паре одинаковых, нелокальных сепарабельных потенциалов U, каждый из которых описывается матричным элементом $\langle \mathbf{r}'|U|\mathbf{r}\rangle = \alpha v(\mathbf{r}')v(\mathbf{r})$, где $v(\mathbf{r})$ некоторая вещественная функция, радиус действия которой много меньше длины волны частицы. Найти зависимость положения резонансного уровня и его ширины от расстояние между центрами потенциалов R.

3. Фазовая теория рассеяния

Рассеяние на изотропном потенциале

3.1 Разложение волновой функции по парциальным волнам

$$\psi_{\mathbf{k}}(\mathbf{r}) = \sum_{l,m} A_{lm} R_l(r) Y_{lm}(\vartheta,\varphi)$$

Радиальная часть R_l

$$\frac{1}{r^2}\frac{d}{dr}\left(r^2\frac{dR_l}{dr}\right)+\left(k^2-\frac{l(l+1)}{r^2}-\frac{2mU(r)}{\hbar^2}\right)R_l=0,$$

$$r\to 0:\quad \frac{1}{r^2}\frac{d}{dr}\left(r^2\frac{dR_l}{dr}\right)-\frac{l(l+1)}{r^2}R_l=0,\quad R_l\propto r^l,\, 1/r^{l+1}$$

Асимптотическое поведение

$$r\to\infty:\quad \frac{d^2(rR_l)}{dr^2}=-k^2 rR,\quad R_l^{(\pm)}=\frac{e^{\pm i(kr-\frac{\pi l}{2})}}{r},\quad R_l^{(-)}=R_l^{(+)*}$$

$$R_l^{(\pm)}(r\to 0)\propto 1/r^{l+1},\quad R_l=CR_l^{(+)}+C^*R_l^{(-)},\quad C=-ie^{i\delta_l},$$

$$\boxed{\begin{aligned}&R_l(r\to\infty)=\frac{2\sin(kr-\frac{\pi l}{2}+\delta_l)}{r},\\ &R_l=-i(e^{i\delta_l}R_l^{(+)}-e^{-i\delta_l}R_l^{(-)}).\end{aligned}}$$

Rl$^{(-)}$ - ***сходящаяся,***
Rl$^{(+)}$ ***расходящаяся, волна,*** $\boxed{\delta_l}$ - ***фаза рассеяния.***

Разложение плоской волны

$$e^{i\mathbf{kr}} = 4\pi \sum_{l,m} i^l j_l(kr) Y^*_{lm}(\mathbf{k}) Y_{lm}(\mathbf{r})$$

Сферические функции Бесселя j_l, $j_0(x)=\sin(x)/x$

$j_l(x) = (\pi/2x)^{1/2} J_{l+1/2}(x)$

$$\frac{1}{r^2}\frac{d}{dr}\left(r^2 \frac{dj_l(kr)}{dr}\right) + \left(k^2 - \frac{l(l+1)}{r^2}\right) j_l(kr) = 0,$$

$$j_l\,(kr \to \infty) = \sin(kr - \pi l/2)/kr,$$

$$\mathbf{k} \uparrow \mathbf{z} \quad Y_{lm}(\mathbf{k}) = \sqrt{\frac{(2l+1)}{4\pi}}\delta_{m0}, \quad e^{i\mathbf{kr}} = \sum_l i^l \sqrt{4\pi(2l+1)} j_l(kr) Y_{l0}(\mathbf{r})$$

Разложение $\psi(r)$

$$\psi_{\mathbf{k}}(\mathbf{r}) = \sum_{l,m} A_{lm} R_l(r) Y_{lm}(\vartheta,\varphi), \quad A_{lm} = \delta_{m0}\sqrt{4\pi(2l+1)}\frac{i^l e^{i\delta_l}}{2k}$$

$$\psi_{\mathbf{k}}(\mathbf{r} \to \infty) = \sum_l \sqrt{4\pi(2l+1)}\frac{i^l e^{i\delta_l}}{2k}\frac{2\sin(kr - \frac{\pi l}{2} + \delta_l)}{r} Y_{l0}(\vartheta,\varphi)$$

$$\psi(\mathbf{r}\to\infty)=\sum_l \sqrt{4\pi(2l+1)}\frac{i^l e^{i\delta_l}}{2ik}\left(\begin{array}{l}\dfrac{e^{i(kr-\frac{\pi l}{2}+\delta_l)}}{r}-\dfrac{e^{i(kr-\frac{\pi l}{2}-\delta_l)}}{r}\\ +\dfrac{e^{i(kr-\frac{\pi l}{2}-\delta_l)}}{r}-\dfrac{e^{-i(kr-\frac{\pi l}{2}+\delta_l)}}{r}\end{array}\right)Y_{l0}(\vartheta,\varphi)$$

$$\psi(\mathbf{r})=e^{i\mathbf{kr}}+\sqrt{4\pi}\sum_l \frac{\sqrt{(2l+1)}}{2ik}\frac{i^l e^{ikr}}{r}\left(e^{2i\delta_l}-1\right)Y_{l0}(\vartheta,\varphi)=e^{i\mathbf{kr}}+\frac{f(\vartheta)}{r}e^{ikr}$$

Амплитуда рассеяния $f(\vartheta)=\sum_l(2l+1)\dfrac{\left(e^{2i\delta_l}-1\right)}{2ik}P_l(\cos(\vartheta))$

S матрица $S_l=e^{2i\delta_l}$ **Парциальная амплитуда** $f_l=\dfrac{S_l-1}{2ik}$

Разложение амплитуды рассеяния

$$\boxed{f(\vartheta)=\sum_l(2l+1)f_l P_l(\cos\vartheta)}$$

3.2 Сечение рассеяния

$$\sigma = \int |f(\vartheta)|^2 d\Omega = 2\pi \int_0^{\pi} |f(\vartheta)|^2 \sin(\vartheta) d\vartheta$$

$$\int_0^{\pi} P_l(\cos\vartheta) P_{l'}(\cos\vartheta) \sin(\vartheta) d\vartheta = \frac{2\delta_{ll'}}{2l+1}$$

$$\sigma = \sum_l \sigma_l = 4\pi \sum_l (2l+1)|f_l|^2 = \frac{4\pi}{k^2} \sum_l (2l+1)\sin^2\delta_l$$

Парциальное сечение $\boxed{\sigma_l = 4\pi(2l+1)|f_l|^2 = \frac{4\pi}{k^2}(2l+1)\sin^2\delta_l}$

Максимальное парциальное сечение $\sigma_{l\,\max} = \frac{4\pi}{k^2}(2l+1)$

Последовательность вычислений в фазовой теории рассеяния $\boxed{R_l(r) \to \delta_l \to \sigma}$

Задачи

1. Определить фазы рассеяния $\delta_l(k)$ по известной угловой зависимости амплитуды рассеяния .
2. Найти парциальные фазы $\delta_l(k)$ и сечения σ_l рассеяния на потенциале
3. Найти парциальные фазы $\delta_l(k)$ и сечения σ_l рассеяния частицы массы m на прямоугольной сферической потенциальной яме глубины U и радиуса R.
4. Найти парциальные фазы $\delta_l(k)$ и сечения σ_l рассеяния частицы массы m на потенциале вида $U(r)=\alpha\delta(r-R)$.
5. Найти парциальные фазы $\delta_l(k)$ и сечения σ_l рассеяния частицы массы m на непроницаемом сферическом потенциальном барьере радиуса R.

3.3 Условие унитарности S – матрицы
Оптическая теорема

Парциальная волна $\psi_l = e^{2i\delta_l}\psi_l^{(+)} - \psi_l^{(-)} = S_l\psi_l^{(+)} - \psi_l^{(-)}$

Расходящаяся волна $\psi_l^{(+)} = R_l^{(+)}(r)Y_{l0}(\mathbf{n})$

Сходящаяся волна $\psi_l^{(-)} = R_l^{(-)}(r)Y_{l0}(\mathbf{n})$

Суперпозиция парциальных волн

$$\psi = \sum_l A_l\psi_l{}_l = \sum_l A_lS_l\psi_l^{(+)} - A_l\psi_l^{(-)} = \sum_l B_l\psi_l^{(+)} - A_l\psi_l^{(-)}$$

Матрица рассеяния S $\boxed{(B) = (S)(A), \quad S_{ll'} = \delta_{ll'}e^{2i\delta_l}}$

Унитарность S матрицы $\boxed{|S_{ll}| = 1, \quad SS^+ = 1}$

Сохранение числа частиц $|B_l| = |A_l|, \quad j_l^{(-)} = j_l^{(+)}$

Оптическая теорема

Представление парциальных волн

$$S_l = 1 + 2ikf_l, \quad S_l S_l^* = 1, \quad f_l - f_l^* = 2ikf_l f_l^*, \quad \boxed{\mathrm{Im}\{f_l\} = k|f_l|^2}$$

$$\mathrm{Im}\{1/f_l\} = -k, \quad \boxed{f_l = \frac{1}{g_l - ik}}$$

Амплитуда рассеяния вперед, парциальное разложение

$$\mathrm{Im}\{f(0)\} = \sum_l (2l+1)\,\mathrm{Im}\{f_l\} = \sum_l (2l+1)k|f_l|^2 = \frac{k\sigma}{4\pi}$$

Оптическая теорема $$\boxed{\mathrm{Im}\{f(0)\} = \frac{k\sigma}{4\pi}}$$

Закон сохранения числа частиц и оптическая теорема (альтернативное доказательство)

Волновая функция задачи рассеяния

$$\psi_{\mathbf{k}}(\mathbf{r}) = e^{i\mathbf{kr}} + \frac{f(\vartheta)}{r}e^{ikr}$$

Плотность потока частиц

$$\mathbf{j}(\mathbf{r}) = \mathbf{v} + v\frac{|f(\vartheta)|^2}{r^3}\mathbf{r} + \mathbf{j}_{\text{int}}$$

Уравнение непрерывности:

$$\oint \mathbf{j}\,d\mathbf{S} = 0, \quad \oint \mathbf{v}\,d\mathbf{S} = 0, \quad \oint v\frac{|f(\vartheta)|^2}{r^3}\mathbf{r}\,d\mathbf{S} = v\sigma, \quad \oint \mathbf{j}_{\text{int}}\,d\mathbf{S} + v\sigma = 0$$

$$\oint \mathbf{j}_{\text{int}}\,d\mathbf{S} = 2\pi v\int_0^1 \left(e^{ikr(\cos\vartheta-1)}f^*(\vartheta) + e^{-ikr(\cos\vartheta-1)}f(\vartheta)\right)r\,d\cos\vartheta =$$

$$\frac{2\pi v}{ik}\left(f^*(0) - f(0)\right) = -\sigma v, \quad \boxed{\operatorname{Im}\{f(0)\} = \frac{k}{4\pi}\sigma}$$

Условие унитарности S матрицы в представлении плоских волн

$$\psi_{\mathbf{n}}(\mathbf{r}) = e^{ikr\mathbf{n}\mathbf{n}'} + \frac{f(\mathbf{n},\mathbf{n}')}{r}e^{ikr}, \quad |\mathbf{n}| = |\mathbf{n}'| = 1, \mathbf{n} \uparrow \mathbf{k}, \mathbf{n} \uparrow \mathbf{n}' \uparrow \mathbf{r}$$

$$\psi = \int F(\mathbf{n})\psi_{\mathbf{n}} d\mathbf{n} = \int F(\mathbf{n}) e^{ikr\mathbf{n}\mathbf{n}'} d\mathbf{n} + \frac{e^{ikr}}{r}\int F(\mathbf{n}) f(\mathbf{n},\mathbf{n}') d\mathbf{n} =$$

$$2\pi i F(-\mathbf{n}')\frac{e^{-ikr}}{kr} - 2\pi i F(\mathbf{n}')\frac{e^{ikr}}{kr} + \frac{e^{ikr}}{r}\int F(\mathbf{n}) f(\mathbf{n},\mathbf{n}') d\mathbf{n} =$$

$$-\frac{2\pi i}{k}\left(\frac{e^{ikr}}{r} SF(\mathbf{n}') - F(-\mathbf{n}')\frac{e^{-ikr}}{r}\right),$$

$$S = 1 + 2ikf, \quad fF(\mathbf{n}') = \frac{1}{4\pi}\int F(\mathbf{n}) f(\mathbf{n},\mathbf{n}') d\mathbf{n},$$

$$SS^{+} = 1. \quad f - f^{+} = 2ikff^{+},$$

$$f(\mathbf{n},\mathbf{n}') - f^{*}(\mathbf{n}',\mathbf{n}) = \frac{ik}{2\pi}\int f(\mathbf{n},\mathbf{n}'') f^{*}(\mathbf{n}'',\mathbf{n}') d\mathbf{n}'',$$

$$\mathbf{n} = \mathbf{n}', \quad \mathrm{Im}\{f(\mathbf{n},\mathbf{n})\} = \frac{k\sigma}{4\pi}$$

3.4 Квазиклассическое приближение

Квазиклассический предел

$$\lambda << a, \quad \lambda = h/p,$$

$$\hbar \to 0, \quad ka = pa/\hbar >> 1,$$

$$l = \rho p/\hbar >> 1, \quad \delta_l >> 1,$$

$$\vartheta \approx U(\rho)/E >> \hbar/\rho p = 1/l$$

Классические траектории движения

$$f(\vartheta) = \sum_l (2l+1) f_l P_l(\cos\vartheta) \approx$$

$$\approx \frac{1}{k} \sum_l \sqrt{\frac{l}{2\pi \sin\vartheta}} \left[e^{i\left(2\delta_l - (l+\frac{1}{2})\vartheta - \frac{\pi}{4}\right)} - e^{i\left(2\delta_l + (l+\frac{1}{2})\vartheta + \frac{\pi}{4}\right)} \right],$$

$$2\frac{d\delta_l}{dl} \pm \vartheta = 0, \quad l = k\rho, \quad \vartheta = \vartheta(\rho),$$

Классическое сечение рассеяния

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{l}{k^2 \sin(\vartheta)} \left| \frac{dl}{d\vartheta} \right| = \frac{\rho}{\sin(\vartheta)} \left| \frac{d\rho}{d\vartheta} \right|$$

Приближение WKB, Приближение эйконала

$$E >> U, \quad ka >> 1$$

Квазиклассическая волновая функция

$$rR_l \propto \sin\left(\frac{1}{\hbar}\int_{r_0}^{r}\sqrt{2m\left(E-U(r)\right)-\frac{\hbar^2(l+1/2)^2}{r^2}}dr+\frac{\pi}{4}\right),$$

$$\delta_l=\frac{1}{\hbar}\int_{r_0}^{\infty}\sqrt{2m\left(E-U(r)\right)-\frac{\hbar^2(l+1/2)^2}{r^2}}dr+\frac{\pi}{4}-$$

$$-\frac{1}{\hbar}\int_{r_0}^{\infty}\sqrt{2mE-\frac{\hbar^2(l+1/2)^2}{r^2}}dr-\frac{\pi}{4}. \quad 2m\left(E-U(r_0)\right)=\frac{\hbar^2(l+1/2)^2}{r_0^{\ 2}}$$

Квазиклассическая фаза рассеяния

$$\delta_l \approx -\frac{1}{\hbar^2}\int_{r_0}^{\infty}\frac{mU(r)dr}{\sqrt{k^2-\frac{l^2}{r^2}}}, \quad k^2=\frac{l^2}{r_0^{\ 2}}$$

Квазиклассическая фаза рассеяния

$$\delta_l \approx -\frac{1}{\hbar^2}\int_{l/k}^{\infty}\frac{mU(r)dr}{\sqrt{k^2-\frac{l^2}{r^2}}}, \quad r^2 = z^2+\rho^2 = z^2+\left(\frac{l}{k}\right)^2,$$

$$\delta_l \approx -\frac{m}{\hbar^2 k}\int_0^{\infty}U(\sqrt{z^2+(l/k)^2})dz, \quad \rho = \frac{l}{k}$$

$$\delta(\rho) = -\frac{1}{2\hbar v}\int_{-\infty}^{\infty}U(\sqrt{z^2+\rho^2})dz,$$

$$2\delta = \int_{-\infty}^{\infty}\sqrt{k^2-\frac{2m}{\hbar^2}U}\,dz - \int_{-\infty}^{\infty}kdz \approx -\frac{m}{\hbar^2 k}\int_{-\infty}^{\infty}Udz.$$

Эйконал

Квазиклассическая амплитуда рассеяния

$$f(\vartheta) = \sum_l (2l+1) f_l P_l(\cos\vartheta)$$

$$P_l(\cos\vartheta) \approx J_0(\vartheta l) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} e^{-i\vartheta l\cos\varphi} d\varphi, \quad l >> 1, \quad \vartheta << 1$$

$$f(\vartheta) \approx \frac{1}{2\pi}\int 2l \frac{(e^{2i\delta_l} - 1)}{2ik} e^{-i\vartheta l\cos\varphi} d\varphi dl$$

Замена переменных

$$l \to \rho, \quad l = \rho k, \quad q = k\vartheta, \quad \delta_l = \delta(\rho = l/k), \quad S(\rho) = e^{2i\delta(\rho)},$$

$$f(\vartheta) \approx \frac{k}{2\pi i}\int_0^{\infty}\int_0^{2\pi} (S(\rho)-1) e^{-i\mathbf{q}\rho} \rho d\rho d\varphi \boxed{= \frac{k}{2\pi i}\int (S(\rho)-1) e^{-i\mathbf{q}\rho} d^2\rho}$$

Борновский предел

$$\delta(\rho) << 1, \quad (e^{2i\delta(\rho)} - 1) = 2i\delta(\rho) = -\frac{i}{\hbar v}\int_{-\infty}^{\infty} U(\sqrt{z^2+\rho^2})dz,$$

$$f(\vartheta) \approx -\frac{m}{2\pi\hbar^2}\int U(r)e^{-i\mathbf{qr}}d\mathbf{r}$$

Сечение рассеяния

$$\sigma = \frac{4\pi}{k}\operatorname{Im}\{f(0)\} = 2\int \operatorname{Re}\{1 - S(\rho)\}d^2\rho = 4\int \sin^2(\delta(\rho))d^2\rho$$

Задачи

1. Найти в приближении эйконала полное сечение рассеяния быстрой частицы массы m на прямоугольной сферической потенциальной яме глубины U и радиуса R. Указать пределы применимости приближения эйконала.
2. Найти в квазиклассическом приближении полное сечение рассеяния быстрой частицы массы m на непроницаемом сферическом потенциальном барьере радиуса R.

3.5 Рассеяние медленных частиц
($ka << 1$)

Волновая функция вне действия потенциала $r >> a$

$$R_l(r \to \infty) = 2\sin(kr - \frac{\pi l}{2} + \delta_l)/r =$$

$$2\sin(kr - \frac{\pi l}{2})\cos(\delta_l)/r + 2\cos(kr - \frac{\pi l}{2})\sin(\delta_l)/r$$

$$R_l(r > a) = 2j_l(kr)\cos(\delta_l) - 2y_l(kr)\sin(\delta_l)$$

Волновая функция в области действия потенциала $r < a$

$$\frac{1}{r^2}\frac{d}{dr}\left(r^2\frac{dR_l}{dr}\right) - \left(\frac{l(l+1)}{r^2} + \frac{2mU(r)}{\hbar^2}\right)R_l = 0$$

Spherical Bessel functions

$$j_n(x) = \sqrt{\frac{\pi}{2x}} J_{n+\frac{1}{2}}(x),$$

$$j_n(x) = (-x)^n \left(\frac{1}{x}\frac{d}{dx}\right)^n \frac{\sin(x)}{x},$$

$$j_0(x) = \frac{\sin(x)}{x}$$

$$j_1(x) = \frac{\sin(x)}{x^2} - \frac{\cos(x)}{x}$$

$$j_2(x) = \left(\frac{3}{x^2} - 1\right)\frac{\sin(x)}{x} - \frac{3\cos(x)}{x^2}$$

$$j_3(x) = \left(\frac{15}{x^3} - \frac{6}{x}\right)\frac{\sin(x)}{x} - \left(\frac{15}{x^2} - 1\right)\frac{\cos(x)}{x},$$

Spherical Neumann functions.

$$y_n(x) = \sqrt{\frac{\pi}{2x}} Y_{n+\frac{1}{2}}(x) = (-1)^{n+1}\sqrt{\frac{\pi}{2x}} J_{-n-\frac{1}{2}}(x).$$

$$y_n(x) = -(-x)^n \left(\frac{1}{x}\frac{d}{dx}\right)^n \frac{\cos(x)}{x}.$$

$$y_0(x) = -j_{-1}(x) = -\frac{\cos(x)}{x}$$

$$y_1(x) = j_{-2}(x) = -\frac{\cos(x)}{x^2} - \frac{\sin(x)}{x}$$

$$y_2(x) = -j_{-3}(x) = \left(-\frac{3}{x^2} + 1\right)\frac{\cos(x)}{x} - \frac{3\sin(x)}{x^2}$$

$$y_3(x) = j_{-4}(x) = \left(-\frac{15}{x^3} + \frac{6}{x}\right)\frac{\cos(x)}{x} - \left(\frac{15}{x^2} - 1\right)\frac{\sin(x)}{x}.$$

Spherical Hankel functions: $h_n^{(1)}$, $h_n^{(2)}$

$$h_n^{(1)}(x) = j_n(x) + iy_n(x) \qquad h_n^{(2)}(x) = j_n(x) - iy_n(x).$$

Сшивание волновых функций   a<r<1/k

$$\eta_l = \frac{R'_l}{R_l} = k\,\frac{j'_l(kr)\cos(\delta_l) - y'_l(kr)\sin(\delta_l)}{j_l(kr)\cos(\delta_l) - y_l(kr)\sin(\delta_l)}$$

$$tg(\delta_l) = \frac{kj'_l(kr) - \eta_l j_l(kr)}{ky'_l(kr) - \eta_l y_l(kr)},$$

$$j_l(x << 1) \propto x^l,\ y_l(x << 1) \propto 1/x^{l+1},$$

$$tg(\delta_l) \approx (ka)^{2l+1}, \quad f_l = \frac{e^{2i\delta_l} - 1}{2ik} \approx \frac{\delta_l}{k} \propto (ka)^{2l},$$

$$f(\vartheta) = f_0 = -\alpha,$$ ***α - длина рассеяния***

$$\sigma = 4\pi\alpha^2$$

Задачи

1. Найти длину рассеяния медленной частицы на прямоугольной сферической потенциальной яме глубины U и радиуса R.
2. Найти длину рассеяния медленной частицы на потенциальном сферическом барьере вида $U(r)=\alpha\delta(r-R)$.
3. Найти сечение рассеяния медленной частицы на непроницаемом сферическом потенциальном барьере радиуса R.

3.6 Резонансное рассеяние медленных частиц

резонанс в s - волне, l = 0

$$tg(\delta_0) = \frac{k\cos(ka) - \eta\sin(ka)}{k\sin(ka) + \eta\cos(ka)},$$

$$f_0 = \frac{1}{g_0 - ik} = \frac{1}{kctg(\delta_0) - ik},$$

$$g_0 = \frac{k\sin(ka) + \eta\cos(ka)}{k\cos(ka) - \eta\sin(ka)}k \approx \frac{\eta}{1 - \eta a},$$

$$\eta = \frac{p\cos(pa)}{\sin(pa)}, \quad p = \sqrt{2mU}/\hbar$$

$$\alpha = -1/g_0 \approx a - 1/\eta = a - tg(pa)/p$$

Условие резонанса,

$$\eta = 0, g_0 = 0, \delta_0 = \frac{\pi}{2} + \pi k$$

$$\alpha \approx -1/\eta >> a$$

$$\chi(r > a) = e^{-\kappa r}, \quad \varepsilon = -\frac{\hbar^2 \kappa^2}{2m}$$

$$\eta = -\kappa = -1/\alpha, \quad -g_0(k=0) = 1/\alpha = \kappa$$

$$f_0 = \frac{-1}{\kappa + ik},$$

$$\sigma = \frac{4\pi}{\kappa^2 + k^2} = \frac{2\pi}{m} \frac{\hbar^2}{(E + |\varepsilon|)},$$

$$f_0 = \frac{1}{g_0(k) - ik} = \frac{1}{-\kappa + r_0 k^2/2 - ik}$$

***r_0* – эффективный радиус взаимодействия**

резонанс с $l \neq 0$

$$f_l = \frac{1}{g_l(k) - ik} = \frac{1}{g_l(0) + \frac{1}{2} g''_l k^2 - ik},$$

$$f_l \propto k^{2l}, \quad g_l(k) \propto 1/k^{2l}, \quad g_l(k) \approx \frac{b}{E^l}(\varepsilon - E),$$

$$f_l = \frac{-1}{\frac{b}{E^l}(E - \varepsilon) + ik} = \frac{1}{k} \frac{-\Gamma/2}{E - \varepsilon + i\Gamma/2}, \quad \Gamma = 2kE^l / b \propto k^{2l+1},$$

$$S = \frac{E - \varepsilon - i\Gamma/2}{E - \varepsilon + i\Gamma/2},$$

$$\sigma_l = \frac{\pi(2l+1)}{k^2} \frac{\Gamma^2}{(E - \varepsilon)^2 + \Gamma^2/4}$$

Задачи

1. Описать резонансное рассеяние медленной частицы на потенциале прямоугольной сферической ямы имеющей мелкий реальный или виртуальный уровень с нулевым орбитальным моментом.
2. Описать резонансное рассеяние медленной частицы на потенциальной яме , имеющей мелкий реальный или виртуальный уровень с нулевым орбитальным моментом.

4. Аналитические свойства S-матрицы

4.1 Симметрия волновой функции задачи рассеяния и S-матрицы относительно инверсии пространства и обращения времени

$$\chi_{kl} = b_l(k)\chi_{kl}^{(+)}(r) - a_l(k)\chi_{kl}^{(-)}(r),$$

$$\chi_{kl}^{(\pm)}(r \to \infty) = e^{\pm i(kr - \frac{\pi l}{2})}, \quad \chi_{kl}(0) = 0,$$

$$S_l(k) = \frac{b_l(k)}{a_l(k)} = \frac{\chi_{kl}^{(-)}(r)}{\chi_{kl}^{(+)}(r)}\Big|_{r=0}$$

Инверсия пространства: k → -k $\quad \chi_{-kl} = C\chi_{kl}$

$$\chi_{-kl}^{(\pm)} = (-1)^l \chi_{kl}^{(\mp)},$$

$$\boxed{S_l(-k) = 1/S_l(k)}$$

Обращение времени: $t \to -t$ $\quad \chi_{kl}^{*} = C\chi_{kl}$

$$\chi_{kl}^{(\pm)*} = \chi_{kl}^{(\mp)},$$

$$\boxed{\begin{aligned} &\left(S_l(k)\right)^{*} = 1/S_l(k), \\ &S_l^{*}(k^{*}) = 1/S_l(k) \end{aligned}}$$

$$\boxed{S_l(-k^{*}) = S_l^{*}(k),}$$

$-k^{*}, S_l^{*}(k)$	$k, S_l(k)$ (k)
$-k\ , 1/S_l(k)$	$k^{*}, 1/S_l^{*}(k)$

Вещественная ось

$$S_l(k)S_l(k)^{*} = 1, \quad \mathrm{Im}\{\delta_l(k)\} = 0,$$

$$S_l(k) = 1 + 2ikf_l(k),\ f_l(k) = 1/(g_l - ik), \quad S_l(k) = \frac{g_l + ik}{g_l - ik},$$

$$g_l(-k) = g_l(k), \quad g_l = g_l(k^2)$$

Мнимая ось $\quad S_l^{*}(-k^{*}) = S_l(k), \quad \mathrm{Re}\{\delta_l(\pm i\,|k|)\} = 0$

4.2 Особенности S-матрицы

Полюса S-матрицы, связанные состояния $E=E_0<0$

$$k = k_0 = i\sqrt{-2mE_0}/\hbar, \quad \chi^{(\pm)}_{k_0 l}(r\to\infty) = e^{\mp(|k_0|r + i\frac{\pi l}{2})},$$

$$\chi_{k_0 l} \propto \chi^{(+)}_{k_0 l}, \quad \chi^{(+)}_{k_0 l}(0) = 0, \quad S_l(k\to k_0)\to\infty, S_l(-k_0) = 0$$

Пример: *резонанс в s - волне, ka << 1*

$$S_l(k) = \frac{g_l + ik}{g_l - ik}, \quad l = 0, \quad g = \eta = -\kappa < 0,$$

$$S_l(k) = \frac{-\kappa + ik}{-\kappa - ik}, \quad k_0 = i\kappa, \quad E_0 = -\frac{\hbar^2\kappa^2}{2m},$$

Положение полюсов k_0=k'+ik'':
k'' >0, k'=0;   k'' <0, k'_1=- k'_2

$$S_l^{-1}(k_0 = k'+ik'') = 0,\ \chi_{k_0 l} \propto \chi_{k_0 l}^{(+)} \xrightarrow[r\to\infty]{} e^{ik'r - k''r},$$

$$E_0 = \hbar^2 (k'+ik'')^2 / 2m, \quad \mathrm{Im}\{E_0\} = 0, \quad k'k'' = 0$$

Условие непрерывности

$$\frac{\partial}{\partial t}\int |\Psi|^2 dV = -\oint \mathbf{j}\, d\mathbf{S} = \frac{i\hbar}{2m}\oint \left(\Psi^* \nabla \Psi - \Psi \nabla \Psi^*\right) d\mathbf{S}$$

$$\frac{\partial}{\partial t}\int_0^R |\chi|^2 dr = \frac{i\hbar}{2m}\left(\chi^* \frac{d}{dr}\chi - \chi \frac{d}{dr}\chi^*\right)_{r=R}$$

$$\chi_{k_0 l} = \chi_{k_0 l}^{(+)} \xrightarrow[r\to\infty]{} e^{ik'r - k''r - \frac{i\hbar}{2m}(k'^2 - k''^2 + 2ik'k'')t},$$

$$\chi_{k_0 l} = \chi_{k_0 l}^{(+)} \xrightarrow[r\to\infty]{} e^{ik'r - k''r - \frac{i\hbar}{2m}(k'^2 - k''^2 + 2ik'k'')t},$$

$$\frac{\partial}{\partial t}|\chi|^2 = \frac{2\hbar k' k''}{m}|\chi|^2,$$

$$\frac{2k'k''}{m}\int_0^R |\chi|^2 dr = -\frac{k'}{m}e^{-2k''R},$$

$$\boxed{k''<0; \quad k''>0, k'=0.}$$

Полюса на нефизическом листе k”<0, резонансы k”<<k’

$$S_l(k) = \frac{(k-k_0^*)(k+k_0)}{(k-k_0)(k+k_0^*)}e^{2i\delta^{(0)}(k)},$$

$$(k-k_0)(k+k_0^*) = (k-ik'')^2 - k'^2 \approx k^2 - k'^2 - 2ikk'',$$

$$E_0 = \frac{\hbar^2 k'^2}{2m}, \Gamma = \frac{\hbar^2 k|k''|}{m}, \quad \Gamma << E_0, \quad S_l(k) = \frac{E - E_0 - \frac{i\Gamma}{2}}{E - E_0 + \frac{i\Gamma}{2}}e^{2i\delta^{(0)}(k)}$$

Свойства вычетов

Полюс на физическом листе k_0=iκ $$S_l(k) = \frac{C_l}{k - i\kappa}$$

Связанное состояние с энергией $$E_0 = -\frac{\hbar^2\kappa^2}{2m}$$

и волновой функцией $$\chi_l(r \to \infty) = A_l e^{-\kappa r}, \quad \int_0^\infty |\chi_l|^2 dr = 1$$

$$\boxed{C_l = (-1)^{l+1} i |A_l|^2}$$

Волновая функция задачи рассеяния с импульсом k= iκ + ε

$$\chi_{kl}(r \to \infty) = A_l \left(e^{-\kappa r + i\varepsilon r} - \frac{(-1)^l \varepsilon}{C_l} e^{\kappa r - i\varepsilon r} \right),$$

$$\chi_{k \to i\kappa, l} \to \chi_l, \int_0^\infty |\chi_l|^2 dr = 1$$

Условие непрерывности

$$\frac{\partial}{\partial t}\int |\Psi|^2 dV = -\oint \mathbf{j}d\mathbf{S} = \frac{i\hbar}{2m}\oint\left(\Psi^*\nabla\Psi - \Psi\nabla\Psi^*\right)d\mathbf{S}$$

$$\frac{\partial}{\partial t}\int_0^R |\chi|^2 dr = \frac{i\hbar}{2m}\left(\chi^*\frac{d}{dr}\chi - \chi\frac{d}{dr}\chi^*\right)_{r=R}$$

$$\frac{\partial}{\partial t}|\chi|^2 = \frac{2\hbar k'k''}{m}|\chi|^2 = \frac{2\hbar\varepsilon\kappa}{m}|\chi|^2,$$

$$\frac{i}{2m}\left(\chi^*\frac{d}{dr}\chi - \chi\frac{d}{dr}\chi^*\right)_{r=R} = \frac{2\varepsilon\kappa}{m}\left(-i\frac{(-1)^l}{C_l}|A_l|^2 - \frac{|A_l|^2}{2\kappa}e^{-2\kappa R}\right)$$

$$\frac{2\varepsilon\kappa}{m}\int_0^R |\chi|^2 dr = \frac{2i\varepsilon\kappa}{m}\frac{(-1)^{l+1}}{C_l}|A_l|^2.$$

4.3 Теорема Левинсона

$$\boxed{\delta_l(\infty) - \delta_l(0) = -\pi N_b}$$

$$\frac{S_l'}{S_l} = 2i\delta'(k), \quad \delta(-k) = -\delta(k),$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{S_l'}{S_l} dk = 2i \int_{-\infty}^{+\infty} \delta'(k) dk = 4i \int_{0}^{+\infty} \delta'(k) dk = 4i\big(\delta(\infty) - \delta(0)\big)$$

Функция Йоста $D_l(k)$ $\quad D_l(k) = \chi_{kl}^{(+)}(0), \quad D_l^*(k) = \chi_{kl}^{(-)}(0),$

$$D_l(-k) = (-1)^l D_l^*(k).$$

$$S_l = \frac{\chi_{kl}^{(-)}(0)}{\chi_{kl}^{(+)}(0)} = \frac{D_l^*(k)}{D_l(k)}, \quad S_l' = \frac{D_l'^* D_l - D_l^* D_l'}{D_l^2} = -\frac{D_l^*(k)}{D_l(k)}\left(\frac{D_l'(k)}{D_l(k)} + \frac{D_l'(-k)}{D_l(-k)}\right),$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{S_l'}{S_l} dk = -2\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{D_l'(k)}{D_l(k)} dk = -4\pi i N_b, \; D_l(k \approx k_0) = B(k - k_0), \; \frac{D_l'(k)}{D_l(k)} = \frac{1}{(k - k_0)}.$$

5. Квазистационарные состояния

5.1 Определение и свойства квазистационарного состояния

Волновая функция $\chi_{k_0 l} \propto \chi_{k_0 l}^{(+)}, \quad \chi_{k_0 l}^{(+)}(0) = 0.$

Энергия состояния $E = E_0 - i\Gamma/2, \quad \Gamma << E_0.$

Временная зависимость волновой функции

$$\Psi(t) \propto e^{-iEt} = e^{-i\frac{E_0 t}{\hbar} - \frac{\Gamma}{2}t}, \quad \left|\Psi(t)\right|^2 \propto e^{-\frac{\Gamma t}{\hbar}}, \quad N(t) = N_0 e^{-\frac{\Gamma t}{\hbar}}.$$

Пространственная зависимость волновой функции

$$\chi(r) \propto e^{ikr}, k = \sqrt{2m(E_0 - i\Gamma/2)}/\hbar = \frac{\sqrt{2mE_0}}{\hbar} - i\frac{\Gamma}{4\hbar}\sqrt{\frac{2m}{E_0}},$$

$$\chi(r) = Ae^{ik'r + |k''|r}, \quad k' = \sqrt{2mE_0}/\hbar, k'' = -\frac{\Gamma}{4\hbar}\sqrt{\frac{2m}{E_0}} = -\frac{\Gamma}{2\hbar v},$$

$$\left|\chi(r \to \infty)\right| = \left|A\right|^2 e^{2|k''|r} = \left|A\right|^2 e^{\frac{\Gamma}{\hbar v}r}.$$

Условие непрерывности

$$\frac{\partial}{\partial t}\int|\Psi|^2 dV = -\oint \mathbf{j}d\mathbf{S} = \frac{i\hbar}{2m}\oint\left(\Psi^*\nabla\Psi - \Psi\nabla\Psi^*\right)d\mathbf{S}$$

$$\frac{\partial}{\partial t}\int_0^R|\chi|^2 dr = \frac{i\hbar}{2m}\left(\chi^*\frac{d}{dr}\chi - \chi\frac{d}{dr}\chi^*\right)_{r=R}$$

Определение явного вида координатной зависимость асимптотики волновой функции

$$\chi_{k_0 l} = \chi_{k_0 l}^{(+)} \xrightarrow[r\to\infty]{} Ae^{ik'r - k''r - \frac{i\hbar}{2m}(k'^2 - k''^2 + 2ik'k'')t},$$

$$\frac{\partial}{\partial t}|\chi|^2 = \frac{2\hbar k'k''}{m}|\chi|^2, \quad \frac{2k'k''}{m}\int_0^R|\chi|^2 dr = -|A|^2\frac{k'}{m}e^{-2k''R},$$

$$|A|^2 = 2|k''|N(t), \quad |\chi(t,r)|^2 = \frac{\Gamma}{\hbar v}N_0 e^{-\frac{\Gamma t}{\hbar}+\frac{\Gamma r}{\hbar v}}.$$

5.2 Квазистационарное состояние в задаче рассеяния

Полюса на нефизическом листе k”< 0, резонансы k”<< k’

$$S_l(k) = \frac{(k-k_0^*)(k+k_0)}{(k-k_0)(k+k_0^*)} e^{2i\delta^{(0)}(k)},$$

$$(k-k_0)(k+k_0^*) = (k-ik'')^2 - k'^2 \approx k^2 - k'^2 - 2ikk'',$$

$$E_0 = \frac{\hbar^2 k'^2}{2m}, \Gamma = \frac{\hbar^2 k|k''|}{m}, \quad \Gamma << E_0, \quad S_l(k) = \frac{E - E_0 - \frac{i\Gamma}{2}}{E - E_0 + \frac{i\Gamma}{2}} e^{2i\delta^{(0)}(k)},$$

$$\delta_l(k) = \delta^{(0)}(k) + arctg\left(\frac{\Gamma}{2(E-E_0)}\right).$$

Сечение резонансного рассеяния, контур Фано

$$\sigma_l = \frac{\pi(2l+1)}{k^2}\left|S_l - 1\right|^2 =$$

$$\frac{\pi(2l+1)}{k^2}\left(\frac{\Gamma^2}{(E-E_0)^2+\frac{\Gamma^2}{4}} + 4\,\mathrm{Re}\left(\frac{\Gamma e^{i\delta^{(0)}}\sin\delta^{(0)}}{E-E_0+\frac{i\Gamma}{2}}\right) + 4\sin^2\delta^{(0)}\right)$$

Задача

1. Найти парциальное сечение резонансного рассеяния в s волне в поле *U(r)=αδ(r-R)*, считая, что *αmR*>>1. Определить положение и ширины нижних квазидискретных уровней.

5.3 Зависимость волновой функции рассеяния от энергии налетающий частицы в области резонанса

$$\hbar^2 \chi''_{kl} - 2m(U(r) - E)\chi_{kl} = 0 \quad |\times \chi_{k'l}$$

$$\hbar^2 \chi''_{k'l} - 2m(U(r) - E')\chi_{k'l} = 0 \,|\times \chi_{kl}$$

$$\hbar^2 \left(\chi_{k'l}\chi'_{kl} - \chi_{kl}\chi'_{k'l}\right)' = 2m\Delta E \chi_{kl}\chi_{k'l}$$

$$\int_0^R \chi_{kl}^2 dr = \frac{\hbar^2}{2m} \lim \frac{\chi_{k'l}\chi'_{kl} - \chi_{kl}\chi'_{k'l}}{\Delta E} = \frac{1}{2k}\left[\chi'_{kl}\frac{\partial \chi_{kl}}{\partial k} - \chi_{kl}\left(\frac{\partial \chi_{kl}}{\partial k}\right)'\right]$$

$$\chi_{kl}(R) = 2\sin(kR - \frac{\pi l}{2} + \delta_l)$$

$$\boxed{\int_0^R \chi_{kl}^2 dr = 2\left[\left(R + \frac{d\delta_l}{dk}\right) - \frac{1}{2k}\sin 2(kR - \frac{\pi l}{2} + \delta_l)\right]}$$

$$\int_0^R \chi_{kl}^2 dr = 2\left[\left(R + \frac{d\delta_l}{dk}\right) - \frac{1}{2k}\sin 2(kR - \frac{\pi l}{2} + \delta_l)\right],$$

$$\delta_l(k) = \delta^{(0)}(k) + arctg\left(\frac{\Gamma}{2(E - E_0)}\right) = \delta^{(0)}(k) - arctg\left(\frac{k''}{k - k'}\right),$$

$$\boxed{\int_0^R \chi_{kl}^2 dr = \frac{\hbar v \Gamma}{(E - E_0)^2 + \frac{\Gamma^2}{4}},}$$

$$\int_0^R \chi_{kl}^2 dr \approx \frac{v}{\Gamma},$$

$$\overline{\chi_{kl}^2} \approx \frac{v}{\Gamma R} = \frac{T}{(R/v)} >> 1.$$

Время соударения

$$\int_0^R \chi_{kl}^2 dr = T(E) I_-, \; I_- = v$$

$$\boxed{T(E) = \frac{\hbar \Gamma}{(E - E_0)^2 + \frac{\Gamma^2}{4}}}$$

$$\boxed{T(E) = \frac{2}{v}\left[\left(R + \frac{d\delta_l}{dk}\right) - \frac{1}{2k}\sin 2(kR - \frac{\pi l}{2} + \delta_l)\right]}$$

Координатная и энергетическая зависимость волновой функции задачи рассеяния в области резонанса

$$\boxed{\chi_{kl}(r) = \sqrt{\frac{\hbar v \Gamma}{(E-E_0)^2 + \frac{\Gamma^2}{4}}}\,\chi_0(r), \quad \int_0^R |\chi_0|^2 dr = 1}$$

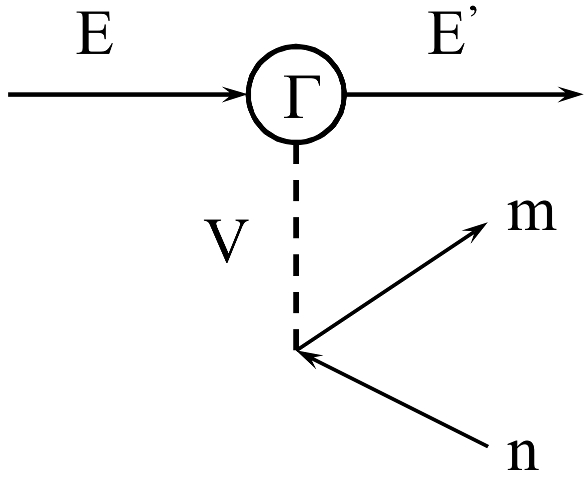
Резонанс в неупругом рассеянии

$$w = \frac{2\pi}{\hbar}\int \left|\langle \Psi_f | V | \Psi_i \rangle\right|^2 \delta(E_f - E_i)\,df,$$

$$\Psi_i = \Psi_{\mathbf{k}}(r)\Phi_0(r_a),$$

$$\Psi_{\mathbf{k}}(r) = \sum_l \sqrt{4\pi(2l+1)}\,\frac{i^l e^{i\delta_l}}{2k}\,\Psi_{kl}(r),$$

$$\Psi_f = \Psi_{\mathbf{k}'}(r)\Phi_{nm}(r_a) = e^{i\mathbf{k}'r}\Phi_{nm}(r_a)$$



$$\Psi_{kl}(r) = \sqrt{\frac{\hbar v \Gamma}{(E-E_0)^2 + \frac{\Gamma^2}{4}}}\Psi_0(r),$$

$$\Psi_i = \sqrt{4\pi(2l+1)}\frac{i^l e^{i\delta_l}}{2k}\sqrt{\frac{\hbar v \Gamma}{(E-E_0)^2 + \frac{\Gamma^2}{4}}}\Psi_0(r)\Phi_0(r_a),$$

$$w = \frac{\pi(2l+1)}{k^2}\frac{v\Gamma}{(E-E_0)^2 + \frac{\Gamma^2}{4}} 2\pi \int \left|\langle \Psi_f | V | \Psi_0 \rangle\right|^2 \delta(E_f - E_i) df,$$

$$\Gamma_r = 2\pi \int \left|\langle \Psi_f | V | \Psi_0 \rangle\right|^2 \delta(E_f - E_i) df,$$

$$\boxed{\sigma_r = \frac{w}{v} = \frac{(2l+1)\pi}{k^2}\frac{\Gamma\Gamma_r}{(E-E_0)^2 + \frac{\Gamma^2}{4}},} \quad \boxed{\sigma_r = \sigma_e \frac{\Gamma_r}{\Gamma}}$$

Задача

1. Найти время рассеяния медленной частицы на потенциале прямоугольной сферической ямы радиуса R имеющей мелкий реальный или виртуальный уровень с нулевым орбитальным моментом. Сравнить его со временем движения свободной частицы с нулевым моментом внутри сферы радиуса R.

6. Многоканальное рассеяние

$$X_i + Y_i \leftrightarrow X_j + Y_j$$

6.1 Волновая функция и S-матрица многоканальной задачи

$$\Psi = \sum_i \left(\beta_i \psi^{(+)}_{k_i l}(\mathbf{r}_i) - \alpha_i \psi^{(-)}_{k_i l}(\mathbf{r}_i)\right)\Phi_i, \quad \Phi_i = \Phi_{X_i}\Phi_{Y_i},$$

$$\psi^{(\pm)}_{k_i l}(r_i > R) = \frac{1}{\sqrt{v_i}} \frac{e^{\pm i(k_i r_i - \frac{\pi l}{2})}}{r_i} Y_{lm}(\mathbf{n}_i),$$

$$k_i = \sqrt{2\mu_i(E - \Lambda_i)}/\hbar, \quad v_i = \frac{\hbar k_i}{\mu_i}, \quad \mu_i = \frac{m_{X_i} m_{Y_i}}{m_{X_i} + m_{Y_i}}$$

Если $E > \Lambda_i$ - i канал рассеяния открыт, $Im\{k_i\}=0$.
Если $E < \Lambda_i$ - i канал рассеяния закрыт, $Re\{k_i\}=0$, $\alpha_i=0$.

$$\boxed{(\beta) = (S)(\alpha)}$$

Размерность S - матрицы $m\otimes m$,
m - число открытых каналов.

6.2 Сечения рассеяния, разложение по парциальным волнам

$$\Psi = \frac{\sqrt{v_i}}{2ik_i}\sum_l \sqrt{4\pi(2l+1)}i^l\left(S_{ii}^{(l)}\psi_{k_i l}^{(+)}\Phi_i - \psi_{k_i l}^{(-)}\Phi_i + \sum_{j\neq i} S_{ji}^{(l)}\psi_{k_i l}^{(+)}\Phi_j\right) =$$

$$e^{i\mathbf{k}_i\mathbf{r}_i}\Phi_i + \frac{\sqrt{v_i}}{2ik_i}\sum_l \sqrt{4\pi(2l+1)}i^l\left((S_{ii}^{(l)}-1)\psi_{k_i l}^{(+)}\Phi_i + \sum_{j\neq i} S_{ji}^{(l)}\psi_{k_i l}^{(+)}\Phi_j\right).$$

Волновая функция на бесконечности

$$\Psi(r\to\infty) = e^{i\mathbf{k}_i\mathbf{r}_i}\Phi_i + \frac{e^{ik_i r_i}}{r_i}\sum_l (2l+1)P_l(\cos\vartheta_i)\frac{(S_{ii}^{(l)}-1)}{2ik_i}\Phi_i +$$

$$\sum_{j\neq i}\frac{e^{ik_j r_j}}{r_j}\sum_l (2l+1)P_l(\cos\vartheta_i)\frac{\sqrt{v_i}S_{ji}^{(l)}}{2ik_i\sqrt{v_j}}\Phi_j, \quad S_{ji}^{(l)} = \delta_{ij} + 2i\sqrt{k_i k_j}f_{ji}^{(l)}$$

$$f_{ji}^{(l)} = \frac{(S_{ji}^{(l)}-\delta_{ij})}{2i\sqrt{k_i k_j}}$$ ***- амплитуда рассеяния***

Дифференциальные сечение рассеяния

$$\frac{d\sigma_e}{d\Omega_i} = \frac{d\sigma_{ii}}{d\Omega_i} = \left| f_{ii}(\vartheta) \right|^2, \quad \frac{d\sigma_{ji}}{d\Omega_i} = \frac{k_j}{k_i} \left| f_{ji}(\vartheta) \right|^2,$$

$$f_{ji}(\vartheta) = \sum_l (2l+1) P_l(\cos\vartheta) f_{ji}^{(l)}$$

Полные сечение рассеяния

$$\sigma_{ii} = \sum_l \sigma_{ii}^{(l)} = 4\pi \sum_l (2l+1) \left| f_{ii}^{(l)} \right|^2 = \frac{\pi}{k_i^2} \sum_l (2l+1) \left| S_{ii}^{(l)} - 1 \right|^2$$

$$\sigma_{ji} = \sum_l \sigma_{ji}^{(l)} = 4\pi \frac{k_j}{k_i} \sum_l (2l+1) \left| f_{ji}^{(l)} \right|^2 = \frac{\pi}{k_i^2} \sum_l (2l+1) \left| S_{ji}^{(l)} \right|^2$$

$$\sigma_{ji} = \sum_l \sigma_{ji}^{(l)} = \frac{\pi}{k_i^2} \sum_l (2l+1) \left| S_{ji}^{(l)} - \delta_{ij} \right|^2$$

Сечение упругого рассеяния

$$\sigma_e = \sigma_{ii},$$

Сечение неупругого рассеяния

$$\sigma_r = \sum_{j \neq i} \sigma_{ji},$$

Полное сечение

$$\sigma_t = \sigma_e + \sigma_r$$

Задачи

1. Найти в борновском приближении сечение упругого рассеяния быстрого электрона на атоме водорода в основном состоянии.
2. Найти в борновском приближении сечение неупругого рассеяния быстрого электрона на атоме водорода в основном состоянии.
3. В борновском приближении найти сечение возбуждения быстрой заряженной частицей вращательных уровней двухатомной молекулой находящейся в основном состоянии. Дипольный момент молекулы d, момент инерции I, заряд частицы q и импульс k. Использовать дипольное приближение.
4. В борновском приближении найти сечение возбуждения быстрой заряженной частицей колебательных уровней двухатомной молекулой находящейся в основном состоянии. Дипольный момент молекулы d, приведенная масса μ, частота колебаний ω , заряд частицы q и импульс k. Использовать дипольное приближение.

6.3 Условие унитарности и оптическая теорема

$\Psi = \sum_i \left(\beta_i \psi_{i,l}^{(+)} - \alpha_i \psi_{i,l}^{(-)}\right)\Phi_i$ ***- парциальная волна с моментом l***

$$I^{(-)} = \sum_i \left|\alpha_i\right|^2, \quad I^{(+)} = \sum_j \left|\beta_j\right|^2 = \sum_j \left|\sum_i S_{ji}^{(l)} \alpha_i\right|^2 = \sum_{i,j} S_{jk}^{(l)*} S_{ji}^{(l)} \alpha_i \alpha_k^*$$

Закон сохранения числа частиц: $I^{(+)} = I^{(-)}$

$$\boxed{\sum_j S_{ji}^{(l)} S_{jk}^{(l)*} = \delta_{ik}, \quad \mathbf{S}^{(l)}\mathbf{S}^{(l)+} = \mathbf{1}}$$

$$\sum_j \left|S_{ji}^{(l)}\right|^2 = 1, \quad \left|S_{ii}^{(l)}\right|^2 = 1 - \sum_{j \neq i} \left|S_{ji}^{(l)}\right|^2 < 1, \quad \delta_l = \delta_l' + i\delta_l'',$$

$$\sum_{j \neq i} \left|S_{ji}^{(l)}\right|^2 = 1 - \left|S_{ii}^{(l)}\right|^2, \quad \sigma_e^{(l)} = \frac{\pi}{k_i^2}(2l+1)\left|S_{ii}^{(l)} - 1\right|^2,$$

$$\sigma_r^{(l)} = \frac{\pi}{k_i^2}(2l+1)\left(1 - \left|S_{ii}^{(l)}\right|^2\right), \quad \sigma_t^{(l)} = \frac{2\pi}{k_i^2}(2l+1)\left(1 - 2\operatorname{Re} S_{ii}^{(l)}\right),$$

$$S_{ii}^{(l)}=1,\quad \sigma_e^{(l)}=\sigma_r^{(l)}=0,$$

$$\left|S_{ii}^{(l)}\right|=1,\quad \sigma_e^{(l)}\neq 0,\quad \sigma_r^{(l)}=0,$$

$$S_{ii}^{(l)}=0,\quad \sigma_e^{(l)}=\sigma_r^{(l)}=\sigma_0^{(l)}=\frac{\pi}{k_i^2}(2l+1),$$

$$\sigma_r^{(l)}=\sigma_0^{(l)}-\frac{\pi}{k_i^2}(2l+1)\left|S_{ii}^{(l)}\right|^2,$$

$$1-\left|S_{ii}^{(l)}\right|\leq\left|S_{ii}^{(l)}-1\right|\leq\left|S_{ii}^{(l)}\right|+1,$$

$$\sqrt{\sigma_0^{(l)}}-\sqrt{\sigma_0^{(l)}-\sigma_r^{(l)}}\leq\sqrt{\sigma_e^{(l)}}\leq\sqrt{\sigma_0^{(l)}}+\sqrt{\sigma_0^{(l)}-\sigma_r^{(l)}}.$$

Задача

1. Найти сечение полное сечения упругого, σ_e , и неупругого рассеяния, σ_r, быстрой частицы, kR>>1, поглощающей сферой радиуса R.

Оптическая теорема

$$\sum_j \left| S_{ij}^{(l)} \right|^2 = 1,$$

$$\sum_j (\delta_{ij} - 2i\sqrt{k_i k_j} f_{ji}^{(l)*})(\delta_{ji} + 2i\sqrt{k_i k_j} f_{ji}^{(l)}) = 1,$$

$$\mathrm{Im}\{f_{ii}^{(l)}\} = \sum_j k_j \left| f_{ji}^{(l)} \right|^2 = \frac{k_i}{4\pi} \frac{\sigma_t^{(l)}}{(2l+1)},$$

$$\mathrm{Im}\{f_e(0)\} = \mathrm{Im}\{\sum_l (2l+1) f_{ii}^{(l)}\} = \frac{k_i}{4\pi} \sigma_t \,,$$

$$\boxed{\mathrm{Im}\{f_e(0)\} = \frac{k_i}{4\pi} \sigma_t}$$

6.4 Обратимость времени, теорема взаимности

$$\boldsymbol{t \to -t} \qquad \boldsymbol{\Psi \to \Psi^*}$$

$$\chi_{k_i l}^{(\pm)*} = \chi_{k_i l}^{(\mp)}, \quad \left(S_l(k)\right)^* = 1/S_l(k), \quad S_l^*(k^*) = 1/S_l(k)$$

Условие унитарности $S_l(k)^+ = 1/S_l(k)$

Симметричность S - матрицы $\widetilde{S}_l(k) = S_l(k), \quad S_{ij}^{(l)} = S_{ji}^{(l)}$

Теорема взаимности

$$f(\mathbf{k}_j, \mathbf{k}_i) = \frac{4\pi}{2i\sqrt{k_j k_i}} \sum_{lm} S_{ji}^{(l)} Y_{lm}(\mathbf{k}_i) Y_{lm}^*(\mathbf{k}_j), \quad Y_{lm}^*(\mathbf{n}) = (-1)^{l-m} Y_{l-m}(-\mathbf{n}),$$

$$\boxed{f(\mathbf{k}_j, \mathbf{k}_i) = f(-\mathbf{k}_i, -\mathbf{k}_j).}$$

Принцип детального равновесия $\boxed{\dfrac{d\sigma_{ji}}{k_j^2 d\Omega_j} = \dfrac{d\sigma_{ij}}{k_i^2 d\Omega_i}}$

Задача

1. Найти соотношение между сечениями фотоэффекта с основного состояния атома водорода и радиационной рекомбинацией электрона с протоном в основное состояние атома водорода.

6.5 Аналитические свойства S-матрицы многоканального рассеяния

Точки ветвления $E = \Lambda_i, \quad k_1 = \sqrt{2\mu_1(\Lambda_i - \Lambda_1)}/\hbar$

Полюса на физическом листе E < Λ_1, , Re{k_i}=0, Im{k_i}>0

Связанные состояния E = E_0< Λ_1, $\Psi \propto \Psi^{(+)}$

$$\Psi_0 = \sum_i A_i \Psi_i^{(+)} \Phi_i \xrightarrow[r>R]{} \sum_i A_i \frac{e^{-|k_{0i}|r_i}}{r_i} Y_{lm}(\mathbf{n}_i)\Phi_i,$$

$$k_{0i} = \sqrt{2\mu_i(E_0 - \Lambda_i)}/\hbar.$$

Волновая функция задачи рассеяния $\Psi_i = -\psi_{k_i l}^{(-)}\Phi_i + \sum_j S_{ji}^{(l)} \psi_{k_j l}^{(+)} \Phi_j$

$$\Psi_{k_i \to k_{i0}} \to \Psi_0, \quad S_{ji}^{(l)} = \frac{C_{ji}}{k_1 - k_{10}}, \quad C_{ji} = \sqrt{v_j} A_j b_i,$$

$$\Psi_i(k_i \to k_{i0}) = \frac{b_i}{\varepsilon_1}\Psi_0 \quad k_i = k_{i0} + \varepsilon_i, \quad \varepsilon_i = \varepsilon_j \frac{v_j}{v_i}$$

Условие непрерывности

$$\frac{\partial}{\partial t}\int\left|\Psi_i\right|^2 dV=-\oint \mathbf{j}d\mathbf{S}=\sum_j \frac{i\hbar}{2\mu_j}\oint\left(\psi^*_{k_jl}\nabla\psi_{k_jl}-\psi_{k_jl}\nabla\psi^*_{k_jl}\right)d\mathbf{S}$$

$$\frac{\partial}{\partial t}\int_0^R\left|\Psi_i\right|^2 dV=\sum_j \frac{i\hbar}{2\mu_j}\left(\chi^*_{k_jl}\frac{d}{dr}\chi_{k_jl}-\chi_{k_jl}\frac{d}{dr}\chi^*_{k_jl}\right)_{r=R},\quad \Psi_i\to\frac{\varepsilon_1}{b_i}\Psi_i$$

$$\frac{\partial}{\partial t}\left|\Psi_i\right|^2=\frac{2\hbar k_i' k_i''}{\mu_i}\left|\Psi_i\right|^2=\frac{2\hbar\varepsilon_i\kappa_i}{\mu_i}\left|\Psi_i\right|^2,\ \chi_{k_jl}=\left(A_j e^{-\kappa_j r_j+i\varepsilon_j r_j}-\delta_{ij}\frac{(-1)^l\varepsilon_1}{b_i\sqrt{v_i}}e^{\kappa_i r_i-i\varepsilon_i r_i}\right)$$

$$\frac{i}{2\mu_i}\left(\chi^*_{k_il}\frac{d}{dr}\chi_{k_il}-\chi_{k_jl}\frac{d}{dr}\chi^*_{k_il}\right)_{r=R}=i(-1)^l\frac{\varepsilon_1\kappa_i}{\mu_i}\left(\frac{A_i}{(\sqrt{v_i}b_i)^*}-\frac{A_i^*}{\sqrt{v_i}b_i}\right)$$

$$\frac{2\varepsilon_i\kappa_i}{\mu_i}\int_0^R\left|\Psi_i\right|^2 dr=i(-1)^l\frac{\varepsilon_1\kappa_i}{\mu_i}\left(\frac{A_i}{(\sqrt{v_i}b_i)^*}-\frac{A_i^*}{\sqrt{v_i}b_i}\right),\quad b_i=i(-1)^{l+1}A_i^*\frac{\sqrt{v_i}}{v_1},$$

$$\boxed{C_{ji}^{(l)}=i(-1)^{l+1}A_i^* A_j\frac{\sqrt{v_j v_i}}{v_1}}$$

6.6 Резонансное рассеяние, формула Брейта и Вигнера

Многоканальное резонансное рассеяние на квазидискретном уровне $E=E_0-i\Gamma/2$, $\Gamma << E_0$.

Волновая функция задачи рассеяния в области резонанса

$$\Psi_{ilE}=\sum_j \psi_{jlE}(\mathbf{r}_j)\Phi_j=-\psi^{(-)}_{k_i l}\Phi_i+\sum_j S^{(l)}_{ji}\psi^{(+)}_{k_j l}\Phi_j,\quad S^{(l)}_{ji}=\frac{C^{(l)}_{ji}}{E-E_0+\dfrac{i\Gamma}{2}}$$

$$\psi_{jlE}(\mathbf{r}_j)=\frac{\chi_{k_j l}(r_j)}{r_i}Y_{lm}\left(\frac{\mathbf{r}_j}{r_j}\right)$$

При стремлении $E\to E_0-i\Gamma/2$ $\Psi_{ilE}\propto\Psi^{(+)}$ переходит в волновую функцию квазидискретного уровня Ψ_0 с точностью до нормировочного множителя

$$\Psi_0=\sum_i A_i\Psi^{(+)}_i\Phi_i\xrightarrow[r>R]{}\sum_i A_i\frac{e^{i\left(k_{0i}r_i-\frac{\pi l}{2}\right)}}{r_i}Y_{lm}(\mathbf{n}_i)\Phi_i,\ k_{0i}=\sqrt{2\mu_i(E_0-\Lambda_i)}/\hbar$$

$$\Psi_{k_i \to k_{i0}} \to \Psi_0, \quad S_{ji}^{(l)} = \frac{C_{ji}}{E - E_0 + \frac{i\Gamma}{2}}, \quad C_{ji} = \sqrt{v_j} A_j b_i = C \sqrt{v_j} A_j \sqrt{v_i} A_i,$$

$$\Psi_{ilE}\left(E \to E_0 + \frac{i\Gamma}{2}\right) = \sum_j \frac{C_{ji}^{(l)}}{E - E_0 + \frac{i\Gamma}{2}} \psi_{k_j l}^{(+)} \Phi_j = C \frac{\sqrt{v_i} A_i}{E - E_0 + \frac{i\Gamma}{2}} \Psi_0$$

Вычисление $\boxed{C = -i\hbar, \quad C_{ji} = -i\hbar \sqrt{v_j} A_j \sqrt{v_i} A_i,}$

Уравнение Шредингера

$$\hat{H}\Psi_{i,E} = E\Psi_{i,E} \qquad \hat{H} = \sum_i \left(\frac{\hat{\mathbf{p}}_i^2}{2\mu_i} + \hat{\Lambda}_i \right) + \hat{V}_{\text{int}}$$

$$\Psi_{ilE'} \hat{H} \Psi_{ilE} = E \Psi_{ilE} \Psi_{ilE'} \qquad \Psi_{ilE} \hat{H} \Psi_{ilE'} = E' \Psi_{ilE'} \Psi_{ilE'}$$

$$\int_{r_j < R} (E' - E) \Psi_{ilE} \Psi_{ilE'} d\mathbf{r}_j = \sum_j \int_{r_j < R} d\mathbf{r}_j \left(\psi_{jlE} \frac{\hat{\mathbf{p}}_j^2}{2\mu_j} \psi_{jlE'} - \psi_{jlE'} \frac{\hat{\mathbf{p}}_j^2}{2\mu_j} \psi_{jlE} \right)$$

$$\int_{r_j<R}(E'-E)\Psi_{ilE}\Psi_{ilE'}d\mathbf{r}_j=\sum_j\int_{r_j<R}d\mathbf{r}_j\left(\psi_{jlE}\frac{\hat{\mathbf{p}}_j^2}{2\mu_j}\psi_{jlE'}-\psi_{jlE'}\frac{\hat{\mathbf{p}}_j^2}{2\mu_j}\psi_{jlE}\right)=$$

$$\sum_j\frac{\hbar^2}{2\mu_j}\left(\chi_{k'_jl}\chi'_{k_jl}-\chi'_{k'_jl}\chi_{k_jl}\right)|_{r_j=R},$$

$$\int_{r_j<R}\Psi_{ilE}^2 d\mathbf{r}_j=\frac{\hbar^2}{2\mu_i}\lim\frac{\left(\chi_{k'_il}\chi'_{k_il}-\chi'_{k'_il}\chi_{k_il}\right)}{\Delta E}|_{r_i=R}=\frac{\hbar^2}{2\mu_i}\left[\chi'_{k_il}\frac{\partial\chi_{k_il}}{\partial E}-\chi_{k_il}\left(\frac{\partial\chi_{k_il}}{\partial E}\right)'\right]|_{r_i=R}$$

$$C^2\frac{v_iA_i^2}{\left(E-E_0+\frac{i\Gamma}{2}\right)^2}\int_{r_j<R}\Psi_0^2 d\mathbf{r}_j=\frac{\hbar^2}{2\mu_i}\left[\chi'_{k_il}\frac{\partial S_{ii}^{(l)}}{\partial E}\chi_{k_il}^{(+)}-\chi_{k_il}\frac{\partial S_{ii}^{(l)}}{\partial E}\chi_{k_il}^{(+)'}\right]|_{r_i=R}$$

$$C^2\frac{v_iA_i^2}{\left(E-E_0+\frac{i\Gamma}{2}\right)^2}=\frac{-i\hbar^2k_{i0}}{\mu_i}\frac{\partial S_{ii}^{(l)}}{\partial E}\chi_{k_il}^{(-)}\chi_{k_il}^{(+)}|_{r_i=R}=\frac{-i\hbar^2k_{i0}}{2\mu_iv_i}\frac{Cv_iA_i^2}{\left(E-E_0+\frac{i\Gamma}{2}\right)^2},$$

$$\boxed{C=-i\hbar}$$

$$S_{ji}^{(l)}(E\approx E_0)\approx -\frac{i\hbar\sqrt{v_j v_i}A_i A_j}{E-E_0+i\frac{\Gamma}{2}}+\delta_{ij}e^{2i\delta_i^{(l)}},$$

$$\boxed{f_{ji}^{(l)}=\delta_{ij}\frac{(e^{2i\delta_i^{(l)}}-1)}{2ik_i}-\frac{ie^{i(\delta_i^{(l)}+\delta_j^{(l)})}\sqrt{\Gamma_j\Gamma_i}}{2i\sqrt{k_i k_j}\left(E-E_0+i\frac{\Gamma}{2}\right)},}\quad \Gamma_i=\hbar v_i\left|A_i\right|^2$$ ***- поток частиц сорта i***

Условие унитарности $\mathrm{Im}\{f_{ii}^{(l)}\}=\sum_j k_j\left|f_{ji}^{(l)}\right|^2,\quad \Gamma=\sum_i\Gamma_i$

$\Gamma_i=\hbar v_i|A_i|^2$ - парциальная ширина, $\Gamma=\Sigma_i\Gamma_i$ - полная ширина.

$$\sigma_e^{(l)}=4\pi(2l+1)\left|f_{ii}^{(l)}\right|^2,\quad \sigma_{rj}^{(l)}=\frac{\pi(2l+1)}{k_i^2}\frac{\Gamma_i\Gamma_j}{(E-E_0)^2+\left(\frac{\Gamma}{2}\right)^2}$$

Рассеяние через образование промежуточного квазистационарного состояния, прямое рассеяние

$$\sigma_e = \frac{\pi(2l+1)}{k_i^2}\left(\frac{\Gamma_e^2}{(E-E_0)^2+\frac{\Gamma^2}{4}} + 4\,\mathrm{Re}\left(\frac{\Gamma_e e^{i\delta_e}\sin\delta_i}{E-E_0+\frac{i\Gamma}{2}}\right) + 4\sin^2\delta_e\right),$$

$$\sigma_r = \frac{\pi(2l+1)}{k_i^2}\frac{\Gamma_e\Gamma_r}{(E-E_0)^2+\frac{\Gamma^2}{4}}, \quad \Gamma_r = \Gamma - \Gamma_e, \quad \Gamma_e = \Gamma_i, \quad \delta_e = \delta_i$$

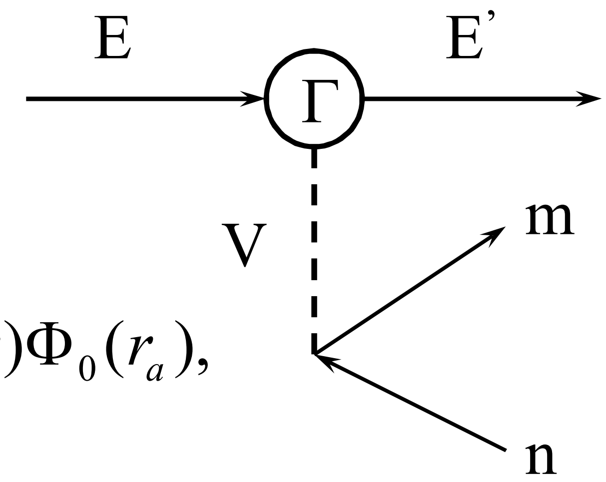
Сечение образования промежуточного квазистационарного состояния в пренебрежении каналом прямого потенциального рассеяния

$$\sigma_t = \frac{\pi(2l+1)}{k_i^2}\frac{\Gamma_e\Gamma}{(E-E_0)^2+\frac{\Gamma^2}{4}}, \quad \sigma_e = \frac{\Gamma_e}{\Gamma}\sigma_t, \quad \sigma_{ri} = \frac{\Gamma_{ri}}{\Gamma}\sigma_t.$$

Резонансы формы

Пример: Неупругое резонансное рассеяние с возбуждением мишени

$$w = \frac{2\pi}{\hbar}\int \left|\langle \Psi_f | V | \Psi_i \rangle\right|^2 \delta(E_f - E_i)\,df,$$



$$\Psi_i = \psi_{\mathbf{k}}(r)\Phi_0(r_a), \quad \Psi_f = \psi_{\mathbf{k}'}(r)\Phi_{nm}(r_a).$$

$$\Psi_i = \sqrt{4\pi(2l+1)}\,\frac{i^l e^{i\delta_l}}{2k}\sqrt{\frac{\hbar v\Gamma}{(E-E_0)^2 + \frac{\Gamma^2}{4}}}\,\psi_0(r)\Phi_0(r_a),$$

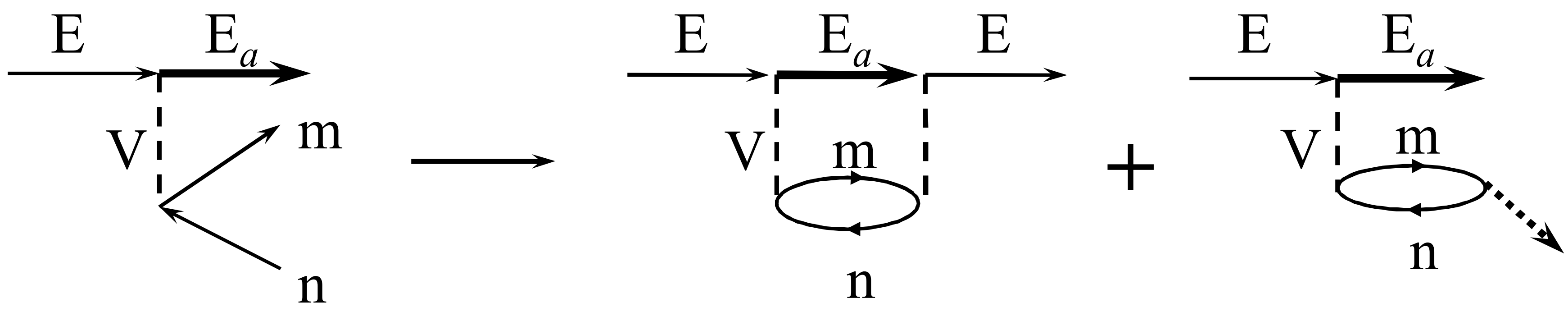
$$w = \frac{\pi(2l+1)}{k^2}\,\frac{v\Gamma}{(E-E_0)^2 + \frac{\Gamma^2}{4}}\,2\pi\int \left|\langle \Psi_f | V | \Psi_0 \rangle\right|^2 \delta(E_f - E_i)\,df,$$

$$\Gamma_r = 2\pi\int \left|\langle \Psi_f | V | \Psi_0 \rangle\right|^2 \delta(E_f - E_i)\,df, \quad \Gamma_r \ll \Gamma_e = \Gamma,$$

$$\sigma_r = \frac{w}{v} = \frac{(2l+1)\pi}{k^2}\,\frac{\Gamma\Gamma_r}{(E-E_0)^2 + \frac{\Gamma^2}{4}}, \quad \sigma_r = \sigma_e\frac{\Gamma_r}{\Gamma}$$

Резонансы Фешбаха

Пример: **Резонансное рассеяние с образованием автоионизационного состояния.**



Автоионизационная ширина
$$\Gamma_e = \Gamma_a = 2\pi \int \left| \left\langle \psi_E \Phi_0 \middle| V \middle| \psi_a \Phi_{nm} \right\rangle \right|^2 \delta(E - E_a - E_{nm})\, dE,$$

Неупругая ширина
$$\Gamma_r = 2\pi \int \left| \left\langle \psi_a \Phi_f \middle| V \middle| \psi_a \Phi_{nm} \right\rangle \right|^2 \delta(E_f - E_a - E_{nm})\, df,$$

Сечение резонансного рассеяния
$$\sigma_e = \frac{\pi(2l+1)}{k_i^2} \frac{\Gamma_a^2}{(E - E_0)^2 + \dfrac{\Gamma^2}{4}}.$$

Сечение захвата
$$\sigma_{att} = \frac{\pi(2l+1)}{k^2} \frac{\Gamma_a \Gamma_r}{(E - E_0)^2 + \dfrac{\Gamma^2}{4}}, \quad \Gamma = \Gamma_a + \Gamma_r.$$

Оптическая модель рассеяния
Большое число плотно расположенных резонансов

Усредненные сечения, l=0 $\bar{\sigma}_t = \frac{\pi}{k_i^2}(1 - 2\,\mathrm{Re}\,\bar{S}_{ii}),$

$$\sigma_e^{opt} = \frac{\pi}{k_i^2}\left|\bar{S}_{ii} - 1\right|^2, \quad \sigma_a^{opt} = \bar{\sigma}_t - \sigma_e^{opt} = \frac{\pi}{k_i^2}\left(1 - \left|\bar{S}_{ii}\right|^2\right).$$

Усреднение S матрицы, Γ << D.

$$S_{ii}^{(l)} = \left(1 - \frac{i\Gamma_e}{E - E_0 + i\frac{\Gamma}{2}}\right)e^{2i\delta_e}, \quad \bar{S}_{ii}^{(l)} = \left(1 - \frac{\pi\bar{\Gamma}_e}{D}\right)e^{2i\delta_e},$$

$$\boxed{\sigma_a^{opt} = \frac{\pi}{k_i^2}\frac{2\pi\bar{\Gamma}_e}{D}.}$$

$$\sigma_a^{opt} \le \sigma_0 = \frac{\pi}{k_i^2},$$

$$\frac{2\pi\bar{\Gamma}_e}{D} \le 1$$

Принцип детального равновесия:

$$\frac{\sigma_{ji}p_i^2}{2\pi^2} = \frac{\sigma_{ij}p_j^2}{2\pi^2} = \sigma_{ij}v_j\rho_j = I_{ij},\ \rho = \frac{4\pi mp}{(2\pi)^3},\ w = \sigma v,$$

$$I = \Gamma_e\rho = \frac{\Gamma_e}{D} \quad \sigma_a^{opt} = \frac{2\pi^2}{k_i^2}w_d\rho = \frac{2\pi^2}{k_i^2}\frac{\Gamma_e}{D}$$

6.7 Пороговые явления

$$E \approx \Lambda_i,\ T_i = E - \Lambda_i \to 0$$

***Пример*: $i=1,2;\ E \approx \Lambda,\ T_2 \to 0,\ k_2 R << 1$**

Волновая функция задачи рассеяния частицы 1

$$\Psi_1 = -\psi^{(-)}_{k_1 l}\,\Phi_1 + S^{(l)}_{11}\psi^{(+)}_{k_1 l}\,\Phi_1 + S^{(l)}_{21}\psi^{(+)}_{k_2 l}\,\Phi_2$$

Условие сшивания при r=R

$$\psi^{(+)}_{k_2 l}(r_2 >> R) = \frac{1}{\sqrt{v_2}}\frac{e^{i(k_2 r_2 - \frac{\pi l}{2})}}{r_2} Y_{lm}(\mathbf{n}_i), \quad \psi^{(+)}_{k_2 l}(r_2 \approx R) \propto \frac{1}{k_2^{l+1/2}}, \quad k_2 R << 1,$$

$$S^{(l)}_{21}\psi^{(+)}_{k_2 l}(r_2 = R) = \psi^{(\mathrm{int})}_{2,l}, \quad S^{(l)}_{21} \approx \frac{1}{\psi^{(+)}_{k_2 l}(r_2 \approx R)} \propto k_2^{l+1/2},$$

$$\sigma^{(l)}_{21} = \frac{\pi}{k_1^2}\sum_l (2l+1)\left|S^{(l)}_{21}\right|^2 \propto k_2^{2l+1}, \quad \sigma^{(l)}_{12} = \frac{k_1^2}{k_2^2}\sigma^{(l)}_{21} \propto k_2^{2l-1},$$

$$\boxed{\sigma_{21} \propto v_2, \quad \sigma_{12} \propto 1/v_2}$$ ***- закон 1/v***

Закон 1/v и теория возмущений

$$\sigma_{21} = \frac{2\pi}{\hbar v_1}\int\left|\left\langle\Psi_{k_2}\middle|V\middle|\Psi_{k_1}\right\rangle\right|^2 \delta\left(\frac{\hbar^2 k_2^2}{2\mu_2} + \Lambda - \frac{\hbar^2 k_1^2}{2\mu_1}\right)\frac{dk_2^3}{(2\pi)^3} =$$

$$\frac{2\pi}{v_1}\left|\left\langle\Psi_{k_2}\middle|V\middle|\Psi_{k_1}\right\rangle\right|^2 \frac{4\pi k_2\mu_2}{(2\pi\hbar)^3} \propto v_2 = \sqrt{2(E-\Lambda)/\mu_2},$$

$$\sigma_{12} = \frac{2\pi}{\hbar v_2}\int\left|\left\langle\Psi_{k_1}\middle|V\middle|\Psi_{k_2}\right\rangle\right|^2 \delta\left(\frac{\hbar^2 k_2^2}{2\mu_2} + \Lambda - \frac{\hbar^2 k_1^2}{2\mu_1}\right)\frac{dk_1^3}{(2\pi)^3} \propto 1/v_2$$

$$\sigma_t = \sigma_{22} + \sigma_{12}$$

Волновая функция $\psi^{(+)}$ в классически недоступной области $r < \rho = l/k$

$$\chi_{kl}^{(+)}(r >> \rho) = \frac{1}{\sqrt{v}} e^{i(kr - \frac{\pi l}{2})}, \quad \chi_{kl}^{(+)}(r < \rho) \approx \frac{1}{\sqrt{|v(r)|}} e^{\int_r^\rho |k(r)| dr} =$$

$$\frac{1}{\sqrt{|v(r)|}} e^{\int_r^\rho \sqrt{2m(\frac{(l+1/2)^2}{2mr^2} - E)}dr} \approx \frac{1}{\sqrt{|v(r)|}}\left(\frac{\rho}{r}\right)^{l+\frac{1}{2}} \propto \frac{1}{k^{l+1/2}}$$

Пороговое поведение сечения рождения заряженных частиц.

1. Притяжение, $q_x q_y < 0$, отсутствие потенциального барьера $l^2 < |q_x q_y| mR$

$$\chi_{kl}^{(+)}(r >> R) = \frac{1}{\sqrt{v}} e^{i(kr + \frac{|q_x q_y|}{v}\ln(2kr) - \frac{\pi l}{2})} \propto 1/\sqrt{v}, \quad \chi_{kl}^{(+)}(r \approx R) \propto const$$

$$S_{21}^{(l)} \approx \frac{1}{\psi_{k_2 l}^{(+)}(r_2 \approx R)} \propto const, \quad \boxed{\sigma_{21}^{(l)} \propto const, \quad \sigma_{12}^{(l)} = \frac{k_1^2}{k_2^2}\sigma_{21}^{(l)} \propto v_2^{-2}}$$

2. Отталкивание, $q_x q_y > 0$, малость центробежного барьера $l^2 < |q_x q_y| mR$

Волновая функция $\psi^{(+)}$ в классически недоступной области $q_x q_y / r > (E - \Lambda_2)$

$$\chi_{kl}^{(+)}(r >> r_0 = q_x q_y / E) = \frac{1}{\sqrt{v}} e^{i(kr - \frac{q_x q_y}{v}\ln(2kr) - \frac{\pi l}{2})} \propto 1/\sqrt{v},$$

$$\chi_{kl}^{(+)}(r < r_0) \approx \frac{1}{\sqrt{v(r)}} e^{\int_r^{r_0}|k(r)|dr} = \frac{1}{\sqrt{v(r)}} e^{\int_r^{r_0}\sqrt{2m(\frac{q_x q_y}{r} - E)}dr} \approx \frac{1}{\sqrt{v(r)}} e^{\frac{\pi q_x q_y}{\sqrt{2E/m}}} \propto e^{\frac{\pi q_x q_y}{v}},$$

$$S_{21}^{(l)} \approx \frac{1}{\psi_{k_2 l}^{(+)}(r_2 \approx R)} \propto e^{-\frac{\pi q_x q_y}{v_2}}, \quad \boxed{\sigma_{21}^{(l)} \propto e^{-\frac{2\pi q_x q_y}{v_2}}, \quad \sigma_{12}^{(l)} = \frac{k_1^2}{k_2^2}\sigma_{21}^{(l)} \propto v_2^{-2} e^{-\frac{2\pi q_x q_y}{v_2}}}$$

Поведение упругого сечения вблизи порога $E \approx \Lambda_2$

1. $E \geq \Lambda_2$

$$S_{21}^{(l)} \propto k_2^{l+1/2}, \quad \left|S_{11}^{(l)}\right| = \sqrt{1 - \left|S_{21}^{(l)}\right|^2} = 1 - \frac{1}{2} A k_2^{2l+1}, \quad A > 0,$$

$$S_{11}^{(l)} = e^{2i\delta_l^{(0)}}\left(1 - \frac{1}{2} A k_2^{2l+1}\right), \quad \mathrm{Im}\{\delta_l^{(0)}\} = 0.$$

2. $E \leq \Lambda_2$

$$S_{11}^{(l)} = e^{2i\delta_l^{(0)}}\left(1 - \frac{1}{2} A k_2^{2l+1}\right), \quad \left|S_{11}^{(l)}\right| = 1, \quad \mathrm{Im}\{\delta_l^{(0)}\} = O(k_2^{2(2l+1)}),$$

$$\delta_l^{(0)}(k_2) = \delta_l^{(0)}(0) + a k_2^2 + \ldots \approx \delta_l^{(0)}(0) \equiv \delta_l \ ,$$

$$S_{11}^{(0)} = e^{2i\delta_0}\left(1 - \frac{1}{2} A k_2\right), \quad S_{11}^{(l)} = e^{2i\delta_l} \ ,$$

$$f_{11}(\vartheta, E) = f_{11}(\vartheta, \Lambda) - \frac{A k_2}{4 i k_1} e^{2i\delta_0} = f_{11}(\vartheta, \Lambda) - \frac{A\sqrt{2\mu_2(E - \Lambda)}}{4 i k_1} e^{2i\delta_0}$$

Дифференциальное сечение рассеяния

$$\frac{d\sigma_e}{d\Omega}=\left|f_{11}(\vartheta,E)\right|^2=\left|f_{11}(\vartheta,\Lambda)\right|^2+\frac{A\sqrt{2\mu_2(E-\Lambda)}}{2k_1}\mathrm{Im}\{f_{11}(\vartheta,\Lambda)e^{-2i\delta_0}\},\boldsymbol{E\geq\Lambda_2},$$

$$\frac{d\sigma_e}{d\Omega}=\left|f_{11}(\vartheta,E)\right|^2=\left|f_{11}(\vartheta,\Lambda)\right|^2-\frac{A\sqrt{2\mu_2(\Lambda-E)}}{2k_1}\mathrm{Re}\{f_{11}(\vartheta,\Lambda)e^{-2i\delta_0}\},\boldsymbol{E\leq\Lambda_2}.$$

$$\frac{d\sigma_e}{d\Omega}=\left|f_e(\vartheta,E)\right|^2=\left|f_e(\vartheta,\Lambda)\right|^2-\frac{A\sqrt{2\mu_2\left|E-\Lambda\right|}}{2k_1}\left|f_e(\vartheta,\Lambda)\right|\bullet\begin{cases}\sin(2\delta_0-\alpha)\ \boldsymbol{E\geq\Lambda_2},\\ \cos(2\delta_0-\alpha)\ \boldsymbol{E\leq\Lambda_2}.\end{cases}$$

$$f_e(\vartheta,\Lambda)=\left|f_e(\vartheta,\Lambda)\right|e^{i\alpha}$$

Полное сечение рассеяния

$$\sigma_e(E)=\sigma_e(\Lambda)-2\pi A\sqrt{2\mu_2\left|E-\Lambda\right|}\bullet\begin{cases}\sin^2(\delta_0)\ \boldsymbol{E\geq\Lambda_2},\\ \sin(2\delta_0)/2\ \boldsymbol{E\leq\Lambda_2}.\end{cases}$$

6.8 Взаимодействие в конечном состоянии при реакциях
Резонанс при рождении медленных частиц

$$\sigma_{21} = \frac{2\pi}{v_1}\int \left|\left\langle \Psi_{k_2}\middle|V\middle|\Psi_{k_1}\right\rangle\right|^2 \delta\left(\frac{k_2^2}{2\mu_2} + \Lambda - \frac{k_1^2}{2\mu_1}\right)\frac{dk_2^3}{(2\pi)^3} =$$

$$\frac{2\pi}{v_1}\left|\left\langle \Psi_{k_2}\middle|V\middle|\Psi_{k_1}\right\rangle\right|^2 \frac{4\pi k_2\mu_2}{(2\pi)^3}, \quad \psi_{k_2} = e^{i\mathbf{k}_2\mathbf{r}_2} - \frac{1}{\kappa + ik_2}\frac{e^{ik_2r_2}}{r},$$

$$\sigma_{21} \propto \frac{k_2}{k_2^2 + \kappa^2} \propto \frac{\sqrt{E-\Lambda}}{E - \Lambda + |\varepsilon|}, \quad \varepsilon = -\frac{\kappa^2}{2\mu_2}$$

Задача

1. Результатом столкновения элементарных частиц является рождение пары медленных нуклонов: протона и нейтрона. Используя борновское приближение, найти зависимость сечения этого процесса от энергии пары нуклонов Е, если известно, что протон и нуклон образуют слабо связанное состояние, дейтрон, с энергией связи ε.

Рекомендуемая литература

•Л.Д. Ландау, Е.М. Лифшиц Теоретическая физика: Учеб. пособие: для вузов. В 10 т. Том III. Квантовая механика. Нерелятивистская теория. Москва, Наука, 1989 – 750с.

•А.И.Базь, Я.Б.Зельдович, А.М.Переломов , Рассеяние реакции и распады в нерелятивистской квантовой механике. Москва, Наука, 1972.- 339с.

•В.М.Галицкий, Б.М.Корнаков, В.И.Коган Задачи по квантовой механике Учеб. пособие: для вузов. Москва, Наука, 1992 – 647.

•З. Флюгге Задачи по квантовой механике. Том 1. Москва, Мир, 1974.

Дополнительная:

•Дж.Тейлор Теория рассеяния Квантовая теория нерелятивистских столкновений. Москва, Мир, 1975.

•Р.Ньютон Теория рассеяния волн и частиц. Москва, Мир, 1969.

•А.Б.Мигдал Качественные методы в квантовой теории Москва, Наука, 1975.

Оглавление

1. Потенциальное рассеяние 3
2. Теория возмущенией 5
    1. Приближение Борна 5
    2. Метод функций Грина 7
3. Фазовая теория рассеяния 17
    1. Разложение волновой функции по парциальным волнам 17
    2. Сечение рассеяния 20
    3. Условие унитарности S – матрицы, оптическая теорема 22
    4. Квазиклассическое приближение 26
    5. Рассеяние медленных частиц 31
    6. Резонансное рассеяние медленных частиц 35
4. Аналитические свойства матрицы рассеяния 39
    1. Симметрия волновой функции задачи рассеяния и S-матрицы относительно инверсии пространства и обращения времени 39
    2. Особенности S-матрицы 41
    3. Теорема Левинсона 46
5. Квазистационарные состояния 47
    1. Определение и свойства квазистационарного состояния 47
    2. Квазистационарное состояние в задаче рассеяния 49
    3. Зависимость волновой функции рассеяния от энергии налетающий частицы в области резонанса 51
6. Многоканальное рассеяние 56
    1. Волновая функция и S-матрица многоканальной задачи 56
    2. Сечения рассеяния, разложение по парциальным волнам 57
    3. Условие унитарности и оптическая теорема 60
    4. Обратимость времени, теорема взаимности 63
    5. Аналитические свойства S-матрицы многоканального рассеяния 65
    6. Резонансное рассеяние, формула Брейта и Вигнера 67
    7. Пороговые явления 75
    8. Взаимодействие в конечном состоянии при реакциях 80
7. Рекомендуемая литература 81