

Федеральное агентство по образованию

САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ
ПОЛИТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ

Д. Ф. КУЗНЕЦОВ

**ЧИСЛЕННОЕ
ИНТЕГРИРОВАНИЕ
СТОХАСТИЧЕСКИХ
ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ
УРАВНЕНИЙ. 2**

Санкт-Петербург
Издательство Политехнического университета
2006

УДК 519.21+518.61
ББК 22.171
К 891

Кузнецов Д.Ф. Численное интегрирование стохастических дифференциальных уравнений. 2: СПб.: Изд-во Политехн. ун-та, 2006. 764 с.

Данная монография является существенно переработанным и дополненным изданием книги: *Кузнецов Д.Ф. Численное интегрирование стохастических дифференциальных уравнений.* СПб.: Изд-во СПбГУ, 2001. 712 с. и представляет собой результат 14-летних исследований автора по проблеме численного интегрирования стохастических дифференциальных уравнений Ито.

Настоящая книга является своего рода уникальным изданием. В ней как нигде полно освещена проблема аппроксимации повторных стохастических интегралов Стратоновича и Ито применительно к численному интегрированию стохастических дифференциальных уравнений, причем центральное место в этой части книги занимают полученные автором результаты.

Монография может рассматриваться как не имеющая аналогов энциклопедия по численным методам и схемам для стохастических дифференциальных уравнений.

По охвату приложений и численным примерам решения математических задач, связанных со стохастическими дифференциальными уравнениями, книга также занимает видное место.

Изложение очень подробно и доступно, несмотря на достаточно высокую степень новизны изучаемой проблемы (проблема численного интегрирования стохастических дифференциальных уравнений получила интенсивное развитие лишь в 80-х годах XX века) и ее очень высокую "формулоемкость" (такова специфика указанной проблемы).

В данной книге интенсивно развивается перспективный подход к численному интегрированию стохастических дифференциальных уравнений Ито, основанный на стохастических аналогах формулы Тейлора для решений данных уравнений и специальных методах аппроксимации повторных стохастических интегралов.

Книга окажется интересной специалистам по теории случайных процессов, вычислительной математике, программистам.

Табл. 40. Ил. 158. Библиогр.: 183 назв.

Печатается по решению редакционно-издательского совета Санкт-Петербургского государственного политехнического университета.

ISBN 5-7422-1191-0

© Кузнецов Д.Ф., 2006
© Санкт-Петербургский государственный
политехнический университет, 2006

Предисловие

Данная монография является существенно доработанным и дополненным изданием книги: *Кузнецов Д.Ф.* Численное интегрирование стохастических дифференциальных уравнений. СПб.: Издательство С.-Петербургского государственного университета, 2001. 712 с. и представляет собой результат 14 летних исследований автора по проблеме численного интегрирования стохастических дифференциальных уравнений Ито.

Настоящая книга является своего рода уникальным изданием. В ней как нигде полно освещена проблема аппроксимации повторных стохастических интегралов применительно к численному интегрированию стохастических дифференциальных уравнений, причем центральное место в этой части книги занимают полученные автором результаты.

Монография может рассматриваться как, не имеющая аналогов, энциклопедия по численным методам и схемам для стохастических дифференциальных уравнений.

По охвату приложений и численным примерам решения математических задач, связанных со стохастическими дифференциальными уравнениями книга также занимает видное место.

Изложение очень подробно и доступно, несмотря на достаточно высокую степень новизны изучаемой проблемы (проблема численного интегрирования стохастических дифференциальных уравнений получила интенсивное развитие лишь в 80-х годах XX века) и ее очень высокую "формулоемкость" (такова специфика указанной проблемы).

В данной книге интенсивно развивается перспективный подход к численному интегрированию стохастических дифференциальных уравнений Ито, основанный на стохастических аналогах формулы Тейлора для решений данных уравнений.

Важной отличительной особенностью стохастических аналогов формулы Тейлора для решений стохастических дифференциальных уравнений Ито является присутствие в них повторных стохастических интегралов Ито или Стратоновича.

Поскольку стохастические дифференциальные уравнения Ито являются адекватными математическими моделями динамических систем

различной физической природы, находящихся под воздействием случайных возмущений, то, в некотором смысле, указанные повторные стохастические интегралы описывают, в определенном приближении, упомянутые природные процессы. Этим обуславливается важность задачи аппроксимации повторных стохастических интегралов.

Эта задача не так проста как может показаться на первый взгляд.

Во-первых, указанные интегралы при фиксированных пределах интегрирования являются случайными величинами, плотности распределения которых, в общем случае неизвестны, да и вряд ли они принесли бы пользу, скажем, для среднеквадратической аппроксимации повторных стохастических интегралов.

Во-вторых, требуется аппроксимировать не один стохастический интеграл, а совместно несколько различных стохастических интегралов, которые зависимы, в вероятностном смысле, сложным образом.

В-третьих, обозначенная проблема является действительно проблемой как в случае векторного, так и скалярного стохастического возмущения даже для стохастических дифференциальных уравнений с точно известными решениями, т.е., зная точное решение, далеко не всегда возможно его смоделировать численно без привлечения численного моделирования повторных стохастических интегралов. Численно моделировать решение стохастического дифференциального уравнения Ито может потребоваться в различных ситуациях: при проверке адекватности новой математической модели на основе данного уравнения, при численном решении различных математических задач, например, задач фильтрации в различных постановках, задачи об оптимальном стохастическом управлении и т.д.

Оказалась разумной идея отыскания неких базисов случайных величин, с помощью которых можно представлять интересующие нас совокупности повторных стохастических интегралов.

Пожалуй до середины 80-х годов XX века осуществлялись попытки аппроксимировать повторные стохастические интегралы с помощью разного рода интегральных сумм, т.е. промежутков интегрирования стохастического интеграла разбивался на n частей и повторный стохастический интеграл приближенно представлялся повторной интегральной суммой, в которую входила система независимых стандартных гауссовских случайных величин, численное моделирование которой не является проблемой.

Однако, сразу бросается в глаза то обстоятельство, что промежуток интегрирования повторных стохастических интегралов есть не что иное, как шаг интегрирования численного метода, который и

без дополнительного дробления уже является достаточно малой величиной. Численные эксперименты показывают, что такой подход ведет к резкому увеличению вычислительных затрат при росте кратности стохастических интегралов, что необходимо для построения более точных численных методов или при уменьшении шага интегрирования численного метода и, в силу этих причин, не выдерживает критики.

Революционный шаг в направлении решения проблемы аппроксимации повторных стохастических интегралов был сделан Г.Н.Мильштейном [70] (1988г.), который предложил использовать сходящееся в среднеквадратическом смысле тригонометрическое разложение Фурье для винеровских процессов, по которым вычисляется повторный стохастический интеграл. В [70] данным методом получены разложения в ряды из независимых стандартных гауссовских случайных величин двух простейших стохастических интегралов 1-й и 2-й кратности и доказана их сходимость в среднеквадратическом смысле.

Эта идея была подхвачена в [86] (1992г.), где были получены разложения и сходящиеся в среднеквадратическом смысле аппроксимации повторных стохастических интегралов Стратоновича 1–3 кратности. Однако, в силу сложности преобразований, на которых основан метод [70], в [86] и последующих публикациях, дальше этого ”дело не пошло”. Этих результатов оказалось достаточно для построения в упомянутых монографиях сильных численных методов порядков точности 1.0 и 1.5 для стохастических дифференциальных уравнений Ито с многомерным шумом. Важно отметить, что метод [70] в разы, а то и на порядки, превзошел метод интегральных сумм по вычислительным затратам в смысле их уменьшения.

Несмотря на преимущества метода [70], наметился и ряд его очевидных недостатков: отсутствие общей явной формулы для вычисления коэффициентов разложения повторного стохастического интеграла произвольной кратности k (как следствие получены упомянутые аппроксимации повторных стохастических интегралов 1–3 кратности, и только), практическая невозможность точного вычисления среднеквадратической погрешности аппроксимации стохастического интеграла, за исключением простейших интегралов 1-й и 2-й кратности (в результате приходится учитывать избыточные члены разложения, что ведет к росту вычислительных затрат). Хотя, следует отметить, что рассматриваемый метод является определенного рода прорывом в данной научной области.

Следующим шагом на пути решения проблемы аппроксимации повторных стохастических интегралов является, на взгляд автора, пред-

ложенный им метод.

Идея данного метода состоит в следующем: повторный стохастический интеграл Ито представляется в виде кратного стохастического интеграла от специальной неслучайной разрывной функции k переменных, определенной на гиперкубе $[t, T]^k$, где k — кратность стохастического интеграла Ито, $[t, T]$ — его промежуток интегрирования. Далее указанная неслучайная функция разлагается внутри гиперкуба в кратный ряд Фурье, сходящийся в среднем. После ряда преобразований приходим к сходящемуся в среднеквадратическом смысле разложению повторного стохастического интеграла Ито в кратный ряд из произведений независимых стандартных гауссовских случайных величин (коэффициентами данного ряда являются коэффициенты кратного ряда Фурье для упоминавшейся неслучайной функции нескольких переменных, которые вычисляются по явной формуле независимо от кратности стохастического интеграла).

В результате мы получаем следующие новые возможности по сравнению с методом [70]:

1. Имеется явная формула для вычисления коэффициентов разложения повторного стохастического интеграла Ито произвольной кратности k .

2. Открываются новые возможности для точного вычисления среднеквадратической погрешности аппроксимации повторных стохастических интегралов.

3. Поскольку используемый кратный ряд Фурье является обобщенным в том смысле, что он строится с использованием различных полных ортонормированных систем функций в пространстве $L_2([t, T])$, то появляются новые возможности для аппроксимации — можно использовать не только тригонометрические функции, но и полиномы Лежандра, а также системы функций Хаара и Радемахера–Уолша.

4. Как оказалось, работать при построении аппроксимаций повторных стохастических интегралов, удобнее всего именно с полиномами Лежандра — существенно проще вычислять коэффициенты кратного ряда Фурье (используется по сути только формула первообразной для степенной функции с целым неотрицательным показателем; при работе с тригонометрическими функциями это не так — скажем при вычислении интеграла от произведения синуса на косинус с аргументами nt и mt соответственно ($n, m = 0, 1, 2, \dots$) мы получим три существенно различных первообразных в случаях: $n - m \neq 0, n + m \neq 0$; $n - m = 0, n + m \neq 0$; $n - m = 0, n + m = 0$). Кроме того, сами аппроксимации по виду получаются проще при использовании полиномов

Лежандра. Это связано с тем, что система полиномов Лежандра более однородна в том смысле, что каждая ее функция — многочлен. Тригонометрическая же система устроена сложнее — первая ее функция является многочленом нулевой степени, остальные представляют собой две бесконечные серии синусов и косинусов соответственно. Для систем функций Хаара и Радемахера–Уолша разложения повторных стохастических интегралов получаются пожалуй чересчур сложными.

5. Вопрос о том, какая же система функций полиномиальная или тригонометрическая удобнее с точки зрения вычислительных затрат на аппроксимацию повторных стохастических интегралов оказался не простым, поскольку требуется сравнивать аппроксимации не одного интеграла, а нескольких интегралов одновременно. При этом может случиться так, что для одних интегралов вычислительные затраты окажутся меньше для полиномов Лежандра, а для других для тригонометрических функций. Отметим, что сами формулы для полученных аппроксимаций достаточно громоздки. Не настаивая на своей правоте, автор, на основании проведенных численных экспериментов (таблицы 6.35, 6.36), считает что вычислительные затраты в 2–3 раза меньше для полиномов Лежандра по крайней мере при аппроксимации совокупности повторных стохастических интегралов 1–3 кратности, необходимых для построения сильного численного метода порядка точности 1.5 для стохастического дифференциального уравнения Ито с многомерным шумом.

Отметим, что книга не претендует на полное прояснение всего круга вопросов, связанного с обсуждаемой проблемой, однако автор надеется, что монография вносит заметный вклад в развитие теории численного интегрирования стохастических дифференциальных уравнений.

Книга состоит из четырех частей, разделенных на 16 глав.

Часть I содержит две вводные главы. В главе 1 приводятся необходимые в дальнейшем сведения из теории стохастических дифференциальных уравнений и стохастических интегралов. В главе 2 рассмотрены математические модели динамических систем, находящихся под воздействием случайных возмущений. Приведены примеры физических и технических систем, описываемых данными математическими моделями. Рассмотрен также ряд математических задач, в которых встречается необходимость численного решения стохастических дифференциальных уравнений.

В часть II книги входят четыре главы (главы 3–6), в которых представлены теоретические результаты, положенные в основу численных

методов решения стохастических дифференциальных уравнений.

Глава 3 монографии знакомит с некоторыми свойствами стохастических интегралов. В частности, рассмотрена замена порядка интегрирования в повторных стохастических интегралах по мартингалу (подробно рассмотрен случай стохастических интегралов Ито) и приведены соотношения между повторными стохастическими интегралами Стратоновича и Ито произвольной кратности k .

Глава 4 посвящена стохастическим аналогам разложения Тейлора для процессов Ито. В ней представлены как известные стохастические разложения Тейлора–Ито и Тейлора–Стратоновича, так и четыре новых представления разложений Тейлора–Ито и Тейлора–Стратоновича, названных унифицированными. Унифицированные разложения Тейлора–Ито и Тейлора–Стратоновича строятся с помощью замены порядка интегрирования в повторных стохастических интегралах и минимизируют общее число различных повторных стохастических интегралов, входящих в разложения Тейлора–Ито и Тейлора–Стратоновича, которые изучались в [70, 79, 81, 84, 86].

В главе 5 книги рассматриваются разложения повторных стохастических интегралов в кратные ряды из произведений независимых стандартных гауссовских случайных величин, которые основаны на кратных рядах Фурье.

Глава 6, завершающая часть II монографии, посвящена методам сильной и слабой аппроксимации повторных стохастических интегралов Ито и Стратоновича, входящих в разложения Тейлора–Ито и Тейлора–Стратоновича соответственно. На результатах главы 5 в главе 6 предложен метод сильной аппроксимации повторных стохастических интегралов Ито, основанный на кратных рядах Фурье по полным ортонормированным в пространстве $L_2([t, T])$ системам функций. Данный метод обладает рядом новых возможностей (о них говорилось выше) по сравнению с методом Г. Н. Мильштейна [70], который до настоящего времени считался общепризнанным и наиболее эффективным для сильной аппроксимации повторных стохастических интегралов.

В части III книги (главы 7–12) приведены различные численные методы решения стохастических дифференциальных уравнений.

В главах 7–9 представлены явные и неявные одношаговые и двухшаговые, в том числе конечно-разностные сильные численные методы решения стохастических дифференциальных уравнений Ито порядка точности 0.5, 1.0, 1.5, 2.0, 2.5 и 3.0. Значительная часть из приведенных численных методов является новой вследствие использования

унифицированных разложений Тейлора–Ито и Тейлора–Стратоновича, метода сильной аппроксимации повторных стохастических интегралов, основанного на кратных рядах Фурье по полиномам Лежандра, а также новых конечно-разностных аппроксимаций частных производных функций, входящих в правую часть соответствующего стохастического дифференциального уравнения.

Глава 10 посвящена слабым численным методам решения стохастических дифференциальных уравнений Ито. Большая часть представленных в этой главе результатов принадлежит другим авторам [68–70, 86, 89, 97, 139, 144–146, 150–153]. Однако здесь предложено также несколько новых слабых численных методов.

В главе 11 рассматриваются два метода численного интегрирования систем линейных стационарных стохастических дифференциальных уравнений Ито, которые основываются на точном интегральном представлении решений этих систем. Первый из предложенных методов строится на спектральном разложении дисперсионной матрицы стохастической составляющей решения системы линейных стационарных стохастических дифференциальных уравнений, а второй — на кусочно-постоянной гауссовской аппроксимации белого шума.

Глава 12, завершающая часть III книги, содержит общие представления сильных и слабых явных одношаговых численных методов решения стохастических дифференциальных уравнений со скачкообразной компонентой. При написании данной главы автор опирался на результаты других авторов [83, 88]. При этом новизна результатов, представленных в главе 12, обусловлена выбором способа численного моделирования решения стохастического дифференциального уравнения со скачкообразной компонентой на промежутках времени между скачками, на которых данное уравнение превращается в стохастическое дифференциальное уравнение Ито.

Часть IV монографии, в которой представлены примеры численного моделирования, состоит из четырех глав — 13–16.

В главе 13 представлена библиотека MatLab-функций для численного решения стационарных систем линейных стохастических дифференциальных уравнений Ито, которая создана на основе алгоритмов, полученных в главе 11. Приводятся примеры численного моделирования систем второго и шестого порядка с помощью данной библиотеки.

Глава 14 содержит примеры численного моделирования решений нелинейных систем стохастических дифференциальных уравнений Ито второго и третьего порядка. При численном моделировании впервые применена аппроксимация повторных стохастических интегра-

лов, основанная на кратных рядах Фурье по полиномиальной системе функций.

Содержание главы 15 составляют примеры численного решения математических задач с использованием сильных численных методов для стохастических дифференциальных уравнений. Рассмотрены задачи тестирования процедур оценивания параметров, фильтрации марковской цепи с непрерывным временем и конечным числом состояний, линейной фильтрации Калмана–Бьюси, нелинейной оптимальной фильтрации, оптимального стохастического управления.

Материал заключительной 16 главы составляют примеры численного решения математических задач с использованием слабых численных методов для стохастических дифференциальных уравнений. Рассмотрена задача о вычислении наибольшего стохастического ляпуновского показателя, а также примеры численного решения задачи Коши для уравнений в частных производных параболического типа, основанные на вероятностных представлениях решений данных задач.⁰

Автор искренне благодарит Н.В.Зверева за многочисленные консультации, связанные с различными вопросами касающимися РС, а также за огромное терпение, проявленное при этом.

Автор выражает глубокую благодарность В.В.Шувалову за ценные консультации по издательской системе L^AT_EX 2_ε.

Автор выражает благодарность членам своей семьи за проявленную лояльность во время его работы над книгой.

Д.Ф.Кузнецов, 2006г.

⁰Когда книга находилась уже в издательстве, автор сформулировал и доказал теорему 5.1. Это обстоятельство существенно изменило понимание им изучаемой проблемы, что в свою очередь повлекло серьезные изменения в главах 5–7 и избавило настоящую книгу от ряда ошибок из книги [177]. Главы 5–7 первоначального варианта книги были существенно переработаны в короткий срок, однако по мнению автора это не отразилось на качестве подачи материала.

По вопросам приобретения данной книги обращаться по адресу:

e-mail: sde_kuznetsov@inbox.ru

www.sde-kuznetsov.spb.ru

Оглавление

I Стохастические дифференциальные уравнения: Определения, свойства, проблемы, применение	25
1 Стохастические интегралы и стохастические дифференциальные уравнения	27
1.1 О различных численных подходах к решению стохастических дифференциальных уравнений	27
1.2 Некоторые сведения из теории вероятностей	28
1.2.1 Сходимость случайных последовательностей	28
1.2.2 Неравенства для математических ожиданий	31
1.2.3 Случайные процессы	32
1.2.4 Марковские и диффузионные процессы	37
1.2.5 Случайные процессы с независимыми приращениями. Винеровский и пуассоновский процессы	47
1.2.6 Численное моделирование пуассоновского и гауссовского распределений	54
1.3 Стохастические интегралы по винеровскому процессу и стохастические дифференциальные уравнения диффузионного типа	56
1.3.1 Стохастический интеграл Ито	56
1.3.2 Процессы Ито	61
1.3.3 Формула Ито	64
1.3.4 Стохастические дифференциальные уравнения Ито	66
1.3.5 Стохастический интеграл Стратоновича	72
1.3.6 Стохастические дифференциальные уравнения Стратоновича	79
1.4 Стохастические интегралы по мартингалам и стохастические дифференциальные уравнения со скачкообразной компонентой	81
1.4.1 Стохастический интеграл по мартингалу	81
1.4.2 Стохастический интеграл по пуассоновской случайной мере	84

1.4.3	Формула Ито для процессов Ито со скачкообразной компонентой	87
1.4.4	Оценки моментов стохастических интегралов по пуассоновским мерам	89
1.4.5	Стохастические дифференциальные уравнения со скачкообразной компонентой	91
1.4.6	Интегральное представление решения линейного стохастического дифференциального уравнения со скачкообразной компонентой	92
2	Применения стохастических дифференциальных уравнений	95
2.1	Диффузионные математические модели динамических систем, находящихся под воздействием случайных возмущений	95
2.1.1	Общий вид нелинейных диффузионных моделей	95
2.1.2	Линейные диффузионные модели	98
2.2	Диффузионные модели физических и технических систем	104
2.2.1	Модель тепловых флуктуаций частиц в веществах и электрических зарядов в проводниках. Формула Найквиста	104
2.2.2	Автоколебательная электрическая система	108
2.2.3	Чандлеровские колебания	110
2.2.4	Модели химической кинетики и регуляции численности конкурирующих видов животных	112
2.2.5	Модели стохастической финансовой математики	114
2.2.6	Модель солнечной активности	114
2.2.7	Модель лагранжевой динамики частицы жидкости	115
2.2.8	Ошибки округления при численном решении обыкновенных дифференциальных уравнений	116
2.3	Диффузионно-скачкообразные математические модели	117
2.3.1	Диффузионно-скачкообразные модели стохастической финансовой математики	117
2.3.2	Скачкообразная модель лагранжевой динамики частицы жидкости	118
2.4	Математические задачи, связанные со стохастическими дифференциальными уравнениями	119
2.4.1	Фильтрация	119
2.4.2	Оптимальное стохастическое управление	121
2.4.3	Стохастическая устойчивость	123

2.4.4	Оценивание параметров	129
2.5	Вероятностные представления решений задач Дирихле и Коши для уравнений в частных производных параболического типа	131
2.5.1	Вероятностное представление решения задачи Дирихле	131
2.5.2	Вероятностные представления решения задачи Коши	134
2.6	О малой эффективности применения численных методов решения обыкновенных дифференциальных уравнений к стохастическим дифференциальным уравнениям	138
II Теоретические результаты, положенные в основу построения численных методов		143
3	Некоторые свойства стохастических интегралов	145
3.1	Теорема о замене порядка интегрирования в повторных стохастических интегралах Ито	145
3.1.1	Формулировка и доказательство	148
3.1.2	Следствия и обобщения	155
3.1.3	Замена порядка интегрирования для конкретных повторных стохастических интегралов Ито	158
3.2	Замена порядка интегрирования в повторных стохастических интегралах по мартингалу	161
3.3	Соотношения между повторными стохастическими интегралами Стратоновича и Ито произвольной кратности	164
3.4	Аналитические формулы для вычисления стохастических интегралов	169
3.4.1	Аддитивное разделение переменных	171
3.4.2	Мультипликативное разделение переменных	175
4	Стохастические разложения процессов Ито	179
4.1	Дифференцируемость по Ито случайных процессов	180
4.2	Разложение Тейлора–Ито в форме Вагнера и Платена	185
4.3	Унифицированные разложения Тейлора–Ито	187
4.3.1	Обозначения	187
4.3.2	Первая форма унифицированного разложения Тейлора–Ито	191

4.3.3	Вторая форма унифицированного разложения Тейлора–Ито	199
4.4	Дифференцируемость по Стратоновичу случайных процессов	202
4.5	Разложение Тейлора–Стратоновича в форме Клоедена и Платена	206
4.6	Унифицированные разложения Тейлора–Стратоновича .	209
4.6.1	Первая форма унифицированного разложения Тейлора–Стратоновича	209
4.6.2	Вторая форма унифицированного разложения Тейлора–Стратоновича	214
4.7	Сильная сходимость стохастических разложений	216
4.8	Слабая сходимость разложений Тейлора–Ито	219
4.9	Разложения Тейлора–Ито для решений некоторых стохастических дифференциальных уравнений Ито	221
4.10	Заключение	228
5	Разложения повторных стохастических интегралов, основанные на кратных рядах Фурье	235
5.1	Разложение повторных стохастических интегралов Ито произвольной кратности	235
5.2	Разложение повторных стохастических интегралов Стратоновича первой и второй кратности	246
5.3	Разложения повторных стохастических интегралов Стратоновича третьей кратности	252
5.4	Разложение повторных стохастических интегралов по мартингальным пуассоновским мерам	259
5.5	Обобщение теоремы 5.1 для повторных стохастических интегралов по мартингалам	262
6	Аппроксимация повторных стохастических интегралов Стратоновича и Ито	271
6.1	Аппроксимации повторных стохастических интегралов Стратоновича и Ито, основанные на кратных рядах Фурье	271
6.1.1	Введение	271
6.1.2	Некоторые особенности вычисления среднеквадратической погрешности аппроксимации для систем полиномиальных и тригонометрических функций	285

6.1.3	Сильная аппроксимация повторных стохастических интегралов Стратоновича кратностей 1–5 с помощью полиномов Лежандра	289
6.1.4	Разложение повторных стохастических интегралов произвольной кратности k с помощью теоремы 5.1 и полиномов Лежандра	305
6.1.5	Сильная аппроксимация с помощью тригонометрической системы функций	309
6.1.6	О сходимости с вероятностью 1 разложений повторных стохастических интегралов, полученных с помощью теоремы 5.1	317
6.2	Сильная аппроксимация повторных стохастических интегралов Стратоновича методом Г. Н. Мильштейна .	323
6.2.1	Разложения, полученные методом Г. Н. Мильштейна	324
6.2.2	Сравнение метода, основанного на кратных рядах Фурье, с методом Г. Н. Мильштейна	326
6.3	Представление повторных стохастических интегралов с помощью полиномов Эрмита	328
6.4	Метод сильной аппроксимации повторных стохастических интегралов Ито, основанный на кратных интегральных суммах	331
6.5	Численные эксперименты об эффективности применения полиномиальных и тригонометрических функций, интегральных сумм к сильной аппроксимации повторных стохастических интегралов	334
6.6	Повторные стохастические интегралы как решения систем линейных стохастических дифференциальных уравнений	343
6.7	Комбинированный метод аппроксимации повторных стохастических интегралов	345
6.7.1	Основные соотношения	345
6.7.2	Вычисление среднеквадратической погрешности	347
6.7.3	Численные эксперименты	349
6.8	Слабые аппроксимации повторных стохастических интегралов Ито	351
6.9	Заключение	363

III Численные методы решения стохастических диффе-

7 Явные одношаговые сильные численные методы решения стохастических дифференциальных уравнений

Ито	367
7.1 Сильная сходимость и тестирование сильных численных методов	369
7.2 Явный метод Эйлера	374
7.3 Явные одношаговые методы, основанные на унифицированном разложении Тейлора–Ито	380
7.3.1 Метод порядка точности $r/2$. Теорема о сходимости	380
7.3.2 Метод Г. Н. Мильштейна	386
7.3.3 Методы порядка точности 1.5	390
7.3.4 Метод порядка точности 2.0	395
7.3.5 Методы порядка точности 2.5	398
7.3.6 Метод порядка точности 3.0	402
7.4 Явные одношаговые методы, основанные на разложении Тейлора–Ито в форме Вагнера и Платена	404
7.4.1 Метод порядка точности $r/2$. Теорема о сходимости	404
7.4.2 Метод порядка точности 1.5	406
7.4.3 Метод порядка точности 2.0	406
7.4.4 Метод порядка точности 2.5	407
7.4.5 Замечание об особенностях численных методов, основанных на унифицированном разложении Тейлора–Ито и разложении Тейлора–Ито в форме Вагнера и Платена	408
7.5 Явные одношаговые методы, основанные на разложении Тейлора–Стратоновича в форме Клоедена и Платена . .	409
7.5.1 Метод порядка точности $r/2$. Теорема о сходимости	409
7.5.2 Метод порядка точности 1.0	411
7.5.3 Метод порядка точности 1.5	411
7.5.4 Метод порядка точности 2.0	412
7.5.5 Метод порядка точности 2.5	412
7.6 Явные одношаговые методы, основанные на унифицированном разложении Тейлора–Стратоновича	413
7.6.1 Метод порядка точности $r/2$. Теорема о сходимости	413
7.6.2 Метод порядка точности 1.5	415
7.6.3 Метод порядка точности 2.0	416
7.6.4 Метод порядка точности 2.5	416
7.6.5 Метод порядка точности 3.0	417

7.7	Явные одношаговые конечно-разностные численные методы, основанные на разложениях Тейлора–Ито	419
7.7.1	Некоторые тейлоровские аппроксимации производных детерминированных функций	419
7.7.2	Метод порядка точности 1.0	421
7.7.3	Методы порядка точности 1.5	422
7.7.4	Методы порядка точности 2.0	426
7.7.5	Методы порядка точности 2.5	430
7.7.6	О сходимости явных сильных одношаговых конечно-разностных численных методов	436
8	Неявные одношаговые сильные численные методы решения стохастических дифференциальных уравнений	
	Ито	441
8.1	Неявный метод Эйлера	442
8.2	Неявные одношаговые методы, основанные на разложениях Тейлора–Ито	447
8.2.1	Методы порядка точности 1.0	447
8.2.2	Методы порядка точности 1.5	449
8.2.3	Методы порядка точности 2.0	451
8.2.4	Методы порядка точности 2.5	453
8.2.5	Метод порядка точности 3.0	456
8.3	Неявные одношаговые конечно-разностные методы, основанные на разложениях Тейлора–Ито	458
8.3.1	Методы порядка точности 1.0	459
8.3.2	Методы порядка точности 1.5	460
8.3.3	Методы порядка точности 2.0	462
8.3.4	Методы порядка точности 2.5	465
8.4	О сходимости неявных сильных одношаговых методов .	468
8.5	Сбалансированные неявные сильные численные методы	470
9	Двухшаговые и трехшаговые сильные численные методы решения стохастических дифференциальных уравнений	
	Ито	473
9.1	Явные двухшаговые методы, основанные на разложениях Тейлора–Ито	474
9.1.1	Метод порядка точности 1.0	474
9.1.2	Методы порядка точности 1.5	476
9.1.3	Методы порядка точности 2.0	477

9.2	Неявные двухшаговые методы, основанные на разложениях Тейлора–Ито	479
9.2.1	Методы порядка точности 1.0 и 1.5	479
9.2.2	Методы порядка точности 2.0 и 2.5	482
9.3	О сходимости неявных сильных двухшаговых методов .	484
9.4	Двухшаговые конечно-разностные методы, основанные на разложениях Тейлора–Ито	488
9.4.1	Методы порядка точности 1.0 и 1.5	489
9.4.2	Метод порядка точности 2.0	492
9.5	Общие представления двухшаговых методов	494
9.6	Явные и неявные, в том числе конечно-разностные, трехшаговые численные методы, основанные на разложениях Тейлора–Ито	499
9.6.1	Методы порядка точности 1.0.	499
9.6.2	Методы порядка точности 1.5.	506
9.7	Об устойчивости численных методов	512
10	Слабые численные методы решения стохастических дифференциальных уравнений Ито	521
10.1	Слабая сходимость и тестирование слабых численных методов	522
10.2	Явные слабые численные методы	524
10.2.1	Явный метод Эйлера	524
10.2.2	Метод порядка точности 2.0	527
10.2.3	Методы порядка точности 3.0	531
10.2.4	Методы порядка точности 4.0	534
10.3	Теорема о сходимости слабых численных методов . . .	540
10.4	Экстраполяционные численные методы	543
10.5	Явные слабые конечно-разностные численные методы .	547
10.6	Неявные слабые численные методы	550
10.6.1	Неявные методы Эйлера	550
10.6.2	Методы порядка точности 2.0	552
10.6.3	Конечно-разностные методы порядка точности 2.0	556
10.7	Численные методы типа ”предсказатель–корректор” . .	558
10.8	О сходимости слабых численных методов	561
10.9	Устойчивость слабых численных методов в случае мультипликативного шума	564
10.10	Численное моделирование стохастических дифференциальных уравнений с использованием метода Монте–Карло и уменьшение дисперсии	569

11 Численное моделирование решений стационарных систем линейных стохастических дифференциальных уравнений	573
11.1 Системы линейных стохастических дифференциальных уравнений: Расчетные формулы и вспомогательные результаты	573
11.1.1 Интегральные представления решений СЛСДУ .	575
11.1.2 Моментные характеристики решений СЛСДУ . .	578
11.1.3 Свойства дискретных систем линейных стохастических уравнений в стационарном случае	581
11.2 Метод численного моделирования решений стационарных СЛСДУ, основанный на формуле Коши и спектральном разложении	583
11.2.1 Общий подход к моделированию. Структурирование проблемы	585
11.2.2 Алгоритм численного моделирования динамической составляющей решения	586
11.2.3 Алгоритм численного моделирования систематической составляющей решения	591
11.2.4 Алгоритм численного моделирования стохастической составляющей решения	596
11.2.5 Алгоритм численного моделирования решений стационарных СЛСДУ и оценка скорости его сходимости	601
11.3 Метод численного моделирования решений стационарных СЛСДУ, основанный на кусочно-постоянной гауссовской аппроксимации белого шума	603
11.3.1 Алгоритм численного моделирования решений стационарных СЛСДУ	604
11.3.2 Оценка скорости сходимости алгоритма по шагу дискретизации δ	605
12 Численное интегрирование стохастических дифференциальных уравнений со скачкообразной компонентой	611
12.1 Аналог разложения Тейлора–Ито для решений стохастических дифференциальных уравнений со скачкообразной компонентой	613
12.2 Сильные численные методы решения стохастических дифференциальных уравнений со скачкообразной компонентой	616

12.3 Слабые численные методы решения стохастических дифференциальных уравнений со скачкообразной компонентой	625
IV Численное моделирование: Алгоритмы, программы, результаты	629
13 Библиотека MatLab-функций численного моделирования решений стационарных систем линейных стохастических дифференциальных уравнений	631
13.1 Математическая модель объекта моделирования	632
13.2 Общая характеристика и сценарий управления библиотекой	633
13.3 Функции ввода-вывода, просмотра и редактирования исходных данных	638
13.4 Функции вычисления матриц систематической, динамической и случайной составляющих решения стационарной СЛСДУ	645
13.5 Функции выбора и вычисления внешнего детерминированного воздействия	649
13.6 Примеры численного моделирования решений стационарных СЛСДУ	653
13.6.1 Численное моделирование чандлеровских колебаний	653
13.6.2 Численное моделирование солнечной активности	656
13.6.3 Численное моделирование лагранжевой динамики частицы жидкости	658
14 Моделирование траекторий решений стохастических дифференциальных уравнений Ито	663
14.1 Численное интегрирование модели Блэка–Шоулза	663
14.2 Влияние стохастического возмущения на трехмерную дискретную модель конвективной турбулентности Лоренца	665
14.3 Численное интегрирование стохастической модели Лотки–Вольтерра второго порядка	677
14.4 Численное моделирование динамики доходности портфеля ценных бумаг	679
14.5 Влияние стохастического возмущения на систему уравнений Рёсслера	684

15 Примеры применения сильных численных методов решения стохастических дифференциальных уравнений к численному решению математических задач	691
15.1 Тестирование процедур оценивания параметров	691
15.1.1 Двухмерная линейная модель	691
15.1.2 Нелинейная одномерная модель	694
15.2 Фильтрация марковской цепи с конечным числом состояний	697
15.3 Линейная фильтрация Калмана–Бьюси	707
15.4 Нелинейная оптимальная фильтрация	710
15.5 Оптимальное стохастическое управление по неполным данным	713
15.6 Стохастическое оптимальное управление механической системой	717
 16 Примеры применения слабых численных методов решения стохастических дифференциальных уравнений к численному решению математических задач	 727
16.1 Вычисление наибольшего стохастического ляпуновского показателя	727
16.2 Детерминированные численные методы интегрирования задачи Коши для уравнений параболического типа, основанные на вероятностном представлении решения . . .	731
16.3 Численное интегрирование задачи Коши для уравнений параболического типа, основанное на прямом статистическом моделировании	737
16.4 Численное решение задачи Коши для уравнений в частных производных параболического типа с помощью слабых численных методов и метода Монте-Карло	741

Часть I

Стохастические дифференциальные уравнения: Определения, свойства, проблемы, применение

Глава 1

Стохастические интегралы и стохастические дифференциальные уравнения

1.1 О различных численных подходах к решению стохастических дифференциальных уравнений

Рассмотрим известные численные подходы к решению стохастических дифференциальных уравнений. Существует общий метод Бьюси [1], которым может быть исследован широкий класс случайных систем с использованием метода Монте-Карло. Этот метод недостаточно эффективен при решении стохастических дифференциальных уравнений, поскольку не учитывает их специальную структуру, характеризующую коэффициентами сноса и диффузии.

Г. Дж. Кушнер [2] предложил численный подход к решению стохастических систем, который основывается на дискретизации как времени, так и пространственных переменных. В результате такой дискретизации аппроксимации случайных процессов превращаются в цепи Маркова с конечным числом состояний. При численной реализации этого подхода приходится иметь дело с матрицами перехода цепей Маркова. Использование указанных матриц приводит к значительному увеличению вычислительных затрат. Поэтому данный подход применим только к задачам с небольшой размерностью. Проблема размерности возникает также при численном решении уравнения Фоккера-Планка-Колмогорова для плотности вероятностей процессов Ито.

В настоящей работе, как и в монографиях [70, 86], используется более эффективный и естественный подход к численному решению стохастических дифференциальных уравнений. Этот подход основан

вается на конечной дискретизации временного интервала $[0, T]$ и численном моделировании решения стохастического дифференциального уравнения в дискретные моменты времени с помощью стохастических аналогов разложения Тейлора. Важной особенностью такого подхода является то, что переменные состояния в нем в отличие от подхода Кушнера не дискретизируются. Необходимо отметить, что при этом вычислительные затраты (время и память) возрастают полиномиально [86] с увеличением размерности задачи. Последнее позволяет говорить о некоторых вычислительных резервах данного подхода.

1.2 Некоторые сведения из теории вероятностей

1.2.1 Сходимость случайных последовательностей

Пусть заданы вероятностное пространство $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ и борелевское измеримое пространство $(\mathbb{R}^1, \mathcal{B})$. Функцию $\xi(\omega) : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^1$, определенную при всех $\omega \in \Omega$, будем называть случайной величиной, если она измерима относительно σ -алгебры $\mathcal{F}$, или $\mathcal{F}$ -измерима, т. е. для любого $B \in \mathcal{B}$: $\{\omega \in \Omega : \xi(\omega) \in B\} \in \mathcal{F}$.

Определение 1.1. *Последовательность случайных величин $\xi_k(\omega)$ называется сходящейся с вероятностью 1, в среднем степени $p, 0 < p < \infty$, по вероятности или по распределению к случайной величине $\xi(\omega)$, если выполнено одно из следующих предельных соотношений:*

$$P\{\omega : \xi_k \rightarrow \xi \text{ при } k \rightarrow \infty\} = 1,$$

$$M\{|\xi_k - \xi|^p\} \rightarrow 0 \text{ при } k \rightarrow \infty,$$

$$P\{\omega : |\xi_k - \xi| > \varepsilon\} \rightarrow 0 \text{ при } k \rightarrow \infty \text{ для всех } \varepsilon > 0,$$

$$F_{\xi_k}(x) \rightarrow F_{\xi}(x) \text{ при } k \rightarrow \infty \text{ для всех } x \in \mathbb{R}^1,$$

где $F_{\xi_k}(x)$, $F_{\xi}(x)$ — функции распределения случайных величин ξ_k и ξ соответственно.

Для перечисленных видов сходимости случайных величин иногда используют следующие обозначения:

1. Для сходимости с вероятностью 1

$$\xi_k \rightarrow \xi \text{ с в.1 при } k \rightarrow \infty.$$

2. Для сходимости в среднем степени p

$$(p)\text{l.i.m.}_{k \rightarrow \infty} \xi_k = \xi.$$

3. Для сходимости по вероятности

$$\xi_k \xrightarrow{P} \xi \text{ при } k \rightarrow \infty, \text{ или } P\text{-}\lim_{k \rightarrow \infty} \xi_k = \xi.$$

4. Для сходимости по распределению

$$\xi_k \xrightarrow{d} \xi \text{ при } k \rightarrow \infty.$$

Отметим, что если $p = 2$, то сходимость в среднем степени 2 называют сходимостью в среднеквадратическом смысле и обозначают $\lim_{k \rightarrow \infty} \xi_k = \xi$.

Определение 1.2. Последовательность случайных величин $\xi_k(\omega)$ называется фундаментальной по вероятности, с вероятностью единица, в среднем степени p или по распределению, если выполнено одно из следующих условий:

$$P \{ |\xi_k - \xi_l| > \varepsilon \} \rightarrow 0 \text{ при } k, l \rightarrow \infty \text{ для любого } \varepsilon > 0,$$

$$P \{ \omega : \xi_k - \xi_l \rightarrow 0 \text{ при } k, l \rightarrow \infty \} = 1,$$

$$M \{ |\xi_k - \xi_l|^p \} \rightarrow 0 \text{ при } k, l \rightarrow \infty,$$

$$|F_{\xi_k}(x) - F_{\xi_l}(x)| \rightarrow 0 \text{ при } k, l \rightarrow \infty \text{ для всех } x \in \mathbb{R}^1.$$

Отметим, что фундаментальность последовательности случайных величин является необходимым и достаточным условием существования ее предела (так называемый критерий Коши [7]), т. е. для того чтобы последовательность случайных величин $\xi_k(\omega)$ сходилась по вероятности, с вероятностью 1, в среднем степени p или по распределению к некоторой случайной величине $\xi(\omega)$, необходимо и достаточно, чтобы эта последовательность была фундаментальной в соответствующем смысле.

Приведем некоторые хорошо известные факты [7], касающиеся сходимости последовательностей случайных величин.

1. Для того чтобы последовательность случайных величин $\xi_k(\omega)$ сходилась к случайной величине $\xi(\omega)$ с вероятностью 1, необходимо и достаточно, чтобы для любого $\varepsilon > 0$ выполнялось условие

$$\lim_{N \rightarrow \infty} P \left\{ \sup_{k \geq N} |\xi_k - \xi| > \varepsilon \right\} = 0.$$

2. Если последовательность случайных величин $\xi_k(\omega)$ сходится с вероятностью 1, то она сходится и по вероятности.

3. Если последовательность случайных величин $\xi_k(\omega)$ сходится по вероятности, то из нее можно извлечь подпоследовательность случайных величин $\xi_{k_n}(\omega)$, сходящуюся с вероятностью 1 к случайной величине $\xi(\omega)$.

4. Если

$$\xi_k \xrightarrow{P} \xi \text{ при } k \rightarrow \infty$$

и для любого $\varepsilon > 0$ выполняется условие

$$\sum_{k=0}^{\infty} P \{ |\xi_k - \xi| \geq \varepsilon \} < \infty,$$

то последовательность случайных величин $\xi_k(\omega)$ сходится с вероятностью 1 к случайной величине $\xi(\omega)$.

5. Если последовательность случайных величин $\xi_k(\omega)$ сходится в среднем степени p , $p > 0$, то она сходится в среднем степени q , $q > 0$, при $q < p$.

6. Если последовательность случайных величин $\xi_k(\omega)$ сходится в среднем степени p , $p > 0$, то она сходится по вероятности.

7. Если для некоторого $p > 0$ выполняется условие

$$\sum_{k=0}^{\infty} M \{ |\xi_k - \xi|^p \} < \infty,$$

то последовательность случайных величин $\xi_k(\omega)$ сходится с вероятностью 1 к случайной величине $\xi(\omega)$.

8. Если последовательность случайных величин $\xi_k(\omega)$ сходится к $\xi(\omega)$ по вероятности, то она сходится к $\xi(\omega)$ и по распределению.

9. Для того чтобы последовательность случайных величин $\xi_k(\omega)$ сходилась по распределению к случайной величине $\xi(\omega)$, необходимо и достаточно, чтобы для любой ограниченной непрерывной функции $f(x)$ выполнялось условие

$$\lim_{k \rightarrow \infty} M \{ f(\xi_k) \} = M \{ f(\xi) \}.$$

10. Если $\xi_k \xrightarrow{P} \xi$ при $k \rightarrow \infty$ и существует случайная величина η такая, что

$$|\xi_k| \leq \eta \text{ и } M \{ \eta \} < \infty,$$

то

$$M \{ |\xi| \} < \infty, \quad \lim_{k \rightarrow \infty} M \{ \xi_k \} = M \{ \xi \}, \quad \lim_{k \rightarrow \infty} M \{ |\xi_k - \xi| \} = 0.$$

11. Если $\xi_k \rightarrow \xi$ с в.1 при $k \rightarrow \infty$ и существует случайная величина η такая, что $|\xi_k| \leq \eta$ и $M\{\eta^p\} < \infty$ при $p > 0$, то

$$M\{|\xi|^p\} < \infty, \quad (p)\text{l.i.m.}_{k \rightarrow \infty} \xi_k = \xi.$$

12. Если последовательность случайных величин $\xi_k(\omega)$ сходится в среднем степени p , $p > 0$, к случайной величине $\xi(\omega)$ и для всех k выполнено условие $M\{|\xi_k|^p\} < \infty$, то

$$\lim_{k \rightarrow \infty} M\{|\xi_k|^p\} = M\{|\xi|^p\}.$$

1.2.2 Неравенства для математических ожиданий

В дальнейшем для доказательства ряда утверждений нам потребуются различные оценки математических ожиданий. С этой целью рассмотрим основные неравенства для математических ожиданий, которые приводим без доказательства в силу их широкой известности.

1. Неравенство Чебышева:

$$P\{\xi \geq \varepsilon\} \leq \frac{M\{\xi\}}{\varepsilon} \quad \forall \xi(\omega) \geq 0 \text{ с в.1 } \forall \varepsilon : 0 < \varepsilon < \infty.$$

Нетрудно видеть, что из этого неравенства следуют неравенства

$$P\{\xi \geq \varepsilon\} \leq \frac{M\{\xi^2\}}{\varepsilon^2}, \quad P\{|\xi - M\{\xi\}| \geq \varepsilon\} \leq \frac{D\{\xi\}}{\varepsilon^2},$$

где $D\{\xi\} \stackrel{\text{def}}{=} M\{(\xi - M\{\xi\})^2\}$ — дисперсия случайной величины ξ .

2. Неравенство Коши–Буняковского:

$$(M\{|\xi\eta|\})^2 \leq M\{\xi^2\} M\{\eta^2\} \quad \forall \xi(\omega), \eta(\omega).$$

3. Неравенство Ляпунова:

$${}^s\sqrt{M\{|\xi|^s\}} \leq {}^t\sqrt{M\{|\xi|^t\}} \quad \forall \xi(\omega), \quad \forall s, t : 0 < s \leq t.$$

4. Неравенство Гельдера:

$$|M\{\xi\eta\}| \leq {}^p\sqrt{M\{|\xi|^p\}} {}^q\sqrt{M\{|\eta|^q\}} \quad \forall \xi(\omega), \eta(\omega), \quad \forall p, q : \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1,$$

$1 < p, q < \infty$.

5. Неравенство Минковского:

$${}^p\sqrt{M\{|\xi + \eta|^p\}} < {}^p\sqrt{M\{|\xi|^p\}} + {}^p\sqrt{M\{|\eta|^p\}} \quad \forall \xi(\omega), \eta(\omega), \forall p :$$

$$M\{|\xi|^p\} < \infty, M\{|\eta|^p\} < \infty, 1 \leq p < \infty.$$

6. Неравенство Йенсена:

$$\varphi(M\{\xi\}) \leq M\{\varphi(\xi)\},$$

где φ — определенная на множестве значений случайной величины ξ функция, обращенная выпуклостью вниз. Для функции φ , обращенной выпуклостью вверх, неравенство Йенсена имеет вид

$$\varphi(M\{\xi\}) \geq M\{\varphi(\xi)\}.$$

$$7. M\{|\xi + \eta|^p\} \leq 2^{p-1}(M\{|\xi|^p\} + M\{|\eta|^p\}) \quad \forall \xi(\omega), \eta(\omega), \forall p : p \geq 1.$$

Наряду с приведенными неравенствами для математических ожиданий будем использовать также неравенство Гронуолла:

$$\alpha(t) \leq \beta(t) + K \int_{t_0}^t e^{K(t-s)} \beta(s) ds,$$

которое справедливо при всех $t \in [t_0, t]$, если для любого $t \in [t_0, t]$

$$0 \leq \alpha(t) \leq \beta(t) + K \int_{t_0}^t \alpha(s) ds,$$

где $K > 0$ — постоянная.

1.2.3 Случайные процессы

Семейство случайных величин, параметризованное параметром t , интерпретируемым как время, будем называть случайным процессом и обозначать $\xi_t \stackrel{\text{def}}{=} \xi(t, \omega) \in X \subseteq \mathbb{R}^1$, где $t \in \mathcal{T} \subseteq \mathbb{R}^1$ — временной параметр; $\mathcal{T}$ — множество определения, а X — множество значений случайного процесса ξ_t . Область определения $\mathcal{T}$ случайного процесса может быть, например, конечным, полубесконечным или бесконечным интервалом числовой прямой. В этих случаях функция $\xi(t, \omega)$ называется случайным процессом с непрерывным временем. Если $\mathcal{T}$ содержит конечное или счетное множество элементов

$t_k \in \mathcal{T} : t_k < t_{k+1}, k = 0, 1, 2, \dots$, то ξ_t называется случайным процессом с дискретным временем, или случайной последовательностью.

Случайный процесс $\xi(t, \omega)$ считается полностью заданным, если заданы его конечномерные распределения — набор функций, которые определены для любого $k \geq 1$ соотношениями

$$F_\xi(A_1, \dots, A_k, t_1, \dots, t_k) = P \left\{ \bigcap_{j=1}^k \{ \xi(t_j, \omega) \in A_j \} \right\},$$

где $t_1, \dots, t_k \in \mathcal{T}$; $A_1, \dots, A_k$ — борелевские множества из области X значений процесса $\xi(t, \omega)$.

Справедливо следующее утверждение А. Н. Колмогорова [65]:

Пусть функции $F_\xi(A_1, \dots, A_k, t_1, \dots, t_k)$ определены при $t_1, \dots, t_k \in \mathcal{T}$; $A_1, \dots, A_k \in \mathcal{B}(X)$ (σ -алгебра борелевских множеств в конечномерном евклидовом пространстве X). Тогда для существования такого случайного процесса $\xi(t, \omega)$, конечномерными распределениями которого являются функции $F_\xi(A_1, \dots, A_k, t_1, \dots, t_k)$, необходимо и достаточно, чтобы эти функции при $k \geq 1$ удовлетворяли следующим условиям:

1. $F_\xi(A_1, \dots, A_k, t_1, \dots, t_k)$ — совместная функция распределения k случайных величин при фиксированных $t_1, \dots, t_k$.

2. Для любой перестановки $i_1, i_2, \dots, i_k$ чисел $1, 2, \dots, k$

$$F_\xi(A_1, \dots, A_k, t_1, \dots, t_k) = F_\xi(A_{i_1}, \dots, A_{i_k}, t_{i_1}, \dots, t_{i_k}).$$

3. $F_\xi(A_1, \dots, A_{k-1}, X, t_1, \dots, t_k) = F_\xi(A_1, \dots, A_{k-1}, t_1, \dots, t_{k-1})$.

В качестве вероятностного пространства можно взять $(\Omega, \mathcal{F}, P)$, где Ω — множество всех функций $\omega(t) : \mathcal{T} \rightarrow X$; $\mathcal{F}$ — σ -алгебра, порожденная цилиндрическими множествами $\{\omega : \omega(t_1) \in A_1, \dots, \omega(t_k) \in A_k\} \stackrel{\text{def}}{=} C(A_1, \dots, A_k, t_1, \dots, t_k)$; мера P определяется соотношением $P\{C(A_1, \dots, A_k, t_1, \dots, t_k)\} = F_\xi(A_1, \dots, A_k, t_1, \dots, t_k)$. Тогда искомый случайный процесс $\xi(t, \omega)$ на вероятностном пространстве $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ определяется равенством $\xi(t, \omega) = \omega(t)$.

Конечномерные плотности распределения $p_\xi(x_1, \dots, x_k, t_1, \dots, t_k)$ процесса $\xi(t, \omega)$ представляются равенством

$$F_\xi(A_1, \dots, A_k, t_1, \dots, t_k) = \int_{A_1} \dots \int_{A_k} p_\xi(x_1, \dots, x_k, t_1, \dots, t_k) dx_k \dots dx_1.$$

Функция $\xi(t, \omega)$ при фиксированном ω называется выборочной функцией (траекторией, реализацией) случайного процесса.

Случайный процесс называется гауссовским, если его конечномерные плотности распределения имеют вид

$$p_{\xi}(x_1, \dots, x_k, t_1, \dots, t_k) = \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^n \det(K)}} \exp \left(-\frac{(\mathbf{x}-\mathbf{m})^T K^{-1}(\mathbf{x}-\mathbf{m})}{2} \right),$$

где $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_k)^T$; $\mathbf{m} = (m_1, m_2, \dots, m_k)^T$; $m_i \stackrel{\text{def}}{=} M\{x_i\}$; K — симметричная, положительно определенная матрица; $\det(K)$ — определитель матрицы K .

Возможно также более общее определение гауссовского случайного процесса с помощью его конечномерных распределений.

Случайный процесс ξ_t , заданный на множестве $\mathcal{T}$, называется стационарным в узком смысле [9], если для любого $n \geq 1$ и любых моментов $t_1, t_2, \dots, t_n, t$ таких, что $t_i + t \in \mathcal{T}, i = 1, \dots, n$, совместные функции распределения или плотности распределения совокупности случайных величин $\xi_{t_1+t}, \dots, \xi_{t_n+t}$ не зависят от t .

Будем называть процесс $\overset{\circ}{\xi}_t = \xi_t - M\{\xi_t\}$ центрированной составляющей процесса ξ_t .

Функция $R_{\xi}(t_1, t_2) \stackrel{\text{def}}{=} M\left\{\overset{\circ}{\xi}_{t_1}\overset{\circ}{\xi}_{t_2}\right\}$ называется корреляционной функцией процесса ξ_t , причем $R_{\xi}(t, t) \stackrel{\text{def}}{=} D\{\xi_t\}$ — дисперсия этого случайного процесса.

Очевидно, что для стационарного в узком смысле случайного процесса ξ_t имеем, что $M\{\xi_t\}$ — постоянная, $R_{\xi}(t_1, t_2) \equiv R_{\xi}(t_1 - t_2)$, $D\{\xi_t\} \equiv R_{\xi}(0)$. Однако выполнение этих условий для случайного процесса ξ_t , вообще говоря, не гарантирует его стационарности в узком смысле. Поэтому процессы ξ_t , удовлетворяющие условиям 1 — 3, называются стационарными в широком смысле [9]. Понятие стационарности в широком и узком смысле оказывается эквивалентным только на классе гауссовских процессов.

Известно [3], что для того чтобы функция $R_{\xi}(t)$ при $t \in (-\infty, \infty)$ являлась корреляционной функцией стационарного в широком смысле случайного процесса ξ_t , удовлетворяющего условию

$$M\{(\xi_{t+\tau} - \xi_t)^2\} \rightarrow 0 \quad \text{при } \tau \rightarrow 0,$$

необходимо и достаточно, чтобы было допустимо представление

$$R_{\xi}(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{itw} dF_{\xi}(w), \quad (1.1)$$

где $F_\xi(w)$ — произвольная неотрицательная ограниченная монотонно неубывающая функция, непрерывная слева; i — мнимая единица.

Функция $F_\xi(w)$, входящая в представление (1.1) корреляционной функции $R_\xi(t)$ стационарного в широком смысле случайного процесса ξ_t , называется спектральной функцией. Если $F_\xi(w)$ абсолютно непрерывна и допустимо представление

$$F_\xi(w) = \int_{-\infty}^w S_\xi(v) dv,$$

то $S_\xi(w)$ называется спектральной плотностью процесса ξ_t .

Поясним физический смысл спектральной функции [3]. Пусть ξ_t интерпретируется как электрический ток, представимый в виде "континуальной суммы" гармонических колебаний со случайными амплитудами. Тогда приращение $F_\xi(w_2) - F_\xi(w_1)$, $w_2 > w_1$, равно средней мощности, рассеиваемой гармониками, частоты которых лежат в полуинтервале $[w_1, w_2)$.

Спектральная функция может быть восстановлена по корреляционной функции. Так, если w_1 и w_2 — точки непрерывности спектральной функции $F_\xi(w)$, то справедливо соотношение [3]

$$F_\xi(w_2) - F_\xi(w_1) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-itw_1} - e^{-itw_2}}{it} R_\xi(t) dt, \quad (1.2)$$

где интеграл в правой части понимается в смысле среднего значения.

В точках разрыва спектральной функции $F_\xi(w)$ соотношение (1.2) остается справедливым, если в левую часть его вместо $F_\xi(w)$ подставить

$$\frac{1}{2} (F_\xi(w+0) - F_\xi(w)).$$

Если корреляционная функция $R_\xi(t)$ абсолютно интегрируема на интервале $(-\infty, \infty)$, т. е.

$$\int_{-\infty}^{\infty} |R_\xi(t)| dt < \infty,$$

то существует спектральная плотность процесса ξ_t , которая определяется равенством [3]

$$S_\xi(w) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-itw} R_\xi(t) dt. \quad (1.3)$$

Пользуясь представлением (1.3), нетрудно установить следующие свойства спектральной плотности:

1. $S_\xi(w) \in \mathbb{R}^1$.
2. $S_\xi(w) = S_\xi(-w)$.
3. $S_\xi(w) \geq 0$.

Определение 1.3. *Случайный процесс ξ_t , определенный при всех $t \in [0, T]$, называется непрерывным в момент времени $t^* \in [0, T]$ в одном из вышеприведенных вероятностных смыслов, если для любой последовательности $\{t_k\}_{k=1}^\infty$, принадлежащей промежутку $[0, T]$ и сходящейся к t^* при $k \rightarrow \infty$, справедливо предельное соотношение*

$$\xi_{t_k} \rightarrow \xi_{t^*} \quad \text{при } t_k \rightarrow t^*,$$

понимаемое в соответствующем вероятностном смысле.

Определение 1.4. *Процесс ξ_t называется непрерывным на промежутке $[t_1, t_2]$ в данном вероятностном смысле, если он непрерывен в этом смысле при любом $t \in [t_1, t_2]$. Непрерывность в среднем степени 2 случайного процесса ξ_t будем называть среднеквадратической непрерывностью.*

Определение 1.5. *Случайный процесс ξ_t , определенный для всех $t \in [0, T]$, называется дифференцируемым в момент $t \in [0, T]$ в одном из вероятностных смыслов, если существует правая часть предельного соотношения*

$$\frac{\xi_{t+\Delta} - \xi_t}{\Delta} \rightarrow \frac{d\xi_t}{dt} \quad \text{при } \Delta \rightarrow 0,$$

понимаемого в этом вероятностном смысле. Процесс ξ_t будем называть дифференцируемым на промежутке $[t_1, t_2] \subseteq [0, T]$ в данном вероятностном смысле, если он дифференцируем в этом смысле при всех $t \in [t_1, t_2]$.

Рассмотрим случайный процесс ξ_t , для которого

$$\mathbb{M} \{ \xi_t | \mathcal{F}_s \} = \xi_s \quad \text{с в.1 при всех } 0 \leq s < t. \quad (1.4)$$

В теории случайных процессов процессы ξ_t , обладающие свойством (1.4), называются *мартингалами*. Если знак равенства в (1.4) заменить на знак $\leq$, то процесс ξ_t называется *супермартингалом*, а если его заменить на знак $\geq$, то — *субмартингалом*.

Большинство из рассматриваемых далее случайных процессов являются мартингалами. Среди многочисленных свойств мартингалов рассмотрим неравенство Дуба.

Пусть ξ_t , $t \geq 0$, — мартингал, для которого $M\{|\xi_t|^p\} < \infty$. Тогда для любого $p > 1$ справедлива оценка

$$M\left\{\sup_{0 \leq s \leq t} |\xi_s|^p\right\} \leq \left(\frac{p}{p-1}\right)^p M\{|\xi_t|^p\}.$$

В частности, при $p = 2$ неравенство Дуба имеет вид

$$M\left\{\sup_{0 \leq s \leq t} |\xi_s|^2\right\} \leq 4M\{|\xi_t|^2\}$$

и именно в такой форме будет использоваться в дальнейшем.

Отметим, что определения и свойства мартингалов в дискретном времени аналогичны соответствующим определениям и свойствам мартингалов в непрерывном времени.

1.2.4 Марковские и диффузионные процессы

В данном разделе мы рассмотрим некоторые определения и факты, касающиеся марковских и диффузионных случайных процессов. Подробное изложение теории марковских случайных процессов можно найти в [132]. Мы будем придерживаться терминологии, принятой в [57, 59–65, 132].

Пусть заданы следующие объекты:

1. Вероятностное пространство $(\Omega, \mathcal{F}, P)$.
2. Поток σ -алгебр $\{\mathcal{F}_t, t \in \mathcal{T}\}$, $\mathcal{T} \subseteq [0, \infty)$, т. е. семейство σ -алгебр $\mathcal{F}_t$, $t \in \mathcal{T}$, таких, что $\mathcal{F}_t \subset \mathcal{F}$ и $\mathcal{F}_s \subset \mathcal{F}_t$ при $s \leq t$, $s, t \in \mathcal{T}$.
3. Случайная функция $\xi_t = \xi(t, \omega) : \mathcal{T} \times \Omega \rightarrow (\mathbf{X}, \mathcal{B})$, измеримая при каждом $t \in \mathcal{T}$. Здесь $(\mathbf{X}, \mathcal{B})$ — некоторое измеримое пространство.

Будем считать, что случайный процесс обладает *марковским свойством* относительно потока σ -алгебр $\{\mathcal{F}_t, t \in \mathcal{T}\}$, если при $s \leq t$, $s, t \in \mathcal{T}$, $A \in \mathcal{B}$ с вероятностью 1

$$P\{\xi_t \in A | \mathcal{F}_s\} = P\{\xi_t \in A | \xi_s\}. \quad (1.5)$$

Случайные процессы, обладающие свойством (1.5), обычно называют *марковскими случайными функциями*.

На качественном уровне марковское свойство можно интерпретировать следующим образом. Если ξ_t — состояние некоторой системы в момент времени t , то прогноз поведения этой системы в будущие относительно t моменты времени по наблюдениям поведения этой системы в предшествующие моменты вплоть до настоящего момента t

будет зависеть, главным образом, от состояния системы в настоящий момент t .

Следствием использования марковского свойства и формулы полной вероятности является уравнение Колмогорова–Чэпмена

$$P\{\xi_s \in A | \xi_t\} = M\{P\{\xi_s \in A | \xi_\theta\} | \xi_t\}$$

с P вероятностью 1 при каждом $A \in \mathcal{B}$, $t \leq \theta \leq s$, $t, \theta, s \in \mathcal{T}$.

Функция $P(s, \mathbf{x} | t, A)$, $\mathbf{x} \in \mathbf{X}$, $A \in \mathcal{B}$, $s < t$, $s, t \in \mathcal{T}$, называется *вероятностью перехода*, если выполнены следующие условия:

1. $P(s, \mathbf{x} | t, A)$ — вероятностная мера на измеримом пространстве $(\mathbf{X}, \mathcal{B})$ при фиксированных s, t, A .
2. $P(s, \mathbf{x} | t, A)$ — $\mathcal{B}$ -измеримая функция при фиксированных s, t, A .
3. $P(s, \xi_s | t, A) = P\{\xi_t \in A | \xi_s\}$ с вероятностью 1 при всех s, t, A .

Используя вероятность перехода, можно переписать уравнение Колмогорова–Чэпмена в виде

$$P\{t, \xi_t | s, A\} = \int_{\mathbf{X}} P(\theta, \mathbf{y} | s, A) P(t, \xi_t | \theta, d\mathbf{y})$$

с P вероятностью 1, где $t < \theta < s$, $t, \theta, s \in \mathcal{T}$, $A \in \mathcal{B}$.

Часто под уравнением Колмогорова–Чэпмена понимают более сильное соотношение

$$P\{t, \mathbf{x} | s, A\} = \int_{\mathbf{X}} P(\theta, \mathbf{y} | s, A) P(t, \mathbf{x} | \theta, d\mathbf{y})$$

с P вероятностью 1 для всех $\mathbf{x} \in \mathbf{X}$, $t < \theta < s$, $t, \theta, s \in \mathcal{T}$, $A \in \mathcal{B}$.

При изучении марковского свойства случайных процессов обычно рассматривают семейство марковских случайных функций, стартующих в произвольный момент времени s из произвольной точки $\mathbf{x}$ фазового пространства. Это фактически означает, что на вероятностном пространстве имеется не одна фиксированная вероятностная мера P , а семейство вероятностных мер $P_{s, \mathbf{x}}$, зависящее от временной и фазовой переменных. Вероятностная мера $P_{s, \mathbf{x}}$ интерпретируется как условная вероятность некоторого случайного события, которое может произойти после момента s при условии, что $\xi_s = \mathbf{x}$.

Дадим определение марковского процесса. Обозначим через $\mathcal{F}_{s, t}$ совокупность σ -алгебр $\{\mathcal{F}_\theta, \theta \in [s, t]\}$.

Пусть заданы следующие объекты:

1. (Ω, U) — измеримое пространство.
2. Случайная величина $\eta(\omega) : \Omega \rightarrow [0, +\infty]$.

3. При всех s, t таких, что $0 \leq s \leq t$, совокупности σ -алгебр $\mathcal{F}_{s,t}$, принадлежащие U в пространстве $\Omega_t = \{\omega : \eta(\omega) > t\}$, такие, что если $s \leq t \leq \theta$ и $A \in \mathcal{F}_{s,t}$, то $A \cap \Omega_\theta \in \mathcal{F}_{s,\theta}$.

4. Функция $\xi_t = \xi(t, \omega)$, $t \in [0, \eta(\omega))$, $\omega \in \Omega$, принимающая значения в некотором измеримом пространстве $(\mathbf{X}, \mathcal{B})$, такая, что при всех s, t таких, что $0 \leq s \leq t$, отображение $\xi(t, \cdot) : (\Omega_t, \mathcal{F}_{s,t}) \rightarrow (\mathbf{X}, \mathcal{B})$ является измеримым; здесь σ -алгебра $\mathcal{B}$ содержит все одноточечные множества.

5. Для всех $s \geq 0$, $\mathbf{x} \in \mathbf{X}$ заданы вероятностные меры $P_{s,\mathbf{x}}$ на σ -алгебре $\mathcal{F}_{s,\infty}$.

Совокупность объектов 1–5 называют *обрывающимся марковским процессом*, если выполнены следующие два условия:

1. Для всех s, t, A таких, что $0 \leq s \leq t$, $A \in \mathcal{B}$, функция

$$P(s, \mathbf{x}|t, A) = P_{s,\mathbf{x}}\{\xi_t \in A\}$$

является $\mathcal{B}$ -измеримой функцией $\mathbf{x}$, причем $P(s, \mathbf{x}|s, \mathbf{X} \setminus \{\mathbf{x}\}) = 0$.

2. Для всех $s, t, \theta, \mathbf{x}, A$ таких, что $0 \leq s \leq t \leq \theta$, $\mathbf{x} \in \mathbf{X}$, $A \in \mathcal{B}$,

$$P_{s,\mathbf{x}}\{\xi_\theta \in A | \mathcal{F}_{s,t}\} = P(t, \xi_t | \theta, A)$$

с $P_{s,\mathbf{x}}$ вероятностью 1 на множестве Ω_t .

Обрывающийся марковский процесс обычно обозначают $(\xi_t, \eta, \mathcal{F}_{s,t}, P_{s,\mathbf{x}})$.

Случайный момент времени $\eta(\omega)$ называется *моментом обрыва* марковского процесса. Если $\eta(\omega) = +\infty$, то марковский процесс называется *необрывающимся* и обычно обозначается $(\xi_t, \mathcal{F}_{s,t}, P_{s,\mathbf{x}})$.

Функция $P(s, \mathbf{x}|t, A)$ называется *вероятностью перехода* марковского процесса и удовлетворяет уравнению Колмогорова–Чэпмена.

Марковский процесс называется *однородным*, если вероятность перехода $P(s, \mathbf{x}|t, A)$ такова, что функция $P(s, \mathbf{x}|s + \Delta, A)$ не зависит от s , $\Delta > 0$. В этом случае полагают $P(\Delta, \mathbf{x}, A) \stackrel{\text{def}}{=} P(s, \mathbf{x}|s + \Delta, A)$. Для конечномерных распределений однородного марковского процесса имеем

$$P_{s,\mathbf{x}}\{\xi_{t_1} \in A_1, \dots, \xi_{t_n} \in A_n\} = P_{0,\mathbf{x}}\{\xi_{t_1-s} \in A_1, \dots, \xi_{t_n-s} \in A_n\},$$

$0 \leq s < t_1 < \dots < t_n$. Это означает, что вместо семейства вероятностных мер $P_{s,\mathbf{x}}$, зависящих от временной и пространственной переменных, в случае однородного марковского процесса достаточно рассматривать семейство вероятностных мер $P_{0,\mathbf{x}} \stackrel{\text{def}}{=} P_{\mathbf{x}}$, зависящих только от пространственной переменной. Таким образом, всякий раз, когда процесс стартует из точки $\mathbf{x}$ в момент времени s , можно осуществить сдвиг времени так, чтобы точка s стала нулевой.

Обозначим через G_t минимальную σ -алгебру, включающую в себя все события $\{\xi_\theta \in A\}$, $\theta \in [0, t]$, $A \in \mathcal{B}$. Очевидно, что $G_t \subseteq \mathcal{F}_t$.

Пусть (ξ_t, η, G_t, P_x) — однородный марковский процесс в фазовом пространстве $(\mathbf{X}, \mathcal{B})$ с пространством элементарных событий Ω .

Случайная функция $\tau(\omega) : \Omega \rightarrow [0, +\infty]$ называется *марковским моментом*, если:

1. $0 \leq \tau(\omega) \leq \eta(\omega)$ при каждом $\omega \in \Omega$.
2. $\{\tau(\omega) \leq t < \eta(\omega)\} \in G_t$ при всех $t \geq 0$.

Для $\omega \notin \Omega_\tau \stackrel{\text{def}}{=} \{\omega : \tau(\omega) < \eta(\omega)\}$ полагаем $\tau(\omega) = \eta(\omega)$.

Примем

$$\tau_A(\omega) = \inf\{s : 0 \leq s < \eta(\omega), \xi(s, \omega) \notin A\}, \quad A \in \mathcal{B},$$

если множество в фигурных скобках непусто, и $\tau_A(\omega) = \eta(\omega)$ в противном случае. Величина $\tau_A(\omega)$ называется *моментом первого выхода* из множества A .

Известно [65, 132], что если процесс ξ_t непрерывен справа, A — открытое или замкнутое множество, а $\mathbf{X}$ — топологическое пространство, то $\tau_A(\omega)$ — марковский момент.

Марковский процесс (ξ_t, η, G_t, P_x) называется *прогрессивно измеримым*, если отображение $\xi(s, \omega) : ([0, t] \times \Omega_t, \mathcal{T}_{0,t} \times G_t) \rightarrow (\mathbf{X}, \mathcal{B})$ измеримо при всех t ; здесь $\mathcal{T}_{0,t}$ — σ -алгебра борелевских подмножеств $[0, t]$.

Прогрессивно измеримый марковский процесс (ξ_t, η, G_t, P_x) называется *строго марковским*, если для всех $t \geq 0$, $\mathbf{x} \in \mathbf{X}$, $A \in \mathcal{B}$ и любого марковского момента $\tau(\omega)$ выполняется соотношение

$$P_x\{\xi_{t+\tau} \in A | G_\tau\} = P(t, \xi_\tau, A) \text{ с } P_x \text{ в. 1}$$

на множестве Ω_τ ; здесь G_τ — совокупность всех таких событий $A \in G$, что $A \cap \{\tau \leq t < \eta\} \in G_t$ (G — совокупность всех $G_t, t \geq 0$).

Перейдем к определению характеристического оператора марковского процесса.

Будем полагать, что последовательность окрестностей $\{U_n\}_{n=1}^\infty$ точки $\mathbf{x}$ сходится к $\mathbf{x}$ ($U_n \downarrow \mathbf{x}$), если для любой окрестности U точки $\mathbf{x}$ найдется такое натуральное N , что $U_n \subset U$ при $n > N$.

Пусть $B(\mathbf{X})$ — банахово пространство всех вещественных ограниченных $\mathcal{B}$ -измеримых функций на $\mathbf{X}$ с нормой $\|\cdot\| = \sup_{\mathbf{x} \in \mathbf{X}} |\cdot|$, $\mathbf{X}$ — полукompакт.

З а м е ч а н и е 1.1. *Полукompактом называется [132] локально компактное хаусдорфово пространство со счетной базой. Напомним несколько понятий, входящих в определение полукompакта. Система*

подмножеств $\tilde{C} \subset C$ называется базой топологического пространства (E, C) , если каждая точка $\mathbf{x} \in E$ имеет окрестность $U \in \tilde{C}$. Топологическое пространство (E, C) называется хаусдорфовым, если для любых двух разных точек $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in E$ найдутся непересекающиеся множества $U, V \in C$ такие, что $\mathbf{x} \in U, \mathbf{y} \in V$. Пространство (E, C) называется локально компактным, если для каждой точки найдется компактная окрестность.

Обозначим через $D_{\mathcal{U}, \mathbf{x}}$ совокупность всех функций $f \in B(\mathbf{X})$, для которых при фиксированном $\mathbf{x} \in \mathbf{X}$ существует предел

$$\mathcal{U}f(\mathbf{x}) \stackrel{\text{def}}{=} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{M_{\mathbf{x}}\{f(\xi_{\tau_n})\} - f(\mathbf{x})}{M_{\mathbf{x}}\{\tau_n\}}, \quad (1.6)$$

где $\tau_{U_n} \stackrel{\text{def}}{=} \tau_n$ — момент первого выхода из открытого множества U_n ; U_n — произвольная последовательность окрестностей точки $\mathbf{x}$, сходящаяся к $\mathbf{x}$; $M_{\mathbf{x}}\{\cdot\}$ — условное математическое ожидание по мере $P_{\mathbf{x}}$; $(\xi_t, \eta, G_t, P_{\mathbf{x}})$ — непрерывный справа строго марковский процесс в полукомпакте $\mathbf{X}$.

Для $f \in \bigcap_{\mathbf{x} \in \mathbf{X}} D_{\mathcal{U}, \mathbf{x}}$ предел в правой части (1.6) существует при всех $\mathbf{x} \in \mathbf{X}$ и определяет некоторую функцию $\mathcal{U}f(\mathbf{x})$. Оператор $\mathcal{U}$ называется *характеристическим оператором* процесса $(\xi_t, \eta, G_t, P_{\mathbf{x}})$. Его область определения $D_{\mathcal{U}} = \bigcap_{\mathbf{x} \in \mathbf{X}} D_{\mathcal{U}, \mathbf{x}}$.

Дадим определение однородного диффузионного процесса, основанное на понятии характеристического оператора.

Пусть $\mathcal{B}$ — σ -алгебра борелевских подмножеств $\mathbb{R}^n$ и пусть $D_{2, \mathbf{x}}$, $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$, — совокупность всех вещественных функций, определенных и дважды непрерывно дифференцируемых в некоторой окрестности точки $\mathbf{x}$.

Непрерывный строго марковский процесс $(\xi_t, \eta, G_t, P_{\mathbf{x}})$ в фазовом пространстве $(\mathbb{R}^n, \mathcal{B})$ называется *диффузионным*, если для всех $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ выполняется включение $D_{2, \mathbf{x}} \subset D_{\mathcal{U}, \mathbf{x}}$, где $\mathcal{U}$ — характеристический оператор случайного процесса. Это значит, что характеристический оператор диффузионного процесса определен на любой дважды непрерывно дифференцируемой функции в окрестности точки $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$.

Зададим некоторый базис в $\mathbb{R}^n$. Пусть в этом базисе

$$\mathbf{x} = (\mathbf{x}^{(1)} \dots \mathbf{x}^{(n)})^T, \quad \mathbf{x}_0 = (\mathbf{x}_0^{(1)} \dots \mathbf{x}_0^{(n)})^T.$$

Положим

$$\beta^{(ij)}(\mathbf{x}) = (\mathbf{x}^{(i)} - \mathbf{x}_0^{(i)})(\mathbf{x}^{(j)} - \mathbf{x}_0^{(j)}),$$

$$\alpha^{(i)}(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^{(i)} - \mathbf{x}_0^{(i)},$$

$$\gamma(\mathbf{x}) \equiv 1,$$

где $i, j = 1, \dots, n$. Очевидно, что введенные функции дважды непрерывно дифференцируемы в окрестности точки $\mathbf{x}_0$. Таким образом, определены следующие функции:

$$B^{(ij)}(\mathbf{x}_0) = \mathcal{U}\beta^{(ij)}(\mathbf{x}_0), \quad i, j = 1, \dots, n,$$

$$\mathbf{a}^{(i)}(\mathbf{x}_0) = \mathcal{U}\alpha^{(i)}(\mathbf{x}_0), \quad i = 1, \dots, n,$$

$$c(\mathbf{x}_0) = -\mathcal{U}\gamma(\mathbf{x}_0).$$

Далее нетрудно установить [132], что если $f(\mathbf{x}) \in D_{2, \mathbf{x}_0}$, то

$$\begin{aligned} \mathcal{U}f(\mathbf{x}_0) = & \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^n B^{(ij)}(\mathbf{x}_0) \frac{\partial^2 f}{\partial \mathbf{x}^{(i)} \partial \mathbf{x}^{(j)}}(\mathbf{x}_0) + \sum_{i=1}^n \mathbf{a}^{(i)}(\mathbf{x}_0) \frac{\partial f}{\partial \mathbf{x}^{(i)}}(\mathbf{x}_0) - \\ & - c(\mathbf{x}_0) f(\mathbf{x}_0), \end{aligned}$$

где $c(\mathbf{x}_0) \geq 0$, а матрица $B(\mathbf{x}_0)$ неотрицательно определена, т. е. $\sum_{i,j=1}^n B^{(ij)}(\mathbf{x}_0) \mathbf{z}^{(i)} \mathbf{z}^{(j)} \geq 0$ для всех $\mathbf{z} = (\mathbf{z}^{(1)} \dots \mathbf{z}^{(n)})^\top \in \mathbb{R}^n$.

Известно [132], что при переходе к другому базису вид оператора $\mathcal{U}$ сохраняется, однако изменяются коэффициенты $B^{(ij)}(\mathbf{x}_0)$, $\mathbf{a}^{(i)}(\mathbf{x}_0)$.

Функция $c(\mathbf{x})$ называется *коэффициентом обрыва*, вектор $\mathbf{a}(\mathbf{x})$ — *вектором сноса*, а матрица $B(\mathbf{x})$ — *матрицей диффузии* диффузионного процесса $(\xi_t, \eta, G_t, \mathbf{P}_x)$.

Диффузионный процесс называется *каноническим*, если функции $c(\mathbf{x})$, $\mathbf{a}(\mathbf{x})$, $B(\mathbf{x})$ удовлетворяют следующим условиям:

I. Функции $\mathbf{a}^{(i)}(\mathbf{x})$, $B^{(ij)}(\mathbf{x})$, $c(\mathbf{x}) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^1$, $i, j = 1, \dots, n$, ограничены и удовлетворяют условию Гельдера на $\mathbb{R}^n$ (функция $f(\mathbf{x})$ удовлетворяет условию Гельдера на $\mathbb{R}^n$, если существуют постоянные $K > 0$ и $0 < \gamma \leq 1$ такие, что $|f(\mathbf{x}) - f(\mathbf{y})| \leq K|\mathbf{x} - \mathbf{y}|^\gamma$ для всех $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$).

II. Существует постоянная $\delta > 0$ такая, что при всех $\mathbf{x}, \mathbf{z} \in \mathbb{R}^n$ выполнено неравенство

$$\sum_{i,j=1}^n B^{(ij)}(\mathbf{x}) \mathbf{z}^{(i)} \mathbf{z}^{(j)} \geq \delta |\mathbf{z}|^2.$$

III. Функция $c(\mathbf{x}) \geq 0$ при каждом $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$.

Достаточные условия того, что процесс является диффузионным, содержатся в следующей теореме.

Теорема 1.1 [65, 132]. Пусть $(\xi_t, \eta, G_t, \mathbf{P}_x)$ — непрерывный процесс в $(\mathbb{R}^n, \mathcal{B})$ и пусть для всех $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ выполнены следующие три условия:

1. Существует окрестность U_0 точки $\mathbf{x}$ такая, что $M_x\{\tau_{U_0}\} < \infty$, где τ_{U_0} — момент первого выхода из U_0 .

2. В некоторой системе координат в $\mathbb{R}^n$ существуют пределы

$$\lim_{t \downarrow 0} \frac{1}{t} (1 - P(t, \mathbf{x}, \mathbb{R}^n)) = c(\mathbf{x}),$$

$$\lim_{t \downarrow 0} \frac{1}{t} \int_{\mathbb{R}^n} (\mathbf{y}^{(i)} - \mathbf{x}^{(i)}) P(t, \mathbf{x}, d\mathbf{y}) = \mathbf{a}^{(i)}(\mathbf{x}), \quad i = 1, \dots, n,$$

$$\lim_{t \downarrow 0} \frac{1}{t} \int_{\mathbb{R}^n} (\mathbf{y}^{(i)} - \mathbf{x}^{(i)})(\mathbf{y}^{(j)} - \mathbf{x}^{(j)}) P(t, \mathbf{x}, d\mathbf{y}) = B^{(ij)}(\mathbf{x}), \quad i, j = 1, \dots, n,$$

причем допредельные выражения равномерно ограничены при всех $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$, $t \geq 0$, а функции $c(\mathbf{x})$, $\mathbf{a}(\mathbf{x})$ и $B(\mathbf{x})$ непрерывны в точке $\mathbf{x}$.

Тогда процесс $(\xi_t, \eta, G_t, \mathbf{P}_x)$ диффузионный и для него $c(\mathbf{x})$ — коэффициент обрыва, $\mathbf{a}(\mathbf{x})$ — вектор сноса, а $B(\mathbf{x})$ — матрица диффузии.

Рассмотрим утверждение о вероятностном представлении решения дифференциального уравнения в частных производных второго порядка с эллиптическим оператором $\mathcal{U}$.

Теорема 1.2 [65, 132]. Пусть на множестве $\mathbb{R}^n$ заданы функции $c(\mathbf{x})$, $\mathbf{a}(\mathbf{x})$, $B(\mathbf{x})$, удовлетворяющие условиям I – III. Тогда существует диффузионный процесс $(\xi_t, \eta, G_t, \mathbf{P}_x)$ в фазовом пространстве $(\mathbb{R}^n, \mathcal{B})$, для которого

$$\begin{aligned} \mathcal{U}f(\mathbf{x}) = & \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^n B^{(ij)}(\mathbf{x}) \frac{\partial^2 f}{\partial \mathbf{x}^{(i)} \partial \mathbf{x}^{(j)}}(\mathbf{x}) + \sum_{i=1}^n \mathbf{a}^{(i)}(\mathbf{x}) \frac{\partial f}{\partial \mathbf{x}^{(i)}}(\mathbf{x}) - \\ & - c(\mathbf{x}) f(\mathbf{x}), \end{aligned}$$

где $f \in D_{2,\mathbf{x}}$, а $\mathcal{U}$ является характеристическим оператором процесса $(\xi_t, \eta, G_t, \mathbf{P}_x)$ и для любой ограниченной дважды непрерывно дифференцируемой функции $f(\mathbf{x})$, $\mathbf{x} \in \mathbf{X}$, функция $u(\mathbf{x}, t) = M_x\{f(\xi_t)\}$ является дважды непрерывно дифференцируемой по $\mathbf{x}$, дифференцируемой по t и удовлетворяет уравнению

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \mathcal{U}u, \quad t > 0, \quad \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$$

с начальным условием

$$\lim_{t \downarrow 0} u(\mathbf{x}, t) = f(\mathbf{x}).$$

Эллиптический дифференциальный оператор (см. теорему 1.2) называется *производящим дифференциальным оператором диффузионного процесса* и обычно обозначается $\mathcal{L}$.

Рассмотрим другое определение диффузионного процесса, которое основано на понятии вероятности перехода и применимо в случае неоднородного диффузионного процесса.

Говорят, что задан *марковский процесс в широком смысле* со значениями из $\mathbb{R}^n$, если задана вероятность перехода $P(\theta, \mathbf{x}|t, A)$, $0 \leq \theta < t \leq T$, $A \in \mathcal{B}$ ($\mathcal{B}$ — σ -алгебра борелевских подмножеств $\mathbb{R}^n$).

Марковский процесс в широком смысле со значениями в $\mathbb{R}^n$ на временном интервале $[0, T]$ называется *диффузионным*, если выполнены следующие условия:

1. Для всех $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$, $t \in [0, T]$, $\varepsilon > 0$

$$\lim_{t \downarrow \tau} \frac{1}{t - \tau} \int_{|\mathbf{y} - \mathbf{x}| > \varepsilon} P(\tau, \mathbf{x}|t, d\mathbf{y}) = 0. \quad (1.7)$$

2. Существуют функция $\mathbf{a}(\mathbf{x}, t) : \mathbb{R}^n \times [0, T] \rightarrow \mathbb{R}^n$ и симметричная неотрицательно определенная матричная функция $B(\mathbf{x}, t) : \mathbb{R}^n \times [0, T] \rightarrow \mathbb{R}^{n \times n}$ такие, что для всех $\mathbf{x}, \mathbf{z} \in \mathbb{R}^n$, $t \in [0, T]$, $\varepsilon > 0$

$$\lim_{t \downarrow \tau} \frac{1}{t - \tau} \int_{|\mathbf{y} - \mathbf{x}| < \varepsilon} (\mathbf{y} - \mathbf{x}) P(\tau, \mathbf{x}|t, d\mathbf{y}) = \mathbf{a}(\mathbf{x}, \tau), \quad (1.8)$$

$$\lim_{t \downarrow \tau} \frac{1}{t - \tau} \int_{|\mathbf{y} - \mathbf{x}| < \varepsilon} (\mathbf{y} - \mathbf{x}, \mathbf{z})^2 P(\tau, \mathbf{x}|t, d\mathbf{y}) = (B(\mathbf{x}, \tau)\mathbf{z}, \mathbf{z}), \quad (1.9)$$

где $(\cdot, \cdot)$ — скалярное произведение в $\mathbb{R}^n$.

Вектор $\mathbf{a}(\mathbf{x}, t)$ называют *вектором сноса*, а матрицу $B(\mathbf{x}, t)$ — *матрицей, или оператором, диффузии*. В случае $n = 1$ они соответственно называются *коэффициентом сноса и коэффициентом диффузии*.

Пусть в множестве $\mathbb{R}^n$ фиксирован некоторый базис. Пусть $\mathbf{a}^{(i)}(\mathbf{x}, t)$, $B^{(ij)}(\mathbf{x}, t)$, $i, j = 1, \dots, n$, — координаты вектора $\mathbf{a}(\mathbf{x}, t)$ и элементы матрицы $B(\mathbf{x}, t)$ в данном базисе.

Следующие два утверждения отражают тесную связь диффузионных процессов и дифференциальных уравнений в частных производных параболического типа.

Теорема 1.3 [65, 132]. Пусть задан диффузионный процесс с непрерывными вектором сноса $\mathbf{a}(\mathbf{x}, \tau) : \mathbb{R}^n \times [0, T] \rightarrow \mathbb{R}^n$ и матрицей

диффузии $B(\mathbf{x}, \tau) : \mathbb{R}^n \times [0, T] \rightarrow \mathbb{R}^{n \times n}$. Пусть также ограниченная непрерывная функция $f(\mathbf{x}) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^1$ такова, что при всех $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$, $\tau \in [0, t]$ функция

$$u(\mathbf{x}, \tau) = \int_{\mathbb{R}^n} f(\mathbf{y}) P(\tau, \mathbf{x}|t, d\mathbf{y})$$

дважды непрерывно дифференцируема по $\mathbf{x}$. Тогда функция $u(\mathbf{x}, \tau)$ дифференцируема по τ и удовлетворяет уравнению в частных производных параболического типа

$$\frac{\partial u}{\partial \tau} + \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^n B^{(ij)}(\mathbf{x}, \tau) \frac{\partial^2 u}{\partial \mathbf{x}^{(i)} \partial \mathbf{x}^{(j)}} + \sum_{i=1}^n \mathbf{a}^{(i)}(\mathbf{x}, \tau) \frac{\partial u}{\partial \mathbf{x}^{(i)}} = 0, \quad (1.10)$$

где $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$, $\tau \in [0, t)$, с начальным условием

$$\lim_{\tau \uparrow t} u(\mathbf{x}, \tau) = f(\mathbf{x}).$$

Уравнение (1.10) называется *обратным уравнением А. Н. Колмогорова*.

В случаях, когда вероятность перехода $P(\tau, \mathbf{x}|t, A)$ имеет плотность $p(\tau, \mathbf{x}|t, \mathbf{y})$, т. е. для всех $\tau \in [0, t)$, $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$, $A \in \mathcal{B}$

$$P(\tau, \mathbf{x}|t, A) = \int_A p(\tau, \mathbf{x}|t, \mathbf{y}) d\mathbf{y},$$

и эта плотность $p(\tau, \mathbf{x}|t, \mathbf{y})$ является достаточно гладкой функцией от $(t, \mathbf{y})$, справедливо следующее утверждение.

Теорема 1.4 [65, 132]. Пусть для диффузионного процесса предельные соотношения (1.7) – (1.9) выполнены равномерно по $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ и существуют непрерывные производные

$$\frac{\partial p(\tau, \mathbf{x}|t, \mathbf{y})}{\partial t}, \quad \frac{\partial}{\partial \mathbf{y}^{(i)}} (\mathbf{a}^{(i)}(\mathbf{y}, t) p(\tau, \mathbf{x}|t, \mathbf{y})), \quad \frac{\partial^2}{\partial \mathbf{y}^{(i)} \partial \mathbf{y}^{(j)}} (B^{(ij)}(\mathbf{y}, t) p(\tau, \mathbf{x}|t, \mathbf{y}))$$

для всех $i, j = 1, \dots, n$. Тогда функция $p(\tau, \mathbf{x}|t, \mathbf{y})$ для каждого $(t, \mathbf{y}) \in (\tau, T) \times \mathbb{R}^n$ удовлетворяет уравнению вида

$$\begin{aligned} & \frac{\partial p(\tau, \mathbf{x}|t, \mathbf{y})}{\partial t} + \sum_{i=1}^n \frac{\partial}{\partial \mathbf{y}^{(i)}} (\mathbf{a}^{(i)}(\mathbf{y}, t) p(\tau, \mathbf{x}|t, \mathbf{y})) - \\ & - \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial \mathbf{y}^{(i)} \partial \mathbf{y}^{(j)}} (B^{(ij)}(\mathbf{y}, t) p(\tau, \mathbf{x}|t, \mathbf{y})) = 0. \end{aligned} \quad (1.11)$$

Уравнение (1.11) называется *прямым уравнением А. Н. Колмогорова, или уравнением Фоккера–Планка*.

Сформулированные утверждения свидетельствуют о тесной связи диффузионных процессов с дифференциальными уравнениями в частных производных параболического типа.

Известен и другой метод построения диффузионных процессов, основанный на построении их траекторий как решений стохастических дифференциальных уравнений. Такой подход будет рассмотрен в данной главе далее.

В случае когда область определения или (и) область значений (пространство состояний) марковского процесса дискретна (конечна или счетна) марковский процесс называется *марковской цепью*.

Рассмотрим марковскую цепь ξ_t , $t \geq 0$, с непрерывным временем и дискретным пространством состояний $Y = \{y_1, \dots, y_N\}$, где N для определенности конечно (возможен также случай $N = +\infty$). Тогда в силу марковского свойства имеем

$$P\{\xi_t = y_i | \xi_{t_1} = y_{j_1}, \dots, \xi_{t_k} = y_{j_k}, \xi_\tau = y_j\} = P\{\xi_t = y_i | \xi_\tau = y_j\}$$

для всех $t_1, \dots, t_k, \tau, t : 0 \leq t_1 \leq \dots \leq t_k < \tau \leq t$ и $y_j, y_i, y_{j_1}, \dots, y_{j_k} \in Y$, $k = 1, 2, \dots$

Для всех $\tau, t : 0 \leq \tau \leq t$ матрица перехода $P_{\tau,t} = \|P_{\tau,t}^{(ij)}\|_{i,j=1}^N$ цепи Маркова определяется следующим образом:

$$P_{\tau,t}^{(ij)} = P\{\xi_t = y_j | \xi_\tau = y_i\}, \quad i, j = 1, \dots, N,$$

где $P_{\tau,t}^{(ij)}$ называются *вероятностями перехода* цепи Маркова.

Очевидно, что при $0 \leq \tau \leq t$ имеем

$$P_{\tau,\tau} = I, \quad p_t = P_{\tau,t}^\top p_\tau, \quad (1.12)$$

где $p_t = (p_t^{(1)} \dots p_t^{(N)})^\top$ — вектор вероятностей с компонентами $p_t^{(i)} = P\{\xi_t = y_i\}$; I — единичная матрица.

Используя (1.12), нетрудно получить

$$P_{s,t} = P_{s,\tau} P_{\tau,t} \quad (1.13)$$

для всех s, τ, t таких, что $0 \leq s \leq \tau \leq t$.

Марковская цепь называется *однородной*, если $P_{\tau,t} = P_{0,t-\tau}$ для $0 \leq \tau \leq t$. При этом полагаем $P_{0,t} \stackrel{\text{def}}{=} P_t$, $t \geq 0$. Очевидно, что для

однородной цепи Маркова равенство (1.13) преобразуется в равенство вида

$$P_{\tau+t} = P_{\tau} P_t = P_t P_{\tau}$$

для всех $\tau, t \geq 0$.

Матрицей интенсивности однородной марковской цепи назовем матрицу $A = \|A^{(ij)}\|_{i,j=1}^N$ с компонентами

$$A^{(ij)} = \begin{cases} \lim_{t \downarrow 0} \frac{P_t^{(ij)}}{t} & \text{при } i \neq j, \\ \lim_{t \downarrow 0} \frac{P_t^{(ii)} - 1}{t} & \text{при } i = j, \end{cases} \quad i, j = 1, \dots, N.$$

Известно, что матрица A существует (ее диагональные элементы не обязательно конечны), и если $|A^{(ii)}| < \infty$, $i = 1, \dots, N$, то вероятности перехода удовлетворяют прямому и обратному уравнениям А. Н. Колмогорова. Эти уравнения в данном случае имеют следующий вид:

$$\frac{dP_t^{(ij)}}{dt} - \sum_{l=1}^N P_t^{(il)} A^{(lj)} = 0, \quad \frac{dP_t^{(ij)}}{dt} - \sum_{l=1}^N P_t^{(lj)} A^{(li)} = 0, \quad \text{где } i, j = 1, \dots, N.$$

1.2.5 Случайные процессы с независимыми приращениями. Винеровский и пуассоновский процессы

Дадим определение случайного процесса с независимыми приращениями.

Определение 1.6. Случайный процесс ξ_t , определенный на промежутке $[0, T]$, называется процессом с независимыми приращениями, если для любых $t_0, t_1, \dots, t_k \in [0, T]$ таких, что $0 \leq t_0 < t_1 < \dots < t_k \leq T$, случайные величины ξ_{t_0} , $\xi_{t_1} - \xi_{t_0}$, $\dots$, $\xi_{t_k} - \xi_{t_{k-1}}$ стохастически независимы в совокупности.

Особую роль в дальнейшем изложении будут играть винеровские случайные процессы, относящиеся к классу гауссовских процессов с независимыми приращениями. Приведем определения и рассмотрим свойства этих процессов. Более подробное изложение теории случайных процессов с независимыми приращениями можно найти в монографии А. В. Скорохода [127].

Определение 1.7. Случайный процесс $f_t \in \mathbb{R}^1$ с независимыми приращениями, определенный при $t \in [0, T]$, будем называть винеровским, если он удовлетворяет условиям:

1. $M\{f_t\} \equiv 0$.
2. $M\{(f_{t_2} - f_{t_1})^2\} = \sigma_f^2 |t_2 - t_1|$, $\sigma_f^2 > 0$, — постоянная.

3. Процессы f_{t_1} и $f_{t_2} - f_{t_1}$, $t_2 > t_1$, имеют нормальное распределение при всех $t_1, t_2 \in [0, T]$.

Часто полагают $\sigma_f^2 = 1$, $f_0 = 0$. В этом случае винеровский процесс называется стандартным. Поскольку приращения $f_{t_2} - f_{t_1}$, $t_2 > t_1$, винеровского процесса имеют нормальное распределение, их функция распределения определяется соотношением

$$P \{f_{t_2} - f_{t_1} < x\} = \frac{1}{\sigma_f \sqrt{2\pi(t_2 - t_1)}} \int_{-\infty}^x e^{-\frac{u^2}{2\sigma_f^2(t_2 - t_1)}} du.$$

Известно, что в силу нормальности $f_{t_2} - f_{t_1}$ справедлива формула

$$M \{(f_{t_2} - f_{t_1})^m\} = \begin{cases} \sigma_f^m (m-1)!! (t_2 - t_1)^{\frac{m}{2}} & \text{при } m = 2k, \\ 0 & \text{при } m = 2k + 1, \end{cases}$$

где $k \in Z, k > 0$.

Известно также, что для винеровского процесса существует непрерывная с вероятностью 1 модификация, которую и будем рассматривать.

Далее будем называть случайные величины ξ_j , $j = 1, \dots, n$, стандартными гауссовскими случайными величинами, если ξ_j , $j = 1, \dots, n$, распределены по нормальному закону, причем имеют нулевые математические ожидания и единичные дисперсии ($\xi_j \sim N(0, 1)$, $j = 1, \dots, n$).

Отметим также следующие свойства винеровского процесса:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{f_t}{t} = 0 \text{ с в.1,}$$

$$\limsup_{t \rightarrow \infty} \frac{f_t}{\sqrt{2t \ln \ln t}} = 1, \quad \liminf_{t \rightarrow \infty} \frac{f_t}{\sqrt{2t \ln \ln t}} = -1 \text{ с в.1.} \quad (1.14)$$

Равенства (1.14) носят название закона повторного логарифма. Нетрудно показать, что $tf_{\frac{1}{t}}$ является винеровским процессом, если f_t — винеровский процесс. Тогда закон повторного логарифма можно записать в виде

$$\limsup_{t \downarrow 0} \frac{f_t}{\sqrt{2t \ln \ln(\frac{1}{t})}} = 1, \quad \liminf_{t \downarrow 0} \frac{f_t}{\sqrt{2t \ln \ln(\frac{1}{t})}} = -1 \text{ с в.1.}$$

С помощью винеровского процесса можно ввести процесс броуновского моста b_t :

$$b_t = x + f_t - \frac{t}{T} (f_T - y + x), \quad t \in [0, T], \quad x, y \in \mathbb{R}^1, \quad (1.15)$$

который играет важную роль в приложениях. Из (1.15), в частности, следует, что $b_0 = x$, $b_T = y$. Известно, что b_t — гауссовский процесс, который имеет следующие математическое ожидание и корреляционную функцию:

$$M\{b_t\} = x - \frac{t}{T}(x - y), \quad R_b(t, s) = \min\{s, t\} - \frac{st}{T},$$

где $0 \leq s, t \leq T$.

Хорошо известно, что стандартный винеровский процесс $f(t, \omega)$ на любом конечном промежутке времени $[0, T]$ может быть представлен в виде сходящегося в среднеквадратическом смысле ряда Фурье из независимых стандартных гауссовских случайных величин:

$$f(t, \omega) = \sum_{j=0}^{\infty} \xi_j(\omega) C_j(t), \quad t \in [0, T], \quad (1.16)$$

где функции $C_j(t)$ имеют вид

$$C_j(t) = \frac{2\sqrt{2T}}{(2j+1)\pi} \sin\left(\frac{(2j+1)\pi t}{2T}\right),$$

ортогональны, т. е.

$$\int_0^T C_i(t) C_j(t) dt = 0 \quad \text{при } i \neq j,$$

и удовлетворяют условию

$$\sum_{j=0}^{\infty} C_j(t) C_j(s) = \min\{s, t\} = R_f(s, t);$$

$\xi_j(\omega)$ — независимые стандартные гауссовские случайные величины вида

$$\xi_j(\omega) = \frac{2}{T} \left(\frac{(2j+1)\pi}{2\sqrt{2T}} \right)^2 \int_0^T f(t, \omega) C_j(t) dt, \quad i, j = 0, 1, \dots$$

Разложение (1.16) называется в литературе разложением Карунена–Лоэва и имеет множество приложений. В частности, оно может быть использовано для приближенного представления винеровского процесса. Г. Н. Мильштейном в [70] был предложен метод аппроксимации повторных стохастических интегралов Стратоновича, который основывается на разложении (1.16) (см. главу 4).

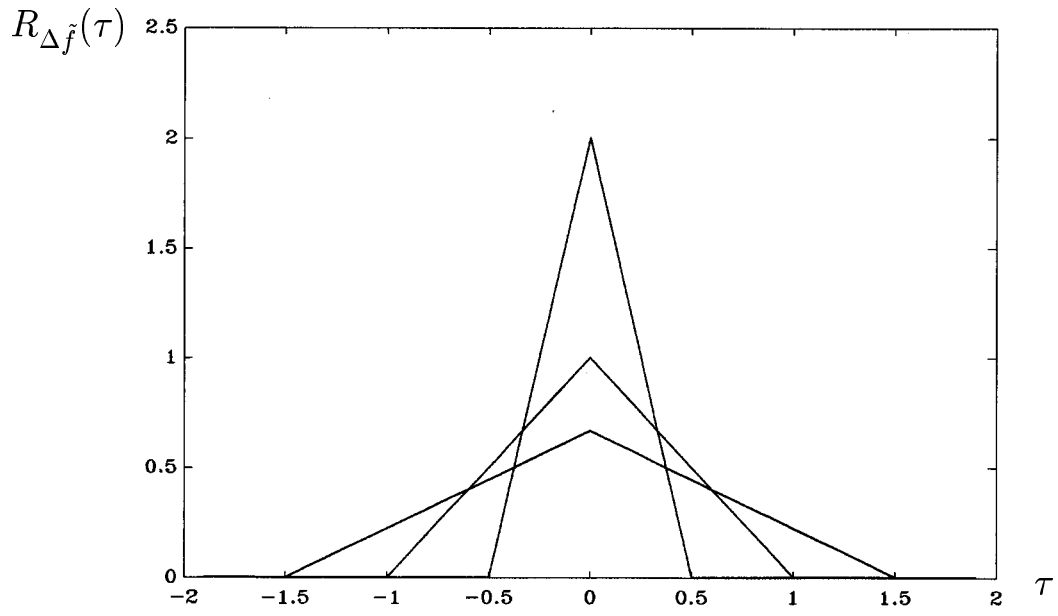


Рис.1.1. График семейства функций $R_{\Delta \tilde{f}}(\tau)$.

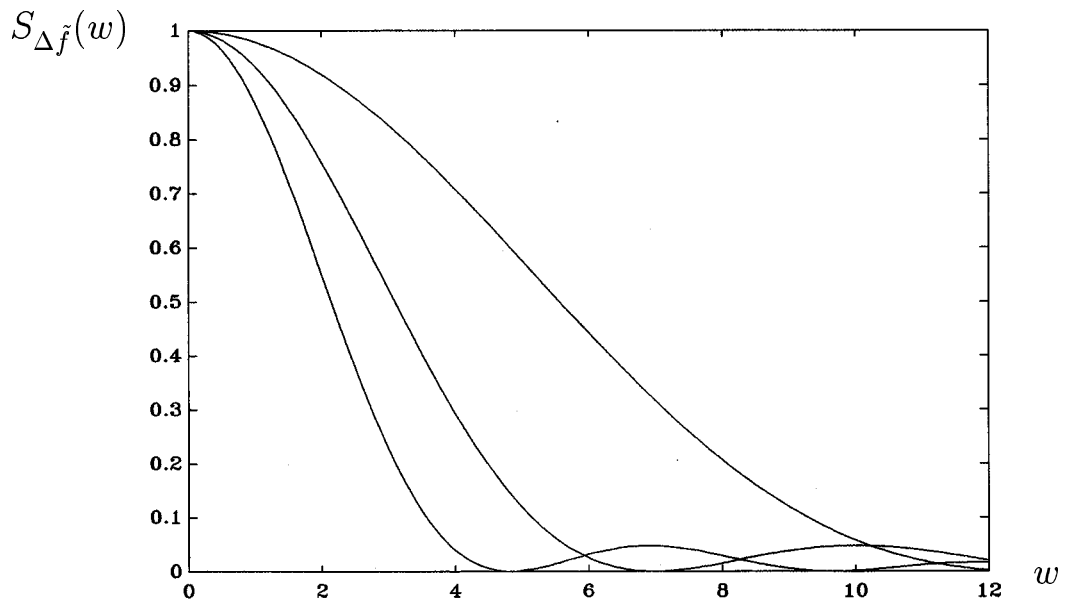


Рис.1.2. График семейства функций $S_{\Delta \tilde{f}}(w)$.

С помощью винеровского процесса можно ввести понятие белого шума. Рассмотрим случайный процесс $\Delta \tilde{f}_t \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{\Delta}(f_{t+\Delta} - f_t)$, $\Delta \geq 0$, где f_t — стандартный винеровский процесс.

Вычисляя корреляционную функцию и спектральную плотность процесса $\Delta\tilde{f}_t$, получаем

$$R_{\Delta\tilde{f}}(t) = \begin{cases} \frac{\Delta-|t|}{\Delta^2} & \text{при } |t| \leq \Delta, \\ 0 & \text{при } |t| \geq \Delta, \end{cases}$$

$$S_{\Delta\tilde{f}}(w) = 2 \frac{1 - \cos(w\Delta)}{(w\Delta)^2}.$$

На рис.1.1 и 1.2 приведены графики семейства функций $R_{\Delta\tilde{f}}(t)$ и $S_{\Delta\tilde{f}}(w)$ соответственно.

Очевидно, что, переходя к пределу при $\Delta \rightarrow 0$, имеем

$$\lim_{\Delta \rightarrow 0} R_{\Delta\tilde{f}}(t) = \delta(t),$$

$$\lim_{\Delta \rightarrow 0} S_{\Delta\tilde{f}}(w) = 1,$$

где $\delta(t)$ — дельта-функция Дирака, т. е. обобщенная функция для которой $\delta(t) = 0$ при $t \neq 0$ и

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t)g(t)dt = g(0)$$

для любой непрерывной в нуле функции $g(t)$.

Рассмотрим идеализированный случайный процесс f_t , которому соответствуют предельные значения корреляционной функции и спектральной плотности процесса $\Delta\tilde{f}_t$ при $\Delta \rightarrow 0$. Таким образом, случайный процесс f_t имеет δ -образную корреляционную функцию и постоянную спектральную плотность, т. е. является белым шумом. Иными словами, белый шум f_t можно рассматривать как обобщенную производную случайного процесса $f_t : f_t \stackrel{\text{def}}{=} \frac{df_t}{dt}$.

Перейдем к рассмотрению процесса Пуассона.

Случайная величина ν называется распределенной по закону Пуассона с параметром λ , $\lambda > 0$, если

$$P\{\nu = k\} = \frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda}, \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

Характеристическая функция $\varphi(t)$ пуассоновского распределения имеет вид [4, 5]

$$\varphi(t) = \exp\{\lambda(e^{it} - 1)\}.$$

Нетрудно убедиться [4, 5], что

$$\begin{aligned} M\{\nu\} &= \lambda, \quad M\{\nu^2\} = \lambda^2 + \lambda, \quad D\{\nu\} = \lambda, \\ M\{(\nu - M\{\nu\})^k\} &\stackrel{\text{def}}{=} \mu_k = \lambda \sum_{l=0}^{k-2} C_{k-1}^l \mu_l, \quad k \geq 2, \\ M\{\nu^k\} &= \lambda \sum_{j=0}^{k-1} C_{k-1}^j M\{\nu^j\}, \quad k \geq 1, \end{aligned}$$

где $C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}$ — биномиальный коэффициент.

Однородный процесс ν_t с независимыми приращениями называется однородным процессом Пуассона, если ν_t имеет пуассоновское распределение, т. е. существует такое $\lambda > 0$, что

$$P\{\nu_{t+\Delta} - \nu_t = k\} = \frac{(\lambda\Delta)^k}{k!} e^{-\lambda\Delta}, \quad k = 0, 1, 2, \dots, \quad \Delta > 0.$$

Характеристическая функция процесса Пуассона имеет вид [4, 5]

$$\varphi(t, \theta) = \exp\{\lambda t(e^{i\theta} - 1)\}.$$

Возникновение процесса Пуассона возможно, например, в следующей ситуации.

Предположим, что в некотором эксперименте наблюдается появление некоторых событий и при этом выполняются условия:

1. Число событий, произошедших на промежутке времени $[t, t + \Delta]$, не зависит от того, сколько событий и в какие моменты времени произошло на промежутке $[0, t]$.
2. Вероятность того, что на промежутке времени $[t, t + \Delta]$ произойдет одно событие, равна $\lambda\Delta + o(\Delta)$.
3. Вероятность того, что на промежутке времени $[t, t + \Delta]$ произойдет более одного события, равна $o(\Delta)$.

Тогда случайная величина ν_t , равная числу событий, которые произошли на промежутке $[0, t]$, как функция t является процессом Пуассона.

Возможная траектория процесса Пуассона ν_t изображена на рис. 1.3.

В дальнейшем будем рассматривать также объекты более общего вида.

Пусть $(\Theta, \mathcal{B})$ — измеримое пространство с мерой Π , а $\mathcal{B}_0$ — подалгебра $\mathcal{B}$, состоящая из таких множеств $A \subset \mathcal{B}$, для которых $\Pi(A) < \infty$.

Обозначим через $\mathcal{B}_+$ σ -алгебру борелевских множеств $[0, T)$, $T \leq \infty$. Пусть также задано вероятностное пространство $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ с совокупностью σ -алгебр $\{\mathcal{F}_t, t \in [0, T)\}$, $T \leq \infty$, которая монотонно возрастает с ростом t , непрерывна справа по t и полна относительно меры P , причем $\mathcal{F}_0$ содержит все события с нулевой вероятностью.

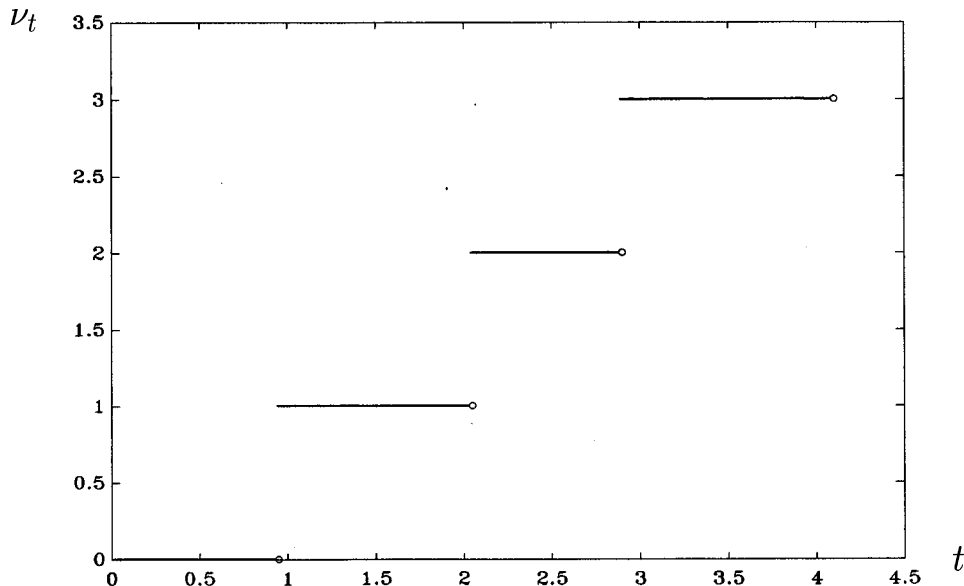


Рис.1.3. Траектория процесса Пуассона.

Пусть каждому множеству $C \subset \mathcal{B}_+ \times \mathcal{B}$ поставлена в соответствие случайная величина $\nu(C)$ такая, что:

(I) Для каждого $A \subset \mathcal{B}_0$ случайный процесс $\nu([0, t), A)$ — однородный пуассоновский процесс с параметром $\Pi(A)$, т. е.

$$P\{\nu([0, t), A) - \nu([0, s), A) = k\} = \frac{((t-s)\Pi(A))^k}{k!} e^{-(t-s)\Pi(A)},$$

где $0 \leq s < t$, $k = 0, 1, 2, \dots$, и при всех $t \geq 0$ случайные величины $\nu([0, t), A)$ измеримы относительно σ -алгебры $\mathcal{F}_t$, а приращение $\nu([0, t+s), A) - \nu([0, t), A)$, $s \geq 0$, не зависит от σ -алгебры $\mathcal{F}_t$.

(II) Для непересекающихся множеств $A_i \subset \mathcal{B}_0$, $i = 1, \dots, n$, процессы $\nu([0, t), A_i)$ независимы.

(III) Для любой последовательности $C_1, C_2, C_3, \dots$ попарно непересекающихся множеств из $\mathcal{B}_+ \times \mathcal{B}$

$$\nu\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} C_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} \nu(C_i) \text{ с в.1.}$$

Если выполнены условия (I) – (III), то говорят, что в пространстве $[0, \infty) \times \Theta$ определена пуассоновская мера ν .

1.2.6 Численное моделирование пуассоновского и гауссовского распределений

В следующих главах книги рассматриваются различные численные методы решения стохастических дифференциальных уравнений. При этом на стадии численной реализации данных методов возникает необходимость в численном моделировании случайных величин, распределенных по пуассоновскому и гауссовскому законам с заданными параметрами.

Для численного моделирования случайной величины ν , имеющей пуассоновское распределение с параметром λ , воспользуемся алгоритмом, приведенным в [11].

Введем случайную величину ν , определенную равенством

$$\nu = \min \left\{ n : \prod_{k=1}^n u_k < e^{-\lambda} \right\}, \quad (1.17)$$

где $u_1, \dots, u_k$ — независимые, равномерно распределенные на интервале $(0, 1)$ случайные величины.

В [11] показано, что случайная величина ν вида (1.17) имеет пуассоновское распределение с параметром λ , т. е.

$$P\{\nu = m\} = \frac{\lambda^m}{m!} e^{-\lambda}, \quad m = 0, 1, \dots$$

Формула (1.17) позволяет построить следующий алгоритм численного моделирования пуассоновской случайной величины ν .

Алгоритм 1.1. *Моделирование пуассоновской случайной величины с параметром λ .*

1. $S := 1$.
2. $k := 1$.
3. Моделирование случайной величины u_k .
4. $S := Su_k$.
5. Если $S > e^{-\lambda}$, то $k := k + 1$, и переходим к п. 4.
6. $\nu := k$.
7. Конец работы алгоритма 1.1.

Нетрудно видеть, что если требуется моделировать m независимых пуассоновских случайных величин $\nu_1, \nu_2, \dots, \nu_m$ с параметром λ , то для этого можно m раз воспользоваться алгоритмом 1.1. Так, для

моделирования ν_1 по алгоритму 1.1 используется набор случайных величин $u_1^{(1)}, \dots, u_{n_1}^{(1)}$, для моделирования ν_2 — набор случайных величин $u_1^{(2)}, \dots, u_{n_2}^{(2)}$ и т. д. При этом случайные величины $u_1^{(1)}, \dots, u_{n_1}^{(1)}, \dots, u_1^{(m)}, \dots, u_{n_m}^{(m)}$ должны быть независимыми в совокупности и равномерно распределенными на интервале $(0, 1)$.

Рассмотрим процесс моделирования гауссовского распределения с параметрами m и σ .

Можно убедиться [11], что случайная величина

$$\eta^{(n)} = \sqrt{\frac{12}{n}} \sum_{k=1}^n \left(u_k - \frac{1}{2} \right) \quad (1.18)$$

в соответствии с центральной предельной теоремой является асимптотически нормальной стандартной (т. е. с параметрами 0 и 1) случайной величиной. Здесь $u_1, \dots, u_k$ — независимые, равномерно распределенные на интервале $(0, 1)$ случайные величины. Обычно в формуле (1.18) принимают $n = 12$:

$$\eta^{(12)} = \sum_{k=1}^{12} u_k - 6. \quad (1.19)$$

Для более точного моделирования гауссовского распределения с параметрами 0 и 1 иногда используют формулу [11]

$$\xi^{(n)} = \eta^{(n)} + \frac{1}{20n} \left((\eta^{(n)})^3 - 3\eta^{(n)} \right).$$

Для моделирования гауссовской случайной величины с параметрами m и σ можно применить формулу

$$\rho^{(n)} = m + \sigma \eta^{(n)},$$

где $\eta^{(n)}$ определяется из формулы (1.18).

Если необходимо моделировать d независимых стандартных гауссовских случайных величин $\eta_1, \dots, \eta_d$, то можно d раз воспользоваться формулой (1.19). Так, для моделирования η_1 используются случайные величины $u_1, \dots, u_{12}$, для моделирования η_2 — случайные величины $u_{13}, \dots, u_{24}$ и т. д. При этом случайные величины $u_1, \dots, u_{12d}$ независимы в совокупности и равномерно распределены на интервале $(0, 1)$.

1.3 Стохастические интегралы по винеровскому процессу и стохастические дифференциальные уравнения диффузионного типа

1.3.1 Стохастический интеграл Ито

Пусть заданы вероятностное пространство $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ и винеровский случайный процесс f_t , $t \in [0, T]$. Рассмотрим совокупность σ -алгебр $\{\mathcal{F}_t, t \in [0, T]\}$, определенную на вероятностном пространстве $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ и связанную с процессом f_t так, что:

1. $\mathcal{F}_s \subset \mathcal{F}_t \subset \mathcal{F}$ при $s < t$.
2. Процесс f_t измерим относительно $\mathcal{F}_t$ при каждом $t \in [0, T]$.
3. Процесс $f_{t+\Delta} - f_t$ при всех $\Delta \geq 0$, $t > 0$ не зависит от событий σ -алгебры $\mathcal{F}_t$.

Введем класс $\mathcal{M}_2([0, T])$ функций $\xi : [0, T] \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}^1$, которые удовлетворяют следующим условиям:

- (i) функции $\xi(t, \omega)$ измеримы по совокупности переменных (t, ω) ;
- (ii) функция $\xi(t, \omega)$ $\mathcal{F}_t$ -измерима при всех $t \in [0, T]$ и ее значения $\xi(\tau, \omega)$ не зависят от приращений $f_{t+\Delta} - f_t$ винеровского процесса при $\Delta \geq \tau$, $t > 0$;

$$(iii) \int_0^T M \{(\xi(t, \omega))^2\} dt < \infty;$$

$$(iv) M \{(\xi(t, \omega))^2\} < \infty \text{ для всех } t \in [0, T].$$

Введем на классе $\mathcal{M}_2([0, T])$ норму вида

$$\|\xi\|_{2,T} = \sqrt{\int_0^T M \{(\xi(t, \omega))^2\} dt}.$$

Будем отождествлять две функции ξ, η из класса $\mathcal{M}_2([0, T])$, если $\|\xi - \eta\|_{2,T} = 0$.

Для произвольного разбиения $\{\tau_j\}_{j=0}^N$ промежутка $[0, T]$ такого, что $0 = \tau_0 < \tau_1 < \dots < \tau_N = T$, и произвольной последовательности среднеквадратически интегрируемых, $\mathcal{F}_{\tau_j}$ -измеримых и не зависящих от приращений $f_{s+t} - f_t$, $t \geq \tau_j$, $s > 0$, случайных величин $\xi_j(\omega)$, $j = 0, 1, \dots, N-1$, определим ступенчатую функцию $\xi \in \mathcal{M}_2([0, T])$ следующим образом: $\xi(t, \omega) = \xi_j(\omega)$ с вероятностью 1 при $\tau_j \leq t < \tau_{j+1}$, $j = 0, 1, \dots, N-1$. При этом интеграл в условии (iii) понимается следующим образом:

$$\int_0^T M \{(\xi(t, \omega))^2\} dt = \sum_{j=0}^{N-1} M \{(\xi_j)^2\} (\tau_{j+1} - \tau_j).$$

Обозначим через $\mathcal{K}_2([0, T])$ множество всех ступенчатых функций в классе $\mathcal{M}_2([0, T])$. Для произвольной ступенчатой функции ξ из класса $\mathcal{K}_2([0, T])$ определим стохастический интеграл Ито:

$$\sum_{j=0}^{N-1} \xi_j(\omega) (f(\tau_{j+1}, \omega) - f(\tau_j, \omega)) \stackrel{\text{def}}{=} \int_0^T \xi_\tau df_\tau.$$

Нетрудно показать, что стохастический интеграл Ито $\int_0^T \xi_\tau df_\tau$ является $\mathcal{F}_T$ -измеримым, не зависит от приращений $f_{s+\Delta} - f_\Delta$, $\Delta \geq T, s > 0$, и для любых $\xi, \eta \in \mathcal{K}_2([0, T])$ и любых $\alpha, \beta \in \mathbb{R}^1$ удовлетворяет следующим соотношениям:

$$A1. \mathbb{M} \left\{ \int_0^T \xi_\tau df_\tau \right\} = 0.$$

$$A2. \mathbb{M} \left\{ \left(\int_0^T \xi_\tau df_\tau \right)^2 \right\} = \int_0^T \mathbb{M} \{ \xi_\tau^2 \} d\tau.$$

$$A3. \int_0^T (\alpha \xi_\tau + \beta \eta_\tau) df_\tau = \alpha \int_0^T \xi_\tau df_\tau + \beta \int_0^T \eta_\tau df_\tau \text{ с в.1.}$$

$$A4. \mathbb{M} \left\{ \int_0^T \xi_\tau df_\tau \int_0^T \eta_\tau df_\tau \right\} = \int_0^T \mathbb{M} \{ \xi_\tau \eta_\tau \} d\tau.$$

Рассмотрим разбиение промежутка $[0, T]$, для которого

$$0 = \tau_0^{(N)} < \tau_1^{(N)} < \dots < \tau_N^{(N)} = T, \quad \Delta_N = \max_{0 \leq j \leq N-1} |\tau_{j+1}^{(N)} - \tau_j^{(N)}| \rightarrow 0$$

при $N \rightarrow \infty$. Определим последовательность ступенчатых функций $\xi^{(N)}(t, \omega)$:

$$\xi^{(N)}(t, \omega) = \xi(\tau_j^{(N)}, \omega) \text{ с в.1 при } t \in [\tau_j^{(N)}, \tau_{j+1}^{(N)}),$$

где $j = 0, 1, \dots, N-1$; $N = 1, 2, \dots$

Можно показать (см., например, [86. С. 82–83]), что для фиксированной функции $\xi \in \mathcal{M}_2([0, T])$ введенная ранее последовательность ступенчатых функций $\xi^{(N)}(t, \omega) \in \mathcal{K}_2([0, T])$ сходится по норме $\|\cdot\|_{2,T}$ к функции $\xi(t, \omega)$ при $N \rightarrow \infty$, т. е.

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \sqrt{\int_0^T \mathbb{M} \left\{ |\xi^{(N)}(t, \omega) - \xi(t, \omega)|^2 \right\} dt} = 0. \quad (1.20)$$

Пусть $J_N \stackrel{\text{def}}{=} \int_0^T \xi^{(N)}(t, \omega) df_t$. Тогда согласно свойствам A1 – A4 имеем

$$\mathbb{M} \{ |J_N - J_{N+M}|^2 \} = \int_0^T \mathbb{M} \left\{ |\xi^{(N)}(t, \omega) - \xi^{(N+M)}(t, \omega)|^2 \right\} dt \leq$$

$$\begin{aligned}
&\leq 2 \int_0^T \mathbb{M} \left\{ \left| \xi^{(N)}(t, \omega) - \xi(t, \omega) \right|^2 \right\} dt + \\
&+ 2 \int_0^T \mathbb{M} \left\{ \left| \xi(t, \omega) - \xi^{(N+M)}(t, \omega) \right|^2 \right\} dt.
\end{aligned} \tag{1.21}$$

Из (1.20) и (1.21) получаем, что последовательность J_N является фундаментальной в среднеквадратическом смысле, т. е. существует такая случайная величина J , что $\lim_{N \rightarrow \infty} \mathbb{M} \{ |J_N - J|^2 \} = 0$. Очевидно, что J является $\mathcal{F}_T$ -измеримой как предел последовательности $\mathcal{F}_T$ -измеримых случайных величин. Кроме того, J является единственной с вероятностью 1 случайной величиной для любой последовательности ступенчатых функций из $\mathcal{K}_2([0, T])$, сходящейся к функции $\xi(t, \omega)$ по норме в $\mathcal{M}_2([0, T])$.

Действительно, пусть существует такая последовательность $\tilde{\xi}^{(N)} \in \mathcal{K}_2([0, T])$, что $\|\tilde{\xi}^{(N)} - \xi\|_{2,T} \rightarrow 0$ при $N \rightarrow \infty$, но при этом $\tilde{J}_N \stackrel{\text{def}}{=} \int_0^T \tilde{\xi}^{(N)}(t, \omega) df_t$ сходится в среднеквадратическом смысле к некоторой случайной величине $\tilde{J}$, отличной от J . Тогда

$$\mathbb{M} \{ |J - \tilde{J}|^2 \} \leq 3\mathbb{M} \{ |J - J_N|^2 \} + 3\mathbb{M} \{ |J_N - \tilde{J}_N|^2 \} + 3\mathbb{M} \{ |\tilde{J}_N - \tilde{J}|^2 \}. \tag{1.22}$$

Очевидно, что первое и третье слагаемые в правой части (1.22) стремятся к нулю при $N \rightarrow \infty$. Аналогично (1.21) показывается, что $\mathbb{M} \{ |J_N - \tilde{J}_N|^2 \} \rightarrow 0$ при $N \rightarrow \infty$. Поэтому $\mathbb{M} \{ |J - \tilde{J}|^2 \} = 0$, следовательно, $J = \tilde{J}$ с вероятностью 1.

Определение 1.8. *Стохастическим интегралом Ито от функции $\xi \in \mathcal{M}_2([0, T])$ назовем среднеквадратический предел*

$$\text{l.i.m.}_{N \rightarrow \infty} \sum_{j=0}^{N-1} \xi^{(N)}(\tau_j^{(N)}, \omega) \left(f(\tau_{j+1}^{(N)}, \omega) - f(\tau_j^{(N)}, \omega) \right) \stackrel{\text{def}}{=} \int_0^T \xi_\tau df_\tau, \tag{1.23}$$

где $\xi^{(N)}(t, \omega)$ — произвольная ступенчатая функция из $\mathcal{K}_2([0, T])$, сходящаяся по норме $\|\cdot\|_{2,T}$ к функции $\xi(t, \omega)$.

Таким образом, справедлива следующая теорема.

Теорема 1.5. *Пусть $\xi \in \mathcal{M}_2([0, T])$. Тогда стохастический интеграл Ито, определенный в соответствии с определением 1.8, существует.*

Можно показать (см., например, [86]), что стохастический интеграл Ито для всех $\xi, \eta \in \mathcal{M}_2([0, T])$ и всех $\alpha, \beta \in \mathfrak{R}^1$ удовлетворяет свойствам A1 – A4.

Мы рассмотрели стохастический интеграл Ито на фиксированном промежутке $[0, T]$. Пусть теперь фиксированный промежуток $[t_0, t] \subseteq [0, T]$. Определим стохастический интеграл Ито $\int_{t_0}^t \xi_\tau df_\tau$ для $\xi \in \mathcal{M}_2([t_0, t])$ в соответствии с определением 1.8 путем замены 0 на t_0 и T на t или следующим образом:

$$\int_0^T \xi_\tau \mathbf{1}_{[t_0, t_1]}(\tau) df_\tau \stackrel{\text{def}}{=} \int_{t_0}^{t_1} \xi_\tau df_\tau,$$

где $\mathbf{1}_{[t_0, t_1]}(\tau) = 1$ при $\tau \in [t_0, t_1]$, в противном случае $\mathbf{1}_{[t_0, t_1]}(\tau) = 0$. Тогда с учетом равенства $\xi_\tau \mathbf{1}_{[t_0, t]}(\tau) = \xi_\tau \mathbf{1}_{[t_0, t_1]}(\tau) + \xi_\tau \mathbf{1}_{[t_1, t]}(\tau)$, $\tau \neq t_1$, и свойства A3 получаем

$$\int_{t_0}^{t_1} \xi_s df_s + \int_{t_1}^t \xi_s df_s = \int_{t_0}^t \xi_s df_s \text{ с в.1,}$$

где $0 \leq t_0 \leq t_1 \leq t \leq T$.

Пусть промежуток $[t_0, t] \subseteq [0, T]$ и t — переменный момент времени. Определим случайный процесс η_t , $t_0 \leq t \leq T$, как

$$\eta_t = \int_{t_0}^t \xi_\tau df_\tau \text{ с в.1,}$$

где $\xi \in \mathcal{M}_2([0, T])$. Пусть η_t , $t \in [0, T]$, — сепарабельный случайный процесс [3]. Можно показать, что процесс η_t $\mathcal{F}_t$ -измерим, не зависит от приращений $f_{s+\tau} - f_\tau$, $\tau \geq t$, $s > 0$, и удовлетворяет следующим соотношениям:

$$B1. \mathbb{M} \{ \eta_t - \eta_s | \mathcal{F}_s \} = 0 \text{ с в.1.}$$

$$B2. \mathbb{M} \{ |\eta_t - \eta_s|^2 \} = \int_s^t \mathbb{M} \{ \xi_\tau^2 \} d\tau.$$

$$B3. \mathbb{M} \{ (\eta_t - \eta_s)(\eta_\theta - \eta_\tau) \} = 0,$$

где $0 \leq s \leq t \leq \tau \leq \theta \leq T$.

Таким образом, η_t — среднеквадратически непрерывный мартингал, для которого неравенство Дуба при $p = 2$ принимает вид

$$\mathbb{M} \left\{ \sup_{t_0 \leq s \leq t} |\eta_s|^2 \right\} \leq 4 \int_{t_0}^t \mathbb{M} \{ \xi_\tau^2 \} d\tau.$$

Определим стохастический интеграл от функции $\xi \in \mathcal{M}_2([0, T])$.

Определение 1.9. *Стохастическим интегралом от функции $\xi \in \mathcal{M}_2([0, T])$ назовем среднеквадратический предел*

$$\text{l.i.m.}_{N \rightarrow \infty} \sum_{j=0}^{N-1} \xi^{(N)}(\tau_j^{(N)}, \omega) (\tau_{j+1}^{(N)} - \tau_j^{(N)}) \stackrel{\text{def}}{=} \int_0^T \xi_\tau d\tau,$$

где $\xi^{(N)}(t, \omega)$ — произвольная ступенчатая функция из класса $\mathcal{K}_2([0, T])$, сходящаяся по норме $\|\cdot\|_{2,T}$ к $\xi \in \mathcal{M}_2([0, T])$.

Повторяя с незначительными изменениями рассуждения, доказывающие существование стохастического интеграла Ито, с учетом неравенства

$$\int_a^b f(x) dx \leq \sqrt{b-a} \sqrt{\int_a^b f^2(x) dx}$$

можно показать, что интеграл $\int_0^T \xi_\tau d\tau$, полученный в соответствии с определением 1.9, существует.

Таким образом, в условиях теоремы 1.5 существуют интегралы $\int_0^T \xi_\tau df_\tau$, $\int_0^T \xi_\tau d\tau$, полученные в соответствии с определениями 1.8 и 1.9.

Определим стохастический интеграл $\int_{t_0}^t \xi_\tau d\tau$ для $\xi \in \mathcal{M}_2([t_0, t])$, где $0 \leq t_0 < t_1 \leq T$, а t_0, t_1 фиксированы, в соответствии с определением 1.9 и аналогично тому, как это было сделано для стохастического интеграла Ито.

Отметим некоторые свойства стохастического интеграла $\int_{t_0}^t \xi_\tau d\tau$:

$$C1. \mathbb{M} \left\{ \int_{t_0}^t \xi_\tau d\tau \right\} = \int_{t_0}^t \mathbb{M} \{ \xi_\tau \} d\tau.$$

$$C2. \mathbb{M} \left\{ \left(\int_{t_0}^t \xi_\tau d\tau \right)^2 \right\} \leq \left(\int_{t_0}^t \sqrt{\mathbb{M} \{ \xi_\tau^2 \}} d\tau \right)^2 \leq (t - t_0) \int_{t_0}^t \mathbb{M} \{ \xi_\tau^2 \} d\tau.$$

$$C3. \int_{t_0}^{t_1} \xi_s ds + \int_{t_1}^t \xi_s ds = \int_{t_0}^t \xi_s ds \text{ с в.1 } \forall t_1 : 0 \leq t_0 < t_1 < t \leq T,$$

$$C4. \int_{t_0}^t (\alpha \xi_\tau + \beta \eta_\tau) d\tau = \alpha \int_{t_0}^t \xi_\tau d\tau + \beta \int_{t_0}^t \eta_\tau d\tau \text{ с в.1 } \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}^1.$$

Предполагается, что случайные процессы ξ_τ , η_τ , входящие в свойства C1 – C4, удовлетворяют условиям теоремы 1.5 на промежутке $[t_0, t]$.

В литературе (см., например, [3]) стохастический интеграл Ито чаще определяется для более широкого класса интегрируемых случайных процессов, чем $\mathcal{M}_2([0, T])$.

Так, если определить класс функций $\mathcal{P}_2([0, T])$, получающийся из класса $\mathcal{M}_2([0, T])$ путем замены условий (iii), (iv) на

$$\int_0^T (\xi(t, \omega))^2 dt < \infty \text{ с в.1,}$$

то можно показать [3], что стохастический интеграл Ито существует как предел по вероятности интегральных сумм:

$$\sum_{j=0}^{N-1} \xi^{(N)}(\tau_j^{(N)}, \omega) \left(f(\tau_{j+1}^{(N)}, \omega) - f(\tau_j^{(N)}, \omega) \right),$$

где $\xi^{(N)}(t, \omega)$ — произвольная ступенчатая функция из класса $\mathcal{P}_2([0, T])$, сходящаяся к $\xi \in \mathcal{P}_2([0, T])$ в следующем смысле:

$$\int_0^T |\xi^{(N)}(t, \omega) - \xi(t, \omega)|^2 dt \rightarrow 0$$

по вероятности при $N \rightarrow \infty$.

Известно также, что стохастический интеграл $\int_0^T \xi_\tau d\tau$, $\sqrt{|\xi|} \in \mathcal{P}_2([0, T])$, существует как предел по вероятности интегральных сумм:

$$\sum_{j=0}^{N-1} \xi^{(N)}(\tau_j^{(N)}, \omega) \left(\tau_{j+1}^{(N)} - \tau_j^{(N)} \right),$$

где $\xi^{(N)}(t, \omega)$ — произвольная ступенчатая функция такая, что $\sqrt{|\xi^{(N)}|} \in \mathcal{P}_2([0, T])$, и сходящаяся к $\xi(t, \omega)$ в следующем смысле:

$$\int_0^T |\xi^{(N)}(t, \omega) - \xi(t, \omega)| dt \rightarrow 0$$

по вероятности при $N \rightarrow \infty$.

1.3.2 Процессы Ито

Винеровские случайные процессы порождают широкий класс случайных процессов, называемых процессами Ито. Они имеют важное значение для теории случайных процессов с непрерывным временем и оказываются адекватными математическими моделями во

многих прикладных задачах. В частности, решения стохастических дифференциальных уравнений Ито (см. разд. 1.3.4), а также достаточно гладкие функциональные преобразования решений этих уравнений являются процессами Ито.

Пусть заданы фиксированное вероятностное пространство $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ и $\mathcal{F}_t$ -измеримый при всех $t \in [0, T]$ векторный винеровский процесс $\mathbf{f}_t \in \mathbb{R}^m$ с независимыми компонентами $\mathbf{f}_t^{(i)}$, $i = 1, \dots, m$.

Рассмотрим некоторые случайные процессы $a_t \in \mathbb{R}^1$ и $\mathbf{b}_t^{(i)} \in \mathbb{R}^1$, $i = 1, \dots, m$, $t \in [0, T]$, для которых существуют стохастические интегралы в правой части равенства

$$\eta_t = \eta_0 + \int_0^t a_\tau d\tau + \sum_{i=1}^m \int_0^t \mathbf{b}_\tau^{(i)} d\mathbf{f}_\tau^{(i)}, \quad (1.24)$$

где $t \in [0, T]$, а η_0 — случайная величина, стохастически не зависящая от приращений $\mathbf{f}_\tau - \mathbf{f}_0$ винеровского процесса $\mathbf{f}_t$ при всех $\tau \in (0, T]$.

Определение 1.10. Процесс η_t , определенный на промежутке $[0, T]$ в виде (1.24), называется процессом Ито, если правая часть (1.24) существует при всех $t \in [0, T]$. При этом процесс a_t называется коэффициентом сноса, а процессы $\mathbf{b}_t^{(i)}$, $i = 1, \dots, m$, — коэффициентами диффузии процесса η_t .

Нетрудно видеть, что из аддитивности стохастических интегралов вытекает следующее представление процесса Ито:

$$\eta_s = \eta_t + \int_t^s a_\tau d\tau + \sum_{i=1}^m \int_t^s \mathbf{b}_\tau^{(i)} d\mathbf{f}_\tau^{(i)} \text{ с в.1,} \quad (1.25)$$

справедливое для всех $s, t \in [0, T]$, $s \geq t$.

Пусть процессы a_t , $\mathbf{b}_t^{(i)}$, $i = 1, \dots, m$, удовлетворяют условиям теоремы 1.5 при всех $t \in [0, T]$. Тогда очевидно процесс Ито, определенный соотношением (1.24), существует в среднеквадратическом смысле при всех $t \in [0, T]$. Кроме того, в этих условиях для любых $t, \tau \in [0, T]$, $\tau \geq t$, найдется такая постоянная $C < \infty$, что выполняется условие Липшица

$$M \{(\eta_\tau - \eta_t)^2\} \leq C|\tau - t|. \quad (1.26)$$

Действительно, используя соотношение (1.25) и неравенство Минковского, имеем

$$M \{(\eta_\tau - \eta_t)^2\} \leq \left(\left(M \left\{ \left(\int_t^\tau a_s ds \right)^2 \right\} \right)^{\frac{1}{2}} + \sum_{i=1}^m \left(M \left\{ \left(\int_t^\tau \mathbf{b}_s^{(i)} d\mathbf{f}_s^{(i)} \right)^2 \right\} \right)^{\frac{1}{2}} \right)^2.$$

В силу свойств В2 и С2 стохастических интегралов получаем

$$\mathbb{M} \{(\eta_\tau - \eta_t)^2\} \leq \left[K_1(\tau - t) + K_2(\tau - t)^{\frac{1}{2}} \right]^2, \quad K_1, K_2 < \infty,$$

откуда следует оценка (1.26).

Перейдем к многомерному случаю. Рассмотрим некоторые случайные процессы $\mathbf{a}_t \in \mathbb{R}^n$ и $B_t \in \mathbb{R}^{n \times m}$, $t \in [0, T]$, для которых существует правая часть следующего равенства:

$$\eta_t = \eta_0 + \int_0^t \mathbf{a}_\tau d\tau + \int_0^t B_\tau d\mathbf{f}_\tau, \quad (1.27)$$

где $t \in [0, T]$, а случайная векторная величина $\eta_0 \in \mathbb{R}^n$ является стохастически независимой от приращений $\mathbf{f}_\tau - \mathbf{f}_0$ винеровского процесса $\mathbf{f}_t$ при всех $\tau \in (0, T]$.

Определение 1.11. Процесс $\eta_t \in \mathbb{R}^n$ вида (1.27), определенный на промежутке $[0, T]$, называется векторным процессом Ито, если правая часть (1.27) существует при всех $t \in [0, T]$. При этом процессы $\mathbf{a}_t^{(i)}$, $i = 1, \dots, n$, называются коэффициентами сноса, а процессы $B_t^{(ij)}$, $i = 1, \dots, n$; $j = 1, \dots, m$, — коэффициентами диффузии процесса η_t .

Обобщением соотношения (1.25) на случай векторного процесса Ито является равенство

$$\eta_s = \eta_t + \int_t^s \mathbf{a}_\tau d\tau + \int_t^s B_\tau d\mathbf{f}_\tau \text{ с в.1,}$$

справедливое для всех $s, t \in [0, T]$, $s \geq t$.

Предположим, что процессы $\mathbf{a}_t$ и B_t покомпонентно удовлетворяют условиям теоремы 1.5 на промежутке $[0, T]$. Тогда очевидно, что векторный процесс Ито, определенный соотношением (1.27), существует в среднеквадратическом смысле при всех $t \in [0, T]$. Кроме того, для любых $t, \tau \in [0, T]$, $\tau \geq t$, найдется такая постоянная $C < \infty$, что выполняется условие Липшица

$$\mathbb{M} \{|\eta_\tau - \eta_t|^2\} \leq C|\tau - t|.$$

Рассмотрим преобразование процесса Ито с помощью замены вероятностной меры.

Пусть задано вероятностное пространство $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$. Введем скалярный процесс Ито вида

$$x_t = x_0 + \int_0^t a_s ds + f_t, \quad (1.28)$$

где f_t — стандартный скалярный винеровский процесс относительно вероятностной меры P ; a_s — скалярный случайный процесс, удовлетворяющий условиям существования интеграла $\int_0^t a_s ds$. Процесс x_t (1.28) иногда называют "винеровским процессом со сносом". В ряде ситуаций бывает удобно рассматривать процесс x_t как винеровский относительно некоей меры P_x , т. е. как процесс на вероятностном пространстве $(\Omega, \mathcal{F}, P_x)$. Построение меры P_x возможно с помощью преобразования Гирсанова [66], которое переводит вероятностную меру P в абсолютно непрерывную относительно P меру P_x с производной Радона–Никодима

$$\frac{dP_x}{dP} = \exp \left(- \int_0^T a_s df_s - \frac{1}{2} \int_0^T |a_s|^2 ds \right). \quad (1.29)$$

При этом процесс x_t является винеровским процессом на новом вероятностном пространстве $(\Omega, \mathcal{F}, P_x)$.

1.3.3 Формула Ито

Пусть заданы фиксированное вероятностное пространство $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ и $\mathcal{F}_t$ -измеримый при всех $t \in [0, T]$ винеровский процесс $f_t \in \mathbb{R}^1$. Пусть случайные процессы a_s и b_s таковы, что $\sqrt{|a_s|}, b_s \in \mathcal{P}_2([0, T])$. Рассмотрим процесс Ито $x_t, t \in [0, T]$, вида

$$x_t = x_0 + \int_0^t a_\tau d\tau + \int_0^t b_\tau df_\tau.$$

Используя аддитивность стохастических интегралов, представляем процесс x_t в виде

$$x_t = x_s + \int_s^t a_\tau d\tau + \int_s^t b_\tau df_\tau \text{ с в.1,} \quad (1.30)$$

где $0 \leq s \leq t \leq T$.

Если представление (1.30) справедливо с вероятностью 1, то говорим, что процесс x_t имеет стохастический дифференциал dx_t , и записываем это как

$$dx_s = a_s ds + b_s df_s. \quad (1.31)$$

Отметим, что запись (1.31) является символической записью формулы (1.30).

Лемма 1.1. Пусть функция $R(x, t) : \mathbb{R}^1 \times [0, T] \rightarrow \mathbb{R}^1$ имеет непрерывные частные производные $\frac{\partial R}{\partial t}$, $\frac{\partial R}{\partial x}$, $\frac{\partial^2 R}{\partial x^2}$, а процесс Ито x_t представлен в виде (1.30), причем $\sqrt{|a_s|}, b_s \in \mathcal{P}_2([0, T])$. Тогда для любых s, t таких, что $0 \leq s \leq t \leq T$, с вероятностью 1

$$R(x_t, t) = R(x_s, s) + \int_s^t \left\{ \frac{\partial R}{\partial t}(x_\tau, \tau) + a_\tau \frac{\partial R}{\partial x}(x_\tau, \tau) + \frac{1}{2} b_\tau^2 \frac{\partial^2 R}{\partial x^2}(x_\tau, \tau) \right\} d\tau + \int_s^t b_\tau \frac{\partial R}{\partial x}(x_\tau, \tau) df_\tau.$$

Доказательство леммы 1.1 можно найти, например, в работах [3, 4]. Лемма 1.1 устанавливает формулу Ито в скалярном случае.

Перейдем к рассмотрению многомерного случая.

Пусть задано фиксированное вероятностное пространство $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ и $\mathcal{F}_t$ -измеримый при всех $t \in [0, T]$ векторный винеровский процесс $\mathbf{f}_t \in \mathbb{R}^m$ с независимыми компонентами $\mathbf{f}_t^{(i)}$, $i = 1, \dots, m$. Пусть случайные процессы $\mathbf{a}_s^{(i)}$ и $B_s^{(ij)}$, $i = 1, \dots, n$, $j = 1, \dots, m$, таковы, что $\sqrt{|\mathbf{a}_s^{(i)}|}, B_s^{(ij)} \in \mathcal{P}_2([0, T])$ при всех $i = 1, \dots, n$, $j = 1, \dots, m$. Рассмотрим векторный процесс Ито $\mathbf{x}_t \in \mathbb{R}^n$, $t \in [0, T]$, вида

$$\mathbf{x}_t = \mathbf{x}_s + \int_s^t \mathbf{a}_\tau d\tau + \int_s^t B_\tau d\mathbf{f}_\tau \text{ с в.1,} \quad (1.32)$$

где $0 \leq s \leq t \leq T$.

В покомпонентной форме равенство (1.32) записываем как

$$\mathbf{x}_t^{(i)} = \mathbf{x}_s^{(i)} + \int_s^t \mathbf{a}_\tau^{(i)} d\tau + \sum_{j=1}^m \int_s^t B_\tau^{(ij)} d\mathbf{f}_\tau^{(j)} \text{ с в.1,}$$

где $0 \leq s \leq t \leq T$, $i = 1, \dots, n$.

Лемма 1.2. Пусть функция $R(\mathbf{x}, t) : \mathbb{R}^n \times [0, T] \rightarrow \mathbb{R}^1$ имеет непрерывные частные производные $\frac{\partial R}{\partial t}$, $\frac{\partial R}{\partial \mathbf{x}^{(i)}}$, $\frac{\partial^2 R}{\partial \mathbf{x}^{(i)} \partial \mathbf{x}^{(j)}}$, $i, j = 1, \dots, n$, процесс Ито $\mathbf{x}_t$ представлен выражением (1.32), причем $\sqrt{|\mathbf{a}_s^{(i)}|}, B_s^{(ij)} \in \mathcal{P}_2([0, T])$, $i = 1, \dots, n$, $j = 1, \dots, m$, а процесс η_t имеет вид $\eta_t = R(\mathbf{x}_t, t)$. Тогда для любых s, t таких, что $0 \leq s \leq t \leq T$, с вероятностью 1

$$\eta_t = \eta_s + \int_s^t \left\{ \frac{\partial R}{\partial t}(\mathbf{x}_\tau, \tau) + \sum_{i=1}^n \mathbf{a}_\tau^{(i)} \frac{\partial R}{\partial \mathbf{x}^{(i)}}(\mathbf{x}_\tau, \tau) + \right.$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{1}{2} \sum_{j=1}^m \sum_{i,k=1}^n B_{\tau}^{(ij)} B_{\tau}^{(kj)} \frac{\partial^2 R}{\partial \mathbf{x}^{(i)} \partial \mathbf{x}^{(j)}}(\mathbf{x}_{\tau}, \tau) \Big\} d\tau + \\
& + \sum_{j=1}^m \sum_{i=1}^n \int_s^t B_{\tau}^{(ij)} \frac{\partial R}{\partial \mathbf{x}^{(i)}}(\mathbf{x}_{\tau}, \tau) d\mathbf{f}_{\tau}^{(j)}.
\end{aligned}$$

Доказательство леммы 1.2 также можно найти в [3, 4]. В лемме 1.2 формула Ито представлена в векторной форме.

1.3.4 Стохастические дифференциальные уравнения Ито

Придадим строгий математический смысл понятию стохастического дифференциального уравнения.

Пусть задано фиксированное вероятностное пространство $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$, неубывающая совокупность σ -алгебр $\{\mathcal{F}_t, t \in [0, T]\}$ на нем и $\mathcal{F}_t$ -измеримый при всех $t \in [0, T]$ скалярный винеровский процесс f_t . Рассмотрим стохастическое дифференциальное уравнение

$$dx_t = a(x_t, t)dt + \sigma(x_t, t)df_t, \quad x_0 = x(0, \omega), \quad (1.33)$$

где $x_t \in \mathbb{R}^1$ — случайный процесс, являющийся решением уравнения (1.33); $a(x, t), \sigma(x, t) : \mathbb{R}^1 \times [0, T] \rightarrow \mathbb{R}^1$ — измеримые при всех $(x, t) \in \mathbb{R}^1 \times [0, T]$ функции. Уравнение (1.33) может быть переписано в интегральном виде:

$$x_t = x_0 + \int_0^t a(x_{\tau}, \tau)d\tau + \int_0^t \sigma(x_{\tau}, \tau)df_{\tau}, \quad x_0 = x(0, \omega). \quad (1.34)$$

Второй интеграл в правой части (1.34) при соответствующих дополнительных предположениях можно понимать, например, как стохастический интеграл Ито, Стратоновича или как θ -интеграл (см. разд. 1.3.5). Пусть интеграл $\int_0^t \sigma(x_{\tau}, \tau)df_{\tau}$ является стохастическим интегралом Ито. Тогда уравнение (1.33) и соответствующее ему уравнение (1.34) называются стохастическими дифференциальными уравнениями Ито. Если же интеграл $\int_0^t \sigma(x_{\tau}, \tau)df_{\tau}$ является стохастическим интегралом Стратоновича (далее будет дано его определение и введено для него специальное обозначение $\int_0^t \sigma(x_{\tau}, \tau)d\mathbf{f}_{\tau}^{*}$), то уравнение (1.33) и соответствующее ему уравнение (1.34) называются стохастическими дифференциальными уравнениями Стратоновича.

Рассмотрим стохастическое дифференциальное уравнение Ито (1.33). Далее будем предполагать, что x_0 и $f_t - f_0$ при $t > 0$ являются стохастически независимыми.

Будем говорить, что случайный процесс $x_t, t \in [0, T]$, является решением уравнения Ито (1.33), если x_t $\mathcal{F}_t$ -измерим при всех $t \in [0, T]$, интегралы в правой части (1.34) существуют и равенство (1.34) справедливо при всех $t \in [0, T]$ с вероятностью 1.

К. Ито показал (см. также [3]), что если выполнены условия:

1. Функции $a(x, t), \sigma(x, t) : \mathbb{R}^1 \times [0, T] \rightarrow \mathbb{R}^1$ измеримы при всех $(x, t) \in \mathbb{R}^1 \times [0, T]$.
2. Для всех $x, y \in \mathbb{R}^1$ существует такая постоянная $K < \infty$, что

$$|a(x, t) - a(y, t)| + |\sigma(x, t) - \sigma(y, t)| \leq K|x - y|,$$

$$|a(x, t)|^2 + |\sigma(x, t)|^2 \leq K^2(1 + |x|^2).$$

3. Случайная величина x_0 $\mathcal{F}_0$ -измерима и $M\{|x_0|^2\} < \infty$, то существует непрерывное с вероятностью 1 решение уравнения (1.34), и если x_{1t}, x_{2t} — непрерывные решения при фиксированном x_0 , то

$$P\{x_{1t} = x_{2t}\} = 1, \quad P\left\{\sup_{0 \leq t \leq T} |x_{1t} - x_{2t}| > 0\right\} = 0.$$

Перейдем к многомерному случаю. Рассмотрим стохастическое дифференциальное уравнение Ито вида

$$d\mathbf{x}_t = \mathbf{a}(\mathbf{x}_t, t)dt + \Sigma(\mathbf{x}_t, t)d\mathbf{f}_t, \quad \mathbf{x}_0 = \mathbf{x}(0, \omega), \quad (1.35)$$

где $\mathbf{x}_t \in \mathbb{R}^n$ — случайный процесс, являющийся решением уравнения (1.35); $\mathbf{f}_t \in \mathbb{R}^m$ — $\mathcal{F}_t$ -измеримый при всех $t \in [0, T]$ стандартный винеровский процесс с независимыми компонентами $\mathbf{f}_t^{(i)}$, $i = 1, \dots, m$; $\mathbf{a} : \mathbb{R}^n \times [0, T] \rightarrow \mathbb{R}^n$, $\Sigma : \mathbb{R}^n \times [0, T] \rightarrow \mathbb{R}^{n \times m}$; $\mathbf{x}_0$ — начальное условие.

Уравнение (1.35) эквивалентно уравнению

$$\mathbf{x}_t = \mathbf{x}_0 + \int_0^t \mathbf{a}(\mathbf{x}_\tau, \tau)d\tau + \int_0^t \Sigma(\mathbf{x}_\tau, \tau)d\mathbf{f}_\tau, \quad \mathbf{x}_0 = \mathbf{x}(0, \omega). \quad (1.36)$$

Будем предполагать далее, что $\mathbf{x}_0$ и $\mathbf{f}_t - \mathbf{f}_0$ при $t > 0$ являются стохастически независимыми.

Аналогично одномерному случаю будем полагать, что случайный процесс $\mathbf{x}_t \in \mathbb{R}^n$ является решением уравнения Ито (1.36), если каждая компонента $\mathbf{x}_t$ $\mathcal{F}_t$ -измерима при всех $t \in [0, T]$, интегралы в правой

части (1.36) существуют и равенство (1.36) справедливо при всех $t \in [0, T]$ с вероятностью 1.

К. Ито получил следующий результат (см. также [3]).

Теорема 1.6. Пусть выполнены следующие условия:

AI. Функции $\mathbf{a}(\mathbf{x}, t), \Sigma_k(\mathbf{x}, t) : \mathbb{R}^n \times [0, T] \rightarrow \mathbb{R}^n$, $k = 1, \dots, m$, измеримы при всех $(\mathbf{x}, t) \in \mathbb{R}^n \times [0, T]$ функции; $\Sigma_k(\mathbf{x}_\tau, \tau)$ — k -й столбец матрицы $\Sigma(\mathbf{x}_\tau, \tau)$.

AII. Для всех $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$ существует такая постоянная $K < \infty$, что

$$|\mathbf{a}(\mathbf{x}, t) - \mathbf{a}(\mathbf{y}, t)| + \sum_{k=1}^m |\Sigma_k(\mathbf{x}, t) - \Sigma_k(\mathbf{y}, t)| \leq K|\mathbf{x} - \mathbf{y}|,$$

$$|\mathbf{a}(\mathbf{x}, t)|^2 + \sum_{k=1}^m |\Sigma_k(\mathbf{x}, t)|^2 \leq K^2 (1 + |\mathbf{x}|^2).$$

AIII. Случайная величина $\mathbf{x}_0$ $\mathcal{F}_0$ -измерима и $M\{|\mathbf{x}_0|^2\} < \infty$.

Тогда существует единственное в смысле стохастической эквивалентности и непрерывное с вероятностью 1 решение уравнения (1.36).

Условия теоремы 1.6, в частности, условие Липшица, являются достаточно жесткими и не выполняются в ряде практически важных случаев. Однако существует целый ряд результатов, формулировки которых (см., например, [65]) ослабляют условия существования и единственности решения стохастического дифференциального уравнения Ито по сравнению с условиями теоремы 1.6.

Рассмотрим стохастическое дифференциальное уравнение Ито в интегральной форме:

$$\mathbf{x}_t = \mathbf{x}_0 + \int_0^t \mathbf{a}(\mathbf{x}_\tau, \tau) d\tau + \int_0^t \Sigma(\mathbf{x}_\tau, \tau) d\mathbf{f}_\tau, \quad \mathbf{x}_0 = \mathbf{x}(0, \omega), \quad (1.37)$$

где $\mathbf{a} : \mathbb{R}^n \times [0, T] \rightarrow \mathbb{R}^n$; $\Sigma : \mathbb{R}^n \times [0, T] \rightarrow \mathbb{R}^{n \times n}$; $\mathbf{f}_t$ — n -мерный $\mathcal{F}_t$ -измеримый при всех $t \in [0, T]$ стандартный винеровский процесс с независимыми компонентами $\mathbf{f}_t^{(i)}$, $i = 1, \dots, n$.

Пусть для функций $\mathbf{a}(\mathbf{x}, t)$, $\Sigma(\mathbf{x}, t)$ выполнены условия теоремы 1.6. Тогда решение $\mathbf{x}_t, t \in [0, T]$, стохастического дифференциального уравнения Ито (1.37) обладает [65] марковским свойством относительно потока σ -алгебр $\{\mathcal{F}_t, t \in [0, T]\}$, т. е. $\mathbf{x}_t, t \in [0, T]$, — марковская случайная функция с некоторым начальным распределением

$$\mu(A) = P\{\mathbf{x}_0 \in A\}, \quad A \in \mathcal{B},$$

$\mathcal{B}$ — σ -алгебра борелевских подмножеств $\mathbb{R}^n$.

Вероятность перехода марковской случайной функции $\mathbf{x}_t, t \in [0, T]$, имеет вид

$$P(s, \mathbf{y}|t, A) = P\{\mathbf{x}_t^{s, \mathbf{y}} \in A\}, \quad 0 \leq s \leq t \leq T,$$

$\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$, $A \in \mathcal{B}$, где $\mathbf{x}_t^{s, \mathbf{y}}, t \in [0, T]$, — решение стохастического дифференциального уравнения Ито

$$\mathbf{x}_t^{s, \mathbf{y}} = \mathbf{y} + \int_s^t \mathbf{a}(\mathbf{x}_\tau^{s, \mathbf{y}}, \tau) d\tau + \int_s^t \Sigma(\mathbf{x}_\tau^{s, \mathbf{y}}, \tau) d\mathbf{f}_\tau,$$

функции $\mathbf{a}(\mathbf{x}, t)$, $\Sigma(\mathbf{x}, t)$ такие же, как в (1.37); $\mathbf{y}$ — неслучайный вектор из $\mathbb{R}^n$; $t \in [s, T]$.

Теорема 1.7 [65, 132]. Пусть неслучайные функции $\mathbf{a}(\mathbf{x}, t) : \mathbb{R}^n \times [0, T] \rightarrow \mathbb{R}^n$, $\Sigma(\mathbf{x}, t) : \mathbb{R}^n \times [0, T] \rightarrow \mathbb{R}^{n \times n}$ удовлетворяют условиям теоремы 1.6 и непрерывны по совокупности переменных. Тогда процесс $\mathbf{x}_t, t \in [0, T]$, являющийся решением стохастического дифференциального уравнения Ито (1.37), представляет собой диффузионный процесс с вектором сноса $\mathbf{a}(\mathbf{x}, t)$ и матрицей диффузии $B(\mathbf{x}, t) = \Sigma(\mathbf{x}, t)\Sigma^T(\mathbf{x}, t)$.

В условиях теоремы 1.7 вероятность перехода решения стохастического дифференциального уравнения Ито (1.37) удовлетворяет уравнению Фоккера–Планка.

В теории стохастических дифференциальных уравнений Ито разделяют сильное и слабое решения. Приведем определения данных решений стохастического дифференциального уравнения Ито, а также ряд утверждений, касающихся этих двух понятий.

Пусть $\xi_t, t \in [0, T]$, — некоторый случайный процесс. Через $\mathcal{F}_t^\xi$ будем обозначать наименьшую σ -алгебру, содержащую все события вида $\{\xi_s \in A\}, s \in [0, t], A \in \mathcal{B}$. Кроме того, предположим, что начальное условие $\mathbf{x}_0 \in \mathbb{R}^n$ уравнения (1.37) неслучайно.

Пусть заданы вероятностное пространство $(\Omega, \mathcal{F}, P)$, неубывающая совокупность σ -алгебр $\{\mathcal{F}_t, t \in [0, T]\}$ на нем и n -мерный $\mathcal{F}_t$ -измеримый при всех $t \in [0, T]$ винеровский случайный процесс $\{\mathbf{f}_t, \mathcal{F}_t^{\mathbf{f}}\}, t \in [0, T]$, с независимыми компонентами. Рассмотрим также измеримые неслучайные функции $\mathbf{a}(\mathbf{x}, t) : \mathbb{R}^n \times [0, T] \rightarrow \mathbb{R}^n$, $\Sigma(\mathbf{x}, t) : \mathbb{R}^n \times [0, T] \rightarrow \mathbb{R}^{n \times n}$.

Пара процессов $\{(\mathbf{x}_t, \mathbf{f}_t), \mathcal{F}_t^{\mathbf{f}}\}$ называется *сильным решением* уравнения (1.37), если процесс $\mathbf{x}_t$ при каждом t $\mathcal{F}_t^{\mathbf{f}}$ -измерим и равенство (1.37) с вероятностью 1 выполняется одновременно для всех $t \in [0, T]$.

Пусть теперь заданы только функции $\mathbf{a}(\mathbf{x}, t)$, $\Sigma(\mathbf{x}, t)$ такие же, как в определении сильного решения.

Пара процессов $\{(\mathbf{x}_t, \mathbf{f}_t), \mathcal{F}_t^{\mathbf{f}}\}$ называется *слабым решением* уравнения (1.37), если найдутся такое вероятностное пространство $(\Omega, \mathcal{F}, P)$

с потоком σ -алгебр $\{\mathcal{F}_t, t \in [0, T]\}$ и такая пара процессов $(\mathbf{x}_t, \mathbf{f}_t)$, согласованных с ним, что процесс $\{\mathbf{f}_t, \mathcal{F}_t\}$ винеровский, а процессы $\mathbf{x}_t$ и $\mathbf{f}_t$ с вероятностью 1 связаны равенством (1.37) при всех $t \in [0, T]$.

Из определений сильного и слабого решений следует, что любое сильное решение уравнения (1.35) является также слабым решением.

Вводим понятия сильной и слабой единственности решения уравнения (1.37).

Принято считать, что решение уравнения (1.37) *сильно единственно*, если для любых двух решений $(\mathbf{x}_t, \mathbf{f}_t)$ и $(\tilde{\mathbf{x}}_t, \tilde{\mathbf{f}}_t)$ уравнения (1.37), заданных на одном и том же вероятностном пространстве, из равенств $\mathbf{f}_t = \tilde{\mathbf{f}}_t$, $\mathbf{x}_0 = \tilde{\mathbf{x}}_0$ с вероятностью 1 следует, что

$$\mathbb{P} \left\{ \sup_{t_0 \leq t \leq T} |\mathbf{x}_t - \tilde{\mathbf{x}}_t| > 0 \right\} = 0.$$

Если же два любых решения $(\mathbf{x}_t, \mathbf{f}_t)$, $(\tilde{\mathbf{x}}_t, \tilde{\mathbf{f}}_t)$ уравнения (1.37) имеют одинаковые конечномерные распределения, то выполняется *слабая единственность* решения уравнения (1.37).

В условиях теоремы 1.6 существует сильное решение уравнения (1.37), которое является сильно единственным.

Следующее утверждение показывает, при каких условиях существует слабое решение уравнения (1.37), которое является слабо единственным.

Теорема 1.8 [65]. Пусть неслучайные функции $\mathbf{a}(\mathbf{x}, t) : \mathbb{R}^n \times [0, T] \rightarrow \mathbb{R}^n$, $B(\mathbf{x}, t) = \Sigma(\mathbf{x}, t)\Sigma^\top(\mathbf{x}, t)$, где $\Sigma(\mathbf{x}, t) : \mathbb{R}^n \times [0, T] \rightarrow \mathbb{R}^{n \times n}$, измеримы и удовлетворяют условиям:

1. $B(\mathbf{x}, t)$ является непрерывной по совокупности переменных матричной функцией, причем существует такая постоянная $C > 0$, что

$$\sum_{i,j=1}^n B^{(ij)}(\mathbf{x}, t) \mathbf{z}^{(i)} \mathbf{z}^{(j)} \leq C |\mathbf{z}|^2$$

при всех $t \in [0, T]$, $\mathbf{x}, \mathbf{z} \in \mathbb{R}^n$.

2. При каждом $t \in [0, T]$ и $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ $B(\mathbf{x}, t)$ — положительно определенная матрица, т. е. $\sum_{i,j=1}^n B^{(ij)}(\mathbf{x}, t) \mathbf{z}^{(i)} \mathbf{z}^{(j)} > 0$ при всех $\mathbf{z} \in \mathbb{R}^n$, $\mathbf{z} \neq 0$.

3. Функция $\mathbf{a}(\mathbf{x}, t)$ ограничена. Тогда существует слабое решение уравнения (1.37), и оно слабо единственно.

Известны также следующие утверждения [65]:

1. Если уравнение (1.37) обладает сильной единственностью, то любое его решение сильное.

2. Если уравнение (1.37) обладает слабой единственностью, то любые два его сильных решения равны с вероятностью 1 при всех $t \in [0, T]$.

3. Если функции $\mathbf{a}(\mathbf{x}, t)$, $B(\mathbf{x}, t) = \Sigma(\mathbf{x}, t)\Sigma^\top(\mathbf{x}, t)$ удовлетворяют условиям предыдущей теоремы и на некотором вероятностном пространстве уравнение (1.37) имеет сильное решение, то всякое его слабое решение является сильным.

Рассмотрим формулу Ито, соответствующую процессу, который задается нелинейным безынерционным преобразованием от решения стохастического дифференциального уравнения Ито.

Пусть $\mathcal{L}$ — множество функций $R(\mathbf{x}, s) : \mathbb{R}^n \times [0, T] \rightarrow \mathbb{R}^1$, которые при всех $t \in [0, T]$, $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ имеют непрерывные частные производные:

$$\frac{\partial R}{\partial t}(\mathbf{x}, t), \quad \frac{\partial R}{\partial \mathbf{x}^{(i)}}(\mathbf{x}, t), \quad \frac{\partial^2 R}{\partial \mathbf{x}^{(i)} \partial \mathbf{x}^{(j)}}(\mathbf{x}, t), \quad i, j = 1, 2, \dots, n,$$

а $\mathcal{G}_0 \subset \mathcal{L}$ — множество функций $R(\mathbf{x}, s) : \mathbb{R}^n \times [0, T] \rightarrow \mathbb{R}^1$, которые при всех $t \in [0, T]$, $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ имеют непрерывные частные производные:

$$\frac{\partial R}{\partial \mathbf{x}^{(i)}}(\mathbf{x}, t), \quad i = 1, 2, \dots, n.$$

Определим на множествах $\mathcal{L}$ и $\mathcal{G}_0$ следующие операторы:

$$\begin{aligned} LR(\mathbf{x}, t) &= \frac{\partial R}{\partial t}(\mathbf{x}, t) + \sum_{i=1}^n \mathbf{a}^{(i)}(\mathbf{x}, t) \frac{\partial R}{\partial \mathbf{x}^{(i)}}(\mathbf{x}, t) + \\ &+ \frac{1}{2} \sum_{j=1}^m \sum_{l,i=1}^n \Sigma^{(lj)}(\mathbf{x}, t) \Sigma^{(ij)}(\mathbf{x}, t) \frac{\partial^2 R}{\partial \mathbf{x}^{(l)} \partial \mathbf{x}^{(i)}}(\mathbf{x}, t), \\ G_0^{(i)} R(\mathbf{x}, t) &= \sum_{j=1}^n \Sigma^{(ji)}(\mathbf{x}, t) \frac{\partial R}{\partial \mathbf{x}^{(j)}}(\mathbf{x}, t), \quad i = 1, \dots, m. \end{aligned}$$

Рассмотрим процесс $\eta_s = R(\mathbf{x}_s, s)$, где $R(\mathbf{x}, s) : \mathbb{R}^n \times [0, T] \rightarrow \mathbb{R}^1$, а $\mathbf{x}_t$ — решение стохастического дифференциального уравнения Ито вида (1.35).

Сформулируем утверждение, касающееся формулы Ито для процесса η_s .

Лемма 1.3. Пусть выполнены условия:

1. $R(\mathbf{x}, t) \in \mathcal{L}$.
2. $LR(\mathbf{x}_t, t)$, $G_0^{(i)} R(\mathbf{x}_t, t) \in \mathcal{M}_2([0, T])$, $i = 1, \dots, m$.
3. Справедливы условия AI – AIII теоремы 1.6.

Тогда для всех $s, t \in [0, T]$ таких, что $s \geq t$, с вероятностью 1 справедливо равенство

$$R(\mathbf{x}_s, s) = R(\mathbf{x}_t, t) + \int_t^s LR(\mathbf{x}_\tau, \tau) d\tau + \sum_{i=1}^m \int_t^s G_0^{(i)} R(\mathbf{x}_\tau, \tau) d\mathbf{f}_\tau^{(i)}.$$

Будем говорить, что процесс Ито $\mathbf{x}_t \in \mathbb{R}^n$, $t \geq 0$, является эргодическим, если он имеет единственный инвариантный вероятностный закон ν такой, что

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \int_0^t g(\mathbf{x}_s) ds = \int_{\mathbb{R}^n} g(\mathbf{y}) d\nu(\mathbf{y}) \text{ с в.1}$$

для любой ν -интегрируемой функции $g: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^1$ и любого неслучайного начального условия $\mathbf{x}_0 = \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$.

Рассмотрим процесс Ито вида

$$\mathbf{x}_t = \mathbf{x}_0 + \int_0^t \mathbf{a}(\mathbf{x}_s) ds + \int_0^t B(\mathbf{x}_s) d\mathbf{f}_s,$$

где $\mathbf{a}: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$; $B: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^{n \times m}$; $\mathbf{f}_t \in \mathbb{R}^m$ — векторный винеровский процесс с независимыми компонентами.

Следующая теорема, доказанная Р. З. Хасьминским [46], содержит достаточные условия эргодичности процесса $\mathbf{x}_t$.

Теорема 1.9. Пусть $\mathbf{a}(\mathbf{x})$ и $B(\mathbf{x})$ — гладкие функции с ограниченными производными любого порядка, причем функция $B(\mathbf{x})$ ограничена и существуют постоянная $C > 0$ и компактное множество $\Lambda \subset \mathbb{R}^n$ такие, что

$$\mathbf{x}^T \mathbf{a}(\mathbf{x}) < -C|\mathbf{x}|^2 \quad \forall \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \setminus \Lambda.$$

Тогда процесс $\mathbf{x}_t$ эргодический.

1.3.5 Стохастический интеграл Стратоновича

Введем класс $Q_{2m}([t, T])$ процессов Ито $\eta_\tau \in \mathbb{R}^1$, $\tau \in [t, T]$, вида

$$\eta_\tau = \eta_t + \int_t^\tau a_s ds + \int_t^\tau b_s d\mathbf{f}_s, \quad (1.38)$$

где $\mathbf{f}_s \in \mathbb{R}^1$ — $\mathcal{F}_s$ -измеримый при всех $s \in [t, T]$ стандартный винеровский процесс, а процессы a_s , $b_s \in \mathbb{R}^1$ таковы, что выполняются следующие условия:

(DI) $a_s^m, b_s^m \in \mathcal{M}_2([t, T])$.

(DII) При всех $s, \tau \in [t, T]$ и некоторых положительных $C, \gamma < \infty$ процесс b_s удовлетворяет условию

$$\mathbb{M}\{|b_s - b_\tau|^4\} \leq C|s - \tau|^\gamma.$$

Через $C_2(\mathbb{R}^1, [t, T])$ обозначим пространство функций $F(x, \tau) : \mathbb{R}^1 \times [t, T] \rightarrow \mathbb{R}^1$, которые являются дважды непрерывно дифференцируемыми по x при всех $x \in \mathbb{R}^1$ и для которых

$$\left| \frac{\partial F}{\partial x}(x, \tau) \right| < \infty, \quad \left| \frac{\partial^2 F}{\partial x^2}(x, \tau) \right| < \infty$$

при всех $x \in \mathbb{R}^1$.

Определение 1.12. *Стохастическим интегралом Стратоновича от процесса $F(\eta_\tau, \tau)$, $\tau \in [t, T]$ ($F(x, \tau) \in C_2(\mathbb{R}^1, [t, T])$), назовем среднеквадратический предел*

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{j=0}^{N-1} F\left(\frac{1}{2}(\eta_{\tau_j^{(N)}} + \eta_{\tau_{j+1}^{(N)}}), \tau_j^{(N)}\right) (f_{\tau_{j+1}^{(N)}} - f_{\tau_j^{(N)}}) \stackrel{\text{def}}{=} \int_t^{*T} F(\eta_\tau, \tau) df_\tau, \quad (1.39)$$

где сохранен смысл обозначений, входящих в (1.23).

Более общая конструкция стохастического интеграла может быть определена следующим образом.

Определение 1.13. *Стохастическим θ -интегралом от процесса $F(\eta_\tau, \tau)$, $\tau \in [t, T]$ ($F(x, \tau) \in C_2(\mathbb{R}^1, [t, T])$), назовем среднеквадратический предел*

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{j=0}^{N-1} F\left(\theta \eta_{\tau_j^{(N)}} + (1 - \theta) \eta_{\tau_{j+1}^{(N)}}, \tau_j^{(N)}\right) (f_{\tau_{j+1}^{(N)}} - f_{\tau_j^{(N)}}) \stackrel{\text{def}}{=} \int_t^{\circ T} F(\eta_\tau, \tau) df_\tau,$$

где сохранен смысл обозначений, входящих в (1.39), а $\theta \in [0, 1]$.

Далее для упрощения записи вместо $\tau_j^{(N)}$ используем τ_j .

Очевидно, что при $\theta = 1$ стохастический θ -интеграл переходит в стохастический интеграл Ито, а при $\theta = 1/2$ — в стохастический интеграл Стратоновича. Далее будут рассмотрены соотношения между стохастическим интегралом Ито и стохастическими θ -интегралом и интегралом Стратоновича, а также приведены достаточные условия существования стохастического θ -интеграла и стохастического интеграла Стратоновича.

Рассмотрим интегральную версию неравенства Гельдера

$$\left| \int_{t_0}^t h(x)g(x)dx \right| \leq \left(\int_{t_0}^t h^p(x)dx \right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_{t_0}^t g^q(x)dx \right)^{\frac{1}{q}}, \quad (1.40)$$

где $1/p + 1/q = 1$, $p, q > 1$, и интегралы, входящие в (1.40), существуют. Используем неравенство (1.40) для доказательства следующих оценок [4] четных моментов стохастических интегралов:

$$\mathbb{M} \left\{ \left| \int_{t_0}^t \xi_\tau df_\tau \right|^{2n} \right\} \leq (t - t_0)^{n-1} (n(2n - 1))^n \int_{t_0}^t \mathbb{M} \{ |\xi_\tau|^{2n} \} d\tau, \quad (1.41)$$

$$\mathbb{M} \left\{ \left| \int_{t_0}^t \xi_\tau d\tau \right|^{2n} \right\} \leq (t - t_0)^{2n-1} \int_{t_0}^t \mathbb{M} \{ |\xi_\tau|^{2n} \} d\tau, \quad (1.42)$$

где случайный процесс ξ_τ таков, что $(\xi_\tau)^n \in \mathcal{M}_2([t_0, t])$, $f_t \in \mathfrak{R}^1$ — стандартный винеровский процесс, $n = 1, 2, \dots$.

Докажем сначала равенство (1.41). Применив формулу Ито к процессу $\left(\int_{t_0}^t \xi_\tau df_\tau \right)^{2n}$, $n = 1, 2, \dots$, получим

$$\begin{aligned} \left(\int_{t_0}^t \xi_\tau df_\tau \right)^{2n} &= 2n \int_{t_0}^t \left(\int_{t_0}^s \xi_u df_u \right)^{2n-1} \xi_s df_s + \\ &+ \frac{1}{2} 2n(2n - 1) \int_{t_0}^t \left(\int_{t_0}^s \xi_u df_u \right)^{2n-2} \xi_s^2 ds \text{ с в.1.} \end{aligned}$$

Тогда

$$\mathbb{M} \left\{ \left(\int_{t_0}^t \xi_\tau df_\tau \right)^{2n} \right\} = n(2n - 1) \int_{t_0}^t \mathbb{M} \left\{ \left(\int_{t_0}^s \xi_u df_u \right)^{2n-2} \xi_s^2 \right\} ds,$$

откуда следует, что $\mathbb{M} \left\{ \left(\int_{t_0}^t \xi_\tau df_\tau \right)^{2n} \right\}$ возрастает с увеличением t . Используя этот факт и неравенство Гельдера (1.40), выводим следующие неравенства:

$$\mathbb{M} \left\{ \left(\int_{t_0}^t \xi_\tau df_\tau \right)^{2n} \right\} \leq n(2n - 1) \left(\int_{t_0}^t \mathbb{M} \left\{ \left(\int_{t_0}^s \xi_u df_u \right)^{2n} \right\} ds \right)^{\frac{2n-2}{2n}} \times$$

$$\begin{aligned}
& \times \left(\int_{t_0}^t \mathbb{M} \{ |\xi_s|^{2n} \} ds \right)^{\frac{2}{2n}} \leq \\
& \leq n(2n-1) \left(\int_{t_0}^t \mathbb{M} \left\{ \left(\int_{t_0}^t \xi_u df_u \right)^{2n} \right\} ds \right)^{1-\frac{1}{n}} \left(\int_{t_0}^t \mathbb{M} \{ |\xi_s|^{2n} \} ds \right)^{\frac{1}{n}}. \quad (1.43)
\end{aligned}$$

После возведения левой и правой частей (1.43) в степень n и сокращения обеих частей полученного неравенства на $\left(\mathbb{M} \left\{ \left| \int_{t_0}^t \xi_\tau df_\tau \right|^{2n} \right\} \right)^{n-1}$ получаем (1.41).

Докажем неравенство (1.42). Применяя неравенство Гельдера (1.40) к левой части (1.42), имеем

$$\begin{aligned}
\mathbb{M} \left\{ \left| \int_{t_0}^t \xi_\tau d\tau \right|^{2n} \right\} & \leq \mathbb{M} \left\{ \int_{t_0}^t \xi_\tau^{2n} d\tau \right\} \left(\int_{t_0}^t d\tau \right)^{2n-1} = \\
& = (t - t_0)^{2n-1} \int_{t_0}^t \mathbb{M} \{ |\xi_\tau|^{2n} \} d\tau.
\end{aligned}$$

Неравенства (1.41), (1.42) доказаны. Приведенное доказательство можно найти, например, в [4].

Используем приведенные оценки моментов стохастических интегралов для доказательства леммы о связи стохастических интегралов Ито и Стратоновича.

Лемма 1.4. Пусть $\eta_\tau \in Q_8([t, T])$, $F(\eta_\tau, \tau) \in \mathcal{M}_2([t, T])$, где $F(x, \tau) \in C_2(\mathbb{R}^1, [t, T])$. Тогда

$$\int_t^{*T} F(\eta_\tau, \tau) df_\tau = \int_t^T F(\eta_\tau, \tau) df_\tau + \frac{1}{2} \int_t^T \frac{\partial F}{\partial x}(\eta_\tau, \tau) b_\tau d\tau \quad \text{с в.1.} \quad (1.44)$$

Доказательство. С помощью формулы Тейлора имеем

$$\begin{aligned}
F\left(\frac{1}{2}(\eta_{\tau_{j+1}} + \eta_{\tau_j}), \tau_j\right) & = F(\eta_{\tau_j}, \tau_j) + \frac{\partial F}{\partial x}(\eta_{\tau_j}, \tau_j) \frac{1}{2}(\eta_{\tau_{j+1}} - \eta_{\tau_j}) + \\
& + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 F}{\partial x^2}(\xi_j, \tau_j) \frac{1}{4}(\eta_{\tau_{j+1}} - \eta_{\tau_j})^2, \quad (1.45)
\end{aligned}$$

где $\xi_j = \eta_{\tau_j} + \frac{\theta_j}{2}(\eta_{\tau_{j+1}} - \eta_{\tau_j})$; $\theta_j \in [0, 1]$ — случайная величина.

Далее согласно (1.38), неравенствам (1.41), (1.42) при $n = 4$, условиям леммы 1.4, неравенству $(a + b)^2 \leq 2a^2 + 2b^2$, $a, b \in \mathbb{R}^1$, а также согласно неравенствам Минковского и Коши–Буняковского получаем

$$\begin{aligned}
& \mathbb{M} \left\{ \left(\sum_{j=0}^{N-1} \frac{\partial^2 F}{\partial x^2}(\xi_j, \tau_j) (\eta_{\tau_{j+1}} - \eta_{\tau_j})^2 (f_{\tau_{j+1}} - f_{\tau_j}) \right)^2 \right\} \leq \\
& \leq \left(\sum_{j=0}^{N-1} \left(\mathbb{M} \left\{ \left(\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}(\xi_j, \tau_j) \right)^2 (\eta_{\tau_{j+1}} - \eta_{\tau_j})^4 (f_{\tau_{j+1}} - f_{\tau_j})^2 \right\} \right)^{\frac{1}{2}} \right)^2 \leq \\
& \leq C \left(\sum_{j=0}^{N-1} \left(\left(\mathbb{M} \left\{ \left| \int_{\tau_j}^{\tau_{j+1}} a_s ds \right|^8 \right\} \right)^{\frac{1}{4}} + \left(\mathbb{M} \left\{ \left| \int_{\tau_j}^{\tau_{j+1}} b_s df_s \right|^8 \right\} \right)^{\frac{1}{4}} \right) 3^{\frac{1}{4}} \sqrt{\Delta \tau_j} \right)^2 \leq \\
& \leq C_1 \left(\sum_{j=0}^{N-1} \left(\left((\Delta \tau_j)^7 \int_{\tau_j}^{\tau_{j+1}} \mathbb{M} \{ |a_s|^8 \} ds \right)^{\frac{1}{4}} + \right. \right. \\
& \left. \left. + \left(28^4 (\Delta \tau_j)^3 \int_{\tau_j}^{\tau_{j+1}} \mathbb{M} \{ |b_s|^8 \} d\tau \right)^{\frac{1}{4}} \right) 3^{\frac{1}{4}} \sqrt{\Delta \tau_j} \right)^2 \rightarrow 0 \text{ при } N \rightarrow \infty, \quad (1.46)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \mathbb{M} \left\{ \left(\sum_{j=0}^{N-1} \frac{\partial F}{\partial x}(\eta_{\tau_j}, \tau_j) ((\eta_{\tau_{j+1}} - \eta_{\tau_j}) (f_{\tau_{j+1}} - f_{\tau_j}) - b_{\tau_j} \Delta \tau_j) \right)^2 \right\} \leq \\
& \leq 2 \mathbb{M} \left\{ \left(\sum_{j=0}^{N-1} \frac{\partial F}{\partial x}(\eta_{\tau_j}, \tau_j) \int_{\tau_j}^{\tau_{j+1}} a_s ds (f_{\tau_{j+1}} - f_{\tau_j}) \right)^2 \right\} + \\
& + 2 \mathbb{M} \left\{ \left(\sum_{j=0}^{N-1} \frac{\partial F}{\partial x}(\eta_{\tau_j}, \tau_j) \left(\int_{\tau_j}^{\tau_{j+1}} b_s df_s (f_{\tau_{j+1}} - f_{\tau_j}) - b_{\tau_j} \Delta \tau_j \right) \right)^2 \right\} \leq \\
& \leq 2 \left(\sum_{j=0}^{N-1} \left(\mathbb{M} \left\{ \left(\frac{\partial F}{\partial x}(\eta_{\tau_j}, \tau_j) \right)^2 \left(\int_{\tau_j}^{\tau_{j+1}} a_s ds \right)^2 (f_{\tau_{j+1}} - f_{\tau_j})^2 \right\} \right)^{\frac{1}{2}} \right)^2 + \\
& + 4 \mathbb{M} \left\{ \left(\sum_{j=0}^{N-1} \frac{\partial F}{\partial x}(\eta_{\tau_j}, \tau_j) b_{\tau_j} ((f_{\tau_{j+1}} - f_{\tau_j})^2 - \Delta \tau_j) \right)^2 \right\} +
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& +4\mathbb{M} \left\{ \left(\sum_{j=0}^{N-1} \frac{\partial F}{\partial x}(\eta_{\tau_j}, \tau_j) \int_{\tau_j}^{\tau_{j+1}} (b_s - b_{\tau_j}) df_s (f_{\tau_{j+1}} - f_{\tau_j}) \right)^2 \right\} \leq \\
& \leq 2(C_2)^2 \left(\sum_{j=0}^{N-1} \left(\mathbb{M} \left\{ \left| \int_{\tau_j}^{\tau_{j+1}} a_s ds \right|^4 \right\} \right)^{\frac{1}{4}} 3^{\frac{1}{4}} \sqrt{\Delta\tau_j} \right)^2 + \\
& +4(C_2)^2 \sum_{j=0}^{N-1} \mathbb{M} \left\{ b_{\tau_j}^2 \left((f_{\tau_{j+1}} - f_{\tau_j})^2 - \Delta\tau_j \right)^2 \right\} + \\
& +8 \sum_{j=0}^{N-1} \sum_{i=0}^{j-1} \mathbb{M} \left\{ \frac{\partial F}{\partial x}(\eta_{\tau_j}, \tau_j) \frac{\partial F}{\partial x}(\eta_{\tau_i}, \tau_i) b_{\tau_j} b_{\tau_i} \times \right. \\
& \times \left. \left((f_{\tau_{j+1}} - f_{\tau_j})^2 - \Delta\tau_j \right) \left((f_{\tau_{i+1}} - f_{\tau_i})^2 - \Delta\tau_i \right) \right\} + \\
& +4(C_2)^2 \left(\sum_{j=0}^{N-1} \left(\mathbb{M} \left\{ \left| \int_{\tau_j}^{\tau_{j+1}} (b_s - b_{\tau_j}) df_s \right|^4 \right\} \right)^{\frac{1}{4}} 3^{\frac{1}{4}} \sqrt{\Delta\tau_j} \right)^2, \tag{1.47}
\end{aligned}$$

где $C, C_1, C_2 < \infty$; $\Delta\tau_j = \tau_{j+1} - \tau_j$.

Поскольку в условиях леммы 1.4

$$\begin{aligned}
& \mathbb{M} \left\{ \left((f_{\tau_{j+1}} - f_{\tau_j})^2 - \Delta\tau_j \right)^2 \right\} = 2 (\Delta\tau_j)^2, \\
& \mathbb{M} \left\{ (f_{\tau_{j+1}} - f_{\tau_j})^2 - \Delta\tau_j \mid \mathcal{F}_{\tau_j} \right\} = 0 \text{ с в.1,} \\
& \mathbb{M} \left\{ \left| \int_{\tau_j}^{\tau_{j+1}} (b_s - b_{\tau_j}) df_s \right|^4 \right\} \leq 36 \Delta\tau_j \int_{\tau_j}^{\tau_{j+1}} \mathbb{M} \left\{ |b_s - b_{\tau_j}|^4 \right\} ds \leq 36C (\Delta\tau_j)^{2+\gamma}, \\
& \mathbb{M} \left\{ \left| \int_{\tau_j}^{\tau_{j+1}} a_s ds \right|^4 \right\} \leq (\Delta\tau_j)^3 \int_{\tau_j}^{\tau_{j+1}} \mathbb{M} \left\{ |a_s|^4 \right\} ds,
\end{aligned}$$

правая часть (1.47) стремится к нулю при $N \rightarrow \infty$. Используя этот факт, а также равенства (1.46), (1.45) и определение 1.12, приходим к утверждению леммы. Лемма доказана. $\square$

С л е д с т в и е 1.1. Пусть выполнены условия леммы 1.4, причем винеровские случайные процессы в (1.38) и (1.44) являются независимыми. Тогда с вероятностью 1

$$\int_t^{*T} F(\eta_\tau, \tau) df_\tau = \int_t^T F(\eta_\tau, \tau) df_\tau.$$

Нетрудно видеть, что из леммы 1.4 при $F(x, \tau) \equiv x$ вытекает следующее утверждение.

Лемма 1.5. Пусть $\eta_\tau \in Q_4([t, T])$. Тогда

$$\int_t^{*T} \eta_\tau d\mathbf{f}_\tau = \int_t^T \eta_\tau d\mathbf{f}_\tau + \frac{1}{2} \int_t^T b_\tau d\tau \quad \text{с в.1.}$$

Утверждение этой леммы можно несколько модифицировать.

Лемма 1.6. Пусть $\eta_\tau^{(i)} \in Q_4([t, T])$, $i = 1, 2$. Тогда

$$\int_t^{*T} \eta_\tau^{(i)} d\mathbf{f}_\tau^{(j)} = \int_t^T \eta_\tau^{(i)} d\mathbf{f}_\tau^{(j)} + \frac{1}{2} \mathbf{1}_{\{i=j\}} \int_t^T b_\tau d\tau \quad \text{с в.1,}$$

где процесс $\eta_\tau^{(i)}$

$$\eta_\tau^{(i)} = \eta_t^{(i)} + \int_t^\tau a_s ds + \int_t^\tau b_s d\mathbf{f}_s^{(i)}.$$

Здесь $\mathbf{f}_\tau^{(j)} \in \mathbb{R}^1$, $j = 1, 2$, — независимые стандартные винеровские процессы; $\mathbf{1}_A$ — индикатор множества A .

З а м е ч а н и е 1.2. Отметим, что утверждения, аналогичные леммам 1.4–1.6, сохраняют силу для стохастических θ -интегралов при условии, что в них интегралы Стратоновича заменяются на θ -интегралы, а $\frac{1}{2}$ — на $\theta \in [0, 1]$.

Следствием леммы 1.6 является следующее утверждение.

Лемма 1.7. Пусть процесс Ито $\eta_\tau \in \mathbb{R}^1$, $\tau \in [t, T]$, имеет вид

$$\eta_\tau = \eta_t + \int_t^\tau a_s ds + \sum_{i=1}^m \int_t^\tau \mathbf{b}_s^{(i)} d\mathbf{f}_s^{(i)},$$

где $\mathbf{f}_s^{(i)}$, $i = 1, \dots, m$, — независимые стандартные винеровские процессы; процессы a_s , $\mathbf{b}_s^{(i)}$ удовлетворяют условиям (DI), (DII). Тогда с вероятностью 1 выполнено равенство

$$\int_t^{*T} \eta_s d\mathbf{f}_s^{(i)} = \int_t^T \eta_s d\mathbf{f}_s^{(i)} + \frac{1}{2} \int_t^T \mathbf{b}_s^{(i)} ds, \quad i = 1, \dots, m.$$

1.3.6 Стохастические дифференциальные уравнения Стратоновича

Рассмотрим стохастическое дифференциальное уравнение Стратоновича вида

$$dx_t = a(x_t, t)dt + \sigma(x_t, t)d^*f_t, \quad x_0 = x(0, \omega), \quad (1.48)$$

где $x_t \in \mathbb{R}^1$ — случайный процесс, являющийся решением уравнения (1.48); $a(x, t), \sigma(x, t) : \mathbb{R}^1 \times [0, T] \rightarrow \mathbb{R}^1$ — измеримые при всех $(x, t) \in \mathbb{R}^1 \times [0, T]$ функции; обозначение d^*f_t указывает на то, что уравнение (1.48) является стохастическим дифференциальным уравнением Стратоновича; случайная величина x_0 стохастически независима с приращениями $f_t - f_0, t > 0$.

Уравнение (1.48) может быть переписано в эквивалентной интегральной форме

$$x_t = x_0 + \int_0^t a(x_\tau, \tau)d\tau + \int_0^{*t} \sigma(x_\tau, \tau)df_\tau, \quad x_0 = x(0, \omega).$$

В многомерном случае стохастическое дифференциальное уравнение Стратоновича имеет вид

$$d\mathbf{x}_t = \mathbf{a}(\mathbf{x}_t, t)dt + \Sigma(\mathbf{x}_t, t)d^*\mathbf{f}_t, \quad \mathbf{x}_0 = \mathbf{x}(0, \omega),$$

или в интегральной форме

$$\mathbf{x}_t = \mathbf{x}_0 + \int_0^t \mathbf{a}(\mathbf{x}_\tau, \tau)d\tau + \int_0^{*t} \Sigma(\mathbf{x}_\tau, \tau)d\mathbf{f}_\tau, \quad \mathbf{x}_0 = \mathbf{x}(0, \omega),$$

где сохранен смысл обозначений, входящих в (1.35) и (1.36).

Установим связь стохастических дифференциальных уравнений Ито и Стратоновича.

Рассмотрим стохастическое дифференциальное уравнение Стратоновича (1.48). Пусть условия леммы 1.3 выполнены при $n = 1$ для функции $\sigma(x, t)$. Тогда по формуле Ито

$$\sigma(x_s, s) = \sigma(x_t, t) + \int_t^s L\sigma(x_\tau, \tau)d\tau + \int_t^s \sigma(x_\tau, \tau) \frac{\partial \sigma}{\partial x}(x_\tau, \tau)df_\tau \quad \text{с в.1,}$$

где $s \geq t$, а оператор L имеет вид

$$L = \frac{\partial}{\partial \tau} + a(x, \tau) \frac{\partial}{\partial x} + \frac{1}{2} \sigma^2(x, \tau) \frac{\partial^2}{\partial x^2}.$$

Таким образом, случайный процесс $\sigma(x_t, t)$ является процессом Ито с коэффициентом сноса $L\sigma(x_\tau, \tau)$ и коэффициентом диффузии

$$\sigma(x_\tau, \tau) \frac{\partial \sigma}{\partial x}(x_\tau, \tau).$$

Допустим, что указанные коэффициенты удовлетворяют условиям леммы 1.5. Тогда с вероятностью 1 справедливо равенство

$$\int_0^{*t} \sigma(x_\tau, \tau) df_\tau = \int_0^t \sigma(x_\tau, \tau) df_\tau + \frac{1}{2} \int_0^t \sigma(x_\tau, \tau) \frac{\partial \sigma}{\partial x}(x_\tau, \tau) d\tau. \quad (1.49)$$

Согласно (1.49) от стохастического дифференциального уравнения Стратоновича можно перейти к соответствующему ему стохастическому дифференциальному уравнению Ито:

$$dx_t = a^*(x_t, t)dt + \sigma(x_t, t)df_t, \quad x_0 = x(0, \omega), \quad (1.50)$$

где

$$a^*(x_t, t) = a(x_t, t) + \frac{1}{2} \sigma(x_t, t) \frac{\partial \sigma}{\partial x}(x_t, t).$$

Таким образом, если функции $a^*(x, t)$ и $\sigma(x, t)$ удовлетворяют условиям существования и единственности в смысле стохастической эквивалентности решения уравнения Ито (1.50), то существует единственное в смысле стохастической эквивалентности решение стохастического дифференциального уравнения Стратоновича (1.48).

Перейдем к многомерному случаю. Рассмотрим стохастическое дифференциальное уравнение Стратоновича вида

$$d\mathbf{x}_t = \mathbf{a}(\mathbf{x}_t, t)dt + \Sigma(\mathbf{x}_t, t)d\mathbf{f}_t, \quad \mathbf{x}_0 = \mathbf{x}(0, \omega), \quad (1.51)$$

или в интегральной форме,

$$\mathbf{x}_t = \mathbf{x}_0 + \int_0^t \mathbf{a}(\mathbf{x}_\tau, \tau) d\tau + \int_0^{*t} \Sigma(\mathbf{x}_\tau, \tau) d\mathbf{f}_\tau, \quad \mathbf{x}_0 = \mathbf{x}(0, \omega).$$

Обобщая (1.49) на многомерный случай, с вероятностью 1 получаем

$$\int_0^{*t} \Sigma(\mathbf{x}_\tau, \tau) d\mathbf{f}_\tau = \int_0^t \Sigma(\mathbf{x}_\tau, \tau) d\mathbf{f}_\tau + \frac{1}{2} \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^m \int_0^t \Sigma^{(jk)}(\mathbf{x}_\tau, \tau) \frac{\partial \Sigma_k}{\partial \mathbf{x}^{(j)}}(\mathbf{x}_\tau, \tau) d\tau,$$

где $\Sigma_k(\mathbf{x}, \tau)$ — k -й столбец матрицы $\Sigma(\mathbf{x}, \tau)$.

Таким образом, стохастическому дифференциальному уравнению Стратоновича вида (1.51) соответствует стохастическое дифференциальное уравнение Ито вида

$$d\mathbf{x}_t = \mathbf{a}^*(\mathbf{x}_t, t)dt + \Sigma(\mathbf{x}_t, t)d\mathbf{f}_t, \quad \mathbf{x}_0 = \mathbf{x}(0, \omega), \quad (1.52)$$

где

$$\mathbf{a}^*(\mathbf{x}, t) = \mathbf{a}(\mathbf{x}, t) + \frac{1}{2} \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^m \Sigma^{(jk)}(\mathbf{x}, t) \frac{\partial \Sigma_k}{\partial \mathbf{x}^{(j)}}(\mathbf{x}, t).$$

Поэтому если матричные функции $\mathbf{a}^*(\mathbf{x}, t)$ и $\Sigma(\mathbf{x}, t)$ удовлетворяют условиям AI–AIII теоремы 1.6 существования и единственности в смысле стохастической эквивалентности решения стохастического дифференциального уравнения Ито (1.52), то и соответствующее ему стохастическое дифференциальное уравнение Стратоновича (1.51) имеет единственное в смысле стохастической эквивалентности решение.

1.4 Стохастические интегралы по мартингалам и стохастические дифференциальные уравнения со скачкообразной компонентой

1.4.1 Стохастический интеграл по мартингалу

Пусть заданы вероятностное пространство $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ и определенная на нем неубывающая совокупность σ -алгебр $\{\mathcal{F}_t, t \in [0, T]\}$. Пусть $M_t, t \in [0, T]$, — $\mathcal{F}_t$ -измеримый при каждом $t \in [0, T]$ мартингал, для которого $\mathbf{M}\{|M_t|\} < \infty$ и при всех $t \in [0, T]$ существует $\mathcal{F}_t$ -измеримый и неотрицательный с вероятностью 1 случайный процесс $\rho_t, t \in [0, T]$, такой, что

$$\mathbf{M}\{(M_s - M_t)^2 | \mathcal{F}_t\} = \mathbf{M}\left\{\int_t^s \rho_\tau d\tau | \mathcal{F}_t\right\} \quad \text{с в.1,}$$

где $0 \leq t < s \leq T$. Такие мартингалы, следуя [4], будем называть D -мартингалами.

Введем в рассмотрение класс $H_2(\rho, [0, T])$ случайных процессов $\varphi_t, t \in [0, T]$, которые $\mathcal{F}_t$ -измеримы при каждом $t \in [0, T]$ и удовлетворяют условию $\mathbf{M}\left\{\int_0^T \varphi_t^2 \rho_t dt\right\} < \infty$. Для произвольного разбиения $\{\tau_j\}_{j=0}^N$ промежутка $[0, T]$ такого, что $0 = \tau_0 < \tau_1 < \dots < \tau_N = T$, и произвольной последовательности $\mathcal{F}_{\tau_j}$ -измеримых случайных величин φ_j ,

$j = 0, 1, \dots, N - 1$, определим ступенчатую функцию $\varphi_t \in H_2(\rho, [0, T])$ следующим образом: $\varphi_t = \varphi_j$ с вероятностью 1 при $\tau_j \leq t < \tau_{j+1}$, $j = 0, 1, \dots, N - 1$.

Через $G_2(\rho, [0, T])$ обозначим множество всех ступенчатых функций в $H_2(\rho, [0, T])$. Для произвольной ступенчатой функции $\varphi_t \in G_2(\rho, [0, T])$ определим стохастический интеграл по D -мартингалу $M_t, t \in [0, T]$, следующим образом:

$$\sum_{j=0}^{N-1} \varphi_j (M_{\tau_{j+1}} - M_{\tau_j}) \stackrel{\text{def}}{=} \int_0^T \varphi_t dM_t.$$

Нетрудно показать, что стохастический интеграл $\int_0^T \varphi_t dM_t$ для любых $\varphi_t, \psi_t \in G_2(\rho, [0, T])$, и любых постоянных случайных величин α, β обладает с вероятностью 1 следующими свойствами:

$$F1. \mathbb{M} \left\{ \int_0^T \varphi_t dM_t \middle| \mathcal{F}_0 \right\} = 0.$$

$$F2. \mathbb{M} \left\{ \left| \int_0^T \varphi_t dM_t \right|^2 \middle| \mathcal{F}_0 \right\} = \mathbb{M} \left\{ \int_0^T \varphi_t^2 \rho_t dt \middle| \mathcal{F}_0 \right\}.$$

$$F3. \int_0^T (\alpha \varphi_t + \beta \psi_t) dM_t = \alpha \int_0^T \varphi_t dM_t + \beta \int_0^T \psi_t dM_t.$$

$$F4. \int_0^T \mathbf{1}_{[a,b)}(t) dM_t = M_b - M_a, \quad a, b \in [0, T], b > a.$$

$$F5. \mathbb{M} \left\{ \int_0^T \varphi_t dM_t \int_0^T \psi_t dM_t \middle| \mathcal{F}_0 \right\} = \mathbb{M} \left\{ \int_0^T \varphi_t \psi_t \rho_t dt \middle| \mathcal{F}_0 \right\}.$$

$$F6. \mathbb{P} \left\{ \left| \int_0^T \varphi_t dM_t \right| > C \right\} \leq \mathbb{P} \left\{ \int_0^T \varphi_t^2 \rho_t dt > N \right\} + \frac{N}{C^2} \text{ для всех } C, N.$$

Введем на классе $H_2(\rho, [0, T])$ норму

$$\|\varphi\|_{2,T,\rho} = \sqrt{\mathbb{M} \left\{ \int_0^T \varphi_t^2 \rho_t dt \right\}}.$$

Отождествим функции $\varphi_t, \psi_t \in H_2(\rho, [0, T])$, если $\|\varphi - \psi\|_{2,T,\rho} = 0$.

Рассмотрим разбиение промежутка $[0, T]$, для которого

$$0 = \tau_0^{(N)} < \tau_1^{(N)} < \dots < \tau_N^{(N)} = T, \quad \Delta_N = \max_{0 \leq j \leq N-1} \left| \tau_{j+1}^{(N)} - \tau_j^{(N)} \right| \rightarrow 0$$

при $N \rightarrow \infty$. Определим последовательность ступенчатых функций $\varphi_t^{(N)}$ следующим образом: $\varphi_t^{(N)} = \varphi_{\tau_j^{(N)}}^{(N)}$ с вероятностью 1 при $t \in [\tau_j^{(N)}, \tau_{j+1}^{(N)})$, $j = 0, 1, \dots, N - 1$; $N = 1, 2, \dots$

Определение 1.14. Назовем стохастическим интегралом по D -мартингалу $M_t \in H_2(\rho, [0, T])$ среднеквадратический предел

$$\text{l.i.m.}_{N \rightarrow \infty} \sum_{j=0}^{N-1} \varphi_{\tau_j}^{(N)} \left(M_{\tau_{j+1}}^{(N)} - M_{\tau_j}^{(N)} \right) \stackrel{\text{def}}{=} \int_0^T \varphi_t dM_t, \quad (1.53)$$

где $\varphi_t^{(N)}$ — произвольная последовательность ступенчатых функций из $G_2(\rho, [0, T])$, сходящаяся по норме $\|\cdot\|_{2,T,\rho}$ к функции φ_t .

Известно [4], что стохастический интеграл $\int_0^T \varphi_t dM_t$ вида (1.53) существует, не зависит от выбора последовательности $\varphi_t^{(N)}$ и обладает свойствами $F1 - F6$.

Определим случайный процесс $\eta_t, t \in [0, T]$:

$$\eta_t = \int_0^t \varphi_\tau dM_\tau \text{ с в.1, если } \varphi_t \in H_2(\rho, [0, T]).$$

Отметим некоторые свойства процесса $\eta_t, t \in [0, T]$ [4]. Пусть $\eta_t, t \in [0, T]$, — сепарабельный случайный процесс. Тогда

$$\begin{aligned} \mathbb{P} \left\{ \sup_{0 \leq t \leq T} |\eta_t| > a \right\} &\leq \frac{1}{a^2} \int_0^T \mathbb{M} \{ \varphi_\tau^2 \rho_\tau \} d\tau, \\ \mathbb{M} \left\{ \sup_{0 \leq t \leq T} |\eta_t|^2 \right\} &\leq 4 \mathbb{M} \{ |\eta_T|^2 \} = 4 \int_0^T \mathbb{M} \{ \varphi_\tau^2 \rho_\tau \} d\tau. \end{aligned}$$

Стохастический интеграл $\int_0^T \varphi_t dM_t$ можно определить и для более широкого класса случайных функций φ_t , а именно для класса $S_2(\rho, [0, T])$ $\mathcal{F}_t$ -измеримых при каждом $t \in [0, T]$ и удовлетворяющих условию $\int_0^T \varphi_t^2 \rho_t dt < \infty$ с вероятностью 1 случайных процессов $\varphi_t, t \in [0, T]$ [4]. В этом случае полагаем [4]

$$\mathbb{P}\text{-lim}_{N \rightarrow \infty} \sum_{j=0}^{N-1} \varphi_{\tau_j}^{(N)} \left(M_{\tau_{j+1}}^{(N)} - M_{\tau_j}^{(N)} \right) \stackrel{\text{def}}{=} \int_0^T \varphi_t dM_t, \quad (1.54)$$

где $\varphi_t^{(N)}$ — произвольная последовательность ступенчатых функций из $S_2(\rho, [0, T])$, сходящаяся к $\varphi_t \in S_2(\rho, [0, T])$ в следующем смысле:

$$\mathbb{P}\text{-lim}_{N \rightarrow \infty} \int_0^T |\varphi_t^{(N)} - \varphi_t|^2 dt = 0,$$

$\{\tau_j^{(N)}\}_{j=0}^N$ — разбиение промежутка $[0, T]$ такого же типа, как и в определении 1.8.

Известно [4], что стохастический интеграл вида (1.54) существует, не зависит от выбора последовательности $\varphi_t^{(N)}$ и обладает свойствами F3 и F6. Кроме того, известно [4], что если процесс $\eta_t = \int_0^t \varphi_\tau dM_\tau$, $\varphi_t \in H_2(\rho, [0, T])$, сепарабелен и мартингал M_t с вероятностью 1 не имеет разрывов второго рода, то η_t также не имеет разрывов второго рода, причем

$$\mathbf{P} \left\{ \sup_{0 \leq t \leq T} |\eta_t| > C \right\} \leq \frac{N}{C^2} + \mathbf{P} \left\{ \int_0^T \varphi_\tau^2 \rho_\tau d\tau > N \right\}.$$

Отметим, что одним из наиболее простых примеров D -мартингалов является стандартный винеровский процесс, для которого очевидно $\rho_\tau \equiv 1$. При этом соответствующий стохастический интеграл по D -мартингалу преобразуется в стохастический интеграл Ито.

1.4.2 Стохастический интеграл по пуассоновской случайной мере

Рассмотрим пуассоновскую меру в пространстве $[0, T] \times \mathbf{Y}$ ($\mathfrak{R}^n \stackrel{\text{def}}{=} \mathbf{Y}$). Значения этой меры на множестве $\Delta \times A$ ($\Delta \subseteq [0, T]$, $A \subset \mathbf{Y}$) будем обозначать через $\nu(\Delta, A)$. Предположим, что $\mathbf{M}\{\nu(\Delta, A)\} = |\Delta| \Pi(A)$, где $|\Delta|$ — лебегова мера Δ , $\Pi(A)$ — мера на σ -алгебре $\mathcal{B}$ борелевских множеств $\mathbf{Y}$, а $\mathcal{B}_0$ — подалгебра $\mathcal{B}$, состоящая из множеств $A \subset \mathcal{B}$, для которых $\Pi(A) < \infty$.

Введем мартингальную меру $\tilde{\nu}$:

$$\tilde{\nu}(\Delta, A) = \nu(\Delta, A) - |\Delta| \Pi(A).$$

Рассмотрим фиксированное вероятностное пространство $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ и неубывающую совокупность σ -алгебр $\{\mathcal{F}_t, t \in [0, T]\}$, $\mathcal{F}_t \subset \mathcal{F}$. Будем считать, что:

1. Случайные величины $\nu([0, t], A)$ $\mathcal{F}_t$ -измеримы при всех $A \subseteq \mathcal{B}_0$.
2. Случайные величины $\nu([t, t+h], A)$, $A \subseteq \mathcal{B}_0$, $h > 0$, не зависят от σ -алгебры $\mathcal{F}_t$.

Перейдем к определению стохастического интеграла по мартингальной мере $\int_0^T \int_{\mathbf{Y}} \varphi(t, \mathbf{y}) \tilde{\nu}(dt, d\mathbf{y})$, где $\varphi : [0, T] \times \mathbf{Y} \times \Omega \rightarrow \mathfrak{R}^1$.

Определим классы $H_l(\Pi, [0, T])$ и $S_l(\Pi, [0, T])$ случайных функций $\varphi : [0, T] \times \mathbf{Y} \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}^1$, которые при всех $t \in [0, T]$, $\mathbf{y} \in \mathbf{Y}$ $\mathcal{F}_t$ -измеримы и удовлетворяют условиям

$$\int_0^T \int_{\mathbf{Y}} \mathbb{M}\{|\varphi(t, \mathbf{y})|^l\} \Pi(d\mathbf{y}) dt < \infty$$

и

$$\int_0^T \int_{\mathbf{Y}} |\varphi(t, \mathbf{y})|^l \Pi(d\mathbf{y}) dt < \infty \text{ с в.1}$$

соответственно.

Сначала предполагаем, что случайная функция $\varphi(t, \mathbf{y})$ ступенчата, т. е. $\varphi(t, \mathbf{y}) = \varphi_{j-1}(\mathbf{y})$ с вероятностью 1 при $t \in [\tau_{j-1}, \tau_j)$, $\{\tau_j\}_{j=1}^N$ — разбиение промежутка $[0, T]$ того же типа, что и в определении 1.8. Кроме того, считаем, что случайные величины $\varphi_j(\mathbf{y})$ $\mathcal{F}_{\tau_j}$ -измеримы и таковы, что $\varphi(t, \mathbf{y}) \in H_2(\Pi, [0, T])$. В этом случае полагаем [4], что

$$\int_0^T \int_{\mathbf{Y}} \varphi(t, \mathbf{y}) \tilde{\nu}(dt, d\mathbf{y}) \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{j=1}^N \int_{\mathbf{Y}} \varphi(\tau_{j-1}, \mathbf{y}) \tilde{\nu}([\tau_{j-1}, \tau_j), d\mathbf{y}). \quad (1.55)$$

Можно показать, что интеграл (1.55) обладает с вероятностью 1 следующими свойствами:

$$\begin{aligned} \text{Е1. } \int_0^T \int_{\mathbf{Y}} (\alpha \varphi_1(t, \mathbf{y}) + \beta \varphi_2(t, \mathbf{y})) \tilde{\nu}(dt, d\mathbf{y}) &= \alpha \int_0^T \int_{\mathbf{Y}} \varphi_1(t, \mathbf{y}) \tilde{\nu}(dt, d\mathbf{y}) + \\ &+ \beta \int_0^T \int_{\mathbf{Y}} \varphi_2(t, \mathbf{y}) \tilde{\nu}(dt, d\mathbf{y}). \end{aligned}$$

$$\text{Е2. } \int_0^T \int_{\mathbf{Y}} \mathbf{1}_{\Delta \times A}(t, \mathbf{y}) \tilde{\nu}(dt, d\mathbf{y}) = \tilde{\nu}(\Delta, A), \quad A \subseteq \mathcal{B}_0, \quad \Delta \subseteq [0, T].$$

$$\text{Е3. } \mathbb{M} \left\{ \left| \int_0^T \int_{\mathbf{Y}} \varphi(t, \mathbf{y}) \tilde{\nu}(dt, d\mathbf{y}) \right|^2 \middle| \mathcal{F}_0 \right\} = \int_0^T \int_{\mathbf{Y}} \mathbb{M} \{ |\varphi(t, \mathbf{y})|^2 | \mathcal{F}_0 \} \Pi(d\mathbf{y}) dt,$$

$$\mathbb{M} \left\{ \int_0^T \int_{\mathbf{Y}} \varphi(t, \mathbf{y}) \tilde{\nu}(dt, d\mathbf{y}) \middle| \mathcal{F}_0 \right\} = 0.$$

$$\text{Е4. } \mathbb{P} \left\{ \left| \int_0^T \int_{\mathbf{Y}} \varphi(t, \mathbf{y}) \tilde{\nu}(dt, d\mathbf{y}) \right| > C \right\} \leq \mathbb{P} \left\{ \int_0^T \int_{\mathbf{Y}} \varphi(t, \mathbf{y}) \tilde{\nu}(dt, d\mathbf{y}) > N \right\} + \frac{N}{C^2}.$$

Здесь α, β, N, C — постоянные; $\varphi_1(t, \mathbf{y}), \varphi_2(t, \mathbf{y}), \varphi(t, \mathbf{y})$ — ступенчатые случайные функции из класса $H_2(\Pi, [0, T])$.

Если $\varphi(t, \mathbf{y}) \in H_2(\Pi, [0, T])$, то полагаем [4]

$$\int_0^T \int_{\mathbf{Y}} \varphi(t, \mathbf{y}) \tilde{\nu}(dt, d\mathbf{y}) \stackrel{\text{def}}{=} \lim_{N \rightarrow \infty} \int_0^T \int_{\mathbf{Y}} \varphi^{(N)}(t, \mathbf{y}) \tilde{\nu}(dt, d\mathbf{y}), \quad (1.56)$$

где $\varphi^{(N)}(t, \mathbf{y})$ — произвольная последовательность ступенчатых функций из $H_2(\Pi, [0, T])$ такая, что

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \int_0^T \int_{\mathbf{Y}} \mathbb{M}\{|\varphi(t, \mathbf{y}) - \varphi^{(N)}(t, \mathbf{y})|^2\} \Pi(d\mathbf{y}) dt \rightarrow 0.$$

В случае если $\varphi(t, \mathbf{y}) \in S_2(\Pi, [0, T])$, то положим [4]

$$\int_0^T \int_{\mathbf{Y}} \varphi(t, \mathbf{y}) \tilde{\nu}(dt, d\mathbf{y}) \stackrel{\text{def}}{=} \mathbb{P}\text{-}\lim_{N \rightarrow \infty} \int_0^T \int_{\mathbf{Y}} \varphi^{(N)}(t, \mathbf{y}) \tilde{\nu}(dt, d\mathbf{y}), \quad (1.57)$$

где $\varphi^{(N)}(t, \mathbf{y})$ — произвольная последовательность ступенчатых функций из $S_2(\Pi, [0, T])$ такая, что

$$\mathbb{P}\text{-}\lim_{N \rightarrow \infty} \int_0^T \int_{\mathbf{Y}} |\varphi(t, \mathbf{y}) - \varphi^{(N)}(t, \mathbf{y})|^2 \Pi(d\mathbf{y}) dt \rightarrow 0.$$

Можно показать [4], что стохастические интегралы (1.56), (1.57) существуют, не зависят от выбора последовательностей $\varphi^{(N)}(t, \mathbf{y})$, причем стохастический интеграл (1.56) обладает свойствами $E1$ – $E4$, а стохастический интеграл (1.57) — свойствами $E1$, $E4$.

Рассмотрим некоторые свойства стохастического интеграла $\Phi_t = \int_0^t \int_{\mathbf{Y}} \varphi(s, \mathbf{y}) \tilde{\nu}(ds, d\mathbf{y})$, $t \in [0, T]$, с переменным верхним пределом. При этом будем предполагать, что Φ_t , $t \in [0, T]$, — сепарабельный случайный процесс.

Если $\varphi(t, \mathbf{y}) \in H_2(\Pi, [0, T])$, то:

F1. $\mathbb{M}\{\Phi_t - \Phi_s | \mathcal{F}_s\} = 0$ с в.1, $0 \leq s < t \leq T$.

F2. $\mathbb{M}\{|\Phi_t - \Phi_s|^2 | \mathcal{F}_s\} = \int_s^t \int_{\mathbf{Y}} \mathbb{M}\{\varphi^2(\tau, \mathbf{y}) | \mathcal{F}_s\} \Pi(d\mathbf{y}) d\tau$ с в.1.

F3. $\mathbb{P}\left\{\sup_{0 \leq t \leq T} |\Phi_t| > a\right\} \leq \frac{1}{a^2} \int_0^T \int_{\mathbf{Y}} \mathbb{M}\{\varphi^2(t, \mathbf{y})\} \Pi(d\mathbf{y}) dt$.

F4. $\mathbb{M}\left\{\sup_{0 \leq t \leq T} |\Phi_t|^2\right\} \leq 4\mathbb{M}\{|\Phi_T|^2\} = 4 \int_0^T \int_{\mathbf{Y}} \mathbb{M}\{\varphi^2(\tau, \mathbf{y})\} \Pi(d\mathbf{y}) d\tau$.

В случае если $\varphi(t, \mathbf{y}) \in S_2(\Pi, [0, T])$, то

$$\mathbb{P}\left\{\sup_{0 \leq t \leq T} |\Phi_t| > C\right\} \leq \mathbb{P}\left\{\int_0^T \int_{\mathbf{Y}} \varphi^2(\tau, \mathbf{y}) \Pi(d\mathbf{y}) d\tau > N\right\} + \frac{N}{C^2},$$

где C , N — произвольные постоянные.

Нетрудно видеть, что для всех $\varphi(t, \mathbf{y}) \in S_1(\Pi, [0, T]) \cap S_2(\Pi, [0, T])$ определен стохастический интеграл по пуассоновской случайной мере

$$\int_0^T \int_{\mathbf{Y}} \varphi(t, \mathbf{y}) \nu(dt, d\mathbf{y}) = \int_0^T \int_{\mathbf{Y}} \varphi(t, \mathbf{y}) \tilde{\nu}(dt, d\mathbf{y}) + \int_0^T \int_{\mathbf{Y}} \varphi(t, \mathbf{y}) \Pi(d\mathbf{y}) dt.$$

1.4.3 Формула Ито для процессов Ито со скачкообразной компонентой

Пусть заданы фиксированное вероятностное пространство $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ и неубывающая совокупность σ -алгебр $\{\mathcal{F}_t, t \in [0, T]\}$. Рассмотрим $\mathcal{F}_t$ -измеримый при всех $t \in [0, T]$ стандартный векторный винеровский процесс $\mathbf{f}_t$ с независимыми компонентами $\mathbf{f}_t^{(i)}$, $i = 1, \dots, m$, пуассоновскую случайную меру $\nu(dt, d\mathbf{y})$, заданную в пространстве $[0, T] \times \mathbf{Y}$ и удовлетворяющую условиям (I) – (III) из разд. 1.2.5 при $T < \infty$ на вероятностном пространстве $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$, а также случайные функции $\mathbf{a}_t : [0, T] \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$, $B_t : [0, T] \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}^{n \times m}$, $\gamma(t, \mathbf{y}) : [0, T] \times \mathbf{Y} \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$, которые $\mathcal{F}_t$ -измеримы при каждом $t \in [0, T]$ и удовлетворяют условиям $\sqrt{|\mathbf{a}_t^{(i)}|}$, $B_t^{(ik)} \in \mathcal{P}_2([0, T])$, $\gamma^{(i)}(t, \mathbf{y}) \in S_1(\Pi, [0, T]) \cap S_2(\Pi, [0, T])$, $i = 1, 2, \dots, n$; $k = 1, \dots, m$.

Рассмотрим n -мерные процессы Ито $\mathbf{x}_t$ и $\mathbf{z}_t$ при $t \in [0, T]$ со скачкообразной компонентой вида

$$\mathbf{x}_t = \mathbf{x}_0 + \int_0^t \mathbf{a}_\tau d\tau + \int_0^t B_\tau d\mathbf{f}_\tau + \int_0^t \int_{\mathbf{Y}} \gamma(\tau, \mathbf{y}) \tilde{\nu}(dt, d\mathbf{y}), \quad (1.58)$$

$$\mathbf{z}_t = \mathbf{z}_0 + \int_0^t \mathbf{a}_\tau d\tau + \int_0^t B_\tau d\mathbf{f}_\tau + \int_0^t \int_{\mathbf{Y}} \gamma(\tau, \mathbf{y}) \nu(dt, d\mathbf{y}), \quad (1.59)$$

где $\tilde{\nu}(d\tau, d\mathbf{y}) = \nu(d\tau, d\mathbf{y}) - \Pi(d\mathbf{y})d\tau$. Отметим, что для существования третьего интеграла в правой части (1.58) достаточно выполнения условия $\gamma^{(i)}(t, \mathbf{y}) \in S_2(\Pi, [0, T])$, $i = 1, 2, \dots, n$.

Введем в рассмотрение класс $D_\gamma([0, T])$ неслучайных функций $R(\mathbf{x}, t) : \mathbb{R}^n \times [0, T] \rightarrow \mathbb{R}^1$, которые непрерывно дифференцируемы по $\mathbf{x}$ и t и удовлетворяют условиям

$$\begin{aligned} R(\Phi_t + \gamma(t, \mathbf{y}), t) - R(\Phi_t, t) &\in S_2(\Pi, [0, T]), \\ R(\Phi_t + \gamma(t, \mathbf{y}), t) - R(\Phi_t, t) - \\ - \sum_{k=1}^n \frac{\partial R}{\partial \mathbf{x}^{(k)}}(\Phi_t, t) \gamma^{(k)}(t, \mathbf{y}) &\in S_1(\Pi, [0, T]), \end{aligned}$$

где $\Phi_t = \int_0^t \int_{\mathbf{Y}} \gamma(\tau, \mathbf{y}) \tilde{\nu}(d\tau, d\mathbf{y})$, а случайная функция $\gamma(\tau, \mathbf{y})$ такая же, как в (1.58).

Рассмотрим также класс $E_\gamma([0, T])$ неслучайных функций $R(\mathbf{x}, t) : \mathbb{R}^n \times [0, T] \rightarrow \mathbb{R}^1$, которые непрерывно дифференцируемы по $\mathbf{x}$ и t и удовлетворяют условию

$$R(\Psi_t + \gamma(t, \mathbf{y}), t) - R(\Psi_t, t) \in S_1(\Pi, [0, T]) \cap S_2(\Pi, [0, T]),$$

где $\Psi_t = \int_0^t \int_{\mathbf{Y}} \gamma(\tau, \mathbf{y}) \nu(d\tau, d\mathbf{y})$, а случайная функция $\gamma(\tau, \mathbf{y})$ такая же, как и в (1.59).

Приведем два утверждения [4], которые устанавливают формулу Ито для процессов Ито со скачкообразной компонентой вида (1.58), (1.59).

Теорема 1.10 [4]. Пусть процесс Ито $\mathbf{x}_t, t \in [0, T]$, определен равенством (1.58), причем $\sqrt{|\mathbf{a}_t^{(i)}|}$, $B_t^{(ik)} \in \mathcal{P}_2([0, T])$, $\gamma^{(i)}(t, \mathbf{y}) \in S_2(\Pi, [0, T])$, $i = 1, 2, \dots, n$; $k = 1, \dots, m$, а $R(\mathbf{x}, t) : \mathbb{R}^n \times [0, T] \rightarrow \mathbb{R}^1$ — дважды непрерывно дифференцируемая по $\mathbf{x}$ функция из класса $D_\gamma([0, T])$. Тогда

$$\begin{aligned} dR(\mathbf{x}_t, t) = & \left(\frac{\partial R}{\partial t}(\mathbf{x}_t, t) + \sum_{k=1}^n \mathbf{a}_t^{(k)} \frac{\partial R}{\partial \mathbf{x}^{(k)}}(\mathbf{x}_t, t) + \right. \\ & + \frac{1}{2} \sum_{j,k=1}^n \frac{\partial^2 R}{\partial \mathbf{x}^{(j)} \partial \mathbf{x}^{(k)}}(\mathbf{x}_t, t) \sum_{i=1}^m B_t^{(ki)} B_t^{(ji)} + \\ & + \int_{\mathbf{Y}} \left(R(\mathbf{x}_t + \gamma(t, \mathbf{y}), t) - R(\mathbf{x}_t, t) - \sum_{k=1}^n \gamma^{(k)}(t, \mathbf{y}) \frac{\partial R}{\partial \mathbf{x}^{(k)}}(\mathbf{x}_t, t) \right) \Pi(d\mathbf{y}) \Big) dt + \\ & + \sum_{i=1}^m \sum_{k=1}^n B_t^{(ki)} \frac{\partial R}{\partial \mathbf{x}^{(k)}}(\mathbf{x}_t, t) d\mathbf{f}_t^{(i)} + \\ & + \int_{\mathbf{Y}} (R(\mathbf{x}_{t-} + \gamma(t, \mathbf{y}), t) - R(\mathbf{x}_{t-}, t)) \tilde{\nu}(dt, d\mathbf{y}), \end{aligned}$$

где равенство понимается в интегральной форме с вероятностью 1.

Теорема 1.11 [4]. Пусть процесс Ито $\mathbf{z}_t, t \in [0, T]$, определен равенством (1.59), причем $\sqrt{|\mathbf{a}_t^{(i)}|}$, $B_t^{(ik)} \in \mathcal{P}_2([0, T])$, $\gamma^{(i)}(t, \mathbf{y}) \in S_1(\Pi, [0, T]) \cap S_2(\Pi, [0, T])$, $i = 1, 2, \dots, n$; $k = 1, \dots, m$, а $R(\mathbf{x}, t) :$

$\mathbb{R}^n \times [0, T] \rightarrow \mathbb{R}^1$ — дважды непрерывно дифференцируемая по $\mathbf{x}$ функция из класса $E_\gamma([0, T])$. Тогда

$$\begin{aligned} dR(\mathbf{z}_t, t) = & \left(\frac{\partial R}{\partial t}(\mathbf{z}_t, t) + \sum_{k=1}^n \mathbf{a}_t^{(k)} \frac{\partial R}{\partial \mathbf{x}^{(k)}}(\mathbf{z}_t, t) + \right. \\ & + \frac{1}{2} \sum_{j,k=1}^n \frac{\partial^2 R}{\partial \mathbf{x}^{(j)} \partial \mathbf{x}^{(k)}}(\mathbf{z}_t, t) \sum_{i=1}^m B_t^{(ki)} B_t^{(ji)} \Big) dt + \\ & + \sum_{i=1}^m \sum_{k=1}^n B_t^{(ki)} \frac{\partial R}{\partial \mathbf{x}^{(k)}}(\mathbf{z}_t, t) d\mathbf{f}_t^{(i)} + \\ & + \int_{\mathbf{Y}} (R(\mathbf{z}_{t-} + \gamma(t, \mathbf{y}), t) - R(\mathbf{z}_{t-}, t)) \nu(dt, d\mathbf{y}), \end{aligned} \quad (1.60)$$

где равенство понимается в интегральной форме с вероятностью 1.

1.4.4 Оценки моментов стохастических интегралов по пуассоновским мерам

Пусть $\mathbf{a}_\tau^{(i)} \equiv 0$, $B_\tau^{(ij)} \equiv 0$, $i = 1, \dots, n$; $j = 1, \dots, m$, $R(\mathbf{x}, t) = \mathbf{x}^r$, $r \in N$. Предположим также, что $n = 1$, и рассмотрим формулу Ито (1.60) в этих условиях:

$$z_t^r = \int_0^t \int_{\mathbf{Y}} ((z_{\tau-} + \gamma(\tau, \mathbf{y}))^r - z_{\tau-}^r) \nu(d\tau, d\mathbf{y}), \quad (1.61)$$

где $z_t = \int_0^t \int_{\mathbf{Y}} \gamma(\tau, \mathbf{y}) \nu(d\tau, d\mathbf{y})$; $\gamma(\tau, \mathbf{y}) \in S_1(\Pi, [0, T]) \cap S_{2r}(\Pi, [0, T])$.

С помощью формулы (1.61) можно получить оценку моментов стохастических интегралов по пуассоновской мере [4. С. 264]. Приведем вывод этой формулы.

Обозначим

$$a_r(t) = \sup_{0 \leq \tau \leq t} \mathbf{M} \{|z_\tau|^r\}, \quad b_r(\tau, \mathbf{y}) = \mathbf{M} \{|\gamma(\tau, \mathbf{y})|^r\}.$$

Из (1.61) получим

$$a_r(t) \leq \sum_{k=0}^{r-1} C_r^k \int_0^t \int_{\mathbf{Y}} \mathbf{M} \{|z_\tau|^k |\gamma(\tau, \mathbf{y})|^{r-k}\} \Pi(d\mathbf{y}) d\tau.$$

Используя неравенство Гельдера, приходим к оценке

$$\mathbf{M} \{|z_\tau|^k |\gamma(\tau, \mathbf{y})|^{r-k}\} \leq (a_r(\tau))^{\frac{k}{r}} (b_r(\tau, \mathbf{y}))^{1-\frac{k}{r}}.$$

Если $a_r(t) \leq 1$, то

$$a_r(t) \leq \int_0^t \int_{\mathbf{Y}} \left(\left((b_r(\tau, \mathbf{y}))^{\frac{1}{r}} + 1 \right)^r - 1 \right) \Pi(d\mathbf{y}) d\tau.$$

В случае если $a_r(t) \geq 1$, имеем

$$a_r(t) \leq (a_r(t))^{\frac{r-1}{r}} \int_0^t \int_{\mathbf{Y}} \left(\left((b_r(\tau, \mathbf{y}))^{\frac{1}{r}} + 1 \right)^r - 1 \right) \Pi(d\mathbf{y}) d\tau,$$

т. е.

$$a_r(t) \leq \left(\int_0^t \int_{\mathbf{Y}} \left(\left((b_r(\tau, \mathbf{y}))^{\frac{1}{r}} + 1 \right)^r - 1 \right) \Pi(d\mathbf{y}) d\tau \right)^r.$$

В результате получаем следующую оценку:

$$a_r(T) \leq \max_{j \in \{r, 1\}} \left\{ \left(\int_0^T \int_{\mathbf{Y}} \left(\left((b_r(\tau, \mathbf{y}))^{\frac{1}{r}} + 1 \right)^r - 1 \right) \Pi(d\mathbf{y}) d\tau \right)^j \right\}. \quad (1.62)$$

При этом предполагаем, что правая часть (1.62) существует.

Отметим также, что в силу соотношения $\tilde{\nu}(dt, d\mathbf{y}) = \nu(dt, d\mathbf{y}) - \Pi(d\mathbf{y})dt$ и неравенства Минковского имеем

$$(\mathbb{M} \{ |\tilde{z}_t|^{2r} \})^{\frac{1}{2r}} \leq (\mathbb{M} \{ |z_t|^{2r} \})^{\frac{1}{2r}} + (\mathbb{M} \{ |\hat{z}_t|^{2r} \})^{\frac{1}{2r}}, \quad (1.63)$$

где $\hat{z}_t \stackrel{\text{def}}{=} \int_0^t \int_{\mathbf{Y}} \gamma(\tau, \mathbf{y}) \Pi(d\mathbf{y}) d\tau$; $\tilde{z}_t = \int_0^t \int_{\mathbf{Y}} \gamma(\tau, \mathbf{y}) \tilde{\nu}(d\tau, d\mathbf{y})$.

Величину $\mathbb{M} \{ |\hat{z}_\tau|^{2r} \}$ можно оценить с помощью неравенства (1.42) следующим образом:

$$\mathbb{M} \{ |\hat{z}_t|^{2r} \} \leq t^{2r-1} \int_0^t \mathbb{M} \left\{ \left| \int_{\mathbf{Y}} \varphi(\tau, \mathbf{y}) \Pi(d\mathbf{y}) \right|^{2r} \right\} d\tau, \quad (1.64)$$

где предполагаем, что

$$\int_0^t \mathbb{M} \left\{ \left| \int_{\mathbf{Y}} \gamma(\tau, \mathbf{y}) \Pi(d\mathbf{y}) \right|^{2r} \right\} d\tau < \infty.$$

1.4.5 Стохастические дифференциальные уравнения со скачкообразной компонентой

Рассмотрим стохастическое дифференциальное уравнение

$$d\mathbf{x}_t = \mathbf{a}(\mathbf{x}_t, t)dt + \Sigma(\mathbf{x}_t, t)d\mathbf{f}_t + \int_{\mathbf{Y}} P(\mathbf{x}_t, t, \mathbf{y})\tilde{\nu}(dt, d\mathbf{y}), \quad (1.65)$$

где $\mathbf{a}(\mathbf{x}, t) : \mathbb{R}^n \times [0, T] \rightarrow \mathbb{R}^n$; $\Sigma(\mathbf{x}, t) : \mathbb{R}^n \times [0, T] \rightarrow \mathbb{R}^{n \times m}$; $P(\mathbf{x}, t, \mathbf{y}) : \mathbb{R}^n \times [0, T] \times \mathbf{Y} \rightarrow \mathbb{R}^n$ — неслучайные функции; $\nu([0, t], \mathbf{y})$ — пуассоновская мера в пространстве $[0, T] \times \mathbf{Y}$, для которой справедливы предположения (I) – (III) из разд. 1.2.5; $\mathbf{f}_t$ — m -мерный стандартный винеровский процесс с независимыми компонентами $\mathbf{f}_t^{(i)}$, $i = 1, \dots, m$, которые не зависят от значений пуассоновской меры $\nu([0, t], \mathbf{y})$.

Следующая теорема содержит достаточные условия, при которых стохастическое дифференциальное уравнение (1.65) имеет единственное с вероятностью 1 непрерывное справа решение.

Теорема 1.12 [4]. Пусть выполнены следующие условия:

AI. Существует такая постоянная $L < \infty$, что

$$|\mathbf{a}(\mathbf{x}, t)|^2 + \|\Sigma(\mathbf{x}, t)\|^2 + \int_{\mathbf{Y}} |P(\mathbf{x}, t, \mathbf{y})|^2 \Pi(d\mathbf{y}) \leq L(1 + |\mathbf{x}|^2),$$

где $\|\Sigma(\mathbf{x}, t)\|^2 = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^d |\Sigma^{(ij)}(\mathbf{x}, t)|^2$.

АII. Для всякого $R > 0$ найдется постоянная $C_R < \infty$ такая, что при $|\mathbf{x}| \leq R$, $|\mathbf{z}| \leq R$ выполняется неравенство

$$|\mathbf{a}(\mathbf{x}, t) - \mathbf{a}(\mathbf{z}, t)|^2 + \|\Sigma(\mathbf{x}, t) - \Sigma(\mathbf{z}, t)\|^2 + \int_{\mathbf{Y}} |P(\mathbf{x}, t, \mathbf{y}) - P(\mathbf{z}, t, \mathbf{y})|^2 \Pi(d\mathbf{y}) \leq C_R |\mathbf{x} - \mathbf{z}|^2.$$

АIII. Существуют постоянная $L < \infty$ и функция $g(h) : g(h) \geq 0$, которая, монотонно убывая, стремится к нулю при $h \rightarrow 0$, такие, что

$$|\mathbf{a}(\mathbf{x}, t+h) - \mathbf{a}(\mathbf{x}, t)|^2 + \|\Sigma(\mathbf{x}, t+h) - \Sigma(\mathbf{x}, t)\|^2 + \int_{\mathbf{Y}} |P(\mathbf{x}, t+h, \mathbf{y}) - P(\mathbf{x}, t, \mathbf{y})|^2 \Pi(d\mathbf{y}) \leq L(1 + |\mathbf{x}|^2)g(h).$$

Тогда стохастическое дифференциальное уравнение (1.65) имеет единственное с вероятностью 1 непрерывное справа решение.

В [4] доказаны следующие утверждения об оценках моментов решения стохастического дифференциального уравнения (1.65).

Теорема 1.13. Пусть выполнены условия AI – AIII теоремы 1.12, а также условия

$$\int_{\mathbf{Y}} |P(\mathbf{x}, t, \mathbf{y})|^p \Pi(d\mathbf{y}) \leq L(1 + |\mathbf{x}|^p), \quad p = 2, 3, \dots, 2n,$$

где $L < \infty$ — постоянная. Тогда решение стохастического дифференциального уравнения (1.65) имеет конечные моменты вплоть до $2n$ -го порядка и справедлива оценка

$$\mathbf{M}\{|\xi_t|^{2p}\} \leq L_{1,p}(1 + \mathbf{M}\{|\xi_0|^{2p}\}), \quad p = 1, 2, \dots, n,$$

где ξ_0 — $\mathcal{F}_0$ -измеримая случайная величина; $L_{1,p}$ — постоянная, которая зависит только от L, T, p .

Теорема 1.14. В условиях теоремы 1.13 существует такая, зависящая только от L, T, p , постоянная $L_{2,p}$, что

$$\mathbf{M}\{|\xi_t - \xi_0|^{2p}\} \leq L_{2,p}(1 + \mathbf{M}\{|\xi_0|^{2p}\})t, \quad p = 1, 2, \dots, n.$$

1.4.6 Интегральное представление решения линейного стохастического дифференциального уравнения со скачкообразной компонентой

Построим с помощью формулы Ито (1.60) интегральное представление решения скалярного стохастического дифференциального уравнения

$$\begin{aligned} d\xi_t = & (a_0(t) + a_1(t)\xi_t)dt + \sum_{i=1}^m \left(b_0^{(i)}(t) + b_1^{(i)}(t)\xi_t \right) d\mathbf{f}_t^{(i)} + \\ & + \int_{\mathbf{Y}} (\gamma_0(t, \mathbf{y}) + \gamma_1(t, \mathbf{y})\xi_{t-}) \nu(dt, d\mathbf{y}), \end{aligned} \quad (1.66)$$

где $a_0(t), a_1(t), b_0^{(i)}(t), b_1^{(i)}(t) : [0, T] \rightarrow \mathbb{R}^1$; $\gamma_0(t, \mathbf{y}), \gamma_1(t, \mathbf{y}) : [0, T] \times \mathbf{Y} \rightarrow \mathbb{R}^1$, $i = 1, \dots, m$, — скалярные неслучайные функции, удовлетворяющие условиям справедливости формулы Ито (1.60) и условиям теоремы 1.12; $\mathbf{f}_t^{(i)}$ — $\mathcal{F}_t$ -измеримые при всех $t \in [0, T]$ независимые стандартные винеровские процессы; $\nu(dt, d\mathbf{y})$ — пуассоновская мера, заданная в пространстве $[0, T] \times \mathbf{Y}$ ($\mathbf{Y} \stackrel{\text{def}}{=} \mathbb{R}^d$), которая независима с винеровскими процессами $\mathbf{f}_t^{(i)}$; $\gamma_1(t, \mathbf{y}) > -1$.

В монографии [4] получено интегральное представление решения уравнения (1.66) при $m = 1$. Рассмотрим случай $m > 1$, основываясь на [4].

Пусть x_t — решение однородного стохастического дифференциального уравнения

$$dx_t = a_1(t)x_t dt + \sum_{i=1}^m b_1^{(i)}(t)x_t d\mathbf{f}_t^{(i)} + \\ + x_t \int_{\mathbf{Y}} \gamma_1(t, \mathbf{y}) \nu(dt, d\mathbf{y}), \quad x_{t_0} = 1.$$

Введем процесс $y_t = \ln|x_t|$. По формуле Ито (1.60) имеем

$$dy_t = \left(a_1(t) - \frac{1}{2} \sum_{i=1}^m \left(b_1^{(i)}(t) \right)^2 \right) dt + \sum_{i=1}^m b_1^{(i)}(t) d\mathbf{f}_t^{(i)} + \\ + \int_{\mathbf{Y}} \ln|1 + \gamma_1(t, \mathbf{y})| \nu(dt, d\mathbf{y}). \quad (1.67)$$

Из (1.67) с вероятностью 1 получаем

$$x_t = \exp \left(\int_{t_0}^t \left(a_1(\tau) - \frac{1}{2} \sum_{i=1}^m \left(b_1^{(i)}(\tau) \right)^2 \right) d\tau + \sum_{i=1}^m \int_{t_0}^t b_1^{(i)}(\tau) d\mathbf{f}_\tau^{(i)} + \right. \\ \left. + \int_{t_0}^t \int_{\mathbf{Y}} \ln|1 + \gamma_1(\tau, \mathbf{y})| \nu(d\tau, d\mathbf{y}) \right). \quad (1.68)$$

Покажем, что процесс x_t^{-1} удовлетворяет стохастическому дифференциальному уравнению

$$dx_t^{-1} = x_t^{-1} \left(\left(\sum_{i=1}^m \left(b_1^{(i)}(t) \right)^2 - a_1(t) \right) dt - \sum_{i=1}^m b_1^{(i)}(t) d\mathbf{f}_t^{(i)} - \right. \\ \left. - \int_{\mathbf{Y}} \frac{\gamma_1(t, \mathbf{y})}{1 + \gamma_1(t, \mathbf{y})} \nu(dt, d\mathbf{y}) \right). \quad (1.69)$$

Действительно, применяя формулу Ито (1.60) к процессу $x_t^{-1} = e^{\psi_t}$, где

$$d\psi_t = - \left(a_1(t) - \frac{1}{2} \sum_{i=1}^m \left(b_1^{(i)}(t) \right)^2 \right) dt - \sum_{i=1}^m b_1^{(i)}(t) d\mathbf{f}_t^{(i)} - \\ - \int_{\mathbf{Y}} \ln|1 + \gamma_1(t, \mathbf{y})| \nu(dt, d\mathbf{y}),$$

имеем

$$dx_t^{-1} = x_t^{-1} \left(-a_1(t) + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^m \left(b_1^{(i)}(t) \right)^2 + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^m \left(b_1^{(i)}(t) \right)^2 \right) dt + \\ + x_t^{-1} \sum_{i=1}^m \left(-b_1^{(i)}(t) \right) d\mathbf{f}_t^{(i)} + \int_{\mathbf{Y}} \left(e^{\psi_{t-} - \ln|1+\gamma_1(t, \mathbf{y})|} - e^{\psi_{t-}} \right) \nu(dt, d\mathbf{y}). \quad (1.70)$$

Далее путем несложных преобразований приводим формулу (1.70) к выражению вида (1.69).

Рассмотрим процесс $\eta_t = x_t^{-1} \xi_t$, где ξ_t — решение уравнения (1.66). Используя формулу Ито (1.60), получаем

$$d\eta_t = x_t^{-1} d\xi_t + \xi_t dx_t^{-1} - \sum_{i=1}^m \left(b_0^{(i)}(t) + b_1^{(i)}(t) \xi_t \right) x_t^{-1} b_1^{(i)}(t) dt - \\ - x_t^{-1} \int_{\mathbf{Y}} \frac{\gamma_1(t, \mathbf{y})}{1 + \gamma_1(t, \mathbf{y})} (\gamma_0(t, \mathbf{y}) + \gamma_1(t, \mathbf{y}) \xi_{t-}) \nu(dt, d\mathbf{y}). \quad (1.71)$$

Подставляя $d\xi_t$ и dx_t^{-1} из формул (1.66) и (1.69) в соотношение (1.71), находим

$$d\eta_t = x_t^{-1} \left(\left(a_0(t) - \sum_{i=1}^m b_0^{(i)}(t) b_1^{(i)}(t) \right) dt + \right. \\ \left. + \sum_{i=1}^m b_0^{(i)}(t) d\mathbf{f}_t^{(i)} + \int_{\mathbf{Y}} \frac{\gamma_0(t, \mathbf{y})}{1 + \gamma_1(t, \mathbf{y})} \nu(dt, d\mathbf{y}) \right). \quad (1.72)$$

Из (1.72) с вероятностью 1 окончательно получаем

$$\xi_t = x_t \left(\xi_{t_0} + \int_{t_0}^t x_{\tau}^{-1} \left(a_0(\tau) - \sum_{i=1}^m b_0^{(i)}(\tau) b_1^{(i)}(\tau) \right) d\tau + \right. \\ \left. + \sum_{i=1}^m \int_{t_0}^t x_{\tau}^{-1} b_0^{(i)}(\tau) d\mathbf{f}_{\tau}^{(i)} + \int_{t_0}^t \int_{\mathbf{Y}} \frac{x_{\tau}^{-1} \gamma_0(\tau, \mathbf{y})}{1 + \gamma_1(\tau, \mathbf{y})} \nu(d\tau, d\mathbf{y}) \right),$$

где x_t имеет вид (1.68), причем $x_{t_0} = 1$.

Глава 2

Применения стохастических дифференциальных уравнений

2.1 Диффузионные математические модели динамических систем, находящихся под воздействием случайных возмущений

2.1.1 Общий вид нелинейных диффузионных моделей

Анализ динамики физических и технических систем при случайных внешних воздействиях сводится к исследованию вероятностных и статистических свойств решений систем дифференциальных уравнений, возмущенных случайными процессами. В достаточно общем случае такие системы описываются уравнением

$$\frac{d\mathbf{x}_t}{dt} = \mathbf{a}(\mathbf{x}_t, \mathbf{u}(t), t) + \Sigma(\mathbf{x}_t, t) \mathbf{r}_t, \quad \mathbf{x}_0 = \mathbf{x}(0, \omega), \quad (2.1)$$

где $\mathbf{x}_t \in \mathbb{R}^n$ — вектор состояния системы; $\mathbf{u}(t) : [0, T] \rightarrow \mathbb{R}^k$ — управляющее неслучайное воздействие; $\mathbf{r}_t \stackrel{\text{def}}{=} \mathbf{r}(t, \omega) : [0, T] \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}^m$ — стохастическое возмущение, представляющее собой векторный случайный процесс; $\mathbf{a}(\mathbf{x}, \mathbf{u}, t) : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^k \times [0, T] \rightarrow \mathbb{R}^n$ и $\Sigma(\mathbf{x}, t) : \mathbb{R}^n \times [0, T] \rightarrow \mathbb{R}^{n \times m}$ — матричные функции своих аргументов; $\mathbf{x}_0 \in \mathbb{R}^n$ — случайный вектор начальных условий. Уравнение (2.1) рассматривается на некотором вероятностном пространстве $(\Omega, \mathcal{F}, P)$.

К исследованию систем уравнений вида (2.1) сводится решение широкого класса задач статистической механики, электродинамики, теории управления, финансовой математики, кинетики и др. Первая такая задача была рассмотрена Л. Башелье [24] в связи с изучением одномерного броуновского движения частицы. Результаты Л. Башелье были обобщены А. Эйнштейном [25] и М. Смолуховским [13] на случай

многомерного броуновского движения. Более широкую постановку задачи о стохастических динамических системах можно найти в работе А. А. Андропова, А. А. Витта и Л. С. Понтрягина [26]. Эти фундаментальные работы положили начало статистическому описанию динамических систем, получившему в настоящее время развитие и широкое применение.

Корреляционные, или спектральные, свойства решений системы (2.1) существенным образом зависят от взаимосвязи динамических характеристик системы и частотных свойств возмущающего случайного процесса. Если полоса пропускания динамической системы (2.1) на входе значительно уже полосы частот равномерности спектра стационарного возмущающего процесса $\mathbf{r}_t$, то этот процесс может считаться белым шумом относительно данной системы, т. е. имеющим постоянную спектральную плотность в диапазоне частот, существенном для динамики системы (2.1).

Как известно, белым шумом является обобщенным случайным процессом с δ -образной корреляционной функцией и постоянной спектральной плотностью во всем частотном диапазоне, т. е. $R_r(\tau) = I\delta(\tau)$, $S_r(\omega) = I$, где $\delta(\tau)$ — обобщенная δ -функция Дирака; I — единичная матрица (здесь речь идет о векторном белом шуме с независимыми компонентами).

Понятие белым шумом случайного процесса условно. Один и тот же случайный процесс может считаться белым шумом относительно одной динамической системы и не белым шумом ("цветным") относительно другой, имеющей более широкую полосу пропускания. Стратоновичем была предложена параметризованная модель белого шума случайного процесса.

Если ввести малый параметр $\mu > 0$ таким образом, что $\mathbf{r}_t = \frac{1}{\mu}\xi_{\frac{t}{\mu^2}}$, где $\xi_t \in \mathbb{R}^m$ — стационарный гауссовский случайный процесс с корреляционной функцией $R_\xi(\tau)$ такой, что $\int_{-\infty}^{\infty} R_\xi(t, t + \tau) d\tau = I$, и спектральной плотностью $S_\xi(\omega)$, то процесс $\mathbf{r}_t$ будет иметь корреляционную функцию $R_r(\tau)$ и спектральную плотность $S_r(\omega)$ такие, что при $\mu \rightarrow 0$: $R_r(\tau) = \frac{1}{\mu^2} R_\xi\left(\frac{\tau}{\mu^2}\right) \rightarrow I\delta(\tau)$, $S_r(\omega) = S_\xi(\mu^2\omega) \rightarrow S_\xi(0)$, т. е. будет приближаться по свойствам к белому шуму.

Система дифференциальных уравнений (2.1) для параметризованных таким образом случайных возмущающих процессов принимает вид

$$\frac{d\mathbf{x}_t}{dt} = \mathbf{a}(\mathbf{x}_t, \mathbf{u}(t), t) + \Sigma(\mathbf{x}_t, t) \frac{1}{\mu} \xi_{\frac{t}{\mu^2}}, \quad \mathbf{x}_0 = \mathbf{x}(0, \omega). \quad (2.2)$$

При достаточно малом μ процесс $\frac{1}{\mu}\xi_{\frac{t}{\mu^2}}$ может считаться белым шумным относительно данной динамической системы, так как полоса частот равномерности спектра возмущающего процесса $\frac{1}{\mu}\xi_{\frac{t}{\mu^2}}$ неограниченно расширяется при $\mu \rightarrow 0$, а полоса пропускания системы остается неизменной.

Если полоса пропускания системы (2.1) недостаточно узка относительно полосы равномерности спектра возмущающего процесса $\mathbf{r}_t$, то белая шумная аппроксимация этого процесса не адекватна исходной постановке задачи стохастической динамики. В указанных случаях существен учет "цветности" процесса $\mathbf{r}_t$, для чего, например, спектральная плотность этого процесса представляется или аппроксимируется следующим образом:

$$S_r(\omega) = H_r(i\omega)H_r(-i\omega) = \frac{F_r(i\omega)}{A_r(i\omega)} \frac{F_r(-i\omega)}{A_r(-i\omega)}, \quad (2.3)$$

где $H_r(p) = \frac{F_r(p)}{A_r(p)}$ — передаточная функция устойчивой системы, т. е. $F_r(p)$ — диагональная матрица, состоящая из полиномов конечной степени m ; $A_r(p)$ — гурвицев полином конечной степени n ($m < n$), а i — мнимая единица.

Известно, что спектральной плотностью (2.3) обладают установившиеся выходные процессы линейной стохастической системы, представленной в пространстве состояний в виде

$$\frac{d\mathbf{z}_t}{dt} = \tilde{A}_r \mathbf{z}_t + \tilde{F}_r \mathbf{f}_t, \quad \mathbf{r}_t = H \mathbf{z}_t, \quad (2.4)$$

для матриц $\tilde{A}_r$, $\tilde{F}_r$, H которой справедливо равенство

$$H_r(p) = H (pI - \tilde{A}_r)^{-1} \tilde{F}_r = \frac{F_r(p)}{A_r(p)},$$

где $\mathbf{f}_t$ — белая шумная процесс; I — единичная матрица. Система (2.4) называется формирующим фильтром процесса $\mathbf{r}_t$, который может быть задан также в операторной форме:

$$\mathbf{r}_t = H_r(D)\mathbf{f}_t;$$

D — оператор дифференцирования, или в интегральной форме,

$$\mathbf{r}_t = \int_{-\infty}^t h_r(t - \tau) \mathbf{f}_\tau d\tau;$$

$h_r(t)$ — оригинал $H_r(p)$:

$$\int_0^{\infty} h_r(t) e^{-pt} dt = H_r(p).$$

Если расширить систему уравнений (2.1), дополнив ее уравнениями (2.4), то математическое описание динамической системы сводится к стохастической системе дифференциальных уравнений с белым шумным возмущением.

Таким образом, достаточно универсальной математической моделью, описывающей стохастическую динамику систем, является модель нелинейной системы дифференциальных уравнений, возмущенных векторным белым шумным случайным процессом

$$\frac{d\mathbf{x}_t}{dt} = \mathbf{a}(\mathbf{x}_t, \mathbf{u}(t), t) + \Sigma(\mathbf{x}_t, t) \mathbf{f}_t, \quad \mathbf{x}_0 = \mathbf{x}(0, \omega), \quad (2.5)$$

где сохранены все обозначения формулы (2.1). Коррелированное возмущение $\mathbf{r}_t$ заменено белым шумом $\mathbf{f}_t$.

Необходимо отметить, что белым шумный процесс является обобщенным случайным процессом с бесконечной дисперсией. Поэтому преобразования, включающим в себя белым шумный процесс, следует придавать точный математический смысл.

Известно, что системе уравнений (2.5) можно придавать различный математический смысл, например, смысл уравнений Ито или уравнений Стратоновича, которые наиболее часто встречаются в литературе. При этом в ряде случаев в ходе аналитических вычислений систему уравнений вида (2.5) бывает удобно приводить к уравнениям Ито. В то же время зачастую формой уравнений, адекватной математическому описанию конкретных физических или технических систем, являются уравнения Стратоновича. Поскольку эти уравнения переводятся друг в друга, то при математическом моделировании динамических стохастических систем возможно их разумное сочетание.

2.1.2 Линейные диффузионные модели

Соответствие частотных свойств случайного возмущения и частотных характеристик динамического объекта, установленное ранее, носит сугубо качественный характер вследствие большой общности рассматриваемых моделей. Если теперь из всего множества моделей (2.1) – (2.5) выделить класс линейных моделей, то эти качественные оценки можно перевести в количественные.

Пусть система (2.1) линейна и стационарна, так что

$$\frac{d\mathbf{x}_t}{dt} = A\mathbf{x}_t + B\mathbf{u}(t) + \Sigma\mathbf{r}_t, \quad \mathbf{x}_0 = \mathbf{x}(0, \omega), \quad \mathbf{y}_t = H\mathbf{x}_t, \quad (2.6)$$

где $\mathbf{x}_t \in \mathbb{R}^n$ — решение системы (2.6); $\mathbf{u}(t) : [0, T] \rightarrow \mathbb{R}^k$; $\mathbf{r}_t : [0, T] \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}^m$ — стохастическое возмущение; $\mathbf{y}_t \in \mathbb{R}^l$ — процесс на выходе; A, B, Σ, H — постоянные числовые матрицы соответствующего размера, причем матрица A гурвицева; $\mathbf{x}_0 = \bar{\mathbf{x}}_0 + \overset{\circ}{\mathbf{x}}_0 \in \mathbb{R}^n$ — случайный вектор начальных условий со средним $\bar{\mathbf{x}}_0$ и центрированной составляющей $\overset{\circ}{\mathbf{x}}_0$.

Система уравнений (2.6) может быть представлена в эквивалентной операторной форме:

$$\mathbf{y}_t = \mathbf{y}_0(t) + H_u(D)\mathbf{u}(t) + H_r(D)\mathbf{r}_t, \quad (2.7)$$

где $D \stackrel{\text{def}}{=} \frac{d}{dt}$ — оператор дифференцирования; $\mathbf{y}_0(t)$ — переходный процесс, соответствующий начальному условию $\mathbf{x}_0$; $H_u(D), H_r(D)$ — передаточные операторы от управления $\mathbf{u}(t)$ к выходу $\mathbf{y}_t$ и от стохастического возмущения $\mathbf{r}_t$ к выходу $\mathbf{y}_t$ соответственно.

Процесс $\mathbf{y}_t$ и операторы $H_u(D), H_r(D)$ определяются из (2.6):

$$\mathbf{y}_0(t) = H(DI - A)^{-1}\mathbf{x}_0\delta(t),$$

$$H_u(D) = H(DI - A)^{-1}B = \frac{B(D)}{A(D)},$$

$$H_r(D) = H(DI - A)^{-1}\Sigma = \frac{\Sigma(D)}{A(D)}.$$

Здесь $\delta(t)$ — δ -функция Дирака; $A(D)$ — полиномиальный, а $B(D), \Sigma(D)$ — матричные и покомпонентно полиномиальные операторы; $A(p) = \det(pI - A)$ — гурвицев полином.

Процесс $\mathbf{y}_t$ имеет систематическую составляющую $\bar{\mathbf{y}}(t)$ и случайную составляющую $\overset{\circ}{\mathbf{y}}_t$:

$$\mathbf{y}_t = \bar{\mathbf{y}}(t) + \overset{\circ}{\mathbf{y}}_t,$$

причем

$$\bar{\mathbf{y}}(t) = \bar{\mathbf{y}}_0(t) + H_u(D)\mathbf{u}(t),$$

$$\overset{\circ}{\mathbf{y}}_t = \overset{\circ}{\mathbf{y}}_0(t) + H_r(D)\mathbf{r}_t.$$

В дальнейшем будем считать случайный процесс $\mathbf{r}_t$ скалярным.

В силу устойчивости системы (2.6) и стационарности возмущения $\mathbf{r}_t$ процесс $\dot{\mathbf{Y}}_t$ является асимптотически стационарным и обладает спектральной плотностью

$$S_y(\omega) = |H_r(j\omega)|^2 S_r(\omega),$$

где $S_r(\omega)$ — спектральная плотность возмущения $\mathbf{r}_t$.

Определим количественные характеристики полосы пропускания системы (2.7) и полосы частот равномерности спектра процесса $\mathbf{r}_t$.

Под полосой пропускания системы (2.7) будем понимать полосу частот, удовлетворяющую условию

$$\Omega_c = \{\omega : \omega_0 \leq \omega \leq \omega_1\},$$

где

$$\begin{aligned} \omega_0, \omega_1 = \arg \max_{\omega', \omega''} \left\{ \omega'' - \omega' > 0 : \frac{k_s^2}{\omega'' - \omega'} \int_{\omega'}^{\omega''} |H_r(ju)|^2 du \leq \right. \\ \left. \leq \max \{ |H_r(j\omega')|^2, |H_r(j\omega'')|^2 \} \right\} \end{aligned}$$

при некотором $k_s \in [0.1, 0.3]$.

Коэффициент k_s задает пороговый уровень амплитудно-частотной характеристики системы относительно ее среднего значения, что соответствует гашению сигналов системой (2.7) в частотном диапазоне $\omega < \omega_0, \omega > \omega_1$ не менее чем в k_s раз относительно среднего гашения в полосе частот Ω_c .

Полосой частот равномерности спектра процесса $\mathbf{r}_t$ будем называть полосу частот

$$\Omega_r = \{\omega : \omega_0 \leq \omega \leq \omega_1\},$$

где

$$\begin{aligned} \omega_0, \omega_1 = \arg \max_{\omega', \omega''} \left\{ \omega'' - \omega' > 0 : \max_{\omega' < \omega''} |S_r(\omega'') - S_r(\omega')| \leq \right. \\ \left. \leq k_r \min \{S_r(\omega'), S_r(\omega'')\} \right\} \end{aligned}$$

при некотором $k_r \in [0.05, 0.2]$.

Коэффициент k_r задает относительный пороговый уровень равномерности спектральной плотности $S_r(\omega)$ процесса $\mathbf{r}_t$. В диапазоне частот Ω_r спектральная плотность $S_r(\omega)$ изменяется в пределах $k_r \cdot 100\%$ от своих значений, что позволяет приближенно считать ее константой в этом диапазоне.

Рассмотрим два характерных типа возмущений динамических систем, часто встречающихся в приложениях.

Возмущение белым шумом. Предположим, что полоса пропускания системы (2.7) Ω_c значительно уже полосы частот равномерности спектра Ω_r процесса $\mathbf{r}_t$:

$$\Omega_c \subset \Omega_r.$$

В этом случае процесс $\mathbf{r}_t$ может считаться широкополосным относительно системы (2.7), что соответствует гипотезе о его белом шумности в системе (2.6) или (2.7). Эта ситуация изображена на рис.2.1.

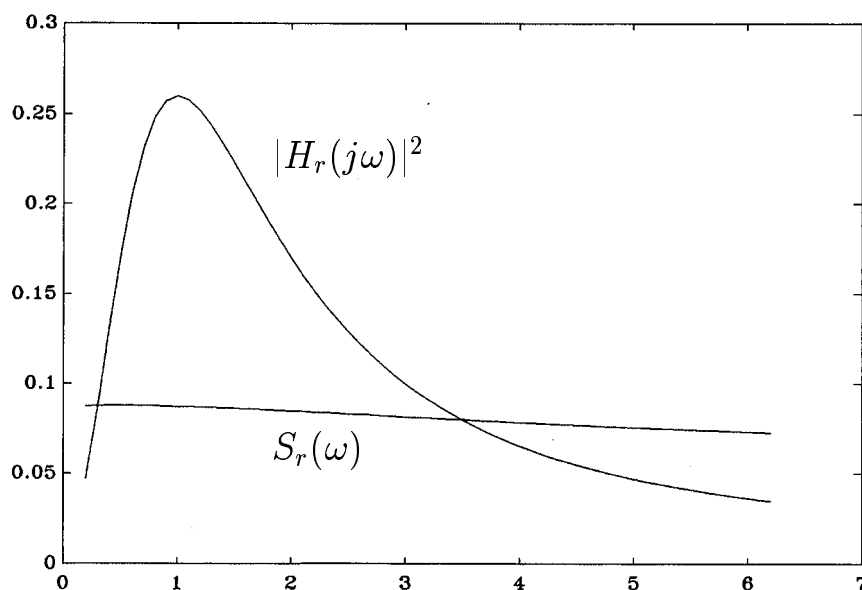


Рис.2.1. Частотная характеристика и спектральная плотность при белом шумном возмущении.

Необходимо отметить, что аппроксимация процесса $\mathbf{r}_t$ белым шумом в данном случае тесно связана со свойствами самой системы. Для одной системы процесс $\mathbf{r}_t$ может считаться белым шумом, а относительно другой он может не обладать этим свойством.

В рассмотренном случае $\mathbf{r}_t = \mathbf{f}_t$ — белый шум (в общем случае векторный). Запишем систему уравнений (2.6) в виде

$$\frac{d\mathbf{x}_t}{dt} = A\mathbf{x}_t + B\mathbf{u}(t) + \Sigma\mathbf{f}_t, \quad \mathbf{x}_0 = \mathbf{x}(0, \omega), \quad \mathbf{y}_t = H\mathbf{x}_t,$$

что соответствует частному случаю универсальной модели (2.5).

Возмущение "цветным" шумом. Пусть полоса пропускания системы (2.7) не уже полосы частот равномерности спектра Ω_r процесса $\mathbf{r}_t$:

$$\Omega_c \supseteq \Omega_r.$$

В рассматриваемом случае процесс $\mathbf{r}_t$ является узкополосным относительно системы (2.7), и учитывать его "цветность" обязательно. Эта ситуация изображена на рис.2.2.

Спектральную плотность $S_r(\omega)$ в данном случае можно представить или аппроксимировать функцией вида (2.3), где F_r — скаляр, а процесс $\mathbf{r}_t$ можно считать процессом на выходе формирующего фильтра (2.4). Совокупность уравнений (2.4), (2.6) является системой линейных стохастических дифференциальных уравнений с белым шумом в правой части.

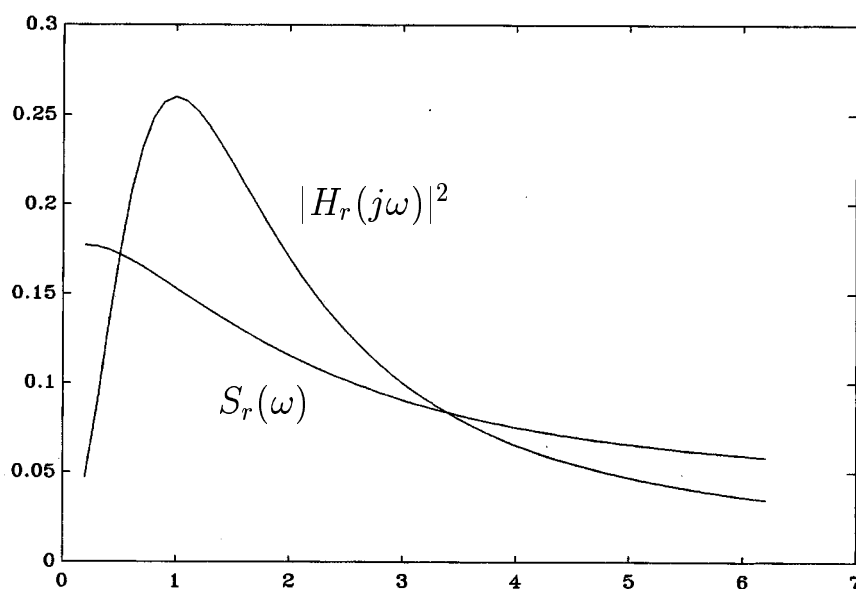


Рис.2.2. Частотная характеристика и спектральная плотность при "цветном" возмущении.

В заключение покажем, как система линейных стохастических дифференциальных уравнений, заданная в операторной форме, может быть приведена к системе линейных стохастических дифференциальных уравнений в пространстве состояний.

Предположим, что полезный сигнал $s_t \in \mathfrak{R}^1$ в системе формируется из управляемой и случайной компонент:

$$s_t = H_u(D)u_t + H_f(D)f_t, \quad (2.8)$$

где передаточные операторы $H_u(D)$ и $H_f(D)$ имеют дробно-рациональную структуру:

$$H_u(D) = \frac{B(D)}{A(D)}, \quad H_f(D) = \frac{C(D)}{A(D)};$$

$B(D), C(D), A(D)$ — скалярные полиномиальные операторы; $f_t \in \mathfrak{R}^1$ — бел шумный процесс; $u_t \in \mathfrak{R}^1$ — управление.

Эквивалентным (2.8) является задание системы в виде стохастического дифференциального уравнения

$$A(D)s_t = B(D)u_t + C(D)f_t. \quad (2.9)$$

Рассмотрим один из способов приведения дифференциального уравнения (2.9) к системе уравнений в пространстве состояний.

Перепишем уравнение (2.9) в следующем виде:

$$\sum_{i=0}^n \frac{d^i (a_{n-i}s_t - b_{n-i}u_t - c_{n-i}f_t)}{dt^i} = 0, \quad (2.10)$$

где a_i, b_i, c_i — коэффициенты полиномов $A(p), B(p), C(p)$ соответственно, $a_0 = 1$.

Обозначая

$$\mathbf{x}_t^{(1)} \stackrel{\text{def}}{=} s_t - b_0 u_t - c_0 f_t,$$

получаем из (2.10) равенства

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{d^n \mathbf{x}_t^{(1)}}{dt^n} + \sum_{i=0}^{n-1} \frac{d^i (a_{n-i}s_t - b_{n-i}u_t - c_{n-i}f_t)}{dt^i} = \\ &= \frac{d^{n-1} \mathbf{x}_t^{(2)}}{dt^{n-1}} + \sum_{i=0}^{n-2} \frac{d^i (a_{n-i}s_t - b_{n-i}u_t - c_{n-i}f_t)}{dt^i}, \end{aligned}$$

где

$$\mathbf{x}_t^{(2)} \stackrel{\text{def}}{=} \frac{d\mathbf{x}_t^{(1)}}{dt} + a_1 \mathbf{x}_t^{(1)} + (a_1 b_0 - b_1) u_t + (a_1 c_0 - c_1) f_t.$$

Продолжая начатый процесс, получаем следующую систему линейных стохастических дифференциальных уравнений:

$$\frac{d\mathbf{x}_t}{dt} = (H - \mathbf{a}\mathbf{e}_1^\top) \mathbf{x}_t - (b_0 \mathbf{a} - \mathbf{b}) u_t - (c_0 \mathbf{a} - \mathbf{c}) f_t, \quad (2.11)$$

$$s_t = \mathbf{e}_1^\top \mathbf{x}_t + b_0 u_t + c_0 f_t, \quad (2.12)$$

где $H \in \mathbb{R}^{n \times n}$; $\mathbf{e}_1 \in \mathbb{R}^n$ — матрицы вида

$$H = \begin{pmatrix} -a_1 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ -a_2 & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & & & & & & \\ -a_{n-1} & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ -a_n & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \dots \\ 0 \end{pmatrix};$$

$\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c} \in \mathbb{R}^n$ — векторы, составленные из коэффициентов полиномов $A(p)$, $B(p)$, $C(p)$, начиная с a_1 , b_1 и c_1 соответственно.

Таким образом, линейная стохастическая модель системы управления вида (2.8) приводится к системе стохастических уравнений (2.11), (2.12), которая является частным случаем системы уравнений вида (2.5).

2.2 Диффузионные модели физических и технических систем

2.2.1 Модель тепловых флуктуаций частиц в веществах и электрических зарядов в проводниках. Формула Найквиста

В 20-х годах техника физического эксперимента достигла настолько высокого уровня, что флуктуационный предел чувствительности электроизмерительных приборов оказался легко достижимым. В 1928 г. Х. Найквист дал количественную характеристику тепловых электрических флуктуаций в цепях, установив равномерность спектра их колебаний, т. е. белопшумность, а также зависимость их интенсивности от температуры. Аналогичный результат получен и для флуктуаций мельчайших частиц, взвешенных в жидкости или газе, т. е. по существу для характеристик броуновского движения. Опишем эти результаты, придерживаясь их изложения в работах [27, 28].

Тепловое движение частиц. Рассмотрим линейное по оси x движение частицы массой m_0 , взвешенной в жидкости или газе (рис. 2.3). Будем предполагать, что эта частица находится под действием случайных стационарных сил взаимодействия с молекулами окружающей среды f_t , упругой возвращающей силы $-sx_t$ и вязкого трения $-\alpha \frac{dx_t}{dt}$.

Тогда уравнение движения частицы запишем в виде

$$m_0 \frac{d^2 x_t}{dt^2} + \alpha \frac{dx_t}{dt} + c x_t = f_t, \quad (2.13)$$

где f_t — стационарный случайный процесс с нулевым средним и спектральной плотностью $S_f(\omega)$:

$$S_f(\omega) \stackrel{\text{def}}{=} \int_{-\infty}^{\infty} R_f(\tau) e^{-j\omega\tau} d\tau;$$

$R_f(\tau)$ — корреляционная функция процесса f_t .

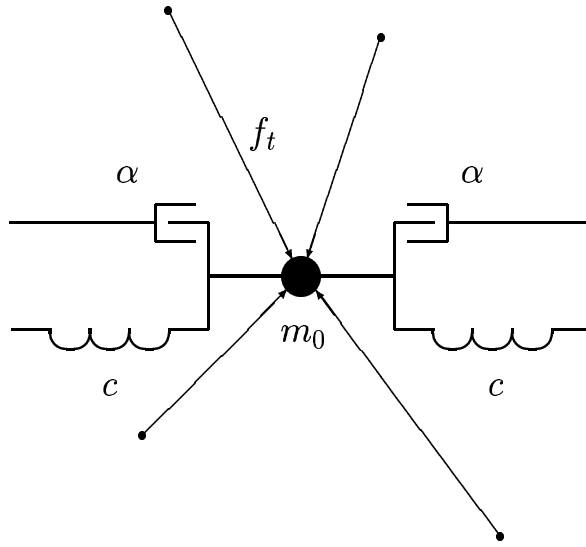


Рис. 2.3. Модель движения частицы.

Нетрудно показать, что спектральная плотность $S_v(\omega)$ установившегося процесса $v_t \stackrel{\text{def}}{=} \frac{dx_t}{dt}$ определяется по формуле

$$S_v(\omega) = \frac{\omega^2 S_f(\omega)}{(\omega^2 - \omega_0^2)^2 m_0^2 + \alpha \omega^2},$$

где $\omega_0^2 = \frac{c}{m_0}$.

В соответствии с положением молекулярной физики о равнораспределении энергии по степеням свободы, можно привести следующее уравнение средней кинетической энергии частицы:

$$\frac{kT}{2} = \mathbf{M} \left\{ \frac{m_0 v_t^2}{2} \right\} = \frac{m_0}{2} \mathbf{M} \{v_t^2\} = \frac{m_0}{4\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\omega^2 S_f(\omega) d\omega}{(\omega^2 - \omega_0^2)^2 m_0^2 + \alpha \omega^2}, \quad (2.14)$$

где T — абсолютная температура среды, град.; $k = 1.38 \cdot 10^{-23} \frac{\text{Дж}}{\text{град}}$ — постоянная Больцмана.

Выполнив в правой части (2.14) замену переменных $z = \omega/\omega_0$, преобразуем уравнение (2.14) в уравнение вида

$$kT = \frac{1}{\pi \sqrt{m_0 c}} \int_0^{\infty} \frac{S_f(\omega_0 z) dz}{(z - z^{-1})^2 + \gamma^2},$$

где $\gamma = \alpha/\sqrt{m_0 c}$.

Учитывая, что

$$\int_0^{\infty} \frac{dz}{(z - z^{-1})^2 + \gamma^2} = \frac{\pi}{2\gamma},$$

и то, что функция $L(z) = 1/((z - z^{-1})^2 + \gamma^2)$ является δ -образной в окрестности $z = 1$ (рис. 2.4), из (2.14) при $\gamma \ll 1$ получаем формулу Найквиста [29]

$$S_f(\omega) = 2kT\alpha. \quad (2.15)$$

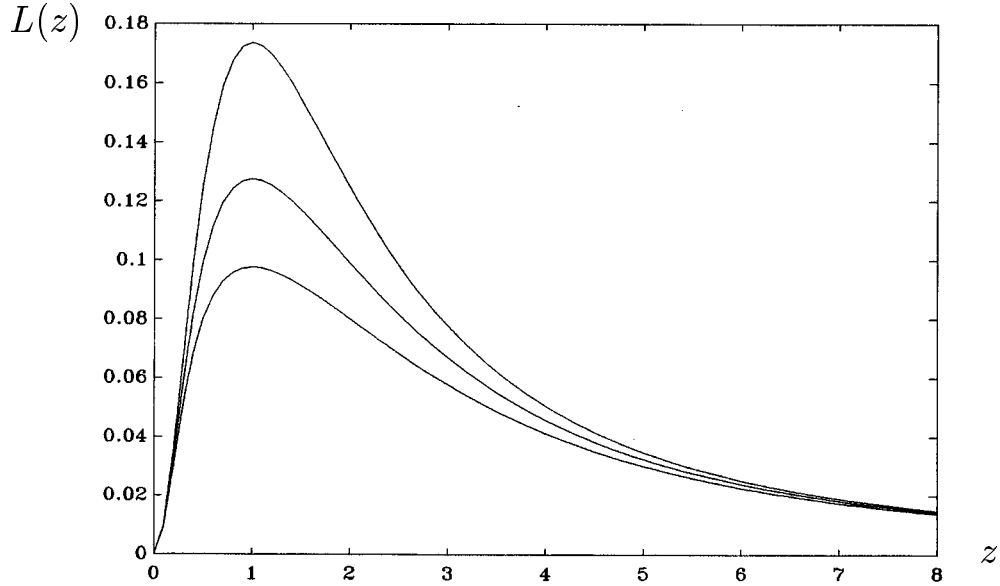


Рис. 2.4. График семейства функций $L(z)$.

Непосредственной подстановкой (2.15) в (2.14) нетрудно проверить, что $S_f(\omega) = 2kT\alpha$ является решением уравнения (2.14) и в общем случае.

Таким образом, согласно формуле Найквиста процесс воздействия на рассматриваемую частицу со стороны окружающей среды является белым шумным процессом с интенсивностью $2kT\alpha$.

Тепловая флуктуация зарядов. Рассмотрим электрическую цепь [31], состоящую из последовательно соединенных конденсатора емкостью C , резистора с сопротивлением R и индуктивности L (рис.2.5).

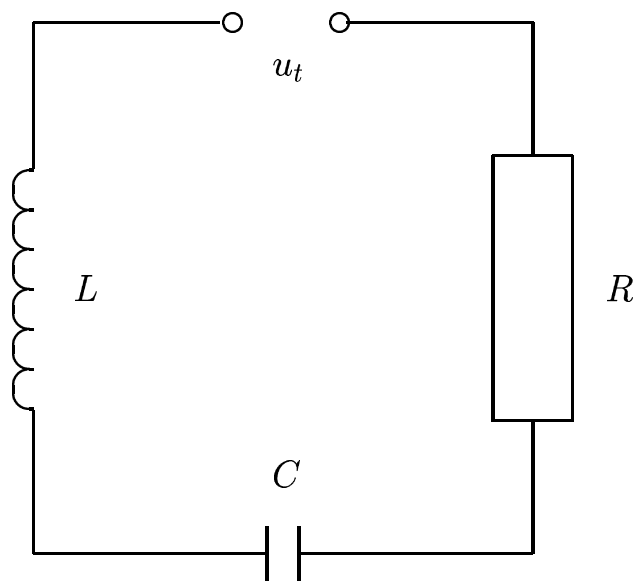


Рис. 2.5. Электрическая цепь.

Тогда разность потенциалов (ЭДС) в разрыве цепи можно выразить через мгновенный заряд q_t конденсатора:

$$u_t = \frac{q_t}{C} + R \frac{dq_t}{dt} + L \frac{d^2 q_t}{dt^2}. \quad (2.16)$$

Эту электрическую цепь можно сравнить с только что рассмотренной механической системой. Аналогом силового воздействия f_t здесь

является ЭДС u_t , массы m_0 — индуктивность L , жесткости c — величина, обратная электрической емкости $1/C$, аналогом коэффициента вязкого трения α выступает активное сопротивление R .

Учитывая это соответствие и одинаковый общий вид уравнений (2.13) и (2.16), можно проделать приведенные выкладки и получить формулу Найквиста для электрических цепей: $S_u(\omega) = 2kTR$. Согласно этой формуле процесс u_t является процессом белого шума с интенсивностью $2kTR$ [29].

2.2.2 Автоколебательная электрическая система

Рассмотрим ламповый генератор с колебательным контуром в цепи анода, упрощенная принципиальная схема которого приведена на рис. 2.6 [30]. Предполагается, что сеточное смещение и анодное напряжение постоянны.

В автоколебательной системе, изображенной на рис. 2.6, мгновенное значение анодного тока I_a вследствие дробовых флуктуаций отличается от среднего значения тока I_a^* на случайную величину $I_f(t)$ (флуктуационная компонента анодного тока). Если пренебречь реакцией анодной нагрузки ($D = 0$, D — коэффициент проницаемости) и сеточным током ($I_c = 0$), то можно получить [30] уравнение колебаний рассматриваемой автоколебательной системы

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \omega_0^2 x = \varepsilon \omega_0 \left(1 - \frac{4(\frac{dx}{dt})^2}{3\omega_0^2 A_0^2} \right) \frac{dx}{dt} + \omega_0^2 \varepsilon \xi(t). \quad (2.17)$$

В (2.17) использованы следующие обозначения:

$x = \omega_0 M (I - I_+)$, где M — индуктивная связка; $\omega_0 = 1/\sqrt{LC}$; I_+ — постоянная составляющая анодного тока; I — ток в индуктивной ветви контура;

$\varepsilon = \omega_0(MS - RC)$ — малый параметр, где S — крутизна характеристики лампы $F(U) \stackrel{\text{def}}{=} I_a^*$, которая может иметь, например, вид:

$$F(U) = I_+ + SU - \frac{\gamma}{3} U^3,$$

где $U = U_c + DU_a$ (в рассматриваемом случае $D = 0$), γ — параметр;

U_a — анодное напряжение; U_c — сеточное напряжение, которое в пренебрежении сеточным током I_c записываем как

$$U_c = M \frac{dI}{dt};$$

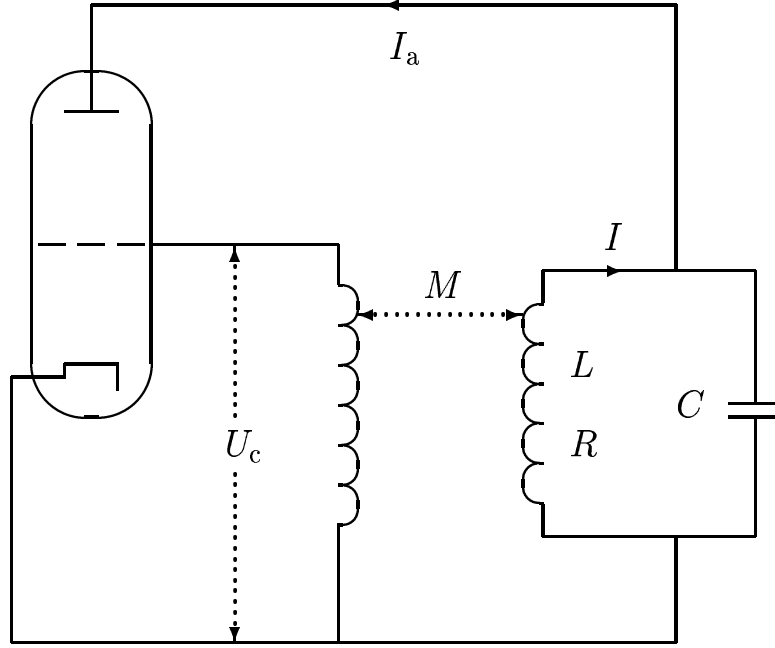


Рис. 2.6. Упрощенная схема лампового генератора.

$A_0 = 2\sqrt{\varepsilon/(\omega_0 M \gamma)}$ — амплитуда колебаний сеточного напряжения;
 $\xi(t) = (\omega_0 M / \varepsilon) I_f(t)$ — случайная функция, происхождение которой обусловлено дробовыми флуктуациями анодного тока

$$I_a = F(U) + I_f(t);$$

$\varepsilon \xi(t)$ — флуктуационный член.

Важно отметить, что происхождение флуктуационного члена $\varepsilon \xi(t)$ может обуславливаться не дробовыми флуктуациями анодного тока, а внешними шумами. Если в индуктивную ветвь контура ввести внешнее воздействие $u_k(t)$, то случайная функция $\xi(t)$ приобретает вид [30]

$$\xi(t) = \frac{\omega_0 M C \frac{du_k(t)}{dt}}{\varepsilon}.$$

Предположим малость времени корреляции $\tau_{\text{кор}}$ случайной функции $\xi(t)$. Время корреляции $\tau_{\text{кор}}$ сравнивается со временем релаксации амплитуды, порядок величины которого $1/(\omega_0 \varepsilon)$ [30]. Потребуем выполнения неравенства

$$\tau_{\text{кор}} \ll \frac{1}{\omega_0 \varepsilon}.$$

Это условие означает, что воздействующий на генератор шум является значительно более широкополосным, чем генерируемый сигнал, что отмечается во многих практических случаях. В предположении отсутствия корреляции моментов пролета различных электронов или кратковременности этих корреляций корреляционная функция флуктуационной составляющей анодного тока имеет δ -образный вид [30]:

$$R_{I_{\text{кор}}}(t, \tau) = \Gamma^2 e I_a^* \delta(t - \tau), \quad (2.18)$$

где Γ^2 — коэффициент депрессии дробового шума; e — заряд электрона. Пользуясь соотношением (2.18), находим корреляционную функцию и спектральную плотность величины $\xi(t)$ [30]:

$$R_{\xi}(\tau) = \Gamma^2 e I_a^* \left(\frac{\omega_0 M}{\varepsilon} \right)^2 \delta(\tau), \quad S_{\xi}(\omega) = 2\Gamma^2 e I_a^* \left(\frac{\omega_0 M}{\varepsilon} \right)^2.$$

Это означает, что случайный процесс $\xi(t)$ является белым шумом, действующим на рассматриваемую систему, поскольку $\xi(t)$ имеет δ -образную корреляционную функцию и постоянную спектральную плотность.

2.2.3 Чандлеровские колебания

Хорошо известно, что мгновенная ось вращения Земли постоянно меняет положение относительно малой оси земного эллипсоида. Колебания Северного полюса вокруг условного полюса вращения, принятого Международной Службой Широты, имеют составляющие с периодами 1 год и 14 месяцев. Составляющая таких колебаний с периодом приблизительно 435 дней называется чандлеровским колебанием. Это колебание не является строго периодическим. Его существование было предсказано еще в 1765 г. Л. Эйлером, который рассматривал колебания положения полюса на основе свободной нутации твердого тела. В результате им было установлено, что период указанных блужданий составляет 305 дней, что не соответствует многочисленным экспериментальным данным.

Чандлер в 1891 г. высказал предположение, что движение полюса имеет две составляющие с периодами 1 год и 428 дней соответственно, что отражает современные представления о чандлеровских колебаниях.

На рис. 2.7 и 2.8 [31] изображены колебания полюса относительно своего среднего положения в разные периоды.

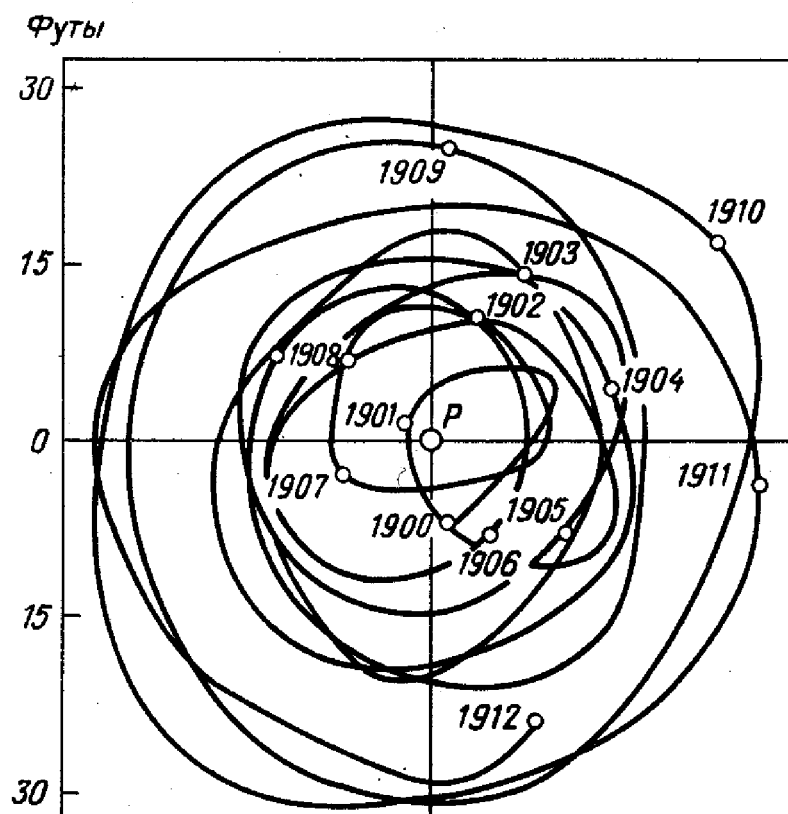


Рис. 2.7. Движение Северного полюса относительно среднего положения (данные по Ванаху за 1900–1912 гг.). Светлыми кружками обозначено положение Северного полюса в начале каждого года.

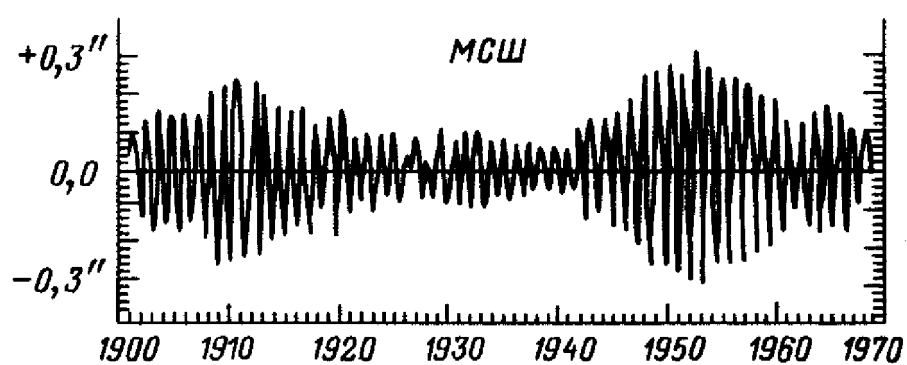


Рис. 2.8. Изменения амплитуды чандлеровского колебания (за 1900–1970 гг.) по данным Международной Службы Широты.

Рассмотрим математическую модель чандлеровских колебаний, предложенную А. Н. Колмогоровым в 1960 г. [33]:

$$d \begin{bmatrix} x_t \\ y_t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\lambda & -\omega \\ \omega & -\lambda \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_t \\ y_t \end{bmatrix} dt + d \begin{bmatrix} \phi_t \\ \psi_t \end{bmatrix}, \quad (2.19)$$

где $x_t, y_t \in \mathbb{R}^1$ — случайные процессы, описывающие положение полюса; λ — затухание, а ω — частота чандлеровского колебания; ϕ_t, ψ_t — процессы возбуждения; величины $d\phi_t$ и $d\psi_t$ отражают изменение тензора инерции Земли во временном интервале $[t, t + dt]$.

Оказывается, что ряд экспериментальных данных [32] свидетельствует в пользу того, что значения $d\phi_t$ и $d\psi_t$ в периоды времени, разделенные несколькими годами, практически независимы. Принято считать, что наилучшая оценка периода чандлеровских колебаний составляет 435 дней.

Предположение нормального распределения этой оценки (А. Н. Колмогоров, 1966) и линейного затухания ковариационной функции, приводит к тому, что время релаксации составляет 15–30 лет. Этот промежуток времени можно считать намного превосходящим промежутки в несколько лет, на которых значения чандлеровских колебаний являются независимыми. Таким образом, случайные процессы $\frac{d\phi_t}{dt}$ и $\frac{d\psi_t}{dt}$ в определенном приближении являются широкополосными относительно полосы пропускания системы (2.19) и, следовательно, могут считаться гауссовскими белыми шумами.

2.2.4 Модели химической кинетики и регуляции численности конкурирующих видов животных

В 1951 г. Б. П. Белоусовым была получена экспериментально колебательная химическая реакция в гомогенной системе. Результаты его исследований опубликованы в работе [37].

После этого было открыто достаточно много колебательных реакций [38, 39]. Для исследования таких химических реакций создавались различные математические модели. В частности, в 1920 г. А. Лоткой [35] была предложена гипотетическая химическая реакция, которая учитывала колебания концентраций реагентов. Уравнения этой реакции имеют вид

$$\frac{dx}{dt}(t) = k_1 x(t) + a_1 x(t)y(t), \quad (2.20)$$

$$\frac{dy}{dt}(t) = k_2 y(t) + a_2 x(t)y(t), \quad (2.21)$$

где $x(t)$ и $y(t)$ — концентрация реагентов; k_1, k_2, a_1, a_2 — постоянные. Аналогичная модель впоследствии была использована В. Вольтерра [36] для объяснения изменения численности конкурирующих видов животных. При этом $x(t)$ и $y(t)$ — численность двух конкурирующих видов, k_1, k_2 — коэффициенты увеличения их численности, а a_1 и a_2 — коэффициенты их смертности.

Предположим, что параметры роста k_1 и k_2 или соответствующие коэффициенты колебательной химической реакции имеют случайную составляющую, т. е. могут быть представлены в виде

$$k_1(t) = k_1' + \sigma_1 \xi^{(1)}(t),$$

$$k_2(t) = k_2' + \sigma_2 \xi^{(2)}(t),$$

где $\sigma_1, \sigma_2, k_1', k_2'$ — постоянные, а $\xi^{(1)}(t)$ и $\xi^{(2)}(t)$ — случайные процессы, которые при определенных условиях протекания химических реакций или определенных условиях существования конкурирующих видов животных могут считаться независимыми гауссовскими белыми шумами. Таким образом, стохастическая модель (2.20), (2.21) принимает вид

$$\frac{dx}{dt}(t) = (k_1' + a_1 y(t))x(t) + \sigma_1 x(t) \xi^{(1)}(t), \quad (2.22)$$

$$\frac{dy}{dt}(t) = (k_2' + a_2 x(t))y(t) + \sigma_2 y(t) \xi^{(2)}(t). \quad (2.23)$$

Более общая модель, получившая название модели Лотки–Вольтерра [36] имеет вид

$$\frac{dx^{(i)}}{dt}(t) = x^{(i)}(t) \left(\gamma_i + \sum_{j=1}^m \nu_{ij} x^{(j)}(t) \right),$$

или в случае стохастической модели,

$$\frac{dx^{(i)}}{dt}(t) = x^{(i)}(t) \left(\gamma_i' + \sum_{j=1}^m \nu_{ij} x^{(j)}(t) \right) + \sigma_i x^{(i)}(t) \xi^{(i)}(t), \quad (2.24)$$

где $x^{(i)}, i = 1, \dots, m$, — численность i -го вида животных или концентрация i -го вещества. Оправданность использования стохастических моделей (2.22)–(2.24), например, для описания колебательных химических реакций, заключается, в частности, в том, что для химических реакций, протекающих в объемах большой протяженности, существенную роль играет диффузия веществ. Если же для описания

такой химической реакции выбраны уравнения (2.20), (2.21), то очевидно, что диффузия в них не учитывается, поскольку в системе двух уравнений первого порядка возможны только периодические колебания.

2.2.5 Модели стохастической финансовой математики

В стохастической финансовой математике для описания динамики цен акций и других ценных бумаг существует достаточно много различных математических моделей диффузионного типа, имеющих вид стохастических дифференциальных уравнений Ито [18–23], [41].

Наиболее простыми математическими моделями данного класса являются модели Блэка–Шоулза и Башелье динамики цены акции S_t :

$$dS_t = \mu S_t dt + \sigma S_t df_t,$$

$$dS_t = a dt + b df_t,$$

где f_t — стандартный скалярный винеровский процесс; μ, σ, a, b — вещественные параметры.

В качестве более сложной математической модели приведем модель [18] динамики процентных ставок R_t :

$$dR_t = a_t dt + \sum_{i=1}^m \mathbf{b}_t^{(i)} df_t^{(i)},$$

где $\mathbf{f}_t^{(i)}, i = 1, \dots, m$, — независимые винеровские процессы; случайные процессы $a_t, \mathbf{b}_t^{(i)}, i = 1, \dots, m$, имеют определенный экономический смысл [18].

2.2.6 Модель солнечной активности

Систематические наблюдения за солнечной активностью стали проводить еще в 1610 г. Результаты этих наблюдений свидетельствуют о том, что солнечная активность, измеряемая числом пятен на Солнце и групп пятен, ведет себя как случайный процесс с систематической осцилляцией и периодом приблизительно 11 лет [42]. Принято считать, что не существует убедительных теоретических оснований для объяснения такой периодичности. На рис. 2.9 [31] изображена зависимость числа пятен на Солнце от времени, которая известна как числа Вольфера.

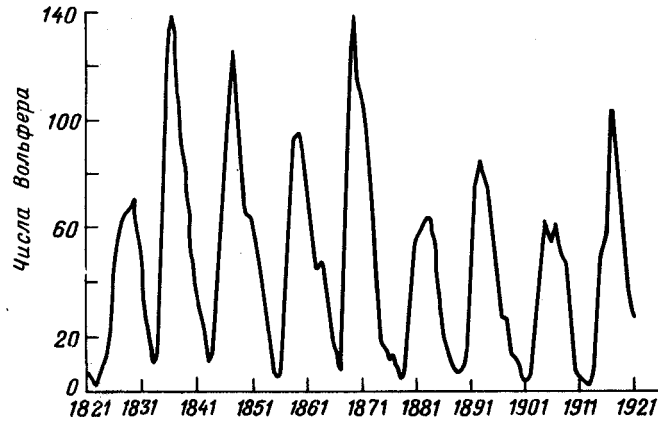


Рис. 2.9. Годичная солнечная активность.

Непрерывная математическая модель солнечной активности предложена М. Арато [31]. Эта модель представляет собой систему линейных стохастических дифференциальных уравнений, не учитывающую среднее значение солнечной активности:

$$d \begin{bmatrix} x_t \\ y_t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -a_2 & -a_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_t \\ y_t \end{bmatrix} dt + \begin{bmatrix} 0 \\ c \end{bmatrix} df_t, \quad (2.25)$$

где x_t — число пятен на Солнце; $f_t \in \mathfrak{R}^1$ — стандартный винеровский процесс; a_1, a_2, c — постоянные.

2.2.7 Модель лагранжевой динамики частицы жидкости

Пусть $\mathbf{x}_t \in \mathfrak{R}^3$ — вектор, описывающий положение частицы жидкости в момент времени t , а $\mathbf{v}_t \in \mathfrak{R}^3$ — вектор ее скорости. А. М. Обухов в [40] (см. также [86]) предложил простую модель лагранжевой динамики частицы жидкости в виде системы шести линейных стохастических дифференциальных уравнений Ито:

$$d\mathbf{x}_t = \mathbf{v}_t dt, \quad (2.26)$$

$$d\mathbf{v}_t = -\frac{1}{T} \mathbf{v}_t dt + b d\mathbf{f}_t, \quad (2.27)$$

где $\mathbf{f}_t \in \mathbb{R}^3$ — стандартный винеровский процесс с независимыми компонентами $\mathbf{f}_t^{(i)}$, $i = 1, 2, 3$; $b \in \mathbb{R}^1$ — скалярный диффузионный коэффициент; $T > 0$ — параметр, намного превосходящий время релаксации процесса $\mathbf{v}_t$; член $-\frac{1}{T}\mathbf{v}_t dt$ учитывает слабые силы трения, действующие на частицу жидкости извне.

2.2.8 Ошибки округления при численном решении обыкновенных дифференциальных уравнений

Рассмотрим систему обыкновенных дифференциальных уравнений

$$d\mathbf{x}(t) = \mathbf{g}(\mathbf{x}(t), t)dt, \quad \mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0, \quad (2.28)$$

где $\mathbf{x}(t) \in \mathbb{R}^n$; $\mathbf{g} : \mathbb{R}^n \times [t_0, T] \rightarrow \mathbb{R}^n$. Будем предполагать, что функция $\mathbf{g}(\mathbf{x}(t), t)$ является непрерывно дифференцируемой требуемое число раз, так что уравнение (2.28) с начальным условием имеет единственное решение.

Запишем одношаговую схему численного решения уравнения (2.28)

$$\mathbf{x}_{k+1} = \mathbf{x}_k + \Delta \mathbf{q}(\mathbf{x}_k, t_k, \Delta), \quad t_k = t_0 + \Delta k, \quad (2.29)$$

с ошибкой дискретизации $\mathbf{e}_k = \mathbf{x}(t_k) - \mathbf{x}_k$ и шагом дискретизации Δ . Известно, что на значительных промежутках интегрирования ошибки округления (они зависят от особенностей конкретного компьютера и особенностей выбранного численного метода) накапливаются и приводят к значительным потерям точности вычислений.

Посмотрим, как ведут себя эти ошибки. Пусть $\hat{\mathbf{x}}_k$ — численное приближение $\mathbf{x}_k$. Тогда вместо (2.29) получаем

$$\hat{\mathbf{x}}_{k+1} = \hat{\mathbf{x}}_k + \Delta \mathbf{q}(\hat{\mathbf{x}}_k, t_k, \Delta) + \mathbf{s}_{k+1},$$

где $\mathbf{s}_k$ — ошибка округления на k -м шаге. Накопленная ошибка округления $\mathbf{r}_k = \hat{\mathbf{x}}_k - \mathbf{x}_k$ удовлетворяет уравнению

$$\mathbf{r}_{k+1} = \mathbf{r}_k + \Delta (\mathbf{q}(\hat{\mathbf{x}}_k, t_k, \Delta) - \mathbf{q}(\mathbf{x}_k, t_k, \Delta)) + \mathbf{s}_{k+1},$$

из которого видно, что она является не просто суммой локальных ошибок округления. Если предположить, что приращение $\mathbf{q}(\hat{\mathbf{x}}_k, t_k, \Delta) - \mathbf{q}(\mathbf{x}_k, t_k, \Delta)$ линейно по $\mathbf{r}_k$, то можно прийти [44] к следующему уравнению:

$$\mathbf{r}_{k+1} - \mathbf{r}_k = \Delta G(t_k) \mathbf{r}_k + \mu(\Delta) \mathbf{p}(t_{k+1}) + B_s(t_k) \mathbf{s}_{k+1}, \quad \mathbf{r}_0 = 0, \quad (2.30)$$

где $G, B_s \in \mathbb{R}^{n \times n}$; $\mu \in \mathbb{R}^1$; $\mathbf{p} \in \mathbb{R}^n$; $M\{\mathbf{s}_k\} = 0$, $M\{\mathbf{s}_k \mathbf{s}_k^T\} = I$; I — единичная матрица.

Уравнение (2.30) можно рассматривать как дискретный аналог стохастического дифференциального уравнения Ито вида

$$d\mathbf{r}_t = G(t)\mathbf{r}_t dt + \mu\mathbf{p}(t)dt + B_{\mathbf{f}}(t)d\mathbf{f}_t, \mathbf{r}_0 = 0, \quad (2.31)$$

где $\mathbf{f}_t \in \mathfrak{R}^m$ — стандартный винеровский процесс с независимыми компонентами.

Теория интегральных представлений решений уравнений типа (2.31) будет подробно рассматриваться в главе 11.

2.3 Диффузионно-скачкообразные математические модели

2.3.1 Диффузионно-скачкообразные модели стохастической финансовой математики

В стохастической финансовой математике для описания динамики процентных R_t , форвардных процентных $F_t(T)$ ставок и цен облигаций $P_t(T)$, $t \in [0, T]$, $T < \infty$, [18] существует достаточно большое число различных математических моделей диффузионного типа, т. е. моделей, представляющих собой стохастические дифференциальные уравнения Ито, или системы стохастических дифференциальных уравнений Ито. Основные модели данного типа можно найти, например, в [18–23]. В некоторых моделях диффузионного типа используется один винеровский процесс f_t , однако в ряде моделей вместо одномерного винеровского процесса вводится векторный винеровский процесс $\mathbf{f}_t$ с независимыми компонентами $\mathbf{f}_t^{(i)}$, $i = 1, \dots, m$.

Для учета скачкообразных изменений стоимостей $P_t(T)$ в некоторых работах используются скачкообразные случайные процессы. Так, в [18, 19] рассматривается модель динамики процентных ставок R_t

$$dR_t = a_t dt + \sum_{i=1}^m \mathbf{b}_t^{(i)} d\mathbf{f}_t^{(i)} + \int_{\Theta} q(t, \mathbf{x}) \mu(dt, d\mathbf{x}), \quad (2.32)$$

где $\mu(dt, d\mathbf{x})$ — целочисленная случайная мера (например, пуассоновская), заданная в пространстве $[0, \infty) \times \Theta$; $\mathbf{f}_t^{(i)}$, $i = 1, \dots, m$, — независимые винеровские процессы, которые не зависят от значений случайной меры $\mu(dt, d\mathbf{x})$; случайные процессы a_t , $\mathbf{b}_t^{(i)}$, $i = 1, \dots, m$, и $q(t, \mathbf{x})$ имеют определенный экономический смысл (см. [18]).

Уравнения, описывающие динамику $P_t(T)$ и $F_t(T)$ и соответствующие уравнению (2.32), имеют вид

$$dP_t(T) = P_t(T) \left(A_t(T)dt + \sum_{i=1}^m B_t^{(i)}(T)df_t^{(i)} \right) + \\ + P_{t-}(T) \int_{\Theta} q(t, \mathbf{x}, T) \mu(dt, d\mathbf{x}), \quad (2.33)$$

$$dF_t(T) = a_t(T)dt + \sum_{i=1}^m \mathbf{b}_t^{(i)}(T)df_t^{(i)} + \\ + \int_{\Theta} \delta(t, \mathbf{x}, T) \mu(dt, d\mathbf{x}), \quad (2.34)$$

где случайные процессы $A_t(T)$, $\delta(t, \mathbf{x}, T)$, $B_t^{(i)}$, $i = 1, \dots, m$, также имеют определенный экономический смысл.

В ряде работ используются менее общие математические модели, чем (2.32)–(2.34). Так, в [21, 22] рассматривается стохастическое дифференциальное уравнение со скачкообразной компонентой, которое описывает динамику цены акции S_t :

$$dS_t = (\mu - \lambda k)S_t dt + \sigma S_t df_t + S_t d\nu_t, \quad (2.35)$$

где f_t — скалярный стандартный винеровский процесс; ν_t — однородный процесс Пуассона с параметром λkt , который независим с винеровским процессом f_t , а μ , λ , k , σ — числовые параметры. Модель (2.35) является обобщением модели Блэка–Шоулза, относящейся к моделям диффузионного типа.

2.3.2 Скачкообразная модель лагранжевой динамики частицы жидкости

Вернемся к рассмотрению динамики частицы жидкости. В [86] указывается, что в ряде ситуаций в системе (2.26), (2.27) вместо векторного возмущающего процесса $\mathbf{f}_t$ может быть использован векторный процесс Пуассона $\nu_t^\top = (\nu_t^{(1)}, \nu_t^{(2)}, \nu_t^{(3)})$, где $\nu_t^{(i)}$, $i = 1, 2, 3$, — независимые процессы Пуассона с заданным параметром. Таким образом, система (2.26), (2.27) преобразуется в систему стохастических дифференциальных уравнений со скачкообразной компонентой:

$$d\mathbf{x}_t = \mathbf{v}_t dt, \quad d\mathbf{v}_t = -\frac{1}{T}\mathbf{v}_t dt + b\nu_t,$$

где сохранен смысл обозначений, введенных в (2.26), (2.27).

2.4 Математические задачи, связанные со стохастическими дифференциальными уравнениями

2.4.1 Фильтрация

Рассмотрим вектор состояния $\mathbf{x}_t \in \mathbb{R}^n$, который является гауссовским и удовлетворяет системе линейных стохастических дифференциальных уравнений Ито:

$$d\mathbf{x}_t = A\mathbf{x}_t dt + Bd\mathbf{w}_t, \quad \mathbf{x}_0 = \mathbf{x}(0, \omega), \quad (2.36)$$

где $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $B \in \mathbb{R}^{n \times m}$ — числовые матрицы; $\mathbf{w}_t \in \mathbb{R}^m$ — стандартный винеровский процесс с независимыми компонентами $\mathbf{w}_t^{(i)}$, $i = 1, \dots, m$; $\mathbf{x}_0 \in \mathbb{R}^n$ — гауссовская случайная величина. Предположим, что измерение вектора $\mathbf{x}_t$ невозможно, но допустимо измерять наблюдаемый процесс $\mathbf{y}_t \in \mathbb{R}^k$, $1 \leq k \leq n$, который удовлетворяет следующей системе линейных стохастических дифференциальных уравнений Ито:

$$d\mathbf{y}_t = H\mathbf{x}_t dt + \Sigma d\mathbf{f}_t, \quad \mathbf{y}_0 = O_{n \times 1}, \quad (2.37)$$

где $H \in \mathbb{R}^{k \times n}$, $\Sigma \in \mathbb{R}^{k \times l}$ — числовые матрицы; $\mathbf{f}_t \in \mathbb{R}^l$ — стандартный винеровский процесс с независимыми компонентами $\mathbf{f}_t^{(i)}$, $i = 1, \dots, l$, не зависящий от винеровского процесса $\mathbf{w}_t$; $O_{n \times 1}$ — нулевой столбец длиной n .

Далее будем считать, что $\mathcal{F}_t, t \geq 0$, — σ -алгебра, порожденная $\mathbf{x}_0, \mathbf{y}_s, \mathbf{w}_s, 0 \leq s \leq t$, и $\mathcal{Y}_t, t \geq 0$, — σ -алгебра, порожденная $\mathbf{y}_s, 0 \leq s \leq t$. Запишем уравнение фильтра Калмана–Бьюси

$$\hat{\mathbf{x}}_t = M\{\mathbf{x}_t | \mathcal{Y}_t\},$$

где $\hat{\mathbf{x}}_t$ — наилучшая оценка вектора состояния $\mathbf{x}_t$, доставляющая минимум функционалу

$$M\{|\mathbf{x}_t - \hat{\mathbf{x}}_t|^2\},$$

причем $M\{\mathbf{x}_t\} = M\{\hat{\mathbf{x}}_t\}$ и

$$\frac{dR(t)}{dt} = AR(t) + R(t)A^\top + BB^\top - R(t)H^\top (\Sigma\Sigma^\top)^{-1} HR(t), \quad (2.38)$$

где $R(0) = M\{\mathbf{x}_0\mathbf{x}_0^\top\}$; $R(t) = M\{(\mathbf{x}_t - \hat{\mathbf{x}}_t)(\mathbf{x}_t - \hat{\mathbf{x}}_t)^\top\}$ — ковариационная матрица ошибки оценивания $\mathbf{e}_t \stackrel{\text{def}}{=} \mathbf{x}_t - \hat{\mathbf{x}}_t$. Известно также, что

$\hat{\mathbf{x}}_t$ — гауссовский процесс, удовлетворяющий системе линейных стохастических дифференциальных уравнений

$$d\hat{\mathbf{x}}_t = \left(A - R(t)H^\top (\Sigma\Sigma^\top)^{-1} H \right) \hat{\mathbf{x}}_t dt + R(t)H^\top (\Sigma\Sigma^\top)^{-1} d\mathbf{y}_t. \quad (2.39)$$

Отметим, что соотношения (2.38), (2.39) получаем с учетом равенства

$$\mathbb{M} \left\{ (\mathbf{x}_t - \hat{\mathbf{x}}_t)^\top \hat{\mathbf{x}}_t \right\} = 0.$$

Используя (2.37) и (2.39), имеем

$$d\hat{\mathbf{x}}_t = A\hat{\mathbf{x}}_t dt + R(t)H^\top (\Sigma\Sigma^\top)^{-1} H \mathbf{e}_t dt + R(t)H^\top (\Sigma\Sigma^\top)^{-1} \Sigma d\mathbf{f}_t. \quad (2.40)$$

Вычитая (2.40) из (2.36), выводим следующее стохастическое дифференциальное уравнение для ошибки оценивания $\mathbf{e}_t$:

$$d\mathbf{e}_t = \left(A - R(t)H^\top (\Sigma\Sigma^\top)^{-1} H \right) \mathbf{e}_t dt - R(t)H^\top (\Sigma\Sigma^\top)^{-1} H d\mathbf{f}_t + B d\mathbf{w}_t. \quad (2.41)$$

Объединяя уравнения (2.40) и (2.41), имеем

$$\begin{aligned} d \begin{bmatrix} \mathbf{e}_t \\ \hat{\mathbf{x}}_t \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} A - R(t)H^\top (\Sigma\Sigma^\top)^{-1} H & O \\ R(t)H^\top (\Sigma\Sigma^\top)^{-1} H & A \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{e}_t \\ \hat{\mathbf{x}}_t \end{bmatrix} dt + \\ &+ \begin{bmatrix} B & -R(t)H^\top (\Sigma\Sigma^\top)^{-1} \Sigma \\ O & R(t)H^\top (\Sigma\Sigma^\top)^{-1} \Sigma \end{bmatrix} d \begin{bmatrix} \mathbf{w}_t \\ \mathbf{f}_t \end{bmatrix}, \end{aligned} \quad (2.42)$$

где O — нулевые матрицы соответствующих размеров.

Система уравнений (2.42) представляет собой систему линейных стохастических дифференциальных уравнений Ито, которая может быть решена численно с помощью методов, обсуждаемых в предлагаемой книге, если численно решено уравнение Риккати (2.38) и известна матрица $R(t)$ в дискретные моменты времени. Отметим, что если второе уравнение (2.42) заменить на уравнение состояния, то система (2.42) преобразуется в систему вида

$$\begin{aligned} d \begin{bmatrix} \mathbf{e}_t \\ \mathbf{x}_t \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} A - R(t)H^\top (\Sigma\Sigma^\top)^{-1} H & O \\ O & A \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{e}_t \\ \mathbf{x}_t \end{bmatrix} dt + \\ &+ \begin{bmatrix} B & -R(t)H^\top (\Sigma\Sigma^\top)^{-1} \Sigma \\ B & O \end{bmatrix} d \begin{bmatrix} \mathbf{w}_t \\ \mathbf{f}_t \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Нами была рассмотрена задача линейной фильтрации. Следует отметить, что задача нелинейной фильтрации также может быть сведена к задаче численного решения стохастических дифференциальных уравнений Ито (см., например, [8, 86]).

В главе 15 рассмотрена (см. также [86]) задача о фильтрации марковской цепи с непрерывным временем и конечным числом состояний, а также приведены соответствующие численные эксперименты. Численное решение данной задачи также основывается на численном интегрировании стохастических дифференциальных уравнений Ито.

2.4.2 Оптимальное стохастическое управление

В ряде задач, например, в задачах об управлении портфелем ценных бумаг, управлении движением динамического объекта и т. д., возникает необходимость выбирать управляющее воздействие на основе какого-либо оптимального критерия. Предположим, что уравнение состояния представляет собой систему стохастических дифференциальных уравнений Ито вида

$$d\mathbf{x}_t = \mathbf{a}(\mathbf{x}_t, \mathbf{u}, t)dt + \Sigma(\mathbf{x}_t, \mathbf{u}, t)d\mathbf{f}_t,$$

где используются приведенные ранее обозначения, а $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^k$ — управляющее воздействие, которое выбирается из условия минимизации функционала

$$J(\mathbf{x}, \mathbf{u}, s) = M \left\{ Q(\mathbf{x}_T, T) + \int_s^T F(\mathbf{x}_t, \mathbf{u}, t)dt \mid \mathbf{x}_s = \mathbf{x} \right\},$$

где Q, F — известные функции, а T , например, — постоянный момент времени.

Известны различные управляющие воздействия, которые могут содержать или не содержать информацию о векторе состояния системы в предшествующие моменты времени. Рассмотрим управление $\mathbf{u}(\mathbf{x}_t, t)$ марковского типа. Тогда минимальная для него по $\mathbf{u}$ величина функционала $J(\mathbf{x}, \mathbf{u}, s)$, обозначаемая через $H(\mathbf{x}, s)$, удовлетворяет уравнению Гамильтона–Якоби–Беллмана

$$\min_{\mathbf{u} \in \mathbb{R}^k} \{F(\mathbf{x}, \mathbf{u}, s) + L_u H(\mathbf{x}, s)\} = 0$$

с граничным условием

$$H(\mathbf{x}, T) = Q(\mathbf{x}, T),$$

где

$$L_u H(\mathbf{x}, s) = \frac{\partial H}{\partial s}(\mathbf{x}, s) + \sum_{i=1}^n \mathbf{a}^{(i)}(\mathbf{x}, \mathbf{u}, s) \frac{\partial H}{\partial \mathbf{x}^{(i)}}(\mathbf{x}, s) + \\ + \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^n D^{(ij)}(\mathbf{x}, \mathbf{u}, s) \frac{\partial^2 H}{\partial \mathbf{x}^{(i)} \partial \mathbf{x}^{(j)}}(\mathbf{x}, s);$$

$$D = \Sigma \Sigma^\top.$$

Отметим, что приведенные ранее условия являются необходимыми условиями, которым удовлетворяет минимум функционала, если он существует.

Рассмотрим линейно-квадратичную задачу стохастического управления, т. е. задачу нахождения управления $\mathbf{u}(\mathbf{x}_t, t)$ марковского типа, доставляющего минимум функционалу

$$J(\mathbf{x}, \mathbf{u}, s) = \mathbb{M} \left\{ \mathbf{x}_T^\top R \mathbf{x}_T + \int_s^T (\mathbf{x}_t^\top C(t) \mathbf{x}_t + \mathbf{u}^\top P(t) \mathbf{u}) | \mathbf{x}_s = \mathbf{x} \right\},$$

где $C(t) : [s, T] \rightarrow \mathbb{R}^{n \times n}$; $P(t) : [s, T] \rightarrow \mathbb{R}^{k \times k}$, а $\mathbf{x}_t \in \mathbb{R}^n$ — решение системы стохастических дифференциальных уравнений

$$d\mathbf{x}_t = (A(t)\mathbf{x}_t + B(t)\mathbf{u}(\mathbf{x}_t, t)) dt + \Sigma(t) d\mathbf{w}_t,$$

где $A(t) : [s, T] \rightarrow \mathbb{R}^{n \times n}$; $B(t) : [s, T] \rightarrow \mathbb{R}^{n \times k}$; $\Sigma(t) : [s, T] \rightarrow \mathbb{R}^{n \times m}$, а $\mathbf{w}_t \in \mathbb{R}^m$ — стандартный винеровский процесс с независимыми компонентами $\mathbf{w}_t^{(i)}$, $i = 1, \dots, m$. Кроме того, предполагаем, что все зависящие от t матрицы непрерывны, $C(t)$ и R — симметричные неотрицательно определенные матрицы, а матрица $P(t)$ симметричная и положительно определенная.

Запишем уравнение Гамильтона–Якоби–Беллмана для данной задачи:

$$\frac{\partial H}{\partial s} + \mathbf{x}^\top C(s) \mathbf{x} + \sum_{j=1}^n (A(s)\mathbf{x})^{(j)} \frac{\partial H}{\partial \mathbf{x}^{(j)}} + \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^n D^{(ij)}(s) \frac{\partial^2 H}{\partial \mathbf{x}^{(i)} \partial \mathbf{x}^{(j)}} + \\ + \min_{\mathbf{u} \in \mathbb{R}^k} \left\{ \mathbf{u}^\top P(t) \mathbf{u} + \sum_{j=1}^n (B(s)\mathbf{u})^{(j)} \frac{\partial H}{\partial \mathbf{x}^{(j)}} \right\} = 0,$$

где $D(t) \stackrel{\text{def}}{=} \Sigma(t) \Sigma^\top(t)$, а граничное условие имеет вид

$$H(T, \mathbf{x}) = \mathbf{x}^\top R \mathbf{x}.$$

В [86], в частности, показано, что оптимальное управление и минимальное значение функционала $J(\mathbf{x}, \mathbf{u}, s)$ в рассматриваемом случае приобретают вид

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}, s) = -P^{-1}(s)B(s)\mathbf{x}, \quad (2.43)$$

$$H(\mathbf{x}, s) = \mathbf{x}^\top S(s)\mathbf{x} + \int_s^T \text{tr} \{ \Sigma(t)\Sigma^\top(t)S(t) \} dt, \quad (2.44)$$

где tr — след (сумма диагональных элементов) матрицы; $S(t) : [s, T] \rightarrow \mathbb{R}^{n \times n}$ — симметричная положительно определенная и непрерывно дифференцируемая матричная функция, которая удовлетворяет матричному уравнению Риккати

$$\frac{dS(t)}{dt} = -A(t)^\top S(t) - S(t)A(t) + S(t)B(t)P^{-1}(t)B(t)S(t) - C(t), \quad (2.45)$$

$$S(T) = R.$$

Таким образом, если решено (вообще говоря, численно) уравнение Риккати (2.45), то по формулам (2.43) и (2.44) можно найти оптимальное управление и минимальное значение функционала.

Если вместо вектора состояния $\mathbf{x}_t$ допустимо использовать только процесс наблюдения вида (2.37), где матрицы H и Σ зависят от времени, то с помощью фильтра Калмана–Бьюси можно построить оценку $\hat{\mathbf{x}}_t$ и использовать ее в оптимальном управлении $\mathbf{u}(\hat{\mathbf{x}}_t, t)$ для линейно-квадратичной задачи. В работе [86] обсуждаются также вопросы, связанные с другими задачами стохастического оптимального управления.

2.4.3 Стохастическая устойчивость

Рассмотрим стохастическое дифференциальное уравнение Ито

$$d\mathbf{x}_t = \mathbf{a}(\mathbf{x}_t, t)dt + \Sigma(\mathbf{x}_t, t)d\mathbf{f}_t, \quad \mathbf{x}_0 = \mathbf{x}(0, \omega), \quad (2.46)$$

где сохранен смысл обозначений, входящих в (1.35). Будем считать, что $\mathbf{x}_t \equiv \mathbf{0}$ ($(\underbrace{0 \dots 0}_n)^\top \stackrel{\text{def}}{=} \mathbf{0}$) является невозмущенным движением динамической системы, а возмущенное движение описывается уравнением (2.46). В соответствии с этим положим

$$\mathbf{a}(\mathbf{0}, t) \equiv 0, \quad \Sigma(\mathbf{0}, t) \equiv 0, \quad t \geq 0.$$

Пусть также выполнены условия AI–AIII теоремы 1.6, которые гарантируют существование и единственность решения уравнения (2.46).

Приведем некоторые определения основных типов устойчивости для стохастических систем.

Определение 2.1. *Невозмущенное движение системы $\mathbf{x}_t \equiv 0$ будем называть устойчивым по вероятности или стохастически устойчивым при $t \geq t_0$, если для любых $\varepsilon > 0$ и $t_0 \geq 0$*

$$\lim_{\mathbf{x}_0 \rightarrow 0} \mathbb{P} \left\{ \sup_{t \geq t_0} |\mathbf{x}_t^{\mathbf{x}_0, t_0}| \geq \varepsilon \right\} = 0,$$

где $\mathbf{x}_t^{\mathbf{x}_0, t_0}$ — такое решение уравнения (2.46), что $\mathbf{x}_{t_0} = \mathbf{x}_0$.

Определение 2.2. *Невозмущенное движение системы $\mathbf{x}_t \equiv 0$ называется асимптотически устойчивым по вероятности или асимптотически стохастически устойчивым, если оно стохастически устойчиво и, кроме того,*

$$\lim_{\mathbf{x}_0 \rightarrow 0} \mathbb{P} \left\{ \lim_{t \rightarrow \infty} |\mathbf{x}_t^{\mathbf{x}_0, t_0}| = 0 \right\} = 1.$$

Приведенные определения являются обобщением классических определений устойчивости в малом по Ляпунову на случай стохастических систем.

Определение 2.3. *Невозмущенное движение системы $\mathbf{x}_t \equiv 0$ называется асимптотически стохастически устойчивым в целом, если оно стохастически устойчиво и, кроме того, для всех $|\mathbf{x}_0| < \infty$*

$$\mathbb{P} \left\{ \lim_{t \rightarrow \infty} |\mathbf{x}_t^{\mathbf{x}_0, t_0}| = 0 \right\} = 1.$$

Приведем некоторые определения устойчивости, связанные с моментными характеристиками процесса $\mathbf{x}_t$.

Определение 2.4. *Невозмущенное движение системы $\mathbf{x}_t \equiv 0$ называется устойчивым в среднем степени p , $p > 0$, или p -устойчивым, если для любых $\varepsilon > 0$ и $t_0 \geq 0$ найдется $\delta = \delta(t_0, \varepsilon) > 0$ такое, что*

$$\mathbb{M} \left\{ |\mathbf{x}_t^{\mathbf{x}_0, t_0}|^p \right\} < \varepsilon \quad \forall t \geq t_0 \text{ и } |\mathbf{x}_0| < \delta.$$

Определение 2.5. *Невозмущенное движение системы $\mathbf{x}_t \equiv 0$ называется асимптотически устойчивым в среднем степени p , $p > 0$, или асимптотически p -устойчивым, если оно p -устойчиво и существует $\delta_0 = \delta_0(t_0) > 0$ такое, что*

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \mathbb{M} \left\{ |\mathbf{x}_t^{\mathbf{x}_0, t_0}|^p \right\} = 0 \quad \forall |\mathbf{x}_0| < \delta_0.$$

Определение 2.6. *Невозмущенное движение системы $\mathbf{x}_t \equiv \mathbf{0}$ называется экспоненциально p -устойчивым, если существуют постоянные $\gamma > 0$ и $\alpha > 0$ такие, что*

$$\mathbb{M} \{ |\mathbf{x}_t^{\mathbf{x}_0, t_0}|^p \} < \gamma |\mathbf{x}_0|^p e^{-\alpha(t-t_0)}, \quad t \geq t_0.$$

Следует отметить, что существуют и другие определения стохастической устойчивости [46–49].

Известно, что одним из методов исследования устойчивости детерминированных систем является метод функций Ляпунова. Достоинство такого метода заключается в том, что он позволяет (если соответствующая функция Ляпунова найдена) установить характер поведения решения дифференциального уравнения, не требуя при этом знания точного решения дифференциального уравнения. Обобщения метода функций Ляпунова на класс стохастических дифференциальных уравнений были получены в основном в 60–80-е годы благодаря усилиям, главным образом, Г. Дж. Кушнера [2, 47] и Р. З. Хасьминского [46].

Рассмотрим суть метода стохастических функций Ляпунова. Положим, что функция $V(\mathbf{x}, t) : \mathbb{R}^n \times [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}^1$ при всех $(\mathbf{x}, t) \in \mathcal{U} \times [0, \infty)$ ($\mathcal{U} \subset \mathbb{R}^n$, $\mathbf{0} \in \mathcal{U}$, $(\underbrace{0 \dots 0}_n)^T \stackrel{\text{def}}{=} \mathbf{0}$) является непрерывной и положительно определенной. Пусть также функция $V(\mathbf{x}, t)$ дважды непрерывно дифференцируема по $\mathbf{x}$ и один раз по t за исключением, быть может, множества $\mathbf{x} = \mathbf{0}$. Кроме того, предположим, что $V(\mathbf{0}, t) = 0$. Далее через $\mathcal{C}_2^0(\mathcal{U})$ будем обозначать множество функций дважды непрерывно дифференцируемых по $\mathbf{x} \in \mathcal{U}$ и один раз по t за исключением, быть может, множества $\mathbf{x} = \mathbf{0}$. В силу формулы Ито имеем

$$V(\mathbf{x}_t, t) - V(\mathbf{x}_{t_0}, t_0) = \int_{t_0}^t LV(\mathbf{x}_\tau, \tau) d\tau + \sum_{i=1}^m \int_{t_0}^t G_0^{(i)} V(\mathbf{x}_\tau, \tau) d\mathbf{f}_\tau^{(i)} \quad \text{с в.1,} \quad (2.47)$$

где операторы L и $G_0^{(i)}$ определены на множествах $\mathcal{L}$ и $\mathcal{G}_0$ (см. главу 1) и имеют вид

$$\begin{aligned} LV(\mathbf{x}, t) &= \frac{\partial V}{\partial t}(\mathbf{x}, t) + \sum_{i=1}^n \mathbf{a}^{(i)}(\mathbf{x}, t) \frac{\partial V}{\partial \mathbf{x}^{(i)}}(\mathbf{x}, t) + \\ &+ \frac{1}{2} \sum_{j=1}^m \sum_{l,i=1}^n \Sigma^{(lj)}(\mathbf{x}, t) \Sigma^{(ij)}(\mathbf{x}, t) \frac{\partial^2 V}{\partial \mathbf{x}^{(l)} \partial \mathbf{x}^{(i)}}(\mathbf{x}, t), \end{aligned}$$

$$G_0^{(i)}V(\mathbf{x}, t) = \sum_{j=1}^n \Sigma^{(ji)}(\mathbf{x}, t) \frac{\partial V}{\partial \mathbf{x}^{(j)}}(\mathbf{x}, t), \quad i = 1, \dots, m.$$

Нетрудно установить, что роль первой производной $V(\mathbf{x}, t)$ по $\mathbf{x}$ в соответствии с уравнением движения в стохастическом случае играет функция $LV(\mathbf{x}_s, s)$. Будем считать, что при $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$, $t \geq 0$ выполняется неравенство

$$LV(\mathbf{x}, t) \leq 0. \quad (2.48)$$

Функцию $V(\mathbf{x}, t)$, обладающую перечисленными свойствами, будем называть стохастической функцией Ляпунова. К стохастической функции Ляпунова могут предъявляться также некоторые дополнительные требования. Далее, используя (2.47), (2.48) и свойство интеграла Ито, получаем

$$\mathbb{M}\{V(\mathbf{x}_t, t) | \mathcal{F}_{t_0}\} \leq V(\mathbf{x}_{t_0}, t_0) \text{ с в.1.}$$

Таким образом, $V(\mathbf{x}_t, t)$ — супермартингал. Если y_s , $s \geq 0$, — мартингал и $\mathbb{M}\{|y_s|^p\} < \infty$, то справедливо хорошо известное неравенство

$$\mathbb{P}\left\{\omega \in \Omega : \sup_{0 \leq s \leq t} |y(s, \omega)| \geq \alpha\right\} \leq \frac{1}{\alpha^p} \mathbb{M}\{|y_t|^p\} \quad \forall \alpha > 0,$$

и, следовательно,

$$\mathbb{P}\left\{\sup_{t_0 \leq t \leq T} V(\mathbf{x}_t, t) \geq \delta\right\} \leq \frac{1}{\delta} V(\mathbf{x}_{t_0}, t_0) \quad \forall \delta > 0, \quad \forall T > t_0.$$

Из последнего неравенства, непрерывности $V(\mathbf{x}, t)$ и соотношения $V(\mathbf{0}, t) = 0$ получаем

$$\lim_{\mathbf{x}_0 \rightarrow \mathbf{0}} \mathbb{P}\left\{\sup_{t_0 \leq t \leq T} V(\mathbf{x}_t, t) \geq \delta\right\} = 0. \quad (2.49)$$

Далее, предполагая, что при некоторых постоянных p, k_1, k_2 , $p > 0$,

$$k_1 |\mathbf{x}|^p \leq V(\mathbf{x}, t) \leq k_2 |\mathbf{x}|^p,$$

согласно (2.49) получаем, что невозмущенное движение системы $\mathbf{x}_t \equiv \mathbf{0}$ стохастически устойчиво.

Приведем некоторые хорошо известные факты (см., например, [46–48]), касающиеся разных видов стохастической устойчивости.

Теорема 2.1. Пусть в области $\mathcal{U} \times [0, \infty)$, $\mathcal{U} \subset \mathbb{R}^n$ включающей в себя множество $\mathbf{x} \equiv \mathbf{0}$, существует непрерывная, положительно определенная функция $V(\mathbf{x}, t) \in C_2^0(\mathcal{U})$ и пусть

$$\lim_{\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{0}} \sup_{t > 0} V(\mathbf{x}, t) = 0,$$

а $LV(\mathbf{x}, t) < 0$ в этой области. Тогда невозмущенное движение $\mathbf{x}_t \equiv 0$ асимптотически стохастически устойчиво.

Теорема 2.2. Пусть для всех $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ существует положительно определенная функция $V(\mathbf{x}, t) \in C_2^0(\mathbb{R}^n)$, для которой

$$\begin{aligned} \lim_{\mathbf{x} \rightarrow 0} \sup_{t > 0} V(\mathbf{x}, t) &= 0, \\ \inf_{t > 0} V(\mathbf{x}, t) &\rightarrow \infty \text{ при } |\mathbf{x}| \rightarrow \infty, \\ LV(\mathbf{x}, t) &< 0. \end{aligned}$$

Тогда невозмущенное движение $\mathbf{x}_t \equiv 0$ асимптотически стохастически устойчиво в целом.

Теорема 2.3. Для экспоненциальной p -устойчивости невозмущенного движения $\mathbf{x}_t \equiv 0$ при $t > 0$ достаточно, чтобы при всех $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ существовала функция $V(\mathbf{x}, t) \in C_2^0(\mathbb{R}^n)$, удовлетворяющая при некоторых положительных постоянных k_1, k_2, k_3 неравенствам

$$\begin{aligned} k_1 |\mathbf{x}|^p &\leq V(\mathbf{x}, t) \leq k_2 |\mathbf{x}|^p, \\ LV(\mathbf{x}, t) &\leq -k_3 |\mathbf{x}|^p. \end{aligned}$$

Другой метод, используемый в детерминистской теории устойчивости, заключается в линеаризации дифференциального уравнения в окрестности невозмущенного движения и анализе устойчивости нулевого решения линеаризованного дифференциального уравнения. Известно, что в ряде случаев устойчивость нулевого решения линеаризованной системы влечет за собой устойчивость невозмущенного решения соответствующей нелинейной системы.

Особую роль при анализе устойчивости с помощью этого метода играют ляпуновские экспоненты, или ляпуновские показатели. Оказывается, что такой метод линеаризации может быть обобщен на случай стохастических систем. Ляпуновским экспонентам для стохастических систем посвящен целый ряд работ. В частности, примеры точного вычисления ляпуновских экспонент для стохастических систем можно найти в [50, 51], а численные методы их вычисления — в [86, 87]. Проанализируем указанный метод, опираясь, главным образом, на работу [86].

Рассмотрим стохастическое дифференциальное уравнение Стратоновича

$$d\mathbf{x}_t = \mathbf{a}(\mathbf{x}_t, t)dt + \sum_{k=1}^m \mathbf{b}_k(\mathbf{x}_t, t)d^*\mathbf{f}_t^{(k)}, \quad (2.50)$$

где $\mathbf{a}(\mathbf{x}, t)$, $\mathbf{b}_k(\mathbf{x}, t) : \mathbb{R}^n \times [0, T] \rightarrow \mathbb{R}^n$; $\mathbf{f}_t \in \mathbb{R}^m$ — стандартный винеровский процесс с независимыми компонентами $\mathbf{f}_t^{(k)}$, $k = 1, \dots, m$. Предположим, что $\hat{\mathbf{x}}_t$ — стохастически стационарное решение уравнения (2.50). Линеаризуем уравнение (2.50) в окрестности $\hat{\mathbf{x}}_t$:

$$d\mathbf{z}_t = A_t \mathbf{z}_t dt + \sum_{k=1}^m B_t^k \mathbf{z}_t d\mathbf{f}_t^{(k)}, \quad (2.51)$$

где $\mathbf{z}_t = \mathbf{x}_t - \hat{\mathbf{x}}_t \in \mathbb{R}^n$; $A_t, B_t^1, \dots, B_t^m : [0, T] \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}^{n \times n}$ — случайные матрицы, покомпонентно определяемые следующими соотношениями:

$$(A_t)^{(ij)} = \frac{\partial \mathbf{a}^{(i)}}{\partial \mathbf{x}^{(j)}}(\hat{\mathbf{x}}_t, t),$$

$$(B_t^k)^{(ij)} = \frac{\partial \mathbf{b}_k^{(i)}}{\partial \mathbf{x}^{(j)}}(\hat{\mathbf{x}}_t, t),$$

где $i, j = 1, \dots, n$; $k = 1, \dots, m$. Можно показать [86], что с вероятностью 1 существуют n неслучайных ляпуновских экспонент $\lambda_n \leq \lambda_{n-1} \leq \dots \leq \lambda_1$ и разбиение $\mathbb{R}^n$ на случайные множества $\Lambda_n(\omega), \dots, \Lambda_1(\omega)$ такие, что для стартовавших из этих множеств решений уравнения (2.51) пределы

$$\lambda(\mathbf{z}_0, t_0) = \limsup_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t - t_0} \ln |\mathbf{z}_t^{\mathbf{z}_0, t_0}|,$$

где $\mathbf{z}_{t_0} \stackrel{\text{def}}{=} \mathbf{z}_0$, равны $\lambda_n, \dots, \lambda_1$ соответственно.

Далее можно показать, что стохастическая асимптотическая устойчивость нулевого решения $\mathbf{z}_t \equiv \mathbf{0}$ уравнения (2.51) наступает тогда и только тогда, когда $\lambda_1 < 0$. В [86, 87] предложен метод вычисления λ_1 и получена соответствующая формула в случае $\hat{\mathbf{x}}_t \equiv \mathbf{0}$ и автономной системы, получающейся из (2.50) заменой $\mathbf{a}(\mathbf{x}, t)$, $\mathbf{b}_k(\mathbf{x}, t)$, $k = 1, \dots, m$, на $\mathbf{a}(\mathbf{x})$, $\mathbf{b}_k(\mathbf{x})$, $k = 1, \dots, m$, соответственно. В этих работах также предложен численный метод для вычисления λ_1 .

Отметим, что стохастические системы, для которых λ_1 намного больше λ_n , называются *жесткими* [86].

В заключение покажем, как можно решить вопрос о среднеквадратической устойчивости систем линейных стохастических дифференциальных уравнений Ито

$$d\mathbf{x}_t = A(t)\mathbf{x}_t dt + \sum_{k=1}^m B_k(t)\mathbf{x}_t d\mathbf{f}_t^{(k)}, \quad (2.52)$$

$$d\mathbf{x}_t = (A(t)\mathbf{x}_t + \mathbf{b}(t)) dt + \Sigma(t)d\mathbf{f}_t, \quad (2.53)$$

где $A, B_k : [0, T] \rightarrow \mathbb{R}^{n \times n}$; $\mathbf{x}_t \in \mathbb{R}^n$, $\mathbf{b} : [0, T] \rightarrow \mathbb{R}^n$; $\Sigma : [0, T] \rightarrow \mathbb{R}^{n \times m}$; $\mathbf{f}_t \in \mathbb{R}^m$ — стандартный винеровский процесс с независимыми компонентами, $k = 1, \dots, m$. В главе 11 будут приведены (см. также [4, 86, 159]) следующие уравнения для матрицы $P(t) \stackrel{\text{def}}{=} M\{\mathbf{x}_t \mathbf{x}_t^\top\}$, где $\mathbf{x}_t$ — решение уравнения (2.52) или (2.53):

$$\frac{dP(t)}{dt} = A(t)P(t) + P(t)A^\top(t) + \sum_{k=1}^m B_k(t)P(t)B_k^\top(t), \quad (2.54)$$

$$\frac{dP(t)}{dt} = A(t)P(t) + P(t)A^\top(t) + \Sigma(t)\Sigma^\top(t) + \mathbf{b}(t)\mathbf{m}_x^\top(t) + \mathbf{m}_x(t)\mathbf{b}^\top(t), \quad (2.55)$$

где $\mathbf{m}_x(t) \stackrel{\text{def}}{=} M\{\mathbf{x}_t\}$ и

$$\frac{d\mathbf{m}_x(t)}{dt} = A(t)\mathbf{m}_x(t) + \mathbf{b}(t).$$

Можно показать, что уравнения (2.54) и (2.55) могут быть приведены соответственно к уравнениям (близкий по структуре алгоритм приведения описан в главе 11 (см. также [4]))

$$\frac{d\mathbf{p}(t)}{dt} = C(t)\mathbf{p}(t), \quad (2.56)$$

$$\frac{d\mathbf{p}(t)}{dt} = D(t)\mathbf{p}(t) + \mathbf{d}(t), \quad (2.57)$$

где $\mathbf{p}(t) \in \mathbb{R}^{\frac{1}{2}n(n+1)}$ — вектор, состоящий из элементов симметричной матрицы $P(t)$, которые располагаются над (под) главной диагональю, включая главную диагональ; $C(t), D(t)$ — квадратные матрицы; $\mathbf{d}(t) \in \mathbb{R}^{\frac{1}{2}n(n+1)}$ — столбец, состоящий из элементов симметричной матрицы $\Sigma(t)\Sigma^\top(t) + \mathbf{b}(t)\mathbf{m}_x^\top(t) + \mathbf{m}_x(t)\mathbf{b}^\top(t)$, которые располагаются над (под) главной диагональю, включая главную диагональ. О поведении $P(t)$, и, следовательно, о среднеквадратической устойчивости нулевых решений уравнений (2.52), (2.53), можно судить теперь по характеру поведения решений уравнений (2.56) и (2.57), которые могут быть легко найдены.

2.4.4 Оценивание параметров

Рассмотрим вероятностное пространство $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ и скалярное стохастическое дифференциальное уравнение Ито вида

$$dx_t = \mu a(x_t)dt + df_t, \quad (2.58)$$

где $x_t \in \mathbb{R}^1$ — решение уравнения (2.58); $a(x) : \mathbb{R}^1 \rightarrow \mathbb{R}^1$, $f_t \in \mathbb{R}^1$ — $\mathcal{F}_t$ -измеримый при всех $t \in [0, T]$ стандартный винеровский процесс относительно вероятностной меры P ; $\mu \in \mathbb{R}^1$ — оцениваемый вещественный параметр, $t \in [0, T]$.

Оказывается, если процесс x_t является асимптотически устойчивым эргодическим стационарным решением уравнения (2.58), то, наблюдая за отдельной траекторией процесса x_t и строя определенным образом на основе x_t оценку $\hat{\mu}(T)$ параметра μ , можно получить, что $\lim_{T \rightarrow \infty} \hat{\mu}(T) = \mu$ с вероятностью 1.

Рассмотрим этот подход подробнее (см. также [8, 86]). Оценка максимального правдоподобия $\hat{\mu}(T)$ отыскивается из условия максимума по μ функции правдоподобия $L(\mu, T)$:

$$L(\mu, T) = \frac{dP_x}{dP} = e^{\frac{1}{2}\mu^2 \int_0^T a^2(x_t)dt - \mu \int_0^T a(x_t)dx_t},$$

где $\frac{dP_x}{dP}$ — производная Радона–Никодима мер P_x и P , которые соответствуют процессам x_t и f_t . Решая уравнение

$$\frac{dL}{d\mu}(\mu, T) = 0$$

относительно μ , находим, что оценка максимального правдоподобия $\hat{\mu}(T)$ имеет вид

$$\hat{\mu}(T) = \frac{\int_0^T a(x_t)dx_t}{\int_0^T a^2(x_t)dt} = \mu + \frac{\int_0^T a(x_t)df_t}{\int_0^T a^2(x_t)dt}.$$

Если для всех $T : M \left\{ \int_0^T a^2(x_t)dt \right\} < \infty$ и если стохастическое дифференциальное уравнение (2.58) имеет стационарное решение с плотностью распределения $p = p(x)$, которая является решением уравнения Фоккера–Планка, то из теоремы 1.9 получаем

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T a(x_t)df_t = 0 \text{ с в.1,}$$

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T a^2(x_t)dt = \int_{-\infty}^{\infty} a^2(x)p(x)dx \text{ с в.1.}$$

Поэтому $\lim_{T \rightarrow \infty} \hat{\mu}(T) = \mu$ с вероятностью 1. Кроме того, согласно центральной предельной теореме

$$\sqrt{T} (\hat{\mu}(T) - \mu) \xrightarrow{d} N(0, \sigma^2),$$

где $\sigma^2 = 1 / \int_{-\infty}^{\infty} a^2(x) p(x) dx$. Используя это, можно определять доверительный интервал для μ и оценивать величину T для этого интервала.

2.5 Вероятностные представления решений задач Дирихле и Коши для уравнений в частных производных параболического типа

Рассмотрим важное применение стохастических дифференциальных уравнений к решению задач Дирихле и Коши для уравнений в частных производных параболического типа. Значительное число работ (см., например, [52, 53]) посвящено конечно-разностным численным методам решения данных задач, которые не используют сведений из теории вероятностей и достаточно эффективно применяются на практике в случае пространственной переменной $\mathbf{x}$ размерности n при $n \leq 3$. Если же $n > 3$, то детерминированный подход становится малоэффективным из-за резко возрастающих вычислительных затрат [70, 72]. В отличие от детерминированного подхода вероятностный подход, рассматриваемый далее, может быть эффективно использован при $n > 3$ вследствие его малой чувствительности к размерности n пространственной переменной $\mathbf{x}$ [70, 72].

Еще одним существенным преимуществом вероятностного подхода при решении задачи Коши является то, что вероятностное представление решения задачи Коши для уравнений в частных производных параболического типа не предполагает невырожденность матрицы диффузии $B(\mathbf{x}, t)$ (см., например, теоремы 2.5, 2.6).

Среди первых работ, посвященных вероятностным представлениям решений задач Дирихле и Коши для уравнений в частных производных второго порядка отметим [54–58].

2.5.1 Вероятностное представление решения задачи Дирихле

Пусть $(\mathbf{x}_t, \eta, G_t, P_{\mathbf{x}})$ — канонический диффузионный процесс со значениями в $\mathbb{R}^n$ и производящим дифференциальным оператором $\mathcal{L}$ (см. разд. 1.2.4.). Пусть также D — ограниченное открытое множество в $\mathbb{R}^n$, а ∂D — его граница.

Через $\tilde{\tau}_D(\omega)$ обозначим момент первого выхода из D после $+0$, т. е.

$$\tilde{\tau}_D(\omega) = \inf\{t : 0 < t < \eta(\omega), \mathbf{x}(t, \omega) \notin D\}.$$

Точка $\mathbf{x}_0 \in \partial D$ называется регулярной, если $P_{\mathbf{x}_0}\{\tilde{\tau}_D > 0\} = 0$, а граница ∂D множества D — регулярной, если каждая ее точка регулярна.

Рассмотрим следующую задачу Дирихле:

$$\mathcal{L}u(\mathbf{x}) - v(\mathbf{x})u(\mathbf{x}) = -g(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in D, \quad (2.59)$$

$$\lim_{\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{x}_0} u(\mathbf{x}) = \varphi(\mathbf{x}_0) \quad \forall \mathbf{x}_0 \in \partial D, \quad (2.60)$$

где $v(\mathbf{x}), \varphi(\mathbf{x}), g(\mathbf{x}) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^1$ — заданные функции, а $u(\mathbf{x}) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^1$ — решение задачи (2.59), (2.60).

Следующая теорема [132] содержит вероятностное представление решения задачи (2.59), (2.60).

Теорема 2.4 [132]. Пусть $(\mathbf{x}_t, \eta, G_t, P_{\mathbf{x}})$ — канонический диффузионный процесс со значениями в $\mathbb{R}^n$ и производящим дифференциальным оператором $\mathcal{L}$, D — ограниченное открытое множество в $\mathbb{R}^n$ с регулярной границей ∂D , τ_D — момент первого выхода из D . Пусть также заданы непрерывная функция $\varphi(\mathbf{x}) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^1$ на границе ∂D и функции $v(\mathbf{x}), g(\mathbf{x}) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^1$, удовлетворяющие на D условию Гельдера, причем $v(\mathbf{x}) \geq 0$. Тогда функция

$$u(\mathbf{x}) = M_{\mathbf{x}} \left\{ \int_0^{\tau_D} g(\mathbf{x}_t) e^{-\int_0^t v(\mathbf{x}_\theta) d\theta} dt + \varphi(\mathbf{x}_{\tau_D}) e^{-\int_0^{\tau_D} v(\mathbf{x}_\theta) d\theta} \right\}, \quad \mathbf{x} \in D,$$

дважды непрерывно дифференцируема на D и является единственным решением задачи (2.59), (2.60); здесь $M_{\mathbf{x}}\{\cdot\}$ — условное математическое ожидание при условии, что $\mathbf{x}_0 = \mathbf{x}$.

Предположим, что выполнены условия теоремы 1.6 для функций $\mathbf{a}(\mathbf{x}) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$, $\Sigma(\mathbf{x}) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^{n \times n}$. Тогда случайный процесс, являющийся решением стохастического дифференциального уравнения Ито

$$d\mathbf{x}_s = \mathbf{a}(\mathbf{x}_s)ds + \Sigma(\mathbf{x}_s)d\mathbf{f}_s, \quad \mathbf{x}_0 = \mathbf{x}, \quad (2.61)$$

представляет собой диффузионный процесс с вектором сноса $\mathbf{a}(\mathbf{x})$ и матрицей диффузии $B(\mathbf{x}) = \Sigma(\mathbf{x})\Sigma^T(\mathbf{x})$; здесь $\mathbf{f}_s$ — n -мерный стандартный винеровский процесс с независимыми компонентами.

Таким образом, в условиях теорем 1.6, 2.4 решение задачи (2.59), (2.60) может быть представлено в виде

$$u(\mathbf{x}) = M_{\mathbf{x}} \{ \mathbf{z}_{\tau_D} + \varphi(\mathbf{x}_{\tau_D}) \mathbf{y}_{\tau_D} \},$$

где

$$\mathbf{z}_t = \int_0^t g(\mathbf{x}_s) \mathbf{y}_s ds, \quad \mathbf{y}_t = e^{-\int_0^t v(\mathbf{x}_\theta) d\theta},$$

а процесс $\mathbf{x}_s$ — решение уравнения (2.61).

Используя формулу Ито, получаем

$$d\mathbf{y}_t = -v(\mathbf{x}_t) \mathbf{y}_t dt, \quad \mathbf{y}_0 = 1.$$

В результате решение задачи (2.59), (2.60) сводится к численному интегрированию следующей системы стохастических дифференциальных уравнений Ито:

$$d \begin{bmatrix} \mathbf{x}_s \\ \mathbf{y}_s \\ \mathbf{z}_s \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{a}(\mathbf{x}_s) \\ -v(\mathbf{x}_s) \mathbf{y}_s \\ g(\mathbf{x}_s) \mathbf{y}_s \end{bmatrix} ds + \begin{bmatrix} \Sigma(\mathbf{x}_s) \\ O_{1 \times n} \\ O_{1 \times n} \end{bmatrix} d\mathbf{f}_s, \quad \begin{bmatrix} \mathbf{x}_0 \\ \mathbf{y}_0 \\ \mathbf{z}_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{x} \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix},$$

где $O_{1 \times n}$ — нулевая строка длиной n .

В [71] Г. Н. Мильштейном рассмотрена более общая, чем (2.59), (2.60), задача Дирихле и построен алгоритм ее численного решения, основанный на вероятностном представлении решения задачи и слабых численных методах решения стохастических дифференциальных уравнений Ито.

Рассмотрим задачу Дирихле [71]

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} + \sum_{i=1}^n \mathbf{a}^{(i)}(\mathbf{x}, t) \frac{\partial u}{\partial \mathbf{x}^{(i)}} + \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^n B^{(ij)}(\mathbf{x}, t) \frac{\partial^2 u}{\partial \mathbf{x}^{(i)} \partial \mathbf{x}^{(j)}} + \\ + c(\mathbf{x}, t) u + g(\mathbf{x}, t) = 0, \end{aligned} \quad (2.62)$$

$$u(\mathbf{x}, t)|_{\partial Q} = \varphi(\mathbf{x}, t), \quad (\mathbf{x}, t) \in Q, \quad (2.63)$$

где $Q = G \times [t_0, T]$; G — ограниченная область в $\mathbb{R}^n$, $0 \leq t_0 < T \leq \infty$, ∂Q — граница Q . Предположим, что матричная функция $B(\mathbf{x}, t)$ симметрична и положительно определена. Кроме того, предположим, что заданные функции $\mathbf{a}(\mathbf{x}, t) : \mathbb{R}^n \times [t_0, T) \rightarrow \mathbb{R}^n$, $B(\mathbf{x}, t) : \mathbb{R}^n \times [t_0, T) \rightarrow \mathbb{R}^{n \times n}$, $c(\mathbf{x}, t)$, $\varphi(\mathbf{x}, t)$, $g(\mathbf{x}, t) : \mathbb{R}^n \times [t_0, T) \rightarrow \mathbb{R}^1$ и граница ∂Q удовлетворяют условиям, обеспечивающим гладкость решения $u(\mathbf{x}, t)$ вплоть до границы [12].

Известно (см., например, [71]), что решение задачи (2.62), (2.63) допускает следующее вероятностное представление:

$$u(\mathbf{x}, t) = M_{\mathbf{x}} \left\{ \mathbf{z}_{\tau_Q}^{t, \mathbf{x}, 1, 0} + \varphi(\mathbf{x}_{\tau_Q}^{t, \mathbf{x}}, \tau_Q) \mathbf{y}_{\tau_Q}^{t, \mathbf{x}, 1} \right\}, \quad (2.64)$$

где $(\mathbf{x}_s^{t,\mathbf{x}} \ \mathbf{y}_s^{t,\mathbf{x},1} \ \mathbf{z}_s^{t,\mathbf{x},1,0})^\top$ — решение системы стохастических дифференциальных уравнений Ито

$$d \begin{bmatrix} \mathbf{x}_s \\ \mathbf{y}_s \\ \mathbf{z}_s \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{a}(\mathbf{x}_s, s) \\ c(\mathbf{x}_s, s)\mathbf{y}_s \\ g(\mathbf{x}_s, s)\mathbf{y}_s \end{bmatrix} ds + \begin{bmatrix} \Sigma(\mathbf{x}_s, s) \\ O_{1 \times n} \\ O_{1 \times n} \end{bmatrix} d\mathbf{f}_s, \quad \begin{bmatrix} \mathbf{x}_t \\ \mathbf{y}_t \\ \mathbf{z}_t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{x} \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad (2.65)$$

где $s \geq t$, $(\mathbf{x}, t) \in Q$; τ_Q — момент первого выхода траектории $(\mathbf{x}_s^{t,\mathbf{x}}, s)$ на границу ∂Q ; $B(\mathbf{x}, t) = \Sigma(\mathbf{x}, t)\Sigma^\top(\mathbf{x}, t)$; $\mathbf{f}_s$ — n -мерный стандартный винеровский процесс с независимыми компонентами; $O_{1 \times n}$ — нулевая строка длиной n .

В [71] получены алгоритмы численного интегрирования задачи (2.62), (2.63), основанные на представлении (2.64) и слабых численных методах решения системы стохастических дифференциальных уравнений Ито (2.65). Построенные в [71] алгоритмы имеют первый порядок точности по шагу по времени.

2.5.2 Вероятностные представления решения задачи Коши

Приведем некоторые вероятностные представления решения задачи Коши для дифференциальных уравнений в частных производных второго порядка параболического типа.

Рассмотрим задачу Коши

$$\tilde{\mathcal{L}}u(\mathbf{x}, t) = 0, \quad \lim_{t \uparrow T} u(\mathbf{x}, t) = \varphi(\mathbf{x}), \quad (2.66)$$

где $0 \leq t < T$; $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$; $\tilde{\mathcal{L}}$ — дифференциальный оператор параболического типа вида

$$\begin{aligned} \tilde{\mathcal{L}}u(\mathbf{x}, t) = & \frac{\partial u}{\partial t}(\mathbf{x}, t) + \sum_{i=1}^n \mathbf{a}^{(i)}(\mathbf{x}, t) \frac{\partial u}{\partial \mathbf{x}^{(i)}}(\mathbf{x}, t) + \\ & + \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^n B^{(ij)}(\mathbf{x}, t) \frac{\partial^2 u}{\partial \mathbf{x}^{(i)} \partial \mathbf{x}^{(j)}}(\mathbf{x}, t) \end{aligned} \quad (2.67)$$

$\left(\sum_{i,j=1}^n B^{(ij)}(\mathbf{x}, t) \mathbf{z}^{(i)} \mathbf{z}^{(j)} \geq 0 \text{ при всех } \mathbf{z}^{(1)}, \dots, \mathbf{z}^{(n)} \in \mathbb{R}^1 \right)$; $\mathbf{a}(\mathbf{x}, t) : \mathbb{R}^n \times [0, T] \rightarrow \mathbb{R}^n$, $B(\mathbf{x}, t) : \mathbb{R}^n \times [0, T] \rightarrow \mathbb{R}^{n \times n}$, $\varphi(\mathbf{x}) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^1$ — заданные функции; $u(\mathbf{x}, t) : \mathbb{R}^n \times [0, T] \rightarrow \mathbb{R}^1$ — решение задачи (2.66).

В следующей теореме устанавливается вероятностное представление решения задачи (2.66).

Теорема 2.5 [65]. Пусть функции $\mathbf{a}(\mathbf{x}, t) : \mathbb{R}^n \times [0, T] \rightarrow \mathbb{R}^n$, $\Sigma(\mathbf{x}, t) : \mathbb{R}^n \times [0, T] \rightarrow \mathbb{R}^{n \times n}$ удовлетворяют условиям теоремы 1.6, непрерывны и дважды непрерывно дифференцируемы по $\mathbf{x}$. Пусть также существуют постоянные $p, K > 0$ такие, что

$$\begin{aligned} \sum_{i,k=1}^n \left| \frac{\partial \mathbf{a}^{(i)}}{\partial \mathbf{x}^{(k)}}(\mathbf{x}, t) \right| + \sum_{i,j,k=1}^n \left(\left| \frac{\partial^2 \mathbf{a}^{(i)}}{\partial \mathbf{x}^{(j)} \partial \mathbf{x}^{(k)}}(\mathbf{x}, t) \right| + \left| \frac{\partial \Sigma^{(ij)}}{\partial \mathbf{x}^{(k)}}(\mathbf{x}, t) \right| \right) + \\ + \sum_{i,j,k,l=1}^n \left| \frac{\partial^2 \Sigma^{(ij)}}{\partial \mathbf{x}^{(k)} \partial \mathbf{x}^{(l)}}(\mathbf{x}, t) \right| \leq K(1 + |\mathbf{x}|^p). \end{aligned}$$

Кроме того, предположим, что $B(\mathbf{x}, t) = \Sigma(\mathbf{x}, t) \Sigma^T(\mathbf{x}, t)$ и является неотрицательно определенной. Тогда задача Коши (2.66), где $\tilde{\mathcal{L}}$ — дифференциальный оператор параболического типа вида (2.67), имеет единственное решение для любой дважды непрерывно дифференцируемой функции $\varphi(\mathbf{x})$, удовлетворяющей условию

$$\begin{aligned} |\varphi(\mathbf{x})| + \sum_{i=1}^n \left| \frac{\partial \varphi}{\partial \mathbf{x}^{(i)}}(\mathbf{x}) \right| + \sum_{i,k=1}^n \left| \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \mathbf{x}^{(i)} \partial \mathbf{x}^{(k)}}(\mathbf{x}) \right| \leq \\ \leq K(1 + |\mathbf{x}|^p), \quad K, p > 0. \end{aligned}$$

При этом решение $u(\mathbf{x}, t)$ задачи (2.66) может быть представлено в виде

$$u(\mathbf{x}, t) = \mathbb{M} \{ \varphi(\mathbf{x}_T^{t,\mathbf{x}}) \}, \quad 0 \leq t < T, \quad \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n,$$

где $\mathbf{x}_s^{t,\mathbf{x}}, s \in [t, T]$, — решение следующего стохастического дифференциального уравнения Ито:

$$\mathbf{x}_s^{t,\mathbf{x}} = \mathbf{x} + \int_t^s \mathbf{a}(\mathbf{x}_\tau^{t,\mathbf{x}}, \tau) d\tau + \int_t^s \Sigma(\mathbf{x}_\tau^{t,\mathbf{x}}, \tau) d\mathbf{f}_\tau,$$

$\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ — случайный вектор; $s \in [t, T]$, $\mathbf{f}_\tau$ — n -мерный стандартный винеровский процесс с независимыми компонентами.

Пусть $C^l(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^1)$ — пространство l раз непрерывно дифференцируемых функций $g(\mathbf{x}) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^1$, которые вместе со своими частными производными до порядка l включительно возрастают полиномиально (функция $h(\mathbf{x}) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^1$ возрастает полиномиально, если существуют постоянные $C_h > 0$ и $q_h \in \mathbb{N}$, зависящие от h и такие, что $|h(\mathbf{x})| \leq C_h(1 + |\mathbf{x}|^{2q_h})$ для всех $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$).

Приведем формулировку следующей, доказанной в [90], теоремы о вероятностном представлении решения задачи Коши.

Теорема 2.6 [90]. Пусть выполнены следующие условия:

1. Функция $\varphi(\mathbf{x}) \in C^{2(\gamma+1)}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^1)$ для некоторого $\gamma \in N$.
2. Функции $\mathbf{a}^{(i)}(\mathbf{x}), \Sigma^{(ij)}(\mathbf{x}) \in C^{2(\gamma+1)}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^1)$, $i = 1, \dots, n$; $j = 1, \dots, m$, причем частные производные этих функций до порядка l включительно ограничены.

Тогда функция $u(\mathbf{x}, t) : \mathbb{R}^n \times [0, T] \rightarrow \mathbb{R}^1$ вида $u(\mathbf{x}, t) = M\{\varphi(\xi_T^{t, \mathbf{x}})\}$ является решением следующей задачи:

$$\tilde{\mathcal{L}}u(\mathbf{x}, t) = 0, \quad u(\mathbf{x}, T) = \varphi(\mathbf{x}),$$

где функция $\frac{\partial u}{\partial t}(\mathbf{x}, t)$ непрерывна; $u(\mathbf{x}, t) \in C^{2(\gamma+1)}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^1)$ по перемен-
ной $\mathbf{x}$ при каждом $t \in [0, T]$; диффузионный процесс $\xi_s^{t, \mathbf{x}}$, $t \leq s \leq T$,
является решением стохастического дифференциального уравнения Ито

$$\xi_s^{t, \mathbf{x}} = \mathbf{x} + \int_t^s \mathbf{a}(\xi_\tau^{t, \mathbf{x}}) d\tau + \int_t^s \Sigma(\xi_\tau^{t, \mathbf{x}}) d\mathbf{f}_\tau;$$

оператор $\tilde{\mathcal{L}}$ имеет вид (2.67); матрица $B(\mathbf{x}) = \Sigma(\mathbf{x})\Sigma^T(\mathbf{x})$ неотрица-
тельно определена; $\mathbf{f}_\tau$ — m -мерный стандартный винеровский про-
цесс с независимыми компонентами.

В работе [72] приведены вероятностные представления для более
общих, чем (2.66), задач, а также построены алгоритмы численного
интегрирования этих задач, основанные на слабых численных схемах
решения систем стохастических дифференциальных уравнений Ито.

Не приводя строгих формулировок, отметим некоторые вероят-
ностные представления более общих задач, чем (2.66).

Рассмотрим решение задачи Коши для линейного параболического
уравнения:

$$\tilde{\mathcal{L}}u + c(\mathbf{x}, t)u + g(\mathbf{x}, t) = 0, \quad t_0 \leq t < T, \quad \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n, \quad (2.68)$$

$$u(\mathbf{x}, T) = \varphi(\mathbf{x}), \quad (2.69)$$

где $c(\mathbf{x}, t), g(\mathbf{x}, t) : \mathbb{R}^n \times [t_0, T] \rightarrow \mathbb{R}^1$, а остальные обозначения, входя-
щие в (2.68), (2.69), такие же, как в задаче (2.66). Предположим, что
выполнены условия существования и единственности решения задачи
(2.68), (2.69) [14, 15].

Решение задачи (2.68), (2.69) допускает следующее вероятностное
представление [72]:

$$u(\mathbf{x}, t) = M\{\mathbf{z}_T^{t, \mathbf{x}, 1, 0} + \varphi(\mathbf{x}_T^{t, \mathbf{x}})\mathbf{y}_T^{t, \mathbf{x}, 1}\}, \quad t \leq T, \quad \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n,$$

где $(\mathbf{x}_s^{t,\mathbf{x}} \ \mathbf{y}_s^{t,\mathbf{x},1} \ \mathbf{z}_s^{t,\mathbf{x},1,0})^\top$, $s \in [t, T]$, — решение системы стохастических дифференциальных уравнений Ито

$$d \begin{bmatrix} \mathbf{x}_s \\ \mathbf{y}_s \\ \mathbf{z}_s \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{a}(\mathbf{x}_s, s) - \Sigma(\mathbf{x}_s, s)h(\mathbf{x}_s, s) \\ c(\mathbf{x}_s, s)\mathbf{y}_s \\ g(\mathbf{x}_s, s)\mathbf{y}_s \end{bmatrix} ds + \begin{bmatrix} \Sigma(\mathbf{x}_s, s) \\ h^\top(\mathbf{x}_s, s)\mathbf{y}_s \\ O_{1 \times n} \end{bmatrix} d\mathbf{f}_s; \quad (2.70)$$

$$\begin{bmatrix} \mathbf{x}_t \\ \mathbf{y}_t \\ \mathbf{z}_t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{x} \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}; \quad (2.71)$$

$\mathbf{f}_s$ — n -мерный стандартный винеровский процесс с независимыми компонентами; $h(\mathbf{x}, t) : \mathbb{R}^n \times [t_0, T] \rightarrow \mathbb{R}^n$; $B(\mathbf{x}, t) = \Sigma(\mathbf{x}, t)\Sigma^\top(\mathbf{x}, t)$; $O_{1 \times n}$ — нулевая строка длиной n . При $h(\mathbf{x}, t) \equiv 0$ из (2.70), (2.71) получаем классическое вероятностное представление решения задачи (2.68), (2.69) [132].

Рассмотрим решение задачи Коши для полулинейного параболического уравнения [72]:

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} + \sum_{i=1}^n \mathbf{a}^{(i)}(\mathbf{x}, t, u) \frac{\partial u}{\partial \mathbf{x}^{(i)}} + \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^n B^{(ij)}(\mathbf{x}, t, u) \frac{\partial^2 u}{\partial \mathbf{x}^{(i)} \partial \mathbf{x}^{(j)}} + \\ + g(\mathbf{x}, t, u) = 0, \quad t_0 \leq t < T, \quad \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n, \end{aligned} \quad (2.72)$$

$$u(\mathbf{x}, T) = \varphi(\mathbf{x}), \quad (2.73)$$

где сохранен смысл введенных ранее обозначений, причем предполагаем, что выполнены условия существования и единственности решения задачи (2.72), (2.73) [14, 15].

Известно [72], что решение задачи (2.72), (2.73) допускает следующее вероятностное представление:

$$u(\mathbf{x}, t) = \mathbb{M} \{ \varphi(\mathbf{x}_T^{t,\mathbf{x}}) + \mathbf{z}_T^{t,\mathbf{x},0} \},$$

где $(\mathbf{x}_s^{t,\mathbf{x}} \ \mathbf{z}_s^{t,\mathbf{x},0})^\top$, $s \in [t, T]$, — решение системы стохастических дифференциальных уравнений Ито

$$d \begin{bmatrix} \mathbf{x}_s \\ \mathbf{z}_s \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{a}(\mathbf{x}_s, s, u(\mathbf{x}_s, s)) \\ \mathbf{g}(\mathbf{x}_s, s, u(\mathbf{x}_s, s)) \end{bmatrix} ds + \begin{bmatrix} \Sigma(\mathbf{x}_s, s, u(\mathbf{x}_s, s)) \\ O_{1 \times n} \end{bmatrix} d\mathbf{f}_s; \quad (2.74)$$

$$\begin{bmatrix} \mathbf{x}_t \\ \mathbf{z}_t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{x} \\ 0 \end{bmatrix}; \quad (2.75)$$

$\mathbf{f}_s$ — n -мерный стандартный винеровский процесс с независимыми компонентами.

В [72] построены алгоритмы численного решения задач (2.68), (2.69) и (2.72), (2.73), основанные на слабых численных схемах различного порядка точности решения систем стохастических дифференциальных уравнений Ито (2.70), (2.71) и (2.74), (2.75) соответственно.

2.6 О малой эффективности применения численных методов решения обыкновенных дифференциальных уравнений к стохастическим дифференциальным уравнениям

Поясним на примере численных методов, основанных на разложении Тейлора, почему формальное использование численных методов решения обыкновенных дифференциальных уравнений малоэффективно в отношении стохастических дифференциальных уравнений.

Отметим, что достаточно большое число численных методов решения обыкновенных дифференциальных уравнений так или иначе строятся с помощью разложения Тейлора. К этим методам можно отнести методы, основывающиеся непосредственно на отрезках ряда Тейлора на дискретной временной сетке, конечно-разностные методы типа Рунге–Кутты, всевозможные многошаговые численные методы, построенные на использовании формулы Тейлора.

Рассмотрим скалярное стохастическое дифференциальное уравнение

$$\frac{dx_t}{dt} = a(x_t, t) + b(x_t, t)f_t, \quad (2.76)$$

где $x_t \in \mathbb{R}^1$ — решение уравнения (2.76); $a, b : \mathbb{R}^1 \times [0, T] \rightarrow \mathbb{R}^1$; f_t — гауссовский белозумный случайный процесс.

Запишем уравнение (2.76) в форме стохастического дифференциального уравнения Ито

$$dx_t = a(x_t, t)dt + b(x_t, t)df_t, \quad (2.77)$$

где $f_t \in \mathbb{R}^1$ — стандартный винеровский процесс.

Попробуем применить идеологию численных методов решения обыкновенных дифференциальных уравнений к решению стохастических дифференциальных уравнений (2.76) и (2.77). Если бы к случайному процессу x_t , являющемуся решением уравнения (2.76), можно было бы применить формулу Тейлора, то при $s > t$ мы получили бы следующее

разложение:

$$x_s = x_t + \frac{dx_t}{dt}(s-t) + \frac{d^2x_t}{dt^2} \frac{(s-t)^2}{2} + \dots \quad (2.78)$$

Используя (2.76) и (2.78), получаем

$$\begin{aligned} x_s = x_t + a(x_t, t)(s-t) + b(x_t, t)(s-t)f_t + \\ + \frac{d}{dt} [a(x_t, t) + b(x_t, t)f_t] \frac{(s-t)^2}{2} + \dots \end{aligned} \quad (2.79)$$

Нетрудно видеть, что правая часть (2.79) не определена. Это связано с тем, что белый шум f_t является не дифференцируемым в каком-либо вероятностном смысле случайным процессом, а в правую часть (2.79) входит величина $\frac{d}{dt}(a(x_t, t) + b(x_t, t)f_t)$. Кроме того, не ясно в каком смысле следует понимать само равенство (2.79).

Применим эту же идеологию к решению уравнения (2.77). При этом для случайных процессов $a(x_t, t)$, $b(x_t, t)$ будем формально использовать такие же правила дифференцирования (они заведомо неверны), как и для неслучайных функций, т. е.

$$da(x_t, t) = \frac{\partial a(x_t, t)}{\partial x} dx_t + \frac{\partial a(x_t, t)}{\partial t} dt, \quad (2.80)$$

$$db(x_t, t) = \frac{\partial b(x_t, t)}{\partial x} dx_t + \frac{\partial b(x_t, t)}{\partial t} dt. \quad (2.81)$$

Запишем равенство (2.77) и равенства (2.80), (2.81) с учетом (2.77) в интегральной форме:

$$x_s = x_t + \int_t^s a(x_\tau, \tau) d\tau + \int_t^s b(x_\tau, \tau) df_\tau, \quad (2.82)$$

$$\begin{aligned} a(x_s, s) = a(x_t, t) + \int_t^s \left[a(x_\tau, \tau) \frac{\partial a(x_\tau, \tau)}{\partial x} + \frac{\partial a(x_\tau, \tau)}{\partial \tau} \right] d\tau + \\ + \int_t^s b(x_\tau, \tau) \frac{\partial a(x_\tau, \tau)}{\partial x} df_\tau, \end{aligned} \quad (2.83)$$

$$\begin{aligned} b(x_s, s) = b(x_t, t) + \int_t^s \left[a(x_\tau, \tau) \frac{\partial b(x_\tau, \tau)}{\partial x} + \frac{\partial b(x_\tau, \tau)}{\partial \tau} \right] d\tau + \\ + \int_t^s b(x_\tau, \tau) \frac{\partial b(x_\tau, \tau)}{\partial x} df_\tau, \end{aligned} \quad (2.84)$$

где $s > t$. Применим к интеграндам в правых частях (2.83), (2.84) формулу, аналогичную (2.83), и подставим полученные равенства в (2.83), (2.84). Подставляя преобразованные равенства (2.83), (2.84) в (2.82), приходим к разложению

$$\begin{aligned}
x_s = & x_t + a(x_t, t)(s - t) + b(x_t, t) \int_t^s df_\tau + b(x_t, t) \frac{\partial b(x_t, t)}{\partial x} \int_t^s \int_t^\tau df_{\tau_1} df_\tau + \\
& + b(x_t, t) \frac{\partial a(x_t, t)}{\partial x} \int_t^s \int_t^\tau df_{\tau_1} d\tau + \left[a(x_t, t) \frac{\partial b(x_t, t)}{\partial x} + \frac{\partial b(x_t, t)}{\partial t} \right] \int_t^s \int_t^\tau d\tau_1 df_\tau + \\
& + b(x_t, t) \left[\left(\frac{\partial b(x_t, t)}{\partial x} \right)^2 + b(x_t, t) \frac{\partial^2 b(x_t, t)}{\partial x^2} \right] \int_t^s \int_t^\tau \int_t^{\tau_1} df_{\tau_2} df_{\tau_1} df_\tau + O((s - t)^2).
\end{aligned} \tag{2.85}$$

Поясним, как понимается здесь обозначение $O((s - t)^\gamma)$, $\gamma > 0$. Каждое слагаемое в правой части (2.85) (не учитывая $O((s - t)^2)$) можно рассматривать как повторный стохастический интеграл, интеграндом которого является значение некоторой случайной функции в момент времени t . Остаточный член $O((s - t)^2)$ представляет собой сумму нескольких повторных стохастических интегралов указанного типа и повторных стохастических интегралов с интеграндами, являющимися случайными функциями переменной θ , $t \leq \theta \leq s$. Каждому из этих повторных стохастических интегралов можно поставить в соответствие число $\gamma = \sum_{i=1}^k r_i$, где k — кратность повторного интеграла; $r_i = 1$, если i -й интеграл в повторном интеграле берется по времени, и $r_i = \frac{1}{2}$, если этот интеграл берется по винеровскому процессу. Далее полагаем, что рассмотренный повторный стохастический интеграл есть величина порядка γ , и обозначаем это через $O((s - t)^\gamma)$, где число γ получено указанным способом.

В случае если некоторая величина представляет собой сумму нескольких повторных стохастических интегралов, то за ее порядок принимаем наименьший из порядков повторных стохастических интегралов, входящих в рассматриваемую величину.

Отметим, что значительная часть рассуждений, приводимых в данном разделе, является нестрогой. Однако цель этого раздела заключается не в получении строгих выводов, а в растолковании упрощенно, на интуитивном уровне, того факта, что применение к стохастическим дифференциальным уравнениям численных подходов, используемых обычно для обыкновенных дифференциальных уравнений, не эффективно.

Поскольку для случайных процессов $a(x_t, t)$, $b(x_t, t)$ при определенных условиях справедливы отличные от (2.80), (2.81) правила дифференцирования (см. формулу Ито), то разложение решения x_t уравнения (2.77) в окрестности момента времени t имеет вид, отличный от (2.85). Покажем это.

По формуле Ито с вероятностью 1 получаем

$$\begin{aligned} a(x_s, s) &= a(x_t, t) + \\ &+ \int_t^s \left[\frac{\partial a(x_\tau, \tau)}{\partial \tau} + a(x_\tau, \tau) \frac{\partial a(x_\tau, \tau)}{\partial x} + \frac{1}{2} b^2(x_\tau, \tau) \frac{\partial^2 a(x_\tau, \tau)}{\partial x^2} \right] d\tau + \\ &+ \int_t^s b(x_\tau, \tau) \frac{\partial a(x_\tau, \tau)}{\partial x} df_\tau, \end{aligned} \quad (2.86)$$

$$\begin{aligned} b(x_s, s) &= b(x_t, t) + \\ &+ \int_t^s \left[\frac{\partial b(x_\tau, \tau)}{\partial \tau} + a(x_\tau, \tau) \frac{\partial b(x_\tau, \tau)}{\partial x} + \frac{1}{2} b^2(x_\tau, \tau) \frac{\partial^2 b(x_\tau, \tau)}{\partial x^2} \right] d\tau + \\ &+ \int_t^s b(x_\tau, \tau) \frac{\partial b(x_\tau, \tau)}{\partial x} df_\tau. \end{aligned} \quad (2.87)$$

Применим к интегралам в (2.86), (2.87) формулу Ито и подставим полученные равенства в (2.86), (2.87). После этого, подставляя преобразованные равенства (2.86), (2.87) в (2.82), с вероятностью 1 приходим к разложению

$$\begin{aligned} x_s &= x_t + a(x_t, t)(s - t) + b(x_t, t) \int_t^s df_\tau + \\ &+ b(x_t, t) \frac{\partial b(x_t, t)}{\partial x} \int_t^s \int_t^\tau df_{\tau_1} df_\tau + b(x_t, t) \frac{\partial a(x_t, t)}{\partial x} \int_t^s \int_t^\tau df_{\tau_1} d\tau + \\ &+ \left[\frac{\partial b(x_t, t)}{\partial t} + a(x_t, t) \frac{\partial b(x_t, t)}{\partial x} + \frac{1}{2} b^2(x_t, t) \frac{\partial^2 b(x_t, t)}{\partial x^2} \right] \int_t^s \int_t^\tau d\tau_1 df_\tau + \\ &+ b(x_t, t) \left[\left(\frac{\partial b(x_t, t)}{\partial x} \right)^2 + b(x_t, t) \frac{\partial^2 b(x_t, t)}{\partial x^2} \right] \int_t^s \int_t^\tau \int_t^{\tau_1} df_{\tau_2} df_{\tau_1} df_\tau + \\ &+ O((s - t)^2). \end{aligned} \quad (2.88)$$

Сопоставляя разложения (2.85) и (2.88), видим, что в правой части (2.85) отсутствует слагаемое

$$\frac{1}{2}b^2(x_t, t)\frac{\partial^2 b(x_t, t)}{\partial x^2}\int_t^s\int_t^\tau d\tau_1 df_\tau,$$

которое входит в правую часть (2.88). Это слагаемое имеет порядок $\frac{3}{2}$ (здесь порядок определяется как и ранее).

Таким образом, приведенные рассуждения свидетельствуют о том, что формальное применение правил дифференцирования неслучайных функций к случайным процессам при получении разложения решения стохастического дифференциального уравнения Ито в окрестности момента времени t приводит либо к неопределенности, либо к неверному результату. При этом ошибка разложения во втором случае проявляется уже в членах порядка $\frac{3}{2}$ (исключение составляет случай, когда $\frac{\partial^2 b(x, t)}{\partial x^2} \equiv 0$). Отсюда, в частности, следует, что ошибка на конце промежутка интегрирования для сильных численных методов (определение сильного численного метода и его ошибки см. в главе 7) решения стохастических дифференциальных уравнений Ито, построенных на основе детерминированного, а не стохастического разложения Тейлора, не превосходит величины $K\sqrt{\Delta}$, где Δ — шаг интегрирования численной схемы, а K — постоянная, не зависящая от Δ .

В главе 7 будет показано, что такая ошибка на конце промежутка интегрирования характерна для сильного метода Эйлера — наиболее грубого из сильных численных методов решения стохастических дифференциальных уравнений Ито. Более точные сильные численные методы решения стохастических дифференциальных уравнений Ито, рассмотренные в главах 7–9 и построенные на основе стохастических, а не детерминированных разложений Тейлора, имеют ошибки на конце промежутка интегрирования, не превосходящие величины $K_1\Delta^\gamma$, где $\gamma = 1.0, 1.5, \dots$, а K_1 — постоянная, которая не зависит от Δ .

Сходные рассуждения позволяют выявить, что конструирование слабых численных методов решения стохастических дифференциальных уравнений Ито на основе детерминированного разложения Тейлора также малоэффективно (определение слабого численного метода см. в главе 10).

Часть II

Теоретические результаты, положенные в основу построения численных методов

Глава 3

Некоторые свойства стохастических интегралов

В данной главе установлен класс повторных стохастических интегралов Ито, для которого с вероятностью 1 справедливы формулы замены порядка интегрирования, согласующиеся с правилами классического интегрального исчисления. Доказана теорема о замене порядка интегрирования для класса повторных стохастических интегралов Ито [104]. Рассмотрен ряд следствий и примеров применения этой теоремы. Данные результаты обобщены на случай повторных стохастических интегралов по D -мартингалу [116]. Получена формула, связывающая повторные стохастические интегралы Стратоновича и Ито произвольной фиксированной кратности. Выведено два семейства аналитических формул для вычисления стохастических интегралов по процессам Ито достаточно общего вида.

3.1 Теорема о замене порядка интегрирования в повторных стохастических интегралах Ито

Пусть заданы фиксированное вероятностное пространство $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ и неубывающая совокупность σ -алгебр $\{\mathcal{F}_\tau, \tau \in [0, T]\}$, определенная на этом пространстве. Рассмотрим винеровский процесс f_τ , который $\mathcal{F}_\tau$ -измерим при всех $\tau \in [0, T]$.

Введем класс $\mathcal{S}_2([0, T])$ функций $\xi : [0, T] \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}^1$, которые принадлежат классу $\mathcal{M}_2([0, T])$ (определение этого класса дано в главе 1) и являются среднеквадратически непрерывными на промежутке $[0, T]$.

В главе 1 дано определение стохастического интеграла Ито и приведены достаточные условия его существования, в частности, в среднеквадратическом смысле (см. теорему 1.5). По теореме 1.5 стохастический интеграл Ито существует в среднеквадратическом смысле, если

интегранд $\xi_t \in \mathcal{M}_2([0, T])$, т. е., вообще говоря, не является среднеквадратически непрерывным на промежутке $[0, T]$. В данной главе будут рассмотрены теоремы о замене порядка интегрирования для специального класса повторных стохастических интегралов Ито, при этом условие среднеквадратической непрерывности интегранда во "внутреннем" стохастическом интеграле окажется существенным.

Введем следующий класс повторных стохастических интегралов:

$$J[\phi, \psi^{(k)}]_{T,t} = \int_t^T \psi_1(t_1) \dots \int_t^{t_{k-1}} \psi_k(t_k) \int_t^{t_k} \phi_\tau dw_\tau^{(k+1)} dw_{t_k}^{(k)} \dots dw_{t_1}^{(1)},$$

где $\phi_\tau \in \mathcal{S}_2([t, T])$; $\psi_i(\tau)$, $i = 1, \dots, k$, — непрерывные на промежутке $[t, T]$ функции; здесь и далее $w_\tau^{(l)} = f_\tau$ либо $w_\tau^{(l)} = \tau$ при $\tau \in [t, T]$; $l = 1, \dots, k+1$; $\psi^{(k)} \stackrel{\text{def}}{=} (\psi_1, \dots, \psi_k)$, $\psi^{(1)} \stackrel{\text{def}}{=} \psi_1$. В дальнейшем стохастические интегралы $J[\phi, \psi^{(k)}]_{T,t}$ будем называть повторными стохастическими интегралами Ито.

Хорошо известно, что для повторного интеграла Римана при определенных условиях справедлива формула замены порядка интегрирования. В частности, если функции $f(x)$ и $g(x)$ непрерывны на промежутке $[a, b]$, то

$$\int_a^b f(x) \int_a^x g(y) dy dx = \int_a^b g(y) \int_y^b f(x) dx dy. \quad (3.1)$$

Если бы стохастическому интегралу Ито $J[\phi, \psi_1]_{T,t}$ соответствовала формула замены порядка интегрирования, аналогичная (3.1), то мы имели бы

$$J[\phi, \psi_1]_{T,t} = \int_t^T \phi_\tau \int_\tau^T \psi_1(s) dw_s^{(1)} dw_\tau^{(2)}. \quad (3.2)$$

Если, кроме того, в (3.2) $w_s^{(1)}, w_s^{(2)} = f_s$ при $s \in [t, T]$, то случайный процесс $\eta_\tau = \phi_\tau \int_\tau^T \psi_1(\tau) dw_\tau^{(1)}$ не принадлежит классу $\mathcal{M}_2([t, T])$, и, следовательно, для стохастического интеграла Ито $\int_t^T \eta_\tau dw_\tau^{(2)}$ в правой части (3.2) не выполняются условия его существования. В то же время справедлива формула, известная как лемма Ито:

$$\int_t^T df_s \int_t^T ds = \int_t^T (s-t) df_s + \int_t^T (f_s - f_t) ds \text{ с в.1,}$$

которую можно получить, например, используя формулу Ито, но ее можно рассматривать и как следствие замены порядка интегрирования. Действительно, можно показать, что

$$\int_t^T (f_s - f_t) ds = \int_t^T \int_t^s df_\tau ds = \int_t^T \int_\tau^T ds df_\tau \text{ с в.1.}$$

Тогда

$$\begin{aligned} \int_t^T (s - t) df_s + \int_t^T (f_s - f_t) ds &= \int_t^T \int_t^\tau ds df_\tau + \int_t^T \int_\tau^T ds df_\tau = \\ &= \int_t^T df_s \int_t^T ds \text{ с в.1.} \end{aligned}$$

Цель данного раздела установить строгий математический смысл формулы (3.2), а также ее аналога, соответствующего повторному стохастическому интегралу Ито $J[\phi, \psi^{(k)}]_{T,t}$, $k \geq 2$. При этом будем использовать более общее, чем (1.23), определение стохастического интеграла Ито.

В работе [10] Р. Л. Стратонович ввел определение так называемого смешанного стохастического интеграла для определенного класса интегрируемых процессов. Взяв за основу это определение, рассмотрим следующую конструкцию стохастического интеграла:

$$\text{l.i.m.}_{N \rightarrow \infty} \sum_{j=0}^{N-1} \phi_{\tau_j} (f_{\tau_{j+1}} - f_{\tau_j}) \theta_{\tau_{j+1}} \stackrel{\text{def}}{=} \int_t^T \phi_\tau df_\tau \theta_\tau, \quad (3.3)$$

где $\phi_\tau, \theta_\tau \in \mathcal{S}_2([t, T])$; здесь и далее $\{\tau_j\}_{j=0}^N$ — разбиение промежутка $[t, T]$, для которого

$$t = \tau_0 < \dots < \tau_N = T, \quad \Delta_N = \max_{0 \leq j \leq N-1} |\tau_{j+1} - \tau_j| \rightarrow 0 \text{ при } N \rightarrow \infty.$$

В дальнейшем будет доказано существование интегралов вида (3.3) для $\phi_\tau \in \mathcal{S}_2([t, T])$ и θ_τ из несколько более узкого класса процессов, чем $\mathcal{S}_2([t, T])$. Кроме того, интеграл вида (3.3) будет использоваться для формулирования и доказательства теоремы о замене порядка интегрирования в повторных стохастических интегралах Ито $J[\phi, \psi^{(k)}]_{T,t}$, $k \geq 1$.

Рассмотрим некоторые справедливые с вероятностью 1 и достаточно очевидные свойства стохастических интегралов, определенных формулой (3.3):

1. $\int_t^T \phi_\tau df_\tau g(\tau) = \int_t^T \phi_\tau g(\tau) df_\tau$, где $g(\tau)$ — непрерывная на промежутке $[t, T]$ функция.

$$2. \int_t^T (\alpha \phi_\tau + \beta \psi_\tau) df_\tau \theta_\tau = \alpha \int_t^T \phi_\tau df_\tau \theta_\tau + \beta \int_t^T \psi_\tau df_\tau \theta_\tau.$$

$$3. \int_t^T \phi_\tau df_\tau (\alpha \theta_\tau + \beta \psi_\tau) = \alpha \int_t^T \phi_\tau df_\tau \theta_\tau + \beta \int_t^T \phi_\tau df_\tau \psi_\tau,$$

где $\alpha, \beta \in \mathbb{R}^1$.

При этом будем предполагать, что случайные процессы ϕ_τ , θ_τ и ψ_τ таковы, что все интегралы, входящие в перечисленные свойства, существуют.

3.1.1 Формулировка и доказательство

Определим стохастические интегралы $\hat{I}[\psi^{(k)}]_{T,s}$, $k \geq 1$, вида

$$\hat{I}[\psi^{(k)}]_{T,s} = \int_s^T \psi_k(t_k) dw_{t_k}^{(k)} \dots \int_{t_2}^T \psi_1(t_1) dw_{t_1}^{(1)}$$

в соответствии с определением (3.3) следующим рекуррентным соотношением:

$$\hat{I}[\psi^{(k)}]_{T,t} \stackrel{\text{def}}{=} \text{l.i.m.}_{N \rightarrow \infty} \sum_{l=0}^{N-1} \psi_k(\tau_l) \Delta w_{\tau_l}^{(k)} \hat{I}[\psi^{(k-1)}]_{T,\tau_{l+1}}, \quad (3.4)$$

где $k \geq 1$; $\hat{I}[\psi^{(0)}]_{T,s} \stackrel{\text{def}}{=} 1$; $[s, T] \subseteq [t, T]$; здесь и далее $\Delta w_{\tau_l}^{(i)} = w_{\tau_{l+1}}^{(i)} - w_{\tau_l}^{(i)}$, $i = 1, \dots, k+1$; $l = 0, 1, \dots, N-1$. Затем определим повторный стохастический интеграл $\hat{J}[\phi, \psi^{(k)}]_{T,t}$, $k \geq 1$:

$$\hat{J}[\phi, \psi^{(k)}]_{T,t} = \int_t^T \phi_s dw_s^{(k+1)} \hat{I}[\psi^{(k)}]_{T,s}$$

также в соответствии с определением (3.3):

$$\hat{J}[\phi, \psi^{(k)}]_{T,t} \stackrel{\text{def}}{=} \text{l.i.m.}_{N \rightarrow \infty} \sum_{l=0}^{N-1} \phi_{\tau_l} \Delta w_{\tau_l}^{(k+1)} \hat{I}[\psi^{(k)}]_{T,\tau_{l+1}}.$$

Сформулируем теорему о замене порядка интегрирования в повторных стохастических интегралах Ито.

Теорема 3.1. Пусть $\phi_\tau \in \mathcal{S}_2([t, T])$ и $\psi_l(\tau)$, $l = 1, \dots, k$, — непрерывные на промежутке $[t, T]$ неслучайные функции. Тогда существует стохастический интеграл $\hat{J}[\phi, \psi^{(k)}]_{T,t}$ и $J[\phi, \psi^{(k)}]_{T,t} = \hat{J}[\phi, \psi^{(k)}]_{T,t}$ с вероятностью 1.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Докажем сначала теорему при $k = 1$.
Имеем

$$\begin{aligned} J[\phi, \psi_1]_{T,t} &\stackrel{\text{def}}{=} \text{l.i.m.}_{N \rightarrow \infty} \sum_{l=0}^{N-1} \psi_1(\tau_l) \Delta w_{\tau_l}^{(1)} \int_t^{\tau_l} \phi_\tau dw_\tau^{(2)} = \\ &= \text{l.i.m.}_{N \rightarrow \infty} \sum_{l=0}^{N-1} \psi_1(\tau_l) \Delta w_{\tau_l}^{(1)} \sum_{j=0}^{l-1} \int_{\tau_j}^{\tau_{j+1}} \phi_\tau dw_\tau^{(2)}, \end{aligned} \quad (3.5)$$

$$\begin{aligned} \hat{J}[\phi, \psi_1]_{T,t} &\stackrel{\text{def}}{=} \text{l.i.m.}_{N \rightarrow \infty} \sum_{j=0}^{N-1} \phi_{\tau_j} \Delta w_{\tau_j}^{(2)} \int_{\tau_{j+1}}^T \psi_1(s) dw_s^{(1)} = \\ &= \text{l.i.m.}_{N \rightarrow \infty} \sum_{j=0}^{N-1} \phi_{\tau_j} \Delta w_{\tau_j}^{(2)} \sum_{l=j+1}^{N-1} \int_{\tau_l}^{\tau_{l+1}} \psi_1(s) dw_s^{(1)} = \\ &= \text{l.i.m.}_{N \rightarrow \infty} \sum_{l=0}^{N-1} \int_{\tau_l}^{\tau_{l+1}} \psi_1(s) dw_s^{(1)} \sum_{j=0}^{l-1} \phi_{\tau_j} \Delta w_{\tau_j}^{(2)}. \end{aligned} \quad (3.6)$$

Очевидно, что если разность ε_N допредельных выражений в правых частях (3.5) и (3.6) стремится в среднеквадратическом смысле к нулю при $N \rightarrow \infty$, то стохастический интеграл $\hat{J}[\phi, \psi_1]_{T,t}$ существует и $J[\phi, \psi_1]_{T,t} = \hat{J}[\phi, \psi_1]_{T,t}$ с вероятностью 1. Разность ε_N представима в виде $\varepsilon_N = \varepsilon'_N + \varepsilon''_N$, где

$$\begin{aligned} \varepsilon'_N &= \sum_{l=0}^{N-1} \psi_1(\tau_l) \Delta w_{\tau_l}^{(1)} \sum_{j=0}^{l-1} \int_{\tau_j}^{\tau_{j+1}} (\phi_\tau - \phi_{\tau_j}) dw_\tau^{(2)}; \\ \varepsilon''_N &= \sum_{l=0}^{N-1} \int_{\tau_l}^{\tau_{l+1}} (\psi_1(\tau_l) - \psi_1(s)) dw_s^{(1)} \sum_{j=0}^{l-1} \phi_{\tau_j} \Delta w_{\tau_j}^{(2)}. \end{aligned}$$

Покажем, что $\text{l.i.m.} \varepsilon'_N = 0$ при $N \rightarrow \infty$. Для этого рассмотрим четыре случая:

1. $dw_s^{(0)} = df_s$, $\Delta w_{\tau_k}^{(1)} = \Delta f_{\tau_k}$.
2. $dw_s^{(0)} = ds$, $\Delta w_{\tau_k}^{(1)} = \Delta f_{\tau_k}$.
3. $dw_s^{(0)} = df_s$, $\Delta w_{\tau_k}^{(1)} = \Delta \tau_k$.
4. $dw_s^{(0)} = ds$, $\Delta w_{\tau_k}^{(1)} = \Delta \tau_k$.

Для случая 1, используя свойства B2 и B3 (см. главу 1) стохастического интеграла Ито, теорему о среднем значении и среднеквадратическую непрерывность процесса ϕ_τ , получаем

$$\mathbb{M} \left\{ |\varepsilon'_N|^2 \right\} = \sum_{k=0}^{N-1} \psi^2(\tau_k) \Delta \tau_k \sum_{j=0}^{k-1} \int_{\tau_j}^{\tau_{j+1}} \mathbb{M} \left\{ |\phi_\tau - \phi_{\tau_j}|^2 \right\} d\tau \leq$$

$$\leq C \max_{0 \leq j \leq N-1} \mathbb{M} \left\{ |\phi_{\theta_j} - \phi_{\tau_j}|^2 \right\} \sum_{k=0}^{N-1} \Delta \tau_k \sum_{j=0}^{k-1} \Delta \tau_j \rightarrow 0$$

при $N \rightarrow \infty$, где $\theta_j \in [\tau_j, \tau_{j+1}]$; $\psi^2(\tau) \leq C < \infty$.

Рассмотрим случай 2. Используя неравенство Минковского, свойство $C2$ стохастического интеграла (см. главу 1), теорему о среднем значении и среднеквадратическую непрерывность процесса ϕ_τ , имеем

$$\begin{aligned} \mathbb{M} \left\{ |\varepsilon'_N|^2 \right\} &= \sum_{k=0}^{N-1} \psi^2(\tau_k) \Delta \tau_k \mathbb{M} \left\{ \left(\sum_{j=0}^{k-1} \int_{\tau_j}^{\tau_{j+1}} (\phi_\tau - \phi_{\tau_j}) d\tau \right)^2 \right\} \leq \\ &\leq \sum_{k=0}^{N-1} \psi^2(\tau_k) \Delta \tau_k \left(\sum_{j=0}^{k-1} \left(\mathbb{M} \left\{ \left(\int_{\tau_j}^{\tau_{j+1}} (\phi_\tau - \phi_{\tau_j}) d\tau \right)^2 \right\} \right)^{\frac{1}{2}} \right)^2 \leq \\ &\leq C \max_{0 \leq j \leq N-1} \mathbb{M} \left\{ |\phi_{\theta_j} - \phi_{\tau_j}|^2 \right\} \sum_{k=0}^{N-1} \Delta \tau_k \left(\sum_{j=0}^{k-1} \Delta \tau_j \right)^2 \rightarrow 0 \end{aligned}$$

при $N \rightarrow \infty$, где $\theta_j \in [\tau_j, \tau_{j+1}]$; $\psi^2(\tau) \leq C < \infty$.

В случае 3, используя неравенство Минковского, свойства $B2$ и $B3$ стохастического интеграла Ито, теорему о среднем значении и среднеквадратическую непрерывность процесса ϕ_τ , находим

$$\begin{aligned} \mathbb{M} \left\{ |\varepsilon'_N|^2 \right\} &\leq \left(\sum_{k=0}^{N-1} |\psi(\tau_k)| \Delta \tau_k \left(\mathbb{M} \left\{ \left(\sum_{j=0}^{k-1} \int_{\tau_j}^{\tau_{j+1}} (\phi_\tau - \phi_{\tau_j}) df_\tau \right)^2 \right\} \right)^{\frac{1}{2}} \right)^2 = \\ &= \left(\sum_{k=0}^{N-1} |\psi(\tau_k)| \Delta \tau_k \left(\sum_{j=0}^{k-1} \int_{\tau_j}^{\tau_{j+1}} \mathbb{M} \left\{ |\phi_\tau - \phi_{\tau_j}|^2 \right\} d\tau \right)^{\frac{1}{2}} \right)^2 \leq \\ &\leq C \max_{0 \leq j \leq N-1} \mathbb{M} \left\{ |\phi_{\theta_j} - \phi_{\tau_j}|^2 \right\} \left(\sum_{k=0}^{N-1} \Delta \tau_k \left(\sum_{j=0}^{k-1} \Delta \tau_j \right)^{\frac{1}{2}} \right)^2 \rightarrow 0 \end{aligned}$$

при $N \rightarrow \infty$, где $\theta_j \in [\tau_j, \tau_{j+1}]$; $\psi^2(\tau) \leq C < \infty$.

Наконец, для случая 4, используя неравенство Минковского, свойство $C2$ стохастического интеграла, теорему о среднем значении и среднеквадратическую непрерывность процесса ϕ_τ , имеем

$$\mathbb{M} \left\{ |\varepsilon'_N|^2 \right\} \leq \left(\sum_{k=0}^{N-1} \sum_{j=0}^{k-1} |\psi(\tau_k)| \Delta \tau_k \left(\mathbb{M} \left\{ \left(\int_{\tau_j}^{\tau_{j+1}} (\phi_\tau - \phi_{\tau_j}) d\tau \right)^2 \right\} \right)^{\frac{1}{2}} \right)^2 \leq$$

$$\leq C \max_{0 \leq j \leq N-1} M \left\{ |\phi_{\theta_j} - \phi_{\tau_j}|^2 \right\} \left(\sum_{k=0}^{N-1} \Delta \tau_k \sum_{j=0}^{k-1} \Delta \tau_j \right)^2 \rightarrow 0$$

при $N \rightarrow \infty$, где $\theta_j \in [\tau_j, \tau_{j+1}]$; $\psi^2(\tau) \leq C < \infty$.

Таким образом, мы доказали, что $\text{l.i.m. } \varepsilon'_N = 0$ при $N \rightarrow \infty$. Рассуждая аналогично, можно показать, что $\text{l.i.m. } \varepsilon''_N = 0$ при $N \rightarrow \infty$. Поэтому $\text{l.i.m. } \varepsilon_N = 0$ при $N \rightarrow \infty$. Теорема доказана для случая $k = 1$.

З а м е ч а н и е 3.1. При доказательстве теоремы 3.1 при $k = 1$ использовался тот факт, что в ее условиях

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \max_{0 \leq j \leq N-1} M \left\{ |\phi_{t_j} - \phi_{\theta_j}|^2 \right\} = 0, \quad (3.7)$$

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \max_{0 \leq j \leq N-1} |\psi(t_j) - \psi(\theta_j)|^2 = 0, \quad (3.8)$$

где $t_j, \theta_j \in [\tau_j, \tau_{j+1}]$.

Для доказательства (3.7) сначала докажем, что если случайный процесс ϕ_t среднеекватически непрерывен на промежутке $[t, T]$, то он равномерно среднеекватически непрерывен на этом промежутке, т. е. $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta(\varepsilon) > 0$ такое, что $\forall t_1, t_2 \in [t, T]$ и удовлетворяющих условию $|t_1 - t_2| < \delta$ выполняется неравенство $M\{|\phi_{t_1} - \phi_{t_2}|^2\} < \varepsilon$ (здесь δ не зависит от t_1 и t_2).

Действительно, пусть ϕ_t среднеекватически непрерывен на промежутке $[t, T]$, но не является равномерно среднеекватически непрерывным на этом промежутке. Тогда для некоторого $\varepsilon > 0$ и $\forall \delta > 0 \exists t_1, t_2 \in [t, T]$ и такие, что $|t_1 - t_2| < \delta$, но $M\{|\phi_{t_1} - \phi_{t_2}|^2\} \geq \varepsilon$. Поэтому для $\delta = \delta_n = \frac{1}{n}$, $n = 1, 2, \dots$, $\exists t_1^{(n)}, t_2^{(n)} \in [t, T]$ и такие, что $|t_1^{(n)} - t_2^{(n)}| < \frac{1}{n}$, но $M\{|\phi_{t_1^{(n)}} - \phi_{t_2^{(n)}}|^2\} \geq \varepsilon$.

Последовательность $t_1^{(n)}$, $n = 1, 2, \dots$, ограничена, следовательно, по теореме Больцано–Вейерштрасса из нее можно выделить сходящуюся к некоторому числу $\tilde{t}$ (нетрудно показать, что $\tilde{t} \in [t, T]$) подпоследовательность $t_1^{(k_n)}$, $n = 1, 2, \dots$. Аналогично этому и в силу неравенства $|t_1^{(n)} - t_2^{(n)}| < \frac{1}{n}$ имеем $t_2^{(k_n)} \rightarrow \tilde{t}$ при $n \rightarrow \infty$.

По среднеекватической непрерывности процесса ϕ_t в момент времени $\tilde{t}$ и элементарному неравенству $(a + b)^2 \leq 2(a^2 + b^2)$ получаем

$$\begin{aligned} 0 &\leq M\{|\phi_{t_1^{(k_n)}} - \phi_{t_2^{(k_n)}}|^2\} \leq \\ &\leq 2 \left(M\{|\phi_{t_1^{(k_n)}} - \phi_{\tilde{t}}|^2\} + M\{|\phi_{t_2^{(k_n)}} - \phi_{\tilde{t}}|^2\} \right) \rightarrow 0 \end{aligned}$$

при $n \rightarrow \infty$. Отсюда следует, что $\lim M\{|\phi_{t_1^{(k_n)}} - \phi_{t_2^{(k_n)}}|^2\} = 0$ при $n \rightarrow \infty$. Это невозможно в силу того, что $M\{|\phi_{t_1^{(k_n)}} - \phi_{t_2^{(k_n)}}|^2\} \geq \varepsilon > 0$. Полученное противоречие и доказывает требуемое утверждение.

Для дальнейшего заметим, кроме того, что

$$a_N \stackrel{\text{def}}{=} \max_{0 \leq j \leq N-1} M\{|\phi_{t_j} - \phi_{\theta_j}|^2\} = M\{|\phi_{t_{l_N}} - \phi_{\theta_{l_N}}|^2\},$$

где $l_N \in \{0, 1, \dots, N-1\}$.

В силу равномерной среднеквадратической непрерывности процесса ϕ_t имеем, что $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta(\varepsilon) > 0$ такое, что $\forall t_{l_N}, \theta_{l_N} \in [t, T]$ и удовлетворяющих условию $|t_{l_N} - \theta_{l_N}| < \delta$ выполняется неравенство $a_N < \varepsilon$. Условие $\Delta_N \rightarrow 0$ при $N \rightarrow \infty$ означает, что $\forall \delta > 0$ (в том числе и для того, которое только что найдено) $\exists$ номер N^* такой, что при $N > N^*$ выполняется неравенство $\Delta_N < \delta$.

Объединяя последние два высказывания, получаем, что $\forall \varepsilon > 0 \exists$ номер N^* такой, что при $N > N^*$ выполняется условие $a_N < \varepsilon$, т. е. справедливо соотношение (3.7).

Равенство (3.8) доказывается аналогично равенству (3.7) с привлечением понятий непрерывности и равномерной непрерывности для неслучайных функций. $\square$

Перейдем к доказательству теоремы 3.1 в случае $k > 1$. С этой целью введем обозначения

$$I[\psi_q^{(r+1)}]_{\theta,s} \stackrel{\text{def}}{=} \int_s^\theta \psi_q(t_1) \dots \int_s^{t_r} \psi_{q+r}(t_{r+1}) dw_{t_{r+1}}^{(q+r)} \dots dw_{t_1}^{(q)},$$

$$J[\phi, \psi_q^{(r+1)}]_{\theta,s} \stackrel{\text{def}}{=} \int_s^\theta \psi_q(t_1) \dots \int_s^{t_r} \psi_{q+r}(t_{r+1}) \int_s^{t_{r+1}} \phi_\tau dw_\tau^{(q+r+1)} dw_{t_{r+1}}^{(q+r)} \dots dw_{t_1}^{(q)},$$

$$G[\psi_q^{(r+1)}]_{n,m} = \sum_{j_q=m}^{n-1} \sum_{j_{q+1}=m}^{j_q-1} \dots \sum_{j_{q+r}=m}^{j_{q+r-1}-1} \prod_{l=q}^{r+q} I[\psi_l]_{\tau_{j_l+1}, \tau_{j_l}},$$

где $\psi_q^{(r+1)} \stackrel{\text{def}}{=} (\psi_q, \dots, \psi_{q+r})$; $\psi_q^{(1)} \stackrel{\text{def}}{=} \psi_q$; $\psi_1^{(r+1)} \stackrel{\text{def}}{=} \psi^{(r+1)} = (\psi_1, \dots, \psi_{r+1})$.

Для доказательства теоремы 3.1 при $k > 1$ достаточно установить, что

$$J[\phi, \psi^{(k)}]_{T,t} = \lim_{N \rightarrow \infty} S[\phi, \psi^{(k)}]_N = \hat{J}[\phi, \psi^{(k)}]_{T,t} \text{ с в.1,} \quad (3.9)$$

где

$$S[\phi, \psi^{(k)}]_N = G[\psi^{(k)}]_{N,0} \sum_{l=0}^{j_k-1} \phi_{\tau_l} \Delta w_{\tau_l}^{(k+1)}.$$

Докажем сначала правое равенство в (3.9). Имеем

$$\hat{J}[\phi, \psi^{(k)}]_{T,t} \stackrel{\text{def}}{=} \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{l=0}^{N-1} \phi_{\tau_l} \Delta w_{\tau_l}^{(k+1)} \hat{I}[\psi^{(k)}]_{T, \tau_{l+1}}. \quad (3.10)$$

На основании предположения индукции получаем, что

$$I[\psi^{(k)}]_{T, \tau_{l+1}} = \hat{I}[\psi^{(k)}]_{T, \tau_{l+1}} \text{ с в.1,} \quad (3.11)$$

где $\hat{I}[\psi^{(k)}]_{T,s}$ определен в соответствии с (3.4) и

$$I[\psi^{(k)}]_{T,s} = \int_s^T \psi_1(t_1) \dots \int_s^{t_{k-1}} \psi_k(t_k) dw_{t_k}^{(k)} \dots dw_{t_1}^{(1)}.$$

Заметим, что при $k \geq 4$ (при $k = 2, 3$ рассуждения аналогичны) в силу аддитивности стохастического интеграла Ито справедливы равенства

$$\begin{aligned} I[\psi^{(k)}]_{T, \tau_{l+1}} &= \sum_{j_1=l+1}^{N-1} \int_{\tau_{j_1}}^{\tau_{j_1+1}} \psi_1(t_1) \int_{\tau_{l+1}}^{t_1} \psi_2(t_2) I[\psi_3^{(k-2)}]_{t_2, \tau_{l+1}} dw_{t_2}^{(2)} dw_{t_1}^{(1)} = \\ &= \sum_{j_1=l+1}^{N-1} \int_{\tau_{j_1}}^{\tau_{j_1+1}} \psi_1(t_1) \left(\sum_{j_2=l+1}^{j_1-1} \int_{\tau_{j_2}}^{\tau_{j_2+1}} + \int_{\tau_{j_1}}^{t_1} \right) \psi_2(t_2) I[\psi_3^{(k-2)}]_{t_2, \tau_{l+1}} dw_{t_2}^{(2)} dw_{t_1}^{(1)} = \\ &= \dots = G[\psi^{(k)}]_{N, l+1} + H[\psi^{(k)}]_{N, l+1}, \end{aligned} \quad (3.12)$$

где

$$\begin{aligned} H[\psi^{(k)}]_{N, l+1} &= \sum_{j_1=l+1}^{N-1} \int_{\tau_{j_1}}^{\tau_{j_1+1}} \psi_1(s) \int_{\tau_{j_1}}^s \psi_2(\tau) I[\psi_3^{(k-2)}]_{\tau, \tau_{l+1}} dw_{\tau}^{(2)} dw_s^{(1)} + \\ &+ \sum_{r=2}^{k-2} G[\psi^{(r-1)}]_{N, l+1} \sum_{j_r=l+1}^{j_{r-1}-1} \int_{\tau_{j_r}}^{\tau_{j_r+1}} \psi_r(s) \int_{\tau_{j_r}}^s \psi_{r+1}(\tau) I[\psi_{r+2}^{(k-r-1)}]_{\tau, \tau_{l+1}} dw_{\tau}^{(r+1)} dw_s^{(r)} + \\ &+ G[\psi^{(k-2)}]_{N, l+1} \sum_{j_{k-1}=l+1}^{j_{k-2}-1} I[\psi_{k-1}^{(2)}]_{\tau_{j_{k-1}+1}, \tau_{j_{k-1}}}. \end{aligned} \quad (3.13)$$

Подставим (3.12) в (3.11), а (3.11) в (3.10). Тогда

$$\hat{J}[\phi, \psi^{(k)}]_{T,t} = \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{l=0}^{N-1} \phi_{\tau_l} \Delta w_{\tau_l}^{(k+1)} (G[\psi^{(k)}]_{N, l+1} + H[\psi^{(k)}]_{N, l+1}). \quad (3.14)$$

Поскольку

$$\sum_{j_1=0}^{N-1} \sum_{j_2=0}^{j_1-1} \dots \sum_{j_k=0}^{j_{k-1}-1} a_{j_1 \dots j_k} = \sum_{j_k=0}^{N-1} \sum_{j_{k-1}=j_k+1}^{N-1} \dots \sum_{j_1=j_2+1}^{N-1} a_{j_1 \dots j_k}, \quad (3.15)$$

где $a_{j_1 \dots j_k}$ — скаляры, то

$$G[\psi^{(k)}]_{N,l+1} = \sum_{j_k=l+1}^{N-1} \dots \sum_{j_1=j_2+1}^{N-1} \prod_{l=1}^k I[\psi_l]_{\tau_{j_l+1}, \tau_{j_l}}. \quad (3.16)$$

Подставим (3.16) в $\sum_{l=0}^{N-1} \phi_{\tau_l} \Delta w_{\tau_l}^{(k+1)} G[\psi^{(k)}]_{N,l+1}$ и снова воспользуемся формулой (3.15). Тогда

$$\sum_{l=0}^{N-1} \phi_{\tau_l} \Delta w_{\tau_l}^{(k+1)} G[\psi^{(k)}]_{N,l+1} = S[\phi, \psi^{(k)}]_N. \quad (3.17)$$

Предположим, что предел $\text{l.i.m. } S[\phi, \psi^{(k)}]_N$ при $N \rightarrow \infty$ существует (его существование будет доказано далее). Тогда из (3.17) и (3.14) следует, что для доказательства правого равенства в (3.9) остается показать, что

$$\text{l.i.m.}_{N \rightarrow \infty} \sum_{l=0}^{N-1} \phi_{\tau_l} \Delta w_{\tau_l}^{(k+1)} H[\psi^{(k)}]_{N,l+1} = 0. \quad (3.18)$$

Оценивая второй момент допредельного выражения в левой части (3.18) с учетом (3.13), независимости ϕ_{τ_l} , $\Delta w_{\tau_l}^{(k+1)}$ и $H[\psi^{(k)}]_{N,l+1}$, стандартных оценок вторых моментов стохастических интегралов и неравенства Минковского, убеждаемся, что (3.18) справедливо. Таким образом, в предположении существования предела $\text{l.i.m. } S[\phi, \psi^{(k)}]_N$ при $N \rightarrow \infty$ мы получили, что правое равенство в (3.9) выполняется.

Покажем, что справедливо и левое равенство в (3.9). Имеем

$$J[\phi, \psi^{(k)}]_{T,t} \stackrel{\text{def}}{=} \text{l.i.m.}_{N \rightarrow \infty} \sum_{l=0}^{N-1} \psi_1(\tau_l) \Delta w_{\tau_l}^{(1)} J[\phi, \psi_2^{(k-1)}]_{\tau_l, t}. \quad (3.19)$$

Воспользуемся применительно к интегралу $J[\phi, \psi_2^{(k-1)}]_{\tau_l, t}$ в (3.19) теми же рассуждениями, что и для интеграла $I[\psi^{(k)}]_{T, \tau_{l+1}}$, которые привели к соотношению (3.12), и подставим полученное для $J[\phi, \psi_2^{(k-1)}]_{\tau_l, t}$ выражение в (3.19). Далее с помощью неравенства Минковского и стандартных оценок вторых моментов стохастических интегралов нетрудно установить, что

$$J[\phi, \psi^{(k)}]_{T,t} = \text{l.i.m.}_{N \rightarrow \infty} R[\phi, \psi^{(k)}]_N \text{ с в.1,} \quad (3.20)$$

где

$$R[\phi, \psi^{(k)}]_N = \sum_{j_1=0}^{N-1} \psi_1(\tau_{j_1}) \Delta w_{\tau_{j_1}}^{(1)} G[\psi_2^{(k-1)}]_{j_1,0} \sum_{l=0}^{j_k-1} \int_{\tau_l}^{\tau_{l+1}} \phi_\tau dw_\tau^{(k+1)}.$$

Покажем, что

$$\text{l.i.m.}_{N \rightarrow \infty} R[\phi, \psi^{(k)}]_N = \text{l.i.m.}_{N \rightarrow \infty} S[\phi, \psi^{(k)}]_N \text{ с в.1.} \quad (3.21)$$

Нетрудно видеть, что

$$R[\phi, \psi^{(k)}]_N = U[\phi, \psi^{(k)}]_N + V[\phi, \psi^{(k)}]_N + S[\phi, \psi^{(k)}]_N, \quad (3.22)$$

где

$$U[\phi, \psi^{(k)}]_N = \sum_{j_1=0}^{N-1} \psi_1(\tau_{j_1}) \Delta w_{\tau_{j_1}}^{(1)} G[\psi_2^{(k-1)}]_{j_1,0} \sum_{l=0}^{j_k-1} I[\Delta \phi]_{\tau_{l+1}, \tau_l};$$

$$V[\phi, \psi^{(k)}]_N = \sum_{j_1=0}^{N-1} I[\Delta \psi_1]_{\tau_{j_1+1}, \tau_{j_1}} G[\psi_2^{(k-1)}]_{j_1,0} \sum_{l=0}^{j_k-1} \phi_{\tau_l} \Delta w_{\tau_l}^{(k+1)}$$

и

$$I[\Delta \psi_1]_{\tau_{j_1+1}, \tau_{j_1}} = \int_{\tau_{j_1}}^{\tau_{j_1+1}} (\psi_1(\tau_{j_1}) - \psi_1(\tau)) dw_\tau^{(1)};$$

$$I[\Delta \phi]_{\tau_{l+1}, \tau_l} = \int_{\tau_l}^{\tau_{l+1}} (\phi_\tau - \phi_{\tau_l}) dw_\tau^{(k+1)}.$$

Далее с помощью неравенства Минковского, стандартных оценок вторых моментов стохастических интегралов, а также непрерывности функции $\psi_1(\tau)$ и принадлежности процесса ϕ_τ классу $\mathcal{S}_2([t, T])$ убеждаемся, что $\text{l.i.m.}_{N \rightarrow \infty} V[\phi, \psi^{(k)}]_N = \text{l.i.m.}_{N \rightarrow \infty} U[\phi, \psi^{(k)}]_N = 0$ при $N \rightarrow \infty$. Тогда, учитывая (3.22), получаем (3.21). Из (3.21) и (3.20) следует левое равенство из (3.9). При этом предел $\text{l.i.m.}_{N \rightarrow \infty} S[\phi, \psi^{(k)}]_N$ существует, поскольку он равен интегралу $J[\phi, \psi^{(k)}]_{T,t}$, который существует в условиях настоящей теоремы. Таким образом, цепочка равенств (3.9) доказана. Теорема доказана. $\square$

3.1.2 Следствия и обобщения

Пусть $\mathcal{D}_k = \{(t_1, \dots, t_k) : t \leq t_1 < \dots < t_k \leq T\}$ и выполнены следующие условия:

AI. $\xi_t \in \mathcal{S}_2([t, T])$.

АII. $\Phi(t_1, \dots, t_k) : \mathcal{D}_{k-1} \times \mathbb{R}^1 \rightarrow \mathbb{R}^1$ — ограниченная в области $\mathcal{D}_{k-1} \times \mathbb{R}^1$, непрерывная по первым $(k-1)$ -й переменным в области $\mathcal{D}_{k-1}$ неслучайная функция, причем $\forall \tau, \theta \in \mathbb{R}^1$ и $\forall (t_1, \dots, t_{k-1}) \in \mathcal{D}_{k-1}$ существует такая постоянная $K < \infty$, что $|\Phi(t_1, \dots, t_{k-1}, \tau) - \Phi(t_1, \dots, t_{k-1}, \theta)| \leq K|\tau - \theta|$.

Определим следующие стохастические интегралы:

$$\begin{aligned} \hat{J}[\Phi]_{T,t}^{(k)} &= \int_t^T d\mathbf{w}_{t_k}^{(i_k)} \dots \int_{t_3}^T d\mathbf{w}_{t_2}^{(i_2)} \int_{t_2}^T \Phi(t_1, t_2, \dots, t_{k-1}, \xi_{t_k}) d\mathbf{w}_{t_1}^{(i_1)} \stackrel{\text{def}}{=} \\ &\stackrel{\text{def}}{=} \text{l.i.m.}_{N \rightarrow \infty} \sum_{l=0}^{N-1} \Delta \mathbf{w}_{\tau_l}^{(i_k)} \int_{\tau_{l+1}}^T d\mathbf{w}_{t_{k-1}}^{(i_{k-1})} \dots \int_{t_3}^T d\mathbf{w}_{t_2}^{(i_2)} \int_{t_2}^T \Phi(t_1, t_2, \dots, t_{k-1}, \xi_{\tau_l}) d\mathbf{w}_{t_1}^{(i_1)} \end{aligned}$$

при $k \geq 3$ и

$$\hat{J}[\Phi]_{T,t}^{(2)} = \int_t^T d\mathbf{w}_{t_2}^{(i_2)} \int_{t_2}^T \Phi(t_1, \xi_{t_2}) d\mathbf{w}_{t_1}^{(i_1)} \stackrel{\text{def}}{=} \text{l.i.m.}_{N \rightarrow \infty} \sum_{l=0}^{N-1} \Delta \mathbf{w}_{\tau_l}^{(i_2)} \int_{\tau_{l+1}}^T \Phi(t_1, \xi_{\tau_l}) d\mathbf{w}_{t_1}^{(i_1)},$$

где $\mathbf{w}_{\tau}^{(i)} = \mathbf{f}_{\tau}^{(i)}$ при $i = 1, \dots, m$; $\mathbf{w}_{\tau}^{(0)} = \tau$, $i_1, \dots, i_k = 0, 1, \dots, m$; $\mathbf{f}_{\tau}^{(i)}$, $i = 1, \dots, m$, — независимые и $\mathcal{F}_{\tau}$ -измеримые при всех $\tau \in [t, T]$ стандартные винеровские процессы.

Обозначим

$$J[\Phi]_{T,t}^{(k)} = \int_t^T \dots \int_t^{t_{k-1}} \Phi(t_1, \dots, t_{k-1}, \xi_{t_k}) d\mathbf{w}_{t_k}^{(i_k)} \dots d\mathbf{w}_{t_1}^{(i_1)}, \quad k \geq 2, \quad (3.23)$$

где правая часть (3.23) понимается как повторный стохастический интеграл Ито. Рассмотрим одно из обобщений теоремы 3.1.

Теорема 3.2. Пусть выполнены условия AI, AII данного раздела. Тогда существует стохастический интеграл $\hat{J}[\Phi]_{T,t}^{(k)}$ и $J[\Phi]_{T,t}^{(k)} = \hat{J}[\Phi]_{T,t}^{(k)}$ с вероятностью 1 ($k \geq 2$).

Доказательство теоремы 3.2 аналогично доказательству теоремы 3.1.

Рассмотрим следующее утверждение.

Теорема 3.3. Пусть выполнены условия теоремы 3.1 и $h(\tau)$ — непрерывная на промежутке $[t, T]$ функция. Тогда

$$\int_t^T \phi_{\tau} d\mathbf{w}_{\tau}^{(k+1)} h(\tau) \hat{I}[\psi^{(k)}]_{T,\tau} = \int_t^T \phi_{\tau} h(\tau) d\mathbf{w}_{\tau}^{(k+1)} \hat{I}[\psi^{(k)}]_{T,\tau} \text{ с в.1,} \quad (3.24)$$

и интегралы в левой и правой частях (3.24) существуют.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Согласно теореме 3.1 повторный стохастический интеграл в правой части (3.24) существует. Кроме того,

$$\int_t^T \phi_\tau h(\tau) dw_\tau^{(k+1)} \hat{I}[\psi^{(k)}]_{T,\tau} = \int_t^T \phi_\tau dw_\tau^{(k+1)} h(\tau) \hat{I}[\psi^{(k)}]_{T,\tau} -$$

$$- \text{l.i.m.}_{N \rightarrow \infty} \sum_{j=0}^{N-1} \phi_{\tau_j} \Delta h(\tau_j) \Delta w_{\tau_j}^{(k+1)} \hat{I}[\psi^{(k)}]_{T,\tau_{j+1}} \text{ с в.1,}$$

где $\Delta h(\tau_j) = h(\tau_{j+1}) - h(\tau_j)$. Используя рассуждения, которые привели к правому равенству в (3.9) получаем

$$\text{l.i.m.}_{N \rightarrow \infty} \sum_{l=0}^{N-1} \phi_{\tau_l} \Delta h(\tau_l) \Delta w_{\tau_l}^{(k+1)} \hat{I}[\psi^{(k)}]_{T,\tau_{l+1}} =$$

$$= \text{l.i.m.}_{N \rightarrow \infty} G[\psi^{(k)}]_{N,0} \sum_{l=0}^{j_k-1} \phi_{\tau_l} \Delta h(\tau_l) \Delta w_{\tau_l}^{(k+1)} \text{ с в.1.} \quad (3.25)$$

Далее с помощью неравенства Минковского, стандартных оценок вторых моментов стохастических интегралов и непрерывности функции $h(\tau)$ находим, что второй момент допредельного выражения в правой части (3.25) стремится к нулю при $N \rightarrow \infty$.

Теорема доказана. $\square$

Рассмотрим одно из следствий теоремы 3.1.

Теорема 3.4. В условиях теоремы 3.3

$$\int_t^T h(t_1) \int_t^{t_1} \phi_\tau dw_\tau^{(k+2)} dw_{t_1}^{(k+1)} \hat{I}[\psi^{(k)}]_{T,t_1} =$$

$$= \int_t^T \phi_\tau dw_\tau^{(k+2)} \int_\tau^T h(t_1) dw_{t_1}^{(k+1)} \hat{I}[\psi^{(k)}]_{T,t_1} \text{ с в.1,} \quad (3.26)$$

причем левая и правая части (3.26) существуют.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Применяя дважды теорему 3.1, получаем

$$\int_t^T \phi_\tau dw_\tau^{(k+2)} \int_\tau^T h(t_1) dw_{t_1}^{(k+1)} \hat{I}[\psi^{(k)}]_{T,t_1} =$$

$$= \int_t^T \psi_1(t_1) \dots \int_t^{t_{k-1}} \psi_k(t_k) \int_t^{t_k} \rho_\tau dw_\tau^{(k+1)} dw_{t_k}^{(k)} \dots dw_{t_1}^{(1)} =$$

$$= \int_t^T \rho_\tau dw_\tau^{(k+1)} \int_\tau^T \psi_k(t_k) dw_{t_k}^{(k)} \dots \int_{t_2}^T \psi_1(t_1) dw_{t_1}^{(1)} \text{ с в.1,}$$

где $\rho_\tau \stackrel{\text{def}}{=} h(\tau) \int_t^\tau \phi_s dw_s^{(k+2)}$. Теорема доказана. $\square$

3.1.3 Замена порядка интегрирования для конкретных повторных стохастических интегралов Ито

Пример 3.1. С помощью теоремы 3.1 о замене порядка интегрирования в повторных стохастических интегралах Ито нетрудно показать, что следующие равенства справедливы с вероятностью 1:

$$\int_t^T \int_t^{t_2} df_{t_1} dt_2 = \int_t^T (T - t_1) df_{t_1},$$

$$\int_t^T \cos(t_2 - T) \int_t^{t_2} df_{t_1} dt_2 = \int_t^T \sin(T - t_1) df_{t_1},$$

$$\int_t^T \sin(t_2 - T) \int_t^{t_2} df_{t_1} dt_2 = \int_t^T (\cos(T - t_1) - 1) df_{t_1},$$

$$\int_t^T e^{\alpha(t_2 - T)} \int_t^{t_2} df_{t_1} dt_2 = \frac{1}{\alpha} \int_t^T (1 - e^{\alpha(t_1 - T)}) df_{t_1}, \quad \alpha \neq 0,$$

$$\int_t^T (t_2 - T)^\alpha \int_t^{t_2} df_{t_1} dt_2 = -\frac{1}{\alpha + 1} \int_t^T (t_1 - T)^{\alpha+1} df_{t_1}, \quad \alpha \neq -1,$$

$$J_{(10)T,t} + J_{(01)T,t} = (T - t) J_{(1)T,t} \text{ (лемма Ито),}$$

$$J_{(100)T,t} = \frac{1}{2} \int_t^T (T - t_1)^2 df_{t_1}, \quad J_{(010)T,t} = \int_t^T (t_1 - t)(T - t_1) df_{t_1},$$

$$J_{(110)T,t} = \int_t^T (T - t_2) \int_t^{t_2} df_{t_1} df_{t_2}, \quad J_{(101)T,t} = \int_t^T \int_t^{t_2} (t_2 - t_1) df_{t_1} df_{t_2},$$

$$J_{(1011)T,t} = \int_t^T \int_t^{t_3} \int_t^{t_2} (t_2 - t_1) df_{t_1} df_{t_2} df_{t_3}, \quad J_{(1101)T,t} = \int_t^T \int_t^{t_3} (t_3 - t_2) \int_t^{t_2} df_{t_1} df_{t_2} df_{t_3},$$

$$J_{(1110)T,t} = \int_t^T (T - t_3) \int_t^{t_3} \int_t^{t_2} df_{t_1} df_{t_2} df_{t_3}, \quad J_{(1100)T,t} = \frac{1}{2} \int_t^T (T - t_2)^2 \int_t^{t_2} df_{t_1} df_{t_2},$$

$$J_{(1001)T,t} = \frac{1}{2} \int_t^T \int_t^{t_2} (t_2 - t_1)^2 df_{t_1} df_{t_2}, \quad J_{(1010)T,t} = \int_t^T (T - t_2) \int_t^{t_2} (t_2 - t_1) df_{t_1} df_{t_2},$$

$$J_{(0110)T,t} = \int_t^T (T - t_2) \int_t^{t_2} (t_1 - t) df_{t_1} df_{t_2}, \quad J_{(0101)T,t} = \int_t^T \int_t^{t_2} (t_2 - t_1)(t_1 - t) df_{t_1} df_{t_2},$$

$$J_{(0010)T,t} = \frac{1}{2} \int_t^T (T - t_1)(t_1 - t)^2 df_{t_1}, \quad J_{(0100)T,t} = \frac{1}{2} \int_t^T (T - t_1)^2 (t_1 - t) df_{t_1},$$

$$J_{(1000)T,t} = \frac{1}{3!} \int_t^T (T - t_1)^3 df_{t_1}, \quad J_{(\underbrace{10\dots 0}_{k-1})T,t} = \frac{1}{(k-1)!} \int_t^T (T - t_1)^{k-1} df_{t_1},$$

$$J_{(\underbrace{110\dots 0}_{k-2})T,t} = \frac{1}{(k-2)!} \int_t^T (T - t_2)^{k-2} \int_t^{t_2} df_{t_1} df_{t_2},$$

$$J_{(\underbrace{1\dots 1}_{k-1}0)T,t} = \int_t^T (T - t_1) J_{(\underbrace{1\dots 1}_{k-2})t_1,t} df_{t_1},$$

$$J_{(\underbrace{10\dots 0}_{k-2}1)T,t} = \frac{1}{(k-2)!} \int_t^T \int_t^{t_2} (t_2 - t_1)^{k-2} df_{t_1} df_{t_2},$$

$$J_{(10\underbrace{1\dots 1}_{k-2})T,t} = \int_t^T \dots \int_t^{t_3} \int_t^{t_2} (t_2 - t_1) df_{t_1} df_{t_2} \dots df_{t_{k-1}},$$

$$J_{(\underbrace{1\dots 1}_{k-2}01)T,t} = \int_t^T \int_t^{t_{k-1}} (t_{k-1} - t_{k-2}) \int_t^{t_{k-2}} \dots \int_t^{t_2} df_{t_1} \dots df_{t_{k-3}} df_{t_{k-2}} df_{t_{k-1}};$$

обобщения леммы Ито:

$$J_{(110)T,t} + J_{(101)T,t} + J_{(011)T,t} = (T - t)J_{(11)T,t},$$

$$J_{(001)T,t} + J_{(010)T,t} + J_{(100)T,t} = \frac{(T - t)^2}{2} J_{(1)T,t},$$

$$J_{(1100)T,t} + J_{(1010)T,t} + J_{(1001)T,t} + J_{(0110)T,t} + \\ + J_{(0101)T,t} + J_{(0011)T,t} = \frac{(T - t)^2}{2} J_{(11)T,t},$$

$$J_{(1000)T,t} + J_{(0100)T,t} + J_{(0010)T,t} + J_{(0001)T,t} = \frac{(T - t)^3}{3!} J_{(1)T,t},$$

$$J_{(1110)T,t} + J_{(1101)T,t} + J_{(1011)T,t} + J_{(0111)T,t} = (T - t)J_{(111)T,t},$$

$$\sum_{l=1}^k J_{(\underbrace{0\dots 0}_{l-1} \underbrace{1 \ 0\dots 0}_{k-l})T,t} = \frac{1}{(k-1)!} (T-t)^{k-1} J_{(1)T,t},$$

$$\sum_{l=1}^k J_{(\underbrace{1\dots 1}_{l-1} \underbrace{0 \ 1\dots 1}_{k-l})T,t} = (T-t) J_{(\underbrace{1\dots 1}_{k-1})T,t},$$

$$\sum_{\substack{l_1+\dots+l_k=m \\ l_i \in \{0, 1\}; \ i=1,\dots,k}} J_{(l_1\dots l_k)T,t} = \frac{(T-t)^{k-m}}{(k-m)!} J_{(\underbrace{1\dots 1}_m)T,t},$$

где введены обозначения

$$J_{(l_1\dots l_k)T,t} = \int_t^T \dots \int_t^{t_2} dw_{t_1}^{(1)} \dots dw_{t_k}^{(k)};$$

$l_i = 1$ при $w_{t_i}^{(i)} = f_{t_i}$ и $l_i = 0$ при $w_{t_i}^{(i)} = t_i$, $i = 1, \dots, k$; $f_\tau \in \mathbb{R}^1$ — стандартный винеровский процесс.

Выше была проведена довольно кропотливая работа, связанная с теоремами о замене порядка интегрирования в повторных стохастических интегралах Ито. Однако, может возникнуть естественный вопрос о практической пользе данной теории, поскольку по большей части ее выводы непосредственно следуют из формулы Ито (см. формулы из данного раздела).

Нетрудно видеть, что для получения указанных формул с помощью формулы Ито прежде всего их надо угадать, после чего ввести соответствующие процессы Ито и провести затем обоснование по формуле Ито. Ясно, что это несложно, но нетривиально.

С другой стороны технология замены порядка интегрирования, введенная в главе 3, формально согласуется с подобной технологией для интегралов Римана, хотя относится к другим объектам — интегралам Ито.

Таким образом, для преобразований специфического класса процессов Ито, коими являются повторные стохастические интегралы Ито, более естественно и просто использовать теоремы о замене порядка интегрирования, чем формулу Ито. Многочисленные примеры применения данных теорем присутствуют в доказательствах различных утверждений из глав 4–6 и наглядно иллюстрируют сказанное.

3.2 Замена порядка интегрирования в повторных стохастических интегралах по мартингалу

Пусть заданы фиксированное вероятностное пространство $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ и неубывающая совокупность σ -алгебр $\{\mathcal{F}_\tau, \tau \in [0, T]\}$, определенная на этом пространстве. Пусть $M_\tau, \tau \in [0, T]$, — заданный на вероятностном пространстве $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ D -мартингал (определение D -мартингала дано в главе 1, см. также [4]). Отметим, что стандартный винеровский процесс является D -мартингалом с $\rho_\tau \equiv 1$.

В настоящем разделе мы обобщим теоремы о замене порядка интегрирования в повторных стохастических интегралах Ито на случай повторных стохастических интегралов по D -мартингалу.

В главе 1 отмечалось (см. также [4]), что стохастический интеграл по D -мартингалу $\int_t^T \xi_\tau dM_\tau$, где случайный процесс $\xi_\tau, \tau \in [t, T]$, принадлежит классу $H_2(\rho, [0, T])$, полученный в соответствии с определением 1.14, существует (определение класса $H_2(\rho, [0, T])$ дано в главе 1).

Пусть $\tilde{H}_2(\rho, [0, T])$ — класс среднеквадратически непрерывных при всех $\tau \in [0, T]$ и принадлежащих классу $H_2(\rho, [0, T])$ случайных процессов $\xi_\tau, \tau \in [0, T]$.

Положим

$$S[\phi, \psi^{(k)}]_{T,t} = \int_t^T \psi_1(t_1) \dots \int_t^{t_{k-1}} \psi_k(t_k) \int_t^{t_k} \phi_\tau dM_\tau^{(k+1)} dM_{t_k}^{(k)} \dots dM_{t_1}^{(1)}, \quad (3.27)$$

$$S[\psi^{(k)}]_{T,t} = \int_t^T \psi_1(t_1) \dots \int_t^{t_{k-1}} dM_{t_k}^{(k)} \dots dM_{t_1}^{(1)}. \quad (3.28)$$

Здесь и далее $\phi_\tau \in \tilde{H}_2(\rho, [t, T])$; $\psi_1(\tau), \dots, \psi_k(\tau)$ — непрерывные на промежутке $[t, T]$ функции; $M_\tau^{(l)} = M_\tau$ либо $M_\tau^{(l)} = \tau$ при $\tau \in [t, T]$; $l = 1, \dots, k+1$; M_τ — D -мартингал.

Определим повторный стохастический интеграл $\hat{S}[\psi^{(k)}]_{T,s}; t \leq s \leq T, k \geq 1$, вида

$$\hat{S}[\psi^{(k)}]_{T,s} = \int_s^T \psi_k(t_k) dM_{t_k}^{(k)} \dots \int_{t_2}^T \psi_1(t_1) dM_{t_1}^{(1)}$$

следующим рекуррентным соотношением:

$$\hat{S}[\psi^{(k)}]_{T,t} \stackrel{\text{def}}{=} \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{l=0}^{N-1} \psi_k(\tau_l) \Delta M_{\tau_l}^{(k)} \hat{S}[\psi^{(k-1)}]_{T, \tau_{l+1}}, \quad (3.29)$$

где $k \geq 1$; $\hat{S}[\psi^{(0)}]_{T,s} \stackrel{\text{def}}{=} 1$; $[s, T] \subseteq [t, T]$; здесь и далее $\Delta M_{\tau_l}^{(i)} = M_{\tau_{l+1}}^{(i)} - M_{\tau_l}^{(i)}$, $i = 1, \dots, k+1$; $l = 0, 1, \dots, N-1$; $\{\tau_l\}_{l=0}^N$ — разбиение промежутка $[t, T]$ такое, что

$$t = \tau_0 < \dots < \tau_N = T, \quad \max_{0 \leq j \leq N-1} |\tau_{j+1} - \tau_j| \rightarrow 0 \text{ при } N \rightarrow \infty;$$

остальные обозначения, входящие в (3.29), такие же, как в (3.27), (3.28).

Далее определим повторный стохастический интеграл $\hat{S}[\phi, \psi^{(k)}]_{T,t}$, $k \geq 1$, вида

$$\hat{S}[\phi, \psi^{(k)}]_{T,t} = \int_t^T \phi_s dM_s^{(k+1)} \hat{S}[\psi^{(k)}]_{T,s}$$

равенством

$$\hat{S}[\phi, \psi^{(k)}]_{T,t} \stackrel{\text{def}}{=} \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{l=0}^{N-1} \phi_{\tau_l} \Delta M_{\tau_l}^{(k+1)} \hat{S}[\psi^{(k)}]_{T, \tau_{l+1}},$$

где сохранен смысл обозначений, входящих в (3.27)–(3.29).

Сформулируем теорему о замене порядка интегрирования в повторных стохастических интегралах по D -мартингалу, которая является обобщением теоремы 3.1.

Теорема 3.5. Пусть $\phi_\tau \in \tilde{H}_2(\rho, [t, T])$, $\psi_l(\tau)$, $l = 1, \dots, k$, — непрерывные на промежутке $[t, T]$ неслучайные функции и $|\rho_\tau| \leq K < \infty$ с вероятностью 1 при всех $\tau \in [t, T]$. Тогда существует стохастический интеграл $\hat{S}[\phi, \psi^{(k)}]_{T,t}$ и $S[\phi, \psi^{(k)}]_{T,t} = \hat{S}[\phi, \psi^{(k)}]_{T,t}$ с вероятностью 1.

Доказательство теоремы 3.5 аналогично доказательству теоремы 3.1 и поэтому опускается.

Замечание 3.2. Отметим, что можно предложить несколько иной вариант условий теоремы 3.5. Так, можно не требовать ограниченности процесса ρ_τ , однако в этом случае необходимо потребовать, например, выполнения следующих дополнительных условий:

1. $M\{|\rho_\tau|\} < \infty$ при всех $\tau \in [t, T]$.
2. Процесс ρ_τ независим с процессами ϕ_τ и M_τ .

Замечание 3.3. Следует отметить, что хорошо известна конструкция стохастического интеграла по винеровскому процессу от упреждающей (не являющейся $\mathcal{F}_\tau$ -измеримой при $\tau \in [t, T]$) случайной функции — стохастический интеграл Стратоновича (см. главу 1).

Стохастический интеграл $\hat{S}[\phi, \psi^{(k)}]_{T,t}$ также является стохастическим интегралом от упреждающей случайной функции, однако в условиях теоремы 3.5 $S[\phi, \psi^{(k)}]_{T,t} = \hat{S}[\phi, \psi^{(k)}]_{T,t}$ с вероятностью 1, а $S[\phi, \psi^{(k)}]_{T,t}$ — обычный повторный стохастический интеграл по D -мартингалу. Если, например, $M_\tau, \tau \in [t, T]$, — винеровский процесс, то взаимосвязь стохастического интеграла $\hat{S}[\phi, \psi^{(k)}]_{T,t}$ и стохастического интеграла Стратоновича устанавливается как стандартная взаимосвязь стохастических интегралов Стратоновича и Ито (см. леммы 1.4 – 1.7).

Рассмотрим ряд утверждений, которые являются обобщением сформулированных в предыдущем разделе теорем.

Пусть неслучайная функция $\Phi(t_1, \dots, t_k) : \mathcal{D}_{k-1} \times \mathbb{R}^1 \rightarrow \mathbb{R}^1$, $\mathcal{D}_k = \{(t_1, \dots, t_k) : t \leq t_1 < \dots < t_k \leq T\}$, удовлетворяет условию АП из разд. 3.1.2.

Определим следующие стохастические интегралы:

$$\begin{aligned} \hat{S}[\Phi]_{T,t}^{(k)} &= \int_t^T dM_{t_k}^{(k)} \dots \int_{t_3}^T dM_{t_2}^{(2)} \int_{t_2}^T \Phi(t_1, t_2, \dots, t_{k-1}, \xi_{t_k}) dM_{t_1}^{(1)} \stackrel{\text{def}}{=} \\ &\stackrel{\text{def}}{=} \text{l.i.m.}_{N \rightarrow \infty} \sum_{l=0}^{N-1} \Delta M_{\tau_l}^{(k)} \int_{\tau_{l+1}}^T dM_{t_{k-1}}^{(k-1)} \dots \int_{t_3}^T dM_{t_2}^{(2)} \int_{t_2}^T \Phi(t_1, t_2, \dots, t_{k-1}, \xi_{\tau_l}) dM_{t_1}^{(1)} \end{aligned}$$

при $k \geq 3$ и

$$\hat{S}[\Phi]_{T,t}^{(2)} = \int_t^T dM_{t_2}^{(2)} \int_{t_2}^T \Phi(t_1, \xi_{t_2}) dM_{t_1}^{(1)} \stackrel{\text{def}}{=} \text{l.i.m.}_{N \rightarrow \infty} \sum_{l=0}^{N-1} \Delta M_{\tau_l}^{(2)} \int_{\tau_{l+1}}^T \Phi(t_1, \xi_{\tau_l}) dM_{t_1}^{(1)},$$

где сохранен смысл обозначений, входящих в (3.27)–(3.29), а случайный процесс $\xi_\tau, \tau \in [t, T]$, принадлежит классу $\tilde{H}_2(\rho, [t, T])$.

Кроме того, положим

$$S[\Phi]_{T,t}^{(k)} = \int_t^T \dots \int_t^{t_{k-1}} \Phi(t_1, \dots, t_{k-1}, \xi_{t_k}) dM_{t_k}^{(k)} \dots dM_{t_1}^{(1)}, \quad k \geq 2, \quad (3.30)$$

правая часть (3.30) понимается как повторный стохастический интеграл по D -мартингалу.

Теорема 3.6. Пусть выполнено условие АП разд. 3.1.2, $\xi_\tau \in \tilde{H}_2(\rho, [t, T])$ и $|\rho_\tau| \leq K < \infty$ с вероятностью 1 при всех $\tau \in [t, T]$. Тогда существует стохастический интеграл $\hat{S}[\Phi]_{T,t}^{(k)}$ и $S[\Phi]_{T,t}^{(k)} = \hat{S}[\Phi]_{T,t}^{(k)}$ с вероятностью 1 ($k \geq 2$).

Теорема 3.6 является обобщением теоремы 3.2 на случай повторных стохастических интегралов по D -мартингалу.

Рассмотрим еще два утверждения.

Теорема 3.7. Пусть выполнены условия теоремы 3.5 и $h(\tau)$ — непрерывная на промежутке $[t, T]$ неслучайная функция. Тогда

$$\int_t^T \phi_\tau dM_\tau^{(k+1)} h(\tau) \hat{S}[\psi^{(k)}]_{T,\tau} = \int_t^T \phi_\tau h(\tau) dM_\tau^{(k+1)} \hat{S}[\psi^{(k)}]_{T,\tau} \text{ с в. 1} \quad (3.31)$$

и стохастические интегралы в левой и правой частях (3.31) существуют.

Теорема 3.8. В условиях теоремы 3.7

$$\begin{aligned} & \int_t^T h(t_1) \int_t^{t_1} \phi_\tau dM_\tau^{(k+2)} dM_{t_1}^{(k+1)} \hat{S}[\psi^{(k)}]_{T,t_1} = \\ & = \int_t^T \phi_\tau dM_\tau^{(k+2)} \int_\tau^T h(t_1) dM_{t_1}^{(k+1)} \hat{S}[\psi^{(k)}]_{T,t_1} \text{ с в. 1,} \end{aligned} \quad (3.32)$$

причем левая и правая части (3.32) существуют.

Доказательства теорем 3.7 и 3.8 аналогичны доказательствам теорем 3.3 и 3.4 соответственно.

3.3 Соотношения между повторными стохастическими интегралами Стратоновича и Ито произвольной кратности

Пусть выполнены условия:

ВІ. $\mathbf{f}_\tau \in \mathbb{R}^m$ — $\mathcal{F}_\tau$ -измеримый при всех $\tau \in [0, T]$ стандартный векторный винеровский процесс с независимыми компонентами $\mathbf{f}_\tau^{(i)}$, $i = 1, \dots, m$.

ВІІ. $\psi_j(\tau)$, $j = 1, \dots, k$, — непрерывно дифференцируемые на промежутке $[t, T]$ функции.

Введем следующие обозначения:

$$\begin{aligned} & J[\psi^{(k)}]_{T,t}^{s_l, \dots, s_1} \stackrel{\text{def}}{=} \prod_{p=1}^l \mathbf{1}_{\{i_{s_p} = i_{s_{p+1}} \neq 0\}} \times \\ & \times \int_t^T \psi_k(t_k) \dots \int_t^{t_{s_l+3}} \psi_{s_l+2}(t_{s_l+2}) \int_t^{t_{s_l+2}} \psi_{s_l}(t_{s_l+1}) \psi_{s_l+1}(t_{s_l+1}) \times \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \times \int_t^{t_{s_l+1}} \psi_{s_l-1}(t_{s_l-1}) \dots \int_t^{t_{s_l+3}} \psi_{s_l+2}(t_{s_l+2}) \int_t^{t_{s_l+2}} \psi_{s_l}(t_{s_l+1}) \psi_{s_l+1}(t_{s_l+1}) \times \\
& \times \int_t^{t_{s_l+1}} \psi_{s_l-1}(t_{s_l-1}) \dots \int_t^{t_2} \psi_1(t_1) d\mathbf{w}_{t_1}^{(i_1)} \dots d\mathbf{w}_{t_{s_l-1}}^{(i_{s_l-1})} dt_{s_l+1} d\mathbf{w}_{t_{s_l+2}}^{(i_{s_l+2})} \dots \\
& \dots d\mathbf{w}_{t_{s_l-1}}^{(i_{s_l-1})} dt_{s_l+1} d\mathbf{w}_{t_{s_l+2}}^{(i_{s_l+2})} \dots d\mathbf{w}_{t_k}^{(i_k)}, \tag{3.33}
\end{aligned}$$

$$J^*[\psi^{(k)}]_{T,t} = \int_t^{*T} \psi_k(t_k) \dots \int_t^{*t_2} \psi_1(t_1) d\mathbf{w}_{t_1}^{(i_1)} \dots d\mathbf{w}_{t_k}^{(i_k)}, \tag{3.34}$$

$$J[\psi^{(k)}]_{T,t} = \int_t^T \psi_k(t_k) \dots \int_t^{t_2} \psi_1(t_1) d\mathbf{w}_{t_1}^{(i_1)} \dots d\mathbf{w}_{t_k}^{(i_k)}, \tag{3.35}$$

где в (3.33)–(3.35) $\psi^{(k)} \stackrel{\text{def}}{=} (\psi_k, \dots, \psi_1)$, $\psi^{(1)} \stackrel{\text{def}}{=} \psi_1$,

$$\begin{aligned}
\mathcal{A}_{k,l} &= \{(s_l, \dots, s_1) : s_l > s_{l-1} + 1, \dots, s_2 > s_1 + 1; \\
& s_l, \dots, s_1 = 1, \dots, k-1\}, \tag{3.36}
\end{aligned}$$

$(s_l, \dots, s_1) \in \mathcal{A}_{k,l}$; $l = 1, \dots, \left[\frac{k}{2}\right]$; $i_s = 0, 1, \dots, m$; $s = 1, \dots, k$; $[x]$ — целая часть числа x ; $\mathbf{1}_A$ — индикатор множества A . Отметим, что далее наряду с этими сокращенными обозначениями, там, где это необходимо, будут использоваться более развернутые.

Сформулируем теорему о связи повторных стохастических интегралов Ито и Стратоновича $J[\psi^{(k)}]_{T,t}$, $J^*[\psi^{(k)}]_{T,t}$ произвольной фиксированной кратности k .

Теорема 3.9. Пусть условия VI и VII данного раздела выполнены. Тогда справедливо следующее соотношение между повторными стохастическими интегралами Ито и Стратоновича:

$$J^*[\psi^{(k)}]_{T,t} = J[\psi^{(k)}]_{T,t} + \sum_{r=1}^{\left[\frac{k}{2}\right]} \frac{1}{2^r} \sum_{(s_r, \dots, s_1) \in \mathcal{A}_{k,r}} J[\psi^{(k)}]_{T,t}^{s_r, \dots, s_1} \text{ с в. 1.} \tag{3.37}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. По индукции нетрудно установить, что в условиях теоремы существуют повторные стохастические интегралы $J[\psi^{(k)}]_{T,t}$, $J[\psi^{(k)}]_{T,t}^{s_r, \dots, s_1}$, входящие в (3.37). Докажем это равенство по индукции. Рассмотрим случай $k = 1$. Согласно (3.37) с вероятностью 1 имеем

$$J[\psi_1]_{T,t} = J^*[\psi_1]_{T,t}. \tag{3.38}$$

Соотношение (3.38) является очевидным. При $k = 2$ из (3.37) с вероятностью 1 получаем

$$J^*[\psi^{(2)}]_{T,t} = J[\psi^{(2)}]_{T,t} + \frac{1}{2}J[\psi^{(2)}]_{T,t}^1. \quad (3.39)$$

Покажем, что равенство (3.39) справедливо с вероятностью 1. Для этого рассмотрим процесс $\eta_{t_2,t} = \psi_2(t_2)J[\psi_1]_{t_2,t}$, $t_2 \in [t, T]$, и найдем с помощью формулы Ито (лемма 1.1) его стохастический дифференциал:

$$d\eta_{t_2,t} = J[\psi_1]_{t_2,t}d\psi_2(t_2) + \psi_1(t_2)\psi_2(t_2)d\mathbf{w}_{t_2}^{(i_1)}. \quad (3.40)$$

Из равенства (3.40) следует, что диффузионный коэффициент процесса $\eta_{t_2,t}$, $t_2 \in [t, T]$, равен $\mathbf{1}_{\{i_1 \neq 0\}}\psi_1(t_2)\psi_2(t_2)$. Далее по лемме 1.6 с вероятностью 1 выводим соотношение (3.39). Таким образом, утверждение теоремы доказано при $k = 1, 2$.

Предположим, что утверждение теоремы справедливо при некотором $k > 2$, и докажем его справедливость при значении k , на единицу большем. В предположении индукции с вероятностью 1 имеем

$$\begin{aligned} J^*[\psi^{(k+1)}]_{T,t} &= \\ &= \int_t^{*T} \psi_{k+1}(\tau) \left\{ J[\psi^{(k)}]_{\tau,t} + \sum_{r=1}^{\lfloor \frac{k}{2} \rfloor} \frac{1}{2^r} \sum_{(s_r, \dots, s_1) \in \mathcal{A}_{k,r}} J[\psi^{(k)}]_{\tau,t}^{s_r, \dots, s_1} \right\} d\mathbf{w}_\tau^{(i_{k+1})} = \\ &= \int_t^{*T} \psi_{k+1}(\tau) J[\psi^{(k)}]_{\tau,t} d\mathbf{w}_\tau^{(i_{k+1})} + \\ &+ \sum_{r=1}^{\lfloor \frac{k}{2} \rfloor} \frac{1}{2^r} \sum_{(s_r, \dots, s_1) \in \mathcal{A}_{k,r}} \int_t^{*T} \psi_{k+1}(\tau) J[\psi^{(k)}]_{\tau,t}^{s_r, \dots, s_1} d\mathbf{w}_\tau^{(i_{k+1})}. \end{aligned} \quad (3.41)$$

Используя формулу Ито (лемма 1.1) и лемму 1.6, с вероятностью 1 получаем

$$\int_t^{*T} \psi_{k+1}(\tau) J[\psi^{(k)}]_{\tau,t} d\mathbf{w}_\tau^{(i_{k+1})} = J[\psi^{(k+1)}]_{T,t} + \frac{1}{2}J[\psi^{(k+1)}]_{T,t}^k, \quad (3.42)$$

$$\begin{aligned} &\int_t^{*T} \psi_{k+1}(\tau) J[\psi^{(k)}]_{\tau,t}^{s_r, \dots, s_1} d\mathbf{w}_\tau^{(i_{k+1})} = \\ &= \begin{cases} J[\psi^{(k+1)}]_{T,t}^{s_r, \dots, s_1} & \text{при } s_r = k-1, \\ J[\psi^{(k+1)}]_{T,t}^{s_r, \dots, s_1} + \frac{1}{2}J[\psi^{(k+1)}]_{T,t}^{k, s_r, \dots, s_1} & \text{при } s_r < k-1. \end{cases} \end{aligned} \quad (3.43)$$

После подстановки (3.42) и (3.43) в (3.41) и перегруппировки слагаемых приходим к справедливым с вероятностью 1 соотношениям

$$J^*[\psi^{(k+1)}]_{T,t} = J[\psi^{(k+1)}]_{T,t} + \sum_{r=1}^{\lfloor \frac{k}{2} \rfloor} \frac{1}{2^r} \sum_{(s_r, \dots, s_1) \in \mathcal{A}_{k+1,r}} J[\psi^{(k+1)}]_{T,t}^{s_r, \dots, s_1} \quad (3.44)$$

при четном k и

$$J^*[\psi^{(k'+1)}]_{T,t} = J[\psi^{(k'+1)}]_{T,t} + \sum_{r=1}^{\lfloor \frac{k'}{2} \rfloor + 1} \frac{1}{2^r} \sum_{(s_r, \dots, s_1) \in \mathcal{A}_{k'+1,r}} J[\psi^{(k'+1)}]_{T,t}^{s_r, \dots, s_1} \quad (3.45)$$

при $k' = k + 1$ нечетном. Из (3.44) и (3.45) с вероятностью 1 имеем

$$J^*[\psi^{(k+1)}]_{T,t} = J[\psi^{(k+1)}]_{T,t} + \sum_{r=1}^{\lfloor \frac{k+1}{2} \rfloor} \frac{1}{2^r} \sum_{(s_r, \dots, s_1) \in \mathcal{A}_{k+1,r}} J[\psi^{(k+1)}]_{T,t}^{s_r, \dots, s_1}. \quad (3.46)$$

Соотношение (3.46) завершает доказательство теоремы. $\square$

З а м е ч а н и е 3.4. *Результат теоремы 3.9 при $k=1, \dots, 4$ для стохастических интегралов несколько иного вида, чем $J^*[\psi^{(k)}]_{T,t}$, $J[\psi^{(k)}]_{T,t}$, известен [86]. Обобщение этих результатов на случай произвольного k , по-видимому, приводится здесь впервые.*

З а м е ч а н и е 3.5. *Результат теоремы 3.9 может быть обобщен, т.е. функция $\psi_1(s)$ в (3.37) может быть заменена на случайный процесс ϕ_s из класса $\mathcal{M}_2([t, T])$.*

З а м е ч а н и е 3.6. *В [86] рассматриваются соотношения между повторными стохастическими интегралами Стратоновича и Ито, взятыми по случайному промежутку $[t(\omega), s(\omega)]$, где $t(\omega), s(\omega)$ — моменты останова, для которых $0 \leq t(\omega) \leq s(\omega) \leq T$ с вероятностью 1. Результаты теоремы 3.9 и лемм 1.4 – 1.7 также могут быть обобщены на случай повторных стохастических интегралов, взятых по промежутку $[t(\omega), s(\omega)]$.*

З а м е ч а н и е 3.7. *Очевидно, что в условиях теоремы 3.9 с вероятностью 1 справедливо равенство*

$$J^\circ[\psi^{(k)}]_{T,t} = J[\psi^{(k)}]_{T,t} + \sum_{r=1}^{\lfloor \frac{k}{2} \rfloor} \theta^r \sum_{(s_r, \dots, s_1) \in \mathcal{A}_{k,r}} J[\psi^{(k)}]_{T,t}^{s_r, \dots, s_1}, \quad (3.47)$$

где $\theta \in [0, 1]$; $J^\circ[\psi^{(k)}]_{T,t}$ — повторный стохастический θ -интеграл (см. главу 1) вида

$$J^\circ[\psi^{(k)}]_{T,t} = \int_t^{\circ T} \psi_k(t_k) \dots \int_t^{\circ t_2} \psi_1(t_1) d\mathbf{w}_{t_1}^{(i_1)} \dots d\mathbf{w}_{t_k}^{(i_k)}.$$

Остальные обозначения, входящие в (3.47), такие же, как в теореме 3.9.

Доказательство (3.47) повторяет доказательство теоремы 3.9 при замене в соответствующих местах $\frac{1}{2}$ на θ .

Пример 3.2. Нетрудно проверить, что из теоремы 3.9 при $k = 2, 3, 4$ с вероятностью 1 вытекают равенства

$$\begin{aligned} \int_t^{*T} \psi_2(t_2) \int_t^{*t_2} \psi_1(t_1) d\mathbf{w}_{t_1}^{(i_1)} d\mathbf{w}_{t_2}^{(i_2)} &= \int_t^T \psi_2(t_2) \int_t^{t_2} \psi_1(t_1) d\mathbf{w}_{t_1}^{(i_1)} d\mathbf{w}_{t_2}^{(i_2)} + \\ &+ \frac{1}{2} \mathbf{1}_{\{i_1=i_2 \neq 0\}} \int_t^T \psi_2(t_2) \psi_1(t_2) dt_2, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \int_t^{*T} \psi_3(t_3) \dots \int_t^{*t_2} \psi_1(t_1) d\mathbf{w}_{t_1}^{(i_1)} \dots d\mathbf{w}_{t_3}^{(i_3)} &= \\ &= \int_t^T \psi_3(t_3) \dots \int_t^{t_2} \psi_1(t_1) d\mathbf{w}_{t_1}^{(i_1)} \dots d\mathbf{w}_{t_3}^{(i_3)} + \\ &+ \frac{1}{2} \mathbf{1}_{\{i_1=i_2 \neq 0\}} \int_t^T \psi_3(t_3) \int_t^{t_3} \psi_2(t_2) \psi_1(t_2) dt_2 d\mathbf{w}_{t_3}^{(i_3)} + \\ &+ \frac{1}{2} \mathbf{1}_{\{i_2=i_3 \neq 0\}} \int_t^T \psi_3(t_3) \psi_2(t_3) \int_t^{t_3} \psi_1(t_1) d\mathbf{w}_{t_1}^{(i_1)} dt_3, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \int_t^{*T} \psi_4(t_4) \dots \int_t^{*t_2} \psi_1(t_1) d\mathbf{w}_{t_1}^{(i_1)} \dots d\mathbf{w}_{t_4}^{(i_4)} &= \\ &= \int_t^T \psi_4(t_4) \dots \int_t^{t_2} \psi_1(t_1) d\mathbf{w}_{t_1}^{(i_1)} \dots d\mathbf{w}_{t_4}^{(i_4)} + \\ &+ \frac{1}{2} \mathbf{1}_{\{i_1=i_2 \neq 0\}} \int_t^T \psi_4(t_4) \int_t^{t_4} \psi_3(t_3) \int_t^{t_3} \psi_1(t_2) \psi_2(t_2) dt_2 d\mathbf{w}_{t_3}^{(i_3)} d\mathbf{w}_{t_4}^{(i_4)} + \\ &+ \frac{1}{2} \mathbf{1}_{\{i_2=i_3 \neq 0\}} \int_t^T \psi_4(t_4) \int_t^{t_4} \psi_3(t_3) \psi_2(t_3) \int_t^{t_3} \psi_1(t_1) d\mathbf{w}_{t_1}^{(i_1)} dt_3 d\mathbf{w}_{t_4}^{(i_4)} + \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{1}{2} \mathbf{1}_{\{i_3=i_4 \neq 0\}} \int_t^T \psi_4(t_4) \psi_3(t_4) \int_t^{t_4} \psi_2(t_2) \int_t^{t_2} \psi_1(t_1) d\mathbf{w}_{t_1}^{(i_1)} d\mathbf{w}_{t_2}^{(i_2)} dt_4 + \\
& + \frac{1}{4} \mathbf{1}_{\{i_1=i_2 \neq 0\}} \mathbf{1}_{\{i_3=i_4 \neq 0\}} \int_t^T \psi_4(t_4) \psi_3(t_4) \int_t^{t_4} \psi_2(t_2) \psi_1(t_2) dt_2 dt_4.
\end{aligned}$$

3.4 Аналитические формулы для вычисления стохастических интегралов

Настоящий раздел посвящен получению на основе формулы Ито двух семейств аналитических формул для вычисления стохастических интегралов.

Пусть задано вероятностное пространство $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$. Рассмотрим процесс Ито $\eta_\tau \in \mathbb{R}^n$, определенный при $\tau \in [0, T]$, $T < \infty$, как решение стохастического дифференциального уравнения Ито

$$d\eta_\tau = a(\eta_\tau, \tau) d\tau + \Sigma(\eta_\tau, \tau) d\mathbf{f}_\tau, \quad \eta_0 = \eta(0, \omega), \quad (3.48)$$

где $a(\eta, \tau) : \mathbb{R}^n \times [0, T] \rightarrow \mathbb{R}^n$, $\Sigma(\eta, \tau) : \mathbb{R}^n \times [0, T] \rightarrow \mathbb{R}^{n \times m}$ — неслучайные функции; $\mathbf{f}_\tau \in \mathbb{R}^m$ — $\mathcal{F}_\tau$ -измеримый при всех $\tau \in [0, T]$ стандартный векторный винеровский процесс с независимыми компонентами; случайная величина η_0 не зависит от приращения $\mathbf{f}_\tau - \mathbf{f}_0$ при $\tau > 0$. Относительно функций $a(\eta, \tau)$ и $\Sigma(\eta, \tau)$ предполагаем, что они удовлетворяют условиям AI–AIII (теорема 1.6). В противном случае воспользуемся [86] точными решениями конкретных стохастических дифференциальных уравнений Ито вида (3.48) с целью демонстрации существования их решений.

Пусть $Y \subseteq \mathbb{R}^n$ — множество, для которого

$$\mathbf{P} \{ \eta_\tau \in Y \text{ при всех } \tau \in [0, T] \} = 1,$$

а функция $R(\eta, \tau) : \mathbb{R}^n \times [0, T] \rightarrow \mathbb{R}^1$ непрерывна и имеет непрерывные частные производные $\frac{\partial R}{\partial \tau}(\eta, \tau)$, $\frac{\partial R}{\partial \eta^{(i)}}(\eta, \tau)$, $\frac{\partial^2 R}{\partial \eta^{(i)} \partial \eta^{(j)}}(\eta, \tau)$, $i, j = 1, \dots, n$, при всех $(\eta, \tau) \in Y \times [0, T]$.

Запишем формулу Ито для процесса $R(\eta_s, s)$:

$$\int_t^s \frac{\partial R}{\partial \eta}(\eta_\tau, \tau) \cdot d\eta_\tau = R(\eta_s, s) - R(\eta_t, t) - \int_t^s LR(\eta_\tau, \tau) d\tau \text{ с в.1,} \quad (3.49)$$

где $s, t \in [0, T]$; $s > t$; $\cdot$ — скалярное произведение; L — оператор вида

$$Lg(\eta, t) = \frac{\partial g}{\partial \tau}(\eta, t) + \frac{1}{2} \sum_{r=1}^m \sum_{i,j=1}^n \Sigma^{(ir)}(\eta, \tau) \Sigma^{(jr)}(\eta, \tau) \frac{\partial^2 g}{\partial \eta^{(i)} \partial \eta^{(j)}}(\eta, t), \quad (3.50)$$

где $g : Y \times [0, T] \rightarrow \mathbb{R}^1$ — некоторая функция, для которой существует правая часть (3.50).

Пусть функция $R(\eta, \tau)$ удовлетворяет дифференциальному уравнению

$$LR(\eta, \tau) = \varphi(\tau), \quad (3.51)$$

где $\varphi(\tau)$ — некоторая скалярная неслучайная интегрируемая на промежутке $[0, T]$ функция. Тогда (3.49) принимает вид

$$\int_t^s \frac{\partial R}{\partial \eta}(\eta_\tau, \tau) \cdot d\eta_\tau = R(\eta_s, s) - R(\eta_t, t) - \int_t^s \varphi(\tau) d\tau \text{ с в.1.} \quad (3.52)$$

Соотношение (3.52) можно интерпретировать как аналитическую формулу для вычисления интеграла в левой части (3.52). В литературе известно лишь несколько формул типа формулы (3.52) для конкретных функций $a(\eta, \tau)$, $\Sigma(\eta, \tau)$, $R(\eta, \tau)$, $\varphi(\tau)$. Приведем некоторые из них:

$$\int_t^s (f_\tau - f_s) df_\tau = -\frac{1}{2}(s - t) + \frac{1}{2}(f_s - f_t)^2 \text{ с в.1, } f_\tau \in \mathbb{R}^1, \quad (3.53)$$

$$\int_t^s \mathbf{f}_\tau \cdot d\mathbf{f}_\tau = -\frac{m}{2}(s - t) + \left(|\mathbf{f}_s|^2 - |\mathbf{f}_t|^2 \right) \text{ с в.1, } \mathbf{f}_\tau \in \mathbb{R}^m, \quad (3.54)$$

$$\int_t^s \frac{\mathbf{f}_\tau \cdot d\mathbf{f}_\tau}{|\mathbf{f}_\tau|^m} = \frac{1}{2 - m} \left(|\mathbf{f}_s|^{2-m} - |\mathbf{f}_t|^{2-m} \right) \text{ с в.1, } m \geq 3, \mathbf{f}_\tau \in \mathbb{R}^m, \quad (3.55)$$

$$\int_t^s \frac{\mathbf{f}_\tau \cdot d\mathbf{f}_\tau}{|\mathbf{f}_\tau|^2} = \ln |\mathbf{f}_s| - \ln |\mathbf{f}_t| \text{ с в.1, } \mathbf{f}_\tau \in \mathbb{R}^2. \quad (3.56)$$

Формулу (3.53) можно найти в [10], а формулы (3.54)–(3.56) — в [132].

Отметим, что для стохастических интегралов Стратоновича от случайных процессов специального вида справедливы аналитические формулы их вычисления, согласующиеся с правилами классического интегрального исчисления. Так, предположим, что функция $F(x) : \mathbb{R}^1 \rightarrow \mathbb{R}^1$ удовлетворяет условиям леммы 1.4. Тогда согласно лемме 1.4 имеем

$$\int_t^{*s} F(f_\tau) df_\tau = \int_t^s F(f_\tau) df_\tau + \frac{1}{2} \int_t^s \frac{dF}{dx}(f_\tau) d\tau \text{ с в.1,} \quad (3.57)$$

где $f_\tau \in \mathbb{R}^1$ — стандартный винеровский процесс.

Вместе с тем по формуле Ито

$$G(f_s) - G(f_t) = \frac{1}{2} \int_t^s \frac{dF}{dx}(f_\tau) d\tau + \int_t^s F(f_\tau) df_\tau \text{ с в.1,} \quad (3.58)$$

где $dG(x)/dx = F(x)$. Объединяя (3.57) и (3.58), получаем

$$\int_t^{*s} F(f_\tau) df_\tau = G(f_s) - G(f_t) \text{ с в.1.} \quad (3.59)$$

Формулу (3.59) можно найти, например, в [86].

Предлагаемый далее подход основывается на решении дифференциального уравнения (3.51) при некоторых допущениях относительно функций $R(\eta, \tau)$ и $\Sigma(\eta, \tau)$. Так, пусть $\eta \in \mathbb{R}^1$, $\Sigma(\eta, \tau) = \theta(\eta)\sigma(\tau)$, где $\theta(\eta) : \mathbb{R}^1 \rightarrow \mathbb{R}^m$, $\sigma(\tau) : [0, T] \rightarrow \mathbb{R}^1$. Тогда дифференциальное уравнение (3.51) принимает вид

$$\frac{\partial R}{\partial \tau}(\eta, \tau) + \frac{1}{2}\sigma^2(\tau)\beta^2(\eta)\frac{\partial^2 R}{\partial \eta^2}(\eta, \tau) = \varphi(\tau), \quad (3.60)$$

где $\beta^2(\eta) = \sum_{r=1}^m (\theta^{(r)}(\eta))^2$.

Решение уравнения (3.60) может быть найдено, например, методом аддитивного ($R(\eta, \tau) = \rho(\eta) + \psi(\tau)$) или мультипликативного ($R(\eta, \tau) = \rho(\eta)\psi(\tau)$) разделения переменных.

3.4.1 Аддитивное разделение переменных

Пусть $R(\eta, \tau) = \rho(\eta) + \psi(\tau)$, $\eta \in \mathbb{R}^1$. Тогда уравнение (3.60) принимает вид

$$\frac{d\psi(\tau)}{d\tau} + \frac{1}{2}\sigma^2(\tau)\beta^2(\eta)\frac{d^2\rho(\eta)}{d\eta^2} = \varphi(\tau). \quad (3.61)$$

После разделения переменных в (3.61) при $\sigma(\tau) \neq 0$ находим

$$\frac{1}{2}\beta^2(\eta)\frac{d^2\rho(\eta)}{d\eta^2} = \left(\varphi(\tau) - \frac{d\psi(\tau)}{d\tau}\right) \frac{1}{\sigma^2(\tau)} = \lambda \text{ (постоянная).} \quad (3.62)$$

Если $\beta^2(\eta) > 0$, то из (3.62) получаем два дифференциальных уравнения: $d\psi(\tau)/d\tau = \varphi(\tau) - \lambda\sigma^2(\tau)$, $d^2\rho(\eta)/d\eta^2 = 2\lambda/\beta^2(\eta)$, решения которых имеют вид

$$\psi(\tau) = \psi_0 + \int_0^\tau (\varphi(u) - \lambda\sigma^2(u)) du, \quad (3.63)$$

$$\rho(\eta) = \rho_0 + \rho_1\eta + 2\lambda \int_{y_0}^{\eta} g(u)du, \quad (3.64)$$

где $g(u) \stackrel{\text{def}}{=} \int_{y_0}^u dz/\beta^2(z)$; $\rho_0, \rho_1, y_0, \psi_0$ — постоянные; $\beta^2(u) > 0$ при $u \in [y_0, \eta]$.

Подстановка (3.63) и (3.64) в функцию $R(\eta, \tau) = \rho(\eta) + \psi(\tau)$, $\eta \in \mathbb{R}^1$, а $R(\eta, \tau)$ — в (3.52) при $\lambda \neq 0$ дает

$$\int_t^s g(\eta_\tau) d\eta_\tau = -\frac{1}{2} \int_t^s \sigma^2(\tau) d\tau + \int_{\eta_t}^{\eta_s} g(u) du \text{ с в.1.} \quad (3.65)$$

При определенном выборе функции $\beta(z)$ интеграл $\int_{\eta_t}^{\eta_s} g(u) du$ может быть вычислен аналитически. Тогда формула (3.65) при различных $\beta(z)$ определяет целое семейство аналитических выражений для вычисления стохастического интеграла $\int_t^s g(\eta_\tau) d\eta_\tau$.

Рассмотрим примеры выбора функций $\beta(z)$ и соответствующих им формул из семейства (3.65). При этом если выбираемая функция $\beta(z)$ такова, что функция $\Sigma(\eta, \tau)$ не удовлетворяет условию АП (см. теорему 1.6), или такова, что налагаются ограничения на область определения или область значений процесса η_τ , то в этом случае для демонстрации существования процессов η_τ , удовлетворяющих формуле (3.65), воспользуемся примерами стохастических дифференциальных уравнений Ито и их точных решений η_τ .

1. $\beta^2(\eta) = 1$:

$$\int_t^s \eta_\tau d\eta_\tau = -\frac{1}{2} \int_t^s \sigma^2(\tau) d\tau + \frac{\eta_s^2}{2} - \frac{\eta_t^2}{2} \text{ с в.1.}$$

2. $\beta^2(\eta) = \sqrt{y(\eta)}$, $y(\eta) \stackrel{\text{def}}{=} a\eta^2 + b\eta + c$, $\Delta = 4ac - b^2 > 0$, $a > 0$:

$$\int_t^s \text{Arsh} \frac{2a\eta_\tau + b}{\sqrt{\Delta}} d\eta_\tau = -\frac{1}{2} \sqrt{a} \int_t^s \sigma^2(\tau) d\tau + F(\eta_s) - F(\eta_t) \text{ с в.1,} \quad (3.66)$$

где $F(x) \stackrel{\text{def}}{=} (x + b/(2a)) \text{Arsh}((2ax + b)/\sqrt{\Delta}) - \sqrt{y(x)}/\sqrt{a}$.

3. $\beta^2(\eta) = y(\eta)$, $\Delta = 4ac - b^2 > 0$, $a > 0$:

$$\int_t^s \text{arctg} \frac{2a\eta_\tau + b}{\sqrt{\Delta}} d\eta_\tau = -\frac{1}{4} \sqrt{\Delta} \int_t^s \sigma^2(\tau) d\tau + F(\eta_s) - F(\eta_t) \text{ с в.1,}$$

где $F(x) \stackrel{\text{def}}{=} (x + b/(2a)) \operatorname{arctg}((2ax + b)/\sqrt{\Delta}) - (\sqrt{\Delta}/(4a))/\ln y(x)$.

4. $\beta^2(\eta) = 1/\sqrt{y(\eta)}$, $\Delta = 4ac - b^2 > 0$, $a > 0$:

$$\int_t^s F_1(\eta_\tau) d\eta_\tau = -\frac{1}{2} \int_t^s \sigma^2(\tau) d\tau + F_2(\eta_s) - F_2(\eta_t) \text{ с в.1,}$$

где $F_1(x) \stackrel{\text{def}}{=} ((2ax + b)/(4a))\sqrt{y(x)} + (\Delta/(8a\sqrt{a}))\operatorname{Arsh}((2ax + b)/\sqrt{\Delta})$;
 $F_2(x) \stackrel{\text{def}}{=} (\Delta/(8a\sqrt{a}))F(x) + y^{3/2}(x)/(6a)$; функция $F(x)$ такая же, как в формуле (3.66).

5. $\beta^2(\eta) = 1/P_{n-1}(\eta)$, где $P_{n-1}(\eta) > 0$ — многочлен степени $n - 1$ с вещественными коэффициентами:

$$\int_t^s Q_n(\eta_\tau) d\eta_\tau = -\frac{1}{2} \int_t^s \sigma^2(\tau) d\tau + H_{n+1}(\eta_s) - H_{n+1}(\eta_t) \text{ с в.1,}$$

где $P_{n-1}(x) = dQ_n(x)/dx$; $H_{n+1}(x) = \int Q_n(x) dx$.

Далее будем считать η_0 , σ постоянными.

6. $\beta^2(\eta) = e^{-2\eta}$:

$$\int_0^t e^{2\eta_\tau} d\eta_\tau = -t + \frac{1}{2} (e^{2\eta_t} - 1) \text{ с в.1,}$$

где, например, $\eta_t = \ln(f_t + e^{\eta_0})$ (решение уравнения $d\eta_t = -0.5e^{-2\eta_t} dt + e^{-\eta_t} df_t$), $0 \leq |\eta_0| < \infty$, $t \leq \min\{t \geq 0 : f_t + e^{\eta_0} = 0\}$.

7. $\beta^2(\eta) = \eta^2$:

$$\int_0^s \frac{d\eta_\tau}{\eta_\tau} = \frac{1}{2} \int_0^s \sigma^2(\tau) d\tau + \ln \eta_s - \ln \eta_0 \text{ с в.1,} \quad (3.67)$$

где, например, $\eta_t = \eta_0 e^{(a - \frac{1}{2}\sigma^2)t + \sigma f_t}$ (решение уравнения $d\eta_t = a\eta_t dt + \sigma\eta_t df_t$), $0 < \eta_0 < \infty$; a — постоянная.

8. $\beta^2(\eta) = \eta > 0$:

$$\int_0^s \ln \eta_\tau d\eta_\tau = -\frac{1}{2} \int_0^s \sigma^2(\tau) d\tau + \eta_s \ln \eta_s - \eta_s - \eta_0 \ln \eta_0 + \eta_0 \text{ с в.1,}$$

где, например, $\eta_t = (f_t + \sqrt{\eta_0})^2$ (решение уравнения $d\eta_t = dt + 2\sqrt{\eta_t}df_t$), $0 < \eta_0 < \infty$.

9. $\beta^2(\eta) = \eta^2(\eta^2 - 1)$, $|\eta| > 1$:

$$\int_0^s \left(-\frac{1}{\eta_\tau} + \frac{1}{2} \ln \frac{\eta_\tau + 1}{\eta_\tau - 1} \right) d\eta_\tau = \frac{1}{2} \int_0^s \sigma^2(\tau) d\tau + F(\eta_s) - F(\eta_0) \text{ с в.1,}$$

где $F(x) \stackrel{\text{def}}{=} x \operatorname{Arctth} x + 0.5 \ln(x^2 - 1) - \ln x$ и, например, $\eta_t = \sec(\sigma f_t + \operatorname{arcsec} \eta_0)$ (решение уравнения $d\eta_t = 0.5\sigma^2\eta_t(2\eta_t^2 - 1)dt + \sigma\eta_t\sqrt{\eta_t^2 - 1}df_t$) или $\eta_t = \operatorname{cosec}(\sigma f_t + \operatorname{arccosec} \eta_0)$ (решение уравнения $d\eta_t = 0.5\sigma^2\eta_t(2\eta_t^2 - 1)dt - \sigma\eta_t\sqrt{\eta_t^2 - 1}df_t$), $1 < \eta_0 < \infty$; для приведенных процессов η_t : $s \leq \max \{t \geq 0 : \eta_t > 0\}$.

10. $\beta^2(\eta) = \cos^4 \eta$:

$$\int_0^s \left(\frac{\sin \eta_\tau}{\cos^3 \eta_\tau} + 2 \operatorname{tg} \eta_\tau \right) d\eta_\tau = -\frac{3}{2} \int_0^s \sigma^2(\tau) d\tau + F(\eta_s) - F(\eta_0) \text{ с в.1,}$$

где $F(x) \stackrel{\text{def}}{=} 2^{-1} \cos^{-2} x - 2 \ln \cos x$ и, например, $\eta_t = \operatorname{arctg}(\sigma f_t + \operatorname{tg} \eta_0)$ (решение уравнения $d\eta_t = -\sigma^2 \sin \eta_t \cos^3 \eta_t dt + \sigma \cos^2 \eta_t df_t$) или $\eta_t = \operatorname{arctg}(e^{-t}(\operatorname{tg} \eta_0 + \sqrt{2} \int_0^t e^s df_s))$ (решение уравнения $d\eta_t = -(0.25 \sin 4\eta_t + \sin 2\eta_t)dt + \sqrt{2} \cos^2 \eta_t df_t$), $\cos \eta_0 > 0$; для приведенных процессов η_t : $s \leq \min \{t \geq 0 : \cos \eta_t = 0\}$.

11. $\beta^2(\eta) = \sin^4 \eta$:

$$\int_0^s \left(-\frac{\cos \eta_\tau}{\sin^3 \eta_\tau} - 2 \operatorname{ctg} \eta_\tau \right) d\eta_\tau = -\frac{3}{2} \int_0^s \sigma^2(\tau) d\tau + F(\eta_s) - F(\eta_0) \text{ с в.1,}$$

где $F(x) \stackrel{\text{def}}{=} 2^{-1} \sin^{-2} x - 2 \ln \sin x$ и, например, $\eta_t = \operatorname{arcctg}(\sigma f_t + \operatorname{ctg} \eta_0)$ (решение уравнения $d\eta_t = \sigma^2 \cos \eta_t \sin^3 \eta_t dt - \sigma \sin^2 \eta_t df_t$); для приведенного процесса η_t : $s \leq \min \{t \geq 0 : \sin \eta_t = 0\}$, $\sin \eta_0 > 0$.

12. $\beta^2(\eta) = (1 - \eta^2)^2$:

$$\int_0^s \left(\frac{\eta_\tau}{2(1 - \eta_\tau^2)} + \frac{1}{4} u(\eta_\tau) \right) d\eta_\tau = -\frac{1}{2} \int_0^s \sigma^2(\tau) d\tau + \frac{\eta_s}{4} u(\eta_s) - \frac{\eta_0}{4} u(\eta_0) \text{ с в.1,}$$

(3.68)

где $u(x) \stackrel{\text{def}}{=} \ln|(1+x)/(1-x)|$ и, например, $\eta_t = \text{th}(\sigma f_t + \text{Arth}\eta_0)$ (решение уравнения $d\eta_t = -\sigma^2\eta_t(1-\eta_t^2)dt + \sigma(1-\eta_t^2)df_t$), $|\eta_0| < 1$ или $\eta_t = \text{cth}(\sigma f_t + \text{Arcth}\eta_0)$ (решение уравнения $d\eta_t = \sigma^2\eta_t(1-\eta_t^2)dt - \sigma(1-\eta_t^2)df_t$), $1 < |\eta_0| < \infty$.

$$13. \beta^2(\eta) = |1 - \eta^2|, \quad |\eta| < 1 :$$

$$\int_0^s u(\eta_\tau) d\eta_\tau = - \int_0^s \sigma^2(\tau) d\tau + \eta_s u(\eta_s) + u_1(\eta_s) - \eta_0 u(\eta_0) - u_1(\eta_0), \quad (3.69)$$

где $u(x) \stackrel{\text{def}}{=} \ln|(1+x)/(1-x)|$; $u_1(x) \stackrel{\text{def}}{=} \ln|1-x^2|$ и, например, $\eta_t = \text{ch}(\sigma f_t + \text{Arch}\eta_0)$ (решение уравнения $d\eta_t = 0.5\sigma^2\eta_t dt + \sigma\sqrt{\eta_t^2 - 1}df_t$), $\eta_t = \cos(\sigma f_t + \arccos\eta_0)$ (решение уравнения $d\eta_t = -0.5\sigma^2\eta_t dt - \sigma\sqrt{1-\eta_t^2}df_t$) или $\eta_t = \sin(\sigma f_t + \arcsin\eta_0)$ (решение уравнения $d\eta_t = -0.5\sigma^2\eta_t dt + \sigma\sqrt{1-\eta_t^2}df_t$).

3.4.2 Мультипликативное разделение переменных

Пусть $R(\eta, \tau) = \psi(\tau)\rho(\eta)$, где $\psi(\tau) : [0, T] \rightarrow \mathbb{R}^1$; $\rho(\eta) : \mathbb{R}^1 \rightarrow \mathbb{R}^1$. Тогда, подставляя $R(\eta, \tau) = \psi(\tau)\rho(\eta)$ в (3.60) и полагая в нем $\varphi(\tau) \equiv 0$, получаем

$$\frac{d\psi(\tau)}{d\tau}\rho(\eta) + \frac{1}{2}\beta^2(\eta)\sigma^2(\tau)\psi(\tau)\frac{d^2\rho(\eta)}{d\eta^2} = 0. \quad (3.70)$$

Деля левую и правую части (3.70) на $\rho(\eta)\psi(\tau)\sigma^2(\tau)$ в предположении, что $\psi(\tau)$, $\sigma(\tau)$, $\rho(\eta) \neq 0$, находим

$$\frac{1}{\psi(\tau)\sigma^2(\tau)} \frac{d\psi(\tau)}{d\tau} = -\frac{1}{2} \frac{\beta^2(\eta)}{\rho(\eta)} \frac{d^2\rho(\eta)}{d\eta^2} = \lambda \text{ (постоянная)}. \quad (3.71)$$

Уравнение (3.71) эквивалентно дифференциальным уравнениям

$$\frac{d\psi(\tau)}{d\tau} = \lambda\sigma^2(\tau)\psi(\tau), \quad (3.72)$$

$$\beta^2(\eta)\frac{d^2\rho(\eta)}{d\eta^2} + \mu\rho(\eta) = 0, \quad \mu = 2\lambda. \quad (3.73)$$

Общее решение дифференциального уравнения (3.72) имеет вид $\psi(\tau) = \psi_0 e^{\lambda \int_0^\tau \sigma^2(u) du}$, где ψ_0 — произвольная постоянная. Нетрудно видеть, что частным решением дифференциального уравнения (3.60)

является интеграл $\int_0^\tau \varphi(u) du$. Поэтому общее решение дифференциального уравнения (3.60) с учетом сделанных допущений имеет вид

$$R(\eta, \tau) = \psi(\tau)\rho(\eta) + \int_0^\tau \varphi(u) du, \quad (3.74)$$

где $\rho(\eta)$ — решение дифференциального уравнения (3.73).

Подставляя (3.74) при $\psi_0 \neq 0$ в (3.52), в рамках сделанных предположений получаем следующую формулу:

$$\int_t^s \psi(\tau) \frac{d\rho}{d\eta}(\eta_\tau) d\eta_\tau = \psi(s)\rho(\eta_s) - \psi(t)\rho(\eta_t) \text{ с в.1.} \quad (3.75)$$

Рассмотрим примеры выбора $\beta(\eta)$, μ и $\rho(\eta)$ [133], которые могут быть использованы в формуле (3.75). Далее C_1, C_2, σ — постоянные.

$$1. \beta^2(\eta) = 1.$$

$$1.1. \mu < 0, \rho(\eta) = C_1 e^{-\sqrt{|\mu|\eta}} + C_2 e^{\sqrt{|\mu|\eta}}.$$

$$1.2. \mu > 0, \rho(\eta) = C_1 \cos(\sqrt{\mu}\eta) + C_2 \sin(\sqrt{\mu}\eta).$$

$$2. \beta^2(\eta) = 4(\eta^2 + 1)^2(a\eta^2 + a - 3)^{-1}, \quad a > 3, \quad \mu = 1, \quad \rho(\eta) = (\eta^2 + 1)^{1/4} (C_1 \cos u(\eta) + C_2 \sin u(\eta)), \text{ где } u(\eta) = 0.5\sqrt{a-1} \operatorname{Arsh} \eta.$$

$$3. \beta^2(\eta) = (a^2\eta^2 + a)^{-1}, \quad a > 0, \quad \mu = -1, \quad \rho(\eta) = e^{a\eta^2/2} (C_1 + C_2 F(\eta)),$$

где $F(\eta) = \int_{-\infty}^{\eta} e^{-ax^2} dx$.

$$4. \beta^2(\eta) = (\eta^2 + 1)^2.$$

$$4.1. \mu + 1 = \alpha^2 > 0, \rho(\eta) = \sqrt{\eta^2 + 1} (C_1 \cos u(\eta) + C_2 \sin u(\eta)).$$

$$4.2. \mu + 1 = -\alpha^2 < 0, \rho(\eta) = \sqrt{\eta^2 + 1} (C_1 \operatorname{ch} u(\eta) + C_2 \operatorname{sh} u(\eta)).$$

Здесь полагаем $u(\eta) = \alpha \operatorname{arctg} \eta$.

$$4.3. \mu = -1, \rho(\eta) = \sqrt{\eta^2 + 1} (C_1 + C_2 \operatorname{arctg} \eta).$$

Процесс η_t в примерах 4, например, имеет вид $\eta_t = \operatorname{tg}(t + f_t + \operatorname{arctg} \eta_0)$ (решение уравнения $d\eta_t = (1 + \eta_t)(1 + \eta_t^2)dt + (1 + \eta_t^2)df_t$), $\eta_t = \operatorname{tg}(\sigma f_t + \operatorname{arctg} \eta_0)$ (решение уравнения $d\eta_t = \sigma^2 \eta_t(1 + \eta_t^2)dt + \sigma(1 + \eta_t^2)df_t$) или $\eta_t = \operatorname{ctg}(\sigma f_t + \operatorname{arctg} \eta_0)$ (решение уравнения $d\eta_t = \sigma^2 \eta_t(1 + \eta_t^2)dt - \sigma(1 + \eta_t^2)df_t$).

5. $\beta^2(\eta) = \eta^2 - 1 > 0$, $\mu = -6$, $\rho(\eta) = 4(\eta^2 - 1)\eta$ — частное решение. При этом, например, $\eta_t = \operatorname{ch}(\sigma f_t + \operatorname{Arch} \eta_0)$ (см. (3.69)).

6. $\beta^2(\eta) = 1 - \eta^2 > 0$, $\mu = 6$, $\rho(\eta) = 4(\eta^2 - 1)\eta$ — частное решение. При этом, например, $\eta_t = \cos(\sigma f_t + \arccos \eta_0)$ или $\eta_t = \sin(\sigma f_t + \arcsin \eta_0)$ (см. (3.69)).

7. $\beta^2(\eta) = \eta^4$.

7.1. $\mu < 0$, $\rho(\eta) = \eta (C_1 e^{\sqrt{|\mu|}/\eta} + C_2 e^{-\sqrt{|\mu|}/\eta})$.

7.2. $\mu > 0$, $\rho(\eta) = \eta (C_1 \cos(\sqrt{|\mu|}\eta^{-1}) + C_2 \sin(\sqrt{|\mu|}\eta^{-1}))$. При этом, например, $\eta_t = \eta_0(1 - \eta_0 \sigma f_t)^{-1}$ (решение уравнения $d\eta_t = \sigma^2 \eta_t^3 dt + \sigma \eta_t^2 df_t$).

8. $\beta^2(\eta) = \eta^2$.

8.1. $c^2 = 0.25 - \mu > 0$, $\rho(\eta) = \sqrt{\eta} (C_1 \eta^c + C_2 \eta^{-c})$.

8.2. $c^2 = \mu - 0.25 > 0$, $\rho(\eta) = \sqrt{\eta} (C_1 \cos(c \ln \eta) + C_2 \sin(c \ln \eta))$.

8.3. $\mu = 0.25$, $\rho(\eta) = \sqrt{\eta} (C_1 + C_2 \ln \eta)$.

В примерах 8 процесс η_t может быть, например, таким же, как в формуле (3.67).

9. $\beta^2(\eta) = -\eta^2 \ln \eta > 0$, $0 < \eta < 1$, $\mu = -1$, $\rho(\eta) = C_1 \ln \eta + C_2 \left(\eta - \ln \eta \int_{\eta_0}^{\eta} dy / \ln y \right)$. При этом, например, $\eta_t = e^{-(f_t + \sqrt{-\ln \eta_0})^2}$ (решение уравнения $d\eta_t = -\eta_t (2 \ln \eta_t + 1) dt - 2 \eta_t \sqrt{-\ln \eta_t} df_t$), где $0 < \eta_0 < 1$.

10. $\beta^2(\eta) = \eta^4 / (2\eta^2 + 1)$, $\rho(\eta) = C_1(\eta^2 - \eta)e^{\frac{1}{\eta}} + C_2(\eta^2 + \eta)e^{-\frac{1}{\eta}}$, $\mu = -1$.

11. $\beta^2(\eta) = (\eta^2 - 1)^2$.

11.1. $\mu - 1 = 4\alpha^2 > 0$, $\rho(\eta) = \sqrt{|\eta^2 - 1|} (C_1 \cos(\alpha G(\eta)) + C_2 \sin(\alpha G(\eta)))$.

11.2. $\mu - 1 = -4\alpha^2 < 0$, $\rho(\eta) = (\eta + 1) (C_1 u(\eta)^{\alpha - \frac{1}{2}} + C_2 u(\eta)^{-\alpha - \frac{1}{2}})$.

11.3. $\mu = 1$, $\rho(\eta) = \sqrt{\eta^2 - 1} (C_1 + C_2 G(\eta))$.

В примерах 11 полагаем $u(\eta) = |(\eta + 1)/(\eta - 1)|$, а в примерах 11.1 и 11.3 — $G(\eta) = \ln u(\eta)$.

Процесс η_t в примерах 11.1, 11.2 может быть таким же, как в формуле (3.68), а в примере 11.3 $\eta_t = \text{cth}(\sigma f_t + \text{Arcth} \eta_0)$ (см. (3.68)).

Глава 4

Стохастические разложения процессов Ито

Построение стохастических разложений процессов Ито является достаточно новой проблемой в теории случайных процессов. Первые работы, посвященные ей, относятся к 70–90 годам XX века: [67] (Г. Н. Мильштейн, 1974), [79, 82] (W. Wagner и E. Platen, 1978, 1982), [80, 82] (E. Platen, 1981, 1982), [84] (P. E. Kloeden, E. Platen, 1991), [85] (R. Pettersson, 1992).

Данная глава посвящена, главным образом, получению унифицированных разложений Тейлора–Ито и Тейлора–Стратоновича.

Дело в том, что повторные стохастические интегралы Ито, входящие в разложение Тейлора–Ито в форме Вагнера и Платена, преобразуются к одной из двух минимальных систем канонических повторных стохастических интегралов Ито меньшей кратности и с полиномиальными весовыми функциями. Эти преобразования производятся на основе формул замены порядка интегрирования в повторных стохастических интегралах Ито (см. главу 3). В результате после приведения подобных слагаемых выводятся два названных унифицированными разложения Тейлора–Ито [105, 109, 118–124].

С помощью соотношений между повторными стохастическими интегралами Стратоновича и Ито и формул замены порядка интегрирования в повторных стохастических интегралах Ито строятся также два унифицированных разложения Тейлора–Стратоновича [114].

Важно отметить, что коэффициентные функции унифицированных разложений Тейлора–Ито и Тейлора–Стратоновича определяются рекуррентными соотношениями. Другой важной особенностью указанных разложений является то, что они в отличие от разложения Тейлора–Ито в форме Вагнера и Платена [81] и разложения Тейлора–Стратоновича в форме Клоедена и Платена [84] содержат мини-

мальные совокупности различных повторных стохастических интегралов Ито и Стратоновича соответственно. Для сравнения отметим, что унифицированные разложения Тейлора–Ито до членов третьего порядка малости содержат только 12 различных повторных стохастических интегралов Ито, в то время как аналогичное разложение Тейлора–Ито в форме Вагнера и Платена включает в себя уже 17 различных повторных стохастических интегралов Ито. Сходная ситуация возникает при сравнении разложения Тейлора–Стратоновича в форме Клоедена и Платена и унифицированных разложений Тейлора–Стратоновича.

Вторая из указанных особенностей унифицированных разложений Тейлора–Ито и Тейлора–Стратоновича особенно важна, поскольку сильная и слабая аппроксимации повторных стохастических интегралов являются сложной теоретической и вычислительной проблемой [70, 86, 98, 106 – 111, 117, 118].

4.1 Дифференцируемость по Ито случайных процессов

Пусть задано вероятностное пространство $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ и пусть $\mathbf{f}_t$ — $\mathcal{F}_t$ -измеримый при всех $t \in [0, T]$ стандартный винеровский процесс с независимыми компонентами $\mathbf{f}_t^{(i)}$, $i = 1, \dots, m$.

Определение 4.1. Процесс $\eta_s = R(\mathbf{x}_s, s)$, где $R: \mathbb{R}^n \times [0, T] \rightarrow \mathbb{R}^1$, а $\mathbf{x}_s$ — решение стохастического дифференциального уравнения Ито (1.35), называется дифференцируемым по Ито в среднеквадратическом смысле на промежутке $[0, T]$ на траекториях уравнения (1.35), если для любых двух моментов остановки s, t таких, что $P\{0 \leq t \leq s \leq T\} = 1$, с вероятностью 1 справедливо представление

$$\eta_s = \eta_t + \int_t^s B_{0\tau} d\tau + \sum_{i=1}^m \int_t^s B_{1\tau}^{(i)} d\mathbf{f}_\tau^{(i)}. \quad (4.1)$$

В (4.1) случайные процессы $B_{0\tau}$, $B_{1\tau}^{(i)} \in \mathcal{M}_2([0, T])$, $i = 1, \dots, m$, и называются производными по Ито процесса η_s .

З а м е ч а н и е 4.1. Если в определении 4.1 случайные процессы $B_{0\tau}$, $B_{1\tau}^{(i)} \in \mathcal{M}_2([0, T])$, $i = 1, \dots, m$, и являются среднеквадратически непрерывными на промежутке $[0, T]$, то процесс η_s называем непрерывно дифференцируемым по Ито в среднеквадратическом смысле на промежутке $[0, T]$ на траекториях уравнения (1.35).

Пусть $\mathcal{L}$ — класс функций $R(\mathbf{x}, t) : \mathbb{R}^n \times [0, T] \rightarrow \mathbb{R}^1$, для которых существуют и непрерывны частные производные $\frac{\partial R}{\partial t}(\mathbf{x}, t)$, $\frac{\partial R}{\partial \mathbf{x}^{(i)}}(\mathbf{x}, t)$, $\frac{\partial^2 R}{\partial \mathbf{x}^{(i)} \partial \mathbf{x}^{(j)}}(\mathbf{x}, t)$, $i, j = 1, \dots, n$.

Определим на классе $\mathcal{L}$ операторы

$$LR(\mathbf{x}, t) = \frac{\partial R}{\partial t}(\mathbf{x}, t) + \sum_{i=1}^n a^{(i)}(\mathbf{x}, t) \frac{\partial R}{\partial \mathbf{x}^{(i)}}(\mathbf{x}, t) + \frac{1}{2} \sum_{j=1}^m \sum_{l,i=1}^n \Sigma^{(lj)}(\mathbf{x}, t) \Sigma^{(ij)}(\mathbf{x}, t) \frac{\partial^2 R}{\partial \mathbf{x}^{(l)} \partial \mathbf{x}^{(i)}}(\mathbf{x}, t), \quad (4.2)$$

$$G_0^{(i)} R(\mathbf{x}, t) = \sum_{j=1}^n \Sigma^{(ji)}(\mathbf{x}, t) \frac{\partial R}{\partial \mathbf{x}^{(j)}}(\mathbf{x}, t), \quad i = 1, \dots, m. \quad (4.3)$$

Рассмотрим следующее утверждение.

Лемма 4.1. Пусть выполнены условия леммы 1.3. Тогда процесс $\eta_s = R(\mathbf{x}_s, s)$ дифференцируем по Ито в среднеекватрическом смысле на промежутке $[0, T]$ на траекториях уравнения (1.35), его производные по Ито имеют вид $B_{0\tau} = LR(\mathbf{x}_\tau, \tau)$, $B_{1\tau}^{(i)} = G_0^{(i)} R(\mathbf{x}_\tau, \tau)$, $i = 1, \dots, m$, причем для любых двух моментов остановки s, t , для которых $P\{0 \leq t \leq s \leq T\} = 1$ с вероятностью 1 справедливо равенство

$$\eta_s = \eta_t + \int_t^s LR(\mathbf{x}_\tau, \tau) d\tau + \sum_{i=1}^m \int_t^s G_0^{(i)} R(\mathbf{x}_\tau, \tau) d\mathbf{f}_\tau^{(i)},$$

правая часть которого существует в среднеекватрическом смысле.

Следует отметить, что в формулировке леммы 4.1 моменты t, s считаются моментами остановки, для которых $P\{0 \leq t \leq s \leq T\} = 1$. Справедливость такой обобщенной формулы Ито вытекает из работы [8. С. 140] или [86. С. 184–185].

В дальнейшем будем широко использовать многоиндексные обозначения. Для унификации преобразований многоиндексных величин целесообразно ввести понятие матрицы произвольного ранга (размера) как совокупности многоиндексных элементов. Совокупность k -индексных элементов

$$\{A^{(i_1 \dots i_k)}, i_1 = 1, \dots, m_1; \dots; i_k = 1, \dots, m_k\},$$

где $m_1, \dots, m_k \in N$, будем называть матрицей k -го ранга $^{(k)}A$:

$$^{(k)}A = \|A^{(i_1 \dots i_k)}\|_{i_1=1, \dots, i_k=1}^{m_1 \dots m_k}. \quad (4.4)$$

Если $m_1 = \dots = m_k = m$, то записываем

$$^{(k)}A = \|A^{(i_1 \dots i_k)}\|_{i_1, \dots, i_k=1}^m.$$

Очевидно, что $^{(0)}A$ — скаляр; $^{(1)}A$ — матрица-столбец размера $m_1 \times 1$; $^{(2)}A$ — прямоугольная матрица размера $m_1 \times m_2$, и т. д. Далее иногда ранг скаляров, равный нулю, и ранг матриц-столбцов, равный единице, указывать не будем.

Если при некотором $l \in \{1, \dots, k\} : m_l = 0$ в (4.4), то условимся понимать правую часть этой матрицы следующим образом:

$$\|A^{(i_1 \dots i_{l-1} i_{l+1} \dots i_k)}\|_{i_1=1, \dots, i_{l-1}=1, i_{l+1}=1, \dots, i_k=1}^{m_1 \dots m_{l-1} m_{l+1} \dots m_k},$$

или в сокращенной записи, $^{(k-1)}A$.

Обозначение

$$^{(k)}A = \|^{(k-1)}A^{(i_1)}\|_{i_1=1}^{m_1}$$

будем понимать как блочную матрицу k -го ранга с элементами-матрицами $(k-1)$ -го ранга:

$$^{(k-1)}A^{(i_1)} = \|A^{(i_1 \dots i_k)}\|_{i_2=1, \dots, i_k=1}^{m_2 \dots m_k}.$$

Аналогично обозначение

$$^{(k)}A = \|^{(k-l)}A^{(i_1 \dots i_l)}\|_{i_1=1, \dots, i_l=1}^{m_1 \dots m_l}, \quad k > l,$$

следует понимать как блочную матрицу k -го ранга с элементами-матрицами $(k-l)$ -го ранга:

$$^{(k-l)}A^{(i_1 \dots i_l)} = \|A^{(i_1 \dots i_k)}\|_{i_{l+1}=1, \dots, i_k=1}^{m_{l+1} \dots m_k}.$$

Пусть

$$^{(k)}A = \|A^{(i_1 \dots i_k)}\|_{i_1=1, \dots, i_k=1}^{m_1 \dots m_k}, \quad ^{(k)}B = \|B^{(i_1 \dots i_k)}\|_{i_1=1, \dots, i_k=1}^{m_1 \dots m_k}.$$

Будем считать, что $^{(k)}A = ^{(k)}B$ тогда и только тогда, когда $A^{(i_1 \dots i_k)} = B^{(i_1 \dots i_k)}$ для всех $1 \leq i_p \leq m_p$, $p = 1, \dots, k$. Кроме того,

$$\alpha ^{(k)}A + \beta ^{(k)}B = \| \alpha A^{(i_1 \dots i_k)} + \beta B^{(i_1 \dots i_k)} \|_{i_1=1, \dots, i_k=1}^{m_1 \dots m_k}, \quad \alpha, \beta \in \mathfrak{R}^1.$$

Матрицу $^{(k)}C$, определенную равенством

$$^{(k)}C = \left\| \sum_{i_1=1}^{m_1} \dots \sum_{i_l=1}^{m_l} A^{(i_1 \dots i_{k+l})} B^{(i_1 \dots i_l)} \right\|_{i_{l+1}=1, \dots, i_{l+k}=1}^{m_{l+1} \dots m_{l+k}}, \quad (4.5)$$

будем называть сверткой порядка l матриц $^{(k+l)}A$ и $^{(l)}B$ и обозначать как

$$^{(k)}C = ^{(k+l)}A \overset{l}{\cdot} ^{(l)}B.$$

Если в (4.5) $k = 0$, то правую часть этого равенства будем понимать так:

$$\sum_{i_1=1}^{m_1} \dots \sum_{i_l=1}^{m_l} A^{(i_1 \dots i_l)} B^{(i_1 \dots i_l)}.$$

Условимся также под $\overset{0}{\cdot}$ понимать обычное умножение.

По определению операция свертки обладает, в частности, следующими достаточно очевидными свойствами:

1. Коммутативность:

$$^{(k+l)}A \overset{l}{\cdot} ^{(l)}B = ^{(l)}B \overset{l}{\cdot} ^{(k+l)}A.$$

2. Дистрибутивность:

$$(\alpha ^{(k+l)}A + \beta ^{(k+l)}B) \overset{l}{\cdot} ^{(l)}C = \alpha ^{(k+l)}A \overset{l}{\cdot} ^{(l)}C + \beta ^{(k+l)}B \overset{l}{\cdot} ^{(l)}C, \quad \alpha, \beta \in \mathbb{R}^1.$$

Определение 4.2. Процесс $\eta_s = R(\mathbf{x}_s, s)$, где $R: \mathbb{R}^n \times [0, T] \rightarrow \mathbb{R}^1$, называется N раз дифференцируемым по Ито в среднеквадратическом смысле на промежутке $[0, T]$ на траекториях уравнения (1.35), если для всех $l \in \{0, 1, \dots, N-1\}$ и любых двух моментов остановки s, t таких, что $P\{0 \leq t \leq s \leq T\} = 1$, справедливо с вероятностью 1 представление

$$^{(p_l)}B_{\lambda_l \dots \lambda_{1s}} = ^{(p_l)}B_{\lambda_l \dots \lambda_{1t}} + \int_t^s ^{(p_l)}B_{0\lambda_l \dots \lambda_{1\tau}} d\tau + \int_t^s ^{(p_l+1)}B_{1\lambda_l \dots \lambda_{1\tau}} \overset{1}{\cdot} d\mathbf{f}_\tau,$$

где $\lambda_q = 0$ или $\lambda_q = 1$; $p_l = \sum_{i=1}^l \lambda_i$. Матричные случайные процессы $^{(p_q)}B_{\lambda_q \dots \lambda_{1\tau}}$, $q = 1, 2, \dots, N$, покомпонентно принадлежат классу $\mathcal{M}_2([0, T])$ и называются q -ми производными процесса η_s по Ито. При этом полагаем

$$p_0 \stackrel{\text{def}}{=} 0, \quad ^{(p_0)}B_{\lambda_0 \dots \lambda_{1\tau}} \stackrel{\text{def}}{=} \eta_\tau, \\ ^{(p_0)}B_{0\lambda_0 \dots \lambda_{1\tau}} \stackrel{\text{def}}{=} B_{0\tau}, \quad ^{(p_0+1)}B_{1\lambda_0 \dots \lambda_{1\tau}} \stackrel{\text{def}}{=} ^{(1)}B_{1\tau}.$$

З а м е ч а н и е 4.2. Отметим, что если в определении 4.2 матричные случайные процессы $^{(p_q)}B_{\lambda_q \dots \lambda_{1\tau}}$, $q = 1, 2, \dots, N$, покомпонентно принадлежат классу $\mathcal{M}_2([0, T])$ и являются среднеквадратически непрерывными на промежутке $[0, T]$, то в этом случае процесс

η_s называем N раз непрерывно дифференцируемым по Ито в средне-квадратическом смысле на промежутке $[0, T]$ на траекториях уравнения (1.35).

Введем обозначения

$$\left\| Q_{\lambda_l}^{(i_l)} \dots Q_{\lambda_1}^{(i_1)} R(\mathbf{x}, s) \right\|_{i_1=\lambda_1, \dots, i_l=\lambda_l}^{m\lambda_1 \dots m\lambda_l} \stackrel{\text{def}}{=} {}^{(p_l)}Q_{\lambda_l} \dots Q_{\lambda_1} \{R(\mathbf{x}, s)\},$$

где $\lambda_l = 1$ или $\lambda_l = 0$; $Q_{\lambda_l}^{(i_l)} = L$ и $i_l = 0$ при $\lambda_l = 0$; $Q_{\lambda_l}^{(i_l)} = G_0^{(i_l)}$ и $i_l = 1, \dots, m$ при $\lambda_l = 1$, $l = 1, \dots, N$;

$$\mathcal{M}_k = \{(\lambda_k, \dots, \lambda_1) : \lambda_l = 1 \text{ или } \lambda_l = 0, l = 1, \dots, k\}.$$

Рассмотрим функцию $R : \mathbb{R}^n \times [0, T] \rightarrow \mathbb{R}^1$ и сформулируем утверждение о N -кратной дифференцируемости по Ито случайного процесса $\eta_s = R(\mathbf{x}_s, s)$.

Лемма 4.2. Пусть выполнены условия AI–AIII теоремы 1.6 и пусть для всех $(\lambda_l, \dots, \lambda_1) \in \bigcup_{g=1}^{N-1} \mathcal{M}_g : Q_{\lambda_l}^{(i_l)} \dots Q_{\lambda_1}^{(i_1)} R(\mathbf{x}, s) \in \mathcal{L}$ и всех $(\lambda_l, \dots, \lambda_1) \in \bigcup_{g=1}^N \mathcal{M}_g : Q_{\lambda_l}^{(i_l)} \dots Q_{\lambda_1}^{(i_1)} R(\mathbf{x}_s, s) \in \mathcal{M}_2([0, T])$. Тогда процесс $\eta_s = R(\mathbf{x}_s, s)$ N раз дифференцируем по Ито в среднеквадратическом смысле на промежутке $[0, T]$ на траекториях уравнения (1.35) и его производные по Ито имеют вид

$${}^{(p_l)}B_{\lambda_l \dots \lambda_{1s}} = {}^{(p_l)}Q_{\lambda_l} \dots Q_{\lambda_1} \{R(\mathbf{x}_s, s)\}, \quad (4.6)$$

где $l = 1, \dots, N$; $p_l = \sum_{p=1}^l \lambda_p$.

Если $R(\mathbf{x}, t) \equiv \mathbf{x}$, $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$, то полагаем

$$Q_{\lambda_l}^{(i_l)} \dots Q_{\lambda_1}^{(i_1)} \mathbf{x} \stackrel{\text{def}}{=} \begin{cases} Q_{\lambda_l}^{(i_l)} \dots Q_{\lambda_2}^{(i_2)} \mathbf{a}(\mathbf{x}, t) & \text{при } i_1 = 0; l \geq 2, \\ Q_{\lambda_l}^{(i_l)} \dots Q_{\lambda_2}^{(i_2)} \Sigma_{i_1}(\mathbf{x}, t) & \text{при } i_1 = 1, \dots, m; l \geq 2, \\ \mathbf{a}(\mathbf{x}, t) & \text{при } i_1 = 0; l = 1, \\ \Sigma_{i_1}(\mathbf{x}, t) & \text{при } i_1 = 1, \dots, m; l = 1 \end{cases} \quad (4.7)$$

Запись (4.7) не вполне корректна, так как ее правая часть является функцией от $\mathbf{x}$ и t , а в обозначениях левой части буква t отсутствует. Далее не будет необходимости явно подчеркивать зависимость функции $Q_{\lambda_l}^{(i_l)} \dots Q_{\lambda_1}^{(i_1)} \mathbf{x}$ от t . Поэтому записываем $Q_{\lambda_l}^{(i_l)} \dots Q_{\lambda_1}^{(i_1)} \mathbf{x}$ и ${}^{(p_l)}Q_{\lambda_l} \dots Q_{\lambda_1} \{\mathbf{x}\}$, подразумевая, что эти функции зависят от $\mathbf{x}$ и t , где

$$\left\| Q_{\lambda_l}^{(i_l)} \dots Q_{\lambda_1}^{(i_1)} \mathbf{x} \right\|_{i_1=\lambda_1, \dots, i_l=\lambda_l}^{m\lambda_1 \dots m\lambda_l} \stackrel{\text{def}}{=} {}^{(p_l)}Q_{\lambda_l} \dots Q_{\lambda_1} \{\mathbf{x}\}. \quad (4.8)$$

Далее также будем использовать следующую запись:

$$Q_{\lambda_l}^{(i_l)} \dots Q_{\lambda_1}^{(i_1)} \mathbf{x}_t \stackrel{\text{def}}{=} \begin{cases} Q_{\lambda_l}^{(i_l)} \dots Q_{\lambda_2}^{(i_2)} \mathbf{a}(\mathbf{x}_t, t) & \text{при } i_1 = 0; l \geq 2, \\ Q_{\lambda_l}^{(i_l)} \dots Q_{\lambda_2}^{(i_2)} \Sigma_{i_1}(\mathbf{x}_t, t) & \text{при } i_1 = 1, \dots, m; l \geq 2, \\ \mathbf{a}(\mathbf{x}_t, t) & \text{при } i_1 = 0; l = 1, \\ \Sigma_{i_1}(\mathbf{x}_t, t) & \text{при } i_1 = 1, \dots, m; l = 1, \end{cases} \quad (4.9)$$

$$\|Q_{\lambda_l}^{(i_l)} \dots Q_{\lambda_1}^{(i_1)} \mathbf{x}_t\|_{i_1=\lambda_1, \dots, i_l=\lambda_l}^{m\lambda_l \dots m\lambda_l} \stackrel{\text{def}}{=} (p_l) Q_{\lambda_l} \dots Q_{\lambda_1} \{\mathbf{x}_t\}. \quad (4.10)$$

Определение (4.9) в отличие от (4.7) не вызывает разночтений, так как индекс t у процесса $\mathbf{x}_t$ согласно (4.9) должен соответствовать переменной t .

Заметим, что вместо записи $Q_{\lambda_l}^{(i_l)} \dots Q_{\lambda_1}^{(i_1)} \mathbf{x}$ можно было бы использовать корректную запись [86]

$$Q_{\lambda_l}^{(i_l)} \dots Q_{\lambda_2}^{(i_2)} \mathbf{b}_{i_1}(\mathbf{x}, t), \quad (4.11)$$

где

$$\mathbf{b}_{i_1}(\mathbf{x}, t) = \begin{cases} \mathbf{a}(\mathbf{x}, t) & \text{при } i_1 = 0, \\ \Sigma_{i_1}(\mathbf{x}, t) & \text{при } i_1 = 1, \dots, m. \end{cases}$$

Однако в дальнейшем основную роль будут играть выражения, являющиеся сложными линейными комбинациями слагаемых типа (4.11), причем в каждом слагаемом i_1 может быть свое. Для таких линейных комбинаций по понятным причинам не удастся ввести простые обозначения типа (4.11), поэтому для единообразия обозначений принимаем соглашение (4.7).

Далее будем считать случайный процесс $\eta_s = R(\mathbf{x}_s, s)$ N раз непрерывно дифференцируемым по Ито в среднеквадратическом смысле на промежутке $[0, T]$ на траекториях уравнения (1.35), если он удовлетворяет определению 4.2 и его производные по Ито определяются соотношением (4.6).

4.2 Разложение Тейлора–Ито в форме Вагнера и Платена

Как уже отмечалось ранее, разложения Тейлора–Ито были впервые получены в [79, 81]. Эти результаты можно найти также в монографии [86]. Рассмотрим результаты, приведенные в [79, 81]. При этом будем придерживаться обозначений и терминологии, принятых в предлагаемой монографии.

Обозначим

$$\mathcal{E}_{qk} = \{(\lambda_k, \dots, \lambda_1) : 2k - \lambda_1 - \dots - \lambda_k = q\},$$

$$\mathcal{G}_{rk} = \{(\lambda_k, \dots, \lambda_1) : r + 1 \leq 2k - \lambda_1 - \dots - \lambda_k \leq 2r\},$$

$$^{(p_k)} J_{(\lambda_k \dots \lambda_1)s,t} = \left\| J_{(\lambda_k \dots \lambda_1)s,t}^{(i_k \dots i_1)} \right\|_{i_1=\lambda_1, \dots, i_l=\lambda_l}^{m\lambda_1 \dots m\lambda_l},$$

$$J_{(\lambda_k \dots \lambda_1)s,t}^{(i_k \dots i_1)} = \int_t^s \dots \int_t^{\tau_2} d\mathbf{w}_{\tau_1}^{(i_k)} \dots d\mathbf{w}_{\tau_k}^{(i_1)}, \quad k \geq 1, \quad \text{и} \quad J_{(\lambda_0 \dots \lambda_1)s,t}^{(i_0 \dots i_1)} \stackrel{\text{def}}{=} 1,$$

где $\mathbf{w}_{\tau}^{(i)} = \mathbf{f}_{\tau}^{(i)}$ при $i = 1, \dots, m$ и $\mathbf{w}_{\tau}^{(0)} = \tau$.

Теорема 4.1. Пусть процесс $\eta_s = R(\mathbf{x}_s, s)$, где $R : \mathbb{R}^n \times [0, T] \rightarrow \mathbb{R}^1$, $r + 1$ раз дифференцируем по Ито в среднеквадратическом смысле на промежутке $[0, T]$ на траекториях уравнения (1.35). Тогда для любых двух моментов остановки s, t таких, что $P\{0 \leq t \leq s \leq T\} = 1$, с вероятностью 1 справедливо разложение

$$\eta_s = \eta_t + \sum_{k=1}^r \sum_{(\lambda_k, \dots, \lambda_1) \in \mathcal{M}_k} ^{(p_k)} Q_{\lambda_k} \dots Q_{\lambda_1} \{\eta_t\} ^{p_k} ^{(p_k)} J_{(\lambda_k \dots \lambda_1)s,t} + D_{r+1,s,t}, \quad (4.12)$$

$$\begin{aligned} D_{r+1,s,t} = \\ = \sum_{(\lambda_{r+1}, \dots, \lambda_1) \in \mathcal{M}_{r+1}} \int_t^s \dots \left(\int_t^{\tau_r} ^{(p_{r+1})} Q_{\lambda_{r+1}} \dots Q_{\lambda_1} \{\eta_{\tau_{r+1}}\} ^{\lambda_{r+1}} d\mathbf{w}_{\tau_{r+1}} \right) \dots ^{\lambda_1} d\mathbf{w}_{\tau_1}, \end{aligned} \quad (4.13)$$

причем правые части (4.12) и (4.13) существуют в среднеквадратическом смысле.

Нетрудно понять, что (4.12) получаем путем $(r + 1)$ -кратного последовательного применения формулы Ито к процессу $\eta_s = R(\mathbf{x}_s, s)$.

Упорядочим члены разложения (4.12) по возрастанию порядка малости при $s \downarrow t$ в среднеквадратическом смысле.

Теорема 4.2. Пусть процесс $\eta_s = R(\mathbf{x}_s, s)$, где $R : \mathbb{R}^n \times [0, T] \rightarrow \mathbb{R}^1$, $r + 1$ раз дифференцируем по Ито в среднеквадратическом смысле на промежутке $[0, T]$ на траекториях уравнения (1.35). Тогда для любых двух моментов остановки s, t таких, что $P\{0 \leq t \leq s \leq T\} = 1$, с вероятностью 1 справедливо разложение

$$\eta_s = \eta_t + \sum_{q,k=1}^r \sum_{(\lambda_k, \dots, \lambda_1) \in \mathcal{E}_{qk}} ^{(p_k)} Q_{\lambda_k} \dots Q_{\lambda_1} \{\eta_t\} ^{p_k} ^{(p_k)} J_{(\lambda_k \dots \lambda_1)s,t} + H_{r+1,s,t}, \quad (4.14)$$

причем существует такая постоянная $C_{r+1} < \infty$, что

$$\left(\mathbb{M} \left\{ \left(H_{r+1,s,t} \right)^2 \right\} \right)^{\frac{1}{2}} \leq C_{r+1} (s-t)^{\frac{r+1}{2}},$$

где

$$H_{r+1,s,t} = \sum_{k=1}^r \sum_{(\lambda_k, \dots, \lambda_1) \in \mathcal{G}_{rk}} {}^{(p_k)}Q_{\lambda_k} \dots Q_{\lambda_1} \{\eta_t\} {}^{p_k} J_{(\lambda_k \dots \lambda_1)s,t} + D_{r+1,s,t}, \quad (4.15)$$

а правые части (4.14) и (4.15) существуют в среднеквадратическом смысле.

Доказательство теоремы сводится к пересортировке членов разложения (4.12), после чего приходим к (4.14).

Термин "разложение Тейлора–Ито в форме Вагнера и Платена" далее будем применять как к разложению (4.12), так и к разложению (4.14).

Нетрудно проверить с помощью формулы Ито, что некоторые повторные стохастические интегралы из правой части (4.12) связаны линейными соотношениями. Таким образом, эти интегралы не образуют минимальной совокупности. В следующем разделе будет построено разложение Тейлора–Ито по минимальной совокупности повторных стохастических интегралов Ито.

4.3 Унифицированные разложения Тейлора–Ито

4.3.1 Обозначения

Рассмотрим повторные стохастические интегралы Ито:

$$J_{l_1 \dots l_{ks,t}}^{(i_1 \dots i_k)} = \begin{cases} \int_t^s (s - \tau_1)^{l_1} d\mathbf{f}_{\tau_1}^{(i_1)} \dots \int_{\tau_{k-1}}^s (s - \tau_k)^{l_k} d\mathbf{f}_{\tau_k}^{(i_k)} & \text{при } k > 0, \\ 1 & \text{при } k = 0, \end{cases}$$

$$I_{l_1 \dots l_{ks,t}}^{(i_1 \dots i_k)} = \begin{cases} \int_t^s (t - \tau_1)^{l_1} d\mathbf{f}_{\tau_1}^{(i_1)} \dots \int_{\tau_{k-1}}^s (t - \tau_k)^{l_k} d\mathbf{f}_{\tau_k}^{(i_k)} & \text{при } k > 0, \\ 1 & \text{при } k = 0, \end{cases}$$

где $i_1, \dots, i_k = 1, \dots, m$.

В соответствии с введенными ранее обозначениями

$${}^{(k)}J_{l_1 \dots l_{ks,t}} = \left\| J_{l_1 \dots l_{ks,t}}^{(i_1 \dots i_k)} \right\|_{i_1, \dots, i_k=1}^m,$$

$${}^{(k)}I_{l_1 \dots l_{ks,t}} = \left\| I_{l_1 \dots l_{ks,t}}^{(i_1 \dots i_k)} \right\|_{i_1, \dots, i_k=1}^m.$$

Из теоремы 3.1 и свойств повторных стохастических интегралов, рассмотренных в главе 3, вытекают существование и следующие свойства интегралов $J_{l_1 \dots l_{k,s,t}}^{(i_1 \dots i_k)}$, $I_{l_1 \dots l_{k,s,t}}^{(i_1 \dots i_k)}$ при $k > 0$:

$$\mathbb{M} \left\{ J_{l_1 \dots l_{k,s,t}}^{(i_1 \dots i_k)} \right\} = 0,$$

$$\mathbb{M} \left\{ \left(J_{l_1 \dots l_{k,s,t}}^{(i_1 \dots i_k)} \right)^2 \right\} = \frac{(s-t)^{2(l_1 + \dots + l_k) + k}}{(2l_k + 1)(2(l_k + l_{k-1}) + 2) \dots (2(l_k + \dots + l_1) + k)}, \quad (4.16)$$

$$\int_t^s (s-\tau)^j d\mathbf{f}_\tau^{(p)} J_{l_1 \dots l_{k,s,\tau}}^{(i_1 \dots i_k)} \stackrel{\text{def}}{=} J_{j l_1 \dots l_{k,s,t}}^{(p i_1 \dots i_k)}, \quad p = 1, \dots, m, \quad (4.17)$$

$$\int_t^s (s-\tau)^j d\tau J_{l_1 \dots l_{k,s,\tau}}^{(i_1 \dots i_k)} = \frac{(s-t)^{j+1}}{j+1} J_{l_1 \dots l_{k,s,t}}^{(i_1 \dots i_k)} - \frac{1}{j+1} J_{l_1+j+1 \dots l_{k,s,t}}^{(i_1 \dots i_k)} \text{ с в.1,} \quad (4.18)$$

$$J_{l_1 \dots l_{k,s,t}}^{(i_1 \dots i_k)} = \int_t^s (s-\tau_1)^{l_k} \dots \int_t^{\tau_{k-1}} (s-\tau_k)^{l_1} d\mathbf{f}_{\tau_k}^{(i_1)} \dots d\mathbf{f}_{\tau_1}^{(i_k)} \text{ с в.1,}$$

$$\mathbb{M} \left\{ I_{l_1 \dots l_{k,s,t}}^{(i_1 \dots i_k)} \right\} = 0,$$

$$\mathbb{M} \left\{ \left(I_{l_1 \dots l_{k,s,t}}^{(i_1 \dots i_k)} \right)^2 \right\} = \frac{(s-t)^{2(l_1 + \dots + l_k) + k}}{(2l_1 + 1)(2(l_1 + l_2) + 2) \dots (2(l_1 + \dots + l_k) + k)},$$

$$\int_t^s (s-\tau)^j d\mathbf{f}_\tau^{(p)} I_{l_1 \dots l_{k,s,\tau}}^{(i_1 \dots i_k)} \stackrel{\text{def}}{=} I_{j l_1 \dots l_{k,s,t}}^{(p i_1 \dots i_k)}, \quad p = 1, \dots, m,$$

$$\int_t^s (s-\tau)^j d\tau I_{l_1 \dots l_{k,s,\tau}}^{(i_1 \dots i_k)} = -\frac{1}{j+1} I_{l_1+j+1 \dots l_{k,s,t}}^{(i_1 \dots i_k)} \text{ с в.1,}$$

$$I_{l_1 \dots l_{k,s,t}}^{(i_1 \dots i_k)} = \int_t^s (t-\tau_1)^{l_k} \dots \int_t^{\tau_{k-1}} (t-\tau_k)^{l_1} d\mathbf{f}_{\tau_k}^{(i_1)} \dots d\mathbf{f}_{\tau_1}^{(i_k)} \text{ с в.1,}$$

где $j = 0, 1, \dots$

Рассмотрим матрицы k -го ранга

$$^{(k)}(s \ominus t)_{j l_1 \dots l_k} = \left\| (s \ominus t)_{j l_1 \dots l_k}^{(i_1 \dots i_k)} \right\|_{i_1, \dots, i_k=1}^m = \left\| \frac{(s-t)^j}{j!} J_{l_1 \dots l_{k,s,t}}^{(i_1 \dots i_k)} \right\|_{i_1, \dots, i_k=1}^m,$$

$$^{(k)}(s \hat{\ominus} t)_{jl_1 \dots l_k} = \left\| (s \hat{\ominus} t)_{jl_1 \dots l_k}^{(i_1 \dots i_k)} \right\|_{i_1, \dots, i_k=1}^m = \left\| \frac{(s-t)^j}{j!} I_{l_1 \dots l_k s, t}^{(i_1 \dots i_k)} \right\|_{i_1, \dots, i_k=1}^m.$$

Введем совокупность матриц k -го ранга:

$$C^{\mathcal{A}} \stackrel{\text{def}}{=} \{^{(k)}C_{jl_1 \dots l_k} : (k, j, l_1, \dots, l_k) \in \mathcal{A}\},$$

где $\mathcal{A}$ — некоторое подмножество множества наборов $(k, j, l_1, \dots, l_k)$ целых неотрицательных чисел.

Определим операцию над множеством матриц k -го ранга:

$$(C^{\mathcal{A}} \odot D^{\mathcal{A}}) \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{(k, j, l_1, \dots, l_k) \in \mathcal{A}} ^{(k)}C_{jl_1 \dots l_k} \cdot ^{(k)}D_{jl_1 \dots l_k}.$$

Нетрудно видеть, что введенная операция обладает переместительным и распределительным свойствами.

В соответствии с введенными обозначениями

$$\begin{aligned} (s \ominus t)^{\mathcal{A}} &= \{^{(k)}(s \ominus t)_{jl_1 \dots l_k} : (j, l_1, \dots, l_k, k) \in \mathcal{A}\}, \\ (s \hat{\ominus} t)^{\mathcal{A}} &= \{^{(k)}(s \hat{\ominus} t)_{jl_1 \dots l_k} : (j, l_1, \dots, l_k, k) \in \mathcal{A}\}. \end{aligned}$$

Под обозначением $C^{\mathcal{A}} \cdot ^{(1)}A$ будем понимать следующее:

$$\{^{(k)}C_{jl_1 \dots l_k} \cdot ^{(1)}A : (k, j, l_1, \dots, l_k) \in \mathcal{A}\} \stackrel{\text{def}}{=} C^{\mathcal{A}} \cdot ^{(1)}A.$$

Обозначим

$$G_p^{(i)} R(\mathbf{x}, t) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{p} \left(G_{p-1}^{(i)} L R(\mathbf{x}, t) - L G_{p-1}^{(i)} R(\mathbf{x}, t) \right), \quad (4.19)$$

где $p = 1, 2, \dots; i = 1, \dots, m$;

$$L^j R(\mathbf{x}, t) \stackrel{\text{def}}{=} \begin{cases} \underbrace{L \dots L}_j R(\mathbf{x}, t) & \text{при } j = 1, 2, \dots, \\ R(\mathbf{x}, t) & \text{при } j = 0; \end{cases} \quad (4.20)$$

операторы $L, G_0^{(i)}, i = 1, \dots, m$, определяются равенствами (4.2), (4.3).

Предполагается, что функции $R(\mathbf{x}, t), \mathbf{a}(\mathbf{x}, t), \Sigma(\mathbf{x}, t)$ таковы, что существуют все частные производные, входящие в правые части (4.19), (4.20).

Нетрудно видеть, что функция $G_p^{(i)} R(\mathbf{x}, t), i = 1, \dots, m$, определена в соответствии с определением функции $Q_{\lambda_l}^{(i_l)} \dots Q_{\lambda_1}^{(i_1)} R(\mathbf{x}, t)$. Действительно, согласно (4.19)

$$G_p^{(i)} R(\mathbf{x}, t) = \frac{1}{p!} \sum_{q=0}^p (-1)^q C_p^q L^q G_0^{(i)} L^{p-q} R(\mathbf{x}, t), \quad (4.21)$$

где $C_p^q = \frac{p!}{q!(p-q)!}$ — биномиальный коэффициент, а правая часть (4.21) есть не что иное, как конечная линейная комбинация функций вида $Q_{\lambda_l}^{(i_l)} \dots Q_{\lambda_1}^{(i_1)} R(\mathbf{x}, t)$.

Обозначим

$$\left\| L^j G_{l_1}^{(i_1)} \dots G_{l_k}^{(i_k)} R(\mathbf{x}, t) \right\|_{i_1, \dots, i_k=1}^m \stackrel{\text{def}}{=} {}^{(k)} L^j G_{l_1} \dots G_{l_k} \{R(\mathbf{x}, t)\}, \quad (4.22)$$

где $j, k, l_1, \dots, l_k = 0, 1, \dots$. При $k = 0$ полагаем

$$L^j G_{l_1}^{(i_1)} \dots G_{l_0}^{(i_0)} R(\mathbf{x}, t) \stackrel{\text{def}}{=} L^j R(\mathbf{x}, t).$$

Нетрудно видеть, что функция $L^j G_{l_1}^{(i_1)} \dots G_{l_k}^{(i_k)} R(\mathbf{x}, t)$ определена в соответствии с определением функции $Q_{\lambda_l}^{(i_l)} \dots Q_{\lambda_1}^{(i_1)} R(\mathbf{x}, t)$, так как согласно (4.21)

$$\begin{aligned} L^j G_{l_1}^{(i_1)} \dots G_{l_k}^{(i_k)} R(\mathbf{x}, t) &= \prod_{g=1}^k \frac{1}{l_g!} \sum_{q_1=0}^{l_1} \dots \sum_{q_k=0}^{l_k} (-1)^{q_1+\dots+q_k} \prod_{g=1}^k C_{l_g}^{q_g} \times \\ &\times L^j L^{q_1} G_0^{(i_1)} L^{l_1-q_1} \dots L^{q_k} G_0^{(i_k)} L^{l_k-q_k} R(\mathbf{x}, t), \end{aligned} \quad (4.23)$$

а правая часть (4.23) есть не что иное, как конечная линейная комбинация функций $Q_{\lambda_l}^{(i_l)} \dots Q_{\lambda_1}^{(i_1)} R(\mathbf{x}, t)$.

Наряду с функцией $L^j G_{l_1}^{(i_1)} \dots G_{l_k}^{(i_k)} R(\mathbf{x}, t)$ введем в рассмотрение следующие функции:

$$G_{l_1}^{(i_1)} \dots G_{l_k}^{(i_k)} L^j R(\mathbf{x}, t), \quad G_0^{(q)} L^j G_{l_1}^{(i_1)} \dots G_{l_k}^{(i_k)} R(\mathbf{x}, t), \quad (4.24)$$

$$G_0^{(p)} G_0^{(q)} L^j G_{l_1}^{(i_1)} \dots G_{l_k}^{(i_k)} R(\mathbf{x}, t), \quad L G_0^{(q)} L^j G_{l_1}^{(i_1)} \dots G_{l_k}^{(i_k)} R(\mathbf{x}, t), \quad (4.25)$$

где $i_1, \dots, i_k, p, q = 1, \dots, m$, которые при $k = 0$ будем понимать соответственно как

$$L^j R(\mathbf{x}, t), \quad G_0^{(q)} L^j R(\mathbf{x}, t), \quad G_0^{(p)} G_0^{(q)} L^j R(\mathbf{x}, t), \quad L G_0^{(q)} L^j R(\mathbf{x}, t).$$

Положим

$$\left\| G_{l_1}^{(i_1)} \dots G_{l_k}^{(i_k)} L^j R(\mathbf{x}, t) \right\|_{i_1, \dots, i_k=1}^m \stackrel{\text{def}}{=} {}^{(k)} G_{l_1} \dots G_{l_k} L^j \{R(\mathbf{x}, t)\}, \quad (4.26)$$

$$\left\| G_0^{(q)} L^j G_{l_1}^{(i_1)} \dots G_{l_k}^{(i_k)} R(\mathbf{x}, t) \right\|_{i_1, \dots, i_k, q=1}^m \stackrel{\text{def}}{=} {}^{(k+1)} G_0 L^j G_{l_1} \dots G_{l_k} \{R(\mathbf{x}, t)\}, \quad (4.27)$$

$$\left\| LG_0^{(q)} L^j G_{l_1}^{(i_1)} \dots G_{l_k}^{(i_k)} R(\mathbf{x}, t) \right\|_{i_1, \dots, i_k, q=1}^m \stackrel{\text{def}}{=} {}^{(k+1)} LG_0 L^j G_{l_1} \dots G_{l_k} \{R(\mathbf{x}, t)\}, \quad (4.28)$$

$$\left\| G_0^{(p)} G_0^{(q)} L^j G_{l_1}^{(i_1)} \dots G_{l_k}^{(i_k)} R(\mathbf{x}, t) \right\|_{i_1, \dots, i_k, p, q=1}^m \stackrel{\text{def}}{=} {}^{(k+2)} G_0 G_0 L^j G_{l_1} \dots G_{l_k} \{R(\mathbf{x}, t)\}. \quad (4.29)$$

Предполагаем, что функции $R(\mathbf{x}, t)$, $\mathbf{a}(\mathbf{x}, t)$, $\Sigma(\mathbf{x}, t)$ таковы, что существуют все частные производные, входящие в левые части (4.26)–(4.29).

Если в (4.22)–(4.29) положить $R(\mathbf{x}, t) \equiv \mathbf{x}$, то полученные функции очевидно будут определены в соответствии с определением (4.7), а если в (4.22)–(4.29) заменить $R(\mathbf{x}, t)$ на $\mathbf{x}_t$, то полученные процессы очевидно будут определены в соответствии с определением (4.9).

4.3.2 Первая форма унифицированного разложения Тейлора–Ито

Докажем следующую теорему о разложении процесса $\eta_s = R(\mathbf{x}_s, s)$, где $R : \mathbb{R}^n \times [0, T] \rightarrow \mathbb{R}^1$.

Теорема 4.3. Пусть процесс Ито $\eta_s = R(\mathbf{x}_s, s)$ $r + 1$ раз непрерывно дифференцируем по Ито в среднееквадратическом смысле на промежутке $[0, T]$ на траекториях уравнения (1.35). Тогда при всех $s, t \in [0, T] : s \geq t$, с вероятностью 1 справедливо разложение

$$\eta_s = \eta_t + \sum_{q=1}^r (C^{\mathcal{A}_q} \{\eta_t\} \odot (s \ominus t)^{\mathcal{A}_q}) + D_{r+1, s, t}, \quad (4.30)$$

правая часть (4.30) существует в среднееквадратическом смысле и в ней введены обозначения

$$\begin{aligned} D_{r+1, s, t} &= \int_t^s (Q^{\mathcal{A}_r} \{\eta_\tau\} d\tau \odot (s \ominus \tau)^{\mathcal{A}_r}) + \\ &+ \int_t^s \left(\left(H^{\mathcal{A}_r} \{\eta_\tau\} \right)^{\frac{1}{2}} df_\tau \right) \odot (s \ominus \tau)^{\mathcal{A}_r}, \end{aligned} \quad (4.31)$$

где

$$\begin{aligned} C^{\mathcal{A}_q} \{\eta_\tau\} &= \{ {}^{(k)} L^j G_{l_1} \dots G_{l_k} \{\eta_\tau\} : (j, l_1, \dots, l_k) \in \mathcal{A}_q \}; \\ Q^{\mathcal{A}_r} \{\eta_\tau\} &= \{ {}^{(k)} L^{j+1} G_{l_1} \dots G_{l_k} \{\eta_\tau\} : (j, l_1, \dots, l_k) \in \mathcal{A}_r \}; \\ H^{\mathcal{A}_r} \{\eta_\tau\} &= \{ {}^{(k+1)} G_0 L^j G_{l_1} \dots G_{l_k} \{\eta_\tau\} : (j, l_1, \dots, l_k) \in \mathcal{A}_r \}; \end{aligned}$$

$$\mathcal{A}_q = \left\{ (k, j, l_1, \dots, l_k) : k + j + \sum_{p=1}^k l_p = q; \ k, j, l_1, \dots, l_k = 0, 1, \dots \right\}.$$

Доказательство проведем по индукции. Применим к процессу η_s формулу Ито. Тогда с вероятностью 1

$$\eta_s = \eta_t + D_{1s,t}, \quad (4.32)$$

где

$$D_{1s,t} = \int_t^s L\{\eta_\tau\} d\tau + \int_t^s G_0\{\eta_\tau\} \cdot d\mathbf{f}_\tau. \quad (4.33)$$

Соотношения (4.32) и (4.33) являются частными случаями (4.30) и (4.31) при $r = 0$. Применим формулу Ито к подынтегральным процессам в $D_{1s,t}$. Тогда с вероятностью 1 имеем

$$D_{1s,t} = D_{1s,t}^* + D_{2s,t}, \quad (4.34)$$

$$D_{1s,t}^* = (s - t)L\{\eta_t\} + G_0\{\eta_t\} \cdot J_{0s,t} = (C^{\mathcal{A}_1}\{\eta_t\} \odot (s \ominus t)^{\mathcal{A}_1}), \quad (4.35)$$

$$\begin{aligned} D_{2s,t} = & \int_t^s \left(\int_t^{s_1} L^2\{\eta_\tau\} d\tau + \int_t^{s_1} G_0 L\{\eta_\tau\} \cdot d\mathbf{f}_\tau \right) ds_1 + \\ & + \int_t^s \left(\int_t^{s_1} L G_0\{\eta_\tau\} d\tau + \int_t^{s_1} {}^{(2)}G_0 G_0\{\eta_\tau\} \cdot d\mathbf{f}_\tau \right) \cdot d\mathbf{f}_{s_1}. \end{aligned} \quad (4.36)$$

Заменим с вероятностью 1 порядок интегрирования в (4.36) согласно теореме 3.1:

$$\begin{aligned} D_{2s,t} = & \int_t^s L^2\{\eta_\tau\} d\tau (s - \tau) + \int_t^s L G_0\{\eta_\tau\} d\tau \cdot J_{0s,\tau} + \\ & + \int_t^s G_0 L\{\eta_\tau\} \cdot d\mathbf{f}_\tau (s - \tau) + \int_t^s \left({}^{(2)}G_0 G_0\{\eta_\tau\} \cdot d\mathbf{f}_\tau \right) \cdot J_{0s,\tau} = \\ = & \int_t^s (Q^{\mathcal{A}_1}\{\eta_\tau\} d\tau \odot (s \ominus \tau)^{\mathcal{A}_1}) + \int_t^s \left((H^{\mathcal{A}_1}\{\eta_\tau\} \cdot d\mathbf{f}_\tau) \odot (s \ominus \tau)^{\mathcal{A}_1} \right). \end{aligned} \quad (4.37)$$

Объединив соотношения (4.32)–(4.37), придем с вероятностью 1 к представлению

$$\eta_s = \eta_t + (C^{\mathcal{A}_1}\{\eta_t\} \odot (s \ominus t)^{\mathcal{A}_1}) + D_{2s,t}, \quad (4.38)$$

$$D_{2s,t} = \int_t^s (Q^{\mathcal{A}_1} \{\eta_\tau\} d\tau \odot (s \ominus \tau)^{\mathcal{A}_1}) + \int_t^s \left(\left(H^{\mathcal{A}_1} \{\eta_\tau\} \stackrel{1}{\cdot} d\mathbf{f}_\tau \right) \odot (s \ominus \tau)^{\mathcal{A}_1} \right). \quad (4.39)$$

Нетрудно видеть, что (4.38) и (4.39) являются частными случаями (4.30) и (4.31) при $r = 1$. Таким образом, утверждение теоремы справедливо при $r = 0, 1$. Продолжая начатый процесс разложения, с вероятностью 1 получаем

$$\begin{aligned} \eta_s &= \eta_t + (C^{\mathcal{A}_1} \{\eta_t\} \odot (s \ominus t)^{\mathcal{A}_1}) + \frac{1}{2}(s - t)^2 L^2 \{\eta_t\} + \\ &+ (G_0 L \{\eta_t\} - L G_0 \{\eta_t\}) \stackrel{1}{\cdot} J_{1s,t} + {}^{(2)}G_0 G_0 \{\eta_t\} \stackrel{2}{\cdot} {}^{(2)}J_{00s,t} + \\ &+ (s - t) L G_0 \{\eta_t\} \stackrel{1}{\cdot} J_{0s,t} + D_{3s,t} = \\ &= \sum_{q=0}^1 (C^{\mathcal{A}_q} \{\eta_t\} \odot (s \ominus t)^{\mathcal{A}_q}) + (C^{\mathcal{A}_2} \{\eta_t\} \odot (s \ominus t)^{\mathcal{A}_2}) + D_{3s,t} = \\ &= \eta_t + \sum_{q=1}^2 (C^{\mathcal{A}_q} \{\eta_t\} \odot (s \ominus t)^{\mathcal{A}_q}) + D_{3s,t}, \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned} D_{3s,t} &= \int_t^s L^3 \{\eta_\tau\} d\tau \frac{1}{2}(s - \tau)^2 + \int_t^s L^2 G_0 \{\eta_\tau\} d\tau \stackrel{1}{\cdot} J_{0s,\tau}(s - \tau) + \\ &+ \int_t^s (L G_0 L \{\eta_\tau\} - L^2 G_0 \{\eta_\tau\}) d\tau \stackrel{1}{\cdot} J_{1s,\tau} + \\ &+ \int_t^s {}^{(2)}L G_0 G_0 \{\eta_\tau\} d\tau \stackrel{2}{\cdot} {}^{(2)}J_{00s,\tau} + \int_t^s \left(G_0 L^2 \{\eta_\tau\} \stackrel{1}{\cdot} d\mathbf{f}_\tau \right) \frac{1}{2}(s - \tau)^2 + \\ &+ \int_t^s \left({}^{(2)}G_0 L G_0 \{\eta_\tau\} \stackrel{1}{\cdot} d\mathbf{f}_\tau \right) \stackrel{1}{\cdot} J_{0s,\tau}(s - \tau) + \\ &+ \int_t^s \left(({}^{(2)}G_0 G_0 L \{\eta_\tau\} - {}^{(2)}G_0 L G_0 \{\eta_\tau\}) \stackrel{1}{\cdot} d\mathbf{f}_\tau \right) \stackrel{1}{\cdot} J_{1s,\tau} + \\ &+ \int_t^s \left({}^{(3)}G_0 G_0 G_0 \{\eta_\tau\} \stackrel{1}{\cdot} d\mathbf{f}_\tau \right) \stackrel{2}{\cdot} {}^{(2)}J_{00s,\tau} = \\ &= \int_t^s (Q^{\mathcal{A}_2} \{\eta_\tau\} d\tau \odot (s \ominus \tau)^{\mathcal{A}_2}) + \int_t^s \left(\left(H^{\mathcal{A}_2} \{\eta_\tau\} \stackrel{1}{\cdot} d\mathbf{f}_\tau \right) \odot (s \ominus \tau)^{\mathcal{A}_2} \right). \end{aligned}$$

Следовательно, утверждение теоремы справедливо и при $r = 2$.

Предположим, что утверждение теоремы справедливо при некотором $n = r$, и докажем его справедливость при $n = r + 1$. Применяя формулу Ито к подынтегральным процессам в (4.31), с вероятностью 1 получаем следующие соотношения:

$$D_{r+1s,t} = D_{r+1s,t}^* + D_{r+2s,t}, \quad (4.40)$$

$$\begin{aligned} D_{r+1s,t}^* &= \left(Q^{\mathcal{A}_r} \{ \eta_t \} \odot \int_t^s d\tau (s \ominus \tau)^{\mathcal{A}_r} \right) + \\ &+ \left(\left(H^{\mathcal{A}_r} \{ \eta_t \} \stackrel{!}{\int}_t^s d\mathbf{f}_\tau \right) \odot (s \ominus \tau)^{\mathcal{A}_r} \right), \end{aligned} \quad (4.41)$$

$$\begin{aligned} D_{r+2s,t} &= \int_t^s \left(\int_t^{\tau_1} dU^{\mathcal{A}_r} \{ \eta_\tau \} d\tau_1 \odot (s \ominus \tau_1)^{\mathcal{A}_r} \right) + \\ &+ \int_t^s \left(\left(\int_t^{\tau_1} dV^{\mathcal{A}_r} \{ \eta_\tau \} \stackrel{!}{\int}_t^{\tau_1} d\mathbf{f}_{\tau_1} \right) \odot (s \ominus \tau_1)^{\mathcal{A}_r} \right), \end{aligned} \quad (4.42)$$

где

$$\begin{aligned} dU^{\mathcal{A}_r} \{ \eta_\tau \} &= \\ &= \left\{ {}^{(k)}X_{jl_1 \dots l_k} \{ \eta_\tau \} d\tau + {}^{(k+1)}Y_{jl_1 \dots l_k} \{ \eta_\tau \} \stackrel{!}{\int} d\mathbf{f}_\tau : (j, l_1, \dots, l_k, k) \in \mathcal{A}_r \right\}; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} dV^{\mathcal{A}_r} \{ \eta_\tau \} &= \\ &= \left\{ {}^{(k+1)}Z_{jl_1 \dots l_k} \{ \eta_\tau \} d\tau + {}^{(k+2)}W_{jl_1 \dots l_k} \{ \eta_\tau \} \stackrel{!}{\int} d\mathbf{f}_\tau : (j, l_1, \dots, l_k, k) \in \mathcal{A}_r \right\}. \end{aligned}$$

Здесь

$$\begin{aligned} {}^{(k)}X_{jl_1 \dots l_k} \{ \eta_\tau \} &= {}^{(k)}L^{j+2} G_{l_1} \dots G_{l_k} \{ \eta_\tau \}; \\ {}^{(k+1)}Z_{jl_1 \dots l_k} \{ \eta_\tau \} &= {}^{(k+1)}L G_0 L^j G_{l_1} \dots G_{l_k} \{ \eta_\tau \}; \\ {}^{(k+1)}Y_{jl_1 \dots l_k} \{ \eta_\tau \} &= {}^{(k+1)}G_0 L^{j+1} G_{l_1} \dots G_{l_k} \{ \eta_\tau \}; \\ {}^{(k+2)}W_{jl_1 \dots l_k} \{ \eta_\tau \} &= {}^{(k+2)}G_0 G_0 L^j G_{l_1} \dots G_{l_k} \{ \eta_\tau \}. \end{aligned}$$

Заменим с вероятностью 1 согласно теореме 3.4 порядок интегрирования в повторных стохастических интегралах в (4.42):

$$D_{r+2s,t} = \int_t^s \left(\left(dU^{\mathcal{A}_r} \{ \eta_\tau \} \int_\tau^s d\tau_1 \right) \odot (s \ominus \tau_1)^{\mathcal{A}_r} \right) +$$

$$+ \int_t^s \left(\left(dV^{\mathcal{A}_r} \{ \eta_\tau \} \right) \odot \left(s \ominus \tau_1 \right)^{\mathcal{A}_r} \right). \quad (4.43)$$

Рассмотрим следующие стохастические интегралы:

$$\int_\tau^s d\tau_1 (s \ominus \tau_1)_{j l_1 \dots l_k}^{(i_1 \dots i_k)}, \quad \int_\tau^s d\mathbf{f}_{\tau_1}^{(q)} (s \ominus \tau_1)_{j l_1 \dots l_k}^{(i_1 \dots i_k)} d\tau_1, \quad q = 1, \dots, m.$$

Согласно свойствам (4.17) и (4.18) имеем

$$\begin{aligned} & \int_\tau^s d\tau_1^{(k)} (s \ominus \tau_1)_{j l_1 \dots l_k} = \\ & = \begin{cases} {}^{(k)}(s \ominus \tau)_{j+1 \ l_1 \dots l_k} - \frac{1}{(s-\tau)^{j+1}} {}^{(k)}(s \ominus \tau)_{j+1 \ l_1+j+1 \ l_2 \dots l_k} & \text{при } k > 0, \\ \frac{(s-\tau)^{j+1}}{(j+1)!} & \text{при } k = 0 \end{cases} \end{aligned} \quad (4.44)$$

с вероятностью 1,

$$\int_\tau^s d\mathbf{f}_{\tau_1}^{(q)} (s \ominus \tau_1)_{j l_1 \dots l_k}^{(i_1 \dots i_k)} \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{(s-\tau)^j} (s \ominus \tau)_{j j l_1 \dots l_k}^{(q i_1 \dots i_k)}, \quad k = 0, 1, \dots \quad (4.45)$$

Подставив (4.44) и (4.45) в (4.43), получим, что с вероятностью 1

$$\begin{aligned} D_{r+2s,t} &= \int_t^s (Q^{\mathcal{A}_{r+1}} \{ \eta_\tau \} d\tau \odot (s \ominus \tau)^{\mathcal{A}_{r+1}}) + \\ &+ \int_t^s \left(\left(H^{\mathcal{A}_{r+1}} \{ \eta_\tau \} \right) \odot (s \ominus \tau)^{\mathcal{A}_{r+1}} \right). \end{aligned} \quad (4.46)$$

Итак, (4.31) доказано.

В результате подстановки (4.44) и (4.45) в (4.41) при $\tau = t$ с вероятностью 1 получим

$$D_{r+1s,t}^* = (C^{\mathcal{A}_{r+1}} \{ \eta_t \} \odot (s \ominus t)^{\mathcal{A}_{r+1}}). \quad (4.47)$$

Таким образом, соотношения (4.40), (4.46) и (4.47) доказывают соотношение (4.30). Теорема доказана. $\square$

Нетрудно видеть, что часть членов в сумме в правой части (4.30) имеет больший порядок малости в среднеквадратическом смысле при $s \downarrow t$, чем порядок малости остаточного члена $D_{r+1s,t}$. Такое заключение можно сделать на основании свойства (4.16). Следующая теорема показывает, как необходимо видоизменить разложение (4.30), чтобы

выстроить его члены по порядку малости. При этом новый остаточный член разложения будет иметь больший порядок малости в среднеквадратическом смысле при $s \downarrow t$ по сравнению с членами основной части разложения.

Теорема 4.4. Пусть процесс Ито $\eta_s = R(\mathbf{x}_s, s)$ $r + 1$ раз непрерывно дифференцируем по Ито в среднеквадратическом смысле на промежутке $[0, T]$ на траекториях уравнения (1.35). Тогда при всех $s, t \in [0, T] : s \geq t$, справедливо разложение

$$\eta_s = \eta_t + \sum_{q=1}^r (C^{\mathcal{D}_q} \{\eta_t\} \odot (s \ominus t)^{\mathcal{D}_q}) + H_{r+1, s, t} \quad \text{с в. 1,} \quad (4.48)$$

причем существует такая постоянная $C_r < \infty$, что

$$\left(\mathbb{M} \left\{ (H_{r+1, s, t})^2 \right\} \right)^{\frac{1}{2}} \leq C_r (s - t)^{\frac{r+1}{2}}, \quad r = 0, 1, \dots,$$

где

$$H_{r+1, s, t} \stackrel{\text{def}}{=} (C^{\mathcal{U}_r} \{\eta_t\} \odot (s \ominus t)^{\mathcal{U}_r}) + D_{r+1, s, t},$$

$$D_{r+1, s, t} = \int_t^s (Q^{\mathcal{A}_r} \{\eta_\tau\} d\tau \odot (s \ominus \tau)^{\mathcal{A}_r}) +$$

$$+ \int_t^s \left((H^{\mathcal{A}_r} \{\eta_\tau\})^\perp d\mathbf{f}_\tau \right) \odot (s \ominus \tau)^{\mathcal{A}_r},$$

$$\mathcal{D}_q = \left\{ (k, j, l_1, \dots, l_k) : k + 2 \left(j + \sum_{p=1}^k l_p \right) = q; \quad k, j, l_1, \dots, l_k = 0, 1, \dots \right\},$$

$$\mathcal{U}_r = \left\{ (k, j, l_1, \dots, l_k) : k + j + \sum_{p=1}^k l_p \leq r; \right.$$

$$\left. k + 2 \left(j + \sum_{p=1}^k l_p \right) \geq r + 1; \quad k, j, l_1, \dots, l_k = 0, 1, \dots \right\},$$

а другие обозначения такие же, как в теореме 4.3.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Нетрудно видеть, что разложение (4.30) может быть представлено с вероятностью 1 в следующей форме:

$$\eta_s = \eta_t + \sum_{q=1}^r (C^{\mathcal{D}_q} \{\eta_t\} \odot (s \ominus t)^{\mathcal{D}_q}) + H_{r+1, s, t},$$

где

$$H_{r+1, s, t} \stackrel{\text{def}}{=} (C^{\mathcal{U}_r} \{\eta_t\} \odot (s \ominus t)^{\mathcal{U}_r}) + D_{r+1, s, t}.$$

С помощью неравенства Минковского имеем

$$\left(\mathbb{M} \left\{ \left(H_{r+1_{s,t}} \right)^2 \right\} \right)^{\frac{1}{2}} \leq \left(\mathbb{M} \left\{ \left(C^{\mathcal{U}_r} \{ \eta_t \} \odot (s \ominus t)^{\mathcal{U}_r} \right)^2 \right\} \right)^{\frac{1}{2}} + \left(\mathbb{M} \left\{ \left(D_{r+1_{s,t}} \right)^2 \right\} \right)^{\frac{1}{2}}. \quad (4.49)$$

Рассмотрим сначала случай $0 < s - t \leq 1$, а также величины в правой части (4.49). Поскольку

$$\begin{aligned} & (C^{\mathcal{U}_r} \{ \eta_t \} \odot (s \ominus t)^{\mathcal{U}_r}) = \\ &= \sum_{(k,j,l_1,\dots,l_k) \in \mathcal{U}_r} \frac{(s-t)^j}{j!} \sum_{i_1,\dots,i_k=1}^m L^j G_{l_1}^{(i_1)} \dots G_{l_k}^{(i_k)} \{ \eta_t \} J_{l_1 \dots l_k, s, t}^{(i_1 \dots i_k)}, \end{aligned}$$

то при $0 < s - t \leq 1$ с помощью свойства (4.16) и неравенства Минковского получим

$$\left(\mathbb{M} \left\{ \left(C^{\mathcal{U}_r} \{ \eta_t \} \odot (s \ominus t)^{\mathcal{U}_r} \right)^2 \right\} \right)^{\frac{1}{2}} \leq C'_r (s-t)^z, \quad C'_r < \infty,$$

где

$$z = \min_{(k,j,l_1,\dots,l_k) \in \mathcal{U}_r} \left\{ \frac{k}{2} + j + \sum_{p=1}^k l_p \right\} = \frac{r+1}{2}.$$

Таким образом, при $0 < s - t \leq 1$ имеем

$$\left(\mathbb{M} \left\{ \left(C^{\mathcal{U}_r} \{ \eta_t \} \odot (s \ominus t)^{\mathcal{U}_r} \right)^2 \right\} \right)^{\frac{1}{2}} \leq C'_r (s-t)^{\frac{r+1}{2}}, \quad C'_r < \infty. \quad (4.50)$$

Рассмотрим $D_{r+1_{s,t}}$:

$$\begin{aligned} D_{r+1_{s,t}} &= \int_t^s (Q^{\mathcal{A}_r} \{ \eta_\tau \} d\tau \odot (s \ominus \tau)^{\mathcal{A}_r}) + \\ &+ \int_t^s \left(\left(H^{\mathcal{A}_r} \{ \eta_\tau \} \right)^{\cdot 1} d\mathbf{f}_\tau \right) \odot (s \ominus \tau)^{\mathcal{A}_r} = \\ &= \sum_{(k,j,l_1,\dots,l_k) \in \mathcal{A}_r} \sum_{i_1,\dots,i_k=1}^m \left(I_{l_1 \dots l_k, i_1 \dots i_k, j_{s,t}} + \sum_{p=1}^m J_{l_1 \dots l_k, i_1 \dots i_k, j_{s,t}}^{(p)} \right), \end{aligned} \quad (4.51)$$

где

$$\begin{aligned} I_{l_1 \dots l_k, i_1 \dots i_k, j_{s,t}} &= \int_t^s L^{j+1} G_{l_1}^{(i_1)} \dots G_{l_k}^{(i_k)} \{ \eta_\tau \} \frac{(s-\tau)^j}{j!} d\tau J_{l_1 \dots l_k, s, \tau}^{(i_1 \dots i_k)}; \\ J_{l_1 \dots l_k, i_1 \dots i_k, j_{s,t}}^{(p)} &= \int_t^s G_0^{(p)} L^j G_{l_1}^{(i_1)} \dots G_{l_k}^{(i_k)} \{ \eta_\tau \} \frac{(s-\tau)^j}{j!} d\mathbf{f}_\tau^{(p)} J_{l_1 \dots l_k, s, \tau}^{(i_1 \dots i_k)}. \end{aligned}$$

Согласно теореме 3.1 о замене порядка интегрирования с вероятностью 1 имеем

$$I_{l_1 \dots l_k, i_1 \dots i_k, j_{s,t}} = \frac{1}{j!} \int_t^s (s - \tau_k)^{l_k} \dots \int_t^{\tau_2} (s - \tau_1)^{l_1} \int_t^{\tau_1} (s - \tau)^j \times \\ \times L^{j+1} G_{l_1}^{(i_1)} \dots G_{l_k}^{(i_k)} \{\eta_\tau\} d\tau d\mathbf{f}_{\tau_1}^{(i_1)} \dots d\mathbf{f}_{\tau_k}^{(i_k)}, \quad (4.52)$$

$$J_{l_1 \dots l_k, i_1 \dots i_k, j_{s,t}}^{(p)} = \frac{1}{j!} \int_t^s (s - \tau_k)^{l_k} \dots \int_t^{\tau_2} (s - \tau_1)^{l_1} \int_t^{\tau_1} (s - \tau)^j \times \\ \times G_0^{(p)} L^j G_{l_1}^{(i_1)} \dots G_{l_k}^{(i_k)} \{\eta_\tau\} d\mathbf{f}_\tau^{(p)} d\mathbf{f}_{\tau_1}^{(i_1)} \dots d\mathbf{f}_{\tau_k}^{(i_k)}. \quad (4.53)$$

Далее, применяя неравенство Минковского к (4.51), используя соотношения (4.52), (4.53), неравенства (1.41), (1.42) при $n = 1$, а также свойство (4.16), при $0 < s - t \leq 1$ получаем следующую оценку:

$$\left(\mathbb{M} \left\{ (D_{r+1,s,t})^2 \right\} \right)^{\frac{1}{2}} \leq C_r'' (s - t)^{z'}, \quad C_r'' < \infty,$$

где

$$z' = \min_{\substack{k+j+\sum_{p=1}^k l_p=r, \\ 0 \leq k \leq r}} \left\{ 1 + \frac{k}{2} + j + \sum_{p=1}^k l_p, \frac{1}{2} + \frac{k}{2} + j + \sum_{p=1}^k l_p \right\} = \frac{r+1}{2}.$$

Таким образом, при $0 < s - t \leq 1$ имеем

$$\left(\mathbb{M} \left\{ (D_{r+1,s,t})^2 \right\} \right)^{\frac{1}{2}} \leq C_r'' (s - t)^{\frac{r+1}{2}}, \quad C_r'' < \infty. \quad (4.54)$$

Из (4.49)–(4.54) находим, что при $0 < s - t \leq 1$

$$\left(\mathbb{M} \left\{ (H_{r+1,s,t})^2 \right\} \right)^{\frac{1}{2}} \leq C_r (s - t)^{\frac{r+1}{2}}, \quad C_r < \infty.$$

Теорема доказана при $0 < s - t \leq 1$.

Рассмотрим теперь случай $s - t \in (1, T]$; $s, t \in [0, T]$; $T \in (1, \infty)$. Очевидно, что в этом случае неравенства (4.50), (4.54) сохраняют силу при некоторых постоянных C_r^*, C_r^{**} , которые отличаются от постоянных C_r', C_r'' . Дальнейшее доказательство повторяет рассуждения для случая $0 < s - t \leq 1$. Теорема доказана. $\square$

Термины "первая форма унифицированного разложения Тейлора–Ито", или "унифицированное разложение Тейлора–Ито", далее будем применять как к разложению (4.30), так и к разложению (4.48).

4.3.3 Вторая форма унифицированного разложения Тейлора–Ито

Поскольку между повторными стохастическими интегралами Ито $J_{l_1 \dots l_{k_s, t}}^{(i_1 \dots i_k)}$ и $I_{l_1 \dots l_{k_s, t}}^{(i_1 \dots i_k)}$ в силу аддитивности справедливо с вероятностью 1 соотношение

$$J_{l_1 \dots l_{k_s, t}}^{(i_1 \dots i_k)} = \sum_{j_1=0}^{l_1} \dots \sum_{j_k=0}^{l_k} C_{l_1}^{j_1} \dots C_{l_k}^{j_k} (s-t)^{l_1+\dots+l_k-j_1-\dots-j_k} I_{j_1 \dots j_{k_s, t}}^{(i_1 \dots i_k)},$$

где $C_n^m = \frac{n!}{m!(n-m)!}$ — биномиальный коэффициент, то разложение процесса Ито $\eta_s = R(\mathbf{x}_s, s)$ можно строить как по повторным стохастическим интегралам $J_{l_1 \dots l_{k_s, t}}^{(i_1 \dots i_k)}$, что было сделано в предыдущем разделе, так и по повторным стохастическим интегралам $I_{l_1 \dots l_{k_s, t}}^{(i_1 \dots i_k)}$.

Сформулируем теорему о разложении процесса Ито $\eta_s = R(\mathbf{x}_s, s)$, где $R : \mathbb{R}^n \times [0, T] \rightarrow \mathbb{R}^1$, по повторным стохастическим интегралам $I_{l_1 \dots l_{k_s, t}}^{(i_1 \dots i_k)}$.

Теорема 4.5. Пусть случайный процесс $\eta_s = R(\mathbf{x}_s, s)$ $r+1$ раз непрерывно дифференцируем по Ито в среднеекватрическом смысле на промежутке $[0, T]$ на траекториях уравнения (1.35). Тогда при всех $s, t \in [0, T] : s \geq t$, справедливо разложение

$$\eta_s = \eta_t + \sum_{q=1}^r (\hat{C}^{A_q} \{\eta_t\} \odot (s \hat{\ominus} t)^{A_q}) + D_{r+1, s, t} \text{ с в.1,} \quad (4.55)$$

$$\begin{aligned} D_{r+1, s, t} = & \int_t^s (Q^{A_r} \{\eta_\tau\} d\tau \odot (s \ominus \tau)^{A_r}) + \\ & + \int_t^s \left(\left(H^{A_r} \{\eta_\tau\} \stackrel{1}{\cdot} d\mathbf{f}_\tau \right) \odot (s \ominus \tau)^{A_r} \right), \end{aligned} \quad (4.56)$$

правые части (4.55) и (4.56) существуют в среднеекватрическом смысле, причем

$$\hat{C}^{A_q} \{\eta_t\} = \{ {}^{(k)}G_{l_1} \dots G_{l_k} L^j \{\eta_t\} : (j, k, l_1, \dots, l_k) \in \mathcal{A}_q \},$$

а остальные обозначения такие же, как в теореме 4.3.

Доказательство. Используя комбинаторные соображения, нетрудно убедиться, что при $q = 0, 1, \dots$ с вероятностью 1 выполняются равенства

$$(C^{A_q} \{\eta_t\} \odot (s \ominus t)^{A_q}) = (\hat{C}^{A_q} \{\eta_t\} \odot (s \hat{\ominus} t)^{A_q}). \quad (4.57)$$

Используя (4.57) и теорему 4.3, приходим к утверждению настоящей теоремы. Теорема доказана. $\square$

Упорядочим теперь члены разложения (4.55) по порядку малости при $s \downarrow t$ в среднеквадратическом смысле.

Теорема 4.6. Пусть процесс $\eta_s = R(\mathbf{x}_s, s)$ $r + 1$ раз непрерывно дифференцируем по Ито в среднеквадратическом смысле на промежутке $[0, T]$ на траекториях уравнения (1.35). Тогда при всех $s, t \in [0, T] : s \geq t$, справедливо разложение

$$\eta_s = \eta_t + \sum_{q=1}^r (\hat{C}^{D_q} \{\eta_t\} \odot (s \hat{\ominus} t)^{D_q}) + \hat{H}_{r+1, s, t} \text{ с в.1,} \quad (4.58)$$

причем существует такая постоянная $C_{r+1} < \infty$, что

$$\left(\mathbb{M} \left\{ (\hat{H}_{r+1, s, t})^2 \right\} \right)^{\frac{1}{2}} \leq C_{r+1} (s - t)^{\frac{r+1}{2}}, \quad r = 0, 1, \dots,$$

где

$$\hat{H}_{r+1, s, t} \stackrel{\text{def}}{=} (\hat{C}^{U_r} \{\eta_t\} \odot (s \hat{\ominus} t)^{U_r}) + D_{r+1, s, t}; \quad (4.59)$$

$$\begin{aligned} D_{r+1, s, t} = & \int_t^s (Q^{A_r} \{\eta_\tau\} d\tau \odot (s \ominus \tau)^{A_r}) + \\ & + \int_t^s \left((H^{A_r} \{\eta_\tau\} \cdot d\mathbf{f}_\tau) \odot (s \ominus \tau)^{A_r} \right); \end{aligned} \quad (4.60)$$

правые части (4.58)–(4.60) существуют в среднеквадратическом смысле, и в них введены такие же обозначения, как в теоремах 4.3–4.5.

Доказательство теоремы 4.6 аналогично доказательству теоремы 4.4.

Термины ”вторая форма унифицированного разложения Тейлора–Ито”, или ”унифицированное разложение Тейлора–Ито”, будем применять как к разложению (4.55), так и к разложению (4.58).

Важно отметить, что унифицированные разложения Тейлора–Ито могут быть получены без требования среднеквадратической непрерывности производных по Ито процесса η_s .

Поясним это более подробно. Заметим, что разложения, полученные в теоремах 4.3 – 4.6, строились с применением теорем о замене порядка интегрирования в повторных стохастических интегралах Ито на каждом шаге разложения. В результате при построении этих разложений было необходимо выполнение среднеквадратической непрерывности производных по Ито процесса η_s . Однако можно поступить иначе: сначала рассматривается разложение Тейлора–Ито в форме Вагнера и

Платена (без требования среднеквадратической непрерывности производных по Ито процесса η_s), а затем с вероятностью 1 с помощью теорем о замене порядка интегрирования в повторных стохастических интегралах Ито сумма

$$\eta_t + \sum_{k=1}^r \sum_{(\lambda_k, \dots, \lambda_1) \in \mathcal{M}_k} {}^{(p_k)}Q_{\lambda_k} \dots {}^{(p_1)}Q_{\lambda_1} \{\eta_t\} {}^{p_k} J_{(\lambda_k \dots \lambda_1)s,t} \quad (4.61)$$

унифицируется в представление

$$\eta_t + \sum_{q=1}^r (C^{\mathcal{A}_q} \{\eta_t\} \odot (s \ominus t)^{\mathcal{A}_q}),$$

или в представление вида

$$\eta_t + \sum_{q=1}^r (\hat{C}^{\mathcal{A}_q} \{\eta_t\} \odot (s \hat{\ominus} t)^{\mathcal{A}_q}).$$

При этом производные по Ито процесса η_s не входят в повторные стохастические интегралы $J_{(\lambda_k \dots \lambda_1)s,t}^{(i_k \dots i_1)}$ суммы (4.61), и, следовательно, достаточно потребовать лишь покомпонентной принадлежности их классу $\mathcal{M}_2([0, T])$ при унификации с помощью теорем о замене порядка интегрирования указанной суммы. В результате приходим к следующему утверждению.

Теорема 4.7. Пусть процесс $\eta_s = R(\mathbf{x}_s, s)$ $r + 1$ раз дифференцируем по Ито в среднеквадратическом смысле на промежутке $[0, T]$ на траекториях уравнения (1.35). Тогда при всех $s, t \in [0, T] : s \geq t$, справедливы разложения

$$\eta_s = \eta_t + \sum_{q=1}^r (C^{\mathcal{A}_q} \{\eta_t\} \odot (s \ominus t)^{\mathcal{A}_q}) + D_{r+1,s,t} \text{ с в.1,}$$

$$\eta_s = \eta_t + \sum_{q=1}^r (\hat{C}^{\mathcal{A}_q} \{\eta_t\} \odot (s \hat{\ominus} t)^{\mathcal{A}_q}) + D_{r+1,s,t} \text{ с в.1,}$$

$$\eta_s = \eta_t + \sum_{q=1}^r (C^{\mathcal{D}_q} \{\eta_t\} \odot (s \ominus t)^{\mathcal{D}_q}) + H_{r+1,s,t} \text{ с в.1,}$$

$$\eta_s = \eta_t + \sum_{q=1}^r (\hat{C}^{\mathcal{D}_q} \{\eta_t\} \odot (s \hat{\ominus} t)^{\mathcal{D}_q}) + \hat{H}_{r+1,s,t} \text{ с в.1,}$$

где

$$H_{r+1,s,t} = (C^{\mathcal{U}_r} \{\eta_t\} \odot (s \ominus t)^{\mathcal{U}_r}) + D_{r+1,s,t};$$

$$\hat{H}_{r+1,s,t} = (\hat{C}^{\mathcal{U}_r} \{\eta_t\} \odot (s \hat{\ominus} t)^{\mathcal{U}_r}) + D_{r+1,s,t};$$

$$D_{r+1,s,t} =$$

$$= \sum_{(\lambda_{r+1}, \dots, \lambda_1) \in \mathcal{M}_{r+1}} \int_t^s \dots \left(\int_t^{\tau_r} Q_{\lambda_{r+1}} \dots Q_{\lambda_1} \{ \eta_{\tau_{r+1}} \}^{\lambda_{r+1}} d\mathbf{w}_{\tau_{r+1}} \right) \dots^{\lambda_1} d\mathbf{w}_{\tau_1},$$

а остальные обозначения соответствуют обозначениям, введенным в теоремах 4.3–4.6.

4.4 Дифференцируемость по Стратоновичу случайных процессов

Рассмотрим процесс $\eta_s = R(\mathbf{x}_s, s)$, $s \in [0, T]$, где $R : \mathbb{R}^n \times [0, T] \rightarrow \mathbb{R}^1$, а $\mathbf{x}_s$ — решение стохастического дифференциального уравнения Ито (1.35).

Определение 4.3. Процесс $\eta_s = R(\mathbf{x}_s, s)$, $s \in [0, T]$, называется дифференцируемым по Стратоновичу в среднееквадратическом смысле на промежутке $[0, T]$ на траекториях уравнения (1.35), если для любых двух моментов остановки s, t таких, что $P\{0 \leq t \leq s \leq T\} = 1$, с вероятностью 1 справедливо представление

$$\eta_s = \eta_t + \int_t^s H_{0_\tau} d\tau + \sum_{i=1}^m \int_t^{*s} H_{1_\tau}^{(i)} df_\tau^{(i)}. \quad (4.62)$$

Случайные процессы H_{0_τ} , $H_{1_\tau}^{(i)}$, $i = 1, \dots, m$, удовлетворяют условиям существования правой части (4.62) в среднееквадратическом смысле и называются производными по Стратоновичу процесса η_s , $s \in [0, T]$.

Лемма 4.3. Пусть выполнены условия:

1. $R(\mathbf{x}, s)$, $LR(\mathbf{x}, s)$, $G_0^{(i)} R(\mathbf{x}, s) \in \mathcal{L}$, $i = 1, \dots, m$.
2. Для всех $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$, $\tau, \theta \in [0, T]$, $i_1, i_2 = 1, \dots, m$ и некоторого $\nu > 0$

$$|G_0^{(i_2)} G_0^{(i_1)} R(\mathbf{x}, t) - G_0^{(i_2)} G_0^{(i_1)} R(\mathbf{y}, t)| \leq K_1 |\mathbf{x} - \mathbf{y}|, \quad K_1 < \infty,$$

$$|G_0^{(i_2)} G_0^{(i_1)} R(\mathbf{x}, t)| + |LG_0^{(i_1)} R(\mathbf{x}, t)| \leq K_2 (1 + |\mathbf{x}|), \quad K_2 < \infty,$$

$$|G_0^{(i_2)} G_0^{(i_1)} R(\mathbf{x}, \tau) - G_0^{(i_2)} G_0^{(i_1)} R(\mathbf{x}, \theta)| \leq K_3 |\tau - \theta|^\nu (1 + |\mathbf{x}|), \quad K_3 < \infty.$$

3. Справедливы условия AI, AII (теорема 1.6).

4. $M\{|\mathbf{x}_0|^8\} < \infty$.

Тогда процесс η_s , $s \in [0, T]$, дифференцируем по Стратоновичу в среднееквадратическом смысле на промежутке $[0, T]$ на траекториях

уравнения (1.35) и его производные по Стратоновичу определяются равенствами

$$H_{0_\tau} = LR(\mathbf{x}_\tau, \tau) - \frac{1}{2} \sum_{i=1}^m G_0^{(i)} G_0^{(i)} R(\mathbf{x}_\tau, \tau), \quad H_{1_\tau}^{(i)} = G_0^{(i)} R(\mathbf{x}_\tau, \tau), \quad i = 1, \dots, m. \quad (4.63)$$

Доказательство. Для доказательства леммы воспользуемся следующим утверждением [70, 86].

Лемма 4.4. Пусть условия AI–AIII (теорема 1.6) выполнены и $M\{|\mathbf{x}_{t_0}|^{2n}\} < \infty$, $n \geq 1$. Тогда решение стохастического дифференциального уравнения Ито (1.35) удовлетворяет следующим оценкам:

$$M\{|\mathbf{x}_t|^{2n}\} \leq (1 + M\{|\mathbf{x}_{t_0}|^{2n}\})e^{C(t-t_0)},$$

$$M\{|\mathbf{x}_t - \mathbf{x}_{t_0}|^{2n}\} \leq C_1(1 + M\{|\mathbf{x}_{t_0}|^{2n}\})(t - t_0)^n e^{C(t-t_0)},$$

где $t \in [t_0, T]$, $T < \infty$; $C = 2n(2n + 1)K^2$; C_1 — положительная постоянная, зависящая только от $n, K, T - t_0$; $K < \infty$ — постоянная.

Используя условия леммы 4.3, лемму 4.4 и неравенство $(a + b)^2 \leq 2a^2 + 2b^2$, получаем

$$\begin{aligned} & M\left\{|G_0^{(i_2)} G_0^{(i_1)} R(\mathbf{x}_\tau, \tau) - G_0^{(i_2)} G_0^{(i_1)} R(\mathbf{x}_\theta, \theta)|^4\right\} \leq \\ & \leq 8M\left\{|G_0^{(i_2)} G_0^{(i_1)} R(\mathbf{x}_\tau, \tau) - G_0^{(i_2)} G_0^{(i_1)} R(\mathbf{x}_\theta, \tau)|^4\right\} + \\ & + 8M\left\{|G_0^{(i_2)} G_0^{(i_1)} R(\mathbf{x}_\theta, \tau) - G_0^{(i_2)} G_0^{(i_1)} R(\mathbf{x}_\theta, \theta)|^4\right\} \leq \\ & \leq 8K_1^4 M\{|\mathbf{x}_\tau - \mathbf{x}_\theta|^4\} + 8K_3^4 |\tau - \theta|^{4\nu} M\{(1 + |\mathbf{x}_\theta|)^4\} \leq \\ & \leq C_2 |\tau - \theta|^2 + C_3 |\tau - \theta|^{4\nu} \rightarrow 0 \text{ при } \tau - \theta \rightarrow 0, \end{aligned}$$

где $C_2, C_3 < \infty$ — постоянные; $\tau, \theta \in [0, T]$,

$$\begin{aligned} & M\left\{|G_0^{(i_2)} G_0^{(i_1)} R(\mathbf{x}_\theta, \theta)|^8\right\} \leq K_2^8 M\{(1 + |\mathbf{x}_\theta|)^8\} \leq \\ & \leq C_4 (1 + M\{|\mathbf{x}_\theta|^8\}) \leq C_5 (1 + (1 + M\{|\mathbf{x}_0|^8\})e^{C_s}) < \infty, \end{aligned}$$

где $\theta \in [0, T]$.

Аналогично

$$M\left\{|LG_0^{(i_1)} R(\mathbf{x}_\theta, \theta)|^8\right\} < \infty, \quad \theta \in [0, T].$$

Таким образом, $G_0^{(i_1)} R(\mathbf{x}_s, s) \in Q_4([0, T])$, $i_1 = 1, \dots, m$.

В условиях леммы по формуле Ито для любых двух моментов остановки s, t , для которых $P\{0 \leq t \leq s \leq T\} = 1$, с вероятностью 1 справедливы равенства

$$R(\mathbf{x}_s, s) = R(\mathbf{x}_t, t) + \int_t^s LR(\mathbf{x}_\tau, \tau) d\tau + \sum_{i_1=1}^m \int_t^s G_0^{(i_1)} R(\mathbf{x}_\tau, \tau) d\mathbf{f}_\tau^{(i_1)}, \quad (4.64)$$

$$\begin{aligned} G_0^{(i_1)} R(\mathbf{x}_s, s) &= G_0^{(i_1)} R(\mathbf{x}_t, t) + \int_t^s LG_0^{(i_1)} R(\mathbf{x}_\tau, \tau) d\tau + \\ &+ \sum_{i_2=1}^m \int_t^s G_0^{(i_2)} G_0^{(i_1)} R(\mathbf{x}_\tau, \tau) d\mathbf{f}_\tau^{(i_2)}, \end{aligned} \quad (4.65)$$

где $i_1, i_2 = 1, \dots, m$, причем интегралы, входящие в правые части (4.64), (4.65), существуют в среднеквадратическом смысле.

Поскольку мы показали, что $G_0^{(i_1)} R(\mathbf{x}_s, s) \in Q_4([0, T])$, $i_1 = 1, \dots, m$, согласно лемме 1.6 с вероятностью 1

$$\int_t^s G_0^{(i_1)} R(\mathbf{x}_\tau, \tau) d\mathbf{f}_\tau^{(i_1)} = \int_t^{*s} G_0^{(i_1)} R(\mathbf{x}_\tau, \tau) d\mathbf{f}_\tau^{(i_1)} - \frac{1}{2} \int_t^s G_0^{(i_1)} G_0^{(i_1)} R(\mathbf{x}_\tau, \tau) d\tau. \quad (4.66)$$

Согласно лемме 1.6 моменты t, s в (4.66) являются неслучайными, однако в [86] формула (4.66) обобщена для моментов остановки.

Из (4.64) и (4.66) для моментов остановки t, s с вероятностью 1 получаем

$$\eta_s = \eta_t + \int_t^s H_{0_\tau} d\tau + \sum_{i=1}^m \int_t^{*s} H_{1_\tau}^{(i)} d\mathbf{f}_\tau^{(i)}, \quad (4.67)$$

где случайные процессы $H_{0_\tau}, H_{1_\tau}^{(i)}, i = 1, \dots, m$, удовлетворяют условиям существования в среднеквадратическом смысле правой части (4.67) и имеют вид (4.63). Лемма доказана. $\square$

Дадим определение многократной дифференцируемости по Стратоновичу.

Определение 4.4. Процесс $\eta_s = R(\mathbf{x}_s, s)$, где $R: \mathbb{R}^n \times [0, T] \rightarrow \mathbb{R}^1$, называется N раз дифференцируемым по Стратоновичу в среднеквадратическом смысле на промежутке $[0, T]$ на траекториях уравнения (1.35), если для всех $l \in \{0, 1, \dots, N-1\}$ и любых двух моментов остановки s, t таких, что $P\{0 \leq t \leq s \leq T\} = 1$, с вероятностью 1 справедливо представление

$${}^{(p_l)}H_{\lambda_l \dots \lambda_{1s}} = {}^{(p_l)}H_{\lambda_l \dots \lambda_{1t}} + \int_t^s {}^{(p_l)}H_{0\lambda_l \dots \lambda_{1\tau}} d\tau + \int_t^s {}^{(p_l+1)}H_{1\lambda_l \dots \lambda_{1\tau}} \frac{1}{2} d\mathbf{f}_\tau,$$

где $\lambda_q = 0$ или $\lambda_q = 1$; $p_l = \sum_{i=1}^l \lambda_i$. Матричные случайные процессы $^{(p_q)}H_{\lambda_q \dots \lambda_{1\tau}}$, $q = 1, 2, \dots, N$, покомпонентно принадлежат классу $\mathcal{M}_2([0, T])$ и называются q -ми производными по Стратоновичу процесса η_s . При этом полагаем

$$p_0 \stackrel{\text{def}}{=} 0, \quad ^{(p_0)}H_{\lambda_0 \dots \lambda_{1\tau}} \stackrel{\text{def}}{=} \eta_\tau,$$

$$^{(p_0)}H_{0\lambda_0 \dots \lambda_{1\tau}} \stackrel{\text{def}}{=} H_{0\tau}, \quad ^{(p_0+1)}H_{1\lambda_0 \dots \lambda_{1\tau}} \stackrel{\text{def}}{=} {}^{(1)}H_{1\tau}.$$

Обобщим лемму 4.3 на случай многократной дифференцируемости по Стратоновичу.

Введем обозначения:

$$\left\| D_{\lambda_l}^{(i_l)} \dots D_{\lambda_1}^{(i_1)} R(\mathbf{x}, s) \right\|_{i_1=\lambda_1, \dots, i_l=\lambda_l}^{m\lambda_1 \dots m\lambda_l} \stackrel{\text{def}}{=} {}^{(p_l)}D_{\lambda_l} \dots D_{\lambda_1} \{R(\mathbf{x}, s)\},$$

где $\lambda_l = 1$ или $\lambda_l = 0$; $D_{\lambda_l}^{(i_l)} = L - \frac{1}{2} \sum_{j=1}^m G_0^{(j)} G_0^{(j)}$ и $i_l = 0$ при $\lambda_l = 0$; $D_{\lambda_l}^{(i_l)} = G_0^{(i_l)}$ и $i_l = 1, \dots, m$ при $\lambda_l = 1$; $l = 1, \dots, N$;

$$\mathcal{M}_k = \{(\lambda_k, \dots, \lambda_1) : \lambda_l = 1 \text{ или } \lambda_l = 0; l = 1, \dots, k\}.$$

Лемма 4.5. Пусть выполнены условия:

1. Для всех $(\lambda_l, \dots, \lambda_1) \in \bigcup_{g=1}^N \mathcal{M}_g$: $Q_{\lambda_l}^{(i_l)} \dots Q_{\lambda_1}^{(i_1)} R(\mathbf{x}, \tau) \in \mathcal{L}$.
2. Для всех $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$, $\tau, \theta \in [0, T]$, $(\lambda_l, \dots, \lambda_1) \in \bigcup_{g=1}^{N+1} \mathcal{M}_g$ и некоторого $\nu > 0$ удовлетворены условия

$$|Q_{\lambda_l}^{(i_l)} \dots Q_{\lambda_1}^{(i_1)} R(\mathbf{x}, \tau) - Q_{\lambda_l}^{(i_l)} \dots Q_{\lambda_1}^{(i_1)} R(\mathbf{y}, \tau)| \leq K_1 |\mathbf{x} - \mathbf{y}|, \quad K_1 < \infty,$$

$$|Q_{\lambda_l}^{(i_l)} \dots Q_{\lambda_1}^{(i_1)} R(\mathbf{x}, \tau)| \leq K_2 (1 + |\mathbf{x}|), \quad K_2 < \infty,$$

$$|Q_{\lambda_l}^{(i_l)} \dots Q_{\lambda_1}^{(i_1)} R(\mathbf{x}, \tau) - Q_{\lambda_l}^{(i_l)} \dots Q_{\lambda_1}^{(i_1)} R(\mathbf{x}, \theta)| \leq K_3 |\tau - \theta|^\nu (1 + |\mathbf{x}|), \quad K_3 < \infty.$$

3. Справедливы условия AI, AII (теорема 1.6).

4. $M\{|\mathbf{x}_0|^8\} < \infty$.

Тогда процесс η_s , $s \in [0, T]$, N раз дифференцируем по Стратоновичу в среднеквадратическом смысле на промежутке $[0, T]$ на траекториях уравнения (1.35) и его производные по Стратоновичу имеют вид

$$^{(p_l)}H_{\lambda_l \dots \lambda_{1s}} = {}^{(p_l)}D_{\lambda_l} \dots D_{\lambda_1} \{R(\mathbf{x}_s, s)\},$$

где $l = 1, \dots, N$; $p_l = \sum_{p=1}^l \lambda_p$.

Доказательство леммы нетрудно провести по индукции.

В случае $R(\mathbf{x}, t) \equiv \mathbf{x}$, $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$, положим

$$D_{\lambda_l}^{(i_l)} \dots D_{\lambda_1}^{(i_1)} \mathbf{x} \stackrel{\text{def}}{=} \begin{cases} D_{\lambda_l}^{(i_l)} \dots D_{\lambda_2}^{(i_2)} \bar{\mathbf{a}}(\mathbf{x}, t) & \text{при } i_1 = 0, l \geq 2, \\ D_{\lambda_l}^{(i_l)} \dots D_{\lambda_2}^{(i_2)} \Sigma_{i_1}(\mathbf{x}, t) & \text{при } i_1 = 1, \dots, m, l \geq 2, \\ \bar{\mathbf{a}}(\mathbf{x}, t) & \text{при } i_1 = 0, l = 1, \\ \Sigma_{i_1}(\mathbf{x}, t) & \text{при } i_1 = 1, \dots, m, l = 1, \end{cases} \quad (4.68)$$

где $\bar{\mathbf{a}}(\mathbf{x}, t) \stackrel{\text{def}}{=} \mathbf{a}(\mathbf{x}, t) - \frac{1}{2} \sum_{j=1}^m G_0^{(j)} \Sigma_j(\mathbf{x}, t)$; $\Sigma_j(\mathbf{x}, t)$ — j -й столбец матрицы $\Sigma(\mathbf{x}, t)$;

$$\left\| D_{\lambda_l}^{(i_l)} \dots D_{\lambda_1}^{(i_1)} \mathbf{x} \right\|_{i_1=\lambda_1, \dots, i_l=\lambda_l}^{m\lambda_1 \dots m\lambda_l} \stackrel{\text{def}}{=} (p_l) D_{\lambda_l} \dots D_{\lambda_1} \{\mathbf{x}\}. \quad (4.69)$$

Далее также будем часто использовать следующие записи:

$$D_{\lambda_l}^{(i_l)} \dots D_{\lambda_1}^{(i_1)} \mathbf{x}_t \stackrel{\text{def}}{=} \begin{cases} D_{\lambda_l}^{(i_l)} \dots D_{\lambda_2}^{(i_2)} \bar{\mathbf{a}}(\mathbf{x}_t, t) & \text{при } i_1 = 0, l \geq 2, \\ D_{\lambda_l}^{(i_l)} \dots D_{\lambda_2}^{(i_2)} \Sigma_{i_1}(\mathbf{x}_t, t) & \text{при } i_1 = 1, \dots, m, l \geq 2, \\ \bar{\mathbf{a}}(\mathbf{x}_t, t) & \text{при } i_1 = 0, l = 1, \\ \Sigma_{i_1}(\mathbf{x}_t, t) & \text{при } i_1 = 1, \dots, m, l = 1, \end{cases} \quad (4.70)$$

$$\left\| D_{\lambda_l}^{(i_l)} \dots D_{\lambda_1}^{(i_1)} \mathbf{x}_t \right\|_{i_1=\lambda_1, \dots, i_l=\lambda_l}^{m\lambda_1 \dots m\lambda_l} \stackrel{\text{def}}{=} (p_l) D_{\lambda_l} \dots D_{\lambda_1} \{\mathbf{x}_t\}. \quad (4.71)$$

Пояснения к обозначениям (4.68)–(4.71) те же, что и к формулам (4.7)–(4.10).

4.5 Разложение Тейлора–Стратоновича в форме Клоедена и Платена

Пользуясь связью между стохастическими интегралами Ито и Стратоновича, можно получить разложение процесса Ито по повторным стохастическим интегралам Стратоновича. Такое разложение для процессов Ито, представляющих собой гладкое безынерционное преобразование от решения стохастического дифференциального уравнения Ито, впервые было получено в [84].

Сформулируем теорему о разложении дифференцируемого по Стратоновичу случайного процесса $\eta_s = R(\mathbf{x}_s, s)$, где $R: \mathbb{R}^n \times [0, T] \rightarrow \mathbb{R}^1$, по повторным стохастическим интегралам Стратоновича.

Теорема 4.8. Пусть процесс $\eta_s = R(\mathbf{x}_s, s)$ $r+1$ раз дифференцируем по Стратоновичу в среднееквадратическом смысле на промежутке $[0, T]$ на траекториях уравнения (1.35). Тогда для любых двух моментов остановки s, t таких, что $P\{0 \leq t \leq s \leq T\} = 1$, с вероятностью 1 справедливо разложение

$$\eta_s = \eta_t + \sum_{k=1}^r \sum_{(\lambda_k, \dots, \lambda_1) \in \mathcal{M}_k} {}^{(p_k)} D_{\lambda_k} \dots D_{\lambda_1} \{\eta_t\} {}^{p_k} J_{(\lambda_k \dots \lambda_1)s, t}^* + D_{r+1, s, t}, \quad (4.72)$$

$$D_{r+1, s, t} = \sum_{(\lambda_{r+1}, \dots, \lambda_1) \in \mathcal{M}_{r+1}} \int_t^{*s} \dots \left(\int_t^{*\tau_r} {}^{(p_{r+1})} D_{\lambda_{r+1}} \dots D_{\lambda_1} \{\eta_{\tau_1}\} {}^{\lambda_{r+1}} d\mathbf{w}_{\tau_1} \right) \dots {}^{\lambda_1} d\mathbf{w}_{\tau_{r+1}}, \quad (4.73)$$

правые части (4.72) и (4.73) существуют в среднееквадратическом смысле и в них введены следующие обозначения:

$${}^{(p_k)} J_{(\lambda_k \dots \lambda_1)s, t}^* = \left\| J_{(\lambda_k \dots \lambda_1)s, t}^{*(i_k \dots i_1)} \right\|_{i_1=\lambda_1, \dots, i_k=\lambda_k}^{m\lambda_1 \dots m\lambda_k},$$

$$J_{(\lambda_k \dots \lambda_1)s, t}^{*(i_k \dots i_1)} = \int_t^{*s} \dots \int_t^{*\tau_2} d\mathbf{w}_{\tau_1}^{(i_k)} \dots d\mathbf{w}_{\tau_k}^{(i_1)} \text{ при } k \geq 1,$$

$\mathbf{w}_{\tau}^{(i)} = \mathbf{f}_{\tau}^{(i)}$ при $i = 1, \dots, m$ и $\mathbf{w}_{\tau}^{(0)} = \tau$.

Порядок малости при $s \downarrow t$ в среднееквадратическом смысле общего члена разложения (4.72) определяется только порядком малости повторного стохастического интеграла Стратоновича $J_{(\lambda_k \dots \lambda_1)s, t}^{*(i_k \dots i_1)}$. Из результатов главы 3 следует, что этот интеграл Стратоновича имеет такой же порядок малости при $s \downarrow t$ в среднееквадратическом смысле, что и соответствующий ему стохастический интеграл Ито. Поэтому общий член разложения (4.72) имеет порядок малости, равный порядку малости повторного стохастического интеграла Ито:

$$J_{(\lambda_k \dots \lambda_1)s, t}^{*(i_k \dots i_1)} = \int_t^s \dots \int_t^{\tau_2} d\mathbf{w}_{\tau_1}^{(i_k)} \dots d\mathbf{w}_{\tau_k}^{(i_1)},$$

где $i_l = 0$ при $\lambda_l = 0$ и $i_l = 1, \dots, m$ при $\lambda_l = 1$.

Нетрудно видеть, что

$$\left(\mathbb{M} \left\{ \left(J_{(\lambda_k \dots \lambda_1)s, t}^{*(i_k \dots i_1)} \right)^2 \right\} \right)^{\frac{1}{2}} \leq C_k (s - t)^{k - \frac{1}{2} \sum_{j=1}^k \lambda_j},$$

где $C_k < \infty$ — постоянная.

В силу сказанного часть слагаемых разложения (4.72) имеет больший порядок малости при $s \downarrow t$ в среднеквадратическом смысле, чем порядок малости остаточного члена $D_{r+1_{s,t}}$ разложения (4.72), для которого справедлива оценка

$$\left(\mathbb{M} \left\{ \left(D_{r+1_{s,t}} \right)^2 \right\} \right)^{\frac{1}{2}} \leq C_{r+1} (s - t)^{\frac{r+1}{2}}, \quad C_{r+1} < \infty \text{ — постоянная.}$$

Введем обозначения

$$\mathcal{E}_{qk} = \{(\lambda_k, \dots, \lambda_1) : 2k - \lambda_1 - \dots - \lambda_k = q\}$$

$$\mathcal{G}_{rk} = \{(\lambda_k, \dots, \lambda_1) : r + 1 \leq 2k - \lambda_1 - \dots - \lambda_k \leq 2r\},$$

где $\lambda_l = 1$ или $\lambda_l = 0$, $l = 1, \dots, k$.

Сформулируем теорему об упорядоченном по порядку малости в среднеквадратическом смысле разложении по повторным стохастическим интегралам Стратоновича процесса $\eta_s = R(\mathbf{x}_s, s)$, где $R : \mathbb{R}^n \times [0, T] \rightarrow \mathbb{R}^1$.

Теорема 4.9. Пусть процесс $\eta_s = R(\mathbf{x}_s, s)$ $r+1$ раз дифференцируем по Стратоновичу в среднеквадратическом смысле на промежутке $[0, T]$ на траекториях уравнения (1.35). Тогда для любых двух моментов остановки s, t таких, что $\mathbb{P}\{0 \leq t \leq s \leq T\} = 1$, с вероятностью 1 справедливо разложение

$$\eta_s = \eta_t + \sum_{q,k=1}^r \sum_{(\lambda_k, \dots, \lambda_1) \in \mathcal{E}_{qk}} {}^{(p_k)} D_{\lambda_k} \dots D_{\lambda_1} \{\eta_t\} {}^{p_k} {}^{(p_k)} J_{(\lambda_k \dots \lambda_1)_{s,t}}^* + H_{r+1_{s,t}}, \quad (4.74)$$

$$H_{r+1_{s,t}} = D_{r+1_{s,t}} + \sum_{k=1}^r \sum_{(\lambda_k, \dots, \lambda_1) \in \mathcal{G}_{rk}} {}^{(p_k)} D_{\lambda_k} \dots D_{\lambda_1} \{\eta_t\} {}^{p_k} {}^{(p_k)} J_{(\lambda_k \dots \lambda_1)_{s,t}}^*, \quad (4.75)$$

правые части (4.74) и (4.75) существуют в среднеквадратическом смысле, причем найдется такая постоянная $C_{r+1} < \infty$, что

$$\left(\mathbb{M} \left\{ \left(H_{r+1_{s,t}} \right)^2 \right\} \right)^{\frac{1}{2}} \leq C_{r+1} (s - t)^{\frac{r+1}{2}},$$

$D_{r+1_{s,t}}$ имеет вид (4.73).

Термин "разложение Тейлора–Стратоновича в форме Клоедена и Платена" будем далее применять как к разложению (4.72), так и к разложению (4.74).

4.6 Унифицированные разложения Тейлора–Стратоновича

В данном разделе путем замены порядка интегрирования в повторных стохастических интегралах Ито и с помощью соотношений между повторными стохастическими интегралами Стратоновича и Ито (см. главу 3) правая часть (4.72) будет преобразована в два представления, в которые входят минимальные совокупности различных повторных стохастических интегралов Стратоновича. Эти представления мы назовем унифицированными разложениями Тейлора–Стратоновича.

4.6.1 Первая форма унифицированного разложения Тейлора–Стратоновича

В дальнейшем нам потребуется следующее утверждение.

Лемма 4.6. Пусть $h(\tau), g(\tau), G(\tau) : [t, s] \rightarrow \mathbb{R}^1$ — непрерывные на промежутке $[t, s]$ функции, причем $G(\tau)$ — первообразная функции $g(\tau)$. Пусть также $\xi_\tau^{(l)} \in Q_8([t, s])$ (см. разд. 1.3.5) и имеет вид

$$\xi_\tau^{(l)} = \int_t^\tau a_u du + \int_t^\tau b_u d\mathbf{f}_u^{(l)}, \quad l = 1, 2.$$

Тогда

$$\int_t^s g(\tau) \int_t^{*\tau} h(\theta) \int_t^{*\theta} \xi_u^{(l)} d\mathbf{f}_u^{(i)} d\mathbf{f}_\theta^{(j)} d\tau = \int_t^{*s} (G(s) - G(\theta)) h(\theta) \int_t^{*\theta} \xi_u^{(l)} d\mathbf{f}_u^{(i)} d\mathbf{f}_\theta^{(j)} \quad (4.76)$$

с вероятностью 1, где $i, j, l = 1, 2$; $\mathbf{f}_\tau^{(1)}, \mathbf{f}_\tau^{(2)}$ — $\mathcal{F}_\tau$ -измеримые при всех $\tau \in [t, s]$ независимые стандартные винеровские процессы.

Доказательство. В условиях леммы можно использовать лемму 1.4 и следствие 1.1 при $F(x, \theta) \equiv xh(\theta)$, $\eta_\theta \stackrel{\text{def}}{=} \int_t^{*\theta} \xi_u^{(l)} d\mathbf{f}_u^{(i)}$, так как очевидно, что $\eta_\theta \in Q_8([t, s])$; $xh(\theta)$ — дважды непрерывно дифференцируемая по x функция, причем эти производные ограничены при всех $x \in \mathbb{R}^1$; $\eta_\theta h(\theta) \in \mathcal{M}_2([t, s])$. По лемме 1.4 и следствию 1.1

$$\int_t^{*\tau} h(\theta) \int_t^{*\theta} \xi_u^{(l)} d\mathbf{f}_u^{(i)} d\mathbf{f}_\theta^{(j)} = \int_t^\tau h(\theta) \int_t^{*\theta} \xi_u^{(l)} d\mathbf{f}_u^{(i)} d\mathbf{f}_\theta^{(j)} + \frac{1}{2} \mathbf{1}_{\{i=j\}} \int_t^\tau h(\theta) \xi_\theta^{(l)} d\theta, \quad (4.77)$$

$$\int_t^{*\theta} \xi_u^{(l)} d\mathbf{f}_u^{(i)} = \int_t^\theta \xi_u^{(l)} d\mathbf{f}_u^{(i)} + \frac{1}{2} \mathbf{1}_{\{l=i\}} \int_t^\theta b_u du \quad (4.78)$$

с вероятностью 1, где $\mathbf{1}_A$ — индикатор множества A .

Подставим (4.77), (4.78) в левую часть (4.76) и дважды воспользуемся теоремой 3.1:

$$\begin{aligned}
& \int_t^s g(\tau) \int_t^{*\tau} h(\theta) \int_t^{*\theta} \xi_u^{(l)} d\mathbf{f}_u^{(i)} d\mathbf{f}_\theta^{(j)} d\tau = \int_t^s \xi_u^{(l)} d\mathbf{f}_u^{(i)} \int_u^s h(\theta) d\mathbf{f}_\theta^{(j)} \int_\theta^s g(\tau) d\tau + \\
& + \frac{1}{2} \mathbf{1}_{\{l=i\}} \int_t^s b_u du \int_u^s h(\theta) d\mathbf{f}_\theta^{(j)} \int_\theta^s g(\tau) d\tau + \frac{1}{2} \mathbf{1}_{\{i=j\}} \int_t^s h(\theta) \xi_\theta^{(l)} d\theta \int_\theta^s g(\tau) d\tau = \\
& = G(s) \left(\int_t^s \xi_u^{(l)} d\mathbf{f}_u^{(i)} \int_u^s h(\theta) d\mathbf{f}_\theta^{(j)} + \frac{1}{2} \mathbf{1}_{\{i=j\}} \int_t^s h(\theta) \xi_\theta^{(l)} d\theta + \right. \\
& \quad \left. + \frac{1}{2} \mathbf{1}_{\{l=i\}} \int_t^s b_u du \int_u^s h(\theta) d\mathbf{f}_\theta^{(j)} \right) - \\
& - \left(\int_t^s \xi_u^{(l)} d\mathbf{f}_u^{(i)} \int_u^s G(\theta) h(\theta) d\mathbf{f}_\theta^{(j)} + \frac{1}{2} \mathbf{1}_{\{i=j\}} \int_t^s G(\theta) h(\theta) \xi_\theta^{(l)} d\theta + \right. \\
& \quad \left. + \frac{1}{2} \mathbf{1}_{\{l=i\}} \int_t^s b_u du \int_u^s h(\theta) G(\theta) d\mathbf{f}_\theta^{(j)} \right) = \\
& = G(s) \left(\int_t^s h(\theta) \int_t^\theta \xi_u^{(l)} d\mathbf{f}_u^{(i)} d\mathbf{f}_\theta^{(j)} + \frac{1}{2} \mathbf{1}_{\{i=j\}} \int_t^s h(\theta) \xi_\theta^{(l)} d\theta + \right. \\
& \quad \left. + \frac{1}{2} \mathbf{1}_{\{l=i\}} \int_t^s h(\theta) \int_t^\theta b_u du d\mathbf{f}_\theta^{(j)} \right) - \\
& - \left(\int_t^s G(\theta) h(\theta) \int_t^\theta \xi_u^{(l)} d\mathbf{f}_u^{(i)} d\mathbf{f}_\theta^{(j)} + \frac{1}{2} \mathbf{1}_{\{i=j\}} \int_t^s G(\theta) h(\theta) \xi_\theta^{(l)} d\theta + \right. \\
& \quad \left. + \frac{1}{2} \mathbf{1}_{\{l=i\}} \int_t^s h(\theta) G(\theta) \int_t^\theta b_u du d\mathbf{f}_\theta^{(j)} \right) \quad (4.79)
\end{aligned}$$

с вероятностью 1. Используя (4.77), (4.78), формулу, которая отличается от (4.77) заменой $h(\theta)$ на $G(\theta)h(\theta)$, а также (4.79), получаем (4.76). Лемма доказана. $\square$

Положим

$$I_{l_1 \dots l_{k,s,t}}^{*(i_1 \dots i_k)} = \begin{cases} \int_t^{*s} (t - \tau_1)^{l_k} \dots \int_t^{*\tau_{k-1}} (t - \tau_k)^{l_1} d\mathbf{f}_{\tau_k}^{(i_1)} \dots d\mathbf{f}_{\tau_1}^{(i_k)} & \text{при } k \geq 1, \\ 1 & \text{при } k = 0, \end{cases}$$

где $i_1, \dots, i_k = 1, \dots, m$;

$$\begin{aligned} & \left\| I_{l_1 \dots l_{k s, t}}^{*(i_1 \dots i_k)} \right\|_{i_1, \dots, i_k=1}^m \stackrel{\text{def}}{=} {}^{(k)} I_{l_1 \dots l_{k s, t}}^*; \\ & {}^{(k)} (s \ominus t)_{j l_1 \dots l_k}^* = \left\| (s \ominus t)_{j l_1 \dots l_k}^{*(i_1 \dots i_k)} \right\|_{i_1, \dots, i_k=1}^m = \left\| \frac{(s - t)^j}{j!} I_{l_1 \dots l_{k s, t}}^{*(i_1 \dots i_k)} \right\|_{i_1, \dots, i_k=1}^m; \\ & \bar{G}_p^{(i)} \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{p} \left(\bar{G}_{p-1}^{(i)} \bar{L} - \bar{L} \bar{G}_{p-1}^{(i)} \right), \quad p = 1, 2, \dots; \quad i = 1, \dots, m; \end{aligned} \quad (4.80)$$

$$\bar{L} = L - \frac{1}{2} \sum_{j=1}^m G_0^{(j)} G_0^{(j)};$$

$\bar{G}_0^{(i)} \stackrel{\text{def}}{=} G_0^{(i)}$, $i = 1, \dots, m$; операторы L и $G_0^{(i)}$, $i = 1, \dots, m$, определяются равенствами (4.2), (4.3);

$$\mathcal{A}_q \stackrel{\text{def}}{=} \{(k, j, l_1, \dots, l_k) : k + j + \sum_{p=1}^k l_p; \quad k, j, l_1, \dots, l_k = 0, 1, \dots\};$$

$$\left\| \bar{G}_{l_1}^{(i_1)} \dots \bar{G}_{l_k}^{(i_k)} \bar{L}^j R(\mathbf{x}, t) \right\|_{i_1, \dots, i_k=1}^m \stackrel{\text{def}}{=} {}^{(k)} \bar{G}_{l_1} \dots \bar{G}_{l_k} \bar{L}^j \{R(\mathbf{x}, t)\};$$

$$\bar{L}^j R(\mathbf{x}, t) \stackrel{\text{def}}{=} \begin{cases} \underbrace{\bar{L} \dots \bar{L}}_j R(\mathbf{x}, t) & \text{при } j \geq 1, \\ R(\mathbf{x}, t) & \text{при } j = 0. \end{cases}$$

Теорема 4.10. Пусть процесс Ито $\eta_s = R(\mathbf{x}_s, s)$, где $R : \mathbb{R}^n \times [0, T] \rightarrow \mathbb{R}^1$, $r + 1$ раз дифференцируем по Стратоновичу в среднее квадратическом смысле на промежутке $[0, T]$ на траекториях уравнения (1.35). Тогда при всех $s, t \in [0, T] : s \geq t$, с вероятностью 1 справедливо разложение

$$\eta_s = \eta_t + \sum_{q=1}^r \left(\bar{C}^{\mathcal{A}_q} \{\eta_t\} \odot (s \ominus t)_*^{\mathcal{A}_q} \right) + D_{r+1, s, t}, \quad (4.81)$$

причем правая часть (4.81) существует в среднее квадратическом смысле и в ней введены обозначения

$$\bar{C}^{\mathcal{A}_q} \{\eta_t\} = \{ {}^{(k)} \bar{G}_{l_1} \dots \bar{G}_{l_k} \bar{L}^j \{\eta_t\} : (k, j, l_1, \dots, l_k) \in \mathcal{A}_q \},$$

$$(s \ominus t)_*^{\mathcal{A}_q} = \{ {}^{(k)} (s \ominus t)_{j l_1 \dots l_k}^* : (k, j, l_1, \dots, l_k) \in \mathcal{A}_q \},$$

$D_{r+1, s, t}$ имеет вид (4.73).

Доказательство. Покажем, что с вероятностью 1

$$\begin{aligned} \sum_{(\lambda_q, \dots, \lambda_1) \in \mathcal{M}_q} {}^{(p_q)} D_{\lambda_q} \dots D_{\lambda_1} \{\eta_t\} {}^{p_q} J_{(\lambda_q \dots \lambda_1) s, t}^* = \\ = (\bar{C}^{\mathcal{A}_q} \{\eta_t\} \odot (s \ominus t)_*^{\mathcal{A}_q}). \end{aligned} \quad (4.82)$$

При $q = 1$ равенство (4.82) справедливо. Предположим, что (4.82) справедливо при некотором $q > 1$. Тогда

$$\begin{aligned} \sum_{(\lambda_{q+1}, \dots, \lambda_1) \in \mathcal{M}_{q+1}} {}^{(p_{q+1})} D_{\lambda_1} \dots D_{\lambda_{q+1}} \{\eta_t\} {}^{p_{q+1}} J_{(\lambda_1 \dots \lambda_{q+1}) s, t}^* = \\ = \sum_{\lambda_{q+1} \in \{1, 0\}} \int_t^s \sum_{(\lambda_q, \dots, \lambda_1) \in \mathcal{M}_q} \times \\ \times \left({}^{(p_{q+1})} D_{\lambda_1} \dots D_{\lambda_{q+1}} \{\eta_t\} {}^{p_q} J_{(\lambda_1 \dots \lambda_q) \theta, t}^* \right)^{\lambda_{q+1}} d\mathbf{w}_\theta = \\ = \sum_{\lambda_{q+1} \in \{1, 0\}} \int_t^s \sum_{(k, j, l_1, \dots, l_k) \in \mathcal{A}_q} \frac{(\theta - t)^j}{j!} \times \\ \times \left({}^{(k+\lambda_{q+1})} \bar{G}_{l_1} \dots \bar{G}_{l_k} \bar{L}^j D_{\lambda_{q+1}} \{\eta_t\} {}^{(k)} I_{l_1 \dots l_{k, s, t}}^* \right)^{\lambda_{q+1}} d\mathbf{w}_\theta = \\ = \sum_{(k, j, l_1, \dots, l_k) \in \mathcal{A}_q} \left({}^{(k)} \bar{G}_{l_1} \dots \bar{G}_{l_k} \bar{L}^{j+1} \{\eta_t\} {}^{(k)} \int_t^s \frac{(\theta - t)^j}{j!} I_{l_1 \dots l_{k, \theta, t}}^* d\theta + \right. \\ \left. + \left({}^{(k+1)} \bar{G}_{l_1} \dots \bar{G}_{l_k} \bar{L}^j \bar{G}_0 \{\eta_t\} {}^{(k)} \int_t^s \frac{(\theta - t)^j}{j!} I_{l_1 \dots l_{k, \theta, t}}^* d\theta \right) \right) \quad (4.83) \end{aligned}$$

с вероятностью 1, где $\mathbf{w}_\tau^{(i)} = \mathbf{f}_\tau^{(i)}$ при $i = 1, \dots, m$ и $\mathbf{w}_\tau^{(0)} = \tau$; $\mathbf{f}_\tau^{(i)}$ — компоненты $\mathbf{f}_\tau$.

Согласно лемме 4.6

$$\begin{aligned} \int_t^s \frac{(\theta - t)^j}{j!} {}^{(k)} I_{l_1 \dots l_{k, \theta, t}}^* d\theta = \\ = \begin{cases} \frac{(s-t)^{j+1}}{(j+1)!} & \text{при } k = 0, \\ \frac{(s-t)^{j+1}}{(j+1)!} {}^{(k)} I_{l_1 \dots l_{k, s, t}}^* - \frac{(-1)^{j+1}}{(j+1)!} {}^{(k)} I_{l_1 \dots l_{k-1} \ l_{k+j+1, s, t}}^* & \text{при } k > 0 \end{cases} \end{aligned} \quad (4.84)$$

с вероятностью 1. Кроме того, согласно введенным обозначениям

$$\int_t^s \frac{(\theta - t)^j}{j!} I_{l_1 \dots l_{k, \theta, t}}^{*(i_1 \dots i_k)} d\mathbf{w}_\theta^{(i_{k+1})} \stackrel{\text{def}}{=} \frac{(-1)^j}{j!} I_{l_1 \dots l_{k, s, t}}^{*(i_1 \dots i_k i_{k+1})}. \quad (4.85)$$

Подставим выражения (4.84), (4.85) в (4.83). Далее, сгруппировав слагаемые в полученном выражении при повторных стохастических интегралах Стратоновича с одинаковыми нижними индексами и воспользовавшись равенством

$$\bar{G}_p^{(i)} R(\mathbf{x}, t) = \frac{1}{p!} \sum_{q=0}^p (-1)^q C_p^q \bar{L}^q \bar{G}_0^{(i)} \bar{L}^{p-q} R(\mathbf{x}, t), \quad C_p^q = \frac{p!}{q!(p-q)!}, \quad (4.86)$$

которое вытекает из (4.80), заметим, что полученное выражение с вероятностью 1 равно

$$\sum_{(k,j,l_1,\dots,l_k) \in \mathcal{A}_{q+1}} \frac{(s-t)^j}{j!} {}^{(k)}\bar{G}_{l_1} \dots \bar{G}_{l_k} \bar{L}^j \{\eta_t\} \cdot {}^k {}^{(k)}I_{l_1 \dots l_{k,s,t}}^*.$$

Таким образом, (4.82) доказано.

Далее, суммируя равенства (4.82) при $q = 1, 2, \dots, r$ и используя (4.72), приходим к (4.81). Теорема доказана. $\square$

Упорядочим члены разложения (4.81) по порядку малости в среднеквадратическом смысле при $s \rightarrow t$:

$$\eta_s = \eta_t + \sum_{q=1}^r (\bar{C}^{\mathcal{D}_q} \{\eta_t\} \odot (s \ominus t)_*^{\mathcal{D}_q}) + \bar{H}_{r+1,s,t}, \quad (4.87)$$

где

$$\begin{aligned} \bar{H}_{r+1,s,t} &\stackrel{\text{def}}{=} (\bar{C}^{\mathcal{U}_r} \{\eta_t\} \odot (s \ominus t)_*^{\mathcal{U}_r}) + D_{r+1,s,t}; \\ \mathcal{D}_q &= \left\{ (k, j, l_1, \dots, l_k) : k + 2 \left(j + \sum_{p=1}^k l_p \right) = q; k, j, l_1, \dots, l_k = 0, 1, \dots \right\}; \end{aligned} \quad (4.88)$$

$$\begin{aligned} \mathcal{U}_r &= \left\{ (k, j, l_1, \dots, l_k) : k + j + \sum_{p=1}^k l_p \leq r; \right. \\ &\quad \left. k + 2 \left(j + \sum_{p=1}^k l_p \right) \geq r + 1; k, j, l_1, \dots, l_k = 0, 1, \dots \right\}; \end{aligned} \quad (4.89)$$

$D_{r+1,s,t}$ имеет вид (4.73).

Разложение (4.87) обладает тем свойством, что его остаточный член $\bar{H}_{r+1,s,t}$ имеет больший порядок малости при $s \downarrow t$ в среднеквадратическом смысле по сравнению с членами основной части разложения (4.87).

Термины "первая форма унифицированного разложения Тейлора–Стратоновича" и "унифицированное разложение Тейлора–Стратоновича" будем применять далее как к разложению (4.81), так и к разложению (4.87).

Если $r = 2, 3, 4, 5, 6, 7$, то в унифицированное разложение Тейлора–Стратоновича (4.87) входят соответственно 2, 4, 7, 12, 20 и 33 различных повторных стохастических интеграла Стратоновича. В то же время разложение Тейлора–Стратоновича (4.74) содержит уже 2, 5, 9, 17, 29 и 51 различных повторный стохастический интеграл Стратоновича.

4.6.2 Вторая форма унифицированного разложения Тейлора–Стратоновича

Введем в рассмотрение повторные стохастические интегралы Стратоновича

$$J_{l_1 \dots l_{k,s,t}}^{*(i_1 \dots i_k)} \stackrel{\text{def}}{=} \begin{cases} \int_t^{*s} (s - \tau_1)^{l_k} \dots \int_t^{* \tau_{k-1}} (s - \tau_k)^{l_1} d\mathbf{f}_{\tau_k}^{(i_1)} \dots d\mathbf{f}_{\tau_1}^{(i_k)} & \text{при } k \geq 1, \\ 1 & \text{при } k = 0, \end{cases}$$

где $i_1, \dots, i_k = 1, \dots, m$.

Нетрудно видеть, что в силу аддитивности стохастических интегралов и формулы бинома Ньютона с вероятностью 1 справедливо равенство

$$I_{l_1 \dots l_{k,s,t}}^{*(i_1 \dots i_k)} = \sum_{j_1=0}^{l_1} \dots \sum_{j_k=0}^{l_k} \prod_{g=1}^k C_{l_g}^{j_g} (t - s)^{l_1 + \dots + l_k - j_1 - \dots - j_k} J_{j_1 \dots j_{k,s,t}}^{*(i_1 \dots i_k)} \quad \text{с в.1,} \quad (4.90)$$

где $C_l^k \stackrel{\text{def}}{=} \frac{l!}{k!(l-k)!}$ — биномиальный коэффициент. Таким образом, разложение Тейлора–Стратоновича процесса $\eta_s = R(\mathbf{x}_s, s)$, $s \in [0, T]$, можно строить как по повторным стохастическим интегралам $I_{l_1 \dots l_{k,s,t}}^{*(i_1 \dots i_k)}$, что было сделано в предыдущем разделе, так и по повторным стохастическим интегралам $J_{l_1 \dots l_{k,s,t}}^{*(i_1 \dots i_k)}$. Этому вопросу посвящен данный раздел.

Положим

$$\begin{aligned} \left\| J_{l_1 \dots l_{k,s,t}}^{*(i_1 \dots i_k)} \right\|_{i_1, \dots, i_k=1}^m &\stackrel{\text{def}}{=} {}^{(k)} J_{l_1 \dots l_{k,s,t}}^*, \\ {}^{(k)} (s \hat{\ominus} t)_{j_1 \dots j_k}^* &= \left\| (s \hat{\ominus} t)_{j_1 \dots j_k}^{*(i_1 \dots i_k)} \right\|_{i_1, \dots, i_k=1}^m = \left\| \frac{(s - t)^j}{j!} J_{l_1 \dots l_{k,s,t}}^{*(i_1 \dots i_k)} \right\|_{i_1, \dots, i_k=1}^m, \\ \left\| \bar{L}^j G_{l_1}^{(i_1)} \dots \bar{G}_{l_k}^{(i_k)} R(\mathbf{x}, t) \right\|_{i_1, \dots, i_k=1}^m &\stackrel{\text{def}}{=} {}^{(k)} \bar{L}^j \bar{G}_{l_1} \dots \bar{G}_{l_k} \{R(\mathbf{x}, t)\}. \end{aligned}$$

Теорема 4.11. Пусть процесс Ито $\eta_s = R(\mathbf{x}_s, s)$, где $R : \mathbb{R}^n \times [0, T] \rightarrow \mathbb{R}^1$, $r + 1$ раз дифференцируем по Стратоновичу в среднеквадратическом смысле на промежутке $[0, T]$ на траекториях уравнения

(1.35). Тогда при всех $s, t \in [0, T] : s \geq t$, с вероятностью 1 справедливо разложение

$$\eta_s = \eta_t + \sum_{q=1}^r (\tilde{C}^{\mathcal{A}_q} \{\eta_t\} \odot (s \hat{\ominus} t)_*^{\mathcal{A}_q}) + D_{r+1_{s,t}}, \quad (4.91)$$

причем правая часть (4.91) существует в среднеекватрическом смысле и в ней введены обозначения

$$\tilde{C}^{\mathcal{A}_q} \{\eta_t\} = \{^{(k)} \bar{L}^j \bar{G}_{l_1} \dots \bar{G}_{l_k} \{\eta_t\} : (k, j, l_1, \dots, l_k) \in \mathcal{A}_q\},$$

$$(s \hat{\ominus} t)_*^{\mathcal{A}_q} = \{^{(k)} (s \hat{\ominus} t)_{j l_1 \dots l_k}^* : (k, j, l_1, \dots, l_k) \in \mathcal{A}_q\},$$

$D_{r+1_{s,t}}$ имеет вид (4.73).

Доказательство теоремы сводится к проверке при $q = 1, 2, \dots, r$ справедливости равенств

$$(\tilde{C}^{\mathcal{A}_q} \{\eta_t\} \odot (s \hat{\ominus} t)_*^{\mathcal{A}_q}) = (\bar{C}^{\mathcal{A}_q} \{\eta_t\} \odot (s \ominus t)_*^{\mathcal{A}_q}),$$

которые в развернутом виде выглядят следующим образом:

$$\begin{aligned} & \sum_{(k,j,l_1,\dots,l_k) \in \mathcal{A}_q} \frac{(s-t)^j}{j!} {}^{(k)} \bar{L}^j \bar{G}_{l_1} \dots \bar{G}_{l_k} \{\eta_t\} \cdot {}^k {}^{(k)} J_{l_1 \dots l_{ks,t}}^* = \\ & = \sum_{(k,j,l_1,\dots,l_k) \in \mathcal{A}_q} \frac{(s-t)^j}{j!} {}^{(k)} \bar{G}_{l_1} \dots \bar{G}_{l_k} \bar{L}^j \{\eta_t\} \cdot {}^k {}^{(k)} I_{l_1 \dots l_{ks,t}}^* \text{ с в.1.} \end{aligned} \quad (4.92)$$

Равенство (4.92) проверяется путем подстановки в его правую часть выражения (4.90) и использования формулы (4.86).

Упорядочим члены разложения (4.91) по порядку малости при $s \downarrow t$ в среднеекватрическом смысле:

$$\eta_s = \eta_t + \sum_{q=1}^r (\tilde{C}^{\mathcal{D}_q} \{\eta_t\} \odot (s \hat{\ominus} t)_*^{\mathcal{D}_q}) + \tilde{H}_{r+1_{s,t}}, \quad (4.93)$$

где

$$\tilde{H}_{r+1_{s,t}} \stackrel{\text{def}}{=} (\tilde{C}^{\mathcal{U}_r} \{\eta_t\} \odot (s \hat{\ominus} t)_*^{\mathcal{U}_r}) + D_{r+1_{s,t}};$$

$D_{r+1_{s,t}}$ имеет вид (4.73), а $\mathcal{D}_q$ и $\mathcal{U}_r$ определяются равенствами (4.88) и (4.89) соответственно.

Разложение (4.93) в отличие от разложения (4.91) обладает тем свойством, что остаточный член $\tilde{H}_{r+1_{s,t}}$ имеет больший порядок малости при $s \downarrow t$ в среднеекватрическом смысле, нежели члены основной части разложения (4.93).

Термины "вторая форма унифицированного разложения Тейлора–Стратоновича" и "унифицированное разложение Тейлора–Стратоновича" будем применять далее как к разложению (4.91), так и к разложению (4.93).

Если $r = 2, 3, 4, 5, 6, 7$, то в унифицированное разложение Тейлора–Стратоновича (4.93) входят соответственно 2, 4, 7, 12, 20 и 33 различных повторных стохастических интеграла Стратоновича. В то же время разложение Тейлора–Стратоновича (4.74) содержит уже 2, 5, 9, 17, 29 и 51 различных повторный стохастический интеграл Стратоновича.

Заметим, что коэффициентные функции разложений Тейлора–Ито строятся с использованием операторов L и $G_0^{(i)}$, $i = 1, \dots, m$, а коэффициентные функции разложений Тейлора–Стратоновича — с использованием операторов $\bar{L} = L - \frac{1}{2} \sum_{j=1}^m G_0^{(j)} G_0^{(j)}$ и $G_0^{(i)}$, $i = 1, \dots, m$. Нетрудно видеть, что

$$\bar{L} = \frac{\partial}{\partial t} + \sum_{i=1}^n \mathbf{a}^{(i)}(\mathbf{x}, t) \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}^{(i)}} - \frac{1}{2} \sum_{j=1}^m \sum_{l,i=1}^n \Sigma^{(lj)}(\mathbf{x}, t) \frac{\partial \Sigma^{(ij)}}{\partial \mathbf{x}^{(l)}}(\mathbf{x}, t) \cdot \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}^{(i)}},$$

т. е. оператор $\bar{L}$ включает в себя частные производные первого порядка. В то же время в оператор L входят частные производные первого и второго порядка. Таким образом, выражения коэффициентных функций разложений Тейлора–Ито содержат частные производные функций $R(\mathbf{x}, t)$, $\mathbf{a}^{(i)}(\mathbf{x}, t)$, $\Sigma^{(ij)}(\mathbf{x}, t)$, $i = 1, \dots, n$; $j = 1, \dots, m$, более высокого порядка, нежели выражения соответствующих коэффициентных функций разложений Тейлора–Стратоновича.

4.7 Сильная сходимость стохастических разложений

В этом разделе рассмотрим результаты, которые получены в [81, 84, 86] и связаны с сильной сходимостью разложения Тейлора–Ито в форме Вагнера и Платена, и разложения Тейлора–Стратоновича в форме Клоедена и Платена.

Введем ряд обозначений. Пусть множество Λ_r определяется следующим образом:

$$\Lambda_r = \{(\lambda_1, \dots, \lambda_k) : k + n(\lambda_1, \dots, \lambda_k) \leq r, \lambda_p \in \{0, 1\}, p = 1, \dots, k\},$$

где $n(\lambda_1, \dots, \lambda_k)$ — число нулей среди $\lambda_1, \dots, \lambda_k$. Введем множества $\mathcal{M}$

и $B(\Lambda_r)$ вида

$$\mathcal{M} = \{(\lambda_1, \dots, \lambda_k) : \lambda_p \in \{0, 1\}, p = 1, \dots, k, k = 1, 2, \dots\},$$

$$B(\Lambda_r) = \{(\lambda_1, \dots, \lambda_k) \in \mathcal{M} \setminus \Lambda_r : (\lambda_2, \dots, \lambda_k) \in \Lambda_r, \lambda_p \in \{0, 1\},$$

$$p = 1, \dots, k\}.$$

В условиях теоремы 4.1 согласно введенным обозначениям с вероятностью 1 имеем

$$\eta_s = \eta_{s,t}^{(k)} + R_{k+1,s,t},$$

где

$$\eta_{s,t}^{(k)} = \eta_t + \sum_{(\lambda_1, \dots, \lambda_k) \in \Lambda_k} {}^{(p_k)}Q_{\lambda_k} \dots {}^{(p_1)}Q_{\lambda_1} \{\eta_t\} {}^{p_k} \dots {}^{(p_k)}J_{(\lambda_k \dots \lambda_1)s,t};$$

$$R_{k+1,s,t} = \sum_{(\lambda_1, \dots, \lambda_k) \in B(\Lambda_k)} \int_t^s \dots \left(\int_t^{\tau_k-1} {}^{(p_k)}Q_{\lambda_k} \dots {}^{(p_1)}Q_{\lambda_1} \{\eta_{\tau_k}\} {}^{\lambda_k} \dots {}^{\lambda_1} d\mathbf{w}_{\tau_k} \right) \dots {}^{\lambda_1} d\mathbf{w}_{\tau_1}.$$

Здесь сохранен смысл обозначений, входящих в теорему 4.1.

Теорема 4.12 [81, 84, 86]. Пусть условия теоремы 4.1 выполнены и пусть

$$\sup_{t_0 \leq t \leq T} \mathbb{M} \left\{ \left| Q_{\lambda_k}^{(i_k)} \dots Q_{\lambda_1}^{(i_1)} \{\eta_t\} \right|^2 \right\} \leq C_1 C_2^{k+n(\lambda_1, \dots, \lambda_k)} \left[\frac{1}{2} (k + n(\lambda_1, \dots, \lambda_k)) \right]!$$

для любого $(\lambda_1, \dots, \lambda_k) \in B(\Lambda_k)$, $i_1, \dots, i_k = 0, 1, \dots, m$. Тогда для всех $t \in [t_0, T]$

$$\mathbb{M} \left\{ \left| \eta_t - \eta_{t,t_0}^{(k)} \right|^2 \right\} \leq C_3 \frac{(C_4(t - t_0))^{k+1}}{\left[\frac{1}{2}(k+1) \right]!},$$

где $[x]$ — целая часть числа x ; $C_1, C_2, C_3, C_4 < \infty$ — постоянные, не зависящие от k .

Из теоремы 4.12 следует, что усеченное разложение Тейлора–Ито в форме Вагнера и Платена $\eta_{t,t_0}^{(k)}$ сходится в среднеквадратическом смысле к процессу Ито η_t :

$$\text{l.i.m.}_{k \rightarrow \infty} \eta_{t,t_0}^{(k)} = \eta_t \text{ для всех } t \in [t_0, T].$$

Следующая теорема устанавливает сходимость с вероятностью 1 при $t \in [t_0, T]$ усеченного разложения Тейлора–Ито в форме Вагнера и Платена $\eta_{t,t_0}^{(k)}$ к процессу Ито η_t .

Теорема 4.13 [81, 84, 86]. Пусть условия теоремы 4.12 выполнены и пусть

$$\sup_{t_0 \leq t \leq T} \mathbb{M} \left\{ \left| Q_{\lambda_k}^{(i_k)} \dots Q_{\lambda_1}^{(i_1)} \{\eta_t\} \right|^2 \right\} \leq C_1 C_2^{k+n(\lambda_1, \dots, \lambda_k)}$$

для любого $(\lambda_1, \dots, \lambda_k) \in \mathcal{M}$. Тогда усеченное разложение Тейлора–Ито в форме Вагнера и Платена $\eta_{t,t_0}^{(k)}$ сходится при $k \rightarrow \infty$ и всех $t \in [t_0, T]$ с вероятностью 1 к процессу Ито η_t :

$$\eta_t = \lim_{k \rightarrow \infty} \eta_{t,t_0}^{(k)} = \sum_{(\lambda_1, \dots, \lambda_k) \in \mathcal{M}} (p_k) Q_{\lambda_k} \dots Q_{\lambda_1} \{\eta_{t_0}\} \cdot^{p_k} J_{(\lambda_k \dots \lambda_1)t, t_0}.$$

В работах [81, 84, 86] также сформулированы и доказаны аналоги теорем 4.12 и 4.13 о сильной сходимости разложения Тейлора–Стратоновича в форме Клоедена и Платена.

В условиях теоремы 4.8 согласно введенным обозначениям с вероятностью 1 имеем

$$\eta_s = \tilde{\eta}_{s,t}^{(k)} + \tilde{R}_{k+1_{s,t}},$$

где

$$\tilde{\eta}_{s,t}^{(k)} = \eta_t + \sum_{(\lambda_1, \dots, \lambda_k) \in \Lambda_k} (p_k) D_{\lambda_k} \dots D_{\lambda_1} \{\eta_t\} \cdot^{p_k} J_{(\lambda_k \dots \lambda_1)s, t}^*$$

$$\tilde{R}_{k+1_{s,t}} = \sum_{(\lambda_1, \dots, \lambda_k) \in B(\Lambda_k)} \int_t^{*s} \dots \left(\int_t^{*T_{k-1}} (p_k) D_{\lambda_k} \dots D_{\lambda_1} \{\eta_{\tau_k}\} \cdot^{\lambda_k} d\mathbf{w}_{\tau_k} \right) \dots \cdot^{\lambda_1} d\mathbf{w}_{\tau_1}.$$

Здесь сохранен смысл обозначений, введенных в теореме 4.8.

Теорема 4.14 [81, 84, 86]. Пусть условия теоремы 4.8 выполнены и пусть

$$\sup_{t_0 \leq t \leq T} \mathbb{M} \left\{ \left| D_{\lambda_k}^{(i_k)} \dots D_{\lambda_1}^{(i_1)} \{\eta_t\} \right|^2 \right\} \leq C_1 C_2^{k+n(\lambda_1, \dots, \lambda_k)} \left[\frac{1}{2} (k + n(\lambda_1, \dots, \lambda_k)) \right]!$$

для любого $(\lambda_1, \dots, \lambda_k) \in B(\Lambda_k)$, $i_1, \dots, i_k = 0, 1, \dots, m$. Тогда для всех $t \in [t_0, T]$

$$\mathbb{M} \left\{ \left| \eta_t - \tilde{\eta}_{t,t_0}^{(k)} \right|^2 \right\} \leq C_3 \frac{(C_4(t - t_0))^{k+1}}{\left[\frac{1}{2}(k+1) \right]!},$$

где $C_1, C_2, C_3, C_4 < \infty$ — постоянные, не зависящие от k .

Из теоремы 4.14 следует, что усеченное разложение Тейлора–Стратоновича в форме Клоедена и Платена $\tilde{\eta}_{t,t_0}^{(k)}$ сходится в средне-квадратическом смысле к процессу Ито η_t :

$$\text{l.i.m.}_{k \rightarrow \infty} \tilde{\eta}_{t,t_0}^{(k)} = \eta_t \text{ для всех } t \in [t_0, T].$$

Следующая теорема устанавливает сходимость с вероятностью 1 при $t \in [t_0, T]$ усеченного разложения Тейлора–Стратоновича в форме Клоедена и Платена $\eta_{t,t_0}^{(k)}$ к процессу Ито η_t .

Теорема 4.15 [81, 84, 86]. Пусть условия теоремы 4.14 выполнены и пусть

$$\sup_{t_0 \leq t \leq T} M \left\{ \left| D_{\lambda_k}^{(i_k)} \dots D_{\lambda_1}^{(i_1)} \{ \eta_t \} \right|^2 \right\} \leq C_1 C_2^{k+n(\lambda_1, \dots, \lambda_k)}$$

для любого $(\lambda_1, \dots, \lambda_k) \in \mathcal{M}$. Тогда усеченное разложение Тейлора–Стратоновича в форме Клоедена и Платена $\tilde{\eta}_{t,t_0}^{(k)}$ сходится при $k \rightarrow \infty$ и во всех $t \in [t_0, T]$ с вероятностью 1 к процессу Ито η_t :

$$\eta_t = \lim_{k \rightarrow \infty} \tilde{\eta}_{t,t_0}^{(k)} = \sum_{(\lambda_1, \dots, \lambda_k) \in \mathcal{M}} {}^{(p_k)} D_{\lambda_k} \dots D_{\lambda_1} \{ \eta_{t_0} \} {}^{p_k} {}^{(p_k)} J_{(\lambda_k \dots \lambda_1)t, t_0}^*.$$

Отметим, что сильная сходимость унифицированных разложений Тейлора–Стратоновича вытекает из сильной сходимости разложения Тейлора–Стратоновича в форме Клоедена и Платена и равенства с вероятностью 1 при соответствующих условиях правых частей унифицированных разложений Тейлора–Стратоновича и правой части разложения Тейлора–Стратоновича в форме Клоедена и Платена. Аналогичный вывод справедлив и для разложений Тейлора–Ито.

В заключение отметим, что на практике для построения численных методов решения стохастических дифференциальных уравнений Ито обычно используется несколько первых приближений разложения Тейлора–Ито или Тейлора–Стратоновича, т. е. число k невелико (обычно $k \leq 6$). Поэтому наиболее важной характеристикой отдельного члена стохастического разложения является его малость по приращению времени, а не по индексу k . Несмотря на это обстоятельство, результаты, приведенные в данном разделе, представляют интерес с теоретической точки зрения.

4.8 Слабая сходимость разложений Тейлора–Ито

В данном разделе приведем формулировку теоремы о слабой сходимости разложения Тейлора–Ито в форме Вагнера и Платена, кото-

рая сформулирована и доказана в [86] (предложение 5.11.1. С.211–221), а также формулировки соответствующих утверждений для унифицированных разложений Тейлора–Ито.

Обозначим через $C^l(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^1)$ пространство l раз непрерывно дифференцируемых функций $g(\mathbf{x}) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^1$, которые вместе со своими частными производными до порядка l включительно возрастают полиномиально (функция $f(\mathbf{x}) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^1$ возрастает полиномиально, если существуют постоянные $C_f > 0$ и $q_f \in N$, зависящие от $f(\mathbf{x})$ и такие, что для всех $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : |f(\mathbf{x})| \leq C_f(1 + |\mathbf{x}|^{2q_f})$).

Рассмотрим стохастическое дифференциальное уравнение Ито (1.35) в автономном случае, т. е. когда $\mathbf{a}(\mathbf{x}, t) \equiv \mathbf{a}(\mathbf{x}) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$, $\Sigma(\mathbf{x}, t) \equiv \Sigma(\mathbf{x}) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^{n \times m}$, с начальным условием $\mathbf{x}_0$.

Через $\mathbf{x}_{s,t}^{(r)}$ обозначим усеченное разложение Тейлора–Ито в форме Вагнера и Платена при $R(\mathbf{x}, t) \equiv \mathbf{x}$ вида

$$\mathbf{x}_{s,t}^{(r)} = \mathbf{x}_t + \sum_{k=1}^r \sum_{(\lambda_k, \dots, \lambda_1) \in \mathcal{M}_k} {}^{(p_k)}Q_{\lambda_k} \dots Q_{\lambda_1} \{\mathbf{x}_t\} \cdot {}^{p_k} J_{(\lambda_k \dots \lambda_1)_{s,t}}, \quad (4.94)$$

где

$$\mathcal{M}_k = \{(\lambda_k, \dots, \lambda_1) : \lambda_l \in \{0, 1\}; l = 1, \dots, k\}.$$

Остальные обозначения, входящие в (4.94), такие же, как в (4.12).

Теорема 4.16 (предложение 5.11.1, [86]. С.211). Пусть $r \in \{1, 2, \dots\}$ и $T \in (0, \infty)$ фиксированы, а функции $\mathbf{a}^{(i)}(\mathbf{x})$, $\Sigma^{(ij)}(\mathbf{x})$, $i = 1, \dots, n$; $j = 1, \dots, t$, удовлетворяют условиям AI, AII (теорема 1.6) и принадлежат пространству $C^{2(r+1)}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^1)$. Тогда для любой функции $g \in C^{2(r+1)}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^1)$ существуют постоянные $K \in (0, \infty)$ и $q \in N$ такие, что

$$\sup_{0 \leq t \leq T} \left| \mathbb{M} \left\{ g(\mathbf{x}_t) - g(\mathbf{x}_t^{(r)}) | \mathcal{F}_0 \right\} \right| \leq K(1 + |\mathbf{x}_0|^{2q})T^{r+1},$$

где $\mathbf{x}_{t,0}^{(r)} \stackrel{\text{def}}{=} \mathbf{x}_t^{(r)}$; $\mathbf{x}_t$ — решение стохастического дифференциального уравнения Ито (1.35) в автономном случае с начальным условием $\mathbf{x}_0$.

Доказательство теоремы 4.16 дано в [86].

Сформулируем теперь аналог теоремы 4.16 для унифицированных разложений Тейлора–Ито.

Обозначим через $\tilde{\mathbf{x}}_{s,t}^{(r)}$, $\hat{\mathbf{x}}_{s,t}^{(r)}$ усеченные унифицированные разложения Тейлора–Ито

$$\tilde{\mathbf{x}}_{s,t}^{(r)} = \mathbf{x}_t + \sum_{q=1}^r \sum_{(k,j,l_1,\dots,l_k) \in \mathcal{A}_q} \frac{(s-t)^j}{j!} {}^{(k)}L^j G_{l_1} \dots G_{l_k} \{\mathbf{x}_t\} \cdot {}^{(k)}J_{l_1 \dots l_{k,s,t}}, \quad (4.95)$$

$$\hat{\mathbf{x}}_{s,t}^{(r)} = \mathbf{x}_t + \sum_{q=1}^r \sum_{(k,j,l_1,\dots,l_k) \in \mathcal{A}_q} \frac{(s-t)^j}{j!} {}^{(k)}G_{l_1} \dots G_{l_k} L^j \{\mathbf{x}_t\} \cdot {}^{(k)}I_{l_1 \dots l_{k,s,t}}, \quad (4.96)$$

$${}^{(k)}J_{l_1 \dots l_{k,s,t}} = \left\| J_{l_1 \dots l_{k,s,t}}^{(i_1 \dots i_k)} \right\|_{i_1, \dots, i_k=1}^m, \quad {}^{(k)}I_{l_1 \dots l_{k,s,t}} = \left\| I_{l_1 \dots l_{k,s,t}}^{(i_1 \dots i_k)} \right\|_{i_1, \dots, i_k=1}^m,$$

$$\mathcal{A}_q = \left\{ (k, j, l_1, \dots, l_k) : k + j + \sum_{p=1}^k l_p = q; \quad k, j, l_1, \dots, l_k = 0, 1, \dots \right\}.$$

Остальные обозначения, входящие в (4.95) и (4.96) такие же, как в (4.30) и (4.55) соответственно.

Теорема 4.17. Пусть выполнены условия теоремы 4.16. Тогда существуют такие постоянные $K \in (0, \infty)$ и $q \in N$, что

$$\sup_{0 \leq t \leq T} \left| \mathbb{M} \left\{ g(\mathbf{x}_t) - g(\tilde{\mathbf{x}}_t^{(r)}) | \mathcal{F}_0 \right\} \right| \leq K(1 + |\mathbf{x}_0|^{2q}) T^{r+1},$$

$$\sup_{0 \leq t \leq T} \left| \mathbb{M} \left\{ g(\mathbf{x}_t) - g(\hat{\mathbf{x}}_t^{(r)}) | \mathcal{F}_0 \right\} \right| \leq K(1 + |\mathbf{x}_0|^{2q}) T^{r+1},$$

где $\tilde{\mathbf{x}}_{t,0}^{(r)} \stackrel{\text{def}}{=} \tilde{\mathbf{x}}_t^{(r)}$; $\hat{\mathbf{x}}_{t,0}^{(r)} \stackrel{\text{def}}{=} \hat{\mathbf{x}}_t^{(r)}$; $\mathbf{x}_t$ — решение стохастического дифференциального уравнения Ито (1.35) в автономном случае с начальным условием $\mathbf{x}_0$.

Доказательство теоремы 4.17 следует из того, что в условиях теоремы 4.16

$$\tilde{\mathbf{x}}_{s,t}^{(r)} = \hat{\mathbf{x}}_{s,t}^{(r)} = \mathbf{x}_{s,t}^{(r)} \text{ с в.1 для всех } 0 \leq t \leq s \leq T.$$

4.9 Разложения Тейлора–Ито для решений некоторых стохастических дифференциальных уравнений Ито

Сначала приведем примеры разложений Тейлора–Ито для решений скалярных стохастических дифференциальных уравнений Ито. Положим

$$I_{l_1 \dots l_{k,s,t}} = \begin{cases} \int_t^s (t - \tau_k)^{l_k} \dots \int_t^{t_2} (t - \tau_1)^{l_1} df_{\tau_1} \dots df_{\tau_k} & \text{при } k > 0, \\ 1 & \text{при } k = 0, \end{cases}$$

где $f_t \in \mathbb{R}^1$ — стандартный винеровский процесс.

Рассмотрим стохастическое дифференциальное уравнение Ито вида

$$dx_t = ax_t dt + bx_t df_t, \quad x_0 = x(0, \omega), \quad (4.97)$$

где $x_t = x(t, \omega) \in \mathbb{R}^1$ — случайный процесс, определенный на промежутке $[0, T]$ и являющийся решением стохастического дифференциального уравнения Ито (4.97); $a, b \in \mathbb{R}^1$ — постоянные; $f_t \in \mathbb{R}^1$ — стандартный скалярный винеровский процесс.

Пример 4.1. Унифицированное разложение Тейлора–Ито для случайного процесса $R(x_t, t) \equiv x_t$, где x_t — решение стохастического дифференциального уравнения (4.97), до малых $O(t^3)$ в среднеквадратическом смысле при $t \downarrow 0$ имеет вид

$$\begin{aligned} x_t = x_0 \{ & 1 + bI_{0t,0} + at + b^2I_{00t,0} + \\ & + abtI_{0t,0} + b^3I_{000t,0} + 2^{-1}a^2t^2 + \\ & + ab^2tI_{00t,0} + b^4I_{0000t,0} + ab^3tI_{000t,0} + \\ & + 2^{-1}ba^2t^2I_{0t,0} + b^5I_{00000t,0} \} + \\ & + H_{6t,0} \text{ с в.1.} \end{aligned}$$

Отметим, что рассмотренный пример представляет собой случай, когда унифицированное разложение Тейлора–Ито и разложение Тейлора–Ито в форме Вагнера и Платена идентичны.

Рассмотрим линейное стационарное стохастическое дифференциальное уравнение Ито вида

$$dx_t = ax_t dt + bdf_t, \quad x_0 = x(0, \omega), \quad (4.98)$$

где $x_t = x(t, \omega) \in \mathbb{R}^1$ — случайный процесс, определенный на промежутке $[0, T]$ как решение стохастического дифференциального уравнения Ито (4.98); $a, b \in \mathbb{R}^1$ — постоянные; $f_t \in \mathbb{R}^1$ — стандартный скалярный винеровский процесс.

Пример 4.2. Унифицированное разложение Тейлора–Ито для случайного процесса $R(x_t, t) \equiv x_t$, где x_t — решение стохастического дифференциального уравнения (4.98), до малых $O(t^{r+1})$ в среднеквадратическом смысле при $t \downarrow 0$ имеет вид

$$x_t = \sum_{j=0}^r \frac{a^j (s-t)^j}{j!} x_t + b \sum_{l=0}^r \frac{a^l}{l!} I_{lt,0} + H_{r+1t,0} \text{ с в.1.} \quad (4.99)$$

Вместе с тем решение стохастического дифференциального уравнения Ито (4.98) определяется равенством

$$x_t = x_0 e^{at} + b \int_0^t e^{a(t-\tau)} df_\tau. \quad (4.100)$$

Если разложить экспоненты, входящие в (4.100), с помощью стандартной формулы Тейлора, то также получим разложение Тейлора–Ито (4.99).

Рассмотрим стохастическое дифференциальное уравнение Ито

$$dx_t = a \sin x_t df_t, \quad x_0 = x(0, \omega), \quad (4.101)$$

где $x_t = x(t, \omega) \in \mathbb{R}^1$ — случайный процесс, определенный на промежутке $[0, T]$ и являющийся решением стохастического дифференциального уравнения Ито (4.101); $a \in \mathbb{R}^1$ — постоянная; $f_t \in \mathbb{R}^1$ — стандартный скалярный винеровский процесс.

Пример 4.3. Унифицированное разложение Тейлора–Ито для случайного процесса $R(x_s, s) \equiv x_s$, где x_s — решение стохастического дифференциального уравнения (4.101), до малых $O((s-t)^3)$ в средне-квадратическом смысле при $s \downarrow t$ имеет вид

$$\begin{aligned} x_s = x_t &+ a \sin x_t I_{0s,t} - \frac{a^3}{4} (\sin 3x_t - 3 \sin x_t) I_{1s,t} + \\ &+ \frac{a^4}{8} (-6 \sin 2x_t - 3 \sin 4x_t + 4 \sin 6x_t) I_{10s,t} - \\ &- \frac{3}{8} a^4 (2 \sin 2x_t - \sin 4x_t) I_{01s,t} - \frac{a^2}{2} \sin 2x_t I_{00s,t} + \\ &+ \frac{a^3}{2} (\sin 3x_t - 3 \sin x_t) I_{000s,t} + \\ &+ \frac{a^5}{32} (9 \sin 9x_t - 30 \sin 3x_t + 9 \sin x_t) I_{2s,t} - \\ &- \frac{3a^5}{4} (\sin 5x_t - 2 \sin 3x_t + \sin x_t) I_{001s,t} - \\ &- \frac{a^5}{8} (9 \sin 9x_t - 12 \sin 7x_t + 12 \sin 5x_t - 16 \sin 3x_t + 9 \sin x_t) I_{100s,t} + \\ &+ \frac{3a^5}{8} (6 \sin 5x_t - 2 \sin x_t - 4 \sin 7x_t) I_{010s,t} + \\ &+ \frac{a^4}{4} (4 \sin 2x_t - 3 \sin 4x_t) I_{0000s,t} + \\ &+ \frac{a^5}{2} (-5 \sin 3x_t + 2 \sin x_t + 3 \sin 5x_t) I_{00000s,t} + \\ &+ H_{6s,t} \quad \text{с в.1.} \end{aligned}$$

Приведем примеры многомерных стохастических систем и разложений Тейлора–Ито их решений.

Рассмотрим стохастический вариант уравнения Матье в форме

$$\frac{d^2\varphi_t}{dt^2} + \varepsilon^2 \frac{d\varphi_t}{dt} + \left(c + \varepsilon \mathbf{f}_t^{(1)}\right) \varphi_t = \mathbf{f}_t^{(2)}, \quad (4.102)$$

где $\varphi_t \in \mathbb{R}^1$ — случайный процесс, являющийся решением уравнения (4.102); $\mathbf{f}_t^{(1)}$ и $\mathbf{f}_t^{(2)}$ — скалярные независимые гауссовские белые шумы; c и ε — постоянные. Перепишем (4.102) в форме стохастического дифференциального уравнения Ито:

$$d \begin{bmatrix} \mathbf{x}_t^{(1)} \\ \mathbf{x}_t^{(2)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{x}_t^{(2)} \\ -c\mathbf{x}_t^{(1)} - \varepsilon^2 \mathbf{x}_t^{(2)} \end{bmatrix} dt + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -\varepsilon \mathbf{x}_t^{(1)} & 1 \end{bmatrix} d \begin{bmatrix} \mathbf{f}_t^{(1)} \\ \mathbf{f}_t^{(2)} \end{bmatrix}, \quad (4.103)$$

где $\mathbf{x}_t^{(1)} = \varphi_t$; $\mathbf{x}_t^{(2)} = \frac{d\varphi_t}{dt}$; $\mathbf{f}_t^{(1)}$ и $\mathbf{f}_t^{(2)}$ — скалярные независимые стандартные винеровские процессы.

Пример 4.4. Унифицированное разложение Тейлора–Ито для компонент $\mathbf{x}_s^{(1)}$ и $\mathbf{x}_s^{(2)}$ решения системы (4.103) до малых $O((s-t)^{\frac{5}{2}})$ в среднеквадратическом смысле при $s \downarrow t$ имеет вид

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_s^{(1)} &= \mathbf{x}_t^{(1)} + (s-t)\mathbf{x}_t^{(2)} - \varepsilon \mathbf{x}_t^{(1)} I_{1s,t}^{(1)} + I_{1s,t}^{(2)} - \\ &\quad - \varepsilon(s-t)\mathbf{x}_t^{(1)} I_{0s,t}^{(1)} + (s-t)I_{0s,t}^{(2)} + \\ &\quad + \frac{(s-t)^2}{2} \left(-c\mathbf{x}_t^{(1)} - \varepsilon^2 \mathbf{x}_t^{(2)}\right) + H_{5s,t}^{(1)} \text{ с в.1,} \\ \mathbf{x}_s^{(2)} &= \mathbf{x}_t^{(2)} - \varepsilon \mathbf{x}_t^{(1)} I_{0s,t}^{(1)} + I_{0s,t}^{(2)} + (s-t) \left(-c\mathbf{x}_t^{(1)} - \varepsilon^2 \mathbf{x}_t^{(2)}\right) + \\ &\quad + \left(\varepsilon \mathbf{x}_t^{(2)} + \varepsilon^3 \mathbf{x}_t^{(1)}\right) I_{1s,t}^{(1)} - \varepsilon^2 I_{1s,t}^{(2)} + \varepsilon^3 (s-t) \mathbf{x}_t^{(1)} I_{0s,t}^{(1)} - \varepsilon^2 (s-t) I_{0s,t}^{(2)} + \\ &\quad + \frac{(s-t)^2}{2} \left(-c\mathbf{x}_t^{(2)} + \varepsilon^2 \left(c\mathbf{x}_t^{(1)} + \varepsilon^2 \mathbf{x}_t^{(2)}\right)\right) - \varepsilon^2 \mathbf{x}_t^{(1)} I_{01s,t}^{(11)} + \\ &\quad + \varepsilon I_{01s,t}^{(21)} + \varepsilon^2 \mathbf{x}_t^{(1)} I_{10s,t}^{(11)} - \varepsilon I_{10s,t}^{(21)} + H_{5s,t}^{(2)} \text{ с в.1.} \end{aligned}$$

Рассмотрим систему уравнений Лоренца [34] со стохастическим возмущением в форме многомерного стохастического дифференциального уравнения Ито:

$$d \begin{bmatrix} \mathbf{x}_t^{(1)} \\ \mathbf{x}_t^{(2)} \\ \mathbf{x}_t^{(3)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -a\mathbf{x}_t^{(1)} + a\mathbf{x}_t^{(2)} \\ r\mathbf{x}_t^{(1)} - \mathbf{x}_t^{(2)} - \mathbf{x}_t^{(1)} \mathbf{x}_t^{(3)} \\ -b\mathbf{x}_t^{(3)} + \mathbf{x}_t^{(1)} \mathbf{x}_t^{(2)} \end{bmatrix} dt + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & c \end{bmatrix} d \begin{bmatrix} \mathbf{f}_t^{(1)} \\ \mathbf{f}_t^{(2)} \\ \mathbf{f}_t^{(3)} \end{bmatrix}, \quad (4.104)$$

где $\mathbf{x}_t^{(1)}$, $\mathbf{x}_t^{(2)}$, $\mathbf{x}_t^{(3)}$ — компоненты решения $\mathbf{x}_t \in \mathbb{R}^3$ уравнения (4.104); $\mathbf{f}_t^{(i)}$, $i = 1, 2, 3$, — скалярные стандартные независимые винеровские процессы; a , r , b , c — постоянные.

Пример 4.5. Унифицированное разложение Тейлора–Ито для компонент $\mathbf{x}_s^{(1)}$, $\mathbf{x}_s^{(2)}$ и $\mathbf{x}_s^{(3)}$ решения системы (4.104) до малых $O((s-t)^{\frac{7}{2}})$ в среднеквадратическом смысле при $s \downarrow t$ имеет вид

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_s^{(1)} = & \mathbf{x}_t^{(1)} + a(s-t) \left(-\mathbf{x}_t^{(1)} + \mathbf{x}_t^{(2)} \right) + \\ & + a \frac{(s-t)^2}{2} \left[-a \left(-\mathbf{x}_t^{(1)} + \mathbf{x}_t^{(2)} \right) + r\mathbf{x}_t^{(1)} - \mathbf{x}_t^{(2)} - \mathbf{x}_t^{(1)}\mathbf{x}_t^{(3)} \right] - \\ & - ac\mathbf{x}_t^{(1)} \left[\frac{(s-t)^2}{2} I_{0,s,t}^{(3)} + (s-t)I_{1,s,t}^{(3)} + \frac{1}{2}I_{2,s,t}^{(3)} \right] + \\ & + a \frac{(s-t)^3}{6} \left[a \left(-\mathbf{x}_t^{(1)} + \mathbf{x}_t^{(2)} \right) \left(a + r - \mathbf{x}_t^{(3)} \right) - \right. \\ & \left. - (a+1) \left(r\mathbf{x}_t^{(1)} - \mathbf{x}_t^{(2)} - \mathbf{x}_t^{(1)}\mathbf{x}_t^{(3)} \right) - \mathbf{x}_t^{(1)} \left(-b\mathbf{x}_t^{(3)} + \mathbf{x}_t^{(1)}\mathbf{x}_t^{(2)} \right) \right] + H_{7,s,t}^{(1)} \text{ с в.1,} \end{aligned} \quad (4.105)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_s^{(2)} = & \mathbf{x}_t^{(2)} + (s-t) \left(r\mathbf{x}_t^{(1)} - \mathbf{x}_t^{(2)} - \mathbf{x}_t^{(1)}\mathbf{x}_t^{(3)} \right) - c\mathbf{x}_t^{(1)} \left(I_{1,s,t}^{(3)} + (s-t)I_{0,s,t}^{(3)} \right) + \\ & + \frac{(s-t)^2}{2} \left[a \left(-\mathbf{x}_t^{(1)} + \mathbf{x}_t^{(2)} \right) \left(r - \mathbf{x}_t^{(3)} \right) - r\mathbf{x}_t^{(1)} + \mathbf{x}_t^{(2)} + \right. \\ & \left. + \mathbf{x}_t^{(1)}\mathbf{x}_t^{(3)} - \mathbf{x}_t^{(1)} \left(-b\mathbf{x}_t^{(3)} + \mathbf{x}_t^{(1)}\mathbf{x}_t^{(2)} \right) \right] + \\ & + \left(a \left(\mathbf{x}_t^{(1)} - \mathbf{x}_t^{(2)} \right) + c(1+b)\mathbf{x}_t^{(1)} \right) \left[\frac{(s-t)^2}{2} I_{0,s,t}^{(3)} + (s-t)I_{1,s,t}^{(3)} + \frac{1}{2}I_{2,s,t}^{(3)} \right] + \\ & + ac \left(-\mathbf{x}_t^{(1)} + \mathbf{x}_t^{(2)} \right) \left(I_{2,s,t}^{(3)} + (s-t)I_{1,s,t}^{(3)} \right) + \\ & + \frac{(s-t)^3}{6} \left\{ a \left(-\mathbf{x}_t^{(1)} + \mathbf{x}_t^{(2)} \right) \left[- (a+1) \left(r - \mathbf{x}_t^{(3)} \right) + b\mathbf{x}_t^{(3)} - 2\mathbf{x}_t^{(1)}\mathbf{x}_t^{(2)} \right] + \right. \\ & \left. + \left(r\mathbf{x}_t^{(1)} - \mathbf{x}_t^{(2)} - \mathbf{x}_t^{(1)}\mathbf{x}_t^{(3)} \right) \left(\left(r - \mathbf{x}_t^{(3)} \right) a + 1 - \left(\mathbf{x}_t^{(1)} \right)^2 \right) + \right. \\ & \left. + \left(-b\mathbf{x}_t^{(3)} + \mathbf{x}_t^{(1)}\mathbf{x}_t^{(2)} \right) \left(a \left(\mathbf{x}_t^{(1)} - \mathbf{x}_t^{(2)} \right) + \mathbf{x}_t^{(1)}(1+b) \right) \right\} + H_{7,s,t}^{(2)} \text{ с в.1,} \end{aligned} \quad (4.106)$$

$$\mathbf{x}_s^{(3)} = \mathbf{x}_t^{(3)} + cI_{0,s,t}^{(3)} + (s-t) \left(-b\mathbf{x}_t^{(3)} + \mathbf{x}_t^{(1)}\mathbf{x}_t^{(2)} \right) - bc \left(I_{1,s,t}^{(3)} + (s-t)I_{0,s,t}^{(3)} \right) +$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{(s-t)^2}{2} \left[a \left(-\mathbf{x}_t^{(1)} + \mathbf{x}_t^{(2)} \right) \mathbf{x}_t^{(2)} + \left(r\mathbf{x}_t^{(1)} - \mathbf{x}_t^{(2)} - \mathbf{x}_t^{(1)} \mathbf{x}_t^{(3)} \right) \mathbf{x}_t^{(1)} - \right. \\
& \quad \left. - b \left(-b\mathbf{x}_t^{(3)} + \mathbf{x}_t^{(1)} \mathbf{x}_t^{(2)} \right) \right] + \\
& + c \left(b^2 - \left(\mathbf{x}_t^{(1)} \right)^2 \right) \left[\frac{(s-t)^2}{2} I_{0,s,t}^{(3)} + (s-t) I_{1,s,t}^{(3)} + \frac{1}{2} I_{2,s,t}^{(3)} \right] + \\
& + \frac{(s-t)^3}{6} \left[a \left(-\mathbf{x}_t^{(1)} + \mathbf{x}_t^{(2)} \right) \left(-a\mathbf{x}_t^{(2)} + r\mathbf{x}_t^{(1)} - \mathbf{x}_t^{(2)} - \right. \right. \\
& \quad \left. \left. - \mathbf{x}_t^{(1)} \mathbf{x}_t^{(3)} + \mathbf{x}_t^{(1)} \left(r - \mathbf{x}_t^{(3)} \right) - b\mathbf{x}_t^{(2)} \right) + \right. \\
& + \left(r\mathbf{x}_t^{(1)} - \mathbf{x}_t^{(2)} - \mathbf{x}_t^{(1)} \mathbf{x}_t^{(3)} \right) \left(-a\mathbf{x}_t^{(1)} + 2a\mathbf{x}_t^{(2)} - (1+b)\mathbf{x}_t^{(1)} \right) + \\
& \left. + \left(-b\mathbf{x}_t^{(3)} + \mathbf{x}_t^{(1)} \mathbf{x}_t^{(2)} \right) \left(b^2 - \left(\mathbf{x}_t^{(1)} \right)^2 \right) \right] + H_{7,s,t}^{(3)} \text{ с в.1.} \quad (4.107)
\end{aligned}$$

Рассмотрим систему уравнений Ресслера [45] со стохастическим возмущением в виде следующей системы стохастических дифференциальных уравнений Ито:

$$d \begin{bmatrix} \mathbf{x}_t^{(1)} \\ \mathbf{x}_t^{(2)} \\ \mathbf{x}_t^{(3)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\mathbf{x}_t^{(2)} - \mathbf{x}_t^{(3)} \\ \mathbf{x}_t^{(1)} + e\mathbf{x}_t^{(2)} \\ f + \mathbf{x}_t^{(1)} \mathbf{x}_t^{(3)} - \mu\mathbf{x}_t^{(3)} \end{bmatrix} dt + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -c\mathbf{x}_t^{(3)} \end{bmatrix} d\mathbf{f}_t^{(1)}, \quad (4.108)$$

где $\mathbf{x}_t^{(1)}, \mathbf{x}_t^{(2)}, \mathbf{x}_t^{(3)} \in \mathbb{R}^1$ — компоненты решения $\mathbf{x}_t \in \mathbb{R}^3$ системы (4.108); $\mathbf{f}_t^{(1)} \in \mathbb{R}^1$ — стандартный винеровский процесс; e, f, μ, c — постоянные.

Пример 4.6. Унифицированное разложение Тейлора–Ито для компонент решения $\mathbf{x}_s$ системы (4.108) до малых порядка $O\left((s-t)^{\frac{5}{2}}\right)$ в среднеквадратическом смысле при $s \downarrow t$ имеет вид

$$\begin{aligned}
\mathbf{x}_s^{(1)} = & \mathbf{x}_t^{(1)} + (s-t) \left(-\mathbf{x}_t^{(2)} - \mathbf{x}_t^{(3)} \right) + c\mathbf{x}_t^{(3)} \left[(s-t) I_{0,s,t}^{(1)} + I_{1,s,t}^{(1)} \right] + \\
& + \frac{(s-t)^2}{2} \left[-\mathbf{x}_t^{(1)} - e\mathbf{x}_t^{(2)} - f - \mathbf{x}_t^{(1)} \mathbf{x}_t^{(3)} + \mu\mathbf{x}_t^{(3)} \right] - \\
& - c^2 \mathbf{x}_t^{(3)} \left[I_{01,s,t}^{(11)} + (s-t) I_{00,s,t}^{(11)} \right] + H_{5,s,t}^{(1)} \text{ с в.1,} \quad (4.109)
\end{aligned}$$

$$\mathbf{x}_s^{(2)} = \mathbf{x}_t^{(2)} + (s-t) \left(\mathbf{x}_t^{(1)} + e\mathbf{x}_t^{(2)} \right) + \frac{(s-t)^2}{2} \left[-\mathbf{x}_t^{(2)} - \mathbf{x}_t^{(3)} + \right.$$

$$+e\left(\mathbf{x}_t^{(1)} + e\mathbf{x}_t^{(2)}\right)\Big] + H_{5_{s,t}}^{(2)} \text{ с в.1,} \quad (4.110)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_s^{(3)} = & \mathbf{x}_t^{(3)} - c\mathbf{x}_t^{(3)} I_{0_{s,t}}^{(1)} + (s-t) \left(f + \mathbf{x}_t^{(1)} \mathbf{x}_t^{(3)} - \mu \mathbf{x}_t^{(3)} \right) + \\ & + c^2 \mathbf{x}_t^{(3)} I_{00_{s,t}}^{(11)} + c\mathbf{x}_t^{(3)} \left(\mu - \mathbf{x}_t^{(1)} \right) \left[(s-t) I_{0_{s,t}}^{(1)} + I_{1_{s,t}}^{(1)} \right] + \\ & + c \left(f + \mathbf{x}_t^{(1)} \mathbf{x}_t^{(3)} - \mu \mathbf{x}_t^{(3)} \right) I_{1_{s,t}}^{(1)} - c^3 \mathbf{x}_t^{(3)} I_{000_{s,t}}^{(111)} + \\ & + \frac{(s-t)^2}{2} \left[\left(-\mathbf{x}_t^{(2)} - \mathbf{x}_t^{(3)} \right) \mathbf{x}_t^{(3)} + \right. \\ & + \left. \left(f + \mathbf{x}_t^{(1)} \mathbf{x}_t^{(3)} - \mu \mathbf{x}_t^{(3)} \right) \left(\mathbf{x}_t^{(1)} - \mu \right) \right] + \\ & + c^2 \mathbf{x}_t^{(3)} \left(\mathbf{x}_t^{(1)} - \mu \right) \left[I_{10_{s,t}}^{(11)} - I_{01_{s,t}}^{(11)} \right] - \\ & - c^2 \left(f + \mathbf{x}_t^{(1)} \mathbf{x}_t^{(3)} - \mu \mathbf{x}_t^{(3)} \right) I_{10_{s,t}}^{(11)} - \\ & - c^2 \mathbf{x}_t^{(3)} \left(\mu - \mathbf{x}_t^{(1)} \right) \left[I_{01_{s,t}}^{(11)} + (s-t) I_{00_{s,t}}^{(11)} \right] + \\ & + c^4 \mathbf{x}_t^{(3)} I_{0000_{s,t}}^{(1111)} + H_{5_{s,t}}^{(3)} \text{ с в.1.} \end{aligned} \quad (4.111)$$

Рассмотрим стохастический вариант модели Лотки–Вольтерра, отражающей динамику численностей двух конкурирующих видов животных или динамику концентраций двух реагентов:

$$d \begin{bmatrix} \mathbf{x}_t^{(1)} \\ \mathbf{x}_t^{(2)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \left(k_1 + a_1 \mathbf{x}_t^{(2)} \right) \mathbf{x}_t^{(1)} \\ \left(k_2 + a_2 \mathbf{x}_t^{(1)} \right) \mathbf{x}_t^{(2)} \end{bmatrix} dt + \begin{bmatrix} \sigma_1 \mathbf{x}_t^{(1)} & 0 \\ 0 & \sigma_2 \mathbf{x}_t^{(2)} \end{bmatrix} d \begin{bmatrix} \mathbf{f}_t^{(1)} \\ \mathbf{f}_t^{(2)} \end{bmatrix},$$

где $\mathbf{x}_t^{(1)}$, $\mathbf{x}_t^{(2)}$ — численность видов животных (концентрация реагентов); k_1, k_2 — коэффициенты роста численности видов животных (концентрации реагентов); a_1, a_2 — коэффициенты их смертности (уменьшения концентрации реагентов); σ_1, σ_2 — коэффициенты, характеризующие степень влияния случайных факторов на систему; $\mathbf{f}_t^{(1)}$, $\mathbf{f}_t^{(2)}$ — скалярные стандартные независимые винеровские процессы.

Пример 4.7. Унифицированное разложение Тейлора–Ито до малых $O((s-t)^2)$ в среднеквадратическом смысле при $s \downarrow t$ для процессов $\mathbf{x}_s^{(1)}$, $\mathbf{x}_s^{(2)}$ имеет вид

$$\mathbf{x}_s^{(1)} = \mathbf{x}_t^{(1)} \left[1 + \left(k_1 + a_1 \mathbf{x}_t^{(2)} \right) (s-t) + \right.$$

$$\begin{aligned}
& +\sigma_1 \left(k_1 + a_1 \mathbf{x}_t^{(2)} \right) \left((s-t)I_{0s,t}^{(1)} + 2I_{1s,t}^{(1)} \right) + \\
& + a_1 \sigma_2 \mathbf{x}_t^{(2)} \left((s-t)I_{0s,t}^{(2)} + I_{1s,t}^{(2)} \right) + \sigma_1 I_{0s,t}^{(1)} + \\
& + \sigma_1^2 I_{00s,t}^{(11)} + \sigma_1^3 I_{000s,t}^{(111)} \Big] + H_{4s,t}^{(1)} \text{ c.в.1,} \\
& \mathbf{x}_s^{(2)} = \mathbf{x}_t^{(2)} \left[1 + \left(k_2 + a_2 \mathbf{x}_t^{(1)} \right) (s-t) + \right. \\
& + \sigma_2 \left(k_2 + a_2 \mathbf{x}_t^{(1)} \right) \left((s-t)I_{0s,t}^{(2)} + 2I_{1s,t}^{(2)} \right) + \\
& + a_2 \sigma_1 \mathbf{x}_t^{(1)} \left((s-t)I_{0s,t}^{(1)} + I_{1s,t}^{(1)} \right) + \sigma_2 I_{0s,t}^{(2)} + \\
& \left. + \sigma_2^2 I_{00s,t}^{(22)} + \sigma_2^3 I_{000s,t}^{(222)} \right] + H_{4s,t}^{(2)} \text{ c.в.1.}
\end{aligned}$$

4.10 Заключение

Рассмотрим стохастическое дифференциальное уравнение Ито

$$d\mathbf{x}_t = \mathbf{a}(\mathbf{x}_t, t)dt + \Sigma(\mathbf{x}_t, t)d\mathbf{f}_t, \quad \mathbf{x}_0 = \mathbf{x}(0, \omega), \quad (4.112)$$

где $\mathbf{x}_t \in \mathbb{R}^n$ — случайный процесс, являющийся решением уравнения (4.112); неслучайные функции $\mathbf{a}(\mathbf{x}, t) : \mathbb{R}^n \times [0, T] \rightarrow \mathbb{R}^n$, $\Sigma(\mathbf{x}, t) : \mathbb{R}^n \times [0, T] \rightarrow \mathbb{R}^{n \times m}$ удовлетворяют условиям AI–AIII (теорема 1.6) существования и единственности в смысле стохастической эквивалентности решения уравнения (4.112); $\mathbf{f}_t \in \mathbb{R}^m$ — $\mathcal{F}_t$ -измеримый при всех $t \in [0, T]$ стандартный векторный винеровский процесс с независимыми компонентами $\mathbf{f}_t^{(i)}$, $i = 1, \dots, m$; случайная величина $\mathbf{x}_0 \in \mathbb{R}^n$ стохастически не зависит от приращений $\mathbf{f}_t - \mathbf{f}_0$ при $t > 0$.

Из предыдущих разделов данной главы следует, что при определенных условиях, налагаемых на функции $\mathbf{a}(\mathbf{x}, t)$, $\Sigma(\mathbf{x}, t)$ и $R(\mathbf{x}, t)$, для решения стохастического дифференциального уравнения Ито (4.112) справедливы четыре унифицированных разложения Тейлора–Ито и Тейлора–Стратоновича вида

$$\begin{aligned}
R(\mathbf{x}_s, s) &= R(\mathbf{x}_t, t) + \sum_{q=1}^r \sum_{(k,j,l_1,\dots,l_k) \in \mathcal{A}_q} \frac{(s-t)^j}{j!} \times \\
&\times \sum_{i_1,\dots,i_k=1}^m L^j G_{l_1}^{(i_1)} \dots G_{l_k}^{(i_k)} R(\mathbf{x}_t, t) J_{l_1 \dots l_{ks,t}}^{(i_1 \dots i_k)} + D_{r+1s,t}
\end{aligned} \quad (4.113)$$

(1-е унифицированное разложение Тейлора–Ито),

$$R(\mathbf{x}_s, s) = R(\mathbf{x}_t, t) + \sum_{q=1}^r \sum_{(k,j,l_1,\dots,l_k) \in \mathcal{A}_q} \frac{(s-t)^j}{j!} \times \\ \times \sum_{i_1,\dots,i_k=1}^m G_{l_1}^{(i_1)} \dots G_{l_k}^{(i_k)} L^j R(\mathbf{x}_t, t) I_{l_1 \dots l_{ks,t}}^{(i_1 \dots i_k)} + D_{r+1,s,t} \quad (4.114)$$

(2-е унифицированное разложение Тейлора–Ито),

$$R(\mathbf{x}_s, s) = R(\mathbf{x}_t, t) + \sum_{q=1}^r \sum_{(k,j,l_1,\dots,l_k) \in \mathcal{A}_q} \frac{(s-t)^j}{j!} \times \\ \times \sum_{i_1,\dots,i_k=1}^m \bar{L}^j \bar{G}_{l_1}^{(i_1)} \dots \bar{G}_{l_k}^{(i_k)} R(\mathbf{x}_t, t) J_{l_1 \dots l_{ks,t}}^{*(i_1 \dots i_k)} + D_{r+1,s,t} \quad (4.115)$$

(1-е унифицированное разложение Тейлора–Стратоновича),

$$R(\mathbf{x}_s, s) = R(\mathbf{x}_t, t) + \sum_{q=1}^r \sum_{(k,j,l_1,\dots,l_k) \in \mathcal{A}_q} \frac{(s-t)^j}{j!} \times \\ \times \sum_{i_1,\dots,i_k=1}^m \bar{G}_{l_1}^{(i_1)} \dots \bar{G}_{l_k}^{(i_k)} \bar{L}^j R(\mathbf{x}_t, t) I_{l_1 \dots l_{ks,t}}^{*(i_1 \dots i_k)} + D_{r+1,s,t} \quad (4.116)$$

(2-е унифицированное разложение Тейлора–Стратоновича),

общие члены которых содержат в качестве множителей повторные стохастические интегралы Ито и Стратоновича вида

$$I_{l_1 \dots l_{ks,t}}^{(i_1 \dots i_k)} = \int_t^s (t - t_k)^{l_k} \dots \int_t^{t_2} (t - t_1)^{l_1} d\mathbf{f}_{t_1}^{(i_1)} \dots d\mathbf{f}_{t_k}^{(i_k)}, \quad (4.117)$$

$$J_{l_1 \dots l_{ks,t}}^{(i_1 \dots i_k)} = \int_t^s (s - t_k)^{l_k} \dots \int_t^{t_2} (s - t_1)^{l_1} d\mathbf{f}_{t_1}^{(i_1)} \dots d\mathbf{f}_{t_k}^{(i_k)}, \quad (4.118)$$

$$I_{l_1 \dots l_{ks,t}}^{*(i_1 \dots i_k)} = \int_t^{*s} (t - t_k)^{l_k} \dots \int_t^{*t_2} (t - t_1)^{l_1} d\mathbf{f}_{t_1}^{(i_1)} \dots d\mathbf{f}_{t_k}^{(i_k)}, \quad (4.119)$$

$$J_{l_1 \dots l_{k,s,t}}^{*(i_1 \dots i_k)} = \int_t^{*s} (s - t_k)^{l_k} \dots \int_t^{*t_2} (s - t_1)^{l_1} d\mathbf{f}_{t_1}^{(i_1)} \dots d\mathbf{f}_{t_k}^{(i_k)}; \quad (4.120)$$

$l_1, \dots, l_k = 0, 1, \dots; k = 1, 2, \dots; i_1, \dots, i_k = 1, \dots, m$; при $k = 0$ эти интегралы в разложениях полагаются равными 1.

Остальные обозначения, введенные в (4.113)–(4.116), следующие

$$\mathcal{A}_q = \left\{ (k, j, l_1, \dots, l_k) : k + j + \sum_{p=1}^k l_p = q; k, j, l_1, \dots, l_k = 0, 1, \dots \right\},$$

$$L^j \stackrel{\text{def}}{=} \begin{cases} \underbrace{L \dots L}_j & \text{при } j = 1, 2, \dots \\ \cdot & \text{при } j = 0 \end{cases}, \quad \bar{L}^j \stackrel{\text{def}}{=} \begin{cases} \underbrace{\bar{L} \dots \bar{L}}_j & \text{при } j = 1, 2, \dots \\ \cdot & \text{при } j = 0 \end{cases},$$

$$G_p^{(i)} \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{p} \left(G_{p-1}^{(i)} L - L G_{p-1}^{(i)} \right), \quad \bar{G}_p^{(i)} \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{p} \left(\bar{G}_{p-1}^{(i)} \bar{L} - \bar{L} \bar{G}_{p-1}^{(i)} \right);$$

$p = 1, 2, \dots; i = 1, \dots, m$;

$$\bar{L} = L - \frac{1}{2} \sum_{i=1}^m G_0^{(i)} G_0^{(i)}, \quad \bar{G}_0^{(i)} = G_0^{(i)};$$

операторы L и $G_0^{(i)}$; $i = 1, \dots, m$ такие же, как в лемме 1.3; $D_{r+1,s,t}$ – остаточный член в интегральной форме.

Кроме того, справедливы [86] разложение Тейлора–Ито в форме Вагнера и Платена и разложение Тейлора–Стратоновича в форме Клоедена и Платена, общие члены которых содержат в качестве множителей повторные стохастические интегралы Ито и Стратоновича

$$J_{(\lambda_k \dots \lambda_1)_{s,t}}^{(i_k \dots i_1)} = \int_t^s \dots \int_t^{t_2} d\mathbf{w}_{t_1}^{(i_k)} \dots d\mathbf{w}_{t_k}^{(i_1)}, \quad (4.121)$$

$$J_{(\lambda_k \dots \lambda_1)_{s,t}}^{*(i_k \dots i_1)} = \int_t^{*T} \dots \int_t^{*t_2} d\mathbf{w}_{t_1}^{(i_k)} \dots d\mathbf{w}_{t_k}^{(i_1)}. \quad (4.122)$$

Здесь $\mathbf{w}_t^{(i_l)} = \mathbf{f}_t^{(i_l)}$ и $\lambda_l = 1$ при $i_l = 1, \dots, m$; $\mathbf{w}_t^{(i_l)} = t$ и $\lambda_l = 0$ при $i_l = 0$; $i_1, \dots, i_k = 0, 1, \dots, m$; $l = 1, \dots, k$.

Теперь становится ясно, что одним из возможных и наиболее перспективных подходов к численному интегрированию стохастических дифференциальных уравнений Ито является подход, основанный на стохастических разложениях решений указанных уравнений.

Например, чтобы получить явный численный метод, достаточно рассмотреть отрезок разложения Тейлора–Ито или Тейлора–Стратоновича на дискретной временной сетке и аппроксимировать специальным образом повторные стохастические интегралы, входящие в него. Однако аппроксимация повторных стохастических интегралов вида (4.117) – (4.122) является сложной задачей, ей, в частности, посвящены главы 5 и 6 данной монографии.

Отметим, что коэффициентные функции унифицированных разложений Тейлора–Ито и Тейлора–Стратоновича определяются ”красивыми” рекуррентными формулами, содержащими множитель

$$\frac{(s - t)^j}{j!},$$

присущий классической формуле Тейлора.

Сравним унифицированные разложения Тейлора–Ито и разложение Тейлора–Ито в форме Вагнера и Платена.

Наиболее важным отличием первых разложений от второго является то, что они содержат существенно меньшее число различных повторных стохастических интегралов Ито, и притом большинство из них имеет меньшую кратность.

Это особенно важно, поскольку проблема совместного численного моделирования повторных стохастических интегралов Ито из разложений Тейлора–Ито, как уже отмечалось, является достаточно сложной.

Рассмотрим, насколько существенно различие в числе различных повторных стохастических интегралов Ито в указанных разложениях.

Если вести суммирование в разложениях по множествам

$$\mathcal{D}_q = \left\{ (k, j, l_1, \dots, l_k) : k + 2(j + \sum_{p=1}^k l_p) = q; \ k, j, l_1, \dots, l_k = 0, 1, \dots \right\}$$

вместо множеств

$$\mathcal{A}_q = \left\{ (k, j, l_1, \dots, l_k) : k + j + \sum_{p=1}^k l_p = q; \ k, j, l_1, \dots, l_k = 0, 1, \dots \right\},$$

то мы получим упорядоченные по порядку малости унифицированные разложения Тейлора–Ито и Тейлора–Стратоновича.

Унифицированное разложение Тейлора–Ито, упорядоченное по порядкам малости, при $r = 3$ содержит четыре различных повторных стохастических интеграла: $I_{0s,t}^{(i_1)}$, $I_{00s,t}^{(i_2 i_1)}$, $I_{1s,t}^{(i_1)}$, $I_{000s,t}^{(i_3 i_2 i_1)}$. В то же

время его аналог в форме Вагнера и Платена [86] содержит пять различных повторных стохастических интегралов: $J_{(1)s,t}^{(i_1)}$, $J_{(11)s,t}^{(i_2 i_1)}$, $J_{(10)s,t}^{(i_2)}$, $J_{(01)s,t}^{(i_1)}$, $J_{(111)s,t}^{(i_3 i_2 i_1)}$.

При $r = 4$ имеем семь различных повторных стохастических интегралов Ито: $I_{0s,t}^{(i_1)}$, $I_{00s,t}^{(i_2 i_1)}$, $I_{1s,t}^{(i_1)}$, $I_{000s,t}^{(i_3 i_2 i_1)}$, $I_{01s,t}^{(i_2 i_1)}$, $I_{10s,t}^{(i_2 i_1)}$, $I_{0000s,t}^{(i_4 i_3 i_2 i_1)}$ против девяти: $J_{(1)s,t}^{(i_1)}$, $J_{(11)s,t}^{(i_2 i_1)}$, $J_{(10)s,t}^{(i_2)}$, $J_{(01)s,t}^{(i_1)}$, $J_{(111)s,t}^{(i_3 i_2 i_1)}$, $J_{(101)s,t}^{(i_3 i_1)}$, $J_{(110)s,t}^{(i_3 i_2)}$, $J_{(011)s,t}^{(i_2 i_1)}$, $J_{(1111)s,t}^{(i_4 i_3 i_2 i_1)}$.

При $r = 5$ имеем соответственно 12 интегралов: $I_{0s,t}^{(i_1)}$, $I_{00s,t}^{(i_2 i_1)}$, $I_{1s,t}^{(i_1)}$, $I_{000s,t}^{(i_3 i_2 i_1)}$, $I_{01s,t}^{(i_2 i_1)}$, $I_{10s,t}^{(i_2 i_1)}$, $I_{0000s,t}^{(i_4 i_3 i_2 i_1)}$, $I_{2s,t}^{(i_1)}$, $I_{010s,t}^{(i_3 i_2 i_1)}$, $I_{100s,t}^{(i_3 i_2 i_1)}$, $I_{001s,t}^{(i_3 i_2 i_1)}$, $I_{00000s,t}^{(i_5 i_4 i_3 i_2 i_1)}$ против 17 интегралов: $J_{(1)s,t}^{(i_1)}$, $J_{(11)s,t}^{(i_2 i_1)}$, $J_{(10)s,t}^{(i_2)}$, $J_{(01)s,t}^{(i_1)}$, $J_{(111)s,t}^{(i_3 i_2 i_1)}$, $J_{(101)s,t}^{(i_3 i_1)}$, $J_{(110)s,t}^{(i_3 i_2)}$, $J_{(011)s,t}^{(i_2 i_1)}$, $J_{(1111)s,t}^{(i_4 i_3 i_2 i_1)}$, $J_{(1110)s,t}^{(i_4 i_3 i_2)}$, $J_{(1101)s,t}^{(i_4 i_3 i_1)}$, $J_{(1011)s,t}^{(i_4 i_2 i_1)}$, $J_{(0111)s,t}^{(i_3 i_2 i_1)}$, $J_{(001)s,t}^{(i_1)}$, $J_{(010)s,t}^{(i_2)}$, $J_{(100)s,t}^{(i_3)}$, $J_{(11111)s,t}^{(i_5 i_4 i_3 i_2 i_1)}$.

При $r = 6$ и $r = 7$ имеем соответственно 20 против 29 и 33 против 51 (т. е. почти в два раза!). Далее различие становится еще более заметным.

Точно такие же результаты получаются при сравнении двух унифицированных разложений Тейлора–Стратоновича с разложением Тейлора–Стратоновича в форме Клоедена и Платена.

С философской точки зрения 4 унифицированных разложения Тейлора–Ито и Тейлора–Стратоновича можно сравнить с формулой Ньютона–Лейбница вычисления производной n -го порядка от произведения двух функций, в то время, как разложения Тейлора–Ито и Тейлора–Стратоновича из можно сравнить с формулой вычисления этой же производной, но итеративно, с удвоением слагаемых на каждом шаге.

Заметим, что рассмотренные разложения обычно используются при построении сильных численных методов (см. главу 7) решения стохастических дифференциальных уравнений Ито. Если рассмотреть не упорядоченные по порядку малости унифицированные разложения Тейлора–Ито и разложение Тейлора–Ито в форме Вагнера и Платена, которые обычно используются для построения слабых численных методов (см. главу 10) решения стохастических дифференциальных уравнений Ито, то различие между ними в числе различных повторных стохастических интегралов Ито окажется еще более заметным. Так, при $r = 4$ не упорядоченные по порядку малости унифицированные разложения Тейлора–Ито содержат по 15 различных повторных стохастических интегралов Ито, в то время как не упорядоченное по

порядку малости разложение Тейлора–Ито в форме Вагнера и Платена содержит 26 различных повторных стохастических интегралов Ито.

В заключение отметим еще одно соображение.

Многие стохастические интегралы из семейства (4.121) связаны друг с другом линейными соотношениями (это же относится и к семейству (4.122)).

Для семейств (4.117)–(4.120) это не так, т.е. стохастические интегралы из семейств (4.117)–(4.120) являются своего рода *стохастическими базисами*.

Глава 5

Разложения повторных стохастических интегралов, основанные на кратных рядах Фурье

5.1 Разложение повторных стохастических интегралов Ито произвольной кратности

В данном разделе получим разложение повторных стохастических интегралов Ито произвольной кратности, основанное на сходящихся в среднем кратных рядах Фурье. При этом используемая техника доказательства основного утверждения данной главы — теоремы 5.1, весьма тесно перекликается с подходами главы 3.

Введем в рассмотрение следующие повторные стохастические интегралы Стратоновича и Ито:

$$J^*[\psi^{(k)}]_{T,t} = \int_t^{*T} \psi_k(t_k) \dots \int_t^{*t_2} \psi_1(t_1) d\mathbf{w}_{t_1}^{(i_1)} \dots d\mathbf{w}_{t_k}^{(i_k)}, \quad (5.1)$$

$$J[\psi^{(k)}]_{T,t} = \int_t^T \psi_k(t_k) \dots \int_t^{t_2} \psi_1(t_1) d\mathbf{w}_{t_1}^{(i_1)} \dots d\mathbf{w}_{t_k}^{(i_k)},$$

где $\psi_l(\tau)$, $l = 1, \dots, k$, — непрерывно дифференцируемые на промежутке $[t, T]$ функции; $\mathbf{w}_t^{(i)} = \mathbf{f}_t^{(i)}$ при $i = 1, \dots, m$; $\mathbf{w}_t^{(0)} = t$; $i_1, \dots, i_k = 0, 1, \dots, m$; $\mathbf{f}_\tau^{(i)}$, $i = 1, \dots, m$, — независимые стандартные винеровские процессы.

Рассмотрим полную ортонормированную систему функций $\{\phi_j(x)\}_{j=0}^\infty$ в пространстве $L_2([t, T])$.

Введем в рассмотрение следующую функцию

$$K(t_1, \dots, t_k) = \begin{cases} \psi_1(t_1) \dots \psi_k(t_k), & t_1 < \dots < t_k; \\ 0, & \text{иначе} \end{cases} \quad t_1, \dots, t_k \in [t, T].$$

Функция $K(t_1, \dots, t_k)$ кусочно непрерывна в гиперкубе $[t, T]^k$, т.е. гиперкуб можно разрезать на конечное число частей с помощью кусочно гладких поверхностей так, что на каждой части функция $K(t_1, \dots, t_k)$ непрерывна и имеет пределы на границе части, а вдоль разрезов она может иметь разрывы.

В этой ситуации известно, что кратный ряд Фурье функции $K(t_1, \dots, t_k) \in L_2([t, T]^k)$ в гиперкубе сходится в смысле среднего квадратического, т.е.:

$$\lim_{p_1, \dots, p_k \rightarrow \infty} \left\| K(t_1, \dots, t_k) - \sum_{j_1=0}^{\infty} \dots \sum_{j_k=0}^{\infty} C_{j_k \dots j_1} \prod_{l=1}^k \phi_{j_l}(t_l) \right\| = 0, \quad (5.2)$$

где $\|f\| = \left(\int_{[t, T]^k} f^2(t_1, \dots, t_k) dt_1 \dots dt_k \right)^{\frac{1}{2}}$ и имеет место равенство Парсеваля:

$$\int_{[t, T]^k} K^2(t_1, \dots, t_k) dt_1 \dots dt_k = \lim_{p_1, \dots, p_k \rightarrow \infty} \sum_{j_1=0}^{p_1} \dots \sum_{j_k=0}^{p_k} (C_{j_k \dots j_1})^2. \quad (5.3)$$

Сформулируем основную теорему.

Теорема 5.1 Пусть выполнены следующие условия:

1. $\psi_i(\tau)$, $i = 1, 2$, — непрерывно дифференцируемые на промежутке $[t, T]$ функции.
2. $\{\phi_j(x)\}_{j=0}^{\infty}$ — полная ортонормированная система непрерывно дифференцируемых функций в пространстве $L_2([t, T])$.

Тогда повторный стохастический интеграл Ито $J[\psi^{(k)}]_{T,t}$ разлагается в сходящийся в среднеквадратическом смысле кратный ряд

$$J[\psi^{(k)}]_{T,t} = \text{l.i.m.}_{p_1, \dots, p_k \rightarrow \infty} \sum_{j_1=0}^{p_1} \dots \sum_{j_k=0}^{p_k} C_{j_k \dots j_1} \left(\prod_{l=1}^k \zeta_{j_l}^{(i_l)} - \right. \\ \left. - \text{l.i.m.}_{N \rightarrow \infty} \sum_{(l_1, \dots, l_k) \in \mathcal{G}_k} \phi_{j_{l_1}}(\pi_{l_1}) \Delta \mathbf{w}_{\pi_{l_1}}^{(i_1)} \dots \phi_{j_{l_k}}(\pi_{l_k}) \Delta \mathbf{w}_{\pi_{l_k}}^{(i_k)} \right), \quad (5.4)$$

где $\mathcal{G}_k = \mathcal{H}_k \setminus \mathcal{L}_k$;

$$\mathcal{H}_k = \{(l_1, \dots, l_k) : l_1, \dots, l_k = 0, 1, \dots, N-1\},$$

$$\mathcal{L}_k = \left\{ (l_1, \dots, l_k) : l_1, \dots, l_k = 0, 1, \dots, N-1; \right. \\ \left. l_g \neq l_r (g \neq r); g, r = 1, \dots, k \right\};$$

$\zeta_{(j_l)T,t}^{(i_l)} = \int_t^T \phi_{j_l}(s) d\mathbf{w}_s^{(i_l)}$ — независимые стандартные гауссовские случайные величины при различных i_l или j_l (если $i_l \neq 0$);

$$C_{j_k \dots j_1} = \int_{[t,T]^k} K(t_1, \dots, t_k) \prod_{l=1}^k \phi_{j_l}(t_l) dt_1 \dots dt_k;$$

$$K(t_1, \dots, t_k) = \begin{cases} \psi_1(t_1) \dots \psi_k(t_k), & t_1 < \dots < t_k; \\ 0, & \text{иначе} \end{cases} \quad t_1, \dots, t_k \in [t, T].$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. В начале докажем вспомогательные леммы.

Рассмотрим разбиение $\{\tau_j\}_{j=0}^N$ промежутка $[t, T]$ такое, что

$$t = \tau_0 < \dots < \tau_N = T, \quad \Delta_N = \max_{0 \leq j \leq N-1} |\tau_{j+1} - \tau_j| \rightarrow 0 \text{ при } N \rightarrow \infty. \quad (5.5)$$

Лемма 5.1. Пусть выполнено условие 1 теоремы 5.1. Тогда

$$J[\psi^{(k)}]_{T,t} = \text{l.i.m.}_{N \rightarrow \infty} \sum_{j_k=0}^{N-1} \dots \sum_{j_2=0}^{j_1-1} \prod_{l=1}^k \psi_l(\tau_{j_l}) \Delta \mathbf{w}_{\tau_{j_l}}^{(i_l)} \text{ с в.1,} \quad (5.6)$$

где $\Delta \mathbf{w}_{\tau_{j_l}}^{(i_l)} = \mathbf{w}_{\tau_{j_l+1}}^{(i_l)} - \mathbf{w}_{\tau_{j_l}}^{(i_l)}$, $i_l = 0, 1, \dots, m$; $\{\tau_{j_l}\}_{j_l=0}^{N-1}$ — разбиение промежутка $[t, T]$, удовлетворяющее условию (5.5).

Д о к а з а т е л ь с т в о. Согласно (3.9) имеем

$$J[\psi^{(k)}]_{T,t} = \text{l.i.m.}_{N \rightarrow \infty} G[\psi^{(k)}]_{N,0} \sum_{l=0}^{j_k-1} \psi_l(\tau_l) \Delta \mathbf{w}_{\tau_l}^{(i_l)} \text{ с в.1,} \quad (5.7)$$

где

$$G[\psi^{(k)}]_{N,0} = \sum_{j_1=0}^{N-1} \dots \sum_{j_{k-1}=0}^{j_{k-2}-1} \prod_{p=1}^{k-1} J[\psi_p]_{\tau_{j_p+1}, \tau_{j_p}}; \quad J[\psi_p]_{s,\theta} = \int_{\theta}^s \psi_p(\tau) d\mathbf{w}_{\tau}^{(i_p)}. \quad (5.8)$$

Представим $J[\psi_p]_{\tau_{j_p+1}, \tau_{j_p}}$ в виде

$$J[\psi_p]_{\tau_{j_p+1}, \tau_{j_p}} = \psi_p(\tau_{j_p}) \Delta \mathbf{w}_{\tau_{j_p}}^{(i_p)} + \int_{\tau_{j_p}}^{\tau_{j_p+1}} (\psi_p(\tau) - \psi_p(\tau_{j_p})) d\mathbf{w}_{\tau}^{(i_p)}$$

и подставим результат в (5.8), а (5.8) — в (5.7). После этого нетрудно заметить, что преобразованное допредельное выражение в правой части (5.7) представимо в условиях леммы в виде допредельного выражения из правой части (5.6) и величины, которая стремится к нулю при $N \rightarrow \infty$ в среднеквадратическом смысле.

Лемма доказана. $\square$

З а м е ч а н и е 5.1. Результат леммы 5.1 может быть обобщен, т.е. функция $\psi_1(s)$ в (5.6) может быть заменена на случайный процесс ϕ_s из класса $\mathcal{M}_2([0, T])$.

З а м е ч а н и е 5.2. Нетрудно видеть, что если $\Delta \mathbf{w}_{\tau_{j_l}}^{(i_l)}$ в (5.6) при некотором $l \in \{1, \dots, k\}$ заменить на $(\Delta \mathbf{w}_{\tau_{j_l}}^{(i_l)})^p$, $i_l \neq 0$, то в интеграле $J[\psi^{(k)}]_{T,t}$ дифференциал $d\mathbf{w}_{t_l}^{(i_l)}$ при $p = 2$ заменится на dt_l . Если же $p = 3, 4, \dots$, то правая часть (5.6) с вероятностью 1 обратится в нуль. Если $\Delta \mathbf{w}_{\tau_{j_l}}^{(i_l)}$ в (5.6) при некотором $l \in \{1, \dots, k\}$ заменить на $(\Delta \tau_{j_l})^p$, $p = 2, 3, \dots$, то правая часть (5.6) с вероятностью 1 также обратится в нуль.

Определим следующий стохастический интеграл:

$$\text{l.i.m.}_{N \rightarrow \infty} \sum_{j_1, \dots, j_k=0}^{N-1} \Phi(\tau_{j_1}, \dots, \tau_{j_k}) \prod_{l=1}^k \Delta \mathbf{w}_{\tau_{j_l}}^{(i_l)} \stackrel{\text{def}}{=} J[\Phi]_{T,t}^{(k)}. \quad (5.9)$$

Пусть $\mathcal{D}_k = \{(t_1, \dots, t_k) : t \leq t_1 < \dots < t_k \leq T\}$. Будем писать $\Phi(t_1, \dots, t_k) \in C(\mathcal{D}_k)$, если $\Phi(t_1, \dots, t_k)$ непрерывно дифференцируема в $\mathcal{D}_k$ и ограничена на границе этой области.

Используя рассуждения, близкие к рассуждениям доказательства леммы 5.1, нетрудно показать, что если $\Phi(t_1, \dots, t_k) \in C(\mathcal{D}_k)$, то

$$\begin{aligned} I[\Phi]_{T,t}^{(k)} &\stackrel{\text{def}}{=} \int_t^T \dots \int_t^{t_2} \Phi(t_1, \dots, t_k) d\mathbf{w}_{t_1}^{(i_1)} \dots d\mathbf{w}_{t_k}^{(i_k)} = \\ &= \text{l.i.m.}_{N \rightarrow \infty} \sum_{j_k=0}^{N-1} \dots \sum_{j_1=0}^{j_2-1} \Phi(\tau_{j_1}, \dots, \tau_{j_k}) \prod_{l=1}^k \Delta \mathbf{w}_{\tau_{j_l}}^{(i_l)} \text{ с в.1,} \end{aligned} \quad (5.10)$$

где интеграл в левой части равенства (5.10) понимается как повторный стохастический интеграл Ито.

В частности, если положить

$$\text{l.i.m.}_{N \rightarrow \infty} \sum_{\substack{j_1, \dots, j_k=0 \\ j_q \neq j_r; \ q \neq r; \ q, r=1, \dots, k}}^{N-1} \Phi(\tau_{j_1}, \dots, \tau_{j_k}) \prod_{l=1}^k \Delta \mathbf{w}_{\tau_{j_l}}^{(i_l)} \stackrel{\text{def}}{=} J'[\Phi]_{T,t}^{(k)}, \quad (5.11)$$

то согласно лемме 5.1

$$J'[\Phi]_{T,t}^{(k)} = \int_t^T \dots \int_t^{t_2} \sum_{(t_1, \dots, t_k)} \left(\Phi(t_1, \dots, t_k) d\mathbf{w}_{t_1}^{(i_1)} \dots d\mathbf{w}_{t_k}^{(i_k)} \right),$$

где суммирование по перестановкам $(t_1, \dots, t_k)$ осуществляется только в выражении, которое взято в скобки.

Лемма 5.2. Пусть $\Phi(t_1, \dots, t_k) \in C(\mathcal{D}_k)$. Тогда

$$\mathbb{M} \left\{ \left| I[\Phi]_{T,t}^{(k)} \right|^{2n} \right\} \leq C_{nk} \int_t^T \dots \int_t^{t_2} \Phi^{2n}(t_1, \dots, t_k) dt_1 \dots dt_k, \quad C_{nk} < \infty, \quad n \in N.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Используя стандартные оценки стохастических интегралов (см. главу 1), при $(\xi_\tau)^n \in \mathcal{M}_2([t_0, t])$ имеем

$$\mathbb{M} \left\{ \left| \int_{t_0}^t \xi_\tau df_\tau \right|^{2n} \right\} \leq (t - t_0)^{n-1} (n(2n-1))^n \int_{t_0}^t \mathbb{M} \{ |\xi_\tau|^{2n} \} d\tau, \quad (5.12)$$

$$\mathbb{M} \left\{ \left| \int_{t_0}^t \xi_\tau d\tau \right|^{2n} \right\} \leq (t - t_0)^{2n-1} \int_{t_0}^t \mathbb{M} \{ |\xi_\tau|^{2n} \} d\tau. \quad (5.13)$$

Пусть

$$\xi[\Phi]_{t_{l+1}, \dots, t_k, t}^{(l)} = \int_t^{t_{l+1}} \dots \int_t^{t_2} \Phi(t_1, \dots, t_k) d\mathbf{w}_{t_1}^{(i_1)} \dots d\mathbf{w}_{t_l}^{(i_l)}$$

при $l = 1, \dots, k-1$ и

$$\xi[\Phi]_{t_1, \dots, t_k, t}^{(0)} \stackrel{\text{def}}{=} \Phi(t_1, \dots, t_k).$$

По индукции нетрудно показать, что $\left(\xi[\Phi]_{t_{l+1}, \dots, t_k, t}^{(l)} \right)^n \in \mathcal{M}_2([t, T])$ по t_{l+1} . Тогда, применяя многократно оценки (5.12), (5.13), приходим к утверждению леммы. $\square$

Лемма 5.3. Пусть $\varphi_i(s)$, $i = 1, \dots, k$, — непрерывные на промежутке $[t, T]$ функции. Тогда

$$\prod_{l=1}^k J[\varphi_l]_{T,t} = J[\Phi]_{T,t}^{(k)} \text{ с в.1,} \quad (5.14)$$

где

$$J[\varphi_l]_{T,t} = \int_t^T \varphi_l(s) d\mathbf{w}_s^{(i_l)}; \quad \Phi(t_1, \dots, t_k) = \prod_{l=1}^k \varphi_l(t_l).$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть сначала $i_l \neq 0$, $l = 1, \dots, k$. Обозначим

$$J[\varphi_l]_N \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{j=0}^{N-1} \varphi_l(\tau_j) \Delta \mathbf{w}_{\tau_j}^{(i_l)}.$$

Поскольку

$$\begin{aligned} & \prod_{l=1}^k J[\varphi_l]_N - \prod_{l=1}^k J[\varphi_l]_{T,t} = \\ & = \sum_{l=1}^k \left(\prod_{g=1}^{l-1} J[\varphi_g]_{T,t} \right) (J[\varphi_l]_N - J[\varphi_l]_{T,t}) \left(\prod_{g=l+1}^k J[\varphi_g]_N \right), \end{aligned}$$

то в силу неравенств Минковского и Коши–Буняковского

$$\left(\mathbb{M} \left\{ \left| \prod_{l=1}^k J[\varphi_l]_N - \prod_{l=1}^k J[\varphi_l]_{T,t} \right|^2 \right\} \right)^{\frac{1}{2}} \leq C_k \sum_{l=1}^k \left(\mathbb{M} \{ |J[\varphi_l]_N - J[\varphi_l]_{T,t}|^4 \} \right)^{\frac{1}{4}}, \quad (5.15)$$

где $C_k < \infty$.

Заметим, что

$$J[\varphi_l]_N - J[\varphi_l]_{T,t} = \sum_{g=0}^{N-1} J[\Delta \varphi_l]_{\tau_{g+1}, \tau_g},$$

где $J[\Delta \varphi_l]_{\tau_{g+1}, \tau_g} = \int_{\tau_g}^{\tau_{g+1}} (\varphi_l(\tau_g) - \varphi_l(s)) d\mathbf{w}_s^{(i_l)}$. Поскольку $J[\Delta \varphi_l]_{\tau_{g+1}, \tau_g}$ независимы при различных g , то [127]

$$\begin{aligned} & \mathbb{M} \left\{ \left| \sum_{j=0}^{N-1} J[\Delta \varphi_l]_{\tau_{j+1}, \tau_j} \right|^4 \right\} = \sum_{j=0}^{N-1} \mathbb{M} \{ |J[\Delta \varphi_l]_{\tau_{j+1}, \tau_j}|^4 \} + \\ & + 6 \sum_{j=0}^{N-1} \mathbb{M} \{ |J[\Delta \varphi_l]_{\tau_{j+1}, \tau_j}|^2 \} \sum_{q=0}^{j-1} \mathbb{M} \{ |J[\Delta \varphi_l]_{\tau_{q+1}, \tau_q}|^2 \}. \end{aligned} \quad (5.16)$$

В силу гауссовости $J[\Delta \varphi_l]_{\tau_{j+1}, \tau_j}$ имеем

$$\begin{aligned} & \mathbb{M} \{ |J[\Delta \varphi_l]_{\tau_{j+1}, \tau_j}|^2 \} = \int_{\tau_j}^{\tau_{j+1}} (\varphi_l(\tau_j) - \varphi_l(s))^2 ds, \\ & \mathbb{M} \{ |J[\Delta \varphi_l]_{\tau_{j+1}, \tau_j}|^4 \} = 3 \left(\int_{\tau_j}^{\tau_{j+1}} (\varphi_l(\tau_j) - \varphi_l(s))^2 ds \right)^2. \end{aligned}$$

Используя эти соотношения и непрерывность, а как следствие равномерную непрерывность, функций $\varphi_i(s)$, получаем, что правая часть (5.16) стремится к нулю при $N \rightarrow \infty$. Учитывая этот факт, а также (5.15), приходим к (5.14). Если при некоторых $l \in \{1, \dots, k\}$: $\mathbf{w}_{t_l}^{(i_l)} = t_l$, то доказательство леммы проводится аналогично. $\square$

Согласно лемме 5.1 имеем

$$\begin{aligned}
J[\psi^{(k)}]_{T,t} &= \text{l.i.m.}_{N \rightarrow \infty} \sum_{l_k=0}^{N-1} \dots \sum_{l_1=0}^{l_2-1} \psi_1(\tau_{l_1}) \dots \psi_k(\tau_{l_k}) \Delta \mathbf{w}_{\tau_{l_1}}^{(i_1)} \dots \Delta \mathbf{w}_{\tau_{l_k}}^{(i_k)} = \\
&= \text{l.i.m.}_{N \rightarrow \infty} \sum_{l_k=0}^{N-1} \dots \sum_{l_1=0}^{l_2-1} K(t_{l_1}, \dots, t_{l_k}) \Delta \mathbf{w}_{\tau_{l_1}}^{(i_1)} \dots \Delta \mathbf{w}_{\tau_{l_k}}^{(i_k)} = \\
&= \text{l.i.m.}_{N \rightarrow \infty} \sum_{l_k=0}^{N-1} \dots \sum_{l_1=0}^{N-1} K(t_{l_1}, \dots, t_{l_k}) \Delta \mathbf{w}_{\tau_{l_1}}^{(i_1)} \dots \Delta \mathbf{w}_{\tau_{l_k}}^{(i_k)} = \\
&= \text{l.i.m.}_{N \rightarrow \infty} \sum_{\substack{l_1, \dots, l_k=0 \\ l_q \neq l_r; \ q \neq r; \ q, r = 1, \dots, k}}^{N-1} K(t_{l_1}, \dots, t_{l_k}) \Delta \mathbf{w}_{\tau_{l_1}}^{(i_1)} \dots \Delta \mathbf{w}_{\tau_{l_k}}^{(i_k)} = \\
&= \int_t^T \dots \int_t^{t_2} \sum_{(t_1, \dots, t_k)} \left(K(t_1, \dots, t_k) d\mathbf{w}_{t_1}^{(i_1)} \dots d\mathbf{w}_{t_k}^{(i_k)} \right), \quad (5.17)
\end{aligned}$$

где перестановки $(t_1, \dots, t_k)$ осуществляются при суммировании только в выражении, взятом в скобки.

Нетрудно видеть, что (5.17) может быть переписано в виде:

$$\begin{aligned}
J[\psi^{(k)}]_{T,t} &= \\
&= \sum_{(t_1, \dots, t_k)} \int_t^T \dots \int_t^{t_2} K(t_1, \dots, t_k) d\mathbf{w}_{t_1}^{(i_1)} \dots d\mathbf{w}_{t_k}^{(i_k)},
\end{aligned}$$

где перестановки $(t_1, \dots, t_k)$ осуществляются при суммировании только в величинах $d\mathbf{w}_{t_1}^{(i_1)} \dots d\mathbf{w}_{t_k}^{(i_k)}$, при этом соответствующим образом меняются индексы у верхних пределов интегрирования в повторных стохастических интегралах.

Согласно доказанным ранее леммам и (5.17) с в. 1 получаем следующее представление

$$\begin{aligned}
J[\psi^{(k)}]_{T,t} &= \\
&= \sum_{j_1=0}^{p_1} \dots \sum_{j_k=0}^{p_k} C_{j_k \dots j_1} \int_t^T \dots \int_t^{t_2} \sum_{(t_1, \dots, t_k)} \left(\phi_{j_1}(t_1) \dots \phi_{j_k}(t_k) d\mathbf{w}_{t_1}^{(i_1)} \dots d\mathbf{w}_{t_k}^{(i_k)} \right) +
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& +R_{T,t}^{p_1,\dots,p_k} = \\
& = \sum_{j_1=0}^{p_1} \dots \sum_{j_k=0}^{p_k} C_{j_k \dots j_1} \times \\
& \times \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{\substack{l_1, \dots, l_k = 0 \\ l_q \neq l_r; \ q \neq r; \ q, r = 1, \dots, k}}^{N-1} \phi_{j_1}(\tau_{l_1}) \dots \phi_{j_k}(\tau_{l_k}) \Delta \mathbf{w}_{\tau_{l_1}}^{(i_1)} \dots \Delta \mathbf{w}_{\tau_{l_k}}^{(i_k)} + \\
& + R_{T,t}^{p_1,\dots,p_k} = \\
& = \sum_{j_1=0}^{p_1} \dots \sum_{j_k=0}^{p_k} C_{j_k \dots j_1} \left(\lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{l_1, \dots, l_k=0}^{N-1} \phi_{j_1}(\tau_{l_1}) \dots \phi_{j_k}(\tau_{l_k}) \Delta \mathbf{w}_{\tau_{l_1}}^{(i_1)} \dots \Delta \mathbf{w}_{\tau_{l_k}}^{(i_k)} - \right. \\
& \left. - \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{(l_1, \dots, l_k) \in \mathcal{G}_k} \phi_{j_{l_1}}(\tau_{l_1}) \Delta \mathbf{w}_{\tau_{l_1}}^{(i_1)} \dots \phi_{j_{l_k}}(\tau_{l_k}) \Delta \mathbf{w}_{\tau_{l_k}}^{(i_k)} \right) + \\
& + R_{T,t}^{p_1,\dots,p_k} = \\
& = \sum_{j_1=0}^{p_1} \dots \sum_{j_k=0}^{p_k} C_{j_k \dots j_1} \left(\prod_{l=1}^k \zeta_{j_l}^{(i_l)} - \right. \\
& \left. - \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{(l_1, \dots, l_k) \in \mathcal{G}_k} \phi_{j_{l_1}}(\tau_{l_1}) \Delta \mathbf{w}_{\tau_{l_1}}^{(i_1)} \dots \phi_{j_{l_k}}(\tau_{l_k}) \Delta \mathbf{w}_{\tau_{l_k}}^{(i_k)} \right) + \\
& + R_{T,t}^{p_1,\dots,p_k},
\end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned}
R_{T,t}^{p_1,\dots,p_k} = & \sum_{(t_1, \dots, t_k)} \int_t^T \dots \int_t^{t_2} \left(K(t_1, \dots, t_k) - \right. \\
& \left. - \sum_{j_1=0}^{p_1} \dots \sum_{j_k=0}^{p_k} C_{j_k \dots j_1} \prod_{l=1}^k \phi_{j_l}(t_l) \right) d\mathbf{w}_{t_1}^{(i_1)} \dots d\mathbf{w}_{t_k}^{(i_k)},
\end{aligned}$$

где перестановки $(t_1, \dots, t_k)$ осуществляются при суммировании только в величинах $d\mathbf{w}_{t_1}^{(i_1)} \dots d\mathbf{w}_{t_k}^{(i_k)}$, при этом соответствующим образом меняются индексы у верхних пределов интегрирования в повторных стохастических интегралах.

Оценим остаток ряда $R_{T,t}^{p_1,\dots,p_k}$.

Согласно лемме 5.2 при $n = 1$ имеем

$$\mathbb{M} \left\{ \left(R_{T,t}^{p_1,\dots,p_k} \right)^2 \right\} \leq$$

$$\begin{aligned}
&\leq C_k \sum_{(t_1, \dots, t_k)} \int_t^T \dots \int_t^{t_2} \left(K(t_1, \dots, t_k) - \right. \\
&\quad \left. - \sum_{j_1=0}^{p_1} \dots \sum_{j_k=0}^{p_k} C_{j_k \dots j_1} \prod_{l=1}^k \phi_{j_l}(t_l) \right)^2 dt_1 \dots dt_k = \\
&\quad = C_k \int_{[t, T]^k} \left(K(t_1, \dots, t_k) - \right. \\
&\quad \left. - \sum_{j_1=0}^{p_1} \dots \sum_{j_k=0}^{p_k} C_{j_k \dots j_1} \prod_{l=1}^k \phi_{j_l}(t_l) \right)^2 dt_1 \dots dt_k \rightarrow 0
\end{aligned}$$

при $p_1, \dots, p_k \rightarrow \infty$, где постоянная C_k зависит только от кратности повторного стохастического интеграла Ито. Теорема доказана. $\square$

Для того, чтобы оценить значение для практики теоремы 5.1 приведем ее частные случаи для $k = 1, \dots, 5$:

$$\int_t^T \psi_1(t_1) d\mathbf{f}_{t_1}^{(i_1)} = \sum_{j_1=0}^{\infty} C_{j_1} \zeta_{j_1}^{(i_1)},$$

$$\int_t^T \psi_2(t_2) \int_t^{t_2} \psi_1(t_1) d\mathbf{f}_{t_1}^{(i_1)} d\mathbf{f}_s^{(i_2)} = \sum_{j_1, j_2=0}^{\infty} C_{j_2 j_1} \left(\zeta_{j_1}^{(i_1)} \zeta_{j_2}^{(i_2)} - \mathbf{1}_{\{i_1=i_2 \neq 0\}} \mathbf{1}_{\{j_1=j_2\}} \right),$$

$$\begin{aligned}
J[\psi^{(3)}]_{T,t} = & \sum_{j_1, j_2, j_3=0}^{\infty} C_{j_3 j_2 j_1} \left(\zeta_{j_1}^{(i_1)} \zeta_{j_2}^{(i_2)} \zeta_{j_3}^{(i_3)} - \right. \\
& - \mathbf{1}_{\{i_1=i_2 \neq 0\}} \mathbf{1}_{\{j_1=j_2\}} \zeta_{j_3}^{(i_3)} - \mathbf{1}_{\{i_2=i_3 \neq 0\}} \mathbf{1}_{\{j_2=j_3\}} \zeta_{j_1}^{(i_1)} - \\
& \left. - \mathbf{1}_{\{i_1=i_3 \neq 0\}} \mathbf{1}_{\{j_1=j_3\}} \zeta_{j_2}^{(i_2)} \right),
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
J[\psi^{(4)}]_{T,t} = & \sum_{j_1, \dots, j_4=0}^{\infty} C_{j_4 \dots j_1} \left(\prod_{l=1}^4 \zeta_{j_l}^{(i_l)} - \right. \\
& - \mathbf{1}_{\{i_1=i_2 \neq 0\}} \mathbf{1}_{\{j_1=j_2\}} \zeta_{j_3}^{(i_3)} \zeta_{j_4}^{(i_4)} - \mathbf{1}_{\{i_1=i_3 \neq 0\}} \mathbf{1}_{\{j_1=j_3\}} \zeta_{j_2}^{(i_2)} \zeta_{j_4}^{(i_4)} - \\
& - \mathbf{1}_{\{i_1=i_4 \neq 0\}} \mathbf{1}_{\{j_1=j_4\}} \zeta_{j_2}^{(i_2)} \zeta_{j_3}^{(i_3)} - \mathbf{1}_{\{i_2=i_3 \neq 0\}} \mathbf{1}_{\{j_2=j_3\}} \zeta_{j_1}^{(i_1)} \zeta_{j_4}^{(i_4)} - \\
& - \mathbf{1}_{\{i_2=i_4 \neq 0\}} \mathbf{1}_{\{j_2=j_4\}} \zeta_{j_1}^{(i_1)} \zeta_{j_3}^{(i_3)} - \mathbf{1}_{\{i_3=i_4 \neq 0\}} \mathbf{1}_{\{j_3=j_4\}} \zeta_{j_1}^{(i_1)} \zeta_{j_2}^{(i_2)} + \\
& + \mathbf{1}_{\{i_1=i_2 \neq 0\}} \mathbf{1}_{\{j_1=j_2\}} \mathbf{1}_{\{i_3=i_4 \neq 0\}} \mathbf{1}_{\{j_3=j_4\}} + \\
& \left. + \mathbf{1}_{\{i_1=i_3 \neq 0\}} \mathbf{1}_{\{j_1=j_3\}} \mathbf{1}_{\{i_2=i_4 \neq 0\}} \mathbf{1}_{\{j_2=j_4\}} + \right)
\end{aligned}$$

$$+ \mathbf{1}_{\{i_1=i_4 \neq 0\}} \mathbf{1}_{\{j_1=j_4\}} \mathbf{1}_{\{i_2=i_3 \neq 0\}} \mathbf{1}_{\{j_2=j_3\}} \Big),$$

$$\begin{aligned} J[\psi^{(5)}]_{T,t} = & \sum_{j_1, \dots, j_5=0}^{\infty} C_{j_5 \dots j_1} \Big(\prod_{l=1}^5 \zeta_{j_l}^{(i_l)} - \\ & - \mathbf{1}_{\{i_1=i_2 \neq 0\}} \mathbf{1}_{\{j_1=j_2\}} \zeta_{j_3}^{(i_3)} \zeta_{j_4}^{(i_4)} \zeta_{j_5}^{(i_5)} - \mathbf{1}_{\{i_1=i_3 \neq 0\}} \mathbf{1}_{\{j_1=j_3\}} \zeta_{j_2}^{(i_2)} \zeta_{j_4}^{(i_4)} \zeta_{j_5}^{(i_5)} - \\ & - \mathbf{1}_{\{i_1=i_4 \neq 0\}} \mathbf{1}_{\{j_1=j_4\}} \zeta_{j_2}^{(i_2)} \zeta_{j_3}^{(i_3)} \zeta_{j_5}^{(i_5)} - \mathbf{1}_{\{i_1=i_5 \neq 0\}} \mathbf{1}_{\{j_1=j_5\}} \zeta_{j_2}^{(i_2)} \zeta_{j_3}^{(i_3)} \zeta_{j_4}^{(i_4)} - \\ & - \mathbf{1}_{\{i_2=i_3 \neq 0\}} \mathbf{1}_{\{j_2=j_3\}} \zeta_{j_1}^{(i_1)} \zeta_{j_4}^{(i_4)} \zeta_{j_5}^{(i_5)} - \mathbf{1}_{\{i_2=i_4 \neq 0\}} \mathbf{1}_{\{j_2=j_4\}} \zeta_{j_1}^{(i_1)} \zeta_{j_3}^{(i_3)} \zeta_{j_5}^{(i_5)} - \\ & - \mathbf{1}_{\{i_2=i_5 \neq 0\}} \mathbf{1}_{\{j_2=j_5\}} \zeta_{j_1}^{(i_1)} \zeta_{j_3}^{(i_3)} \zeta_{j_4}^{(i_4)} - \mathbf{1}_{\{i_3=i_4 \neq 0\}} \mathbf{1}_{\{j_3=j_4\}} \zeta_{j_1}^{(i_1)} \zeta_{j_2}^{(i_2)} \zeta_{j_5}^{(i_5)} - \\ & - \mathbf{1}_{\{i_3=i_5 \neq 0\}} \mathbf{1}_{\{j_3=j_5\}} \zeta_{j_1}^{(i_1)} \zeta_{j_2}^{(i_2)} \zeta_{j_4}^{(i_4)} - \mathbf{1}_{\{i_4=i_5 \neq 0\}} \mathbf{1}_{\{j_4=j_5\}} \zeta_{j_1}^{(i_1)} \zeta_{j_2}^{(i_2)} \zeta_{j_3}^{(i_3)} + \\ & + \mathbf{1}_{\{i_1=i_2 \neq 0\}} \mathbf{1}_{\{j_1=j_2\}} \mathbf{1}_{\{i_3=i_4 \neq 0\}} \mathbf{1}_{\{j_3=j_4\}} \zeta_{j_5}^{(i_5)} + \\ & + \mathbf{1}_{\{i_1=i_2 \neq 0\}} \mathbf{1}_{\{j_1=j_2\}} \mathbf{1}_{\{i_3=i_5 \neq 0\}} \mathbf{1}_{\{j_3=j_5\}} \zeta_{j_4}^{(i_4)} + \\ & + \mathbf{1}_{\{i_1=i_2 \neq 0\}} \mathbf{1}_{\{j_1=j_2\}} \mathbf{1}_{\{i_4=i_5 \neq 0\}} \mathbf{1}_{\{j_4=j_5\}} \zeta_{j_3}^{(i_3)} + \\ & + \mathbf{1}_{\{i_1=i_3 \neq 0\}} \mathbf{1}_{\{j_1=j_3\}} \mathbf{1}_{\{i_2=i_2 \neq 0\}} \mathbf{1}_{\{j_4=j_4\}} \zeta_{j_5}^{(i_5)} + \\ & + \mathbf{1}_{\{i_1=i_3 \neq 0\}} \mathbf{1}_{\{j_1=j_3\}} \mathbf{1}_{\{i_2=i_5 \neq 0\}} \mathbf{1}_{\{j_2=j_5\}} \zeta_{j_4}^{(i_4)} + \\ & + \mathbf{1}_{\{i_1=i_3 \neq 0\}} \mathbf{1}_{\{j_1=j_3\}} \mathbf{1}_{\{i_4=i_5 \neq 0\}} \mathbf{1}_{\{j_4=j_5\}} \zeta_{j_2}^{(i_2)} + \\ & + \mathbf{1}_{\{i_1=i_4 \neq 0\}} \mathbf{1}_{\{j_1=j_4\}} \mathbf{1}_{\{i_2=i_3 \neq 0\}} \mathbf{1}_{\{j_2=j_3\}} \zeta_{j_5}^{(i_5)} + \\ & + \mathbf{1}_{\{i_1=i_4 \neq 0\}} \mathbf{1}_{\{j_1=j_4\}} \mathbf{1}_{\{i_2=i_5 \neq 0\}} \mathbf{1}_{\{j_2=j_5\}} \zeta_{j_3}^{(i_3)} + \\ & + \mathbf{1}_{\{i_1=i_4 \neq 0\}} \mathbf{1}_{\{j_1=j_4\}} \mathbf{1}_{\{i_3=i_5 \neq 0\}} \mathbf{1}_{\{j_3=j_5\}} \zeta_{j_2}^{(i_2)} + \\ & + \mathbf{1}_{\{i_1=i_5 \neq 0\}} \mathbf{1}_{\{j_1=j_5\}} \mathbf{1}_{\{i_2=i_3 \neq 0\}} \mathbf{1}_{\{j_2=j_3\}} \zeta_{j_4}^{(i_4)} + \\ & + \mathbf{1}_{\{i_1=i_5 \neq 0\}} \mathbf{1}_{\{j_1=j_5\}} \mathbf{1}_{\{i_2=i_4 \neq 0\}} \mathbf{1}_{\{j_2=j_4\}} \zeta_{j_3}^{(i_3)} + \\ & + \mathbf{1}_{\{i_1=i_5 \neq 0\}} \mathbf{1}_{\{j_1=j_5\}} \mathbf{1}_{\{i_3=i_4 \neq 0\}} \mathbf{1}_{\{j_3=j_4\}} \zeta_{j_2}^{(i_2)} + \\ & + \mathbf{1}_{\{i_2=i_3 \neq 0\}} \mathbf{1}_{\{j_2=j_3\}} \mathbf{1}_{\{i_4=i_5 \neq 0\}} \mathbf{1}_{\{j_4=j_5\}} \zeta_{j_1}^{(i_1)} + \\ & + \mathbf{1}_{\{i_2=i_4 \neq 0\}} \mathbf{1}_{\{j_2=j_4\}} \mathbf{1}_{\{i_3=i_5 \neq 0\}} \mathbf{1}_{\{j_3=j_5\}} \zeta_{j_1}^{(i_1)} + \\ & + \mathbf{1}_{\{i_2=i_5 \neq 0\}} \mathbf{1}_{\{j_2=j_5\}} \mathbf{1}_{\{i_3=i_4 \neq 0\}} \mathbf{1}_{\{j_3=j_4\}} \zeta_{j_1}^{(i_1)} \Big). \end{aligned}$$

При анализе доказательства теоремы 5.1 возникает естественный вопрос: можно ли ослабить условие непрерывной дифференцируемости функций $\phi_j(x)$; $j = 1, 2, \dots$?

Будем говорить, что функция $f(x) : [t, T] \rightarrow \mathbb{R}^1$ удовлетворяет условию $(\star)$, если она непрерывно дифференцируема на отрезке $[t, T]$ за исключением может быть конечного числа точек конечного разрыва, а также непрерывна справа на отрезке $[t, T]$.

Далее предположим, что $\{\phi_j(x)\}_{j=0}^\infty$ — полная ортонормированная в пространстве $L_2([t, T])$ система функций, причем $\phi_j(x)$, $j < \infty$ удовлетворяет условию $(\star)$.

Нетрудно видеть, что непрерывная дифференцируемость или непрерывность функций $\phi_j(x)$ существенно использовалась при доказательстве теоремы 5.1 в двух местах: лемма 5.3 и формула (5.10).

Ясно, что без ущерба общности разбиение $\{\tau_j\}_{j=0}^N$ отрезка $[t, T]$ в лемме 5.3 и формуле (5.10) можно взять столь "мелким", что среди узлов τ_j этого разбиения окажутся все точки разрыва функций $\varphi_1(\tau) = \phi_{j_1}(\tau), \dots, \varphi_k(\tau) = \phi_{j_k}(\tau)$; $j_1, \dots, j_k < \infty$ и среди точек $(\tau_{j_1}, \dots, \tau_{j_k})$; $0 \leq j_1 < \dots < j_k \leq N - 1$ окажутся все точки разрыва функции $\Phi(t_1, \dots, t_k)$, в которую также входят функции $\phi_{j_1}(t_1), \dots, \phi_{j_k}(t_k)$ при обращении к формуле (5.10) в концовке доказательства теоремы 5.1.

Тогда, в силу непрерывности справа на отрезке $[t, T]$ системы функций $\phi_j(x)$, $j < \infty$ лемма 5.3 и формула (5.10) окажутся справедливыми.

Таким образом в теореме 5.1 можно использовать полные ортонормированные в пространстве $L_2([t, T])$ системы функций $\{\phi_j(x)\}_{j=0}^\infty$, для которых $\phi_j(x)$, $j < \infty$ удовлетворяет условию $(\star)$.

Примером такой системы функций может служить полная ортонормированная в пространстве $L_2([t, T])$ система функций Хаара: $\phi_0(x) = \frac{1}{\sqrt{T-t}}$, $\phi_{nj}(x) = \frac{1}{\sqrt{T-t}} \varphi_{nj}(\frac{x-t}{T-t})$; $n = 0, 1, \dots$; $j = 1, 2, \dots, 2^n$, где функции $\varphi_{nj}(x)$ имеют вид:

$$\varphi_{nj}(x) = \begin{cases} 2^{\frac{n}{2}}, & x \in [\frac{j-1}{2^n}, \frac{j-1}{2^n} + \frac{1}{2^{n+1}}) \\ -2^{\frac{n}{2}}, & x \in [\frac{j-1}{2^n} + \frac{1}{2^{n+1}}, \frac{j}{2^n}) \\ 0 & \text{иначе} \end{cases}$$

$n = 0, 1, \dots$; $j = 1, 2, \dots, 2^n$ (мы выбираем значения функций Хаара в точках разрыва так, чтобы они были непрерывны справа).

Другим примером подобной системы функций служит полная ортонормированная в пространстве $L_2([t, T])$ система функций Радемахера–Уолша: $\phi_0(x) = \frac{1}{\sqrt{T-t}}$, $\phi_{m_1 \dots m_k}(x) = \frac{1}{\sqrt{T-t}} \varphi_{m_1}(\frac{x-t}{T-t}) \dots \varphi_{m_k}(\frac{x-t}{T-t})$; $0 < m_1 < \dots < m_k$; $m_1, \dots, m_k = 1, 2, \dots$; $k = 1, 2, \dots$; $\varphi_m(x) = (-1)^{[2^m x]}$; $x \in [0, 1]$; $m = 1, 2, \dots$

5.2 Разложение повторных стохастических интегралов Стратоновича первой и второй кратности

Для случая $k = 1$ очевидно имеем

$$\int_t^{*T} \psi_1(t_1) d\mathbf{f}_{t_1}^{(i_1)} = \sum_{j_1=0}^{\infty} C_{j_1} \zeta_{j_1}^{(i_1)},$$

где ряд сходится в среднеквадратическом смысле;

$$C_{j_1} = \int_t^T \psi_1(t_1) \phi_{j_1}(t_1) dt_1; \quad \zeta_{j_1}^{(i_1)} = \int_t^T \phi_{j_1}(t_1) d\mathbf{f}_{t_1}^{(i_1)}; \quad i_1 = 1, \dots, m.$$

С в. 1 имеем

$$J^*[\psi^{(2)}]_{T,t} = J[\psi^{(2)}]_{T,t} + \frac{1}{2} \mathbf{1}_{\{i_1=i_2 \neq 0\}} \int_t^T \psi_1(t_1) \psi_2(t_1) dt_1.$$

С другой стороны по теореме 5.1

$$\begin{aligned} \int_t^T \psi_2(t_2) \int_t^{t_2} \psi_1(t_1) d\mathbf{f}_{t_1}^{(i_1)} d\mathbf{f}_{t_2}^{(i_2)} &= \sum_{j_1, j_2=0}^{\infty} C_{j_2 j_1} \left(\zeta_{j_1}^{(i_1)} \zeta_{j_2}^{(i_2)} - \mathbf{1}_{\{i_1=i_2 \neq 0\}} \mathbf{1}_{\{j_1=j_2\}} \right) = \\ &= \sum_{j_1, j_2=0}^{\infty} C_{j_2 j_1} \zeta_{j_1}^{(i_1)} \zeta_{j_2}^{(i_2)} - \mathbf{1}_{\{i_1=i_2 \neq 0\}} \sum_{j_1=0}^{\infty} C_{j_1 j_1}. \end{aligned}$$

Возникает естественный вопрос, а справедливо ли равенство:

$$\frac{1}{2} \int_t^T \psi_1(t_1) \psi_2(t_1) dt_1 = \sum_{j_1=0}^{\infty} C_{j_1 j_1}. \quad (5.18)$$

Для его проверки очевидно достаточно показать, что

$$\sum_{j_1, j_2=0}^{\infty} C_{j_2 j_1} \phi_{j_1}(t_1) \phi_{j_2}(t_1) = \frac{1}{2} \psi_1(t_1) \psi_2(t_1), \quad (5.19)$$

где ряд сходится равномерно по t_1 на отрезке $[t, T]$.

Очевидно, проинтегрировав равенство (5.19) и воспользовавшись ортонормированностью функций $\phi_j(\tau)$ мы получим равенство (5.18), что в свою очередь уже будет означать, что

$$J^*[\psi^{(2)}]_{T,t} = \sum_{j_1, j_2=0}^{\infty} C_{j_2 j_1} \zeta_{j_1}^{(i_1)} \zeta_{j_2}^{(i_2)}, \quad (5.20)$$

где ряд сходится в среднеквадратическом смысле.

Для доказательства (5.19) нам придется обратиться к сведениям из теории кратных рядов Фурье, суммируемых по Принсгейму.

Для каждого $\delta > 0$ назовем модулем непрерывности функции $f(\mathbf{t})$ ($\mathbf{t} = (t_1, \dots, t_k)$) в k -мерной области D ($k \geq 1$) точную верхнюю грань разности $|f(\mathbf{t}') - f(\mathbf{t}'')|$ на множестве всех точек $\mathbf{t}', \mathbf{t}''$, которые принадлежат области D , причем расстояние $\rho(\mathbf{t}', \mathbf{t}'') < \delta$.

Будем говорить, что функция k ($k \geq 1$) переменных $f(\mathbf{t})$ ($\mathbf{t} = (t_1, \dots, t_k)$) принадлежит в области D классу Гельдера с показателем 1 ($f(\mathbf{t}) \in C^1(D)$), если модуль непрерывности функции $f(\mathbf{t})$ ($\mathbf{t} = (t_1, \dots, t_k)$) в области D имеет порядок $O(\delta)$.

Рассмотрим полную ортонормированную систему $\{\phi_j(x)\}_{j=0}^{\infty}$ в пространстве $L_2([t, T])$.

Будем говорить, что эта система удовлетворяет условию (*), если система $\{\phi_j(x)\}_{j=0}^{\infty}$ такова, что для всякой функции k переменных, которая непрерывна на $[t, T]^k$ и принадлежит классу $C^1([t, T]^k)$ ее кратный ряд Фурье (суммируемый методом прямоугольных сумм) на $[t, T]^k$, построенный по системе функций $\{\phi_j(x)\}_{j=0}^{\infty}$, сходится равномерно к этой функции в $[t, T]^k$ и сходится на границе $[t, T]^k$.

В 1967г. Л.В.Жижиашвили установил, что прямоугольные суммы кратного тригонометрического ряда Фурье в гиперкубе $[t, T]^k$ функции k переменных сходятся равномерно в гиперкубе к этой функции, если она принадлежит $C^\alpha([t, T]^k)$; $\alpha > 0$.

Известно также, что для справедливости аналогичного утверждения для рядов Фурье–Хаара, по крайней мере для двумерного случая, достаточно одной непрерывности функции двух переменных в квадрате $[t, T]^2$.

Автор полагает, что для двойных рядов Фурье–Лежандра аналогичная формулировка будет верной, если функция двух переменных принадлежит $C^1([t, T]^k)$. Если же этого условия недостаточно, то по крайней мере результат будет верным, если функция постоянна в $[t, T]^2$ (это соответствует $\psi_i(\tau) \equiv 1$; $i = 1, 2, 3$ в дальнейших рассуждениях).

Рассмотрим вспомогательную функцию:

$$K'(t_1, t_2) = \begin{cases} \psi_2(t_1)\psi_1(t_2), & t_1 \geq t_2 \\ \psi_1(t_1)\psi_2(t_2), & t_1 \leq t_2 \end{cases}, \quad t_1, t_2 \in [t, T]$$

и покажем, что она принадлежит $C^1([t, T]^2)$.

Рассмотрим приращение: $\Delta K' = K'(t_1, t_2) - K'(t_1^*, t_2^*)$, где

$$\sqrt{(t_1 - t_1^*)^2 + (t_2 - t_2^*)^2} < \delta, \quad (t_1, t_2), (t_1^*, t_2^*) \in [t, T]^2.$$

По формуле Лагранжа для $\psi_1(t_1^*)$, $\psi_2(t_1^*)$ на $[\min\{t_1, t_1^*\}, \max\{t_1, t_1^*\}]$ и для $\psi_1(t_2^*)$, $\psi_2(t_2^*)$ на $[\min\{t_2, t_2^*\}, \max\{t_2, t_2^*\}]$ придем к представлению:

$$\Delta K' = \begin{cases} \psi_2(t_1)\psi_1(t_2), & t_1 \geq t_2 \\ \psi_1(t_1)\psi_2(t_2), & t_1 \leq t_2 \end{cases} - \begin{cases} \psi_2(t_1)\psi_1(t_2), & t_1^* \geq t_2^* \\ \psi_1(t_1)\psi_2(t_2), & t_1^* \leq t_2^* \end{cases} + O(\delta).$$

Далее понятно, что разность, стоящая в правой части последнего равенства отлична от нуля и равна

$$\pm(\psi_1(t_1)\psi_2(t_2) - \psi_1(t_2)\psi_2(t_1)) \quad (5.21)$$

на множестве:

$$\mathcal{M} = \{(t_1, t_2) : \min\{t_1, t_1 + \varepsilon\} \leq t_2 \leq \max\{t_1, t_1 + \varepsilon\}; t_1 \in [t, T]\},$$

где $\varepsilon = (t_1^* - t_1) - (t_2^* - t_2) = O(\delta)$.

Поскольку на множестве $\mathcal{M}$ $|t_2 - t_1| = O(\delta)$, то применяя формулу Лагранжа к $\psi_2(t_2)$, $\psi_1(t_2)$ на отрезке $[\min\{t_1, t_2\}, \max\{t_1, t_2\}]$ и подставляя результат в (5.21), получим, что $K'(t_1, t_2) \in C^1([t, T]^2)$.

Разложим функцию $K'(t_1, t_2)$ в квадрате квадрате $[t, T]^2$ в кратный ряд Фурье, суммируемый методом прямоугольных сумм, т.е.

$$\begin{aligned} K'(t_1, t_2) &= \lim_{n_1, n_2 \rightarrow \infty} \sum_{j_1=0}^{n_1} \sum_{j_2=0}^{n_2} \int_t^T \int_t^T K'(t_1, t_2) \phi_{j_1}(t_1) \phi_{j_2}(t_2) dt_1 dt_2 \cdot \phi_{j_1}(t_1) \phi_{j_2}(t_2) = \\ &= \lim_{n_1, n_2 \rightarrow \infty} \sum_{j_1=0}^{n_1} \sum_{j_2=0}^{n_2} \left(\int_t^T \psi_2(t_2) \phi_{j_2}(t_2) \left(\int_t^{t_2} \psi_1(t_1) \phi_{j_1}(t_1) dt_1 \right) dt_2 + \right. \\ &\quad \left. + \int_t^T \psi_1(t_2) \phi_{j_2}(t_2) \left(\int_{t_2}^T \psi_2(t_1) \phi_{j_1}(t_1) dt_1 \right) dt_2 \right) \phi_{j_1}(t_1) \phi_{j_2}(t_2) = \\ &= \lim_{n_1, n_2 \rightarrow \infty} \sum_{j_1=0}^{n_1} \sum_{j_2=0}^{n_2} (C_{j_2 j_1} + C_{j_1 j_2}) \phi_{j_1}(t_1) \phi_{j_2}(t_2). \end{aligned} \quad (5.22)$$

При получении (5.22) мы заменили порядок интегрирования во втором повторном интеграле.

Нетрудно видеть, что положив $t_1 = t_2$ в (5.22), разбив предел в правой части полученного равенства на два предела и заменив j_1 на j_2 , j_2 на j_1 , n_1 на n_2 и n_2 на n_1 во втором пределе, получим

$$\psi_1(t_1)\psi_2(t_1) = 2 \lim_{n_1, n_2 \rightarrow \infty} \sum_{j_1=0}^{n_1} \sum_{j_2=0}^{n_2} C_{j_2 j_1} \phi_{j_1}(t_1) \phi_{j_2}(t_1).$$

Требуемое равенство получено.

Приведем разложения повторных стохастических интегралов Стратоновича первой и второй кратностей с помощью формулы (5.20) и полиномов Лежандра, тригонометрических функций, функций Хаара и функций Радемахера–Уолша.

С помощью полиномов Лежандра:

$$\int_t^{*T} d\mathbf{f}_\tau^{(i_1)} = \sqrt{T-t} \zeta_0^{(i_1)},$$

$$\int_t^{*T} (t-\tau) d\mathbf{f}_\tau^{(i_1)} = -\frac{(T-t)^{3/2}}{2} \left(\zeta_0^{(i_1)} + \frac{1}{\sqrt{3}} \zeta_1^{(i_1)} \right),$$

$$\int_t^{*T} \int_t^{*s} d\mathbf{f}_\tau^{(i_1)} d\mathbf{f}_s^{(i_2)} = \frac{T-t}{2} \left[\zeta_0^{(i_1)} \zeta_0^{(i_2)} + \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{4i^2-1}} \left\{ \zeta_{i-1}^{(i_1)} \zeta_i^{(i_2)} - \zeta_i^{(i_1)} \zeta_{i-1}^{(i_2)} \right\} \right].$$

Для системы тригонометрических функций:

$$\int_t^{*T} d\mathbf{f}_\tau^{(i_1)} = \sqrt{T-t} \zeta_0^{(i_1)},$$

$$\int_t^{*T} (t-\tau) d\mathbf{f}_\tau^{(i_1)} = -\frac{(T-t)^{\frac{3}{2}}}{2} \left[\zeta_0^{(i_1)} + \frac{\sqrt{2}}{\pi} \sum_{r=1}^{\infty} \frac{1}{r} \zeta_{2r-1}^{(i_1)} \right],$$

$$\begin{aligned} \int_t^{*T} \int_t^{*s} d\mathbf{f}_\tau^{(i_1)} d\mathbf{f}_s^{(i_2)} &= \frac{1}{2}(T-t) \left[\zeta_0^{(i_1)} \zeta_0^{(i_2)} + \frac{1}{\pi} \sum_{r=1}^{\infty} \frac{1}{r} \left\{ \zeta_{2r}^{(i_1)} \zeta_{2r-1}^{(i_2)} - \zeta_{2r-1}^{(i_1)} \zeta_{2r}^{(i_2)} + \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \sqrt{2} \left(\zeta_{2r-1}^{(i_1)} \zeta_0^{(i_2)} - \zeta_0^{(i_1)} \zeta_{2r-1}^{(i_2)} \right) \right\} \right]. \end{aligned}$$

С помощью системы функций Хаара:

$$\int_t^{*T} d\mathbf{f}_\tau^{(i_1)} = \sqrt{T-t} \zeta_0^{(i_1)},$$

$$\int_t^{*T} (t-\tau) d\mathbf{f}_\tau^{(i_1)} = -\frac{(T-t)^{\frac{3}{2}}}{2} \left(\zeta_0^{(i_1)} + \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{j=1}^{2^n} \bar{C}_{nj} \zeta_{nj}^{(i_1)} \right),$$

$$\int_t^{*T} \int_t^{*s} d\mathbf{f}_\tau^{(i_1)} d\mathbf{f}_s^{(i_2)} = \frac{T-t}{2} \left(\zeta_0^{(i_1)} \zeta_0^{(i_2)} + \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{j=1}^{2^n} \bar{C}_{nj} (\zeta_{nj}^{(i_2)} \zeta_0^{(i_1)} - \zeta_{nj}^{(i_1)} \zeta_0^{(i_2)}) + \right.$$

$$+ \sum_{n_1=0}^{\infty} \sum_{j_1=1}^{2^{n_1}} \sum_{n_2=0}^{\infty} \sum_{j_2=1}^{2^{n_2}} \bar{C}_{n_2 j_2, n_1 j_1} \zeta_{n_2 j_2}^{(i_2)} \zeta_{n_1 j_1}^{(i_1)} \Big),$$

где

$$\bar{C}_{nj} = 2^{\frac{n}{2}} \left(2 \left(\frac{j-1}{2^n} + \frac{1}{2^{n+1}} \right)^2 - \left(\frac{j-1}{2^n} \right)^2 - \left(\frac{j}{2^n} \right)^2 \right),$$

$$\begin{aligned} \bar{C}_{n_2 j_2, n_1 j_1} = & 2^{\frac{n_1+n_2}{2}} \left(\left(\left(\min \left\{ \frac{j_2-1}{2^{n_2}} + \frac{1}{2^{n_2+1}}, \frac{j_1-1}{2^{n_1}} + \frac{1}{2^{n_1+1}} \right\} - \frac{j_1-1}{2^{n_1}} \right)^2 - \right. \right. \\ & - \left(\max \left\{ \frac{j_2-1}{2^{n_2}}, \frac{j_1-1}{2^{n_1}} \right\} - \frac{j_1-1}{2^{n_1}} \right)^2 \Big) \times \\ & \times \mathbf{1}_{\left\{ \max \left\{ \frac{j_2-1}{2^{n_2}}, \frac{j_1-1}{2^{n_1}} \right\} < \min \left\{ \frac{j_2-1}{2^{n_2}} + \frac{1}{2^{n_2+1}}, \frac{j_1-1}{2^{n_1}} + \frac{1}{2^{n_1+1}} \right\} \right\}} - \\ & - \left(\left(\min \left\{ \frac{j_2}{2^{n_2}}, \frac{j_1-1}{2^{n_1}} + \frac{1}{2^{n_1+1}} \right\} - \frac{j_1-1}{2^{n_1}} \right)^2 - \right. \\ & - \left(\max \left\{ \frac{j_2-1}{2^{n_2}} + \frac{1}{2^{n_2+1}}, \frac{j_1-1}{2^{n_1}} \right\} - \frac{j_1-1}{2^{n_1}} \right)^2 \Big) \times \\ & \times \mathbf{1}_{\left\{ \max \left\{ \frac{j_2-1}{2^{n_2}} + \frac{1}{2^{n_2+1}}, \frac{j_1-1}{2^{n_1}} \right\} < \min \left\{ \frac{j_2}{2^{n_2}}, \frac{j_1-1}{2^{n_1}} + \frac{1}{2^{n_1+1}} \right\} \right\}} + \\ & + \left(\left(\min \left\{ \frac{j_2}{2^{n_2}}, \frac{j_1}{2^{n_1}} \right\} - \frac{j_1}{2^{n_1}} \right)^2 - \right. \\ & - \left(\max \left\{ \frac{j_2-1}{2^{n_2}} + \frac{1}{2^{n_2+1}}, \frac{j_1-1}{2^{n_1}} + \frac{1}{2^{n_1+1}} \right\} - \frac{j_1}{2^{n_1}} \right)^2 \Big) \times \\ & \times \mathbf{1}_{\left\{ \max \left\{ \frac{j_2-1}{2^{n_2}} + \frac{1}{2^{n_2+1}}, \frac{j_1-1}{2^{n_1}} + \frac{1}{2^{n_1+1}} \right\} < \min \left\{ \frac{j_2}{2^{n_2}}, \frac{j_1}{2^{n_1}} \right\} \right\}} - \\ & - \left(\left(\min \left\{ \frac{j_2-1}{2^{n_2}} + \frac{1}{2^{n_2+1}}, \frac{j_1}{2^{n_1}} \right\} - \frac{j_1}{2^{n_1}} \right)^2 - \right. \\ & - \left(\max \left\{ \frac{j_2-1}{2^{n_2}}, \frac{j_1-1}{2^{n_1}} + \frac{1}{2^{n_1+1}} \right\} - \frac{j_1}{2^{n_1}} \right)^2 \Big) \times \\ & \times \mathbf{1}_{\left\{ \max \left\{ \frac{j_2-1}{2^{n_2}}, \frac{j_1-1}{2^{n_1}} + \frac{1}{2^{n_1+1}} \right\} < \min \left\{ \frac{j_2-1}{2^{n_2}} + \frac{1}{2^{n_2+1}}, \frac{j_1}{2^{n_1}} \right\} \right\}} \Big); \end{aligned}$$

$\zeta_0^{(i)} = \int_t^T \phi_0(\tau) d\mathbf{f}_\tau^{(i)}$, $\zeta_{nj}^{(l)} = \int_t^T \phi_{nj}(\tau) d\mathbf{f}_\tau^{(l)}$; $n = 0, 1, \dots$; $j = 1, 2, \dots, 2^n$ — независимые в совокупности по нижним индексам или при $i \neq l$ ($i, l = 1, \dots, m$) $N(0, 1)$ -распределенные случайные величины; $i_1, i_2 = 1, \dots, m$.

Для системы функций Радемахера–Уолша:

$$\begin{aligned}
\int_t^{*T} d\mathbf{f}_\tau^{(i_1)} &= \sqrt{T-t} \zeta_0^{(i_1)}, \\
\int_t^{*T} (t-\tau) d\mathbf{f}_\tau^{(i_1)} &= -\frac{(T-t)^{\frac{3}{2}}}{2} \left(\zeta_0^{(i_1)} + \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{0 < m_1 < \dots < m_k} \bar{C}_{m_1 \dots m_k} \zeta_{m_1 \dots m_k}^{(i_1)} \right), \\
\int_t^{*T} \int_t^{*s} d\mathbf{f}_\tau^{(i_1)} d\mathbf{f}_s^{(i_2)} &= \frac{T-t}{2} \left(\zeta_0^{(i_1)} \zeta_0^{(i_2)} + \right. \\
&+ \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{0 < m_1 < \dots < m_k} \bar{C}_{m_1 \dots m_k} (\zeta_{m_1 \dots m_k}^{(i_2)} \zeta_0^{(i_1)} - \zeta_{m_1 \dots m_k}^{(i_1)} \zeta_0^{(i_2)}) + \\
&+ \left. \sum_{k_1=1}^{\infty} \sum_{0 < m_1 < \dots < m_{k_1}} \sum_{k_2=1}^{\infty} \sum_{0 < n_1 < \dots < n_{k_2}} \bar{C}_{n_1 \dots n_{k_2}, m_1 \dots m_{k_1}} \zeta_{n_1 \dots n_{k_2}}^{(i_2)} \zeta_{m_1 \dots m_{k_1}}^{(i_1)} \right),
\end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned}
\bar{C}_{m_1 \dots m_k} &= \sum_{s_1=0}^{2^{m_1}-1} (-1)^{s_1} \dots \sum_{s_k=0}^{2^{m_k}-1} (-1)^{s_k} \times \\
&\times \mathbf{1}_{\left\{ \max \left\{ \frac{s_1}{2^{m_1}}, \dots, \frac{s_k}{2^{m_k}} \right\} < \min \left\{ \frac{s_1+1}{2^{m_1}}, \dots, \frac{s_k+1}{2^{m_k}} \right\} \right\}} \times \\
&\times \left(\left(\min \left\{ \frac{s_1+1}{2^{m_1}}, \dots, \frac{s_k+1}{2^{m_k}} \right\} \right)^2 - \left(\max \left\{ \frac{s_1}{2^{m_1}}, \dots, \frac{s_k}{2^{m_k}} \right\} \right)^2 \right), \\
\bar{C}_{n_1 \dots n_{k_2}, m_1 \dots m_{k_1}} &= \sum_{s_1=0}^{2^{m_1}-1} (-1)^{s_1} \dots \sum_{s_{k_1}=0}^{2^{m_{k_1}}-1} (-1)^{s_{k_1}} \sum_{q_1=0}^{2^{n_1}-1} (-1)^{q_1} \dots \sum_{q_{k_2}=0}^{2^{n_{k_2}}-1} (-1)^{q_{k_2}} \times \\
&\times \mathbf{1}_{\left\{ \max \left\{ \frac{s_1}{2^{m_1}}, \dots, \frac{s_{k_1}}{2^{m_{k_1}}} \right\} < \min \left\{ \frac{s_1+1}{2^{m_1}}, \dots, \frac{s_{k_1}+1}{2^{m_{k_1}}} \right\} \right\}} \mathbf{1}_{\left\{ \max \left\{ \frac{q_1}{2^{n_1}}, \dots, \frac{q_{k_2}}{2^{n_{k_2}}} \right\} < \min \left\{ \frac{q_1+1}{2^{n_1}}, \dots, \frac{q_{k_2}+1}{2^{n_{k_2}}} \right\} \right\}} \times \\
&\times \mathbf{1}_{\left\{ \max \left\{ \max \left\{ \frac{q_1}{2^{n_1}}, \dots, \frac{q_{k_2}}{2^{n_{k_2}}} \right\}, \max \left\{ \frac{s_1}{2^{m_1}}, \dots, \frac{s_{k_1}}{2^{m_{k_1}}} \right\} \right\} < \min \left\{ \min \left\{ \frac{q_1+1}{2^{n_1}}, \dots, \frac{q_{k_2}+1}{2^{n_{k_2}}} \right\}, \min \left\{ \frac{s_1+1}{2^{m_1}}, \dots, \frac{s_{k_1}+1}{2^{m_{k_1}}} \right\} \right\} \right\}} \\
&\times \left(\left(\min \left\{ \min \left\{ \frac{q_1+1}{2^{n_1}}, \dots, \frac{q_{k_2}+1}{2^{n_{k_2}}} \right\}, \min \left\{ \frac{s_1+1}{2^{m_1}}, \dots, \frac{s_{k_1}+1}{2^{m_{k_1}}} \right\} \right\} - \right. \right. \\
&\quad \left. \left. - \max \left\{ \frac{s_1}{2^{m_1}}, \dots, \frac{s_{k_1}}{2^{m_{k_1}}} \right\} \right)^2 - \right. \\
&\quad \left. - \left(\max \left\{ \max \left\{ \frac{q_1}{2^{n_1}}, \dots, \frac{q_{k_2}}{2^{n_{k_2}}} \right\}, \max \left\{ \frac{s_1}{2^{m_1}}, \dots, \frac{s_{k_1}}{2^{m_{k_1}}} \right\} \right\} - \right. \right. \\
&\quad \left. \left. - \max \left\{ \frac{s_1}{2^{m_1}}, \dots, \frac{s_{k_1}}{2^{m_{k_1}}} \right\} \right)^2 \right) +
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& +2 \cdot \mathbf{1} \left\{ \max \left\{ \max \left\{ \frac{q_1}{2^{n_1}}, \dots, \frac{q_{k_2}}{2^{n_{k_2}}} \right\}, \min \left\{ \frac{s_1+1}{2^{m_1}}, \dots, \frac{s_{k_1}+1}{2^{m_{k_1}}} \right\} \right\} < \min \left\{ \min \left\{ \frac{q_1+1}{2^{n_1}}, \dots, \frac{q_{k_2}+1}{2^{n_{k_2}}} \right\}, 1 \right\} \right\} \times \\
& \times \left(\min \left\{ \frac{s_1+1}{2^{m_1}}, \dots, \frac{s_{k_1}+1}{2^{m_{k_1}}} \right\} - \max \left\{ \frac{s_1}{2^{m_1}}, \dots, \frac{s_{k_1}}{2^{m_{k_1}}} \right\} \right) \times \\
& \times \left(\min \left\{ \min \left\{ \frac{q_1+1}{2^{n_1}}, \dots, \frac{q_{k_2}+1}{2^{n_{k_2}}} \right\}, 1 \right\} - \right. \\
& \left. - \max \left\{ \max \left\{ \frac{q_1}{2^{n_1}}, \dots, \frac{q_{k_2}}{2^{n_{k_2}}} \right\}, \min \left\{ \frac{s_1+1}{2^{m_1}}, \dots, \frac{s_{k_1}+1}{2^{m_{k_1}}} \right\} \right\} \right);
\end{aligned}$$

$\zeta_0^{(p)} = \int_t^T \phi_0(\tau) d\mathbf{f}_\tau^{(p)}$, $\zeta_{m_1 \dots m_k}^{(g)} = \int_t^T \phi_{m_1 \dots m_k}(\tau) d\mathbf{f}_\tau^{(g)}$; $0 < m_1 < \dots < m_k$; $k, m_1, \dots, m_k = 1, 2, \dots$ — независимые в совокупности по нижним индексам или при $p \neq g$ ($p, g = 1, \dots, m$) $N(0, 1)$ -распределенные случайные величины; $i_1, i_2 = 1, \dots, m$.

По-видимому, из-за своей сложности (по сравнению с разложениями по полиномам Лежандра и тригонометрическим функциям), приведенные разложения с помощью систем Хаара и Радемахера–Уолша представляют скорее теоретический, нежели практический интерес.

Кажется вполне естественной возможность трансформации теоремы 5.1 на случай повторных стохастических интегралов Стратоновича произвольной кратности. Однако, как оказалось, (см. следующий раздел) это вовсе не так, и именно структура повторных стохастических интегралов Ито (а не Стратоновича) оказалась более подходящей для разложения в повторные ортогональные ряды.

5.3 Разложения повторных стохастических интегралов Стратоновича третьей кратности

Разовьем подход, изложенный в предыдущем разделе для повторных стохастических интегралов Стратоновича третьей кратности, а заодно увидим, что указанные интегралы имеют ”плохую” структуру (для метода кратных рядов Фурье), в отличие от ”хорошей” структуры повторных стохастических интегралов Ито (см. теорему 5.1).

Запишем соотношение, связывающее с в.1 упомянутые интегралы третьей кратности:

$$\begin{aligned}
& J^*[\psi^{(3)}]_{T,t} = J[\psi^{(3)}]_{T,t} + \\
& + \frac{1}{2} \mathbf{1}_{\{i_1=i_2 \neq 0\}} \int_t^T \psi_3(t_3) \int_t^{t_3} \psi_2(t_2) \psi_1(t_2) dt_2 d\mathbf{f}_{t_3}^{(i_3)} +
\end{aligned}$$

$$+\frac{1}{2}\mathbf{1}_{\{i_2=i_3\neq 0\}}\int_t^T\psi_3(t_3)\psi_2(t_3)\int_t^{t_3}\psi_1(t_1)d\mathbf{f}_{t_1}^{(i_1)}dt_3. \quad (5.23)$$

Отсюда видно, что имеются следующие частные случаи: 1. i_1, i_2, i_3 попарно различны; 2. $i_1 = i_2 \neq i_3$; 3. $i_1 \neq i_2 = i_3$; 4. $i_1 = i_3 \neq i_2$; 5. $i_1 = i_2 = i_3$. Здесь предполагается, что $i_1, i_2, i_3 = 1, \dots, m$.

Далее мы увидим, что первые три частных случая допускают (с естественными изменениями) обобщение подхода, изложенного в предыдущем разделе данной главы, а два последних попросту нет.

Ясно, что в первом случае повторные стохастические интегралы Стратоновича и Ито просто совпадают (это же касается и произвольной кратности k), поэтому к этим интегралам применима теорема 5.1.

Перейдем к рассмотрению второго частного случая.

Из теоремы 5.1 при $i_1 = i_2 \neq i_3$ следует, что

$$\begin{aligned} J[\psi^{(3)}]_{T,t} &= \sum_{j_1, j_2, j_3=0}^{\infty} C_{j_3 j_2 j_1} \left(\zeta_{j_1}^{(i_1)} \zeta_{j_2}^{(i_1)} \zeta_{j_3}^{(i_3)} - \mathbf{1}_{\{j_1=j_2\}} \zeta_{j_3}^{(i_3)} \right) = \\ &= \sum_{j_1, j_2, j_3=0}^{\infty} C_{j_3 j_2 j_1} \zeta_{j_1}^{(i_1)} \zeta_{j_2}^{(i_1)} \zeta_{j_3}^{(i_3)} - \sum_{j_1, j_3=0}^{\infty} C_{j_3 j_1 j_1} \zeta_{j_3}^{(i_3)}. \end{aligned}$$

Покажем, что в среднеквадратическом смысле

$$\sum_{j_1, j_3=0}^{\infty} C_{j_3 j_1 j_1} \zeta_{j_3}^{(i_3)} = \frac{1}{2} \int_t^T \psi_3(t_3) \int_t^{t_3} \psi_2(t_1) \psi_1(t_1) dt_1 d\mathbf{f}_{t_3}^{(i_3)}. \quad (5.24)$$

Сначала заметим, что согласно известному утверждению о сведении предела к повторному и согласно теореме о замене порядка интегрирования в повторных стохастических интегралах (см. главу 3) равенство (5.24) можно переписать в виде:

$$\sum_{j_3=0}^{\infty} \sum_{j_1=0}^{\infty} C_{j_3 j_1 j_1} \zeta_{j_3}^{(i_3)} = \frac{1}{2} \int_t^T \psi_1(t_1) \psi_2(t_1) \int_{t_1}^T \psi_3(t_3) d\mathbf{f}_{t_3}^{(i_3)} dt_1.$$

Покажем, что

$$\begin{aligned} K_2(t_1, t_3) &= \begin{cases} \frac{1}{2} \psi_3(t_3) \psi_1(t_1) \psi_2(t_1), & t_1 < t_3 \\ 0, & t_1 > t_3 \\ \frac{1}{6} \psi_3(t_1) \psi_1(t_1) \psi_2(t_1), & t_1 = t_3 \end{cases} = \\ &= \sum_{j_3=0}^{\infty} \sum_{j_2, j_1=0}^{\infty} C_{j_3 j_2 j_1} \phi_{j_1}(t_1) \phi_{j_2}(t_1) \phi_{j_3}(t_3), \end{aligned} \quad (5.25)$$

где $t_1, t_3 \in [t, T]$ и сходимость рядов по t_1 и t_3 равномерная на интервалах непрерывности разлагаемых функций.

Рассмотрим вспомогательную функцию

$$K'_2(t_1, t_2, t_3) = \begin{cases} \psi_3(t_3)\psi_2(t_2)\psi_1(t_1), & t_1 \leq t_2 < t_3 \\ \psi_3(t_3)\psi_1(t_2)\psi_2(t_1), & t_2 \leq t_1 < t_3 \\ 0, & \text{иначе} \end{cases}, \quad t_1, t_2, t_3 \in [t, T].$$

Зафиксируем t_1, t_2 и разложим функцию $K'_2(t_1, t_2, t_3)$ по переменной t_3 на отрезке $[t, T]$ в ряд Фурье.

$$\begin{aligned} K'_2(t_1, t_2, t_3) = & \sum_{j_3=0}^{\infty} \left(\psi_1(t_1)\psi_2(t_2) \int_{t_2}^T \psi_3(t_3)\phi_{j_3}(t_3)dt_3 \mathbf{1}_{\{t_1 < t_2\}} + \right. \\ & + \psi_1(t_1)\psi_2(t_2) \int_{t_2}^T \psi_3(t_3)\phi_{j_3}(t_3)dt_3 \mathbf{1}_{\{t_1=t_2\}} + \\ & \left. + \psi_1(t_2)\psi_2(t_1) \int_{t_1}^T \psi_3(t_3)\phi_{j_3}(t_3)dt_3 \mathbf{1}_{\{t_2 < t_1\}} \right) \phi_{j_3}(t_3). \end{aligned} \quad (5.26)$$

Нетрудно видеть, что функция, стоящая в скобках, имеет вид

$$\begin{cases} \psi_1(t_1)\Psi_2(t_2), & t_1 \leq t_2 \\ \psi_1(t_2)\Psi_2(t_1), & t_2 \leq t_1 \end{cases}; \quad \Psi_2(s) = \psi_2(s) \int_s^T \psi_3(t_3)\phi_{j_3}(t_3)dt_3.$$

Поэтому эта функция принадлежит классу Гельдера $C^1([t, T]^2)$ (см. предыдущий раздел). Разложим ее в квадрате $[t, T]^2$ в кратный ряд Фурье, суммируемый по Принсгейму и подставим результат в (5.26):

$$K'_2(t_1, t_2, t_3) = \sum_{j_3=0}^{\infty} \lim_{p_1, p_2 \rightarrow \infty} \sum_{j_1=0}^{p_1} \sum_{j_2=0}^{p_2} (C_{j_3 j_2 j_1} + C_{j_3 j_1 j_2}) \phi_{j_1}(t_1) \phi_{j_2}(t_2) \phi_{j_3}(t_3).$$

Полагая в этом равенстве $t_1 = t_2$ получаем (см. предыдущий раздел)

$$\frac{1}{2} \psi_3(t_3) \psi_1(t_1) \psi_2(t_1) = \sum_{j_3=0}^{\infty} \sum_{j_2, j_1=0}^{\infty} C_{j_3 j_2 j_1} \phi_{j_1}(t_1) \phi_{j_2}(t_1) \phi_{j_3}(t_3).$$

Рассмотрим вспомогательную функцию

$$K_4(t_1, t_2, t_3) = \begin{cases} \psi_3(t_3)\psi_2(t_2)\psi_1(t_1), & t_1 \leq t_2 \leq t_3 \\ \psi_3(t_3)\psi_1(t_2)\psi_2(t_1), & t_2 \leq t_1 \leq t_3 \\ \psi_1(t_3)\psi_3(t_2)\psi_2(t_1), & t_3 \leq t_1 \leq t_2 \\ \psi_2(t_3)\psi_3(t_2)\psi_1(t_1), & t_1 \leq t_3 \leq t_2 \\ \psi_1(t_3)\psi_2(t_2)\psi_3(t_1), & t_3 \leq t_2 \leq t_1 \\ \psi_2(t_3)\psi_1(t_2)\psi_3(t_1), & t_2 \leq t_3 \leq t_1 \end{cases}, \quad t_1, t_2, t_3 \in [t, T].$$

Разложим эту функцию в кубе $[t, T]^3$ в кратный ряд Фурье, суммируемый по Принсгейму:

$$K_4(t_1, t_2, t_3) = \lim_{n_1, n_2, n_3 \rightarrow \infty} \sum_{j_1=0}^{n_1} \sum_{j_2=0}^{n_2} \sum_{j_3=0}^{n_3} C_{j_3 j_2 j_1}^{(1)} \prod_{l=1}^3 \phi_{j_l}(t_l), \quad (5.27)$$

где

$$C_{j_3 j_2 j_1}^{(1)} = \int_{[t, T]^3} K_4(t_1, t_2, t_3) \prod_{l=1}^3 \phi_{j_l}(t_l) dt_1 dt_2 dt_3.$$

Функция $K_4(t_1, t_2, t_3)$ подобрана так, чтобы после использования свойства аддитивности римановых интегралов и использования замены порядка интегрирования в этих интегралах мы пришли к равенству:

$$C_{j_3 j_2 j_1}^{(1)} = C_{j_3 j_2 j_1} + C_{j_3 j_1 j_2} + C_{j_2 j_1 j_3} + C_{j_2 j_3 j_1} + C_{j_1 j_2 j_3} + C_{j_1 j_3 j_2}. \quad (5.28)$$

Подставляя (5.28) в (5.27), полагая в полученном равенстве $t_1 = t_2 = t_3$ и разбивая предел в правой части полученного равенства на 6 пределов получаем

$$\frac{1}{6} \psi_1(t_1) \psi_2(t_1) \psi_3(t_1) = \sum_{j_1, j_2, j_3=0}^{\infty} C_{j_3 j_2 j_1} \phi_{j_1}(t_1) \phi_{j_2}(t_1) \phi_{j_3}(t_1).$$

Полученные результаты доказывают (5.25).

Рассмотрим

$$\begin{aligned} & \mathbb{M} \left\{ \left(\frac{1}{2} \psi_1(t_1) \psi_2(t_1) \int_{t_1}^T \psi_3(t_3) d\mathbf{f}_{t_3}^{(i_3)} - \sum_{j_3=0}^n \zeta_{j_3}^{(i_3)} \sum_{j_1, j_2=0}^{\infty} C_{j_3 j_2 j_1} \phi_{j_1}(t_1) \phi_{j_2}(t_1) \right)^2 \right\} = \\ & = \mathbb{M} \left\{ \left(\int_t^T \left(K_2(t_1, t_3) - \sum_{j_3=0}^n \phi_{j_3}(t_3) \sum_{j_1, j_2=0}^{\infty} C_{j_3 j_2 j_1} \phi_{j_1}(t_1) \phi_{j_2}(t_1) \right) d\mathbf{f}_{t_3}^{(i_3)} \right)^2 \right\} = \\ & = \int_t^T \left(K_2(t_1, t_3) - \sum_{j_3=0}^n \phi_{j_3}(t_3) \sum_{j_1, j_2=0}^{\infty} C_{j_3 j_2 j_1} \phi_{j_1}(t_1) \phi_{j_2}(t_1) \right)^2 dt_3. \end{aligned}$$

Правая часть последнего равенства стремится к нулю при $n \rightarrow \infty$ в силу равномерной сходимости ряда по $t_3 \in (t, T)$ при $t_3 \neq t_1$ (t_1 фиксировано).

Таким образом, в среднеквадратическом смысле

$$\sum_{j_3=0}^{\infty} \zeta_{j_3}^{(i_3)} \sum_{j_1, j_2=0}^{\infty} C_{j_3 j_2 j_1} \phi_{j_1}(t_1) \phi_{j_2}(t_1) = \frac{1}{2} \psi_1(t_1) \psi_2(t_1) \int_{t_1}^T \psi_3(t_3) d\mathbf{f}_{t_3}^{(i_3)}.$$

С учетом равенства Парсеваля имеем

$$\begin{aligned} & \mathbb{M} \left\{ \left(\int_t^T \sum_{j_3=0}^{\infty} \zeta_{j_3}^{(i_3)} \sum_{j_1, j_2=0}^{\infty} C_{j_3 j_2 j_1} \phi_{j_1}(t_1) \phi_{j_2}(t_1) dt_1 - \right. \right. \\ & \quad \left. \left. - \int_t^T \sum_{j_3=0}^n \zeta_{j_3}^{(i_3)} \sum_{j_1, j_2=0}^{\infty} C_{j_3 j_2 j_1} \phi_{j_1}(t_1) \phi_{j_2}(t_1) dt_1 \right)^2 \right\} \leq \\ & \leq L \int_t^T \sum_{j_3=n+1}^{\infty} \left(\sum_{j_1, j_2=0}^{\infty} C_{j_3 j_2 j_1} \phi_{j_1}(t_1) \phi_{j_2}(t_1) \right)^2 dt_1 = \\ & L \int_t^T \left(\frac{1}{4} \psi_1^2(t_1) \psi_2^2(t_1) \int_{t_1}^T \psi_3^2(t_3) dt_3 - \sum_{j_3=0}^n \left(\sum_{j_1, j_2=0}^{\infty} C_{j_3 j_2 j_1} \phi_{j_1}(t_1) \phi_{j_2}(t_1) \right)^2 \right) dt_1, \end{aligned}$$

где L — постоянная.

В силу непрерывности (здесь $\phi_j(\tau)$ предполагаются непрерывными) и неубывания членов функциональной последовательности

$$u_n(t_1) = \sum_{j_3=0}^n \left(\sum_{j_1, j_2=0}^{\infty} C_{j_3 j_2 j_1} \phi_{j_1}(t_1) \phi_{j_2}(t_1) \right)^2,$$

а также в силу свойства непрерывности предельной функции $u(t_1) = \frac{1}{4} \psi_1^2(t_1) \psi_2^2(t_1) \int_{t_1}^T \psi_3^2(t_3) dt_3$ по признаку Дини имеем равномерную сходимость $u_n(t_1)$ к $u(t_1)$ на отрезке $[t, T]$. Поэтому, осуществляя предельный переход под знаком интеграла в последнем равенстве, получаем, что в среднеквадратическом смысле

$$\sum_{j_3=0}^{\infty} \zeta_{j_3}^{(i_3)} \int_t^T \sum_{j_1, j_2=0}^{\infty} C_{j_3 j_2 j_1} \phi_{j_1}(t_1) \phi_{j_2}(t_1) dt_1 = \frac{1}{2} \int_t^T \psi_1(t_1) \psi_2(t_1) \int_{t_1}^T \psi_3(t_3) d\mathbf{f}_{t_3}^{(i_3)} dt_1.$$

Меняя в левой части этого равенства знак интеграла и знак правого ряда, что возможно в силу равномерной сходимости последнего по t_1 на отрезке $[t, T]$, и учитывая ортонормированность функций $\phi_j(\tau)$, приходим к (5.24).

Таким образом

$$J^*[\psi^{(3)}]_{T,t} = \sum_{j_1, j_2, j_3=0}^{\infty} C_{j_3 j_2 j_1} \prod_{l=1}^3 \zeta_{j_l}^{(i_l)} \quad (i_1 = i_2 \neq i_3),$$

где ряд сходится в среднеквадратическом смысле.

Перейдем к рассмотрению третьего частного случая.
Из теоремы 5.1 при $i_1 \neq i_2 = i_3$ следует, что

$$\begin{aligned} J[\psi^{(3)}]_{T,t} &= \sum_{j_1, j_2, j_3=0}^{\infty} C_{j_3 j_2 j_1} \left(\zeta_{j_1}^{(i_1)} \zeta_{j_2}^{(i_1)} \zeta_{j_3}^{(i_3)} - \mathbf{1}_{\{j_2=j_3\}} \zeta_{j_1}^{(i_1)} \right) = \\ &= \sum_{j_1, j_2, j_3=0}^{\infty} C_{j_3 j_2 j_1} \zeta_{j_1}^{(i_1)} \zeta_{j_2}^{(i_1)} \zeta_{j_3}^{(i_3)} - \sum_{j_1, j_3=0}^{\infty} C_{j_3 j_3 j_1} \zeta_{j_1}^{(i_1)}. \end{aligned}$$

Покажем, что в среднеквадратическом смысле

$$\sum_{j_1, j_3=0}^{\infty} C_{j_3 j_3 j_1} \zeta_{j_1}^{(i_1)} = \frac{1}{2} \int_t^T \psi_3(t_3) \psi_2(t_3) \int_t^{t_3} \psi_1(t_1) d\mathbf{f}_{t_1}^{(i_1)} dt_3. \quad (5.29)$$

В левой части (5.29) кратный ряд можно представить в виде повторного в любом порядке согласно известному утверждению о сведении предела к повторному.

Покажем, что

$$\begin{aligned} K_3(t_1, t_3) &= \begin{cases} \frac{1}{2} \psi_3(t_3) \psi_2(t_3) \psi_1(t_1), & t_1 < t_3 \\ 0, & t_1 > t_3 \\ \frac{1}{6} \psi_3(t_1) \psi_1(t_1) \psi_2(t_1), & t_1 = t_3 \end{cases} = \\ &= \sum_{j_1=0}^{\infty} \sum_{j_2, j_3=0}^{\infty} C_{j_3 j_2 j_1} \phi_{j_1}(t_1) \phi_{j_2}(t_3) \phi_{j_3}(t_3), \end{aligned} \quad (5.30)$$

где $t_2, t_3 \in [t, T]$ и ряды сходятся равномерно по t_1 и t_3 на интервалах непрерывности разлагаемых функций.

Рассмотрим вспомогательную функцию

$$K'_3(t_1, t_2, t_3) = \begin{cases} \psi_3(t_3) \psi_2(t_2) \psi_1(t_1), & t_1 < t_2 \leq t_3 \\ \psi_3(t_2) \psi_2(t_3) \psi_1(t_1), & t_1 < t_3 \leq t_2, \quad t_1, t_2, t_3 \in [t, T]. \\ 0, & \text{иначе} \end{cases}$$

Зафиксируем t_2, t_3 и разложим функцию $K'_3(t_1, t_2, t_3)$ по переменной t_1 на отрезке $[t, T]$ в ряд Фурье.

$$\begin{aligned} K'_3(t_1, t_2, t_3) &= \sum_{j_1=0}^{\infty} \left(\psi_2(t_2) \psi_3(t_3) \int_t^{t_2} \psi_1(t_1) \phi_{j_1}(t_1) dt_1 \mathbf{1}_{\{t_2 < t_3\}} + \right. \\ &\quad \left. + \psi_2(t_2) \psi_3(t_3) \int_t^{t_2} \psi_1(t_1) \phi_{j_1}(t_1) dt_1 \mathbf{1}_{\{t_2 = t_3\}} + \right. \end{aligned}$$

$$+ \psi_3(t_2) \psi_2(t_3) \int_t^{t_3} \psi_1(t_1) \phi_{j_1}(t_1) dt_1 \mathbf{1}_{\{t_3 < t_2\}} \Big) \phi_{j_1}(t_1). \quad (5.31)$$

Нетрудно видеть, что функция, стоящая в скобках, имеет вид

$$\begin{cases} \psi_3(t_3) \Psi_3(t_2), & t_2 \leq t_3 \\ \psi_3(t_2) \Psi_3(t_3), & t_3 \leq t_2 \end{cases}; \quad \Psi_3(s) = \psi_2(s) \int_t^s \psi_1(t_1) \phi_{j_1}(t_1) dt_1.$$

Поэтому эта функция принадлежит классу Гельдера $C^1([t, T]^2)$ (см. предыдущий раздел). Разложим ее в квадрате $[t, T]^2$ в кратный ряд Фурье, суммируемый по Принсгейму и подставим результат в (5.31):

$$K'_3(t_1, t_2, t_3) = \sum_{j_1=0}^{\infty} \lim_{p_2, p_3 \rightarrow \infty} \sum_{j_2=0}^{p_2} \sum_{j_3=0}^{p_3} (C_{j_3 j_2 j_1} + C_{j_2 j_3 j_1}) \phi_{j_1}(t_1) \phi_{j_2}(t_2) \phi_{j_3}(t_3).$$

Полагая в этом равенстве $t_2 = t_3$ получаем (см. предыдущий раздел)

$$\frac{1}{2} \psi_1(t_1) \psi_2(t_3) \psi_3(t_3) = \sum_{j_1=0}^{\infty} \sum_{j_2, j_3=0}^{\infty} C_{j_3 j_2 j_1} \phi_{j_1}(t_1) \phi_{j_2}(t_3) \phi_{j_3}(t_3).$$

Равенство (5.30) доказано. Дальнейшее доказательство аналогично предыдущему случаю.

Таким образом, получаем

$$J^*[\psi^{(3)}]_{T,t} = \sum_{j_1, j_2, j_3=0}^{\infty} C_{j_3 j_2 j_1} \prod_{l=1}^3 \zeta_{j_l}^{(i_l)} \quad (i_1 \neq i_2 = i_3),$$

где ряд сходится в среднеквадратическом смысле.

Теперь становится ясно, что в четвертом и пятом случаях изложенный выше подход не проходит.

В пятом частном случае выручает формула: $\int_t^{*T} \dots \int_t^{*t_2} d\mathbf{f}_{t_1}^{(i_1)} \dots d\mathbf{f}_{t_3}^{(i_1)} = \frac{1}{3!} \left(\int_t^{*T} d\mathbf{f}_{t_1}^{(i_1)} \right)^3$ с в.1.

В четвертом частном случае рассматриваемые стохастические интегралы Ито и Стратоновича с в.1 совпадут, но как следует из теоремы 5.1 ряд $\sum_{j_3, j_2, j_1=0}^{\infty} C_{j_3 \dots j_1} \prod_{l=1}^3 \zeta_{j_l}^{(i_l)}$ уже не будет сходиться к стохастическому интегралу Стратоновича $J^*[\psi^{(3)}]_{T,t}$ при $i_1 = i_3 \neq i_2$. В этом случае придется воспользоваться теоремой 5.1 и формулой (5.23) при $i_1 = i_3 \neq i_2$.

Всвязи со сказанным, мы не будем развивать рассматриваемый подход дальше, поскольку он имеет существенные ограничения.

5.4 Разложение повторных стохастических интегралов по мартингальным пуассоновским мерам

Введем в рассмотрение следующий повторный стохастический интеграл

$$P[\chi^{(k)}]_{T,t} = \int_t^T \int_X \chi_k(t_k, \mathbf{y}_k) \dots \int_t^{t_2} \int_X \chi_1(t_1, \mathbf{y}_1) \tilde{\nu}^{(i_1)}(dt_1, d\mathbf{y}_1) \dots \tilde{\nu}^{(i_k)}(dt_k, d\mathbf{y}_k), \quad (5.32)$$

где $\mathfrak{R}^n \stackrel{\text{def}}{=} X$; $i_1, \dots, i_k = 0, 1, \dots, m$; $\nu^{(i)}(dt, d\mathbf{y})$ — независимые пуассоновские меры, заданные в $[0, T] \times X$ и удовлетворяющие условиям (I)–(III) разд. 1.2.5; $\tilde{\nu}^{(i)}(dt, d\mathbf{y}) = \nu^{(i)}(dt, d\mathbf{y}) - \Pi(d\mathbf{y})dt$ — мартингальные пуассоновские меры; $i = 1, \dots, m$; $\tilde{\nu}^{(0)}(dt, d\mathbf{y}) \stackrel{\text{def}}{=} \Pi(d\mathbf{y})dt$; $\chi_l(\tau, \mathbf{y}) = \psi_l(\tau)\varphi_l(\mathbf{y})$; $\psi_l(\tau) : [t, T] \rightarrow \mathfrak{R}^1$; $\varphi_l(\mathbf{y}) : X \rightarrow \mathfrak{R}^1$; $\chi_l(s, \mathbf{y}) \in H_2(\Pi, [t, T])$, $l = 1, \dots, k$; определение класса $H_2(\Pi, [t, T])$ приводится в разд. 1.4.1.

Теорема 5.2 Пусть выполнены следующие условия:

1. $\psi_i(\tau)$, $i = 1, 2$, — непрерывно дифференцируемые на промежутке $[t, T]$ функции.
2. $\{\phi_j(x)\}_{j=0}^\infty$ — полная ортонормированная система функций в пространстве $L_2([t, T])$.
3. $\int_X |\varphi_l(\mathbf{y})|^s \Pi(d\mathbf{y}) < \infty$, $l = 1, \dots, k$; $s = 1, 2, \dots, 2^{k+1}$.

Тогда повторный стохастический интеграл по мартингальным пуассоновским мерам $P[\chi^{(k)}]_{T,t}$ разлагается в сходящийся в средне-квадратическом смысле кратный ряд

$$P[\chi^{(k)}]_{T,t} = \sum_{j_1, \dots, j_k=0}^\infty C_{j_k \dots j_1} \left(\prod_{l=1}^k \pi_{(j_l)T,t}^{(l, i_l)} - \right. \\ \left. - \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{(l_1, \dots, l_k) \in \mathcal{G}_k} \prod_{r=1}^k \phi_{j_r}(\tau_{l_r}) \int_X \varphi_r(\mathbf{y}) \tilde{\nu}^{(i_r)}([\tau_{l_r}, \tau_{l_r+1}), d\mathbf{y}) \right), \quad (5.33)$$

где $\mathcal{G}_k = \mathcal{H}_k \setminus \mathcal{L}_k$;

$$\mathcal{H}_k = \{(l_1, \dots, l_k) : l_1, \dots, l_k = 0, 1, \dots, N-1\},$$

$$\mathcal{L}_k = \left\{ (l_1, \dots, l_k) : l_1, \dots, l_k = 0, 1, \dots, N-1; \right. \\ \left. l_g \neq l_r (g \neq r); g, r = 1, \dots, k \right\};$$

$\pi_{(j)T,t}^{(l,i_l)} = \int_t^T \int_X \phi_j(\tau) \varphi_l(\mathbf{y}) \tilde{\nu}^{(i_l)}(d\tau, d\mathbf{y})$ — независимые при различных $i_l \neq 0$ и некоррелированные при различных j случайные величины;

$$C_{j_k \dots j_1} = \int_{[t,T]^k} K(t_1, \dots, t_k) \prod_{l=1}^k \phi_{j_l}(t_l) dt_1 \dots dt_k;$$

$$K(t_1, \dots, t_k) = \begin{cases} \psi_1(t_1) \dots \psi_k(t_k), & t_1 < \dots < t_k; \\ 0, & \text{иначе} \end{cases} \quad t_1, \dots, t_k \in [t, T].$$

Данная теорема доказывается также, как и теорема 5.1. Небольшие отличия будут лишь в установлении аналогов лемм 5.1–5.3 для рассматриваемого случая.

Установим справедливость ряда лемм.

Лемма 5.4. Пусть $\psi_l(\tau)$ — непрерывные на промежутке $[t, T]$ функции, а функции $\varphi_l(\mathbf{y})$ таковы, что $\int_X |\varphi_l(\mathbf{y})|^p \Pi(d\mathbf{y}) < \infty$, $p = 1, 2$, $l = 1, \dots, k$. Тогда

$$P[\bar{\chi}^{(k)}]_{T,t} = \text{l.i.m.}_{N \rightarrow \infty} \sum_{j_k=0}^{N-1} \dots \sum_{j_1=0}^{j_2-1} \prod_{l=1}^k \int_X \chi_l(\tau_{j_l}, \mathbf{y}) \bar{\nu}^{(i_l)}([\tau_{j_l}, \tau_{j_{l+1}}), d\mathbf{y}) \quad \text{с в.1,} \quad (5.34)$$

где $\{\tau_{j_l}\}_{j_l=0}^{N-1}$ — разбиение промежутка $[t, T]$, которое удовлетворяет условию (5.5), $\bar{\nu}^{(i)}([\tau, s), d\mathbf{y}) = \tilde{\nu}^{(i)}([\tau, s), d\mathbf{y})$ или $\nu^{(i)}([\tau, s), d\mathbf{y})$; интеграл $P[\bar{\chi}^{(k)}]_{T,t}$ отличается от интеграла $P[\chi^{(k)}]_{T,t}$ тем, что в $P[\bar{\chi}^{(k)}]_{T,t}$ вместо $\tilde{\nu}^{(i_l)}(dt_l, d\mathbf{y}_l)$ стоят $\bar{\nu}^{(i_l)}(dt_l, d\mathbf{y}_l)$, $l = 1, \dots, k$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Используя (1.62) при $r = 2$ и (1.63), (1.64) при $r = 1$, а также условия леммы 5.4, нетрудно заметить, что интегральная сумма интеграла $P[\bar{\chi}^{(k)}]_{T,t}$ в условиях леммы 5.4 может быть представлена в виде допредельного выражения из правой части (5.34) и величины, которая стремится в среднеквадратическом смысле к нулю при $N \rightarrow \infty$. $\square$

Введем в рассмотрение следующие повторные стохастические интегралы:

$$\begin{aligned} & \text{l.i.m.}_{N \rightarrow \infty} \sum_{j_1, \dots, j_k=0}^{N-1} \Phi(\tau_{j_1}, \dots, \tau_{j_k}) \prod_{l=1}^k \int_X \varphi_l(\mathbf{y}) \tilde{\nu}^{(i_l)}([\tau_{j_l}, \tau_{j_{l+1}}), d\mathbf{y}) \stackrel{\text{def}}{=} P[\Phi]_{T,t}^{(k)}, \\ & \int_t^T \dots \int_t^{t_2} \Phi(t_1, \dots, t_k) \int_X \varphi_1(\mathbf{y}) \tilde{\nu}^{(i_1)}(dt_1, d\mathbf{y}) \dots \int_X \varphi_k(\mathbf{y}) \tilde{\nu}^{(i_k)}(dt_k, d\mathbf{y}) \stackrel{\text{def}}{=} \end{aligned}$$

$$\stackrel{\text{def}}{=} \hat{P}[\Phi]_{T,t}^{(k)},$$

где сохранен смысл обозначений, входящих в (5.34); $\Phi(t_1, \dots, t_k) : [t, T]^k \rightarrow \mathbb{R}^1$ — ограниченная неслучайная функция.

Заметим, что если функции $\varphi_l(\mathbf{y})$, $l = 1, \dots, k$, удовлетворяют условиям леммы 5.4, а функция $\Phi(t_1, \dots, t_k)$ непрерывна, то для интеграла $\hat{P}[\Phi]_{T,t}^{(k)}$ справедливо с вероятностью 1 равенство типа (5.34).

Лемма 5.5. Пусть для $l = 1, \dots, k$ выполнены условия $g_l(\tau, \mathbf{y}) = h_l(\tau)\varphi_l(\mathbf{y})$; $h_l(\tau) : [t, T] \rightarrow \mathbb{R}^1$ — непрерывная функция, функции $\varphi_l(\mathbf{y}) : X \rightarrow \mathbb{R}^1$ удовлетворяют условию

$$\int_X |\varphi_l(\mathbf{y})|^p \Pi(d\mathbf{y}) < \infty, \quad p = 1, 2, 3, \dots, 2^{k+1}.$$

Тогда

$$\prod_{l=1}^k \int_t^T \int_X g_l(s, \mathbf{y}) \bar{\nu}^{(i_l)}(ds, d\mathbf{y}) = P[\Phi]_{T,t}^{(k)} \text{ с в.1,}$$

$$\text{где } \Phi(t_1, \dots, t_k) = \prod_{l=1}^k h_l(t_l).$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Обозначим

$$J[\bar{g}_l]_N \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{j=0}^{N-1} \int_X g_l(\tau_j, \mathbf{y}) \bar{\nu}^{(i_l)}([\tau_j, \tau_{j+1}), d\mathbf{y}),$$

$$J[\bar{g}_l]_{T,t} \stackrel{\text{def}}{=} \int_t^T \int_X g_l(s, \mathbf{y}) \bar{\nu}^{(i_l)}(ds, d\mathbf{y}).$$

Заметим, что

$$\begin{aligned} & \prod_{l=1}^k J[\bar{g}_l]_N - \prod_{l=1}^k J[\bar{g}_l]_{T,t} = \\ & = \sum_{l=1}^k \left(\prod_{q=1}^{l-1} J[\bar{g}_q]_{T,t} \right) (J[\bar{g}_l]_N - J[\bar{g}_l]_{T,t}) \left(\prod_{q=l+1}^k J[\bar{g}_q]_N \right). \end{aligned}$$

Используя неравенства Минковского и Коши–Буняковского, вместе с (1.62)–(1.64) и условиями леммы 5.5 получаем

$$\left(\mathbb{M} \left\{ \left| \prod_{l=1}^k J[\bar{g}_l]_N - \prod_{l=1}^k J[\bar{g}_l]_{T,t} \right|^2 \right\} \right)^{\frac{1}{2}} \leq C_k \sum_{l=1}^k \left(\mathbb{M} \{ |J[\bar{g}_l]_N - J[\bar{g}_l]_{T,t}|^4 \} \right)^{\frac{1}{4}}, \quad (5.35)$$

где $C_k < \infty$. Поскольку $J[\bar{g}_l]_N - J[\bar{g}_l]_{T,t} = \sum_{q=0}^{N-1} J[\Delta \bar{g}_l]_{\tau_{q+1}, \tau_q}$, где $J[\Delta \bar{g}_l]_{\tau_{q+1}, \tau_q} = \int_{\tau_q}^{\tau_{q+1}} \int_X (g_l(\tau_q, \mathbf{y}) - g_l(s, \mathbf{y})) \bar{\nu}^{(i_l)}(ds, d\mathbf{y})$, то в силу независимости $J[\Delta \bar{g}_l]_{\tau_{q+1}, \tau_q}$ при различных q имеем [127]

$$\begin{aligned} \mathbb{M} \left\{ \left| \sum_{j=0}^{N-1} J[\Delta \bar{g}_l]_{\tau_{j+1}, \tau_j} \right|^4 \right\} &= \sum_{j=0}^{N-1} \mathbb{M} \left\{ |J[\Delta \bar{g}_l]_{\tau_{j+1}, \tau_j}|^4 \right\} + \\ &+ 6 \sum_{j=0}^{N-1} \mathbb{M} \left\{ |J[\Delta \bar{g}_l]_{\tau_{j+1}, \tau_j}|^2 \right\} \sum_{q=0}^{j-1} \mathbb{M} \left\{ |J[\Delta \bar{g}_l]_{\tau_{q+1}, \tau_q}|^2 \right\}. \end{aligned} \quad (5.36)$$

Далее, используя (1.62)–(1.64) и условия леммы 5.5, получаем, что правая часть (5.36) стремится к нулю при $N \rightarrow \infty$. Учитывая этот факт и (5.35), приходим к утверждению леммы. $\square$

Продолжая доказательство теоремы 5.2 по схеме доказательства теоремы 5.1 с использованием лемм 5.4, 5.5 и (1.62)–(1.64) приходим к утверждению теоремы 5.2. $\square$

Приведем пример на применение теоремы 5.2.

При $i_1 \neq i_2$, $i_1, i_2 = 1, \dots, m$ по теореме 5.2 с использованием системы полиномов Лежандра получаем

$$\begin{aligned} &\int_t^T \int_X \varphi_2(\mathbf{y}_1) \int_t^{t_1} \int_X \varphi_1(\mathbf{y}_2) \tilde{\nu}^{(i_2)}(dt_2, d\mathbf{y}_2) \tilde{\nu}^{(i_1)}(dt_1, d\mathbf{y}_1) = \\ &= \frac{T-t}{2} \left(\pi_{(0)T,t}^{(1,i_1)} \pi_{(0)T,t}^{(2,i_2)} + \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{4i^2 - 1}} \left(\pi_{(i-1)T,t}^{(2,i_2)} \pi_{(i)T,t}^{(1,i_1)} - \pi_{(i-1)T,t}^{(1,i_1)} \pi_{(i)T,t}^{(2,i_2)} \right) \right), \\ &\int_t^T \int_X \varphi_1(\mathbf{y}_1) \tilde{\nu}^{(i_1)}(dt_1, d\mathbf{y}_1) = \sqrt{T-t} \pi_{(0)T,t}^{(1,i_1)}, \end{aligned}$$

где $\pi_{(j)T,t}^{(l,i_l)} = \int_t^T \int_X \phi_j(\tau) \varphi_l(\mathbf{y}) \tilde{\nu}^{(i_l)}(d\tau, d\mathbf{y})$; $l = 1, 2$; $\{\phi_j(\tau)\}_{j=0}^{\infty}$ — полная ортонормированная в пространстве $L_2([t, T])$ система полиномов Лежандра.

5.5 Обобщение теоремы 5.1 для повторных стохастических интегралов по мартингалам

Пусть задано фиксированное вероятностное пространство $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ и пусть $\{\mathcal{F}_t, t \in [0, T]\}$ — неубывающая совокупность σ -подалгебр $\mathcal{F}$.

Через $\mathcal{M}_2(\rho, [0, T])$ будем обозначать класс $\mathcal{F}_t$ -измеримых при каждом $t \in [0, T]$ мартингалов M_t , удовлетворяющих условиям

$$\mathbb{M}\{(M_s - M_t)^2\} = \int_t^s \rho(\tau) d\tau, \quad \mathbb{M}\{|M_s - M_t|^p\} \leq C_p |s - t|,$$

где $0 \leq t < s \leq T$; $\rho(\tau)$ — неотрицательная непрерывно дифференцируемая на промежутке $[0, T]$ неслучайная функция; $C_p < \infty$ — постоянная; $p = 3, 4, \dots$

Очевидно, что мартингал из класса $\mathcal{M}_2(\rho, [0, T])$ является D -мартингалом.

Пусть $\{\tau_j\}_{j=0}^N$ — разбиение промежутка $[0, T]$, для которого

$$0 = \tau_0 < \tau_1 < \dots < \tau_N = T, \quad \max_{0 \leq j \leq N-1} |\tau_{j+1} - \tau_j| \rightarrow 0 \text{ при } N \rightarrow \infty. \quad (5.37)$$

В соответствии со свойствами функции $\rho(\tau)$ условие принадлежности $\mathcal{F}_t$ -измеримого при каждом $t \in [0, T]$ случайного процесса $\xi_t, t \in [0, T]$, классу $H_2(\rho, [0, T])$ запишем в виде

$$\int_0^T \mathbb{M}\{|\xi_t|^2\} \rho(t) dt < \infty.$$

Определим на разбиении $\{\tau_j\}_{j=0}^N$ ступенчатую случайную функцию $\xi_t^{(N)}$ следующим образом: $\xi_t^{(N)} = \xi_{\tau_{j-1}}$ с вероятностью 1 при $t \in [\tau_{j-1}, \tau_j)$, $j = 1, \dots, N$. В главе 1 (см. также [4]) был введен стохастический интеграл от процесса $\xi_t \in H_2(\rho, [0, T])$ по D -мартингалу. В соответствии с этим стохастический интеграл по мартингалу $M_t \in \mathcal{M}_2(\rho, [0, T])$ определяется равенством

$$\text{l.i.m.}_{N \rightarrow \infty} \sum_{j=0}^{N-1} \xi_{\tau_j}^{(N)} (M_{\tau_{j+1}} - M_{\tau_j}) \stackrel{\text{def}}{=} \int_0^T \xi_t dM_t, \quad (5.38)$$

где $\{\tau_j\}_{j=0}^N$ — разбиение промежутка $[0, T]$, удовлетворяющее условию (5.37); $\xi_t^{(N)}$ — произвольная последовательность ступенчатых функций из $H_2(\rho, [0, T])$, для которой

$$\int_0^T \mathbb{M}\{|\xi_t^{(N)} - \xi_t|^2\} \rho(t) dt \rightarrow 0 \text{ при } N \rightarrow \infty.$$

Обозначим через $Q_n(\rho, [0, T])$ подкласс $M_2(\rho, [0, T])$ мартингалов $M_t, t \in [0, T]$, для которых справедлива оценка

$$M \left\{ \left| \int_{\theta}^{\tau} \xi_t dM_t \right|^n \right\} \leq C_n \int_{\theta}^{\tau} g(M\{|\xi_t|^n\}) dt, \quad (5.39)$$

где $0 \leq \theta < \tau \leq T$; $\xi_t \in H_2(\tilde{\rho}, [0, T])$, причем $\int_{\theta}^{\tau} g(M\{|\xi_t|^n\}) dt < \infty$; $g(x) : \mathbb{R}^1 \rightarrow \mathbb{R}^1$ — непрерывная при всех $x \in \mathbb{R}^1$ и ограниченная при каждом конечном x функция, для которой $g(0) = 0$; $C_n < \infty$ — постоянная; $n \in N$; $3 \leq n < \infty$. Отметим, что функция $\tilde{\rho}(t)$ обладает такими же свойствами, что и $\rho(t)$, причем она может совпадать или не совпадать с $\rho(t)$.

Обозначим через $G_n([0, T])$ класс случайных процессов $\eta_t, t \in [0, T]$ (не обязательно мартингалов), удовлетворяющих условиям:

1. Для процесса η_t существует стохастический интеграл $\int_{\theta}^{\tau} \xi_t d\eta_t$, $0 \leq \theta < \tau \leq T$, определенный аналогично (5.38) для процесса $\xi_t \in H_2(\rho, [0, T])$ при $\rho(t) \equiv 1$.

2. Выполнено неравенство

$$M \left\{ \left| \int_{\theta}^{\tau} \xi_t d\eta_t \right|^n \right\} \leq K_n \int_{\theta}^{\tau} h(M\{|\xi_t|^n\}) dt, \quad (5.40)$$

где $0 \leq \theta < \tau \leq T$; $\xi_t \in H_2(\rho, [0, T])$ при $\rho(t) \equiv 1$, причем $\int_{\theta}^{\tau} h(M\{|\xi_t|^n\}) dt < \infty$; $h(x)$ — функция, обладающая такими же свойствами, что и $g(x)$ из (5.39); $K_n < \infty$ — постоянная; $n \in N$; $2 \leq n < \infty$.

Напомним (см. главу 1), что если $(\xi_t)^n \in H_2(\rho, [0, T])$ при $\rho(t) \equiv 1$, то справедлива оценка [4]

$$M \left\{ \left| \int_{\theta}^{\tau} \xi_t dt \right|^{2n} \right\} \leq (\tau - \theta)^{2n-1} \int_{\theta}^{\tau} M\{|\xi_t|^{2n}\} dt, \quad (5.41)$$

где $0 \leq \theta < \tau \leq T$.

Положим

$$J[\psi^{(k)}]_{T,t}^M \stackrel{\text{def}}{=} \int_t^T \psi_k(t_k) \dots \int_t^{t_2} \psi_1(t_1) dM_{t_1}^{(1,i_1)} \dots dM_{t_k}^{(k,i_k)}, i_1, \dots, i_k = 0, 1, \dots, m.$$

Докажем следующую теорему.

Теорема 5.3. Пусть выполнены условия теоремы 5.1, а также следующие условия:

I. $M_{\tau}^{(l,i_l)} \in Q_r(\rho, [t, T])$, $r = 2, 4, \dots, 2^k$; $n \in N$; $i_l = 1, \dots, m$; $l = 1, \dots, k$.

II. Для процессов $M_{\tau}^{(l,i)}$, $i = 1, \dots, m$; $l = 1, \dots, k$ (здесь $i_1 = \dots = i_k = i$), существуют такие процессы $\hat{M}(q, p)_{\tau}^{(i)}$, $p = 2, 3, \dots, k$; $q = 1, 2, \dots, p-1$, что $\hat{M}(q, p)_{\tau}^{(i)} \in G_r([t, T])$, $r = 2, 4, \dots, 2^k$, и для всех $\theta, \tau \in [t, T]$, $\tau > \theta$, справедливы условия

$$M \left\{ \left(\prod_{l=q}^p \left(M_{\tau}^{(l,i)} - M_{\theta}^{(l,i)} \right) - \left(\hat{M}(q, p)_{\tau}^{(i)} - \hat{M}(q, p)_{\theta}^{(i)} \right) \right)^2 \right\} \leq O((\tau - \theta)^{1+\gamma}),$$

$$\left| M \left\{ \prod_{l=q}^p \left(M_{\tau}^{(l,i)} - M_{\theta}^{(l,i)} \right) - \left(\hat{M}(q, p)_{\tau}^{(i)} - \hat{M}(q, p)_{\theta}^{(i)} \right) \right\} \right| \leq O((\tau - \theta)^{1+\mu}),$$

где $p = 2, 3, \dots, k$; $q = 1, 2, \dots, p-1$; $\gamma, \mu > 0$.

Тогда повторный стохастический интеграл $J[\psi^{(k)}]_{T,t}^M$ разлагается в сходящийся в среднее квадратическом смысле кратный ряд

$$J[\psi^{(k)}]_{T,t}^M = \sum_{j_1, \dots, j_k=0}^{\infty} C_{j_k \dots j_1} \left(\prod_{l=1}^k \xi_{j_l}^{(l, i_l)} - \right. \\ \left. - \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{(l_1, \dots, l_k) \in \mathcal{G}_k} \phi_{j_{l_1}}(\tau_{l_1}) \Delta M_{\tau_{l_1}}^{(1, i_1)} \dots \phi_{j_{l_k}}(\tau_{l_k}) \Delta M_{\tau_{l_k}}^{(k, i_k)} \right),$$

где $\mathcal{G}_k = \mathcal{H}_k \setminus \mathcal{L}_k$;

$$\mathcal{H}_k = \{(l_1, \dots, l_k) : l_1, \dots, l_k = 0, 1, \dots, N-1\},$$

$$\mathcal{L}_k = \left\{ (l_1, \dots, l_k) : l_1, \dots, l_k = 0, 1, \dots, N-1; \right.$$

$$\left. l_g \neq l_r (g \neq r); g, r = 1, \dots, k \right\};$$

$\xi_{(j_l)T,t}^{(l, i_l)} = \int_t^T \phi_{j_l}(s) dM_s^{(l, i_l)}$ — независимые при различных $i_l = 1, \dots, m$; $l = 1, \dots, k$, и некоррелированные при различных j_l (если $\rho(\tau)$ — постоянная, $i_l \neq 0$) случайные величины;

$$C_{j_k \dots j_1} = \int_{[t, T]^k} K(t_1, \dots, t_k) \prod_{l=1}^k \phi_{j_l}(t_l) dt_1 \dots dt_k;$$

$$K(t_1, \dots, t_k) = \begin{cases} \psi_1(t_1) \dots \psi_k(t_k), & t_1 < \dots < t_k; \quad t_1, \dots, t_k \in [t, T]. \\ 0, & \text{иначе} \end{cases}$$

Доказательство. Для доказательства теоремы 5.3 рассмотрим ряд лемм.

Лемма 5.6. Пусть $M_\tau^{(l, i_l)} \in \mathcal{M}_2(\rho, [t, T])$, $i_l = 1, \dots, m$; $l = 1, \dots, k$. Тогда

$$J[\psi^{(k)}]_{T,t}^M = \text{l.i.m.}_{N \rightarrow \infty} \sum_{j_k=0}^{N-1} \dots \sum_{j_1=0}^{j_2-1} \prod_{l=1}^k \psi_l(\tau_{j_l}) \Delta M_{\tau_{j_l}}^{(l, i_l)} \text{ с в.1,} \quad (5.42)$$

где $\{\tau_j\}_{j=0}^N$ — разбиение промежутка $[0, T]$, удовлетворяющее условию типа (5.37).

Доказательство. Поскольку (см. главу 1)

$$\mathbb{M} \left\{ \left(\int_{\theta}^{\tau} \xi_s dM_s^{(l, i_l)} \right)^2 \right\} = \int_{\theta}^{\tau} \mathbb{M}\{|\xi_s|^2\} \rho(s) ds,$$

$$\mathbb{M} \left\{ \left(\int_{\theta}^{\tau} \xi_s ds \right)^2 \right\} \leq (\tau - \theta) \int_{\theta}^{\tau} \mathbb{M}\{|\xi_s|^2\} ds,$$

где $\xi_t \in H_2(\rho, [0, T])$; $t \leq \theta < \tau \leq T$; $i_l = 1, \dots, m$; $l = 1, \dots, k$, то интегральная сумма интеграла $J[\psi^{(k)}]_{T,t}^M$ в условиях леммы 5.9 может быть представлена в виде допредельного выражения из правой части (5.42) и величины, которая стремится в среднеквадратическом смысле к нулю при $N \rightarrow \infty$. $\square$

Введем обозначения

$$\text{l.i.m.}_{N \rightarrow \infty} \sum_{j_1, \dots, j_k=0}^{N-1} \Phi(\tau_{j_1}, \dots, \tau_{j_k}) \prod_{l=1}^k \Delta M_{\tau_{j_l}}^{(l, i_l)} \stackrel{\text{def}}{=} I[\Phi]_{T,t}^{(k)}, \quad (5.43)$$

Лемма 5.7. Пусть $M_s^{(l, i_l)} \in Q_r(\rho, [t, T])$, $r = 2, 4, \dots, 2^k$; $i_l = 1, \dots, m$; $l = 1, \dots, k$, а $g_1(s), \dots, g_k(s)$ — непрерывные на промежутке $[t, T]$ неслучайные функции. Тогда

$$\prod_{l=1}^k \int_t^T g_l(s) dM_s^{(l, i_l)} = I[\Phi]_{T,t}^{(k)} \text{ с в.1,}$$

где $\Phi(t_1, \dots, t_k) = \prod_{l=1}^k g_l(t_l)$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Обозначим

$$I[g_l]_N \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{j=0}^{N-1} g_l(\tau_j) \Delta M_{\tau_j}^{(l, i_l)}, \quad I[g_l]_{T, t} \stackrel{\text{def}}{=} \int_t^T g_l(s) dM_s^{(l, i_l)}.$$

Заметим, что

$$\begin{aligned} & \prod_{l=1}^k I[g_l]_N - \prod_{l=1}^k I[g_l]_{T, t} = \\ & = \sum_{l=1}^k \left(\prod_{q=1}^{l-1} I[g_q]_{T, t} \right) (I[g_l]_N - I[g_l]_{T, t}) \left(\prod_{q=l+1}^k I[g_q]_N \right). \end{aligned}$$

Используя неравенства Минковского и Коши–Буняковского, а также условия леммы 5.7, получаем

$$\left(\mathbb{M} \left\{ \left| \prod_{l=1}^k I[g_l]_N - \prod_{l=1}^k I[g_l]_{T, t} \right|^2 \right\} \right)^{\frac{1}{2}} \leq C_k \sum_{l=1}^k \left(\mathbb{M} \{ |I[g_l]_N - I[g_l]_{T, t}|^4 \} \right)^{\frac{1}{4}}, \quad (5.44)$$

где $C_k < \infty$ — постоянная. Поскольку $I[g_l]_N - I[g_l]_{T, t} = \sum_{q=0}^{N-1} I[\Delta g_l]_{\tau_{q+1}, \tau_q}$,

где $I[\Delta g_l]_{\tau_{q+1}, \tau_q} = \int_{\tau_q}^{\tau_{q+1}} (g_l(\tau_q) - g_l(s)) dM_s^{(l, i_l)}$, то в силу независимости $I[\Delta g_l]_{\tau_{q+1}, \tau_q}$ при различных q имеем [127]

$$\begin{aligned} \mathbb{M} \left\{ \left| \sum_{j=0}^{N-1} I[\Delta g_l]_{\tau_{j+1}, \tau_j} \right|^4 \right\} &= \sum_{j=0}^{N-1} \mathbb{M} \{ |I[\Delta g_l]_{\tau_{j+1}, \tau_j}|^4 \} + \\ &+ 6 \sum_{j=0}^{N-1} \mathbb{M} \{ |I[\Delta g_l]_{\tau_{j+1}, \tau_j}|^2 \} \sum_{q=0}^{j-1} \mathbb{M} \{ |I[\Delta g_l]_{\tau_{q+1}, \tau_q}|^2 \}. \end{aligned} \quad (5.45)$$

Далее, используя условия леммы 5.7, получаем, что правая часть (5.45) стремится к нулю при $N \rightarrow \infty$. Учитывая этот факт и (5.44), приходим к утверждению леммы. $\square$

Далее воспользуемся доказанными леммами и повторяя с соответствующими изменениями доказательство теоремы 5.1 придем к утверждению теоремы 5.3. $\square$

Отметим, что в теореме 5.3 могут использоваться полные ортонормированные не только с весом 1, но и с некоторым другим весом в пространстве $L_2[t, T]$ системы функций. При этом очевидно, что вид коэффициентов $C_{j_k \dots j_1}$ будет в этом случае другим. Приведем пример, иллюстрирующий сказанное.

Рассмотрим повторный стохастический интеграл $\int_0^T \int_0^s dM_\tau^{(1)} dM_s^{(2)}$; где $M_s^{(i)} = \int_0^s \sqrt{\tau} df_\tau^{(i)}$, $f_\tau^{(i)}$, $i = 1, 2$, — независимые стандартные винеровские процессы, $0 \leq s \leq T$. Нетрудно видеть, что $M_s^{(i)}$ — D -мартингал (см. главу 1), причем $\rho(\tau) = \tau$. Кроме того, $M_s^{(i)}$ имеет гауссовское распределение. Очевидно, что условие I теоремы 5.3 при $k = 2$ для $M_s^{(i)}$, $i = 1, 2$, выполнено. Покажем, что при $k = 2$ справедливо также и условие II этой теоремы.

Имеем

$$\mathbb{M} \left\{ \left(M_s^{(i)} - M_t^{(i)} \right)^2 \right\} = \int_t^s \tau d\tau = \frac{s^2}{2} - \frac{t^2}{2}, \quad s > t, \quad i = 1, 2. \quad (5.46)$$

Далее в силу гауссовости получаем

$$\begin{aligned} \mathbb{M} \left\{ \left(M_s^{(i)} - M_t^{(i)} \right)^4 \right\} &= 3 \left(\int_t^s \tau d\tau \right)^2 = \\ &= 3 \left(\frac{s^2}{2} - \frac{t^2}{2} \right)^2. \end{aligned}$$

Таким образом получаем, что $M(1, 2)_\tau^{(i)} = \frac{\tau^2}{2}$ с вероятностью 1, $i = 1, 2$, т. е. условие II теоремы 5.3 при $k = 2$ выполнено.

Рассмотрим систему функций

$$\Psi_j(\tau) = \frac{\sqrt{2}}{T J_{p+1}(\lambda_j)} J_p \left(\frac{\lambda_j}{T} \tau \right), \quad j = 0, 1, 2, \dots, \quad p > 0, \quad (5.47)$$

где $J_p(x)$ — функция Бесселя первого рода вида

$$J_p(x) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m \left(\frac{x}{2} \right)^{p+2m}}{\Gamma(m+1) \Gamma(m+p+1)};$$

$\Gamma(z) = \int_0^{\infty} e^{-x} x^{z-1} dx$ — гамма-функция; λ_j — пронумерованные в порядке возрастания положительные корни функции $J_p(x)$.

Известно [175], что система $\{\Psi_j(\tau)\}_{j=0}^{\infty}$ является полной ортонормированной с весом τ в пространстве $L_2([0, T])$ системой непрерывно дифференцируемых функций.

Повторяя доказательство теоремы 5.3 при $k = 2$ для системы функций (5.47), получаем

$$\int_0^T \int_0^s dM_\tau^{(1)} dM_s^{(2)} = \sum_{j_1, j_2=0}^{\infty} C_{j_2 j_1} \zeta_{j_1}^{(1)} \zeta_{j_2}^{(2)},$$

где кратный ряд сходится в среднеквадратическом смысле;

$$\zeta_j^{(i)} = \int_0^T \Psi_j(\tau) dM_\tau^{(i)}, \quad j = 0, 1, 2, \dots, \quad i = 1, 2;$$

$$\zeta_j^{(i)} \sim N(0, 1); \quad M\{\zeta_{j_1}^{(1)} \zeta_{j_2}^{(2)}\} = 0;$$

$$C_{j_2 j_1} = \frac{2}{T^2 J_{p+1}(\lambda_{j_1}) J_{p+1}(\lambda_{j_2})} \int_0^T s \Psi_{j_2}(s) \int_0^s \tau \Psi_{j_1}(\tau) d\tau ds.$$

Глава 6

Аппроксимация повторных стохастических интегралов Стратоновича и Ито

6.1 Аппроксимации повторных стохастических интегралов Стратоновича и Ито, основанные на кратных рядах Фурье

6.1.1 Введение

Опишем класс рассматриваемых далее повторных стохастических интегралов, поясним возможные приложения этого класса, а также коснемся истории вопроса об аппроксимации повторных стохастических интегралов из данного класса.

Рассмотрим стохастическое дифференциальное уравнение Ито

$$dx_t = a(x_t, t)dt + \Sigma(x_t, t)df_t, \quad x_0 = x(0, \omega), \quad (6.1)$$

где $x_t \in \mathbb{R}^n$ — случайный процесс, являющийся решением уравнения (6.1); неслучайные функции $a(x, t) : \mathbb{R}^n \times [0, T] \rightarrow \mathbb{R}^n$, $\Sigma(x, t) : \mathbb{R}^n \times [0, T] \rightarrow \mathbb{R}^{n \times m}$ удовлетворяют условиям AI–AIII (теорема 1.6) существования и единственности в смысле стохастической эквивалентности решения уравнения (6.1); $f_t \in \mathbb{R}^m$ — $\mathcal{F}_t$ -измеримый при всех $t \in [0, T]$ стандартный векторный винеровский процесс с независимыми компонентами $f_t^{(i)}$, $i = 1, \dots, m$; случайная величина $x_0 \in \mathbb{R}^n$ стохастически не зависит от приращений $f_t - f_0$ при $t > 0$.

Из результатов главы 4 следует, что при определенных условиях, налагаемых на функции $a(x, t)$, $\Sigma(x, t)$, для решения стохастического дифференциального уравнения Ито (6.1) справедливы унифицированные разложения Тейлора–Ито и Тейлора–Стратоновича, общие члены

которых содержат в качестве множителей повторные стохастические интегралы Ито и Стратоновича вида

$$I_{l_1 \dots l_{kT}, t}^{(i_1 \dots i_k)} = \int_t^T (t - t_k)^{l_k} \dots \int_t^{t_2} (t - t_1)^{l_1} d\mathbf{f}_{t_1}^{(i_1)} \dots d\mathbf{f}_{t_k}^{(i_k)}, \quad (6.2)$$

$$J_{l_1 \dots l_{kT}, t}^{(i_1 \dots i_k)} = \int_t^T (T - t_k)^{l_k} \dots \int_t^{t_2} (T - t_1)^{l_1} d\mathbf{f}_{t_1}^{(i_1)} \dots d\mathbf{f}_{t_k}^{(i_k)}, \quad (6.3)$$

$$I_{l_1 \dots l_{kT}, t}^{*(i_1 \dots i_k)} = \int_t^{*T} (t - t_k)^{l_k} \dots \int_t^{*t_2} (t - t_1)^{l_1} d\mathbf{f}_{t_1}^{(i_1)} \dots d\mathbf{f}_{t_k}^{(i_k)}, \quad (6.4)$$

$$J_{l_1 \dots l_{kT}, t}^{*(i_1 \dots i_k)} = \int_t^{*T} (T - t_k)^{l_k} \dots \int_t^{*t_2} (T - t_1)^{l_1} d\mathbf{f}_{t_1}^{(i_1)} \dots d\mathbf{f}_{t_k}^{(i_k)}, \quad (6.5)$$

где $l_1, \dots, l_k = 0, 1, \dots$; $k = 1, 2, \dots$; $i_1, \dots, i_k = 1, \dots, m$, а также справедливы [79, 81, 84, 86] разложения Тейлора–Ито в форме Вагнера и Платена и разложения Тейлора–Стратоновича в форме Клоедена и Платена, общие члены которых содержат в качестве множителей повторные стохастические интегралы Ито и Стратоновича

$$J_{(\lambda_k \dots \lambda_1)_{T,t}}^{(i_k \dots i_1)} = \int_t^T \dots \int_t^{t_2} d\mathbf{w}_{t_1}^{(i_k)} \dots d\mathbf{w}_{t_k}^{(i_1)}, \quad (6.6)$$

$$J_{(\lambda_k \dots \lambda_1)_{T,t}}^{*(i_k \dots i_1)} = \int_t^{*T} \dots \int_t^{*t_2} d\mathbf{w}_{t_1}^{(i_k)} \dots d\mathbf{w}_{t_k}^{(i_1)}. \quad (6.7)$$

Здесь и далее $\mathbf{w}_t^{(i_l)} = \mathbf{f}_t^{(i_l)}$ и $\lambda_l = 1$ при $i_l = 1, \dots, m$; $\mathbf{w}_t^{(i_l)} = t$ и $\lambda_l = 0$ при $i_l = 0$; $i_1, \dots, i_k = 0, 1, \dots, m$; $l = 1, \dots, k$.

В связи с этим проблема численного решения стохастических дифференциальных уравнений Ито, возникающая при решении широкого круга задач [86] (см. также главу 2), сводится к совместному численному моделированию систем повторных стохастических интегралов вида (6.2) – (6.7). Эта задача оказалась не такой простой, как может показаться на первый взгляд.

Учитывая все сказанное, в данной главе будем уделять особое внимание аппроксимации систем повторных стохастических интегралов Стратоновича и Ито

$$J^*[\psi^{(k)}]_{T,t} = \int_t^{*T} \psi_k(t_k) \dots \int_t^{*t_2} \psi_1(t_1) d\mathbf{w}_{t_1}^{(i_1)} \dots d\mathbf{w}_{t_k}^{(i_k)}, \quad (6.8)$$

$$J[\psi^{(k)}]_{T,t} = \int_t^T \psi_k(t_k) \dots \int_t^{t_2} \psi_1(t_1) d\mathbf{w}_{t_1}^{(i_1)} \dots d\mathbf{w}_{t_k}^{(i_k)}, \quad (6.9)$$

где $\psi_l(\tau)$, $l = 1, \dots, k$, — непрерывно дифференцируемые на промежутке $[t, T]$ функции.

Кратко коснемся истории вопроса о методах сильной аппроксимации повторных стохастических интегралов вида (6.8) и (6.9).

Пожалуй до середины 80-х годов XX века осуществлялись попытки аппроксимировать повторные стохастические интегралы с помощью разного рода интегральных сумм, т.е. промежутков интегрирования стохастического интеграла разбивался на n частей и повторный стохастический интеграл приближенно представлялся повторной интегральной суммой, в которую входила система независимых стандартных гауссовских случайных величин, численное моделирование которой не является проблемой.

Однако, сразу бросается в глаза то обстоятельство, что промежутки интегрирования повторных стохастических интегралов есть не что иное, как шаг интегрирования численного метода, который и без дополнительного дробления уже является достаточно малой величиной. Численные эксперименты показывают, что такой подход ведет к резкому увеличению вычислительных затрат при росте кратности стохастических интегралов, что необходимо для построения более точных численных методов или при уменьшении шага интегрирования численного метода и, в силу этих причин, не выдерживает критики.

Революционный шаг в направлении решения рассматриваемой проблемы был сделан Г.Н.Мильштейном [70] (1988г.), который предложил использовать сходящееся в среднеквадратическом смысле тригонометрическое разложение Фурье для винеровских процессов, по которым вычисляется повторный стохастический интеграл. В [70] данным методом получены разложения в ряды из независимых стандартных гауссовских случайных величин двух простейших стохастических интегралов 1-й и 2-й кратности и доказана их сходимость в среднеквадратическом смысле.

Эта идея была подхвачена в [86] (1992г.), где с помощью компьютерной программы MAPLE были получены разложения и сходящиеся в среднеквадратическом смысле аппроксимации повторных стохастических интегралов Стратоновича 1–3 кратности. Однако, в силу сложности преобразований, на которых основан метод [70] и в силу отсутствия удобной явной формулы для формирующих аппроксимации коэффициентов (в наших подходах это формула для коэффициентов

$C_{j_k \dots j_1}$), в [86] и последующих публикациях, дальше этого "дело не пошло" даже с учетом применения компьютерных пакетов аналитических преобразований типа MAPLE. Этих результатов оказалось достаточно для построения сильных численных методов порядков точности 1.0 и 1.5 для стохастических дифференциальных уравнений Ито с многомерным шумом (см. главу 7). Важно отметить, что метод [70] в разы, а то и на порядки, превзошел метод интегральных сумм по вычислительным затратам в смысле их уменьшения.

Для получения разложения повторного стохастического интеграла Стратоновича вида (6.8) в повторный ряд из произведений стандартных гауссовских случайных величин по методу Г. Н. Мильштейна необходимо осуществить итеративный процесс, начиная с внутренних интегралов в (6.8), подстановки с последующим интегрированием тригонометрических разложений Фурье компонент винеровского процесса f_t . Эта процедура является очень сложной и не приводит [70, 86, 98] к общей формуле разложения повторного стохастического интеграла произвольной кратности k . В результате в работах [70, 86, 98] рассмотрены лишь разложения повторных стохастических интегралов вида (6.7) (с единичными весовыми функциями) кратности 1, 2, 3, при этом в [70] они имеют кратность 1 и 2, а в [86, 98] — кратность 1, 2, 3.

Несмотря на преимущества метода [70], наметился и ряд его очевидных недостатков: отсутствие, как уже отмечалось, общей явной формулы для вычисления коэффициентов разложения повторного стохастического интеграла произвольной кратности k (как следствие получены упомянутые аппроксимации повторных стохастических интегралов 1–3 кратности, и только), как следствие практическая невозможность точного вычисления среднеквадратической погрешности аппроксимации стохастического интеграла, за исключением простейших интегралов 1-й и 2-й кратности (в результате приходится учитывать избыточные члены разложения, что ведет к росту вычислительных затрат). Хотя, следует отметить, что рассматриваемый метод является определенного рода прорывом в данной научной области.

Следующим "прорывом" на пути решения проблемы аппроксимации повторных стохастических интегралов является, на взгляд автора, предложенный им в 5 главе метод, основанный на кратных рядах Фурье (далее метод, основанный на кратных рядах Фурье).

Отметим, что теорема 5.1 дает следующие преимущества по сравнению с методом [70]:

1. Имеется явная формула для вычисления коэффициентов разложения повторного стохастического интеграла Ито произвольной кратности

сти k .

2. Как следствие открываются новые возможности для точного вычисления среднеквадратической погрешности аппроксимации повторных стохастических интегралов.

3. Поскольку используемый кратный ряд Фурье является обобщенным в том смысле, что он строится с использованием различных полных ортонормированных систем функций в пространстве $L_2([t, T])$, то появляются новые возможности для аппроксимации — можно использовать не только тригонометрические функции, но и полиномы Лежандра, функции Хаара и Радемахера–Уолша.

4. Как оказалось, работать при построении аппроксимаций повторных стохастических интегралов, удобнее именно с полиномами Лежандра — существенно проще вычислять коэффициенты кратного ряда Фурье (используется по сути только формула первообразной для степенной функции с целым неотрицательным показателем; при работе с тригонометрическими функциями это не так — скажем при вычислении интеграла от произведения синуса на косинус с аргументами nt и mt соответственно ($n, m = 0, 1, 2, \dots$) мы получим три существенно различных первообразных в случаях: $n - m \neq 0, n + m \neq 0$; $n - m = 0, n + m \neq 0$; $n - m = 0, n + m = 0$). Кроме того, сами аппроксимации по виду получаются проще при использовании полиномов Лежандра. Это связано с тем, что система полиномов Лежандра более однородна в том смысле, что каждая ее функция — многочлен. Тригонометрическая же система устроена сложнее — первая ее функция является многочленом нулевой степени, остальные представляют собой две бесконечные серии синусов и косинусов соответственно. Системы функций Хаара и Радемахера–Уолша тем более вряд ли являются подходящими для наших нужд (см. разложения по этим системам функций в главе 5).

5. Вопрос о том, какая же система функций полиномиальная или тригонометрическая удобнее с точки зрения вычислительных затрат на аппроксимацию повторных стохастических интегралов оказался не простым, поскольку требуется сравнивать аппроксимации не одного интеграла, а нескольких интегралов одновременно. При этом может случиться так, что для одних интегралов вычислительные затраты окажутся меньше для полиномов Лежандра, а для других для тригонометрических функций. Отметим, что сами формулы для полученных аппроксимаций достаточно громоздки. Не настаивая на своей правоте, автор, на основании проведенных численных экспериментов (см. таблицы 6.35, 6.36), считает что вычислительные затраты в 2-3

раза меньше для полиномов Лежандра при аппроксимации совокупности повторных стохастических интегралов 1–3 кратности, необходимых для построения сильного численного метода порядка точности 1.5 (см. главу 7) для стохастического дифференциального уравнения Ито с многомерным шумом.

В литературе [64, 86, 130] известны представления стохастических интегралов (6.8), (6.9) при $i_1 = \dots = i_k \neq 0$, $\psi_1(\tau) = \dots = \psi_k(\tau)$, а также представления стохастических интегралов несколько более общего вида как многочленов конечных степеней от одной гауссовской случайной величины с применением полиномов Эрмита. Эти представления также рассматриваются в данной главе и в случае стохастических интегралов (6.8) являются частным случаем метода [70] и метода, основанного на кратных рядах Фурье.

Перечисленные методы аппроксимации повторных стохастических интегралов являются сильными. В литературе (см., например, [70, 86]) представлены также слабые аппроксимации повторных стохастических интегралов Ито. Большинство из них, а также новые слабые аппроксимации приведены в данной главе.

Итак в данной главе, в основном, речь пойдет о разложении функционалов интегрального типа от винеровского процесса в ряды из произведений стандартных гауссовских случайных величин. Однако используемый здесь подход отличается от классического подхода, позволяющего разложить гильбертов случайный процесс, т. е. среднеквадратически непрерывный процесс с конечным вторым моментом, в ряд из некоррелированных случайных величин. А именно, известно (см., например, [3]), что измеримый, среднеквадратически непрерывный и имеющий конечный второй момент случайный процесс ξ_τ , $\tau \in [t, T]$, может быть разложен в ряд вида

$$\xi_\tau = \sum_{j=1}^{\infty} \zeta_j \phi_j(\tau), \quad (6.10)$$

сходящийся в $L_2([t, T])$ при всех $\tau \in [t, T]$. В разложении (6.10) ζ_j — некоррелированные случайные величины, $M\{|\xi_\tau|^2\} = \lambda_j$, λ_j — собственные числа, а $\phi_j(\tau)$ — собственные функции ковариации $R_\xi(t_1, t_2)$ процесса ξ_τ . При этом если процесс ξ_τ гауссовский и $M\{\xi_\tau\} = 0$, то ζ_j в (6.10) — независимые гауссовские случайные величины и ряд (6.10) сходится с вероятностью 1 при всех $\tau \in [t, T]$.

Из сказанного следует, что если мы хотим разложить с помощью изложенного подхода совокупность из нескольких зависимых случайных процессов $\xi_\tau^{(1)}, \dots, \xi_\tau^{(n)}$, и притом негауссовских, в ряды типа (6.10), то

системы случайных величин, соответствующие разным процессам $\xi_\tau^{(j)}$, являются зависимыми, и притом, возможно, сложным образом. Это обстоятельство, а также то, что нахождение собственных функций ковариаций процессов $\xi_\tau^{(j)}$ далеко не всегда возможно аналитически, делает затруднительным применение данного подхода в достаточно общем случае для моделирования совокупностей из нескольких зависимых случайных процессов. Эти трудности преодолены в другом подходе (метод Г.Н.Мильштейна) для того частного случая, когда интересующая нас совокупность случайных процессов является совокупностью повторных стохастических интегралов Стратоновича вида (6.8). Так, упоминавшийся ранее метод Г. Н. Мильштейна позволяет использовать тригонометрический ряд Фурье для разложения процесса броуновского моста с целью разложения совокупностей повторных стохастических интегралов Стратоновича вида (6.8). Однако этот путь приводит к ряду неудобств и ограничений, о которых говорилось ранее.

Далее в настоящем разделе будем рассматривать метод, основанный на кратных рядах Фурье.

Сначала будем строить среднеквадратические аппроксимации повторных стохастических интегралов Стратоновича $J^*[\psi^{(k)}]_{T,t}$ при попарно различных $i_1, \dots, i_k = 1, \dots, m$ (в этом случае они совпадают с соответствующими стохастическими интегралами Ито) в виде усеченных кратных рядов, в которые они разлагаются согласно подходу, основанному на кратных рядах Фурье, сходящихся в среднем.

Пусть $J[\psi^{(k)}]_{T,t}^{q_1, \dots, q_k}$ — аппроксимация повторного стохастического интеграла Ито $J[\psi^{(k)}]_{T,t}$, при попарно различных $i_1, \dots, i_k = 1, \dots, m$, которая имеет вид

$$J[\psi^{(k)}]_{T,t}^{q_1, \dots, q_k} = \sum_{j_1, \dots, j_k=0}^{q_1, \dots, q_k} C_{j_k \dots j_1} \prod_{l=1}^k \zeta_{(j_l)T,t}^{(i_l)}, \quad (6.11)$$

где числа $q_i < \infty$ удовлетворяют следующему условию на среднеквадратическую точность аппроксимации:

$$\mathbb{M} \left\{ \left(J[\psi^{(k)}]_{T,t}^{q_1, \dots, q_k} - J[\psi^{(k)}]_{T,t} \right)^2 \right\} \leq \varepsilon, \quad (6.12)$$

ε — заданное малое положительное число.

Теорема 5.1 дает возможность точно вычислить среднеквадратическую погрешность аппроксимации повторного стохастического интеграла Ито произвольной кратности.

Начнем рассмотрение со случая попарно различных $i_1, \dots, i_k = 1, \dots, m$.

Лемма 6.1. Пусть $i_1, \dots, i_k = 1, \dots, t$ и попарно различны. Тогда среднеквадратическая погрешность аппроксимации (6.11) повторного стохастического интеграла Ито $[\psi^{(k)}]_{T,t}$ определяется формулой

$$\begin{aligned} \mathbb{M} \left\{ \left(J[\psi^{(k)}]_{T,t}^{q_1, \dots, q_k} - J[\psi^{(k)}]_{T,t} \right)^2 \right\} &= \int_{[t,T]^k} K^2(t_1, \dots, t_k) dt_1 \dots dt_k - \\ &- \sum_{j_1, \dots, j_k=0}^{q_1, \dots, q_k} (C_{j_k \dots j_1})^2, \end{aligned} \quad (6.13)$$

причем сходимость имеет место смысле предела при $q_1, \dots, q_k \rightarrow \infty$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Имеем

$$\begin{aligned} \mathbb{M} \left\{ \left(J[\psi^{(k)}]_{T,t} \right)^2 \right\} &= \int_t^T \psi_k^2(t_k) \dots \int_t^{t_2} \psi_1^2(t_1) dt_1 \dots dt_k = \\ &= \int_{[t,T]^k} K^2(t_1, \dots, t_k) dt_1 \dots dt_k. \end{aligned} \quad (6.14)$$

Равенство Парсеваля в нашем случае имеет вид

$$\int_{[t,T]^k} K^2(t_1, \dots, t_k) dt_1 \dots dt_k = \lim_{q_1, \dots, q_k \rightarrow \infty} \sum_{j_1=0}^{q_1} \dots \sum_{j_k=0}^{q_k} (C_{j_k \dots j_1})^2.$$

Далее

$$\begin{aligned} \mathbb{M} \left\{ \left(J[\psi^{(k)}]_{T,t} - J[\psi^{(k)}]_{T,t}^{q_1, \dots, q_k} \right)^2 \right\} &= \mathbb{M} \left\{ \left(J[\psi^{(k)}]_{T,t} \right)^2 \right\} - \\ &- 2\mathbb{M} \left\{ J[\psi^{(k)}]_{T,t} J[\psi^{(k)}]_{T,t}^{q_1, \dots, q_k} \right\} + \mathbb{M} \left\{ \left(J[\psi^{(k)}]_{T,t}^{q_1, \dots, q_k} \right)^2 \right\}. \end{aligned} \quad (6.15)$$

Поскольку согласно теореме 5.1

$$J[\psi^{(k)}]_{T,t} = \left\{ \sum_{j_1, \dots, j_k=0}^{\infty} - \sum_{j_1, \dots, j_k=0}^{q_1, \dots, q_k} \right\} C_{j_k \dots j_1} \prod_{l=1}^k \zeta_{(j_l)T,t}^{(i_l)} + J[\psi^{(k)}]_{T,t}^{q_1, \dots, q_k},$$

то

$$\mathbb{M} \left\{ J[\psi^{(k)}]_{T,t} J[\psi^{(k)}]_{T,t}^{q_1, \dots, q_k} \right\} = \mathbb{M} \left\{ \left(J[\psi^{(k)}]_{T,t}^{q_1, \dots, q_k} \right)^2 \right\}. \quad (6.16)$$

Подставляя (6.14) и (6.16) в (6.15), получаем

$$\mathbb{M} \left\{ \left(J[\psi^{(k)}]_{T,t} - J[\psi^{(k)}]_{T,t}^{q_1, \dots, q_k} \right)^2 \right\} = \int_{[t,T]^k} K^2(t_1, \dots, t_k) dt_1 \dots dt_k -$$

$$-\mathbb{M} \left\{ \left(J[\psi^{(k)}]_{T,t}^{q_1, \dots, q_k} \right)^2 \right\}. \quad (6.17)$$

Учитывая (6.17) и соотношение

$$\mathbb{M} \left\{ \left(J[\psi^{(k)}]_{T,t}^{q_1, \dots, q_k} \right)^2 \right\} = \sum_{j_1, \dots, j_k=0}^{q_1, \dots, q_k} (C_{j_k \dots j_1})^2,$$

которое справедливо для попарно различных $i_1, \dots, i_k = 1, \dots, m$, приходим к утверждению леммы 6.1. Лемма доказана. $\square$

В процессе доказательства леммы 6.1 мы фактически установили следующую формулу при произвольных $i_1, \dots, i_k = 1, \dots, m$:

$$\begin{aligned} \mathbb{M} \left\{ \left(J[\psi^{(k)}]_{T,t}^{q_1, \dots, q_k} - J[\psi^{(k)}]_{T,t} \right)^2 \right\} &= \int_{[t,T]^k} K^2(t_1, \dots, t_k) dt_1 \dots dt_k + \\ &+ 2 \left(\mathbb{M} \left\{ J[\psi^{(k)}]_{T,t}^{q_1, \dots, q_k} \right\}^2 \right) - \mathbb{M} \left\{ \left(J[\psi^{(k)}]_{T,t}^{q_1, \dots, q_k} \right)^2 \right\}. \end{aligned} \quad (6.18)$$

Покажем, на примере повторных стохастических интегралов Стратоновича, что нет технических проблем для получения аналога (6.13) при произвольных $i_1, \dots, i_k = 1, \dots, m$ (для простоты полагаем $q_i = q$).

Случай $k=1$.

В этом случае согласно лемме 6.1 сразу получаем

$$\mathbb{M} \left\{ \left(J^*[\psi^{(1)}]_{T,t}^q - J^*[\psi^{(1)}]_{T,t} \right)^2 \right\} = \int_{[t,T]^1} K^2(t_1) dt_1 - \sum_{j_1=0}^q (C_{j_1})^2.$$

Случай $k=2$.

При $i_1 \neq i_2$ требуемая формула получается из леммы 6.1.

Пусть $i_1 = i_2 = i = 1, \dots, m$.

Имеем

$$\begin{aligned} \int_t^{*T} \psi_2(t_2) \int_t^{*t_2} \psi_1(t_1) d\mathbf{f}_{t_1}^{(i)} d\mathbf{f}_{t_2}^{(i)} &= \int_t^T \psi_2(t_2) \int_t^{t_2} \psi_1(t_1) d\mathbf{f}_{t_1}^{(i)} d\mathbf{f}_{t_2}^{(i)} + \\ &+ \frac{1}{2} \int_t^T \psi_2(t_2) \psi_1(t_2) dt_2. \end{aligned}$$

Поэтому, используя свойства стохастического интеграла Ито, находим

$$\mathbb{M} \left\{ \left(J^*[\psi^{(2)}]_{T,t} \right)^2 \right\} =$$

$$\begin{aligned}
&= \int_t^T \psi_2^2(t_2) \int_t^{t_2} \psi_1^2(t_1) dt_1 dt_2 + \frac{1}{4} \left(\int_t^T \psi_2(t_2) \psi_1(t_2) dt_2 \right)^2 = \\
&= \int_{[t,T]^2} K^2(t_1, t_2) dt_1 dt_2 + \frac{1}{4} \left(\int_t^T \psi_2(t_2) \psi_1(t_2) dt_2 \right)^2.
\end{aligned}$$

Теперь вычислим

$$\begin{aligned}
&-2\mathbf{M} \left\{ J^*[\psi^{(2)}]_{T,t} J^*[\psi^{(2)}]_{T,t}^q \right\} + \mathbf{M} \left\{ \left(J^*[\psi^{(2)}]_{T,t}^q \right)^2 \right\} = \\
&-2\mathbf{M} \left\{ \left(J^*[\psi^{(2)}]_{T,t} - J^*[\psi^{(2)}]_{T,t}^q + J^*[\psi^{(2)}]_{T,t}^q J^*[\psi^{(2)}]_{T,t}^q \right) J^*[\psi^{(2)}]_{T,t}^q \right\} + \\
&\quad + \mathbf{M} \left\{ \left(J^*[\psi^{(2)}]_{T,t}^q \right)^2 \right\} = \\
&-2\mathbf{M} \left\{ \left(\left(\sum_{j_1, j_2=0}^{\infty} - \sum_{j_1, j_2=0}^q \right) C_{j_2 j_1} \zeta_{(j_1)T,t}^{(i)} \zeta_{(j_2)T,t}^{(i)} + \right. \right. \\
&\quad \left. \left. + \sum_{j_1, j_2=0}^q C_{j_2 j_1} \zeta_{(j_1)T,t}^{(i)} \zeta_{(j_2)T,t}^{(i)} \right) \sum_{j_1, j_2=0}^q C_{j_2 j_1} \zeta_{(j_1)T,t}^{(i)} \zeta_{(j_2)T,t}^{(i)} \right\} + \\
&\quad + \mathbf{M} \left\{ \left(J^*[\psi^{(1)}]_{T,t}^q \right)^2 \right\} = \\
&= -2\mathbf{M} \left\{ J^*[\psi^{(2)}]_{T,t} - J^*[\psi^{(2)}]_{T,t}^q \right\} \mathbf{M} \left\{ \sum_{j_1, j_2=0}^q C_{j_2 j_1} \zeta_{(j_1)T,t}^{(i)} \zeta_{(j_2)T,t}^{(i)} \right\} - \\
&\quad - \mathbf{M} \left\{ \left(\sum_{j_1, j_2=0}^q C_{j_2 j_1} \zeta_{(j_1)T,t}^{(i)} \zeta_{(j_2)T,t}^{(i)} \right)^2 \right\} = \\
&= -2 \left(\frac{1}{2} \int_t^T \psi_2(t_2) \psi_1(t_2) dt_2 - \sum_{j_1=0}^q C_{j_1 j_1} \right) \sum_{j_1=0}^q C_{j_1 j_1} - \\
&\quad - \mathbf{M} \left\{ \left(\sum_{j_1, j_2=0}^q C_{j_2 j_1} \zeta_{(j_1)T,t}^{(i)} \zeta_{(j_2)T,t}^{(i)} \right)^2 \right\}.
\end{aligned}$$

Поскольку

$$\begin{aligned}
&\mathbf{M} \left\{ \left(\sum_{j_1, j_2=0}^q C_{j_2 j_1} \zeta_{(j_1)T,t}^{(i)} \zeta_{(j_2)T,t}^{(i)} \right)^2 \right\} = \\
&= \mathbf{M} \left\{ \sum_{j_1, j_1', j_2, j_2'=0}^q C_{j_2 j_1} C_{j_2' j_1'} \zeta_{(j_1)T,t}^{(i)} \zeta_{(j_1')T,t}^{(i)} \zeta_{(j_2)T,t}^{(i)} \zeta_{(j_2')T,t}^{(i)} \right\} =
\end{aligned}$$

$$= 3 \sum_{j_1=0}^q (C_{j_1 j_1})^2 + \sum_{j_2=0}^q \sum_{j_1=0}^{j_2-1} ((C_{j_2 j_1})^2 + (C_{j_1 j_2})^2 + 2C_{j_1 j_1} C_{j_2 j_2} + 2C_{j_2 j_1} C_{j_1 j_2}),$$

то окончательно

$$\begin{aligned} \mathbb{M} \left\{ \left(J^*[\psi^{(2)}]_{T,t} - J^*[\psi^{(2)}]_{T,t}^q \right)^2 \right\} &= \int_{[t,T]^2} K^2(t_1, t_2) dt_1 dt_2 + \\ &+ \frac{1}{4} \left(\int_t^T \psi_2(t_2) \psi_1(t_2) dt_2 \right)^2 - \\ &- 2 \left(\frac{1}{2} \int_t^T \psi_2(t_2) \psi_1(t_2) dt_2 - \sum_{j_1=0}^q C_{j_1 j_1} \right) \sum_{j_1=0}^q C_{j_1 j_1} - \\ &- 3 \sum_{j_1=0}^q (C_{j_1 j_1})^2 - \sum_{j_2=0}^q \sum_{j_1=0}^{j_2-1} ((C_{j_2 j_1})^2 + (C_{j_1 j_2})^2 + \\ &+ 2C_{j_1 j_1} C_{j_2 j_2} + 2C_{j_2 j_1} C_{j_1 j_2}). \end{aligned}$$

Случай $k=3$.

Случай попарно различных i_1, i_2, i_3 рассмотрен в лемме 6.1, поэтому остается рассмотреть 4 случая:

1. $i_1 = i_2 \neq i_3$;
2. $i_1 \neq i_2 = i_3$;
3. $i_1 = i_3 \neq i_2$;
4. $i_1 = i_2 = i_3$.

Мы рассмотрим только первые два из них, а в двух оставшихся, как следует из результатов главы 5, формулы для аппроксимаций будут иметь несколько другой вид (см. главу 5) и мы не будем на них здесь останавливаться.

Начнем с первого случая:

$$\begin{aligned} &\int_t^{*T} \psi_3(t_3) \int_t^{*t_3} \psi_2(t_2) \int_t^{*t_2} \psi_1(t_1) d\mathbf{f}_{t_1}^{(i_1)} d\mathbf{f}_{t_2}^{(i_1)} d\mathbf{f}_{t_3}^{(i_3)} = \\ &= \int_t^T \psi_3(t_3) \int_t^{t_3} \psi_2(t_2) \int_t^{t_2} \psi_1(t_1) d\mathbf{f}_{t_1}^{(i_1)} d\mathbf{f}_{t_2}^{(i_1)} d\mathbf{f}_{t_3}^{(i_3)} = \\ &+ \frac{1}{2} \int_t^T \psi_3(t_3) \int_t^{t_3} \psi_2(t_2) \psi_1(t_2) dt_2 d\mathbf{f}_{t_3}^{(i_3)}. \end{aligned}$$

Используя свойства стохастического интеграла Ито получаем

$$\begin{aligned} \mathbb{M} \left\{ \left(J^*[\psi^{(3)}]_{T,t} \right)^2 \right\} &= \int_{[t,T]^3} K^2(t_1, t_2, t_3) dt_1 dt_2 dt_3 + \\ &+ \frac{1}{4} \int_t^T \psi_3^2(t_3) \left(\int_t^{t_3} \psi_2(t_1) \psi_1(t_1) dt_1 \right)^2 dt_3. \end{aligned}$$

Используя соображения, сходные со случаем $k = 2$, а также то, что математическое ожидание произведения трех гауссовских случайных величин равно нулю, получаем

$$\mathbb{M} \left\{ J^*[\psi^{(3)}]_{T,t} - J^*[\psi^{(3)}]_{T,t}^q \right\} \mathbb{M} \left\{ J^*[\psi^{(3)}]_{T,t}^q \right\} = 0.$$

Значит в нашем случае

$$\mathbb{M} \left\{ \left(J^*[\psi^{(3)}]_{T,t} - J^*[\psi^{(3)}]_{T,t}^q \right)^2 \right\} = \mathbb{M} \left\{ \left(J^*[\psi^{(3)}]_{T,t} \right)^2 \right\} - \mathbb{M} \left\{ \left(J^*[\psi^{(3)}]_{T,t}^q \right)^2 \right\}.$$

Далее

$$\begin{aligned} &\mathbb{M} \left\{ \left(J^*[\psi^{(3)}]_{T,t}^q \right)^2 \right\} = \\ &= \mathbb{M} \left\{ \sum_{j_3, j'_3, j_2, j'_2, j_1, j'_1=0}^q C_{j_3 j_2 j_1} C_{j'_3 j'_2 j'_1} \zeta_{(j_1)T,t}^{(i_1)} \zeta_{(j'_1)T,t}^{(i_1)} \zeta_{(j_2)T,t}^{(i_1)} \zeta_{(j'_2)T,t}^{(i_1)} \zeta_{(j_3)T,t}^{(i_3)} \zeta_{(j'_3)T,t}^{(i_3)} \right\} = \\ &= \mathbb{M} \left\{ \sum_{j_3=0}^q \sum_{j_2, j'_2, j_1, j'_1=0}^q C_{j_3 j_2 j_1} C_{j_3 j'_2 j'_1} \zeta_{(j_1)T,t}^{(i_1)} \zeta_{(j'_1)T,t}^{(i_1)} \zeta_{(j_2)T,t}^{(i_1)} \zeta_{(j'_2)T,t}^{(i_1)} \right\} = \\ &= 3 \sum_{j_3=0}^q \sum_{j_2=0}^q (C_{j_3 j_2 j_2})^2 + \sum_{j_3=0}^q \sum_{j_2=0}^q \sum_{j_1=0}^{j_2-1} ((C_{j_3 j_2 j_1})^2 + (C_{j_3 j_1 j_2})^2 + \\ &\quad + 2C_{j_3 j_1 j_1} C_{j_3 j_2 j_2} + 2C_{j_3 j_2 j_1} C_{j_3 j_1 j_2}). \end{aligned}$$

Окончательно

$$\begin{aligned} \mathbb{M} \left\{ \left(J^*[\psi^{(3)}]_{T,t} - J^*[\psi^{(3)}]_{T,t}^q \right)^2 \right\} &= \int_{[t,T]^3} K^2(t_1, t_2, t_3) dt_1 dt_2 dt_3 + \\ &+ \frac{1}{4} \int_t^T \psi_3^2(t_3) \left(\int_t^{t_3} \psi_2(t_1) \psi_1(t_1) dt_1 \right)^2 dt_3 - \\ &- 3 \sum_{j_3=0}^q \sum_{j_2=0}^q (C_{j_3 j_2 j_2})^2 - \sum_{j_3=0}^q \sum_{j_2=0}^q \sum_{j_1=0}^{j_2-1} ((C_{j_3 j_2 j_1})^2 + (C_{j_3 j_1 j_2})^2 + \\ &\quad + 2C_{j_3 j_1 j_1} C_{j_3 j_2 j_2} + 2C_{j_3 j_2 j_1} C_{j_3 j_1 j_2}). \end{aligned}$$

$$+2C_{j_3j_1j_1}C_{j_3j_2j_2} + 2C_{j_3j_2j_1}C_{j_3j_1j_2}).$$

Перейдем к рассмотрению второго случая. Имеем

$$\begin{aligned} & \int_t^{*T} \psi_3(t_3) \int_t^{*t_3} \psi_2(t_2) \int_t^{*t_2} \psi_1(t_1) d\mathbf{f}_{t_1}^{(i_1)} d\mathbf{f}_{t_2}^{(i_3)} d\mathbf{f}_{t_3}^{(i_3)} = \\ & = \int_t^T \psi_3(t_3) \int_t^{t_3} \psi_2(t_2) \int_t^{t_2} \psi_1(t_1) d\mathbf{f}_{t_1}^{(i_1)} d\mathbf{f}_{t_2}^{(i_3)} d\mathbf{f}_{t_3}^{(i_3)} = \\ & \quad + \frac{1}{2} \int_t^T \psi_3(t_3) \psi_2(t_3) \int_t^{t_3} \psi_1(t_1) d\mathbf{f}_{t_1}^{(i_3)} dt_3 \end{aligned}$$

и

$$\begin{aligned} \mathbf{M} \left\{ (J^*[\psi^{(3)}]_{T,t})^2 \right\} &= \int_{[t,T]^3} K^2(t_1, t_2, t_3) dt_1 dt_2 dt_3 + \\ &+ \frac{1}{4} \mathbf{M} \left\{ \left(\int_t^T \psi_3(t_3) \psi_2(t_3) \int_t^{t_3} \psi_1(t_1) d\mathbf{f}_{t_1}^{(i_3)} dt_3 \right)^2 \right\} = \\ &= \int_{[t,T]^3} K^2(t_1, t_2, t_3) dt_1 dt_2 dt_3 + \\ &+ \frac{1}{4} \mathbf{M} \left\{ \left(\int_t^T \psi_1(t_1) \int_{t_1}^T \psi_2(t_3) \psi_3(t_3) dt_3 d\mathbf{f}_{t_1}^{(i_3)} \right)^2 \right\} = \\ &= \int_{[t,T]^3} K^2(t_1, t_2, t_3) dt_1 dt_2 dt_3 + \\ &+ \frac{1}{4} \int_t^T \psi_1^2(t_1) \left(\int_{t_1}^T \psi_2(t_3) \psi_3(t_3) dt_3 \right)^2 dt_1. \end{aligned}$$

Заметим, что математическое ожидание удвоенного произведения стохастических интегралов в данном случае равно нулю поскольку это интегралы

$$\int_t^T \psi_3(t_3) \int_t^{t_3} \psi_2(t_2) \int_t^{t_2} \psi_1(t_1) d\mathbf{f}_{t_1}^{(i_1)} d\mathbf{f}_{t_2}^{(i_3)} d\mathbf{f}_{t_3}^{(i_3)}$$

и

$$\int_t^T \psi_1(t_1) \int_{t_1}^T \psi_2(t_3) \psi_3(t_3) dt_3 d\mathbf{f}_{t_1}^{(i_3)}.$$

Во втором интеграле изменен порядок интегрирования.

Также как и ранее в силу независимости

$$J^*[\psi^{(3)}]_{T,t} - J^*[\psi^{(3)}]_{T,t}^q$$

и

$$J^*[\psi^{(3)}]_{T,t}^q$$

имеем

$$\begin{aligned} & \mathbb{M} \left\{ \left(J^*[\psi^{(3)}]_{T,t} - J^*[\psi^{(3)}]_{T,t}^q \right) J^*[\psi^{(3)}]_{T,t}^q \right\} = \\ & = \mathbb{M} \left\{ J^*[\psi^{(3)}]_{T,t} - J^*[\psi^{(3)}]_{T,t}^q \right\} \mathbb{M} \left\{ J^*[\psi^{(3)}]_{T,t}^q \right\}, \end{aligned}$$

а поскольку математическое ожидание произведения трех гауссовских случайных величин равно нулю, то

$$\mathbb{M} \left\{ J^*[\psi^{(3)}]_{T,t}^q \right\} = 0$$

и

$$\mathbb{M} \left\{ J^*[\psi^{(3)}]_{T,t} - J^*[\psi^{(3)}]_{T,t}^q \right\} \mathbb{M} \left\{ J^*[\psi^{(3)}]_{T,t}^q \right\} = 0.$$

Здесь интеграл и его аппроксимация представляются повторным рядом и повторной конечной суммой (6.11) соответственно.

Поэтому

$$\mathbb{M} \left\{ \left(J^*[\psi^{(3)}]_{T,t} - J^*[\psi^{(3)}]_{T,t}^q \right)^2 \right\} = \mathbb{M} \left\{ \left(J^*[\psi^{(3)}]_{T,t} \right)^2 \right\} - \mathbb{M} \left\{ \left(J^*[\psi^{(3)}]_{T,t}^q \right)^2 \right\}.$$

Далее

$$\begin{aligned} & \mathbb{M} \left\{ \left(J^*[\psi^{(3)}]_{T,t}^q \right)^2 \right\} = \\ & = \mathbb{M} \left\{ \sum_{j_3, j'_3, j_2, j'_2, j_1, j'_1=0}^q C_{j_3 j_2 j_1} C_{j'_3 j'_2 j'_1} \zeta_{(j_1)T,t}^{(i_1)} \zeta_{(j'_1)T,t}^{(i_1)} \zeta_{(j_2)T,t}^{(i_3)} \zeta_{(j'_2)T,t}^{(i_3)} \zeta_{(j_3)T,t}^{(i_3)} \zeta_{(j'_3)T,t}^{(i_3)} \right\} = \\ & = \mathbb{M} \left\{ \sum_{j_1=0}^q \sum_{j_2, j'_2, j_3, j'_3=0}^q C_{j_3 j_2 j_1} C_{j'_3 j'_2 j'_1} \zeta_{(j_2)T,t}^{(i_3)} \zeta_{(j'_2)T,t}^{(i_3)} \zeta_{(j_3)T,t}^{(i_3)} \zeta_{(j'_3)T,t}^{(i_3)} \right\} = \\ & = 3 \sum_{j_1=0}^q \sum_{j_3=0}^q (C_{j_3 j_3 j_1})^2 + \sum_{j_1=0}^q \sum_{j_3=0}^q \sum_{j_2=0}^{j_3-1} ((C_{j_3 j_2 j_1})^2 + (C_{j_2 j_3 j_1})^2 + \\ & \quad + 2C_{j_2 j_2 j_1} C_{j_3 j_3 j_1} + 2C_{j_3 j_2 j_1} C_{j_2 j_3 j_1}). \end{aligned}$$

Окончательно

$$\mathbb{M} \left\{ \left(J^*[\psi^{(3)}]_{T,t} - J^*[\psi^{(3)}]_{T,t}^q \right)^2 \right\} = \int_{[t,T]^3} K^2(t_1, t_2, t_3) dt_1 dt_2 dt_3 +$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{1}{4} \int_t^T \psi_1^2(t_1) \left(\int_{t_1}^T \psi_2(t_3) \psi_3(t_3) dt_3 \right)^2 dt_1 - \\
& - 3 \sum_{j_1=0}^q \sum_{j_3=0}^q (C_{j_3 j_3 j_1})^2 - \sum_{j_1=0}^q \sum_{j_3=0}^q \sum_{j_2=0}^{j_3-1} ((C_{j_3 j_2 j_1})^2 + (C_{j_2 j_3 j_1})^2 + \\
& + 2C_{j_2 j_2 j_1} C_{j_3 j_3 j_1} + 2C_{j_3 j_2 j_1} C_{j_2 j_3 j_1}).
\end{aligned}$$

6.1.2 Некоторые особенности вычисления среднеквадратической погрешности аппроксимации для систем полиномиальных и тригонометрических функций

Покажем на примере, что для случая тригонометрической системы функций аппроксимация вида (6.11) может быть усовершенствована таким образом, что ошибка аппроксимации

$$M \left\{ \left(J^*[\psi^{(k)}]_{T,t}^q - J^*[\psi^{(k)}]_{T,t} \right)^2 \right\}$$

окажется значительно меньше, чем правая часть (6.13).

Пусть в качестве системы функций $\{\phi_j(s)\}_{j=0}^\infty$ взята тригонометрическая система функций

$$\phi_j(s) = \frac{1}{\sqrt{T-t}} \begin{cases} 1 & \text{при } j = 0, \\ \sqrt{2} \sin \frac{2\pi r(s-t)}{T-t} & \text{при } j = 2r - 1, \\ \sqrt{2} \cos \frac{2\pi r(s-t)}{T-t} & \text{при } j = 2r, \end{cases} \quad (6.19)$$

где $r = 1, 2, \dots$

Применяя теорему 5.1 для системы функций (6.19) к повторному стохастическому интегралу Стратоновича вида

$$I_{00T,t}^{*(i_2 i_1)} = \int_t^{*T} \int_t^{*s} d\mathbf{f}_\tau^{(i_2)} d\mathbf{f}_s^{(i_1)}, \quad i_1, i_2 = 1, \dots, m,$$

получаем

$$\begin{aligned}
I_{00T,t}^{*(i_2 i_1)} = \frac{1}{2}(T-t) & \left[\zeta_0^{(i_1)} \zeta_0^{(i_2)} + \frac{1}{\pi} \sum_{r=1}^{\infty} \frac{1}{r} \left\{ \zeta_{2r}^{(i_1)} \zeta_{2r-1}^{(i_2)} - \zeta_{2r-1}^{(i_1)} \zeta_{2r}^{(i_2)} + \right. \right. \\
& \left. \left. + \sqrt{2} \left(\zeta_{2r-1}^{(i_1)} \zeta_0^{(i_2)} - \zeta_0^{(i_1)} \zeta_{2r-1}^{(i_2)} \right) \right\} \right], \quad (6.20)
\end{aligned}$$

где $\zeta_j^{(i)} \stackrel{\text{def}}{=} \int_t^T \phi_j(s) d\mathbf{f}_s^{(i)}$; $\mathbf{f}_s$, $i = 1, \dots, m$, — независимые стандартные винеровские процессы. При этом ряд (6.20), в частности, сходится в среднеквадратическом смысле.

Согласно (6.11) следует записать

$$I_{00T,t}^{*(i_2i_1)q} = \frac{1}{2}(T-t) \left[\zeta_0^{(i_1)} \zeta_0^{(i_2)} + \frac{1}{\pi} \sum_{r=1}^q \frac{1}{r} \left\{ \zeta_{2r}^{(i_1)} \zeta_{2r-1}^{(i_2)} - \zeta_{2r-1}^{(i_1)} \zeta_{2r}^{(i_2)} + \right. \right. \\ \left. \left. + \sqrt{2} \left(\zeta_{2r-1}^{(i_1)} \zeta_0^{(i_2)} - \zeta_0^{(i_1)} \zeta_{2r-1}^{(i_2)} \right) \right\} \right]. \quad (6.21)$$

Из (6.20) и (6.21) при $i_1 \neq i_2$ имеем

$$\mathbb{M} \left\{ \left(I_{00T,t}^{*(i_2i_1)} - I_{00T,t}^{*(i_2i_1)q} \right)^2 \right\} = \frac{3(T-t)^2}{2\pi^2} \left(\frac{\pi^2}{6} - \sum_{r=1}^q \frac{1}{r^2} \right). \quad (6.22)$$

Нетрудно видеть, что правую часть (6.22) можно уменьшить в три раза, если вместо аппроксимации вида (6.21) взять следующую аппроксимацию [70]:

$$I_{00T,t}^{*(i_2i_1)q} = \frac{1}{2}(T-t) \left[\zeta_0^{(i_1)} \zeta_0^{(i_2)} + \frac{1}{\pi} \sum_{r=1}^q \frac{1}{r} \left\{ \zeta_{2r}^{(i_1)} \zeta_{2r-1}^{(i_2)} - \zeta_{2r-1}^{(i_1)} \zeta_{2r}^{(i_2)} + \right. \right. \\ \left. \left. + \sqrt{2} \left(\zeta_{2r-1}^{(i_1)} \zeta_0^{(i_2)} - \zeta_0^{(i_1)} \zeta_{2r-1}^{(i_2)} \right) \right\} + \frac{\sqrt{2}}{\pi} \sqrt{\alpha_q} \left(\xi_q^{(i_1)} \zeta_0^{(i_2)} - \zeta_0^{(i_1)} \xi_q^{(i_2)} \right) \right], \quad (6.23)$$

где

$$\xi_q^{(i)} = \frac{1}{\sqrt{\alpha_q}} \sum_{r=q+1}^{\infty} \frac{1}{r} \zeta_{2r-1}^{(i)} \sim N(0, 1); \quad \alpha_q = \frac{\pi^2}{6} - \sum_{r=1}^q \frac{1}{r^2}.$$

При этом гауссовские случайные величины $\zeta_0^{(i)}$, $\zeta_{2r}^{(i)}$, $\zeta_{2r-1}^{(i)}$, $\xi_q^{(i)}$, $r = 1, \dots, q$; $i = 1, \dots, m$, независимы в совокупности.

Из (6.20) и (6.23) при $i_1 \neq i_2$ получаем

$$\mathbb{M} \left\{ \left(I_{00T,t}^{*(i_2i_1)} - I_{00T,t}^{*(i_2i_1)q} \right)^2 \right\} = \frac{(T-t)^2}{2\pi^2} \left(\frac{\pi^2}{6} - \sum_{r=1}^q \frac{1}{r^2} \right), \quad (6.24)$$

т. е. правая часть равенства (6.24) в три раза меньше, чем правая часть равенства (6.22).

Приведенный способ усовершенствования аппроксимаций повторных стохастических интегралов обобщен на случай интегралов третьей кратности в [86, 98]. По-видимому, при рассмотрении стохастических интегралов более высокой кратности, чем третья, нельзя предложить универсальный способ ввода дополнительных случайных величин так, как это сделано в (6.23). В результате в каждом случае приходится действовать индивидуально.

Этого не приходится однако делать при выборе в качестве системы функций $\{\phi_j(s)\}_{j=0}^{\infty}$ полной ортонормированной в пространстве $L_2([t, T])$ системы полиномов Лежандра.

Обозначим через

$$\sum_{\{(r_1, r_2), \dots, (r_{2k-1}, r_{2k})\}} \quad (6.25)$$

сумму по всем различным наборам вида $\{(r_1, r_2), \dots, (r_{2k-1}, r_{2k})\}$ из k двоек чисел $r_i \in \{1, \dots, 2k\}$; $r_i \neq r_j$, $i \neq j$. При этом $(r_i, r_{i+1}) \stackrel{\text{def}}{=} (r_{i+1}, r_i)$, $i = 1, \dots, 2k-1$, и наборы, состоящие из одних и тех же двоек, но расположенных в разном порядке, считаются тождественными.

Через

$$\sum_{((r_1, r_2), \dots, (r_{2k-1}, r_{2k}))} \quad (6.26)$$

обозначим сумму по всевозможным наборам $\{(r_1, r_2), \dots, (r_{2k-1}, r_{2k})\}$, которые считаются разными для различных составов или различного порядка следования в них пар $(r_1, r_2), \dots, (r_{2k-1}, r_{2k})$. Остальные обозначения, входящие в (6.26), такие же, как в (6.25).

Для вычисления погрешностей аппроксимаций повторных стохастических интегралов может оказаться полезной

Лемма 6.2. Пусть $f_t \in \mathfrak{R}^1$ — стандартный винеровский процесс, а $\phi_j(\tau)$, $j = 1, 2, \dots, 2k$, — непрерывные на промежутке $[t, T]$ функции. Тогда

$$\mathbb{M} \left\{ \prod_{j=1}^{2k} \int_t^T \phi_j(\tau) df_\tau \right\} = \sum_{\{(r_1, r_2), \dots, (r_{2k-1}, r_{2k})\}} \prod_{j=1}^k \int_t^T \phi_{r_{2j}}(\tau) \phi_{r_{2j-1}}(\tau) d\tau. \quad (6.27)$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть

$$J[\varphi_l]_N \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{j=0}^{N-1} \varphi_l(\tau_j) \Delta f_{\tau_j}, \quad J[\varphi_l]_{T,t} = \int_t^T \varphi_l(s) df_s,$$

$\Delta f_{\tau_j} = f_{\tau_{j+1}} - f_{\tau_j}$; $\{\tau_j\}_{j=0}^N$ — разбиение промежутка $[t, T]$, которое удовлетворяет условию (5.5).

Используя результат леммы 5.5 и соотношение (??), получаем

$$\begin{aligned} \mathbb{M} \left\{ \prod_{g=1}^{2k} J[\varphi_l]_{T,t} \right\} &= \lim_{N \rightarrow \infty} \mathbb{M} \left\{ \prod_{g=1}^{2k} J[\varphi_l]_N \right\} = \\ &= \lim_{N \rightarrow \infty} \mathbb{M} \left\{ \sum_{r=0}^{2k-1} \sum_{(s_r, \dots, s_1) \in \mathcal{A}_{2k,r}} \mathcal{C}_{s_r}^+ \dots \mathcal{C}_{s_1}^+ \left\{ \sum_{j_{2k}=0}^{N-1} \dots \right. \right. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \left. \dots \sum_{j_1=0}^{j_2-1} \sum_{(j_1, \dots, j_{2k})} \prod_{q=1}^{2k} \phi_q(\tau_{j_q}) \Delta f_{\tau_{j_q}} \right\} = \\
& = \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{j_k=0}^{N-1} \dots \sum_{j_1=0}^{j_2-1} \left(\sum_{(j_1, j_1, \dots, j_k, j_k)} \prod_{q=1}^k \phi_{2q}(\tau_{j_q}) \phi_{2q-1}(\tau_{j_q}) \right) \Delta \tau_{j_1} \dots \Delta \tau_{j_k} = \\
& = \int_t^T \int_t^{t_k} \dots \int_t^{t_2} \left(\sum_{(t_1, t_1, \dots, t_k, t_k)} \prod_{q=1}^k \phi_{2q}(t_q) \phi_{2q-1}(t_q) \right) dt_1 \dots dt_{k-1} dt_k = \\
& = \int_t^T \int_t^{t_k} \dots \int_t^{t_2} \left(\sum_{((r_1, r_2), \dots, (r_{2k-1}, r_{2k}))} \prod_{q=1}^k \phi_{r_{2q}}(t_q) \phi_{r_{2q-1}}(t_q) \right) dt_1 \dots dt_{k-1} dt_k = \\
& = \int_{[t, T]^k} \left(\sum_{\{(r_1, r_2), \dots, (r_{2k-1}, r_{2k})\}} \prod_{q=1}^k \phi_{r_{2q}}(t_q) \phi_{r_{2q-1}}(t_q) \right) dt_1 \dots dt_{k-1} dt_k = \\
& = \sum_{\{(r_1, r_2), \dots, (r_{2k-1}, r_{2k})\}} \prod_{q=1}^k \int_t^T \phi_{r_{2q}}(\tau) \phi_{r_{2q-1}}(\tau) d\tau, \tag{6.28}
\end{aligned}$$

где $\sum_{(x_1, \dots, x_k)}$ — сумма по всем возможным перестановкам $(x_1, \dots, x_k)$; множество $\mathcal{A}_{2k, r}$ определяется равенством (3.36). Соотношение (6.28) доказывают лемму. Лемма доказана. $\square$

Пример 6.1. Нетрудно проверить, что из (6.27) при $k = 1, 2, 3$ следуют равенства

$$\mathbb{M} \left\{ \prod_{l=1}^2 \eta_{T, t}^{(l)} \right\} = \zeta_{T, t}^{(12)},$$

$$\mathbb{M} \left\{ \prod_{l=1}^4 \eta_{T, t}^{(l)} \right\} = \zeta_{T, t}^{(12)} \zeta_{T, t}^{(34)} + \zeta_{T, t}^{(32)} \zeta_{T, t}^{(14)} + \zeta_{T, t}^{(13)} \zeta_{T, t}^{(24)},$$

$$\begin{aligned}
\mathbb{M} \left\{ \prod_{l=1}^6 \eta_{T, t}^{(l)} \right\} &= \zeta_{T, t}^{(65)} \zeta_{T, t}^{(43)} \zeta_{T, t}^{(21)} + \zeta_{T, t}^{(65)} \zeta_{T, t}^{(31)} \zeta_{T, t}^{(42)} + \zeta_{T, t}^{(65)} \zeta_{T, t}^{(32)} \zeta_{T, t}^{(41)} + \\
&+ \zeta_{T, t}^{(63)} \zeta_{T, t}^{(54)} \zeta_{T, t}^{(21)} + \zeta_{T, t}^{(62)} \zeta_{T, t}^{(54)} \zeta_{T, t}^{(13)} + \zeta_{T, t}^{(32)} \zeta_{T, t}^{(61)} \zeta_{T, t}^{(54)} + \zeta_{T, t}^{(64)} \zeta_{T, t}^{(53)} \zeta_{T, t}^{(21)} + \\
&+ \zeta_{T, t}^{(64)} \zeta_{T, t}^{(51)} \zeta_{T, t}^{(32)} + \zeta_{T, t}^{(64)} \zeta_{T, t}^{(52)} \zeta_{T, t}^{(31)} + \zeta_{T, t}^{(62)} \zeta_{T, t}^{(53)} \zeta_{T, t}^{(41)} + \zeta_{T, t}^{(61)} \zeta_{T, t}^{(53)} \zeta_{T, t}^{(42)} + \\
&+ \zeta_{T, t}^{(61)} \zeta_{T, t}^{(52)} \zeta_{T, t}^{(43)} + \zeta_{T, t}^{(62)} \zeta_{T, t}^{(51)} \zeta_{T, t}^{(43)} + \zeta_{T, t}^{(63)} \zeta_{T, t}^{(51)} \zeta_{T, t}^{(42)} + \zeta_{T, t}^{(63)} \zeta_{T, t}^{(52)} \zeta_{T, t}^{(41)},
\end{aligned}$$

где $\eta_{T, t}^{(l)} \stackrel{\text{def}}{=} \int_t^T \phi_l(\tau) df_\tau$; $\zeta_{T, t}^{(lk)} \stackrel{\text{def}}{=} \int_t^T \phi_l(\tau) \phi_k(\tau) d\tau$.

Из леммы 6.2 вытекает следующее утверждение.

Лемма 6.3. Пусть $f_t \in \mathbb{R}^1$ — стандартный винеровский процесс, а $\{\phi_j(\tau)\}_{j=0}^\infty$ — полная ортонормированная система непрерывных функций в пространстве $L_2([t, T])$. Тогда

$$\begin{aligned} & \mathbb{M} \left\{ \prod_{i=1}^{2k} \int_t^T \phi_{r_i}(\tau) df_\tau \right\} = \\ & = \begin{cases} (2g+1)!! & \text{при } \{r_1, \dots, r_{2k}\} = \{q_1, q_1, \dots, q_k, q_k\}, \\ 0 & \text{в противном случае,} \end{cases} \end{aligned}$$

где g — число совпадений чисел в наборе $\{q_1, \dots, q_k\}$; $g \geq 0$; $r_i = 0, 1, \dots$; $r_i \neq r_j, i \neq j$; $i, j = 1, \dots, 2k$; $\{x_1, \dots, x_k\}$ — неупорядоченный набор чисел $x_1, \dots, x_k$.

Из леммы 6.3 при $r_1 = \dots = r_{2k} = r$ следует хорошо известное равенство

$$\mathbb{M} \left\{ \left(\int_t^T \phi_r(\tau) df_\tau \right)^{2k} \right\} = (2k+1)!!; \int_t^T \phi_r^2(\tau) d\tau = 1.$$

6.1.3 Сильная аппроксимация повторных стохастических интегралов Стратоновича кратностей 1–5 с помощью полиномов Лежандра

Полная ортонормированная система полиномов Лежандра в пространстве $L_2([t, T])$ имеет вид

$$\{\phi_j(x)\}_{j=0}^\infty, \quad \phi_j(x) = \sqrt{\frac{2j+1}{T-t}} P_j \left(\left(x - \frac{T+t}{2} \right) \frac{2}{T-t} \right), \quad (6.29)$$

где $P_j(x)$ — полином Лежандра. Известно [129], что полином $P_j(x)$ представим, например, в виде

$$P_j(x) = \frac{1}{2^j j!} \frac{d^j}{dx^j} (x^2 - 1)^j.$$

Это выражение именуется формулой Родрига. Отметим некоторые хорошо известные свойства полиномов $P_j(x)$:

$$\begin{aligned} & \frac{dP_{j+1}(x)}{dx} - \frac{dP_{j-1}(x)}{dx} = (2j+1)P_j(x), \quad j = 1, 2, \dots, \\ & \int_{-1}^1 x^k P_j(x) dx = 0, \quad k = 0, 1, 2, \dots, j-1, \end{aligned}$$

$$\int_{-1}^1 P_k(x)P_j(x)dx = \begin{cases} 0 & \text{при } k \neq j, \\ \frac{2}{2j+1} & \text{при } k = j, \end{cases}$$

$$xP_j(x) = \frac{(j+1)P_{j+1}(x) + jP_{j-1}(x)}{2j+1}, \quad j = 1, 2, \dots,$$

$$P_n(x)P_m(x) = \sum_{k=0}^m K_{m,n,k}P_{n+m-2k}(x),$$

где

$$K_{m,n,k} = \frac{a_{m-k}a_ka_{n-k}}{a_{m+n-k}} \cdot \frac{2n+2m-4k+1}{2n+2m-2k+1}; \quad a_k = \frac{(2k-1)!!}{k!}; \quad m \leq n.$$

Учитывая эти свойства и используя систему функций (6.29), с использованием результатов главы 5, получаем следующие разложения повторных стохастических интегралов Стратоновича семейства (6.4):

$$I_{0T,t}^{*(i_1)} = \sqrt{T-t}\zeta_0^{(i_1)}, \quad (6.30)$$

$$I_{1T,t}^{*(i_1)} = -\frac{(T-t)^{3/2}}{2} \left(\zeta_0^{(i_1)} + \frac{1}{\sqrt{3}}\zeta_1^{(i_1)} \right), \quad (6.31)$$

$$I_{2T,t}^{*(i_1)} = \frac{(T-t)^{5/2}}{3} \left(\zeta_0^{(i_1)} + \frac{\sqrt{3}}{2}\zeta_1^{(i_1)} + \frac{1}{2\sqrt{5}}\zeta_2^{(i_1)} \right), \quad (6.32)$$

$$I_{00T,t}^{*(i_1i_2)} = \frac{T-t}{2} \left[\zeta_0^{(i_1)}\zeta_0^{(i_2)} + \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{4i^2-1}} \left\{ \zeta_{i-1}^{(i_1)}\zeta_i^{(i_2)} - \zeta_i^{(i_1)}\zeta_{i-1}^{(i_2)} \right\} \right], \quad (6.33)$$

$$\begin{aligned} I_{01T,t}^{*(i_1i_2)} = & -\frac{T-t}{2}I_{00T,t}^{*(i_1i_2)} - \frac{(T-t)^2}{4} \left[\frac{1}{3}\zeta_0^{(i_1)}\zeta_0^{(i_2)} + \frac{1}{\sqrt{3}}\zeta_0^{(i_1)}\zeta_1^{(i_2)} + \right. \\ & \left. + \frac{2}{3\sqrt{5}}\zeta_0^{(i_1)}\zeta_2^{(i_2)} - \frac{1}{3\sqrt{5}}\zeta_2^{(i_1)}\zeta_0^{(i_2)} + \right. \\ & \left. + \sum_{i=1}^{\infty} \left(\frac{(i+2)\zeta_i^{(i_1)}\zeta_{i+2}^{(i_2)} - (i+1)\zeta_{i+2}^{(i_1)}\zeta_i^{(i_2)}}{\sqrt{(2i+1)(2i+5)(2i+3)}} - \frac{\zeta_i^{(i_1)}\zeta_i^{(i_2)}}{(2i-1)(2i+3)} \right) \right], \end{aligned} \quad (6.34)$$

$$I_{10T,t}^{*(i_1i_2)} = -\frac{T-t}{2}I_{00T,t}^{*(i_1i_2)} - \frac{(T-t)^2}{4} \left[-\frac{1}{3}\zeta_0^{(i_1)}\zeta_0^{(i_2)} + \frac{1}{\sqrt{3}}\zeta_0^{(i_2)}\zeta_1^{(i_1)} - \right.$$

$$\begin{aligned}
& -\frac{2}{3\sqrt{5}}\zeta_2^{(i_1)}\zeta_0^{(i_2)} + \frac{1}{3\sqrt{5}}\zeta_2^{(i_2)}\zeta_0^{(i_1)} + \\
& + \sum_{i=1}^{\infty} \left(\frac{(i+1)\zeta_{i+2}^{(i_2)}\zeta_i^{(i_1)} - (i+2)\zeta_i^{(i_2)}\zeta_{i+2}^{(i_1)}}{\sqrt{(2i+1)(2i+5)(2i+3)}} + \frac{\zeta_i^{(i_1)}\zeta_i^{(i_2)}}{(2i-1)(2i+3)} \right) \Bigg], \quad (6.35)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
I_{00T,t}^{*(i_1i_2i_3)} &= -\frac{1}{T-t} \left(I_{0T,t}^{*(i_3)} I_{10T,t}^{*(i_2i_1)} + I_{0T,t}^{*(i_1)} I_{10T,t}^{*(i_2i_3)} \right) + \\
& + \frac{1}{2} I_{0T,t}^{*(i_3)} \left(I_{00T,t}^{*(i_1i_2)} - I_{00T,t}^{*(i_2i_1)} \right) + \\
& + \frac{1}{6} (T-t)^{\frac{3}{2}} \zeta_0^{(i_3)} \left\{ \zeta_0^{(i_1)} \left(\frac{1}{\sqrt{5}} \zeta_2^{(i_2)} - \sqrt{3} \zeta_1^{(i_2)} - \zeta_0^{(i_2)} \right) + \right. \\
& \left. + \frac{1}{2} \zeta_1^{(i_1)} \left(\sqrt{3} \zeta_0^{(i_2)} - \zeta_1^{(i_2)} \right) \right\} + D_{T,t}^{(i_1i_2i_3)}, \quad (6.36)
\end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned}
D_{T,t}^{(i_1i_2i_3)} &= -\frac{(T-t)^{\frac{3}{2}}}{4} \times \\
& \times \sum_{i=1}^{\infty} \left\{ \sum_{\substack{j=0 \\ 2j \geq k+j-i \geq 0; \, k+j-i - \text{четное}}}^{\infty} \sum_{\substack{k=j-1, k \geq 1}}^{\infty} L_{ijk} K_{j,k+1, \frac{k+j-i}{2}} \zeta_i^{(i_1)} \zeta_j^{(i_2)} \zeta_k^{(i_3)} + \right. \\
& + \sum_{\substack{j=0 \\ 2k+2 \geq k+j-i \geq 0; \, k+j-i - \text{четное}}}^{\infty} \sum_{k=1}^{j-2} L_{ijk} K_{k+1,j, \frac{k+j-i}{2}} \zeta_i^{(i_1)} \zeta_j^{(i_2)} \zeta_k^{(i_3)} - \\
& - \left(\sum_{\substack{j=0 \\ 2j+2 \geq k+j-i \geq 2; \, k+j-i - \text{четное}}}^{\infty} \sum_{k=j+1}^{\infty} L_{ijk} K_{j,k-1, \frac{k+j-i}{2}-1} \zeta_i^{(i_1)} \zeta_j^{(i_2)} \zeta_k^{(i_3)} + \right. \\
& + \sum_{\substack{j=0 \\ 2k \geq k+j-i \geq 2; \, k+j-i - \text{четное}}}^{\infty} \sum_{k=1}^j L_{ijk} K_{k-1,j, \frac{k+j-i}{2}-1} \zeta_i^{(i_1)} \zeta_j^{(i_2)} \zeta_k^{(i_3)} + \\
& + \sum_{\substack{j=0 \\ 2j-2 \geq k+j-i \geq -2; \, k+j-i - \text{четное}}}^{\infty} \sum_{\substack{k=j-1, k \geq 1}}^{\infty} M_{ijk} K_{j,k+1, \frac{k+j-i}{2}+1} \zeta_i^{(i_1)} \zeta_j^{(i_2)} \zeta_k^{(i_3)} + \\
& \left. + \sum_{\substack{j=0 \\ 2k \geq k+j-i \geq -2; \, k+j-i - \text{четное}}}^{\infty} \sum_{k=1}^{j-2} M_{ijk} K_{k+1,j, \frac{k+j-i}{2}+1} \zeta_i^{(i_1)} \zeta_j^{(i_2)} \zeta_k^{(i_3)} \right) +
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{k=j+1}^{\infty} M_{ijk} K_{j,k-1, \frac{k+j-i}{2}} \zeta_i^{(i_1)} \zeta_j^{(i_2)} \zeta_k^{(i_3)} + \\
& \left. + \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{k=1}^j M_{ijk} K_{k-1,j, \frac{k+j-i}{2}} \zeta_i^{(i_1)} \zeta_j^{(i_2)} \zeta_k^{(i_3)} \right\}, \quad (6.37)
\end{aligned}$$

$2j \geq k+j-i \geq 0; k+j-i - \text{четное}$

$2k-2 \geq k+j-i \geq 0; k+j-i - \text{четное}$

$$L_{ijk} = \sqrt{\frac{2j+1}{(2k+1)(2i+1)}} \frac{1}{2i+3}, \quad M_{ijk} = \sqrt{\frac{2j+1}{(2k+1)(2i+1)}} \frac{1}{2i-1},$$

$$K_{m,n,k} = \frac{a_{m-k} a_k a_{n-k}}{a_{m+n-k}} \cdot \frac{2n+2m-4k+1}{2n+2m-2k+1}; \quad a_k = \frac{(2k-1)!!}{k!}; \quad m \leq n.$$

Приведем другое выражение для $D_{T,t}^{(i_1 i_2 i_3)}$, в котором более наглядно виден порядок убывания коэффициентов Фурье:

$$\begin{aligned}
& D_{T,t}^{(i_1 i_2 i_3)} = -\frac{(T-t)^{\frac{3}{2}}}{4} \times \\
& \times \sum_{i=1}^{\infty} \left\{ \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{k=i}^{\infty} N_{ijk} K_{i+1,k+1, \frac{k+i-j}{2}+1} \zeta_i^{(i_1)} \zeta_j^{(i_2)} \zeta_k^{(i_3)} + \right. \\
& + \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{k=1}^{i-1} N_{ijk} K_{k+1,i+1, \frac{k+i-j}{2}+1} \zeta_i^{(i_1)} \zeta_j^{(i_2)} \zeta_k^{(i_3)} - \\
& - \left(\sum_{j=0}^{\infty} \sum_{k=i+2}^{\infty} N_{ijk} K_{i+1,k-1, \frac{k+i-j}{2}} \zeta_i^{(i_1)} \zeta_j^{(i_2)} \zeta_k^{(i_3)} + \right. \\
& + \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{k=1}^{i+1} N_{ijk} K_{k-1,i+1, \frac{k+i-j}{2}} \zeta_i^{(i_1)} \zeta_j^{(i_2)} \zeta_k^{(i_3)} + \\
& + \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{k=i-2, k \geq 1}^{\infty} N_{ijk} K_{i-1,k+1, \frac{k+i-j}{2}} \zeta_i^{(i_1)} \zeta_j^{(i_2)} \zeta_k^{(i_3)} + \\
& \left. + \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{k=1}^{i-3} N_{ijk} K_{k+1,i-1, \frac{k+i-j}{2}} \zeta_i^{(i_1)} \zeta_j^{(i_2)} \zeta_k^{(i_3)} \right) +
\end{aligned}$$

$2i \geq k+i-j \geq -2; k+i-j - \text{четное}$

$2k \geq k+i-j \geq -2; k+i-j - \text{четное}$

$2i+2 \geq k+i-j \geq 0; k+i-j - \text{четное}$

$2k-2 \geq k+i-j \geq 0; k+i-j - \text{четное}$

$2i-2 \geq k+i-j \geq 0; k+i-j - \text{четное}$

$2k+2 \geq k+i-j \geq 0; k+i-j - \text{четное}$

$$\begin{aligned}
& + \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{k=i}^{\infty} N_{ijk} K_{i-1, k-1, \frac{k+i-j}{2}-1} \zeta_i^{(i_1)} \zeta_j^{(i_2)} \zeta_k^{(i_3)} + \\
& \quad 2i \geq k+i-j \geq 2; k+i-j - \text{четное} \\
& + \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{k=1}^{i-1} N_{ijk} K_{k-1, i-1, \frac{k+i-j}{2}-1} \zeta_i^{(i_1)} \zeta_j^{(i_2)} \zeta_k^{(i_3)} \Bigg\}, \\
& \quad 2k \geq k+i-j \geq 2; k+i-j - \text{четное}
\end{aligned}$$

где

$$N_{ijk} = \sqrt{\frac{1}{(2k+1)(2j+1)(2i+1)}},$$

остальные обозначения такие же, как в (6.37).

Здесь следует оговориться, что формулы касающиеся повторного стохастического интеграла 3 кратности подразумеваются для случая попарно различных $i_1, i_2, i_3 = 1, \dots, m$ и суммирование в них подразумевается в смысле кратного ряда (см. теорему 5.1). Другие случаи разобраны в главе 5. Из рассуждений этого раздела ясно, как изменятся обсуждаемые формулы при других сочетаниях индексов i_1, i_2, i_3 .

Рассмотрим аппроксимацию повторного стохастического интеграла $I_{00_{T,t}}^{*(i_1 i_2)}$, полученную из (6.33) путем замены ∞ на q .

Можно показать, что

$$\mathbb{M} \left\{ \left(I_{00_{T,t}}^{*(i_1 i_2)} - I_{00_{T,t}}^{*(i_1 i_2)q} \right)^2 \right\} = \frac{(T-t)^2}{2} \left(\frac{1}{2} - \sum_{i=1}^q \frac{1}{4i^2 - 1} \right). \quad (6.38)$$

Далее, с использованием леммы 6.1 получаем

$$\begin{aligned}
& \mathbb{M} \left\{ \left(I_{10_{T,t}}^{*(i_1 i_2)} - I_{10_{T,t}}^{*(i_1 i_2)q} \right)^2 \right\} = \\
& = \mathbb{M} \left\{ \left(I_{01_{T,t}}^{*(i_1 i_2)} - I_{01_{T,t}}^{*(i_1 i_2)q} \right)^2 \right\} = \\
& = \frac{(T-t)^4}{16} \left\{ \frac{7}{9} - \sum_{i=1}^q \left(\frac{1}{4i^2 - 1} + \frac{1}{(2i+1)(2i+3)} + \right. \right. \\
& \quad \left. \left. + \frac{(i+2)^2 + (i+1)^2}{(2i+1)(2i+5)(2i+3)^2} + \frac{1}{(2i-1)^2(2i+3)^2} \right) \right\}.
\end{aligned}$$

В приведенных формулах предполагалось $i_1 \neq i_2$. При $i_1 = i_2$:

$$I_{01_{T,t}}^{*(i_1 i_1)q} =$$

$$\begin{aligned}
&= -\frac{(T-t)^2}{4} \left[\frac{4}{3} \left(\zeta_0^{(i_1)} \right)^2 + \frac{1}{\sqrt{3}} \zeta_0^{(i_1)} \zeta_1^{(i_1)} + \frac{1}{3\sqrt{5}} \zeta_0^{(i_1)} \zeta_2^{(i_1)} + \right. \\
&+ \left. \sum_{i=1}^q \left\{ \frac{1}{\sqrt{(2i+1)(2i+5)(2i+3)}} \zeta_i^{(i_1)} \zeta_{i+2}^{(i_1)} - \frac{1}{(2i-1)(2i+3)} \left(\zeta_i^{(i_1)} \right)^2 \right\} \right], \\
&I_{10T,t}^{*(i_1 i_1)q} = \\
&= -\frac{(T-t)^2}{4} \left[\frac{2}{3} \left(\zeta_0^{(i_1)} \right)^2 + \frac{1}{\sqrt{3}} \zeta_0^{(i_1)} \zeta_1^{(i_1)} - \frac{1}{3\sqrt{5}} \zeta_0^{(i_1)} \zeta_2^{(i_1)} + \right. \\
&+ \left. \sum_{i=1}^q \left\{ -\frac{1}{\sqrt{(2i+1)(2i+5)(2i+3)}} \zeta_i^{(i_1)} \zeta_{i+2}^{(i_1)} + \frac{1}{(2i-1)(2i+3)} \left(\zeta_i^{(i_1)} \right)^2 \right\} \right], \\
&\mathbb{M} \left\{ \left(I_{10T,t}^{*(i_1 i_1)} - I_{10T,t}^{*(i_1 i_1)q} \right)^2 \right\} = \\
&= \mathbb{M} \left\{ \left(I_{01T,t}^{*(i_1 i_1)} - I_{01T,t}^{*(i_1 i_1)q} \right)^2 \right\} = \\
&= \frac{(T-t)^4}{16} \left[\sum_{i=q+1}^{\infty} \frac{1}{(2i+1)(2i+5)(2i+3)^2} + \sum_{i=q+1}^{\infty} \frac{2}{(2i-1)^2(2i+3)^2} + \right. \\
&\quad \left. + \left(\sum_{i=q+1}^{\infty} \frac{1}{(2i-1)(2i+3)} \right)^2 \right].
\end{aligned}$$

Рассмотрим аппроксимации повторных стохастических интегралов Стратоновича кратностей 3–5 (здесь предполагается, что $i_1, \dots, i_5 = 1, \dots, m$ попарно различны).

Имеем

$$I_{000T,t}^{*(i_1 i_2 i_3)q_1} = \sum_{i,j,k=0}^{q_1} C_{kji} \zeta_k^{(i_3)} \zeta_j^{(i_2)} \zeta_i^{(i_1)}, \quad (6.39)$$

где

$$\begin{aligned}
C_{kji} &= \int_t^T \int_t^z \int_t^y \phi_k(x) dx \phi_j(y) dy \phi_i(z) dz = \\
&= \frac{\sqrt{(2i+1)(2j+1)(2k+1)}}{8} (T-t)^{3/2} \bar{C}_{kji}; \\
\bar{C}_{kji} &= \int_{-1}^1 \int_{-1}^z \int_{-1}^y P_k(x) dx P_j(y) dy P_i(z) dz.
\end{aligned}$$

Таблица 6.1. Коэффициенты $\bar{C}_{kj0}$

j^k	0	1	2	3	4	5	6
0	$\frac{4}{3}$	$-\frac{2}{3}$	$\frac{2}{15}$	0	0	0	0
1	0	$\frac{2}{15}$	$-\frac{2}{15}$	$\frac{4}{105}$	0	0	0
2	$-\frac{4}{15}$	$\frac{2}{15}$	$\frac{2}{105}$	$-\frac{2}{35}$	$\frac{2}{105}$	0	0
3	0	$-\frac{2}{35}$	$\frac{2}{35}$	$\frac{2}{315}$	$-\frac{2}{63}$	$\frac{8}{693}$	0
4	0	0	$-\frac{8}{315}$	$\frac{2}{63}$	$\frac{2}{693}$	$-\frac{2}{99}$	$\frac{10}{1287}$
5	0	0	0	$-\frac{10}{693}$	$\frac{2}{99}$	$\frac{2}{1287}$	$-\frac{2}{143}$
6	0	0	0	0	$-\frac{4}{429}$	$\frac{2}{143}$	$\frac{2}{2145}$

Таблица 6.2. Коэффициенты $\bar{C}_{kj1}$

j^k	0	1	2	3	4	5	6
0	$\frac{2}{3}$	$-\frac{4}{15}$	0	$\frac{2}{105}$	0	0	0
1	$\frac{2}{15}$	0	$-\frac{4}{105}$	0	$\frac{2}{315}$	0	0
2	$-\frac{2}{15}$	$\frac{8}{105}$	0	$-\frac{2}{105}$	0	$\frac{4}{1155}$	0
3	$-\frac{2}{35}$	0	$\frac{8}{315}$	0	$-\frac{38}{3465}$	0	$\frac{20}{9009}$
4	0	$-\frac{4}{315}$	0	$\frac{46}{3465}$	0	$-\frac{64}{9009}$	0
5	0	0	$-\frac{4}{693}$	0	$\frac{74}{9009}$	0	$-\frac{32}{6435}$
6	0	0	0	$-\frac{10}{3003}$	0	$\frac{4}{715}$	0

Таблица 6.3. Коэффициенты $\bar{C}_{kj2}$

j^k	0	1	2	3	4	5	6
0	$\frac{2}{15}$	0	$-\frac{4}{105}$	0	$\frac{2}{315}$	0	0
1	$\frac{2}{15}$	$-\frac{4}{105}$	0	$-\frac{2}{315}$	0	$\frac{8}{3465}$	0
2	$\frac{2}{105}$	0	0	0	$-\frac{2}{495}$	0	$\frac{4}{3003}$
3	$-\frac{2}{35}$	$\frac{8}{315}$	0	$-\frac{2}{3465}$	0	$-\frac{116}{45045}$	0
4	$-\frac{8}{315}$	0	$\frac{4}{495}$	0	$-\frac{2}{6435}$	0	$-\frac{16}{9009}$
5	0	$-\frac{4}{693}$	0	$\frac{38}{9009}$	0	$-\frac{8}{45045}$	0
6	0	0	$-\frac{8}{3003}$	0	$-\frac{118}{45045}$	0	$-\frac{4}{36465}$

Таблица 6.4. Коэффициенты $\bar{C}_{kj3}$

j^k	0	1	2	3	4	5	6
0	0	$\frac{2}{105}$	0	$-\frac{4}{315}$	0	$\frac{2}{693}$	0
1	$\frac{4}{105}$	0	$-\frac{2}{315}$	0	$-\frac{8}{3465}$	0	$\frac{10}{9009}$
2	$\frac{2}{35}$	$-\frac{2}{105}$	0	$\frac{4}{3465}$	0	$-\frac{74}{45045}$	0
3	$\frac{2}{315}$	0	$-\frac{2}{3465}$	0	$\frac{16}{45045}$	0	$-\frac{10}{9009}$
4	$-\frac{2}{63}$	$\frac{46}{3465}$	0	$-\frac{32}{45045}$	0	$\frac{2}{9009}$	0
5	$-\frac{10}{693}$	0	$\frac{38}{9009}$	0	$-\frac{4}{9009}$	0	$\frac{122}{765765}$
6	0	$-\frac{10}{3003}$	0	$\frac{20}{9009}$	0	$-\frac{226}{765765}$	0

Таблица 6.5. Коэффициенты $\bar{C}_{kj4}$

j^k	0	1	2	3	4	5	6
0	0	0	$\frac{2}{315}$	0	$-\frac{4}{693}$	0	$\frac{2}{1287}$
1	0	$\frac{2}{315}$	0	$-\frac{8}{3465}$	0	$-\frac{10}{9009}$	0
2	$\frac{2}{105}$	0	$-\frac{2}{495}$	0	$\frac{4}{6435}$	0	$-\frac{38}{45045}$
3	$\frac{2}{63}$	$-\frac{38}{3465}$	0	$\frac{16}{45045}$	0	$\frac{2}{9009}$	0
4	$\frac{2}{693}$	0	$-\frac{2}{6435}$	0	0	0	$\frac{2}{13923}$
5	$-\frac{2}{99}$	$\frac{74}{9009}$	0	$-\frac{4}{9009}$	0	$-\frac{2}{153153}$	0
6	$-\frac{4}{429}$	0	$\frac{118}{45045}$	0	$-\frac{4}{13923}$	0	$-\frac{2}{188955}$

Таблица 6.6. Коэффициенты $\bar{C}_{kj5}$

j^k	0	1	2	3	4	5	6
0	0	0	0	$\frac{2}{693}$	0	$-\frac{4}{1287}$	0
1	0	0	$\frac{8}{3465}$	0	$-\frac{10}{9009}$	0	$-\frac{4}{6435}$
2	0	$\frac{4}{1155}$	0	$-\frac{74}{45045}$	0	$\frac{16}{45045}$	0
3	$\frac{8}{693}$	0	$-\frac{116}{45045}$	0	$\frac{2}{9009}$	0	$\frac{8}{58905}$
4	$\frac{2}{99}$	$-\frac{64}{9009}$	0	$\frac{2}{9009}$	0	$\frac{4}{153153}$	0
5	$\frac{2}{1287}$	0	$-\frac{8}{45045}$	0	$-\frac{2}{153153}$	0	$\frac{4}{415701}$
6	$-\frac{2}{143}$	$\frac{4}{715}$	0	$-\frac{226}{765765}$	0	$-\frac{8}{415701}$	0

Таблица 6.7. Коэффициенты $\bar{C}_{kj6}$

j^k	0	1	2	3	4	5	6
0	0	0	0	0	$\frac{2}{1287}$	0	$-\frac{4}{2145}$
1	0	0	0	$\frac{10}{9009}$	0	$-\frac{4}{6435}$	0
2	0	0	$\frac{4}{3003}$	0	$-\frac{38}{45045}$	0	$\frac{8}{36465}$
3	0	$\frac{20}{9009}$	0	$-\frac{10}{9009}$	0	$\frac{8}{58905}$	0
4	$\frac{10}{1287}$	0	$-\frac{16}{9009}$	0	$\frac{2}{13923}$	0	$\frac{4}{188955}$
5	$\frac{2}{143}$	$-\frac{32}{6435}$	0	$\frac{122}{765765}$	0	$\frac{4}{415701}$	0
6	$\frac{2}{2145}$	0	$-\frac{4}{36465}$	0	$-\frac{2}{188955}$	0	0

Таблица 6.8. Коэффициенты $\bar{C}_{lk00}$

k^l	0	1	2
0	$\frac{2}{3}$	$-\frac{2}{5}$	$\frac{2}{15}$
1	$-\frac{2}{15}$	$\frac{2}{15}$	$-\frac{2}{21}$
2	$-\frac{2}{15}$	$\frac{2}{35}$	$\frac{2}{105}$

Таблица 6.9. Коэффициенты $\bar{C}_{lk01}$

k^l	0	1	2
0	$\frac{2}{5}$	$-\frac{2}{9}$	$\frac{2}{35}$
1	$-\frac{2}{45}$	$\frac{2}{35}$	$-\frac{2}{45}$
2	$-\frac{2}{21}$	$\frac{2}{45}$	$\frac{2}{315}$

Таблица 6.10. Коэффициенты $\bar{C}_{lk20}$

k^l	0	1	2
0	$-\frac{2}{15}$	$\frac{2}{21}$	$-\frac{4}{105}$
1	$\frac{2}{35}$	$-\frac{4}{105}$	$\frac{2}{105}$
2	$\frac{4}{105}$	$-\frac{2}{105}$	0

Таблица 6.11. Коэффициенты $\bar{C}_{lk10}$

k^l	0	1	2
0	$\frac{2}{15}$	$-\frac{2}{45}$	$-\frac{2}{105}$
1	$\frac{2}{45}$	$-\frac{2}{105}$	$\frac{2}{315}$
2	$-\frac{2}{35}$	$\frac{2}{63}$	$-\frac{2}{315}$

Таблица 6.12. Коэффициенты $\bar{C}_{lk11}$

k^l	0	1	2
0	$\frac{2}{15}$	$-\frac{2}{35}$	0
1	$\frac{2}{105}$	0	$-\frac{2}{315}$
2	$-\frac{4}{105}$	$\frac{2}{105}$	0

Таблица 6.13. Коэффициенты $\bar{C}_{lk02}$

k^l	0	1	2
0	$\frac{2}{15}$	$-\frac{2}{35}$	0
1	$\frac{2}{105}$	0	$-\frac{2}{315}$
2	$-\frac{4}{105}$	$\frac{2}{105}$	0

Таблица 6.14. Коэффициенты $\bar{C}_{lk12}$

k^l	0	1	2
0	$\frac{2}{21}$	$-\frac{2}{45}$	$\frac{2}{315}$
1	$\frac{2}{315}$	$\frac{2}{315}$	$-\frac{2}{225}$
2	$-\frac{2}{105}$	$\frac{2}{225}$	$\frac{2}{1155}$

Таблица 6.15. Коэффициенты $\bar{C}_{lk21}$

k^l	0	1	2
0	$-\frac{2}{35}$	$\frac{2}{45}$	$-\frac{2}{105}$
1	$\frac{2}{63}$	$-\frac{2}{105}$	$\frac{2}{225}$
2	$\frac{2}{105}$	$-\frac{2}{225}$	$-\frac{2}{3465}$

Таблица 6.16. Коэффициенты $\bar{C}_{lk22}$

k^l	0	1	2
0	$\frac{2}{105}$	$-\frac{2}{315}$	0
1	$\frac{2}{315}$	0	$-\frac{2}{1155}$
2	0	$\frac{2}{3465}$	0

Погрешность среднеквадратической аппроксимации, определяется при $i_1 \neq i_2, i_1 \neq i_3, i_3 \neq i_2$ по лемме 6.1 формулой

$$\mathbb{M} \left\{ \left(I_{000T,t}^{*(i_1 i_2 i_3)} - I_{000T,t}^{*(i_1 i_2 i_3)q_1} \right)^2 \right\} = (T-t)^3 \left(\frac{1}{6} - \sum_{i,j,k=0}^{q_1} \frac{C_{kji}^2}{(T-t)^3} \right). \quad (6.40)$$

Положим $q_1 = 6$. В табл. 6.1–6.7 приведены точные значения коэффициентов $\bar{C}_{kji}$ при $i, j, k = 0, 1, \dots, 6$.

Вычисляя значение выражения (6.40) при $q_1 = 6$, при $i_1 \neq i_2, i_1 \neq i_3, i_3 \neq i_2$ получаем следующее приближенное равенство:

$$\mathbb{M} \left\{ \left(I_{000T,t}^{*(i_1 i_2 i_3)} - I_{000T,t}^{*(i_1 i_2 i_3)q_1} \right)^2 \right\} \approx 0.01956(T-t)^3.$$

Рассмотрим аппроксимацию стохастического интеграла $I_{0000T,t}^{*(i_1 i_2 i_3 i_4)}$, $i_1, \dots, i_4 = 1, \dots, m$. Имеем

$$I_{0000T,t}^{*(i_1 i_2 i_3 i_4)q_2} = \sum_{i,j,k,l=0}^{q_2} C_{lkji} \zeta_l^{(i_4)} \zeta_k^{(i_3)} \zeta_j^{(i_2)} \zeta_i^{(i_1)}, \quad (6.41)$$

где

$$\begin{aligned} C_{lkji} &= \int_t^T \int_t^u \int_t^z \int_t^y \phi_l(x) dx \phi_k(y) dy \phi_j(z) dz \phi_i(u) du = \\ &= \frac{\sqrt{(2i+1)(2j+1)(2k+1)(2l+1)}}{16} (T-t)^2 \bar{C}_{lkji}; \end{aligned}$$

$$\bar{C}_{lkji} = \int_{-1}^1 \int_{-1}^u \int_{-1}^z \int_{-1}^y P_l(x) dx P_k(y) dy P_j(z) dz P_i(u) du.$$

Выберем, например, $q_2 = 2$. В табл. 6.8–6.16 приведены точные значения коэффициентов $\bar{C}_{lkji}$, $i, j, k, l = 0, 1, 2$.

При попарно различных i, j, k, l имеем следующее равенство:

$$\mathbb{M} \left\{ \left(I_{0000T,t}^{*(i_1 i_2 i_3 i_4)} - I_{0000T,t}^{*(i_1 i_2 i_3 i_4)q_2} \right)^2 \right\} = (T - t)^4 \left(\frac{1}{24} - \sum_{i,j,k,l=0}^2 \frac{C_{lkji}^2}{(T - t)^4} \right). \quad (6.42)$$

Вычисляя по значениям, приведенным в табл. 6.8–6.16, правую часть (6.42), получаем

$$\mathbb{M} \left\{ \left(I_{0000T,t}^{*(i_1 i_2 i_3 i_4)} - I_{0000T,t}^{*(i_1 i_2 i_3 i_4)q_2} \right)^2 \right\} \approx 0.0236084(T - t)^4.$$

Рассмотрим аппроксимации еще четырех повторных стохастических интегралов Стратоновича при попарно различных верхних индексах:

$$I_{001T,t}^{*(i_1 i_2 i_3)q_3} = \sum_{i,j,k=0}^{q_3} C_{kji}^{001} \zeta_k^{(i_3)} \zeta_j^{(i_2)} \zeta_i^{(i_1)},$$

$$I_{010T,t}^{*(i_1 i_2 i_3)q_4} = \sum_{i,j,k=0}^{q_4} C_{kji}^{010} \zeta_k^{(i_3)} \zeta_j^{(i_2)} \zeta_i^{(i_1)},$$

$$I_{100T,t}^{*(i_1 i_2 i_3)q_5} = \sum_{i,j,k=0}^{q_5} C_{kji}^{100} \zeta_k^{(i_3)} \zeta_j^{(i_2)} \zeta_i^{(i_1)},$$

$$I_{00000T,t}^{*(i_1 i_2 i_3 i_4 i_5)q_6} = \sum_{i,j,k,l,r=0}^{q_6} C_{rlkji} \zeta_r^{(i_5)} \zeta_l^{(i_4)} \zeta_k^{(i_3)} \zeta_j^{(i_2)} \zeta_i^{(i_1)},$$

где

$$\begin{aligned} C_{kji}^{001} &= \int_t^T \int_t^z \int_t^y \phi_k(x) dx \phi_j(y) dy (t - z) \phi_i(z) dz = \\ &= \frac{\sqrt{(2i+1)(2j+1)(2k+1)}}{16} (T - t)^{\frac{5}{2}} \bar{C}_{kji}^{001}; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} C_{kji}^{010} &= \int_t^T \int_t^z \int_t^y \phi_k(x) dx (t - y) \phi_j(y) dy \phi_i(z) dz = \\ &= \frac{\sqrt{(2i+1)(2j+1)(2k+1)}}{16} (T - t)^{\frac{5}{2}} \bar{C}_{kji}^{010}; \end{aligned}$$

Таблица 6.17. Коэффициенты $\bar{C}_{kj}^{001}$

j^k	0	1	2
0	-2	$\frac{14}{15}$	$-\frac{2}{15}$
1	$-\frac{2}{15}$	$-\frac{2}{15}$	$\frac{6}{35}$
2	$\frac{2}{5}$	$-\frac{22}{105}$	$-\frac{2}{105}$

$$C_{kji}^{100} = \int_t^T \int_t^z \int_t^y (t-x) \phi_k(x) dx \phi_j(y) dy \phi_i(z) dz =$$

$$= \frac{\sqrt{(2i+1)(2j+1)(2k+1)}}{16} (T-t)^{\frac{5}{2}} \bar{C}_{kji}^{100};$$

$$C_{rlkji} = \int_t^T \int_t^v \int_t^u \int_t^z \int_t^y \phi_r(x) dx \phi_l(y) dy \phi_k(z) dz \phi_j(u) du \phi_i(v) dv =$$

$$= \frac{\sqrt{(2i+1)(2j+1)(2k+1)(2l+1)(2r+1)}}{32} (T-t)^{\frac{5}{2}} \bar{C}_{rlkji},$$

где

$$\bar{C}_{kji}^{100} = - \int_{-1}^1 \int_{-1}^z \int_{-1}^y P_k(x)(x+1) dx P_j(y) dy P_i(z) dz;$$

$$\bar{C}_{kji}^{010} = - \int_{-1}^1 \int_{-1}^z \int_{-1}^y P_k(x) dx P_j(y)(y+1) dy P_i(z) dz;$$

$$\bar{C}_{kji}^{001} = - \int_{-1}^1 \int_{-1}^z \int_{-1}^y P_k(x) dx P_j(y) dy P_i(z)(z+1) dz;$$

$$\bar{C}_{rlkji} = \int_{-1}^1 \int_{-1}^v \int_{-1}^u \int_{-1}^z \int_{-1}^y P_r(x) dx P_l(u) du P_k(z) dz P_j(u) du P_i(v) dv.$$

Пусть $q_3 = q_4 = q_5 = 2$, $q_6 = 1$. В табл. 6.17–6.33 приведены точные значения коэффициентов $\bar{C}_{kji}^{001}$, $\bar{C}_{kji}^{010}$, $\bar{C}_{kji}^{100}$, $i, j, k = 0, 1, 2$; $\bar{C}_{rlkji}$, $i, j, k, l, r = 0, 1$.

В случае попарно различных i, j, k, l, r из табл. 6.17–6.33 имеем

$$\mathbb{M} \left\{ \left(I_{100T,t}^{*(i_1 i_2 i_3)} - I_{100T,t}^{*(i_1 i_2 i_3) q_3} \right)^2 \right\} = (T-t)^5 \left(\frac{1}{60} - \sum_{i,j,k=0}^{q_3} \frac{(C_{kji}^{100})^2}{(T-t)^5} \right) \approx$$

Таблица 6.18. Коэффициенты $\bar{C}_{kj1}^{001}$

j^k	0	1	2
0	$-\frac{6}{5}$	$\frac{22}{45}$	$-\frac{2}{105}$
1	$-\frac{2}{9}$	$-\frac{2}{105}$	$\frac{26}{315}$
2	$\frac{22}{105}$	$-\frac{38}{315}$	$-\frac{2}{315}$

Таблица 6.19. Коэффициенты $\bar{C}_{kj2}^{001}$

j^k	0	1	2
0	$-\frac{2}{5}$	$\frac{2}{21}$	$\frac{4}{105}$
1	$-\frac{22}{105}$	$\frac{4}{105}$	$\frac{2}{105}$
2	0	$-\frac{2}{105}$	0

Таблица 6.20. Коэффициенты $\bar{C}_{kj0}^{100}$

j^k	0	1	2
0	$-\frac{2}{3}$	$\frac{2}{15}$	$\frac{2}{15}$
1	$-\frac{2}{15}$	$-\frac{2}{45}$	$\frac{2}{35}$
2	$\frac{2}{15}$	$-\frac{2}{35}$	$-\frac{4}{105}$

Таблица 6.21. Коэффициенты $\bar{C}_{kj1}^{100}$

j^k	0	1	2
0	$-\frac{2}{5}$	$\frac{2}{45}$	$\frac{2}{21}$
1	$-\frac{2}{15}$	$-\frac{2}{105}$	$\frac{4}{105}$
2	$\frac{2}{35}$	$-\frac{2}{63}$	$-\frac{2}{105}$

Таблица 6.22. Коэффициенты $\bar{C}_{kj2}^{100}$

j^k	0	1	2
0	$-\frac{2}{15}$	$-\frac{2}{105}$	$\frac{4}{105}$
1	$-\frac{2}{21}$	$-\frac{2}{315}$	$\frac{2}{105}$
2	$-\frac{2}{105}$	$-\frac{2}{315}$	0

Таблица 6.23. Коэффициенты $\bar{C}_{kj0}^{010}$

j^k	0	1	2
0	$-\frac{4}{3}$	$\frac{8}{15}$	0
1	$-\frac{4}{15}$	0	$\frac{8}{105}$
2	$\frac{4}{15}$	$-\frac{16}{105}$	0

Таблица 6.24. Коэффициенты $\bar{C}_{kj1}^{010}$

j^k	0	1	2
0	$-\frac{4}{5}$	$\frac{4}{15}$	$\frac{4}{105}$
1	$-\frac{4}{15}$	$\frac{4}{105}$	$\frac{4}{105}$
2	$\frac{4}{35}$	$-\frac{8}{105}$	0

Таблица 6.25. Коэффициенты $\bar{C}_{kj2}^{010}$

j^k	0	1	2
0	$-\frac{4}{15}$	$\frac{4}{105}$	$\frac{4}{105}$
1	$-\frac{4}{21}$	$\frac{4}{105}$	$\frac{4}{315}$
2	$-\frac{4}{105}$	0	0

Таблица 6.26. Коэффициенты $\bar{C}_{rl000}$

l^r	0	1
0	$\frac{4}{15}$	$-\frac{8}{45}$
1	$-\frac{4}{45}$	$\frac{8}{105}$

Таблица 6.27. Коэффициенты $\bar{C}_{rl010}$

l^r	0	1
0	$\frac{4}{45}$	$-\frac{16}{315}$
1	$-\frac{4}{315}$	$\frac{4}{315}$

Таблица 6.28. Коэффициенты $\bar{C}_{rl011}$

l^r	0	1
0	$\frac{8}{105}$	$-\frac{2}{45}$
1	$-\frac{4}{315}$	$\frac{4}{315}$

Таблица 6.29. Коэффициенты $\bar{C}_{rl110}$

l^r	0	1
0	$\frac{8}{315}$	$-\frac{4}{315}$
1	0	$\frac{2}{945}$

Таблица 6.30. Коэффициенты $\bar{C}_{rl100}$

l^r	0	1
0	0	$\frac{4}{315}$
1	$\frac{8}{315}$	$-\frac{2}{105}$

Таблица 6.31. Коэффициенты $\bar{C}_{rl001}$

l^r	0	1
0	$\frac{8}{45}$	$-\frac{4}{35}$
1	$-\frac{16}{315}$	$\frac{2}{45}$

Таблица 6.32. Коэффициенты $\bar{C}_{rl101}$

l^r	0	1
0	$\frac{4}{315}$	0
1	$\frac{4}{315}$	$-\frac{8}{945}$

Таблица 6.33. Коэффициенты $\bar{C}_{rl111}$

l^r	0	1
0	$\frac{2}{105}$	$-\frac{8}{945}$
1	$\frac{2}{945}$	0

$$\approx 0.00815429(T-t)^5,$$

$$\begin{aligned} \mathbb{M} \left\{ \left(I_{010_{T,t}}^{*(i_1 i_2 i_3)} - I_{010_{T,t}}^{*(i_1 i_2 i_3) q_4} \right)^2 \right\} &= (T-t)^5 \left(\frac{1}{20} - \sum_{i,j,k=0}^{q_4} \frac{(C_{kji}^{010})^2}{(T-t)^5} \right) \approx \\ &\approx 0.0173903(T-t)^5, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathbb{M} \left\{ \left(I_{001_{T,t}}^{*(i_1 i_2 i_3)} - I_{001_{T,t}}^{*(i_1 i_2 i_3) q_5} \right)^2 \right\} &= (T-t)^5 \left(\frac{1}{10} - \sum_{i,j,k=0}^{q_5} \frac{(C_{kji}^{001})^2}{(T-t)^5} \right) \approx \\ &\approx 0.0252801(T-t)^5, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathbb{M} \left\{ \left(I_{00000_{T,t}}^{*(i_1 i_2 i_3 i_4 i_5)} - I_{00000_{T,t}}^{*(i_1 i_2 i_3 i_4 i_5) q_6} \right)^2 \right\} &= (T-t)^5 \left(\frac{1}{120} - \sum_{i,j,k,l,r=0}^{q_6} \frac{C_{rlkji}^2}{(T-t)^5} \right) \approx \\ &\approx 0.00759105(T-t)^5. \end{aligned}$$

6.1.4 Разложение повторных стохастических интегралов произвольной кратности k с помощью теоремы 5.1 и полиномов Лежандра

Как следует из результатов главы 5, основная по трудоемкости работа при построении аппроксимаций повторных стохастических ин-

тегралов связана с вычислением коэффициентов

$$C_{j_k \dots j_1} = \int_{[t, T]^k} K(t_1, \dots, t_k) \prod_{l=1}^k \phi_{j_l}(t_l) dt_1 \dots dt_k; \quad (6.43)$$

$$K(t_1, \dots, t_k) = \begin{cases} \prod_{l=1}^k \psi_l(t_l) \prod_{l=1}^{k-1} \mathbf{1}_{\{t_l < t_{l+1}\}}, & k \geq 2, \\ \psi_1(t_1), & k = 1 \end{cases},$$

здесь $(t_1, \dots, t_k) \in [t, T]^k$; $\{\phi_j(x)\}_{j=0}^\infty$ — полная ортонормированная система функций в пространстве $L_2([t, T])$.

Цель данного раздела получить формулу для коэффициентов Фурье $C_{j_k \dots j_1}$ (k — произвольное) разложений повторных стохастических интегралов из стохастических разложений Тейлора–Ито и Тейлора–Стратоновича при использовании системы полиномов Лежандра.

Для классических разложений в (6.43) надо положить $\psi_1(s) = \dots = \psi_k(s) \equiv 1$, а для унифицированных — $\psi_q(s) = (t - s)^{l_q}$; $q = 1, \dots, k$; $l_q = 0, 1, 2, \dots$.

Таким образом мы будем вычислять интегралы

$$\begin{aligned} \bar{C}_{j_k \dots j_1} &= \int_t^T \phi_{j_k}(t_k) \int_t^{t_k} \phi_{j_{k-1}}(t_{k-1}) \dots \int_t^{t_2} \phi_{j_1}(t_1) dt_1 \dots dt_{k-1} dt_k; \\ \hat{C}_{j_k \dots j_1}^{l_k \dots l_1} &= \int_t^T (t - t_k)^{l_k} \phi_{j_k}(t_k) \dots \int_t^{t_2} (t - t_1)^{l_1} \phi_{j_1}(t_1) dt_1 \dots dt_k, \end{aligned}$$

где $\{\phi_j(x)\}_{j=0}^\infty$ — полная ортонормированная система полиномов Лежандра в пространстве $L_2([t, T])$.

Имеем

$$\bar{C}_{j_k \dots j_1} = \frac{(T - t)^{\frac{k}{2}}}{2^k} \prod_{l=1}^k \sqrt{2j_l + 1} \cdot A_{j_k \dots j_1},$$

где

$$A_{j_k \dots j_1} = \int_{-1}^1 P_{j_k}(t_k) \int_{-1}^{t_k} P_{j_{k-1}}(t_{k-1}) \dots \int_{-1}^{t_2} P_{j_1}(t_1) dt_1 \dots dt_{k-1} dt_k; \quad (6.44)$$

$\{P_n(x)\}_{n=0}^\infty$ — полная ортонормированная система полиномов Лежандра в пространстве $L_2([-1, 1])$:

$$P_n(x) = \frac{1}{2^n} \sum_{q=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \frac{(-1)^q (2n - 2q)!}{q! (n - q)! (n - 2q)!} x^{n-2q}. \quad (6.45)$$

Подставляя (6.45) в (6.44) получаем

$$A_{j_k \dots j_1} = \frac{1}{2^{j_1 + \dots + j_k}} \sum_{q_1=0}^{[\frac{j_1}{2}]} \dots \sum_{q_k=0}^{[\frac{j_k}{2}]} \prod_{l=1}^k \frac{(-1)^{q_l} (2j_l - 2q_l)!}{q_l! (j_l - q_l)! (j_l - 2q_l)!} \times \\ \times \int_{-1}^1 (t_k)^{j_k - 2q_k} \dots \int_{-1}^{t_2} (t_1)^{j_1 - 2q_1} dt_1 \dots dt_k.$$

Таким образом вычисление $\bar{C}_{j_k \dots j_1}$ свелось к вычислению интеграла

$$I_{p_k \dots p_1} = \int_{-1}^1 (t_k)^{p_k} \dots \int_{-1}^{t_2} (t_1)^{p_1} dt_1 \dots dt_k; \quad p_1, \dots, p_k = 0, 1, 2, \dots \quad (6.46)$$

Рассмотрим теперь вычисление $\hat{C}_{j_k \dots j_1}^{l_k \dots l_1}$. Имеем

$$\hat{C}_{j_k \dots j_1}^{l_k \dots l_1} = \frac{(T-t)^{\frac{k}{2}}}{2^k} \prod_{l=1}^k \sqrt{2j_l + 1} \cdot \left(\frac{(-1)(T-t)}{2} \right)^{l_1 + \dots + l_k} I_{j_k \dots j_1}^{l_k \dots l_1},$$

где

$$I_{j_k \dots j_1}^{l_k \dots l_1} = \int_{-1}^1 (1+t_k)^{l_k} P_{j_k}(t_k) \dots \int_{-1}^{t_2} (1+t_1)^{l_1} P_{j_1}(t_1) dt_1 \dots dt_k = \\ = \sum_{s_k=0}^{l_k} \dots \sum_{s_1=0}^{l_1} C_{l_k}^{s_k} \dots C_{l_1}^{s_1} \times \\ \times \int_{-1}^1 (t_k)^{s_k} P_{j_k}(t_k) \dots \int_{-1}^{t_2} (t_1)^{s_1} P_{j_1}(t_1) dt_1 \dots dt_k,$$

где C_n^k — биномиальный коэффициент.

Далее

$$\int_{-1}^1 (t_k)^{s_k} P_{j_k}(t_k) \dots \int_{-1}^{t_2} (t_1)^{s_1} P_{j_1}(t_1) dt_1 \dots dt_k = \\ = \frac{1}{2^{j_1 + \dots + j_k}} \sum_{q_1=0}^{[\frac{j_1}{2}]} \dots \sum_{q_k=0}^{[\frac{j_k}{2}]} \prod_{l=1}^k \frac{(-1)^{q_l} (2j_l - 2q_l)!}{q_l! (j_l - q_l)! (j_l - 2q_l)!} \times \\ \times \int_{-1}^1 (t_k)^{j_k - 2q_k + s_k} \dots \int_{-1}^{t_2} (t_1)^{j_1 - 2q_1 + s_1} dt_1 \dots dt_k.$$

Таким образом вычисление $\hat{C}_{j_k \dots j_1}^{l_k \dots l_1}$ опять таки свелось к вычислению интеграла (6.46).

Вычисление интеграла (6.46) вообще не является проблемой:

$$\begin{aligned}
I_{p_1} &= \frac{1}{p_1 + 1} (1 - (-1)^{p_1+1}); \\
I_{p_2 p_1} &= \frac{1}{p_1 + 1} \left(\frac{1}{p_1 + p_2 + 2} (1 - (-1)^{p_1+p_2+2}) - \right. \\
&\quad \left. - \frac{(-1)^{p_1+1}}{p_2 + 1} (1 - (-1)^{p_2+1}) \right); \\
I_{p_3 p_2 p_1} &= \frac{1}{p_1 + 1} \left(\frac{1}{p_1 + p_2 + 2} \left(\frac{1}{p_1 + p_2 + p_3 + 3} (1 - (-1)^{p_1+p_2+p_3+3}) - \right. \right. \\
&\quad \left. - \frac{(-1)^{p_1+p_2+2}}{p_3 + 1} (1 - (-1)^{p_3+1}) \right) - \\
&\quad - \frac{(-1)^{p_1+1}}{p_2 + 1} \left(\frac{1}{p_3 + p_2 + 2} (1 - (-1)^{p_3+p_2+2}) - \right. \\
&\quad \left. - \frac{(-1)^{p_2+1}}{p_3 + 1} (1 - (-1)^{p_3+1}) \right) \Bigg) \\
&\quad \text{и т.д.}
\end{aligned}$$

Вообще говоря, интеграл типа $I_{p_k \dots p_1}$ может быть вычислен при различных значениях k с помощью компьютерных пакетов символьных преобразований типа DERIVE или MAPLE.

Совсем не так просто будет обстоять дело, если мы будем использовать вместо полиномов Лежандра тригонометрические функции. Это связано с тем, что интегралы

$$\begin{aligned}
\bar{C}_{j_k \dots j_1} &= \int_t^T \phi_{j_k}(t_k) \int_t^{t_k} \phi_{j_{k-1}}(t_{k-1}) \dots \int_t^{t_2} \phi_{j_1}(t_1) dt_1 \dots dt_{k-1} dt_k; \\
\hat{C}_{j_k \dots j_1}^{l_k \dots l_1} &= \int_t^T (t - t_k)^{l_k} \phi_{j_k}(t_k) \dots \int_t^{t_2} (t - t_1)^{l_1} \phi_{j_1}(t_1) dt_1 \dots dt_k,
\end{aligned}$$

где $\{\phi_j(x)\}_{j=0}^\infty$ — полная ортонормированная система тригонометрических функций в пространстве $L_2([t, T])$:

$$\phi_j(s) = \frac{1}{\sqrt{T-t}} \begin{cases} 1 & \text{при } j = 0, \\ \sqrt{2} \sin \frac{2\pi r(s-t)}{T-t} & \text{при } j = 2r - 1, \\ \sqrt{2} \cos \frac{2\pi r(s-t)}{T-t} & \text{при } j = 2r, \end{cases}$$

$r = 1, 2, \dots$, "сильно ветвятся" для различных сочетаний индексов $j_1, \dots, j_k$, т.е. при различных сочетаниях индексов $j_1, \dots, j_k$ указанные интегралы вычисляются по существенно различным формулам, причем количество этих формул резко растет с ростом кратности стохастического интеграла. Реально, уже при $k = 4$ вычисления становятся крайне сложными.

Поясним сказанное на примере. При использовании тригонометрических функций, например, может потребоваться интегрирование произведения, скажем вида:

$$\sin \frac{2\pi r(s-t)}{T-t} \sin \frac{2\pi q(s-t)}{T-t} \quad (r, q \geq 0),$$

которое равно

$$\frac{1}{2} \left(-\cos \frac{2\pi(r+q)(s-t)}{T-t} + \cos \frac{2\pi(r-q)q(s-t)}{T-t} \right).$$

Понятно, что при интегрировании последнего выражения уже возникнут следующие случаи:

1. $r+q \neq 0$ и $r-q \neq 0$;
2. $r+q \neq 0$ и $r-q = 0$;
3. $r+q = 0$ и $r-q = 0$.

В каждом из трех случаев первообразная будет вычисляться по "своей формуле".

Ничего подобного не происходит с многочленами Лежандра, поскольку произведение двух многочленов есть многочлен, и при интегрировании многочленов мы фактически пользуемся только формулой первообразной от степенной функции с целым неотрицательным показателем.

6.1.5 Сильная аппроксимация с помощью тригонометрической системы функций

Рассмотрим аппроксимации некоторых повторных стохастических интегралов Стратоновича вида

$$I_{l_1 \dots l_{kT,t}}^{*(i_1 \dots i_k)} = \int_t^{*T} (t-t_k)^{l_k} \dots \int_t^{*t_2} (t-t_1)^{l_1} d\mathbf{f}_{t_1}^{(i_1)} \dots d\mathbf{f}_{t_k}^{(i_k)},$$

полученные с использованием теоремы 5.1 с использованием тригонометрической системы функций

$$I_{0T,t}^{*(i_1)} = \sqrt{T-t} \zeta_0^{(i_1)}, \quad (6.47)$$

$$I_{1T,t}^{*(i_1)q} = -\frac{(T-t)^{\frac{3}{2}}}{2} \left[\zeta_0^{(i_1)} + \frac{\sqrt{2}}{\pi} \left(\sum_{r=1}^q \frac{1}{r} \zeta_{2r-1}^{(i_1)} + \sqrt{\alpha_q} \xi_q^{(i_1)} \right) \right], \quad (6.48)$$

$$I_{00T,t}^{*(i_2 i_1)q} = \frac{1}{2}(T-t) \left[\zeta_0^{(i_1)} \zeta_0^{(i_2)} + \frac{1}{\pi} \sum_{r=1}^q \frac{1}{r} \left\{ \zeta_{2r}^{(i_1)} \zeta_{2r-1}^{(i_2)} - \zeta_{2r-1}^{(i_1)} \zeta_{2r}^{(i_2)} + \right. \right. \\ \left. \left. + \sqrt{2} \left(\zeta_{2r-1}^{(i_1)} \zeta_0^{(i_2)} - \zeta_0^{(i_1)} \zeta_{2r-1}^{(i_2)} \right) \right\} + \frac{\sqrt{2}}{\pi} \sqrt{\alpha_q} \left(\xi_q^{(i_1)} \zeta_0^{(i_2)} - \zeta_0^{(i_1)} \xi_q^{(i_2)} \right) \right], \quad (6.49)$$

$$I_{000T,t}^{*(i_3 i_2 i_1)q} = (T-t)^{\frac{3}{2}} \left(\frac{1}{6} \zeta_0^{(i_1)} \zeta_0^{(i_2)} \zeta_0^{(i_3)} + \right. \\ \left. + \frac{1}{2\sqrt{2}\pi} \sqrt{\alpha_q} \left(\xi_q^{(i_1)} \zeta_0^{(i_2)} \zeta_0^{(i_3)} - \xi_q^{(i_3)} \zeta_0^{(i_2)} \zeta_0^{(i_1)} \right) + \right. \\ \left. + \frac{1}{2\sqrt{2}\pi^2} \sqrt{\beta_q} \left(\mu_q^{(i_1)} \zeta_0^{(i_2)} \zeta_0^{(i_3)} - 2\mu_q^{(i_2)} \zeta_0^{(i_1)} \zeta_0^{(i_3)} + \mu_q^{(i_3)} \zeta_0^{(i_1)} \zeta_0^{(i_2)} \right) + \right. \\ \left. + \frac{1}{2\sqrt{2}} \sum_{r=1}^q \left[\frac{1}{\pi r} \left\{ \zeta_{2r-1}^{(i_1)} \zeta_0^{(i_2)} \zeta_0^{(i_3)} - \zeta_{2r-1}^{(i_3)} \zeta_0^{(i_2)} \zeta_0^{(i_1)} \right\} + \right. \\ \left. + \frac{1}{\pi^2 r^2} \left\{ \zeta_{2r}^{(i_1)} \zeta_0^{(i_2)} \zeta_0^{(i_3)} - 2\zeta_{2r}^{(i_2)} \zeta_0^{(i_3)} \zeta_0^{(i_1)} + \zeta_{2r}^{(i_3)} \zeta_0^{(i_2)} \zeta_0^{(i_1)} \right\} \right] + \\ \left. + \frac{1}{2\pi^2} \sum_{\substack{r,l=1 \\ r \neq l}}^q \left[\frac{1}{r^2 - l^2} \left\{ \zeta_{2r}^{(i_1)} \zeta_{2l}^{(i_2)} \zeta_0^{(i_3)} - \zeta_{2r}^{(i_2)} \zeta_0^{(i_1)} \zeta_{2l}^{(i_3)} \right\} + \right. \\ \left. + \left(\frac{1}{rl} - \frac{r}{(r^2 - l^2)l} \right) \zeta_0^{(i_1)} \zeta_{2r-1}^{(i_2)} \zeta_{2l-1}^{(i_3)} - \frac{r}{(l^2 - r^2)l} \zeta_{2r-1}^{(i_1)} \zeta_{2l-1}^{(i_2)} \zeta_0^{(i_3)} - \right. \\ \left. - \frac{1}{rl} \zeta_{2r-1}^{(i_1)} \zeta_0^{(i_2)} \zeta_{2l-1}^{(i_3)} \right] + \\ \left. + \sum_{r=1}^q \left[\frac{1}{4\pi r} \left\{ \zeta_{2r}^{(i_1)} \zeta_{2r-1}^{(i_2)} \zeta_0^{(i_3)} - \zeta_{2r-1}^{(i_1)} \zeta_{2r}^{(i_2)} \zeta_0^{(i_3)} - \zeta_{2r-1}^{(i_2)} \zeta_{2r}^{(i_3)} \zeta_0^{(i_1)} + \right. \right. \\ \left. \left. + \zeta_{2r-1}^{(i_3)} \zeta_{2r}^{(i_2)} \zeta_0^{(i_1)} \right\} + \right. \\ \left. + \frac{1}{8\pi^2 r^2} \left\{ 3\zeta_{2r-1}^{(i_1)} \zeta_{2r-1}^{(i_2)} \zeta_0^{(i_3)} + \zeta_{2r}^{(i_1)} \zeta_{2r}^{(i_2)} \zeta_0^{(i_3)} - 6\zeta_{2r-1}^{(i_1)} \zeta_{2r-1}^{(i_3)} \zeta_0^{(i_2)} + \right. \right. \\ \left. \left. + 3\zeta_{2r-1}^{(i_2)} \zeta_{2r-1}^{(i_3)} \zeta_0^{(i_1)} - 2\zeta_{2r}^{(i_1)} \zeta_{2r}^{(i_3)} \zeta_0^{(i_2)} + \zeta_{2r}^{(i_3)} \zeta_{2r}^{(i_2)} \zeta_0^{(i_1)} \right\} \right] +$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{1}{4\sqrt{2}\pi^2} \left\{ \sum_{r,m=1}^q \left[\frac{2}{rm} \left[-\zeta_{2r-1}^{(i_1)} \zeta_{2m-1}^{(i_2)} \zeta_{2m}^{(i_3)} + \zeta_{2r-1}^{(i_1)} \zeta_{2r}^{(i_2)} \zeta_{2m-1}^{(i_3)} + \right. \right. \right. \\
& \quad \left. \left. \left. + \zeta_{2r-1}^{(i_1)} \zeta_{2m}^{(i_2)} \zeta_{2m-1}^{(i_3)} - \zeta_{2r}^{(i_1)} \zeta_{2r-1}^{(i_2)} \zeta_{2m-1}^{(i_3)} \right] + \right. \right. \\
& \quad \left. \left. + \frac{1}{m(r+m)} \left[-\zeta_{2(m+r)}^{(i_1)} \zeta_{2r}^{(i_2)} \zeta_{2m}^{(i_3)} - \zeta_{2(m+r)-1}^{(i_1)} \zeta_{2r-1}^{(i_2)} \zeta_{2m}^{(i_3)} - \right. \right. \right. \\
& \quad \left. \left. \left. - \zeta_{2(m+r)-1}^{(i_1)} \zeta_{2r}^{(i_2)} \zeta_{2m-1}^{(i_3)} + \zeta_{2(m+r)}^{(i_1)} \zeta_{2r-1}^{(i_2)} \zeta_{2m-1}^{(i_3)} \right] \right] + \right. \\
& \quad \left. + \sum_{m=1}^q \sum_{l=m+1}^q \left[\frac{1}{m(l-m)} \left[\zeta_{2(l-m)}^{(i_1)} \zeta_{2l}^{(i_2)} \zeta_{2m}^{(i_3)} + \zeta_{2(l-m)-1}^{(i_1)} \zeta_{2l-1}^{(i_2)} \zeta_{2m}^{(i_3)} - \right. \right. \right. \\
& \quad \left. \left. \left. - \zeta_{2(l-m)-1}^{(i_1)} \zeta_{2l}^{(i_2)} \zeta_{2m-1}^{(i_3)} + \zeta_{2(l-m)}^{(i_1)} \zeta_{2l-1}^{(i_2)} \zeta_{2m-1}^{(i_3)} \right] + \right. \right. \\
& \quad \left. \left. + \frac{1}{l(l-m)} \left[-\zeta_{2(l-m)}^{(i_1)} \zeta_{2m}^{(i_2)} \zeta_{2l}^{(i_3)} + \zeta_{2(l-m)-1}^{(i_1)} \zeta_{2m-1}^{(i_2)} \zeta_{2l}^{(i_3)} - \right. \right. \right. \\
& \quad \left. \left. \left. - \zeta_{2(l-m)-1}^{(i_1)} \zeta_{2m}^{(i_2)} \zeta_{2l-1}^{(i_3)} - \zeta_{2(l-m)}^{(i_1)} \zeta_{2m-1}^{(i_2)} \zeta_{2l-1}^{(i_3)} \right] \right] \right\}, \tag{6.50}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
I_{10T,t}^{*(i_2 i_1)q} &= (T-t)^2 \left(-\frac{1}{6} \zeta_0^{(i_1)} \zeta_0^{(i_2)} - \frac{1}{2\sqrt{2}\pi} \sqrt{\alpha_q} \xi_q^{(i_1)} \zeta_0^{(i_2)} + \right. \\
& \quad \left. + \frac{1}{2\sqrt{2}\pi^2} \sqrt{\beta_q} \left(2\mu_q^{(i_2)} \zeta_0^{(i_1)} - \mu_q^{(i_1)} \zeta_0^{(i_2)} \right) + \right. \\
& \quad \left. + \frac{1}{2\sqrt{2}} \sum_{r=1}^q \left[-\frac{1}{\pi r} \left\{ \zeta_{2r-1}^{(i_1)} \zeta_0^{(i_2)} - \frac{1}{\sqrt{2}} \zeta_{2r-1}^{(i_1)} \zeta_{2r}^{(i_2)} + \frac{1}{\sqrt{2}} \zeta_{2r}^{(i_1)} \zeta_{2r-1}^{(i_2)} \right\} + \right. \right. \\
& \quad \left. \left. + \frac{1}{\pi^2 r^2} \left(-\zeta_{2r}^{(i_1)} \zeta_0^{(i_2)} + 2\zeta_0^{(i_1)} \zeta_{2r}^{(i_2)} - \frac{3}{2\sqrt{2}} \zeta_{2r-1}^{(i_1)} \zeta_{2r-1}^{(i_2)} - \frac{1}{2\sqrt{2}} \zeta_{2r}^{(i_1)} \zeta_{2r}^{(i_2)} \right) \right] + \right. \\
& \quad \left. + \frac{1}{2\pi^2} \sum_{\substack{k,l=1 \\ k \neq l}}^q \left[-\frac{k}{(l^2 - k^2)l} \zeta_{2k-1}^{(i_1)} \zeta_{2l-1}^{(i_2)} + \frac{1}{l^2 - k^2} \zeta_{2k}^{(i_1)} \zeta_{2l}^{(i_2)} \right] \right), \tag{6.51}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
I_{01T,t}^{*(i_2 i_1)q} &= (T-t)^2 \left(-\frac{1}{3} \zeta_0^{(i_1)} \zeta_0^{(i_2)} + \frac{1}{\sqrt{2}\pi} \sqrt{\alpha_q} \left(\frac{1}{2} \xi_q^{(i_2)} \zeta_0^{(i_1)} - \xi_q^{(i_1)} \zeta_0^{(i_2)} \right) + \right. \\
& \quad \left. + \frac{1}{\sqrt{2}\pi^2} \sqrt{\beta_q} \left(\frac{1}{2} \mu_q^{(i_2)} \zeta_0^{(i_1)} - \mu_q^{(i_1)} \zeta_0^{(i_2)} \right) + \right.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_{r=1}^q \left[\frac{1}{\pi r} \left\{ -\zeta_{2r-1}^{(i_1)} \zeta_0^{(i_2)} + \frac{1}{2} \zeta_0^{(i_1)} \zeta_{2r-1}^{(i_2)} + \frac{1}{2\sqrt{2}} \left\{ \zeta_{2r-1}^{(i_1)} \zeta_{2r}^{(i_2)} - \zeta_{2r}^{(i_1)} \zeta_{2r-1}^{(i_2)} \right\} \right\} + \right. \\
& \quad \left. + \frac{1}{\pi^2 r^2} \left(-\zeta_{2r}^{(i_1)} \zeta_0^{(i_2)} + \frac{1}{2} \zeta_0^{(i_1)} \zeta_{2r}^{(i_2)} + \frac{3}{4\sqrt{2}} \zeta_{2r-1}^{(i_1)} \zeta_{2r-1}^{(i_2)} + \frac{1}{4\sqrt{2}} \zeta_{2r}^{(i_1)} \zeta_{2r}^{(i_2)} \right) \right] + \\
& \quad + \frac{1}{2\pi^2} \sum_{\substack{k,l=1 \\ k \neq l}}^q \left[\left(\frac{k}{(l^2 - k^2)l} + \frac{1}{kl} \right) \zeta_{2k-1}^{(i_1)} \zeta_{2l-1}^{(i_2)} + \frac{1}{l^2 - k^2} \zeta_{2k}^{(i_1)} \zeta_{2l}^{(i_2)} \right], \quad (6.52)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
I_{2_{T,t}}^{*(i_1)} &= (T - t)^{\frac{5}{2}} \left[\frac{1}{3} \zeta_0^{(i_1)} + \frac{1}{\sqrt{2}\pi^2} \left(\sum_{r=1}^q \frac{1}{r^2} \zeta_{2r}^{(i_1)} + \sqrt{\beta_q} \mu_q^{(i_1)} \right) + \right. \\
& \quad \left. + \frac{1}{\sqrt{2}\pi} \left(\sum_{r=1}^q \frac{1}{r} \zeta_{2r-1}^{(i_1)} + \sqrt{\alpha_q} \xi_q^{(i_1)} \right) \right], \quad (6.53)
\end{aligned}$$

где

$$\xi_q^{(i)} = \frac{1}{\sqrt{\alpha_q}} \sum_{r=q+1}^{\infty} \frac{1}{r} \zeta_{2r-1}^{(i)}; \quad \alpha_q = \frac{\pi^2}{6} - \sum_{r=1}^q \frac{1}{r^2}; \quad \mu_q^{(i)} = \frac{1}{\sqrt{\beta_q}} \sum_{r=q+1}^{\infty} \frac{1}{r^2} \zeta_{2r}^{(i)};$$

$$\beta_q = \frac{\pi^4}{90} - \sum_{r=1}^q \frac{1}{r^4}; \quad \zeta_j^{(i)} = \int_t^T \phi_j(s) d\mathbf{f}_s^{(i)};$$

$\phi_j(s)$ имеет вид (6.19); $\zeta_0^{(i)}$, $\zeta_{2r}^{(i)}$, $\zeta_{2r-1}^{(i)}$, $\xi_q^{(i)}$, $\mu_q^{(i)}$, $r = 1, \dots, q$, $i = 1, \dots, m$, — независимые в совокупности стандартные гауссовские случайные величины; $i_1, i_2, i_3 = 1, \dots, m$.

Здесь оговоримся, что формула касающаяся повторного стохастического интеграла третьей кратности относится к случаю попарно различных $i_1, i_2, i_3 = 1, \dots, m$.

Рассмотрим среднеквадратические погрешности аппроксимаций (6.49)–(6.52). Из соотношений (6.49)–(6.52) при $i_1 \neq i_2$, $i_2 \neq i_3$, $i_1 \neq i_3$ получаем

$$\mathbb{M} \left\{ \left(I_{00T,t}^{*(i_2 i_1)} - I_{00T,t}^{*(i_2 i_1)q} \right)^2 \right\} = \frac{(T - t)^2}{2\pi^2} \left(\frac{\pi^2}{6} - \sum_{r=1}^q \frac{1}{r^2} \right), \quad (6.54)$$

$$\mathbb{M} \left\{ \left(I_{000T,t}^{*(i_3 i_2 i_1)} - I_{000T,t}^{*(i_3 i_2 i_1)q} \right)^2 \right\} =$$

$$\begin{aligned}
&= (T-t)^3 \left\{ \frac{1}{4\pi^2} \left(\frac{\pi^2}{6} - \sum_{r=1}^q \frac{1}{r^2} \right) + \frac{55}{32\pi^4} \left(\frac{\pi^4}{90} - \sum_{r=1}^q \frac{1}{r^4} \right) + \right. \\
&\quad \left. + \frac{1}{4\pi^4} \left(\sum_{\substack{r,l=1 \\ r \neq l}}^{\infty} - \sum_{\substack{r,l=1 \\ r \neq l}}^q \right) \frac{5l^4 + 4r^4 - 3l^2r^2}{r^2l^2(r^2 - l^2)^2} \right\}, \tag{6.55}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\mathbb{M} \left\{ \left(I_{01T,t}^{*(i_1)} - I_{01T,t}^{*(i_1)q} \right)^2 \right\} = (T-t)^4 \left\{ \frac{1}{8\pi^2} \left(\frac{\pi^2}{6} - \sum_{r=1}^q \frac{1}{r^2} \right) + \right. \\
&\quad \left. + \frac{5}{32\pi^4} \left(\frac{\pi^4}{90} - \sum_{r=1}^q \frac{1}{r^4} \right) + \frac{1}{4\pi^4} \left(\sum_{\substack{k,l=1 \\ k \neq l}}^{\infty} - \sum_{\substack{k,l=1 \\ k \neq l}}^q \right) \frac{l^2 + k^2}{k^2(l^2 - k^2)^2} \right\}, \tag{6.56}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\mathbb{M} \left\{ \left(I_{10T,t}^{*(i_2i_1)} - I_{10T,t}^{*(i_2i_1)q} \right)^2 \right\} = (T-t)^4 \left\{ \frac{1}{8\pi^2} \left(\frac{\pi^2}{6} - \sum_{r=1}^q \frac{1}{r^2} \right) + \right. \\
&\quad \left. + \frac{5}{32\pi^4} \left(\frac{\pi^4}{90} - \sum_{r=1}^q \frac{1}{r^4} \right) + \frac{1}{4\pi^4} \left(\sum_{\substack{k,l=1 \\ k \neq l}}^{\infty} - \sum_{\substack{k,l=1 \\ k \neq l}}^q \right) \frac{l^2 + k^2}{l^2(l^2 - k^2)^2} \right\}. \tag{6.57}
\end{aligned}$$

Пример 6.2. Нетрудно показать, что соотношения (6.55), (6.56) и (6.57) могут быть представлены с помощью леммы 6.1 в следующем виде:

$$\begin{aligned}
&\mathbb{M} \left\{ \left(I_{000T,t}^{*(i_3i_2i_1)} - I_{000T,t}^{*(i_3i_2i_1)q} \right)^2 \right\} = (T-t)^3 \left\{ \frac{4}{45} - \frac{1}{4\pi^2} \sum_{r=1}^q \frac{1}{r^2} - \right. \\
&\quad \left. - \frac{55}{32\pi^4} \sum_{r=1}^q \frac{1}{r^4} - \frac{1}{4\pi^4} \sum_{\substack{r,l=1 \\ r \neq l}}^q \frac{5l^4 + 4r^4 - 3r^2l^2}{r^2l^2(r^2 - l^2)^2} \right\}, \tag{6.58}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\mathbb{M} \left\{ \left(I_{10T,t}^{*(i_2i_1)} - I_{10T,t}^{*(i_2i_1)q} \right)^2 \right\} = \frac{(T-t)^4}{4} \left\{ \frac{1}{9} - \frac{1}{2\pi^2} \sum_{r=1}^q \frac{1}{r^2} - \right. \\
&\quad \left. - \frac{5}{8\pi^4} \sum_{r=1}^q \frac{1}{r^4} - \frac{1}{\pi^4} \sum_{\substack{k,l=1 \\ k \neq l}}^q \frac{k^2 + l^2}{l^2(l^2 - k^2)^2} \right\}, \tag{6.59}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathbb{M} \left\{ \left(I_{01T,t}^{*(i_2 i_1)} - I_{01T,t}^{*(i_2 i_1)q} \right)^2 \right\} &= \frac{(T-t)^4}{4} \left\{ \frac{1}{9} - \frac{1}{2\pi^2} \sum_{r=1}^q \frac{1}{r^2} - \right. \\ &\quad \left. - \frac{5}{8\pi^4} \sum_{r=1}^q \frac{1}{r^4} - \frac{1}{\pi^4} \sum_{\substack{k,l=1 \\ k \neq l}}^q \frac{l^2 + k^2}{k^2 (l^2 - k^2)^2} \right\}. \end{aligned} \quad (6.60)$$

Сопоставив (6.58)–(6.60) и (6.55)–(6.57), заметим, что

$$\begin{aligned} \sum_{\substack{k,l=1 \\ k \neq l}}^{\infty} \frac{l^2 + k^2}{k^2 (l^2 - k^2)^2} &= \sum_{\substack{k,l=1 \\ k \neq l}}^{\infty} \frac{l^2 + k^2}{l^2 (l^2 - k^2)^2} = \frac{\pi^4}{48}, \\ \sum_{\substack{r,l=1 \\ r \neq l}}^{\infty} \frac{5l^4 + 4r^4 - 3r^2 l^2}{r^2 l^2 (r^2 - l^2)^2} &= \frac{9\pi^4}{80}. \end{aligned} \quad (6.61)$$

Рассмотрим аппроксимации стохастических интегралов $I_{10T,t}^{*(i_1 i_1)}$, $I_{01T,t}^{*(i_1 i_1)}$ и условия выбора числа q с использованием тригонометрической системы функций

$$\begin{aligned} I_{10T,t}^{*(i_1 i_1)q} &= (T-t)^2 \left(-\frac{1}{6} \left(\zeta_0^{(i_1)} \right)^2 - \frac{1}{2\sqrt{2}\pi} \sqrt{\alpha_q} \xi_q^{(i_1)} \zeta_0^{(i_1)} + \frac{1}{2\sqrt{2}\pi^2} \sqrt{\beta_q} \mu_q^{(i_1)} \zeta_0^{(i_1)} + \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{2\sqrt{2}} \sum_{r=1}^q \left[\frac{1}{\pi^2 r^2} \left(\zeta_{2r}^{(i_1)} \zeta_0^{(i_1)} - \frac{3}{2\sqrt{2}} \left(\zeta_{2r-1}^{(i_1)} \right)^2 - \frac{1}{2\sqrt{2}} \left(\zeta_{2r}^{(i_1)} \right)^2 \right) - \frac{1}{\pi r} \zeta_{2r-1}^{(i_1)} \zeta_0^{(i_1)} \right] + \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{2\pi^2} \sum_{\substack{k,l=1 \\ k \neq l}}^q \left[-\frac{k}{(l^2 - k^2)l} \zeta_{2k-1}^{(i_1)} \zeta_{2l-1}^{(i_1)} + \frac{1}{l^2 - k^2} \zeta_{2k}^{(i_1)} \zeta_{2l}^{(i_1)} \right] \right), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} I_{01T,t}^{*(i_1 i_1)q} &= (T-t)^2 \left(-\frac{1}{3} \left(\zeta_0^{(i_1)} \right)^2 - \frac{1}{2\sqrt{2}\pi} \sqrt{\alpha_q} \xi_q^{(i_1)} \zeta_0^{(i_1)} - \frac{1}{2\sqrt{2}\pi^2} \sqrt{\beta_q} \mu_q^{(i_1)} \zeta_0^{(i_1)} + \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{2\sqrt{2}} \sum_{r=1}^q \left[\frac{1}{\pi^2 r^2} \left(\frac{3}{2\sqrt{2}} \left(\zeta_{2r-1}^{(i_1)} \right)^2 + \frac{1}{2\sqrt{2}} \left(\zeta_{2r}^{(i_1)} \right)^2 - \zeta_{2r}^{(i_1)} \zeta_0^{(i_1)} \right) - \frac{1}{\pi r} \zeta_{2r-1}^{(i_1)} \zeta_0^{(i_1)} \right] + \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{2\pi^2} \sum_{\substack{k,l=1 \\ k \neq l}}^q \left[\left(\frac{k}{(l^2 - k^2)l} + \frac{1}{kl} \right) \zeta_{2k-1}^{(i_1)} \zeta_{2l-1}^{(i_1)} + \frac{1}{l^2 - k^2} \zeta_{2k}^{(i_1)} \zeta_{2l}^{(i_1)} \right] \right). \end{aligned}$$

С использованием леммы 6.3 получим

$$\mathbb{M} \left\{ \left(I_{01T,t}^{*(i_1 i_1)} - I_{01T,t}^{*(i_1 i_1)q} \right)^2 \right\} = \mathbb{M} \left\{ \left(I_{10T,t}^{*(i_1 i_1)} - I_{10T,t}^{*(i_1 i_1)q} \right)^2 \right\} =$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{(T-t)^4}{4} \left[\frac{2}{\pi^4} \left(\frac{\pi^4}{90} - \sum_{r=1}^q \frac{1}{r^4} \right) + \frac{1}{\pi^4} \left(\frac{\pi^2}{6} - \sum_{r=1}^q \frac{1}{r^2} \right)^2 + \right. \\
&\quad \left. + \frac{1}{\pi^4} \left(\sum_{\substack{k,l=1 \\ k \neq l}}^{\infty} - \sum_{\substack{k,l=1 \\ k \neq l}}^q \right) \frac{l^2 + k^2}{k^2(l^2 - k^2)^2} \right]. \tag{6.62}
\end{aligned}$$

Далее с учетом (6.61) перепишем соотношение (6.62) в виде

$$\begin{aligned}
\mathbb{M} \left\{ \left(I_{01T,t}^{*(i_1 i_1)} - I_{01T,t}^{*(i_1 i_1)q} \right)^2 \right\} &= \mathbb{M} \left\{ \left(I_{10T,t}^{*(i_1 i_1)} - I_{10T,t}^{*(i_1 i_1)q} \right)^2 \right\} = \\
&= \frac{(T-t)^4}{4} \left[\frac{17}{240} - \frac{1}{3\pi^2} \sum_{r=1}^q \frac{1}{r^2} - \frac{2}{\pi^4} \sum_{r=1}^q \frac{1}{r^4} + \right. \\
&\quad \left. + \frac{1}{\pi^4} \left(\sum_{r=1}^q \frac{1}{r^2} \right)^2 - \frac{1}{\pi^4} \sum_{\substack{k,l=1 \\ k \neq l}}^q \frac{l^2 + k^2}{k^2(l^2 - k^2)^2} \right].
\end{aligned}$$

Рассмотрим аппроксимации повторных стохастических интегралов вида (6.7) с использованием тригонометрической системы.

Нетрудно видеть, что аппроксимации $J_{(\lambda_2 \lambda_1)T,t}^{*(i_2 i_1)q}$, $J_{(\lambda_3 \lambda_2 \lambda_1)T,t}^{*(i_3 i_2 i_1)q}$ стохастических интегралов $J_{(\lambda_2 \lambda_1)T,t}^{*(i_2 i_1)}$, $J_{(\lambda_3 \lambda_2 \lambda_1)T,t}^{*(i_3 i_2 i_1)}$ определяются правыми частями формул (6.49), (6.50), в которых следует взять $\zeta_j^{(i)} = \int_t^T \phi_j(s) d\mathbf{w}_s^{(i)}$, $i_1, i_2, i_3 = 0, 1, \dots, m$.

Пример 6.3. Используя соотношение

$$\int_t^T \phi_j(s) d\mathbf{w}_s^{(0)} = \begin{cases} \sqrt{T-t} & \text{при } j = 0, \\ 0 & \text{при } j \neq 0, \end{cases}$$

нетрудно получить из (6.49) и (6.50), считая, что в этих равенствах $\zeta_j^{(i)} = \int_t^T \phi_j(s) d\mathbf{w}_s^{(i)}$, $i_1, i_2, i_3 = 0, 1, \dots, m$, следующее семейство формул:

$$J_{(10)T,t}^{*(i_2)q} = \frac{1}{2}(T-t)^{\frac{3}{2}} \left[\zeta_0^{(i_2)} - \frac{\sqrt{2}}{\pi} \left(\sum_{r=1}^q \frac{1}{r} \zeta_{2r-1}^{(i_2)} + \sqrt{\alpha_q} \zeta_q^{(i_2)} \right) \right],$$

$$J_{(01)T,t}^{*(i_1)q} = \frac{1}{2}(T-t)^{\frac{3}{2}} \left[\zeta_0^{(i_1)} + \frac{\sqrt{2}}{\pi} \left(\sum_{r=1}^q \frac{1}{r} \zeta_{2r-1}^{(i_1)} + \sqrt{\alpha_q} \zeta_q^{(i_1)} \right) \right],$$

$$J_{(001)T,t}^{*(i_1)q} = (T-t)^{\frac{5}{2}} \left[\frac{1}{6} \zeta_0^{(i_1)} + \frac{1}{2\sqrt{2}\pi^2} \left(\sum_{r=1}^q \frac{1}{r^2} \zeta_{2r}^{(i_1)} + \sqrt{\beta_q} \mu_q^{(i_1)} \right) + \right.$$

$$+\frac{1}{2\sqrt{2}\pi} \left(\sum_{r=1}^q \frac{1}{r} \zeta_{2r-1}^{(i_1)} + \sqrt{\alpha_q} \xi_q^{(i_1)} \right) \Big],$$

$$J_{(010)T,t}^{*(i_2)q} = (T-t)^{\frac{5}{2}} \left[\frac{1}{6} \zeta_0^{(i_2)} - \frac{1}{\sqrt{2}\pi^2} \left(\sum_{r=1}^q \frac{1}{r^2} \zeta_{2r}^{(i_2)} + \sqrt{\beta_q} \mu_q^{(i_2)} \right) \right],$$

$$J_{(100)T,t}^{*(i_3)q} = (T-t)^{\frac{5}{2}} \left[\frac{1}{6} \zeta_0^{(i_3)} + \frac{1}{2\sqrt{2}\pi^2} \left(\sum_{r=1}^q \frac{1}{r^2} \zeta_{2r}^{(i_3)} + \sqrt{\beta_q} \mu_q^{(i_3)} \right) - \right. \\ \left. - \frac{1}{2\sqrt{2}\pi} \left(\sum_{r=1}^q \frac{1}{r} \zeta_{2r-1}^{(i_3)} + \sqrt{\alpha_q} \xi_q^{(i_3)} \right) \right],$$

$$J_{(011)T,t}^{*(i_2 i_1)q} = (T-t)^2 \left(\frac{1}{6} \zeta_0^{(i_1)} \zeta_0^{(i_2)} + \frac{1}{2\sqrt{2}\pi} \sqrt{\alpha_q} \xi_q^{(i_1)} \zeta_0^{(i_2)} + \right. \\ \left. + \frac{1}{2\sqrt{2}\pi^2} \sqrt{\beta_q} \left(\mu_q^{(i_1)} \zeta_0^{(i_2)} - 2\mu_q^{(i_2)} \zeta_0^{(i_1)} \right) + \right. \\ \left. + \frac{1}{2\sqrt{2}} \sum_{r=1}^q \left[\frac{1}{\pi r} \zeta_{2r-1}^{(i_1)} \zeta_0^{(i_2)} + \frac{1}{\pi^2 r^2} \left\{ \zeta_{2r}^{(i_1)} \zeta_0^{(i_2)} - 2\zeta_{2r}^{(i_2)} \zeta_0^{(i_1)} \right\} \right] + \right. \\ \left. + \frac{1}{2\pi^2} \sum_{\substack{r,l=1 \\ r \neq l}}^q \left[\frac{1}{r^2 - l^2} \zeta_{2r}^{(i_1)} \zeta_{2l}^{(i_2)} - \frac{r}{(l^2 - r^2)l} \zeta_{2r-1}^{(i_1)} \zeta_{2l-1}^{(i_2)} \right] + \right. \\ \left. + \sum_{r=1}^q \left[\frac{1}{4\pi r} \left\{ \zeta_{2r}^{(i_1)} \zeta_{2r-1}^{(i_2)} - \zeta_{2r-1}^{(i_1)} \zeta_{2r}^{(i_2)} \right\} + \right. \\ \left. + \frac{1}{8\pi^2 r^2} \left\{ 3\zeta_{2r-1}^{(i_1)} \zeta_{2r-1}^{(i_2)} + \zeta_{2r}^{(i_1)} \zeta_{2r}^{(i_2)} \right\} \right] \Big),$$

$$J_{(110)T,t}^{*(i_3 i_2)q} = (T-t)^2 \left(\frac{1}{6} \zeta_0^{(i_3)} \zeta_0^{(i_2)} - \frac{1}{2\sqrt{2}\pi} \sqrt{\alpha_q} \xi_q^{(i_3)} \zeta_0^{(i_2)} + \right. \\ \left. + \frac{1}{2\sqrt{2}\pi^2} \sqrt{\beta_q} \left(\mu_q^{(i_3)} \zeta_0^{(i_2)} - 2\mu_q^{(i_2)} \zeta_0^{(i_3)} \right) + \right. \\ \left. + \frac{1}{2\sqrt{2}} \sum_{r=1}^q \left[-\frac{1}{\pi r} \zeta_{2r-1}^{(i_3)} \zeta_0^{(i_2)} + \frac{1}{\pi^2 r^2} \left\{ -2\zeta_{2r}^{(i_2)} \zeta_0^{(i_3)} + \zeta_{2r}^{(i_3)} \zeta_0^{(i_2)} \right\} \right] + \right.$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{1}{2\pi^2} \sum_{\substack{r,l=1 \\ r \neq l}}^q \left[-\frac{1}{r^2 - l^2} \zeta_{2r}^{(i_2)} \zeta_{2l}^{(i_3)} + \left(\frac{1}{rl} - \frac{r}{(r^2 - l^2)l} \right) \zeta_{2r-1}^{(i_2)} \zeta_{2l-1}^{(i_3)} \right] + \\
& + \sum_{r=1}^q \left[\frac{1}{4\pi r} \left\{ -\zeta_{2r-1}^{(i_2)} \zeta_{2r}^{(i_3)} + \zeta_{2r-1}^{(i_3)} \zeta_{2r}^{(i_2)} \right\} + \right. \\
& \left. + \frac{1}{8\pi^2 r^2} \left\{ 3\zeta_{2r-1}^{(i_2)} \zeta_{2r-1}^{(i_3)} + \zeta_{2r}^{(i_3)} \zeta_{2r}^{(i_2)} \right\} \right],
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
J_{(101)T,t}^{*(i_3 i_1)q} = & (T - t)^2 \left(\frac{1}{6} \zeta_0^{(i_1)} \zeta_0^{(i_3)} + \frac{1}{2\sqrt{2}\pi} \sqrt{\alpha_q} \left(\xi_q^{(i_1)} \zeta_0^{(i_3)} - \xi_q^{(i_3)} \zeta_0^{(i_1)} \right) + \right. \\
& + \frac{1}{2\sqrt{2}\pi^2} \sqrt{\beta_q} \left(\mu_q^{(i_1)} \zeta_0^{(i_3)} + \mu_q^{(i_3)} \zeta_0^{(i_1)} \right) + \\
& + \frac{1}{2\sqrt{2}} \sum_{r=1}^q \left[\frac{1}{\pi r} \left\{ \zeta_{2r-1}^{(i_1)} \zeta_0^{(i_3)} - \zeta_{2r-1}^{(i_3)} \zeta_0^{(i_1)} \right\} + \right. \\
& + \frac{1}{\pi^2 r^2} \left\{ \zeta_{2r}^{(i_1)} \zeta_0^{(i_3)} + \zeta_{2r}^{(i_3)} \zeta_0^{(i_1)} \right\} \left. \right] - \frac{1}{2\pi^2} \sum_{\substack{r,l=1 \\ r \neq l}}^q \frac{1}{rl} \zeta_{2r-1}^{(i_1)} \zeta_{2l-1}^{(i_3)} - \\
& - \sum_{r=1}^q \frac{1}{4\pi^2 r^2} \left\{ 3\zeta_{2r-1}^{(i_1)} \zeta_{2r-1}^{(i_3)} + \zeta_{2r}^{(i_1)} \zeta_{2r}^{(i_3)} \right\} \left. \right).
\end{aligned}$$

6.1.6 О сходимости с вероятностью 1 разложений повторных стохастических интегралов, полученных с помощью теоремы 5.1

С философской точки зрения можно предположить, что поскольку при построении разложений из теоремы 5.1 мы не "вторгались в природу" повторных стохастических интегралов, а наоборот сохранили "всю информацию" об их структуре, то построенные разложения из теоремы 5.1 будут сходиться не только в среднеквадратическом смысле, но и с вероятностью 1 (при некоторых дополнительных предположениях).

Подробно рассмотрим случай повторного стохастического интеграла

$$I_{00T,t}^{*(i_1 i_2)} = \frac{T - t}{2} \left[\zeta_0^{(i_1)} \zeta_0^{(i_2)} + \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{4i^2 - 1}} \left\{ \zeta_{i-1}^{(i_1)} \zeta_i^{(i_2)} - \zeta_i^{(i_1)} \zeta_{i-1}^{(i_2)} \right\} \right]. \quad (6.63)$$

При $i_1 = i_2$ из (6.63) получаем

$$I_{00T,t}^{*(i_1 i_1)} = \frac{T-t}{2} \left(\zeta_0^{(i_1)} \right)^2. \quad (6.64)$$

Известно, что последнее равенство справедливо с вероятностью 1 и может быть получено с помощью формулы Ито.

Рассмотрим случай $i_1 \neq i_2$.

Сначала отметим известный факт.

Утверждение 6.1 *Если последовательность случайных величин ξ_n такова, что при некотором $p > 0$ сходится числовой ряд*

$$\sum_{n=1}^{\infty} M\{|\xi_n|^p\},$$

то последовательность ξ_n сходится к нулю с вероятностью 1.

Напомним, что при получении равенства (6.63) мы использовали сходящееся в среднем разложение внутри квадрата $[t, T]^2$ в ряд Фурье

$$\begin{cases} 1, & t_1 < t_2 \\ 0, & t_1 > t_2 \end{cases} =$$

$$= \frac{T-t}{2} \left[\phi_0(t_1)\phi_0(t_2) + \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{4i^2-1}} \{ \phi_{i-1}(t_2)\phi_i(t_1) - \phi_i(t_2)\phi_{i-1}(t_1) \} \right],$$

где $t_1, t_2 \in [t, T]$; $\{\phi_j(t)\}_{j=0}^{\infty}$ — полная ортонормированная в пространстве $L_2([t, T])$ система полиномов Лежандра.

Остаток рассмотренного ряда Фурье имеет вид:

$$R_n(t_1, t_2) = \frac{T-t}{2} \sum_{i=n+1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{4i^2-1}} (\phi_{i-1}(t_2)\phi_i(t_1) - \phi_i(t_2)\phi_{i-1}(t_1)).$$

С помощью теоремы 5.1 было, в частности, установлено:

$$J^*[\psi^{(2)}]_{T,t} = \sum_{j_1, j_2=0}^p C_{j_2 j_1} \prod_{l=1}^2 \zeta_{(j_l)T,t}^{(i_l)} + R_{T,t}^{p_1 p_2},$$

где остаток $R_{T,t}^{p_1 p_2}$ стремится к нулю в среднеквадратическом смысле при $p_1, p_2 \rightarrow \infty$.

В нашем конкретном случае:

$$I_{00T,t}^{*(i_1 i_2)} = \frac{T-t}{2} \left[\zeta_0^{(i_1)} \zeta_0^{(i_2)} + \sum_{i=1}^n \frac{1}{\sqrt{4i^2-1}} \{ \zeta_{i-1}^{(i_1)} \zeta_i^{(i_2)} - \zeta_i^{(i_1)} \zeta_{i-1}^{(i_2)} \} \right] +$$

$$+ \int_{[t,T]^2} R_n(t_1, t_2) d\mathbf{f}_{t_1}^{(i_1)} d\mathbf{f}_{t_2}^{(i_2)}, \quad (6.65)$$

где

$$\int_{[t,T]^2} R_n(t_1, t_2) d\mathbf{f}_{t_1}^{(i_1)} d\mathbf{f}_{t_2}^{(i_2)} = \frac{T-t}{2} \sum_{i=n+1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{4i^2-1}} \left(\zeta_{i-1}^{(i_1)} \zeta_i^{(i_2)} - \zeta_i^{(i_1)} \zeta_{i-1}^{(i_2)} \right).$$

Поскольку

$$\mathbf{M} \left\{ \left(\int_{[t,T]^2} R_n(t_1, t_2) d\mathbf{f}_{t_1}^{(i_1)} d\mathbf{f}_{t_2}^{(i_2)} \right)^2 \right\} = \frac{(T-t)^2}{2} \sum_{i=n+1}^{\infty} \frac{1}{4i^2-1} \quad (6.66)$$

и

$$\sum_{i=n+1}^{\infty} \frac{1}{4i^2-1} \leq \int_n^{\infty} \frac{1}{4x^2-1} dx = -\frac{1}{4} \ln \left| 1 - \frac{2}{2n+1} \right| \leq \frac{C_0}{n}; \quad (6.67)$$

C_0 — постоянная, то взяв

$$\xi_n = \int_{[t,T]^2} R_n(t_1, t_2) d\mathbf{f}_{t_1}^{(i_1)} d\mathbf{f}_{t_2}^{(i_2)}$$

и $p = 2$, мы не сможем доказать сходимость ξ_n к нулю с вероятностью 1 с помощью утверждения 6.1, поскольку ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \mathbf{M}\{|\xi_n|^p\},$$

будет мажорироваться расходящимся рядом Дирихле с показателем 1.

Поэтому необходимо взять хотя бы $p = 4$ и оценить

$$\mathbf{M} \left\{ \left(\int_{[t,T]^2} R_n(t_1, t_2) d\mathbf{f}_{t_1}^{(i_1)} d\mathbf{f}_{t_2}^{(i_2)} \right)^4 \right\}.$$

Прежде всего заметим, что согласно (5.9)

$$\begin{aligned} & \int_{[t,T]^2} R_n(t_1, t_2) d\mathbf{f}_{t_1}^{(i_1)} d\mathbf{f}_{t_2}^{(i_2)} = \\ & = \text{l.i.m.}_{N \rightarrow \infty} \sum_{j_1, j_2=0}^{N-1} R_n(\tau_{j_1}, \tau_{j_2}) \Delta \mathbf{f}_{\tau_{j_1}}^{(i_1)} \Delta \mathbf{f}_{\tau_{j_2}}^{(i_2)} = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \text{l.i.m.}_{N \rightarrow \infty} \sum_{j_1=0}^{N-1} \sum_{j_2=0}^{j_1-1} R_n(\tau_{j_1}, \tau_{j_2}) \Delta \mathbf{f}_{\tau_{j_1}}^{(i_1)} \Delta \mathbf{f}_{\tau_{j_2}}^{(i_2)} + \\
&+ \text{l.i.m.}_{N \rightarrow \infty} \sum_{j_1=0}^{N-1} \sum_{j_2=j_1+1}^{N-1} R_n(\tau_{j_1}, \tau_{j_2}) \Delta \mathbf{f}_{\tau_{j_1}}^{(i_1)} \Delta \mathbf{f}_{\tau_{j_2}}^{(i_2)} + \\
&+ \text{l.i.m.}_{N \rightarrow \infty} \sum_{j_1=0}^{N-1} R_n(\tau_{j_1}, \tau_{j_1}) \Delta \mathbf{f}_{\tau_{j_1}}^{(i_1)} \Delta \mathbf{f}_{\tau_{j_1}}^{(i_2)} = \\
&= \text{l.i.m.}_{N \rightarrow \infty} \sum_{j_1=0}^{N-1} \sum_{j_2=0}^{j_1-1} R_n(\tau_{j_1}, \tau_{j_2}) \Delta \mathbf{f}_{\tau_{j_1}}^{(i_1)} \Delta \mathbf{f}_{\tau_{j_2}}^{(i_2)} + \\
&+ \text{l.i.m.}_{N \rightarrow \infty} \sum_{j_2=0}^{N-1} \sum_{j_1=0}^{j_2-1} R_n(\tau_{j_1}, \tau_{j_2}) \Delta \mathbf{f}_{\tau_{j_1}}^{(i_1)} \Delta \mathbf{f}_{\tau_{j_2}}^{(i_2)} = \\
&= \int_t^T \int_t^{t_1} R_n(t_1, t_2) d\mathbf{f}_{t_2}^{(i_2)} d\mathbf{f}_{t_1}^{(i_1)} + \\
&+ \int_t^T \int_t^{t_2} R_n(t_1, t_2) d\mathbf{f}_{t_1}^{(i_1)} d\mathbf{f}_{t_2}^{(i_2)} \quad (6.68)
\end{aligned}$$

(напомним, что $i_1 \neq i_2$, да к тому же в нашем случае $R_n(t_1, t_1) = 0$).

В (6.68) мы воспользовались ранее установленным равенством (5.10):

$$\begin{aligned}
&\int_t^T \dots \int_t^{t_2} \Phi(t_1, \dots, t_k) d\mathbf{w}_{t_1}^{(i_1)} \dots d\mathbf{w}_{t_k}^{(i_k)} = \\
&= \text{l.i.m.}_{N \rightarrow \infty} \sum_{j_k=0}^{N-1} \dots \sum_{j_1=0}^{j_2-1} \Phi(\tau_{j_1}, \dots, \tau_{j_k}) \prod_{l=1}^k \Delta \mathbf{w}_{\tau_{j_l}}^{(i_l)} \text{ с в.1,} \quad (6.69)
\end{aligned}$$

где интеграл в левой части равенства (6.69) понимается как повторный стохастический интеграл Ито; неслучайная функция $\Phi(t_1, \dots, t_k)$ непрерывно дифференцируема в области $\mathcal{D}_k$ и ограничена на ее границе; $\mathcal{D}_k = \{(t_1, \dots, t_k) : t \leq t_1 < \dots < t_k \leq T\}$.

Очевидно, что

$$\begin{aligned}
&\mathbb{M} \left\{ \left(\int_{[t, T]^2} R_n(t_1, t_2) d\mathbf{f}_{t_1}^{(i_1)} d\mathbf{f}_{t_2}^{(i_2)} \right)^2 \right\} = \mathbb{M} \left\{ \left(\int_t^T \int_t^{t_1} R_n(t_1, t_2) d\mathbf{f}_{t_2}^{(i_2)} d\mathbf{f}_{t_1}^{(i_1)} \right)^2 \right\} + \\
&+ \mathbb{M} \left\{ \left(\int_t^T \int_t^{t_2} R_n(t_1, t_2) d\mathbf{f}_{t_1}^{(i_1)} d\mathbf{f}_{t_2}^{(i_2)} \right)^2 \right\} =
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \int_t^T \int_t^{t_1} R_n^2(t_1, t_2) dt_2 dt_1 + \int_t^T \int_t^{t_2} R_n^2(t_1, t_2) dt_1 dt_2 = \\
&= \int_{[t, T]^2} R_n^2(t_1, t_2) dt_2 dt_1.
\end{aligned} \tag{6.70}$$

Рассмотрим процесс Ито

$$\eta_s = \int_t^s \int_t^{t_1} R_n(t_1, t_2) d\mathbf{f}_{t_2}^{(i_2)} d\mathbf{f}_{t_1}^{(i_1)},$$

который имеет коэффициент диффузии

$$b_s = \int_t^s R_n(s, t_2) d\mathbf{f}_{t_2}^{(i_2)}.$$

С использованием формулы Ито выводим

$$\mathbb{M}\{(\eta_T)^4\} = 6 \int_t^T \mathbb{M}\{(b_s)^2(\eta_s)^2\} ds.$$

Применим неравенство Коши–Буняковского в правой части последнего равенства и учтем, что $\mathbb{M}\{(\eta_T)^4\}$ растет с ростом T :

$$\begin{aligned}
\mathbb{M}\{(\eta_T)^4\} &\leq 6 \int_t^T \sqrt{\mathbb{M}\{(b_s)^4\}} \sqrt{\mathbb{M}\{(\eta_s)^4\}} ds \leq \\
&\leq 6 \int_t^T \sqrt{\mathbb{M}\{(b_s)^4\}} \sqrt{\mathbb{M}\{(\eta_T)^4\}} ds = 6 \int_t^T \sqrt{\mathbb{M}\{(b_s)^4\}} ds \cdot \sqrt{\mathbb{M}\{(\eta_T)^4\}}.
\end{aligned}$$

Сокращая обе части неравенства на $\sqrt{\mathbb{M}\{(\eta_T)^4\}}$ и возводя левую и правую части получившегося неравенства в квадрат получаем

$$\mathbb{M}\{(\eta_T)^4\} \leq 36 \left(\int_t^T \sqrt{\mathbb{M}\{(b_s)^4\}} ds \right)^2.$$

Далее, используя то, что b_s — гауссовская случайная величина с нулевым математическим ожиданием и дисперсией

$$\int_t^s R_n^2(s, t_2) dt_2,$$

получаем

$$\begin{aligned} \mathbf{M}\{(\eta_T)^4\} &\leq 36 \left(\int_t^T \sqrt{3 \left(\int_t^s R_n^2(s, t_2) dt_2 \right)^2} ds \right)^2 = \\ &= 108 \left(\int_t^T \int_t^s R_n^2(s, t_2) dt_2 ds \right)^2 \leq 108 \left(\int_{[t, T]^2} R_n^2(t_1, t_2) dt_1 dt_2 \right)^2. \end{aligned}$$

Аналогично оценивается второе слагаемое в правой части (6.68). Тогда

$$\mathbf{M} \left\{ \left(\int_{[t, T]^2} R_n(t_1, t_2) d\mathbf{f}_{t_1}^{(i_1)} d\mathbf{f}_{t_2}^{(i_2)} \right)^4 \right\} \leq C \left(\int_{[t, T]^2} R_n^2(t_1, t_2) dt_1 dt_2 \right)^2,$$

где C — постоянная.

Согласно (6.66), (6.67), (6.70) можно теперь записать

$$\mathbf{M} \left\{ \left(\int_{[t, T]^2} R_n(t_1, t_2) d\mathbf{f}_{t_1}^{(i_1)} d\mathbf{f}_{t_2}^{(i_2)} \right)^4 \right\} \leq \frac{C_1}{n^2},$$

где C_1 — постоянная.

Наконец, мы получаем ожидаемый результат:

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} \mathbf{M} \left\{ \left(\int_{[t, T]^2} R_n(t_1, t_2) d\mathbf{f}_{t_1}^{(i_1)} d\mathbf{f}_{t_2}^{(i_2)} \right)^4 \right\} &\leq C_1 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} < \infty \Rightarrow \\ \int_{[t, T]^2} R_n(t_1, t_2) d\mathbf{f}_{t_1}^{(i_1)} d\mathbf{f}_{t_2}^{(i_2)} &\rightarrow 0 \quad (n \rightarrow \infty) \text{ с в. 1} \Rightarrow \\ I_{00T, t}^{*(i_1 i_2)n} &\rightarrow I_{00T, t}^{*(i_1 i_2)} \quad (n \rightarrow \infty) \text{ с в. 1.} \end{aligned}$$

Перейдем к рассмотрению стохастических интегралов $I_{01T, t}^{*(i_1 i_2)}$, $I_{10T, t}^{*(i_1 i_2)}$, разложения которых имеют вид (6.34), (6.35).

Очевидно, что случай $i_1 \neq i_2$ рассматривается абсолютно аналогично вышеизложенным рассуждениям.

При $i_1 = i_2$ из разложений (6.34), (6.35) видно, что

$$\mathbf{M} \left\{ \left(\int_{[t, T]^2} R_n(t_1, t_2) d\mathbf{f}_{t_1}^{(i_1)} d\mathbf{f}_{t_2}^{(i_2)} \right)^2 \right\} \leq \frac{C_2}{n^2}, \quad (6.71)$$

т.е. при доказательстве сходимости с вероятностью 1 достаточно будет в утверждении 6.1 взять $p = 2$.

Это произошло согласно (6.64) ($I_{00T,t}^{*(i_1 i_2)}$ входит в разложения (6.34), (6.35)).

Далее разложения (6.30)–(6.32) для интегралов $I_{0T,t}^{*(i_1)}$, $I_{1T,t}^{*(i_1)}$, $I_{2T,t}^{*(i_1)}$ изначально справедливы с вероятностью 1 (они содержат 1, 2 и 3 слагаемых соответственно).

По-видимому по предложенной схеме можно доказать сходимость с вероятностью 1 повторных стохастических интегралов кратности $k > 2$.

6.2 Сильная аппроксимация повторных стохастических интегралов Стратоновича методом Г. Н. Мильштейна

Г. Н. Мильштейном в [70] предложен метод разложения повторных стохастических интегралов Стратоновича, основанный на разложении процесса броуновского моста в тригонометрический ряд Фурье со случайными коэффициентами.

Рассмотрим процесс броуновского моста

$$\mathbf{f}_t - \frac{t}{\Delta} \mathbf{f}_\Delta, \quad (6.72)$$

определенный при $t \in [0, \Delta]$, $\Delta > 0$, где $\mathbf{f}_t \in \mathbb{R}^m$ — стандартный векторный винеровский процесс с независимыми компонентами $\mathbf{f}_t^{(i)}$, $i = 1, \dots, m$.

Рассмотрим также сходящееся в среднеквадратическом смысле покомпонентное разложение процесса (6.72) в тригонометрический ряд Фурье:

$$\mathbf{f}_t^{(i)} - \frac{t}{\Delta} \mathbf{f}_\Delta^{(i)} = \frac{1}{2} a_{i,0} + \sum_{r=1}^{\infty} \left(a_{i,r} \cos \frac{2\pi r t}{\Delta} + b_{i,r} \sin \frac{2\pi r t}{\Delta} \right), \quad (6.73)$$

где

$$a_{i,r} = \frac{2}{\Delta} \int_0^\Delta \left(\mathbf{f}_s^{(i)} - \frac{s}{\Delta} \mathbf{f}_\Delta^{(i)} \right) \cos \frac{2\pi r s}{\Delta} ds;$$

$$b_{i,r} = \frac{2}{\Delta} \int_0^\Delta \left(\mathbf{f}_s^{(i)} - \frac{s}{\Delta} \mathbf{f}_\Delta^{(i)} \right) \sin \frac{2\pi r s}{\Delta} ds;$$

$r = 0, 1, \dots; i = 1, \dots, m$.

Нетрудно показать [70, 86], что случайные величины $a_{i,r}, b_{i,r}$ гауссовские и удовлетворяют следующим соотношениям:

$$\begin{aligned} \mathbb{M} \{a_{i,r} b_{i,r}\} &= \mathbb{M} \{a_{i,r} b_{i,k}\} = 0, \\ \mathbb{M} \{a_{i,r} a_{i,k}\} &= \mathbb{M} \{b_{i,r} b_{i,k}\} = 0, \\ \mathbb{M} \{a_{i_1,r} a_{i_2,r}\} &= \mathbb{M} \{b_{i_1,r} b_{i_2,r}\} = 0, \\ \mathbb{M} \{a_{i,r}^2\} &= \mathbb{M} \{b_{i,r}^2\} = \frac{\Delta}{2\pi^2 r^2}, \end{aligned}$$

где $i, i_1, i_2 = 1, \dots, m; r \neq k; i_1 \neq i_2$.

Согласно (6.73) имеем

$$\mathbf{f}_t^{(i)} = \mathbf{f}_\Delta^{(i)} \frac{t}{\Delta} + \frac{1}{2} a_{i,0} + \sum_{r=1}^{\infty} \left(a_{i,r} \cos \frac{2\pi r t}{\Delta} + b_{i,r} \sin \frac{2\pi r t}{\Delta} \right), \quad (6.74)$$

где ряд сходится в среднеквадратическом смысле.

Далее путем подстановки (6.74) в повторный стохастический интеграл и проведения ряда непростых преобразований можно в принципе получить его разложение в повторный ряд по системе независимых стандартных гауссовских случайных величин. Данное разложение будет сходиться к соответствующему повторному стохастическому интегралу Стратоновича (обоснование см. в [86]).

6.2.1 Разложения, полученные методом Г. Н. Мильштейна

Используя соотношение (6.74), нетрудно получить следующие сходящиеся в среднеквадратическом смысле разложения [70, 86]:

$$\int_0^{*t} d\mathbf{f}_t^{(i)} = \frac{t}{\Delta} \mathbf{f}_\Delta^{(i)} + \frac{1}{2} a_{i,0} + \sum_{r=1}^{\infty} \left(a_{i,r} \cos \frac{2\pi r t}{\Delta} + b_{i,r} \sin \frac{2\pi r t}{\Delta} \right), \quad (6.75)$$

$$\begin{aligned} \int_0^{*t} \int_0^{*\tau} d\mathbf{f}_{\tau_1}^{(i)} d\tau &= \frac{t^2}{2\Delta} \mathbf{f}_\Delta^{(i)} + \frac{t}{2} a_{i,0} + \frac{\Delta}{2\pi} \sum_{r=1}^{\infty} \frac{1}{r} \left\{ a_{i,r} \sin \frac{2\pi r t}{\Delta} - \right. \\ &\quad \left. - b_{i,r} \left(\cos \frac{2\pi r t}{\Delta} - 1 \right) \right\}, \end{aligned} \quad (6.76)$$

$$\int_0^{*t} \int_0^{*\tau} d\tau_1 d\mathbf{f}_\tau^{(i)} = t \int_0^{*t} d\mathbf{f}_t^{(i)} - \int_0^{*t} \int_0^{*\tau} d\mathbf{f}_{\tau_1}^{(i)} d\tau =$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{t^2}{2\Delta} \mathbf{f}_{\Delta}^{(i)} + t \sum_{r=1}^{\infty} \left\{ a_{i,r} \cos \frac{2\pi r t}{\Delta} + b_{i,r} \sin \frac{2\pi r t}{\Delta} \right\} - \\
&- \frac{\Delta}{2\pi} \sum_{r=1}^{\infty} \frac{1}{r} \left\{ a_{i,r} \sin \frac{2\pi r t}{\Delta} - b_{i,r} \left(\cos \frac{2\pi r t}{\Delta} - 1 \right) \right\}, \quad (6.77)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\int_0^{*t} \int_0^{*\tau} d\mathbf{f}_{\tau_1}^{(i_1)} d\mathbf{f}_{\tau}^{(i_2)} &= \frac{1}{\Delta} \mathbf{f}_{\Delta}^{(i_1)} \int_0^{*t} \int_0^{*\tau} d\tau_1 d\mathbf{f}_{\tau}^{(i_2)} + \frac{1}{2} a_{i_1,0} \int_0^{*t} d\mathbf{f}_t^{(i_2)} + \\
&+ \frac{t\pi}{\Delta} \sum_{r=1}^{\infty} r (a_{i_1,r} b_{i_2,r} - b_{i_1,r} a_{i_2,r}) + \\
&+ \frac{1}{4} \sum_{r=1}^{\infty} \left\{ (a_{i_1,r} a_{i_2,r} - b_{i_1,r} b_{i_2,r}) \left(1 - \cos \frac{4\pi r t}{\Delta} \right) + \right. \\
&\quad \left. + (a_{i_1,r} b_{i_2,r} + b_{i_1,r} a_{i_2,r}) \sin \frac{4\pi r t}{\Delta} + \right. \\
&\quad \left. + \frac{2}{\pi r} \mathbf{f}_{\Delta}^{(i_2)} \left(a_{i_1,r} \sin \frac{2\pi r t}{\Delta} + b_{i_1,r} \left(\cos \frac{2\pi r t}{\Delta} - 1 \right) \right) \right\} + \\
&+ \sum_{\substack{k,r=1 \\ k \neq r}}^{\infty} k \left\{ a_{i_1,r} a_{i_2,k} \left[\frac{\cos \left(\frac{2\pi(k+r)t}{\Delta} \right)}{2(k+r)} + \frac{\cos \left(\frac{2\pi(k-r)t}{\Delta} \right)}{2(k-r)} - \frac{k}{k^2 - r^2} \right] + \right. \\
&\quad \left. + a_{i_1,r} b_{i_2,k} \left[\frac{\sin \left(\frac{2\pi(k+r)t}{\Delta} \right)}{2(k+r)} + \frac{\sin \left(\frac{2\pi(k-r)t}{\Delta} \right)}{2(k-r)} \right] + \right. \\
&\quad \left. + b_{i_1,r} b_{i_2,k} \left[\frac{\cos \left(\frac{2\pi(k-r)t}{\Delta} \right)}{2(k-r)} - \frac{\cos \left(\frac{2\pi(k+r)t}{\Delta} \right)}{2(k+r)} - \frac{r}{k^2 - r^2} \right] + \right. \\
&\quad \left. + \frac{\Delta}{2\pi} b_{i_1,r} a_{i_2,k} \left[\frac{\sin \left(\frac{2\pi(k+r)t}{\Delta} \right)}{2(k+r)} - \frac{\sin \left(\frac{2\pi(k-r)t}{\Delta} \right)}{2(k-r)} \right] \right\}. \quad (6.78)
\end{aligned}$$

Положим в соотношениях (6.75)–(6.78) $t = \Delta$. В результате получим следующие сходящиеся в среднеквадратическом смысле разложения:

$$\int_0^{*\Delta} d\mathbf{f}_t^{(i)} = \mathbf{f}_{\Delta}^{(i)}, \quad (6.79)$$

$$\int_0^{*\Delta} \int_0^{*\tau} d\mathbf{f}_{\tau_1}^{(i)} d\tau = \frac{1}{2} \Delta \left(\mathbf{f}_{\Delta}^{(i)} + a_{i,0} \right), \quad (6.80)$$

$$\int_0^{*\Delta} \int_0^{*\tau} d\tau_1 d\mathbf{f}_\tau^{(i)} = \frac{1}{2} \Delta \left(\mathbf{f}_\Delta^{(i)} - a_{i,0} \right), \quad (6.81)$$

$$\begin{aligned} \int_0^{*\Delta} \int_0^{*\tau} d\mathbf{f}_{\tau_1}^{(i_1)} d\mathbf{f}_\tau^{(i_2)} &= \frac{1}{2} \mathbf{f}_\Delta^{(i_1)} \mathbf{f}_\Delta^{(i_2)} - \frac{1}{2} \left(a_{i_2,0} \mathbf{f}_\Delta^{(i_1)} - a_{i_1,0} \mathbf{f}_\Delta^{(i_2)} \right) + \\ &+ \pi \sum_{r=1}^{\infty} r \left(a_{i_1,r} b_{i_2,r} - b_{i_1,r} a_{i_2,r} \right). \end{aligned} \quad (6.82)$$

При выводе (6.79)–(6.82) использовалось соотношение

$$a_{i,0} = -2 \sum_{r=1}^{\infty} a_{i,r}, \quad (6.83)$$

которое следует из (6.73) при $t = \Delta$.

6.2.2 Сравнение метода, основанного на кратных рядах Фурье, с методом Г. Н. Мильштейна

В начале главы уже обращалось внимание на отличительные особенности метода, основанного на кратных рядах Фурье, и метода Г. Н. Мильштейна, поэтому сейчас не будем на них останавливаться.

Произведем сравнение разложений некоторых повторных стохастических интегралов Стратоновича, полученных методом Г. Н. Мильштейна, и методом, основанным на кратных рядах Фурье по тригонометрической системе функций.

Введем в рассмотрение следующие независимые стандартные гауссовские случайные величины:

$$\xi_i = \frac{\mathbf{f}_\Delta^{(i)}}{\sqrt{\Delta}}, \quad \rho_{i,r} = \sqrt{\frac{2}{\Delta}} \pi r a_{i,r}, \quad \eta_{i,r} = \sqrt{\frac{2}{\Delta}} \pi r b_{i,r}, \quad (6.84)$$

где $i = 1, \dots, m$; $r = 1, 2, \dots$. В силу (6.83) имеем

$$a_{i,0} = -\sqrt{2\Delta} \sum_{r=1}^{\infty} \frac{1}{\pi r} \rho_{i,r}. \quad (6.85)$$

Подставляя соотношения (6.84) и (6.85) в (6.79)–(6.82), получаем следующие сходящиеся в среднеквадратическом смысле разложения:

$$\int_0^{*\Delta} d\mathbf{f}_t^{(i)} = \sqrt{\Delta} \xi_i, \quad (6.86)$$

$$\int_0^{*\Delta} \int_0^{*\tau} d\mathbf{f}_{\tau_1}^{(i)} d\tau = \frac{1}{2} \Delta^{\frac{3}{2}} \left(\xi_i - \frac{\sqrt{2}}{\pi} \sum_{r=1}^{\infty} \frac{1}{r} \rho_{i,r} \right), \quad (6.87)$$

$$\int_0^{*\Delta} \int_0^{*\tau} d\tau_1 d\mathbf{f}_{\tau}^{(i)} = \frac{1}{2} \Delta^{\frac{3}{2}} \left(\xi_i + \frac{\sqrt{2}}{\pi} \sum_{r=1}^{\infty} \frac{1}{r} \rho_{i,r} \right), \quad (6.88)$$

$$\begin{aligned} \int_0^{*\Delta} \int_0^{*\tau} d\mathbf{f}_{\tau_1}^{(i_1)} d\mathbf{f}_{\tau}^{(i_2)} = \frac{\Delta}{2} \left\{ \xi_{i_1} \xi_{i_2} + \frac{1}{\pi} \sum_{r=1}^{\infty} \frac{1}{r} (\rho_{i_1,r} \eta_{i_2,r} - \eta_{i_1,r} \rho_{i_2,r} + \right. \\ \left. + \sqrt{2} (\rho_{i_2,r} \xi_{i_1} - \rho_{i_1,r} \xi_{i_2})) \right\}. \end{aligned} \quad (6.89)$$

Учитывая принятые нами ранее обозначения для повторных стохастических интегралов, можно записать

$$\int_0^{*\Delta} d\mathbf{f}_t^{(i)} = I_{0\Delta,0}^{*(i)} = J_{(1)\Delta,0}^{*(i)}, \quad (6.90)$$

$$\int_0^{*\Delta} \int_0^{*\tau} d\mathbf{f}_{\tau_1}^{(i)} d\tau = \Delta I_{0\Delta,0}^{*(i)} + I_{1\Delta,0}^{*(i)} = J_{(10)\Delta,0}^{*(i)}, \quad (6.91)$$

$$\int_0^{*\Delta} \int_0^{*\tau} d\tau_1 d\mathbf{f}_{\tau}^{(i)} = -I_{1\Delta,0}^{*(i)} = J_{(01)\Delta,0}^{*(i)}, \quad (6.92)$$

$$\int_0^{*\Delta} \int_0^{*\tau} d\mathbf{f}_{\tau_1}^{(i_1)} d\mathbf{f}_{\tau}^{(i_2)} = I_{00\Delta,0}^{*(i_1 i_2)} = J_{(11)\Delta,0}^{*(i_1 i_2)}. \quad (6.93)$$

Подставляя разложения интегралов $I_{0\Delta,0}^{*(i)}$, $I_{1\Delta,0}^{*(i)}$, $I_{00\Delta,0}^{*(i_1 i_2)}$ или интегралов $J_{(1)\Delta,0}^{*(i)}$, $J_{(10)\Delta,0}^{*(i)}$, $J_{(01)\Delta,0}^{*(i)}$, $J_{(11)\Delta,0}^{*(i_1 i_2)}$, полученные ранее с помощью метода, основанного на кратных рядах Фурье по тригонометрической системе функций, в представления (6.90)–(6.93), с точностью до обозначений получаем разложения (6.86)–(6.89). Это свидетельствует о том, что по крайней мере для рассмотренных повторных стохастических интегралов Стратоновича и тригонометрической системы функций метод Г. Н. Мильштейна и метод, основанный на кратных рядах Фурье, дают один и тот же результат (это интересный факт, хотя и вполне ожидаемый). По-видимому, можно показать, что этот вывод справедлив и для других повторных стохастических интегралов Стратоновича.

6.3 Представление повторных стохастических интегралов с помощью полиномов Эрмита

В предыдущих разделах данной главы рассматривалась общая теория аппроксимации повторных стохастических интегралов Стратоновича и Ито. Однако в некоторых частных случаях можно получить точные представления повторных стохастических интегралов Ито и Стратоновича в виде полиномов конечных степеней от одной стандартной гауссовской случайной величины. Этому вопросу будет посвящен настоящий раздел. Результаты, излагаемые в нем, можно встретить, например, в [64, 70, 86, 130].

Рассмотрим семейство производящих многочленов $H_n(x, y)$, $n = 0, 1, \dots$, вида

$$H_n(x, y) = \frac{d^n}{d\alpha^n} e^{\alpha x - \frac{1}{2}\alpha^2 y} \Big|_{\alpha=0}.$$

Известно, что многочлены $H_n(x, y)$ связаны с многочленами Эрмита $h_n(x)$ формулой $H_n(x, y) = \left(\frac{y}{2}\right)^{\frac{n}{2}} h_n\left(\frac{x}{\sqrt{2y}}\right)$. Используя рекуррентные формулы [131]

$$\frac{dh_n(z)}{dz} = 2nh_{n-1}(z), \quad n = 1, 2, \dots,$$

$$h_n(z) = 2zh_{n-1}(z) - 2(n-1)h_{n-2}(z), \quad n = 2, 3, \dots,$$

нетрудно получить следующие рекуррентные соотношения для многочленов $H_n(x, y)$:

$$\frac{\partial H_n}{\partial x}(x, y) = nH_{n-1}(x, y), \quad n = 1, 2, \dots, \quad (6.94)$$

$$\frac{\partial H_n}{\partial y}(x, y) = \frac{n}{2y}H_n(x, y) - \frac{nx}{2y}H_{n-1}(x, y), \quad n = 1, 2, \dots, \quad (6.95)$$

$$\frac{\partial H_n}{\partial y}(x, y) = -\frac{n(n-1)}{2}H_{n-2}(x, y), \quad n = 2, 3, \dots \quad (6.96)$$

Из (6.94)–(6.96) следует, что

$$\frac{\partial H_n}{\partial y}(x, y) + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 H_n}{\partial x^2}(x, y) = 0, \quad n = 2, 3, \dots \quad (6.97)$$

По формуле Ито с вероятностью 1 имеем

$$H_n(f_t, t) - H_n(0, 0) = \int_0^t \frac{\partial H_n}{\partial x}(f_s, s) df_s + \int_0^t \left(\frac{\partial H_n}{\partial y}(f_s, s) + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 H_n}{\partial x^2}(f_s, s) \right) ds, \quad (6.98)$$

где $f_t \in \mathbb{R}^1$ — стандартный скалярный винеровский процесс. С учетом (6.97) и того, что $H_n(0, 0) = 0$, $n = 2, 3, \dots$, из (6.98) с вероятностью 1 находим

$$H_n(f_t, t) = \int_0^t n H_{n-1}(f_s, s) df_s, \quad n = 2, 3, \dots$$

Далее по индукции нетрудно получить с вероятностью 1 следующее соотношение:

$$I_t^{(n)} \stackrel{\text{def}}{=} \int_0^t \dots \int_0^{t_2} df_{t_1} \dots df_{t_n} = \frac{1}{n!} H_n(f_t, t), \quad n = 1, 2, \dots \quad (6.99)$$

Рассмотрим одно из обобщений [130] формулы (6.99):

$$J_t^{(n)} \stackrel{\text{def}}{=} \int_0^t \psi_{t_n} \dots \int_0^{t_2} \psi_{t_1} df_{t_1} \dots df_{t_n} = \frac{1}{n!} H_n(\delta_t, \Delta_t), \quad n = 1, 2, \dots, \quad (6.100)$$

где $\delta_t \stackrel{\text{def}}{=} \int_0^t \psi_s df_s$; $\Delta_t \stackrel{\text{def}}{=} \int_0^t \psi_s^2 ds$; $\psi_t \in \mathcal{M}_2([0, T])$.

Пример 6.6. Нетрудно проверить, что первые восемь формул из семейства (6.100) имеют вид

$$J_t^{(1)} = \frac{1}{1!} \delta_t, \quad J_t^{(2)} = \frac{1}{2!} (\delta_t^2 - \Delta_t), \quad J_t^{(3)} = \frac{1}{3!} (\delta_t^3 - 3\delta_t \Delta_t),$$

$$J_t^{(4)} = \frac{1}{4!} (\delta_t^4 - 6\delta_t^2 \Delta_t + 3\Delta_t^2), \quad J_t^{(5)} = \frac{1}{5!} (\delta_t^5 - 10\delta_t^3 \Delta_t + 15\delta_t \Delta_t^2),$$

$$J_t^{(6)} = \frac{1}{6!} (\delta_t^6 - 15\delta_t^4 \Delta_t + 45\delta_t^2 \Delta_t^2 - 15\Delta_t^3),$$

$$J_t^{(7)} = \frac{1}{7!} (\delta_t^7 - 21\delta_t^5 \Delta_t + 105\delta_t^3 \Delta_t^2 - 105\delta_t \Delta_t^3),$$

$$J_t^{(8)} = \frac{1}{8!} (\delta_t^8 - 28\delta_t^6 \Delta_t + 210\delta_t^4 \Delta_t^2 - 420\delta_t^2 \Delta_t^3 + 105\Delta_t^4),$$

где равенства справедливы с вероятностью 1.

Докажем с вероятностью 1 следующее соотношение для повторных стохастических интегралов Стратоновича [86]:

$$I_t^{*(n)} = \frac{1}{n!} f_t^n, \quad (6.101)$$

где

$$I_t^{*(n)} \stackrel{\text{def}}{=} \int_0^{*t} \dots \int_0^{*t_2} df_{t_1} \dots df_{t_n}.$$

Сначала рассмотрим случай $n = 2$. По теореме 3.9

$$I_t^{*(2)} = I_t^{(2)} + \frac{1}{2} \int_0^t dt_1 \text{ с в.1.} \quad (6.102)$$

Из соотношения (6.99) при $n = 2$ следует, что с вероятностью 1

$$I_t^{(2)} = \frac{1}{2} f_t^2 - \frac{1}{2} \int_0^t dt_1. \quad (6.103)$$

Подставляя (6.103) в (6.102), с вероятностью 1 имеем $I_t^{*(2)} = \frac{1}{2!} f_t^2$. Таким образом, формула (6.101) справедлива при $n = 2$. Предположим, что формула (6.101) справедлива при $n = k$, т. е. с вероятностью 1 $I_t^{*(k)} = \frac{1}{k!} f_t^k$, и рассмотрим $\int_0^{*t} I_\tau^{*(k)} df_\tau \stackrel{\text{def}}{=} I_t^{*(k+1)}$. По леммам 1.2, 1.5 и предположению индукции с вероятностью 1 получим

$$I_t^{*(k+1)} = \int_0^t \frac{f_\tau^k}{k!} df_\tau + \frac{1}{2} \int_0^t \frac{f_\tau^{k-1}}{(k-1)!} d\tau. \quad (6.104)$$

Введем случайный процесс ξ_t вида $\xi_t = \frac{f_t^{k+1}}{(k+1)!}$ и найдем с помощью формулы Ито его стохастический дифференциал:

$$d\xi_t = \frac{1}{2} \frac{f_t^{k-1}}{(k-1)!} dt + \frac{f_t^k}{k!} df_t. \quad (6.105)$$

Поскольку $\xi_0 = 0$, то из (6.104) и (6.105) следует, что $I_t^{*(k+1)} = \frac{1}{(k+1)!} f_t^{k+1}$ с вероятностью 1. Таким образом, соотношение (6.101) доказано по индукции.

Нетрудно видеть, что формула (6.101) допускает следующее обобщение:

$$J_t^{*(n)} = \frac{1}{n!} \delta_t^n,$$

где $J_t^{*(n)} \stackrel{\text{def}}{=} \int_0^{*t} \psi(t_n) \dots \int_0^{*t_2} \psi(t_1) df_{t_1} \dots df_{t_n}$; $\delta_t = \int_0^t \psi(s) df_s$, а $\psi(s) : [0, t] \rightarrow \mathfrak{R}^1$ — некоторая непрерывно дифференцируемая функция.

6.4 Метод сильной аппроксимации повторных стохастических интегралов Ито, основанный на кратных интегральных суммах

В начале данной главы уже отмечалось, что в свете современного состояния вопроса об аппроксимации повторных стохастических интегралов рассматриваемый ниже метод вряд ли имеет сколь какую-нибудь практическую ценность. Однако для получения общей картины мы все же его рассмотрим.

Пусть функции $\psi_l(\tau)$, $l = 1, \dots, k$, удовлетворяют на промежутке $[t, T]$ условиям Липшица с постоянными C_l , т. е.

$$|\psi_l(\tau_1) - \psi_l(\tau_2)| \leq C_l |\tau_1 - \tau_2| \text{ при всех } \tau_1, \tau_2 \in [t, T]. \quad (6.106)$$

Тогда согласно лемме 5.1 с вероятностью 1 справедливо равенство

$$J[\psi^{(k)}]_{T,t} = \text{l.i.m.}_{N \rightarrow \infty} \sum_{j_k=0}^{N-1} \dots \sum_{j_1=0}^{j_2-1} \prod_{l=1}^k \psi_l(\tau_{j_l}) \Delta \mathbf{w}_{\tau_{j_l}}^{(i_l)}.$$

Здесь сохранен смысл обозначений, входящих в формулу (5.6).

Будем искать аппроксимацию повторного стохастического интеграла Ито $J[\psi^{(k)}]_{T,t}$ в виде

$$J[\psi^{(k)}]_{T,t}^N = \sum_{j_k=0}^{N-1} \dots \sum_{j_1=0}^{j_2-1} \prod_{l=1}^k \psi_l(\tau_{j_l}) \Delta \mathbf{w}_{\tau_{j_l}}^{(i_l)}. \quad (6.107)$$

Соотношение (6.107) может быть переписано в следующей форме:

$$J[\psi^{(k)}]_{T,t}^N = \sum_{j_k=0}^{N-1} \dots \sum_{j_1=0}^{j_2-1} \prod_{l=1}^k \sqrt{\Delta \tau_{j_l}} \psi_l(\tau_{j_l}) \mathbf{u}_{j_l}^{(i_l)}, \quad (6.108)$$

где $\mathbf{u}_j^{(i)} \stackrel{\text{def}}{=} (\mathbf{w}_{\tau_{j+1}}^{(i)} - \mathbf{w}_{\tau_j}^{(i)}) / \sqrt{\Delta \tau_j}$, $i = 1, \dots, m$, — независимые при $i \neq 0$ и различных j стандартные гауссовские случайные величины; $\mathbf{u}_j^{(0)} = \sqrt{\Delta \tau_j}$. Пусть

$$\tau_j = t + j\Delta, \quad j = 0, 1, \dots, N, \quad \tau_N = T, \quad \Delta > 0. \quad (6.109)$$

Тогда формула (6.108) примет вид

$$J[\psi^{(k)}]_{T,t}^N = \Delta^{\frac{k}{2}} \sum_{j_k=0}^{N-1} \dots \sum_{j_1=0}^{j_2-1} \prod_{l=1}^k \psi_l(t + j_l\Delta) \mathbf{u}_{j_l}^{(i_l)}, \quad (6.110)$$

где $\mathbf{u}_j^{(i)} \stackrel{\text{def}}{=} (\mathbf{w}_{t+(j+1)\Delta}^{(i)} - \mathbf{w}_{t+j\Delta}^{(i)})/\sqrt{\Delta}$, $i = 1, \dots, m$.

Теорема 6.1. Пусть функции $\psi_l(\tau)$, $l = 1, \dots, k$, удовлетворяют условию Липшица (6.106), а $\{\tau_j\}_{j=0}^{N-1}$ — разбиение промежутка $[t, T]$ вида (6.109). Тогда при достаточно малой величине $T - t$ существует такая постоянная $H_k < \infty$, что выполняется следующая оценка:

$$\mathbf{M} \left\{ \left(J[\psi^{(k)}]_{T,t} - J[\psi^{(k)}]_{T,t}^N \right)^2 \right\} \leq \frac{H_k (T - t)^2}{N}.$$

Доказательство. Нетрудно видеть, что при достаточно малой величине $T - t$ найдется такая постоянная C_k , что

$$\mathbf{M} \left\{ \left(J[\psi^{(k)}]_{T,t} - J[\psi^{(k)}]_{T,t}^N \right)^2 \right\} \leq C_k \mathbf{M} \left\{ \left(J[\psi^{(2)}]_{T,t} - J[\psi^{(2)}]_{T,t}^N \right)^2 \right\}.$$

Заметим, что

$$J[\psi^{(2)}]_{T,t} - J[\psi^{(2)}]_{T,t}^N = \sum_{j=1}^3 S_j^N,$$

где

$$\begin{aligned} S_1^N &= \sum_{j_1=0}^{N-1} \int_{\tau_{j_1}}^{\tau_{j_1+1}} \psi_2(t_2) \int_{\tau_{j_1}}^{t_2} \psi_1(t_1) d\mathbf{w}_{t_1}^{(i_1)} d\mathbf{w}_{t_2}^{(i_2)}; \\ S_2^N &= \sum_{j_1=0}^{N-1} \int_{\tau_{j_1}}^{\tau_{j_1+1}} (\psi_2(t_2) - \psi_2(\tau_{j_1})) d\mathbf{w}_{t_2}^{(i_2)} \sum_{j_2=0}^{j_1-1} \int_{\tau_{j_2}}^{\tau_{j_2+1}} \psi_1(t_1) d\mathbf{w}_{t_1}^{(i_1)}; \\ S_3^N &= \sum_{j_1=0}^{N-1} \psi_2(\tau_{j_1}) \Delta \mathbf{w}_{\tau_{j_1}}^{(i_2)} \sum_{j_2=0}^{j_1-1} \int_{\tau_{j_2}}^{\tau_{j_2+1}} (\psi_1(t_1) - \psi_1(\tau_{j_2})) d\mathbf{w}_{t_1}^{(i_1)}. \end{aligned}$$

Поэтому

$$\left(\mathbf{M} \left\{ \left(J[\psi^{(2)}]_{T,t} - J[\psi^{(2)}]_{T,t}^N \right)^2 \right\} \right)^{\frac{1}{2}} \leq \sum_{j=1}^3 \sqrt{\mathbf{M} \left\{ (S_j^N)^2 \right\}}.$$

Оценим с помощью моментных свойств стохастических интегралов (см. главу 1) величины $\mathbf{M} \left\{ (S_i^N)^2 \right\}$, $i = 1, 2, 3$. Для этого рассмотрим четыре случая.

1. $i_1, i_2 \neq 0$:

$$\mathbf{M} \left\{ (S_1^N)^2 \right\} \leq \frac{\Delta}{2} (T - t) \sup_{s \in [t, T]} \{ \psi_2^2(s) \psi_1^2(s) \},$$

$$\begin{aligned} \mathbb{M} \left\{ (S_2^N)^2 \right\} &\leq \frac{\Delta^2}{6} (T-t)^2 (C_2)^2 \sup_{s \in [t, T]} \left\{ \psi_1^2(s) \right\}, \\ \mathbb{M} \left\{ (S_3^N)^2 \right\} &\leq \frac{\Delta^2}{6} (T-t)^2 (C_1)^2 \sup_{s \in [t, T]} \left\{ \psi_2^2(s) \right\}. \end{aligned}$$

2. $i_1 \neq 0, i_2 = 0$:

$$\begin{aligned} \mathbb{M} \left\{ (S_1^N)^2 \right\} &\leq \frac{\Delta}{2} (T-t)^2 \sup_{s \in [t, T]} \left\{ \psi_2^2(s) \psi_1^2(s) \right\}, \\ \mathbb{M} \left\{ (S_2^N)^2 \right\} &\leq \frac{\Delta^2}{3} (T-t)^3 (C_2)^2 \sup_{s \in [t, T]} \left\{ \psi_1^2(s) \right\}, \\ \mathbb{M} \left\{ (S_3^N)^2 \right\} &\leq \frac{\Delta^2}{3} (T-t)^3 (C_1)^2 \sup_{s \in [t, T]} \left\{ \psi_2^2(s) \right\}. \end{aligned}$$

3. $i_2 \neq 0, i_1 = 0$:

$$\begin{aligned} \mathbb{M} \left\{ (S_1^N)^2 \right\} &\leq \frac{\Delta^2}{3} (T-t) \sup_{s \in [t, T]} \left\{ \psi_2^2(s) \psi_1^2(s) \right\}, \\ \mathbb{M} \left\{ (S_2^N)^2 \right\} &\leq \frac{\Delta^2}{3} (T-t)^3 (C_2)^2 \sup_{s \in [t, T]} \left\{ \psi_1^2(s) \right\}, \\ \mathbb{M} \left\{ (S_3^N)^2 \right\} &\leq \frac{\Delta^2}{8} (T-t)^3 (C_1)^2 \sup_{s \in [t, T]} \left\{ \psi_2^2(s) \right\}. \end{aligned}$$

4. $i_1 = i_2 = 0$:

$$\begin{aligned} \mathbb{M} \left\{ (S_1^N)^2 \right\} &\leq \frac{\Delta^2}{4} (T-t)^2 \sup_{s \in [t, T]} \left\{ \psi_2^2(s) \psi_1^2(s) \right\}, \\ \mathbb{M} \left\{ (S_2^N)^2 \right\} &\leq \frac{\Delta^2}{4} (T-t)^4 (C_2)^2 \sup_{s \in [t, T]} \left\{ \psi_1^2(s) \right\}, \\ \mathbb{M} \left\{ (S_3^N)^2 \right\} &\leq \frac{\Delta^2}{16} (T-t)^4 (C_1)^2 \sup_{s \in [t, T]} \left\{ \psi_2^2(s) \right\}. \end{aligned}$$

Согласно полученным оценкам и условию (6.106) имеем

$$\mathbb{M} \left\{ \left(J[\psi^{(k)}]_{T,t} - J[\psi^{(k)}]_{T,t}^N \right)^2 \right\} \leq H_k (T-t) \Delta = \frac{H_k (T-t)^2}{N},$$

где $H_k < \infty$. Теорема доказана. $\square$

Пример 6.8. Показать, что справедливо следующее соотношение:

$$\mathbb{M} \left\{ \left(I_{00_{T,t}}^{(i_2 i_1)} - I_{00_{T,t}}^{(i_2 i_1)N} \right)^2 \right\} = \frac{(T-t)^2}{2N}, \quad (6.111)$$

где $i_1, i_2 = 1, \dots, m$, а $I_{00_{T,t}}^{(i_2 i_1)N}$ — аппроксимация стохастического интеграла $I_{00_{T,t}}^{(i_2 i_1)}$ вида (6.2), полученная по формуле (6.110).

Напомним, что метод, основанный на кратных интегральных суммах, сходится в среднеквадратическом смысле гораздо медленнее, чем метод, основанный на кратных рядах Фурье (см. (6.111), (6.54), (6.38)).

6.5 Численные эксперименты об эффективности применения полиномиальных и тригонометрических функций, интегральных сумм к сильной аппроксимации повторных стохастических интегралов

В данном разделе сравним эффективность применения полиномиальных и тригонометрических функций при аппроксимации повторных стохастических интегралов. Кроме того, сравним эффективность использования методов, основанных на кратных рядах Фурье и кратных интегральных суммах.

Рассмотрим стохастические интегралы $I_{0_{T,t}}^{*(1)}$, $I_{00_{T,t}}^{*(21)}$, которые могут встретиться, например, при реализации сильного численного метода порядка точности 1.0 (см. главу 7). Аппроксимируем их сначала с помощью тригонометрической системы функций (формулы (6.47), (6.49)), а затем с помощью полиномов Лежандра (формулы (6.30), (6.33)). Число $q = q_{\text{trig}}$ в первом случае выберем из условия

$$\frac{(T-t)^2}{2\pi^2} \left(\frac{\pi^2}{6} - \sum_{r=1}^{q_{\text{trig}}} \frac{1}{r^2} \right) \leq \varepsilon, \quad (6.112)$$

а число $q = q_{\text{pol}}$ во втором случае — из условия

$$\frac{(T-t)^2}{2} \left(\frac{1}{2} - \sum_{i=1}^{q_{\text{pol}}} \frac{1}{4i^2 - 1} \right) \leq \varepsilon, \quad (6.113)$$

где q_{trig} и q_{pol} — минимальные натуральные числа, удовлетворяющие условиям (6.112) и (6.113) соответственно.

Таблица 6.34. Значения q_{trig} , q_{pol} , T_{trig}^* , T_{pol}^* .

$T - t$	2^{-5}	2^{-6}	2^{-7}	2^{-8}	2^{-9}	2^{-10}
q_{trig}	3	4	7	14	27	53
q_{pol}	5	9	17	33	65	129
T_{trig}^* , с	4	5	7	10	16	30
T_{pol}^* , с	3	4	7	13	23	45

В табл. 6.34 приведены значения q_{trig} , q_{pol} при $\varepsilon = (T-t)^3$, $T-t = 2^{-j}$, $j = 5, 6, \dots, 10$. Значения T_{trig}^* , T_{pol}^* соответствуют компьютерному времени, затраченному на 200 независимых моделирований интегралов $I_{0T,t}^{*(1)}$, $I_{00T,t}^{*(12)}$ по формулам (6.47), (6.49) при $q = q_{\text{trig}}$ и по формулам (6.30), (6.33) при $q = q_{\text{pol}}$. При этом каждое фиксированное моделирование по формулам (6.47), (6.49) и (6.30), (6.33) отвечает одной и той же реализации последовательности независимых стандартных гауссовских случайных величин.

Из результатов, приведенных в табл. 6.34, видно, что при $T-t > 2^{-7}$ полиномиальная система оказывается чуть лучше тригонометрической по затратам компьютерного времени. Однако уже при $T-t \leq 2^{-8}$ использование тригонометрической системы дает выигрыш. Это очевидно связано с тем, что значения чисел q_{pol} возрастают настолько быстрее значений чисел q_{trig} при уменьшении $T-t$, что, несмотря на более простой вид формулы (6.33) по сравнению с (6.49), вычислительные затраты в случае тригонометрической системы функций оказываются меньше, чем в случае полиномиальной системы при $T-t \leq 2^{-8}$.

Рассмотрим стохастические интегралы

$$I_{0T,t}^{*(i_1)}, I_{1T,t}^{*(i_1)}, I_{00T,t}^{*(i_2i_1)}, I_{000T,t}^{*(i_3i_2i_1)}; i_1, i_2, i_3 = 1, \dots, m, \quad (6.114)$$

которые могут встретиться, например, при реализации сильного численного метода порядка точности 1.5 (см. главу 7).

Приведем численный результат, который позволяет видеть, что при моделировании набора стохастических интегралов, необходимого для реализации сильного численного метода порядка точности 1.5 (см. главу 7), полиномиальная система функций дает выигрыш более чем в два раза в компьютерном времени в сравнении с тригонометрической системой функций, по крайней мере, при не очень малых $T-t$.

Рассмотрим набор стохастических интегралов $I_{00T,t}^{*(21)}$, $I_{000T,t}^{*(321)}$. В случае полиномиальной системы функций будем искать числа q, q_1 в ап-

проксимациях $I_{00T,t}^{*(21)q}$, $I_{000T,t}^{*(321)q_1}$, определяемых формулами (6.33), (6.36), исходя из следующих условий:

$$\frac{(T-t)^2}{2} \left(\frac{1}{2} - \sum_{i=1}^q \frac{1}{4i^2 - 1} \right) \leq (T-t)^4, \quad (6.115)$$

$$(T-t)^3 \left(\frac{1}{6} - \sum_{i,j,k=0}^{q_1} \frac{(C_{ijk})^2}{(T-t)^3} \right) \leq (T-t)^4, \quad (6.116)$$

где

$$C_{ijk} = \frac{\sqrt{(2i+1)(2j+1)(2k+1)}}{8} (T-t)^{3/2} \bar{C}_{ijk};$$

$$\bar{C}_{ijk} = \int_{-1}^1 \int_{-1}^z \int_{-1}^y P_k(x) dx P_j(y) dy P_i(z) dz;$$

$P_i(x)$ — полином Лежандра.

В случае тригонометрической системы функций воспользуемся формулами (6.49), (6.50) при $i_3 = 3$, $i_2 = 2$, $i_1 = 1$, а числа q , q_1 будем искать из условий:

$$\mathbb{M} \left\{ \left(I_{00T,t}^{*(i_2 i_1)} - I_{00T,t}^{*(i_2 i_1)q} \right)^2 \right\} = \frac{(T-t)^2}{2\pi^2} \left(\frac{\pi^2}{6} - \sum_{r=1}^q \frac{1}{r^2} \right) \leq \varepsilon, \quad (6.117)$$

$$\begin{aligned} \mathbb{M} \left\{ \left(I_{000T,t}^{*(i_3 i_2 i_1)} - I_{000T,t}^{*(i_3 i_2 i_1)q, q_1} \right)^2 \right\} = (T-t)^3 \left\{ \frac{4}{45} - \frac{1}{4\pi^2} \sum_{r=1}^{q_1} \frac{1}{r^2} - \right. \\ \left. - \frac{55}{32\pi^4} \sum_{r=1}^{q_1} \frac{1}{r^4} - \frac{1}{4\pi^4} \sum_{\substack{r,l=1 \\ r \neq l}}^{q_1} \frac{5l^4 + 4r^4 - 3r^2 l^2}{r^2 l^2 (r^2 - l^2)^2} \right\} \leq \varepsilon. \end{aligned} \quad (6.118)$$

В табл. 6.35 приведены минимальные значения чисел q , q_1 , удовлетворяющие условиям (6.115), (6.116) при различных значениях $T-t$. В табл. 6.36 даны значения тех же чисел для условий (6.117), (6.118) при $\varepsilon = (T-t)^4$.

Смоделируем независимо по 100 раз для различных значений $T-t$ набор стохастических интегралов $I_{00T,t}^{*(21)}$, $I_{000T,t}^{*(321)}$, определяемых с помощью формул (6.33), (6.36), полученных с применением полиномиальной системы функций. В табл. 6.35 приведены значения компьютерного времени T_{100}^* , затраченного на решение данной задачи при различных

Таблица 6.35. Значения $q, q_1, T_{100}^*, \tilde{T}_{100}^*$ (полиномиальная система).

$T - t$	0.08222	0.05020	0.02310	0.01956
q	19	51	235	328
q_1	1	2	5	6
$T_{100}^*, \text{ с}$	5	12	52	73
$\tilde{T}_{100}^*, \text{ с}$	13.5	36	181	225

Таблица 6.36. Значения $q, q_1, T_{100}^*, \tilde{T}_{100}^*$ (тригонометрическая система).

$T - t$	0.08222	0.05020	0.02310	0.01956
q	8	21	96	133
q_1	1	1	3	4
$T_{100}^*, \text{ с}$	12	24.5	105	148
$\tilde{T}_{100}^*, \text{ с}$	44	88	411	660

значениях $T - t$. Повторим данный численный эксперимент для аппроксимаций (6.49), (6.50) при $i_3 = 3, i_2 = 2, i_1 = 1$, полученных с помощью тригонометрической системы функций. Его результаты помещены в табл. 6.36.

Сравнивая полученные результаты, приходим к выводу, что в рамках численного эксперимента при моделировании соответствующей совокупности стохастических интегралов полиномиальная система функций дает выигрыш в два раза по компьютерному времени в сравнении с тригонометрической системой функций.

Выпишем в явном виде аппроксимации $I_{000T,t}^{*(321)q}$ (6.39) при $q = 1, 2, 5, 6$, учитывая их практическую важность:

$$I_{000T,t}^{*(123)1} = (T - t)^{\frac{3}{2}} \left[\left(\left(\frac{1}{6} \zeta_0^{(1)} - \frac{1}{4\sqrt{3}} \zeta_1^{(1)} \right) \zeta_0^{(2)} + \frac{1}{20} \zeta_1^{(1)} \zeta_1^{(2)} \right) \zeta_0^{(3)} + \right. \\ \left. + \left(\left(\frac{1}{4\sqrt{3}} \zeta_0^{(1)} - \frac{1}{10} \zeta_1^{(1)} \right) \zeta_0^{(2)} + \frac{1}{20} \zeta_0^{(1)} \zeta_1^{(2)} \right) \zeta_1^{(3)} \right],$$

$$I_{000T,t}^{*(123)2} = (T - t)^{\frac{3}{2}} \left[\left\{ \left(\frac{1}{6} \zeta_0^{(1)} - \frac{1}{4\sqrt{3}} \zeta_1^{(1)} + \frac{1}{12\sqrt{5}} \zeta_2^{(1)} \right) \zeta_0^{(2)} + \right. \right.$$

$$\begin{aligned}
& + \left(\frac{1}{20} \zeta_1^{(1)} - \frac{1}{4\sqrt{15}} \zeta_2^{(1)} \right) \zeta_1^{(2)} + \left(-\frac{1}{6\sqrt{5}} \zeta_0^{(1)} + \frac{1}{4\sqrt{15}} \zeta_1^{(1)} + \frac{1}{84} \zeta_2^{(1)} \right) \zeta_2^{(2)} \Big\} \zeta_0^{(3)} + \\
& + \left\{ \left(\frac{1}{4\sqrt{3}} \zeta_0^{(1)} - \frac{1}{10} \zeta_1^{(1)} \right) \zeta_0^{(2)} + \left(\frac{1}{20} \zeta_0^{(1)} - \frac{1}{14\sqrt{5}} \zeta_2^{(1)} \right) \zeta_1^{(2)} + \right. \\
& \quad \left. + \left(-\frac{1}{4\sqrt{15}} \zeta_0^{(1)} + \frac{1}{7\sqrt{5}} \zeta_1^{(1)} \right) \zeta_2^{(2)} \right\} \zeta_1^{(3)} + \\
& + \left\{ \left(\frac{1}{12\sqrt{5}} \zeta_0^{(1)} - \frac{1}{42} \zeta_2^{(1)} \right) \zeta_0^{(2)} + \left(\frac{1}{4\sqrt{15}} \zeta_0^{(1)} - \frac{1}{14\sqrt{5}} \zeta_1^{(1)} \right) \zeta_1^{(2)} + \right. \\
& \quad \left. + \frac{1}{84} \zeta_0^{(1)} \zeta_2^{(2)} \right\} \zeta_2^{(3)} \Big],
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
I_{000T,t}^{*(123)5} &= I_{000T,t}^{*(123)2} + (T-t)^{\frac{3}{2}} \Big[\left\{ \frac{1}{10\sqrt{21}} \zeta_3^{(1)} \zeta_1^{(2)} + \right. \\
& \quad \left. + \left(-\frac{1}{4\sqrt{35}} \zeta_3^{(1)} + \frac{1}{28\sqrt{5}} \zeta_4^{(1)} \right) \zeta_2^{(2)} + \right. \\
& \quad + \left(-\frac{\sqrt{3}}{20\sqrt{7}} \zeta_1^{(1)} + \frac{1}{4\sqrt{35}} \zeta_2^{(1)} + \frac{1}{180} \zeta_3^{(1)} - \frac{1}{12\sqrt{7}} \zeta_4^{(1)} + \frac{1}{9\sqrt{77}} \zeta_5^{(1)} \right) \zeta_3^{(2)} + \\
& \quad + \left(-\frac{1}{21\sqrt{5}} \zeta_2^{(1)} + \frac{1}{12\sqrt{7}} \zeta_3^{(1)} + \frac{1}{308} \zeta_4^{(1)} - \frac{1}{12\sqrt{11}} \zeta_5^{(1)} \right) \zeta_4^{(2)} + \\
& \quad \left. + \left(-\frac{5}{36\sqrt{77}} \zeta_3^{(1)} + \frac{1}{12\sqrt{11}} \zeta_4^{(1)} + \frac{1}{468} \zeta_5^{(1)} \right) \zeta_5^{(2)} \right\} \zeta_0^{(3)} + \\
& + \left\{ \frac{1}{20\sqrt{21}} \zeta_3^{(1)} \zeta_0^{(2)} + \frac{1}{140} \zeta_4^{(1)} \zeta_1^{(2)} + \left(-\frac{1}{12\sqrt{5}} \zeta_3^{(1)} + \frac{1}{14\sqrt{165}} \zeta_5^{(1)} \right) \zeta_2^{(2)} + \right. \\
& \quad + \left(\frac{\sqrt{3}}{20\sqrt{7}} \zeta_0^{(1)} + \frac{1}{3\sqrt{105}} \zeta_2^{(1)} - \frac{19}{220\sqrt{21}} \zeta_4^{(1)} \right) \zeta_3^{(2)} + \\
& \quad + \left(-\frac{1}{70} \zeta_1^{(1)} + \frac{23}{220\sqrt{21}} \zeta_3^{(1)} - \frac{8}{91\sqrt{33}} \zeta_5^{(1)} \right) \zeta_4^{(2)} + \\
& \quad \left. + \left(-\frac{\sqrt{5}}{42\sqrt{33}} \zeta_2^{(1)} + \frac{37}{364\sqrt{33}} \zeta_4^{(1)} \right) \zeta_5^{(2)} \right\} \zeta_1^{(3)} + \\
& + \left\{ \left(\frac{1}{84\sqrt{5}} \zeta_2^{(1)} - \frac{1}{154} \zeta_4^{(1)} \right) \zeta_0^{(2)} + \left(\frac{1}{180} \zeta_1^{(1)} - \frac{1}{55\sqrt{21}} \zeta_3^{(1)} - \frac{5\sqrt{3}}{364} \zeta_5^{(1)} \right) \zeta_1^{(2)} + \right.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \left(\frac{1}{28\sqrt{5}}\zeta_0^{(1)} - \frac{1}{132}\zeta_2^{(1)} + \frac{1}{286\sqrt{5}}\zeta_4^{(1)} \right) \zeta_2^{(2)} + \\
& + \left(\frac{1}{12\sqrt{7}}\zeta_0^{(1)} - \frac{19}{220\sqrt{21}}\zeta_1^{(1)} + \frac{2}{2145}\zeta_3^{(1)} + \frac{1}{156\sqrt{77}}\zeta_5^{(1)} \right) \zeta_3^{(2)} + \\
& + \left(\frac{1}{308}\zeta_0^{(1)} - \frac{1}{572\sqrt{5}}\zeta_2^{(1)} \right) \zeta_4^{(2)} + \\
& + \left(-\frac{1}{12\sqrt{11}}\zeta_0^{(1)} + \frac{37}{364\sqrt{33}}\zeta_1^{(1)} - \frac{1}{78\sqrt{77}}\zeta_3^{(1)} - \frac{1}{18564}\zeta_5^{(1)} \right) \zeta_5^{(2)} \Big\} \zeta_4^{(3)} + \\
& + \left\{ \left(\frac{1}{36\sqrt{77}}\zeta_3^{(1)} - \frac{1}{234}\zeta_5^{(1)} \right) \zeta_0^{(2)} + \left(\frac{1}{21\sqrt{165}}\zeta_2^{(1)} - \frac{5}{364\sqrt{33}}\zeta_4^{(1)} \right) \zeta_1^{(2)} + \right. \\
& + \left(\frac{1}{14\sqrt{165}}\zeta_1^{(1)} - \frac{37}{468\sqrt{385}}\zeta_3^{(1)} + \frac{2}{819\sqrt{5}}\zeta_5^{(1)} \right) \zeta_2^{(2)} + \\
& + \left(\frac{1}{9\sqrt{77}}\zeta_0^{(1)} - \frac{29}{234\sqrt{385}}\zeta_2^{(1)} + \frac{1}{156\sqrt{77}}\zeta_4^{(1)} \right) \zeta_3^{(2)} + \\
& + \left(\frac{1}{12\sqrt{11}}\zeta_0^{(1)} - \frac{8}{91\sqrt{33}}\zeta_1^{(1)} + \frac{1}{156\sqrt{77}}\zeta_3^{(1)} + \frac{1}{9282}\zeta_5^{(1)} \right) \zeta_4^{(2)} + \\
& + \left(\frac{1}{468}\zeta_0^{(1)} - \frac{1}{819\sqrt{5}}\zeta_2^{(1)} - \frac{1}{18564}\zeta_4^{(1)} \right) \zeta_5^{(2)} \Big\} \zeta_5^{(3)} + \\
& + \left\{ \left(\frac{1}{20\sqrt{21}}\zeta_1^{(1)} - \frac{1}{90}\zeta_3^{(1)} + \frac{1}{36\sqrt{77}}\zeta_5^{(1)} \right) \zeta_0^{(2)} + \right. \\
& + \left(\frac{1}{10\sqrt{21}}\zeta_0^{(1)} - \frac{1}{12\sqrt{105}}\zeta_2^{(1)} - \frac{1}{55\sqrt{21}}\zeta_4^{(1)} \right) \zeta_1^{(2)} + \\
& + \left(\frac{1}{4\sqrt{35}}\zeta_0^{(1)} - \frac{1}{12\sqrt{5}}\zeta_1^{(1)} + \frac{1}{186\sqrt{5}}\zeta_3^{(1)} - \frac{37}{468\sqrt{385}}\zeta_5^{(1)} \right) \zeta_2^{(2)} + \\
& + \left(\frac{1}{180}\zeta_0^{(1)} - \frac{1}{372\sqrt{5}}\zeta_2^{(1)} + \frac{2}{2145}\zeta_4^{(1)} \right) \zeta_3^{(2)} + \\
& + \left(-\frac{1}{12\sqrt{7}}\zeta_0^{(1)} + \frac{23}{220\sqrt{21}}\zeta_1^{(1)} - \frac{4}{2145}\zeta_3^{(1)} + \frac{1}{156\sqrt{77}}\zeta_5^{(1)} \right) \zeta_4^{(2)} + \\
& + \left(-\frac{5}{36\sqrt{77}}\zeta_0^{(1)} + \frac{19\sqrt{5}}{468\sqrt{77}}\zeta_2^{(1)} - \frac{1}{78\sqrt{77}}\zeta_4^{(1)} \right) \zeta_5^{(2)} \Big\} \zeta_5^{(3)} + \\
& + \left\{ \frac{1}{84\sqrt{5}}\zeta_4^{(1)}\zeta_0^{(2)} + \left(-\frac{1}{12\sqrt{105}}\zeta_3^{(1)} + \frac{1}{21\sqrt{165}}\zeta_5^{(1)} \right) \zeta_1^{(2)} - \frac{1}{132}\zeta_4^{(1)}\zeta_2^{(2)} + \right. \\
& + \left(-\frac{1}{4\sqrt{35}}\zeta_0^{(1)} + \frac{1}{3\sqrt{105}}\zeta_1^{(1)} - \frac{1}{372\sqrt{5}}\zeta_3^{(1)} - \frac{29}{234\sqrt{385}}\zeta_5^{(1)} \right) \zeta_3^{(2)}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \left(-\frac{1}{21\sqrt{5}}\zeta_0^{(1)} + \frac{1}{66}\zeta_2^{(1)} - \frac{1}{572\sqrt{5}}\zeta_4^{(1)} \right) \zeta_4^{(2)} + \\
& + \left(-\frac{\sqrt{5}}{42\sqrt{33}}\zeta_1^{(1)} + \frac{19\sqrt{5}}{468\sqrt{77}}\zeta_3^{(1)} - \frac{1}{819\sqrt{5}}\zeta_5^{(1)} \right) \zeta_5^{(2)} \Big\} \zeta_2^{(3)} \Big],
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
I_{000_{T,t}}^{*(123)6} = I_{000_{T,t}}^{*(123)5} & + (T-t)^{\frac{3}{2}} \left[\left\{ \left(\frac{1}{132\sqrt{13}}\zeta_4^{(1)} - \frac{1}{330}\zeta_6^{(1)} \right) \zeta_0^{(2)} + \right. \right. \\
& + \left(\frac{5}{132\sqrt{273}}\zeta_3^{(1)} - \frac{1}{30\sqrt{429}}\zeta_5^{(1)} \right) \zeta_1^{(2)} + \\
& + \left(\frac{5}{462\sqrt{13}}\zeta_2^{(1)} - \frac{19}{924\sqrt{65}}\zeta_4^{(1)} + \frac{1}{561\sqrt{5}}\zeta_6^{(1)} \right) \zeta_2^{(2)} + \\
& + \left(\frac{5}{66\sqrt{273}}\zeta_1^{(1)} - \frac{5}{396\sqrt{13}}\zeta_3^{(1)} + \frac{\sqrt{143}}{8415\sqrt{7}}\zeta_5^{(1)} \right) \zeta_3^{(2)} + \\
& + \left(\frac{5}{132\sqrt{13}}\zeta_0^{(1)} - \frac{2\sqrt{5}}{231\sqrt{13}}\zeta_2^{(1)} + \frac{1}{476\sqrt{13}}\zeta_4^{(1)} + \frac{1}{9690}\zeta_6^{(1)} \right) \zeta_4^{(2)} + \\
& + \left(\frac{1}{4\sqrt{143}}\zeta_0^{(1)} - \frac{4}{15\sqrt{429}}\zeta_1^{(1)} + \frac{1}{510\sqrt{1001}}\zeta_3^{(1)} + \frac{1}{5814\sqrt{13}}\zeta_5^{(1)} \right) \zeta_5^{(2)} + \\
& + \left(\frac{1}{660}\zeta_0^{(1)} + \frac{1}{1122\sqrt{5}}\zeta_2^{(1)} - \frac{1}{19380}\zeta_4^{(1)} \right) \zeta_6^{(2)} \Big\} \zeta_6^{(3)} + \\
& + \left\{ \left(-\frac{1}{22\sqrt{13}}\zeta_4^{(1)} + \frac{1}{4\sqrt{143}}\zeta_5^{(1)} + \frac{1}{660}\zeta_6^{(1)} \right) \zeta_6^{(2)} + \right. \\
& + \left(\frac{5}{132\sqrt{13}}\zeta_4^{(2)} - \frac{1}{4\sqrt{143}}\zeta_5^{(2)} \right) \zeta_6^{(1)} \Big\} \zeta_0^{(3)} + \\
& + \left\{ \left(-\frac{5}{44\sqrt{273}}\zeta_1^{(1)} + \frac{5}{198\sqrt{13}}\zeta_3^{(1)} - \frac{113}{3060\sqrt{1001}}\zeta_5^{(1)} \right) \zeta_6^{(2)} + \right. \\
& + \left(\frac{5}{2132\sqrt{273}}\zeta_1^{(2)} - \frac{5}{396\sqrt{13}}\zeta_3^{(2)} + \frac{61}{3060\sqrt{1001}}\zeta_5^{(2)} \right) \zeta_6^{(1)} \Big\} \zeta_3^{(3)} + \\
& + \left\{ \left(-\frac{1}{22\sqrt{13}}\zeta_0^{(1)} + \frac{59}{924\sqrt{65}}\zeta_2^{(1)} - \frac{1}{238\sqrt{13}}\zeta_4^{(1)} - \frac{1}{19380}\zeta_6^{(1)} \right) \zeta_6^{(2)} + \right. \\
& + \left(\frac{1}{132\sqrt{13}}\zeta_0^{(2)} - \frac{19}{924\sqrt{65}}\zeta_2^{(2)} + \frac{1}{476\sqrt{13}}\zeta_4^{(2)} \right) \zeta_6^{(1)} \Big\} \zeta_4^{(3)} + \\
& + \left\{ \left(-\frac{5}{44\sqrt{273}}\zeta_3^{(1)} + \frac{\sqrt{3}}{10\sqrt{143}}\zeta_5^{(1)} \right) \zeta_6^{(2)} + \right.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \left(\frac{5}{66\sqrt{273}} \zeta_3^{(2)} - \frac{4}{15\sqrt{429}} \zeta_5^{(2)} \right) \zeta_6^{(1)} \Big\} \zeta_1^{(3)} + \\
& + \left\{ \left(-\frac{5}{231\sqrt{13}} \zeta_2^{(1)} + \frac{59}{924\sqrt{65}} \zeta_4^{(1)} - \frac{1}{1122\sqrt{5}} \zeta_6^{(1)} \right) \zeta_6^{(2)} + \right. \\
& + \left(\frac{5}{462\sqrt{13}} \zeta_2^{(2)} - \frac{2\sqrt{5}}{231\sqrt{13}} \zeta_4^{(2)} \right) \zeta_6^{(1)} \Big\} \zeta_2^{(3)} + \\
& + \left\{ \left(-\frac{1}{4\sqrt{143}} \zeta_0^{(1)} + \frac{\sqrt{3}}{10\sqrt{143}} \zeta_1^{(1)} - \frac{113}{3060\sqrt{1001}} \zeta_3^{(1)} - \frac{1}{2907\sqrt{13}} \zeta_5^{(1)} \right) \zeta_6^{(2)} + \right. \\
& + \left. \left(\frac{1}{30\sqrt{429}} \zeta_1^{(2)} + \frac{\sqrt{143}}{8415\sqrt{7}} \zeta_3^{(2)} + \frac{1}{5814\sqrt{13}} \zeta_5^{(2)} \right) \zeta_6^{(1)} \Big\} \zeta_5^{(3)} \right].
\end{aligned}$$

Покажем, что на практике в некоторых ситуациях преимущество полиномиальной системы функций перед тригонометрической по компьютерному времени на моделирование совокупностей повторных стохастических интегралов оказывается еще более выразительным.

Дело в том, что при решении практических задач часто приходится на каждом шаге интегрирования моделировать по несколько однотипных стохастических интегралов, взятых при различных сочетаниях верхних индексов. При этом полезно "сокращать" общее число моделируемых интегралов с помощью соотношений

$$\begin{aligned}
I_{00T,t}^{*(i_1 i_2)} + I_{00T,t}^{*(i_2 i_1)} &= I_{0T,t}^{*(i_1)} I_{0T,t}^{*(i_2)} \text{ с в.1,} \\
I_{000T,t}^{*(i_1 i_2 i_3)} + I_{000T,t}^{*(i_1 i_3 i_2)} + I_{000T,t}^{*(i_2 i_1 i_3)} + I_{000T,t}^{*(i_2 i_3 i_1)} + \\
+ I_{000T,t}^{*(i_3 i_2 i_1)} + I_{000T,t}^{*(i_3 i_1 i_2)} &= I_{0T,t}^{*(i_1)} I_{0T,t}^{*(i_2)} I_{0T,t}^{*(i_3)} \text{ с в.1,}
\end{aligned}$$

где i_1, i_2, i_3 — попарно различны; $i_1, i_2, i_3 \in \{1, \dots, m\}$.

В соответствии со сказанным рассмотрим следующую совокупность стохастических интегралов:

$$\begin{aligned}
& I_{0T,t}^{*(i)}, \quad I_{1T,t}^{*(i)}, \quad I_{00T,t}^{*(12)}, \quad I_{00T,t}^{*(13)}, \quad I_{00T,t}^{*(23)}, \\
& I_{000T,t}^{*(123)}, \quad I_{000T,t}^{*(132)}, \quad I_{000T,t}^{*(213)}, \quad I_{000T,t}^{*(231)}, \quad I_{000T,t}^{*(312)}, \quad i = 1, 2, 3.
\end{aligned} \tag{6.119}$$

Смоделируем независимо по 100 раз при различных значениях $T - t$ набор стохастических интегралов (6.119) с использованием формул (6.30), (6.31), (6.33), (6.36). В табл. 6.35 приведены значения времени T_{100}^* , затраченного на решение данной задачи при различных значениях

Таблица 6.37. Значения q и T_{sum}^* (метод интегральных сумм).

$T - t$	2^{-5}	2^{-6}	2^{-7}
q	16	32	64
$T_{\text{sum}}^*, \text{ с}$	26	93	391

$T - t$. Повторим данный численный эксперимент с помощью аппроксимаций (6.47)–(6.50).

Его результаты помещены в табл. 6.36.

Сравнивая полученные численные результаты можно заметить, что в данном случае полиномиальная система функций дает выигрыш в три раза по компьютерному времени при моделировании совокупности повторных стохастических интегралов.

В заключение покажем, что по вычислительным затратам на моделирование совокупности повторных стохастических интегралов метод, основанный на кратных рядах Фурье, вне конкуренции перед методом, основанным на кратных интегральных суммах.

Рассмотрим аппроксимации повторных стохастических интегралов Ито, полученные с помощью метода, основанного на кратных интегральных суммах:

$$I_{0T,t}^{(1)q} = \sqrt{\Delta} \sum_{j=0}^{q-1} \xi_j^{(1)}, \quad (6.120)$$

$$I_{00T,t}^{(21)q} = \Delta \sum_{j=0}^{q-1} \xi_j^{(2)} \sum_{i=0}^{j-1} \xi_i^{(1)}, \quad (6.121)$$

где $\xi_j^{(i)} = (\mathbf{f}_{t+(j+1)\Delta}^{(i)} - \mathbf{f}_{t+j\Delta}^{(i)})/\sqrt{\Delta}$, $i = 1, 2$, — независимые стандартные гауссовские случайные величины; $\Delta = (T - t)/q$; $I_{00T,t}^{(21)q}$, $I_{0T,t}^{(1)q}$ — аппроксимации интегралов $I_{00T,t}^{(21)}$, $I_{0T,t}^{(1)}$. Число q , входящее в (6.120), (6.121), выбираем из условия

$$\mathbb{M} \left\{ \left(I_{00T,t}^{(21)} - I_{00T,t}^{(21)q} \right)^2 \right\} = \frac{(T - t)^2}{2q} \leq (T - t)^3.$$

Выполним по 200 независимых моделирований совокупности стохастических интегралов $I_{00T,t}^{(21)}$, $I_{0T,t}^{(1)}$ с помощью формул (6.120), (6.121) при $T - t = 2^{-j}$, $j = 5, 6, 7$. В табл. 6.37 приведено время T_{sum}^* , которое потребовалось для выполнения данной задачи.

Сравнивая табл. 6.34 и 6.37 приходим к выводу, что метод, основанный на кратных интегральных суммах, уже при $T - t = 2^{-7}$ более, чем в 50 раз хуже по компьютерному времени на моделирование совокупности стохастических интегралов $I_{00T,t}^{(21)}$, $I_{0T,t}^{(1)}$, чем метод, основанный на кратных рядах Фурье.

Приведенные численные эксперименты позволяют получить лишь некоторое поверхностное представление о "хороших" и "плохих" численных методах, однако вполне определенная картина вырисовывается.

6.6 Повторные стохастические интегралы как решения систем линейных стохастических дифференциальных уравнений

Г. Н. Мильштейном [70] предложен подход к численному моделированию повторных стохастических интегралов, основанный на их представлении в виде систем линейных стохастических дифференциальных уравнений. Рассмотрим данный подход на примере совокупности повторных стохастических интегралов Ито вида

$$I_{0s,t}^{(i_1)} = \int_t^s d\mathbf{f}_\tau^{(i_1)}, \quad I_{00s,t}^{(i_1 i_2)} = \int_t^s \int_t^\tau d\mathbf{f}_\theta^{(i_1)} d\mathbf{f}_\tau^{(i_2)}, \quad (6.122)$$

где $i_1, i_2 = 1, \dots, m$; $0 \leq t < s \leq T$; $\mathbf{f}_\tau^{(i)}$, $i = 1, \dots, m$, — независимые стандартные винеровские процессы.

Далее имеем следующее представление:

$$d \begin{pmatrix} I_{0s,t}^{(i_1)} \\ I_{00s,t}^{(i_1 i_2)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_{0s,t}^{(i_1)} \\ I_{00s,t}^{(i_1 i_2)} \end{pmatrix} d\mathbf{f}_s^{(i_2)} + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} d \begin{pmatrix} \mathbf{f}_s^{(i_1)} \\ \mathbf{f}_s^{(i_2)} \end{pmatrix}. \quad (6.123)$$

В главе 11 будет показано (см. также [86]), что решение системы (6.123) может быть представлено в следующей интегральной форме:

$$\begin{pmatrix} I_{0s,t}^{(i_1)} \\ I_{00s,t}^{(i_1 i_2)} \end{pmatrix} = \int_t^s e^{\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} (\mathbf{f}_s^{(i_2)} - \mathbf{f}_\theta^{(i_2)})} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} d \begin{pmatrix} \mathbf{f}_\theta^{(i_1)} \\ \mathbf{f}_\theta^{(i_2)} \end{pmatrix}, \quad (6.124)$$

где e^A — матричная экспонента: $e^A \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^k}{k!}$; A — квадратная матрица; $A^0 \stackrel{\text{def}}{=} I$ — единичная матрица.

Численное моделирование правой части (6.124) является едва ли более простой задачей, чем совместное численное моделирование совокупности стохастических интегралов (6.122). Поэтому численное моделирование совокупности (6.122) приходится осуществлять в рамках данного подхода путем численного интегрирования системы линейных стохастических дифференциальных уравнений (6.123). Эту процедуру можно реализовать, например, с помощью сильного метода Эйлера (см. главу 7). Отметим, что выражения более точных сильных численных методов для системы (6.123) содержат повторные стохастические интегралы, численному моделированию которых и посвящен рассматриваемый подход (см. главы 7–9).

Пусть $\{\tau_j\}_{j=0}^N$ — разбиение промежутка $[t, s]$, для которого $\tau_j = t + j\Delta$, $j = 0, 1, \dots, N$, $\tau_N = s$. Запишем явный метод Эйлера (см. главу 7) для системы линейных стохастических дифференциальных уравнений (6.123):

$$\begin{pmatrix} \mathbf{y}_{p+1}^{(i_1)} \\ \mathbf{y}_{p+1}^{(i_1 i_2)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{y}_p^{(i_1)} \\ \mathbf{y}_p^{(i_1 i_2)} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \Delta \mathbf{f}_{\tau_p}^{(i_1)} \\ \mathbf{y}_p^{(i_1)} \Delta \mathbf{f}_{\tau_p}^{(i_2)} \end{pmatrix}, \mathbf{y}_0^{(i_1)} = 0, \mathbf{y}_0^{(i_1 i_2)} = 0, \quad (6.125)$$

где $\mathbf{y}_{\tau_p}^{(i_1)} \stackrel{\text{def}}{=} \mathbf{y}_p^{(i_1)}$; $\mathbf{y}_{\tau_p}^{(i_1 i_2)} \stackrel{\text{def}}{=} \mathbf{y}_p^{(i_1 i_2)}$ — аппроксимации повторных стохастических интегралов $I_{0\tau_p, t}^{(i_1)}$, $I_{00\tau_p, t}^{(i_1 i_2)}$, полученные с помощью численной схемы (6.125); $\Delta \mathbf{f}_{\tau_p}^{(i)} = \mathbf{f}_{\tau_{p+1}}^{(i)} - \mathbf{f}_{\tau_p}^{(i)}$, $i = 1, \dots, m$.

Итерируя выражение (6.125), имеем

$$\mathbf{y}_N^{(i_1)} = \sum_{l=0}^{N-1} \Delta \mathbf{f}_{\tau_l}^{(i_1)}, \quad (6.126)$$

$$\mathbf{y}_N^{(i_1 i_2)} = \sum_{q=0}^{N-1} \sum_{l=0}^{q-1} \Delta \mathbf{f}_{\tau_l}^{(i_1)} \Delta \mathbf{f}_{\tau_q}^{(i_2)}, \quad (6.127)$$

где $\sum_{\emptyset} \stackrel{\text{def}}{=} 0$. Формулы (6.126), (6.127) являются не чем иным, как формулами для аппроксимаций повторных стохастических интегралов (6.122), полученными с помощью метода, основанного на кратных интегральных суммах.

Таким образом, эффективность методов сильной аппроксимации повторных стохастических интегралов, основанных на кратных интегральных суммах и численном интегрировании систем линейных стохастических дифференциальных уравнений методом Эйлера, оказывается одинаковой.

6.7 Комбинированный метод аппроксимации повторных стохастических интегралов

В данном разделе строится "гибрид" методов аппроксимации повторных стохастических интегралов, основанных на кратных рядах Фурье и кратных интегральных суммах (далее комбинированный метод). Показывается, что при сохранении определенного соотношения влияния одного метода на другой, удастся добиться некоторых преимуществ перед "чистым" применением метода, основанного на повторных рядах Фурье. А именно, выяснено, что комбинированный метод аппроксимации повторных стохастических интегралов позволяет заметно снизить общее количество коэффициентов кратных рядов Фурье, необходимых для аппроксимации рассматриваемого повторного стохастического интеграла (при этом точность аппроксимации остается такой же, а вычислительные затраты примерно такими же, как в методе кратных рядов Фурье).

6.7.1 Основные соотношения

Используя свойство аддитивности стохастического интеграла Ито можно записать:

$$I_{0T,t}^{(i_1)} = \sqrt{\Delta} \sum_{k=0}^{N-1} \zeta_{0,k}^{(i_1)} \text{ с в. 1,} \quad (6.128)$$

$$I_{1T,t}^{(i_1)} = \sum_{k=0}^{N-1} \left(I_{1\tau_{k+1},\tau_k}^{(i_1)} - \Delta^{3/2} k \zeta_{0,k}^{(i_1)} \right) \text{ с в. 1,} \quad (6.129)$$

$$I_{00T,t}^{(i_1 i_2)} = \Delta \sum_{k=0}^{N-1} \sum_{l=0}^{k-1} \zeta_{0,k}^{(i_2)} \zeta_{0,l}^{(i_1)} + \sum_{k=0}^{N-1} I_{00\tau_{k+1},\tau_k}^{(i_1 i_2)} \text{ с в. 1,} \quad (6.130)$$

$$\begin{aligned} I_{000T,t}^{(i_1 i_2 i_3)} &= \Delta^{3/2} \sum_{k=0}^{N-1} \sum_{l=0}^{k-1} \sum_{q=0}^{l-1} \zeta_{0,k}^{(i_3)} \zeta_{0,l}^{(i_2)} \zeta_{0,q}^{(i_1)} + \\ &+ \sqrt{\Delta} \sum_{k=0}^{N-1} \sum_{l=0}^{k-1} \left(\zeta_{0,k}^{(i_3)} I_{00\tau_{l+1},\tau_l}^{(i_1 i_2)} + \zeta_{0,l}^{(i_1)} I_{00\tau_{k+1},\tau_k}^{(i_2 i_3)} \right) + \\ &+ \sum_{k=0}^{N-1} I_{000\tau_{k+1},\tau_k}^{(i_1 i_2 i_3)} \text{ с в. 1;} \end{aligned} \quad (6.131)$$

$i_1, \dots, i_k = 1, \dots, m$; $T - t = N\Delta$; $\tau_k = t + k\Delta$; $\zeta_{0,k}^{(i)} \stackrel{\text{def}}{=} \Delta^{-1/2} \int_{\tau_k}^{\tau_{k+1}} d\mathbf{w}_s^{(i)}$; $k = 0, 1, \dots, N-1$; $N < \infty$; сумма по пустому множеству считается равной нулю.

В приведенных выше формулах рассматриваются стохастические интегралы Ито из семейства (6.2).

Подставляя в (6.129) соотношение $I_{1_{\tau_{k+1}, \tau_k}}^{(i_1)} = -\frac{\Delta^{3/2}}{2} \left(\zeta_{0,k}^{(i_1)} + \frac{1}{\sqrt{3}} \zeta_{1,k}^{(i_1)} \right)$ с в.1, где $\zeta_{0,k}^{(i_1)}, \zeta_{1,k}^{(i_1)}$ – независимые стандартные гауссовские случайные величины, получаем:

$$I_{1_{T,t}}^{(i_1)} = -\Delta^{3/2} \sum_{k=0}^{N-1} \left(\left(\frac{1}{2} + k \right) \zeta_{0,k}^{(i_1)} + \frac{1}{2\sqrt{3}} \zeta_{1,k}^{(i_1)} \right) \text{ с в. 1.} \quad (6.132)$$

Аппроксимируем с помощью метода кратных рядов Фурье по полиномам Лежандра интегралы $I_{00_{\tau_{k+1}, \tau_k}}^{(i_1 i_2)}$, $I_{00_{\tau_{k+1}, \tau_k}}^{(i_2 i_3)}$, $I_{000_{\tau_{k+1}, \tau_k}}^{(i_1 i_2 i_3)}$, входящие в правые части (6.130), (6.131).

В результате получим

$$I_{00_{T,t}}^{(i_1 i_2)N,q} = \Delta \sum_{k=0}^{N-1} \sum_{l=0}^{k-1} \zeta_{0,k}^{(i_2)} \zeta_{0,l}^{(i_1)} + \sum_{k=0}^{N-1} I_{00_{\tau_{k+1}, \tau_k}}^{(i_1 i_2)q}, \quad (6.133)$$

$$\begin{aligned} I_{000_{T,t}}^{(i_1 i_2 i_3)N,q_1,q_2} &= \Delta^{3/2} \sum_{k=0}^{N-1} \sum_{l=0}^{k-1} \sum_{q=0}^{l-1} \zeta_{0,k}^{(i_3)} \zeta_{0,l}^{(i_2)} \zeta_{0,q}^{(i_1)} + \\ &+ \sqrt{\Delta} \sum_{k=0}^{N-1} \sum_{l=0}^{k-1} \left(\zeta_{0,k}^{(i_3)} I_{00_{\tau_{l+1}, \tau_l}}^{(i_1 i_2)q_1} + \zeta_{0,l}^{(i_1)} I_{00_{\tau_{k+1}, \tau_k}}^{(i_2 i_3)q_1} \right) + \\ &+ \sum_{k=0}^{N-1} I_{000_{\tau_{k+1}, \tau_k}}^{(i_1 i_2 i_3)q_2}, \end{aligned} \quad (6.134)$$

где аппроксимации $I_{00_{\tau_{k+1}, \tau_k}}^{(i_1 i_2)q}$, $I_{000_{\tau_{k+1}, \tau_k}}^{(i_1 i_2 i_3)q_2}$ получены методом кратных рядов Фурье по полиномам Лежандра.

В частности, при $N = 2$ формулы (6.128), (6.132)-(6.134) преобретут следующий вид:

$$I_{0_{T,t}}^{(i_1)} = \sqrt{\Delta} \left(\zeta_{0,0}^{(i_1)} + \zeta_{0,1}^{(i_1)} \right) \text{ с в. 1,}$$

$$I_{1_{T,t}}^{(i_1)} = -\Delta^{3/2} \left(\frac{1}{2} \zeta_{0,0}^{(i_1)} + \frac{3}{2} \zeta_{0,1}^{(i_1)} + \frac{1}{2\sqrt{3}} \left(\zeta_{1,0}^{(i_1)} + \zeta_{1,1}^{(i_1)} \right) \right) \text{ с в. 1,}$$

$$I_{00_{T,t}}^{(i_1 i_2)2,q} = \Delta \left(\zeta_{0,1}^{(i_2)} \zeta_{0,0}^{(i_1)} + I_{00_{\tau_1, \tau_0}}^{(i_1 i_2)q} + I_{00_{\tau_2, \tau_1}}^{(i_1 i_2)q} \right),$$

$$\begin{aligned} I_{000_{T,t}}^{(i_1 i_2 i_3)2,q_1,q_2} &= \sqrt{\Delta} \left(\zeta_{0,1}^{(i_3)} I_{00_{\tau_1, \tau_0}}^{(i_1 i_2)q_1} + \zeta_{0,0}^{(i_1)} I_{00_{\tau_2, \tau_1}}^{(i_2 i_3)q_1} \right) + \\ &+ I_{000_{\tau_1, \tau_0}}^{(i_1 i_2 i_3)q_2} + I_{000_{\tau_2, \tau_1}}^{(i_1 i_2 i_3)q_2}, \end{aligned}$$

где $\Delta = (T - t)/2$; $\tau_k = t + k\Delta$; $k = 0, 1, 2$.

Отметим, что (6.128), (6.132)-(6.134) при $N = 1$ переходят в формулы для численного моделирования указанных стохастических интегралов по методу кратных рядов Фурье. Таким образом можно утверждать, что метод кратных рядов Фурье является частным случаем комбинированного метода при $N = 1$.

6.7.2 Вычисление среднеквадратической погрешности

Вычислим среднеквадратические погрешности аппроксимаций, определяемых формулами (6.133), (6.134).

Имеем:

$$\begin{aligned} \varepsilon_{N,q} &\stackrel{\text{def}}{=} \mathbb{M} \left\{ \left(I_{00T,t}^{(i_1 i_2)} - I_{00T,t}^{(i_1 i_2)N,q} \right)^2 \right\} = \sum_{k=0}^{N-1} \mathbb{M} \left\{ \left(I_{00\tau_{k+1},\tau_k}^{(i_1 i_2)} - I_{00\tau_{k+1},\tau_k}^{(i_1 i_2)q} \right)^2 \right\} = \\ &= N \frac{\Delta^2}{2} \left(\frac{1}{2} - \sum_{l=1}^q \frac{1}{4l^2 - 1} \right) = \frac{(T-t)^2}{2N} \left(\frac{1}{2} - \sum_{l=1}^q \frac{1}{4l^2 - 1} \right); \end{aligned} \quad (6.135)$$

$$\begin{aligned} \varepsilon_{N,q_1,q_2} &\stackrel{\text{def}}{=} \mathbb{M} \left\{ \left(I_{000T,t}^{(i_1 i_2 i_3)} - I_{000T,t}^{(i_1 i_2 i_3)N,q_1,q_2} \right)^2 \right\} = \\ &= \mathbb{M} \left\{ \left(\sum_{k=0}^{N-1} \left(\sqrt{\Delta} \sum_{l=0}^{k-1} \left(\zeta_{0,k}^{(i_3)} \left(I_{00\tau_{l+1},\tau_l}^{(i_1 i_2)} - I_{00\tau_{l+1},\tau_l}^{(i_1 i_2)q_1} \right) + \right. \right. \right. \right. \\ &\quad \left. \left. \left. + \zeta_{0,l}^{(i_1)} \left(I_{00\tau_{k+1},\tau_k}^{(i_2 i_3)} - I_{00\tau_{k+1},\tau_k}^{(i_2 i_3)q_1} \right) \right) + I_{000\tau_{k+1},\tau_k}^{(i_1 i_2 i_3)} - I_{000\tau_{k+1},\tau_k}^{(i_1 i_2 i_3)q_2} \right) \right)^2 \right\} = \\ &= \sum_{k=0}^{N-1} \mathbb{M} \left\{ \left(\sqrt{\Delta} \sum_{l=0}^{k-1} \left(\zeta_{0,k}^{(i_3)} \left(I_{00\tau_{l+1},\tau_l}^{(i_1 i_2)} - I_{00\tau_{l+1},\tau_l}^{(i_1 i_2)q_1} \right) + \right. \right. \right. \right. \\ &\quad \left. \left. \left. + \zeta_{0,l}^{(i_1)} \left(I_{00\tau_{k+1},\tau_k}^{(i_2 i_3)} - I_{00\tau_{k+1},\tau_k}^{(i_2 i_3)q_1} \right) \right) + I_{000\tau_{k+1},\tau_k}^{(i_1 i_2 i_3)} - I_{000\tau_{k+1},\tau_k}^{(i_1 i_2 i_3)q_2} \right) \right)^2 \right\} = \\ &= \sum_{k=0}^{N-1} \left(\Delta \mathbb{M} \left\{ \left(\zeta_{0,k}^{(i_3)} \sum_{l=0}^{k-1} \left(I_{00\tau_{l+1},\tau_l}^{(i_1 i_2)} - I_{00\tau_{l+1},\tau_l}^{(i_1 i_2)q_1} \right) \right)^2 \right\} + \right. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \Delta M \left\{ \left(\left(I_{00\tau_{k+1}, \tau_k}^{(i_2 i_3)} - I_{00\tau_{k+1}, \tau_k}^{(i_2 i_3) q_1} \right) \sum_{l=0}^{k-1} \zeta_{0,l}^{(i_1)} \right)^2 \right\} + \delta_{k,q_2}^{(i_1 i_2 i_3)} = \\
& = \sum_{k=0}^{N-1} \left(\Delta \sum_{l=0}^{k-1} M \left\{ \left(I_{00\tau_{l+1}, \tau_l}^{(i_1 i_2)} - I_{00\tau_{l+1}, \tau_l}^{(i_1 i_2) q_1} \right)^2 \right\} + \right. \\
& \quad \left. + k \Delta M \left\{ \left(I_{00\tau_{k+1}, \tau_k}^{(i_2 i_3)} - I_{00\tau_{k+1}, \tau_k}^{(i_2 i_3) q_1} \right)^2 \right\} + \delta_{k,q_2}^{(i_1 i_2 i_3)} \right) = \\
& = \sum_{k=0}^{N-1} \left(2k \Delta \sum_{l=0}^{k-1} M \left\{ \left(I_{00\tau_{l+1}, \tau_l}^{(i_1 i_2)} - I_{00\tau_{l+1}, \tau_l}^{(i_1 i_2) q_1} \right)^2 \right\} + \delta_{k,q_2}^{(i_1 i_2 i_3)} \right) = \\
& = \sum_{k=0}^{N-1} \left(2k \Delta \frac{\Delta^2}{2} \left(\frac{1}{2} - \sum_{l=1}^{q_1} \frac{1}{4l^2 - 1} \right) + \delta_{k,q_2}^{(i_1 i_2 i_3)} \right) = \\
& = \Delta^3 \frac{N(N-1)}{2} \left(\frac{1}{2} - \sum_{l=1}^{q_1} \frac{1}{4l^2 - 1} \right) + \sum_{k=0}^{N-1} \delta_{k,q_2}^{(i_1 i_2 i_3)} = \\
& = \frac{1}{2} (T-t)^3 \left(\frac{1}{N} - \frac{1}{N^2} \right) \left(\frac{1}{2} - \sum_{l=1}^{q_1} \frac{1}{4l^2 - 1} \right) + \sum_{k=0}^{N-1} \delta_{k,q_2}^{(i_1 i_2 i_3)}, \quad (6.136)
\end{aligned}$$

где

$$\delta_{k,q_2}^{(i_1 i_2 i_3)} = M \left\{ \left(I_{000\tau_{k+1}, \tau_k}^{(i_1 i_2 i_3)} - I_{000\tau_{k+1}, \tau_k}^{(i_1 i_2 i_3) q_2} \right)^2 \right\};$$

$i_1 \neq i_2$ в (6.135) и не все индексы i_1, i_2, i_3 в (6.136) одинаковы (в противном случае для моделирования интегралов $I_{00T,t}^{(i_1 i_2)}$, $I_{000T,t}^{(i_1 i_2 i_3)}$ существуют точные соотношения).

Пусть для определенности i_1, i_2, i_3 в (6.136) попарно различны. Тогда

$$\delta_{k,q_2}^{(i_1 i_2 i_3)} = \Delta^3 \left(\frac{1}{6} - \sum_{i,j,l=0}^{q_2} \frac{C_{lji}^2}{\Delta^3} \right), \quad (6.137)$$

где

$$\begin{aligned}
C_{lji} &= \frac{\sqrt{(2i+1)(2j+1)(2l+1)}}{8} \Delta^{3/2} \bar{C}_{lji}, \\
\bar{C}_{lji} &= \int_{-1}^1 \int_{-1}^z \int_{-1}^y P_l(x) dx P_j(y) dy P_i(z) dz;
\end{aligned}$$

$P_i(x)$ – полином Лежандра.

Подставляя (6.137) в (6.136) получаем

$$\begin{aligned} \varepsilon_{N,q_1,q_2} = & \frac{1}{2}(T-t)^3 \left(\frac{1}{N} - \frac{1}{N^2} \right) \left(\frac{1}{2} - \sum_{l=1}^{q_1} \frac{1}{4l^2 - 1} \right) + \\ & + \frac{(T-t)^3}{N^2} \left(\frac{1}{6} - \sum_{i,j,l=0}^{q_2} \frac{(2i+1)(2j+1)(2l+1)}{64} \bar{C}_{lji}^2 \right). \end{aligned} \quad (6.138)$$

Отметим, что при $N = 1$ формулы (6.135), (6.138) переходят в соответствующие формулы для среднеквадратических погрешностей аппроксимаций интегралов $I_{00T,t}^{(i_1i_2)}$, $I_{000T,t}^{(i_1i_2i_3)}$, полученных методом кратных рядов Фурье по полиномам Лежандра.

6.7.3 Численные эксперименты

Рассмотрим моделирование интегралов $I_{0T,t}^{(i_1)}$, $I_{00T,t}^{(i_1i_2)}$. С этой целью можно воспользоваться соотношениями (6.128), (6.133). При этом погрешность аппроксимации интеграла $I_{00T,t}^{(i_1i_2)}$ определяется формулой (6.135) при использовании полиномов Лежандра. Вычислим величину $\varepsilon_{N,q}$ при различных значениях N и q :

$$\varepsilon_{3,2} \approx 0.0167(T-t)^2, \quad \varepsilon_{2,3} \approx 0.0179(T-t)^2, \quad (6.139)$$

$$\varepsilon_{1,6} \approx 0.0192(T-t)^2. \quad (6.140)$$

Во всех трех случаях вычислительные затраты на моделирование интегралов $I_{0T,t}^{(i_1)}$, $I_{00T,t}^{(i_1i_2)}$ примерно одинаковы, однако комбинированный метод (формулы (6.139)) требует вычисления существенно меньшего числа коэффициентов Фурье, чем метод кратных рядов Фурье (формула (6.140)).

Пусть среднеквадратическая точность аппроксимации интегралов $I_{00T,t}^{(i_1i_2)}$, $I_{000T,t}^{(i_1i_2i_3)}$ равна $(T-t)^4$. В табл.6.38–6.40 приведены значения N, q, q_1, q_2 , которые удовлетворяют системе неравенств:

$$\begin{cases} \varepsilon_{N,q} \leq (T-t)^4 \\ \varepsilon_{N,q_1,q_2} \leq (T-t)^4 \end{cases} \quad (6.141)$$

и общее число M коэффициентов Фурье, требуемых для аппроксимации интегралов $I_{00T,t}^{(i_1i_2)}$, $I_{000T,t}^{(i_1i_2i_3)}$ при $T-t = 0.1, 0.05, 0.02$ (числа q, q_1, q_2 брались так, чтобы число M было наименьшим).

Из табл.6.38–6.40 видно, что комбинированный метод при малых N ($N = 2$) позволяет существенно снизить общее число коэффициентов Фурье, требуемых для аппроксимации интегралов $I_{00T,t}^{(i_1i_2)}$, $I_{000T,t}^{(i_1i_2i_3)}$ по

Таблица 6.38. $T - t = 0.1$.

N	q	q_1	q_2	M
1	13	—	1	21
2	6	0	0	7
3	4	0	0	5

Таблица 6.39. $T - t = 0.05$.

N	q	q_1	q_2	M
1	50	—	2	77
2	25	2	0	26
3	17	1	0	18

Таблица 6.40. $T - t = 0.02$.

N	q	q_1	q_2	M
1	312	—	6	655
2	156	4	2	183
3	104	6	0	105

сравнению с методом кратных рядов Фурье ($N = 1$). При этом вычислительные затраты обоих методов на аппроксимацию интегралов $I_{00T,t}^{(i_1 i_2)}$, $I_{000T,t}^{(i_1 i_2 i_3)}$ оказываются примерно одинаковыми (точность аппроксимации стохастических интегралов для комбинированного метода и метода кратных рядов Фурье была одинаковой и равной $(T - t)^4$).

6.8 Слабые аппроксимации повторных стохастических интегралов Ито

В [86] показано, что если заменить повторные стохастические интегралы Ито в правой части (4.94) их аппроксимациями, удовлетворяющими специальным моментным условиям, то основное утверждение теоремы 4.16 (предложение 5.11.1 [86. С. 211]) останется справедливым. Перейдем к обсуждению выбора таких аппроксимаций.

Введем обозначение

$$\mathbf{y}_{s,t}^{(r)} \stackrel{\text{def}}{=} \mathbf{x}_t + \sum_{k=1}^r \sum_{(\lambda_k, \dots, \lambda_1) \in \mathcal{M}_k} {}^{(p_k)}Q_{\lambda_k} \dots Q_{\lambda_1} \{\mathbf{x}_t\} \cdot {}^{p_k} {}^{(p_k)} \hat{J}_{(\lambda_k \dots \lambda_1)s,t}, \quad (6.142)$$

где $0 \leq t < s \leq T$; $r \in N$;

$${}^{(p_k)} \hat{J}_{(\lambda_k \dots \lambda_1)s,t} = \left\| \hat{J}_{(\lambda_k \dots \lambda_1)s,t}^{(i_k \dots i_1)} \right\|_{i_1=\lambda_1, \dots, i_k=\lambda_k}^{m\lambda_1 \dots m\lambda_k}.$$

Здесь $\hat{J}_{(\lambda_k \dots \lambda_1)s,t}^{(i_k \dots i_1)}$ — аппроксимация повторного стохастического интеграла Ито $J_{(\lambda_k \dots \lambda_1)s,t}^{(i_k \dots i_1)}$; $\mathcal{M}_k = \{(\lambda_k, \dots, \lambda_1) : \lambda_l = 1, 0; l = 1, \dots, k\}$, а остальные обозначения, входящие в (6.142), такие же, как в (4.94).

Теорема 6.2 (предложение 5.12.1 [86. С. 221]). Пусть условия теоремы 4.16 выполнены и для $t \in [t_0, T]$, $r \in N$ существует постоянная $K \in (0, \infty)$ такая, что условие

$$\left| \mathbb{M} \left\{ \prod_{g=1}^l J_{(\lambda_{k_g}^{(g)} \dots \lambda_1^{(g)})t,t_0}^{(i_{k_g}^{(g)} \dots i_1^{(g)})} - \prod_{g=1}^l \hat{J}_{(\lambda_{k_g}^{(g)} \dots \lambda_1^{(g)})t,t_0}^{(i_{k_g}^{(g)} \dots i_1^{(g)})} \middle| \mathcal{F}_{t_0} \right\} \right| \leq K(t - t_0)^{r+1} \quad (6.143)$$

выполнено для всех $(\lambda_{k_g}^{(g)} \dots \lambda_1^{(g)}) \in \mathcal{M}_{k_g}$; $i_1^{(g)}, \dots, i_{k_g}^{(g)} = 0, 1, \dots, m$; $k_g \leq r$; $g = 1, \dots, l$; $l = 1, 2, \dots, 2r + 1$. Тогда для каждой функции $g \in C^{2(r+1)}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^1)$ существуют постоянные $K_g \in (0, \infty)$ и $q \in N$ такие, что

$$\left| \mathbb{M} \left\{ g(\mathbf{x}_t) - g(\mathbf{y}_{t,t_0}^{(r)}) \middle| \mathcal{F}_{t_0} \right\} \right| \leq K_g(1 + |\mathbf{x}_{t_0}|^{2q})(t - t_0)^{r+1},$$

где $\mathbf{x}_t$ — решение стохастического дифференциального уравнения Ито (6.1) в автономном случае, которое стартует из точки $\mathbf{x}_{t_0}$ в момент времени t_0 .

Аппроксимации $\hat{J}_{(\lambda_{k_g}^{(g)} \dots \lambda_1^{(g)})t, t_0}^{(i_{k_g}^{(g)} \dots i_1^{(g)})}$ повторных стохастических интегралов Ито $J_{(\lambda_{k_g}^{(g)} \dots \lambda_1^{(g)})t, t_0}^{(i_{k_g}^{(g)} \dots i_1^{(g)})}$, которые удовлетворяют условию (6.143) при некотором фиксированном r , будем называть слабыми аппроксимациями.

Приведем аналог теоремы 6.2 для унифицированных разложений Тейлора–Ито. Положим

$$\tilde{\mathbf{y}}_{s,t}^{(r)} = \mathbf{x}_t + \sum_{q=1}^r \sum_{(k,j,l_1,\dots,l_k) \in \mathcal{A}_q} \frac{(s-t)^j}{j!} {}^{(k)}L^j G_{l_1} \dots G_{l_k} \{\mathbf{x}_t\} \cdot {}^{(k)}\hat{J}_{l_1 \dots l_{k_s,t}}^{(k)}, \quad (6.144)$$

$$\hat{\mathbf{y}}_{s,t}^{(r)} = \mathbf{x}_t + \sum_{q=1}^r \sum_{(k,j,l_1,\dots,l_k) \in \mathcal{A}_q} \frac{(s-t)^j}{j!} {}^{(k)}G_{l_1} \dots G_{l_k} L^j \{\mathbf{x}_t\} \cdot {}^{(k)}\hat{I}_{l_1 \dots l_{k_s,t}}^{(k)}, \quad (6.145)$$

$${}^{(k)}\hat{J}_{l_1 \dots l_{k_s,t}} = \left\| \hat{J}_{l_1 \dots l_{k_s,t}}^{(i_1 \dots i_k)} \right\|_{i_1, \dots, i_k=1}^m, \quad {}^{(k)}\hat{I}_{l_1 \dots l_{k_s,t}} = \left\| \hat{I}_{l_1 \dots l_{k_s,t}}^{(i_1 \dots i_k)} \right\|_{i_1, \dots, i_k=1}^m,$$

$$\mathcal{A}_q = \left\{ (k, j, l_1, \dots, l_k) : k + j + \sum_{p=1}^k l_p = q; \quad k, j, l_1, \dots, l_k = 0, 1, \dots \right\}.$$

Остальные обозначения, входящие в (6.144) и (6.145), такие же, как в (4.30) и (4.55) соответственно.

Теорема 6.3. Пусть выполнены условия теоремы 4.17 и для $t \in [t_0, T]$, $r \in \mathbb{N}$ существуют такие постоянные $K_1, K_2 \in (0, \infty)$, что условия

$$\left| \mathbb{M} \left\{ \prod_{g=1}^l J_{l_1^{(g)} \dots l_{k_g}^{(g)} t, t_0}^{(i_1^{(g)} \dots i_{k_g}^{(g)})} - \prod_{g=1}^l \hat{J}_{l_1^{(g)} \dots l_{k_g}^{(g)} t, t_0}^{(i_1^{(g)} \dots i_{k_g}^{(g)})} \middle| \mathcal{F}_{t_0} \right\} \right| \leq K_1 j! (t - t_0)^{r+1-j} \quad (6.146)$$

$$\left| \mathbb{M} \left\{ \prod_{g=1}^l I_{l_1^{(g)} \dots l_{k_g}^{(g)} t, t_0}^{(i_1^{(g)} \dots i_{k_g}^{(g)})} - \prod_{g=1}^l \hat{I}_{l_1^{(g)} \dots l_{k_g}^{(g)} t, t_0}^{(i_1^{(g)} \dots i_{k_g}^{(g)})} \middle| \mathcal{F}_{t_0} \right\} \right| \leq K_2 j! (t - t_0)^{r+1-j}, \quad (6.147)$$

выполнены для всех $(k_g, j, l_1^{(g)}, \dots, l_{k_g}^{(g)}) \in \mathcal{A}_{k_g}$; $i_1^{(g)}, \dots, i_{k_g}^{(g)} = 1, \dots, m$; $k_g \leq r$; $g = 1, \dots, l$; $l = 1, 2, \dots, 2r + 1$. Тогда для каждой функции $g \in C^{2(r+1)}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^1)$ существуют постоянные $K_g^{(1)}, K_g^{(2)} \in (0, \infty)$ и $q_1, q_2 \in \mathbb{N}$ такие, что

$$\left| \mathbb{M} \left\{ g(\mathbf{x}_t) - g(\tilde{\mathbf{y}}_{t,t_0}^{(r)}) \middle| \mathcal{F}_{t_0} \right\} \right| \leq K_g^{(1)} (1 + |\mathbf{x}_0|^{2q_1}) (t - t_0)^{r+1},$$

$$\left| \mathbb{M} \left\{ g(\mathbf{x}_t) - g(\hat{\mathbf{y}}_{t,t_0}^{(r)}) | \mathcal{F}_{t_0} \right\} \right| \leq K_g^{(2)} (1 + |\mathbf{x}_0|^{2q_2}) (t - t_0)^{r+1},$$

где $\mathbf{x}_t$ — решение стохастического дифференциального уравнения Ито (6.1) в автономном случае, которое стартует из точки $\mathbf{x}_{t_0}$ в момент времени t_0 .

Аппроксимации $\hat{J}_{l_1^{(g)} \dots l_{k_g}^{(g)} t, t_0}^{(i_1^{(g)} \dots i_{k_g^{(g)}})}$, $\hat{I}_{l_1^{(g)} \dots l_{k_g}^{(g)} t, t_0}^{(i_1^{(g)} \dots i_{k_g^{(g)}})}$ повторных стохастических интегралов Ито $J_{l_1^{(g)} \dots l_{k_g}^{(g)} t, t_0}^{(i_1^{(g)} \dots i_{k_g^{(g)}})}$, $I_{l_1^{(g)} \dots l_{k_g}^{(g)} t, t_0}^{(i_1^{(g)} \dots i_{k_g^{(g)}})}$, которые удовлетворяют условиям (6.146), (6.147) при некотором фиксированном r , будем также называть слабыми аппроксимациями.

В [86] (см. также [70]) построены слабые аппроксимации повторных стохастических интегралов Ито $\hat{J}_{(\lambda_k \dots \lambda_1) t, t_0}^{(i_k \dots i_1)}$, удовлетворяющие условию (6.143) при $r = 1, 2$, $m, n \geq 1$ (напомним, что n — размерность процесса Ито $\mathbf{x}_t$, являющегося решением стохастического дифференциального уравнения Ито, а m — размерность винеровского процесса, входящего в это уравнение) и при $r = 3$, $m = 1$, $n \geq 1$. Далее приведем эти аппроксимации, а также слабые аппроксимации повторных стохастических интегралов Ито $I_{l_1 \dots l_{kt}, t_0}^{(i_1 \dots i_k)}$, удовлетворяющие условию (6.147) при $r = 4$, $m = 1$, $n \geq 1$.

С целью сокращения записи положим

$$\mathbb{M} \left\{ \prod_{g=1}^l J_{(\lambda_{k_g}^{(g)} \dots \lambda_1^{(g)}) t_0 + \Delta, t_0}^{(i_{k_g}^{(g)} \dots i_1^{(g)})} | \mathcal{F}_{t_0} \right\} \stackrel{\text{def}}{=} \mathbb{M} \left\{ \prod_{g=1}^l J_{(\lambda_{k_g}^{(g)} \dots \lambda_1^{(g)})}^{(i_{k_g}^{(g)} \dots i_1^{(g)})} \right\}, \quad (6.148)$$

где $\Delta \in [0, T - t_0]$; $(\lambda_{k_g}^{(g)} \dots \lambda_1^{(g)}) \in \mathcal{M}_{k_g}$; $k_g \leq r$; $g = 1, \dots, l$.

Приведем ряд точных значений математических ожиданий вида (6.148), полученных в [70, 86] и необходимых для построения слабых аппроксимаций $\hat{J}_{(\lambda_k \dots \lambda_1) t_0 + \Delta, t_0}^{(i_k \dots i_1)}$ при $r = 1, 2$, $m, n \geq 1$:

$$\mathbb{M} \left\{ J_{(1)}^{(i_1)} J_{(1)}^{(i_2)} \right\} = \Delta \mathbf{1}_{\{i_1 = i_2\}}, \quad (6.149)$$

$$\mathbb{M} \left\{ J_{(1)}^{(i_1)} J_{(01)}^{(0i_2)} \right\} = \mathbb{M} \left\{ J_{(1)}^{(i_1)} J_{(10)}^{(i_2 0)} \right\} = \frac{1}{2} \Delta^2 \mathbf{1}_{\{i_1 = i_2\}}, \quad (6.150)$$

$$\mathbb{M} \left\{ J_{(11)}^{(i_1 i_2)} J_{(11)}^{(i_3 i_4)} \right\} = \frac{1}{2} \Delta^2 \mathbf{1}_{\{i_1 = i_3\}} \mathbf{1}_{\{i_2 = i_4\}}, \quad (6.151)$$

$$\mathbb{M} \left\{ J_{(1)}^{(i_1)} J_{(1)}^{(i_2)} J_{(11)}^{(i_3 i_4)} \right\} = \begin{cases} \Delta^2 & \text{при } i_1 = \dots = i_4, \\ \frac{\Delta^2}{2} & \text{при } i_3 \neq i_4, i_1 = i_3, i_2 = i_4 \\ & \text{или } i_3 \neq i_4, i_1 = i_4, i_2 = i_3, \\ 0 & \text{в противном случае,} \end{cases} \quad (6.152)$$

$$\mathbb{M} \left\{ J_{(1)}^{(i_1)} J_{(1)}^{(i_2)} J_{(1)}^{(i_3)} J_{(1)}^{(i_4)} \right\} = \begin{cases} 3\Delta^2 & \text{при } i_1 = \dots = i_4, \\ \Delta^2 & \text{если среди } i_1, \dots, i_4 \text{ имеются} \\ & \text{две пары одинаковых чисел,} \\ 0 & \text{в противном случае,} \end{cases} \quad (6.153)$$

$$\mathbb{M} \left\{ J_{(10)}^{(i_1 0)} J_{(01)}^{(0 i_2)} \right\} = \frac{1}{6} \Delta^3 \mathbf{1}_{\{i_1 = i_2\}}, \quad (6.154)$$

$$\mathbb{M} \left\{ J_{(10)}^{(i_1 0)} J_{(10)}^{(i_2 0)} \right\} = \mathbb{M} \left\{ J_{(01)}^{(0 i_1)} J_{(01)}^{(0 i_2)} \right\} = \frac{1}{3} \Delta^3 \mathbf{1}_{\{i_1 = i_2\}}, \quad (6.155)$$

$$\begin{aligned} \mathbb{M} \left\{ J_{(01)}^{(0 i_1)} J_{(1)}^{(i_2)} J_{(1)}^{(i_3)} J_{(1)}^{(i_4)} \right\} &= \mathbb{M} \left\{ J_{(10)}^{(i_1 0)} J_{(1)}^{(i_2)} J_{(1)}^{(i_3)} J_{(1)}^{(i_4)} \right\} = \\ &= \begin{cases} \frac{3}{2} \Delta^3 & \text{при } i_1 = \dots = i_4, \\ \frac{1}{2} \Delta^3 & \text{если среди } i_1, \dots, i_4 \text{ имеются} \\ & \text{две пары одинаковых чисел,} \\ 0 & \text{в противном случае,} \end{cases} \end{aligned} \quad (6.156)$$

$$\mathbb{M} \left\{ J_{(01)}^{(0 i_1)} J_{(1)}^{(i_2)} J_{(11)}^{(i_3 i_4)} \right\} = \frac{1}{6} \Delta^3 \mathbf{1}_{\{i_1 = i_3\}} \mathbf{1}_{\{i_2 = i_4\}}, \quad (6.157)$$

$$\mathbb{M} \left\{ J_{(10)}^{(i_1 0)} J_{(1)}^{(i_2)} J_{(11)}^{(i_3 i_4)} \right\} = \frac{1}{3} \Delta^3 \mathbf{1}_{\{i_1 = i_3\}} \mathbf{1}_{\{i_2 = i_4\}}, \quad (6.158)$$

$$\mathbb{M} \left\{ J_{(1)}^{(i_1)} \dots J_{(1)}^{(i_6)} \right\} = \begin{cases} 15\Delta^3 & \text{при } i_1 = \dots = i_6, \\ 3\Delta^3 & \text{если среди } i_1, \dots, i_6 \text{ имеются пара} \\ & \text{и четверка одинаковых чисел,} \\ \Delta^3 & \text{если среди } i_1, \dots, i_6 \text{ имеются три} \\ & \text{пары одинаковых чисел,} \\ 0 & \text{в противном случае,} \end{cases} \quad (6.159)$$

$$\begin{aligned} \mathbb{M} \left\{ J_{(11)}^{(i_1 i_2)} J_{(11)}^{(i_3 i_4)} J_{(11)}^{(i_5 i_6)} \right\} &= \frac{1}{6} \Delta^3 \left(\mathbf{1}_{\{i_2=i_4\}} \left(\mathbf{1}_{\{i_1=i_5\}} \mathbf{1}_{\{i_3=i_6\}} + \mathbf{1}_{\{i_1=i_6\}} \mathbf{1}_{\{i_3=i_5\}} \right) + \right. \\ &+ \mathbf{1}_{\{i_2=i_6\}} \left(\mathbf{1}_{\{i_1=i_3\}} \mathbf{1}_{\{i_4=i_5\}} + \mathbf{1}_{\{i_1=i_4\}} \mathbf{1}_{\{i_3=i_5\}} \right) + \\ &\left. + \mathbf{1}_{\{i_4=i_6\}} \left(\mathbf{1}_{\{i_1=i_3\}} \mathbf{1}_{\{i_2=i_5\}} + \mathbf{1}_{\{i_2=i_3\}} \mathbf{1}_{\{i_1=i_5\}} \right) \right), \end{aligned} \quad (6.160)$$

$$\begin{aligned} \mathbb{M} \left\{ J_{(11)}^{(i_1 i_2)} J_{(11)}^{(i_3 i_4)} J_{(1)}^{(i_5)} J_{(1)}^{(i_6)} \right\} &= \\ &= \frac{1}{6} \Delta^3 \left(2 \cdot \mathbf{1}_{\{i_1=i_3\}} \left(\mathbf{1}_{\{i_2=i_5\}} \mathbf{1}_{\{i_4=i_6\}} + \mathbf{1}_{\{i_2=i_6\}} \mathbf{1}_{\{i_4=i_5\}} \right) + \right. \\ &+ \mathbf{1}_{\{i_2=i_3\}} \left(\mathbf{1}_{\{i_1=i_5\}} \mathbf{1}_{\{i_4=i_6\}} + \mathbf{1}_{\{i_1=i_6\}} \mathbf{1}_{\{i_4=i_5\}} \right) + \\ &+ \mathbf{1}_{\{i_1=i_4\}} \left(\mathbf{1}_{\{i_3=i_5\}} \mathbf{1}_{\{i_2=i_6\}} + \mathbf{1}_{\{i_3=i_6\}} \mathbf{1}_{\{i_2=i_5\}} \right) + \\ &\left. + 2 \cdot \mathbf{1}_{\{i_2=i_4\}} \left(\mathbf{1}_{\{i_1=i_5\}} \mathbf{1}_{\{i_3=i_6\}} + \mathbf{1}_{\{i_3=i_5\}} \mathbf{1}_{\{i_1=i_6\}} \right) \right) + \\ &+ \frac{1}{2} \Delta^3 \mathbf{1}_{\{i_1=i_3\}} \mathbf{1}_{\{i_2=i_4\}} \mathbf{1}_{\{i_5=i_6\}}, \end{aligned} \quad (6.161)$$

$$\begin{aligned} \mathbb{M} \left\{ J_{(11)}^{(i_1 i_2)} J_{(1)}^{(i_3)} \dots J_{(1)}^{(i_6)} \right\} &= \\ &= \frac{1}{2} \left(\mathbb{M} \left\{ J_{(1)}^{(i_1)} \dots J_{(1)}^{(i_6)} \right\} - \Delta \mathbf{1}_{\{i_1=i_2\}} \mathbb{M} \left\{ J_{(1)}^{(i_3)} \dots J_{(1)}^{(i_6)} \right\} \right), \end{aligned} \quad (6.162)$$

где $\mathbf{1}_A$ — индикатор множества A .

Формулы (6.149)–(6.162) получены в [70, 86]. Следует отметить, что в [86] в формуле (6.161) отсутствует член $\frac{1}{2} \Delta^3 \mathbf{1}_{\{i_1=i_3\}} \mathbf{1}_{\{i_2=i_4\}} \mathbf{1}_{\{i_5=i_6\}}$.

Покажем, что наличие данного слагаемого в формуле (6.161) обязательно.

Действительно, поскольку

$$J_{(1)}^{(i_5)} J_{(1)}^{(i_6)} = J_{(11)}^{(i_5 i_6)} + J_{(11)}^{(i_6 i_5)} + \Delta \mathbf{1}_{\{i_5=i_6\}} \text{ с в.1,}$$

то

$$\begin{aligned} & \mathbf{M} \left\{ J_{(11)}^{(i_1 i_2)} J_{(11)}^{(i_3 i_4)} J_{(1)}^{(i_5)} J_{(1)}^{(i_6)} \right\} = \\ & = \mathbf{M} \left\{ J_{(11)}^{(i_1 i_2)} J_{(11)}^{(i_3 i_4)} J_{(11)}^{(i_5 i_6)} \right\} + \mathbf{M} \left\{ J_{(11)}^{(i_1 i_2)} J_{(11)}^{(i_3 i_4)} J_{(1)}^{(i_6 i_5)} \right\} + \\ & + \Delta \mathbf{1}_{\{i_5=i_6\}} \mathbf{M} \left\{ J_{(11)}^{(i_1 i_2)} J_{(11)}^{(i_3 i_4)} \right\}. \end{aligned} \quad (6.163)$$

Применяя к правой части (6.163) формулы (6.151), (6.160), приходим к (6.161).

Необходимо отметить [70, 86], что

$$\mathbf{M} \left\{ \prod_{g=1}^l J_{(\lambda_{k_g}^{(g)} \dots \lambda_1^{(g)})}^{(i_{k_g}^{(g)} \dots i_1^{(g)})} \right\} = 0,$$

если число единиц, входящих во все мультииндексы $(\lambda_{k_g}^{(g)} \dots \lambda_1^{(g)})$; $k_g \leq r$; $g = 1, \dots, l$, нечетно.

Кроме того [70, 86],

$$\left| \mathbf{M} \left\{ \prod_{g=1}^l J_{(\lambda_{k_g}^{(g)} \dots \lambda_1^{(g)})}^{(i_{k_g}^{(g)} \dots i_1^{(g)})} \right\} \right| \leq K \Delta^{\gamma_l},$$

где $\gamma_l = \frac{1}{2} \delta_l + \rho_l$; δ_l — число единиц, а ρ_l — число нулей, входящих во все мультииндексы $(\lambda_{k_g}^{(g)} \dots \lambda_1^{(g)})$; $k_g \leq r$; $g = 1, \dots, l$; $K \in (0, \infty)$ — постоянная.

В случае $n, m \geq 1$, $r = 1$ можно положить [70, 86]

$$\hat{J}_{(1)}^{(i)} = \Delta \tilde{\mathbf{f}}^{(i)}, \quad i = 1, \dots, m,$$

где $\Delta \tilde{\mathbf{f}}^{(i)}$, $i = 1, \dots, m$, — независимые дискретные случайные величины, для которых

$$\mathbf{P} \left\{ \Delta \tilde{\mathbf{f}}^{(i)} = \pm \sqrt{\Delta} \right\} = \frac{1}{2}.$$

Нетрудно видеть, что аппроксимация вида [70, 86]

$$\hat{J}_{(1)}^{(i)} = \sqrt{\Delta} \zeta_0^{(i)}, \quad i = 1, \dots, m,$$

где $\zeta_0^{(i)}$ — независимые стандартные гауссовские случайные величины, также удовлетворяет условию (6.143) при $r = 1$.

В случае $n, m \geq 1, r = 2$ в качестве аппроксимаций $\hat{J}_{(1)}^{(i_1)}$, $\hat{J}_{(11)}^{(i_1 i_2)}$, $\hat{J}_{(10)}^{(i_1 0)}$, $\hat{J}_{(01)}^{(0 i_1)}$ возьмем следующие [70, 86]:

$$\hat{J}_{(1)}^{(i_1)} = \Delta \tilde{\mathbf{f}}^{(i_1)}, \quad \hat{J}_{(10)}^{(i_1 0)} = \hat{J}_{(01)}^{(0 i_1)} = \frac{1}{2} \Delta \cdot \Delta \tilde{\mathbf{f}}^{(i_1)}, \quad (6.164)$$

$$\hat{J}_{(11)}^{(i_1 i_2)} = \frac{1}{2} (\Delta \tilde{\mathbf{f}}^{(i_1)} \Delta \tilde{\mathbf{f}}^{(i_2)} + V^{(i_1 i_2)}), \quad (6.165)$$

где $\Delta \tilde{\mathbf{f}}^{(i)}$ — независимые гауссовские случайные величины с нулевым математическим ожиданием и дисперсией Δ или независимые дискретные случайные величины, для которых

$$\mathbf{P} \{ \Delta \tilde{\mathbf{f}}^{(i)} = \pm \sqrt{3\Delta} \} = \frac{1}{6}, \quad \mathbf{P} \{ \Delta \tilde{\mathbf{f}}^{(i)} = 0 \} = \frac{2}{3};$$

$V^{(i_1 i_2)}$ — независимые дискретные случайные величины, удовлетворяющие условиям

$$\mathbf{P} \{ V^{(i_1 i_2)} = \pm \Delta \} = \frac{1}{2} \text{ при } i_2 < i_1;$$

$$V^{(i_1 i_1)} = -\Delta;$$

$$V^{(i_1 i_2)} = -V^{(i_2 i_1)} \text{ при } i_1 < i_2;$$

$i_1, i_2 = 1, \dots, m$.

Заметим, что для того чтобы аппроксимации $\hat{J}_{(1)}^{(i_1)}$, $\hat{J}_{(11)}^{(i_1 i_2)}$, $\hat{J}_{(10)}^{(i_1 0)}$, $\hat{J}_{(01)}^{(0 i_1)}$ вида (6.164), (6.165) удовлетворяли условию (6.143) при $r = 2$, достаточно выполнения следующих условий:

1. $V^{(i_1 i_1)} = -\Delta$.
2. $\mathbf{M} \{ V^{(i_1 i_2)} \} = 0$, $\mathbf{M} \{ (V^{(i_1 i_2)})^2 \} = \Delta^2$, $i_1 \neq i_2$.
3. $V^{(i_1 i_2)}$ независима с $\Delta \tilde{\mathbf{f}}^{(i_3)}$, $\Delta \tilde{\mathbf{f}}^{(i_3)} \Delta \tilde{\mathbf{f}}^{(i_4)}$, $\Delta \tilde{\mathbf{f}}^{(i_3)} \Delta \tilde{\mathbf{f}}^{(i_4)} \Delta \tilde{\mathbf{f}}^{(i_5)}$ при всех $i_1, \dots, i_5 = 1, \dots, m$.
4. $V^{(i_1 i_2)} = -V^{(i_2 i_1)}$, $i_1 \neq i_2$.
5. $V^{(i_1 i_2)}$ и $V^{(i_3 i_4)}$ независимы, если $\{i_1, i_2\} \neq \{i_3, i_4\}$; здесь $\{x, y\}$ означает неупорядоченную пару x, y .
6. $\Delta \tilde{\mathbf{f}}^{(i_1)}$ — такие же случайные величины, как в (6.164), (6.165); $i_1, i_2 = 1, \dots, m$.

Условия 1–6 дают возможность предлагать различные способы построения случайных величин $V^{(i_1 i_2)}$, $i_1, i_2 = 1, \dots, m$. Так, например,

если $\Delta \tilde{\mathbf{f}}^{(i)} = \sqrt{\Delta} \zeta_0^{(i)}$, где $\zeta_0^{(i)}$ — независимые стандартные гауссовские случайные величины, то $V^{(i_1 i_2)}$ может быть гауссовской случайной величиной, удовлетворяющей условиям 1–5. В этом случае также можно предложить следующую формулу для $V^{(i_1 i_2)}$:

$$V^{(i_1 i_2)} = \frac{\Delta}{\sqrt{2}} \left(\zeta_0^{(i_1)} \zeta_1^{(i_2)} - \zeta_1^{(i_1)} \zeta_0^{(i_2)} \right) - \Delta \mathbf{1}_{\{i_1=i_2\}}, \quad (6.166)$$

где $\zeta_0^{(i)}, \zeta_1^{(i)}, i = 1, \dots, m$, — независимые в совокупности стандартные гауссовские случайные величины.

Перейдем к рассмотрению случая $r = 3, m = 1, n \geq 1$. В данной ситуации нам кроме формул (6.149)–(6.163) потребуется еще ряд формул для математических ожиданий вида (6.148) при $m = 1$.

Согласно [70, 86] имеем

$$\begin{aligned} \mathbf{M}\{J_{(1)} J_{(111)}\} &= \mathbf{M}\{J_{(01)} J_{(111)}\} = \mathbf{M}\{J_{(10)} J_{(111)}\} = 0, \\ \mathbf{M}\{J_{(011)} J_{(11)}\} &= \mathbf{M}\{J_{(101)} J_{(11)}\} = \mathbf{M}\{J_{(110)} J_{(11)}\} = \frac{1}{6} \Delta^3, \\ \mathbf{M}\{J_{(001)} J_{(1)}\} &= \mathbf{M}\{J_{(010)} J_{(1)}\} = \mathbf{M}\{J_{(100)} J_{(1)}\} = \frac{1}{6} \Delta^3, \\ \mathbf{M}\{J_{(100)} J_{(10)}\} &= \mathbf{M}\{J_{(001)} J_{(01)}\} = \frac{1}{8} \Delta^4, \\ \mathbf{M}\{J_{(010)} J_{(10)}\} &= \mathbf{M}\{J_{(010)} J_{(01)}\} = \frac{1}{6} \Delta^4, \\ \mathbf{M}\{J_{(100)} J_{(01)}\} &= \mathbf{M}\{J_{(001)} J_{(10)}\} = \frac{1}{24} \Delta^4, \\ \mathbf{M}\{J_{(110)} J_{(10)}\} &= \mathbf{M}\{J_{(110)} J_{(01)}\} = \mathbf{M}\{J_{(101)} J_{(10)}\} = 0, \\ \mathbf{M}\{J_{(101)} J_{(01)}\} &= \mathbf{M}\{J_{(011)} J_{(10)}\} = \mathbf{M}\{J_{(011)} J_{(01)}\} = 0, \\ \mathbf{M}\{J_{(111)} J_{(11)}\} &= 0, \quad \mathbf{M}\{(J_{(111)})^2\} = \frac{1}{6} \Delta^3, \\ \mathbf{M}\{J_{(011)} (J_{(1)})^2\} &= \mathbf{M}\{J_{(101)} (J_{(1)})^2\} = \mathbf{M}\{J_{(110)} (J_{(1)})^2\} = \frac{1}{6} \Delta^3, \\ \mathbf{M}\{J_{(111)} (J_{(1)})^3\} &= \Delta^3, \quad \mathbf{M}\{J_{(111)} J_{(11)} J_{(1)}\} = \frac{1}{2} \Delta^3, \end{aligned}$$

где

$$J_{(\lambda_k \dots \lambda_1)} \stackrel{\text{def}}{=} \int_{t_0}^{t_0 + \Delta} \dots \int_{t_0}^{\tau_{k-1}} df_{\tau_k}^{(\lambda_k)} \dots df_{\tau_1}^{(\lambda_1)};$$

$f_\tau^{(0)} \stackrel{\text{def}}{=} \tau$; $f_\tau^{(1)} \stackrel{\text{def}}{=} f_\tau$ — стандартный скалярный винеровский процесс; $\lambda_l = 1$ или $\lambda_l = 0$; $l = 1, \dots, k$.

В [86] с помощью приведенных моментных соотношений предложены следующие слабые аппроксимации повторных стохастических интегралов Ито в случае $r = 3$, $m = 1$, $n \geq 1$:

$$\hat{J}_{(1)} = \Delta \tilde{f}, \quad (6.167)$$

$$\hat{J}_{(10)} = \Delta \hat{f}, \quad \hat{J}_{(01)} = \Delta \cdot \Delta \tilde{f} - \Delta \hat{f}, \quad (6.168)$$

$$\hat{J}_{(11)} = \frac{1}{2} \left((\Delta \tilde{f})^2 - \Delta \right),$$

$$\hat{J}_{(001)} = \hat{J}_{(010)} = \hat{J}_{(100)} = \frac{1}{6} \Delta^2 \cdot \Delta \tilde{f},$$

$$\hat{J}_{(110)} = \hat{J}_{(101)} = \hat{J}_{(011)} = \frac{1}{6} \Delta \left((\Delta \tilde{f})^2 - \Delta \right),$$

$$\hat{J}_{(111)} = \frac{1}{6} \Delta \tilde{f} \left((\Delta \tilde{f})^2 - 3\Delta \right),$$

где $\Delta \tilde{f} \sim N(0, \Delta)$; $\Delta \hat{f} \sim N(0, \frac{1}{3} \Delta^3)$; $M\{\Delta \tilde{f} \Delta \hat{f}\} = \frac{1}{2} \Delta^2$.

В заключение построим слабые аппроксимации повторных стохастических интегралов Ито в случае $r = 4$, $m = 1$, $n \geq 1$.

В усеченное разложение Тейлора–Ито в форме Вагнера и Платена вида (4.94) при $r = 4$, $m = 1$ входят 26 различных повторных стохастических интегралов Ито. Построение слабых аппроксимаций данных стохастических интегралов, удовлетворяющих условию (6.143) при $r = 4$, весьма затруднительно в силу необходимости рассматривать большое число моментных условий. Однако эту проблему можно упростить, если ввести усеченное унифицированное разложение Тейлора–Ито, например, вида (4.96) при $r = 4$, $m = 1$, поскольку в него входят всего лишь 15 различных повторных стохастических интегралов Ито:

$$I_0, I_1, I_{00}, I_{000}, I_2, I_{10}, I_{01}, I_3, I_{11}, I_{20},$$

$$I_{02}, I_{100}, I_{010}, I_{001}, I_{0000},$$

где

$$I_{l_1 \dots l_k} \stackrel{\text{def}}{=} \int_{t_0}^{t_0 + \Delta} (t_0 - \tau_k)^{l_k} \dots \int_{t_0}^{\tau_2} (t_0 - \tau_1)^{l_1} df_{\tau_1} \dots df_{\tau_k}, \quad k \geq 1;$$

f_τ — скалярный стандартный винеровский процесс.

Нетрудно заметить, что условие (6.147) будет выполнено при $r = 4$, $i_1 = \dots = i_4$, если выполнено следующее условие:

$$\left| \mathbb{M} \left\{ \prod_{g=1}^l I_{l_1^{(g)} \dots l_{k_g}^{(g)}} - \prod_{g=1}^l \hat{I}_{l_1^{(g)} \dots l_{k_g}^{(g)}} | \mathcal{F}_{t_0} \right\} \right| \leq K(t - t_0)^5, \quad (6.169)$$

для всех $l_1^{(g)} \dots l_{k_g}^{(g)} \in A$; $k_g \leq 4$; $g = 1, \dots, l$; $l = 1, 2, \dots, 9$; здесь $K \in (0, \infty)$ — постоянная;

$$A = \left\{ 0, 1, 00, 000, 2, 10, 01, 3, 11, 20, 02, 100, 010, 001, 0000 \right\}.$$

Положим

$$\hat{I}_0 = \sqrt{\Delta} \zeta_0, \quad \hat{I}_{00} = \frac{1}{2} \Delta ((\zeta_0)^2 - 1), \quad (6.170)$$

$$\hat{I}_1 = -\frac{\Delta^{\frac{3}{2}}}{2} \left(\zeta_0 + \frac{1}{\sqrt{3}} \zeta_1 \right), \quad \hat{I}_{000} = \frac{\Delta^{\frac{3}{2}}}{6} ((\zeta_0)^3 - 3\zeta_0), \quad (6.171)$$

$$\hat{I}_{0000} = \frac{\Delta^2}{24} ((\zeta_0)^4 - 6(\zeta_0)^2 + 3); \quad (6.172)$$

здесь и далее

$$\zeta_0 \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{\sqrt{\Delta}} \int_{t_0}^{t_0+\Delta} df_s, \quad \zeta_1 \stackrel{\text{def}}{=} \frac{2\sqrt{3}}{\Delta^{\frac{3}{2}}} \int_{t_0}^{t_0+\Delta} \left(s - t_0 - \frac{\Delta}{2} \right) df_s;$$

f_s — скалярный стандартный винеровский процесс.

Нетрудно видеть, что ζ_0, ζ_1 — независимые стандартные гауссовские случайные величины. Кроме того, аппроксимации (6.170)–(6.172) с вероятностью 1 совпадают с повторными стохастическими интегралами Ито, соответствующими этим аппроксимациям. Отсюда следует, что всевозможные произведения $\prod_{g=1}^l \hat{I}_{l_1^{(g)} \dots l_{k_g}^{(g)}}$, входящие в (6.169) и содержащие только аппроксимации $\hat{I}_0, \hat{I}_{00}, \hat{I}_1, \hat{I}_{000}, \hat{I}_{0000}$ вида (6.170)–(6.172), обращают левую часть (6.169) в нуль, т. е. условие (6.169) выполнено автоматически.

Для построения аппроксимаций $\hat{I}_{100}, \hat{I}_{010}, \hat{I}_{001}, \hat{I}_{10}, \hat{I}_{01}, \hat{I}_{11}, \hat{I}_{20}, \hat{I}_{02}, \hat{I}_2, \hat{I}_3$ нам необходимо вычислить ряд условных математических ожиданий вида $\mathbb{M} \left\{ \prod_{g=1}^l I_{l_1^{(g)} \dots l_{k_g}^{(g)}} | \mathcal{F}_{t_0} \right\}$, где $(l_1^{(g)} \dots l_{k_g}^{(g)}) \in A$, которые с целью упрощения записи обозначаем через $\mathbb{M} \left\{ \prod_{g=1}^l I_{l_1^{(g)} \dots l_{k_g}^{(g)}} \right\}$.

Имеем

$$\begin{aligned}
& \mathbb{M}\{I_3\} = \mathbb{M}\{I_3(I_0)^2\} = \mathbb{M}\{I_3I_{00}\} = 0, \quad \mathbb{M}\{I_3I_0\} = -\frac{\Delta^4}{4}, \\
& \mathbb{M}\{I_2(I_0)^2\} = \mathbb{M}\{I_2I_{00}\} = \mathbb{M}\{I_2I_{000}\} = \mathbb{M}\{I_2I_{0000}\} = 0, \\
& \mathbb{M}\{I_2(I_{00})^2\} = \mathbb{M}\{I_2(I_0)^4\} = \mathbb{M}\{I_2I_{000}I_0\} = 0, \\
& \mathbb{M}\{I_2I_{00}(I_0)^2\} = \mathbb{M}\{I_2I_{10}\} = \mathbb{M}\{I_2I_{01}\} = \mathbb{M}\{I_2I_1I_0\} = \mathbb{M}\{I_2\} = 0, \\
& \mathbb{M}\{I_2I_0\} = \frac{\Delta^3}{3}, \quad \mathbb{M}\{I_2(I_0)^3\} = \Delta^4, \quad \mathbb{M}\{I_2I_{00}I_0\} = \frac{\Delta^4}{3}, \quad \mathbb{M}\{I_2I_1\} = -\frac{\Delta^4}{4}, \\
& \mathbb{M}\{I_\mu\} = \mathbb{M}\{I_\mu I_0\} = \mathbb{M}\{I_\mu I_{000}\} = \mathbb{M}\{I_\mu(I_0)^3\} = 0, \\
& \mathbb{M}\{I_\mu I_{00}I_0\} = \mathbb{M}\{I_\mu I_1\} = 0, \quad \mathbb{M}\{I_{20}(I_0)^2\} = \frac{\Delta^4}{6}, \quad \mathbb{M}\{I_{20}I_{00}\} = \frac{\Delta^4}{12}, \\
& \mathbb{M}\{I_{11}(I_0)^2\} = \frac{\Delta^4}{4}, \quad \mathbb{M}\{I_{11}I_{00}\} = \frac{\Delta^4}{8}, \quad \mathbb{M}\{I_{02}(I_0)^2\} = \frac{\Delta^4}{2}, \\
& \mathbb{M}\{I_{02}I_{00}\} = \frac{\Delta^4}{4}, \\
& \mathbb{M}\{I_\lambda\} = \mathbb{M}\{I_\lambda I_0\} = \mathbb{M}\{I_\lambda(I_0)^2\} = \mathbb{M}\{I_\lambda I_{00}\} = 0, \\
& \mathbb{M}\{I_\lambda I_1\} = \mathbb{M}\{I_\lambda I_{0000}\} = \mathbb{M}\{I_\lambda(I_{00})^2\} = \mathbb{M}\{I_\lambda(I_0)^4\} = 0, \\
& \mathbb{M}\{I_\lambda I_{000}I_0\} = \mathbb{M}\{I_\lambda I_{00}(I_0)^2\} = \mathbb{M}\{I_\lambda I_{10}\} = 0, \\
& \mathbb{M}\{I_\lambda I_{01}\} = \mathbb{M}\{I_\lambda I_1I_0\} = 0, \\
& \mathbb{M}\{I_{100}I_{000}\} = -\frac{\Delta^4}{24}, \quad \mathbb{M}\{I_{100}(I_0)^3\} = -\frac{\Delta^4}{4}, \quad \mathbb{M}\{I_{100}I_{00}I_0\} = -\frac{\Delta^4}{8}, \\
& \mathbb{M}\{I_{010}I_{000}\} = -\frac{\Delta^4}{12}, \quad \mathbb{M}\{I_{010}(I_0)^3\} = -\frac{\Delta^4}{2}, \quad \mathbb{M}\{I_{010}I_{00}I_0\} = -\frac{\Delta^4}{4}, \\
& \mathbb{M}\{I_{001}I_{000}\} = -\frac{\Delta^4}{8}, \quad \mathbb{M}\{I_{001}(I_0)^3\} = -\frac{3\Delta^4}{4}, \quad \mathbb{M}\{I_{001}I_{00}I_0\} = -\frac{3\Delta^4}{8}, \\
& \mathbb{M}\{I_\rho I_0\} = \mathbb{M}\{I_\rho I_{000}\} = \mathbb{M}\{I_\rho(I_0)^3\} = \mathbb{M}\{I_\rho I_{00}I_0\} = 0, \\
& \mathbb{M}\{I_\rho I_1\} = \mathbb{M}\{I_\rho I_{0000}\} = \mathbb{M}\{I_\rho(I_0)^5\} = \mathbb{M}\{I_\rho(I_{00})^2I_0\} = 0, \\
& \mathbb{M}\{I_\rho I_{00}(I_0)^3\} = \mathbb{M}\{I_\rho I_{000}(I_0)^2\} = \mathbb{M}\{I_\rho I_{0000}I_0\} = 0, \\
& \mathbb{M}\{I_\rho I_{000}I_{00}\} = \mathbb{M}\{I_\rho I_{100}\} = \mathbb{M}\{I_\rho I_{010}\} = 0, \\
& \mathbb{M}\{I_\rho I_{001}\} = \mathbb{M}\{I_\rho I_2\} = \mathbb{M}\{(I_\rho)^2I_0\} = \mathbb{M}\{I_\rho I_{00}I_1\} = 0, \\
& \mathbb{M}\{I_{10}I_{01}I_0\} = \mathbb{M}\{I_\rho\} = \mathbb{M}\{I_\rho I_1(I_0)^2\} = 0,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
M\{I_{10}(I_0)^2\} &= -\frac{\Delta^3}{3}, \quad M\{I_{10}I_{00}\} = -\frac{\Delta^3}{6}, \quad M\{I_{10}(I_{00})^2\} = -\frac{\Delta^4}{3}, \\
M\{I_{10}(I_0)^4\} &= -2\Delta^4, \quad M\{I_{10}I_{000}I_0\} = -\frac{\Delta^4}{6}, \quad M\{I_{10}I_{00}(I_0)^2\} = -\frac{5\Delta^4}{6}, \\
M\{(I_{10})^2\} &= \frac{\Delta^4}{12}, \quad M\{I_{10}I_{01}\} = \frac{\Delta^4}{8}, \quad M\{I_{10}I_1I_0\} = \frac{5\Delta^4}{24}, \\
M\{I_{01}(I_0)^2\} &= -\frac{2\Delta^3}{3}, \quad M\{I_{01}I_{00}\} = -\frac{\Delta^3}{3}, \quad M\{I_{01}(I_{00})^2\} = -\frac{2\Delta^4}{3}, \\
M\{I_{01}(I_0)^4\} &= -4\Delta^4, \quad M\{I_{01}I_{000}I_0\} = -\frac{\Delta^4}{3}, \quad M\{I_{01}I_{00}(I_0)^2\} = -\frac{5\Delta^4}{3}, \\
M\{(I_{01})^2\} &= \frac{\Delta^4}{4}, \quad M\{I_{01}I_1I_0\} = \frac{3\Delta^4}{8},
\end{aligned}$$

где $\mu \stackrel{\text{def}}{=} 02, 11, 20$; $\lambda \stackrel{\text{def}}{=} 100, 010, 001$; $\rho \stackrel{\text{def}}{=} 10, 01$ (эти записи следует понимать как последовательности цифр).

Приведенные равенства получены с помощью стандартных свойств стохастических интегралов Ито (см. главу 1), а также следующих справедливых с вероятностью 1 и вытекающих из формулы Ито равенств:

$$\begin{aligned}
(I_0)^4 &= 24I_{0000} + 12\Delta I_{00} + 3\Delta^2, \\
(I_{00})^2 &= 6I_{0000} + 2\Delta I_{00} + \frac{\Delta^2}{2}, \\
I_{00}(I_0)^2 &= 12I_{0000} + 5\Delta I_{00} + \Delta^2, \\
(I_0)^5 &= 120I_{00000} + 60\Delta I_{000} + 15\Delta^2 I_0, \\
(I_{00})^2 I_0 &= 30I_{00000} + 12\Delta I_{000} + \frac{10\Delta^2}{4} I_0, \\
I_{00}(I_0)^3 &= 60I_{00000} + 27\Delta I_{000} + 6\Delta^2 I_0, \\
I_{000}(I_0)^2 &= 20I_{00000} + 7\Delta I_{000} + \Delta^2 I_0, \\
I_{0000}I_0 &= 5I_{00000} + \Delta I_{000}, \\
I_{000}I_{00} &= 10I_{00000} + 3\Delta I_{000} + \frac{\Delta^2}{2} I_0, \\
I_{00}I_1 &= I_{001} + I_{010} + I_{100} - \frac{\Delta^2}{2} I_0, \\
I_{01}I_0 &= 2I_{001} + I_{010} - \frac{1}{2} (I_2 + \Delta^2 I_0),
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
I_{10}I_0 &= I_{010} + I_{100} + \Delta I_1 + I_2, \\
I_{000}I_0 &= 4I_{0000} + \Delta I_{00}, \quad (I_0)^2 = 2I_{00} + \Delta, \\
(I_0)^3 &= 6I_{000} + 3\Delta I_0, \quad I_{00}I_0 = 3I_{000} + \Delta I_0, \\
I_1I_0 &= I_{10} + I_{01} - \frac{\Delta^2}{2}.
\end{aligned}$$

Используя приведенные ранее моментные соотношения, строим аппроксимации $\hat{I}_{100}$, $\hat{I}_{010}$, $\hat{I}_{001}$, $\hat{I}_{10}$, $\hat{I}_{01}$, $\hat{I}_{11}$, $\hat{I}_{20}$, $\hat{I}_{02}$, $\hat{I}_2$, $\hat{I}_3$:

$$\hat{I}_{100} = -\frac{\Delta^{\frac{5}{2}}}{24} ((\zeta_0)^3 - 3\zeta_0), \quad \hat{I}_{010} = -\frac{\Delta^{\frac{5}{2}}}{12} ((\zeta_0)^3 - 3\zeta_0), \quad (6.173)$$

$$\hat{I}_{001} = -\frac{\Delta^{\frac{5}{2}}}{8} ((\zeta_0)^3 - 3\zeta_0), \quad \hat{I}_{11} = \frac{\Delta^3}{8} ((\zeta_0)^2 - 1), \quad (6.174)$$

$$\hat{I}_{20} = \frac{\Delta^3}{12} ((\zeta_0)^2 - 1), \quad \hat{I}_{02} = \frac{\Delta^3}{4} ((\zeta_0)^2 - 1), \quad (6.175)$$

$$\hat{I}_3 = -\frac{\Delta^{\frac{7}{2}}}{4}\zeta_0, \quad \hat{I}_2 = \frac{\Delta^{\frac{5}{2}}}{3} \left(\zeta_0 + \frac{\sqrt{3}}{2}\zeta_1 \right), \quad (6.176)$$

$$\hat{I}_{10} = \Delta^2 \left(-\frac{1}{6} ((\zeta_0)^2 - 1) - \frac{1}{4\sqrt{3}}\zeta_0\zeta_1 \pm \frac{1}{12\sqrt{2}} ((\zeta_1)^2 - 1) \right), \quad (6.177)$$

$$\hat{I}_{01} = \Delta^2 \left(-\frac{1}{3} ((\zeta_0)^2 - 1) - \frac{1}{4\sqrt{3}}\zeta_0\zeta_1 \mp \frac{1}{12\sqrt{2}} ((\zeta_1)^2 - 1) \right), \quad (6.178)$$

где ζ_0, ζ_1 — такие же случайные величины, как в (6.170)–(6.172). Нетрудно проверить, что аппроксимации (6.170)–(6.172), (6.173)–(6.178) удовлетворяют условию (6.169) при $r = 4$, $m = 1$, $n \geq 1$, т. е. являются слабыми аппроксимациями.

6.9 Заключение

Глядя в целом на результаты глав 5 и 6, можно пожалуй сказать, что подход кратных рядов Фурье (теорема 5.1) позволил по-новому посмотреть на "природу" повторных стохастических интегралов и просто-напросто открыл новые горизонты в исследовании проблемы численного интегрирования стохастических дифференциальных уравнений (см. последующие главы) и видоизменил как внешнюю (формульную) сторону данной проблемы, так и внутреннюю (идеологическую), т.е. обсуждаемая проблема стала во многих отношениях прозрачной. Безусловно данное мнение принадлежит автору и, возможно, является слишком эмоциональным и субъективным.

Часть III

Численные методы решения стохастических дифференциальных уравнений

Глава 7

Явные одношаговые сильные численные методы решения стохастических дифференциальных уравнений Ито

Настоящая глава посвящена построению явных сильных одношаговых методов численного решения стохастических дифференциальных уравнений Ито, основанных на разложениях Тейлора–Ито и Тейлора–Стратоновича. В ней приводятся новые представления некоторых известных численных методов, а также строится ряд новых численных методов, в том числе конечно-разностных, для стохастических дифференциальных уравнений Ито с многомерным шумом.

В данной главе рассматриваются методы численного интегрирования стохастических дифференциальных уравнений Ито, сходящиеся в сильном смысле (определение сильной сходимости численной схемы будет дано далее) к решениям этих уравнений.

Первые работы по этой тематике относятся, по-видимому, к 1950-м годам. В [134] (G. Maruyama, 1955) рассмотрен метод Эйлера для стохастических дифференциальных уравнений Ито и доказана его среднеквадратическая сходимость. По результатам численных экспериментов в [135] (D. J. Clements, B. D. O. Anderson, 1973) и [136] (D. J. Wright, 1974) можно видеть, что не любые эвристические стохастические обобщения хорошо известных численных методов сходятся к решениям стохастических дифференциальных уравнений. В [67, 70] (Г. Н. Мильштейн, 1974, 1988), в частности, построен явный сильный численный метод решения стохастических дифференциальных уравнений Ито порядка точности 1.0. Работа [138] (W. Rumelin, 1982) посвящена явным сильным численным схемам типа Рунге–Кутты того же порядка точности решения стохастических дифференциальных урав-

нений.

Явная сильная порядка точности 1.0 конечно-разностная численная схема решения стохастического дифференциального уравнения Ито со скалярным и аддитивным шумом представлена в [139] (E. Platen, 1984). Аналогичная численная схема построена в [140] (T. C. Gard, 1988). В [139] (E. Platen, 1984) и [86] (P. E. Kloeden, E. Platen, 1992) представлены явные сильные порядка точности 1.5 одношаговые конечно-разностные численные схемы решения стохастических дифференциальных уравнений Ито. Явная сильная одношаговая схема порядка точности 2.0 содержится в монографии [86] (P. E. Kloeden, E. Platen, 1992). В [141] (C. C. Chang, 1987) построен явный сильный порядка точности 2.0 конечно-разностный численный метод решения скалярного стохастического дифференциального уравнения Ито со скалярным шумом и автономным диффузионным коэффициентом. Аналогичная схема решения векторного стохастического дифференциального уравнения со скалярным шумом и автономной диффузионной матрицей рассматривается в работе [86] (P. E. Kloeden, E. Platen, 1992). Необходимо отметить, что существует также большое число других работ, посвященных явным сильным одношаговым численным методам решения стохастических дифференциальных уравнений Ито (см., например, [74–76, 91, 102, 103, 126]).

В настоящей главе строятся явные сильные одношаговые численные методы решения стохастических дифференциальных уравнений Ито, основанные на унифицированных разложениях Тейлора–Ито и Тейлора–Стратоновича, разложении Тейлора–Ито в форме Вагнера и Платена, разложении Тейлора–Стратоновича в форме Клоедена и Платена, а также на методе аппроксимации повторных стохастических интегралов, основанном на кратных рядах Фурье. Некоторые из представленных численных методов являются новыми версиями численных схем, построенных в [70] (Г. Н. Мильштейн, 1988), [86] (P. E. Kloeden, E. Platen, 1992), [87] (P. E. Kloeden, E. Platen, H. Schurz, 1994). Другие полученные численные методы являются новыми. Новизна этих методов, с одной стороны, связана с тем, что они построены на основе унифицированных разложений Тейлора–Ито и Тейлора–Стратоновича, а с другой с тем, что в указанных численных методах для аппроксимации входящих в них повторных стохастических интегралов используется полученный в главах 5 и 6 эффективный метод, основанный на кратных рядах Фурье. Отметим, что кратные ряды Фурье по полиномам Лежандра применяются впервые к численному интегрированию стохастических дифференциальных уравнений Ито именно в данной главе.

На основе некоторых из представленных численных методов построены конечно-разностные схемы. Среди них отметим явные сильные одношаговые конечно-разностные численные методы порядка точности 1.0, 1.5, 2.0 и 2.5, основанные на унифицированном разложении Тейлора–Ито и разложении Тейлора–Ито в форме Вагнера и Платена. Конечно-разностные численные методы порядка точности 1.5, 2.0 и 2.5 являются новыми, причем последние два для векторных стохастических дифференциальных уравнений Ито с многомерным шумом не имеют аналогов в литературе.

7.1 Сильная сходимость и тестирование сильных численных методов

Пусть $\mathbf{x}_t, t \in [0, T]$, — решение стохастического дифференциального уравнения Ито (1.35). Рассмотрим разбиение $\{\tau_p\}_{p=0}^N$ промежутка $[0, T]$ такое, что

$$0 = \tau_0 < \tau_1 < \dots < \tau_N = T, \Delta_N = \max_{0 \leq j \leq N-1} |\tau_{j+1} - \tau_j|. \quad (7.1)$$

Через $\mathbf{y}_{\tau_j}, j = 0, 1, \dots, N$, обозначим дискретную аппроксимацию процесса $\mathbf{x}_t, t \in [0, T]$, соответствующую максимальному шагу дискретизации Δ_N (вместо $\mathbf{y}_{\tau_j}$ правильнее было бы писать $\mathbf{y}_{\tau_j}^{\Delta_N}$, однако мы не будем этого делать для упрощения записи).

Дадим определение сильной сходимости дискретной аппроксимации.

Определение 7.1 [86]. Будем говорить, что дискретная аппроксимация (численный метод) $\mathbf{y}_{\tau_j}, j = 0, 1, \dots, N$, соответствующая максимальному шагу дискретизации Δ_N , сходится сильно к процессу $\mathbf{x}_t, t \in [0, T]$, в момент времени T , если

$$\lim_{\Delta_N \downarrow 0} \mathbb{M}\{|\mathbf{x}_T - \mathbf{y}_T|\} = 0.$$

Рассмотрим определение, характеризующее скорость сильной сходимости дискретной аппроксимации.

Определение 7.2 [86]. Будем говорить, что дискретная аппроксимация (численный метод) $\mathbf{y}_{\tau_j}, j = 0, 1, \dots, N$, соответствующая максимальному шагу дискретизации Δ_N , сходится сильно с порядком $\gamma > 0$ в момент времени T к процессу $\mathbf{x}_t, t \in [0, T]$, если существуют постоянная $C \in (0, \infty)$, которая не зависит от Δ_N , и число $\delta > 0$

такие, что

$$\varepsilon \stackrel{\text{def}}{=} \mathbf{M}\{|\mathbf{x}_T - \mathbf{y}_T|\} \leq C(\Delta_N)^\gamma \quad (7.2)$$

для всех $\Delta_N \in (0, \delta)$.

В данной главе, а также в последующих двух главах будут рассмотрены различные сильные численные методы решения стохастических дифференциальных уравнений Ито. Будут даны теоретические оценки скорости сходимости этих численных методов, т. е. при подходящих условиях будут получены оценки типа (7.2).

Вместе с тем интерес представляет также тестирование сильных численных методов, т. е. применение их к тестовым стохастическим дифференциальным уравнениям Ито с известными точными решениями и последующей численной оценкой величины $\mathbf{M}\{|\mathbf{x}_T - \mathbf{y}_T|\}$ при различных значениях Δ_N . Далее рассмотрим теоретические аспекты этого вопроса.

Сначала сделаем несколько замечаний по поводу статистических тестов.

Пусть $x_1, \dots, x_N$ — последовательность независимых гауссовских случайных величин с известным математическим ожиданием $\mathbf{M}$ и неизвестной дисперсией $\mathbf{D}$. Обычно в качестве оценки $\hat{\mathbf{D}}_N$ дисперсии $\mathbf{D}$ выбирают

$$\hat{\mathbf{D}}_N = \frac{1}{N-1} \sum_{i=1}^N (x_i - \hat{\mathbf{M}}_N)^2,$$

где $\hat{\mathbf{M}}_N = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N x_i$. Известно [86], что при $N > 3$ случайная величина ξ_N вида

$$\xi_N = \frac{\hat{\mathbf{M}}_N - \mathbf{M}}{\sqrt{\hat{\mathbf{D}}_N/N}}$$

удовлетворяет t -распределению Стьюдента с $N-1$ степенью свободы, нулевым математическим ожиданием и дисперсией $(N-1)/(N-3)$.

Далее имеем

$$\mathbf{P}\{|\hat{\mathbf{M}}_N - \mathbf{M}| < A\} = \mathbf{P}\{|\xi_N| < t\},$$

где $t = A\sqrt{N/\hat{\mathbf{D}}_N}$. Теперь с помощью статистических таблиц по заданному α можно отыскать число $t = t_{N-1}^{1-\alpha}$ такое, что

$$\mathbf{P}\left\{|\hat{\mathbf{M}}_N - \mathbf{M}| < t_{N-1}^{1-\alpha} \sqrt{\frac{\hat{\mathbf{D}}_N}{N}}\right\} = 1 - \alpha.$$

Таким образом, доверительный интервал для M с уровнем достоверности $1 - \alpha$ имеет вид

$$\left(\hat{M}_N - t_{N-1}^{1-\alpha} \sqrt{\frac{\hat{D}_N}{N}}, \hat{M}_N + t_{N-1}^{1-\alpha} \sqrt{\frac{\hat{D}_N}{N}} \right).$$

Проанализируем теперь ситуацию, когда случайные величины x_i , $i = 1, \dots, K$, являются негауссовскими, но независимыми и одинаково распределенными с известным математическим ожиданием M и неизвестной дисперсией D . Предположим, что M, N натуральные. Разобьем последовательность $\{x_i\}_{i=1}^{MN}$ на M групп по N случайных величин в каждой:

$$\{x_i^{(j)}\}_{i=1}^N, \quad j = 1, \dots, M,$$

где $x_i^{(j)}$, $i = 1, \dots, N; j = 1, \dots, M$, — переобозначенные случайные величины x_i , $i = 1, \dots, MN$, и рассмотрим случайные величины

$$\hat{M}_N^{(j)} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N x_i^{(j)}, \quad j = 1, \dots, M.$$

Согласно центральной предельной теореме при больших N (на практике обычно берут по меньшей мере $N \geq 15$) случайные величины $\hat{M}_N^{(j)}$ являются асимптотически гауссовскими. Кроме того, они независимы. Теперь можно в приближении применить описанную ранее процедуру построения доверительного интервала к последовательности случайных величин $\hat{M}_N^{(j)}$, $j = 1, \dots, M$. В результате будем иметь следующий доверительный интервал для M с уровнем достоверности $1 - \alpha$:

$$\left(\hat{M}_{N,M} - t_{M-1}^{1-\alpha} \sqrt{\frac{\hat{D}_{N,M}}{M}}, \hat{M}_{N,M} + t_{M-1}^{1-\alpha} \sqrt{\frac{\hat{D}_{N,M}}{M}} \right),$$

где

$$\begin{aligned} \hat{M}_{N,M} &= \frac{1}{M} \sum_{j=1}^M \hat{M}_N^{(j)}; \\ \hat{D}_{N,M} &= \frac{1}{M-1} \sum_{j=1}^M \left(\hat{M}_N^{(j)} - \hat{M}_{N,M} \right)^2. \end{aligned}$$

Применим приведенные ранее рассуждения к процедуре тестирования сильных численных методов.

Пусть $\mathbf{x}_T^{(k)}$, $k = 1, 2, \dots, L$, — значения в момент времени T для L независимых реализаций процесса $\mathbf{x}_t$, $t \in [0, T]$, являющегося решением стохастического дифференциального уравнения Ито (6.1), а $\mathbf{y}_T^{(k)}$,

$k = 1, 2, \dots, L$, — значения в момент времени T для L независимых реализаций дискретной аппроксимации $\mathbf{y}_{\tau_j}$, $j = 0, 1, \dots, N$, процесса $\mathbf{x}_t$, $t \in [0, T]$. При этом предполагается, что $\mathbf{x}_T^{(k)}$ и $\mathbf{y}_T^{(k)}$ при фиксированном $k \in \{1, 2, \dots, L\}$ соответствуют одной и той же реализации винеровского процесса $\mathbf{f}_t$, $t \in [0, T]$.

Введем оценку $\hat{\varepsilon}_L$ величины ε вида (7.2) следующим образом:

$$\hat{\varepsilon}_L = \frac{1}{L} \sum_{k=1}^L |\mathbf{x}_T^{(k)} - \mathbf{y}_T^{(k)}|.$$

Как уже отмечалось, в соответствии с центральной предельной теоремой $\hat{\varepsilon}_L$ — асимптотически гауссовская случайная величина при больших L , причем $\hat{\varepsilon}_L \xrightarrow{d} \varepsilon$ при $L \rightarrow \infty$. Очевидно, что на практике L всегда конечно. Однако мы можем приближенно построить доверительный интервал для ε таким же образом, как это было сделано ранее. Для этого рассмотрим M независимых реализаций $\hat{\varepsilon}_L^{(j)}$ случайной величины $\hat{\varepsilon}_L$:

$$\hat{\varepsilon}_L^{(j)} = \frac{1}{L} \sum_{k=1}^L |\mathbf{x}_T^{(k,j)} - \mathbf{y}_T^{(k,j)}|, \quad j = 1, \dots, M,$$

где $\mathbf{x}_T^{(k,j)}$ и $\mathbf{y}_T^{(k,j)}$, $k = 1, \dots, L$; $j = 1, \dots, M$, — независимые реализации значений процесса $\mathbf{x}_t$, $t \in [0, T]$, и дискретной аппроксимации $\mathbf{y}_{\tau_j}$, $j = 0, 1, \dots, N$, соответственно в момент времени T , причем $\mathbf{x}_T^{(k,j)}$ и $\mathbf{y}_T^{(k,j)}$ при фиксированной паре (k, j) соответствуют одной и той же реализации винеровского процесса $\mathbf{f}_t$, $t \in [0, T]$.

Положим теперь

$$\hat{\varepsilon}_{L,M} = \frac{1}{LM} \sum_{k=1}^L \sum_{j=1}^M |\mathbf{x}_T^{(k,j)} - \mathbf{y}_T^{(k,j)}|, \quad (7.3)$$

$$\hat{\sigma}_\varepsilon^2 = \frac{1}{M-1} \sum_{j=1}^M \left(\hat{\varepsilon}_L^{(j)} - \hat{\varepsilon}_{L,M} \right)^2,$$

где $\hat{\varepsilon}_{L,M}$ и $\hat{\sigma}_\varepsilon^2$ — оценки математического ожидания и дисперсии средних $\hat{\varepsilon}_L^{(j)}$ соответственно. Построим доверительный интервал для ε :

$$I_{L,M} = (\hat{\varepsilon}_{L,M} - \Delta \hat{\varepsilon}_{L,M}, \hat{\varepsilon}_{L,M} + \Delta \hat{\varepsilon}_{L,M}),$$

где

$$\Delta \hat{\varepsilon}_{L,M} = t_{M-1}^{1-\alpha} \sqrt{\frac{\hat{\sigma}_\varepsilon^2}{M}},$$

т. е. при достаточно больших L можно приближенно считать, что с вероятностью $1 - \alpha$ истинное значение ε лежит в интервале $I_{L,M}$.

Нетрудно видеть, что $\Delta\hat{\varepsilon}_{L,M}$ убывает с ростом M , но возрастает с уменьшением параметра α или ростом вероятности $1 - \alpha$.

Отметим, что рассмотренная схема построения доверительного интервала для оценки среднего применена к тестированию сильных численных методов решения стохастических дифференциальных уравнений Ито в [86, 87] и будет использована нами в дальнейшем.

Для тестирования сильных численных методов так же, как и в [86, 87], будем выбирать следующие линейные стохастические дифференциальные уравнения Ито с мультипликативным шумом:

$$dx_t = ax_t dt + bx_t df_t, \quad (7.4)$$

$$d\mathbf{x}_t = A\mathbf{x}_t dt + B\mathbf{x}_t df_t, \quad (7.5)$$

где $x_t \in \mathbb{R}^1$; $\mathbf{x}_t \in \mathbb{R}^2$; $a, b \in \mathbb{R}^1$; $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$; $A^{(11)} = A^{(22)} = -a$; $A^{(12)} = A^{(21)} = a$; $B = bI \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$; I — единичная (2×2) -матрица; f_t — скалярный стандартный винеровский процесс.

Выбор тестовых уравнений (7.4), (7.5) обусловлен двумя причинами. Во-первых, эти уравнения имеют достаточно простые точные решения, определяемые соответственно равенствами [86]

$$x_t = e^{(a - \frac{1}{2}b^2)t + bf_t} x_0,$$

$$\mathbf{x}_t = e^{(A - \frac{1}{2}B^2)t + Bf_t} \mathbf{x}_0 = Q \begin{pmatrix} e^{-\frac{1}{2}b^2 t + bf_t} & 0 \\ 0 & e^{(-2a - \frac{1}{2}b^2)t + bf_t} \end{pmatrix} Q^{-1} \mathbf{x}_0,$$

где

$$Q = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = Q^{-1}.$$

Во-вторых, уравнения (7.4) и (7.5) являются стохастическими дифференциальными уравнениями с мультипликативным шумом, и, как следствие, выражения рассматриваемых далее сильных численных методов, примененных к уравнениям (7.4) и (7.5), содержат значительную часть слагаемых, включающих в себя повторные стохастические интегралы Стратоновича или Ито. Это обстоятельство позволяет в достаточно полной мере оценить работу тестируемых численных методов.

Отметим, что далее так же, как и в [86], в численных экспериментах будем выбирать, как правило, $T = 1$, $N = 100$, $M = 20$, $\alpha = 0.1$.

7.2 Явный метод Эйлера

В настоящем разделе рассмотрим наиболее простой численный метод решения стохастических дифференциальных уравнений Ито — метод Эйлера (см. также [70, 84]). Применительно к уравнению (6.1) этот численный метод имеет вид

$$\mathbf{y}_{p+1} = \mathbf{y}_p + \mathbf{a}(\mathbf{y}_p, \tau_p)(\tau_{p+1} - \tau_p) + \Sigma(\mathbf{y}_p, \tau_p)(\mathbf{f}_{\tau_{p+1}} - \mathbf{f}_{\tau_p}), \quad (7.6)$$

где $\mathbf{y}_{\tau_p} \stackrel{\text{def}}{=} \mathbf{y}_p$; $\{\tau_p\}_{p=0}^N$ — разбиение промежутка $[0, T]$, которое удовлетворяет условию (7.1).

Оценим скорость сходимости метода Эйлера (7.6).

Теорема 7.1 [86]. Пусть для всех $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$, $s, t \in [0, T]$ выполнены следующие условия:

$$\begin{aligned} \mathbb{M}\{|\mathbf{x}_0|^2\} &< \infty, \\ (\mathbb{M}\{|\mathbf{x}_0 - \mathbf{y}_0|^2\})^{1/2} &\leq C_1 \sqrt{\Delta_N}, \end{aligned} \quad (7.7)$$

$$|\mathbf{a}(\mathbf{x}, t) - \mathbf{a}(\mathbf{y}, t)| + \sum_{i=1}^m |\Sigma_i(\mathbf{x}, t) - \Sigma_i(\mathbf{y}, t)| \leq C_2 |\mathbf{x} - \mathbf{y}|,$$

$$|\mathbf{a}(\mathbf{x}, t)| + \sum_{i=1}^m |\Sigma_i(\mathbf{x}, t)| \leq C_3(1 + |\mathbf{x}|),$$

$$|\mathbf{a}(\mathbf{x}, s) - \mathbf{a}(\mathbf{x}, t)| + \sum_{i=1}^m |\Sigma_i(\mathbf{x}, s) - \Sigma_i(\mathbf{x}, t)| \leq C_4 \sqrt{s - t}(1 + |\mathbf{x}|),$$

где $C_1, \dots, C_4$ — постоянные, которые не зависят от Δ_N ; Σ_i — i -й столбец матрицы Σ . Тогда

$$\mathbb{M}\{|\mathbf{x}_T - \mathbf{y}_N|\} \leq K \sqrt{\Delta_N},$$

где постоянная K не зависит от Δ_N , а $\mathbf{x}_T$ — решение стохастического дифференциального уравнения (6.1) при $t = T$.

Доказательство. В условиях настоящей теоремы выполнены условия леммы 4.4 из главы 4. Тогда

$$\mathbb{M}\{|\mathbf{x}_s|^2\} \leq K_1(1 + \mathbb{M}\{|\mathbf{x}_0|^2\}) \leq K_2 < \infty.$$

Положим

$$\mathbf{z}_t = \mathbf{y}_p + \int_{\tau_p}^t \mathbf{a}(\mathbf{y}_p, \tau_p) ds + \int_{\tau_p}^t \Sigma(\mathbf{y}_p, \tau_p) d\mathbf{f}_s, \quad t \in [\tau_p, \tau_{p+1}].$$

Очевидно, что процесс $\mathbf{z}_t$ с вероятностью 1 совпадает с $\mathbf{y}_p$ при $t = \tau_p$, $p = 0, 1, \dots, N$.

Нетрудно видеть, что

$$\mathbf{z}_t - \mathbf{x}_t = \mathbf{y}_0 - \mathbf{x}_0 + D_t + F_t + H_t, \quad (7.8)$$

где

$$\begin{aligned} D_t &= U_t + V_t; \quad F_t = R_t + G_t; \quad H_t = Q_t + P_t; \\ U_t &= \sum_{l=0}^{n_t-1} \int_{\tau_l}^{\tau_{l+1}} (\mathbf{a}(\mathbf{x}_s, \tau_l) - \mathbf{a}(\mathbf{x}_s, s)) ds + \int_{\tau_{n_t}}^t (\mathbf{a}(\mathbf{x}_s, \tau_{n_t}) - \mathbf{a}(\mathbf{x}_s, s)) ds; \\ V_t &= \sum_{l=0}^{n_t-1} \int_{\tau_l}^{\tau_{l+1}} (\Sigma(\mathbf{x}_s, \tau_l) - \Sigma(\mathbf{x}_s, s)) d\mathbf{f}_s + \int_{\tau_{n_t}}^t (\Sigma(\mathbf{x}_s, \tau_{n_t}) - \Sigma(\mathbf{x}_s, s)) d\mathbf{f}_s; \\ R_t &= \sum_{l=0}^{n_t-1} \int_{\tau_l}^{\tau_{l+1}} (\mathbf{a}(\mathbf{x}_{\tau_l}, \tau_l) - \mathbf{a}(\mathbf{x}_s, \tau_l)) ds + \int_{\tau_{n_t}}^t (\mathbf{a}(\mathbf{x}_{\tau_{n_t}}, \tau_{n_t}) - \mathbf{a}(\mathbf{x}_s, \tau_{n_t})) ds; \\ G_t &= \sum_{l=0}^{n_t-1} \int_{\tau_l}^{\tau_{l+1}} (\Sigma(\mathbf{x}_{\tau_l}, \tau_l) - \Sigma(\mathbf{x}_s, \tau_l)) d\mathbf{f}_s + \int_{\tau_{n_t}}^t (\Sigma(\mathbf{x}_{\tau_{n_t}}, \tau_{n_t}) - \Sigma(\mathbf{x}_s, \tau_{n_t})) d\mathbf{f}_s; \\ Q_t &= \sum_{l=0}^{n_t-1} \int_{\tau_l}^{\tau_{l+1}} (\mathbf{a}(\mathbf{y}_l, \tau_l) - \mathbf{a}(\mathbf{x}_{\tau_l}, \tau_l)) ds + \int_{\tau_{n_t}}^t (\mathbf{a}(\mathbf{y}_{n_t}, \tau_{n_t}) - \mathbf{a}(\mathbf{x}_{\tau_{n_t}}, \tau_{n_t})) ds; \\ P_t &= \sum_{l=0}^{n_t-1} \int_{\tau_l}^{\tau_{l+1}} (\Sigma(\mathbf{y}_l, \tau_l) - \Sigma(\mathbf{x}_{\tau_l}, \tau_l)) d\mathbf{f}_s + \int_{\tau_{n_t}}^t (\Sigma(\mathbf{y}_{n_t}, \tau_{n_t}) - \Sigma(\mathbf{x}_{\tau_{n_t}}, \tau_{n_t})) d\mathbf{f}_s; \\ n_t &= \max_j \{j : \tau_j \leq t\}. \end{aligned}$$

Из (7.8) получаем

$$\begin{aligned} Z_t \stackrel{\text{def}}{=} \mathbb{M}\{|\mathbf{z}_t - \mathbf{x}_t|^2\} &\leq K_3 \left(\mathbb{M}\{|\mathbf{y}_0 - \mathbf{x}_0|^2\} + \mathbb{M}\{|U_t|^2\} + \mathbb{M}\{|V_t|^2\} + \right. \\ &\quad \left. + \mathbb{M}\{|R_t|^2\} + \mathbb{M}\{|G_t|^2\} + \mathbb{M}\{|Q_t|^2\} + \mathbb{M}\{|P_t|^2\} \right). \end{aligned} \quad (7.9)$$

Оценим поочередно с помощью стандартных неравенств для математических ожиданий и моментов стохастических интегралов (см. главу 1) слагаемые в правой части (7.9). Имеем

$$\begin{aligned} &\left(\mathbb{M}\{|U_t^{(k)}|^2\} \right)^{\frac{1}{2}} \leq \\ &\leq \sum_{l=0}^{n_t-1} \left(\mathbb{M}\left\{ \left(\int_{\tau_l}^{\tau_{l+1}} (\mathbf{a}^{(k)}(\mathbf{x}_s, \tau_l) - \mathbf{a}^{(k)}(\mathbf{x}_s, s)) ds \right)^2 \right\} \right)^{\frac{1}{2}} + \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \left(\mathbb{M} \left\{ \left(\int_{\tau_{n_t}}^t (\mathbf{a}^{(k)}(\mathbf{x}_s, \tau_{n_t}) - \mathbf{a}^{(k)}(\mathbf{x}_s, s)) ds \right)^2 \right\} \right)^{\frac{1}{2}} \leq \\
& \leq \sum_{l=0}^{n_t-1} \left(\Delta_N \int_{\tau_l}^{\tau_{l+1}} \mathbb{M} \left\{ (\mathbf{a}^{(k)}(\mathbf{x}_s, \tau_l) - \mathbf{a}^{(k)}(\mathbf{x}_s, s))^2 \right\} ds \right)^{\frac{1}{2}} + \\
& + \left((t - \tau_{n_t}) \int_{\tau_{n_t}}^t \mathbb{M} \left\{ (\mathbf{a}^{(k)}(\mathbf{x}_s, \tau_{n_t}) - \mathbf{a}^{(k)}(\mathbf{x}_s, s))^2 \right\} ds \right)^{\frac{1}{2}} \leq \\
& \leq \sqrt{\Delta_N} C_4 \left(\sum_{l=0}^{n_t-1} \left(\Delta_N \int_{\tau_l}^{\tau_{l+1}} \mathbb{M} \left\{ (1 + |\mathbf{x}_s|)^2 \right\} ds \right)^{\frac{1}{2}} + \right. \\
& \left. + \left((t - \tau_{n_t}) \int_{\tau_{n_t}}^t \mathbb{M} \left\{ (1 + |\mathbf{x}_s|)^2 \right\} ds \right)^{\frac{1}{2}} \right) \leq K_4 \sqrt{\Delta_N}, \tag{7.10}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \left(\mathbb{M} \{ |V_t^{(k)}|^2 \} \right)^{\frac{1}{2}} \leq \\
& \leq \sum_{i=1}^m \left(\mathbb{M} \left\{ \left(\sum_{l=0}^{n_t-1} \int_{\tau_l}^{\tau_{l+1}} (\Sigma^{(ki)}(\mathbf{x}_s, \tau_l) - \Sigma^{(ki)}(\mathbf{x}_s, s)) d\mathbf{f}_s^{(i)} + \right. \right. \\
& \left. \left. + \int_{\tau_{n_t}}^t (\Sigma^{(ki)}(\mathbf{x}_s, \tau_{n_t}) - \Sigma^{(ki)}(\mathbf{x}_s, s)) d\mathbf{f}_s^{(i)} \right)^2 \right\} \right)^{\frac{1}{2}} \leq \\
& \leq \sum_{i=1}^m \left(\sum_{l=0}^{n_t-1} \int_{\tau_l}^{\tau_{l+1}} \mathbb{M} \left\{ (\Sigma^{(ki)}(\mathbf{x}_s, \tau_l) - \Sigma^{(ki)}(\mathbf{x}_s, s))^2 \right\} ds + \right. \\
& \left. + \int_{\tau_{n_t}}^t \mathbb{M} \left\{ (\Sigma^{(ki)}(\mathbf{x}_s, \tau_{n_t}) - \Sigma^{(ki)}(\mathbf{x}_s, s))^2 \right\} ds \right)^{\frac{1}{2}} \leq \\
& \leq C_4 \sum_{i=1}^m \left(\sum_{l=0}^{n_t-1} \int_{\tau_l}^{\tau_{l+1}} \mathbb{M} \left\{ (1 + |\mathbf{x}_s|)^2 \right\} \Delta_N ds + \right. \\
& \left. + \int_{\tau_{n_t}}^t \mathbb{M} \left\{ (1 + |\mathbf{x}_s|)^2 \right\} |t - \tau_{n_t}| ds \right)^{\frac{1}{2}} \leq K_5 \sqrt{\Delta_N}. \tag{7.11}
\end{aligned}$$

Далее заметим, что из леммы 4.4 (см. главу 4) и условий теоремы следуют оценки

$$\mathbb{M} \{ |\mathbf{x}_s - \mathbf{x}_{\tau_l}|^2 \} \leq C_5 |s - \tau_l|, \quad \mathbb{M} \{ |\mathbf{x}_s - \mathbf{x}_{\tau_{n_t}}|^2 \} \leq C_6 |s - \tau_{n_t}|,$$

где C_5, C_6 — постоянные.

Тогда

$$\begin{aligned}
& \left(\mathbb{M}\{|R_t^{(k)}|^2\} \right)^{\frac{1}{2}} \leq \\
& \leq \sum_{l=0}^{n_t-1} \left(\Delta_N \int_{\tau_l}^{\tau_{l+1}} \mathbb{M} \left\{ \left(\mathbf{a}^{(k)}(\mathbf{x}_{\tau_l}, \tau_l) - \mathbf{a}^{(k)}(\mathbf{x}_s, \tau_l) \right)^2 \right\} ds \right)^{\frac{1}{2}} + \\
& + \left((t - \tau_{n_t}) \int_{\tau_{n_t}}^t \mathbb{M} \left\{ \left(\mathbf{a}^{(k)}(\mathbf{x}_{\tau_{n_t}}, \tau_{n_t}) - \mathbf{a}^{(k)}(\mathbf{x}_s, \tau_{n_t}) \right)^2 \right\} ds \right)^{\frac{1}{2}} \leq \\
& \leq C_2 \left(\sum_{l=0}^{n_t-1} \left(\Delta_N \int_{\tau_l}^{\tau_{l+1}} \mathbb{M} \{ |\mathbf{x}_s - \mathbf{x}_{\tau_l}|^2 \} ds \right)^{\frac{1}{2}} + \right. \\
& \left. + \left((t - \tau_{n_t}) \int_{\tau_{n_t}}^t \mathbb{M} \{ |\mathbf{x}_s - \mathbf{x}_{\tau_{n_t}}|^2 \} ds \right)^{\frac{1}{2}} \right) \leq C_7 \sqrt{\Delta_N}, \quad (7.12)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \left(\mathbb{M}\{|G_t^{(k)}|^2\} \right)^{\frac{1}{2}} \leq \\
& \leq \sum_{i=1}^m \left(\sum_{l=0}^{n_t-1} \int_{\tau_l}^{\tau_{l+1}} \mathbb{M} \left\{ \left(\Sigma^{(ki)}(\mathbf{x}_{\tau_l}, \tau_l) - \Sigma^{(ki)}(\mathbf{x}_s, \tau_l) \right)^2 \right\} ds + \right. \\
& \left. + \int_{\tau_{n_t}}^t \mathbb{M} \left\{ \left(\Sigma^{(ki)}(\mathbf{x}_{\tau_{n_t}}, \tau_{n_t}) - \Sigma^{(ki)}(\mathbf{x}_s, \tau_{n_t}) \right)^2 \right\} ds \right)^{\frac{1}{2}} \leq C_8 \sqrt{\Delta_N}. \quad (7.13)
\end{aligned}$$

Наконец, приходим к следующим оценкам:

$$\begin{aligned}
& \left(\mathbb{M}\{|Q_t^{(k)}|^2\} \right)^{\frac{1}{2}} \leq \\
& \leq C_2 \left(\sum_{l=0}^{n_t-1} \left(\Delta_N \int_{\tau_l}^{\tau_{l+1}} \mathbb{M} \{ |\mathbf{y}_l - \mathbf{x}_{\tau_l}|^2 \} ds \right)^{\frac{1}{2}} + \right. \\
& \left. + \left((t - \tau_{n_t}) \int_{\tau_{n_t}}^t \mathbb{M} \{ |\mathbf{y}_{n_t} - \mathbf{x}_{\tau_{n_t}}|^2 \} ds \right)^{\frac{1}{2}} \right) \leq \\
& \leq C_2 \left(\sum_{l=0}^{n_t-1} \Delta_N \sqrt{Z_{\tau_l}} + (t - \tau_{n_t}) \sqrt{Z_{\tau_{n_t}}} \right) \leq \\
& \leq C_2 \int_0^t \sqrt{Z_u} du \leq C_9 \left(\int_0^t Z_u du \right)^{\frac{1}{2}}, \quad (7.14)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \left(\mathbb{M}\{|P_t^{(k)}|^2\} \right)^{\frac{1}{2}} \leq \\
& \leq \sum_{i=1}^m \left(\sum_{l=0}^{n_t-1} \int_{\tau_l}^{\tau_{l+1}} \mathbb{M} \left\{ \left(\Sigma^{(ki)}(\mathbf{y}_l, \tau_l) - \Sigma^{(ki)}(\mathbf{x}_{\tau_l}, \tau_l) \right)^2 \right\} ds + \right. \\
& \quad \left. + \int_{\tau_{n_t}}^t \mathbb{M} \left\{ \left(\Sigma^{(ki)}(\mathbf{y}_{n_t}, \tau_{n_t}) - \Sigma^{(ki)}(\mathbf{x}_{\tau_{n_t}}, \tau_{n_t}) \right)^2 \right\} ds \right)^{\frac{1}{2}} \leq \\
& \leq C_{10} \left(\sum_{l=0}^{n_t-1} Z_{\tau_l} \Delta_N + Z_{\tau_{n_t}} (t - \tau_{n_t}) \right)^{\frac{1}{2}} \leq C_{10} \left(\int_0^t Z_u du \right)^{\frac{1}{2}}. \tag{7.15}
\end{aligned}$$

Отметим, что последний переход в (7.14) получаем с использованием неравенства

$$\left| \int_0^t f(x)g(x)dx \right|^2 \leq \int_0^t f^2(x)dx \int_0^t g^2(x)dx$$

при $f(x) \equiv \sqrt{Z_x}$, $g(x) \equiv 1$.

Объединяя (7.9)–(7.11) и (7.12)–(7.15), приходим к неравенству

$$Z_t \leq K_6 \mathbb{M}\{|\mathbf{y}_0 - \mathbf{x}_0|^2\} + K_7 \Delta_N + K_8 \int_0^t Z_u du.$$

Учитывая условие (7.7), имеем

$$Z_t \leq K_9 \Delta_N + K_8 \int_0^t Z_u du,$$

откуда с помощью неравенства Гронуолла находим

$$Z_t \leq K_9 \Delta_N, \quad t \in [0, T]. \tag{7.16}$$

Далее с учетом (7.16) имеем

$$\mathbb{M}\{|\mathbf{x}_T - \mathbf{y}_N|\} \leq \sqrt{Z_T} \leq K \sqrt{\Delta_N},$$

где постоянная K не зависит от Δ_N . Теорема доказана. $\square$

Численный эксперимент 7.1. Для стохастического дифференциального уравнения Ито

$$dx_t = ax_t dt + bx_t df_t, \quad x_0 = 1, \quad t \in [0, T], \quad f_t \in \mathbb{R}^1, \tag{7.17}$$

с моделировать 2000 ($M = 20$ групп по $N = 100$ реализаций) независимых реализаций случайной величины x_T при $T = 1$, $a = b = 1.5$ по формуле

$$x_T = x_0 e^{(a - \frac{1}{2}b^2)T + b\sqrt{\Delta} \sum_{i=0}^{N-1} \zeta_i}$$

и с помощью метода Эйлера (7.6), выбирая $f_{\tau_{i+1}} - f_{\tau_i} = \sqrt{\Delta}\zeta_i$ в (7.6). Здесь $N = T/\Delta$; $\Delta = 2^{-j}$; ζ_i , $i = 0, 1, \dots, N-1$, — независимые стандартные гауссовские случайные величины.

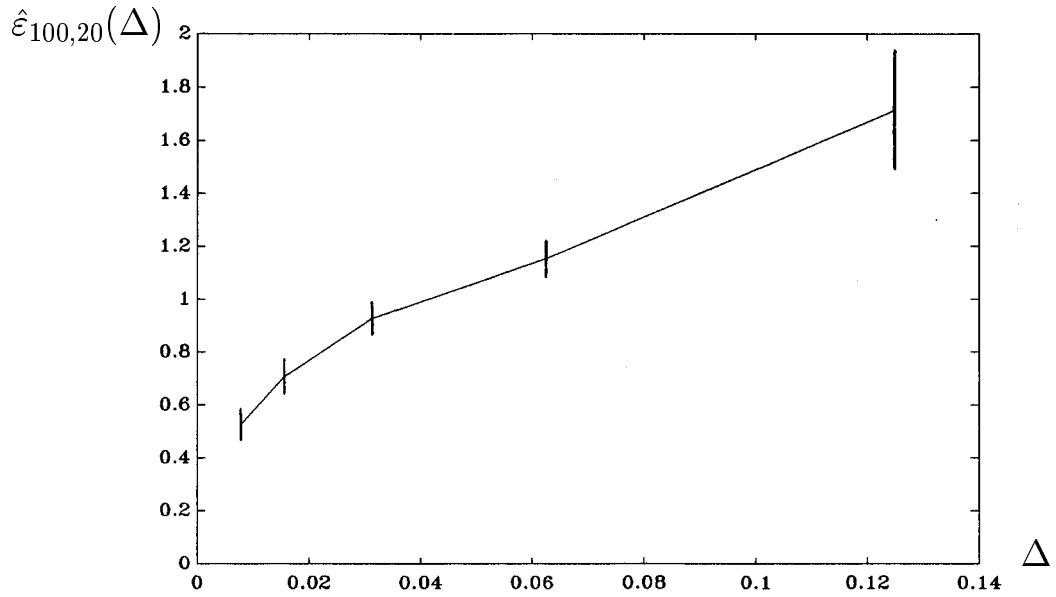


Рис. 7.1. Результат численного эксперимента 7.1.

Вычислить оценку $\hat{\varepsilon}_{100,20}$ ошибки $\varepsilon = M \{|x_T - y_T|\}$ по формуле (7.3) (y_T определяется из (7.6)) и 90%-й доверительный интервал для ε . Повторить вычисления при $\Delta = 2^{-j}$, $j = 4, 5, 6, 7$, и изобразить графически зависимость $\hat{\varepsilon}_{100,20}(\Delta)$ с 90%-ми доверительными интервалами для ε при указанных значениях Δ .

На рис. 7.1 представлен результат численного эксперимента 7.1. По данному рисунку можно судить, что зависимость $\hat{\varepsilon}_{100,20}(\Delta)$ приблизительно соответствует зависимости $C\sqrt{\Delta}$, C — постоянная.

Следует отметить, что метод Эйлера достаточно хорошо ведет себя, когда коэффициенты стохастического дифференциального уравнения Ито мало отличаются от постоянных. В то же время в ряде случаев (см. рис. 7.1) точности метода Эйлера оказывается явно недоста-

точно для получения приемлемых результатов. В связи с этим возникает необходимость построения более точных численных методов решения стохастических дифференциальных уравнений Ито. Этому вопросу будут посвящены последующие разделы данной главы, а также главы 8–10.

Отметим, что ряд численных экспериментов из глав 7–10 осуществлен в [86] для других значений исходных параметров. Однако часть численных экспериментов из глав 7–10, в том числе все численные эксперименты, касающиеся сильных численных методов порядка точности 2.5 и 3.0 и всех трехшаговых численных методов, являются оригинальными.

7.3 Явные одношаговые методы, основанные на унифицированном разложении Тейлора–Ито

7.3.1 Метод порядка точности $r/2$. Теорема о сходимости

Рассмотрим стохастическое дифференциальное уравнение Ито вида

$$d\mathbf{x}_t = \mathbf{a}(\mathbf{x}_t, t)dt + \Sigma(\mathbf{x}_t, t)d\mathbf{f}_t, \quad \mathbf{x}_0 = \mathbf{x}(0, \omega), \quad (7.18)$$

где $\mathbf{x}_t \in \mathbb{R}^n$ — случайный процесс, являющийся решением уравнения (7.18); $\mathbf{f}_t \in \mathbb{R}^m$ — стандартный векторный винеровский процесс с независимыми компонентами $\mathbf{f}_t^{(i)}$, $i = 1, \dots, m$; $\mathbf{a} : \mathbb{R}^n \times [0, T] \rightarrow \mathbb{R}^n$, $\Sigma : \mathbb{R}^n \times [0, T] \rightarrow \mathbb{R}^{n \times m}$ — неслучайные функции, удовлетворяющие условиям AI, AII (теорема 1.6); $\mathbf{x}_0$ — начальное условие, которое стохастически не зависит от приращения $\mathbf{f}_\tau - \mathbf{f}_0$ при $\tau > 0$ и удовлетворяет условию AIII теоремы 1.6.

Предположим, что условия теоремы 4.1 выполнены. Тогда для процесса $\eta_s = R(\mathbf{x}_s, s)$, где $R : \mathbb{R}^n \times [0, T] \rightarrow \mathbb{R}^n$, а $\mathbf{x}_s$ — решение стохастического дифференциального уравнения Ито (7.18), справедливо с вероятностью 1 следующее унифицированное разложение Тейлора–Ито:

$$\eta_s = \sum_{q=0}^r \sum_{(k,j,l_1,\dots,l_k) \in \mathcal{D}'_q} \frac{(s-t)^j}{j!} {}^{(k)}G_{l_1} \dots G_{l_k} L^j \{\eta_t\} \cdot {}^{(k)}I_{l_1 \dots l_{k_s,t}} + H'_{r+1,s,t}, \quad (7.19)$$

где

$$H'_{r+1,s,t} = \hat{H}_{r+1,s,t} - \mathbf{1}_{\{r=2d+1, d \in N\}} \frac{(s-t)^{\frac{1}{2}(r+1)}}{\left(\frac{1}{2}(r+1)\right)!} L^{\frac{1}{2}(r+1)} \eta_t,$$

правая часть (7.19) существует в среднеквадратическом смысле и в ней введены обозначения

$$^{(k)}I_{l_1 \dots l_{k,s},t} = \left\| I_{l_1 \dots l_{k,s},t}^{(i_1 \dots i_k)} \right\|_{i_1, \dots, i_k=1}^m,$$

$$I_{l_1 \dots l_{k,s},t}^{(i_1 \dots i_k)} = \begin{cases} \int_t^s (t - \tau_k)^{l_k} \dots \int_t^{\tau_2} (t - \tau_1)^{l_1} d\mathbf{f}_{\tau_1}^{(i_1)} \dots d\mathbf{f}_{\tau_k}^{(i_k)} & \text{при } k > 0, \\ 1 & \text{при } k = 0, \end{cases} \quad (7.20)$$

$$G_p^{(i)} = \frac{1}{p} \left(G_{p-1}^{(i)} L - L G_{p-1}^{(i)} \right), \quad p = 1, 2, \dots; i = 1, \dots, m,$$

$$\mathcal{D}'_q = \mathcal{D}_q \cup \{ (k, j, l_1, \dots, l_k) : k = l_1 = \dots = l_k = 0 \text{ и } 2j = q + 1 \},$$

$$\mathcal{D}_q = \left\{ (k, j, l_1, \dots, l_k) : k + 2 \left(j + \sum_{p=1}^k l_p \right) = q; k, j, l_1, \dots, l_k = 0, 1, \dots \right\};$$

остальные обозначения такие же, как в теореме 4.6.

Пусть $R(\mathbf{x}, t) \equiv \mathbf{x}$, $s = \tau_{p+1}$, $t = \tau_p$, $\{\tau_p\}_{p=0}^N$ — разбиение промежутка $[0, T]$, для которого выполняется условие (7.1). Тогда из (7.19) получим общее представление явной одношаговой численной схемы решения стохастического дифференциального уравнения Ито (7.18)

$$\mathbf{y}_{\tau_{p+1}} = \sum_{q=0}^r \sum_{(k,j,l_1,\dots,l_k) \in \mathcal{D}'_q} \frac{(\tau_{p+1} - \tau_p)^j}{j!} {}^{(k)}G_{l_1} \dots G_{l_k} L^j \{ \mathbf{y}_{\tau_p} \} \cdot {}^{(k)}\hat{I}_{l_1 \dots l_{k\tau_{p+1}, \tau_p}}, \quad (7.21)$$

где ${}^{(k)}\hat{I}_{l_1 \dots l_{k\tau_{p+1}, \tau_p}} = \left\| \hat{I}_{l_1 \dots l_{k\tau_{p+1}, \tau_p}}^{(i_1 \dots i_k)} \right\|_{i_1, \dots, i_k=1}^m$, а $\hat{I}_{l_1 \dots l_{k\tau_{p+1}, \tau_p}}^{(i_1 \dots i_k)}$ — аппроксимация повторного стохастического интеграла Ито вида (7.20), причем $\hat{I}_{l_1 \dots l_{0\tau_{p+1}, \tau_p}}^{(i_1 \dots i_0)} \stackrel{\text{def}}{=} 1$.

Для среднеквадратической аппроксимации повторных стохастических интегралов Ито вида (7.20) можно воспользоваться теоремой 5.1.

Отметим, что выбор пределов суммирования в усеченном ряде, аппроксимирующем повторные стохастические интегралы Ито с помощью теоремы 5.1, является предметом отдельного исследования. Во всяком случае, согласно теореме 5.1, можно брать $p_1 = \dots = p_k = p$.

Определим процесс $\mathbf{y}_s$, $s \in [\tau_p, \tau_{p+1}]$, $p = 0, 1, \dots, N - 1$, равенством (7.21), в котором необходимо заменить τ_{p+1} на s .

Для всех $s \in [0, T]$ положим

$$z_s \stackrel{\text{def}}{=} \mathbf{M} \left\{ \sup_{0 \leq t \leq s} |\mathbf{x}_t - \mathbf{y}_t|^2 \right\}.$$

Далее для простоты будем считать, что $p\Delta \stackrel{\text{def}}{=} \tau_p$, $\Delta = T/N$, $p \in \{0, 1, \dots, N\}$, $T = \tau_N$.

Сформулируем теорему о сильной сходимости явной одношаговой численной схемы (7.21).

Теорема 7.2. Пусть для фиксированного $r = 2, 3, \dots$ выполнены следующие условия:

1. Для всех $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$, $i_1, \dots, i_k = 1, \dots, m$, $(k, j, l_1, \dots, l_k) \in \bigcup_{q=0}^r \mathcal{A}_q$ и $t \in [0, T]$

$$\left| G_{l_1}^{(i_1)} \dots G_{l_k}^{(i_k)} L^j \mathbf{x} - G_{l_1}^{(i_1)} \dots G_{l_k}^{(i_k)} L^j \mathbf{y} \right| \leq K_1 |\mathbf{x} - \mathbf{y}|,$$

где

$$\mathcal{A}_q = \left\{ (k, j, l_1, \dots, l_k) : k + j + \sum_{p=1}^k l_p = q; k, j, l_1, \dots, l_k = 0, 1, \dots \right\}.$$

2. Для всех $(k, j, l_1, \dots, l_k) \in \bigcup_{q=0}^r \mathcal{D}_q$, $k \neq 0$, $i_1, \dots, i_k = 1, \dots, m$ и $p \in \{0, 1, \dots, N-1\}$ с вероятностью 1 имеем $\mathbb{M} \left\{ \hat{I}_{l_1 \dots l_k \tau_{p+1}, \tau_p}^{(i_1 \dots i_k)} | \mathcal{F}_{\tau_p} \right\} = 0$, и

$$\mathbb{M} \left\{ \left(I_{l_1 \dots l_k \tau_{p+1}, \tau_p}^{(i_1 \dots i_k)} - \hat{I}_{l_1 \dots l_k \tau_{p+1}, \tau_p}^{(i_1 \dots i_k)} \right)^2 \right\} \leq C \Delta^{r+1}. \quad (7.22)$$

3. Для всех $(k, j, l_1, \dots, l_k) \in \bigcup_{q=0}^r \mathcal{A}_q$, $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$, $t \in [0, T]$ и $i_1, \dots, i_k = 1, \dots, m$

$$\left| G_{l_1}^{(i_1)} \dots G_{l_k}^{(i_k)} L^j \mathbf{x} \right| \leq K_0 (1 + |\mathbf{x}|), \quad G_{l_1}^{(i_1)} \dots G_{l_k}^{(i_k)} L^j \mathbf{x} \in \mathcal{L}$$

(класс $\mathcal{L}$ определен в разд. 4.2).

4. Для всех $(k, j, l_1, \dots, l_k) \in \mathcal{A}_r$, $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$, $t \in [0, T]$ и $i_1, \dots, i_k, q = 1, \dots, m$

$$\left| G_0^{(q)} G_{l_1}^{(i_1)} \dots G_{l_k}^{(i_k)} L^j \mathbf{x} \right| + \left| L G_{l_1}^{(i_1)} \dots G_{l_k}^{(i_k)} L^j \mathbf{x} \right| \leq K_0 (1 + |\mathbf{x}|).$$

5. Случайные величины $\mathbf{x}_0, \mathbf{y}_0$ $\mathcal{F}_0$ -измеримы и $\mathbb{M} \{ |\mathbf{x}_0 - \mathbf{y}_0|^2 \} \leq K_2 \Delta^r$, $\mathbb{M} \{ |\mathbf{x}_0|^2 \} < \infty$, где постоянные K_0, K_1, K_2, C не зависят от Δ .

Тогда справедлива оценка

$$z_T \leq K_3 \Delta^r,$$

где постоянная K_3 не зависит от Δ .

Доказательство. При $R(\mathbf{x}, t) \equiv \mathbf{x}$, $s = \tau_{p+1}$, $t = \tau_p$, $\tau_p \stackrel{\text{def}}{=} p\Delta$, $\Delta > 0$, $p \in \{0, 1, \dots, N-1\}$, $T = \tau_N$ из (7.19) получим следующее справедливое с вероятностью 1 точное представление:

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_{\tau_{p+1}} = & \sum_{q=0}^r \sum_{(k,j,l_1,\dots,l_k) \in \mathcal{D}'_q} \frac{\Delta^j}{j!} {}^{(k)}G_{l_1} \dots G_{l_k} L^j \{\mathbf{x}_{\tau_p}\} \cdot {}^k {}^{(k)}I_{l_1 \dots l_k \tau_{p+1}, \tau_p} + \\ & + H'_{r+1, \tau_{p+1}, \tau_p}. \end{aligned} \quad (7.23)$$

Нетрудно видеть, что для всех $s \in [0, T]$ из (7.21) и (7.23) с вероятностью 1 имеем

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_s - \mathbf{y}_s = & \mathbf{x}_0 - \mathbf{y}_0 + \\ & + \sum_{q=1}^r \sum_{(k,j,l_1,\dots,l_k) \in \mathcal{D}'_q} \left\{ \sum_{p=0}^{n_s-1} \left[X_{jl_1 \dots l_k \tau_{p+1}, \tau_p} + Y_{jl_1 \dots l_k \tau_{p+1}, \tau_p} \right] + \right. \\ & \left. + X_{jl_1 \dots l_k s, \tau_{n_s}} + Y_{jl_1 \dots l_k s, \tau_{n_s}} \right\} + \\ & + \sum_{p=0}^{n_s-1} H'_{r+1, \tau_{p+1}, \tau_p} + H'_{r+1, s, \tau_{n_s}}, \end{aligned}$$

где $\mathbf{y}_s$ определяется из (7.21), а $\mathbf{x}_s$ — из (7.23) при $\tau_{p+1} = s$;

$$\begin{aligned} X_{jl_1 \dots l_k \theta, t} & \stackrel{\text{def}}{=} \frac{(\theta - t)^j}{j!} {}^{(k)}G_{l_1} \dots G_{l_k} L^j \{\mathbf{y}_t\} \cdot {}^k \left({}^{(k)}I_{l_1 \dots l_k \theta, t} - {}^{(k)}\hat{I}_{l_1 \dots l_k \theta, t} \right); \\ Y_{jl_1 \dots l_k \theta, t} & \stackrel{\text{def}}{=} \frac{(\theta - t)^j}{j!} \left[{}^{(k)}G_{l_1} \dots G_{l_k} L^j \{\mathbf{x}_t\} - {}^{(k)}G_{l_1} \dots G_{l_k} L^j \{\mathbf{y}_t\} \right] \cdot {}^k {}^{(k)}I_{l_1 \dots l_k \theta, t}; \\ n_s & \stackrel{\text{def}}{=} \max_p \{p : \tau_p \leq s\}. \end{aligned}$$

Далее

$$\begin{aligned} z_T \leq & C_0 \left\{ \mathbb{M} \{ |\mathbf{x}_0 - \mathbf{y}_0|^2 \} + \right. \\ & \left. + \sum_{q=1}^r \sum_{(k,j,l_1,\dots,l_k) \in \mathcal{D}'_q} (V_{jl_1 \dots l_k}(T) + W_{jl_1 \dots l_k}(T)) + U(T) \right\}, \end{aligned} \quad (7.24)$$

где

$$V_{jl_1 \dots l_k}(T) \stackrel{\text{def}}{=} \mathbb{M} \left\{ \sup_{0 \leq s \leq T} \left| \sum_{p=0}^{n_s-1} X_{jl_1 \dots l_k \tau_{p+1}, \tau_p} + X_{jl_1 \dots l_k s, \tau_{n_s}} \right|^2 \right\};$$

$$W_{jl_1 \dots l_k}(T) \stackrel{\text{def}}{=} \mathbb{M} \left\{ \sup_{0 \leq s \leq T} \left| \sum_{p=0}^{n_s-1} Y_{jl_1 \dots l_k \tau_{p+1}, \tau_p} + Y_{jl_1 \dots l_k s, \tau_{n_s}} \right|^2 \right\};$$

$$U(T) \stackrel{\text{def}}{=} \mathbb{M} \left\{ \sup_{0 \leq s \leq T} \left| \sum_{p=0}^{n_s-1} H'_{r+1 \tau_{p+1}, \tau_p} + H'_{r+1 s, \tau_{n_s}} \right|^2 \right\}.$$

Оценим поочередно величины $V_{jl_1 \dots l_k}(T)$, $W_{jl_1 \dots l_k}(T)$, $U(T)$ при $k \neq 0$.

Воспользовавшись условием 1 теоремы 7.2 и неравенством Дуба для дискретного мартингала $\left\{ \sum_{p=0}^q Y_{jl_1 \dots l_k \tau_{p+1}, \tau_p}, q = 0, 1, \dots \right\}$, получим

$$\begin{aligned} W_{jl_1 \dots l_k}(T) &\leq 4 \sup_{0 \leq s \leq T} \mathbb{M} \left\{ \left| \sum_{p=0}^{n_s-1} Y_{jl_1 \dots l_k \tau_{p+1}, \tau_p} + Y_{jl_1 \dots l_k s, \tau_{n_s}} \right|^2 \right\} = \\ &= 4 \sup_{0 \leq s \leq T} \left(\sum_{p=0}^{n_s-1} \mathbb{M} \left\{ \left| Y_{jl_1 \dots l_k \tau_{p+1}, \tau_p} \right|^2 \right\} + \mathbb{M} \left\{ \left| Y_{jl_1 \dots l_k s, \tau_{n_s}} \right|^2 \right\} \right) \leq \\ &\leq C_1 \sup_{0 \leq s \leq T} \left(\Delta^q \sum_{p=0}^{n_s-1} \mathbb{M} \left\{ |\mathbf{x}_{\tau_p} - \mathbf{y}_{\tau_p}|^2 \right\} + \mathbb{M} \left\{ |\mathbf{x}_{\tau_{n_s}} - \mathbf{y}_{\tau_{n_s}}|^2 \right\} (s - \tau_{n_s})^q \right) \leq \\ &\leq C_2 \Delta \sum_{p=0}^{n_T-1} \mathbb{M} \left\{ |\mathbf{x}_{\tau_p} - \mathbf{y}_{\tau_p}|^2 \right\} \leq C_3 \int_0^T z_u du. \end{aligned} \quad (7.25)$$

Оценим $U(T)$. Напомним (см. главу 4), что

$$\hat{H}_{r+1, s, t} = \sum_{(k, j, l_1, \dots, l_k) \in \mathcal{U}_r} Z_{jl_1 \dots l_k s, t} + \sum_{(k, j, l_1, \dots, l_k) \in \mathcal{A}_r} F_{jl_1 \dots l_k s, t}, \quad (7.26)$$

где

$$\begin{aligned} Z_{jl_1 \dots l_k s, t} &= \frac{(s-t)^j}{j!} {}^{(k)}L^j G_{l_1} \dots G_{l_k} \mathbf{x}_t {}^{(k)}J_{l_1 \dots l_k s, t}; \\ F_{jl_1 \dots l_k s, t} &= \sum_{i_1, \dots, i_k=1}^m \frac{1}{j!} \int_t^s (s-\tau_k)^{l_k} \dots \int_t^{\tau_2} (s-\tau_1)^{l_1} \int_t^{\tau_1} (s-\tau)^j \times \\ &\quad \times \left(L^{j+1} G_{l_1}^{(i_1)} \dots G_{l_k}^{(i_k)} \mathbf{x}_\tau d\tau + \right. \\ &\quad \left. + {}^{(1)}G_0 L^j G_{l_1}^{(i_1)} \dots G_{l_k}^{(i_k)} \mathbf{x}_\tau {}^{(1)}d\mathbf{f}_\tau \right) d\mathbf{f}_{\tau_1}^{(i_1)} \dots d\mathbf{f}_{\tau_k}^{(i_k)}. \end{aligned}$$

Применив к дискретному мартингалу $\left\{ \sum_{p=0}^q H'_{r+1 \tau_{p+1}, \tau_p}, q = 0, 1, \dots \right\}$ неравенство Дуба, получим

$$U(T) \leq 4 \sup_{0 \leq s \leq T} \mathbb{M} \left\{ \left| \sum_{p=0}^{n_s-1} H'_{r+1 \tau_{p+1}, \tau_p} + H'_{r+1 s, \tau_{n_s}} \right|^2 \right\} =$$

$$= 4 \sup_{0 \leq s \leq T} \left(\sum_{p=0}^{n_s-1} \mathbb{M} \left\{ \left| H'_{r+1, \tau_{p+1}, \tau_p} \right|^2 \right\} + \mathbb{M} \left\{ \left| H'_{r+1, s, \tau_{n_s}} \right|^2 \right\} \right). \quad (7.27)$$

В соответствии с леммой 4.4 в условиях AI, AII (теорема 1.6) при $\mathbb{M} \{ |\mathbf{x}_0|^{2n} \} < \infty$, $n \geq 1$, справедлива оценка

$$\mathbb{M} \{ |\mathbf{x}_t|^{2n} \} \leq (1 + \mathbb{M} \{ |\mathbf{x}_0|^{2n} \}) e^{C(t-t_0)}, \quad (7.28)$$

где $t \in [0, T]$; $C = 2n(2n+1)K^2$; $K < \infty$ — постоянная.

Воспользовавшись представлением (7.26), неравенствами (1.41), (1.42) при $n = 1$, условиями 3, 4 теоремы 7.2 и (7.27), (7.28), найдем

$$U(T) \leq C_4 (1 + \mathbb{M} \{ |\mathbf{x}_0|^2 \}) \sum_{p=0}^{n_T-1} \Delta^{r+1} \leq C_5 \Delta^r. \quad (7.29)$$

Оценим $V_{j l_1 \dots l_k}(T)$. С учетом условий 2 и 3 теоремы 7.2 и неравенства Дуба для дискретного мартингала $\left\{ \sum_{p=0}^q X_{j l_1 \dots l_k \tau_{p+1}, \tau_p}, q = 0, 1, \dots \right\}$ имеем

$$\begin{aligned} V_{j l_1 \dots l_k}(T) &\leq 4 \sup_{0 \leq s \leq T} \mathbb{M} \left\{ \left| \sum_{p=0}^{n_s-1} X_{j l_1 \dots l_k \tau_{p+1}, \tau_p} + X_{j l_1 \dots l_k s, \tau_{n_s}} \right|^2 \right\} = \\ &= 4 \sup_{0 \leq s \leq T} \left(\sum_{p=0}^{n_s-1} \mathbb{M} \left\{ \left| X_{j l_1 \dots l_k \tau_{p+1}, \tau_p} \right|^2 \right\} + \mathbb{M} \left\{ \left| X_{j l_1 \dots l_k s, \tau_{n_s}} \right|^2 \right\} \right) \leq \\ &\leq C_5 \sup_{0 \leq s \leq T} \left(\sum_{p=0}^{n_s-1} \mathbb{M} \{ 1 + |\mathbf{y}_{\tau_p}|^2 \} + \mathbb{M} \{ 1 + |\mathbf{y}_{\tau_{n_s}}|^2 \} \right) \Delta^{r+1}. \end{aligned} \quad (7.30)$$

Заметим, что

$$\mathbb{M} \{ |\mathbf{y}_\theta|^2 \} \leq 2\mathbb{M} \{ |\mathbf{x}_\theta|^2 \} + 2\mathbb{M} \{ |\mathbf{y}_\theta - \mathbf{x}_\theta|^2 \}, \quad \theta \in [0, T].$$

Тогда на основании приведенных ранее рассуждений получаем из (7.30) следующую оценку:

$$\begin{aligned} V_{j l_1 \dots l_k}(T) &\leq C_6 \Delta^r + C_7 (1 + \mathbb{M} \{ |\mathbf{x}_0|^2 \}) \Delta^r + C_8 \Delta^r \int_0^T z_u du \leq \\ &\leq C_9 \Delta^r + C_8 \Delta^r \int_0^T z_u du. \end{aligned} \quad (7.31)$$

С помощью использованных ранее аргументов и неравенства Минковского нетрудно вывести оценки (7.25), (7.29), (7.31) и при $k = 0$.

Объединяя теперь неравенства (7.24), (7.25), (7.29), (7.31) и учитывая условие 5 теоремы 7.2, находим

$$z_T \leq C_{10}\Delta^r + C_{11} \int_0^T z_u du. \quad (7.32)$$

Согласно неравенству Гронуолла и (7.32) имеем

$$z_T \leq K_3 \Delta^r, \quad (7.33)$$

где постоянная K_3 не зависит от Δ . Теорема доказана. $\square$

Из неравенства (7.33) и неравенства Ляпунова следует, что явный одношаговый численный метод (7.21) в условиях теоремы 7.2 сходится сильно с порядком точности $r/2$ к решению стохастического дифференциального уравнения Ито (7.18).

7.3.2 Метод Г. Н. Мильштейна

Пусть условия теоремы 7.2 выполнены при $r = 2$. Тогда из (7.21) при $r = 2$ получим явный одношаговый сильный численный метод порядка точности 1.0, который носит название метода Г. Н. Мильштейна [70]:

$$\mathbf{y}_{p+1} = \mathbf{y}_p + \sum_{i_1=1}^m \Sigma_{i_1} I_{0_{\tau_{p+1}, \tau_p}}^{(i_1)} + \Delta \mathbf{a} + \sum_{i_1, i_2=1}^m G_0^{(i_2)} \Sigma_{i_1} I_{00_{\tau_{p+1}, \tau_p}}^{(i_2 i_1)q}. \quad (7.34)$$

Здесь и далее приняты сокращенные обозначения: $\Sigma_i(\mathbf{x}, t)$ — i -й столбец матрицы $\Sigma(\mathbf{x}, t)$; $\mathbf{a}(\mathbf{y}_p, \tau_p) \stackrel{\text{def}}{=} \mathbf{a}$; $\Sigma_i(\mathbf{y}_p, \tau_p) \stackrel{\text{def}}{=} \Sigma_i$; $\mathbf{y}_{\tau_p} \stackrel{\text{def}}{=} \mathbf{y}_p$; индекс q указывает на то, что соответствующая величина является аппроксимацией повторного стохастического интеграла.

Согласно формулам связи повторных стохастических интегралов Ито и Стратоновича (теорема 3.9) с вероятностью 1 получаем

$$I_{0_{\tau_{p+1}, \tau_p}}^{(i_1)} = I_{0_{\tau_{p+1}, \tau_p}}^{*(i_1)}, \quad (7.35)$$

$$I_{00_{\tau_{p+1}, \tau_p}}^{(i_2 i_1)} = I_{00_{\tau_{p+1}, \tau_p}}^{*(i_2 i_1)} - \frac{1}{2} \mathbf{1}_{\{i_1=i_2\}} \Delta. \quad (7.36)$$

С помощью теоремы 5.1 имеем следующие формулы для аппроксимаций стохастических интегралов Ито $I_{0_{\tau_{p+1}, \tau_p}}^{(i_1)}$, $I_{00_{\tau_{p+1}, \tau_p}}^{(i_1 i_2)}$:

$$I_{0_{\tau_{p+1}, \tau_p}}^{(i_1)} = \sqrt{\Delta} \zeta_0^{(i_1)}, \quad (7.37)$$

$$I_{00_{\tau_{p+1}, \tau_p}}^{(i_1 i_2)q} = \sum_{j_1, j_2=0}^q C_{j_2 j_1} \zeta_{j_1}^{(i_1)} \zeta_{j_2}^{(i_2)} - \frac{1}{2} \mathbf{1}_{\{i_1=i_2\}} \Delta, \quad (7.38)$$

где

$$C_{j_2 j_1} = \int_{[\tau_p, \tau_{p+1}]^2} K(t_1, t_2) \phi_{j_2}(t_2) \phi_{j_1}(t_1) dt_1 dt_2;$$

$$K(t_1, t_2) = \mathbf{1}_{\{t_1 < t_2\}}; \quad (t_1, t_2 \in [t, T]), \quad \int_{\tau_p}^{\tau_{p+1}} \phi_j(s) d\mathbf{w}_s^{(i)} \stackrel{\text{def}}{=} \zeta_j^{(i)};$$

$t_1, t_2 \in [\tau_p, \tau_{p+1}]$; $\{\phi_j(\tau)\}_{j=0}^\infty$ — полная ортонормированная система непрерывно дифференцируемых функций в пространстве $L_2([\tau_p, \tau_{p+1}])$.

В (7.37), (7.38) предполагается, что $\phi_0(s) \equiv \frac{1}{\sqrt{\Delta}}$. Последнее справедливо, в частности, для полных ортонормированных тригонометрической и полиномиальной систем функций в пространстве $L_2([\tau_p, \tau_{p+1}])$. Число q в (7.38) следует выбирать так, чтобы выполнялось условие (7.22) в теореме 7.2 при $r = 2$.

Например, если в качестве полной ортонормированной системы $\{\phi_j(t)\}_{j=0}^\infty$ в пространстве $L_2([\tau_p, \tau_{p+1}])$ взята полиномиальная система, то формулы (7.37), (7.38) согласно разложениям, полученным в главе 6, приобретают следующий вид:

$$I_{0_{\tau_{p+1}, \tau_p}}^{(i_1)} = \sqrt{\Delta} \zeta_0^{(i_1)}, \quad (7.39)$$

$$I_{00_{T,t}}^{(i_1 i_2)q} = \frac{T-t}{2} \left[\zeta_0^{(i_1)} \zeta_0^{(i_2)} + \sum_{i=1}^q \frac{1}{\sqrt{4i^2-1}} \left\{ \zeta_{i-1}^{(i_1)} \zeta_i^{(i_2)} - \zeta_i^{(i_1)} \zeta_{i-1}^{(i_2)} \right\} \right] - \frac{1}{2} \mathbf{1}_{\{i_1=i_2\}} \Delta, \quad (7.40)$$

где число q выбираем при $i_1 \neq i_2$ из следующего условия:

$$\mathbb{M} \left\{ \left(I_{00_{\tau_{p+1}, \tau_p}}^{(i_1 i_2)} - I_{00_{\tau_{p+1}, \tau_p}}^{(i_1 i_2)q} \right)^2 \right\} = \frac{\Delta^2}{2} \left(\frac{1}{2} - \sum_{i=1}^q \frac{1}{4i^2-1} \right) \leq C \Delta^3; \quad (7.41)$$

постоянная C входит в условие (7.22) теоремы 7.2.

Если же в качестве полной ортонормированной системы $\{\phi_j(t)\}_{j=0}^\infty$ в пространстве $L_2([\tau_p, \tau_{p+1}])$ взята тригонометрическая система, то получаем [70]

$$I_{00_{\tau_{p+1}, \tau_p}}^{(i_2 i_1)q} = \frac{1}{2} \Delta \left[\zeta_0^{(i_1)} \zeta_0^{(i_2)} + \frac{1}{\pi} \sum_{r=1}^q \frac{1}{r} \left(\zeta_{2r}^{(i_1)} \zeta_{2r-1}^{(i_2)} - \zeta_{2r-1}^{(i_1)} \zeta_{2r}^{(i_2)} \right) + \right.$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{\sqrt{2}}{\pi} \left(\sum_{r=1}^q \frac{1}{r} \zeta_{2r-1}^{(i_1)} + \sqrt{\alpha_q} \mu_q^{(i_1)} \right) \zeta_0^{(i_2)} - \frac{\sqrt{2}}{\pi} \left(\sum_{r=1}^q \frac{1}{r} \zeta_{2r-1}^{(i_2)} + \sqrt{\alpha_q} \mu_q^{(i_2)} \right) \zeta_0^{(i_1)} \Big] - \\
& - \frac{1}{2} \mathbf{1}_{\{i_1=i_2\}} \Delta,
\end{aligned} \tag{7.42}$$

где

$$\mu_q^{(i)} = \frac{1}{\sqrt{\alpha_q}} \sum_{r=q+1}^{\infty} \frac{1}{r} \zeta_{2r-1}^{(i)}; \quad \alpha_q = \frac{\pi^2}{6} - \sum_{r=1}^q \frac{1}{r^2}.$$

При этом для $i_1 \neq i_2$ имеем [70]

$$\mathbb{M} \left\{ \left(I_{00_{\tau_{p+1}, \tau_p}}^{*(i_2 i_1)} - I_{00_{\tau_{p+1}, \tau_p}}^{*(i_2 i_1)q} \right)^2 \right\} = \frac{\Delta^2}{2\pi^2} \left(\frac{\pi^2}{6} - \sum_{r=1}^q \frac{1}{r^2} \right). \tag{7.43}$$

Необходимо отметить, что на каждом p -м шаге интегрирования система независимых стандартных гауссовских случайных величин $\zeta_j^{(i)}$ должна генерироваться так, чтобы быть независимой относительно аналогичных систем гауссовских случайных величин на всех предшествующих шагах интегрирования.

Численный эксперимент 7.2². Повторить численный эксперимент 7.1 методом Г. Н. Мильштейна (7.34).

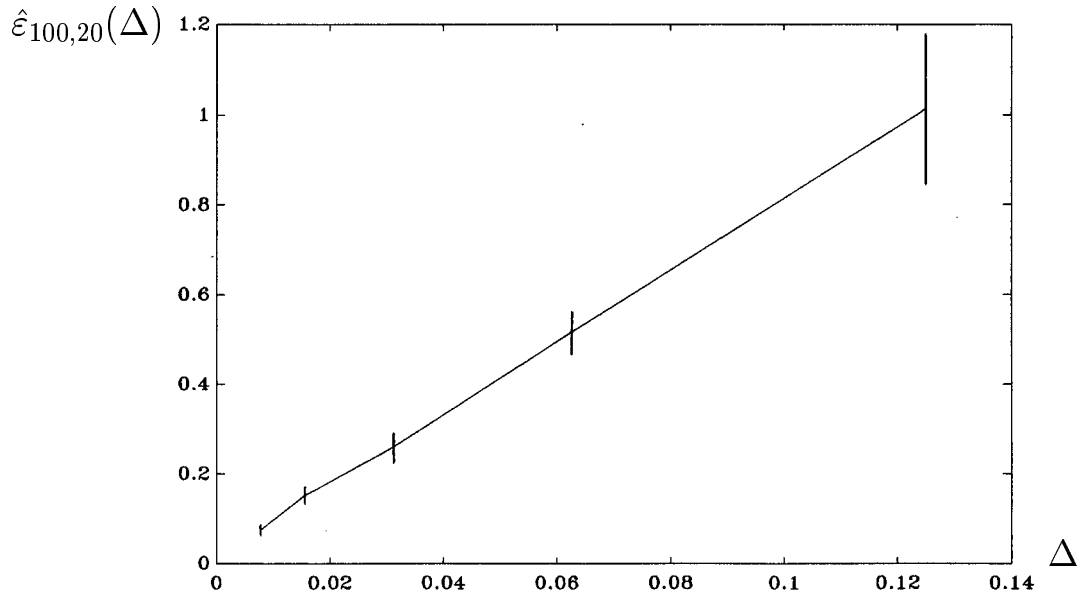


Рис. 7.2. Результат численного эксперимента 7.2.

²В численных экспериментах из глав 7–10, если не оговаривается противное, для моделирования повторных стохастических интегралов Ито $I_{0 \dots 0_{(p+1)\Delta, p\Delta}}^{(1 \dots 1)}$, $l = 1, 2, \dots$, используются формулы, основанные на многочленах Эрмита (см. главу 6).

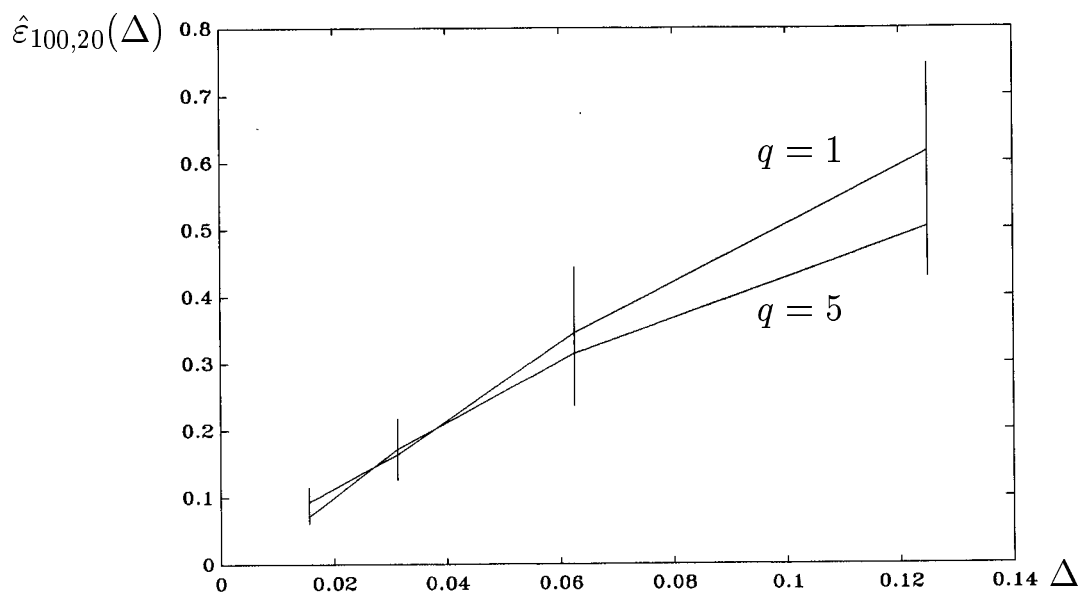


Рис. 7.3. Результат численного эксперимента 7.3.

Численный эксперимент 7.3. Повторить численный эксперимент 7.1 для стохастического дифференциального уравнения Ито:

$$dx_t = ax_t dt + \sum_{i=1}^3 b_i x_t df_t^{(i)}, \quad x_0 = 1, \quad t \in [0, T], \quad (7.44)$$

$f_t^{(i)}$, $i = 1, 2, 3$, — независимые стандартные винеровские процессы; $a = b_1 = b_2 = b_3 = 1$; $T = 1$. Для моделирования стохастических интегралов Ито $I_{00}^{(i_2 i_1)}_{(p+1)\Delta, p\Delta}$ в случае $i_1 \neq i_2$; $i_1, i_2 = 1, 2, 3$ применить формулу (7.40) при $q = 1$, а в случае $i_1 = i_2$; $i_1 = 1, 2, 3$ — формулу (7.40) при $q = 0$. В качестве формулы для моделирования точного решения уравнения (7.44) при $t = T$ использовать соотношение

$$x_T = x_0 e^{\left(a - \frac{1}{2}(b_1^2 + b_2^2 + b_3^2)\right)T + \sqrt{\Delta} \sum_{i=0}^{N-1} (b_1 \zeta_i^{(1)} + b_2 \zeta_i^{(2)} + b_3 \zeta_i^{(3)})},$$

где $\zeta_i^{(j)}$, $i = 0, 1, \dots, N-1$; $j = 1, 2, 3$, — независимые в совокупности стандартные гауссовские случайные величины (они же используются и при моделировании повторных стохастических интегралов из (7.34)). Повторить данный численный эксперимент при $q = 5$.

Зависимости, изображенные на рис. 7.2 и 7.3, близки к линейным, что подтверждает тот факт, что метод Г. Н. Мильштейна при подходящих условиях является сильным численным методом порядка точности 1.0.

7.3.3 Методы порядка точности 1.5

Пусть условия теоремы 7.2 выполнены при $r = 3$. Тогда из (7.21) при $r = 3$ получим явный одношаговый сильный численный метод порядка точности 1.5 вида

$$\begin{aligned} \mathbf{y}_{p+1} = & \mathbf{y}_p + \sum_{i_1=1}^m \Sigma_{i_1} I_{0\tau_{p+1}, \tau_p}^{(i_1)} + \Delta \mathbf{a} + \sum_{i_1, i_2=1}^m G_0^{(i_2)} \Sigma_{i_1} I_{00\tau_{p+1}, \tau_p}^{(i_2 i_1)q} + \\ & + \sum_{i_1=1}^m \left[G_0^{(i_1)} \mathbf{a} \left(\Delta I_{0\tau_{p+1}, \tau_p}^{(i_1)} + I_{1\tau_{p+1}, \tau_p}^{(i_1)} \right) - L \Sigma_{i_1} I_{1\tau_{p+1}, \tau_p}^{(i_1)} \right] + \\ & + \sum_{i_1, i_2, i_3=1}^m G_0^{(i_3)} G_0^{(i_2)} \Sigma_{i_1} I_{000\tau_{p+1}, \tau_p}^{(i_3 i_2 i_1)q} + \frac{\Delta^2}{2} L \mathbf{a}. \end{aligned} \quad (7.45)$$

По формулам главы 6 получаем следующие выражения для совместного численного моделирования повторных стохастических интегралов Ито $I_{0\tau_{p+1}, \tau_p}^{(i_1)}$, $I_{1\tau_{p+1}, \tau_p}^{(i_1)}$, $I_{00\tau_{p+1}, \tau_p}^{(i_2 i_1)}$, $I_{000\tau_{p+1}, \tau_p}^{(i_3 i_2 i_1)}$:

$$I_{0T, t}^{(i_1)} = \sqrt{T-t} \zeta_0^{(i_1)}, \quad (7.46)$$

$$I_{1T, t}^{(i_1)} = -\frac{(T-t)^{\frac{3}{2}}}{2} \left(\zeta_0^{(i_1)} + \frac{1}{\sqrt{3}} \zeta_1^{(i_1)} \right), \quad (7.47)$$

$$I_{00T, t}^{(i_2 i_1)q} = I_{00T, t}^{*(i_2 i_1)q} - \frac{1}{2} \mathbf{1}_{\{i_1=i_2\}} (T-t), \quad (7.48)$$

$$I_{00T, t}^{*(i_1 i_2)q} = \frac{T-t}{2} \left[\zeta_0^{(i_1)} \zeta_0^{(i_2)} + \sum_{i=1}^q \frac{1}{\sqrt{4i^2-1}} \left\{ \zeta_{i-1}^{(i_1)} \zeta_i^{(i_2)} - \zeta_i^{(i_1)} \zeta_{i-1}^{(i_2)} \right\} \right], \quad (7.49)$$

$$\begin{aligned} I_{000T, t}^{(i_3 i_2 i_1)q} = & I_{000T, t}^{*(i_3 i_2 i_1)q} + \frac{1}{2} \mathbf{1}_{\{i_3=i_2\}} I_{1T, t}^{(i_1)} - \\ & - \frac{1}{2} \mathbf{1}_{\{i_2=i_1\}} \left((T-t) I_{0T, t}^{(i_3)} + I_{1T, t}^{(i_3)} \right), \end{aligned} \quad (7.50)$$

$$\begin{aligned}
I_{000T,t}^{*(i_1 i_2 i_3)q} = & -\frac{1}{T-t} \left(I_{0T,t}^{(i_3)} I_{10T,t}^{*(i_2 i_1)q} + I_{0T,t}^{(i_1)} I_{10T,t}^{*(i_2 i_3)q} \right) + \\
& + \frac{1}{2} I_{0T,t}^{*(i_3)} \left(I_{00T,t}^{*(i_1 i_2)q} - I_{00T,t}^{*(i_2 i_1)q} \right) + \\
& + \frac{1}{6} (T-t)^{\frac{3}{2}} \zeta_0^{(i_3)} \left\{ \zeta_0^{(i_1)} \left(\frac{1}{\sqrt{5}} \zeta_2^{(i_2)} - \sqrt{3} \zeta_1^{(i_2)} - \zeta_0^{(i_2)} \right) + \right. \\
& \left. + \frac{1}{2} \zeta_1^{(i_1)} \left(\sqrt{3} \zeta_0^{(i_2)} - \zeta_1^{(i_2)} \right) \right\} + D_{T,t}^{(i_1 i_2 i_3)q}; \tag{7.51}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
I_{10T,t}^{*(i_1 i_2)q} = & -\frac{T-t}{2} I_{00T,t}^{*(i_1 i_2)} - \frac{(T-t)^2}{4} \left[-\frac{1}{3} \zeta_0^{(i_1)} \zeta_0^{(i_2)} + \frac{1}{\sqrt{3}} \zeta_0^{(i_2)} \zeta_1^{(i_1)} - \right. \\
& - \frac{2}{3\sqrt{5}} \zeta_2^{(i_1)} \zeta_0^{(i_2)} + \frac{1}{3\sqrt{5}} \zeta_2^{(i_2)} \zeta_0^{(i_1)} + \\
& \left. + \sum_{i=1}^q \left(\frac{(i+1) \zeta_{i+2}^{(i_2)} \zeta_i^{(i_1)} - (i+2) \zeta_i^{(i_2)} \zeta_{i+2}^{(i_1)}}{\sqrt{(2i+1)(2i+5)(2i+3)}} + \frac{\zeta_i^{(i_1)} \zeta_i^{(i_2)}}{(2i-1)(2i+3)} \right) \right]; \tag{7.52}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
D_{T,t}^{(i_1 i_2 i_3)q} = & -\frac{(T-t)^{\frac{3}{2}}}{4} \times \\
& \times \sum_{i=1}^q \left\{ \sum_{\substack{j=0 \\ 2j \geq k+j-i \geq 0; \, k+j-i - \text{четное}}}^q \sum_{\substack{k=j-1, k \geq 1}}^q L_{ijk} K_{j,k+1, \frac{k+j-i}{2}} \zeta_i^{(i_1)} \zeta_j^{(i_2)} \zeta_k^{(i_3)} + \right. \\
& + \sum_{\substack{j=0 \\ 2k+2 \geq k+j-i \geq 0; \, k+j-i - \text{четное}}}^q \sum_{k=1}^{j-2} L_{ijk} K_{k+1,j, \frac{k+j-i}{2}} \zeta_i^{(i_1)} \zeta_j^{(i_2)} \zeta_k^{(i_3)} - \\
& - \left(\sum_{\substack{j=0 \\ 2j+2 \geq k+j-i \geq 2; \, k+j-i - \text{четное}}}^q \sum_{k=j+1}^q L_{ijk} K_{j,k-1, \frac{k+j-i}{2}-1} \zeta_i^{(i_1)} \zeta_j^{(i_2)} \zeta_k^{(i_3)} + \right. \\
& + \sum_{\substack{j=0 \\ 2k \geq k+j-i \geq 2; \, k+j-i - \text{четное}}}^q \sum_{k=1}^j L_{ijk} K_{k-1,j, \frac{k+j-i}{2}-1} \zeta_i^{(i_1)} \zeta_j^{(i_2)} \zeta_k^{(i_3)} + \\
& \left. + \sum_{\substack{j=0 \\ 2j-2 \geq k+j-i \geq -2; \, k+j-i - \text{четное}}}^q \sum_{\substack{k=j-1, k \geq 1}}^q M_{ijk} K_{j,k+1, \frac{k+j-i}{2}+1} \zeta_i^{(i_1)} \zeta_j^{(i_2)} \zeta_k^{(i_3)} + \right.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \left. \sum_{j=0}^q \sum_{k=1}^{j-2} M_{ijk} K_{k+1,j,\frac{k+j-i}{2}+1} \zeta_i^{(i_1)} \zeta_j^{(i_2)} \zeta_k^{(i_3)} \right) + \\
& + \sum_{j=0}^q \sum_{k=j+1}^q M_{ijk} K_{j,k-1,\frac{k+j-i}{2}} \zeta_i^{(i_1)} \zeta_j^{(i_2)} \zeta_k^{(i_3)} + \\
& + \left. \sum_{j=0}^q \sum_{k=1}^j M_{ijk} K_{k-1,j,\frac{k+j-i}{2}} \zeta_i^{(i_1)} \zeta_j^{(i_2)} \zeta_k^{(i_3)} \right\}, \\
& 2k \geq k+j-i \geq -2; k+j-i - \text{четное} \\
& 2j \geq k+j-i \geq 0; k+j-i - \text{четное} \\
& 2k-2 \geq k+j-i \geq 0; k+j-i - \text{четное} \\
L_{ijk} &= \sqrt{\frac{2j+1}{(2k+1)(2i+1)}} \frac{1}{2i+3}, \quad M_{ijk} = \sqrt{\frac{2j+1}{(2k+1)(2i+1)}} \frac{1}{2i-1}, \\
K_{m,n,k} &= \frac{a_{m-k} a_k a_{n-k}}{a_{m+n-k}} \cdot \frac{2n+2m-4k+1}{2n+2m-2k+1}; \quad a_k = \frac{(2k-1)!!}{k!}; \quad m \leq n.
\end{aligned}$$

Приведем другое выражение для $D_{T,t}^{(i_1 i_2 i_3)q}$, в котором более наглядно виден порядок убывания коэффициентов Фурье:

$$\begin{aligned}
& D_{T,t}^{(i_1 i_2 i_3)q} = -\frac{(T-t)^{\frac{3}{2}}}{4} \times \\
& \times \sum_{i=1}^q \left\{ \sum_{j=0}^q \sum_{k=i}^q N_{ijk} K_{i+1,k+1,\frac{k+i-j}{2}+1} \zeta_i^{(i_1)} \zeta_j^{(i_2)} \zeta_k^{(i_3)} + \right. \\
& + \sum_{j=0}^q \sum_{k=1}^{i-1} N_{ijk} K_{k+1,i+1,\frac{k+i-j}{2}+1} \zeta_i^{(i_1)} \zeta_j^{(i_2)} \zeta_k^{(i_3)} - \\
& - \left(\sum_{j=0}^q \sum_{k=i+2}^q N_{ijk} K_{i+1,k-1,\frac{k+i-j}{2}} \zeta_i^{(i_1)} \zeta_j^{(i_2)} \zeta_k^{(i_3)} + \right. \\
& + \sum_{j=0}^q \sum_{k=1}^{i+1} N_{ijk} K_{k-1,i+1,\frac{k+i-j}{2}} \zeta_i^{(i_1)} \zeta_j^{(i_2)} \zeta_k^{(i_3)} + \\
& + \sum_{j=0}^q \sum_{k=i-2, k \geq 1}^q N_{ijk} K_{i-1,k+1,\frac{k+i-j}{2}} \zeta_i^{(i_1)} \zeta_j^{(i_2)} \zeta_k^{(i_3)} + \\
& \left. 2i \geq k+i-j \geq -2; k+i-j - \text{четное} \right. \\
& \left. 2k \geq k+i-j \geq -2; k+i-j - \text{четное} \right. \\
& \left. 2i+2 \geq k+i-j \geq 0; k+i-j - \text{четное} \right. \\
& \left. 2k-2 \geq k+i-j \geq 0; k+i-j - \text{четное} \right. \\
& \left. 2i-2 \geq k+i-j \geq 0; k+i-j - \text{четное} \right\}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \sum_{j=0}^q \sum_{k=1}^{i-3} N_{ijk} K_{k+1, i-1, \frac{k+i-j}{2}} \zeta_i^{(i_1)} \zeta_j^{(i_2)} \zeta_k^{(i_3)} \Bigg) + \\
& + \sum_{j=0}^q \sum_{k=i}^q N_{ijk} K_{i-1, k-1, \frac{k+i-j}{2}-1} \zeta_i^{(i_1)} \zeta_j^{(i_2)} \zeta_k^{(i_3)} + \\
& + \sum_{j=0}^q \sum_{k=1}^{i-1} N_{ijk} K_{k-1, i-1, \frac{k+i-j}{2}-1} \zeta_i^{(i_1)} \zeta_j^{(i_2)} \zeta_k^{(i_3)} \Bigg\}, \\
& \text{где } 2k+2 \geq k+i-j \geq 0; k+i-j - \text{ четное} \\
& \text{ } 2i \geq k+i-j \geq 2; k+i-j - \text{ четное} \\
& \text{ } 2k \geq k+i-j \geq 2; k+i-j - \text{ четное}
\end{aligned}$$

где

$$N_{ijk} = \sqrt{\frac{1}{(2k+1)(2j+1)(2i+1)}}.$$

Следует отметить то обстоятельство, что приведенные выше формулы, касающиеся повторного стохастического интеграла Ито третьей кратности, можно, согласно результатам главы 5, применять для следующих случаев:

1. $i_1, i_2, i_3 = 1, \dots, m$ — попарно различны;
2. $i_1 = i_2 \neq i_3$;
3. $i_1 \neq i_2 = i_3$.

Для случая $i_1 = i_2 = i_3$ следует использовать формулу

$$I_{000T,t}^{(i_1 i_1 i_1)} = \frac{(T-t)^{\frac{3}{2}}}{6} \left(\left(\zeta_0^{(i_1)} \right)^3 - 3\zeta_0^{(i_1)} \right),$$

а случай $i_1 = i_3 \neq i_2$ должен быть рассмотрен отдельно с помощью теоремы 5.1.

Впрочем, согласно теореме 5.1 при любых возможных сочетаниях i_1, i_2, i_3 получаем

$$\begin{aligned}
I_{000T,t}^{(i_3 i_2 i_1) q_1, q_2, q_3} &= \sum_{j_1=0}^{q_1} \sum_{j_2=0}^{q_2} \sum_{j_3=0}^{q_3} C_{j_3 j_2 j_1} \left(\zeta_{j_1}^{(i_1)} \zeta_{j_2}^{(i_2)} \zeta_{j_3}^{(i_3)} - \right. \\
& - \mathbf{1}_{\{i_1=i_2 \neq 0\}} \mathbf{1}_{\{j_1=j_2\}} \zeta_{j_3}^{(i_3)} - \mathbf{1}_{\{i_2=i_3 \neq 0\}} \mathbf{1}_{\{j_2=j_3\}} \zeta_{j_1}^{(i_1)} - \\
& \left. - \mathbf{1}_{\{i_1=i_3 \neq 0\}} \mathbf{1}_{\{j_1=j_3\}} \zeta_{j_2}^{(i_2)} \right), \tag{7.53}
\end{aligned}$$

где в формуле для вычисления $C_{j_3 j_2 j_1}$ следует положить $\psi_1(s) = \psi_2(s) = \psi_3(s) \equiv 1$.

Ранее уже отмечалось, что выбор чисел q_1, q_2, q_3 является отдельной задачей. Далее мы ограничимся случаем $q_1 = \dots = q_k = q$.

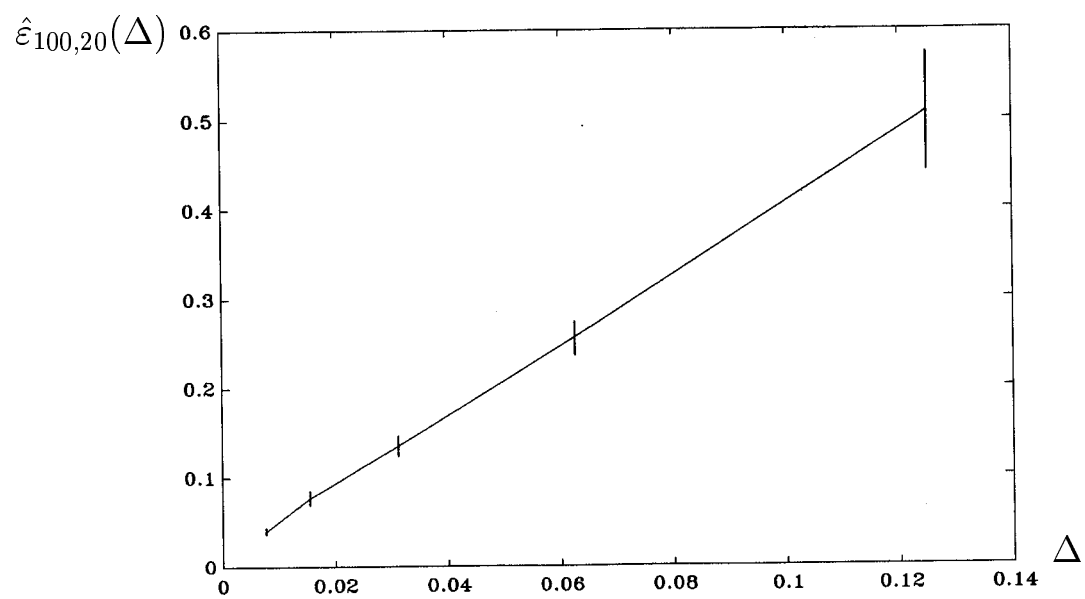


Рис. 7.4. Результат численного эксперимента 7.4.

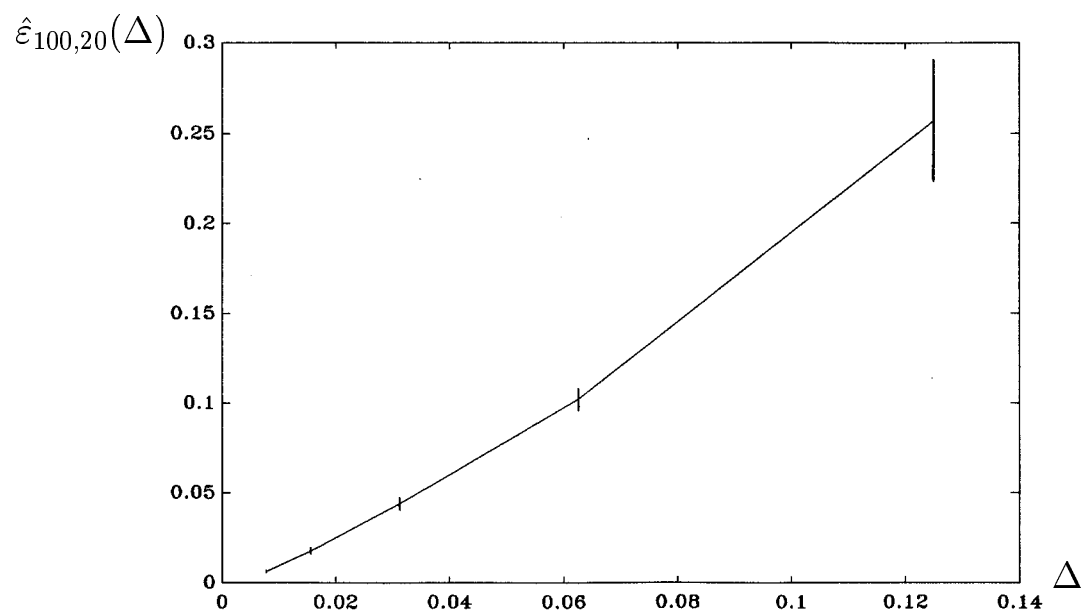


Рис. 7.5. Результат численного эксперимента 7.5.

Число q следует выбирать так, чтобы выполнялось условие (7.22) в теореме 7.2 при $r = 3$.

Соотношения (7.45), (7.46)–(7.53) определяют явный одношаговый сильный численный метод порядка точности 1.5. Этот метод является новым благодаря применению полиномов Лежандра и унифицированного разложения Тейлора–Ито.

В заключение рассмотрим следующий явный сильный одношаговый численный метод порядка точности 1.0:

$$\mathbf{y}_{p+1} = \mathbf{y}_p + \mathbf{v}_p, \quad (7.54)$$

где $\mathbf{v}_p$ — правая часть численного метода (7.45) без слагаемых $\mathbf{y}_p$ и $\frac{\Delta^2}{2}La(\mathbf{y}_p, \tau_p)$.

Численный эксперимент 7.4 (рис. 7.4). *Повторить численный эксперимент 7.1 для сильного численного метода порядка точности 1.0 вида (7.54). При этом не моделировать те повторные стохастические интегралы Ито, коэффициенты перед которыми равны нулю после применения метода (7.54) к уравнению (7.17) и приведения подобных слагаемых.*

Численный эксперимент 7.5 (рис. 7.5). *Повторить численный эксперимент 7.4 для численного метода порядка точности 1.5 вида (7.45).*

В правую часть численного метода (7.54) входят слагаемые, имеющие порядок малости $\gamma \leq 1.5$ (см. главу 2), однако данный метод имеет согласно теореме 7.2 сильный порядок точности 1.0, а не 1.5. Учет слагаемого $\frac{\Delta^2}{2}La(\mathbf{y}_p, \tau_p)$ в численной схеме (7.45) делает ее сильной численной схемой порядка точности 1.5 (см. теорему 7.2). Эти теоретические выводы хорошо подтверждаются численными экспериментами (см. рис. 7.4 и 7.5).

7.3.4 Метод порядка точности 2.0

Пусть условия теоремы 7.2 выполнены при $r = 4$. Тогда из (7.21) при $r = 4$ получим явный одношаговый сильный численный метод порядка точности 2.0 вида

$$\begin{aligned} \mathbf{y}_{p+1} = & \mathbf{y}_p + \sum_{i_1=1}^m \Sigma_{i_1} I_{0\tau_{p+1}, \tau_p}^{(i_1)} + \Delta \mathbf{a} + \sum_{i_1, i_2=1}^m G_0^{(i_2)} \Sigma_{i_1} I_{00\tau_{p+1}, \tau_p}^{(i_2 i_1)q} + \\ & + \sum_{i_1=1}^m \left[G_0^{(i_1)} \mathbf{a} \left(\Delta I_{0\tau_{p+1}, \tau_p}^{(i_1)} + I_{1\tau_{p+1}, \tau_p}^{(i_1)} \right) - L \Sigma_{i_1} I_{1\tau_{p+1}, \tau_p}^{(i_1)} \right] + \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \sum_{i_1, i_2, i_3=1}^m G_0^{(i_3)} G_0^{(i_2)} \Sigma_{i_1} I_{000\tau_{p+1}, \tau_p}^{(i_3 i_2 i_1)q} + \frac{\Delta^2}{2} L \mathbf{a} + \\
& + \sum_{i_1, i_2=1}^m \left[G_0^{(i_2)} L \Sigma_{i_1} \left(I_{10\tau_{p+1}, \tau_p}^{(i_2 i_1)q} - I_{01\tau_{p+1}, \tau_p}^{(i_2 i_1)q} \right) - L G_0^{(i_2)} \Sigma_{i_1} I_{10\tau_{p+1}, \tau_p}^{(i_2 i_1)q} + \right. \\
& \quad \left. + G_0^{(i_2)} G_0^{(i_1)} \mathbf{a} \left(I_{01\tau_{p+1}, \tau_p}^{(i_2 i_1)q} + \Delta I_{00\tau_{p+1}, \tau_p}^{(i_2 i_1)q} \right) \right] + \\
& + \sum_{i_1, i_2, i_3, i_4=1}^m G_0^{(i_4)} G_0^{(i_3)} G_0^{(i_2)} \Sigma_{i_1} I_{0000\tau_{p+1}, \tau_p}^{(i_4 i_3 i_2 i_1)q}. \tag{7.55}
\end{aligned}$$

Для численного моделирования повторных стохастических интегралов Ито, входящих в (7.55), воспользуемся формулами предыдущего раздела, а также формулами (см. теорему 5.1 и главу 6):

$$\begin{aligned}
I_{000T,t}^{(i_3 i_2 i_1)q} &= \sum_{j_1=0}^q \sum_{j_2=0}^q \sum_{j_3=0}^q C_{j_3 j_2 j_1} \left(\zeta_{j_1}^{(i_1)} \zeta_{j_2}^{(i_2)} \zeta_{j_3}^{(i_3)} - \right. \\
& - \mathbf{1}_{\{i_1=i_2 \neq 0\}} \mathbf{1}_{\{j_1=j_2\}} \zeta_{j_3}^{(i_3)} - \mathbf{1}_{\{i_2=i_3 \neq 0\}} \mathbf{1}_{\{j_2=j_3\}} \zeta_{j_1}^{(i_1)} - \\
& \left. - \mathbf{1}_{\{i_1=i_3 \neq 0\}} \mathbf{1}_{\{j_1=j_3\}} \zeta_{j_2}^{(i_2)} \right), \\
I_{10T,t}^{(i_2 i_1)q} &= I_{10T,t}^{*(i_2 i_1)q} + \frac{1}{4} \mathbf{1}_{\{i_1=i_2\}} (T-t)^2, \quad I_{01T,t}^{(i_2 i_1)q} = I_{01T,t}^{*(i_2 i_1)q} + \frac{1}{4} \mathbf{1}_{\{i_1=i_2\}} (T-t)^2, \\
I_{01T,t}^{*(i_1 i_2)q} &= -\frac{T-t}{2} I_{00T,t}^{*(i_1 i_2)} - \frac{(T-t)^2}{4} \left[\frac{1}{3} \zeta_0^{(i_1)} \zeta_0^{(i_2)} + \frac{1}{\sqrt{3}} \zeta_0^{(i_1)} \zeta_1^{(i_2)} + \right. \\
& \quad \left. + \frac{2}{3\sqrt{5}} \zeta_0^{(i_1)} \zeta_2^{(i_2)} - \frac{1}{3\sqrt{5}} \zeta_2^{(i_1)} \zeta_0^{(i_2)} + \right. \\
& \quad \left. + \sum_{i=1}^q \left(\frac{(i+2) \zeta_i^{(i_1)} \zeta_{i+2}^{(i_2)} - (i+1) \zeta_{i+2}^{(i_1)} \zeta_i^{(i_2)}}{\sqrt{(2i+1)(2i+5)(2i+3)}} - \frac{\zeta_i^{(i_1)} \zeta_i^{(i_2)}}{(2i-1)(2i+3)} \right) \right], \tag{7.56} \\
I_{0000T,t}^{(i_4 i_3 i_2 i_1)q} &= \sum_{j_1=0}^q \dots \sum_{j_4=0}^q C_{j_4 \dots j_1} \left(\prod_{l=1}^4 \zeta_{j_l}^{(i_l)} - \right. \\
& - \mathbf{1}_{\{i_1=i_2 \neq 0\}} \mathbf{1}_{\{j_1=j_2\}} \zeta_{j_3}^{(i_3)} \zeta_{j_4}^{(i_4)} - \mathbf{1}_{\{i_1=i_3 \neq 0\}} \mathbf{1}_{\{j_1=j_3\}} \zeta_{j_2}^{(i_2)} \zeta_{j_4}^{(i_4)} - \\
& - \mathbf{1}_{\{i_1=i_4 \neq 0\}} \mathbf{1}_{\{j_1=j_4\}} \zeta_{j_2}^{(i_2)} \zeta_{j_3}^{(i_3)} - \mathbf{1}_{\{i_2=i_3 \neq 0\}} \mathbf{1}_{\{j_2=j_3\}} \zeta_{j_1}^{(i_1)} \zeta_{j_4}^{(i_4)} -
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -1_{\{i_2=i_4 \neq 0\}} 1_{\{j_2=j_4\}} \zeta_{j_1}^{(i_1)} \zeta_{j_3}^{(i_3)} - 1_{\{i_3=i_4 \neq 0\}} 1_{\{j_3=j_4\}} \zeta_{j_1}^{(i_1)} \zeta_{j_2}^{(i_2)} + \\
& + 1_{\{i_1=i_2 \neq 0\}} 1_{\{j_1=j_2\}} 1_{\{i_3=i_4 \neq 0\}} 1_{\{j_3=j_4\}} + \\
& + 1_{\{i_1=i_3 \neq 0\}} 1_{\{j_1=j_3\}} 1_{\{i_2=i_4 \neq 0\}} 1_{\{j_2=j_4\}} + \\
& + 1_{\{i_1=i_4 \neq 0\}} 1_{\{j_1=j_4\}} 1_{\{i_2=i_3 \neq 0\}} 1_{\{j_2=j_3\}} \Big),
\end{aligned}$$

где в $C_{j_3 \dots j_1}$, $C_{j_4 \dots j_1}$ следует положить $\psi_1(s) = \dots = \psi_4(s) \equiv 1$.

Число q в приведенных формулах следует выбрать так, чтобы выполнялось условие (7.22) в теореме 7.2 при $r = 4$.

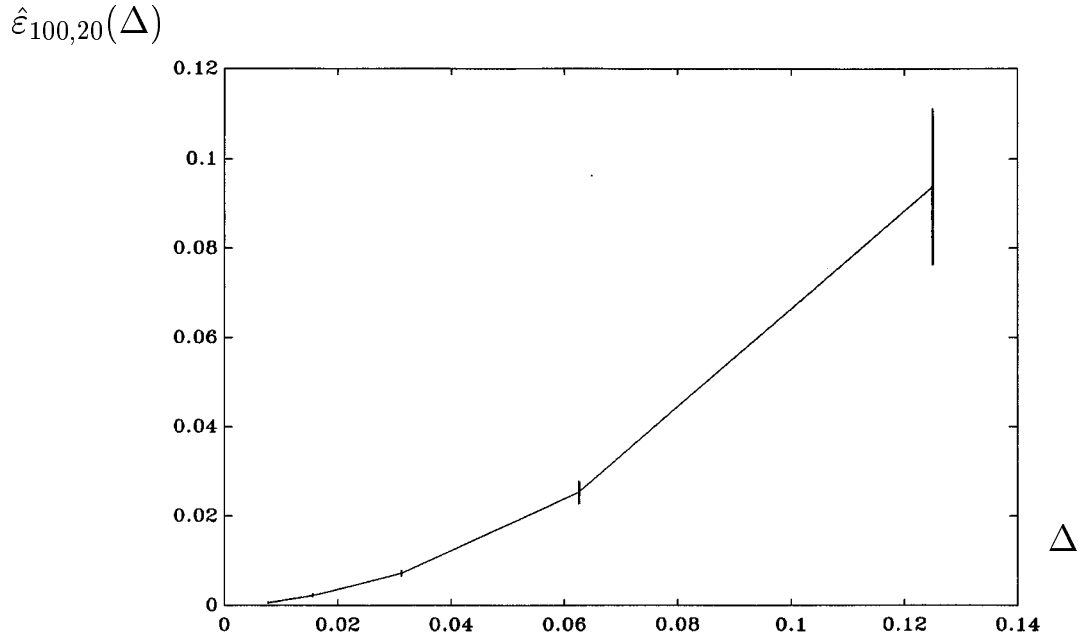


Рис. 7.6. Результат численного эксперимента 7.6.

Рассмотренный в данном разделе метод является новым благодаря применению полиномов Лежандра, а также использованию явной формулы для вычисления коэффициентов $C_{j_3 j_2 j_1}$, $C_{j_4 \dots j_1}$ и унифицированного разложения Тейлора–Ито.

Численный эксперимент 7.6 (рис. 7.6). Повторить численный эксперимент 7.4 для сильного численного метода порядка точности 2.0 вида (7.55).

7.3.5 Методы порядка точности 2.5

Пусть условия теоремы 7.2 выполнены при $r = 5$. Тогда из (7.21) при $r = 5$ получаем явный одношаговый сильный численный метод порядка точности 2.5 вида

$$\begin{aligned}
y_{p+1} = & y_p + \sum_{i_1=1}^m \Sigma_{i_1} I_{0\tau_{p+1}, \tau_p}^{(i_1)} + \Delta \mathbf{a} + \sum_{i_1, i_2=1}^m G_0^{(i_2)} \Sigma_{i_1} I_{00\tau_{p+1}, \tau_p}^{(i_2 i_1)q} + \\
& + \sum_{i_1=1}^m \left[G_0^{(i_1)} \mathbf{a} \left(\Delta I_{0\tau_{p+1}, \tau_p}^{(i_1)} + I_{1\tau_{p+1}, \tau_p}^{(i_1)} \right) - L \Sigma_{i_1} I_{1\tau_{p+1}, \tau_p}^{(i_1)} \right] + \\
& + \sum_{i_1, i_2, i_3=1}^m G_0^{(i_3)} G_0^{(i_2)} \Sigma_{i_1} I_{000\tau_{p+1}, \tau_p}^{(i_3 i_2 i_1)q} + \frac{\Delta^2}{2} L \mathbf{a} + \frac{\Delta^3}{6} L^2 \mathbf{a} + \\
& + \sum_{i_1, i_2=1}^m \left[G_0^{(i_2)} L \Sigma_{i_1} \left(I_{10\tau_{p+1}, \tau_p}^{(i_2 i_1)q} - I_{01\tau_{p+1}, \tau_p}^{(i_2 i_1)q} \right) - L G_0^{(i_2)} \Sigma_{i_1} I_{10\tau_{p+1}, \tau_p}^{(i_2 i_1)q} + \right. \\
& \quad \left. + G_0^{(i_2)} G_0^{(i_1)} \mathbf{a} \left(I_{01\tau_{p+1}, \tau_p}^{(i_2 i_1)q} + \Delta I_{00\tau_{p+1}, \tau_p}^{(i_2 i_1)q} \right) \right] + \\
& + \sum_{i_1, i_2, i_3, i_4=1}^m G_0^{(i_4)} G_0^{(i_3)} G_0^{(i_2)} \Sigma_{i_1} I_{0000\tau_{p+1}, \tau_p}^{(i_4 i_3 i_2 i_1)q} + \\
& + \sum_{i_1=1}^m \left[G_0^{(i_1)} L \mathbf{a} \left(\frac{1}{2} I_{2\tau_{p+1}, \tau_p}^{(i_1)} + \Delta I_{1\tau_{p+1}, \tau_p}^{(i_1)} + \frac{\Delta^2}{2} I_{0\tau_{p+1}, \tau_p}^{(i_1)} \right) + \right. \\
& \quad \left. + \frac{1}{2} L^2 \Sigma_{i_1} I_{2\tau_{p+1}, \tau_p}^{(i_1)} - L G_0^{(i_1)} \mathbf{a} \left(I_{2\tau_{p+1}, \tau_p}^{(i_1)} + \Delta I_{1\tau_{p+1}, \tau_p}^{(i_1)} \right) \right] + \\
& + \sum_{i_1, i_2, i_3=1}^m \left[G_0^{(i_3)} L G_0^{(i_2)} \Sigma_{i_1} \left(I_{100\tau_{p+1}, \tau_p}^{(i_3 i_2 i_1)q} - I_{010\tau_{p+1}, \tau_p}^{(i_3 i_2 i_1)q} \right) + \right. \\
& \quad + G_0^{(i_3)} G_0^{(i_2)} L \Sigma_{i_1} \left(I_{010\tau_{p+1}, \tau_p}^{(i_3 i_2 i_1)q} - I_{001\tau_{p+1}, \tau_p}^{(i_3 i_2 i_1)q} \right) + \\
& \quad + G_0^{(i_3)} G_0^{(i_2)} G_0^{(i_1)} \mathbf{a} \left(\Delta I_{000\tau_{p+1}, \tau_p}^{(i_3 i_2 i_1)q} + I_{001\tau_{p+1}, \tau_p}^{(i_3 i_2 i_1)q} \right) - \\
& \quad \left. - L G_0^{(i_3)} G_0^{(i_2)} \Sigma_{i_1} I_{100\tau_{p+1}, \tau_p}^{(i_3 i_2 i_1)q} \right] + \\
& + \sum_{i_1, i_2, i_3, i_4, i_5=1}^m G_0^{(i_5)} G_0^{(i_4)} G_0^{(i_3)} G_0^{(i_2)} \Sigma_{i_1} I_{00000\tau_{p+1}, \tau_p}^{(i_5 i_4 i_3 i_2 i_1)q}. \tag{7.57}
\end{aligned}$$

Для численного моделирования повторных стохастических интегралов Ито, входящих в (7.57), воспользуемся формулами предыдущих разделов, а также формулами:

$$I_{2_{\tau_{p+1}, \tau_p}}^{(i_1)} = \frac{\Delta^{\frac{5}{2}}}{3} \left(\zeta_0^{(i_1)} + \frac{\sqrt{3}}{2} \zeta_1^{(i_1)} + \frac{1}{2\sqrt{5}} \zeta_2^{(i_1)} \right),$$

$$I_{l_1 l_2 l_3 T, t}^{(i_3 i_2 i_1)q} = \sum_{j_1=0}^q \sum_{j_2=0}^q \sum_{j_3=0}^q C_{j_3 j_2 j_1} \left(\zeta_{j_1}^{(i_1)} \zeta_{j_2}^{(i_2)} \zeta_{j_3}^{(i_3)} - \right. \\ \left. - \mathbf{1}_{\{i_1=i_2 \neq 0\}} \mathbf{1}_{\{j_1=j_2\}} \zeta_{j_3}^{(i_3)} - \mathbf{1}_{\{i_2=i_3 \neq 0\}} \mathbf{1}_{\{j_2=j_3\}} \zeta_{j_1}^{(i_1)} - \right. \\ \left. - \mathbf{1}_{\{i_1=i_3 \neq 0\}} \mathbf{1}_{\{j_1=j_3\}} \zeta_{j_2}^{(i_2)} \right),$$

$$I_{l_1 \dots l_4 T, t}^{(i_4 \dots i_1)q} = \sum_{j_1=0}^q \dots \sum_{j_4=0}^q C_{j_4 \dots j_1} \left(\prod_{l=1}^4 \zeta_{j_l}^{(i_l)} - \right. \\ \left. - \mathbf{1}_{\{i_1=i_2 \neq 0\}} \mathbf{1}_{\{j_1=j_2\}} \zeta_{j_3}^{(i_3)} \zeta_{j_4}^{(i_4)} - \mathbf{1}_{\{i_1=i_3 \neq 0\}} \mathbf{1}_{\{j_1=j_3\}} \zeta_{j_2}^{(i_2)} \zeta_{j_4}^{(i_4)} - \right. \\ \left. - \mathbf{1}_{\{i_1=i_4 \neq 0\}} \mathbf{1}_{\{j_1=j_4\}} \zeta_{j_2}^{(i_2)} \zeta_{j_3}^{(i_3)} - \mathbf{1}_{\{i_2=i_3 \neq 0\}} \mathbf{1}_{\{j_2=j_3\}} \zeta_{j_1}^{(i_1)} \zeta_{j_4}^{(i_4)} - \right. \\ \left. - \mathbf{1}_{\{i_2=i_4 \neq 0\}} \mathbf{1}_{\{j_2=j_4\}} \zeta_{j_1}^{(i_1)} \zeta_{j_3}^{(i_3)} - \mathbf{1}_{\{i_3=i_4 \neq 0\}} \mathbf{1}_{\{j_3=j_4\}} \zeta_{j_1}^{(i_1)} \zeta_{j_2}^{(i_2)} + \right. \\ \left. + \mathbf{1}_{\{i_1=i_2 \neq 0\}} \mathbf{1}_{\{j_1=j_2\}} \mathbf{1}_{\{i_3=i_4 \neq 0\}} \mathbf{1}_{\{j_3=j_4\}} + \right. \\ \left. + \mathbf{1}_{\{i_1=i_3 \neq 0\}} \mathbf{1}_{\{j_1=j_3\}} \mathbf{1}_{\{i_2=i_4 \neq 0\}} \mathbf{1}_{\{j_2=j_4\}} + \right. \\ \left. + \mathbf{1}_{\{i_1=i_4 \neq 0\}} \mathbf{1}_{\{j_1=j_4\}} \mathbf{1}_{\{i_2=i_3 \neq 0\}} \mathbf{1}_{\{j_2=j_3\}} \right),$$

$$I_{l_1 \dots l_5 T, t}^{(i_5 \dots i_1)q} = \sum_{j_1=0}^q \dots \sum_{j_5=0}^q C_{j_5 \dots j_1} \left(\prod_{l=1}^5 \zeta_{j_l}^{(i_l)} - \right. \\ \left. - \mathbf{1}_{\{i_1=i_2 \neq 0\}} \mathbf{1}_{\{j_1=j_2\}} \zeta_{j_3}^{(i_3)} \zeta_{j_4}^{(i_4)} \zeta_{j_5}^{(i_5)} - \mathbf{1}_{\{i_1=i_3 \neq 0\}} \mathbf{1}_{\{j_1=j_3\}} \zeta_{j_2}^{(i_2)} \zeta_{j_4}^{(i_4)} \zeta_{j_5}^{(i_5)} - \right. \\ \left. - \mathbf{1}_{\{i_1=i_4 \neq 0\}} \mathbf{1}_{\{j_1=j_4\}} \zeta_{j_2}^{(i_2)} \zeta_{j_3}^{(i_3)} \zeta_{j_5}^{(i_5)} - \mathbf{1}_{\{i_1=i_5 \neq 0\}} \mathbf{1}_{\{j_1=j_5\}} \zeta_{j_2}^{(i_2)} \zeta_{j_3}^{(i_3)} \zeta_{j_4}^{(i_4)} - \right. \\ \left. - \mathbf{1}_{\{i_2=i_3 \neq 0\}} \mathbf{1}_{\{j_2=j_3\}} \zeta_{j_1}^{(i_1)} \zeta_{j_4}^{(i_4)} \zeta_{j_5}^{(i_5)} - \mathbf{1}_{\{i_2=i_4 \neq 0\}} \mathbf{1}_{\{j_2=j_4\}} \zeta_{j_1}^{(i_1)} \zeta_{j_3}^{(i_3)} \zeta_{j_5}^{(i_5)} - \right. \\ \left. - \mathbf{1}_{\{i_2=i_5 \neq 0\}} \mathbf{1}_{\{j_2=j_5\}} \zeta_{j_1}^{(i_1)} \zeta_{j_3}^{(i_3)} \zeta_{j_4}^{(i_4)} - \mathbf{1}_{\{i_3=i_4 \neq 0\}} \mathbf{1}_{\{j_3=j_4\}} \zeta_{j_1}^{(i_1)} \zeta_{j_2}^{(i_2)} \zeta_{j_5}^{(i_5)} - \right. \\ \left. - \mathbf{1}_{\{i_3=i_5 \neq 0\}} \mathbf{1}_{\{j_3=j_5\}} \zeta_{j_1}^{(i_1)} \zeta_{j_2}^{(i_2)} \zeta_{j_4}^{(i_4)} - \mathbf{1}_{\{i_4=i_5 \neq 0\}} \mathbf{1}_{\{j_4=j_5\}} \zeta_{j_1}^{(i_1)} \zeta_{j_2}^{(i_2)} \zeta_{j_3}^{(i_3)} + \right. \\ \left. + \mathbf{1}_{\{i_1=i_2 \neq 0\}} \mathbf{1}_{\{j_1=j_2\}} \mathbf{1}_{\{i_3=i_4 \neq 0\}} \mathbf{1}_{\{j_3=j_4\}} \zeta_{j_5}^{(i_5)} + \right. \\ \left. + \mathbf{1}_{\{i_1=i_2 \neq 0\}} \mathbf{1}_{\{j_1=j_2\}} \mathbf{1}_{\{i_3=i_5 \neq 0\}} \mathbf{1}_{\{j_3=j_5\}} \zeta_{j_4}^{(i_4)} + \right. \\ \left. + \mathbf{1}_{\{i_1=i_2 \neq 0\}} \mathbf{1}_{\{j_1=j_2\}} \mathbf{1}_{\{i_4=i_5 \neq 0\}} \mathbf{1}_{\{j_4=j_5\}} \zeta_{j_3}^{(i_3)} + \right.$$

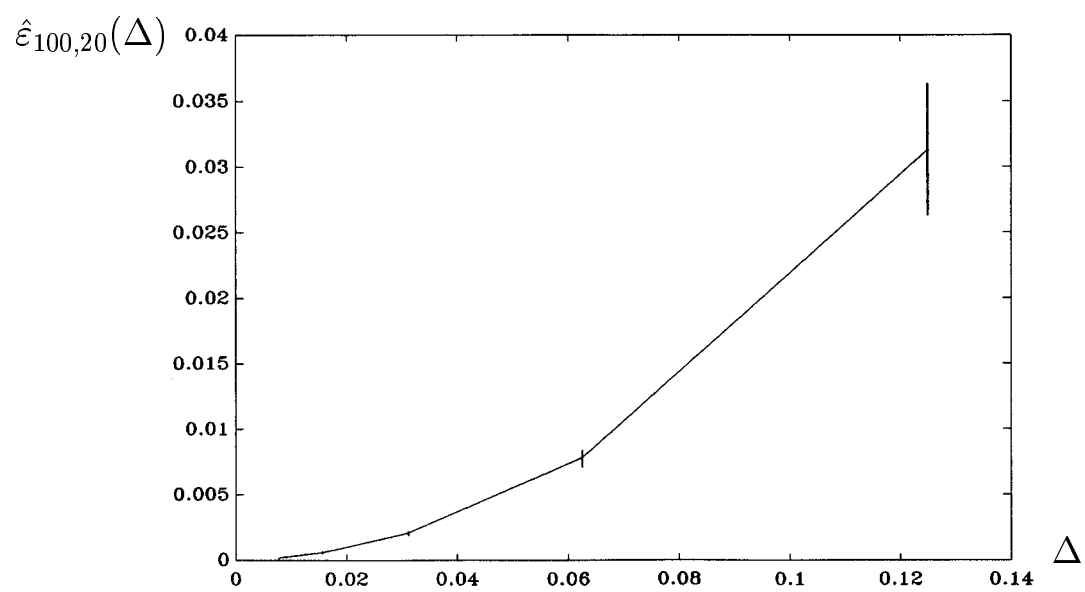


Рис. 7.7. Результат численного эксперимента 7.7.

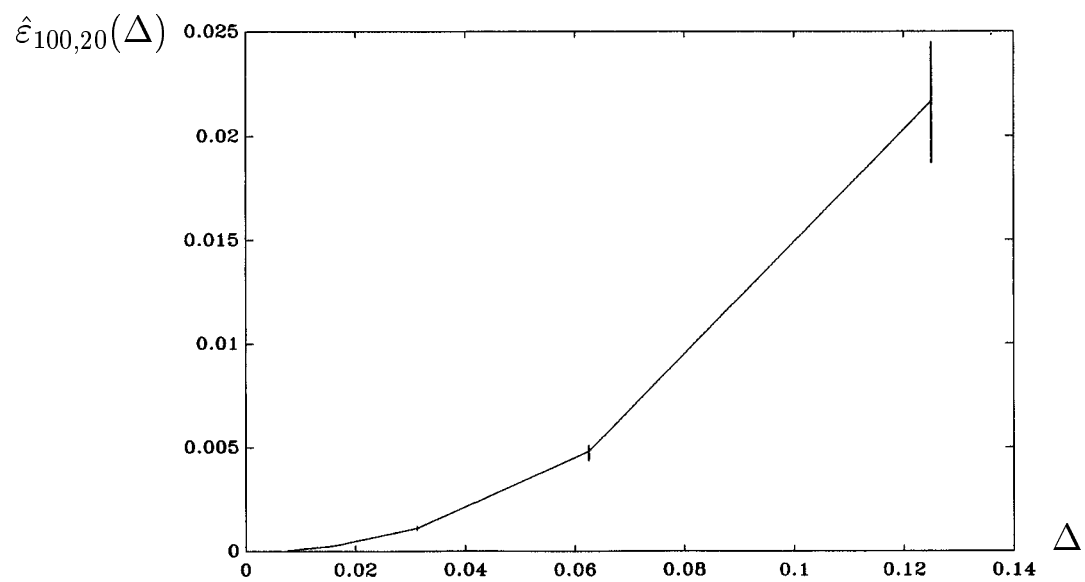


Рис. 7.8. Результат численного эксперимента 7.8.

$$\begin{aligned}
& + \mathbf{1}_{\{i_1=i_3 \neq 0\}} \mathbf{1}_{\{j_1=j_3\}} \mathbf{1}_{\{i_2=i_2 \neq 0\}} \mathbf{1}_{\{j_4=j_4\}} \zeta_{j_5}^{(i_5)} + \\
& + \mathbf{1}_{\{i_1=i_3 \neq 0\}} \mathbf{1}_{\{j_1=j_3\}} \mathbf{1}_{\{i_2=i_5 \neq 0\}} \mathbf{1}_{\{j_2=j_5\}} \zeta_{j_4}^{(i_4)} + \\
& + \mathbf{1}_{\{i_1=i_3 \neq 0\}} \mathbf{1}_{\{j_1=j_3\}} \mathbf{1}_{\{i_4=i_5 \neq 0\}} \mathbf{1}_{\{j_4=j_5\}} \zeta_{j_2}^{(i_2)} + \\
& + \mathbf{1}_{\{i_1=i_4 \neq 0\}} \mathbf{1}_{\{j_1=j_4\}} \mathbf{1}_{\{i_2=i_3 \neq 0\}} \mathbf{1}_{\{j_2=j_3\}} \zeta_{j_5}^{(i_5)} + \\
& + \mathbf{1}_{\{i_1=i_4 \neq 0\}} \mathbf{1}_{\{j_1=j_4\}} \mathbf{1}_{\{i_2=i_5 \neq 0\}} \mathbf{1}_{\{j_2=j_5\}} \zeta_{j_3}^{(i_3)} + \\
& + \mathbf{1}_{\{i_1=i_4 \neq 0\}} \mathbf{1}_{\{j_1=j_4\}} \mathbf{1}_{\{i_3=i_5 \neq 0\}} \mathbf{1}_{\{j_3=j_5\}} \zeta_{j_2}^{(i_2)} + \\
& + \mathbf{1}_{\{i_1=i_5 \neq 0\}} \mathbf{1}_{\{j_1=j_5\}} \mathbf{1}_{\{i_2=i_3 \neq 0\}} \mathbf{1}_{\{j_2=j_3\}} \zeta_{j_4}^{(i_4)} + \\
& + \mathbf{1}_{\{i_1=i_5 \neq 0\}} \mathbf{1}_{\{j_1=j_5\}} \mathbf{1}_{\{i_2=i_4 \neq 0\}} \mathbf{1}_{\{j_2=j_4\}} \zeta_{j_3}^{(i_3)} + \\
& + \mathbf{1}_{\{i_1=i_5 \neq 0\}} \mathbf{1}_{\{j_1=j_5\}} \mathbf{1}_{\{i_3=i_4 \neq 0\}} \mathbf{1}_{\{j_3=j_4\}} \zeta_{j_2}^{(i_2)} + \\
& + \mathbf{1}_{\{i_2=i_3 \neq 0\}} \mathbf{1}_{\{j_2=j_3\}} \mathbf{1}_{\{i_4=i_5 \neq 0\}} \mathbf{1}_{\{j_4=j_5\}} \zeta_{j_1}^{(i_1)} + \\
& + \mathbf{1}_{\{i_2=i_4 \neq 0\}} \mathbf{1}_{\{j_2=j_4\}} \mathbf{1}_{\{i_3=i_5 \neq 0\}} \mathbf{1}_{\{j_3=j_5\}} \zeta_{j_1}^{(i_1)} + \\
& + \mathbf{1}_{\{i_2=i_5 \neq 0\}} \mathbf{1}_{\{j_2=j_5\}} \mathbf{1}_{\{i_3=i_4 \neq 0\}} \mathbf{1}_{\{j_3=j_4\}} \zeta_{j_1}^{(i_1)} \Big),
\end{aligned}$$

где в $C_{j_3 \dots j_1}$, $C_{j_4 \dots j_1}$, $C_{j_5 \dots j_1}$ следует выбирать функции $\psi_1(s), \dots, \psi_5(s)$ определенным образом.

Число q в приведенных формулах следует выбирать так, чтобы выполнялось условие (7.22) в теореме 7.2 при $r = 5$.

Наряду с численным методом (7.57) рассмотрим следующий явный сильный одношаговый численный метод порядка точности 2.0:

$$\mathbf{y}_{p+1} = \mathbf{y}_p + \mathbf{v}_p, \quad (7.58)$$

где $\mathbf{v}_p$ — правая часть численного метода (7.57) без слагаемых $\mathbf{y}_p$ и $\frac{\Delta^3}{6} L^2 \mathbf{a}(\mathbf{y}_p, \tau_p)$. Численные методы (7.55), (7.57) и (7.58) согласно теореме 7.2 имеют сильный порядок точности 2.0, 2.5 и 2.0 соответственно (см. рис. 7.6–7.8), однако численный метод (7.58) эффективнее численного метода (7.55) (см. рис. 7.6, 7.7), по-видимому, благодаря учету нескольких дополнительных слагаемых.

Численный эксперимент 7.7. Повторить численный эксперимент 7.4 для сильного численного метода порядка точности 2.0 вида (7.58).

Численный эксперимент 7.8. Повторить численный эксперимент 7.4 для сильного численного метода порядка точности 2.5 вида (7.57).

7.3.6 Метод порядка точности 3.0

Пусть условия теоремы 7.2 выполнены при $r = 6$. Тогда из (7.21) при $r = 6$ получаем явный одношаговый сильный численный метод порядка точности 3.0 вида

$$\begin{aligned}
\mathbf{y}_{p+1} = & \mathbf{y}_p + \sum_{i_1=1}^m \Sigma_{i_1} I_{0\tau_{p+1}, \tau_p}^{(i_1)} + \Delta \mathbf{a} + \sum_{i_1, i_2=1}^m G_0^{(i_2)} \Sigma_{i_1} I_{00\tau_{p+1}, \tau_p}^{(i_2 i_1)q} + \\
& + \sum_{i_1=1}^m \left[G_0^{(i_1)} \mathbf{a} \left(\Delta I_{0\tau_{p+1}, \tau_p}^{(i_1)} + I_{1\tau_{p+1}, \tau_p}^{(i_1)} \right) - L \Sigma_{i_1} I_{1\tau_{p+1}, \tau_p}^{(i_1)} \right] + \\
& + \sum_{i_1, i_2, i_3=1}^m G_0^{(i_3)} G_0^{(i_2)} \Sigma_{i_1} I_{000\tau_{p+1}, \tau_p}^{(i_3 i_2 i_1)q} + \frac{\Delta^2}{2} L \mathbf{a} + \\
& + \sum_{i_1, i_2=1}^m \left[G_0^{(i_2)} L \Sigma_{i_1} \left(I_{10\tau_{p+1}, \tau_p}^{(i_2 i_1)q} - I_{01\tau_{p+1}, \tau_p}^{(i_2 i_1)q} \right) - L G_0^{(i_2)} \Sigma_{i_1} I_{10\tau_{p+1}, \tau_p}^{(i_2 i_1)q} \right. \\
& \quad \left. + G_0^{(i_2)} G_0^{(i_1)} \mathbf{a} \left(I_{01\tau_{p+1}, \tau_p}^{(i_2 i_1)q} + \Delta I_{00\tau_{p+1}, \tau_p}^{(i_2 i_1)q} \right) \right] + \\
& + \sum_{i_1, \dots, i_4=1}^m G_0^{(i_4)} G_0^{(i_3)} G_0^{(i_2)} \Sigma_{i_1} I_{0000\tau_{p+1}, \tau_p}^{(i_4 i_3 i_2 i_1)q} + \\
& + \sum_{i_1=1}^m \left[G_0^{(i_1)} L \mathbf{a} \left(\frac{1}{2} I_{2\tau_{p+1}, \tau_p}^{(i_1)} + \Delta I_{1\tau_{p+1}, \tau_p}^{(i_1)} + \frac{\Delta^2}{2} I_{0\tau_{p+1}, \tau_p}^{(i_1)} \right) \right. \\
& \quad \left. + \frac{1}{2} L^2 \Sigma_{i_1} I_{2\tau_{p+1}, \tau_p}^{(i_1)} - L G_0^{(i_1)} \mathbf{a} \left(I_{2\tau_{p+1}, \tau_p}^{(i_1)} + \Delta I_{1\tau_{p+1}, \tau_p}^{(i_1)} \right) \right] + \\
& + \sum_{i_1, i_2, i_3=1}^m \left[G_0^{(i_3)} L G_0^{(i_2)} \Sigma_{i_1} \left(I_{100\tau_{p+1}, \tau_p}^{(i_3 i_2 i_1)q} - I_{010\tau_{p+1}, \tau_p}^{(i_3 i_2 i_1)q} \right) \right. \\
& \quad + G_0^{(i_3)} G_0^{(i_2)} L \Sigma_{i_1} \left(I_{010\tau_{p+1}, \tau_p}^{(i_3 i_2 i_1)q} - I_{001\tau_{p+1}, \tau_p}^{(i_3 i_2 i_1)q} \right) + \\
& \quad + G_0^{(i_3)} G_0^{(i_2)} G_0^{(i_1)} \mathbf{a} \left(\Delta I_{000\tau_{p+1}, \tau_p}^{(i_3 i_2 i_1)q} + I_{001\tau_{p+1}, \tau_p}^{(i_3 i_2 i_1)q} \right) - \\
& \quad \left. - L G_0^{(i_3)} G_0^{(i_2)} \Sigma_{i_1} I_{100\tau_{p+1}, \tau_p}^{(i_3 i_2 i_1)q} \right] + \\
& + \sum_{i_1, \dots, i_5=1}^m G_0^{(i_5)} G_0^{(i_4)} G_0^{(i_3)} G_0^{(i_2)} \Sigma_{i_1} I_{00000\tau_{p+1}, \tau_p}^{(i_5 i_4 i_3 i_2 i_1)q} + \frac{\Delta^3}{6} L^2 \mathbf{a} + \\
& + \sum_{i_1, i_2=1}^m \left[G_0^{(i_2)} G_0^{(i_1)} L \mathbf{a} \left(\frac{1}{2} I_{02\tau_{p+1}, \tau_p}^{(i_2 i_1)q} + \Delta I_{01\tau_{p+1}, \tau_p}^{(i_2 i_1)q} + \frac{\Delta^2}{2} I_{00\tau_{p+1}, \tau_p}^{(i_2 i_1)q} \right) \right.
\end{aligned}$$

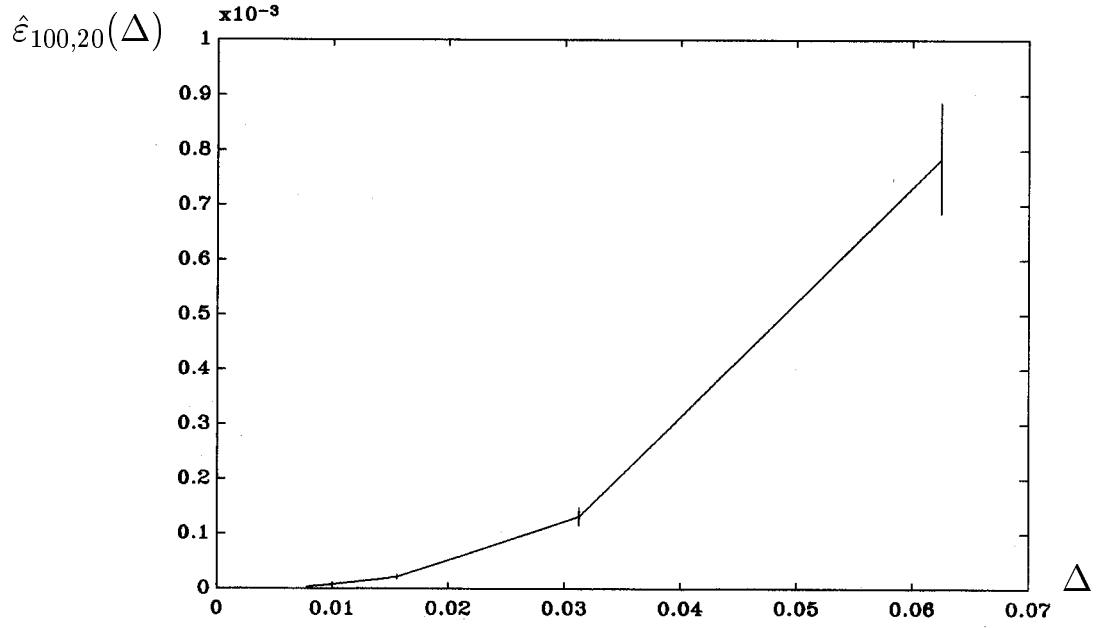


Рис. 7.9. Результат численного эксперимента 7.9.

$$\begin{aligned}
& + \frac{1}{2} L^2 G_0^{(i_2)} \Sigma_{i_1} I_{20_{\tau_{p+1}, \tau_p}}^{(i_2 i_1) q} + \\
& + G_0^{(i_2)} L G_0^{(i_1)} \mathbf{a} \left(I_{11_{\tau_{p+1}, \tau_p}}^{(i_2 i_1) q} - I_{02_{\tau_{p+1}, \tau_p}}^{(i_2 i_1) q} + \Delta \left(I_{10_{\tau_{p+1}, \tau_p}}^{(i_2 i_1) q} - I_{01_{\tau_{p+1}, \tau_p}}^{(i_2 i_1) q} \right) \right) + \\
& + L G_0^{(i_2)} L \Sigma_{i_1} \left(I_{11_{\tau_{p+1}, \tau_p}}^{(i_2 i_1) q} - I_{20_{\tau_{p+1}, \tau_p}}^{(i_2 i_1) q} \right) + \\
& + G_0^{(i_2)} L^2 \Sigma_{i_1} \left(\frac{1}{2} I_{02_{\tau_{p+1}, \tau_p}}^{(i_2 i_1) q} + \frac{1}{2} I_{20_{\tau_{p+1}, \tau_p}}^{(i_2 i_1) q} - I_{11_{\tau_{p+1}, \tau_p}}^{(i_2 i_1) q} \right) - \\
& - L G_0^{(i_2)} G_0^{(i_1)} \mathbf{a} \left(\Delta I_{10_{\tau_{p+1}, \tau_p}}^{(i_2 i_1) q} + I_{11_{\tau_{p+1}, \tau_p}}^{(i_2 i_1) q} \right) \Big] + \\
& + \sum_{i_1, \dots, i_4=1}^m \left[G_0^{(i_4)} G_0^{(i_3)} G_0^{(i_2)} G_0^{(i_1)} \mathbf{a} \left(\Delta I_{0000_{\tau_{p+1}, \tau_p}}^{(i_4 i_3 i_2 i_1) q} + I_{0001_{\tau_{p+1}, \tau_p}}^{(i_4 i_3 i_2 i_1) q} \right) + \right. \\
& + G_0^{(i_4)} G_0^{(i_3)} L G_0^{(i_2)} \Sigma_{i_1} \left(I_{0100_{\tau_{p+1}, \tau_p}}^{(i_4 i_3 i_2 i_1) q} - I_{0010_{\tau_{p+1}, \tau_p}}^{(i_4 i_3 i_2 i_1) q} \right) - \\
& - L G_0^{(i_4)} G_0^{(i_3)} G_0^{(i_2)} \Sigma_{i_1} I_{1000_{\tau_{p+1}, \tau_p}}^{(i_4 i_3 i_2 i_1) q} + \\
& \left. + G_0^{(i_4)} L G_0^{(i_3)} G_0^{(i_2)} \Sigma_{i_1} \left(I_{1000_{\tau_{p+1}, \tau_p}}^{(i_4 i_3 i_2 i_1) q} - I_{0100_{\tau_{p+1}, \tau_p}}^{(i_4 i_3 i_2 i_1) q} \right) + \right.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + G_0^{(i_4)} G_0^{(i_3)} G_0^{(i_2)} L \Sigma_{i_1} \left(I_{0010 \tau_{p+1}, \tau_p}^{(i_4 i_3 i_2 i_1) q} - I_{0001 \tau_{p+1}, \tau_p}^{(i_4 i_3 i_2 i_1) q} \right) \Big] + \\
& + \sum_{i_1, \dots, i_6=1}^m G_0^{(i_6)} G_0^{(i_5)} G_0^{(i_4)} G_0^{(i_3)} G_0^{(i_2)} \Sigma_{i_1} I_{000000 \tau_{p+1}, \tau_p}^{(i_6 i_5 i_4 i_3 i_2 i_1) q}. \tag{7.59}
\end{aligned}$$

Повторные стохастические интегралы Ито, входящие в правую часть (7.59), аппроксимируются таким же способом, как и в предыдущем разделе.

Численный эксперимент 7.9 (рис. 7.9). *Повторить численный эксперимент 7.4 при $\Delta = 2^{-j}$, $j = 4, 5, 6, 7$, для сильного численного метода порядка точности 3.0 вида (7.59).*

7.4 Явные одношаговые методы, основанные на разложении Тейлора–Ито в форме Вагнера и Платена

7.4.1 Метод порядка точности $r/2$. Теорема о сходимости

Предположим, что условия теоремы 4.2 выполнены. Тогда для процесса $\eta_s = R(\mathbf{x}_s, s)$, где $R: \mathbb{R}^n \times [0, T] \rightarrow \mathbb{R}^n$, а $\mathbf{x}_s$ — решение стохастического дифференциального уравнения Ито (7.18), справедливо с вероятностью 1 разложение Тейлора–Ито в форме Вагнера и Платена вида

$$\eta_s = \eta_t + \sum_{q,k=1}^r \sum_{(\lambda_k, \dots, \lambda_1) \in \mathcal{E}'_{qk}} {}^{(p_k)} Q_{\lambda_k} \dots Q_{\lambda_1} \{\eta_t\} {}^{p_k} J_{(\lambda_k, \dots, \lambda_1)s,t} + \tilde{H}_{r+1,s,t}, \tag{7.60}$$

где

$$\tilde{H}_{r+1,s,t} = H_{r+1,s,t} - \mathbf{1}_{\{r=2d+1, d \in N\}} \frac{(s-t)^{\frac{1}{2}(r+1)}}{\left(\frac{1}{2}(r+1)\right)!} L^{\frac{1}{2}(r+1)} \eta_t,$$

правая часть (7.60) существует в среднеквадратическом смысле и в ней введены обозначения

$$\begin{aligned}
{}^{(p_k)} J_{(\lambda_k \dots \lambda_1)s,t} &= \left\| J_{(\lambda_k \dots \lambda_1)s,t}^{(i_k \dots i_1)} \right\|_{i_1=\lambda_1, \dots, i_l=\lambda_l}^{m\lambda_1 \dots m\lambda_l}, \\
J_{(\lambda_k \dots \lambda_1)s,t}^{(i_k \dots i_1)} &= \int_t^s \dots \int_t^{\tau_2} d\mathbf{w}_{\tau_1}^{(i_k)} \dots d\mathbf{w}_{\tau_k}^{(i_1)}, \tag{7.61}
\end{aligned}$$

$$\mathcal{E}'_{qk} = \mathcal{E}_{qk} \cup \{(\lambda_k, \dots, \lambda_1) : \lambda_1 = \dots = \lambda_k = 0 \text{ и } 2k = q+1\},$$

$$\mathcal{E}_{qk} = \{(\lambda_k, \dots, \lambda_1) : 2k - \lambda_1 - \dots - \lambda_k = q, \lambda_l \in \{1, 0\}, l = 1, \dots, k\};$$

остальные обозначения такие же, как в теоремах 4.1 и 4.2.

Пусть $R(\mathbf{x}, t) \equiv \mathbf{x}$, $s = \tau_{p+1}$, $t = \tau_p$, $p\Delta \stackrel{\text{def}}{=} \tau_p$, $\Delta = T/N$, $p \in \{0, 1, \dots, N\}$, $T = \tau_N$. Тогда из (7.60) получаем общее представление явной одношаговой численной схемы решения стохастического дифференциального уравнения Ито (7.18), основанной на разложении Тейлора–Ито в форме Вагнера и Платена:

$$\mathbf{y}_{\tau_{p+1}} = \mathbf{y}_{\tau_p} + \sum_{q,k=1}^r \sum_{(\lambda_k, \dots, \lambda_1) \in \mathcal{E}'_{qk}} {}^{(p_k)}Q_{\lambda_k} \dots Q_{\lambda_1} \{\mathbf{y}_{\tau_p}\} {}^{p_k} \cdot {}^{(p_k)}\hat{J}_{(\lambda_k, \dots, \lambda_1)\tau_{p+1}, \tau_p}, \quad (7.62)$$

где

$${}^{(p_k)}\hat{J}_{(\lambda_k, \dots, \lambda_1)\tau_{p+1}, \tau_p} = \left\| \hat{J}_{(\lambda_k, \dots, \lambda_1)\tau_{p+1}, \tau_p}^{(i_k \dots i_1)} \right\|_{i_1=\lambda_1, \dots, i_l=\lambda_l}^{m\lambda_1 \dots m\lambda_l},$$

а $\hat{J}_{(\lambda_k, \dots, \lambda_1)\tau_{p+1}, \tau_p}^{(i_k \dots i_1)}$ — аппроксимация повторного стохастического интеграла Ито (7.61), причем $\hat{J}_{(\lambda_0, \dots, \lambda_1)\tau_{p+1}, \tau_p}^{(i_0 \dots i_1)} \stackrel{\text{def}}{=} 1$.

Положим

$$\mathcal{M}_g = \{(\lambda_g, \dots, \lambda_1) : \lambda_l = 1, 0; l = 1, \dots, g\}.$$

Сформулируем теорему о сильной сходимости явной одношаговой численной схемы (7.62).

Теорема 7.3 [86]. Пусть для фиксированного $r = 2, 3, \dots$ выполнены следующие условия:

1. Для всех $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$, $(\lambda_k, \dots, \lambda_1) \in \bigcup_{g=1}^r \mathcal{M}_g$, $i_1, \dots, i_k = 0, 1, \dots, m$ и $t \in [0, T]$

$$\left| Q_{\lambda_k}^{(i_k)} \dots Q_{\lambda_1}^{(i_1)} \mathbf{x} - Q_{\lambda_k}^{(i_k)} \dots Q_{\lambda_1}^{(i_1)} \mathbf{y} \right| \leq K_1 |\mathbf{x} - \mathbf{y}|.$$

2. Для всех $(\lambda_k, \dots, \lambda_1) \in \bigcup_{q,g=1}^r \mathcal{E}_{qg}$, $p \in \{0, 1, \dots, N-1\}$, $i_1, \dots, i_k = 0, 1, \dots, m$, $i_1^2 + \dots + i_k^2 > 0$ с вероятностью 1 имеем, $\mathbb{M} \left\{ \hat{J}_{(\lambda_k, \dots, \lambda_1)\tau_{p+1}, \tau_p}^{(i_k \dots i_1)} | \mathcal{F}_{\tau_p} \right\} = 0$ и

$$\mathbb{M} \left\{ \left(J_{(\lambda_k, \dots, \lambda_1)\tau_{p+1}, \tau_p}^{(i_k \dots i_1)} - \hat{J}_{(\lambda_k, \dots, \lambda_1)\tau_{p+1}, \tau_p}^{(i_k \dots i_1)} \right)^2 \right\} \leq C^* \Delta^{r+1}, \quad C^* < \infty. \quad (7.63)$$

3. Для всех $(\lambda_k, \dots, \lambda_1) \in \bigcup_{g=1}^r \mathcal{M}_g$, $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$, $t \in [0, T]$ и $i_1, \dots, i_k = 0, 1, \dots, m$

$$\left| Q_{\lambda_k}^{(i_k)} \dots Q_{\lambda_1}^{(i_1)} \mathbf{x} \right| \leq K_2 (1 + |\mathbf{x}|), \quad Q_{\lambda_k}^{(i_k)} \dots Q_{\lambda_1}^{(i_1)} \mathbf{x} \in \mathcal{L}$$

(определение класса $\mathcal{L}$ дано в разд. 4.2).

4. Для всех $(\lambda_k, \dots, \lambda_1) \in \mathcal{M}_{r+1}$, $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$, $t \in [0, T]$ и $i_1, \dots, i_{r+1} = 0, 1, \dots, m$

$$\left| Q_{\lambda_{r+1}}^{(i_{r+1})} \dots Q_{\lambda_1}^{(i_1)} \mathbf{x} \right| \leq K_2 (1 + |\mathbf{x}|).$$

5. Случайные величины $\mathbf{x}_0, \mathbf{y}_0$ $\mathcal{F}_0$ -измеримы и $M\{|\mathbf{x}_0 - \mathbf{y}_0|^2\} \leq K_3 \Delta^r$, $M\{|\mathbf{x}_0|^2\} < \infty$. Тогда

$$M\left\{\sup_{0 \leq t \leq T} |\mathbf{x}_t - \mathbf{y}_t|^2\right\} \leq K_4 \Delta^r,$$

где постоянные $K_1, \dots, K_4$, C^* не зависят от Δ , а $\mathbf{y}_t$ определяется из (7.62) при $\tau_{p+1} = t$.

Из теоремы 7.3 следует, что численная схема (7.62) является явной сильной одношаговой численной схемой порядка точности $r/2$ для стохастического дифференциального уравнения Ито (7.18).

7.4.2 Метод порядка точности 1.5

Рассмотрим в условиях теоремы 7.3 при $r = 3$ явный сильный одношаговый численный метод порядка точности 1.5, основанный на разложении Тейлора–Ито в форме Вагнера и Платена и вытекающий из (7.62) при $r = 3$:

$$\begin{aligned} \mathbf{y}_{p+1} = & \mathbf{y}_p + \sum_{i_1=1}^m \Sigma_{i_1} \hat{J}_{(1)\tau_{p+1}, \tau_p}^{(i_1)} + \Delta \mathbf{a} + \frac{\Delta^2}{2} L \mathbf{a} + \\ & + \sum_{i_1, i_2=1}^m G_0^{(i_2)} \Sigma_{i_1} \hat{J}_{(11)\tau_{p+1}, \tau_p}^{(i_2 i_1)} + \sum_{i_1=1}^m L \Sigma_{i_1} \hat{J}_{(01)\tau_{p+1}, \tau_p}^{(i_1)} + \\ & + \sum_{i_1=1}^m G_0^{(i_1)} \mathbf{a} \hat{J}_{(10)\tau_{p+1}, \tau_p}^{(i_1)} + \sum_{i_1, i_2, i_3=1}^m G_0^{(i_3)} G_0^{(i_2)} \Sigma_{i_1} \hat{J}_{(111)\tau_{p+1}, \tau_p}^{(i_3 i_2 i_1)}. \end{aligned} \quad (7.64)$$

Здесь и далее $\mathbf{a}(\mathbf{y}_p, \tau_p) \stackrel{\text{def}}{=} \mathbf{a}$; $\Sigma_i(\mathbf{y}_p, \tau_p) \stackrel{\text{def}}{=} \Sigma_i$; $\mathbf{y}_{\tau_p} \stackrel{\text{def}}{=} \mathbf{y}_p$.

З а м е ч а н и е 7.1. Следует отметить, что при $r = 2$ из (7.62) получим метод Г. Н. Мильштейна, который был подробно рассмотрен ранее.

7.4.3 Метод порядка точности 2.0

Рассмотрим в условиях теоремы 7.3 при $r = 4$ явный сильный одношаговый численный метод порядка точности 2.0, основанный на

разложении Тейлора–Ито в форме Вагнера и Платена и вытекающий из (7.62) при $r = 4$:

$$\begin{aligned}
\mathbf{y}_{p+1} = & \mathbf{y}_p + \sum_{i_1=1}^m \Sigma_{i_1} \hat{J}_{(1)\tau_{p+1}, \tau_p}^{(i_1)} + \mathbf{a}\Delta + \\
& + \sum_{i_1, i_2=1}^m G_0^{(i_2)} \Sigma_{i_1} \hat{J}_{(11)\tau_{p+1}, \tau_p}^{(i_2 i_1)} + \sum_{i_1=1}^m L \Sigma_{i_1} \hat{J}_{(01)\tau_{p+1}, \tau_p}^{(i_1)} + \\
& + \sum_{i_1=1}^m G_0^{(i_1)} \mathbf{a} \hat{J}_{(10)\tau_{p+1}, \tau_p}^{(i_1)} + \sum_{i_1, i_2, i_3=1}^m G_0^{(i_3)} G_0^{(i_2)} \Sigma_{i_1} \hat{J}_{(111)\tau_{p+1}, \tau_p}^{(i_3 i_2 i_1)} + \\
& + \sum_{i_1, i_2=1}^m \left[G_0^{(i_2)} L \Sigma_{i_1} \hat{J}_{(101)\tau_{p+1}, \tau_p}^{(i_2 i_1)} + L G_0^{(i_2)} \Sigma_{i_1} \hat{J}_{(011)\tau_{p+1}, \tau_p}^{(i_2 i_1)} + \right. \\
& \quad \left. + G_0^{(i_2)} G_0^{(i_1)} \mathbf{a} \hat{J}_{(110)\tau_{p+1}, \tau_p}^{(i_2 i_1)} \right] + L \mathbf{a} \frac{\Delta^2}{2} + \\
& + \sum_{i_1, \dots, i_4=1}^m G_0^{(i_4)} G_0^{(i_3)} G_0^{(i_2)} \Sigma_{i_1} \hat{J}_{(1111)\tau_{p+1}, \tau_p}^{(i_4 i_3 i_2 i_1)}, \tag{7.65}
\end{aligned}$$

где сохранен смысл обозначений, введенных в (7.64).

7.4.4 Метод порядка точности 2.5

Рассмотрим в условиях теоремы 7.3 при $r = 5$ явный сильный одношаговый численный метод порядка точности 2.5, основанный на разложении Тейлора–Ито в форме Вагнера и Платена:

$$\begin{aligned}
\mathbf{y}_{p+1} = & \mathbf{y}_p + \sum_{i_1=1}^m \Sigma_{i_1} \hat{J}_{(1)\tau_{p+1}, \tau_p}^{(i_1)} + \mathbf{a}\Delta + \\
& + \sum_{i_1, i_2=1}^m G_0^{(i_2)} \Sigma_{i_1} \hat{J}_{(11)\tau_{p+1}, \tau_p}^{(i_2 i_1)} + \sum_{i_1=1}^m L \Sigma_{i_1} \hat{J}_{(01)\tau_{p+1}, \tau_p}^{(i_1)} + \\
& + \sum_{i_1=1}^m G_0^{(i_1)} \mathbf{a} \hat{J}_{(10)\tau_{p+1}, \tau_p}^{(i_1)} + \sum_{i_1, i_2, i_3=1}^m G_0^{(i_3)} G_0^{(i_2)} \Sigma_{i_1} \hat{J}_{(111)\tau_{p+1}, \tau_p}^{(i_3 i_2 i_1)} + \\
& + \sum_{i_1, i_2=1}^m \left[G_0^{(i_2)} L \Sigma_{i_1} \hat{J}_{(101)\tau_{p+1}, \tau_p}^{(i_2 i_1)} + L G_0^{(i_2)} \Sigma_{i_1} \hat{J}_{(011)\tau_{p+1}, \tau_p}^{(i_2 i_1)} + \right. \\
& \quad \left. + G_0^{(i_2)} G_0^{(i_1)} \mathbf{a} \hat{J}_{(110)\tau_{p+1}, \tau_p}^{(i_2 i_1)} \right] + L \mathbf{a} \frac{\Delta^2}{2} + L^2 \mathbf{a} \frac{\Delta^3}{6} + \\
& + \sum_{i_1, \dots, i_4=1}^m G_0^{(i_4)} G_0^{(i_3)} G_0^{(i_2)} \Sigma_{i_1} \hat{J}_{(1111)\tau_{p+1}, \tau_p}^{(i_4 i_3 i_2 i_1)} +
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \sum_{i_1=1}^m \left[G_0^{(i_1)} L \mathbf{a} \hat{J}_{(100)\tau_{p+1}, \tau_p}^{(i_1)} + L G_0^{(i_1)} \mathbf{a} \hat{J}_{(010)\tau_{p+1}, \tau_p}^{(i_1)} + L L \Sigma_{i_1} \hat{J}_{(001)\tau_{p+1}, \tau_p}^{(i_1)} \right] + \\
& + \sum_{i_1, i_2, i_3=1}^m \left[G_0^{(i_3)} G_0^{(i_2)} G_0^{(i_1)} \mathbf{a} \hat{J}_{(1110)\tau_{p+1}, \tau_p}^{(i_3 i_2 i_1)} + G_0^{(i_3)} G_0^{(i_2)} L \Sigma_{i_1} \hat{J}_{(1101)\tau_{p+1}, \tau_p}^{(i_3 i_2 i_1)} + \right. \\
& \quad \left. + G_0^{(i_3)} L G_0^{(i_2)} \Sigma_{i_1} \hat{J}_{(1011)\tau_{p+1}, \tau_p}^{(i_3 i_2 i_1)} + L G_0^{(i_3)} G_0^{(i_2)} \Sigma_{i_1} \hat{J}_{(0111)\tau_{p+1}, \tau_p}^{(i_3 i_2 i_1)} \right] + \\
& \quad + \sum_{i_1, \dots, i_5=1}^m G_0^{(i_5)} G_0^{(i_4)} G_0^{(i_3)} G_0^{(i_2)} \Sigma_{i_1} \hat{J}_{(11111)\tau_{p+1}, \tau_p}^{(i_5 i_4 i_3 i_2 i_1)}, \tag{7.66}
\end{aligned}$$

где сохранен смысл обозначений, введенных в (7.64).

7.4.5 Замечание об особенностях численных методов, основанных на унифицированном разложении Тейлора–Ито и разложении Тейлора–Ито в форме Вагнера и Платена

Рассмотрим некоторые особенности численных методов, основанных на унифицированном разложении Тейлора–Ито и разложении Тейлора–Ито в форме Вагнера и Платена.

Ранее отмечалось, что численные методы, основанные на унифицированном разложении Тейлора–Ито, содержат меньшее число различных повторных стохастических интегралов, нежели методы, основанные на разложении Тейлора–Ито в форме Вагнера и Платена. Затраты на вычисление коэффициентов Фурье аппроксимаций повторных стохастических интегралов $J_{(\lambda_k \dots \lambda_1)\tau_{p+1}, \tau_p}^{(i_k \dots i_1)}$, входящих в численные методы, основанные на разложении Тейлора–Ито в форме Вагнера и Платена и полученные с помощью метода, основанного на кратных рядах Фурье, несколько меньше, чем аналогичные затраты для повторных стохастических интегралов $I_{l_1 \dots l_k \tau_{p+1}, \tau_p}^{(i_1 \dots i_k)}$ из численных методов, основанных на унифицированном разложении Тейлора–Ито. Так, для численной реализации явного сильного одношагового метода порядка точности 2.5, основанного на унифицированном разложении Тейлора–Ито, в предположении, что $\phi_0(t) \equiv \frac{1}{\sqrt{\Delta}}$, требуется вычисление одиннадцати различных коэффициентов Фурье:

$$C_{j_1}^1, C_{j_2 j_1}^{00}, C_{j_3 j_2 j_1}^{000}, C_{j_2 j_1}^{01}, C_{j_2 j_1}^{10}, C_{j_4 j_3 j_2 j_1}^{0000}, C_{j_1}^2, C_{j_3 j_2 j_1}^{100}, C_{j_3 j_2 j_1}^{010}, C_{j_3 j_2 j_1}^{001}, C_{j_5 j_4 j_3 j_2 j_1}^{00000}.$$

Для численной реализации аналогичного численного метода, основанного на разложении Тейлора–Ито в форме Вагнера и Платена, требуется вычисление четырех коэффициентов Фурье:

$$C_{j_2 j_1}, C_{j_3 j_2 j_1}, C_{j_4 j_3 j_2 j_1}, C_{j_5 j_4 j_3 j_2 j_1}.$$

Однако, эти коэффициенты вычисляются один раз заранее, а затем используются при численном моделировании повторных стохастических интегралов. Следует также отметить, что аппроксимации указанных повторных стохастических интегралов универсальны для любых стохастических дифференциальных уравнений Ито и могут быть построены опять таки заранее (см. главу 6). Поэтому на стадии численной реализации возможно удобнее иметь дело с меньшим числом различных повторных стохастических интегралов.

7.5 Явные одношаговые методы, основанные на разложении Тейлора–Стратоновича в форме Клоедена и Платена

7.5.1 Метод порядка точности $r/2$. Теорема о сходимости

Пусть процесс $\eta_s = R(\mathbf{x}_s, s)$, где $R : \mathbb{R}^n \times [0, T] \rightarrow \mathbb{R}^n$; $\mathbf{x}_s$ — решение стохастического дифференциального уравнения Ито (7.18), удовлетворяет условиям теоремы 4.9. Тогда при всех $s, t \in [0, T] : s > t$, с вероятностью 1 справедливо разложение

$$\begin{aligned} \eta_s = \eta_t + \sum_{q,k=1}^r \sum_{(\lambda_k, \dots, \lambda_1) \in \mathcal{E}_{qk}} {}^{(p_k)} D_{\lambda_k} \dots D_{\lambda_1} \{\eta_t\} {}^{p_k} J_{(\lambda_k \dots \lambda_1)s,t}^* + \\ + \mathbf{1}_{\{r=2d+1, d \in \mathbb{N}\}} \frac{(s-t)^{\frac{1}{2}(r+1)}}{\left(\frac{1}{2}(r+1)\right)!} L^{\frac{1}{2}(r+1)} \eta_t + H''_{r+1,s,t}, \end{aligned} \quad (7.67)$$

где

$$H''_{r+1,s,t} = H_{r+1,s,t} - \mathbf{1}_{\{r=2d+1, d \in \mathbb{N}\}} \frac{(s-t)^{\frac{1}{2}(r+1)}}{\left(\frac{1}{2}(r+1)\right)!} L^{\frac{1}{2}(r+1)} \eta_t,$$

правая часть (7.67) существует в среднеквадратическом смысле и в ней введены следующие обозначения:

$$\mathcal{E}_{qk} = \{(\lambda_k, \dots, \lambda_1) : 2k - \lambda_1 - \dots - \lambda_k = q, \lambda_l \in \{1, 0\}, l = 1, \dots, k\};$$

$$\begin{aligned} {}^{(p_k)} J_{(\lambda_k \dots \lambda_1)s,t}^* &= \left\| J_{(\lambda_k \dots \lambda_1)s,t}^{*(i_k \dots i_1)} \right\|_{i_1=\lambda_1, \dots, i_l=\lambda_k}^{m\lambda_1 \dots m\lambda_k}, \\ J_{(\lambda_k \dots \lambda_1)s,t}^{*(i_k \dots i_1)} &= \int_t^{*s} \dots \int_t^{*t_2} d\mathbf{w}_{t_1}^{(i_k)} \dots d\mathbf{w}_{t_k}^{(i_1)}, \end{aligned} \quad (7.68)$$

$\lambda_l = 1$ или $\lambda_l = 0$, $D_{\lambda_l}^{(i_l)} = \bar{L}$ и $i_l = 0$ при $\lambda_l = 0$, $D_{\lambda_l}^{(i_l)} = G_0^{(i_l)}$ и $i_l = 1, \dots, m$ при $\lambda_l = 1$, $p_l = \sum_{j=1}^l \lambda_j$, $\bar{L} = L - \frac{1}{2} \sum_{j=1}^m G_0^{(j)} G_0^{(j)}$, $\mathbf{w}_\tau^{(i)} = \mathbf{f}_\tau^{(i)}$ при $i = 1, \dots, m$ и $\mathbf{w}_\tau^{(0)} = \tau$; операторы L и $G_0^{(i)}$, $i = 1, \dots, m$, такие же, как в лемме 4.1.

Пусть $R(\mathbf{x}, t) \equiv \mathbf{x}$, $s = \tau_{p+1}$, $t = \tau_p$, $\{\tau_p\}_{p=0}^N$ — разбиение промежутка $[0, T]$, для которого выполняется условие (7.1). Тогда из (7.67) получаем общее представление явной сильной численной схемы решения стохастического дифференциального уравнения Ито (7.18)

$$\begin{aligned} \mathbf{y}_{\tau_{p+1}} = \mathbf{y}_{\tau_p} + \sum_{q,k=1}^r \sum_{(\lambda_k, \dots, \lambda_1) \in \mathcal{E}_{qk}} {}^{(p_k)} D_{\lambda_k} \dots D_{\lambda_1} \{\mathbf{y}_{\tau_p}\} {}^{p_k} {}^{(p_k)} \hat{J}_{(\lambda_k \dots \lambda_1) \tau_{p+1}, \tau_p}^* + \\ + \mathbf{1}_{\{r=2d+1, d \in N\}} \frac{(\tau_{p+1} - \tau_p)^{\frac{1}{2}(r+1)}}{\left(\frac{1}{2}(r+1)\right)!} L^{\frac{1}{2}(r+1)} \mathbf{y}_{\tau_p}, \end{aligned} \quad (7.69)$$

где ${}^{(p_k)} \hat{J}_{(\lambda_k \dots \lambda_1) \tau_{p+1}, \tau_p}^* = \left\| \hat{J}_{(\lambda_k \dots \lambda_1) \tau_{p+1}, \tau_p}^{*(i_k \dots i_1)} \right\|_{i_1=\lambda_1, \dots, i_l=\lambda_k}^{m\lambda_1 \dots m\lambda_k}$; $\hat{J}_{(\lambda_k \dots \lambda_1) \tau_{p+1}, \tau_p}^{*(i_k \dots i_1)}$ — аппроксимация повторного стохастического интеграла Стратоновича.

Далее для простоты положим $p\Delta \stackrel{\text{def}}{=} \tau_p$, $\Delta = T/N$, $p \in \{0, 1, \dots, N\}$, $T = \tau_N$.

Обозначим $\mathcal{M}_k = \{(\lambda_k, \dots, \lambda_1) : \lambda_l = 1 \text{ или } \lambda_l = 0, l = 1, \dots, k\}$.

Теорема 7.4. Пусть для $R(\mathbf{x}, t) \equiv \mathbf{x}$ и $r = 2, 3, \dots$ выполнены следующие условия:

1. Для всех $(\lambda_k, \dots, \lambda_1) \in \bigcup_{q=1}^r \mathcal{M}_q$ имеем $Q_{\lambda_l}^{(i_l)} \dots Q_{\lambda_1}^{(i_1)} R(\mathbf{x}, \tau) \in \mathcal{L}$.
2. Для всех $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$; $\tau, \theta \in [0, T]$; $(\lambda_l, \dots, \lambda_1) \in \bigcup_{g=1}^{r+1} \mathcal{M}_g$ и некоторого $\nu > 0$

$$|Q_{\lambda_l}^{(i_l)} \dots Q_{\lambda_1}^{(i_1)} R(\mathbf{x}, \tau) - Q_{\lambda_l}^{(i_l)} \dots Q_{\lambda_1}^{(i_1)} R(\mathbf{y}, \tau)| \leq K_1 |\mathbf{x} - \mathbf{y}|, \quad K_1 < \infty,$$

$$|Q_{\lambda_l}^{(i_l)} \dots Q_{\lambda_1}^{(i_1)} R(\mathbf{x}, \tau)| \leq K_2 (1 + |\mathbf{x}|), \quad K_2 < \infty,$$

$$|Q_{\lambda_l}^{(i_l)} \dots Q_{\lambda_1}^{(i_1)} R(\mathbf{x}, \tau) - Q_{\lambda_l}^{(i_l)} \dots Q_{\lambda_1}^{(i_1)} R(\mathbf{x}, \theta)| \leq K_3 |\tau - \theta|^\nu (1 + |\mathbf{x}|), \quad K_3 < \infty.$$

3. Для всех $(\lambda_k, \dots, \lambda_1) \in \bigcup_{q,g=1}^r \mathcal{E}_{qg}$, $p \in \{0, 1, \dots, N-1\}$, $i_1, \dots, i_k = 0, 1, \dots, m$, $i_1^2 + \dots + i_k^2 > 0$ с вероятностью 1

$$\mathbb{M} \left\{ J_{(\lambda_k \dots \lambda_1) \tau_{p+1}, \tau_p}^{*(i_k \dots i_1)} - \hat{J}_{(\lambda_k \dots \lambda_1) \tau_{p+1}, \tau_p}^{*(i_k \dots i_1)} \middle| \mathcal{F}_{\tau_p} \right\} = 0,$$

и

$$\mathbb{M} \left\{ \left(J_{(\lambda_k \dots \lambda_1) \tau_{p+1}, \tau_p}^{*(i_k \dots i_1)} - \hat{J}_{(\lambda_k \dots \lambda_1) \tau_{p+1}, \tau_p}^{*(i_k \dots i_1)} \right)^2 \right\} \leq C' \Delta^{r+1}, \quad C' < \infty. \quad (7.70)$$

4. Справедливы условия AI, AII (теорема 1.6).

5. Случайные величины $\mathbf{x}_0, \mathbf{y}_0$ $\mathcal{F}_0$ -измеримы и $\mathbb{M} \{ |\mathbf{x}_0 - \mathbf{y}_0|^2 \} \leq K_4 \Delta^r$, $\mathbb{M} \{ |\mathbf{x}_0|^8 \} < \infty$, где постоянные $K_1, \dots, K_4, C'$ не зависят от Δ .
Тогда

$$\mathbb{M} \left\{ \sup_{0 \leq t \leq T} |\mathbf{x}_t - \mathbf{y}_t|^2 \right\} \leq K \Delta^r,$$

где постоянная K не зависит от Δ , а $\mathbf{y}_t$ определяется из (7.69) при $\tau_{p+1} = t$.

Доказательство аналогичной теоремы можно найти в [86].

Таким образом, если условия теоремы 7.4 выполнены, то численный метод (7.69) является явным одношаговым сильным численным методом порядка точности $r/2$.

Аппроксимации повторных стохастических интегралов Стратоновича, входящие в (7.69), могут быть получены с помощью формул связи повторных стохастических интегралов Ито и Стратоновича (см. главу 3) и теоремы 5.1.

7.5.2 Метод порядка точности 1.0

Пусть условия теоремы 7.4 выполнены при $r = 2$. Тогда из (7.69) при $r = 2$ получаем следующий явный одношаговый сильный численный метод порядка точности 1.0:

$$\mathbf{y}_{p+1} = \mathbf{y}_p + \sum_{i_1=1}^m \Sigma_{i_1} \hat{J}_{(1) \tau_{p+1}, \tau_p}^{*(i_1)} + \bar{\mathbf{a}} \Delta + \sum_{i_1, i_2=1}^m G_0^{(i_2)} \Sigma_{i_1} \hat{J}_{(11) \tau_{p+1}, \tau_p}^{*(i_2 i_1)}.$$

Здесь и далее $\bar{\mathbf{a}}(\mathbf{x}, t) = \mathbf{a}(\mathbf{x}, t) - \frac{1}{2} \sum_{i_1=1}^m G_0^{(i_1)} \Sigma_{i_1}(\mathbf{x}, t)$; $\Sigma_i(\mathbf{x}, t)$ — i -й столбец матрицы $\Sigma(\mathbf{x}, t)$; все функции в правой части вычислены в точке $(\mathbf{y}_p, \tau_p)$; $\mathbf{y}_{\tau_p} \stackrel{\text{def}}{=} \mathbf{y}_p$.

7.5.3 Метод порядка точности 1.5

Предположим, что условия теоремы 7.4 выполнены при $r = 3$. Тогда из (7.69) при $r = 3$ получим явный одношаговый сильный численный метод порядка точности 1.5:

$$\mathbf{y}_{p+1} = \mathbf{y}_p + \sum_{i_1=1}^m \Sigma_{i_1} \hat{J}_{(1) \tau_{p+1}, \tau_p}^{*(i_1)} + \bar{\mathbf{a}} \Delta + \frac{\Delta^2}{2} L \mathbf{a} +$$

$$\begin{aligned}
& + \sum_{i_1, i_2=1}^m G_0^{(i_2)} \Sigma_{i_1} \hat{J}_{(11)\tau_{p+1}, \tau_p}^{*(i_2 i_1)} + \sum_{i_1=1}^m \bar{L} \Sigma_{i_1} \hat{J}_{(01)\tau_{p+1}, \tau_p}^{*(i_1)} + \\
& + \sum_{i_1=1}^m G_0^{(i_1)} \bar{\mathbf{a}} \hat{J}_{(10)\tau_{p+1}, \tau_p}^{*(i_1)} + \sum_{i_1, i_2, i_3=1}^m G_0^{(i_3)} G_0^{(i_2)} \Sigma_{i_1} \hat{J}_{(111)\tau_{p+1}, \tau_p}^{*(i_3 i_2 i_1)}. \quad (7.71)
\end{aligned}$$

7.5.4 Метод порядка точности 2.0

Пусть условия теоремы 7.4 выполнены при $r = 4$. Тогда из (7.69) при $r = 4$ получаем явный одношаговый сильный численный метод порядка точности 2.0:

$$\begin{aligned}
\mathbf{y}_{p+1} = \mathbf{y}_p & + \sum_{i_1=1}^m \Sigma_{i_1} \hat{J}_{(1)\tau_{p+1}, \tau_p}^{*(i_1)} + \bar{\mathbf{a}} \Delta + \\
& + \sum_{i_1, i_2=1}^m G_0^{(i_2)} \Sigma_{i_1} \hat{J}_{(11)\tau_{p+1}, \tau_p}^{*(i_2 i_1)} + \sum_{i_1=1}^m \bar{L} \Sigma_{i_1} \hat{J}_{(01)\tau_{p+1}, \tau_p}^{*(i_1)} + \\
& + \sum_{i_1=1}^m G_0^{(i_1)} \bar{\mathbf{a}} \hat{J}_{(10)\tau_{p+1}, \tau_p}^{*(i_1)} + \sum_{i_1, i_2, i_3=1}^m G_0^{(i_3)} G_0^{(i_2)} \Sigma_{i_1} \hat{J}_{(111)\tau_{p+1}, \tau_p}^{*(i_3 i_2 i_1)} + \\
& + \sum_{i_1, i_2=1}^m \left[G_0^{(i_2)} \bar{L} \Sigma_{i_1} \hat{J}_{(101)\tau_{p+1}, \tau_p}^{*(i_2 i_1)} + \bar{L} G_0^{(i_2)} \Sigma_{i_1} \hat{J}_{(011)\tau_{p+1}, \tau_p}^{*(i_2 i_1)} \right. \\
& \quad \left. + G_0^{(i_2)} G_0^{(i_1)} \bar{\mathbf{a}} \hat{J}_{(110)\tau_{p+1}, \tau_p}^{*(i_2 i_1)} \right] + \bar{L} \bar{\mathbf{a}} \frac{\Delta^2}{2} + \\
& + \sum_{i_1, \dots, i_4=1}^m G_0^{(i_4)} G_0^{(i_3)} G_0^{(i_2)} \Sigma_{i_1} \hat{J}_{(1111)\tau_{p+1}, \tau_p}^{*(i_4 i_3 i_2 i_1)}.
\end{aligned}$$

7.5.5 Метод порядка точности 2.5

Предположим, что условия теоремы 7.4 выполнены при $r = 5$. Тогда из (7.69) при $r = 5$ получим явный одношаговый сильный численный метод порядка точности 2.5:

$$\begin{aligned}
\mathbf{y}_{p+1} = \mathbf{y}_p & + \sum_{i_1=1}^m \Sigma_{i_1} \hat{J}_{(1)\tau_{p+1}, \tau_p}^{*(i_1)} + \bar{\mathbf{a}} \Delta + \\
& + \sum_{i_1, i_2=1}^m G_0^{(i_2)} \Sigma_{i_1} \hat{J}_{(11)\tau_{p+1}, \tau_p}^{*(i_2 i_1)} + \sum_{i_1=1}^m \bar{L} \Sigma_{i_1} \hat{J}_{(01)\tau_{p+1}, \tau_p}^{*(i_1)} + \\
& + \sum_{i_1=1}^m G_0^{(i_1)} \bar{\mathbf{a}} \hat{J}_{(10)\tau_{p+1}, \tau_p}^{*(i_1)} + \sum_{i_1, i_2, i_3=1}^m G_0^{(i_3)} G_0^{(i_2)} \Sigma_{i_1} \hat{J}_{(111)\tau_{p+1}, \tau_p}^{*(i_3 i_2 i_1)} +
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \sum_{i_1, i_2=1}^m \left[G_0^{(i_2)} \bar{L} \Sigma_{i_1} \hat{J}_{(101)\tau_{p+1}, \tau_p}^{*(i_2 i_1)} + \bar{L} G_0^{(i_2)} \Sigma_{i_1} \hat{J}_{(011)\tau_{p+1}, \tau_p}^{*(i_2 i_1)} + \right. \\
& \quad \left. + G_0^{(i_2)} G_0^{(i_1)} \bar{\mathbf{a}} \hat{J}_{(110)\tau_{p+1}, \tau_p}^{*(i_2 i_1)} \right] + \bar{L} \bar{\mathbf{a}} \frac{\Delta^2}{2} + L^2 \bar{\mathbf{a}} \frac{\Delta^3}{6} + \\
& \quad + \sum_{i_1, \dots, i_4=1}^m G_0^{(i_4)} G_0^{(i_3)} G_0^{(i_2)} \Sigma_{i_1} \hat{J}_{(1111)\tau_{p+1}, \tau_p}^{*(i_4 i_3 i_2 i_1)} + \\
& + \sum_{i_1=1}^m \left[G_0^{(i_1)} \bar{L} \bar{\mathbf{a}} \hat{J}_{(100)\tau_{p+1}, \tau_p}^{*(i_1)} + \bar{L} G_0^{(i_1)} \bar{\mathbf{a}} \hat{J}_{(010)\tau_{p+1}, \tau_p}^{*(i_1)} + \bar{L} \bar{L} \Sigma_{i_1} \hat{J}_{(001)\tau_{p+1}, \tau_p}^{*(i_1)} \right] + \\
& + \sum_{i_1, i_2, i_3=1}^m \left[G_0^{(i_3)} G_0^{(i_2)} G_0^{(i_1)} \bar{\mathbf{a}} \hat{J}_{(1110)\tau_{p+1}, \tau_p}^{*(i_3 i_2 i_1)} + G_0^{(i_3)} G_0^{(i_2)} \bar{L} \Sigma_{i_1} \hat{J}_{(1101)\tau_{p+1}, \tau_p}^{*(i_3 i_2 i_1)} + \right. \\
& \quad \left. + G_0^{(i_3)} \bar{L} G_0^{(i_2)} \Sigma_{i_1} \hat{J}_{(1011)\tau_{p+1}, \tau_p}^{*(i_3 i_2 i_1)} + \bar{L} G_0^{(i_3)} G_0^{(i_2)} \Sigma_{i_1} \hat{J}_{(0111)\tau_{p+1}, \tau_p}^{*(i_3 i_2 i_1)} \right] + \\
& \quad + \sum_{i_1, \dots, i_5=1}^m G_0^{(i_5)} G_0^{(i_4)} G_0^{(i_3)} G_0^{(i_2)} \Sigma_{i_1} \hat{J}_{(11111)\tau_{p+1}, \tau_p}^{*(i_5 i_4 i_3 i_2 i_1)}. \tag{7.72}
\end{aligned}$$

З а м е ч а н и е 7.2. Отметим, что если в качестве полной ортонормированной системы $\{\phi_j(s)\}_{j=0}^\infty$ в пространстве $L_2([\tau_p, \tau_{p+1}])$ взята тригонометрическая или полиномиальная система, то $\zeta_j^{(0)} = 0$ при $j \neq 0$ и $\zeta_0^{(0)} = \sqrt{\Delta}$, что существенно упрощает формулы для аппроксимации повторных стохастических интегралов.

7.6 Явные одношаговые методы, основанные на унифицированном разложении Тейлора–Стратоновича

7.6.1 Метод порядка точности $r/2$. Теорема о сходимости

Пусть процесс $\eta_s = R(\mathbf{x}_s, s)$, где $R : \mathbb{R}^n \times [0, T] \rightarrow \mathbb{R}^n$; $\mathbf{x}_s$ — решение стохастического дифференциального уравнения Ито (7.18), удовлетворяет условиям теоремы 4.10. Тогда при всех $s, t \in [0, T] : s > t$, справедливо унифицированное разложение Тейлора–Стратоновича вида

$$\eta_s = \eta_t + \sum_{q=1}^r \sum_{(k, j, l_1, \dots, l_k) \in \mathcal{D}_q} \frac{(s-t)^j}{j!} {}^{(k)}\bar{G}_{l_k} \dots \bar{G}_{l_1} \bar{L}^j \{\eta_t\} \cdot {}^k {}^{(k)} I_{l_k \dots l_{1s,t}}^* +$$

$$+ \mathbf{1}_{\{r=2d+1, d \in N\}} \frac{(s-t)^{\frac{1}{2}(r+1)}}{\left(\frac{1}{2}(r+1)\right)!} L^{\frac{1}{2}(r+1)} \eta_t + \bar{H}'_{r+1, s, t} \text{ с в.1,} \quad (7.73)$$

где

$$\bar{H}'_{r+1, s, t} = \bar{H}_{r+1, s, t} - \mathbf{1}_{\{r=2d+1, d \in N\}} \frac{(s-t)^{\frac{1}{2}(r+1)}}{\left(\frac{1}{2}(r+1)\right)!} L^{\frac{1}{2}(r+1)} \eta_t,$$

правая часть существует в среднеквадратическом смысле и в ней введены следующие обозначения:

$$\begin{aligned} {}^{(k)}I_{l_k \dots l_{1s, t}}^* &= \left\| I_{l_k \dots l_{1s, t}}^{*(i_k \dots i_1)} \right\|_{i_1, \dots, i_k=1}^m, \\ I_{l_k \dots l_{1s, t}}^{*(i_k \dots i_1)} &= \begin{cases} \int_t^{*s} (t - \tau_k)^{l_1} \dots \int_t^{*T_2} (t - \tau_1)^{l_k} d\mathbf{f}_{\tau_1}^{(i_k)} \dots d\mathbf{f}_{\tau_k}^{(i_1)} & \text{при } k > 0, \\ 1 & \text{при } k = 0, \end{cases} \\ \bar{G}_p^{(i)} &= \frac{1}{p} \left(\bar{G}_{p-1}^{(i)} \bar{L} - \bar{L} \bar{G}_{p-1}^{(i)} \right), \quad p = 1, 2, \dots; \quad i = 1, \dots, m, \\ \bar{L} &\stackrel{\text{def}}{=} L - \frac{1}{2} \sum_{j=1}^m G_0^{(j)} G_0^{(j)}, \quad \bar{G}_0^{(i)} \stackrel{\text{def}}{=} G_0^{(i)}, \quad i = 1, \dots, m, \end{aligned}$$

$$\mathcal{D}_q = \left\{ (k, j, l_1, \dots, l_k) : k + 2 \left(j + \sum_{p=1}^k l_p \right) = q; k, j, l_1, \dots, l_k = 0, 1, \dots \right\}.$$

Рассмотрим разбиение $\{\tau_p\}_{p=0}^N$ промежутка $[0, T]$, для которого

$$0 = \tau_0 < \tau_1 < \dots < \tau_N = T, \quad \Delta_N = \max_{0 \leq j \leq N-1} |\tau_{j+1} - \tau_j|.$$

Положим $R(\mathbf{x}, t) \equiv \mathbf{x}$, $s = \tau_{p+1}$, $t = \tau_p$. Тогда из (7.73) получим следующее общее представление явной численной схемы решения стохастического дифференциального уравнения (7.18) вида

$$\begin{aligned} \mathbf{y}_{\tau_{p+1}} &= \mathbf{y}_{\tau_p} + \sum_{q=1}^r \sum_{(k, j, l_1, \dots, l_k) \in \mathcal{D}_q} \frac{(\tau_{p+1} - \tau_p)^j}{j!} \bar{G}_{l_k} \dots \bar{G}_{l_1} \bar{L}^j \{\mathbf{y}_{\tau_p}\} \cdot {}^{(k)}I_{l_k \dots l_{1\tau_{p+1}, \tau_p}}^* + \\ &+ \mathbf{1}_{\{r=2d+1, d \in N\}} \frac{(\tau_{p+1} - \tau_p)^{\frac{1}{2}(r+1)}}{\left(\frac{1}{2}(r+1)\right)!} L^{\frac{1}{2}(r+1)} \mathbf{y}_{\tau_p}, \end{aligned} \quad (7.74)$$

где

$${}^{(k)}\hat{I}_{l_k \dots l_{1\tau_{p+1}, \tau_p}}^* = \left\| \hat{I}_{l_k \dots l_{1\tau_{p+1}, \tau_p}}^{*(i_k \dots i_1)} \right\|_{i_1, \dots, i_k=1}^m;$$

а $\hat{I}_{l_k \dots l_{1\tau_{p+1}, \tau_p}}^{*(i_k \dots i_1)}$ — аппроксимация повторного стохастического интеграла Стратоновича $I_{l_k \dots l_{1\tau_{p+1}, \tau_p}}^{*(i_k \dots i_1)}$; $\hat{I}_{l_0 \dots l_{1\tau_{p+1}, \tau_p}}^{*(i_0 \dots i_1)} \stackrel{\text{def}}{=} 1$.

Далее для простоты положим $p\Delta \stackrel{\text{def}}{=} \tau_p$, $\Delta = T/N$, $p \in \{0, 1, \dots, N\}$, $T = \tau_N$.

Сформулируем теорему о сходимости численной схемы (7.74).

Теорема 7.5. Пусть выполнены условия теоремы 7.4. Тогда

$$M\left\{\sup_{0 \leq t \leq T} |\mathbf{x}_t - \mathbf{y}_t|^2\right\} \leq K\Delta^r,$$

где постоянная K не зависит от Δ , а $\mathbf{y}_t$ определяется из (7.74) при $\tau_{p+1} = t$.

Аппроксимации повторных стохастических интегралов Стратоновича, входящие в (7.74), могут быть получены с помощью формул связи повторных стохастических интегралов Ито и Стратоновича (см. главу 3) и теоремы 5.1.

7.6.2 Метод порядка точности 1.5

Рассмотрение явных одношаговых сильных численных методов, основанных на унифицированном разложении Тейлора–Стратоновича, начинаем с численного метода порядка точности 1.5, а не порядка точности 1.0, поскольку численные методы порядка точности 1.0, основанные на разложении Тейлора–Стратоновича в форме Клоедена и Платена и унифицированных разложениях Тейлора–Стратоновича, идентичны.

Итак, предположим, что условия теоремы 7.5 при $r = 3$ выполнены. Тогда из (7.74) при $r = 3$ получим явный одношаговый сильный численный метод порядка точности 1.5

$$\begin{aligned} \mathbf{y}_{p+1} = & \mathbf{y}_p + \sum_{i_1=1}^m \Sigma_{i_1} \hat{I}_{0\tau_{p+1}, \tau_p}^{*(i_1)} + \Delta \bar{\mathbf{a}} + \sum_{i_1, i_2=1}^m G_0^{(i_2)} \Sigma_{i_1} \hat{I}_{00\tau_{p+1}, \tau_p}^{*(i_2 i_1)} + \\ & + \sum_{i_1=1}^m \left[G_0^{(i_1)} \bar{\mathbf{a}} \left(\Delta \hat{I}_{0\tau_{p+1}, \tau_p}^{*(i_1)} + \hat{I}_{1\tau_{p+1}, \tau_p}^{*(i_1)} \right) - \bar{L} \Sigma_{i_1} \hat{I}_1^{*(i_1)} \right] + \\ & + \sum_{i_1, i_2, i_3=1}^m G_0^{(i_3)} G_0^{(i_2)} \Sigma_{i_1} \hat{I}_{000\tau_{p+1}, \tau_p}^{*(i_3 i_2 i_1)} + \frac{\Delta^2}{2} L \mathbf{a}. \end{aligned} \quad (7.75)$$

Здесь и далее $\bar{\mathbf{a}}(\mathbf{x}, t) = \mathbf{a}(\mathbf{x}, t) - \frac{1}{2} \sum_{j=1}^m G_0^{(j)} \Sigma_j(\mathbf{x}, t)$; $\bar{L} = L - \frac{1}{2} \sum_{j=1}^m G_0^{(j)} G_0^{(j)}$; функции в правой части вычислены в точке $(\mathbf{y}_p, \tau_p)$; $\mathbf{y}_{\tau_p} \stackrel{\text{def}}{=} \mathbf{y}_p$.

7.6.3 Метод порядка точности 2.0

Предположим, что условия теоремы 7.5 выполнены при $r = 4$. Тогда из (7.74) при $r = 4$ получим явный одношаговый сильный численный метод порядка точности 2.0:

$$\begin{aligned}
\mathbf{y}_{p+1} = & \mathbf{y}_p + \sum_{i_1=1}^m \Sigma_{i_1} \hat{I}_{0\tau_{p+1}, \tau_p}^{*(i_1)} + \Delta \bar{\mathbf{a}} + \sum_{i_1, i_2=1}^m G_0^{(i_2)} \Sigma_{i_1} \hat{I}_{00\tau_{p+1}, \tau_p}^{*(i_2 i_1)} + \\
& + \sum_{i_1=1}^m \left[G_0^{(i_1)} \bar{\mathbf{a}} \left(\Delta \hat{I}_{0\tau_{p+1}, \tau_p}^{*(i_1)} + \hat{I}_{1\tau_{p+1}, \tau_p}^{*(i_1)} \right) - \bar{L} \Sigma_{i_1} \hat{I}_{1\tau_{p+1}, \tau_p}^{*(i_1)} \right] + \\
& + \sum_{i_1, i_2, i_3=1}^m G_0^{(i_3)} G_0^{(i_2)} \Sigma_{i_1} \hat{I}_{000\tau_{p+1}, \tau_p}^{*(i_3 i_2 i_1)} + \frac{\Delta^2}{2} \bar{L} \bar{\mathbf{a}} + \\
& + \sum_{i_1, i_2=1}^m \left[G_0^{(i_2)} \bar{L} \Sigma_{i_1} \left(\hat{I}_{10\tau_{p+1}, \tau_p}^{*(i_2 i_1)} - \hat{I}_{01\tau_{p+1}, \tau_p}^{*(i_2 i_1)} \right) - \bar{L} G_0^{(i_2)} \Sigma_{i_1} \hat{I}_{10\tau_{p+1}, \tau_p}^{*(i_2 i_1)} + \right. \\
& \left. + G_0^{(i_2)} G_0^{(i_1)} \bar{\mathbf{a}} \left(\hat{I}_{01\tau_{p+1}, \tau_p}^{*(i_2 i_1)} + \Delta \hat{I}_{00\tau_{p+1}, \tau_p}^{*(i_2 i_1)} \right) \right] + \\
& + \sum_{i_1, i_2, i_3, i_4=1}^m G_0^{(i_4)} G_0^{(i_3)} G_0^{(i_2)} \Sigma_{i_1} \hat{I}_{0000\tau_{p+1}, \tau_p}^{*(i_4 i_3 i_2 i_1)}.
\end{aligned}$$

7.6.4 Метод порядка точности 2.5

Пусть условия теоремы 7.5 выполнены при $r = 5$. Тогда из (7.74) при $r = 5$ получим явный одношаговый сильный численный метод порядка точности 2.5:

$$\begin{aligned}
\mathbf{y}_{p+1} = & \mathbf{y}_p + \sum_{i_1=1}^m \Sigma_{i_1} \hat{I}_{0\tau_{p+1}, \tau_p}^{*(i_1)} + \Delta \bar{\mathbf{a}} + \sum_{i_1, i_2=1}^m G_0^{(i_2)} \Sigma_{i_1} \hat{I}_{00\tau_{p+1}, \tau_p}^{*(i_2 i_1)} + \\
& + \sum_{i_1=1}^m \left[G_0^{(i_1)} \bar{\mathbf{a}} \left(\Delta \hat{I}_{0\tau_{p+1}, \tau_p}^{*(i_1)} + \hat{I}_{1\tau_{p+1}, \tau_p}^{*(i_1)} \right) - \bar{L} \Sigma_{i_1} \hat{I}_{1\tau_{p+1}, \tau_p}^{*(i_1)} \right] + \\
& + \sum_{i_1, i_2, i_3=1}^m G_0^{(i_3)} G_0^{(i_2)} \Sigma_{i_1} \hat{I}_{000\tau_{p+1}, \tau_p}^{*(i_3 i_2 i_1)} + \frac{\Delta^2}{2} \bar{L} \bar{\mathbf{a}} + \frac{\Delta^3}{6} L^2 \mathbf{a} + \\
& + \sum_{i_1, i_2=1}^m \left[G_0^{(i_2)} \bar{L} \Sigma_{i_1} \left(\hat{I}_{10\tau_{p+1}, \tau_p}^{*(i_2 i_1)} - \hat{I}_{01\tau_{p+1}, \tau_p}^{*(i_2 i_1)} \right) - \bar{L} G_0^{(i_2)} \Sigma_{i_1} \hat{I}_{10\tau_{p+1}, \tau_p}^{*(i_2 i_1)} + \right. \\
& \left. + G_0^{(i_2)} G_0^{(i_1)} \bar{\mathbf{a}} \left(\hat{I}_{01\tau_{p+1}, \tau_p}^{*(i_2 i_1)} + \Delta \hat{I}_{00\tau_{p+1}, \tau_p}^{*(i_2 i_1)} \right) \right] + \\
& + \sum_{i_1, i_2, i_3, i_4=1}^m G_0^{(i_4)} G_0^{(i_3)} G_0^{(i_2)} \Sigma_{i_1} \hat{I}_{0000\tau_{p+1}, \tau_p}^{*(i_4 i_3 i_2 i_1)} +
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \sum_{i_1=1}^m \left[G_0^{(i_1)} \bar{L} \bar{a} \left(\frac{1}{2} \hat{I}_{2\tau_{p+1}, \tau_p}^{*(i_1)} + \Delta \hat{I}_{1\tau_{p+1}, \tau_p}^{*(i_1)} + \frac{\Delta^2}{2} \hat{I}_{0\tau_{p+1}, \tau_p}^{*(i_1)} \right) + \right. \\
& + \frac{1}{2} \bar{L}^2 \Sigma_{i_1} \hat{I}_{2\tau_{p+1}, \tau_p}^{*(i_1)} - \bar{L} G_0^{(i_1)} \bar{a} \left(\hat{I}_{2\tau_{p+1}, \tau_p}^{*(i_1)} + \Delta \hat{I}_{1\tau_{p+1}, \tau_p}^{*(i_1)} \right) \left. \right] + \\
& + \sum_{i_1, i_2, i_3=1}^m \left[G_0^{(i_3)} \bar{L} G_0^{(i_2)} \Sigma_{i_1} \left(\hat{I}_{100\tau_{p+1}, \tau_p}^{*(i_3 i_2 i_1)} - \hat{I}_{010\tau_{p+1}, \tau_p}^{*(i_3 i_2 i_1)} \right) + \right. \\
& + G_0^{(i_3)} G_0^{(i_2)} \bar{L} \Sigma_{i_1} \left(\hat{I}_{010\tau_{p+1}, \tau_p}^{*(i_3 i_2 i_1)} - \hat{I}_{001\tau_{p+1}, \tau_p}^{*(i_3 i_2 i_1)} \right) + \\
& + G_0^{(i_3)} G_0^{(i_2)} G_0^{(i_1)} \bar{a} \left(\Delta \hat{I}_{000\tau_{p+1}, \tau_p}^{*(i_3 i_2 i_1)} + \hat{I}_{001\tau_{p+1}, \tau_p}^{*(i_3 i_2 i_1)} \right) - \\
& - \bar{L} G_0^{(i_3)} G_0^{(i_2)} \Sigma_{i_1} \hat{I}_{100\tau_{p+1}, \tau_p}^{*(i_3 i_2 i_1)} \left. \right] + \\
& + \sum_{i_1, i_2, i_3, i_4, i_5=1}^m G_0^{(i_5)} G_0^{(i_4)} G_0^{(i_3)} G_0^{(i_2)} \Sigma_{i_1} \hat{I}_{00000\tau_{p+1}, \tau_p}^{*(i_5 i_4 i_3 i_2 i_1)}. \tag{7.76}
\end{aligned}$$

7.6.5 Метод порядка точности 3.0

Пусть условия теоремы 7.5 выполнены при $r = 6$. Тогда из (7.74) при $r = 6$ получаем явный одношаговый сильный численный метод порядка точности 3.0:

$$\begin{aligned}
\mathbf{y}_{p+1} = & \mathbf{y}_p + \sum_{i_1=1}^m \Sigma_{i_1} \hat{I}_{0\tau_{p+1}, \tau_p}^{*(i_1)} + \Delta \bar{a} + \sum_{i_1, i_2=1}^m G_0^{(i_2)} \Sigma_{i_1} \hat{I}_{00\tau_{p+1}, \tau_p}^{*(i_2 i_1)} + \\
& + \sum_{i_1=1}^m \left[G_0^{(i_1)} \bar{a} \left(\Delta \hat{I}_{0\tau_{p+1}, \tau_p}^{*(i_1)} + \hat{I}_{1\tau_{p+1}, \tau_p}^{*(i_1)} \right) - \bar{L} \Sigma_{i_1} \hat{I}_{1\tau_{p+1}, \tau_p}^{*(i_1)} \right] + \\
& + \sum_{i_1, i_2, i_3=1}^m G_0^{(i_3)} G_0^{(i_2)} \Sigma_{i_1} \hat{I}_{000\tau_{p+1}, \tau_p}^{*(i_3 i_2 i_1)} + \frac{\Delta^2}{2} \bar{L} \bar{a} + \\
& + \sum_{i_1, i_2=1}^m \left[G_0^{(i_2)} \bar{L} \Sigma_{i_1} \left(\hat{I}_{10\tau_{p+1}, \tau_p}^{*(i_2 i_1)} - \hat{I}_{01\tau_{p+1}, \tau_p}^{*(i_2 i_1)} \right) - \bar{L} G_0^{(i_2)} \Sigma_{i_1} \hat{I}_{10\tau_{p+1}, \tau_p}^{*(i_2 i_1)} + \right. \\
& + G_0^{(i_2)} G_0^{(i_1)} \bar{a} \left(\hat{I}_{01\tau_{p+1}, \tau_p}^{*(i_2 i_1)} + \Delta \hat{I}_{00\tau_{p+1}, \tau_p}^{*(i_2 i_1)} \right) \left. \right] + \\
& + \sum_{i_1, i_2, i_3, i_4=1}^m G_0^{(i_4)} G_0^{(i_3)} G_0^{(i_2)} \Sigma_{i_1} \hat{I}_{0000\tau_{p+1}, \tau_p}^{*(i_4 i_3 i_2 i_1)} + \\
& + \sum_{i_1=1}^m \left[G_0^{(i_1)} \bar{L} \bar{a} \left(\frac{1}{2} \hat{I}_{2\tau_{p+1}, \tau_p}^{*(i_1)} + \Delta \hat{I}_{1\tau_{p+1}, \tau_p}^{*(i_1)} + \frac{\Delta^2}{2} \hat{I}_{0\tau_{p+1}, \tau_p}^{*(i_1)} \right) + \right.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{1}{2} \bar{L}^2 \Sigma_{i_1} \hat{I}_{2\tau_{p+1}, \tau_p}^{*(i_1)} - \bar{L} G_0^{(i_1)} \bar{\mathbf{a}} \left(\hat{I}_{2\tau_{p+1}, \tau_p}^{*(i_1)} + \Delta \hat{I}_{1\tau_{p+1}, \tau_p}^{*(i_1)} \right) \Big] + \\
& + \sum_{i_1, i_2, i_3=1}^m \left[G_0^{(i_3)} \bar{L} G_0^{(i_2)} \Sigma_{i_1} \left(\hat{I}_{100\tau_{p+1}, \tau_p}^{*(i_3 i_2 i_1)} - \hat{I}_{010\tau_{p+1}, \tau_p}^{*(i_3 i_2 i_1)} \right) + \right. \\
& \quad + G_0^{(i_3)} G_0^{(i_2)} \bar{L} \Sigma_{i_1} \left(\hat{I}_{010\tau_{p+1}, \tau_p}^{*(i_3 i_2 i_1)} - \hat{I}_{001\tau_{p+1}, \tau_p}^{*(i_3 i_2 i_1)} \right) + \\
& \quad + G_0^{(i_3)} G_0^{(i_2)} G_0^{(i_1)} \bar{\mathbf{a}} \left(\Delta \hat{I}_{000\tau_{p+1}, \tau_p}^{*(i_3 i_2 i_1)} + \hat{I}_{001\tau_{p+1}, \tau_p}^{*(i_3 i_2 i_1)} \right) - \\
& \quad \left. - \bar{L} G_0^{(i_3)} G_0^{(i_2)} \Sigma_{i_1} \hat{I}_{100\tau_{p+1}, \tau_p}^{*(i_3 i_2 i_1)} \right] + \\
& + \sum_{i_1, i_2, i_3, i_4, i_5=1}^m G_0^{(i_5)} G_0^{(i_4)} G_0^{(i_3)} G_0^{(i_2)} \Sigma_{i_1} \hat{I}_{00000\tau_{p+1}, \tau_p}^{*(i_5 i_4 i_3 i_2 i_1)} + \frac{\Delta^3}{6} \bar{L}^2 \bar{\mathbf{a}} + \\
& + \sum_{i_1, i_2=1}^m \left[G_0^{(i_2)} G_0^{(i_1)} \bar{L} \bar{\mathbf{a}} \left(\frac{1}{2} \hat{I}_{02\tau_{p+1}, \tau_p}^{*(i_2 i_1)} + \Delta \hat{I}_{01\tau_{p+1}, \tau_p}^{*(i_2 i_1)} + \frac{\Delta^2}{2} \hat{I}_{00\tau_{p+1}, \tau_p}^{*(i_2 i_1)} \right) + \right. \\
& \quad + \frac{1}{2} \bar{L}^2 G_0^{(i_2)} \Sigma_{i_1} \hat{I}_{20\tau_{p+1}, \tau_p}^{*(i_2 i_1)} + \\
& \quad + G_0^{(i_2)} \bar{L} G_0^{(i_1)} \bar{\mathbf{a}} \left(\hat{I}_{11\tau_{p+1}, \tau_p}^{*(i_2 i_1)} - \hat{I}_{02\tau_{p+1}, \tau_p}^{*(i_2 i_1)} + \Delta \left(\hat{I}_{10\tau_{p+1}, \tau_p}^{*(i_2 i_1)} - \hat{I}_{01\tau_{p+1}, \tau_p}^{*(i_2 i_1)} \right) \right) + \\
& \quad + \bar{L} G_0^{(i_2)} \bar{L} \Sigma_{i_1} \left(\hat{I}_{11\tau_{p+1}, \tau_p}^{*(i_2 i_1)} - \hat{I}_{20\tau_{p+1}, \tau_p}^{*(i_2 i_1)} \right) + \\
& \quad + G_0^{(i_2)} \bar{L}^2 \Sigma_{i_1} \left(\frac{1}{2} \hat{I}_{02\tau_{p+1}, \tau_p}^{*(i_2 i_1)} + \frac{1}{2} \hat{I}_{20\tau_{p+1}, \tau_p}^{*(i_2 i_1)} - \hat{I}_{11\tau_{p+1}, \tau_p}^{*(i_2 i_1)} \right) - \\
& \quad \left. - \bar{L} G_0^{(i_2)} G_0^{(i_1)} \bar{\mathbf{a}} \left(\Delta \hat{I}_{10\tau_{p+1}, \tau_p}^{*(i_2 i_1)} + \hat{I}_{11\tau_{p+1}, \tau_p}^{*(i_2 i_1)} \right) \right] + \\
& + \sum_{i_1, \dots, i_4=1}^m \left[G_0^{(i_4)} G_0^{(i_3)} G_0^{(i_2)} G_0^{(i_1)} \bar{\mathbf{a}} \left(\Delta \hat{I}_{0000\tau_{p+1}, \tau_p}^{*(i_4 i_3 i_2 i_1)} + \hat{I}_{0001\tau_{p+1}, \tau_p}^{*(i_4 i_3 i_2 i_1)} \right) + \right. \\
& \quad + G_0^{(i_4)} G_0^{(i_3)} \bar{L} G_0^{(i_2)} \Sigma_{i_1} \left(\hat{I}_{0100\tau_{p+1}, \tau_p}^{*(i_4 i_3 i_2 i_1)} - \hat{I}_{0010\tau_{p+1}, \tau_p}^{*(i_4 i_3 i_2 i_1)} \right) - \\
& \quad - \bar{L} G_0^{(i_4)} G_0^{(i_3)} G_0^{(i_2)} \Sigma_{i_1} \hat{I}_{1000\tau_{p+1}, \tau_p}^{*(i_4 i_3 i_2 i_1)} + \\
& \quad + G_0^{(i_4)} \bar{L} G_0^{(i_3)} G_0^{(i_2)} \Sigma_{i_1} \left(\hat{I}_{1000\tau_{p+1}, \tau_p}^{*(i_4 i_3 i_2 i_1)} - \hat{I}_{0100\tau_{p+1}, \tau_p}^{*(i_4 i_3 i_2 i_1)} \right) + \\
& \quad + G_0^{(i_4)} G_0^{(i_3)} G_0^{(i_2)} \bar{L} \Sigma_{i_1} \left(\hat{I}_{0010\tau_{p+1}, \tau_p}^{*(i_4 i_3 i_2 i_1)} - \hat{I}_{0001\tau_{p+1}, \tau_p}^{*(i_4 i_3 i_2 i_1)} \right) \Big] + \\
& + \sum_{i_1, \dots, i_6=1}^m G_0^{(i_6)} G_0^{(i_5)} G_0^{(i_4)} G_0^{(i_3)} G_0^{(i_2)} \Sigma_{i_1} \hat{I}_{000000\tau_{p+1}, \tau_p}^{*(i_6 i_5 i_4 i_3 i_2 i_1)}. \tag{7.77}
\end{aligned}$$

7.7 Явные одношаговые конечно-разностные численные методы, основанные на разложениях Тейлора–Ито

В данном разделе рассматриваются явные одношаговые сильные конечно-разностные численные методы, основанные на унифицированном разложении Тейлора–Ито и разложении Тейлора–Ито в форме Вагнера и Платена. Идея построения таких численных методов заключается в конечно-разностной аппроксимации функций $Q_{\lambda_l}^{(i_l)} \dots Q_{\lambda_1}^{(i_1)} \mathbf{x}$, где $Q_{\lambda_l}^{(i_l)} = L$ и $i_l = 0$ при $\lambda_l = 0$; $Q_{\lambda_l}^{(i_l)} = G_0^{(i_l)}$ и $i_l = 1, \dots, m$ при $\lambda_l = 1$, $l = 1, \dots, k$, входящих в унифицированное разложение Тейлора–Ито и разложение Тейлора–Ито в форме Вагнера и Платена. Для получения этих конечно-разностных аппроксимаций нам потребуются некоторые соотношения, основанные на стандартной формуле Тейлора.

7.7.1 Некоторые тейлоровские аппроксимации производных детерминированных функций

Рассмотрим функции $\mathbf{f}, \mathbf{g} : \mathbb{R}^n \times [0, T] \rightarrow \mathbb{R}^n$. Через $\mathbf{f}^{(i)}(\mathbf{x}, t)$, $\mathbf{g}^{(i)}(\mathbf{x}, t)$ будем обозначать i -е компоненты $\mathbf{f}(\mathbf{x}, t)$, $\mathbf{g}(\mathbf{x}, t)$, $i = 1, \dots, n$. Для произвольного $\Delta > 0$ с помощью стандартной формулы Тейлора получим соотношения

$$\Delta \sum_{i=1}^n \mathbf{g}^{(i)} \mathbf{f}'_i = \sum_{i=1}^2 \pi_i \mathbf{f}(\mathbf{x} + \sigma_i \Delta \mathbf{g}, t) + O(\Delta^2), \quad (7.78)$$

$$\Delta \sum_{i=1}^n \mathbf{g}^{(i)} \mathbf{f}'_i = \sum_{i=1}^2 \alpha_i \mathbf{f}(\mathbf{x} + \beta_i \Delta \mathbf{g}, t) + O(\Delta^3), \quad (7.79)$$

$$\Delta \sum_{i=1}^n \mathbf{g}^{(i)} \mathbf{f}'_i = \sum_{i=1}^4 \eta_i \mathbf{f}(\mathbf{x} + \omega_i \Delta \mathbf{g}, t) + O(\Delta^4), \quad (7.80)$$

$$\Delta \sum_{i=1}^n \mathbf{g}^{(i)} \mathbf{f}'_i = \sum_{i=1}^4 \theta_i \mathbf{f}(\mathbf{x} + \varepsilon_i \Delta \mathbf{g}, t) + O(\Delta^5), \quad (7.81)$$

$$\Delta^2 \sum_{i,j=1}^n \mathbf{g}^{(i)} \mathbf{g}^{(j)} \mathbf{f}''_{ij} = \sum_{i=1}^3 \varrho_i \mathbf{f}(\mathbf{x} + \varpi_i \Delta \mathbf{g}, t) + O(\Delta^3), \quad (7.82)$$

$$\Delta^2 \sum_{i,j=1}^n \mathbf{g}^{(i)} \mathbf{g}^{(j)} \mathbf{f}''_{ij} = \sum_{i=1}^4 \mu_i \mathbf{f}(\mathbf{x} + \lambda_i \Delta \mathbf{g}, t) + O(\Delta^4), \quad (7.83)$$

$$\Delta^2 \sum_{i,j=1}^n \mathbf{g}^{(i)} \mathbf{g}^{(j)} \mathbf{f}_{ij}'' = \sum_{i=1}^5 \psi_i \mathbf{f}(\mathbf{x} + \phi_i \Delta \mathbf{g}, t) + O(\Delta^5), \quad (7.84)$$

$$\Delta(\dot{\mathbf{f}} + \sum_{i=1}^n \mathbf{g}^{(i)} \mathbf{f}_i') = \sum_{i=1}^2 \zeta_i \mathbf{f}(\mathbf{x} + \delta_i \Delta \mathbf{g}, t + \gamma_i \Delta) + O(\Delta^2), \quad (7.85)$$

$$\Delta(\dot{\mathbf{f}} + \sum_{i=1}^n \mathbf{g}^{(i)} \mathbf{f}_i') = \sum_{i=1}^3 \varphi_i \mathbf{f}(\mathbf{x} + \chi_i \Delta \mathbf{g}, t + \kappa_i \Delta) + O(\Delta^3), \quad (7.86)$$

$$2\mathbf{f} + \Delta(\dot{\mathbf{f}} + \sum_{i=1}^n \mathbf{g}^{(i)} \mathbf{f}_i') = \sum_{i=1}^2 \rho_i \mathbf{f}(\mathbf{x} + \nu_i \Delta \mathbf{g}, t + \xi_i \Delta) + O(\Delta^2), \quad (7.87)$$

где $\mathbf{u}(\mathbf{x}, t) \stackrel{\text{def}}{=} \mathbf{u}$; $\mathbf{u}^{(i)}(\mathbf{x}, t) \stackrel{\text{def}}{=} \mathbf{u}^{(i)}$; $\frac{\partial \mathbf{f}}{\partial t} \stackrel{\text{def}}{=} \dot{\mathbf{f}}$; $\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \mathbf{x}^{(i)}} \stackrel{\text{def}}{=} \mathbf{u}_i'$; $\frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial \mathbf{x}^{(i)} \partial \mathbf{x}^{(j)}} \stackrel{\text{def}}{=} \mathbf{u}_{ij}''$; $\mathbf{u} = \mathbf{f}$ или $\mathbf{g}$; коэффициенты $\pi_i, \sigma_i, \alpha_i, \beta_i, \eta_i, \omega_i, \theta_i, \varepsilon_i, \mu_i, \lambda_i, \psi_i, \phi_i, \zeta_i, \delta_i, \gamma_i, \varphi_i, \chi_i, \kappa_i, \rho_i, \nu_i, \xi_i, \varrho_i, \varpi_i$ удовлетворяют следующим системам алгебраических уравнений:

$$\left\{ \begin{array}{l} \sum_{i=1}^3 \mu_i = 0, \\ \sum_{i=1}^3 \mu_i \lambda_i = 0, \\ \sum_{i=1}^3 \mu_i \frac{\lambda_i^2}{2} = 1, \\ \sum_{i=1}^3 \mu_i \lambda_i^3 = 0, \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} \sum_{i=1}^4 \eta_i = 0, \\ \sum_{i=1}^4 \eta_i \omega_i = 1, \\ \sum_{i=1}^4 \eta_i \omega_i^2 = 0, \\ \sum_{i=1}^4 \eta_i \omega_i^3 = 0, \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} \sum_{i=1}^2 \alpha_i = 0, \\ \sum_{i=1}^2 \alpha_i \beta_i = 1, \\ \sum_{i=1}^2 \alpha_i \beta_i^2 = 0, \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \sum_{i=1}^5 \psi_i = 0, \\ \sum_{i=1}^5 \psi_i \phi_i = 0, \\ \sum_{i=1}^5 \psi_i \frac{\phi_i^2}{2} = 1, \\ \sum_{i=1}^5 \psi_i \phi_i^3 = 0, \\ \sum_{i=1}^5 \psi_i \phi_i^4 = 0, \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} \sum_{i=1}^4 \theta_i = 0, \\ \sum_{i=1}^4 \theta_i \varepsilon_i = 1, \\ \sum_{i=1}^4 \theta_i \varepsilon_i^2 = 0, \\ \sum_{i=1}^4 \theta_i \varepsilon_i^3 = 0, \\ \sum_{i=1}^4 \theta_i \varepsilon_i^4 = 0, \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} \sum_{i=1}^3 \varphi_i = 0, \\ \sum_{i=1}^3 \varphi_i \kappa_i = 1, \\ \sum_{i=1}^3 \varphi_i \kappa_i^2 = 0, \\ \sum_{i=1}^3 \chi_i \varphi_i = 1, \\ \sum_{i=1}^3 \varphi_i \chi_i \kappa_i = 0, \\ \sum_{i=1}^3 \varphi_i \chi_i^2 = 0, \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \sum_{i=1}^2 \zeta_i = 0, \\ \sum_{i=1}^2 \zeta_i \gamma_i = 1, \\ \sum_{i=1}^2 \zeta_i \delta_i = 1, \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} \sum_{i=1}^2 \rho_i = 2, \\ \sum_{i=1}^2 \xi_i \rho_i = 1, \\ \sum_{i=1}^2 \nu_i \rho_i = 1, \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} \sum_{i=1}^3 \varrho_i = 0, \\ \sum_{i=1}^3 \varrho_i \varpi_i = 0, \\ \sum_{i=1}^3 \varrho_i \frac{\varpi_i^2}{2} = 1, \end{array} \right.$$

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^2 \pi_i = 0, \\ \sum_{i=1}^2 \pi_i \sigma_i = 1. \end{cases}$$

Пример 7.1. Проверить, что следующий набор коэффициентов является решением данных систем уравнений: $\alpha_1 = 1, \alpha_2 = -1, \beta_1 = \frac{1}{2}, \beta_2 = -\frac{1}{2}, \mu_1 = \mu_2 = 1, \mu_3 = -2, \lambda_1 = 1, \lambda_2 = -1, \lambda_3 = 0, \varepsilon_1 = 1, \varepsilon_2 = 2, \varepsilon_3 = -2, \varepsilon_4 = -1, \theta_1 = \frac{2}{3}, \theta_2 = -\frac{1}{12}, \theta_3 = \frac{1}{12}, \theta_4 = -\frac{2}{3}, \eta_1 = \frac{1}{48}, \eta_2 = -\frac{1}{48}, \eta_3 = \frac{27}{48}, \eta_4 = -\frac{27}{48}, \omega_1 = -3, \omega_2 = 3, \omega_3 = 1, \omega_4 = -1, \varphi_1 = \varphi_2 = \frac{1}{2}, \varphi_3 = -1, \kappa_1 = 1, \kappa_2 = \kappa_3 = -1, \chi_1 = 1, \chi_2 = \chi_3 = -1, \rho_1 = \rho_2 = 1, \xi_1 = 0, \xi_2 = 1, \nu_1 = 0; \nu_2 = 1, \zeta_1 = 1, \zeta_2 = -1, \gamma_1 = \frac{1}{2}, \gamma_2 = -\frac{1}{2}, \delta_1 = \frac{1}{2}, \delta_2 = -\frac{1}{2}, \psi_1 = -\frac{65}{60}, \psi_2 = \frac{66}{60}, \psi_3 = -\frac{14}{60}, \psi_4 = -\frac{1}{60}, \psi_5 = \frac{14}{60}, \phi_1 = 1, \phi_2 = 2, \phi_3 = 3, \phi_4 = -3, \phi_5 = -2, \pi_1 = \frac{1}{2}, \pi_2 = -\frac{1}{2}, \sigma_1 = 2, \sigma_2 = 0, \varrho_1 = \varrho_2 = 1, \varrho_3 = -2, \varpi_1 = 0, \varpi_2 = 2, \varpi_3 = 1.$

7.7.2 Метод порядка точности 1.0

В качестве основы для построения явного сильного одношагового конечно-разностного численного метода порядка точности 1.0 возьмем соотношение (7.34) (метод Г. Н. Мильштейна). Аппроксимируем величину $G_0^{(i_2)} \Sigma_{i_1}(\mathbf{y}_p, \tau_p)$, где $p\Delta \stackrel{\text{def}}{=} \tau_p; \mathbf{y}_{\tau_p} \stackrel{\text{def}}{=} \mathbf{y}_p$, с помощью соотношения (7.78) следующим образом:

$$G_0^{(i_2)} \Sigma_{i_1}(\mathbf{y}_p, \tau_p) = \frac{1}{\sqrt{\Delta}} \sum_{j=1}^2 \pi_j \Sigma_{i_1}(\mathbf{y}_{p\sigma}^{(ji_2)}, \tau_p) + O(\sqrt{\Delta}), \quad (7.88)$$

где $\mathbf{y}_{p\sigma}^{(ji)} = \mathbf{y}_p + \sqrt{\Delta} \sigma_j \Sigma_i(\mathbf{y}_p, \tau_p)$.

Подставляя (7.88) в (7.34) и отбрасывая величину большего порядка малости, чем $O(\Delta)$, получаем явный сильный одношаговый конечно-разностный численный метод порядка 1.0:

$$\begin{aligned} \mathbf{y}_{p+1} = & \mathbf{y}_p + \Delta \mathbf{a}(\mathbf{y}_p, \tau_p) + \sum_{i_1=1}^m \Sigma_{i_1}(\mathbf{y}_p, \tau_p) \hat{I}_{0_{\tau_{p+1}, \tau_p}}^{(i_1)} + \\ & + \frac{1}{\sqrt{\Delta}} \sum_{i_1, i_2=1}^m \sum_{j=1}^2 \pi_j \Sigma_{i_1}(\mathbf{y}_{p\sigma}^{(ji_2)}, \tau_p) \hat{I}_{0_{\tau_{p+1}, \tau_p}}^{(i_2 i_1)}. \end{aligned} \quad (7.89)$$

В дальнейшем при тестировании сильных конечно-разностных численных методов будем использовать только коэффициенты, приведенные в примере 7.1.

Численный эксперимент 7.10 (рис. 7.10). Повторить численный эксперимент 7.1 для конечно-разностного сильного численного метода порядка точности 1.0 вида (7.89).

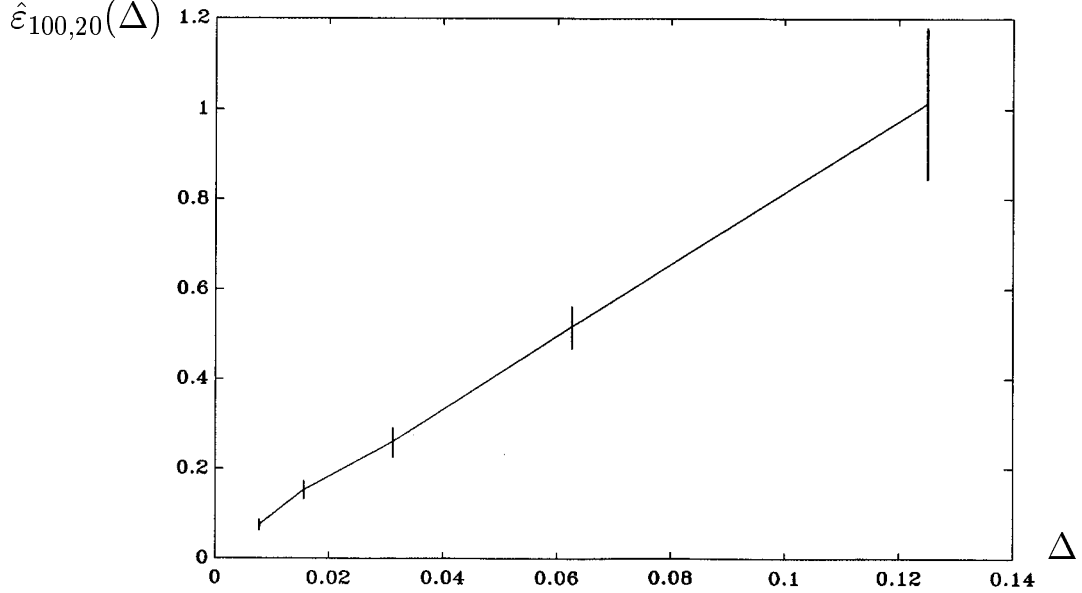


Рис. 7.10. Результат численного эксперимента 7.10.

7.7.3 Методы порядка точности 1.5

Согласно (7.45) или аналогичному представлению, основанному на разложении Тейлора–Ито в форме Вагнера и Платена, следует, что для построения явных сильных одношаговых конечно-разностных численных методов порядка точности 1.5 необходимо аппроксимировать конечными разностями функции $G_0^{(i_2)}\Sigma_{i_1}$, $G_0^{(i_1)}\mathbf{a}$, $L\Sigma_{i_1}$, $G_0^{(i_3)}G_0^{(i_2)}\Sigma_{i_1}$, $\mathbf{a}\Delta + \frac{\Delta^2}{2}L\mathbf{a}$ в точке $(\mathbf{y}_p, \tau_p)$. Введем следующие обозначения:

$$\mathbf{y}_{pr}^{(ji)} = \mathbf{y}_p + \sqrt{\Delta}r_j\Sigma_i(\mathbf{y}_p, \tau_p), \quad \mathbf{z}_{p\delta}^{(j)} = \mathbf{y}_p + \Delta\delta_j\mathbf{a}(\mathbf{y}_p, \tau_p),$$

$$\mathbf{u}_{p\sigma}^{(ji)} = \mathbf{y}_p + \Delta\sigma_j\Sigma_i(\mathbf{y}_p, \tau_p), \quad \Delta_{p\gamma}^{(j)} = \tau_p + \gamma_j\Delta,$$

где $r_j = \beta_j$, σ_j, ϖ_j . С помощью тейлоровских аппроксимаций, полученных ранее, имеем

$$G_0^{(i_2)}\Sigma_{i_1}(\mathbf{y}_p, \tau_p) = \frac{1}{\sqrt{\Delta}} \sum_{j=1}^2 \alpha_j \Sigma_{i_1}(\mathbf{y}_{p\beta}^{(ji_2)}, \tau_p) + O(\Delta), \quad (7.90)$$

$$G_0^{(i_1)} \mathbf{a}(\mathbf{y}_p, \tau_p) = \frac{1}{\Delta} \sum_{j=1}^2 \pi_j \mathbf{a}(\mathbf{u}_{p\sigma}^{(ji_1)}, \tau_p) + O(\sqrt{\Delta}), \quad (7.91)$$

$$\begin{aligned} L\Sigma_{i_1}(\mathbf{y}_p, \tau_p) &= \frac{1}{\Delta} \left[\frac{1}{2} \sum_{r=1}^m \sum_{j=1}^3 \varrho_j \Sigma_{i_1}(\mathbf{y}_{p\varpi}^{(jr)}, \tau_p) + \right. \\ &\quad \left. + \sum_{j=1}^2 \zeta_j \Sigma_{i_1}(\mathbf{z}_{p\delta}^{(j)}, \Delta_{p\gamma}^{(j)}) \right] + O(\sqrt{\Delta}), \end{aligned} \quad (7.92)$$

$$G_0^{(i_3)} G_0^{(i_2)} \Sigma_{i_1}(\mathbf{y}_p, \tau_p) = \frac{1}{\Delta} \sum_{j=1}^2 \alpha_j \mathbf{k}_{i_1 i_2}(\mathbf{y}_{p\beta}^{(ji_3)}, \tau_p) + O(\sqrt{\Delta}), \quad (7.93)$$

где

$$\mathbf{k}_{i_1 i_2}(\mathbf{y}_p, \tau_p) = \sum_{j=1}^2 \pi_j \Sigma_{i_1}(\mathbf{y}_{p\sigma}^{(ji_2)}, \tau_p).$$

После подстановки соотношений (7.90)–(7.93), (7.104) в (7.45) и отбрасывания остаточных членов, получим следующий явный одношаговый сильный конечно-разностный метод порядка точности 1.5:

$$\begin{aligned} \mathbf{y}_{p+1} &= \mathbf{y}_p + \frac{\Delta}{2} \left[\frac{1}{2} \sum_{r=1}^m \sum_{j=1}^3 \mu_j \mathbf{a}(\mathbf{y}_{p\lambda}^{(jr)}, \tau_p) + \sum_{j=1}^2 \rho_j \mathbf{a}(\mathbf{z}_{p\nu}^{(j)}, \Delta_{p\xi}^{(j)}) \right] + \\ &+ \sum_{i_1=1}^m \Sigma_{i_1}(\mathbf{y}_p, \tau_p) \hat{I}_{0\tau_{p+1}, \tau_p}^{(i_1)} + \frac{1}{\sqrt{\Delta}} \sum_{i_1, i_2=1}^m \sum_{j=1}^2 \alpha_j \Sigma_{i_1}(\mathbf{y}_{p\beta}^{(ji_2)}, \tau_p) \hat{I}_{00\tau_{p+1}, \tau_p}^{(i_2 i_1)} + \\ &+ \frac{1}{\Delta} \sum_{i_1=1}^m \left[\sum_{j=1}^2 \pi_j \mathbf{a}(\mathbf{u}_{p\sigma}^{(ji_1)}, \tau_p) \left(\Delta \hat{I}_{0\tau_{p+1}, \tau_p}^{(i_1)} + \hat{I}_{1\tau_{p+1}, \tau_p}^{(i_1)} \right) - \right. \\ &- \left. \left(\frac{1}{2} \sum_{r=1}^m \sum_{j=1}^3 \varrho_j \Sigma_{i_1}(\mathbf{y}_{p\varpi}^{(jr)}, \tau_p) + \sum_{j=1}^2 \zeta_j \Sigma_{i_1}(\mathbf{z}_{p\delta}^{(j)}, \Delta_{p\gamma}^{(j)}) \right) \hat{I}_{1\tau_{p+1}, \tau_p}^{(i_1)} \right] + \\ &+ \frac{1}{\Delta} \sum_{i_1, i_2, i_3=1}^m \sum_{j=1}^2 \alpha_j \mathbf{k}_{i_1 i_2}(\mathbf{y}_{p\beta}^{(ji_3)}, \tau_p) \hat{I}_{000\tau_{p+1}, \tau_p}^{(i_3 i_2 i_1)}, \end{aligned} \quad (7.94)$$

$$\mathbf{k}_{i_1 i_2}(\mathbf{y}_p, \tau_p) = \sum_{j=1}^2 \pi_j \Sigma_{i_1}(\mathbf{y}_{p\sigma}^{(ji_2)}, \tau_p).$$

Рассмотрим численный метод, аналогичный (7.94) и основанный на разложении Тейлора–Ито в форме Вагнера и Платена:

$$\mathbf{y}_{p+1} = \mathbf{y}_p + \frac{\Delta}{2} \left[\frac{1}{2} \sum_{r=1}^m \sum_{j=1}^3 \mu_j \mathbf{a}(\mathbf{y}_{p\lambda}^{(jr)}, \tau_p) + \sum_{j=1}^2 \rho_j \mathbf{a}(\mathbf{z}_{p\nu}^{(j)}, \Delta_{p\xi}^{(j)}) \right] +$$

$$\begin{aligned}
& + \sum_{i_1=1}^m \Sigma_{i_1}(\mathbf{y}_p, \tau_p) \hat{J}_{(1)\tau_{p+1}, \tau_p}^{(i_1)} + \frac{1}{\sqrt{\Delta}} \sum_{i_1, i_2=1}^m \sum_{j=1}^2 \alpha_j \Sigma_{i_1}(\mathbf{y}_{p\beta}^{(ji_2)}, \tau_p) \hat{J}_{(11)\tau_{p+1}, \tau_p}^{(i_2 i_1)} + \\
& + \frac{1}{\Delta} \sum_{i_1=1}^m \left[\sum_{j=1}^2 \pi_j \mathbf{a}(\mathbf{u}_{p\sigma}^{(ji_1)}, \tau_p) \hat{J}_{(10)\tau_{p+1}, \tau_p}^{(i_1)} + \right. \\
& + \left. \left(\frac{1}{2} \sum_{r=1}^m \sum_{j=1}^3 \varrho_j \Sigma_{i_1}(\mathbf{y}_{p\varpi}^{(jr)}, \tau_p) + \sum_{j=1}^2 \zeta_j \Sigma_{i_1}(\mathbf{z}_{p\delta}^{(j)}, \Delta_{p\gamma}^{(j)}) \right) \hat{J}_{(01)\tau_{p+1}, \tau_p}^{(i_1)} \right] + \\
& + \frac{1}{\Delta} \sum_{i_1, i_2, i_3=1}^m \sum_{j=1}^2 \alpha_j \mathbf{k}_{i_1 i_2}(\mathbf{y}_{p\beta}^{(ji_3)}, \tau_p) \hat{J}_{(111)\tau_{p+1}, \tau_p}^{(i_3 i_2 i_1)}, \tag{7.95}
\end{aligned}$$

$$\mathbf{k}_{i_1 i_2}(\mathbf{y}_p, \tau_p) = \sum_{j=1}^2 \pi_j \Sigma_{i_1}(\mathbf{y}_{p\sigma}^{(ji_2)}, \tau_p).$$

На примере численных методов (7.45) и (7.54) мы проследили, что учет слагаемого $\frac{1}{2}\Delta^2 La(\mathbf{y}_p, \tau_p)$ повысил порядок точности численного метода (7.45) на 0.5 по сравнению с численным методом (7.54). Аналогичный эффект можно ожидать и для конечно-разностных численных методов. В связи с этим рассмотрим на основе соотношения (7.54) следующую явную сильную конечно-разностную численную схему порядка точности 1.0:

$$\begin{aligned}
\mathbf{y}_{p+1} = & \mathbf{y}_p + \Delta \mathbf{a}(\mathbf{y}_p, \tau_p) + \sum_{i_1=1}^m \Sigma_{i_1}(\mathbf{y}_p, \tau_p) \hat{I}_{0\tau_{p+1}, \tau_p}^{(i_1)} + \\
& + \frac{1}{\sqrt{\Delta}} \sum_{i_1, i_2=1}^m \sum_{j=1}^2 \alpha_j \Sigma_{i_1}(\mathbf{y}_{p\beta}^{(ji_2)}, \tau_p) \hat{I}_{00\tau_{p+1}, \tau_p}^{(i_2 i_1)} + \\
& + \frac{1}{\Delta} \sum_{i_1=1}^m \left[\sum_{j=1}^2 \pi_j \mathbf{a}(\mathbf{u}_{p\sigma}^{(ji_1)}, \tau_p) \left(\Delta \hat{I}_{0\tau_{p+1}, \tau_p}^{(i_1)} + \hat{I}_{1\tau_{p+1}, \tau_p}^{(i_1)} \right) - \right. \\
& - \left. \left(\frac{1}{2} \sum_{r=1}^m \sum_{j=1}^3 \varrho_j \Sigma_{i_1}(\mathbf{y}_{p\varpi}^{(jr)}, \tau_p) + \sum_{j=1}^2 \zeta_j \Sigma_{i_1}(\mathbf{z}_{p\delta}^{(j)}, \Delta_{p\gamma}^{(j)}) \right) \hat{I}_{1\tau_{p+1}, \tau_p}^{(i_1)} \right] + \\
& + \frac{1}{\Delta} \sum_{i_1, i_2, i_3=1}^m \sum_{j=1}^2 \alpha_j \mathbf{k}_{i_1 i_2}(\mathbf{y}_{p\beta}^{(ji_3)}, \tau_p) \hat{I}_{000\tau_{p+1}, \tau_p}^{(i_3 i_2 i_1)}, \tag{7.96}
\end{aligned}$$

где сохранен смысл обозначений, введенных в (7.94).

Численный эксперимент 7.11 (рис. 7.11). *Повторить численный эксперимент 7.1 для конечно-разностного сильного численного метода порядка точности 1.0 вида (7.96). Для моделирования стохастических интегралов Ито $I_{1(p+1)\Delta, p\Delta}^{(1)}$, $p = 0, 1, \dots, N-1$, использовать*

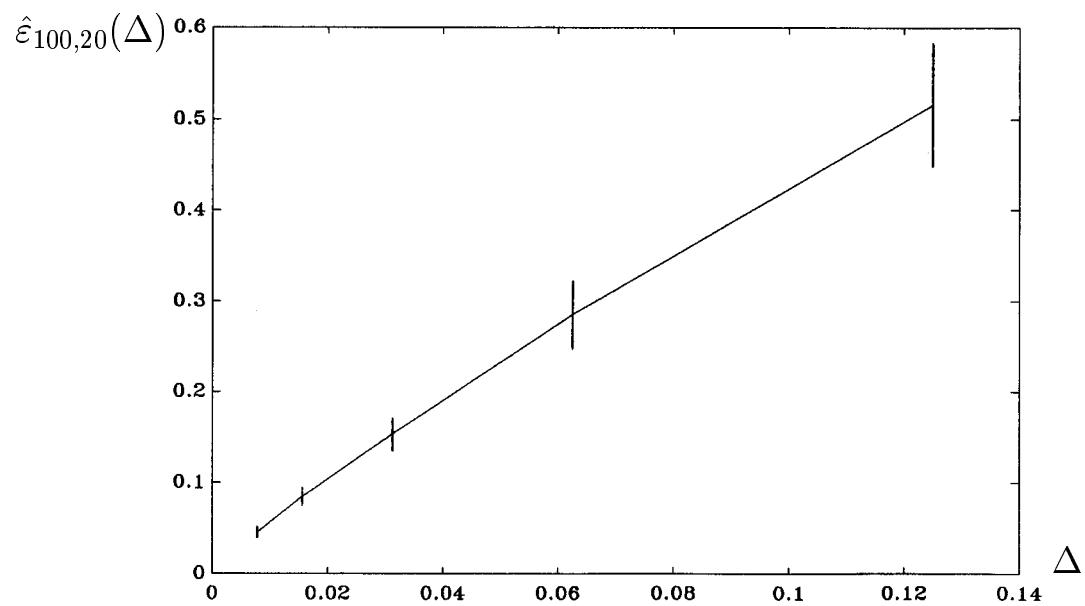


Рис. 7.11. Результат численного эксперимента 7.11.

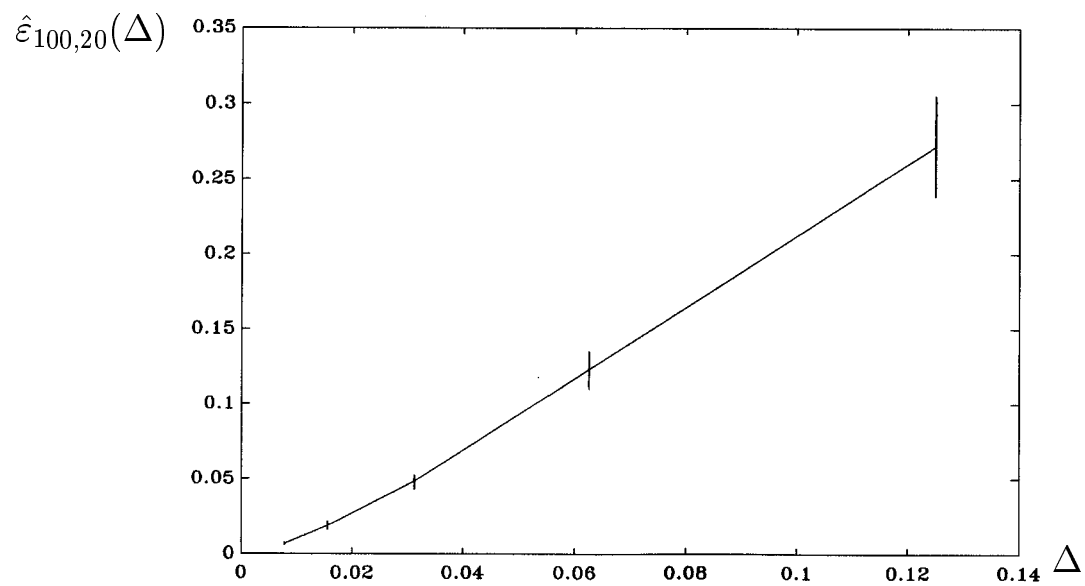


Рис. 7.12. Результат численного эксперимента 7.12.

формулу

$$I_{1_{(p+1)\Delta, p\Delta}}^{(1)} = -\frac{1}{2}\Delta^{\frac{3}{2}} \left(\zeta_0^{(1)} + \frac{1}{\sqrt{3}}\zeta_1^{(1)} \right). \quad (7.97)$$

Здесь $\zeta_{0_{(p+1)\Delta, p\Delta}}^{(1)} \stackrel{\text{def}}{=} \zeta_0^{(1)}$; $\zeta_{1_{(p+1)\Delta, p\Delta}}^{(1)} \stackrel{\text{def}}{=} \zeta_1^{(1)}$; $\zeta_{0_{(p+1)\Delta, p\Delta}}^{(1)}$, $\zeta_{1_{(p+1)\Delta, p\Delta}}^{(1)}$, $p = 0, 1, \dots, N-1$, — независимые в совокупности стандартные гауссовские случайные величины.

Численный эксперимент 7.12 (рис. 7.12). Повторить численный эксперимент 7.11 для конечно-разностного сильного численного метода порядка точности 1.5 вида (7.94).

7.7.4 Методы порядка точности 2.0

Согласно соотношениям (7.55), (7.65) для построения явных сильных одношаговых конечно-разностных численных методов порядка точности 2.0 необходимо аппроксимировать конечными разностями в точке $(\mathbf{y}_p, \tau_p)$ следующие функции:

$$G_0^{(i_2)} \Sigma_{i_1}, G_0^{(i_1)} \mathbf{a}, L \Sigma_{i_1}, G_0^{(i_3)} G_0^{(i_2)} \Sigma_{i_1}, \quad (7.98)$$

$$\mathbf{a} \Delta + \frac{\Delta^2}{2} L \mathbf{a}, G_0^{(i_2)} L \Sigma_{i_1}, G_0^{(i_2)} G_0^{(i_1)} \mathbf{a}, L G_0^{(i_2)} \Sigma_{i_1}, G_0^{(i_4)} G_0^{(i_3)} G_0^{(i_2)} \Sigma_{i_1}. \quad (7.99)$$

Введем обозначения:

$$\mathbf{y}_{pr}^{(ji)} = \mathbf{y}_p + \sqrt{\Delta} r_j \Sigma_i(\mathbf{y}_p, \tau_p), \mathbf{z}_{pq}^{(j)} = \mathbf{y}_p + \Delta q_j \mathbf{a}(\mathbf{y}_p, \tau_p),$$

$$\mathbf{u}_{p\sigma}^{(ji)} = \mathbf{y}_p + \Delta \sigma_j \Sigma_i(\mathbf{y}_p, \tau_p), \Delta_{ph}^{(j)} = \tau_p + h_j \Delta,$$

где $r_j = \beta_j, \omega_j, \lambda_j, \sigma_j, \varpi_j$; $q_j = \delta_j, \nu_j$ и $h_j = \gamma_j, \xi_j$.

С помощью тейлоровских аппроксимаций, полученных ранее, имеем следующие аппроксимации для функций (7.98) в точке $(\mathbf{y}_p, \tau_p)$:

$$G_0^{(i_2)} \Sigma_{i_1}(\mathbf{y}_p, \tau_p) = \frac{1}{\sqrt{\Delta}} \sum_{j=1}^4 \eta_j \Sigma_{i_1}(\mathbf{y}_{p\omega}^{(ji_2)}, \tau_p) + O(\Delta^{3/2}), \quad (7.100)$$

$$G_0^{(i_1)} \mathbf{a}(\mathbf{y}_p, \tau_p) = \frac{1}{\Delta} \sum_{j=1}^2 \pi_j \mathbf{a}(\mathbf{u}_{p\sigma}^{(ji_1)}, \tau_p) + O(\Delta), \quad (7.101)$$

$$\begin{aligned} L \Sigma_{i_1}(\mathbf{y}_p, \tau_p) = & \frac{1}{\Delta} \left[\frac{1}{2} \sum_{r=1}^m \sum_{j=1}^3 \mu_j \Sigma_{i_1}(\mathbf{y}_{p\lambda}^{(jr)}, \tau_p) + \right. \\ & \left. + \sum_{j=1}^2 \zeta_j \Sigma_{i_1}(\mathbf{z}_{p\delta}^{(j)}, \Delta_{p\gamma}^{(j)}) \right] + O(\Delta), \end{aligned} \quad (7.102)$$

$$G_0^{(i_3)} G_0^{(i_2)} \Sigma_{i_1}(\mathbf{y}_p, \tau_p) = \frac{1}{\Delta} \sum_{j=1}^4 \eta_j \mathbf{b}_{i_1 i_2}(\mathbf{y}_{p\omega}^{(ji_3)}, \tau_p) + O(\Delta), \quad (7.103)$$

где

$$\mathbf{b}_{i_1 i_2}(\mathbf{y}_p, \tau_p) = \sum_{j=1}^2 \alpha_j \Sigma_{i_1}(\mathbf{y}_{p\beta}^{(ji_2)}, \tau_p).$$

Рассмотрим аппроксимации функций (7.99) в точке $(\mathbf{y}_p, \tau_p)$ с помощью тейлоровских аппроксимаций, полученных ранее:

$$\begin{aligned} & \Delta \mathbf{a}(\mathbf{y}_p, \tau_p) + \frac{\Delta^2}{2} L \mathbf{a}(\mathbf{y}_p, \tau_p) = \\ &= \frac{\Delta}{2} \left[\frac{1}{2} \sum_{r=1}^m \sum_{j=1}^3 \mu_j \mathbf{a}(\mathbf{y}_{p\lambda}^{(jr)}, \tau_p) + \sum_{j=1}^2 \rho_j \mathbf{a}(\mathbf{z}_{p\nu}^{(j)}, \Delta_{p\xi}^{(j)}) \right] + O(\Delta^3), \end{aligned} \quad (7.104)$$

$$G_0^{(i_2)} L \Sigma_{i_1}(\mathbf{y}_p, \tau_p) = \frac{1}{\Delta \sqrt{\Delta}} \sum_{j=1}^4 \eta_j \mathbf{g}_{i_1}(\mathbf{y}_{p\omega}^{(ji_2)}, \tau_p) + O(\sqrt{\Delta}), \quad (7.105)$$

где

$$\begin{aligned} \mathbf{g}_{i_1}(\mathbf{y}_p, \tau_p) &= \frac{1}{2} \sum_{r=1}^m \sum_{j=1}^3 \varrho_j \Sigma_{i_1}(\mathbf{y}_{p\omega}^{(jr)}, \tau_p) + \sum_{j=1}^2 \zeta_j \Sigma_{i_1}(\mathbf{z}_{p\delta}^{(j)}, \Delta_{p\gamma}^{(j)}); \\ G_0^{(i_2)} G_0^{(i_1)} \mathbf{a}(\mathbf{y}_p, \tau_p) &= \frac{1}{\Delta \sqrt{\Delta}} \sum_{j=1}^4 \eta_j \mathbf{h}_{i_1}(\mathbf{y}_{p\omega}^{(ji_2)}, \tau_p) + O(\sqrt{\Delta}). \end{aligned} \quad (7.106)$$

Здесь

$$\begin{aligned} \mathbf{h}_{i_1}(\mathbf{y}_p, \tau_p) &= \sum_{j=1}^2 \pi_j \mathbf{a}(\mathbf{u}_{p\sigma}^{(ji_1)}, \tau_p); \\ LG_0^{(i_2)} \Sigma_{i_1}(\mathbf{y}_p, \tau_p) &= \frac{1}{\Delta \sqrt{\Delta}} \left[\frac{1}{2} \sum_{r=1}^m \sum_{j=1}^3 \mu_j \mathbf{k}_{i_1 i_2}(\mathbf{y}_{p\lambda}^{(jr)}, \tau_p) + \right. \\ & \left. + \sum_{j=1}^2 \zeta_j \mathbf{k}_{i_1 i_2}(\mathbf{z}_{p\delta}^{(j)}, \Delta_{p\gamma}^{(j)}) \right] + O(\sqrt{\Delta}), \end{aligned} \quad (7.107)$$

где

$$\begin{aligned} \mathbf{k}_{i_1 i_2}(\mathbf{y}_p, \tau_p) &= \sum_{j=1}^2 \pi_j \Sigma_{i_1}(\mathbf{y}_{p\sigma}^{(ji_2)}, \tau_p); \\ G_0^{(i_4)} G_0^{(i_3)} G_0^{(i_2)} \Sigma_{i_1}(\mathbf{y}_p, \tau_p) &= \frac{1}{\Delta \sqrt{\Delta}} \sum_{j=1}^4 \eta_j \mathbf{c}_{i_1 i_2 i_3}(\mathbf{y}_{p\omega}^{(ji_4)}, \tau_p) + O(\sqrt{\Delta}). \end{aligned} \quad (7.108)$$

Здесь

$$\mathbf{c}_{i_1 i_2 i_3}(\mathbf{y}_p, \tau_p) = \sum_{j=1}^2 \alpha_j \mathbf{k}_{i_1 i_2}(\mathbf{y}_{p\beta}^{(ji_3)}, \tau_p).$$

После подстановки соотношений (7.100)–(7.108) в (7.55) и отбрасывания остаточных членов, получим явный одношаговый сильный конечно-разностный метод порядка точности 2.0 вида

$$\begin{aligned}
\mathbf{y}_{p+1} = & \mathbf{y}_p + \frac{\Delta}{2} \left[\frac{1}{2} \sum_{r=1}^m \sum_{j=1}^3 \mu_j \mathbf{a}(\mathbf{y}_{p\lambda}^{(jr)}, \tau_p) + \sum_{j=1}^2 \rho_j \mathbf{a}(\mathbf{z}_{p\nu}^{(j)}, \Delta_{p\xi}^{(j)}) \right] + \\
& + \sum_{i_1=1}^m \Sigma_{i_1}(\mathbf{y}_p, \tau_p) \hat{I}_{0\tau_{p+1}, \tau_p}^{(i_1)} + \frac{1}{\sqrt{\Delta}} \sum_{i_1, i_2=1}^m \sum_{j=1}^4 \eta_j \Sigma_{i_1}(\mathbf{y}_{p\omega}^{(ji_2)}, \tau_p) \hat{I}_{00\tau_{p+1}, \tau_p}^{(i_2 i_1)} + \\
& + \frac{1}{\Delta} \sum_{i_1=1}^m \left[\sum_{j=1}^2 \pi_j \mathbf{a}(\mathbf{u}_{p\sigma}^{(ji_1)}, \tau_p) \left(\Delta \hat{I}_{0\tau_{p+1}, \tau_p}^{(i_1)} + \hat{I}_{1\tau_{p+1}, \tau_p}^{(i_1)} \right) - \right. \\
& - \left. \left(\frac{1}{2} \sum_{r=1}^m \sum_{j=1}^3 \mu_j \Sigma_{i_1}(\mathbf{y}_{p\lambda}^{(jr)}, \tau_p) + \sum_{j=1}^2 \zeta_j \Sigma_{i_1}(\mathbf{z}_{p\delta}^{(j)}, \Delta_{p\gamma}^{(j)}) \right) \hat{I}_{1\tau_{p+1}, \tau_p}^{(i_1)} \right] + \\
& + \frac{1}{\Delta} \sum_{i_1, i_2, i_3=1}^m \sum_{j=1}^4 \eta_j \mathbf{b}_{i_1 i_2}(\mathbf{y}_{p\omega}^{(ji_3)}, \tau_p) \hat{I}_{000\tau_{p+1}, \tau_p}^{(i_3 i_2 i_1)} + \\
& + \frac{1}{\Delta \sqrt{\Delta}} \sum_{i_1, i_2=1}^m \left[\sum_{j=1}^4 \eta_j \mathbf{g}_{i_1}(\mathbf{y}_{p\omega}^{(ji_2)}, \tau_p) \left(\hat{I}_{10\tau_{p+1}, \tau_p}^{(i_2 i_1)} - \hat{I}_{01\tau_{p+1}, \tau_p}^{(i_2 i_1)} \right) + \right. \\
& + \sum_{j=1}^4 \eta_j \mathbf{h}_{i_1}(\mathbf{y}_{p\omega}^{(ji_2)}, \tau_p) \left(\hat{I}_{01\tau_{p+1}, \tau_p}^{(i_2 i_1)} + \Delta \hat{I}_{00\tau_{p+1}, \tau_p}^{(i_2 i_1)} \right) - \\
& - \left. \left(\frac{1}{2} \sum_{r=1}^m \sum_{j=1}^3 \mu_j \mathbf{k}_{i_1 i_2}(\mathbf{y}_{p\lambda}^{(jr)}, \tau_p) + \sum_{j=1}^2 \zeta_j \mathbf{k}_{i_1 i_2}(\mathbf{z}_{p\delta}^{(j)}, \Delta_{p\gamma}^{(j)}) \right) \hat{I}_{10\tau_{p+1}, \tau_p}^{(i_2 i_1)} \right] + \\
& + \frac{1}{\Delta \sqrt{\Delta}} \sum_{i_1, i_2, i_3 i_4=1}^m \sum_{j=1}^4 \eta_j \mathbf{c}_{i_1 i_2 i_3}(\mathbf{y}_{p\omega}^{(ji_4)}, \tau_p) \hat{I}_{0000\tau_{p+1}, \tau_p}^{(i_4 i_3 i_2 i_1)}. \tag{7.109}
\end{aligned}$$

Рассмотрим численный метод, аналогичный (7.109) и основанный на разложении Тейлора–Ито в форме Вагнера и Платена:

$$\begin{aligned}
\mathbf{y}_{p+1} = & \mathbf{y}_p + \frac{\Delta}{2} \left[\frac{1}{2} \sum_{r=1}^m \sum_{j=1}^3 \mu_j \mathbf{a}(\mathbf{y}_{p\lambda}^{(jr)}, \tau_p) + \sum_{j=1}^2 \rho_j \mathbf{a}(\mathbf{z}_{p\nu}^{(j)}, \Delta_{p\xi}^{(j)}) \right] + \\
& + \sum_{i_1=1}^m \Sigma_{i_1}(\mathbf{y}_p, \tau_p) \hat{J}_{(1)\tau_{p+1}, \tau_p}^{(i_1)} + \frac{1}{\sqrt{\Delta}} \sum_{i_1, i_2=1}^m \sum_{j=1}^4 \eta_j \Sigma_{i_1}(\mathbf{y}_{p\omega}^{(ji_2)}, \tau_p) \hat{J}_{(11)\tau_{p+1}, \tau_p}^{(i_2 i_1)} + \\
& + \frac{1}{\Delta} \sum_{i_1=1}^m \left[\sum_{j=1}^2 \pi_j \mathbf{a}(\mathbf{u}_{p\sigma}^{(ji_1)}, \tau_p) \hat{J}_{(10)\tau_{p+1}, \tau_p}^{(i_1)} + \right.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \left(\frac{1}{2} \sum_{r=1}^m \sum_{j=1}^3 \mu_j \Sigma_{i_1}(\mathbf{y}_{p\lambda}^{(jr)}, \tau_p) + \sum_{j=1}^2 \zeta_j \Sigma_{i_1}(\mathbf{z}_{p\delta}^{(j)}, \Delta_{p\gamma}^{(j)}) \right) \hat{J}_{(01)\tau_{p+1}, \tau_p}^{(i_1)} \Big] + \\
& \quad + \frac{1}{\Delta} \sum_{i_1, i_2, i_3=1}^m \sum_{j=1}^4 \eta_j \mathbf{b}_{i_1 i_2}(\mathbf{y}_{p\omega}^{(ji_3)}, \tau_p) \hat{J}_{(111)\tau_{p+1}, \tau_p}^{(i_3 i_2 i_1)} + \\
& \quad + \frac{1}{\Delta \sqrt{\Delta}} \sum_{i_1, i_2=1}^m \left[\sum_{j=1}^4 \eta_j \mathbf{g}_{i_1}(\mathbf{y}_{p\omega}^{(ji_2)}, \tau_p) \hat{J}_{(101)\tau_{p+1}, \tau_p}^{(i_2 i_1)} + \right. \\
& \quad \left. + \sum_{j=1}^4 \eta_j \mathbf{h}_{i_1}(\mathbf{y}_{p\omega}^{(ji_2)}, \tau_p) \hat{J}_{(110)\tau_{p+1}, \tau_p}^{(i_2 i_1)} + \right. \\
& \quad + \left. \left(\frac{1}{2} \sum_{r=1}^m \sum_{j=1}^3 \mu_j \mathbf{k}_{i_1 i_2}(\mathbf{y}_{p\lambda}^{(jr)}, \tau_p) + \sum_{j=1}^2 \zeta_j \mathbf{k}_{i_1 i_2}(\mathbf{z}_{p\delta}^{(j)}, \Delta_{p\gamma}^{(j)}) \right) \hat{J}_{(011)\tau_{p+1}, \tau_p}^{(i_2 i_1)} \right] + \\
& \quad + \frac{1}{\Delta \sqrt{\Delta}} \sum_{i_1, i_2, i_3 i_4=1}^m \sum_{j=1}^4 \eta_j \mathbf{c}_{i_1 i_2 i_3}(\mathbf{y}_{p\omega}^{(ji_4)}, \tau_p) \hat{J}_{(1111)\tau_{p+1}, \tau_p}^{(i_4 i_3 i_2 i_1)}. \tag{7.110}
\end{aligned}$$

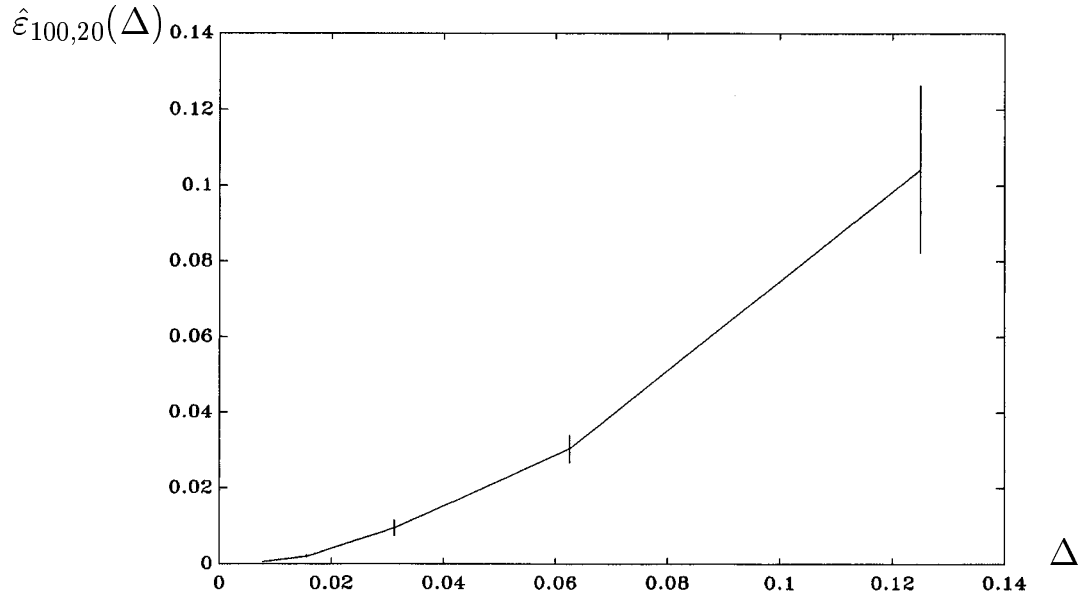


Рис. 7.13. Результат численного эксперимента 7.13.

Численный эксперимент 7.13 (рис. 7.13). Повторить численный эксперимент 7.11 для конечно-разностного сильного численного

метода порядка точности 2.0 вида (7.109). Для моделирования стохастических интегралов Ито $I_{1(p+1)\Delta, p\Delta}^{(1)}$, $p = 0, 1, \dots, N - 1$, использовать формулу (7.97), а для моделирования стохастических интегралов $I_{10(p+1)\Delta, p\Delta}^{(11)}$, $I_{01(p+1)\Delta, p\Delta}^{(11)}$, $p = 0, 1, \dots, N - 1$, — аппроксимацию

$$I_{10(p+1)\Delta, p\Delta}^{(11)q} = -\frac{\Delta^2}{4} \left[\frac{2}{3} \left(\zeta_0^{(1)} \right)^2 + \frac{1}{\sqrt{3}} \zeta_1^{(1)} \zeta_0^{(1)} - \frac{1}{3\sqrt{5}} \zeta_2^{(1)} \zeta_0^{(1)} + \right. \\ \left. + \sum_{i=1}^q \left(\frac{1}{(2i-1)(2i+3)} \left(\zeta_i^{(1)} \right)^2 - \frac{1}{(2i+3)\sqrt{(2i+1)(2i+5)}} \zeta_i^{(1)} \zeta_{i+2}^{(1)} \right) - 1 \right]$$

и соотношение

$$I_{01(p+1)\Delta, p\Delta}^{(11)q} = I_{1(p+1)\Delta, p\Delta}^{(1)} I_{0(p+1)\Delta, p\Delta}^{(1)} - I_{10(p+1)\Delta, p\Delta}^{(11)q} + \frac{\Delta^2}{2}$$

при $q = 1$; $\zeta_{j(p+1)\Delta, p\Delta}^{(1)} \stackrel{\text{def}}{=} \zeta_j^{(1)}$, $j = 0, 1, \dots, q + 2$, — независимые стандартные гауссовские случайные величины.

Представленные в разд. 7.7.4 численные методы аппроксимируют решение стохастического дифференциального уравнения Ито (7.18) с учетом слагаемых второго порядка малости по систематической и случайной составляющим. Поэтому данные методы можно рассматривать как обобщения метода Рунге–Кутты второго порядка на класс стохастических дифференциальных уравнений Ито.

В [86. С. 384] предложен явный одношаговый конечно-разностный сильный численный метод порядка точности 2.0 для случая скалярного ($m = 1$) аддитивного шума. Однако ошибка этого численного метода возрастает при уменьшении шага интегрирования Δ , начиная с $\Delta = 2^{-3}$ (см. [86. С. 385, рис.11.3.1]). Предложенный нами явный конечно-разностный сильный численный метод порядка точности 2.0 вида (7.109), с одной стороны, является более общим (в (7.109) шум предполагается векторным ($m > 1$) и неаддитивным), а, с другой, ошибка численного метода (7.109) уменьшается при уменьшении шага интегрирования Δ , по крайней мере, вплоть до $\Delta = 2^{-7}$ (см. рис. 7.13).

7.7.5 Методы порядка точности 2.5

Для построения явных сильных одношаговых конечно-разностных численных методов порядка 2.5 согласно (7.57) и (7.66) необходимо аппроксимировать конечными разностями в точке $(\mathbf{y}_p, \tau_p)$ следующие функции:

$$G_0^{(i_2)} \Sigma_{i_1}, \quad G_0^{(i_1)} \mathbf{a}, \quad L \Sigma_{i_1}, \quad G_0^{(i_3)} G_0^{(i_2)} \Sigma_{i_1}, \quad (7.111)$$

$$\frac{\Delta^2}{2} L\mathbf{a}, G_0^{(i_2)} L\Sigma_{i_1}, G_0^{(i_2)} G_0^{(i_1)} \mathbf{a}, LG_0^{(i_2)} \Sigma_{i_1}, G_0^{(i_4)} G_0^{(i_3)} G_0^{(i_2)} \Sigma_{i_1}, \quad (7.112)$$

$$G_0^{(i_1)} L\mathbf{a}, L^2 \Sigma_{i_1}, LG_0^{(i_1)} \mathbf{a}, G_0^{(i_3)} LG_0^{(i_2)} \Sigma_{i_1}, G_0^{(i_3)} G_0^{(i_2)} L\Sigma_{i_1}, \\ G_0^{(i_3)} G_0^{(i_2)} G_0^{(i_1)} \mathbf{a}, LG_0^{(i_3)} G_0^{(i_2)} \Sigma_{i_1}, G_0^{(i_5)} G_0^{(i_4)} G_0^{(i_3)} G_0^{(i_2)} \Sigma_{i_1}, \frac{\Delta^3}{6} L^2 \mathbf{a}. \quad (7.113)$$

Введем обозначения:

$$\mathbf{y}_{pr}^{(ji)} = \mathbf{y}_p + \sqrt{\Delta} r_j \Sigma_i(\mathbf{y}_p, \tau_p), \quad \mathbf{z}_{pq}^{(j)} = \mathbf{y}_p + \Delta q_j \mathbf{a}(\mathbf{y}_p, \tau_p),$$

$$\mathbf{u}_{ps}^{(ji)} = \mathbf{y}_p + \Delta s_j \Sigma_i(\mathbf{y}_p, \tau_p), \quad \Delta_{ph}^{(j)} = \tau_p + h_j \Delta,$$

где $r_j = \beta_j, \omega_j, \varepsilon_j, \lambda_j, \phi_j$; $q_j = \chi_j, \nu_j, \delta_j$; $s_j = \sigma_j, \beta_j$; $h_j = \gamma_j, \chi_j, \xi_j$.

С помощью тейлоровских аппроксимаций (7.78)–(7.87) имеем следующие аппроксимации функций (7.111) в точке $(\mathbf{y}_p, \tau_p)$:

$$G_0^{(i_2)} \Sigma_{i_1}(\mathbf{y}_p, \tau_p) = \frac{1}{\sqrt{\Delta}} \sum_{j=1}^4 \theta_j \Sigma_{i_1}(\mathbf{y}_{p\varepsilon}^{(ji_2)}, \tau_p) + O(\Delta^2), \quad (7.114)$$

$$G_0^{(i_1)} \mathbf{a}(\mathbf{y}_p, \tau_p) = \frac{1}{\Delta} \sum_{j=1}^2 \alpha_j \mathbf{a}(\mathbf{u}_{p\beta}^{(ji_1)}, \tau_p) + O(\Delta^{3/2}), \quad (7.115)$$

$$L\Sigma_{i_1}(\mathbf{y}_p, \tau_p) = \frac{1}{\Delta} \left[\frac{1}{2} \sum_{r=1}^m \sum_{j=1}^5 \psi_j \Sigma_{i_1}(\mathbf{y}_{p\phi}^{(jr)}, \tau_p) + \right. \\ \left. + \sum_{j=1}^3 \varphi_j \Sigma_{i_1}(\mathbf{z}_{p\chi}^{(j)}, \Delta_{p\kappa}^{(j)}) \right] + O(\Delta^{3/2}), \quad (7.116)$$

$$G_0^{(i_3)} G_0^{(i_2)} \Sigma_{i_1}(\mathbf{y}_p, \tau_p) = \frac{1}{\Delta} \sum_{j=1}^4 \theta_j \mathbf{b}_{i_1 i_2}(\mathbf{y}_{p\varepsilon}^{(ji_3)}, \tau_p) + O(\Delta^{3/2}), \quad (7.117)$$

где

$$\mathbf{b}_{i_1 i_2}(\mathbf{y}_p, \tau_p) = \sum_{j=1}^4 \eta_j \Sigma_{i_1}(\mathbf{y}_{p\omega}^{(ji_2)}, \tau_p).$$

Рассмотрим тейлоровские аппроксимации функций (7.112) в точке $(\mathbf{y}_p, \tau_p)$ с помощью соотношений (7.78)–(7.87):

$$\frac{\Delta^2}{2} L\mathbf{a}(\mathbf{y}_p, \tau_p) = \frac{\Delta}{2} \left[\frac{1}{2} \sum_{r=1}^m \sum_{j=1}^5 \psi_j \mathbf{a}(\mathbf{y}_{p\phi}^{(jr)}, \tau_p) + \right. \\ \left. + \sum_{j=1}^3 \varphi_j \mathbf{a}(\mathbf{z}_{p\chi}^{(j)}, \Delta_{p\kappa}^{(j)}) \right] + O(\Delta^{\frac{7}{2}}), \quad (7.118)$$

$$G_0^{(i_2)} L \Sigma_{i_1}(\mathbf{y}_p, \tau_p) = \frac{1}{\Delta \sqrt{\Delta}} \sum_{j=1}^4 \theta_j \mathbf{g}_{i_1}(\mathbf{y}_{p\varepsilon}^{(ji_2)}, \tau_p) + O(\Delta), \quad (7.119)$$

где

$$\mathbf{g}_{i_1}(\mathbf{y}_p, \tau_p) = \frac{1}{2} \sum_{r=1}^m \sum_{j=1}^3 \mu_j \Sigma_{i_1}(\mathbf{y}_{p\lambda}^{(jr)}, \tau_p) + \sum_{j=1}^2 \zeta_j \Sigma_{i_1}(\mathbf{z}_{p\delta}^{(j)}, \Delta_{p\gamma}^{(j)});$$

$$G_0^{(i_2)} G_0^{(i_1)} \mathbf{a}(\mathbf{y}_p, \tau_p) = \frac{1}{\Delta \sqrt{\Delta}} \sum_{j=1}^4 \theta_j \mathbf{h}_{i_1}(\mathbf{y}_{p\varepsilon}^{(ji_2)}, \tau_p) + O(\Delta). \quad (7.120)$$

Здесь

$$\mathbf{h}_{i_1}(\mathbf{y}_p, \tau_p) = \sum_{j=1}^2 \pi_j \mathbf{a}(\mathbf{u}_{p\sigma}^{(ji_1)}, \tau_p);$$

$$LG_0^{(i_2)} \Sigma_{i_1}(\mathbf{y}_p, \tau_p) = \frac{1}{\Delta \sqrt{\Delta}} \left[\frac{1}{2} \sum_{r=1}^m \sum_{j=1}^5 \psi_j \mathbf{k}_{i_1 i_2}(\mathbf{y}_{p\phi}^{(jr)}, \tau_p) + \right.$$

$$\left. + \sum_{j=1}^3 \varphi_j \mathbf{k}_{i_1 i_2}(\mathbf{z}_{p\chi}^{(j)}, \Delta_{p\kappa}^{(j)}) \right] + O(\Delta), \quad (7.121)$$

где

$$\mathbf{k}_{i_1 i_2}(\mathbf{y}_p, \tau_p) = \sum_{j=1}^2 \alpha_j \Sigma_{i_1}(\mathbf{y}_{p\beta}^{(ji_2)}, \tau_p);$$

$$G_0^{(i_4)} G_0^{(i_3)} G_0^{(i_2)} \Sigma_{i_1}(\mathbf{y}_p, \tau_p) = \frac{1}{\Delta \sqrt{\Delta}} \sum_{j=1}^4 \theta_j \mathbf{c}_{i_1 i_2 i_3}(\mathbf{y}_{p\varepsilon}^{(ji_4)}, \tau_p) + O(\Delta); \quad (7.122)$$

$$\mathbf{c}_{i_1 i_2 i_3}(\mathbf{y}_p, \tau_p) = \sum_{j=1}^4 \eta_j \mathbf{k}_{i_1 i_2}(\mathbf{y}_{p\omega}^{(ji_3)}, \tau_p).$$

Рассмотрим конечно-разностные аппроксимации функций (7.113) в точке $(\mathbf{y}_p, \tau_p)$ с помощью тейлоровских аппроксимаций (7.78)–(7.87):

$$L^2 \Sigma_{i_1}(\mathbf{y}_p, \tau_p) = \frac{1}{\Delta^2} \left[\frac{1}{2} \sum_{r=1}^m \sum_{j=1}^5 \psi_j \mathbf{g}_{i_1}(\mathbf{y}_{p\phi}^{(jr)}, \tau_p) + \right.$$

$$\left. + \sum_{j=1}^3 \varphi_j \mathbf{g}_{i_1}(\mathbf{z}_{p\chi}^{(j)}, \Delta_{p\kappa}^{(j)}) \right] + O(\sqrt{\Delta}), \quad (7.123)$$

$$LG_0^{(i_1)} \mathbf{a}(\mathbf{y}_p, \tau_p) = \frac{1}{\Delta^2} \left[\frac{1}{2} \sum_{r=1}^m \sum_{j=1}^5 \psi_j \mathbf{h}_{i_1}(\mathbf{y}_{p\phi}^{(jr)}, \tau_p) + \right.$$

$$\left. + \sum_{j=1}^3 \varphi_j \mathbf{h}_{i_1}(\mathbf{z}_{p\chi}^{(j)}, \Delta_{p\kappa}^{(j)}) \right] + O(\sqrt{\Delta}), \quad (7.124)$$

$$G_0^{(i_1)} L \mathbf{a}(\mathbf{y}_p, \tau_p) = \frac{1}{\Delta^2} \sum_{j=1}^2 \alpha_j \mathbf{q}(\mathbf{u}_{p\beta}^{(ji_1)}, \tau_p) + O(\sqrt{\Delta}), \quad (7.125)$$

$$\begin{aligned} \frac{\Delta^3}{6} L^2 \mathbf{a}(\mathbf{y}_p, \tau_p) &= \frac{\Delta}{6} \left[\frac{1}{2} \sum_{r=1}^m \sum_{j=1}^5 \psi_j \mathbf{q}(\mathbf{y}_{p\phi}^{(jr)}, \tau_p) + \right. \\ &\quad \left. + \sum_{j=1}^3 \varphi_j \mathbf{q}(\mathbf{z}_{p\chi}^{(j)}, \Delta_{p\kappa}^{(j)}) \right] + O(\Delta^{\frac{7}{2}}), \end{aligned} \quad (7.126)$$

$$\mathbf{q}(\mathbf{y}_p, \tau_p) = \frac{1}{2} \sum_{r=1}^m \sum_{j=1}^3 \mu_j \mathbf{a}(\mathbf{y}_{p\lambda}^{(jr)}, \tau_p) + \sum_{j=1}^2 \zeta_j \mathbf{a}(\mathbf{z}_{p\delta}^{(j)}, \Delta_{p\gamma}^{(j)}); \quad (7.127)$$

$$G_0^{(i_3)} L G_0^{(i_2)} \Sigma_{i_1}(\mathbf{y}_p, \tau_p) = \frac{1}{\Delta^2} \sum_{j=1}^4 \theta_j \mathbf{s}_{i_1 i_2}(\mathbf{y}_{p\varepsilon}^{(ji_3)}, \tau_p) + O(\sqrt{\Delta}); \quad (7.128)$$

$$\mathbf{s}_{i_1 i_2}(\mathbf{y}_p, \tau_p) = \frac{1}{2} \sum_{r=1}^m \sum_{j=1}^3 \mu_j \mathbf{k}_{i_1 i_2}(\mathbf{y}_{p\lambda}^{(jr)}, \tau_p) + \sum_{j=1}^2 \zeta_j \mathbf{k}_{i_1 i_2}(\mathbf{z}_{p\delta}^{(j)}, \Delta_{p\gamma}^{(j)});$$

$$G_0^{(i_5)} G_0^{(i_4)} G_0^{(i_3)} G_0^{(i_2)} \Sigma_{i_1}(\mathbf{y}_p, \tau_p) = \frac{1}{\Delta^2} \sum_{j=1}^4 \theta_j \mathbf{d}_{i_1 i_2 i_3 i_4}(\mathbf{y}_{p\varepsilon}^{(ji_5)}, \tau_p) + O(\sqrt{\Delta}); \quad (7.129)$$

$$\mathbf{d}_{i_1 i_2 i_3 i_4}(\mathbf{y}_p, \tau_p) = \sum_{j=1}^4 \eta_j \mathbf{o}_{i_1 i_2 i_3}(\mathbf{y}_{p\omega}^{(ji_4)}, \tau_p);$$

$$\mathbf{o}_{i_1 i_2 i_3}(\mathbf{y}_p, \tau_p) = \sum_{j=1}^2 \alpha_j \mathbf{k}_{i_1 i_2}(\mathbf{y}_{p\beta}^{(ji_3)}, \tau_p);$$

$$G_0^{(i_3)} G_0^{(i_2)} G_0^{(i_1)} \mathbf{a}(\mathbf{y}_p, \tau_p) = \frac{1}{\Delta^2} \sum_{j=1}^4 \theta_j \mathbf{v}_{i_1 i_2}(\mathbf{y}_{p\varepsilon}^{(ji_3)}, \tau_p) + O(\sqrt{\Delta}); \quad (7.130)$$

$$\mathbf{v}_{i_1 i_2}(\mathbf{y}_p, \tau_p) = \sum_{j=1}^4 \eta_j \mathbf{h}_{i_1}(\mathbf{y}_{p\omega}^{(ji_2)}, \tau_p);$$

$$G_0^{(i_3)} G_0^{(i_2)} L \Sigma_{i_1}(\mathbf{y}_p, \tau_p) = \frac{1}{\Delta^2} \sum_{j=1}^4 \theta_j \mathbf{e}_{i_1 i_2}(\mathbf{y}_{p\varepsilon}^{(ji_3)}, \tau_p) + O(\sqrt{\Delta}); \quad (7.131)$$

$$\mathbf{e}_{i_1 i_2}(\mathbf{y}_p, \tau_p) = \sum_{j=1}^4 \eta_j \mathbf{g}_{i_1}(\mathbf{y}_{p\omega}^{(ji_2)}, \tau_p);$$

$$\begin{aligned} L G_0^{(i_3)} G_0^{(i_2)} \Sigma_{i_1}(\mathbf{y}_p, \tau_p) &= \frac{1}{\Delta^2} \left[\frac{1}{2} \sum_{r=1}^m \sum_{j=1}^5 \psi_j \mathbf{r}_{i_1 i_2 i_3}(\mathbf{y}_{p\phi}^{(jr)}, \tau_p) + \right. \\ &\quad \left. + \sum_{j=1}^3 \varphi_j \mathbf{r}_{i_1 i_2 i_3}(\mathbf{z}_{p\chi}^{(j)}, \Delta_{p\kappa}^{(j)}) \right] + O(\sqrt{\Delta}); \end{aligned} \quad (7.132)$$

$$\mathbf{r}_{i_1 i_2 i_3}(\mathbf{y}_p, \tau_p) = \sum_{j=1}^2 \alpha_j \mathbf{k}_{i_1 i_2}(\mathbf{y}_{p\beta}^{(ji_3)}, \tau_p).$$

После подстановки соотношений (7.114)–(7.132) в (7.57) и отбрасывания остаточных членов, получим явный одношаговый сильный конечно-разностный численный метод порядка точности 2.5 вида

$$\begin{aligned} \mathbf{y}_{p+1} = & \mathbf{y}_p + \mathbf{a}(\mathbf{y}_p, \tau_p) \Delta + \frac{\Delta}{2} \left[\frac{1}{2} \sum_{r=1}^m \sum_{j=1}^5 \psi_j \mathbf{a}(\mathbf{y}_{p\phi}^{(jr)}, \tau_p) + \sum_{j=1}^3 \varphi_j \mathbf{a}(\mathbf{z}_{p\chi}^{(j)}, \Delta_{p\kappa}^{(j)}) \right] + \\ & + \frac{\Delta}{6} \left[\frac{1}{2} \sum_{r=1}^m \sum_{j=1}^5 \psi_j \mathbf{q}(\mathbf{y}_{p\phi}^{(jr)}, \tau_p) + \sum_{j=1}^3 \varphi_j \mathbf{q}(\mathbf{z}_{p\chi}^{(j)}, \Delta_{p\kappa}^{(j)}) \right] + \\ & + \sum_{i_1=1}^m \Sigma_{i_1}(\mathbf{y}_p, \tau_p) \hat{I}_{0\tau_{p+1}, \tau_p}^{(i_1)} + \frac{1}{\sqrt{\Delta}} \sum_{i_1, i_2=1}^m \sum_{j=1}^4 \theta_j \Sigma_{i_1}(\mathbf{y}_{p\varepsilon}^{(ji_2)}, \tau_p) \hat{I}_{00\tau_{p+1}, \tau_p}^{(i_2 i_1)} + \\ & + \frac{1}{\Delta} \sum_{i_1=1}^m \left[\sum_{j=1}^2 \alpha_j \mathbf{a}(\mathbf{u}_{p\beta}^{(ji_1)}, \tau_p) \left(\Delta \hat{I}_{0\tau_{p+1}, \tau_p}^{(i_1)} + \hat{I}_{1\tau_{p+1}, \tau_p}^{(i_1)} \right) - \right. \\ & - \left. \left(\frac{1}{2} \sum_{r=1}^m \sum_{j=1}^5 \psi_j \Sigma_{i_1}(\mathbf{y}_{p\phi}^{(jr)}, \tau_p) + \sum_{j=1}^3 \varphi_j \Sigma_{i_1}(\mathbf{z}_{p\chi}^{(j)}, \Delta_{p\kappa}^{(j)}) \right) \hat{I}_{1\tau_{p+1}, \tau_p}^{(i_1)} \right] + \\ & + \frac{1}{\Delta} \sum_{i_1, i_2, i_3=1}^m \sum_{j=1}^4 \theta_j \mathbf{b}_{i_1 i_2}(\mathbf{y}_{p\varepsilon}^{(ji_3)}, \tau_p) \hat{I}_{000\tau_{p+1}, \tau_p}^{(i_3 i_2 i_1)} + \\ & + \frac{1}{\Delta \sqrt{\Delta}} \sum_{i_1, i_2=1}^m \left[\sum_{j=1}^4 \theta_j \mathbf{g}_{i_1}(\mathbf{y}_{p\varepsilon}^{(ji_2)}, \tau_p) \left(\hat{I}_{10\tau_{p+1}, \tau_p}^{(i_2 i_1)} - \hat{I}_{01\tau_{p+1}, \tau_p}^{(i_2 i_1)} \right) + \right. \\ & + \sum_{j=1}^4 \theta_j \mathbf{h}_{i_1}(\mathbf{y}_{p\varepsilon}^{(ji_2)}, \tau_p) \left(\hat{I}_{01\tau_{p+1}, \tau_p}^{(i_2 i_1)} + \Delta \hat{I}_{00\tau_{p+1}, \tau_p}^{(i_2 i_1)} \right) - \\ & - \left. \left(\frac{1}{2} \sum_{r=1}^m \sum_{j=1}^5 \psi_j \mathbf{k}_{i_1 i_2}(\mathbf{y}_{p\phi}^{(jr)}, \tau_p) + \sum_{j=1}^3 \varphi_j \mathbf{k}_{i_1 i_2}(\mathbf{z}_{p\chi}^{(j)}, \Delta_{p\kappa}^{(j)}) \right) \hat{I}_{10\tau_{p+1}, \tau_p}^{(i_2 i_1)} \right] + \\ & + \frac{1}{\Delta \sqrt{\Delta}} \sum_{i_1, i_2, i_3, i_4=1}^m \sum_{j=1}^4 \theta_j \mathbf{c}_{i_1 i_2 i_3}(\mathbf{y}_{p\varepsilon}^{(ji_4)}, \tau_p) \hat{I}_{0000\tau_{p+1}, \tau_p}^{(i_4 i_3 i_2 i_1)} + \\ & + \frac{1}{\Delta^2} \sum_{i_1=1}^m \left[\sum_{j=1}^2 \alpha_j \mathbf{q}(\mathbf{u}_{p\beta}^{(ji_1)}, \tau_p) \left(\frac{1}{2} \hat{I}_{2\tau_{p+1}, \tau_p}^{(i_1)} + \Delta \hat{I}_{1\tau_{p+1}, \tau_p}^{(i_1)} + \frac{\Delta^2}{2} \hat{I}_{0\tau_{p+1}, \tau_p}^{(i_1)} \right) + \right. \\ & + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} \sum_{r=1}^m \sum_{j=1}^5 \psi_j \mathbf{g}_{i_1}(\mathbf{y}_{p\phi}^{(jr)}, \tau_p) + \sum_{j=1}^3 \varphi_j \mathbf{g}_{i_1}(\mathbf{z}_{p\chi}^{(j)}, \Delta_{p\kappa}^{(j)}) \right) \hat{I}_{2\tau_{p+1}, \tau_p}^{(i_1)} - \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& - \left(\frac{1}{2} \sum_{r=1}^m \sum_{j=1}^5 \psi_j \mathbf{h}_{i_1}(\mathbf{y}_{p\phi}^{(jr)}, \tau_p) + \sum_{j=1}^3 \varphi_j \mathbf{h}_{i_1}(\mathbf{z}_{p\chi}^{(j)}, \Delta_{p\kappa}^{(j)}) \right) \times \\
& \quad \times \left(\hat{I}_{2\tau_{p+1}, \tau_p}^{(i_1)} + \Delta \hat{I}_{1\tau_{p+1}, \tau_p} \right) \Big] + \\
& + \frac{1}{\Delta^2} \sum_{i_1, i_2, i_3=1}^m \left[\sum_{j=1}^4 \theta_j \mathbf{s}_{i_1 i_2}(\mathbf{y}_{p\varepsilon}^{(ji_3)}, \tau_p) \left(\hat{I}_{100\tau_{p+1}, \tau_p}^{(i_3 i_2 i_1)} - \hat{I}_{010\tau_{p+1}, \tau_p}^{(i_3 i_2 i_1)} \right) + \right. \\
& \quad + \sum_{j=1}^4 \theta_j \mathbf{e}_{i_1 i_2}(\mathbf{y}_{p\varepsilon}^{(ji_3)}, \tau_p) \left(\hat{I}_{010\tau_{p+1}, \tau_p}^{(i_3 i_2 i_1)} - \hat{I}_{001\tau_{p+1}, \tau_p}^{(i_3 i_2 i_1)} \right) + \\
& \quad + \sum_{j=1}^4 \theta_j \mathbf{v}_{i_1 i_2}(\mathbf{y}_{p\varepsilon}^{(ji_3)}, \tau_p) \left(\Delta \hat{I}_{000\tau_{p+1}, \tau_p}^{(i_3 i_2 i_1)} + \hat{I}_{001\tau_{p+1}, \tau_p}^{(i_3 i_2 i_1)} \right) - \\
& \quad - \left. \left(\frac{1}{2} \sum_{r=1}^m \sum_{j=1}^5 \psi_j \mathbf{r}_{i_1 i_2 i_3}(\mathbf{y}_{p\phi}^{(jr)}, \tau_p) + \sum_{j=1}^3 \varphi_j \mathbf{r}_{i_1 i_2 i_3}(\mathbf{z}_{p\chi}^{(j)}, \Delta_{p\kappa}^{(j)}) \right) \hat{I}_{100\tau_{p+1}, \tau_p}^{(i_3 i_2 i_1)} \right] + \\
& + \frac{1}{\Delta^2} \sum_{i_1, i_2, i_3, i_4, i_5=1}^m \sum_{j=1}^4 \theta_j \mathbf{d}_{i_1 i_2 i_3 i_4}(\mathbf{y}_{p\varepsilon}^{(ji_5)}, \tau_p) \hat{I}_{00000\tau_{p+1}, \tau_p}^{(i_5 i_4 i_3 i_2 i_1)}. \tag{7.133}
\end{aligned}$$

Рассмотрим теперь численный метод, аналогичный (7.133) и основанный на разложении Тейлора–Ито в форме Вагнера и Платена:

$$\begin{aligned}
\mathbf{y}_{p+1} = & \mathbf{y}_p + \mathbf{a}(\mathbf{y}_p, \tau_p) \Delta + \frac{\Delta}{2} \left[\frac{1}{2} \sum_{r=1}^m \sum_{j=1}^5 \psi_j \mathbf{a}(\mathbf{y}_{p\phi}^{(jr)}, \tau_p) + \sum_{j=1}^3 \varphi_j \mathbf{a}(\mathbf{z}_{p\chi}^{(j)}, \Delta_{p\kappa}^{(j)}) \right] + \\
& + \frac{\Delta}{6} \left[\frac{1}{2} \sum_{r=1}^m \sum_{j=1}^5 \psi_j \mathbf{q}(\mathbf{y}_{p\phi}^{(jr)}, \tau_p) + \sum_{j=1}^3 \varphi_j \mathbf{q}(\mathbf{z}_{p\chi}^{(j)}, \Delta_{p\kappa}^{(j)}) \right] + \\
& + \sum_{i_1=1}^m \Sigma_{i_1}(\mathbf{y}_p, \tau_p) \hat{J}_{(1)\tau_{p+1}, \tau_p}^{(i_1)} + \frac{1}{\sqrt{\Delta}} \sum_{i_1, i_2=1}^m \sum_{j=1}^4 \theta_j \Sigma_{i_1}(\mathbf{y}_{p\varepsilon}^{(ji_2)}, \tau_p) \hat{J}_{(11)\tau_{p+1}, \tau_p}^{(i_2 i_1)} + \\
& + \frac{1}{\Delta} \sum_{i_1=1}^m \left[\sum_{j=1}^2 \alpha_j \mathbf{a}(\mathbf{u}_{p\beta}^{(ji_1)}, \tau_p) \hat{J}_{(10)\tau_{p+1}, \tau_p}^{(i_1)} + \right. \\
& + \left. \left(\frac{1}{2} \sum_{r=1}^m \sum_{j=1}^5 \psi_j \Sigma_{i_1}(\mathbf{y}_{p\phi}^{(jr)}, \tau_p) + \sum_{j=1}^3 \varphi_j \Sigma_{i_1}(\mathbf{z}_{p\chi}^{(j)}, \Delta_{p\kappa}^{(j)}) \right) \hat{J}_{(01)\tau_{p+1}, \tau_p}^{(i_1)} \right] + \\
& + \frac{1}{\Delta} \sum_{i_1, i_2, i_3=1}^m \sum_{j=1}^4 \theta_j \mathbf{b}_{i_1 i_2}(\mathbf{y}_{p\varepsilon}^{(ji_3)}, \tau_p) \hat{J}_{(111)\tau_{p+1}, \tau_p}^{(i_3 i_2 i_1)} + \\
& + \frac{1}{\Delta \sqrt{\Delta}} \sum_{i_1, i_2=1}^m \left[\sum_{j=1}^4 \theta_j \mathbf{g}_{i_1}(\mathbf{y}_{p\varepsilon}^{(ji_2)}, \tau_p) \hat{J}_{(101)\tau_{p+1}, \tau_p}^{(i_2 i_1)} + \right.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \sum_{j=1}^4 \theta_j \mathbf{h}_{i_1}(\mathbf{y}_{p\varepsilon}^{(ji_2)}, \tau_p) \hat{J}_{(110)\tau_{p+1}, \tau_p}^{(i_2 i_1)} + \\
& + \left(\frac{1}{2} \sum_{r=1}^m \sum_{j=1}^5 \psi_j \mathbf{k}_{i_1 i_2}(\mathbf{y}_{p\phi}^{(jr)}, \tau_p) + \sum_{j=1}^3 \varphi_j \mathbf{k}_{i_1 i_2}(\mathbf{z}_{p\chi}^{(j)}, \Delta_{p\kappa}^{(j)}) \right) \hat{J}_{(011)\tau_{p+1}, \tau_p}^{(i_2 i_1)} \Big] + \\
& + \frac{1}{\Delta \sqrt{\Delta}} \sum_{i_1, i_2, i_3, i_4=1}^m \sum_{j=1}^4 \theta_j \mathbf{c}_{i_1 i_2 i_3}(\mathbf{y}_{p\varepsilon}^{(ji_4)}, \tau_p) \hat{J}_{(1111)\tau_{p+1}, \tau_p}^{(i_4 i_3 i_2 i_1)} + \\
& + \frac{1}{\Delta^2} \sum_{i_1=1}^m \left[\sum_{j=1}^2 \alpha_j \mathbf{q}(\mathbf{u}_{p\beta}^{(ji_1)}, \tau_p) \hat{J}_{(100)\tau_{p+1}, \tau_p}^{(i_1)} + \right. \\
& + \left(\frac{1}{2} \sum_{r=1}^m \sum_{j=1}^5 \psi_j \mathbf{g}_{i_1}(\mathbf{y}_{p\phi}^{(jr)}, \tau_p) + \sum_{j=1}^3 \varphi_j \mathbf{g}_{i_1}(\mathbf{z}_{p\chi}^{(j)}, \Delta_{p\kappa}^{(j)}) \right) \hat{J}_{(001)\tau_{p+1}, \tau_p}^{(i_1)} + \\
& + \left. \left(\frac{1}{2} \sum_{r=1}^m \sum_{j=1}^5 \psi_j \mathbf{h}_{i_1}(\mathbf{y}_{p\phi}^{(jr)}, \tau_p) + \sum_{j=1}^3 \varphi_j \mathbf{h}_{i_1}(\mathbf{z}_{p\chi}^{(j)}, \Delta_{p\kappa}^{(j)}) \right) \hat{J}_{(010)\tau_{p+1}, \tau_p} \right] + \\
& + \frac{1}{\Delta^2} \sum_{i_1, i_2, i_3=1}^m \left[\sum_{j=1}^4 \theta_j \mathbf{s}_{i_1 i_2}(\mathbf{y}_{p\varepsilon}^{(ji_3)}, \tau_p) \hat{J}_{(1011)\tau_{p+1}, \tau_p}^{(i_3 i_2 i_1)} + \right. \\
& + \sum_{j=1}^4 \theta_j \mathbf{e}_{i_1 i_2}(\mathbf{y}_{p\varepsilon}^{(ji_3)}, \tau_p) \hat{J}_{(1101)\tau_{p+1}, \tau_p}^{(i_3 i_2 i_1)} + \\
& + \sum_{j=1}^4 \theta_j \mathbf{v}_{i_1 i_2}(\mathbf{y}_{p\varepsilon}^{(ji_3)}, \tau_p) \hat{J}_{(1110)\tau_{p+1}, \tau_p}^{(i_3 i_2 i_1)} + \\
& + \left. \left(\frac{1}{2} \sum_{r=1}^m \sum_{j=1}^5 \psi_j \mathbf{r}_{i_1 i_2 i_3}(\mathbf{y}_{p\phi}^{(jr)}, \tau_p) + \sum_{j=1}^3 \varphi_j \mathbf{r}_{i_1 i_2 i_3}(\mathbf{z}_{p\chi}^{(j)}, \Delta_{p\kappa}^{(j)}) \right) \hat{J}_{(0111)\tau_{p+1}, \tau_p}^{(i_3 i_2 i_1)} \right] + \\
& + \frac{1}{\Delta^2} \sum_{i_1, i_2, i_3, i_4, i_5=1}^m \sum_{j=1}^4 \theta_j \mathbf{d}_{i_1 i_2 i_3 i_4}(\mathbf{y}_{p\varepsilon}^{(ji_5)}, \tau_p) \hat{J}_{(11111)\tau_{p+1}, \tau_p}^{(i_5 i_4 i_3 i_2 i_1)}. \tag{7.134}
\end{aligned}$$

7.7.6 О сходимости явных сильных одношаговых конечно-разностных численных методов

В заключение разд. 7.7 коснемся сходимости явных сильных одношаговых конечно-разностных численных методов. Для этого запишем общее представление такой численной схемы, основанной на унифицированном разложении Тейлора–Ито, и точное представление решения стохастического дифференциального уравнения Ито (7.18):

$$\mathbf{u}_{\tau_{p+1}} = \mathbf{u}_{\tau_p} + \sum_{q=1}^r \sum_{(k, j, l_1, \dots, l_k) \in \mathcal{D}'_q} \frac{(\Delta_p)^j}{j!} {}^{(k)}F_{l_1 \dots l_k, j} \{ \mathbf{u}_{\tau_p} \}^k {}^{(k)}\hat{I}_{l_1 \dots l_k \tau_{p+1}, \tau_p}, \tag{7.135}$$

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_{\tau_{p+1}} = \mathbf{x}_{\tau_p} + \sum_{q=1}^r \sum_{(k,j,l_1,\dots,l_k) \in \mathcal{D}'_q} \frac{(\Delta_p)^j}{j!} {}^{(k)}G_{l_1} \dots G_{l_k} L^j \{\mathbf{x}_{\tau_p}\} \cdot {}^{(k)}I_{l_1 \dots l_k \tau_{p+1}, \tau_p} + \\ + H'_{r+1, \tau_{p+1}, \tau_p} \text{ с в.1,} \end{aligned} \quad (7.136)$$

где $\Delta_p \stackrel{\text{def}}{=} \tau_{p+1} - \tau_p$;

$${}^{(k)}F_{l_1 \dots l_k, j} \{\mathbf{x}\} = \left\| F_{l_1 \dots l_k, j}^{(i_1 \dots i_k)}(\mathbf{x}) \right\|_{i_1, \dots, i_k=1}^m;$$

$F_{l_1 \dots l_k, j}^{(i_1 \dots i_k)}(\mathbf{x})$ — конечно-разностная аппроксимация функции

$$G_{l_1}^{(i_1)} \dots G_{l_k}^{(i_k)} L^j \mathbf{x};$$

остальные обозначения, входящие в (7.135), (7.136), соответствуют обозначениям в формулах (7.21), (7.23).

Положим для всех $t \in [0, T] : z_t \stackrel{\text{def}}{=} \mathbf{M} \{ |\mathbf{u}_t - \mathbf{x}_t|^2 \}$, где $\mathbf{u}_t$, $t \in [\tau_p, \tau_{p+1}]$, определяется равенством (7.135), в котором необходимо заменить τ_{p+1} на t .

Сформулируем утверждение о сходимости численной схемы (7.135).

Теорема 7.6. Пусть выполнены условия теоремы 7.2, а также следующие условия:

1. Случайные величины $F_{l_1 \dots l_k, j}^{(i_1 \dots i_k)}(\mathbf{u}_{\tau_g})$ $\mathcal{F}_{\tau_g}$ -измеримы.
2. При всех $p = 0, 1, \dots, N-1$; $i_1, \dots, i_k = 1, \dots, m$; $(k, j, l_1, \dots, l_k) \in \bigcup_{q=1}^r \mathcal{D}'_q$ случайные величины $F_{l_1 \dots l_k, j}^{(i_1 \dots i_k)}(\mathbf{u}_{\tau_p})$ удовлетворяют условию

$$\mathbf{M} \left\{ \max_{0 \leq p \leq N} \left| F_{l_1 \dots l_k, j}^{(i_1 \dots i_k)}(\mathbf{u}_{\tau_p}) - G_{l_1}^{(i_1)} \dots G_{l_k}^{(i_k)} L^j \mathbf{u}_{\tau_p} \right|^2 \right\} \leq C \Delta^{r+1-k-2 \left(j + \sum_{i=1}^k l_i \right) + 1_{\{k=0\}}}, \quad (7.137)$$

где $C < \infty$ — постоянная.

3. $\mathbf{M} \{ |\mathbf{u}_0 - \mathbf{x}_0|^2 \} \leq C_1 \Delta^r$.

Тогда справедлива оценка $z_T \leq C_1 \Delta^r$, где $C_1 < \infty$; $\mathbf{x}_t$ — решение стохастического дифференциального уравнения Ито (7.18), т. е. численный метод (7.135) является методом с порядком сильной сходимости, равным $r/2$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Согласно (7.135), (7.136) имеем

$$\mathbf{u}_s - \mathbf{x}_s = \mathbf{u}_0 - \mathbf{x}_0 + \sum_{q=1}^r \sum_{(k,j,l_1,\dots,l_k) \in \mathcal{D}'_q} \left(\sum_{g=0}^{n_s-1} Q_{j l_1 \dots l_k \tau_{g+1}, \tau_g} + \right.$$

$$+ Q_{jl_1 \dots l_{k_s, \tau_{n_s}}}) - \sum_{g=0}^{n_s-1} H'_{r+1, \tau_{g+1}, \tau_g} - H'_{r+1, s, \tau_{n_s}},$$

где $Q_{jl_1 \dots l_{k\theta, t}} = X_{jl_1 \dots l_{k\theta, t}} + Y_{jl_1 \dots l_{k\theta, t}} + Z_{jl_1 \dots l_{k\theta, t}}$; $n_s \stackrel{\text{def}}{=} \max_p \{p : \tau_p \leq s\}$;

$$X_{jl_1 \dots l_{k\theta, t}} \stackrel{\text{def}}{=} \frac{(\theta - t)^j}{j!} [{}^{(k)}F_{l_1 \dots l_k, j} \{\mathbf{u}_t\} - {}^{(k)}G_{l_1} \dots G_{l_k} L^j \{\mathbf{u}_t\}] \cdot {}^k ({}^{(k)}\hat{I}_{l_1 \dots l_{k\theta, t}});$$

$$Y_{jl_1 \dots l_{k\theta, t}} \stackrel{\text{def}}{=} \frac{(\theta - t)^j}{j!} [{}^{(k)}G_{l_1} \dots G_{l_k} L^j \{\mathbf{u}_t\} - {}^{(k)}G_{l_1} \dots G_{l_k} L^j \{\mathbf{x}_t\}] \cdot {}^k ({}^{(k)}\hat{I}_{l_1 \dots l_{k\theta, t}});$$

$$Z_{jl_1 \dots l_{k\theta, t}} \stackrel{\text{def}}{=} \frac{(\theta - t)^j}{j!} {}^{(k)}G_{l_1} \dots G_{l_k} L^j \{\mathbf{x}_t\} \cdot ({}^{(k)}\hat{I}_{l_1 \dots l_{k\theta, t}} - {}^{(k)}I_{l_1 \dots l_{k\theta, t}});$$

остаточный член $H'_{r+1, s, t}$ имеет вид (7.19), а $\mathbf{u}_s$ определяется формулой (7.135) при $\tau_{p+1} = s$.

Далее, несколько модифицируя доказательство теоремы 7.2, в условиях теоремы 7.6 приходим к следующему неравенству:

$$z_T \leq C_2 \Delta^r + C_3 \int_0^T z_u du, \quad C_2, C_3 < \infty,$$

из которого согласно неравенству Гронуолла получаем

$$z_T \leq C_1 \Delta^r.$$

Теорема доказана. $\square$

Отметим, что аналоги теоремы 7.6 могут быть сформулированы для явных одношаговых конечно-разностных численных методов, основанных на разложении Тейлора–Ито в форме Вагнера и Платена и разложении Тейлора–Стратоновича в форме Клоедена и Платена. Эти теоремы можно найти, например, в [86].

Отметим также, что проверка условия (7.137) для каждого конкретного конечно-разностного численного метода не представляет особого труда, если коэффициенты диффузии и сноса стохастического дифференциального уравнения Ито (7.18) являются достаточно гладкими функциями своих аргументов. Необходимая для сходимости численного метода степень гладкости этих функций очевидно определяется структурой конкретных конечно-разностных аппроксимаций $F_{l_1 \dots l_k, j}^{(i_1 \dots i_k)}(\mathbf{x})$.

Следует отметить, что приведенные в разд. 7.7.3–7.7.5 явные сильные одношаговые конечно-разностные численные методы порядка

точности 1.5, 2.0 и 2.5 являются новыми, причем численные методы порядка точности 2.0 и 2.5 для векторных стохастических дифференциальных уравнений Ито ($n > 1$) с многомерным шумом ($m > 1$) не имеют аналогов в литературе.

Глава 8

Неявные одношаговые сильные численные методы решения стохастических дифференциальных уравнений Ито

В данной главе рассматриваются неявные сильные одношаговые методы численного решения стохастических дифференциальных уравнений Ито. Отличием неявных численных методов от явных является то, что вычисляемая на k -м шаге интегрирования неизвестная величина входит как в левую, так и в правую части неявной численной схемы. Таким образом, для определения этой величины приходится на каждом шаге интегрирования дополнительно решать алгебраическое уравнение. Это уравнение может быть решено одним из известных стандартных численных методов, например, методом Ньютона–Рафсона. Потребность в неявных численных методах, в частности, методах решения стохастических дифференциальных уравнений, объясняется тем, что эти методы, как правило, обладают большей устойчивостью [70, 86, 94, 147, 149], нежели явные численные методы. Кроме того, как показано в ряде работ (см., например, [93, 99]), неявные численные методы значительно лучше ведут себя по отношению к жестким системам, чем явные.

Неявные одношаговые сильные численные методы решения стохастических дифференциальных уравнений Ито рассматривались в ряде работ. В [70, 142] приведены неявные методы Эйлера и неявный одношаговый сильный численный метод порядка точности 1.0. В [70] предложен неявный одношаговый сильный численный метод порядка точности 1.5 решения стохастического дифференциального уравнения Ито с аддитивным шумом.

Общий вариант данного численного метода, а также неявный одношаговый сильный численный метод порядка точности 2.0 решения векторного стохастического дифференциального уравнения Ито с многомерным шумом приведены в [86]. В той же работе получены неявные одношаговые сильные конечно-разностные численные методы порядка точности 1.0 и 1.5 решения векторного стохастического дифференциального уравнения Ито с многомерным шумом. Для случая аддитивного скалярного шума в [86] построен неявный одношаговый сильный конечно-разностный численный метод порядка точности 2.0. Неявный одношаговый сильный конечно-разностный численный метод порядка точности 1.5 при аддитивном шуме рассматривается также в [142].

В настоящей главе наряду с известными неявными одношаговыми сильными численными методами приводятся их модификации, основанные на унифицированном разложении Тейлора–Ито. Кроме того, предлагаются новые неявные одношаговые сильные численные методы, в том числе конечно-разностные, порядка точности 2.0 и 2.5.

Следует отметить, что так же, как и в [70, 86], мы будем рассматривать в основном такие неявные численные методы, в которых ”неявность”, т. е. вычисляемая на k -м шаге интегрирования неизвестная величина, входит только в систематические члены разложения Тейлора–Ито $(a\Delta, \frac{1}{2}La\Delta^2)$ правой части неявной численной схемы. Это обстоятельство связано с тем, что если ”неявность” входит не только в систематические, но и в стохастические члены разложения Тейлора–Ито правой части неявной численной схемы, то для таких численных схем, вообще говоря, перестают существовать моментные характеристики, что делает невозможным применение указанных численных методов. В частности, это показано в [86] на примере тестовых линейных стохастических дифференциальных уравнений с мультипликативным шумом. Исключение составляют так называемые сбалансированные неявные численные методы [93].

8.1 Неявный метод Эйлера

Рассмотрим семейство неявных методов Эйлера [70, 86], являющихся одними из наиболее простых неявных одношаговых сильных численных методов:

$$\begin{aligned} \mathbf{y}_{p+1}^{(l)} = \mathbf{y}_p^{(l)} + \{ \tilde{\alpha}_l \mathbf{a}^{(l)}(\mathbf{y}_{p+1}, \tau_{p+1}) + (1 - \tilde{\alpha}_l) \mathbf{a}^{(l)}(\mathbf{y}_p, \tau_p) \} (\tau_{p+1} - \tau_p) + \\ + \sum_{i=1}^m \Sigma^{(li)}(\mathbf{y}_p, \tau_p) (\mathbf{f}_{\tau_{p+1}}^{(i)} - \mathbf{f}_{\tau_p}^{(i)}), \end{aligned} \quad (8.1)$$

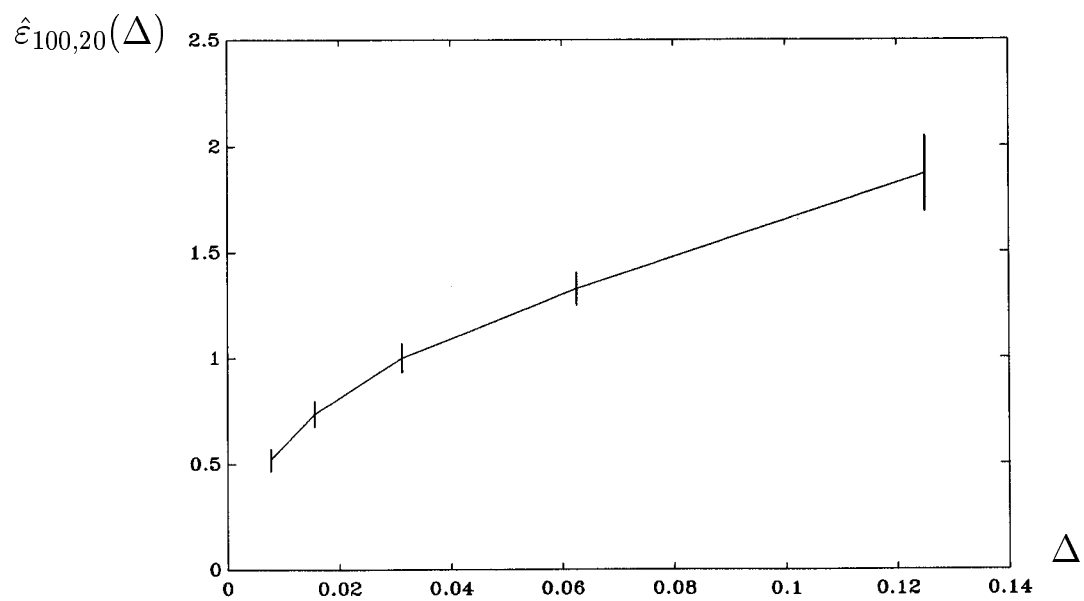


Рис. 8.1. Результат численного эксперимента 8.1 при $\tilde{\alpha}_1 = \frac{1}{2}$.

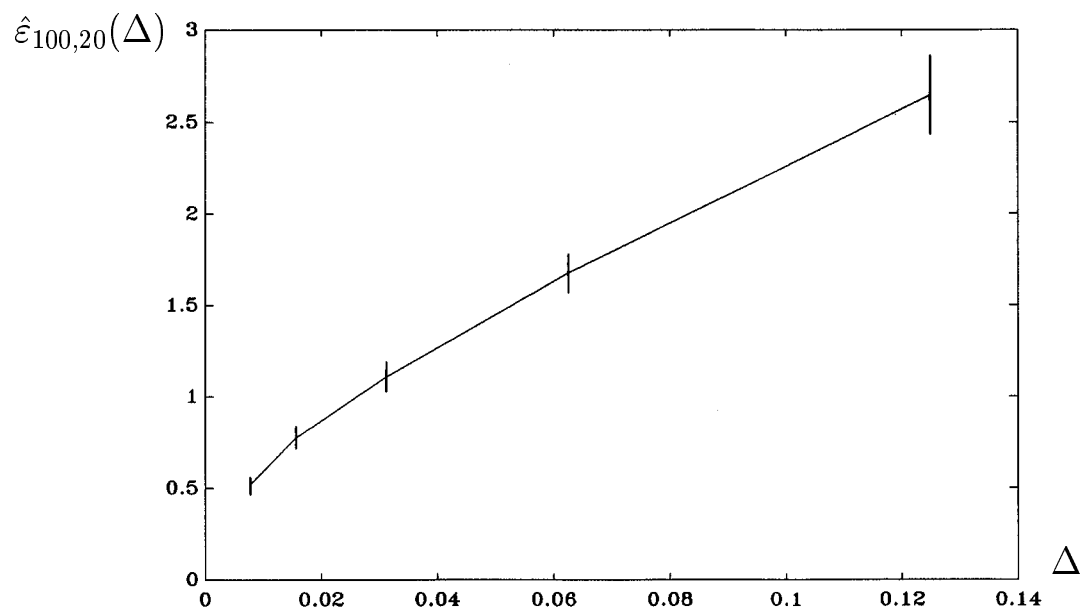


Рис. 8.2. Результат численного эксперимента 8.1 при $\tilde{\alpha}_1 = 1$.

где $\mathbf{y}_{\tau_p} \stackrel{\text{def}}{=} \mathbf{y}_p$; $\{\tau_p\}_{p=0}^N$ — разбиение промежутка $[0, T]$ такое, что

$$0 = \tau_0 < \tau_1 < \dots < \tau_N = T, \quad \Delta_N = \max_{0 \leq j \leq N-1} |\tau_{j+1} - \tau_j|;$$

$\tilde{\alpha}_l \in [0, 1]$, $l = 1, \dots, n$; $\mathbf{f}_t$ — стандартный m -мерный винеровский процесс с независимыми компонентами $\mathbf{f}_t^{(i)}$, $i = 1, \dots, m$.

Очевидно, что при $\tilde{\alpha}_l = 0$, $l = 1, \dots, n$, численный метод (8.1) трансформируется в явный метод Эйлера, а при $\tilde{\alpha}_l = \frac{1}{2}$, $l = 1, \dots, n$, он является обобщением детерминированного метода трапеций.

Численный эксперимент 8.1 (рис. 8.1, 8.2). Для стохастического дифференциального уравнения Ито

$$dx_t = ax_t dt + bx_t df_t, \quad x_0 = 1, \quad t \in [0, T], \quad f_t \in \mathbb{R}^1, \quad (8.2)$$

смоделировать 2000 ($M = 20$ групп по $N = 100$ реализаций) независимых реализаций случайной величины x_T при $T = 1$, $a = b = 1.5$ по формуле

$$x_T = x_0 e^{(a - \frac{1}{2}b^2)T + b\sqrt{\Delta} \sum_{i=0}^{N-1} \zeta_i}$$

и с помощью неявного метода Эйлера (8.1) при $\tilde{\alpha}_1 = \frac{1}{2}$ и 1, взяв в (8.1) $\mathbf{f}_{\tau_{i+1}} - \mathbf{f}_{\tau_i} = \sqrt{\Delta} \zeta_i$. Здесь $N = T/\Delta$; $\Delta = 2^{-3}$; ζ_i , $i = 0, 1, \dots, N-1$, — независимые стандартные гауссовские случайные величины.

Вычислить оценку $\hat{\varepsilon}_{100,20}$ ошибки $\varepsilon = M \{|x_T - y_T|\}$ по формуле (7.3) (y_T определяется из (8.1)) и 90%-й доверительный интервал для ε . Повторить вычисления при $\Delta = 2^{-j}$, $j = 4, 5, 6, 7$, и изобразить графически зависимость $\hat{\varepsilon}_{100,20}(\Delta)$ с 90%-ми доверительными интервалами для ε при указанных значениях Δ .

Численный эксперимент 8.2 [86] (рис. 8.3–8.5). Для стохастического дифференциального уравнения Ито

$$d \begin{pmatrix} \mathbf{x}_t^{(1)} \\ \mathbf{x}_t^{(2)} \end{pmatrix} = a \begin{pmatrix} \mathbf{x}_t^{(2)} - \mathbf{x}_t^{(1)} \\ \mathbf{x}_t^{(1)} - \mathbf{x}_t^{(2)} \end{pmatrix} dt + b \begin{pmatrix} \mathbf{x}_t^{(1)} \\ \mathbf{x}_t^{(2)} \end{pmatrix} df_t,$$

$$\begin{pmatrix} \mathbf{x}_0^{(1)} \\ \mathbf{x}_0^{(2)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad f_t \in \mathbb{R}^1, \quad t \in [0, T],$$

смоделировать 2000 ($M = 20$ групп по $N = 100$ реализаций) независимых реализаций векторной случайной величины $\mathbf{x}_T = \begin{pmatrix} \mathbf{x}_T^{(1)} & \mathbf{x}_T^{(2)} \end{pmatrix}^T$ при $T = 1$, $a = 5$, $b = 0.01$ по формуле

$$\mathbf{x}_T = Q \begin{pmatrix} e^{-\frac{1}{2}b^2T + b\sqrt{\Delta} \sum_{i=0}^{N-1} \zeta_i} & 0 \\ 0 & e^{(-2a - \frac{1}{2}b^2)T + b\sqrt{\Delta} \sum_{i=0}^{N-1} \zeta_i} \end{pmatrix} Q^{-1} \mathbf{x}_0$$

и с помощью неявного метода Эйлера (8.1) при $\tilde{\alpha}_1 = \tilde{\alpha}_2 = \frac{1}{2}$, взяв $\mathbf{f}_{\tau_{i+1}} - \mathbf{f}_{\tau_i} = \sqrt{\Delta}\zeta_i$ в (8.1). Здесь

$$Q = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = Q^{-1};$$

$N = T/\Delta$; $\Delta = 2^{-2}$; $\zeta_i, i = 0, 1, \dots, N-1$, — независимые стандартные гауссовские случайные величины.

Вычислить оценку $\hat{\varepsilon}_{100,20}$ ошибки $\varepsilon = M\{|\mathbf{x}_T - \mathbf{y}_T|\}$ по формуле (7.3) ($\mathbf{y}_T$ определяется из (8.1)) и 90%-й доверительный интервал для ε . Повторить вычисления при $\Delta = 2^{-j}$, $j = 3, 4, 5, 6$, и изобразить графически зависимость $\ln \hat{\varepsilon}_{100,20}(\ln \Delta)$ с 90%-ми доверительными интервалами для ε при указанных значениях Δ . Повторить вычисления при $\tilde{\alpha}_1 = \tilde{\alpha}_2 = 0$ и $\tilde{\alpha}_1 = \tilde{\alpha}_2 = 1$.

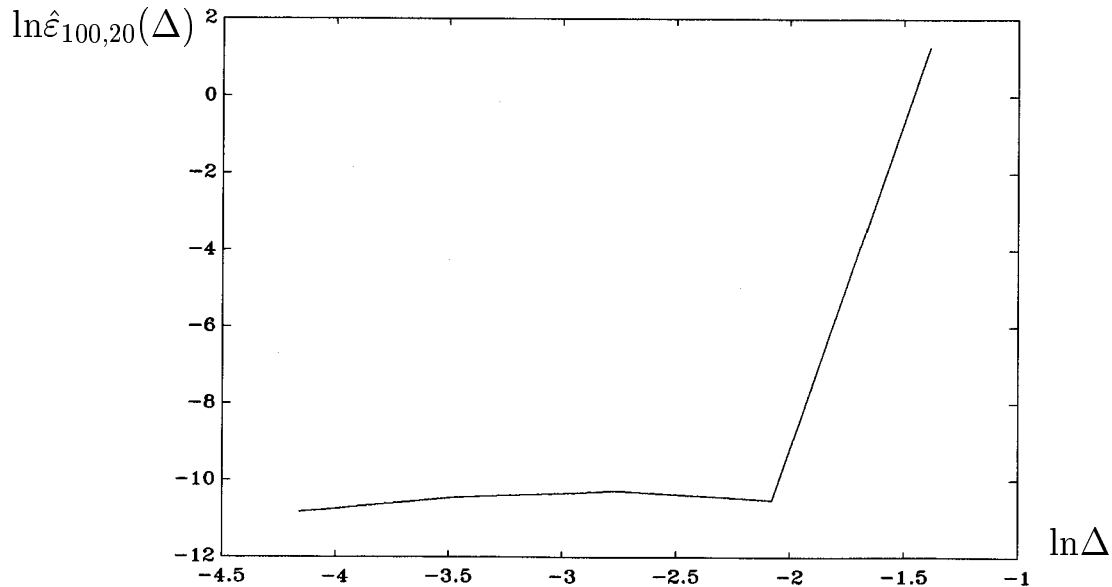


Рис. 8.3. Результат численного эксперимента 8.2 при $\tilde{\alpha}_1 = \tilde{\alpha}_2 = 0$.

Нетрудно видеть, что система, описанная в эксперименте 8.2, является жесткой. Сравнивая рис. 8.3–8.5, можно прийти к выводу [86], что явный метод Эйлера (см. рис. 8.3) проявляет себя не достаточно эффективно относительно жестких систем при уменьшении шага интегрирования. В то же время неявные методы Эйлера (см. рис. 8.4, 8.5) показывают достаточно хорошее поведение. Это различие между

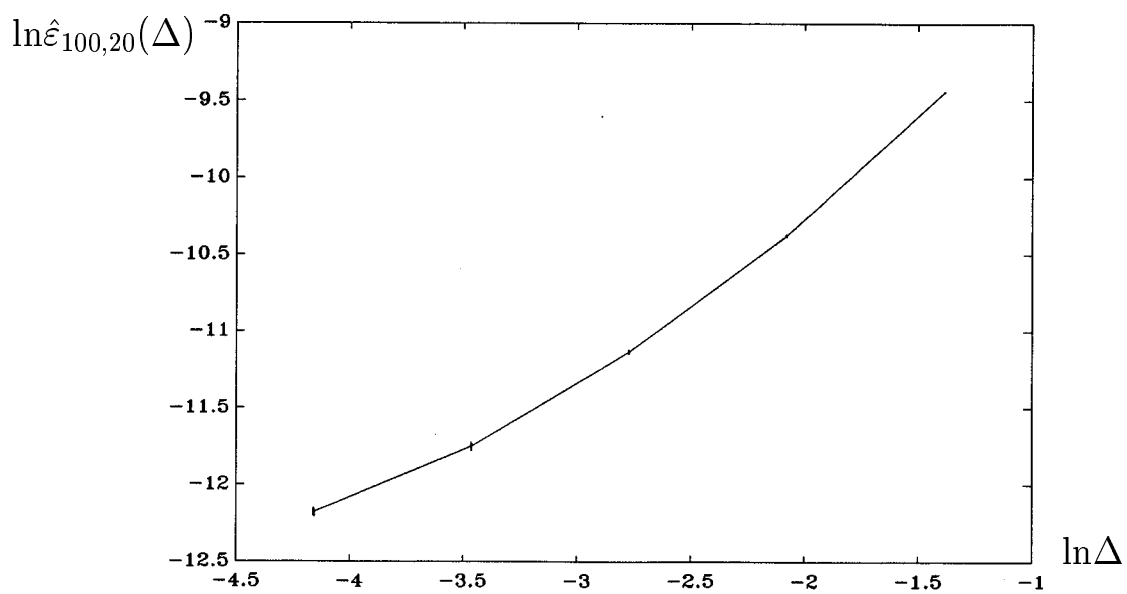


Рис. 8.4. Результат численного эксперимента 8.2 при $\tilde{\alpha}_1 = \tilde{\alpha}_2 = \frac{1}{2}$.

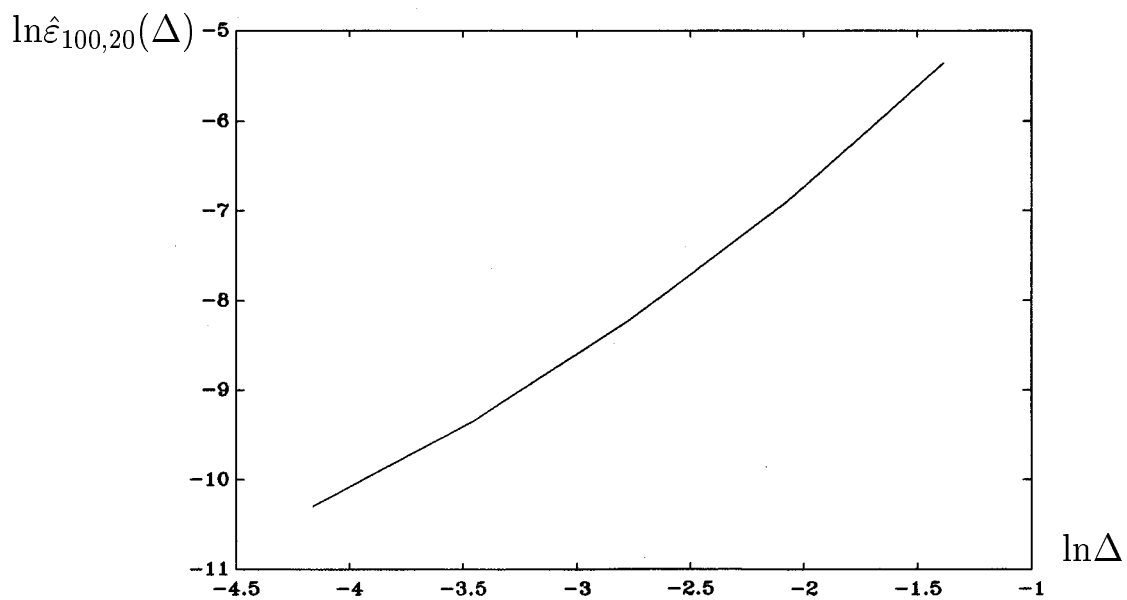


Рис. 8.5. Результат численного эксперимента 8.2 при $\tilde{\alpha}_1 = \tilde{\alpha}_2 = 1$.

явными и неявными сильными численными методами проявляется и при использовании более точных численных методов [86].

Численный эксперимент 8.2 проведен независимо от [86]. При этом мы получили численные результаты, которые очень близки к результатам из [86].

Далее в настоящей главе будут рассматриваться более точные неявные одношаговые численные методы. Обоснование сходимости данных методов, а также численного метода (8.1) будет дано в конце настоящей главы. При этом, в частности, будет показано, что при подходящих условиях численный метод (8.1) имеет порядок сильной сходимости 0.5.

8.2 Неявные одношаговые методы, основанные на разложениях Тейлора–Ито

8.2.1 Методы порядка точности 1.0

Рассмотрим однопараметрическое семейство неявных численных методов Г. Н. Мильштейна [70]. При покомпонентной форме записи эти методы имеют вид

$$\begin{aligned} \mathbf{y}_{p+1}^{(l)} = & \mathbf{y}_p^{(l)} + \{ \tilde{\alpha}_l \mathbf{a}^{(l)}(\mathbf{y}_{p+1}, \tau_{p+1}) + (1 - \tilde{\alpha}_l) \mathbf{a}^{(l)} \} \Delta + \\ & + \sum_{i_1=1}^m \Sigma^{(li_1)} \hat{I}_{0\tau_{p+1}, \tau_p}^{(i_1)} + \sum_{i_1, i_2=1}^m G_0^{(i_2)} \Sigma^{(li_1)} \hat{I}_{00\tau_{p+1}, \tau_p}^{(i_2 i_1)}, \end{aligned} \quad (8.3)$$

здесь и далее в этом разделе $\mathbf{a}^{(l)}(\mathbf{y}_p, \tau_p) \stackrel{\text{def}}{=} \mathbf{a}^{(l)}$; $\mathbf{y}_{\tau_p}^{(l)} \stackrel{\text{def}}{=} \mathbf{y}_p^{(l)}$; $\Sigma^{(ik)}(\mathbf{y}_p, \tau_p) \stackrel{\text{def}}{=} \Sigma^{(ik)}$; $p\Delta \stackrel{\text{def}}{=} \tau_p$; $\tilde{\alpha}_l \in [0, 1]$, $l = 1, \dots, n$.

Следует отметить, что при $\tilde{\alpha}_l = 0$ из (8.3) получим явный численный метод Г. Н. Мильштейна (7.34). Если $\tilde{\alpha}_l = \frac{1}{2}$, то (8.3) можно рассматривать как обобщение детерминированного метода трапеций.

Далее будем предполагать, что повторные стохастические интегралы, входящие в численный метод (8.3), и рассматриваемые далее численные методы аппроксимированы одним из приведенных в главе 6 численных методов с точностью, необходимой для выполнения условий (7.22), (7.63) теорем 7.2 и 7.3 о сильной сходимости численных методов при соответствующих значениях r .

Численный эксперимент 8.3 (рис. 8.6, 8.7). *Повторить численный эксперимент 8.1 для неявного метода Г. Н. Мильштейна (8.3) при $\tilde{\alpha}_1 = \frac{1}{2}$ и $\tilde{\alpha}_1 = 1$.*

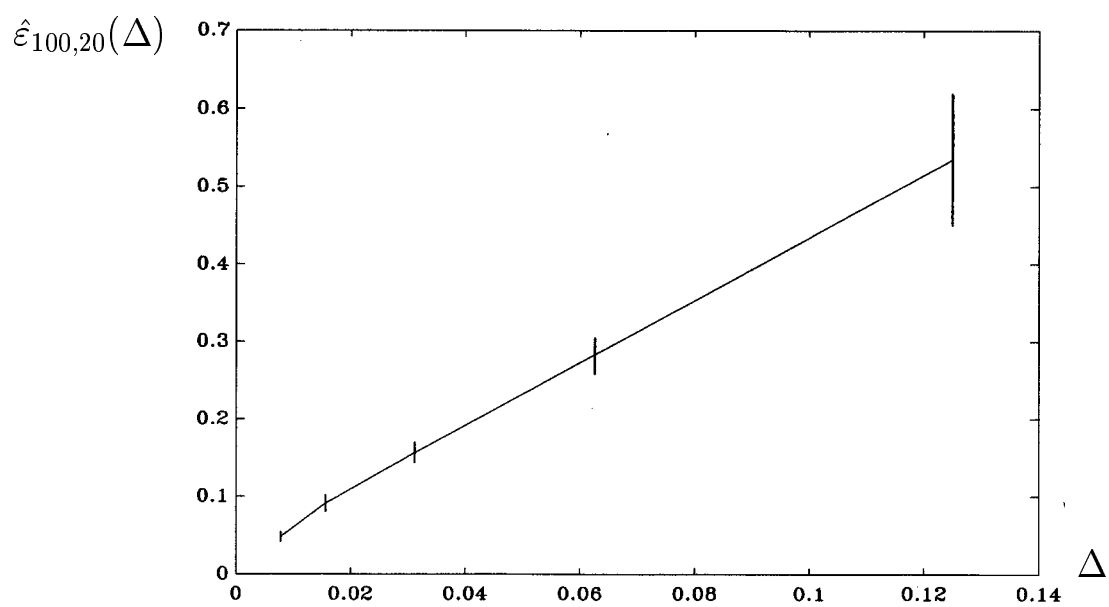


Рис. 8.6. Результат численного эксперимента 8.3 при $\tilde{\alpha}_1 = \frac{1}{2}$.

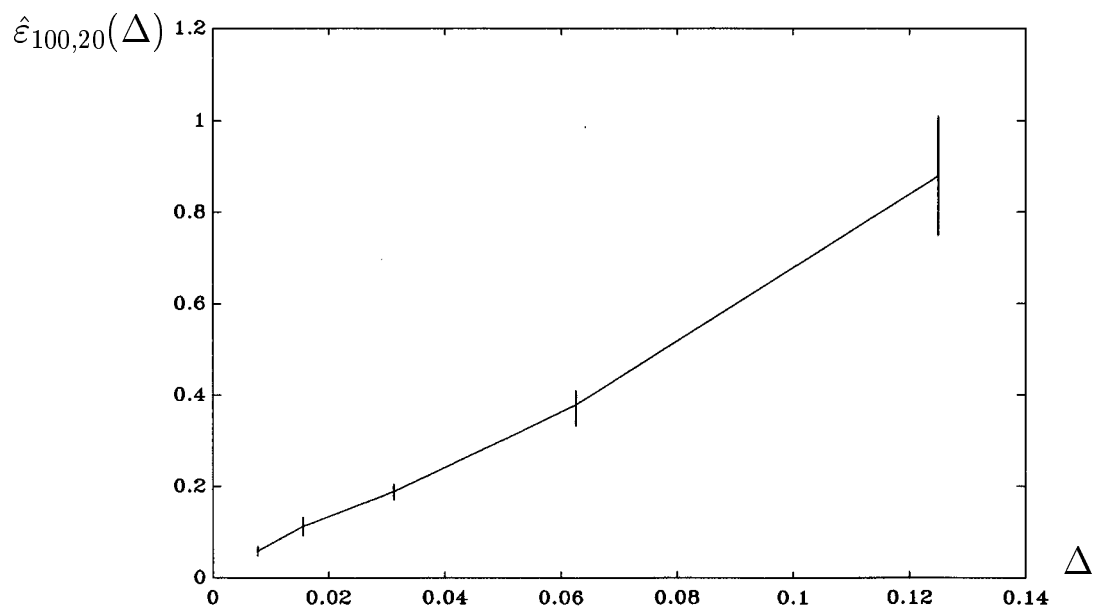


Рис. 8.7. Результат численного эксперимента 8.3 при $\tilde{\alpha}_1 = 1$.

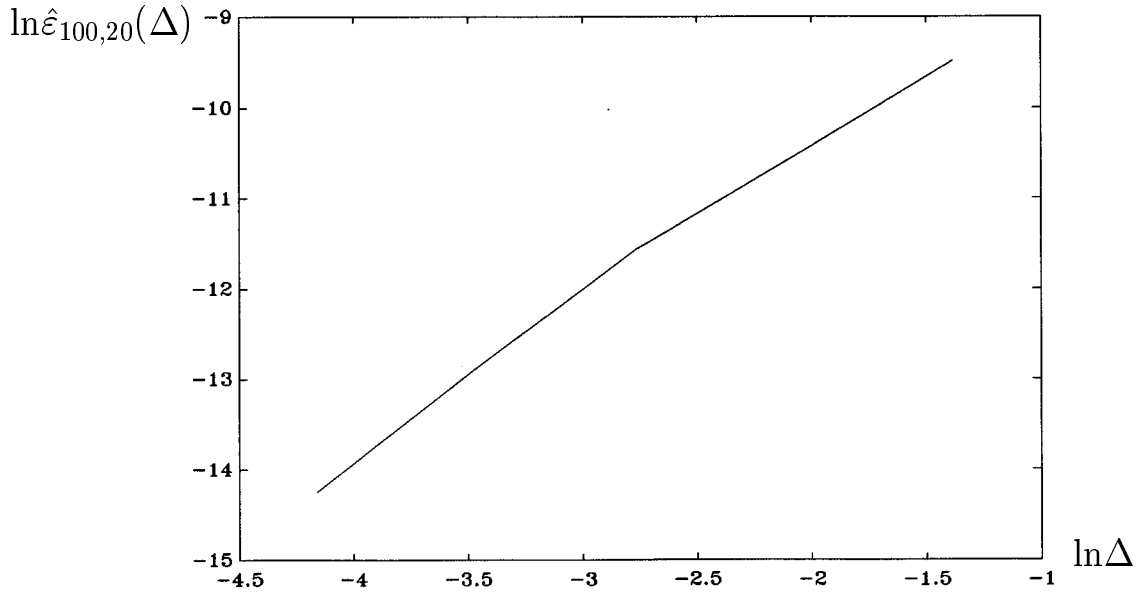


Рис. 8.8. Результат численного эксперимента 8.4 при $\tilde{\alpha}_1 = \tilde{\alpha}_2 = \frac{1}{2}$.

Численный эксперимент 8.4 (рис. 8.8). *Повторить численный эксперимент 8.2 для неявного метода Г. Н. Мильштейна (8.3) при $\tilde{\alpha}_1 = \tilde{\alpha}_2 = \frac{1}{2}$.*

8.2.2 Методы порядка точности 1.5

Рассмотрим двухпараметрическое семейство неявных одношаговых сильных численных методов порядка точности 1.5 [86]:

$$\begin{aligned}
 \mathbf{y}_{p+1}^{(l)} = & \mathbf{y}_p^{(l)} + \{ \tilde{\alpha}_l \mathbf{a}^{(l)}(\mathbf{y}_{p+1}, \tau_{p+1}) + (1 - \tilde{\alpha}_l) \mathbf{a}^{(l)} \} \Delta + \\
 & + \left(\frac{1}{2} - \tilde{\alpha}_l \right) \{ \tilde{\beta}_l L \mathbf{a}^{(l)}(\mathbf{y}_{p+1}, \tau_{p+1}) + (1 - \tilde{\beta}_l) L \mathbf{a}^{(l)} \} \Delta^2 + \\
 & + \sum_{i_1=1}^m \Sigma^{(li_1)} \hat{J}_{(1)\tau_{p+1}, \tau_p}^{(i_1)} + \sum_{i_1, i_2=1}^m G_0^{(i_2)} \Sigma^{(li_1)} \hat{J}_{(11)\tau_{p+1}, \tau_p}^{(i_2 i_1)} + \\
 & + \sum_{i_1=1}^m \left[G_0^{(i_1)} \mathbf{a}^{(l)} \left(\hat{J}_{(10)\tau_{p+1}, \tau_p}^{(i_1)} - \Delta \tilde{\alpha}_l \hat{J}_{(1)\tau_{p+1}, \tau_p}^{(i_1)} \right) + L \Sigma^{(li_1)} \hat{J}_{(01)\tau_{p+1}, \tau_p}^{(i_1)} \right] + \\
 & + \sum_{i_1, i_2, i_3=1}^m G_0^{(i_3)} G_0^{(i_2)} \Sigma^{(li_1)} \hat{J}_{(111)\tau_{p+1}, \tau_p}^{(i_3 i_2 i_1)}, \tag{8.4}
 \end{aligned}$$

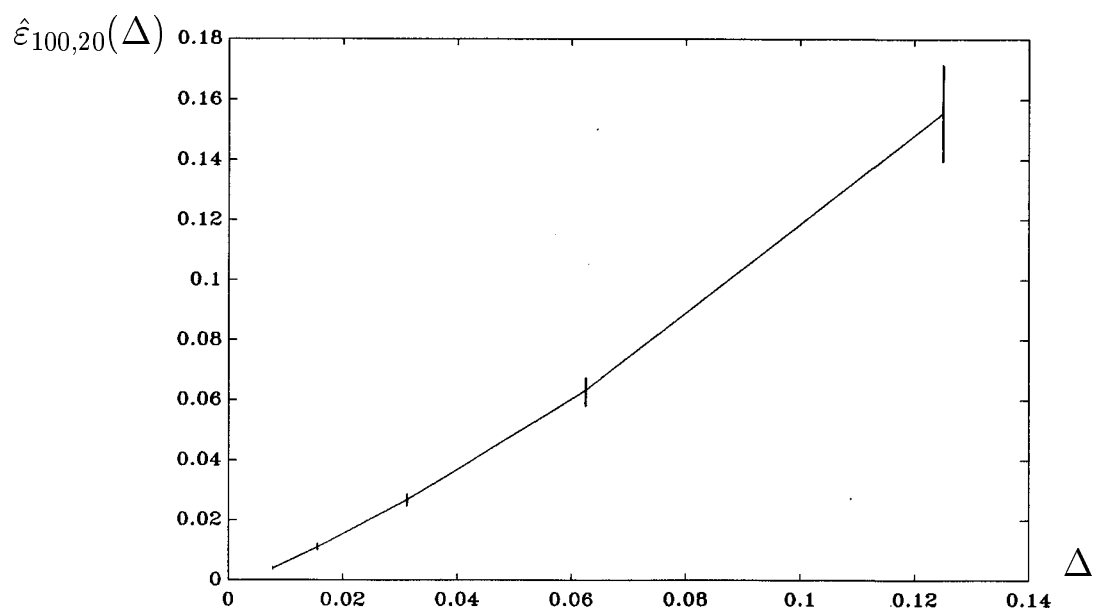


Рис. 8.9. Результат численного эксперимента 8.5 при $\tilde{\alpha}_1 = \frac{1}{2}$.

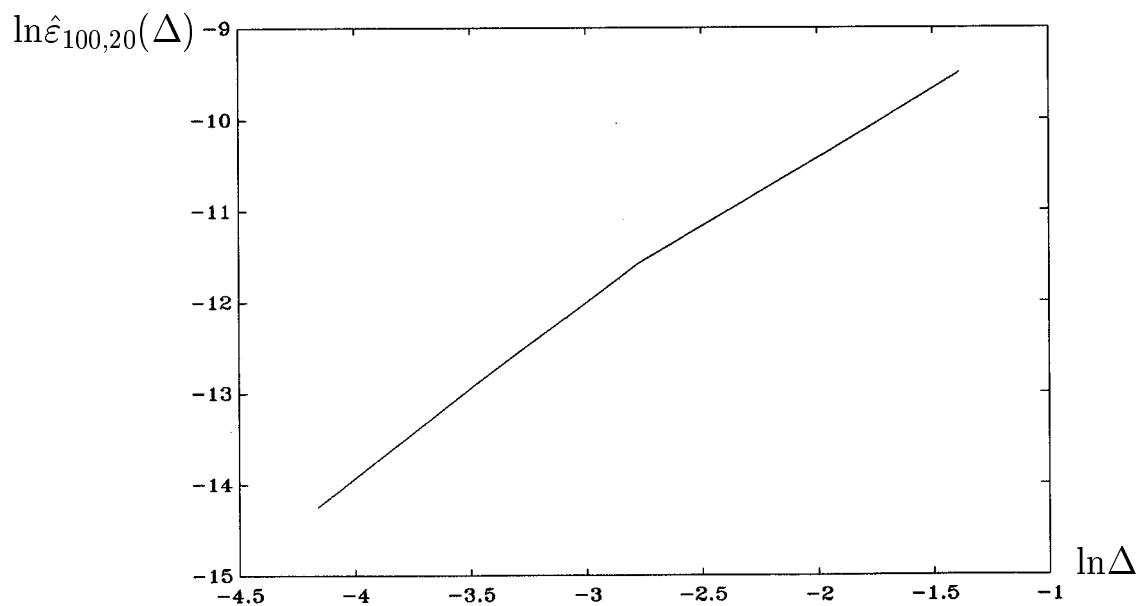


Рис. 8.10. Результат численного эксперимента 8.6 при $\tilde{\alpha}_1 = \tilde{\alpha}_2 = \frac{1}{2}$.

где $\tilde{\alpha}_l, \tilde{\beta}_l \in [0, 1]$.

Вариант численного метода (8.4), основанный на унифицированном разложении Тейлора–Ито, имеет следующий вид:

$$\begin{aligned}
\mathbf{y}_{p+1}^{(l)} = & \mathbf{y}_p^{(l)} + \{\tilde{\alpha}_l \mathbf{a}^{(l)}(\mathbf{y}_{p+1}, \tau_{p+1}) + (1 - \tilde{\alpha}_l) \mathbf{a}^{(l)}\} \Delta + \\
& + \left(\frac{1}{2} - \tilde{\alpha}_l\right) \{\tilde{\beta}_l L \mathbf{a}^{(l)}(\mathbf{y}_{p+1}, \tau_{p+1}) + (1 - \tilde{\beta}_l) L \mathbf{a}^{(l)}\} \Delta^2 + \\
& + \sum_{i_1=1}^m \Sigma^{(li_1)} \hat{I}_{0\tau_{p+1}, \tau_p}^{(i_1)} + \sum_{i_1, i_2=1}^m G_0^{(i_2)} \Sigma^{(li_1)} \hat{I}_{00\tau_{p+1}, \tau_p}^{(i_2 i_1)} + \\
& + \sum_{i_1=1}^m \left[G_0^{(i_1)} \mathbf{a}^{(l)} \left((1 - \tilde{\alpha}_l) \Delta \hat{I}_{0\tau_{p+1}, \tau_p}^{(i_1)} + \hat{I}_{1\tau_{p+1}, \tau_p}^{(i_1)} \right) - L \Sigma^{(li_1)} \hat{I}_{1\tau_{p+1}, \tau_p}^{(i_1)} \right] + \\
& + \sum_{i_1, i_2, i_3=1}^m G_0^{(i_3)} G_0^{(i_2)} \Sigma^{(li_1)} \hat{I}_{000\tau_{p+1}, \tau_p}^{(i_3 i_2 i_1)}. \tag{8.5}
\end{aligned}$$

Численный эксперимент 8.5 (рис. 8.9). Повторить численный эксперимент 8.1 для неявного сильного численного метода порядка точности 1.5 вида (8.5) при $\tilde{\alpha}_1 = \frac{1}{2}$. При этом не моделировать те повторные стохастические интегралы Ито, коэффициенты перед которыми оказываются равными нулю после применения численного метода (8.5) к уравнению (8.2) и приведения подобных слагаемых.

Численный эксперимент 8.6 (рис. 8.10). Повторить численный эксперимент 8.2 для неявного сильного численного метода порядка точности 1.5 вида (8.5) при $\tilde{\alpha}_1 = \tilde{\alpha}_2 = \frac{1}{2}$. При этом не моделировать повторные стохастические интегралы Ито из условия численного эксперимента 8.5.

Далее будут рассмотрены более точные неявные одношаговые сильные численные методы.

8.2.3 Методы порядка точности 2.0

Двухпараметрическое семейство неявных сильных одношаговых численных методов порядка точности 2.0 имеет вид [86]

$$\begin{aligned}
\mathbf{y}_{p+1}^{(l)} = & \mathbf{y}_p^{(l)} + \{\tilde{\alpha}_l \mathbf{a}^{(l)}(\mathbf{y}_{p+1}, \tau_{p+1}) + (1 - \tilde{\alpha}_l) \mathbf{a}^{(l)}\} \Delta + \\
& + \left(\frac{1}{2} - \tilde{\alpha}_l\right) \{\tilde{\beta}_l L \mathbf{a}^{(l)}(\mathbf{y}_{p+1}, \tau_{p+1}) + (1 - \tilde{\beta}_l) L \mathbf{a}^{(l)}\} \Delta^2 + \\
& + \sum_{i_1=1}^m \Sigma^{(li_1)} \hat{J}_{(1)\tau_{p+1}, \tau_p}^{(i_1)} + \sum_{i_1, i_2=1}^m G_0^{(i_2)} \Sigma^{(li_1)} \hat{J}_{(11)\tau_{p+1}, \tau_p}^{(i_2 i_1)} +
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \sum_{i_1=1}^m \left[G_0^{(i_1)} \mathbf{a}^{(l)} \left(\hat{J}_{(10)\tau_{p+1}, \tau_p}^{(i_1)} - \Delta \tilde{\alpha}_l \hat{J}_{(1)\tau_{p+1}, \tau_p}^{(i_1)} \right) + L \Sigma^{(li_1)} \hat{J}_{(01)\tau_{p+1}, \tau_p}^{(i_1)} \right] + \\
& \quad + \sum_{i_1, i_2, i_3=1}^m G_0^{(i_3)} G_0^{(i_2)} \Sigma^{(li_1)} \hat{J}_{(111)\tau_{p+1}, \tau_p}^{(i_3 i_2 i_1)} + \\
& \quad + \sum_{i_1, i_2=1}^m \left[G_0^{(i_2)} L \Sigma^{(li_1)} \hat{J}_{(101)\tau_{p+1}, \tau_p}^{(i_2 i_1)} + L G_0^{(i_2)} \Sigma^{(li_1)} \hat{J}_{(011)\tau_{p+1}, \tau_p}^{(i_2 i_1)} \right. \\
& \quad \left. + G_0^{(i_2)} G_0^{(i_1)} \mathbf{a}^{(l)} \left(\hat{J}_{(110)\tau_{p+1}, \tau_p}^{(i_2 i_1)} - \Delta \tilde{\alpha}_l \hat{J}_{(11)\tau_{p+1}, \tau_p}^{(i_2 i_1)} \right) \right] + \\
& \quad + \sum_{i_1, i_2, i_3, i_4=1}^m G_0^{(i_4)} G_0^{(i_3)} G_0^{(i_2)} \Sigma^{(li_1)} \hat{J}_{(1111)\tau_{p+1}, \tau_p}^{(i_4 i_3 i_2 i_1)}, \tag{8.6}
\end{aligned}$$

где $\tilde{\alpha}_l, \tilde{\beta}_l \in [0, 1]$.

Рассмотрим вариант численной схемы (8.6), который основан на унифицированном разложении Тейлора–Ито:

$$\begin{aligned}
\mathbf{y}_{p+1}^{(l)} &= \mathbf{y}_p^{(l)} + \{ \tilde{\alpha}_l \mathbf{a}^{(l)}(\mathbf{y}_{p+1}, \tau_{p+1}) + (1 - \tilde{\alpha}_l) \mathbf{a}^{(l)} \} \Delta + \\
& + \left(\frac{1}{2} - \tilde{\alpha}_l \right) \{ \tilde{\beta}_l L \mathbf{a}^{(l)}(\mathbf{y}_{p+1}, \tau_{p+1}) + (1 - \tilde{\beta}_l) L \mathbf{a}^{(l)} \} \Delta^2 + \\
& + \sum_{i_1=1}^m \Sigma^{(li_1)} \hat{I}_{0\tau_{p+1}, \tau_p}^{(i_1)} + \sum_{i_1, i_2=1}^m G_0^{(i_2)} \Sigma^{(li_1)} \hat{I}_{00\tau_{p+1}, \tau_p}^{(i_2 i_1)} + \\
& + \sum_{i_1=1}^m \left[G_0^{(i_1)} \mathbf{a}^{(l)} \left((1 - \tilde{\alpha}_l) \Delta \hat{I}_{0\tau_{p+1}, \tau_p}^{(i_1)} + \hat{I}_{1\tau_{p+1}, \tau_p}^{(i_1)} \right) - L \Sigma^{(li_1)} \hat{I}_{1\tau_{p+1}, \tau_p}^{(i_1)} \right] + \\
& \quad + \sum_{i_1, i_2, i_3=1}^m G_0^{(i_3)} G_0^{(i_2)} \Sigma^{(li_1)} \hat{I}_{000\tau_{p+1}, \tau_p}^{(i_3 i_2 i_1)} + \\
& + \sum_{i_1, i_2=1}^m \left[G_0^{(i_2)} L \Sigma^{(li_1)} \left(\hat{I}_{10\tau_{p+1}, \tau_p}^{(i_2 i_1)} - \hat{I}_{01\tau_{p+1}, \tau_p}^{(i_2 i_1)} \right) - L G_0^{(i_2)} \Sigma^{(li_1)} \hat{I}_{10\tau_{p+1}, \tau_p}^{(i_2 i_1)} \right. \\
& \quad \left. + G_0^{(i_2)} G_0^{(i_1)} \mathbf{a}^{(l)} \left(\hat{I}_{01\tau_{p+1}, \tau_p}^{(i_2 i_1)} + \Delta (1 - \tilde{\alpha}_l) \hat{I}_{00\tau_{p+1}, \tau_p}^{(i_2 i_1)} \right) \right] + \\
& \quad + \sum_{i_1, i_2, i_3, i_4=1}^m G_0^{(i_4)} G_0^{(i_3)} G_0^{(i_2)} \Sigma^{(li_1)} \hat{I}_{0000\tau_{p+1}, \tau_p}^{(i_4 i_3 i_2 i_1)}. \tag{8.7}
\end{aligned}$$

Отметим, что в численную схему (8.7) входит семь различных повторных стохастических интегралов, а в схему (8.6) — уже девять.

Численный эксперимент 8.7 (рис. 8.11). Повторить численный эксперимент 8.5 для неявного сильного численного метода порядка точности 2.0 вида (8.7) при $\tilde{\alpha}_1 = \frac{1}{2}$.

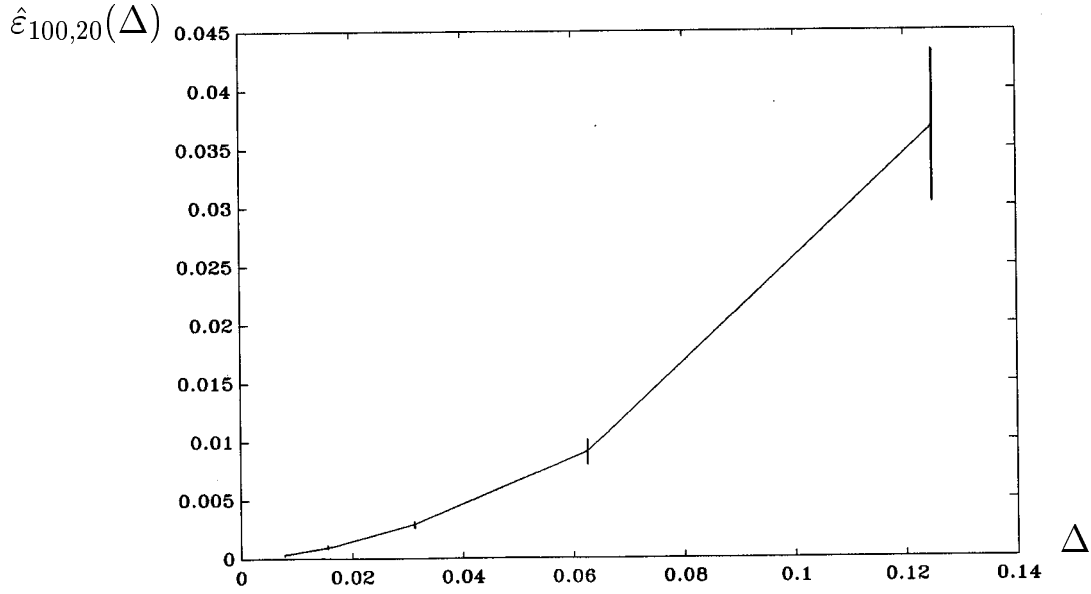


Рис. 8.11. Результат численного эксперимента 8.7.

8.2.4 Методы порядка точности 2.5

Для построения неявных сильных одношаговых численных методов порядка точности 2.5 дополним с учетом неявности правые части (8.7) и (8.6) членами из разложения Тейлора–Ито. Таким образом, неявный сильный одношаговый численный метод порядка точности 2.5, основанный на унифицированном разложении Тейлора–Ито, примет вид

$$\begin{aligned}
\mathbf{y}_{p+1}^{(l)} = & \mathbf{y}_p^{(l)} + \{ \tilde{\alpha}_l \mathbf{a}^{(l)}(\mathbf{y}_{p+1}, \tau_{p+1}) + (1 - \tilde{\alpha}_l) \mathbf{a}^{(l)} \} \Delta + \\
& + \left(\frac{1}{2} - \tilde{\alpha}_l \right) \{ \tilde{\beta}_l L \mathbf{a}^{(l)}(\mathbf{y}_{p+1}, \tau_{p+1}) + (1 - \tilde{\beta}_l) L \mathbf{a}^{(l)} \} \Delta^2 + \\
& + \left(\frac{1}{6} - \frac{1}{2}(\tilde{\alpha}_l + \tilde{\beta}_l) + \tilde{\alpha}_l \tilde{\beta}_l \right) \Delta^3 L^2 \mathbf{a} + \\
& + \sum_{i_1=1}^m \Sigma^{(li_1)} \hat{I}_{0\tau_{p+1}, \tau_p}^{(i_1)} + \sum_{i_1, i_2=1}^m G_0^{(i_2)} \Sigma^{(li_1)} \hat{I}_{00\tau_{p+1}, \tau_p}^{(i_2 i_1)} + \\
& + \sum_{i_1=1}^m \left[G_0^{(i_1)} \mathbf{a}^{(l)} \left((1 - \tilde{\alpha}_l) \Delta \hat{I}_{0\tau_{p+1}, \tau_p}^{(i_1)} + \hat{I}_{1\tau_{p+1}, \tau_p}^{(i_1)} \right) - L \Sigma^{(li_1)} \hat{I}_{1\tau_{p+1}, \tau_p}^{(i_1)} \right] +
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \sum_{i_1, i_2, i_3=1}^m G_0^{(i_3)} G_0^{(i_2)} \Sigma^{(li_1)} \hat{I}_{000\tau_{p+1}, \tau_p}^{(i_3 i_2 i_1)} + \\
& + \sum_{i_1, i_2=1}^m \left[G_0^{(i_2)} L \Sigma^{(li_1)} \left(\hat{I}_{10\tau_{p+1}, \tau_p}^{(i_2 i_1)} - \hat{I}_{01\tau_{p+1}, \tau_p}^{(i_2 i_1)} \right) - L G_0^{(i_2)} \Sigma^{(li_1)} \hat{I}_{10\tau_{p+1}, \tau_p}^{(i_2 i_1)} + \right. \\
& \quad \left. + G_0^{(i_2)} G_0^{(i_1)} \mathbf{a}^{(l)} \left(\hat{I}_{01\tau_{p+1}, \tau_p}^{(i_2 i_1)} + \Delta(1 - \tilde{\alpha}_l) \hat{I}_{00\tau_{p+1}, \tau_p}^{(i_2 i_1)} \right) \right] + \\
& \quad + \sum_{i_1, i_2, i_3, i_4=1}^m G_0^{(i_4)} G_0^{(i_3)} G_0^{(i_2)} \Sigma^{(li_1)} \hat{I}_{0000\tau_{p+1}, \tau_p}^{(i_4 i_3 i_2 i_1)} + \\
& \quad + \sum_{i_1=1}^m \left[G_0^{(i_1)} L \mathbf{a}^{(l)} \left(\frac{1}{2} \hat{I}_{2\tau_{p+1}, \tau_p}^{(i_1)} + \Delta(1 - \tilde{\alpha}_l) \hat{I}_{1\tau_{p+1}, \tau_p}^{(i_1)} + \right. \right. \\
& \quad \left. \left. + \Delta^2 \left(\frac{1}{2} - \tilde{\alpha}_l \right) (1 - \tilde{\beta}_l) \hat{I}_{0\tau_{p+1}, \tau_p}^{(i_1)} \right) + \right. \\
& \quad \left. + \frac{1}{2} L L \Sigma^{(li_1)} \hat{I}_{2\tau_{p+1}, \tau_p}^{(i_1)} - L G_0^{(i_1)} \mathbf{a}^{(l)} \left(\hat{I}_{2\tau_{p+1}, \tau_p}^{(i_1)} + \Delta(1 - \tilde{\alpha}_l) \hat{I}_{1\tau_{p+1}, \tau_p}^{(i_1)} \right) \right] + \\
& \quad + \sum_{i_1, i_2, i_3=1}^m \left[G_0^{(i_3)} L G_0^{(i_2)} \Sigma^{(li_1)} \left(\hat{I}_{100\tau_{p+1}, \tau_p}^{(i_3 i_2 i_1)} - \hat{I}_{010\tau_{p+1}, \tau_p}^{(i_3 i_2 i_1)} \right) + \right. \\
& \quad \left. + G_0^{(i_3)} G_0^{(i_2)} L \Sigma^{(li_1)} \left(\hat{I}_{010\tau_{p+1}, \tau_p}^{(i_3 i_2 i_1)} - \hat{I}_{001\tau_{p+1}, \tau_p}^{(i_3 i_2 i_1)} \right) + \right. \\
& \quad \left. + G_0^{(i_3)} G_0^{(i_2)} G_0^{(i_1)} \mathbf{a}^{(l)} \left(\Delta(1 - \tilde{\alpha}_l) \hat{I}_{000\tau_{p+1}, \tau_p}^{(i_3 i_2 i_1)} + \hat{I}_{001\tau_{p+1}, \tau_p}^{(i_3 i_2 i_1)} \right) - \right. \\
& \quad \left. - L G_0^{(i_3)} G_0^{(i_2)} \Sigma^{(li_1)} \hat{I}_{100\tau_{p+1}, \tau_p}^{(i_3 i_2 i_1)} \right] + \\
& \quad + \sum_{i_1, i_2, i_3, i_4, i_5=1}^m G_0^{(i_5)} G_0^{(i_4)} G_0^{(i_3)} G_0^{(i_2)} \Sigma^{(li_1)} \hat{I}_{00000\tau_{p+1}, \tau_p}^{(i_5 i_4 i_3 i_2 i_1)}. \tag{8.8}
\end{aligned}$$

Аналог численной схемы (8.8), который основан на разложении Тейлора–Ито в форме Вагнера и Платена, запишем в следующей форме:

$$\begin{aligned}
\mathbf{y}_{p+1}^{(l)} &= \mathbf{y}_p^{(l)} + \{ \tilde{\alpha}_l \mathbf{a}^{(l)}(\mathbf{y}_{p+1}, \tau_{p+1}) + (1 - \tilde{\alpha}_l) \mathbf{a}^{(l)} \} \Delta + \\
&+ \left(\frac{1}{2} - \tilde{\alpha}_l \right) \{ \tilde{\beta}_l L \mathbf{a}^{(l)}(\mathbf{y}_{p+1}, \tau_{p+1}) + (1 - \tilde{\beta}_l) L \mathbf{a}^{(l)} \} \Delta^2 + \\
&+ \left(\frac{1}{6} - \frac{1}{2}(\tilde{\alpha}_l + \tilde{\beta}_l) + \tilde{\alpha}_l \tilde{\beta}_l \right) \Delta^3 L^2 \mathbf{a} + \\
&+ \sum_{i_1=1}^m \Sigma^{(li_1)} \hat{J}_{(1)\tau_{p+1}, \tau_p}^{(i_1)} + \sum_{i_1, i_2=1}^m G_0^{(i_2)} \Sigma^{(li_1)} \hat{J}_{(11)\tau_{p+1}, \tau_p}^{(i_2 i_1)} +
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \sum_{i_1=1}^m \left[G_0^{(i_1)} \mathbf{a}^{(l)} \left(\hat{J}_{(10)\tau_{p+1}, \tau_p}^{(i_1)} - \Delta \tilde{\alpha}_l \hat{J}_{(1)\tau_{p+1}, \tau_p}^{(i_1)} \right) + L \Sigma^{(li_1)} \hat{J}_{(01)\tau_{p+1}, \tau_p}^{(i_1)} \right] + \\
& \quad + \sum_{i_1, i_2, i_3=1}^m G_0^{(i_3)} G_0^{(i_2)} \Sigma^{(li_1)} \hat{J}_{(111)\tau_{p+1}, \tau_p}^{(i_3 i_2 i_1)} + \\
& \quad + \sum_{i_1, i_2=1}^m \left[G_0^{(i_2)} L \Sigma^{(li_1)} \hat{J}_{(101)\tau_{p+1}, \tau_p}^{(i_2 i_1)} + L G_0^{(i_2)} \Sigma^{(li_1)} \hat{J}_{(011)\tau_{p+1}, \tau_p}^{(i_2 i_1)} + \right. \\
& \quad \left. + G_0^{(i_2)} G_0^{(i_1)} \mathbf{a}^{(l)} \left(\hat{J}_{(110)\tau_{p+1}, \tau_p}^{(i_2 i_1)} - \Delta \tilde{\alpha}_l \hat{J}_{(11)\tau_{p+1}, \tau_p}^{(i_2 i_1)} \right) \right] + \\
& \quad + \sum_{i_1, i_2, i_3, i_4=1}^m G_0^{(i_4)} G_0^{(i_3)} G_0^{(i_2)} \Sigma^{(li_1)} \hat{J}_{(1111)\tau_{p+1}, \tau_p}^{(i_4 i_3 i_2 i_1)} + \\
& \quad + \sum_{i_1=1}^m \left[G_0^{(i_1)} L \mathbf{a}^{(l)} \left(\hat{J}_{(100)\tau_{p+1}, \tau_p}^{(i_1)} - \Delta \tilde{\alpha}_l \hat{J}_{(10)\tau_{p+1}, \tau_p}^{(i_1)} - \right. \right. \\
& \quad \left. \left. - \Delta^2 \tilde{\beta}_l \left(\frac{1}{2} - \tilde{\alpha}_l \right) \hat{J}_{(1)\tau_{p+1}, \tau_p}^{(i_1)} \right) + \right. \\
& \quad \left. + L L \Sigma^{(li_1)} \hat{J}_{(001)\tau_{p+1}, \tau_p}^{(i_1)} + L G_0^{(i_1)} \mathbf{a}^{(l)} \left(\hat{J}_{(010)\tau_{p+1}, \tau_p}^{(i_1)} - \Delta \tilde{\alpha}_l \hat{J}_{(01)\tau_{p+1}, \tau_p}^{(i_1)} \right) \right] + \\
& \quad + \sum_{i_1, i_2, i_3=1}^m \left[G_0^{(i_3)} L G_0^{(i_2)} \Sigma^{(li_1)} \hat{J}_{(1011)\tau_{p+1}, \tau_p}^{(i_3 i_2 i_1)} + G_0^{(i_3)} G_0^{(i_2)} L \Sigma^{(li_1)} \hat{J}_{(1101)\tau_{p+1}, \tau_p}^{(i_3 i_2 i_1)} + \right. \\
& \quad \left. + G_0^{(i_3)} G_0^{(i_2)} G_0^{(i_1)} \mathbf{a}^{(l)} \left(-\Delta \tilde{\alpha}_l \hat{J}_{(111)\tau_{p+1}, \tau_p}^{(i_3 i_2 i_1)} + \hat{J}_{(1110)\tau_{p+1}, \tau_p}^{(i_3 i_2 i_1)} \right) + \right. \\
& \quad \left. + L G_0^{(i_3)} G_0^{(i_2)} \Sigma^{(li_1)} \hat{J}_{(0111)\tau_{p+1}, \tau_p}^{(i_3 i_2 i_1)} \right] + \\
& \quad + \sum_{i_1, i_2, i_3, i_4, i_5=1}^m G_0^{(i_5)} G_0^{(i_4)} G_0^{(i_3)} G_0^{(i_2)} \Sigma^{(li_1)} \hat{J}_{(11111)\tau_{p+1}, \tau_p}^{(i_5 i_4 i_3 i_2 i_1)}. \tag{8.9}
\end{aligned}$$

Для реализации численного метода (8.8) на каждом шаге интегрирования необходимо аппроксимировать 12 различных повторных стохастических интегралов, а для реализации численной схемы (8.9) их требуется уже 17.

Численный эксперимент 8.8 (рис. 8.12). *Повторить численный эксперимент 8.5 для неявного сильного численного метода порядка точности 2.5 вида (8.8) при $\tilde{\alpha}_1 = \frac{1}{2}$.*

В заключение данного раздела отметим, что если в (8.3)–(8.9) положить $\tilde{\alpha}_l = \tilde{\beta}_l = 0$, то из них вытекают рассматривавшиеся ранее явные сильные одношаговые численные методы.

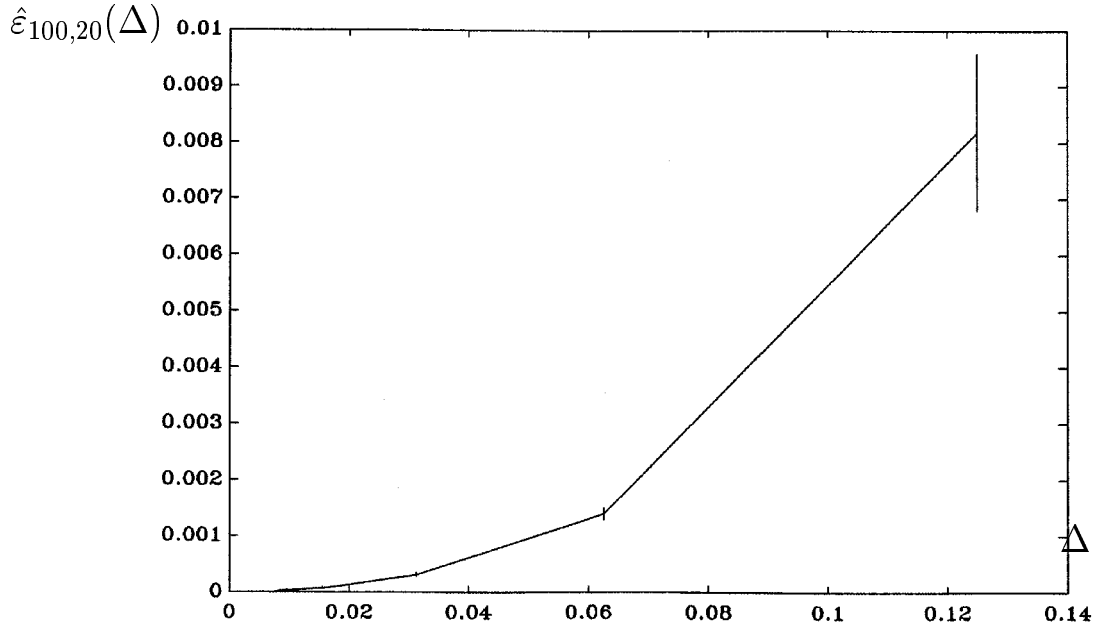


Рис. 8.12. Результат численного эксперимента 8.8.

8.2.5 Метод порядка точности 3.0

В настоящем разделе предлагаем неявную одношаговую сильную численную схему порядка точности 3.0 вида

$$\begin{aligned}
\mathbf{y}_{p+1} = & \mathbf{y}_p + \frac{1}{2} (\mathbf{a}(\mathbf{y}_{p+1}, \tau_{p+1}) + \mathbf{a}) \Delta - \frac{\Delta^3}{12} L^2 \mathbf{a} + \\
& + \sum_{i_1=1}^m \Sigma_{i_1} \hat{I}_{0\tau_{p+1}, \tau_p}^{(i_1)} + \Delta \mathbf{a} + \sum_{i_1, i_2=1}^m G_0^{(i_2)} \Sigma_{i_1} \hat{I}_{00\tau_{p+1}, \tau_p}^{(i_2 i_1)} + \\
& + \sum_{i_1=1}^m \left[G_0^{(i_1)} \mathbf{a} \left(\frac{1}{2} \Delta \hat{I}_{0\tau_{p+1}, \tau_p}^{(i_1)} + \hat{I}_{1\tau_{p+1}, \tau_p}^{(i_1)} \right) - L \Sigma_{i_1} \hat{I}_{1\tau_{p+1}, \tau_p}^{(i_1)} \right] + \\
& + \sum_{i_1, i_2, i_3=1}^m G_0^{(i_3)} G_0^{(i_2)} \Sigma_{i_1} \hat{I}_{000\tau_{p+1}, \tau_p}^{(i_3 i_2 i_1)} + \\
& + \sum_{i_1, i_2=1}^m \left[G_0^{(i_2)} L \Sigma_{i_1} \left(\hat{I}_{10\tau_{p+1}, \tau_p}^{(i_2 i_1)} - \hat{I}_{01\tau_{p+1}, \tau_p}^{(i_2 i_1)} \right) - L G_0^{(i_2)} \Sigma_{i_1} \hat{I}_{10\tau_{p+1}, \tau_p}^{(i_2 i_1)} + \right. \\
& \left. + G_0^{(i_2)} G_0^{(i_1)} \mathbf{a} \left(\hat{I}_{01\tau_{p+1}, \tau_p}^{(i_2 i_1)} + \frac{1}{2} \Delta \hat{I}_{00\tau_{p+1}, \tau_p}^{(i_2 i_1)} \right) \right] +
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \sum_{i_1, \dots, i_4=1}^m G_0^{(i_4)} G_0^{(i_3)} G_0^{(i_2)} \Sigma_{i_1} \hat{I}_{0000\tau_{p+1}, \tau_p}^{(i_4 i_3 i_2 i_1)} + \\
& + \sum_{i_1=1}^m \left[G_0^{(i_1)} L \mathbf{a} \left(\frac{1}{2} \hat{I}_{2\tau_{p+1}, \tau_p}^{(i_1)} + \frac{1}{2} \Delta \hat{I}_{1\tau_{p+1}, \tau_p}^{(i_1)} \right) + \right. \\
& + \frac{1}{2} L^2 \Sigma_{i_1} \hat{I}_{2\tau_{p+1}, \tau_p}^{(i_1)} - L G_0^{(i_1)} \mathbf{a} \left(\hat{I}_{2\tau_{p+1}, \tau_p}^{(i_1)} + \frac{1}{2} \Delta \hat{I}_{1\tau_{p+1}, \tau_p}^{(i_1)} \right) \left. \right] + \\
& + \sum_{i_1, i_2, i_3=1}^m \left[G_0^{(i_3)} L G_0^{(i_2)} \Sigma_{i_1} \left(\hat{I}_{100\tau_{p+1}, \tau_p}^{(i_3 i_2 i_1)} - \hat{I}_{010\tau_{p+1}, \tau_p}^{(i_3 i_2 i_1)} \right) + \right. \\
& + G_0^{(i_3)} G_0^{(i_2)} L \Sigma_{i_1} \left(\hat{I}_{010\tau_{p+1}, \tau_p}^{(i_3 i_2 i_1)} - \hat{I}_{001\tau_{p+1}, \tau_p}^{(i_3 i_2 i_1)} \right) + \\
& + G_0^{(i_3)} G_0^{(i_2)} G_0^{(i_1)} \mathbf{a} \left(\frac{1}{2} \Delta \hat{I}_{000\tau_{p+1}, \tau_p}^{(i_3 i_2 i_1)} + \hat{I}_{001\tau_{p+1}, \tau_p}^{(i_3 i_2 i_1)} \right) - \\
& - L G_0^{(i_3)} G_0^{(i_2)} \Sigma_{i_1} \hat{I}_{100\tau_{p+1}, \tau_p}^{(i_3 i_2 i_1)} \left. \right] + \\
& + \sum_{i_1, \dots, i_5=1}^m G_0^{(i_5)} G_0^{(i_4)} G_0^{(i_3)} G_0^{(i_2)} \Sigma_{i_1} \hat{I}_{00000\tau_{p+1}, \tau_p}^{(i_5 i_4 i_3 i_2 i_1)} + \\
& + \sum_{i_1, i_2=1}^m \left[G_0^{(i_2)} G_0^{(i_1)} L \mathbf{a} \left(\frac{1}{2} \hat{I}_{02\tau_{p+1}, \tau_p}^{(i_2 i_1)} + \frac{1}{2} \Delta \hat{I}_{01\tau_{p+1}, \tau_p}^{(i_2 i_1)} \right) + \right. \\
& + \frac{1}{2} L^2 G_0^{(i_2)} \Sigma_{i_1} \hat{I}_{20\tau_{p+1}, \tau_p}^{(i_2 i_1)} + \\
& + G_0^{(i_2)} L G_0^{(i_1)} \mathbf{a} \left(\hat{I}_{11\tau_{p+1}, \tau_p}^{(i_2 i_1)} - \hat{I}_{02\tau_{p+1}, \tau_p}^{(i_2 i_1)} + \frac{1}{2} \Delta \left(\hat{I}_{10\tau_{p+1}, \tau_p}^{(i_2 i_1)} - \hat{I}_{01\tau_{p+1}, \tau_p}^{(i_2 i_1)} \right) \right) + \\
& + L G_0^{(i_2)} L \Sigma_{i_1} \left(\hat{I}_{11\tau_{p+1}, \tau_p}^{(i_2 i_1)} - \hat{I}_{20\tau_{p+1}, \tau_p}^{(i_2 i_1)} \right) + \\
& + G_0^{(i_2)} L^2 \Sigma_{i_1} \left(\frac{1}{2} \hat{I}_{02\tau_{p+1}, \tau_p}^{(i_2 i_1)} + \frac{1}{2} \hat{I}_{20\tau_{p+1}, \tau_p}^{(i_2 i_1)} - \hat{I}_{11\tau_{p+1}, \tau_p}^{(i_2 i_1)} \right) - \\
& - L G_0^{(i_2)} G_0^{(i_1)} \mathbf{a} \left(\frac{1}{2} \Delta \hat{I}_{10\tau_{p+1}, \tau_p}^{(i_2 i_1)} + \hat{I}_{11\tau_{p+1}, \tau_p}^{(i_2 i_1)} \right) \left. \right] + \\
& + \sum_{i_1, \dots, i_4=1}^m \left[G_0^{(i_4)} G_0^{(i_3)} G_0^{(i_2)} G_0^{(i_1)} \mathbf{a} \left(\frac{1}{2} \Delta \hat{I}_{0000\tau_{p+1}, \tau_p}^{(i_4 i_3 i_2 i_1)} + \hat{I}_{0001\tau_{p+1}, \tau_p}^{(i_4 i_3 i_2 i_1)} \right) + \right. \\
& + G_0^{(i_4)} G_0^{(i_3)} L G_0^{(i_2)} \Sigma_{i_1} \left(\hat{I}_{0100\tau_{p+1}, \tau_p}^{(i_4 i_3 i_2 i_1)} - \hat{I}_{0010\tau_{p+1}, \tau_p}^{(i_4 i_3 i_2 i_1)} \right) - \\
& - L G_0^{(i_4)} G_0^{(i_3)} G_0^{(i_2)} \Sigma_{i_1} \hat{I}_{1000\tau_{p+1}, \tau_p}^{(i_4 i_3 i_2 i_1)} + \\
& + G_0^{(i_4)} L G_0^{(i_3)} G_0^{(i_2)} \Sigma_{i_1} \left(\hat{I}_{1000\tau_{p+1}, \tau_p}^{(i_4 i_3 i_2 i_1)} - \hat{I}_{0100\tau_{p+1}, \tau_p}^{(i_4 i_3 i_2 i_1)} \right) +
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + G_0^{(i_4)} G_0^{(i_3)} G_0^{(i_2)} L \Sigma_{i_1} \left(\hat{I}_{0010 \tau_{p+1}, \tau_p}^{(i_4 i_3 i_2 i_1)} - \hat{I}_{0001 \tau_{p+1}, \tau_p}^{(i_4 i_3 i_2 i_1)} \right) \Big] + \\
& + \sum_{i_1, \dots, i_6=1}^m G_0^{(i_6)} G_0^{(i_5)} G_0^{(i_4)} G_0^{(i_3)} G_0^{(i_2)} \Sigma_{i_1} \hat{I}_{000000 \tau_{p+1}, \tau_p}^{(i_6 i_5 i_4 i_3 i_2 i_1)}. \quad (8.10)
\end{aligned}$$

Численный эксперимент 8.9 (рис. 8.13). Повторить численный эксперимент 8.5 для неявного сильного численного метода порядка точности 3.0 вида (8.10) при $\Delta = 2^{-j}$, $j = 4, 5, 6, 7$.

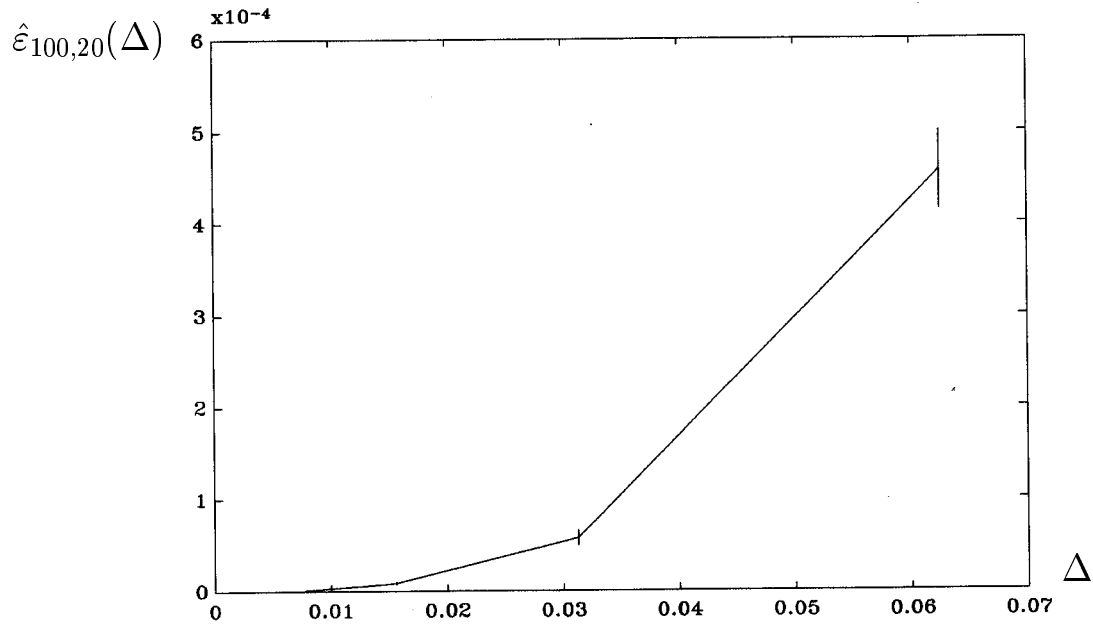


Рис. 8.13. Результат численного эксперимента 8.9.

8.3 Неявные одношаговые конечно-разностные методы, основанные на разложениях Тейлора–Ито

В качестве основы для построения неявных сильных одношаговых конечно-разностных численных методов решения стохастических дифференциальных уравнений Ито возьмем численные методы, построенные в предыдущем разделе, и аппроксимируем конечными разностями частные производные, входящие в их правые части.

8.3.1 Методы порядка точности 1.0

Рассмотрим семейство (8.3) неявных методов Г. Н. Мильштейна и аппроксимируем конечными разностями частные производные, входящие в правую часть (8.3). В результате получим следующее однопараметрическое семейство неявных сильных одношаговых конечно-разностных численных методов порядка точности 1.0:

$$\mathbf{y}_{p+1}^{(l)} = \mathbf{y}_p^{(l)} + \{\tilde{\alpha}_l \mathbf{a}^{(l)}(\mathbf{y}_{p+1}, \tau_{p+1}) + (1 - \tilde{\alpha}_l) \mathbf{a}^{(l)}\} \Delta + \\ + \sum_{i_1=1}^m \Sigma^{(li_1)}(\mathbf{y}_p, \tau_p) \hat{I}_{0_{\tau_{p+1}, \tau_p}}^{(i_1)} + \frac{1}{\sqrt{\Delta}} \sum_{i_1, i_2=1}^m \sum_{j=1}^2 \pi_j \Sigma^{(li_1)}(\mathbf{y}_{p\sigma}^{(ji_2)}, \tau_p) \hat{I}_{0_{\tau_{p+1}, \tau_p}}^{(i_2 i_1)}, \quad (8.11)$$

где сохранен смысл обозначений, входящих в (7.89).

Численный эксперимент 8.10 (рис. 8.14). *Повторить численный эксперимент 8.2 для неявного сильного конечно-разностного численного метода порядка точности 1.0 вида (8.11) при $\tilde{\alpha}_1 = \tilde{\alpha}_2 = \frac{1}{2}$.*

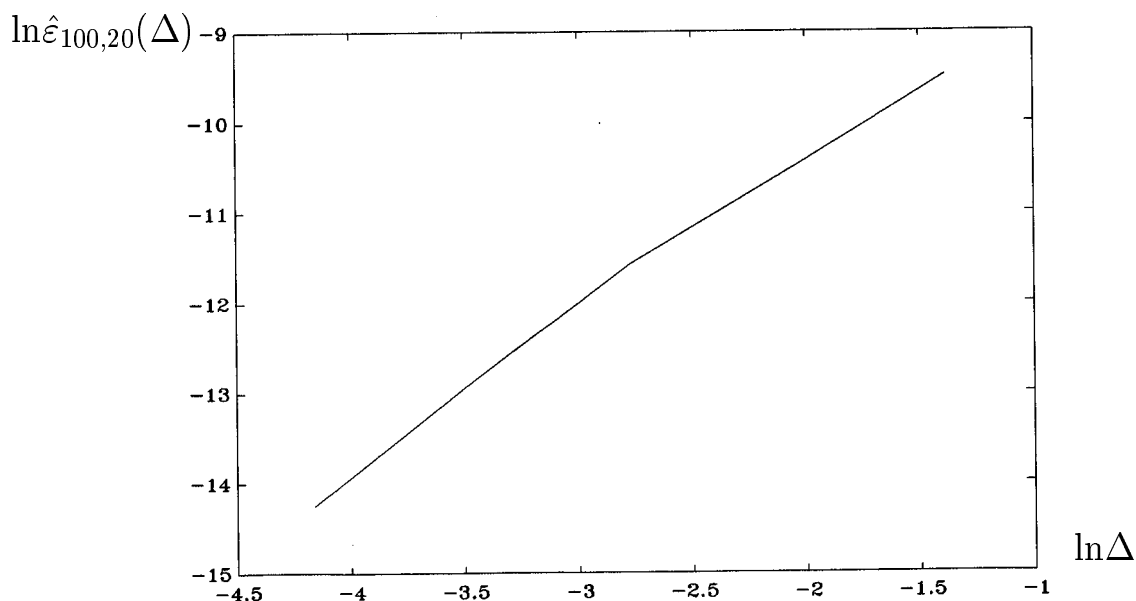


Рис. 8.14. Результат численного эксперимента 8.10.

Численный эксперимент 8.11 (рис. 8.15). *Повторить численный эксперимент 8.1 для неявного сильного конечно-разностного численного метода порядка точности 1.0 вида (8.11) при $\tilde{\alpha}_1 = \frac{1}{2}$.*

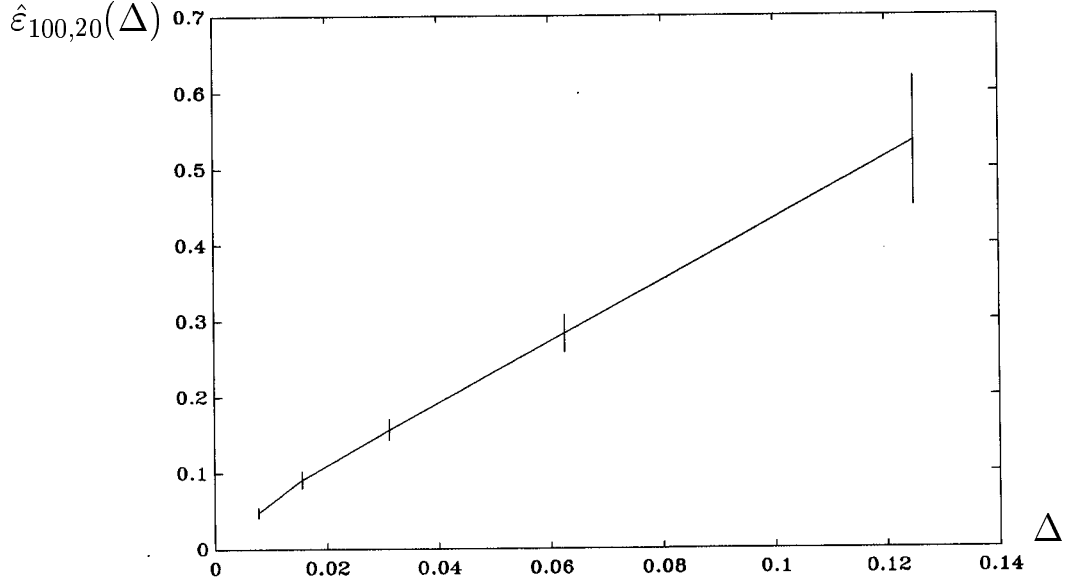


Рис. 8.15. Результат численного эксперимента 8.11.

8.3.2 Методы порядка точности 1.5

Аппроксимируем конечными разностями частные производные, входящие в правые части (8.4), (8.5). Тогда из (8.4) и (8.5) следуют два семейства неявных сильных одношаговых конечно-разностных численных методов порядка точности 1.5:

$$\begin{aligned}
\mathbf{y}_{p+1}^{(l)} = & \mathbf{y}_p^{(l)} + \{ \tilde{\alpha}_l \mathbf{a}^{(l)}(\mathbf{y}_{p+1}, \tau_{p+1}) + (1 - \tilde{\alpha}_l) \mathbf{a}^{(l)} \} \Delta + \\
& + \left(\frac{1}{2} - \tilde{\alpha}_l \right) \{ \tilde{\beta}_l L \mathbf{a}^{(l)}(\mathbf{y}_{p+1}, \tau_{p+1}) + (1 - \tilde{\beta}_l) L \mathbf{a}^{(l)} \} \Delta^2 + \\
& + \sum_{i_1=1}^m \Sigma^{(li_1)}(\mathbf{y}_p, \tau_p) \hat{I}_{0\tau_{p+1}, \tau_p}^{(i_1)} + \frac{1}{\sqrt{\Delta}} \sum_{i_1, i_2=1}^m \sum_{j=1}^2 \alpha_j \Sigma^{(li_1)}(\mathbf{y}_{p\beta}^{(ji_2)}, \tau_p) \hat{I}_{00\tau_{p+1}, \tau_p}^{(i_2 i_1)} + \\
& + \frac{1}{\Delta} \sum_{i_1=1}^m \left[\sum_{j=1}^2 \pi_j \mathbf{a}^{(l)}(\mathbf{u}_{p\sigma}^{(ji_1)}, \tau_p) \left((1 - \tilde{\alpha}_l) \Delta \hat{I}_{0\tau_{p+1}, \tau_p}^{(i_1)} + \hat{I}_{1\tau_{p+1}, \tau_p}^{(i_1)} \right) - \right. \\
& - \left. \left(\frac{1}{2} \sum_{r=1}^m \sum_{j=1}^3 \varrho_j \Sigma^{(li_1)}(\mathbf{y}_{p\varpi}^{(jr)}, \tau_p) + \sum_{j=1}^2 \zeta_j \Sigma^{(li_1)}(\mathbf{z}_{p\delta}^{(j)}, \Delta_{p\gamma}^{(j)}) \right) \hat{I}_{1\tau_{p+1}, \tau_p}^{(i_1)} \right] + \\
& + \frac{1}{\Delta} \sum_{i_1, i_2, i_3=1}^m \sum_{j=1}^2 \alpha_j \mathbf{k}_{i_1 i_2}^{(l)}(\mathbf{y}_{p\beta}^{(ji_3)}, \tau_p) \hat{I}_{000\tau_{p+1}, \tau_p}^{(i_3 i_2 i_1)}, \tag{8.12}
\end{aligned}$$

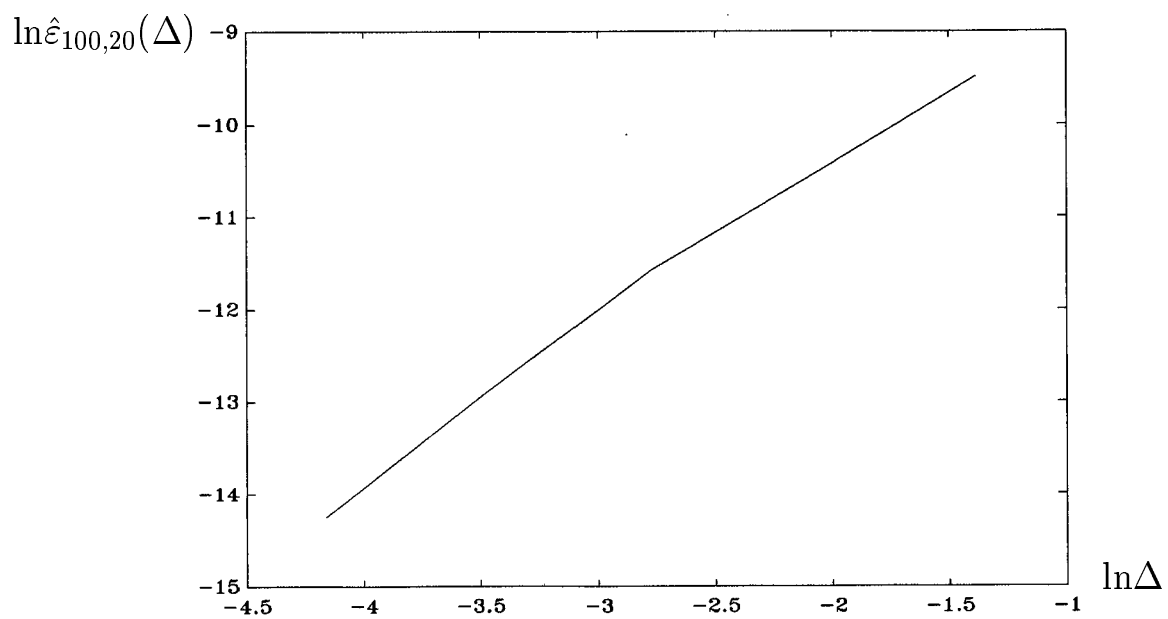


Рис. 8.16. Результат численного эксперимента 8.12.

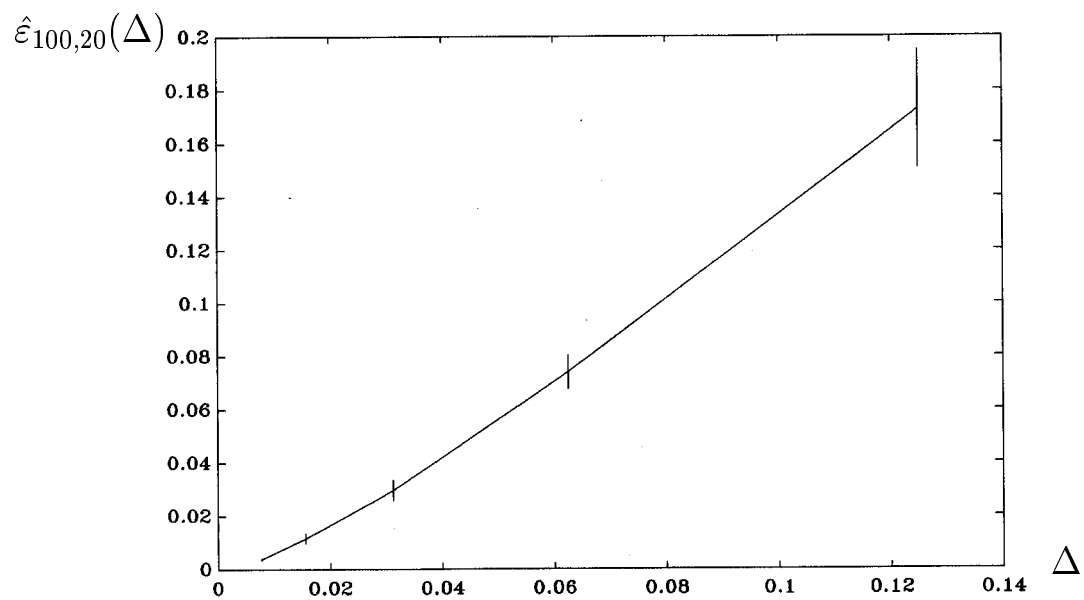


Рис. 8.17. Результат численного эксперимента 8.13.

$$\begin{aligned}
\mathbf{y}_{p+1}^{(l)} &= \mathbf{y}_p^{(l)} + \{\tilde{\alpha}_l \mathbf{a}^{(l)}(\mathbf{y}_{p+1}, \tau_{p+1}) + (1 - \tilde{\alpha}_l) \mathbf{a}^{(l)}\} \Delta + \\
&+ \left(\frac{1}{2} - \tilde{\alpha}_l\right) \{\tilde{\beta}_l L \mathbf{a}^{(l)}(\mathbf{y}_{p+1}, \tau_{p+1}) + (1 - \tilde{\beta}_l) L \mathbf{a}^{(l)}\} \Delta^2 + \\
&+ \sum_{i_1=1}^m \Sigma^{(li_1)}(\mathbf{y}_p, \tau_p) \hat{J}_{(1)\tau_{p+1}, \tau_p}^{(i_1)} + \frac{1}{\sqrt{\Delta}} \sum_{i_1, i_2=1}^m \sum_{j=1}^2 \alpha_j \Sigma^{(li_1)}(\mathbf{y}_{p\beta}^{(ji_2)}, \tau_p) \hat{J}_{(11)\tau_{p+1}, \tau_p}^{(i_2 i_1)} + \\
&+ \frac{1}{\Delta} \sum_{i_1=1}^m \left[\sum_{j=1}^2 \pi_j \mathbf{a}^{(l)}(\mathbf{u}_{p\sigma}^{(ji_1)}, \tau_p) \left(\hat{J}_{(10)\tau_{p+1}, \tau_p}^{(i_1)} - \tilde{\alpha}_l \Delta \hat{J}_{(1)\tau_{p+1}, \tau_p}^{(i_1)} \right) + \right. \\
&+ \left. \left(\frac{1}{2} \sum_{r=1}^m \sum_{j=1}^3 \varrho_j \Sigma^{(li_1)}(\mathbf{y}_{p\varpi}^{(jr)}, \tau_p) + \sum_{j=1}^2 \zeta_j \Sigma^{(li_1)}(\mathbf{z}_{p\delta}^{(j)}, \Delta_{p\gamma}^{(j)}) \right) \hat{J}_{(01)\tau_{p+1}, \tau_p}^{(i_1)} \right] + \\
&+ \frac{1}{\Delta} \sum_{i_1, i_2, i_3=1}^m \sum_{j=1}^2 \alpha_j \mathbf{k}_{i_1 i_2}^{(l)}(\mathbf{y}_{p\beta}^{(ji_3)}, \tau_p) \hat{J}_{(111)\tau_{p+1}, \tau_p}^{(i_3 i_2 i_1)}. \tag{8.13}
\end{aligned}$$

В (8.13), (8.12) сохранен смысл обозначений, введенных в (7.94), (7.95).

Численный эксперимент 8.12 (рис. 8.16). *Повторить численный эксперимент 8.2 для неявного конечно-разностного сильного численного метода порядка точности 1.5 вида (8.12) при $\tilde{\alpha}_1 = \tilde{\alpha}_2 = \frac{1}{2}$. Для моделирования стохастических интегралов Ито $I_{1(p+1)\Delta, p\Delta}^{(1)}$, $p = 0, 1, \dots, N-1$, использовать формулу*

$$I_{1(p+1)\Delta, p\Delta}^{(1)} = -\frac{1}{2} \Delta^{\frac{3}{2}} \left(\zeta_0^{(1)} + \frac{1}{\sqrt{3}} \zeta_1^{(1)} \right). \tag{8.14}$$

Здесь $\zeta_{0(p+1)\Delta, p\Delta}^{(1)} \stackrel{\text{def}}{=} \zeta_0^{(1)}$; $\zeta_{1(p+1)\Delta, p\Delta}^{(1)} \stackrel{\text{def}}{=} \zeta_1^{(1)}$; $\zeta_{0(p+1)\Delta, p\Delta}^{(1)}$, $\zeta_{1(p+1)\Delta, p\Delta}^{(1)}$, $p = 0, 1, \dots, N-1$, — независимые в совокупности стандартные гауссовские случайные величины.

Численный эксперимент 8.13 (рис. 8.17). *Повторить численный эксперимент 8.1 для неявного конечно-разностного сильного численного метода порядка точности 1.5 вида (8.12) при $\tilde{\alpha}_1 = \frac{1}{2}$. Для моделирования стохастических интегралов Ито $I_{1(p+1)\Delta, p\Delta}^{(1)}$, $p = 0, 1, \dots, N-1$, использовать формулу (8.14).*

8.3.3 Методы порядка точности 2.0

Аппроксимируя конечными разностями частные производные, входящие в правую часть (8.7) и выбирая $\tilde{\alpha}_l = \frac{1}{2}$ в (8.7), получаем

$$\mathbf{y}_{p+1} = \mathbf{y}_p + \frac{\Delta}{2} \{\mathbf{a}(\mathbf{y}_{p+1}, \tau_{p+1}) + \mathbf{a}(\mathbf{y}_p, \tau_p)\} +$$

$$\begin{aligned}
& + \sum_{i_1=1}^m \Sigma_{i_1}(\mathbf{y}_p, \tau_p) \hat{I}_{0\tau_{p+1}, \tau_p}^{(i_1)} + \frac{1}{\sqrt{\Delta}} \sum_{i_1, i_2=1}^m \sum_{j=1}^4 \eta_j \Sigma_{i_1}(\mathbf{y}_{p\omega}^{(ji_2)}, \tau_p) \hat{I}_{00\tau_{p+1}, \tau_p}^{(i_2 i_1)} + \\
& + \frac{1}{\Delta} \sum_{i_1=1}^m \left[\sum_{j=1}^2 \pi_j \mathbf{a}(\mathbf{u}_{p\sigma}^{(ji_1)}, \tau_p) \left(\frac{1}{2} \Delta \hat{I}_{0\tau_{p+1}, \tau_p}^{(i_1)} + \hat{I}_{1\tau_{p+1}, \tau_p}^{(i_1)} \right) - \right. \\
& - \left. \left(\frac{1}{2} \sum_{r=1}^m \sum_{j=1}^3 \mu_j \Sigma_{i_1}(\mathbf{y}_{p\lambda}^{(jr)}, \tau_p) + \sum_{j=1}^2 \zeta_j \Sigma_{i_1}(\mathbf{z}_{p\delta}^{(j)}, \Delta_{p\gamma}^{(j)}) \right) \hat{I}_{1\tau_{p+1}, \tau_p}^{(i_1)} \right] + \\
& + \frac{1}{\Delta} \sum_{i_1, i_2, i_3=1}^m \sum_{j=1}^4 \eta_j \mathbf{b}_{i_1 i_2}(\mathbf{y}_{p\omega}^{(ji_3)}, \tau_p) \hat{I}_{000\tau_{p+1}, \tau_p}^{(i_3 i_2 i_1)} + \\
& + \frac{1}{\Delta \sqrt{\Delta}} \sum_{i_1, i_2=1}^m \left[\sum_{j=1}^4 \eta_j \mathbf{g}_{i_1}(\mathbf{y}_{p\omega}^{(ji_2)}, \tau_p) \left(\hat{I}_{10\tau_{p+1}, \tau_p}^{(i_2 i_1)} - \hat{I}_{01\tau_{p+1}, \tau_p}^{(i_2 i_1)} \right) + \right. \\
& + \sum_{j=1}^4 \eta_j \mathbf{h}_{i_1}(\mathbf{y}_{p\omega}^{(ji_2)}, \tau_p) \left(\hat{I}_{01\tau_{p+1}, \tau_p}^{(i_2 i_1)} + \frac{1}{2} \Delta \hat{I}_{00\tau_{p+1}, \tau_p}^{(i_2 i_1)} \right) - \\
& - \left. \left(\frac{1}{2} \sum_{r=1}^m \sum_{j=1}^3 \mu_j \mathbf{k}_{i_1 i_2}(\mathbf{y}_{p\lambda}^{(jr)}, \tau_p) + \sum_{j=1}^2 \zeta_j \mathbf{k}_{i_1 i_2}(\mathbf{z}_{p\delta}^{(j)}, \Delta_{p\gamma}^{(j)}) \right) \hat{I}_{10\tau_{p+1}, \tau_p}^{(i_2 i_1)} \right] + \\
& + \frac{1}{\Delta \sqrt{\Delta}} \sum_{i_1, i_2, i_3 i_4=1}^m \sum_{j=1}^4 \eta_j \mathbf{c}_{i_1 i_2 i_3}(\mathbf{y}_{p\omega}^{(ji_4)}, \tau_p) \hat{I}_{0000\tau_{p+1}, \tau_p}^{(i_4 i_3 i_2 i_1)}, \tag{8.15}
\end{aligned}$$

где сохранен смысл обозначений, входящих в правую часть (7.109). Аналог схемы (8.15), который основан на разложении Тейлора–Ито в форме Вагнера и Платена, имеет вид

$$\begin{aligned}
& \mathbf{y}_{p+1} = \mathbf{y}_p + \frac{\Delta}{2} \{ \mathbf{a}(\mathbf{y}_{p+1}, \tau_{p+1}) + \mathbf{a}(\mathbf{y}_p, \tau_p) \} + \\
& + \sum_{i_1=1}^m \Sigma_{i_1}(\mathbf{y}_p, \tau_p) \hat{J}_{(1)\tau_{p+1}, \tau_p}^{(i_1)} + \frac{1}{\sqrt{\Delta}} \sum_{i_1, i_2=1}^m \sum_{j=1}^4 \eta_j \Sigma_{i_1}(\mathbf{y}_{p\omega}^{(ji_2)}, \tau_p) \hat{J}_{(11)\tau_{p+1}, \tau_p}^{(i_2 i_1)} + \\
& + \frac{1}{\Delta} \sum_{i_1=1}^m \left[\sum_{j=1}^2 \pi_j \mathbf{a}(\mathbf{u}_{p\sigma}^{(ji_1)}, \tau_p) \left(\hat{J}_{(10)\tau_{p+1}, \tau_p}^{(i_1)} - \frac{1}{2} \Delta \hat{J}_{(1)\tau_{p+1}, \tau_p}^{(i_1)} \right) + \right. \\
& + \left. \left(\frac{1}{2} \sum_{r=1}^m \sum_{j=1}^3 \mu_j \Sigma_{i_1}(\mathbf{y}_{p\lambda}^{(jr)}, \tau_p) + \sum_{j=1}^2 \zeta_j \Sigma_{i_1}(\mathbf{z}_{p\delta}^{(j)}, \Delta_{p\gamma}^{(j)}) \right) \hat{J}_{(01)\tau_{p+1}, \tau_p}^{(i_1)} \right] + \\
& + \frac{1}{\Delta} \sum_{i_1, i_2, i_3=1}^m \sum_{j=1}^4 \eta_j \mathbf{b}_{i_1 i_2}(\mathbf{y}_{p\omega}^{(ji_3)}, \tau_p) \hat{J}_{(111)\tau_{p+1}, \tau_p}^{(i_3 i_2 i_1)} + \\
& + \frac{1}{\Delta \sqrt{\Delta}} \sum_{i_1, i_2=1}^m \left[\sum_{j=1}^4 \eta_j \mathbf{g}_{i_1}(\mathbf{y}_{p\omega}^{(ji_2)}, \tau_p) \hat{J}_{(101)\tau_{p+1}, \tau_p}^{(i_2 i_1)} + \right.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \sum_{j=1}^4 \eta_j \mathbf{h}_{i_1}(\mathbf{y}_{p\omega}^{(ji_2)}, \tau_p) \left(\hat{J}_{(110)\tau_{p+1}, \tau_p}^{(i_2 i_1)} - \frac{1}{2} \Delta \hat{J}_{(11)\tau_{p+1}, \tau_p}^{(i_2 i_1)} \right) + \\
& + \left(\frac{1}{2} \sum_{r=1}^m \sum_{j=1}^3 \mu_j \mathbf{k}_{i_1 i_2}(\mathbf{y}_{p\lambda}^{(jr)}, \tau_p) + \sum_{j=1}^2 \zeta_j \mathbf{k}_{i_1 i_2}(\mathbf{z}_{p\delta}^{(j)}, \Delta_{p\gamma}^{(j)}) \right) \hat{J}_{(011)\tau_{p+1}, \tau_p}^{(i_2 i_1)} \Big] + \\
& + \frac{1}{\Delta \sqrt{\Delta}} \sum_{i_1, i_2, i_3, i_4=1}^m \sum_{j=1}^4 \eta_j \mathbf{c}_{i_1 i_2 i_3}(\mathbf{y}_{p\omega}^{(ji_4)}, \tau_p) \hat{J}_{(1111)\tau_{p+1}, \tau_p}^{(i_4 i_3 i_2 i_1)},
\end{aligned}$$

где введены такие же обозначения, как и в (7.110).

Численный эксперимент 8.14. (рис. 8.18). Повторить численный эксперимент 8.1 для неявного конечно-разностного сильного численного метода порядка 2.0 вида (8.15).

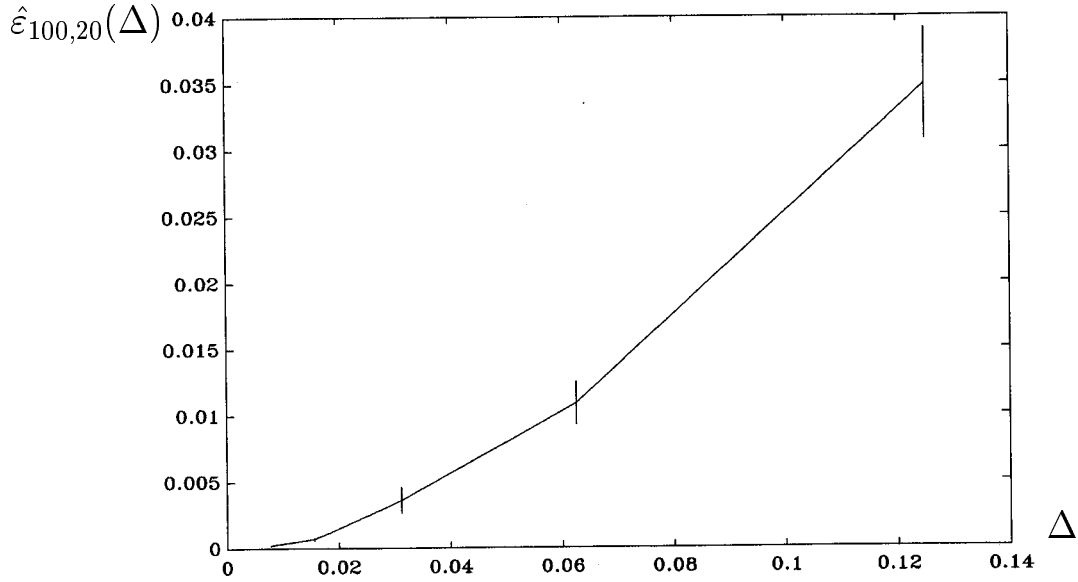


Рис. 8.18. Результат численного эксперимента 8.14.

Для моделирования стохастических интегралов Ито $I_{1_{(p+1)\Delta, p\Delta}}^{(1)}$, $p = 0, 1, \dots, N-1$, использовать формулу (8.14), а для моделирования стохастических интегралов $I_{10_{(p+1)\Delta, p\Delta}}^{(11)}$, $I_{01_{(p+1)\Delta, p\Delta}}^{(11)}$, $p = 0, 1, \dots, N-1$, — аппроксимацию

$$I_{10_{(p+1)\Delta, p\Delta}}^{(11)q} = -\frac{\Delta^2}{4} \left[\frac{2}{3} \left(\zeta_0^{(1)} \right)^2 + \frac{1}{\sqrt{3}} \zeta_1^{(1)} \zeta_0^{(1)} - \frac{1}{3\sqrt{5}} \zeta_2^{(1)} \zeta_0^{(1)} + \right.$$

$$+ \sum_{i=1}^q \left(\frac{1}{(2i-1)(2i+3)} \left(\zeta_i^{(1)} \right)^2 - \frac{1}{(2i+3)\sqrt{(2i+1)(2i+5)}} \zeta_i^{(1)} \zeta_{i+2}^{(1)} \right) - 1 \Big]$$

и соотношение

$$I_{01(p+1)\Delta, p\Delta}^{(11)q} = I_{1(p+1)\Delta, p\Delta}^{(1)} I_{0(p+1)\Delta, p\Delta}^{(1)} - I_{10(p+1)\Delta, p\Delta}^{(11)q} + \frac{\Delta^2}{2}$$

при $q = 1$; $\zeta_{j(p+1)\Delta, p\Delta}^{(1)} \stackrel{\text{def}}{=} \zeta_j^{(1)}$, $j = 0, 1, \dots, q+2$, — независимые стандартные гауссовские случайные величины.

В [86. С. 411] предложен неявный конечно-разностный сильный численный метод порядка точности 2.0 для случая скалярного аддитивного шума. Предложенный нами неявный конечно-разностный сильный численный метод порядка точности 2.0 вида (8.15) является более общим, поскольку в (8.15) шум предполагается векторным и неаддитивным. Кроме того, ошибка численного метода (8.15) уменьшается при уменьшении шага интегрирования Δ в достаточно широком диапазоне его изменения (см. рис. 8.18).

8.3.4 Методы порядка точности 2.5

Для построения неявных сильных одношаговых конечно-разностных численных методов порядка точности 2.5 используем численные схемы (8.8) и (8.9) при $\tilde{\alpha}_l = \frac{1}{2}$, а также конечно-разностные аппроксимации, полученные в разд. 7.7.1. В результате с помощью (8.8) получим следующую неявную сильную одношаговую численную схему порядка точности 2.5:

$$\begin{aligned} \mathbf{y}_{p+1} = & \mathbf{y}_p + \frac{\Delta}{2} \{ \mathbf{a}(\mathbf{y}_{p+1}, \tau_{p+1}) + \mathbf{a}(\mathbf{y}_p, \tau_p) \} - \\ & - \frac{\Delta}{12} \left[\frac{1}{2} \sum_{r=1}^m \sum_{j=1}^5 \psi_j \mathbf{q}(\mathbf{y}_{p\phi}^{(jr)}, \tau_p) + \sum_{j=1}^3 \varphi_j \mathbf{q}(\mathbf{z}_{p\chi}^{(j)}, \Delta_{p\kappa}^{(j)}) \right] + \mathbf{v}_p, \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned} \mathbf{v}_p = & \sum_{i_1=1}^m \Sigma_{i_1}(\mathbf{y}_p, \tau_p) \hat{I}_{0\tau_{p+1}, \tau_p}^{(i_1)} + \frac{1}{\sqrt{\Delta}} \sum_{i_1, i_2=1}^m \sum_{j=1}^4 \theta_j \Sigma_{i_1}(\mathbf{y}_{p\epsilon}^{(ji_2)}, \tau_p) \hat{I}_{00\tau_{p+1}, \tau_p}^{(i_2 i_1)} + \\ & + \frac{1}{\Delta} \sum_{i_1=1}^m \left[\sum_{j=1}^2 \alpha_j \mathbf{a}(\mathbf{u}_{p\beta}^{(ji_1)}, \tau_p) \left(\frac{1}{2} \Delta \hat{I}_{0\tau_{p+1}, \tau_p}^{(i_1)} + \hat{I}_{1\tau_{p+1}, \tau_p}^{(i_1)} \right) - \right. \\ & \left. - \left(\frac{1}{2} \sum_{r=1}^m \sum_{j=1}^5 \psi_j \Sigma_{i_1}(\mathbf{y}_{p\phi}^{(jr)}, \tau_p) + \sum_{j=1}^3 \varphi_j \Sigma_{i_1}(\mathbf{z}_{p\chi}^{(j)}, \Delta_{p\kappa}^{(j)}) \right) \hat{I}_{1\tau_{p+1}, \tau_p}^{(i_1)} \right] + \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{1}{\Delta} \sum_{i_1, i_2, i_3=1}^m \sum_{j=1}^4 \theta_j \mathbf{b}_{i_1 i_2}(\mathbf{y}_{p\varepsilon}^{(ji_3)}, \tau_p) \hat{I}_{000\tau_{p+1}, \tau_p}^{(i_3 i_2 i_1)} + \\
& + \frac{1}{\Delta \sqrt{\Delta}} \sum_{i_1, i_2=1}^m \left[\sum_{j=1}^4 \theta_j \mathbf{g}_{i_1}(\mathbf{y}_{p\varepsilon}^{(ji_2)}, \tau_p) \left(\hat{I}_{10\tau_{p+1}, \tau_p}^{(i_2 i_1)} - \hat{I}_{01\tau_{p+1}, \tau_p}^{(i_2 i_1)} \right) + \right. \\
& \quad \left. + \sum_{j=1}^4 \theta_j \mathbf{h}_{i_1}(\mathbf{y}_{p\varepsilon}^{(ji_2)}, \tau_p) \left(\hat{I}_{01\tau_{p+1}, \tau_p}^{(i_2 i_1)} + \frac{1}{2} \Delta \hat{I}_{00\tau_{p+1}, \tau_p}^{(i_2 i_1)} \right) - \right. \\
& \quad \left. - \left(\frac{1}{2} \sum_{r=1}^m \sum_{j=1}^5 \psi_j \mathbf{k}_{i_1 i_2}(\mathbf{y}_{p\phi}^{(jr)}, \tau_p) + \sum_{j=1}^3 \varphi_j \mathbf{k}_{i_1 i_2}(\mathbf{z}_{p\chi}^{(j)}, \Delta_{p\kappa}^{(j)}) \right) \hat{I}_{10\tau_{p+1}, \tau_p}^{(i_2 i_1)} \right] + \\
& \quad + \frac{1}{\Delta \sqrt{\Delta}} \sum_{i_1, i_2, i_3 i_4=1}^m \sum_{j=1}^4 \theta_j \mathbf{c}_{i_1 i_2 i_3}(\mathbf{y}_{p\varepsilon}^{(ji_4)}, \tau_p) \hat{I}_{0000\tau_{p+1}, \tau_p}^{(i_4 i_3 i_2 i_1)} + \\
& \quad + \frac{1}{\Delta^2} \sum_{i_1=1}^m \left[\sum_{j=1}^2 \alpha_j \mathbf{q}(\mathbf{u}_{p\beta}^{(ji_1)}, \tau_p) \left(\frac{1}{2} \hat{I}_{2\tau_{p+1}, \tau_p}^{(i_1)} + \frac{1}{2} \Delta \hat{I}_{1\tau_{p+1}, \tau_p}^{(i_1)} \right) + \right. \\
& \quad + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} \sum_{r=1}^m \sum_{j=1}^5 \psi_j \mathbf{g}_{i_1}(\mathbf{y}_{p\phi}^{(jr)}, \tau_p) + \sum_{j=1}^3 \varphi_j \mathbf{g}_{i_1}(\mathbf{z}_{p\chi}^{(j)}, \Delta_{p\kappa}^{(j)}) \right) \hat{I}_{2\tau_{p+1}, \tau_p}^{(i_1)} - \\
& \quad - \left(\frac{1}{2} \sum_{r=1}^m \sum_{j=1}^5 \psi_j \mathbf{h}_{i_1}(\mathbf{y}_{p\phi}^{(jr)}, \tau_p) + \sum_{j=1}^3 \varphi_j \mathbf{h}_{i_1}(\mathbf{z}_{p\chi}^{(j)}, \Delta_{p\kappa}^{(j)}) \right) \times \\
& \quad \times \left(\hat{I}_{2\tau_{p+1}, \tau_p}^{(i_1)} + \frac{1}{2} \Delta \hat{I}_{1\tau_{p+1}, \tau_p}^{(i_1)} \right) \left. \right] + \\
& \quad + \frac{1}{\Delta^2} \sum_{i_1, i_2, i_3=1}^m \left[\sum_{j=1}^4 \theta_j \mathbf{s}_{i_1 i_2}(\mathbf{y}_{p\varepsilon}^{(ji_3)}, \tau_p) \left(\hat{I}_{100\tau_{p+1}, \tau_p}^{(i_3 i_2 i_1)} - \hat{I}_{010\tau_{p+1}, \tau_p}^{(i_3 i_2 i_1)} \right) + \right. \\
& \quad + \sum_{j=1}^4 \theta_j \mathbf{e}_{i_1 i_2}(\mathbf{y}_{p\varepsilon}^{(ji_3)}, \tau_p) \left(\hat{I}_{010\tau_{p+1}, \tau_p}^{(i_3 i_2 i_1)} - \hat{I}_{001\tau_{p+1}, \tau_p}^{(i_3 i_2 i_1)} \right) + \\
& \quad + \sum_{j=1}^4 \theta_j \mathbf{v}_{i_1 i_2}(\mathbf{y}_{p\varepsilon}^{(ji_3)}, \tau_p) \left(\frac{1}{2} \Delta \hat{I}_{000\tau_{p+1}, \tau_p}^{(i_3 i_2 i_1)} + \hat{I}_{001\tau_{p+1}, \tau_p}^{(i_3 i_2 i_1)} \right) - \\
& \quad - \left(\frac{1}{2} \sum_{r=1}^m \sum_{j=1}^5 \psi_j \mathbf{r}_{i_1 i_2 i_3}(\mathbf{y}_{p\phi}^{(jr)}, \tau_p) + \sum_{j=1}^3 \varphi_j \mathbf{r}_{i_1 i_2 i_3}(\mathbf{z}_{p\chi}^{(j)}, \Delta_{p\kappa}^{(j)}) \right) \hat{I}_{100\tau_{p+1}, \tau_p}^{(i_3 i_2 i_1)} \left. \right] + \\
& \quad + \frac{1}{\Delta^2} \sum_{i_1, i_2, i_3, i_4, i_5=1}^m \sum_{j=1}^4 \theta_j \mathbf{d}_{i_1 i_2 i_3 i_4}(\mathbf{y}_{p\varepsilon}^{(ji_5)}, \tau_p) \hat{I}_{00000\tau_{p+1}, \tau_p}^{(i_5 i_4 i_3 i_2 i_1)}. \tag{8.16}
\end{aligned}$$

Здесь сохранен смысл обозначений, входящих в правую часть (7.133).

Если в качестве основы взять численную схему (8.9) при $\tilde{\alpha}_l = \frac{1}{2}$, то получим следующую неявную сильную одношаговую численную схему порядка точности 2.5:

$$\mathbf{y}_{p+1} = \mathbf{y}_p + \frac{\Delta}{2} \{ \mathbf{a}(\mathbf{y}_{p+1}, \tau_{p+1}) + \mathbf{a}(\mathbf{y}_p, \tau_p) \} - \\ - \frac{\Delta}{12} \left[\frac{1}{2} \sum_{r=1}^m \sum_{j=1}^5 \psi_j \mathbf{q}(\mathbf{y}_{p\phi}^{(jr)}, \tau_p) + \sum_{j=1}^3 \varphi_j \mathbf{q}(\mathbf{z}_{p\chi}^{(j)}, \Delta_{p\kappa}^{(j)}) \right] + \mathbf{v}_p,$$

где

$$\mathbf{v}_p = \sum_{i_1=1}^m \Sigma_{i_1}(\mathbf{y}_p, \tau_p) \hat{J}_{(1)\tau_{p+1}, \tau_p}^{(i_1)} + \frac{1}{\sqrt{\Delta}} \sum_{i_1, i_2=1}^m \sum_{j=1}^4 \theta_j \Sigma_{i_1}(\mathbf{y}_{p\varepsilon}^{(ji_2)}, \tau_p) \hat{J}_{(11)\tau_{p+1}, \tau_p}^{(i_2 i_1)} + \\ + \frac{1}{\Delta} \sum_{i_1=1}^m \left[\sum_{j=1}^2 \alpha_j \mathbf{a}(\mathbf{u}_{p\beta}^{(ji_1)}, \tau_p) \left(\hat{J}_{(10)\tau_{p+1}, \tau_p}^{(i_1)} - \frac{1}{2} \Delta \hat{J}_{(1)\tau_{p+1}, \tau_p}^{(i_1)} \right) + \right. \\ \left. + \left(\frac{1}{2} \sum_{r=1}^m \sum_{j=1}^5 \psi_j \Sigma_{i_1}(\mathbf{y}_{p\phi}^{(jr)}, \tau_p) + \sum_{j=1}^3 \varphi_j \Sigma_{i_1}(\mathbf{z}_{p\chi}^{(j)}, \Delta_{p\kappa}^{(j)}) \right) \hat{J}_{(01)\tau_{p+1}, \tau_p}^{(i_1)} \right] + \\ + \frac{1}{\Delta} \sum_{i_1, i_2, i_3=1}^m \sum_{j=1}^4 \theta_j \mathbf{b}_{i_1 i_2}(\mathbf{y}_{p\varepsilon}^{(ji_3)}, \tau_p) \hat{J}_{(111)\tau_{p+1}, \tau_p}^{(i_3 i_2 i_1)} + \\ + \frac{1}{\Delta \sqrt{\Delta}} \sum_{i_1, i_2=1}^m \left[\sum_{j=1}^4 \theta_j \mathbf{g}_{i_1}(\mathbf{y}_{p\varepsilon}^{(ji_2)}, \tau_p) \hat{J}_{(101)\tau_{p+1}, \tau_p}^{(i_2 i_1)} + \right. \\ \left. + \sum_{j=1}^4 \theta_j \mathbf{h}_{i_1}(\mathbf{y}_{p\varepsilon}^{(ji_2)}, \tau_p) \left(\hat{J}_{(110)\tau_{p+1}, \tau_p}^{(i_2 i_1)} - \frac{1}{2} \Delta \hat{J}_{(11)\tau_{p+1}, \tau_p}^{(i_2 i_1)} \right) + \right. \\ \left. + \left(\frac{1}{2} \sum_{r=1}^m \sum_{j=1}^5 \psi_j \mathbf{k}_{i_1 i_2}(\mathbf{y}_{p\phi}^{(jr)}, \tau_p) + \sum_{j=1}^3 \varphi_j \mathbf{k}_{i_1 i_2}(\mathbf{z}_{p\chi}^{(j)}, \Delta_{p\kappa}^{(j)}) \right) \hat{J}_{(011)\tau_{p+1}, \tau_p}^{(i_2 i_1)} \right] + \\ + \frac{1}{\Delta \sqrt{\Delta}} \sum_{i_1, i_2, i_3, i_4=1}^m \sum_{j=1}^4 \theta_j \mathbf{c}_{i_1 i_2 i_3}(\mathbf{y}_{p\varepsilon}^{(ji_4)}, \tau_p) \hat{J}_{(1111)\tau_{p+1}, \tau_p}^{(i_4 i_3 i_2 i_1)} + \\ + \frac{1}{\Delta^2} \sum_{i_1=1}^m \left[\sum_{j=1}^2 \alpha_j \mathbf{q}(\mathbf{u}_{p\beta}^{(ji_1)}, \tau_p) \left(\hat{J}_{(100)\tau_{p+1}, \tau_p}^{(i_1)} - \frac{1}{2} \Delta \hat{J}_{(10)\tau_{p+1}, \tau_p}^{(i_1)} \right) + \right. \\ \left. + \left(\frac{1}{2} \sum_{r=1}^m \sum_{j=1}^5 \psi_j \mathbf{g}_{i_1}(\mathbf{y}_{p\phi}^{(jr)}, \tau_p) + \sum_{j=1}^3 \varphi_j \mathbf{g}_{i_1}(\mathbf{z}_{p\chi}^{(j)}, \Delta_{p\kappa}^{(j)}) \right) \hat{J}_{(001)\tau_{p+1}, \tau_p}^{(i_1)} + \right. \\ \left. + \left(\frac{1}{2} \sum_{r=1}^m \sum_{j=1}^5 \psi_j \mathbf{h}_{i_1}(\mathbf{y}_{p\phi}^{(jr)}, \tau_p) + \sum_{j=1}^3 \varphi_j \mathbf{h}_{i_1}(\mathbf{z}_{p\chi}^{(j)}, \Delta_{p\kappa}^{(j)}) \right) \times \right]$$

$$\begin{aligned}
& \times \left(\hat{J}_{(010)\tau_{p+1}, \tau_p}^{(i_1)} - \frac{1}{2} \Delta \hat{J}_{(01)\tau_{p+1}, \tau_p}^{(i_1)} \right) \Big] + \\
& + \frac{1}{\Delta^2} \sum_{i_1, i_2, i_3=1}^m \left[\sum_{j=1}^4 \theta_j \mathbf{s}_{i_1 i_2}(\mathbf{y}_{p\varepsilon}^{(ji_3)}, \tau_p) \hat{J}_{(1011)\tau_{p+1}, \tau_p}^{(i_3 i_2 i_1)} + \right. \\
& + \sum_{j=1}^4 \theta_j \mathbf{e}_{i_1 i_2}(\mathbf{y}_{p\varepsilon}^{(ji_3)}, \tau_p) \hat{J}_{(1101)\tau_{p+1}, \tau_p}^{(i_3 i_2 i_1)} + \\
& + \sum_{j=1}^4 \theta_j \mathbf{v}_{i_1 i_2}(\mathbf{y}_{p\varepsilon}^{(ji_3)}, \tau_p) \left(\hat{J}_{(1110)\tau_{p+1}, \tau_p}^{(i_3 i_2 i_1)} - \frac{1}{2} \Delta \hat{J}_{(111)\tau_{p+1}, \tau_p}^{(i_3 i_2 i_1)} \right) + \\
& + \left. \left(\frac{1}{2} \sum_{r=1}^m \sum_{j=1}^5 \psi_j \mathbf{r}_{i_1 i_2 i_3}(\mathbf{y}_{p\phi}^{(jr)}, \tau_p) + \sum_{j=1}^3 \varphi_j \mathbf{r}_{i_1 i_2 i_3}(\mathbf{z}_{p\chi}^{(j)}, \Delta_{p\kappa}^{(j)}) \right) \hat{J}_{(0111)\tau_{p+1}, \tau_p}^{(i_3 i_2 i_1)} \right] + \\
& + \frac{1}{\Delta^2} \sum_{i_1, i_2, i_3, i_4, i_5=1}^m \sum_{j=1}^4 \theta_j \mathbf{d}_{i_1 i_2 i_3 i_4}(\mathbf{y}_{p\varepsilon}^{(ji_5)}, \tau_p) \hat{J}_{(11111)\tau_{p+1}, \tau_p}^{(i_5 i_4 i_3 i_2 i_1)}. \quad (8.17)
\end{aligned}$$

Здесь сохранен смысл обозначений, входящих в правую часть (7.134).

В заключение отметим, что полученные в разд. 8.3.3 и 8.3.4 неявные сильные численные методы представляют интерес, поскольку в них используются конечно-разностные аппроксимации частных производных, отличающиеся от соответствующих аналогов, полученных в [70, 86], унифицированные разложения Тейлора–Ито, а также предлагается применять в построенных численных схемах метод аппроксимации повторных стохастических интегралов, основанный на кратных рядах Фурье.

8.4 О сходимости неявных сильных одношаговых методов

В настоящем разделе на примере численного метода (8.3) покажем, как может быть обоснована сходимость неявных одношаговых сильных численных методов.

Перепишем численный метод (8.3):

$$\begin{aligned}
\mathbf{y}_{p+1}^{(l)} &= \mathbf{y}_p^{(l)} + \{ \tilde{\alpha}_l \mathbf{a}^{(l)}(\mathbf{y}_{p+1}, \tau_{p+1}) + (1 - \tilde{\alpha}_l) \mathbf{a}^{(l)}(\mathbf{y}_p, \tau_p) \} \Delta + \\
& + \sum_{i_1=1}^m \Sigma^{(li_1)}(\mathbf{y}_p, \tau_p) \hat{I}_{0\tau_{p+1}, \tau_p}^{(i_1)} + \sum_{i_1, i_2=1}^m G_0^{(i_2)} \Sigma^{(li_1)}(\mathbf{y}_p, \tau_p) \hat{I}_{00\tau_{p+1}, \tau_p}^{(i_2 i_1)}, \quad (8.18)
\end{aligned}$$

где $\mathbf{y}_{\tau_p}^{(l)} \stackrel{\text{def}}{=} \mathbf{y}_p^{(l)}$; $p\Delta \stackrel{\text{def}}{=} \tau_p$; $\tilde{\alpha}_l \in [0, 1]$, $l = 1, \dots, n$.

С помощью формулы Ито и разложения Тейлора–Ито имеем

$$\mathbf{a}^{(l)}(\mathbf{x}_{\tau_{p+1}}, \tau_{p+1}) = \mathbf{a}^{(l)}(\mathbf{x}_{\tau_p}, \tau_p) + R_{\tau_{p+1}, \tau_p}^{(l)} \text{ с в.1,} \quad (8.19)$$

где

$$\begin{aligned} R_{\tau_{p+1}, \tau_p}^{(l)} &= \int_{\tau_p}^{\tau_{p+1}} L\mathbf{a}^{(l)}(\mathbf{x}_s, s)ds + \sum_{i_1=1}^m \int_{\tau_p}^{\tau_{p+1}} G_0^{(i_1)} \mathbf{a}^{(l)}(\mathbf{x}_s, s) d\mathbf{f}_s^{(i_1)}; \\ \mathbf{x}_{\tau_{p+1}}^{(l)} &= \mathbf{x}_{\tau_p}^{(l)} + \mathbf{a}^{(l)}(\mathbf{x}_{\tau_p}, \tau_p)\Delta + \sum_{i_1=1}^m \Sigma^{(li_1)}(\mathbf{x}_{\tau_p}, \tau_p) I_{0_{\tau_{p+1}, \tau_p}}^{(i_1)} + \\ &+ \sum_{i_1, i_2=1}^m G_0^{(i_2)} \Sigma^{(li_1)}(\mathbf{x}_{\tau_p}, \tau_p) I_{00_{\tau_{p+1}, \tau_p}}^{(i_2 i_1)} + H_{3_{\tau_{p+1}, \tau_p}}^{(l)} \text{ с в.1;} \end{aligned} \quad (8.20)$$

$\mathbf{x}_s$ — решение стохастического дифференциального уравнения (7.18).

Используя (8.19), (8.20), приходим к равенству

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_{\tau_{p+1}}^{(l)} &= \mathbf{x}_{\tau_p}^{(l)} + \{\tilde{\alpha}_l \mathbf{a}^{(l)}(\mathbf{x}_{\tau_{p+1}}, \tau_{p+1}) + (1 - \tilde{\alpha}_l) \mathbf{a}^{(l)}(\mathbf{x}_{\tau_p}, \tau_p)\} \Delta + \\ &+ \sum_{i_1=1}^m \Sigma^{(li_1)}(\mathbf{x}_{\tau_p}, \tau_p) I_{0_{\tau_{p+1}, \tau_p}}^{(i_1)} + \sum_{i_1, i_2=1}^m G_0^{(i_2)} \Sigma^{(li_1)}(\mathbf{x}_{\tau_p}, \tau_p) I_{00_{\tau_{p+1}, \tau_p}}^{(i_2 i_1)} + \\ &+ H_{3_{\tau_{p+1}, \tau_p}}^{(l)} - \tilde{\alpha}_l \Delta R_{\tau_{p+1}, \tau_p}^{(l)} \text{ с в.1.} \end{aligned}$$

Далее имеем

$$\mathbf{x}_s^{(l)} - \mathbf{y}_s^{(l)} = \mathbf{x}_0^{(l)} - \mathbf{y}_0^{(l)} + \sum_{p=0}^{n_s-1} \left(U_{\tau_{p+1}, \tau_p}^{(l)} + G_{\tau_{p+1}, \tau_p}^{(l)} \right) + U_{s, \tau_{n_s}}^{(l)} + G_{s, \tau_{n_s}}^{(l)} \text{ с в.1,} \quad (8.21)$$

где $n_s \stackrel{\text{def}}{=} \max_j \{j : \tau_j \leq s\}$;

$$\begin{aligned} \mathbf{y}_s^{(l)} &= \mathbf{y}_{\tau_p}^{(l)} + \{\tilde{\alpha}_l \mathbf{a}^{(l)}(\mathbf{y}_s, s) + (1 - \tilde{\alpha}_l) \mathbf{a}^{(l)}(\mathbf{y}_{\tau_p}, \tau_p)\} (s - \tau_p) + \\ &+ \sum_{i_1=1}^m \Sigma^{(li_1)}(\mathbf{y}_{\tau_p}, \tau_p) \hat{I}_{0_{s, \tau_p}}^{(i_1)} + \sum_{i_1, i_2=1}^m G_0^{(i_2)} \Sigma^{(li_1)}(\mathbf{y}_{\tau_p}, \tau_p) \hat{I}_{00_{s, \tau_p}}^{(i_2 i_1)}; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} U_{s, \tau}^{(l)} &= \{\tilde{\alpha}_l (\mathbf{a}^{(l)}(\mathbf{x}_s, s) - \mathbf{a}^{(l)}(\mathbf{y}_s, s)) + \\ &+ (1 - \tilde{\alpha}_l) (\mathbf{a}^{(l)}(\mathbf{x}_\tau, \tau) - \mathbf{a}^{(l)}(\mathbf{y}_\tau, \tau))\} (s - \tau) + \\ &+ \sum_{i_1=1}^m \left[(\Sigma^{(li_1)}(\mathbf{x}_\tau, \tau) - \Sigma^{(li_1)}(\mathbf{y}_\tau, \tau)) I_{0_{s, \tau}}^{(i_1)} + \Sigma^{(li_1)}(\mathbf{y}_\tau, \tau) (I_{0_{s, \tau}}^{(i_1)} - \hat{I}_{0_{s, \tau}}^{(i_1)}) \right] + \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \sum_{i_1, i_2=1}^m \left[\left(G_0^{(i_2)} \Sigma^{(li_1)}(\mathbf{x}_\tau, \tau) - G_0^{(i_2)} \Sigma^{(li_1)}(\mathbf{y}_\tau, \tau) \right) I_{00_{s,\tau}}^{(i_2 i_1)} + \right. \\
& \left. + G_0^{(i_2)} \Sigma^{(li_1)}(\mathbf{y}_\tau, \tau) \left(I_{00_{s,\tau}}^{(i_2 i_1)} - \hat{I}_{00_{s,\tau}}^{(i_2 i_1)} \right) \right];
\end{aligned}$$

$$G_{s,\tau}^{(l)} \stackrel{\text{def}}{=} H_{3_{s,\tau}}^{(l)} - R_{s,\tau}^{(l)};$$

$s \in (\tau_p, \tau_{p+1}]$, $p = 0, 1, \dots, N-1$.

Если предположить теперь, что выполнены условия теоремы 7.3 при $r = 2$, то по аналогии с доказательством теорем 7.2, 7.3, используя (8.21), нетрудно получить следующую оценку:

$$\mathbf{z}_s^{(l)} \leq K_1 \Delta^2 + K_2 \int_0^s \mathbf{z}_u^{(l)} du, \quad (8.22)$$

где $s \in [0, T]$; постоянные K_1, K_2 не зависят от Δ ; $\mathbf{z}_s^{(l)} \stackrel{\text{def}}{=} \mathbb{M}\{|\mathbf{x}_s^{(l)} - \mathbf{y}_s^{(l)}|^2\}$.

С помощью (8.22) и неравенства Гронуолла имеем

$$\mathbb{M}\{|\mathbf{x}_T^{(l)} - \mathbf{y}_T^{(l)}|\} \leq \sqrt{\mathbf{z}_T^{(l)}} \leq K_3 \Delta$$

или

$$\mathbb{M}\{|\mathbf{x}_T - \mathbf{y}_T|\} \leq K_4 \Delta,$$

где постоянные K_3, K_4 не зависят от Δ . Это означает, что численный метод (8.18) имеет порядок сильной сходимости 1.0.

Нетрудно видеть, что сходимость более точных неявных сильных численных методов может быть доказана по предложенной ранее схеме. Отметим также, что, используя приведенные в данном разделе рассуждения, можно показать, что неявный метод Эйлера (8.1) имеет порядок сильной сходимости 0.5, если выполнены условия теоремы 7.1.

8.5 Сбалансированные неявные сильные численные методы

В начале данной главы (см. также [86. С. 336–337]) уже отмечалось, что введение неявности при построении численных методов не только в систематические, но и в стохастические члены правой части численной схемы приводит к тому, что для конструируемых численных методов, вообще говоря, перестают существовать моментные характеристики.

Приведенные ранее неявные сильные численные методы, в которых неявность входит только в систематические члены, "хорошо" ведут себя по отношению к жестким системам только с несущественной стохастической динамикой (малая интенсивность шума, аддитивный шум) [93]. В тех случаях, когда стохастическая динамика существенна (мультипликативный шум с большой интенсивностью), явные сильные численные методы, а также неявные сильные численные методы с неявностью в систематических членах дают большую ошибку даже при достаточно малых шагах интегрирования [93]. Использование же малых шагов интегрирования ведет к резкому увеличению машинного времени.

Для преодоления указанных вычислительных трудностей для жестких систем с существенной стохастической динамикой в [93] предложено пользоваться семейством так называемых сбалансированных сильных численных методов. Несмотря на то, что неявность в этих численных методах входит в систематические и стохастические слагаемые в [93] проблему существования моментных характеристик для данных численных методов удалось преодолеть.

Приведем общий вид сбалансированных неявных сильных численных методов [93]:

$$\begin{aligned} \mathbf{y}_{p+1} = \mathbf{y}_p + \mathbf{a}(\mathbf{y}_p, \tau_p)\Delta + \Sigma(\mathbf{y}_p, \tau_p)(\mathbf{f}_{\tau_{p+1}} - \mathbf{f}_{\tau_p}) + \\ + C_p(\mathbf{y}_p - \mathbf{y}_{p+1}), \end{aligned} \quad (8.23)$$

где

$$C_p = D_0(\mathbf{y}_p, \tau_p)\Delta + \sum_{i=1}^m D_i(\mathbf{y}_p, \tau_p)|\Delta \mathbf{f}_{\tau_p}^{(i)}|; \quad (8.24)$$

$\Delta \mathbf{f}_{\tau_p}^{(i)} = \mathbf{f}_{\tau_{p+1}}^{(i)} - \mathbf{f}_{\tau_p}^{(i)}$, $i = 1, \dots, m$; $\tau_{p+1} - \tau_p = \Delta$; $\mathbf{y}_{\tau_p} \stackrel{\text{def}}{=} \mathbf{y}_p$, $p = 0, 1, \dots, N-1$; $\mathbf{f}_\tau$ — $\mathcal{F}_\tau$ -измеримый при всех $\tau \in [0, T]$ m -мерный стандартный винеровский процесс с независимыми компонентами $\mathbf{f}_\tau^{(i)}$, $i = 1, \dots, m$; $D_0(\mathbf{x}, t), D_1(\mathbf{x}, t), \dots, D_m(\mathbf{x}, t) : \mathbb{R}^n \times [0, T] \rightarrow \mathbb{R}^{n \times n}$.

В [93] доказана следующая теорема о сильной сходимости численного метода (8.23), (8.24).

Теорема 8.1 [93]. Пусть выполнены следующие условия:

1. Компоненты матриц $D_0(\mathbf{x}, t), D_1(\mathbf{x}, t), \dots, D_m(\mathbf{x}, t)$ ограничены.
2. Для любой последовательности вещественных чисел $\{\alpha_i\}_{i=0}^m$ такой, что $\alpha_0 \in [0, \bar{\alpha}]$, $\alpha_1 \geq 0, \dots, \alpha_m \geq 0$; $\bar{\alpha} \geq \Delta$ и всех $(\mathbf{x}, t) \in \mathbb{R}^n \times [0, T]$ матрица

$$M(\mathbf{x}, t) = I + \alpha_0 D_0(\mathbf{x}, t) + \sum_{i=1}^m \alpha_i D_i(\mathbf{x}, t)$$

имеет обратную, причем $\det(M^{-1}(\mathbf{x}, t)) \leq K < \infty$; I — единичная матрица.

3. Справедливы условия AI–AIII (теорема 1.6).

Тогда для всех $p = 0, 1, \dots, N$ и $\Delta = T/N$, $N = 1, 2, \dots$,

$$(M\{|\mathbf{x}_{\tau_p} - \mathbf{y}_p|^2 | \mathcal{F}_0\})^{\frac{1}{2}} \leq K_1(1 + |\mathbf{x}_0|^2)\sqrt{\Delta},$$

где постоянная K_1 не зависит от Δ ; $\mathbf{x}_t$ — решение стохастического дифференциального уравнения Ито (7.18).

Таким образом, в условиях теоремы 8.1 сбалансированный неявный сильный численный метод (8.23), (8.24) имеет порядок сильной сходимости 0.5. Отметим, что условие 2 теоремы 8.1 выполнено, если матрицы $D_0(\mathbf{x}, t)$, $D_1(\mathbf{x}, t), \dots, D_m(\mathbf{x}, t)$ положительно определены [93].

В работах [93, 99] путем численных экспериментов для стохастических дифференциальных уравнений с мультипликативным шумом показано, что в ряде случаев сбалансированные неявные сильные численные методы более эффективны, чем другие численные методы, в частности, явные численные методы.

Глава 9

Двухшаговые и трехшаговые сильные численные методы решения стохастических дифференциальных уравнений Ито

В настоящей главе на примере двухшаговых и трехшаговых рассматриваются многошаговые сильные методы численного решения стохастических дифференциальных уравнений Ито. С вычислительной точки зрения многошаговые численные методы в ряде случаев являются более эффективными, нежели одношаговые численные методы такого же порядка точности. Это обстоятельство связано с тем, что многошаговые численные методы используют для вычисления решения на k -м шаге интегрирования информацию об этом решении на нескольких предшествующих шагах, в то время как в одношаговых численных методах используется информация о решении только на предыдущем шаге интегрирования. Кроме того, в ряде случаев многошаговые численные методы являются более устойчивыми, чем одношаговые численные методы такого же порядка точности. Отметим, что начальные шаги интегрирования, необходимые для старта многошаговой численной схемы (в случае двухшаговых численных методов требуется один начальный шаг, а в случае трехшаговых — два начальных шага), могут осуществляться, например, с помощью явных одношаговых численных методов такого же порядка точности, как и рассматриваемый многошаговый численный метод.

Двухшаговые сильные численные методы решения стохастических дифференциальных уравнений Ито приводились в ряде работ. Например, в [70] предложен явный двухшаговый сильный численный метод порядка точности 1.5 для стохастического дифференциального уравнения Ито с аддитивным шумом. В [86] получен общий вариант дан-

ного численного метода, а также приведена его конечно-разностная модификация. Там же доказана сильная сходимость явных двухшаговых численных методов общего вида. Неявные сильные двухшаговые численные методы порядка точности 1.0 и 1.5, а также их конечно-разностные модификации получены в [86].

В настоящей главе наряду с известными двухшаговыми сильными численными методами рассматриваются их модификации, основанные на унифицированном разложении Тейлора–Ито. Кроме того, предлагаются новые явные и неявные, в том числе конечно-разностные, сильные двухшаговые численные методы порядка точности 2.0 и 2.5.

В данной главе также рассматриваются пяти и восьми параметрические семейства трехшаговых сильных численных методов порядков точности 1.0 и 1.5 соответственно для стохастических дифференциальных уравнений Ито. Среди этих численных методов представлены также конечно-разностные численные методы.

Отметим, что известные одношаговые и двухшаговые сильные численные методы порядков точности 1.0 и 1.5 для стохастических дифференциальных уравнений Ито получаются при определенном выборе параметров из отмеченных параметрических семейств численных методов.

9.1 Явные двухшаговые методы, основанные на разложениях Тейлора–Ито

9.1.1 Метод порядка точности 1.0

Рассмотрим следующий двухшаговый явный сильный численный метод порядка точности 1.0 [70, 86]:

$$\mathbf{y}_{p+1} = \mathbf{y}_{p-1} + 2\mathbf{a}\Delta + \mathbf{v}_p + \mathbf{v}_{p-1}, \quad (9.1)$$

$$\mathbf{v}_p = \sum_{i_1=1}^m \Sigma_{i_1} \hat{J}_{(1)\tau_{p+1}, \tau_p}^{(i_1)} + \sum_{i_1, i_2=1}^m G_0^{(i_2)} \Sigma_{i_1} \hat{J}_{(11)\tau_{p+1}, \tau_p}^{(i_2 i_1)}, \quad (9.2)$$

где сохранен смысл обозначений, введенных в (7.64).

Обоснование сходимости численного метода (9.1), а также более точных двухшаговых сильных численных методов, будет дано далее.

Численный эксперимент 9.1. *Для стохастического дифференциального уравнения Ито*

$$dx_t = ax_t dt + bx_t df_t, \quad x_0 = 1, \quad t \in [0, T], \quad f_t \in \mathbb{R}^1, \quad (9.3)$$

с моделировать 2000 ($M = 20$ групп по $N = 100$ реализаций) независимых реализаций случайной величины x_T при $T = 1$, $a = b = 1.5$ по формуле

$$x_T = x_0 e^{(a - \frac{1}{2}b^2)T + b\sqrt{\Delta} \sum_{i=0}^{N-1} \zeta_i}$$

и с помощью явного двухшагового сильного численного метода порядка точности 1.0 вида (9.1). Здесь $N = T/\Delta$; $\Delta = 2^{-j}$; ζ_i , $i = 0, 1, \dots, N-1$, — независимые стандартные гауссовские случайные величины. Начальный шаг, необходимый для старта численного метода (9.1), осуществлять с помощью явного метода Г. Н. Мильштейна (7.34).

Вычислить оценку $\hat{\varepsilon}_{100,20}$ ошибки $\varepsilon = M \{|x_T - y_T|\}$ по формуле (7.3) (y_T определяется из (9.1)) и 90%-й доверительный интервал для ε . Повторить вычисления при $\Delta = 2^{-j}$, $j = 4, 5, 6, 7$, и изобразить графически зависимость $\hat{\varepsilon}_{100,20}(\Delta)$ с 90%-ми доверительными интервалами для ε при указанных значениях Δ (рис. 9.1).

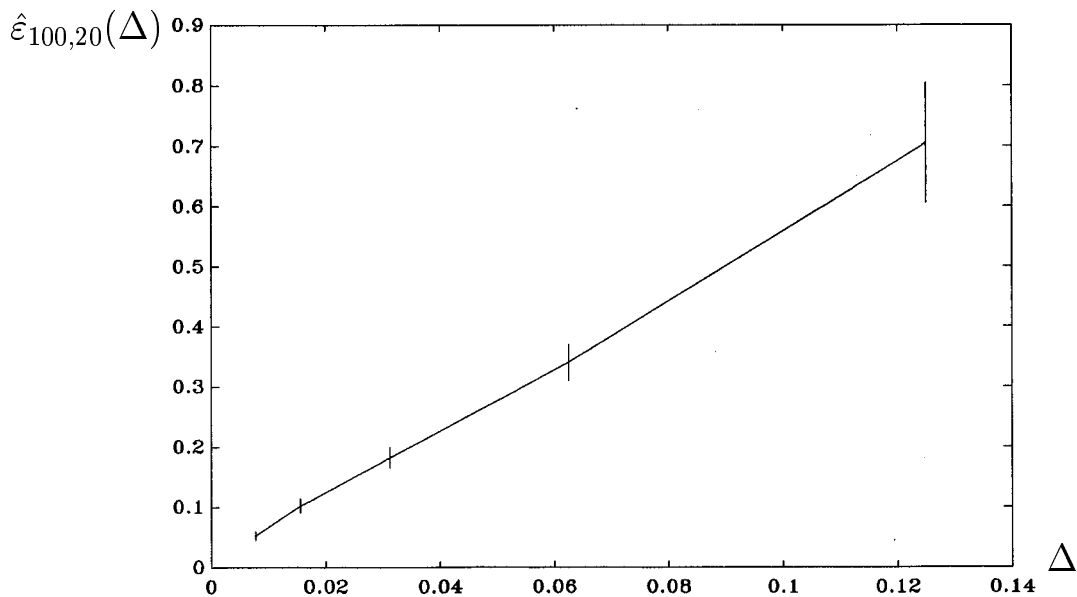


Рис. 9.1. Результат численного эксперимента 9.1.

9.1.2 Методы порядка точности 1.5

Рассмотрим явный двухшаговый сильный численный метод порядка точности 1.5, полученный в [70, 86]:

$$\mathbf{y}_{p+1} = \mathbf{y}_{p-1} + 2\mathbf{a}\Delta - \Delta \sum_{i_1=1}^m G_0^{(i_1)} \mathbf{a}(\mathbf{y}_{p-1}, \tau_{p-1}) \hat{J}_{(1)\tau_p, \tau_{p-1}}^{(i_1)} + \mathbf{v}_p + \mathbf{v}_{p-1}, \quad (9.4)$$

где

$$\begin{aligned} \mathbf{v}_p = & \sum_{i_1=1}^m \Sigma_{i_1} \hat{J}_{(1)\tau_{p+1}, \tau_p}^{(i_1)} + \sum_{i_1, i_2=1}^m G_0^{(i_2)} \Sigma_{i_1} \hat{J}_{(11)\tau_{p+1}, \tau_p}^{(i_2 i_1)} + \\ & + \sum_{i_1=1}^m \left[G_0^{(i_1)} \mathbf{a} \hat{J}_{(10)\tau_{p+1}, \tau_p}^{(i_1)} + L \Sigma_{i_1} \hat{J}_{(01)\tau_{p+1}, \tau_p}^{(i_1)} \right] + \\ & + \sum_{i_1, i_2, i_3=1}^m G_0^{(i_3)} G_0^{(i_2)} \Sigma_{i_1} \hat{J}_{(111)\tau_{p+1}, \tau_p}^{(i_3 i_2 i_1)}. \end{aligned} \quad (9.5)$$

Аналог численного метода (9.4), который основывается на унифицированном разложении Тейлора–Ито, имеет вид

$$\mathbf{y}_{p+1} = \mathbf{y}_{p-1} + 2\mathbf{a}\Delta - \Delta \sum_{i_1=1}^m G_0^{(i_1)} \mathbf{a}(\mathbf{y}_{p-1}, \tau_{p-1}) \hat{I}_{0\tau_p, \tau_{p-1}}^{(i_1)} + \mathbf{v}_p + \mathbf{v}_{p-1}, \quad (9.6)$$

где

$$\begin{aligned} \mathbf{v}_p = & \sum_{i_1=1}^m \Sigma_{i_1} \hat{I}_{0\tau_{p+1}, \tau_p}^{(i_1)} + \sum_{i_1, i_2=1}^m G_0^{(i_2)} \Sigma_{i_1} \hat{I}_{00\tau_{p+1}, \tau_p}^{(i_2 i_1)} + \\ & + \sum_{i_1=1}^m \left[G_0^{(i_1)} \mathbf{a} \left(\Delta \hat{I}_{0\tau_{p+1}, \tau_p}^{(i_1)} + \hat{I}_{1\tau_{p+1}, \tau_p}^{(i_1)} \right) - L \Sigma_{i_1} \hat{I}_{1\tau_{p+1}, \tau_p}^{(i_1)} \right] + \\ & + \sum_{i_1, i_2, i_3=1}^m G_0^{(i_3)} G_0^{(i_2)} \Sigma_{i_1} \hat{I}_{000\tau_{p+1}, \tau_p}^{(i_3 i_2 i_1)}. \end{aligned} \quad (9.7)$$

Численный эксперимент 9.2 (рис. 9.2). Повторить численный эксперимент 9.1 для явного двухшагового сильного численного метода порядка точности 1.5 вида (9.6).

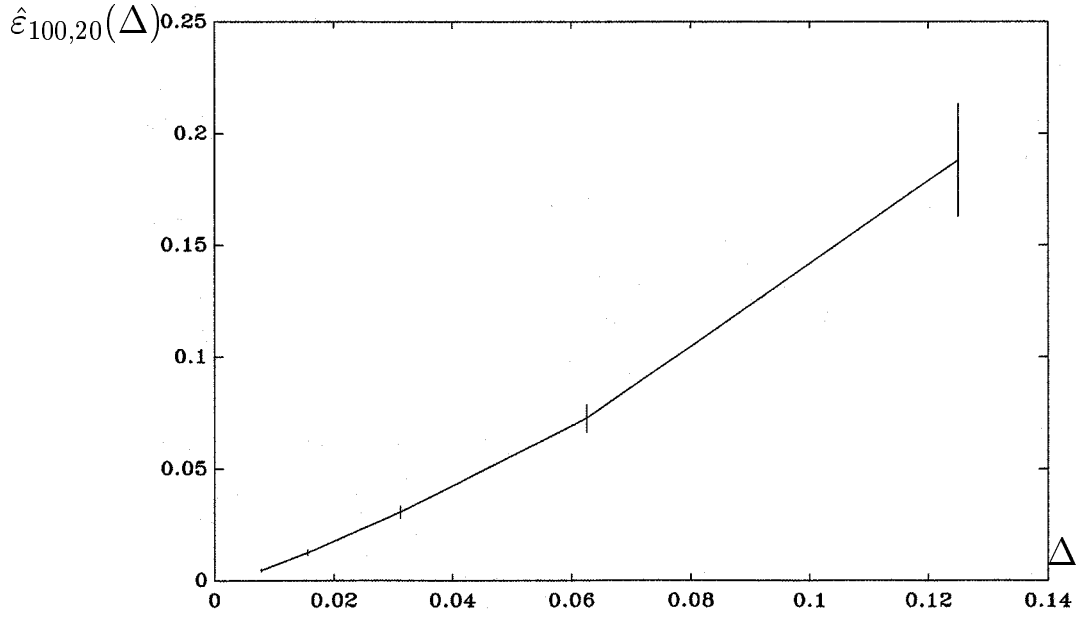


Рис. 9.2. Результат численного эксперимента 9.2.

Начальный шаг, необходимый для старта численного метода (9.6), осуществлять с помощью явного одношагового сильного численного метода порядка точности 1.5 вида (7.45). При этом не моделировать те повторные стохастические интегралы Ито, коэффициенты перед которыми оказываются равными нулю после применения численного метода (9.6) к уравнению (9.3) и приведения подобных членов (это же касается и начального шага).

9.1.3 Методы порядка точности 2.0

Дополнив величину $\mathbf{v}_p$ вида (9.7) стохастическими слагаемыми порядка $O(\Delta^2)$ из разложения Тейлора–Ито, получим следующую явную двухшаговую численную схему порядка точности 2.0 [86]:

$$\begin{aligned} \mathbf{y}_{p+1} = & \mathbf{y}_{p-1} + 2\mathbf{a}\Delta - \Delta \left[\sum_{i_1=1}^m G_0^{(i_1)} \mathbf{a}(\mathbf{y}_{p-1}, \tau_{p-1}) \hat{J}_{(1)\tau_p, \tau_{p-1}}^{(i_1)} + \right. \\ & \left. + \sum_{i_1, i_2=1}^m G_0^{(i_2)} G_0^{(i_1)} \mathbf{a}(\mathbf{y}_{p-1}, \tau_{p-1}) \hat{J}_{(11)\tau_p, \tau_{p-1}}^{(i_2 i_1)} \right] + \mathbf{v}_p + \mathbf{v}_{p-1}, \end{aligned} \quad (9.8)$$

где

$$\begin{aligned}
\mathbf{v}_p = & \sum_{i_1=1}^m \Sigma_{i_1} \hat{J}_{(1)\tau_{p+1}, \tau_p}^{(i_1)} + \sum_{i_1, i_2=1}^m G_0^{(i_2)} \Sigma_{i_1} \hat{J}_{(11)\tau_{p+1}, \tau_p}^{(i_2 i_1)} + \\
& + \sum_{i_1=1}^m \left[G_0^{(i_1)} \mathbf{a} \hat{J}_{(10)\tau_{p+1}, \tau_p}^{(i_1)} + L \Sigma_{i_1} \hat{J}_{(01)\tau_{p+1}, \tau_p}^{(i_1)} \right] + \\
& + \sum_{i_1, i_2, i_3=1}^m G_0^{(i_3)} G_0^{(i_2)} \Sigma_{i_1} \hat{J}_{(111)\tau_{p+1}, \tau_p}^{(i_3 i_2 i_1)} + \\
& + \sum_{i_1, i_2=1}^m \left[G_0^{(i_2)} L \Sigma_{i_1} \hat{J}_{(101)\tau_{p+1}, \tau_p}^{(i_2 i_1)} + L G_0^{(i_2)} \Sigma_{i_1} \hat{J}_{(011)\tau_{p+1}, \tau_p}^{(i_2 i_1)} \right. \\
& \quad \left. + G_0^{(i_2)} G_0^{(i_1)} \mathbf{a} \hat{J}_{(110)\tau_{p+1}, \tau_p}^{(i_2 i_1)} \right] + \\
& + \sum_{i_1, i_2, i_3, i_4=1}^m G_0^{(i_4)} G_0^{(i_3)} G_0^{(i_2)} \Sigma_{i_1} \hat{J}_{(1111)\tau_{p+1}, \tau_p}^{(i_4 i_3 i_2 i_1)}. \tag{9.9}
\end{aligned}$$

Вариант численной схемы (9.8), основанный на унифицированном разложении Тейлора–Ито, запишем в следующем виде:

$$\begin{aligned}
\mathbf{y}_{p+1} = & \mathbf{y}_{p-1} + 2\mathbf{a}\Delta - \Delta \left[\sum_{i_1=1}^m G_0^{(i_1)} \mathbf{a}(\mathbf{y}_{p-1}, \tau_{p-1}) \hat{I}_{0\tau_p, \tau_{p-1}}^{(i_1)} + \right. \\
& \left. + \sum_{i_1, i_2=1}^m G_0^{(i_2)} G_0^{(i_1)} \mathbf{a}(\mathbf{y}_{p-1}, \tau_{p-1}) \hat{I}_{00\tau_p, \tau_{p-1}}^{(i_2 i_1)} \right] + \mathbf{v}_p + \mathbf{v}_{p-1}, \tag{9.10}
\end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned}
\mathbf{v}_p = & \sum_{i_1=1}^m \Sigma_{i_1} \hat{I}_{0\tau_{p+1}, \tau_p}^{(i_1)} + \sum_{i_1, i_2=1}^m G_0^{(i_2)} \Sigma_{i_1} \hat{I}_{00\tau_{p+1}, \tau_p}^{(i_2 i_1)} + \\
& + \sum_{i_1=1}^m \left[G_0^{(i_1)} \mathbf{a} \left(\Delta \hat{I}_{0\tau_{p+1}, \tau_p}^{(i_1)} + \hat{I}_{1\tau_{p+1}, \tau_p}^{(i_1)} \right) - L \Sigma_{i_1} \hat{I}_{1\tau_{p+1}, \tau_p}^{(i_1)} \right] + \\
& + \sum_{i_1, i_2, i_3=1}^m G_0^{(i_3)} G_0^{(i_2)} \Sigma_{i_1} \hat{I}_{000\tau_{p+1}, \tau_p}^{(i_3 i_2 i_1)} + \\
& + \sum_{i_1, i_2=1}^m \left[G_0^{(i_2)} L \Sigma_{i_1} \left(\hat{I}_{10\tau_{p+1}, \tau_p}^{(i_2 i_1)} - \hat{I}_{01\tau_{p+1}, \tau_p}^{(i_2 i_1)} \right) - L G_0^{(i_2)} \Sigma_{i_1} \hat{I}_{10\tau_{p+1}, \tau_p}^{(i_2 i_1)} \right. \\
& \quad \left. + G_0^{(i_2)} G_0^{(i_1)} \mathbf{a} \left(\hat{I}_{01\tau_{p+1}, \tau_p}^{(i_2 i_1)} + \Delta \hat{I}_{00\tau_{p+1}, \tau_p}^{(i_2 i_1)} \right) \right] + \\
& + \sum_{i_1, i_2, i_3, i_4=1}^m G_0^{(i_4)} G_0^{(i_3)} G_0^{(i_2)} \Sigma_{i_1} \hat{I}_{0000\tau_{p+1}, \tau_p}^{(i_4 i_3 i_2 i_1)}. \tag{9.11}
\end{aligned}$$

Численный эксперимент 9.3 (рис. 9.3). Повторить численный эксперимент 9.2 для явного двухшагового сильного численного метода порядка точности 2.0 вида (9.10).

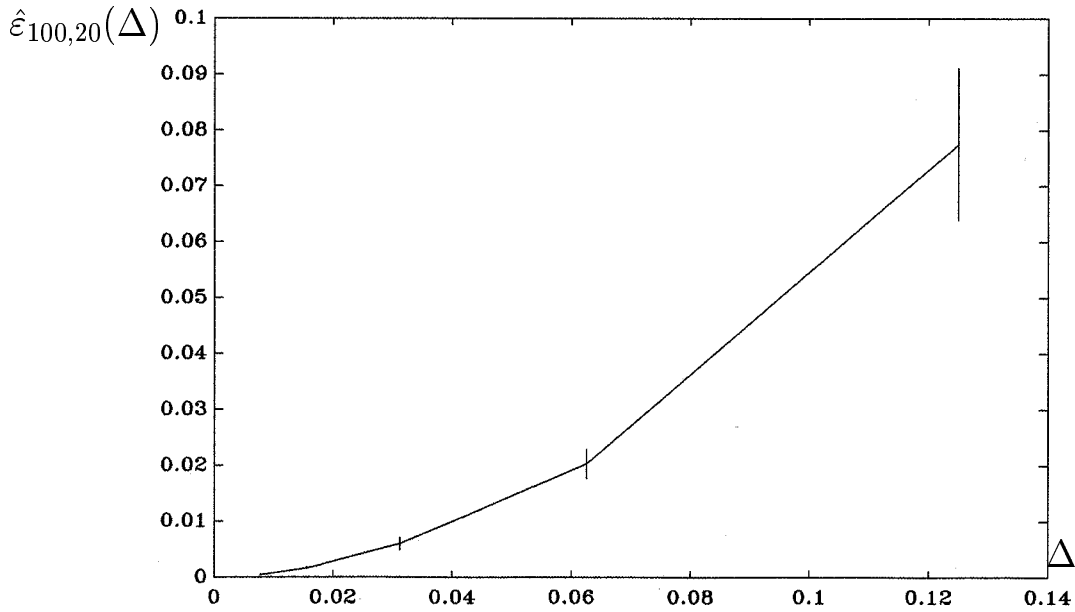


Рис. 9.3. Результат численного эксперимента 9.3.

Начальный шаг, необходимый для старта численного метода (9.10), осуществлять с помощью явного одношагового сильного численного метода порядка точности 2.0 вида (7.55).

9.2 Неявные двухшаговые методы, основанные на разложениях Тейлора–Ито

9.2.1 Методы порядка точности 1.0 и 1.5

Рассмотрим трехпараметрическое семейство неявных двухшаговых сильных численных методов порядка точности 1.0 [70, 86]:

$$\begin{aligned}
 \mathbf{y}_{p+1}^{(l)} = & (1 - \tilde{\gamma}_l) \mathbf{y}_p^{(l)} + \tilde{\gamma}_l \mathbf{y}_{p-1}^{(l)} + \Delta \left\{ \tilde{\alpha}_l^{(2)} \mathbf{a}^{(l)}(\mathbf{y}_{p+1}, \tau_{p+1}) + \right. \\
 & \left. + (1 - \tilde{\alpha}_l^{(2)} + \tilde{\gamma}_l \tilde{\alpha}_l^{(1)}) \mathbf{a}^{(l)} + (1 - \tilde{\alpha}_l^{(1)}) \tilde{\gamma}_l \mathbf{a}^{(l)}(\mathbf{y}_{p-1}, \tau_{p-1}) \right\} + \\
 & + \mathbf{v}_p^{(l)} + \tilde{\gamma}_l \mathbf{v}_{p-1}^{(l)},
 \end{aligned} \tag{9.12}$$

где $\tilde{\gamma}_l, \tilde{\alpha}_l^{(1)}, \tilde{\alpha}_l^{(2)} \in [0, 1]$, а $\mathbf{v}_p \in \mathbb{R}^n$ и имеет вид (9.2).

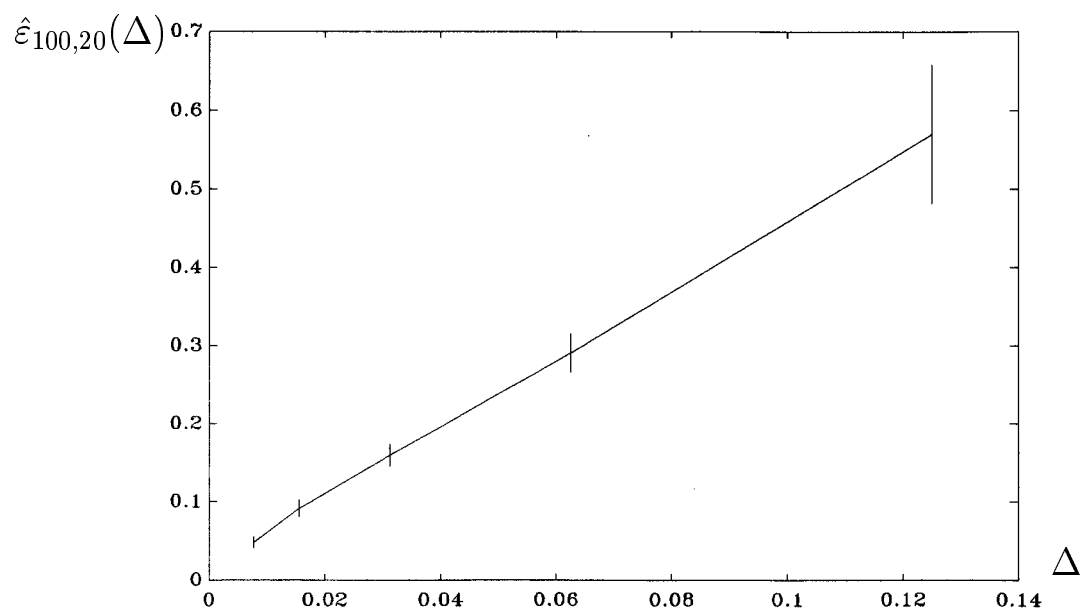


Рис. 9.4. Результат численного эксперимента 9.4.

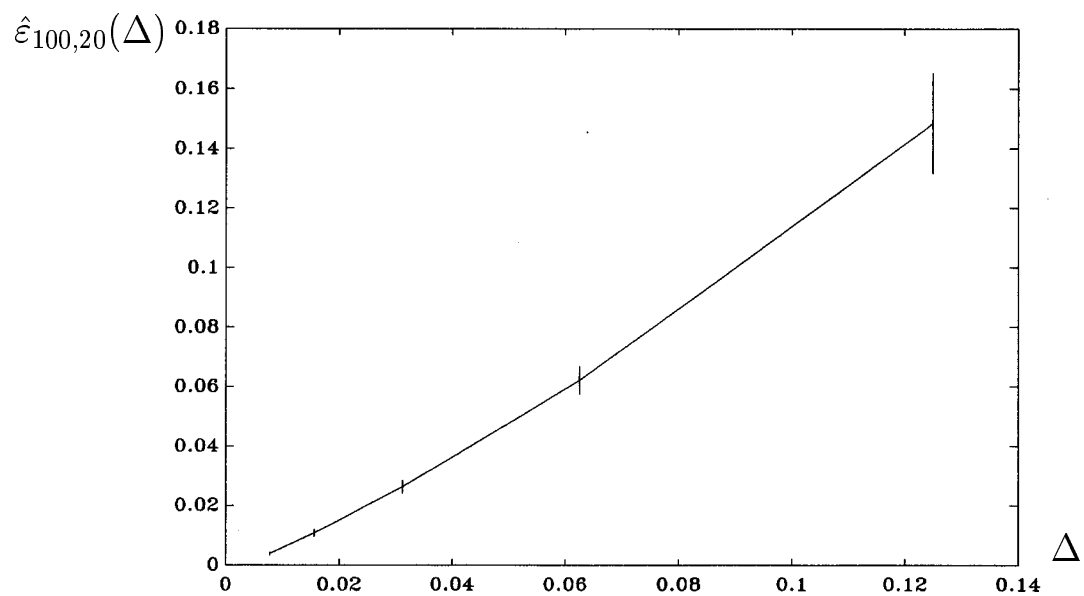


Рис. 9.5. Результат численного эксперимента 9.5.

Нетрудно видеть, что при $\tilde{\gamma}_l = \tilde{\alpha}_l^{(1)} = 1$, $\tilde{\alpha}_l^{(2)} = 0$ численный метод (9.12) принимает вид (9.1), т. е. превращается в явный двухшаговый сильный численный метод порядка точности 1.0. Если в (9.12) положить $\tilde{\gamma}_l = 0$, $\tilde{\alpha}_l^{(2)} = \frac{1}{2}$, то (9.12) превращается в неявный одношаговый численный метод, который совпадает с численным методом (8.3), если там положить $\tilde{\alpha}_l = \frac{1}{2}$.

Рассмотрим однопараметрическое семейство неявных двухшаговых сильных численных методов порядка точности 1.5 [86]:

$$\begin{aligned} \mathbf{y}_{p+1}^{(l)} = & (1 - \tilde{\gamma}_l) \mathbf{y}_p^{(l)} + \tilde{\gamma}_l \mathbf{y}_{p-1}^{(l)} + \frac{1}{2} \Delta \{ \mathbf{a}^{(l)}(\mathbf{y}_{p+1}, \tau_{p+1}) + \\ & + (1 + \tilde{\gamma}_l) \mathbf{a}^{(l)} + \tilde{\gamma}_l \mathbf{a}^{(l)}(\mathbf{y}_{p-1}, \tau_{p-1}) \} + \\ & + \tilde{\mathbf{v}}_p^{(l)} + \tilde{\gamma}_l \tilde{\mathbf{v}}_{p-1}^{(l)}, \end{aligned} \quad (9.13)$$

где $\tilde{\gamma}_l \in [0, 1]$, а $\tilde{\mathbf{v}}_p$ имеет вид

$$\tilde{\mathbf{v}}_p = \mathbf{v}_p - \frac{1}{2} \Delta \sum_{i_1=1}^m G_0^{(i_1)} \mathbf{a} \hat{J}_{(1)\tau_{p+1}, \tau_p}^{(i_1)},$$

где $\mathbf{v}_p$ соответствует (9.5).

Версия численного метода (9.13), основанная на унифицированном разложении Тейлора–Ито, включает в себя величины $\tilde{\mathbf{v}}_p^{(l)}$, $\tilde{\mathbf{v}}_{p-1}^{(l)}$, которые определяются равенством

$$\tilde{\mathbf{v}}_p = \mathbf{v}_p - \frac{1}{2} \Delta \sum_{i_1=1}^m G_0^{(i_1)} \mathbf{a} \hat{I}_{0\tau_{p+1}, \tau_p}^{(i_1)}, \quad (9.14)$$

где $\mathbf{v}_p$ характеризуется равенством (9.7).

Отметим, что если в (9.13) $\tilde{\gamma}_l = 0$, то (9.13) превратится в неявный одношаговый численный метод, который совпадет с численным методом (8.4) или (8.5), если в (8.4) или (8.5) положить $\tilde{\alpha}_l = \frac{1}{2}$, $\tilde{\beta}_l \in [0, 1]$.

Численный эксперимент 9.4 (рис. 9.4). *Повторить численный эксперимент 9.1 для неявного двухшагового сильного численного метода порядка точности 1.0 вида (9.12), (9.2) при $\tilde{\gamma}_1 = 1$, $\tilde{\alpha}_1^{(2)} = \tilde{\alpha}_1^{(1)} = \frac{1}{2}$. Начальный шаг, необходимый для старта численного метода (9.12), (9.2), осуществлять с помощью явного одношагового сильного численного метода порядка точности 1.0 вида (7.34).*

Численный эксперимент 9.5 (рис. 9.5). *Повторить численный эксперимент 9.2 для неявного двухшагового сильного численного метода порядка точности 1.5 вида (9.13), (9.14), (9.7) при $\tilde{\gamma}_1 = 1$.*

Начальный шаг, необходимый для старта численного метода (9.13), (9.14), (9.7), осуществлять с помощью явного одношагового сильного численного метода порядка точности 1.5 вида (7.45).

9.2.2 Методы порядка точности 2.0 и 2.5

Рассмотрим следующий неявный двухшаговый сильный численный метод порядка точности 2.0:

$$\mathbf{y}_{p+1} = \mathbf{y}_{p-1} + \frac{1}{2}\Delta \{ \mathbf{a}(\mathbf{y}_{p+1}, \tau_{p+1}) + 2\mathbf{a} + \mathbf{a}(\mathbf{y}_{p-1}, \tau_{p-1}) \} + \tilde{\mathbf{v}}_p + \tilde{\mathbf{v}}_{p-1}, \quad (9.15)$$

где

$$\tilde{\mathbf{v}}_p = \mathbf{v}_p - \frac{1}{2}\Delta \left\{ \sum_{i_1=1}^m G_0^{(i_1)} \mathbf{a} \hat{J}_{(1)\tau_{p+1}, \tau_p}^{(i_1)} + \sum_{i_1, i_2=1}^m G_0^{(i_2)} G_0^{(i_1)} \mathbf{a} \hat{J}_{(11)\tau_{p+1}, \tau_p}^{(i_2 i_1)} \right\}, \quad (9.16)$$

а $\mathbf{v}_p$ имеет вид (9.9).

Если при построении численного метода (9.15) используется унифицированное разложение Тейлора–Ито, то $\tilde{\mathbf{v}}_p$ в (9.15) имеет вид (9.16), где $\mathbf{v}_p$ определяется равенством (9.11).

Для построения неявного двухшагового сильного численного метода порядка точности 2.5 можно воспользоваться численной схемой (9.15), но величину $\tilde{\mathbf{v}}_p$ необходимо выбрать в виде

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbf{v}}_p = \mathbf{v}_p - \frac{1}{2}\Delta & \left[\sum_{i_1=1}^m \left(G_0^{(i_1)} \mathbf{a} \hat{J}_{(1)\tau_{p+1}, \tau_p}^{(i_1)} + G_0^{(i_1)} L \mathbf{a} \hat{J}_{(10)\tau_{p+1}, \tau_p}^{(i_1)} \right. \right. \\ & + L G_0^{(i_1)} \mathbf{a} \hat{J}_{(01)\tau_{p+1}, \tau_p}^{(i_1)} \left. \right) + \sum_{i_1, i_2=1}^m G_0^{(i_2)} G_0^{(i_1)} \mathbf{a} \hat{J}_{(11)\tau_{p+1}, \tau_p}^{(i_2 i_1)} + \\ & + \sum_{i_1, i_2, i_3=1}^m G_0^{(i_3)} G_0^{(i_2)} G_0^{(i_1)} \mathbf{a} \hat{J}_{(111)\tau_{p+1}, \tau_p}^{(i_3 i_2 i_1)} \left. \right] - \frac{\Delta^3}{12} L^2 \mathbf{a}, \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned} \mathbf{v}_p = & \sum_{i_1=1}^m \Sigma_{i_1} \hat{J}_{(1)\tau_{p+1}, \tau_p}^{(i_1)} + \sum_{i_1, i_2=1}^m G_0^{(i_2)} \Sigma_{i_1} \hat{J}_{(11)\tau_{p+1}, \tau_p}^{(i_2 i_1)} + \\ & + \sum_{i_1=1}^m \left[G_0^{(i_1)} \mathbf{a} \hat{J}_{(10)\tau_{p+1}, \tau_p}^{(i_1)} + L \Sigma_{i_1} \hat{J}_{(01)\tau_{p+1}, \tau_p}^{(i_1)} \right] + \\ & + \sum_{i_1, i_2, i_3=1}^m G_0^{(i_3)} G_0^{(i_2)} \Sigma_{i_1} \hat{J}_{(111)\tau_{p+1}, \tau_p}^{(i_3 i_2 i_1)} + \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \sum_{i_1, i_2=1}^m \left[G_0^{(i_2)} L \Sigma_{i_1} \hat{J}_{(101)\tau_{p+1}, \tau_p}^{(i_2 i_1)} + L G_0^{(i_2)} \Sigma_{i_1} \hat{J}_{(011)\tau_{p+1}, \tau_p}^{(i_2 i_1)} + \right. \\
& \quad \left. + G_0^{(i_2)} G_0^{(i_1)} \mathbf{a} \hat{J}_{(110)\tau_{p+1}, \tau_p}^{(i_2 i_1)} \right] + \\
& \quad + \sum_{i_1, i_2, i_3, i_4=1}^m G_0^{(i_4)} G_0^{(i_3)} G_0^{(i_2)} \Sigma_{i_1} \hat{J}_{(1111)\tau_{p+1}, \tau_p}^{(i_4 i_3 i_2 i_1)} + \\
& + \sum_{i_1=1}^m \left[G_0^{(i_1)} L \mathbf{a} \hat{J}_{(100)\tau_{p+1}, \tau_p}^{(i_1)} + L L \Sigma_{i_1} \hat{J}_{(001)\tau_{p+1}, \tau_p}^{(i_1)} + L G_0^{(i_1)} \mathbf{a} \hat{J}_{(010)\tau_{p+1}, \tau_p}^{(i_1)} \right] + \\
& + \sum_{i_1, i_2, i_3=1}^m \left[G_0^{(i_3)} L G_0^{(i_2)} \Sigma_{i_1} \hat{J}_{(1011)\tau_{p+1}, \tau_p}^{(i_3 i_2 i_1)} + G_0^{(i_3)} G_0^{(i_2)} L \Sigma_{i_1} \hat{J}_{(1101)\tau_{p+1}, \tau_p}^{(i_3 i_2 i_1)} + \right. \\
& \quad + G_0^{(i_3)} G_0^{(i_2)} G_0^{(i_1)} \mathbf{a} \hat{J}_{(1110)\tau_{p+1}, \tau_p}^{(i_3 i_2 i_1)} + \\
& \quad \left. + L G_0^{(i_3)} G_0^{(i_2)} \Sigma_{i_1} \hat{J}_{(0111)\tau_{p+1}, \tau_p}^{(i_3 i_2 i_1)} \right] + \\
& + \sum_{i_1, i_2, i_3, i_4, i_5=1}^m G_0^{(i_5)} G_0^{(i_4)} G_0^{(i_3)} G_0^{(i_2)} \Sigma_{i_1} \hat{J}_{(11111)\tau_{p+1}, \tau_p}^{(i_5 i_4 i_3 i_2 i_1)}.
\end{aligned}$$

Если для построения неявного двухшагового сильного численного метода порядка точности 2.5 используются (9.15) и унифицированное разложение Тейлора–Ито, то $\tilde{\mathbf{v}}_p$ в (9.15) имеет вид

$$\begin{aligned}
\tilde{\mathbf{v}}_p = \mathbf{v}_p - \frac{1}{2} \Delta \left[\sum_{i_1=1}^m \left(G_0^{(i_1)} \mathbf{a} \hat{I}_{0\tau_{p+1}, \tau_p}^{(i_1)} + G_0^{(i_1)} L \mathbf{a} \left(\Delta \hat{I}_{0\tau_{p+1}, \tau_p}^{(i_1)} + \hat{I}_{1\tau_{p+1}, \tau_p}^{(i_1)} \right) - \right. \right. \\
\left. \left. - L G_0^{(i_1)} \mathbf{a} \hat{I}_{1\tau_{p+1}, \tau_p}^{(i_1)} \right) + \sum_{i_1, i_2=1}^m G_0^{(i_2)} G_0^{(i_1)} \mathbf{a} \hat{I}_{00\tau_{p+1}, \tau_p}^{(i_2 i_1)} + \right. \\
\left. + \sum_{i_1, i_2, i_3=1}^m G_0^{(i_3)} G_0^{(i_2)} G_0^{(i_1)} \mathbf{a} \hat{I}_{000\tau_{p+1}, \tau_p}^{(i_3 i_2 i_1)} \right] - \frac{\Delta^3}{12} L^2 \mathbf{a}, \quad (9.17)
\end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned}
\mathbf{v}_p = \sum_{i_1=1}^m \Sigma_{i_1} \hat{I}_{0\tau_{p+1}, \tau_p}^{(i_1)} + \sum_{i_1, i_2=1}^m G_0^{(i_2)} \Sigma_{i_1} \hat{I}_{00\tau_{p+1}, \tau_p}^{(i_2 i_1)} + \\
+ \sum_{i_1=1}^m \left[G_0^{(i_1)} \mathbf{a} \left(\Delta \hat{I}_{0\tau_{p+1}, \tau_p}^{(i_1)} + \hat{I}_{1\tau_{p+1}, \tau_p}^{(i_1)} \right) - L \Sigma_{i_1} \hat{I}_{1\tau_{p+1}, \tau_p}^{(i_1)} \right] + \\
+ \sum_{i_1, i_2, i_3=1}^m G_0^{(i_3)} G_0^{(i_2)} \Sigma_{i_1} \hat{I}_{000\tau_{p+1}, \tau_p}^{(i_3 i_2 i_1)} + \\
+ \sum_{i_1, i_2=1}^m \left[G_0^{(i_2)} L \Sigma_{i_1} \left(\hat{I}_{10\tau_{p+1}, \tau_p}^{(i_2 i_1)} - \hat{I}_{01\tau_{p+1}, \tau_p}^{(i_2 i_1)} \right) - L G_0^{(i_2)} \Sigma_{i_1} \hat{I}_{10\tau_{p+1}, \tau_p}^{(i_2 i_1)} + \right.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + G_0^{(i_2)} G_0^{(i_1)} \mathbf{a} \left(\hat{I}_{01\tau_{p+1}, \tau_p}^{(i_2 i_1)} + \Delta \hat{I}_{00\tau_{p+1}, \tau_p}^{(i_2 i_1)} \right) \Big] + \\
& + \sum_{i_1, i_2, i_3, i_4=1}^m G_0^{(i_4)} G_0^{(i_3)} G_0^{(i_2)} \Sigma_{i_1} \hat{I}_{0000\tau_{p+1}, \tau_p}^{(i_4 i_3 i_2 i_1)} + \\
& + \sum_{i_1=1}^m \left[G_0^{(i_1)} L \mathbf{a} \left(\frac{1}{2} \hat{I}_{2\tau_{p+1}, \tau_p}^{(i_1)} + \Delta \hat{I}_{1\tau_{p+1}, \tau_p}^{(i_1)} + \frac{1}{2} \Delta^2 \hat{I}_{0\tau_{p+1}, \tau_p}^{(i_1)} \right) + \right. \\
& + \frac{1}{2} L L \Sigma_{i_1} \hat{I}_{2\tau_{p+1}, \tau_p}^{(i_1)} - L G_0^{(i_1)} \mathbf{a} \left(\hat{I}_{2\tau_{p+1}, \tau_p}^{(i_1)} + \Delta \hat{I}_{1\tau_{p+1}, \tau_p}^{(i_1)} \right) \Big] + \\
& + \sum_{i_1, i_2, i_3=1}^m \left[G_0^{(i_3)} L G_0^{(i_2)} \Sigma_{i_1} \left(\hat{I}_{100\tau_{p+1}, \tau_p}^{(i_3 i_2 i_1)} - \hat{I}_{010\tau_{p+1}, \tau_p}^{(i_3 i_2 i_1)} \right) + \right. \\
& + G_0^{(i_3)} G_0^{(i_2)} L \Sigma_{i_1} \left(\hat{I}_{010\tau_{p+1}, \tau_p}^{(i_3 i_2 i_1)} - \hat{I}_{001\tau_{p+1}, \tau_p}^{(i_3 i_2 i_1)} \right) + \\
& + G_0^{(i_3)} G_0^{(i_2)} G_0^{(i_1)} \mathbf{a} \left(\Delta \hat{I}_{000\tau_{p+1}, \tau_p}^{(i_3 i_2 i_1)} + \hat{I}_{001\tau_{p+1}, \tau_p}^{(i_3 i_2 i_1)} \right) - \\
& \left. - L G_0^{(i_3)} G_0^{(i_2)} \Sigma_{i_1} \hat{I}_{100\tau_{p+1}, \tau_p}^{(i_3 i_2 i_1)} \right] + \\
& + \sum_{i_1, i_2, i_3, i_4, i_5=1}^m G_0^{(i_5)} G_0^{(i_4)} G_0^{(i_3)} G_0^{(i_2)} \Sigma_{i_1} \hat{I}_{00000\tau_{p+1}, \tau_p}^{(i_5 i_4 i_3 i_2 i_1)}. \tag{9.18}
\end{aligned}$$

Численный эксперимент 9.6 (рис. 9.6). Повторить численный эксперимент 9.2 для неявного двухшагового сильного численного метода порядка точности 2.0 вида (9.15), (9.16), (9.11). Начальный шаг, необходимый для старта численного метода (9.15), (9.16), (9.11), осуществлять с помощью явного одношагового сильного численного метода порядка точности 2.0 вида (7.55).

Численный эксперимент 9.7 (рис. 9.7). Повторить численный эксперимент 9.2 для неявного двухшагового сильного численного метода порядка точности 2.5 вида (9.15), (9.17), (9.18).

Начальный шаг, необходимый для старта численного метода (9.15), (9.17), (9.18), осуществлять с помощью явного одношагового сильного численного метода порядка точности 2.5 вида (7.57).

9.3 О сходимости неявных сильных двухшаговых методов

В данном разделе на примере численного метода (9.12) покажем, как может быть обоснована сходимость неявных двухшаговых сильных численных методов.

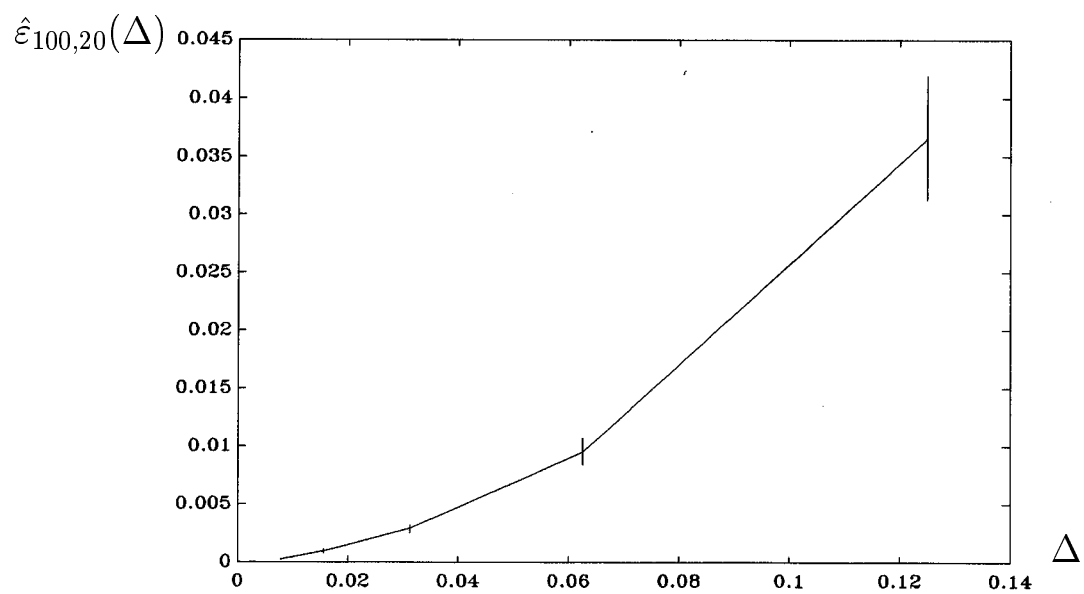


Рис. 9.6. Результат численного эксперимента 9.6.

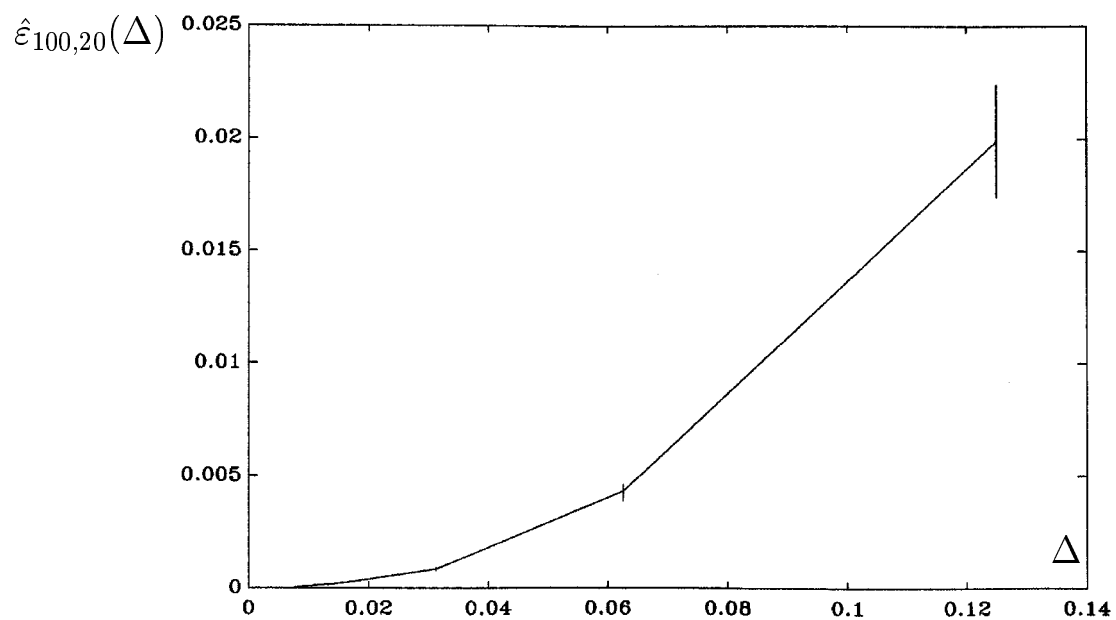


Рис. 9.7. Результат численного эксперимента 9.7.

Перепишем численный метод (9.12) [86]:

$$\begin{aligned} \mathbf{y}_{\tau_{p+1}}^{(l)} = & (1 - \tilde{\gamma}_l) \mathbf{y}_{\tau_p}^{(l)} + \tilde{\gamma}_l \mathbf{y}_{\tau_{p-1}}^{(l)} + \Delta \left\{ \tilde{\alpha}_l^{(2)} \mathbf{a}^{(l)}(\mathbf{y}_{\tau_{p+1}}, \tau_{p+1}) + \right. \\ & + (1 - \tilde{\alpha}_l^{(2)} + \tilde{\gamma}_l \tilde{\alpha}_l^{(1)}) \mathbf{a}^{(l)}(\mathbf{y}_{\tau_p}, \tau_p) + (1 - \tilde{\alpha}_l^{(1)}) \tilde{\gamma}_l \mathbf{a}^{(l)}(\mathbf{y}_{\tau_{p-1}}, \tau_{p-1}) \left. \right\} + \\ & + \mathbf{v}_{\tau_{p+1}, \tau_p}^{(l)} + \tilde{\gamma}_l \mathbf{v}_{\tau_p, \tau_{p-1}}^{(l)}, \end{aligned} \quad (9.19)$$

где $\tilde{\gamma}_l, \tilde{\alpha}_l^{(1)}, \tilde{\alpha}_l^{(2)} \in [0, 1]$, а $\mathbf{v}_{\tau_{p+1}, \tau_p}$ имеет вид

$$\mathbf{v}_{\tau_{p+1}, \tau_p} = \sum_{i_1=1}^m \Sigma_{i_1}(\mathbf{y}_{\tau_p}, \tau_p) \hat{I}_{0\tau_{p+1}, \tau_p}^{(i_1)} + \sum_{i_1, i_2=1}^m G_0^{(i_2)} \Sigma_{i_1}(\mathbf{y}_{\tau_p}, \tau_p) \hat{I}_{00\tau_{p+1}, \tau_p}^{(i_2 i_1)}.$$

Докажем сходимость численного метода (9.19).

Используя формулу Ито и разложение Тейлора–Ито, получаем

$$\mathbf{a}^{(l)}(\mathbf{x}_{\tau_{p+1}}, \tau_{p+1}) = \mathbf{a}^{(l)}(\mathbf{x}_{\tau_p}, \tau_p) + R_{\tau_{p+1}, \tau_p}^{(l)} \text{ с в.1,} \quad (9.20)$$

$$\mathbf{x}_{\tau_{p+1}}^{(l)} = \mathbf{x}_{\tau_p}^{(l)} + \Delta \mathbf{a}^{(l)}(\mathbf{x}_{\tau_p}, \tau_p) + \mathbf{d}_{\tau_{p+1}, \tau_p}^{(l)} + H_{3\tau_{p+1}, \tau_p}^{(l)} \text{ с в.1,} \quad (9.21)$$

где

$$\begin{aligned} R_{\tau_{p+1}, \tau_p}^{(l)} = & \int_{\tau_p}^{\tau_{p+1}} L \mathbf{a}^{(l)}(\mathbf{x}_s, s) ds + \sum_{i_1=1}^m \int_{\tau_p}^{\tau_{p+1}} G_0^{(i_1)} \mathbf{a}^{(l)}(\mathbf{x}_s, s) d\mathbf{f}_s^{(i_1)}; \\ \mathbf{d}_{\tau_{p+1}, \tau_p}^{(l)} = & \sum_{i_1=1}^m \Sigma^{(i_1)}(\mathbf{x}_{\tau_p}, \tau_p) I_{0\tau_{p+1}, \tau_p}^{(i_1)} + \sum_{i_1, i_2=1}^m G_0^{(i_2)} \Sigma^{(i_1)}(\mathbf{x}_{\tau_p}, \tau_p) I_{00\tau_{p+1}, \tau_p}^{(i_2 i_1)}; \end{aligned}$$

$H_{3\tau_{p+1}, \tau_p}^{(l)}$ — остаточный член разложения Тейлора–Ито, который имеет порядок малости $\frac{3}{2}$ при $\Delta \downarrow 0$; $\mathbf{x}_s$ — решение стохастического дифференциального уравнения Ито (7.18).

С учетом (9.20), (9.21) имеем

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_{\tau_{p+1}}^{(l)} = & (1 - \tilde{\gamma}_l) \mathbf{x}_{\tau_p}^{(l)} + \tilde{\gamma}_l \mathbf{x}_{\tau_{p-1}}^{(l)} + \Delta \left\{ \tilde{\alpha}_l^{(2)} \mathbf{a}^{(l)}(\mathbf{x}_{\tau_{p+1}}, \tau_{p+1}) + \right. \\ & + (1 - \tilde{\alpha}_l^{(2)} + \tilde{\gamma}_l \tilde{\alpha}_l^{(1)}) \mathbf{a}^{(l)}(\mathbf{x}_{\tau_p}, \tau_p) + (1 - \tilde{\alpha}_l^{(1)}) \tilde{\gamma}_l \mathbf{a}^{(l)}(\mathbf{x}_{\tau_{p-1}}, \tau_{p-1}) \left. \right\} + \\ & + \mathbf{d}_{\tau_{p+1}, \tau_p}^{(l)} + \tilde{\gamma}_l \mathbf{d}_{\tau_p, \tau_{p-1}}^{(l)} + Q_{\tau_{p+1}, \tau_p, \tau_{p-1}}^{(l)} \text{ с в.1,} \end{aligned} \quad (9.22)$$

где

$$\begin{aligned} Q_{\tau_{p+1}, \tau_p, \tau_{p-1}}^{(l)} \stackrel{\text{def}}{=} & H_{3\tau_{p+1}, \tau_p}^{(l)} + \tilde{\gamma}_l H_{3\tau_p, \tau_{p-1}}^{(l)} - \\ & - \Delta \left(\tilde{\alpha}_l^{(2)} R_{\tau_{p+1}, \tau_p}^{(l)} + \tilde{\gamma}_l \tilde{\alpha}_l^{(1)} R_{\tau_p, \tau_{p-1}}^{(l)} \right). \end{aligned}$$

Положим

$$\begin{aligned} \mathbf{y}_s^{(l)} &= (1 - \tilde{\gamma}_l) \mathbf{y}_{\tau_p}^{(l)} + \tilde{\gamma}_l \mathbf{y}_{\tau_{p-1}}^{(l)} + (s - \tau_p) \tilde{\alpha}_l^{(2)} \mathbf{a}^{(l)}(\mathbf{y}_s, s) + \\ &+ \Delta \left\{ (1 - \tilde{\alpha}_l^{(2)} + \tilde{\gamma}_l \tilde{\alpha}_l^{(1)}) \mathbf{a}^{(l)}(\mathbf{y}_{\tau_p}, \tau_p) + (1 - \tilde{\alpha}_l^{(1)}) \tilde{\gamma}_l \mathbf{a}^{(l)}(\mathbf{y}_{\tau_{p-1}}, \tau_{p-1}) \right\} + \\ &+ \mathbf{v}_{s, \tau_p}^{(l)} + \tilde{\gamma}_l \mathbf{v}_{\tau_p, \tau_{p-1}}^{(l)}, \end{aligned} \quad (9.23)$$

где $s \in (\tau_p, \tau_{p+1}]$; $p = 1, 2, \dots, N - 1$.

Оценим $M\{|\mathbf{x}_T - \mathbf{y}_T|\}$. Из (9.22) при $\tau_{p+1} = s$ и (9.23) получим

$$\mathbf{x}_s^{(l)} - \mathbf{y}_s^{(l)} = (1 - \tilde{\gamma}_l) (\mathbf{x}_{\tau_{n_s}}^{(l)} - \mathbf{y}_{\tau_{n_s}}^{(l)}) + \tilde{\gamma}_l (\mathbf{x}_{\tau_{n_s-1}}^{(l)} - \mathbf{y}_{\tau_{n_s-1}}^{(l)}) + U_{s, \tau_{n_s}, \tau_{n_s-1}}^{(l)}, \quad (9.24)$$

где

$$\begin{aligned} U_{s, \tau_p, \tau_{p-1}}^{(l)} &\stackrel{\text{def}}{=} (s - \tau_p) \tilde{\alpha}_l^{(2)} (\mathbf{a}^{(l)}(\mathbf{x}_s, s) - \mathbf{a}^{(l)}(\mathbf{y}_s, s)) + \\ &+ \Delta \left\{ (1 - \tilde{\alpha}_l^{(2)} + \tilde{\gamma}_l \tilde{\alpha}_l^{(1)}) (\mathbf{a}^{(l)}(\mathbf{x}_{\tau_p}, \tau_p) - \mathbf{a}^{(l)}(\mathbf{y}_{\tau_p}, \tau_p)) + \right. \\ &+ (1 - \tilde{\alpha}_l^{(1)}) \tilde{\gamma}_l (\mathbf{a}^{(l)}(\mathbf{x}_{\tau_{p-1}}, \tau_{p-1}) - \mathbf{a}^{(l)}(\mathbf{y}_{\tau_{p-1}}, \tau_{p-1})) \left. \right\} + \\ &+ (\mathbf{d}_{s, \tau_p} - \mathbf{v}_{s, \tau_p}^{(l)}) + \tilde{\gamma}_l (\mathbf{d}_{\tau_p, \tau_{p-1}}^{(l)} - \mathbf{v}_{\tau_p, \tau_{p-1}}^{(l)}) + Q_{s, \tau_p, \tau_{p-1}}^{(l)}; \end{aligned}$$

$$n_s \stackrel{\text{def}}{=} \max_j \{j : \tau_j \leq s\}; \quad s \in (\tau_p, \tau_{p+1}], \quad p = 1, 2, \dots, N - 1.$$

Итерируя равенство (9.24), приходим к следующему выражению:

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_s^{(l)} - \mathbf{y}_s^{(l)} &= \mu_1(\tilde{\gamma}_l) (\mathbf{x}_{\tau_{n_s}}^{(l)} - \mathbf{y}_{\tau_{n_s}}^{(l)}) + \tilde{\gamma}_l (\mathbf{x}_{\tau_{n_s-1}}^{(l)} - \mathbf{y}_{\tau_{n_s-1}}^{(l)}) + U_{s, \tau_{n_s}, \tau_{n_s-1}}^{(l)} = \\ &= \mu_2(\tilde{\gamma}_l) (\mathbf{x}_{\tau_{n_s-1}}^{(l)} - \mathbf{y}_{\tau_{n_s-1}}^{(l)}) + \mu_1(\tilde{\gamma}_l) \tilde{\gamma}_l (\mathbf{x}_{\tau_{n_s-2}}^{(l)} - \mathbf{y}_{\tau_{n_s-2}}^{(l)}) + \\ &+ \mu_1(\tilde{\gamma}_l) U_{\tau_{n_s}, \tau_{n_s-1}, \tau_{n_s-2}}^{(l)} + U_{s, \tau_{n_s}, \tau_{n_s-1}}^{(l)} = \dots \\ &\dots = \mu_{n_s}(\tilde{\gamma}_l) (\mathbf{x}_{\tau_1}^{(l)} - \mathbf{y}_{\tau_1}^{(l)}) + \mu_{n_s-1}(\tilde{\gamma}_l) \tilde{\gamma}_l (\mathbf{x}_0^{(l)} - \mathbf{y}_0^{(l)}) + \\ &+ \sum_{p=1}^{n_s-1} \mu_p(\tilde{\gamma}_l) U_{\tau_{n_s-p+1}, \tau_{n_s-p}, \tau_{n_s-p-1}}^{(l)} + U_{s, \tau_{n_s}, \tau_{n_s-1}}^{(l)}, \end{aligned} \quad (9.25)$$

где

$$\begin{aligned} \mu_0(\tilde{\gamma}_l) &= 1, \quad \mu_1(\tilde{\gamma}_l) = 1 - \tilde{\gamma}_l; \\ \mu_{p+1}(\tilde{\gamma}_l) &= (1 - \tilde{\gamma}_l) \mu_p(\tilde{\gamma}_l) + \tilde{\gamma}_l \mu_{p-1}(\tilde{\gamma}_l), \quad p = 1, 2, \dots \end{aligned} \quad (9.26)$$

Покажем, что $\mu_p(\tilde{\gamma}_l) \in [0, 1]$, $p = 0, 1, \dots$, если $\tilde{\gamma}_l \in [0, 1]$. С помощью (9.26) получим

$$\mu_{p+1}(\tilde{\gamma}_l) - \mu_p(\tilde{\gamma}_l) = (-1)(\mu_p(\tilde{\gamma}_l) - \mu_{p-1}(\tilde{\gamma}_l)) = \dots$$

$$\dots = (-1)^p(\mu_1(\tilde{\gamma}_l) - \mu_0(\tilde{\gamma}_l)) = (-1)^{p+1}\tilde{\gamma}_l,$$

т. е.

$$\begin{aligned}\mu_{p+1}(\tilde{\gamma}_l) &= \mu_p(\tilde{\gamma}_l) + (-1)^{p+1}\tilde{\gamma}_l = 1 + ((-1)^1 + (-1)^2 + \dots + (-1)^{p+1})\tilde{\gamma}_l = \\ &= \frac{1 - (-1)^{p+2}}{2}\tilde{\gamma}_l \in [0, 1] \text{ при } \tilde{\gamma}_l \in [0, 1]; \quad p = 1, 2, \dots\end{aligned}$$

Далее, предполагая, что

$$\mathbf{M}\{|\mathbf{x}_{\tau_1}^{(l)} - \mathbf{y}_{\tau_1}^{(l)}|^2\} \leq K_1\Delta^2, \quad \mathbf{M}\{|\mathbf{x}_0^{(l)} - \mathbf{y}_0^{(l)}|^2\} \leq K_1\Delta^2, \quad l = 1, \dots, n,$$

где постоянная K_1 не зависит от Δ , и несколько модифицируя доказательство теоремы 7.2 при $r = 2$, используя (9.25), получаем следующее неравенство:

$$\mathbf{z}_s^{(l)} \leq K_2\Delta^2 + K_3 \int_0^s \mathbf{z}_u^{(l)} du, \quad (9.27)$$

где постоянные K_2, K_3 не зависят от Δ ; $\mathbf{z}_s^{(l)} \stackrel{\text{def}}{=} \mathbf{M}\{|\mathbf{x}_s^{(l)} - \mathbf{y}_s^{(l)}|^2\}$.

Применяя к (9.27) неравенство Гронуолла и полагая затем $s = T$, приходим к оценке

$$\mathbf{M}\{|\mathbf{x}_T^{(l)} - \mathbf{y}_T^{(l)}|\} \leq \sqrt{\mathbf{z}_T^{(l)}} \leq K_4\Delta, \quad (9.28)$$

где постоянная K_4 не зависит от Δ .

Наконец, из (9.28) нетрудно получить, что

$$\mathbf{M}\{|\mathbf{x}_T - \mathbf{y}_T|\} \leq K_5\Delta,$$

где постоянная K_5 не зависит от Δ , т. е. неявный двухшаговый численный метод (9.19) имеет порядок сильной сходимости 1.0.

Используя предложенную схему, можно обосновать сходимость более точных неявных двухшаговых сильных численных методов. Сходимость явных двухшаговых сильных численных методов может быть получена также с использованием приведенных в данном разделе рассуждений, если положить в них $\tilde{\alpha}_l^{(2)} = 0$, $l = 1, \dots, n$.

9.4 Двухшаговые конечно-разностные методы, основанные на разложениях Тейлора–Ито

В качестве основы построения двухшаговых сильных конечно-разностных численных методов выберем численные схемы, рассмотренные в данной главе, и аппроксимируем конечными разностями частные производные, входящие в их правые части.

9.4.1 Методы порядка точности 1.0 и 1.5

Приведем явный двухшаговый конечно-разностный сильный численный метод порядка точности 1.0 вида

$$\mathbf{y}_{p+1} = \mathbf{y}_{p-1} + 2\mathbf{a}\Delta + \mathbf{v}_p + \mathbf{v}_{p-1}, \quad (9.29)$$

$$\mathbf{v}_p = \sum_{i_1=1}^m \Sigma_{(i_1)} \hat{I}_{0\tau_{p+1}, \tau_p}^{(i_1)} + \frac{1}{\sqrt{\Delta}} \sum_{i_1, i_2=1}^m \sum_{j=1}^2 \pi_j \Sigma^{(li_1)}(\mathbf{y}_{p\sigma}^{(ji_2)}, \tau_p) \hat{I}_{00\tau_{p+1}, \tau_p}^{(i_2 i_1)}. \quad (9.30)$$

Здесь сохранен смысл обозначений, входящих в (7.89).

В качестве примера неявного двухшагового конечно-разностного сильного численного метода порядка точности 1.0 приведем следующее однопараметрическое семейство численных методов:

$$\begin{aligned} \mathbf{y}_{p+1}^{(l)} = & (1 - \tilde{\gamma}_l) \mathbf{y}_p^{(l)} + \tilde{\gamma}_l \mathbf{y}_{p-1}^{(l)} + \frac{1}{2} \Delta \{ \mathbf{a}^{(l)}(\mathbf{y}_{p+1}, \tau_{p+1}) + \\ & + (1 + \tilde{\gamma}_l) \mathbf{a}^{(l)} + \tilde{\gamma}_l \mathbf{a}^{(l)}(\mathbf{y}_{p-1}, \tau_{p-1}) \} + \\ & + \mathbf{v}_p^{(l)} + \tilde{\gamma}_l \mathbf{v}_{p-1}^{(l)}, \end{aligned} \quad (9.31)$$

где $\tilde{\gamma}_l \in [0, 1]$, а $\mathbf{v}_p$ имеет вид (9.30).

Численный эксперимент 9.8 (рис. 9.8). Повторить численный эксперимент 9.1 для явного двухшагового сильного конечно-разностного численного метода порядка точности 1.0 вида (9.29). Начальный шаг, необходимый для старта численного метода (9.29), осуществлять с помощью явного одношагового сильного конечно-разностного численного метода порядка точности 1.0 вида (7.89).

Численный эксперимент 9.9 (рис. 9.9). Повторить численный эксперимент 9.1 для неявного двухшагового сильного конечно-разностного численного метода порядка точности 1.0 вида (9.31) при $\tilde{\gamma}_1 = 1$. Начальный шаг, необходимый для старта численного метода (9.31), осуществлять с помощью явного одношагового сильного конечно-разностного численного метода порядка точности 1.0 вида (7.89).

Перейдем к рассмотрению двухшаговых конечно-разностных численных методов порядка точности 1.5.

Используя численную схему (9.4) и аппроксимируя конечными разностями частные производные, входящие в ее правую часть, получаем следующий явный двухшаговый конечно-разностный сильный численный метод порядка точности 1.5:

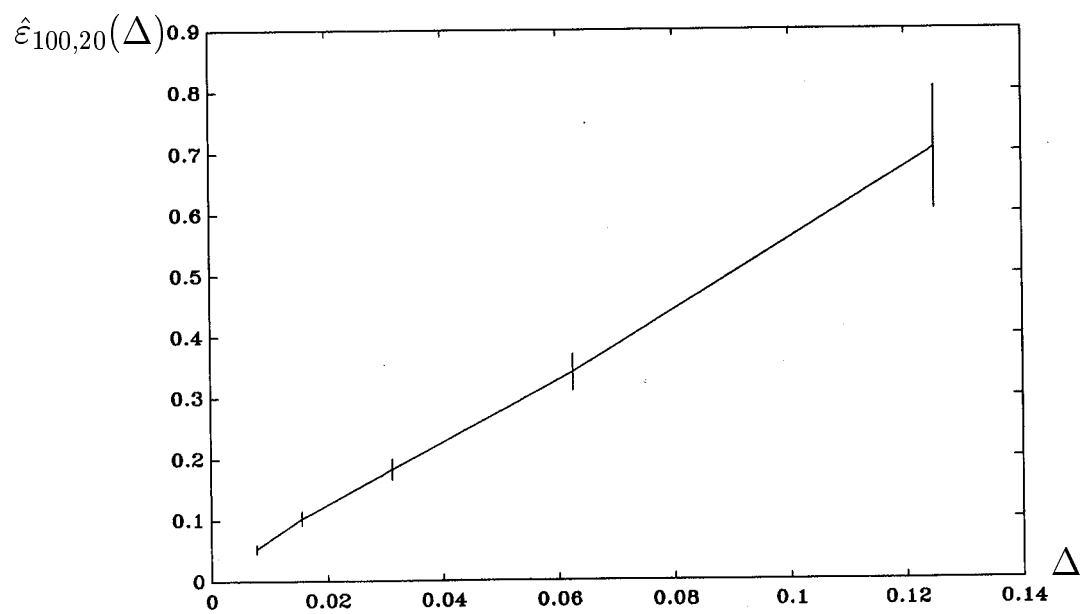


Рис. 9.8. Результат численного эксперимента 9.8.

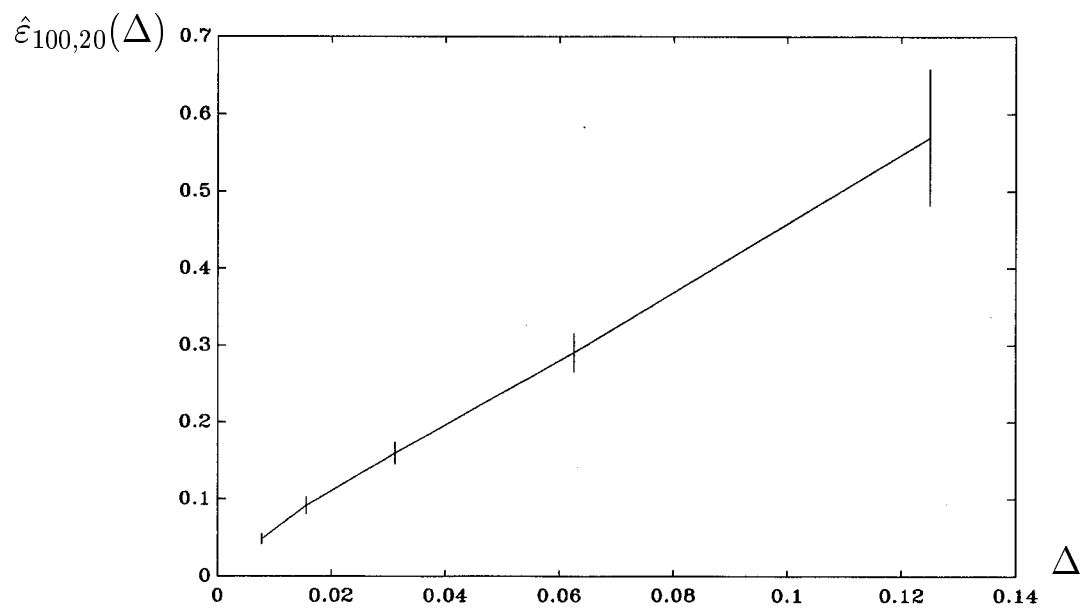


Рис. 9.9. Результат численного эксперимента 9.9.

$$\begin{aligned}
\mathbf{y}_{p+1} &= \mathbf{y}_{p-1} + 2\mathbf{a}\Delta - \sum_{i_1=1}^m \sum_{j=1}^2 \pi_j \mathbf{a}(\mathbf{u}_{p-1,\sigma}^{(ji_1)}, \tau_{p-1}) \hat{J}_{(1)\tau_p, \tau_{p-1}}^{(i_1)} + \mathbf{v}_p + \mathbf{v}_{p-1}, \\
\mathbf{v}_p^{(l)} &= \sum_{i_1=1}^m \Sigma^{(li_1)} \hat{J}_{(1)\tau_{p+1}, \tau_p}^{(i_1)} + \frac{1}{\sqrt{\Delta}} \sum_{i_1, i_2=1}^m \sum_{j=1}^2 \alpha_j \Sigma^{(li_1)}(\mathbf{y}_{p\beta}^{(ji_2)}, \tau_p) \hat{J}_{(11)\tau_{p+1}, \tau_p}^{(i_2 i_1)} + \\
&\quad + \frac{1}{\Delta} \sum_{i_1=1}^m \left[\sum_{j=1}^2 \pi_j \mathbf{a}^{(l)}(\mathbf{u}_{p\sigma}^{(ji_1)}, \tau_p) \hat{J}_{(10)\tau_{p+1}, \tau_p}^{(i_1)} + \right. \\
&\quad \left. + \left(\frac{1}{2} \sum_{r=1}^m \sum_{j=1}^3 \varrho_j \Sigma^{(li_1)}(\mathbf{y}_{p\varpi}^{(jr)}, \tau_p) + \sum_{j=1}^2 \zeta_j \Sigma^{(li_1)}(\mathbf{z}_{p\delta}^{(j)}, \Delta_{p\gamma}^{(j)}) \right) \hat{J}_{(01)\tau_{p+1}, \tau_p}^{(i_1)} \right] + \\
&\quad + \frac{1}{\Delta} \sum_{i_1, i_2, i_3=1}^m \sum_{j=1}^2 \alpha_j \mathbf{k}_{i_1 i_2}^{(l)}(\mathbf{y}_{p\beta}^{(ji_3)}, \tau_p) \hat{J}_{(111)\tau_{p+1}, \tau_p}^{(i_3 i_2 i_1)},
\end{aligned}$$

где введены такие же обозначения, как в (7.95).

Рассмотрим на основе численной схемы (9.13) однопараметрическое семейство неявных двухшаговых сильных конечно-разностных численных методов порядка точности 1.5:

$$\begin{aligned}
\mathbf{y}_{p+1}^{(l)} &= (1 - \tilde{\gamma}_l) \mathbf{y}_p^{(l)} + \tilde{\gamma}_l \mathbf{y}_{p-1}^{(l)} + \frac{1}{2} \Delta \{ \mathbf{a}^{(l)}(\mathbf{y}_{p+1}, \tau_{p+1}) + \\
&\quad + (1 + \tilde{\gamma}_l) \mathbf{a}^{(l)} + \tilde{\gamma}_l \mathbf{a}^{(l)}(\mathbf{y}_{p-1}, \tau_{p-1}) \} + \\
&\quad + \mathbf{v}_p^{(l)} + \gamma_l \mathbf{v}_{p-1}^{(l)};
\end{aligned} \tag{9.32}$$

здесь $\tilde{\gamma}_l \in [0, 1]$, а $\mathbf{v}_p$ имеет вид

$$\begin{aligned}
\mathbf{v}_p &= \sum_{i_1=1}^m \Sigma_{i_1} \hat{I}_{0\tau_{p+1}, \tau_p}^{(i_1)} + \frac{1}{\sqrt{\Delta}} \sum_{i_1, i_2=1}^m \sum_{j=1}^2 \alpha_j \Sigma_{i_1}(\mathbf{y}_{p\beta}^{(ji_2)}, \tau_p) \hat{I}_{00\tau_{p+1}, \tau_p}^{(i_2 i_1)} + \\
&\quad + \frac{1}{\Delta} \sum_{i_1=1}^m \left[\sum_{j=1}^2 \pi_j \mathbf{a}(\mathbf{u}_{p\sigma}^{(ji_1)}, \tau_p) \left(\frac{1}{2} \Delta \hat{I}_{0\tau_{p+1}, \tau_p}^{(i_1)} + \hat{I}_{1\tau_{p+1}, \tau_p}^{(i_1)} \right) - \right. \\
&\quad \left. - \left(\frac{1}{2} \sum_{r=1}^m \sum_{j=1}^3 \varrho_j \Sigma_{i_1}(\mathbf{y}_{p\varpi}^{(jr)}, \tau_p) + \sum_{j=1}^2 \zeta_j \Sigma_{i_1}(\mathbf{z}_{p\delta}^{(j)}, \Delta_{p\gamma}^{(j)}) \right) \hat{I}_{1\tau_{p+1}, \tau_p}^{(i_1)} \right] + \\
&\quad + \frac{1}{\Delta} \sum_{i_1, i_2, i_3=1}^m \sum_{j=1}^2 \alpha_j \mathbf{k}_{i_1 i_2}(\mathbf{y}_{p\beta}^{(ji_3)}, \tau_p) \hat{I}_{000\tau_{p+1}, \tau_p}^{(i_3 i_2 i_1)},
\end{aligned}$$

где сохранен смысл обозначений, введенных в (7.94).

Численный эксперимент 9.10 (рис. 9.10). Повторить численный эксперимент 9.1 для неявного конечно-разностного сильного численного метода порядка точности 1.5 вида (9.32) при $\tilde{\gamma}_1 = 1$. Начальный шаг, необходимый для старта численного метода (9.32), осуществлять с помощью явного одношагового сильного конечно-разностного численного метода порядка точности 1.5 вида (7.94). Для моделирования стохастических интегралов Ито $I_{1_{(p+1)\Delta, p\Delta}}^{(1)}$, $p = 0, 1, \dots, N-1$, использовать формулу

$$I_{1_{(p+1)\Delta, p\Delta}}^{(1)} = -\frac{1}{2}\Delta^{\frac{3}{2}} \left(\zeta_0^{(1)} + \frac{1}{\sqrt{3}}\zeta_1^{(1)} \right). \quad (9.33)$$

Здесь $\zeta_{0_{(p+1)\Delta, p\Delta}}^{(1)} \stackrel{\text{def}}{=} \zeta_0^{(1)}$; $\zeta_{1_{(p+1)\Delta, p\Delta}}^{(1)} \stackrel{\text{def}}{=} \zeta_1^{(1)}$; $\zeta_{0_{(p+1)\Delta, p\Delta}}^{(1)}$, $\zeta_{1_{(p+1)\Delta, p\Delta}}^{(1)}$, $p = 0, 1, \dots, N-1$, — независимые в совокупности стандартные гауссовские случайные величины.

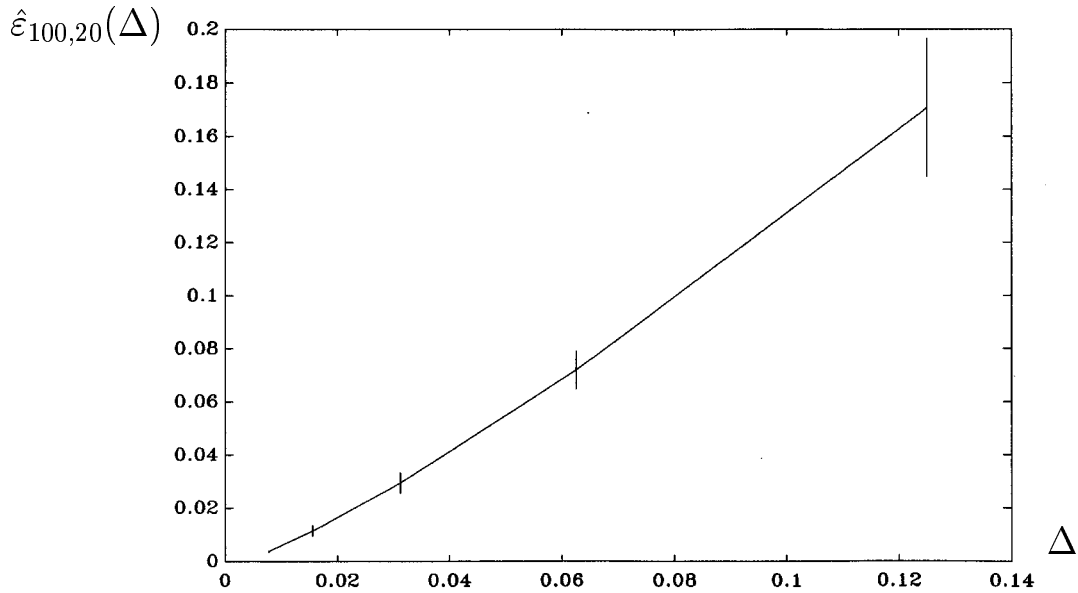


Рис. 9.10. Результат численного эксперимента 9.10.

9.4.2 Метод порядка точности 2.0

Рассмотрим в качестве двухшагового конечно-разностного сильного численного метода порядка точности 2.0 неявный численный метод:

$$y_{p+1} = y_{p-1} + \frac{1}{2}\Delta \{a(y_{p+1}, \tau_{p+1}) + 2a + a(y_{p-1}, \tau_{p-1})\} +$$

$$+\mathbf{v}_p + \mathbf{v}_{p-1}, \quad (9.34)$$

где

$$\begin{aligned} \mathbf{v}_p = & \sum_{i_1=1}^m \Sigma_{i_1} \hat{I}_{0\tau_{p+1}, \tau_p}^{(i_1)} + \frac{1}{\sqrt{\Delta}} \sum_{i_1, i_2=1}^m \sum_{j=1}^4 \eta_j \Sigma_{i_1} (\mathbf{y}_{p\omega}^{(ji_2)}, \tau_p) \hat{I}_{00\tau_{p+1}, \tau_p}^{(i_2 i_1)} + \\ & + \frac{1}{\Delta} \sum_{i_1=1}^m \left[\sum_{j=1}^2 \pi_j \mathbf{a}(\mathbf{u}_{p\sigma}^{(ji_1)}, \tau_p) \left(\frac{1}{2} \Delta \hat{I}_{0\tau_{p+1}, \tau_p}^{(i_1)} + \hat{I}_{1\tau_{p+1}, \tau_p}^{(i_1)} \right) - \right. \\ & - \left. \left(\frac{1}{2} \sum_{r=1}^m \sum_{j=1}^3 \mu_j \Sigma_{i_1} (\mathbf{y}_{p\lambda}^{(jr)}, \tau_p) + \sum_{j=1}^2 \zeta_j \Sigma_{i_1} (\mathbf{z}_{p\delta}^{(j)}, \Delta_{p\gamma}^{(j)}) \right) \hat{I}_{1\tau_{p+1}, \tau_p}^{(i_1)} \right] + \\ & + \frac{1}{\Delta} \sum_{i_1, i_2, i_3=1}^m \sum_{j=1}^4 \eta_j \mathbf{b}_{i_1 i_2} (\mathbf{y}_{p\omega}^{(ji_3)}, \tau_p) \hat{I}_{000\tau_{p+1}, \tau_p}^{(i_3 i_2 i_1)} + \\ & + \frac{1}{\Delta \sqrt{\Delta}} \sum_{i_1, i_2=1}^m \left[\sum_{j=1}^4 \eta_j \mathbf{g}_{i_1} (\mathbf{y}_{p\omega}^{(ji_2)}, \tau_p) \left(\hat{I}_{10\tau_{p+1}, \tau_p}^{(i_2 i_1)} - \hat{I}_{01\tau_{p+1}, \tau_p}^{(i_2 i_1)} \right) + \right. \\ & + \sum_{j=1}^4 \eta_j \mathbf{h}_{i_1} (\mathbf{y}_{p\omega}^{(ji_2)}, \tau_p) \left(\hat{I}_{01\tau_{p+1}, \tau_p}^{(i_2 i_1)} + \frac{1}{2} \Delta \hat{I}_{00\tau_{p+1}, \tau_p}^{(i_2 i_1)} \right) - \\ & - \left. \left(\frac{1}{2} \sum_{r=1}^m \sum_{j=1}^3 \mu_j \mathbf{k}_{i_1 i_2} (\mathbf{y}_{p\lambda}^{(jr)}, \tau_p) + \sum_{j=1}^2 \zeta_j \mathbf{k}_{i_1 i_2} (\mathbf{z}_{p\delta}^{(j)}, \Delta_{p\gamma}^{(j)}) \right) \hat{I}_{10\tau_{p+1}, \tau_p}^{(i_2 i_1)} \right] + \\ & + \frac{1}{\Delta \sqrt{\Delta}} \sum_{i_1, i_2, i_3, i_4=1}^m \sum_{j=1}^4 \eta_j \mathbf{c}_{i_1 i_2 i_3} (\mathbf{y}_{p\omega}^{(ji_4)}, \tau_p) \hat{I}_{0000\tau_{p+1}, \tau_p}^{(i_4 i_3 i_2 i_1)}, \quad (9.35) \end{aligned}$$

где введены такие же обозначения, как и в (8.15).

Численный эксперимент 9.11 (рис. 9.11). Повторить численный эксперимент 9.1 для конечно-разностного сильного численного метода порядка точности 2.0 вида (9.34), (9.35). Начальный шаг, необходимый для старта численного метода (9.34), (9.35), осуществлять с помощью неявного одношагового сильного конечно-разностного численного метода порядка точности 2.0 вида (8.15). Для моделирования стохастических интегралов Ито $I_{1(p+1)\Delta, p\Delta}^{(1)}$, $p = 0, 1, \dots, N-1$, использовать формулу (9.33), а для моделирования стохастических интегралов $I_{10(p+1)\Delta, p\Delta}^{(11)}$, $I_{01(p+1)\Delta, p\Delta}^{(11)}$, $p = 0, 1, \dots, N-1$, — аппроксимацию

$$I_{10(p+1)\Delta, p\Delta}^{(11)q} = -\frac{\Delta^2}{4} \left[\frac{2}{3} \left(\zeta_0^{(1)} \right)^2 + \frac{1}{\sqrt{3}} \zeta_1^{(1)} \zeta_0^{(1)} - \frac{1}{3\sqrt{5}} \zeta_2^{(1)} \zeta_0^{(1)} + \right.$$

$$+ \sum_{i=1}^q \left(\frac{1}{(2i-1)(2i+3)} \left(\zeta_i^{(1)} \right)^2 - \frac{1}{(2i+3)\sqrt{(2i+1)(2i+5)}} \zeta_i^{(1)} \zeta_{i+2}^{(1)} \right) - 1 \Big]$$

и соотношение

$$I_{01_{(p+1)\Delta, p\Delta}}^{(11)q} = I_{1_{(p+1)\Delta, p\Delta}}^{(1)} I_{0_{(p+1)\Delta, p\Delta}}^{(1)} - I_{10_{(p+1)\Delta, p\Delta}}^{(11)q} + \frac{\Delta^2}{2}$$

при $q = 1$; $\zeta_{j_{(p+1)\Delta, p\Delta}}^{(1)} \stackrel{\text{def}}{=} \zeta_j^{(1)}$, $j = 0, 1, \dots, q+2$, — независимые стандартные гауссовские случайные величины.

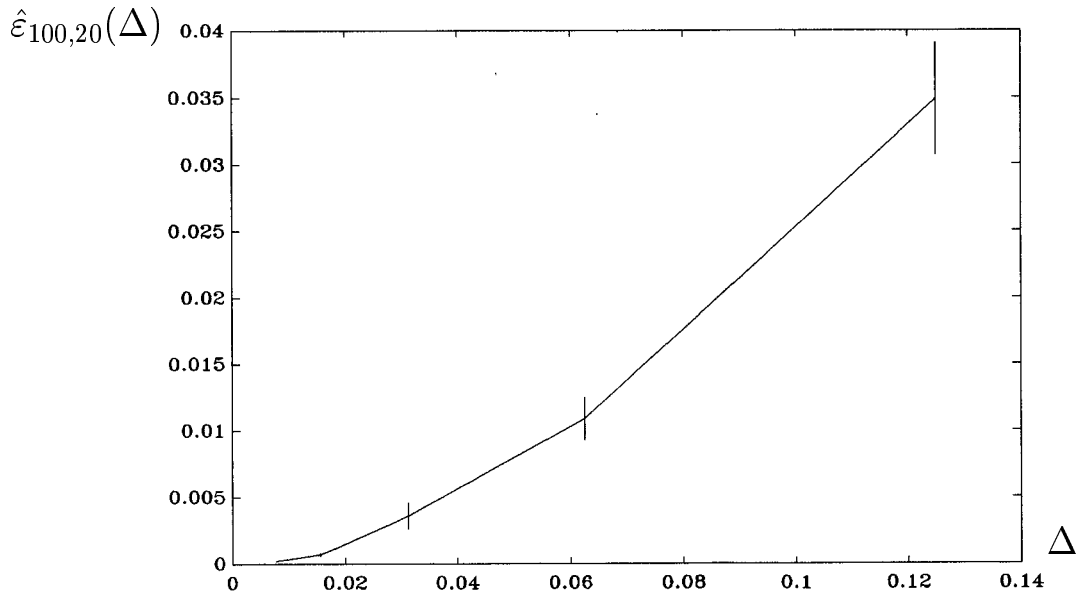


Рис. 9.11. Результат численного эксперимента 9.11.

9.5 Общие представления двухшаговых методов

В данном разделе рассмотрим принцип, по которому можно конструировать многопараметрические семейства двухшаговых сильных численных методов решения стохастических дифференциальных уравнений Ито.

Предположим, что необходимо построить некоторый неявный двухшаговый сильный численный метод порядка точности 1.0. Тогда в его

правую часть должна входить некоторая линейная комбинация величин $\mathbf{y}_p$, $\mathbf{y}_{p-1}$, $\Delta \mathbf{a}(\mathbf{y}_{p+1}, \tau_{p+1})$, $\Delta \mathbf{a}(\mathbf{y}_p, \tau_p)$, $\Delta \mathbf{a}(\mathbf{y}_{p-1}, \tau_{p-1})$. Рассмотрим теперь следующее выражение:

$$(1 - \tilde{\gamma}_l) \mathbf{x}_{\tau_p}^{(l)} + \tilde{\gamma}_l \mathbf{x}_{\tau_{p-1}}^{(l)} + \Delta \left\{ \tilde{\alpha}_l^{(2)} \mathbf{a}^{(l)}(\mathbf{x}_{\tau_{p+1}}, \tau_{p+1}) + (1 - \tilde{\alpha}_l^{(2)} + \tilde{\gamma}_l \tilde{\alpha}_l^{(1)}) \mathbf{a}^{(l)}(\mathbf{x}_{\tau_p}, \tau_p) + (1 - \tilde{\alpha}_l^{(1)}) \tilde{\gamma}_l \mathbf{a}^{(l)}(\mathbf{x}_{\tau_{p-1}}, \tau_{p-1}) \right\}, \quad (9.36)$$

где $\tilde{\gamma}_l$, $\tilde{\alpha}_l^{(1)}$, $\tilde{\alpha}_l^{(2)} \in [0, 1]$, $l = 1, \dots, n$; $\mathbf{x}_t$ — решение стохастического дифференциального уравнения Ито (7.18).

Ранее было показано, что с помощью формулы Ито и разложения Тейлора–Ито выражение (9.36) можно привести с вероятностью 1 к выражению вида

$$\mathbf{x}_{\tau_{p+1}}^{(l)} - \mathbf{d}_{\tau_{p+1}, \tau_p}^{(l)} - \tilde{\gamma}_l \mathbf{d}_{\tau_p, \tau_{p-1}}^{(l)} + O(\Delta^{3/2}),$$

где

$$\mathbf{d}_{\tau_{p+1}, \tau_p} = \sum_{i_1=1}^m \Sigma_{i_1} I_{0\tau_{p+1}, \tau_p}^{(i_1)} + \sum_{i_1, i_2=1}^m G_0^{(i_2)} \Sigma_{i_1} I_{00\tau_{p+1}, \tau_p}^{(i_2 i_1)}. \quad (9.37)$$

Таким образом, заменяя в правой части (9.37) повторные стохастические интегралы на их сильные аппроксимации и отбрасывая члены $O(\Delta^{\frac{3}{2}})$, приходим к трехпараметрическому семейству (9.12) неявных двухшаговых сильных численных методов порядка точности 1.0. Это семейство получено в [86]. Варьируя параметры $\tilde{\gamma}_l$, $\tilde{\alpha}_l^{(1)}$ и $\tilde{\alpha}_l^{(2)}$, можно получать различные как явные, так и неявные сильные численные схемы порядка точности 1.0. В частности, при $\tilde{\alpha}_l^{(2)} = 0$, $\tilde{\alpha}_l^{(1)} = \tilde{\gamma}_l = 1$ из (9.12) имеем численный метод (9.2).

В [86] приведено пятипараметрическое разложение, основанное на разложении Тейлора–Стратоновича в форме Клоедена и Платена, которое строится по изложенному принципу и позволяет получать различные явные и неявные одношаговые или двухшаговые сильные численные методы порядка точности 2.0. Приведем аналог этого разложения, основанный на разложении Тейлора–Ито в форме Вагнера и Платена:

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_{\tau_{p+1}}^{(l)} = & (1 - \tilde{\gamma}_l) \mathbf{x}_{\tau_p}^{(l)} + \tilde{\gamma}_l \mathbf{x}_{\tau_{p-1}}^{(l)} + \Delta \left\{ \tilde{\alpha}_l^{(2)} \mathbf{a}^{(l)}(\mathbf{x}_{\tau_{p+1}}, \tau_{p+1}) + \right. \\ & + (1 - \tilde{\alpha}_l^{(2)} + \tilde{\gamma}_l \tilde{\alpha}_l^{(1)}) \mathbf{a}^{(l)} + (1 - \tilde{\alpha}_l^{(1)}) \tilde{\gamma}_l \mathbf{a}^{(l)}(\mathbf{x}_{\tau_{p-1}}, \tau_{p-1}) \left. \right\} + \\ & + \Delta^2 \left[\left(\frac{1}{2} - \tilde{\alpha}_l^{(2)} \right) \tilde{\beta}_l^{(2)} L \mathbf{a}^{(l)}(\mathbf{x}_{\tau_{p+1}}, \tau_{p+1}) + \right. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \left\{ \left(\frac{1}{2} - \tilde{\alpha}_l^{(2)} \right) (1 - \tilde{\beta}_l^{(2)}) + \tilde{\gamma}_l \left(\frac{1}{2} - \tilde{\alpha}_l^{(1)} \right) \tilde{\beta}_l^{(1)} \right\} L \mathbf{a}^{(l)} + \\
& + \tilde{\gamma}_l \left(\frac{1}{2} - \tilde{\alpha}_l^{(1)} \right) (1 - \tilde{\beta}_l^{(1)}) L \mathbf{a}^{(l)} (\mathbf{x}_{\tau_{p-1}}, \tau_{p-1}) \Big] - \\
& - \Delta \left(\tilde{\alpha}_l^{(2)} G_{\tau_{p+1}, \tau_p}^{(l)} + \tilde{\alpha}_l^{(1)} \tilde{\gamma}_l G_{\tau_p, \tau_{p-1}}^{(l)} \right) + \mathbf{d}_{\tau_{p+1}, \tau_p}^{(l)} + \tilde{\gamma}_l \mathbf{d}_{\tau_p, \tau_{p-1}}^{(l)} + \\
& + O(\Delta^{\frac{5}{2}}) \text{ с в.1,}
\end{aligned} \tag{9.38}$$

где

$$G_{\tau_{p+1}, \tau_p} = \sum_{i_1=1}^m G_0^{(i_1)} \mathbf{a} J_{(1)\tau_{p+1}, \tau_p}^{(i_1)} + \sum_{i_1, i_2=1}^m G_0^{(i_2)} G_0^{(i_1)} \mathbf{a} J_{(11)\tau_{p+1}, \tau_p}^{(i_2 i_1)}; \tag{9.39}$$

$$\begin{aligned}
\mathbf{d}_{\tau_{p+1}, \tau_p} &= \sum_{i_1=1}^m \Sigma_{i_1} J_{(1)\tau_{p+1}, \tau_p}^{(i_1)} + \sum_{i_1, i_2=1}^m G_0^{(i_2)} \Sigma_{i_1} J_{(11)\tau_{p+1}, \tau_p}^{(i_2 i_1)} + \\
&+ \sum_{i_1=1}^m \left[G_0^{(i_1)} \mathbf{a} J_{(10)\tau_{p+1}, \tau_p}^{(i_1)} + L \Sigma_{i_1} (\mathbf{x}_{\tau_p}, \tau_p) J_{(01)\tau_{p+1}, \tau_p}^{(i_1)} \right] + \\
&+ \sum_{i_1, i_2, i_3=1}^m G_0^{(i_3)} G_0^{(i_2)} \Sigma_{i_1} J_{(111)\tau_{p+1}, \tau_p}^{(i_3 i_2 i_1)} + \\
&+ \sum_{i_1, i_2=1}^m \left[G_0^{(i_2)} L \Sigma_{i_1} J_{(101)\tau_{p+1}, \tau_p}^{(i_2 i_1)} + L G_0^{(i_2)} \Sigma_{i_1} J_{(011)\tau_{p+1}, \tau_p}^{(i_2 i_1)} + \right. \\
&\quad \left. + G_0^{(i_2)} G_0^{(i_1)} \mathbf{a} J_{(110)\tau_{p+1}, \tau_p}^{(i_2 i_1)} \right] + \\
&+ \sum_{i_1, i_2, i_3, i_4=1}^m G_0^{(i_4)} G_0^{(i_3)} G_0^{(i_2)} \Sigma_{i_1} J_{(1111)\tau_{p+1}, \tau_p}^{(i_4 i_3 i_2 i_1)};
\end{aligned} \tag{9.40}$$

$\tilde{\alpha}_l^{(1)}, \tilde{\alpha}_l^{(2)}, \tilde{\beta}_l^{(1)}, \tilde{\beta}_l^{(2)}, \tilde{\gamma}_l \in [0, 1]$; если в правых частях (9.38)–(9.40) аргументы у некоторых функций опущены, то эти функции вычислены в точке $(\mathbf{x}_{\tau_p}, \tau_p)$.

Если в правой части (9.38) отбросить слагаемые порядка $O(\Delta^{\frac{5}{2}})$ и заменить повторные стохастические интегралы Ито на их сильные аппроксимации, то получим пятипараметрическое семейство неявных двухшаговых сильных численных методов порядка точности 2.0. В частности, при $\tilde{\gamma}_l = 1, \tilde{\alpha}_l^{(1)} = \tilde{\alpha}_l^{(2)} = \frac{1}{2}, \tilde{\beta}_l^{(1)}, \tilde{\beta}_l^{(2)} \in [0, 1]$ имеем неявный двухшаговый численный метод (9.15). Если в (9.38) взять $\tilde{\alpha}_l^{(2)} = 0, \tilde{\gamma}_l = \tilde{\alpha}_l^{(1)} = 1, \tilde{\beta}_l^{(1)} = 1, \tilde{\beta}_l^{(2)} = 0$, то из (9.38) находим явный двухшаговый численный метод (9.8).

Построим обобщение разложения (9.38), которое позволяет получать различные явные и неявные одношаговые или двухшаговые сильные численные схемы порядка точности 2.5 и основано на разложении Тейлора–Ито в форме Вагнера и Платена:

$$\begin{aligned}
\mathbf{x}_{\tau_{p+1}}^{(l)} = & (1 - \tilde{\gamma}_l) \mathbf{x}_{\tau_p}^{(l)} + \tilde{\gamma}_l \mathbf{x}_{\tau_{p-1}}^{(l)} + \Delta \left\{ \tilde{\alpha}_l^{(2)} \mathbf{a}^{(l)}(\mathbf{x}_{\tau_{p+1}}, \tau_{p+1}) + \right. \\
& + (1 - \tilde{\alpha}_l^{(2)} + \tilde{\gamma}_l \tilde{\alpha}_l^{(1)}) \mathbf{a}^{(l)} + (1 - \tilde{\alpha}_l^{(1)}) \tilde{\gamma}_l \mathbf{a}^{(l)}(\mathbf{x}_{\tau_{p-1}}, \tau_{p-1}) \Big\} + \\
& + \Delta^2 \left[\left(\frac{1}{2} - \tilde{\alpha}_l^{(2)} \right) \tilde{\beta}_l^{(2)} L \mathbf{a}^{(l)}(\mathbf{x}_{\tau_{p+1}}, \tau_{p+1}) + \right. \\
& + \left\{ \left(\frac{1}{2} - \tilde{\alpha}_l^{(2)} \right) (1 - \tilde{\beta}_l^{(2)}) + \tilde{\gamma}_l \left(\frac{1}{2} - \tilde{\alpha}_l^{(1)} \right) \tilde{\beta}_l^{(1)} \right\} L \mathbf{a}^{(l)} + \\
& + \tilde{\gamma}_l \left(\frac{1}{2} - \tilde{\alpha}_l^{(1)} \right) (1 - \tilde{\beta}_l^{(1)}) L \mathbf{a}^{(l)}(\mathbf{x}_{\tau_{p-1}}, \tau_{p-1}) \Big] - \\
& - \Delta^3 \left[\left(\frac{\tilde{\alpha}_l^{(2)}}{2} + \tilde{\beta}_l^{(2)} \left(\frac{1}{2} - \tilde{\alpha}_l^{(2)} \right) - \frac{1}{6} \right) L^2 \mathbf{a}^{(l)} + \right. \\
& + \tilde{\gamma}_l \left(\frac{\tilde{\alpha}_l^{(1)}}{2} + \tilde{\beta}_l^{(1)} \left(\frac{1}{2} - \tilde{\alpha}_l^{(1)} \right) - \frac{1}{6} \right) L^2 \mathbf{a}^{(l)}(\mathbf{x}_{\tau_{p-1}}, \tau_{p-1}) \Big] - \\
& - \Delta \left(\tilde{\alpha}_l^{(2)} \tilde{G}_{\tau_{p+1}, \tau_p}^{(l)} + \tilde{\alpha}_l^{(1)} \tilde{\gamma}_l \tilde{G}_{\tau_p, \tau_{p-1}}^{(l)} \right) + \tilde{\mathbf{d}}_{\tau_{p+1}, \tau_p}^{(l)} + \tilde{\gamma}_l \tilde{\mathbf{d}}_{\tau_p, \tau_{p-1}}^{(l)} - \\
& - \Delta^2 \left[\left(\frac{1}{2} - \tilde{\alpha}_l^{(2)} \right) \tilde{\beta}_l^{(2)} \tilde{Q}_{\tau_{p+1}, \tau_p}^{(l)} + \right. \\
& + \left. \left(\frac{1}{2} - \tilde{\alpha}_l^{(1)} \right) \tilde{\beta}_l^{(1)} \tilde{\gamma}_l \tilde{Q}_{\tau_p, \tau_{p-1}}^{(l)} \right] + \dots \text{ с в.1,} \tag{9.41}
\end{aligned}$$

где

$$\tilde{Q}_{\tau_{p+1}, \tau_p} = \sum_{i_1=1}^m G_0^{(i_1)} L \mathbf{a} J_{(1)\tau_{p+1}, \tau_p}^{(i_1)}; \tag{9.42}$$

$$\begin{aligned}
\tilde{G}_{\tau_{p+1}, \tau_p} = & G_{\tau_{p+1}, \tau_p} + \sum_{i_1=1}^m \left[L G_0^{(i_1)} \mathbf{a} J_{(01)\tau_{p+1}, \tau_p}^{(i_1)} + G_0^{(i_1)} L \mathbf{a} J_{(10)\tau_{p+1}, \tau_p}^{(i_1)} \right] + \\
& + \sum_{i_1, i_2, i_3=1}^m G_0^{(i_3)} G_0^{(i_2)} G_0^{(i_1)} \mathbf{a} J_{(111)\tau_{p+1}, \tau_p}^{(i_3 i_2 i_1)}; \tag{9.43}
\end{aligned}$$

$$\tilde{\mathbf{d}}_{\tau_{p+1}, \tau_p} = \mathbf{d}_{\tau_{p+1}, \tau_p} +$$

$$\begin{aligned}
& + \sum_{i_1=1}^m \left[G_0^{(i_1)} L \mathbf{a} J_{(100)\tau_{p+1}, \tau_p}^{(i_1)} + L L \Sigma_{i_1} J_{(001)\tau_{p+1}, \tau_p}^{(i_1)} + L G_0^{(i_1)} J_{(010)\tau_{p+1}, \tau_p}^{(i_1)} \right] + \\
& + \sum_{i_1, i_2, i_3=1}^m \left[G_0^{(i_3)} L G_0^{(i_2)} \Sigma_{i_1} J_{(1011)\tau_{p+1}, \tau_p} + G_0^{(i_3)} G_0^{(i_2)} L \Sigma_{i_1} J_{(1101)\tau_{p+1}, \tau_p}^{(i_3 i_2 i_1)} + \right. \\
& \quad \left. + G_0^{(i_3)} G_0^{(i_2)} G_0^{(i_1)} \mathbf{a} J_{(1110)\tau_{p+1}, \tau_p}^{(i_3 i_2 i_1)} + L G_0^{(i_3)} G_0^{(i_2)} \Sigma_{i_1} J_{(0111)\tau_{p+1}, \tau_p}^{(i_3 i_2 i_1)} \right] + \\
& \quad + \sum_{i_1, i_2, i_3, i_4, i_5=1}^m G_0^{(i_5)} G_0^{(i_4)} G_0^{(i_3)} G_0^{(i_2)} \Sigma^{(i_1)} J_{(11111)\tau_{p+1}, \tau_p}^{(i_5 i_4 i_3 i_2 i_1)}; \quad (9.44)
\end{aligned}$$

G_{τ_{p+1}, τ_p} и $\mathbf{d}_{\tau_{p+1}, \tau_p}$ определяются соответственно равенствами (9.39), (9.40); $\tilde{\alpha}_l^{(1)}, \tilde{\alpha}_l^{(2)}, \tilde{\beta}_l^{(1)}, \tilde{\beta}_l^{(2)}, \tilde{\gamma}_l \in [0, 1], l = 1, \dots, n$; если в правых частях (9.41)–(9.44) аргументы у некоторых функций опущены, то эти функции вычислены в точке $(\mathbf{x}_{\tau_p}, \tau_p)$.

Если в правой части (9.41) отбросить слагаемые, обозначенные тремя точками, и в правых частях (9.41)–(9.44) заменить повторные стохастические интегралы Ито их сильными аппроксимациями, то получим пятипараметрическое семейство неявных двухшаговых сильных численных методов порядка точности 2.5. В частности, при $\tilde{\gamma}_l = 1, \tilde{\alpha}_l^{(1)} = \tilde{\alpha}_l^{(2)} = \frac{1}{2}, \tilde{\beta}_l^{(1)}, \tilde{\beta}_l^{(2)} \in [0, 1]$ из (9.41) следует неявный двухшаговый численный метод (9.15) с величиной $\tilde{\mathbf{v}}_{\tau_{p+1}, \tau_p}$ вида (9.17).

В заключение отметим, что рассмотренный подход получения различных параметрических семейств численных методов решения стохастических дифференциальных уравнений Ито по сути является обобщением аналогичного подхода для обыкновенных дифференциальных уравнений.

Отметим также, что, составляя линейные комбинации систематических членов

$$\begin{aligned}
& \mathbf{x}_{\tau_p}, \dots, \mathbf{x}_{\tau_{p-k}}, \\
& \Delta \mathbf{a}(\mathbf{x}_{\tau_{p+1}}, \tau_{p+1}), \Delta \mathbf{a}(\mathbf{x}_{\tau_p}, \tau_p), \dots, \Delta \mathbf{a}(\mathbf{x}_{\tau_{p-k}}, \tau_{p-k}), \\
& \Delta^2 L \mathbf{a}(\mathbf{x}_{\tau_{p+1}}, \tau_{p+1}), \Delta^2 L \mathbf{a}(\mathbf{x}_{\tau_p}, \tau_p), \dots, \Delta^2 L \mathbf{a}(\mathbf{x}_{\tau_{p-k}}, \tau_{p-k}), \\
& \dots \dots \dots
\end{aligned}$$

где $k \geq 1$, выбирая определенным образом коэффициенты перед этими членами и дополняя эти комбинации специально подобранными стохастическими членами из разложения Тейлора–Ито, можно в принципе строить различные многошаговые сильные численные схемы решения стохастических дифференциальных уравнений Ито.

9.6 Явные и неявные, в том числе конечно-разностные, трехшаговые численные методы, основанные на разложениях Тейлора–Ито

9.6.1 Методы порядка точности 1.0.

Рассмотрим стохастическое дифференциальное уравнение Ито (1.35) и предположим, что выполнены условия теоремы 1.6.

Предложим следующий трехшаговый сильный численный метод порядка точности 1.0 для стохастического дифференциального уравнения Ито:

$$\begin{aligned} \mathbf{y}_{\tau_{p+1}}^{(l)} = & \alpha_l \mathbf{y}_{\tau_p}^{(l)} + \beta_l \mathbf{y}_{\tau_{p-1}}^{(l)} + (1 - \alpha_l - \beta_l) \mathbf{y}_{\tau_{p-2}}^{(l)} + \\ & + \Delta \left[\delta_l \mathbf{a}^{(l)}(\mathbf{y}_{\tau_{p+1}}, \tau_{p+1}) + \mu_l \mathbf{a}^{(l)}(\mathbf{y}_{\tau_p}, \tau_p) + \nu_l \mathbf{a}^{(l)}(\mathbf{y}_{\tau_{p-1}}, \tau_{p-1}) + \right. \\ & \left. + (3 - 2\alpha_l - \beta_l - \delta_l - \mu_l - \nu_l) \mathbf{a}^{(l)}(\mathbf{y}_{\tau_{p-2}}, \tau_{p-2}) \right] + \\ & + (1 - \alpha_l) \mathbf{v}_{\tau_p, \tau_{p-1}}^{(l)} + (1 - \alpha_l - \beta_l) \mathbf{v}_{\tau_{p-1}, \tau_{p-2}}^{(l)} + \mathbf{v}_{\tau_{p+1}, \tau_p}^{(l)}, \end{aligned} \quad (9.45)$$

где

$$\begin{aligned} \mathbf{v}_{\tau_{p+1}, \tau_p} = & \sum_{i_1=1}^m \Sigma_{i_1} \hat{I}_{0\tau_{p+1}, \tau_p}^{(i_1)} + \\ & + \sum_{i_1, i_2=1}^m G_0^{(i_2)} \Sigma_{i_1} \hat{I}_{00\tau_{p+1}, \tau_p}^{(i_2 i_1)}, \end{aligned}$$

$\mathbf{a}(\mathbf{y}_p, \tau_p) \stackrel{\text{def}}{=} \mathbf{a}$; $\Sigma_i(\mathbf{y}_p, \tau_p) \stackrel{\text{def}}{=} \Sigma_i$; $\mathbf{y}_{\tau_p} \stackrel{\text{def}}{=} \mathbf{y}_p$; шляпка указывает на то, что соответствующая величина является аппроксимацией повторного стохастического интеграла; $l = 1, 2, \dots, n$; $p = 2, 3, \dots, N - 1$; $\mathbf{g}^{(l)}$ – l -я компонента вектора $\mathbf{g}$; $\alpha_l, \beta_l \in [0, 1]$, $\alpha_l + \beta_l \leq 1$, δ_l, μ_l, ν_l – числовые параметры; $\tau_p = p\Delta$; $\Delta \in (0, 1)$; $T = N\Delta$.

Для старта численной схемы (9.45) необходимо знать величины $\mathbf{y}_{\tau_1}^{(l)}$, $\mathbf{y}_{\tau_2}^{(l)}$; $l = 1, \dots, n$. Они могут быть вычислены с помощью явного метода Г.Н.Мильштейна (в частности, он получается из (9.45) при $\alpha_l = \mu_l = 1$, $\beta_l = \delta_l = \nu_l = 0$). Для аппроксимаций повторных стохастических интегралов Ито, входящих в правую часть (9.45), можно, например, воспользоваться формулами из главы 6.

Докажем сходимость численного метода (9.45).

Теорема 9.1. Пусть для всех $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$; $s, t \in [0, T]$, $s > t$; $p = 0, 1, \dots, N - 1$; $i, j, k = 1, \dots, m$; $l = 1, \dots, n$ и некоторых, независимых от Δ постоянных K_1, K_2, K_3, C_1, C_2 выполнены следующие условия:

$$\mathbb{M}\{|\mathbf{x}_0|^2\} < \infty,$$

$$\begin{aligned} & \mathbb{M}\{|\mathbf{x}_0 - \mathbf{y}_0|^2\} + \mathbb{M}\{|\mathbf{x}_{\tau_1} - \mathbf{y}_{\tau_1}|^2\} + \\ & + \mathbb{M}\{|\mathbf{x}_{\tau_2} - \mathbf{y}_{\tau_2}|^2\} \leq C_1 \Delta^2, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & |\mathbf{a}(\mathbf{x}, t) - \mathbf{a}(\mathbf{y}, t)| + |\Sigma_i(\mathbf{x}, t) - \Sigma_i(\mathbf{y}, t)| + \\ & + |G_0^{(j)} \Sigma_i(\mathbf{x}, t) - G_0^{(j)} \Sigma_i(\mathbf{y}, t)| \leq \\ & \leq K_1 |\mathbf{x} - \mathbf{y}|, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & |\mathbf{a}(\mathbf{x}, t)| + |L\mathbf{a}(\mathbf{x}, t)| + |G_0^{(i)} \mathbf{a}(\mathbf{x}, t)| + |\Sigma_i(\mathbf{x}, t)| + \\ & + |L\Sigma_i(\mathbf{x}, t)| + |G_0^{(j)} \Sigma_i(\mathbf{x}, t)| + \\ & + |LG_0^{(j)} \Sigma_i(\mathbf{x}, t)| + |G_0^{(k)} G_0^{(j)} \Sigma_i(\mathbf{x}, t)| \leq \\ & \leq K_2(1 + |\mathbf{x}|), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & |\mathbf{a}(\mathbf{x}, s) - \mathbf{a}(\mathbf{x}, t)| + |\Sigma_i(\mathbf{x}, s) - \Sigma_i(\mathbf{x}, t)| + \\ & + |G_0^{(j)} \Sigma_i(\mathbf{x}, s) - G_0^{(j)} \Sigma_i(\mathbf{x}, t)| \leq \\ & \leq K_3(1 + |\mathbf{x}|) \sqrt{s - t}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \mathbb{M}\left\{\left(I_{0\tau_{p+1}, \tau_p}^{(i)} - \hat{I}_{0\tau_{p+1}, \tau_p}^{(i)}\right)^2\right\} + \mathbb{M}\left\{\left(I_{00\tau_{p+1}, \tau_p}^{(ji)} - \hat{I}_{00\tau_{p+1}, \tau_p}^{(ji)}\right)^2\right\} \leq \\ & \leq C_2 \Delta^3, \end{aligned}$$

$$\alpha_l, \beta_l \in [0, 1]; \quad \alpha_l + \beta_l \leq 1; \quad |\delta_l| + |\mu_l| + |\nu_l| < \infty.$$

Тогда справедлива оценка

$$\mathbb{M}\{|\mathbf{x}_T - \mathbf{y}_T|\} \leq C\Delta,$$

где C – постоянная, которая не зависит от Δ ; $\mathbf{y}_{\tau_1}$, $\mathbf{y}_{\tau_2}$, $\mathbf{y}_T$ определяются численной схемой (9.45).

Доказательство. С использованием формулы Ито получаем:

$$\mathbf{x}_{\tau_{p+1}} = \mathbf{x}_{\tau_p} + \Delta \mathbf{a}(\mathbf{x}_{\tau_p}, \tau_p) + \mathbf{d}_{\tau_{p+1}, \tau_p} + \mathbf{h}_{\tau_{p+1}, \tau_p} \text{ с в. 1,} \quad (9.46)$$

$$\mathbf{a}(\mathbf{x}_{\tau_{p+1}}, \tau_{p+1}) = \mathbf{a}(\mathbf{x}_{\tau_p}, \tau_p) + \mathbf{r}_{\tau_{p+1}, \tau_p} \text{ с в. 1,} \quad (9.47)$$

где

$$\begin{aligned}
\mathbf{r}_{\tau_{p+1}, \tau_p} &= \int_{\tau_p}^{\tau_{p+1}} L \mathbf{a}(\mathbf{x}_s, s) ds + \sum_{i=1}^m \int_{\tau_p}^{\tau_{p+1}} G_0^{(i)} \mathbf{a}(\mathbf{x}_s, s) d\mathbf{w}_s^{(i)}, \\
\mathbf{d}_{\tau_{p+1}, \tau_p} &= \sum_{i=1}^m \Sigma_i(\mathbf{x}_{\tau_p}, \tau_p) I_{0\tau_{p+1}, \tau_p}^{(i)} + \sum_{i,j=1}^m G_0^{(j)} \Sigma_i(\mathbf{x}_{\tau_p}, \tau_p) I_{00\tau_{p+1}, \tau_p}^{(ji)}, \\
\mathbf{h}_{\tau_{p+1}, \tau_p} &= \int_{\tau_p}^{\tau_{p+1}} \left(\int_{\tau_p}^s L \mathbf{a}(\mathbf{x}_\theta, \theta) d\theta + \sum_{i=1}^m \int_{\tau_p}^s G_0^{(i)} \mathbf{a}(\mathbf{x}_\theta, \theta) d\mathbf{w}_\theta^{(i)} \right) ds + \\
&\quad + \sum_{i,j=1}^m \int_{\tau_p}^{\tau_{p+1}} \int_{\tau_p}^s \left(\int_{\tau_p}^\theta L G_0^{(j)} \Sigma_i(\mathbf{x}_u, u) du + \right. \\
&\quad \left. + \sum_{k=1}^m \int_{\tau_p}^\theta G_0^{(k)} G_0^{(j)} \Sigma_i(\mathbf{x}_u, u) d\mathbf{w}_u^{(k)} \right) d\mathbf{w}_\theta^{(j)} d\mathbf{w}_s^{(i)} \\
&\quad + \sum_{i=1}^m \int_{\tau_p}^{\tau_{p+1}} \int_{\tau_p}^s L \Sigma_i(\mathbf{x}_\theta, \theta) d\theta d\mathbf{w}_s^{(i)}.
\end{aligned}$$

Применяя формулы (9.46), (9.47) нетрудно прийти к следующему представлению:

$$\begin{aligned}
\mathbf{x}_{\tau_{p+1}}^{(l)} &= \alpha_l \mathbf{x}_{\tau_p}^{(l)} + \beta_l \mathbf{x}_{\tau_{p-1}}^{(l)} + (1 - \alpha_l - \beta_l) \mathbf{x}_{\tau_{p-2}}^{(l)} + \\
&+ \Delta \left[\delta_l \mathbf{a}^{(l)}(\mathbf{x}_{\tau_{p+1}}, \tau_{p+1}) + \mu_l \mathbf{a}^{(l)}(\mathbf{x}_{\tau_p}, \tau_p) + \nu_l \mathbf{a}^{(l)}(\mathbf{x}_{\tau_{p-1}}, \tau_{p-1}) + \right. \\
&\quad \left. + (3 - 2\alpha_l - \beta_l - \delta_l - \mu_l - \nu_l) \mathbf{a}^{(l)}(\mathbf{x}_{\tau_{p-2}}, \tau_{p-2}) \right] + \\
&\quad + (1 - \alpha_l) \mathbf{d}_{\tau_p, \tau_{p-1}}^{(l)} + (1 - \alpha_l - \beta_l) \mathbf{d}_{\tau_{p-1}, \tau_{p-2}}^{(l)} + \\
&\quad + \mathbf{d}_{\tau_{p+1}, \tau_p}^{(l)} + Q_{\tau_{p+1}, \tau_p, \tau_{p-1}, \tau_{p-2}}^{(l)} \text{ с в. 1,} \tag{9.48}
\end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned}
Q_{\tau_{p+1}, \tau_p, \tau_{p-1}, \tau_{p-2}}^{(l)} &= \mathbf{h}_{\tau_{p+1}, \tau_p}^{(l)} + \\
&+ (1 - \alpha_l) \mathbf{h}_{\tau_p, \tau_{p-1}}^{(l)} + (1 - \alpha_l - \beta_l) \mathbf{h}_{\tau_{p-1}, \tau_{p-2}}^{(l)} - \\
&- \Delta \left[\delta_l \mathbf{r}_{\tau_{p+1}, \tau_p}^{(l)} + (\delta_l + \mu_l - 1) \mathbf{r}_{\tau_p, \tau_{p-1}}^{(l)} + \right. \\
&\quad \left. + (\alpha_l + \delta_l + \mu_l + \nu_l - 2) \mathbf{r}_{\tau_{p-1}, \tau_{p-2}}^{(l)} \right];
\end{aligned}$$

остальные обозначения, входящие в (9.48), такие же, как в (9.45).

Положим

$$\begin{aligned}
\mathbf{y}_s^{(l)} &= \alpha_l \mathbf{y}_{\tau_p}^{(l)} + \beta_l \mathbf{y}_{\tau_{p-1}}^{(l)} + (1 - \alpha_l - \beta_l) \mathbf{y}_{\tau_{p-2}}^{(l)} + \\
&+ (s - \tau_p) \delta_l \mathbf{a}^{(l)}(\mathbf{y}_s, s) + \Delta [\mu_l \mathbf{a}^{(l)}(\mathbf{y}_{\tau_p}, \tau_p) + \\
&+ \nu_l \mathbf{a}^{(l)}(\mathbf{y}_{\tau_{p-1}}, \tau_{p-1}) + \\
&+ (3 - 2\alpha_l - \beta_l - \delta_l - \mu_l - \nu_l) \mathbf{a}^{(l)}(\mathbf{y}_{\tau_{p-2}}, \tau_{p-2})] + \\
&+ (1 - \alpha_l) \mathbf{v}_{\tau_p, \tau_{p-1}}^{(l)} + (1 - \alpha_l - \beta_l) \mathbf{v}_{\tau_{p-1}, \tau_{p-2}}^{(l)} + \\
&+ \mathbf{v}_{s, \tau_p}^{(l)}, \tag{9.49}
\end{aligned}$$

где $s \in (\tau_p, \tau_{p+1}]$; $p = 2, 3, \dots, N - 1$, т. е. (9.49) переходит в (9.45) при $s = \tau_{p+1}$.

Вычитая (9.49) из (9.48) при $\tau_{p+1} = s$ получаем:

$$\begin{aligned}
\mathbf{x}_s^{(l)} - \mathbf{y}_s^{(l)} &= \alpha_l (\mathbf{x}_{\tau_{n_s}}^{(l)} - \mathbf{y}_{\tau_{n_s}}^{(l)}) + \beta_l (\mathbf{x}_{\tau_{n_s-1}}^{(l)} - \mathbf{y}_{\tau_{n_s-1}}^{(l)}) + \\
&+ (1 - \alpha_l - \beta_l) (\mathbf{x}_{\tau_{n_s-2}}^{(l)} - \mathbf{y}_{\tau_{n_s-2}}^{(l)}) + U_{s, \tau_{n_s}, \tau_{n_s-1}, \tau_{n_s-2}}^{(l)}, \tag{9.50}
\end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned}
U_{s, \tau_{n_s}, \tau_{n_s-1}, \tau_{n_s-2}}^{(l)} &= (s - \tau_p) \delta_l (\mathbf{a}^{(l)}(\mathbf{x}_s, s) - \mathbf{a}^{(l)}(\mathbf{y}_s, s)) + \\
&+ \Delta [\mu_l (\mathbf{a}^{(l)}(\mathbf{x}_{\tau_{n_s}}, \tau_{n_s}) - \mathbf{a}^{(l)}(\mathbf{y}_{\tau_{n_s}}, \tau_{n_s})) + \\
&+ \nu_l (\mathbf{a}^{(l)}(\mathbf{x}_{\tau_{n_s-1}}, \tau_{n_s-1}) - \mathbf{a}^{(l)}(\mathbf{y}_{\tau_{n_s-1}}, \tau_{n_s-1})) + \\
&+ (3 - 2\alpha_l - \beta_l - \delta_l - \mu_l - \nu_l) (\mathbf{a}^{(l)}(\mathbf{x}_{\tau_{n_s-2}}, \tau_{n_s-2}) - \mathbf{a}^{(l)}(\mathbf{y}_{\tau_{n_s-2}}, \tau_{n_s-2}))] + \\
&+ (1 - \alpha_l) (\mathbf{d}_{\tau_{n_s}, \tau_{n_s-1}}^{(l)} - \mathbf{v}_{\tau_{n_s}, \tau_{n_s-1}}^{(l)}) + \\
&+ (1 - \alpha_l - \beta_l) (\mathbf{d}_{\tau_{n_s-1}, \tau_{n_s-2}}^{(l)} - \mathbf{v}_{\tau_{n_s-1}, \tau_{n_s-2}}^{(l)}) + \\
&+ \mathbf{d}_{s, \tau_{n_s}}^{(l)} - \mathbf{v}_{s, \tau_{n_s}}^{(l)} + Q_{s, \tau_{n_s}, \tau_{n_s-1}, \tau_{n_s-2}}^{(l)};
\end{aligned}$$

$$n_s = \max_j \{j : \tau_j \leq s\}.$$

Итерируя равенство (9.50) имеем:

$$\begin{aligned}
\mathbf{x}_s^{(l)} - \mathbf{y}_s^{(l)} &= e_{n_s-1} (\mathbf{x}_{\tau_2}^{(l)} - \mathbf{y}_{\tau_2}^{(l)}) + f_{n_s-1} (\mathbf{x}_{\tau_1}^{(l)} - \mathbf{y}_{\tau_1}^{(l)}) + \\
&+ g_{n_s-1} (\mathbf{x}_0^{(l)} - \mathbf{y}_0^{(l)}) + \sum_{j=2}^{n_s-1} q_j U_{\tau_{n_s-j+2}, \tau_{n_s-j+1}, \tau_{n_s-j}, \tau_{n_s-j-1}}^{(l)} + \\
&+ q_1 U_{s, \tau_{n_s}, \tau_{n_s-1}, \tau_{n_s-2}}^{(l)}, \tag{9.51}
\end{aligned}$$

где

$$e_{k+1} = \alpha_l e_k + f_k, \quad e_1 = \alpha_l, \quad (9.52)$$

$$f_{k+1} = \beta_l e_k + g_k, \quad f_1 = \beta_l, \quad (9.53)$$

$$g_{k+1} = (1 - \alpha_l - \beta_l) e_k, \quad g_1 = 1 - \alpha_l - \beta_l, \quad (9.54)$$

$$q_{k+1} = e_k, \quad q_1 = 1; \quad (9.55)$$

$k = 1, 2, \dots, n_s - 2$.

Заметим, что если в правой части (9.45) положить $\alpha_l = \mu_l = 1$, $\beta_l = \delta_l = \nu_l = 0$, то численный метод (9.45) превратится в явный одношаговый сильный численный метод порядка точности 1.0 (метод Г.Н. Мильштейна). Сходимость метода Г.Н. Мильштейна доказана в условиях теоремы 11.1 в [70] (см. также теорему 7.2). Единственное существенное отличие, которое может возникнуть при обосновании сходимости численного метода (9.45) с помощью подхода, изложенного в [70], связано с тем, что коэффициенты e_k, f_k, g_k, q_k могут расти с ростом k , в то время как для метода Г.Н. Мильштейна $e_{n_s-1} = f_{n_s-1} = 0$, $g_{n_s-1} = 1$, $q_1 = \dots = q_{n_s-1} = 1$.

Покажем, что при $\alpha_l, \beta_l \in [0, 1]$, $\alpha_l + \beta_l \leq 1$ числа e_k, f_k, g_k, q_k принадлежат промежутку $[0, 1]$ при всех $k = 1, 2, \dots, n_s - 1$.

Из (9.52)-(9.54) получаем:

$$e_{k+1} = \alpha_l e_k + \beta_l e_{k-1} + (1 - \alpha_l - \beta_l) e_{k-2}. \quad (9.56)$$

Запишем несколько очевидных соотношений: $0 \leq e_2 = (\alpha_l)^2 + \beta_l \leq \alpha_l + \beta_l \leq 1$, $0 \leq f_2 = \beta_l \alpha_l + 1 - \alpha_l - \beta_l \leq 1 - \alpha_l \leq 1$, $e_2 + f_2 + g_2 = 1$, $0 \leq g_2 \leq 1$, $0 \leq e_3 = \alpha_l e_2 + f_2 \leq e_2 + f_2 = 1 - g_2 \leq 1$.

Таким образом $e_1, e_2, e_3 \in [0, 1]$. Согласно этому и (9.56) имеем: $0 \leq e_4 \leq \alpha_l + \beta_l + 1 - \alpha_l - \beta_l = 1$.

Предположим теперь, что $e_{k-2}, e_{k-1}, e_k \in [0, 1]$ при некотором $k > 3$. Тогда из (9.56) снова получаем: $0 \leq e_{k+1} \leq \alpha_l + \beta_l + 1 - \alpha_l - \beta_l = 1$, т. е. по индукции $e_k \in [0, 1]$ при $k = 1, 2, \dots$.

В силу (9.54), (9.55) $q_k, g_k \in [0, 1]$ при $k = 1, 2, \dots$.

Из (9.53), (9.54) получаем: $0 \leq f_{k+1} = \beta_l e_k + (1 - \alpha_l - \beta_l) e_{k-1} \leq \beta_l + 1 - \alpha_l - \beta_l = 1 - \alpha_l \leq 1$, т. е. $f_k \in [0, 1]$ при $k = 1, 2, \dots$.

Итак мы показали, что при $\alpha_l, \beta_l \in [0, 1]$, $\alpha_l + \beta_l \leq 1$ числа e_k, f_k, g_k, q_k принадлежат промежутку $[0, 1]$ при $k = 1, 2, \dots$.

Теперь из (9.51) получаем:

$$\mathbf{z}_s^{(l)} \stackrel{\text{def}}{=} \mathbf{M}\{|\mathbf{x}_s^{(l)} - \mathbf{y}_s^{(l)}|^2\} \leq L_1 \left(\sum_{k=0}^2 \mathbf{M}\{|\mathbf{x}_{\tau_k}^{(l)} - \mathbf{y}_{\tau_k}^{(l)}|^2\} + \right.$$

$$+M \left\{ \left(\sum_{j=2}^{n_s-1} q_j U_{\tau_{n_s-j+2}, \tau_{n_s-j+1}, \tau_{n_s-j}, \tau_{n_s-j-1}}^{(l)} \right)^2 \right\} + M \left\{ \left(U_{s, \tau_{n_s}, \tau_{n_s-1}, \tau_{n_s-2}}^{(l)} \right)^2 \right\}, \quad (9.57)$$

где постоянная L_1 не зависит от Δ .

Дальнейшее доказательство аналогично доказательству теоремы 7.2. В результате получаем оценку: $M\{|\mathbf{x}_T - \mathbf{y}_T|\} \leq C\Delta$, где постоянная C не зависит от Δ . Теорема доказана. $\square$

Отметим, что если в (9.45) взять переменный шаг интегрирования, то теорема 9.1 остается в силе. При этом роль Δ в формулировке теоремы 9.1 будет играть величина $\Delta = \max_{1 \leq j \leq N-1} \Delta_j$, где Δ_j – j -й шаг интегрирования.

Численный эксперимент 9.12 (рис. 9.12). *Смоделировать 2000 ($M = 20$ групп по $L = 100$ штук в каждой) независимых реализаций случайной величины $\mathbf{x}_T$, являющейся решением стохастического дифференциального уравнения Ито (7.4) при $t = T$, по формуле*

$$x_0 e^{(a - \frac{1}{2}b^2)T + b\sqrt{\Delta} \sum_{p=1}^N \zeta_p^{(1)}} \quad (9.58)$$

при $x_0 = 1$, $T = 1$, $a = b = 1.5$, $N = T/\Delta$, $\Delta = 2^{-3}$ и с помощью численного метода (9.45) при тех же исходных данных и $y_0 = 1$, $\alpha_1 = 0$, $\beta_1 = \delta_1 = \mu_1 = \nu_1 = \frac{1}{2}$ (кривая 1). Два начальных шага осуществить с помощью явного метода Мильштейна (численный метод (9.45) при $\alpha_1 = \mu_1 = 1$, $\beta_1 = \delta_1 = \nu_1 = 0$). Для моделирования стохастических интегралов Ито, входящих в (9.45) использовать формулы:

$$\hat{I}_{0, \tau_{p+1}, \tau_p}^{(1)} = \sqrt{\Delta} \zeta_p^{(1)}, \quad \hat{I}_{00, \tau_{p+1}, \tau_p}^{(11)} = \frac{\Delta}{2} \left((\zeta_p^{(1)})^2 - 1 \right); \quad (9.59)$$

$\zeta_p^{(1)}$ в (9.58), (9.59) – независимые в совокупности стандартные гауссовские случайные величины. Вычислить $\hat{\epsilon}_{100,20}$, повторить вычисления при $\Delta = 2^{-j}$; $j = 4, 5, 6, 7$ и построить зависимость $\hat{\epsilon}_{100,20}(\Delta)$; $\Delta = 2^{-j}$; $j = 3, 4, \dots, 7$. Повторить вычисления для $\alpha_1 = \beta_1 = \frac{1}{3}$, $\delta_1 = \mu_1 = \nu_1 = \frac{1}{2}$ (кривая 2) и $\alpha_1 = \beta_1 = 0$, $\delta_1 = \mu_1 = \nu_1 = \frac{3}{4}$ (кривая 3).

Наличие производных в выражении численного метода является, как известно, его недостатком. В связи с этим построим конечно-разностную модификацию численного метода (9.45). Для этого аппроксимируем конечными разностями частные производные, входящие в величины $\mathbf{v}_{\tau_p, \tau_{p-1}}^{(l)}$, $\mathbf{v}_{\tau_{p-1}, \tau_{p-2}}^{(l)}$, $\mathbf{v}_{\tau_{p+1}, \tau_p}^{(l)}$ в правой части (9.45). Напри-

мер, в (9.45) вместо $\mathbf{v}_{\tau_{p+1}, \tau_p}$ можно использовать

$$\begin{aligned} \mathbf{v}_{\tau_{p+1}, \tau_p} = & \sum_{i_1=1}^m \Sigma_{i_1}(\mathbf{y}_p, \tau_p) \hat{I}_{0_{\tau_{p+1}, \tau_p}}^{(i_1)} + \\ & + \frac{1}{\sqrt{\Delta}} \sum_{i_1, i_2=1}^m \sum_{j=1}^2 \pi_j \Sigma_{i_1}(\mathbf{y}_{p\sigma}^{(ji_2)}, \tau_p) \hat{I}_{0_{\tau_{p+1}, \tau_p}}^{(i_2 i_1)}, \end{aligned}$$

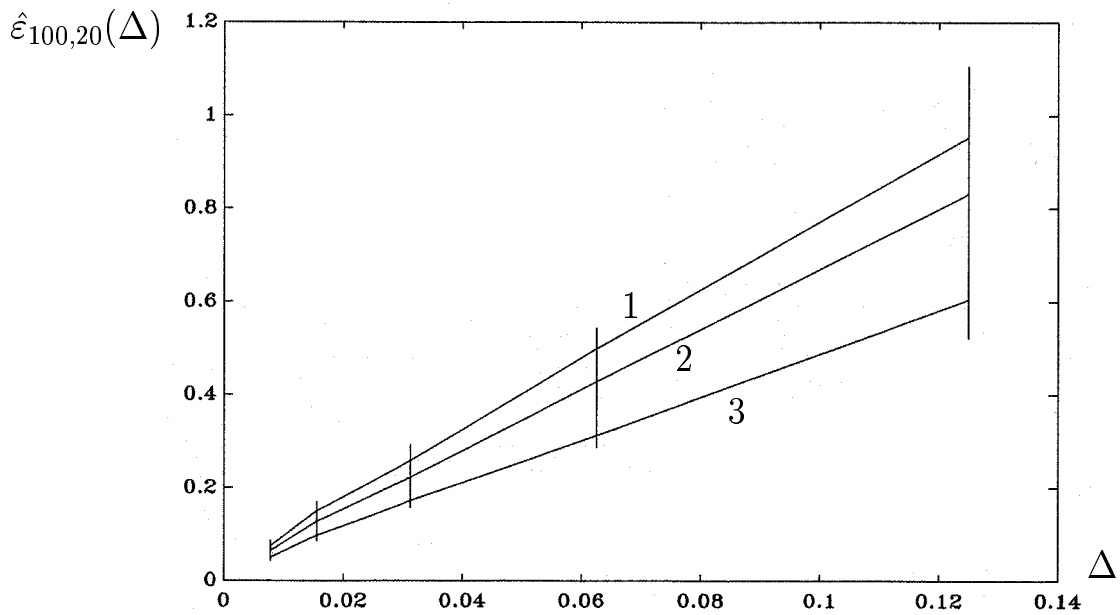


Рис.9.12. Результат численного эксперимента 9.12.

где сохранен смысл обозначений формулы (7.89).

Численный эксперимент 9.13. Повторить численный эксперимент 9.12 для конечно-разностной модификации численного метода (9.45). Два начальных шага осуществить с помощью явного одношагового сильного конечно-разностного численного метода порядка точности 1.0 вида (7.89).

Результаты численного эксперимента 9.13 совпадают с точностью до 10^{-4} с результатами численного эксперимента 9.12.

Поясним кратко, как может быть обоснована сходимость построенного конечно-разностного численного метода. С помощью обычной

формулы Тейлора его правая часть приводится к представлению, которое отличается от правой части (9.45) наличием слагаемого, имеющего порядок малости $\frac{3}{2}$ по Δ при $\Delta \downarrow 0$. Далее сходимость рассматриваемого численного метода обосновывается аналогично тому, как это сделано в теореме 7.6.

9.6.2 Методы порядка точности 1.5.

Разовьем подход, изложенный в предыдущем разделе. В результате получим следующий трехшаговый сильный численный метод порядка точности 1.5:

$$\begin{aligned}
\mathbf{y}_{\tau_{p+1}}^{(l)} = & \alpha_l \mathbf{y}_{\tau_p}^{(l)} + \beta_l \mathbf{y}_{\tau_{p-1}}^{(l)} + (1 - \alpha_l - \beta_l) \mathbf{y}_{\tau_{p-2}}^{(l)} + \\
& + \Delta \left[\delta_l \mathbf{a}^{(l)}(\mathbf{y}_{\tau_{p+1}}, \tau_{p+1}) + \mu_l \mathbf{a}^{(l)}(\mathbf{y}_{\tau_p}, \tau_p) + \nu_l \mathbf{a}^{(l)}(\mathbf{y}_{\tau_{p-1}}, \tau_{p-1}) + \right. \\
& \left. + (3 - 2\alpha_l - \beta_l - \delta_l - \mu_l - \nu_l) \mathbf{a}^{(l)}(\mathbf{y}_{\tau_{p-2}}, \tau_{p-2}) \right] + \\
& + \Delta^2 \left[\varepsilon_l L \mathbf{a}^{(l)}(\mathbf{y}_{\tau_{p+1}}, \tau_{p+1}) + \lambda_l L \mathbf{a}^{(l)}(\mathbf{y}_{\tau_p}, \tau_p) + \varphi_l L \mathbf{a}^{(l)}(\mathbf{y}_{\tau_{p-1}}, \tau_{p-1}) + \right. \\
& \left. + \left(\frac{9}{2} - 2\alpha_l - \frac{1}{2}\beta_l - 3\delta_l - 2\mu_l - \nu_l - \varepsilon_l - \lambda_l - \varphi_l \right) L \mathbf{a}^{(l)}(\mathbf{y}_{\tau_{p-2}}, \tau_{p-2}) \right] - \\
& - \Delta \sum_{i=1}^m \left[\delta_l G_0^{(i)} \mathbf{a}^{(l)}(\mathbf{y}_{\tau_p}, \tau_p) \hat{I}_{0_{\tau_{p+1}, \tau_p}}^{(i)} + (\delta_l + \mu_l - 1) G^{(i)} \mathbf{a}^{(l)}(\mathbf{y}_{\tau_{p-1}}, \tau_{p-1}) \hat{I}_{0_{\tau_p, \tau_{p-1}}}^{(i)} + \right. \\
& \left. + (\alpha_l + \delta_l + \mu_l + \nu_l - 2) G_0^{(i)} \mathbf{a}^{(l)}(\mathbf{y}_{\tau_{p-2}}, \tau_{p-2}) \hat{I}_{0_{\tau_{p-1}, \tau_{p-2}}}^{(i)} \right] + \\
& + (1 - \alpha_l) \mathbf{v}_{\tau_p, \tau_{p-1}}^{(l)} + (1 - \alpha_l - \beta_l) \mathbf{v}_{\tau_{p-1}, \tau_{p-2}}^{(l)} + \mathbf{v}_{\tau_{p+1}, \tau_p}^{(l)}, \tag{9.60}
\end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned}
\mathbf{v}_{\tau_{p+1}, \tau_p} = & \sum_{i_1=1}^m \Sigma_{i_1} \hat{I}_{0_{\tau_{p+1}, \tau_p}}^{(i_1)} + \sum_{i_1, i_2=1}^m G_0^{(i_2)} \Sigma_{i_1} \hat{I}_{00_{\tau_{p+1}, \tau_p}}^{(i_2 i_1)} + \\
& + \sum_{i_1=1}^m \left[G_0^{(i_1)} \mathbf{a} \left(\Delta \hat{I}_{0_{\tau_{p+1}, \tau_p}}^{(i_1)} + \hat{I}_{1_{\tau_{p+1}, \tau_p}}^{(i_1)} \right) - L \Sigma_{i_1} \hat{I}_1^{(i_1)} \right] + \\
& + \sum_{i_1, i_2, i_3=1}^m G_0^{(i_3)} G_0^{(i_2)} \Sigma_{i_1} \hat{I}_{000_{\tau_{p+1}, \tau_p}}^{(i_3 i_2 i_1)}.
\end{aligned}$$

Отметим, что при $\varepsilon_l = \lambda_l = \varphi_l = 0$, $\frac{9}{2} - 2\alpha_l - \frac{1}{2}\beta_l - 3\delta_l - 2\mu_l - \nu_l - \varepsilon_l - \lambda_l - \varphi_l = 0$ в правую часть (9.60) войдет меньшее число частных производных, чем в явный одношаговый сильный численный метод порядка точности 1.5 (численный метод (9.60) при $\beta_l = 0$, $\alpha_l = 1$,

$\delta_l = 0, \mu_l = 1, \nu_l = 0, \varepsilon_l = 0, \lambda_l = \frac{1}{2}, \varphi_l = 0$), т. к. в правую часть последнего входит слагаемое $\frac{\Delta^2}{2}L\mathbf{a}$.

Не приводя доказательство сходимости численного метода (9.60) заметим, что оно может быть проведено аналогично доказательству теоремы 9.1 с использованием следующего представления:

$$\begin{aligned}
\mathbf{x}_{\tau_{p+1}}^{(l)} &= \alpha_l \mathbf{x}_{\tau_p}^{(l)} + \beta_l \mathbf{y}_{\tau_{p-1}}^{(l)} + (1 - \alpha_l - \beta_l) \mathbf{x}_{\tau_{p-2}}^{(l)} + \\
&+ \Delta \left[\delta_l \mathbf{a}^{(l)}(\mathbf{x}_{\tau_{p+1}}, \tau_{p+1}) + \mu_l \mathbf{a}^{(l)}(\mathbf{x}_{\tau_p}, \tau_p) + \nu_l \mathbf{a}^{(l)}(\mathbf{x}_{\tau_{p-1}}, \tau_{p-1}) + \right. \\
&\quad \left. + (3 - 2\alpha_l - \beta_l - \delta_l - \mu_l - \nu_l) \mathbf{a}^{(l)}(\mathbf{x}_{\tau_{p-2}}, \tau_{p-2}) \right] + \\
&+ \Delta^2 \left[\varepsilon_l L \mathbf{a}^{(l)}(\mathbf{x}_{\tau_{p+1}}, \tau_{p+1}) + \lambda_l L \mathbf{a}^{(l)}(\mathbf{x}_{\tau_p}, \tau_p) + \varphi_l L \mathbf{a}^{(l)}(\mathbf{x}_{\tau_{p-1}}, \tau_{p-1}) + \right. \\
&\quad \left. + \left(\frac{9}{2} - 2\alpha_l - \frac{1}{2}\beta_l - 3\delta_l - 2\mu_l - \nu_l - \varepsilon_l - \lambda_l - \varphi_l \right) L \mathbf{a}^{(l)}(\mathbf{x}_{\tau_{p-2}}, \tau_{p-2}) \right] - \\
&- \Delta \left[\delta_l \mathbf{q}_{\tau_{p+1}, \tau_p}^{(l)} + (\delta_l + \mu_l - 1) \mathbf{q}_{\tau_p, \tau_{p-1}}^{(l)} + (\alpha_l + \delta_l + \mu_l + \nu_l - 2) \mathbf{q}_{\tau_{p-1}, \tau_{p-2}}^{(l)} \right] + \\
&+ (1 - \alpha_l) \mathbf{g}_{\tau_p, \tau_{p-1}}^{(l)} + (1 - \alpha_l - \beta_l) \mathbf{g}_{\tau_{p-1}, \tau_{p-2}}^{(l)} + \mathbf{g}_{\tau_{p+1}, \tau_p}^{(l)} \text{ с в. 1,} \quad (9.61)
\end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned}
\mathbf{q}_{\tau_{p+1}, \tau_p} &= \mathbf{r}_{\tau_{p+1}, \tau_p} + \sum_{i=1}^m G_0^{(i)} \mathbf{a}^{(l)}(\mathbf{x}_{\tau_p}, \tau_p) I_{0\tau_{p+1}, \tau_p}^{(i)}, \\
\mathbf{g}_{\tau_{p+1}, \tau_p} &= \mathbf{d}_{\tau_{p+1}, \tau_p} + \mathbf{h}_{\tau_{p+1}, \tau_p}, \\
\mathbf{d}_{\tau_{p+1}, \tau_p} &= \sum_{i=1}^m \Sigma_i(\mathbf{x}_{\tau_p}, \tau_p) I_{0\tau_{p+1}, \tau_p}^{(i)} + \sum_{i,j=1}^m G_0^{(j)} \Sigma_i(\mathbf{x}_{\tau_p}, \tau_p) I_{00\tau_{p+1}, \tau_p}^{(ji)} + \\
&+ \sum_{i=1}^m \left[G_0^{(i)} \mathbf{a}(\mathbf{x}_{\tau_p}, \tau_p) \left(\Delta I_{0\tau_{p+1}, \tau_p}^{(i)} + I_{1\tau_{p+1}, \tau_p}^{(i)} \right) - L \Sigma_i(\mathbf{x}_{\tau_p}, \tau_p) I_{1\tau_{p+1}, \tau_p}^{(i)} \right] + \\
&+ \sum_{i,j,k=1}^m G_0^{(k)} G_0^{(j)} \Sigma_i(\mathbf{x}_{\tau_p}, \tau_p) I_{000\tau_{p+1}, \tau_p}^{(kji)}, \\
\mathbf{r}_{\tau_{p+1}, \tau_p} &= \int_{\tau_p}^{\tau_{p+1}} \left(\int_{\tau_p}^s L L \mathbf{a}(\mathbf{x}_\theta, \theta) d\theta + \right. \\
&\quad \left. + \sum_{i=1}^m \int_{\tau_p}^s G_0^{(i)} L \mathbf{a}(\mathbf{x}_\theta, \theta) d\mathbf{w}_\theta^{(i)} \right) ds +
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \sum_{i=1}^m \int_{\tau_p}^{\tau_{p+1}} \left(\int_{\tau_p}^s L G_0^{(i)} \mathbf{a}(\mathbf{x}_\theta, \theta) d\theta + \right. \\
& \left. + \sum_{j=1}^m \int_{\tau_p}^s G_0^{(j)} G_0^{(i)} \mathbf{a}(\mathbf{x}_\theta, \theta) d\mathbf{w}_\theta^{(j)} \right) d\mathbf{w}_s^{(i)}, \\
\mathbf{h}_{\tau_{p+1}, \tau_p} = & \int_{\tau_p}^{\tau_{p+1}} \int_{\tau_p}^s \left(\int_{\tau_p}^\theta L L \mathbf{a}(\mathbf{x}_u, u) du + \right. \\
& + \sum_{i=1}^m \int_{\tau_p}^\theta G_0^{(i)} L \mathbf{a}(\mathbf{x}_u, u) d\mathbf{w}_u^{(i)} \Big) d\theta ds + \\
& + \sum_{i=1}^m \int_{\tau_p}^{\tau_{p+1}} \int_{\tau_p}^s \left(\int_{\tau_p}^\theta L G_0^{(i)} \mathbf{a}(\mathbf{x}_u, u) du + \right. \\
& + \sum_{j=1}^m \int_{\tau_p}^\theta G_0^{(j)} G_0^{(i)} \mathbf{a}(\mathbf{x}_u, u) d\mathbf{w}_u^{(j)} \Big) d\mathbf{w}_\theta^{(i)} ds + \\
& + \sum_{i=1}^m \int_{\tau_p}^{\tau_{p+1}} \int_{\tau_p}^s \left(\int_{\tau_p}^\theta L L \Sigma_i(\mathbf{x}_u, u) du + \right. \\
& + \sum_{j=1}^m \int_{\tau_p}^\theta G_0^{(j)} L \Sigma_i(\mathbf{x}_u, u) d\mathbf{w}_u^{(j)} \Big) d\theta d\mathbf{w}_s^{(i)} + \\
& + \sum_{i,j=1}^m \int_{\tau_p}^{\tau_{p+1}} \int_{\tau_p}^s \left(\int_{\tau_p}^\theta L G_0^{(j)} \Sigma_i(\mathbf{x}_u, u) du + \right. \\
& + \sum_{k=1}^m \int_{\tau_p}^\theta G_0^{(k)} G_0^{(j)} \Sigma_i(\mathbf{x}_u, u) d\mathbf{w}_u^{(k)} \Big) d\mathbf{w}_\theta^{(j)} d\mathbf{w}_s^{(i)};
\end{aligned}$$

остальные обозначения, входящие в (9.61), такие же как и в (9.60).

Отметим, что представление (9.61) получается с использованием соотношений:

$$\mathbf{x}_{\tau_{p+1}} = \mathbf{x}_{\tau_p} + \Delta \mathbf{a}(\mathbf{x}_{\tau_p}, \tau_p) + \frac{\Delta^2}{2} L \mathbf{a}(\mathbf{x}_{\tau_p}, \tau_p) + \mathbf{d}_{\tau_{p+1}, \tau_p} + \mathbf{h}_{\tau_{p+1}, \tau_p} \text{ с в. 1,}$$

$$\begin{aligned}
\mathbf{a}(\mathbf{x}_{\tau_{p+1}}, \tau_{p+1}) = & \mathbf{a}(\mathbf{x}_{\tau_p}, \tau_p) + \Delta L \mathbf{a}(\mathbf{x}_{\tau_p}, \tau_p) + \sum_{i=1}^m G_0^{(i)} \mathbf{a}(\mathbf{x}_{\tau_p}, \tau_p) I_{0_{\tau_{p+1}, \tau_p}}^{(i)} + \\
& + \mathbf{r}_{\tau_{p+1}, \tau_p} \text{ с в. 1,}
\end{aligned}$$

которые, в свою очередь, могут быть получены с помощью формулы Ито.

Численный эксперимент 9.14. (рис.9.13). Повторить численный эксперимент 9.12 для численного метода (9.60) при следующих способах выбора параметров:

1. $\alpha_1 = \beta_1 = 0, \varepsilon_1 = \varphi_1 = \lambda_1 = 0, \mu_1 = \nu_1 = \frac{1}{2}, \delta_1 = 1$ (кривая 1);
2. $\alpha_1 = 0, \beta_1 = \frac{1}{2}, \varepsilon_1 = \varphi_1 = \lambda_1 = 0, \mu_1 = \frac{1}{2}, \nu_1 = 1, \delta_1 = \frac{3}{4}$ (кривая 2).
3. $\alpha_1 = \beta_1 = 0, \varepsilon_1 = \varphi_1 = \lambda_1 = 0, \mu_1 = \nu_1 = 1, \delta_1 = \frac{1}{2}$ (кривая 3);

Для моделирования повторного стохастического интеграла Ито $I_{000\tau_{p+1}, \tau_p}^{(111)}$ использовать формулу:

$$\hat{I}_{000\tau_{p+1}, \tau_p}^{(111)} = \frac{\Delta^{3/2}}{6} ((\zeta_p^{(1)})^3 - 3\zeta_p^{(1)}),$$

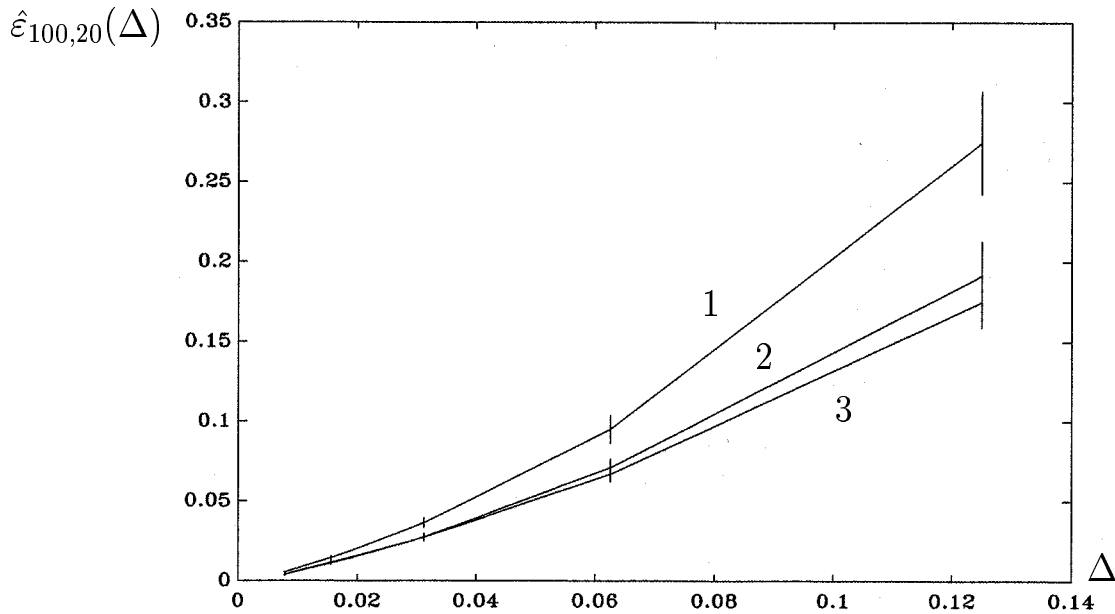


Рис.9.13. Результат численного эксперимента 9.14.

где $\zeta_p^{(1)}$ — такие же случайные величины, как и в численном эксперименте 9.12. Не моделировать стохастический интеграл Ито $I_{1\tau_{p+1}, \tau_p}^{(1)}$, т. к. коэффициент при нем окажется равным нулю в выражении, которое получается после применения численного метода (9.60) к уравнению (7.4).

Построим конечно-разностный вариант численного метода (9.60). Для этого аппроксимируем конечными разностями частные производные, входящие в его правую часть. В результате в (9.60) для $\mathbf{v}_{\tau_{p+1}, \tau_p}$ используем выражение

$$\begin{aligned}
& \mathbf{v}_{\tau_{p+1}, \tau_p} = \\
& = \sum_{i_1=1}^m \Sigma_{i_1}(\mathbf{y}_p, \tau_p) \hat{I}_{0\tau_{p+1}, \tau_p}^{(i_1)} + \frac{1}{\sqrt{\Delta}} \sum_{i_1, i_2=1}^m \sum_{j=1}^2 \alpha_j \Sigma_{i_1}(\mathbf{y}_{p\beta}^{(ji_2)}, \tau_p) \hat{I}_{00\tau_{p+1}, \tau_p}^{(i_2 i_1)} + \\
& + \frac{1}{\Delta} \sum_{i_1=1}^m \left[\sum_{j=1}^2 \pi_j \mathbf{a}(\mathbf{u}_{p\sigma}^{(ji_1)}, \tau_p) \left(\Delta \hat{I}_{0\tau_{p+1}, \tau_p}^{(i_1)} + \hat{I}_{1\tau_{p+1}, \tau_p}^{(i_1)} \right) - \right. \\
& - \left. \left(\frac{1}{2} \sum_{r=1}^m \sum_{j=1}^3 \varrho_j \Sigma_{i_1}(\mathbf{y}_{p\varpi}^{(jr)}, \tau_p) + \sum_{j=1}^2 \zeta_j \Sigma_{i_1}(\mathbf{z}_{p\delta}^{(j)}, \Delta_{p\gamma}^{(j)}) \right) \hat{I}_{1\tau_{p+1}, \tau_p}^{(i_1)} \right] + \\
& + \frac{1}{\Delta} \sum_{i_1, i_2, i_3=1}^m \sum_{j=1}^2 \alpha_j \mathbf{k}_{i_1 i_2}(\mathbf{y}_{p\beta}^{(ji_3)}, \tau_p) \hat{I}_{000\tau_{p+1}, \tau_p}^{(i_3 i_2 i_1)}, \tag{9.62}
\end{aligned}$$

где сохранен смысл обозначений формулы (7.94).

Численный эксперимент 9.15. (рис.9.14). Повторить численный эксперимент 9.14 для конечно-разностной модификации численного метода (9.60). Для моделирования стохастического интеграла $I_{1\tau_{p+1}, \tau_p}^{(1)}$ использовать формулу:

$$\hat{I}_{1\tau_{p+1}, \tau_p}^{(1)} = -\frac{\Delta^{3/2}}{2} \left(\zeta_p^{(1)} + \frac{1}{\sqrt{3}} \xi_p^{(1)} \right),$$

где $\zeta_p^{(1)}, \xi_p^{(1)}$; $p = 0, 1, \dots, N-1$ – независимые в совокупности стандартные гауссовские случайные величины, а $\zeta_p^{(1)}$ – такие же случайные величины, как в численном эксперименте 11.1. Два начальных шага осуществить с помощью явного одношагового сильного конечно-разностного численного метода порядка точности 1.5 вида (7.94).

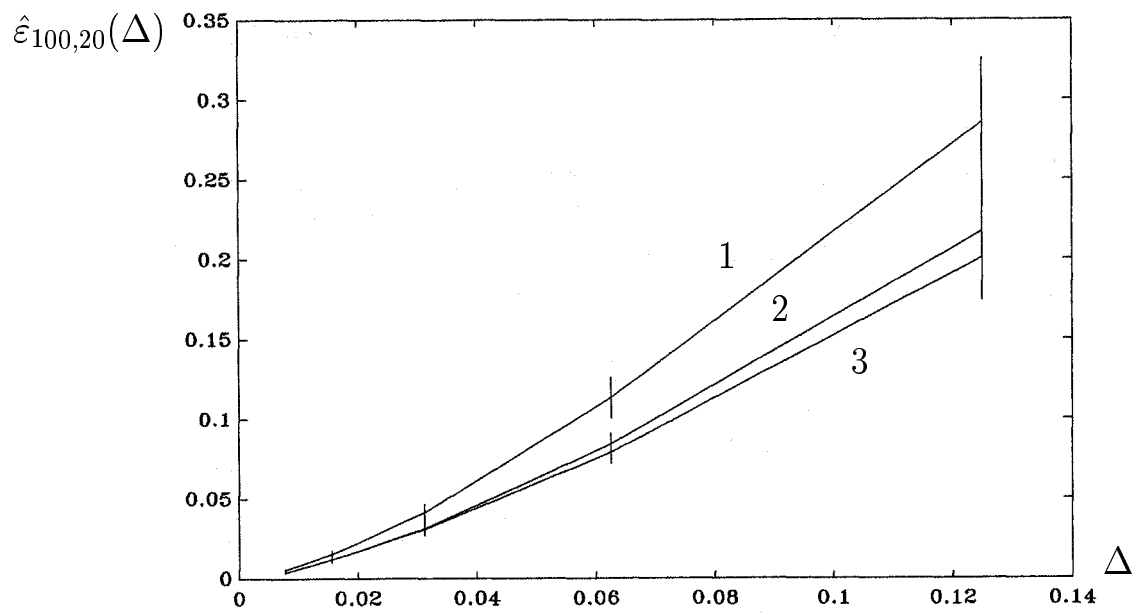


Рис.9.14. Результат численного эксперимента 9.15.

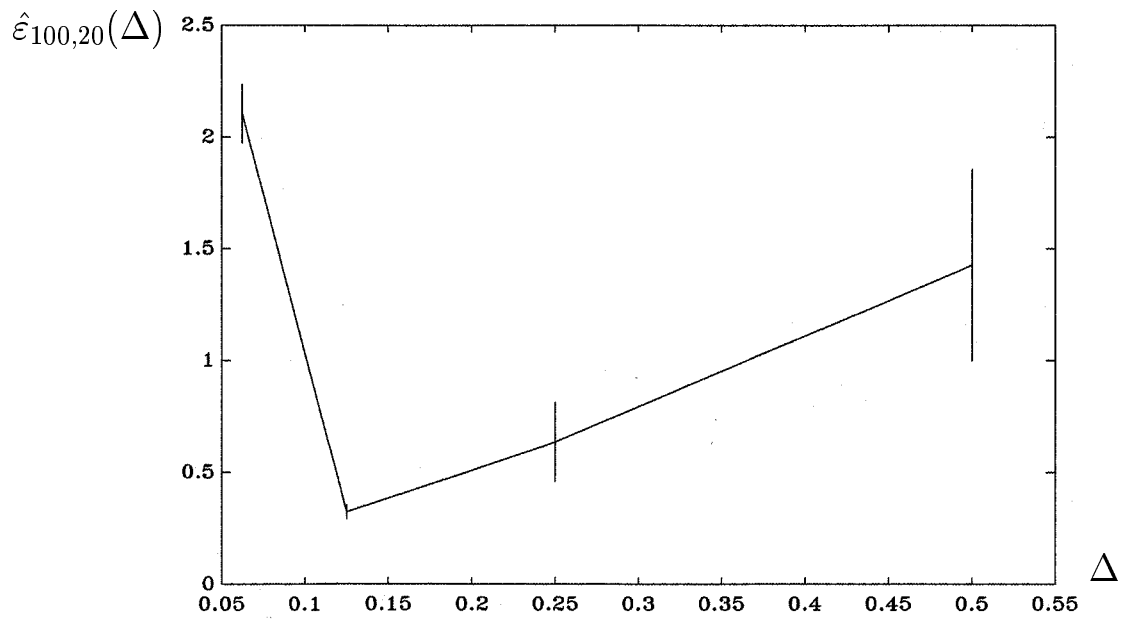


Рис.9.15. Результат численного эксперимента 9.16.

Сравнивая рис.9.13, 9.14 отметим, что ошибки, даваемые конечно-разностной модификацией численного метода (9.60) как и следовало ожидать, незначительно больше, чем соответствующие ошибки, даваемые численным методом (9.60).

В данной главе показывается, что одним из достаточных условий, обеспечивающих сходимость трехшаговых сильных численных методов для стохастических дифференциальных уравнений Ито является условие: $\alpha_l, \beta_l \in [0, 1]; \alpha_l + \beta_l \leq 1$. В заключение приведем численный пример, в котором не выполнение данного условия приводит к нарушению сходимости рассматриваемого трехшагового численного метода.

Численный эксперимент 9.16. (рис.9.15). *Повторить численный эксперимент 9.14 для численного метода (9.60) при $\alpha_1 = 0, \beta_1 = 2, \delta_1 = \frac{1}{2}, \mu_1 = \frac{1}{2}, \nu_1 = 1, \varepsilon_1 = \varphi_1 = \lambda_1 = 0; \Delta = 2^{-j}; j = 1, 2, 3, 4$.*

Свойства численных методов, в частности их устойчивость, существенно зависят от выбора входящих в них параметров и шага интегрирования. Рассмотрению этого вопроса будет посвящен следующий раздел.

9.7 Об устойчивости численных методов

Известно, что проблема устойчивости численных методов заключается в том, что ошибка численной схемы может накапливаться в процессе вычислений и в результате может превысить допустимые значения. Однако в ряде случаев удастся гарантировать выполнение требуемого ограничения сверху на ошибку численного метода. Как правило, достижение этого происходит благодаря выбору подходящего шага интегрирования, параметров численной схемы и промежутка интегрирования. Существенное влияние на устойчивость численных методов оказывают также особенности конкретных стохастических дифференциальных уравнений, к которым эти методы применяются. Рассмотрим вопросы, связанные с устойчивостью численных методов, более подробно.

Пусть $y_p, p = 0, 1, \dots$, — дискретная аппроксимация решения стохастического дифференциального уравнения Ито (7.18), которая стартует в момент t_0 из точки y_0 . Через $\bar{y}_p, p = 0, 1, \dots$, обозначим эту же дискретную аппроксимацию, но стартовую в момент t_0 из точки $\bar{y}_0$. Выберем некоторый конечный промежуток интегрирования $[t_0, T]$ и покроем его сеткой $\{\tau_j\}_{j=0}^{n_T}$ такой, что

$$t_0 = \tau_0 < \tau_1 < \dots < \tau_{n_T} = T, \Delta = \max_{0 \leq j < n_T} |\tau_{j+1} - \tau_j|.$$

Для любого $t \in [t_0, T]$ определим натуральное число n_t следующим образом:

$$n_t = \max_j \{j : \tau_j \leq t\}.$$

Определение 9.1 [86]. Будем говорить, что дискретная аппроксимация y_p , $p = 0, 1, \dots$, стохастически численно устойчива для данного стохастического дифференциального уравнения, если для любого конечного интервала $[t_0, T]$ существует такое постоянное число $\Delta_0 > 0$, что $\forall \varepsilon > 0$ и $\forall \Delta \in (0, \Delta_0)$ выполняется условие

$$\lim_{|y_0 - \bar{y}_0| \rightarrow 0} \sup_{t_0 \leq t \leq T} P \{ |y_{n_t} - \bar{y}_{n_t}| \geq \varepsilon \} = 0.$$

Определение 9.2 [86]. Будем говорить, что дискретная аппроксимация y_p , $p = 0, 1, \dots$, стохастически численно устойчива, или просто численно устойчива, если она стохастически численно устойчива для такого стохастического дифференциального уравнения, что y_p , $p = 0, 1, \dots$, сходится к решению этого уравнения.

Отметим, что в определение численной устойчивости входит ограничение Δ_0 на шаг интегрирования Δ . Обычно Δ_0 зависит от промежутка интегрирования $[t_0, T]$ и рассматриваемого стохастического дифференциального уравнения. Известно [86], что даже для численно устойчивой схемы при увеличении промежутка интегрирования ошибка численной схемы может возрастать и превышать допустимые пределы, хотя теоретически она остается ограниченной. Эта проблема становится особенно актуальной в тех задачах, где промежуток интегрирования $[t_0, T]$ заранее не известен, например, при моделировании момента первого выхода. В связи с этим рассмотрим следующее определение.

Определение 9.3 [86]. Будем говорить, что дискретная аппроксимация y_p , $p = 0, 1, \dots$, асимптотически численно устойчива, если она численно устойчива и для любого конечного интервала $[t_0, T]$ существует такое постоянное число $\Delta_a > 0$, что $\forall \varepsilon > 0$ и $\forall \Delta \in (0, \Delta_a)$ выполняется условие

$$\lim_{|y_0 - \bar{y}_0| \rightarrow 0} \lim_{T \rightarrow \infty} P \left\{ \sup_{t_0 \leq t \leq T} |y_{n_t} - \bar{y}_{n_t}| \geq \varepsilon \right\} = 0.$$

Отметим, что представленные в настоящей книге одношаговые численные методы являются численно устойчивыми, если коэффициенты диффузии и сноса стохастических дифференциальных уравнений, к которым применяются эти методы, удовлетворяют определенным условиям гладкости. Покажем это на примере явного метода

Г. Н. Мильштейна в скалярном случае, т. е. когда $m = n = 1$. В этой ситуации явный метод Г. Н. Мильштейна решения стохастического дифференциального уравнения Ито вида

$$dx_t = a(x_t, t)dt + b(x_t, t)df_t$$

определяется равенством

$$y_{p+1} = y_p + a(y_p, \tau_p)\Delta + b(y_p, \tau_p)\Delta f_{\tau_p} + c(y_p, \tau_p)J_{00_{\tau_{p+1}, \tau_p}},$$

где $a(x, t), b(x, t) : \mathbb{R}^1 \times [0, T] \rightarrow \mathbb{R}^1$; $\Delta f_{\tau_p} = f_{\tau_{p+1}} - f_{\tau_p}$; $J_{00_{\tau_{p+1}, \tau_p}} = \int_{\tau_p}^{\tau_{p+1}} \int_{\tau_p}^{\tau} df_{\theta} df_{\tau}$; $c(x, t) \stackrel{\text{def}}{=} b(x, t) \frac{\partial b}{\partial x}(x, t)$; $f_t \in \mathbb{R}^1$ — стандартный винеровский процесс. Относительно функций $a(x, t), b(x, t), c(x, t)$ будем предполагать, что они попарно удовлетворяют условиям AI, AII теоремы 1.6.

Пусть

$$z_t = \sup_{0 \leq s \leq t} \mathbb{M} \left\{ |y_{n_s} - \bar{y}_{n_s}|^2 \right\}.$$

Тогда в силу неравенства $(x_1 + \dots + x_4)^2 \leq 4(x_1^2 + \dots + x_4^2)$ имеем

$$\begin{aligned} z_t &= \sup_{0 \leq s \leq t} \mathbb{M} \left\{ \left| y_0 - \bar{y}_0 + \sum_{j=0}^{n_s-1} (y_{j+1} - y_j - \bar{y}_{j+1} + \bar{y}_j) \right|^2 \right\} \leq \\ &\leq 4 \left\{ |y_0 - \bar{y}_0|^2 + z_t^{(1)} + z_t^{(2)} + z_t^{(3)} \right\}, \end{aligned} \quad (9.63)$$

где

$$\begin{aligned} z_t^{(1)} &= \sup_{0 \leq s \leq t} \mathbb{M} \left\{ \left| \sum_{j=0}^{n_s-1} (a(y_j, \tau_j) - a(\bar{y}_j, \tau_j)) \Delta \right|^2 \right\}; \\ z_t^{(2)} &= \sup_{0 \leq s \leq t} \mathbb{M} \left\{ \left| \sum_{j=0}^{n_s-1} (b(y_j, \tau_j) - b(\bar{y}_j, \tau_j)) \Delta f_{\tau_p} \right|^2 \right\}; \\ z_t^{(3)} &= \sup_{0 \leq s \leq t} \mathbb{M} \left\{ \left| \sum_{j=0}^{n_s-1} (c(y_j, \tau_j) - c(\bar{y}_j, \tau_j)) J_{00_{\tau_{j+1}, \tau_j}} \right|^2 \right\}. \end{aligned}$$

Используя условие Липшица и неравенство (1.42), при $n = 1$ получаем

$$z_t^{(1)} \leq K_1 \sup_{0 \leq s \leq t} \mathbb{M} \left\{ \left| \sum_{j=0}^{n_s-1} |y_j - \bar{y}_j| \Delta \right|^2 \right\} \leq$$

$$\begin{aligned}
&\leq K_1 \mathbb{M} \left\{ \left| \sum_{j=0}^{n_t-1} |y_j - \bar{y}_j| \Delta \right|^2 \right\} \leq K_1 \mathbb{M} \left\{ \left| \int_{t_0}^t |y_s - \bar{y}_s| ds \right|^2 \right\} \leq \\
&\leq K_1(t - t_0) \int_{t_0}^t \mathbb{M} \{ |y_s - \bar{y}_s|^2 \} ds \leq \\
&\leq K_1(t - t_0) \int_{t_0}^t z_s ds, \quad K_1 < \infty.
\end{aligned} \tag{9.64}$$

С учетом условия Липшица и неравенства (1.41), при $n = 1$ имеем

$$\begin{aligned}
z_t^{(2)} &= \sup_{0 \leq s \leq t} \left\{ \sum_{j=0}^{n_s-1} \mathbb{M} \{ |b(y_j, \tau_j) - b(\bar{y}_j, \tau_j)|^2 \} \Delta \right\} \leq \\
&\leq K_2 \sum_{j=0}^{n_t-1} \mathbb{M} \{ |y_j - \bar{y}_j|^2 \} \Delta \leq K_2 \int_{t_0}^t z_s ds, \quad K_2 < \infty.
\end{aligned} \tag{9.65}$$

Аналогично (9.65) получаем

$$z_t^{(3)} \leq K_3 \Delta \int_{t_0}^t z_s ds, \quad K_3 < \infty. \tag{9.66}$$

Подставляя (9.64)–(9.66) в (9.63), приходим к следующему неравенству:

$$z_t \leq 4 \left(|y_0 - \bar{y}_0|^2 + (K_1(t - t_0) + K_2 + K_3 \Delta) \int_0^t z_s ds \right). \tag{9.67}$$

Применение неравенства Гронуолла к (9.67) дает

$$\begin{aligned}
z_t &\leq 4 |y_0 - \bar{y}_0|^2 \left\{ 1 + 4 (K_1(t - t_0) + K_2 + K_3 \Delta) \times \right. \\
&\quad \times \left. \int_{t_0}^t e^{4(K_1(t-t_0)+K_2+K_3\Delta)(t-s)} ds \right\}.
\end{aligned} \tag{9.68}$$

Используя неравенство Чебышева и (9.68), получаем

$$\lim_{|y_0 - \bar{y}_0| \rightarrow 0} \sup_{0 \leq s \leq t} \mathbb{P} \{ |y_{n_s} - \bar{y}_{n_s}| \geq \varepsilon \} \leq \frac{1}{\varepsilon^2} \lim_{|y_0 - \bar{y}_0| \rightarrow 0} z_t = 0. \tag{9.69}$$

Таким образом, в рамках сделанных предположений явный метод Г. Н. Мильштейна является стохастически численно устойчивым для

данного стохастического дифференциального уравнения. Поскольку в условиях теорем 7.2 или 7.3 этот численный метод сходится сильно с порядком точности 1.0 к решению рассматриваемого стохастического дифференциального уравнения Ито, то по (9.69) и определению 9.3 явный метод Г. Н. Мильштейна является численно устойчивым.

Аналогичные рассуждения можно применить для обоснования численной устойчивости явного метода Г. Н. Мильштейна в векторном случае, а также более точных одношаговых численных методов, рассмотренных в настоящей монографии.

Обычно изучение асимптотической численной устойчивости одношаговых детерминированных численных методов проводится на примере определенного класса тестовых уравнений, например, класса линейных дифференциальных уравнений вида

$$\frac{dx}{dt} = \lambda x,$$

где x , λ — комплексные числа. Для изучения асимптотической численной устойчивости одношаговых стохастических методов выберем класс комплекснозначных линейных стохастических дифференциальных уравнений вида [70, 86]

$$d\mathbf{x}_t = \lambda \mathbf{x}_t dt + df_t, \quad (9.70)$$

где $\mathbf{x}_t = \mathbf{x}_t^{(1)} + i\mathbf{x}_t^{(2)}$; $\lambda = \lambda_1 + i\lambda_2$; $f_t \in \mathfrak{R}^1$ — стандартный винеровский процесс; i — мнимая единица.

Применяя некоторую одношаговую дискретную аппроксимацию $\mathbf{y}_p$, $p = 0, 1, \dots$, с постоянным шагом Δ к уравнению (9.70), получаем следующее равенство:

$$\mathbf{y}_{p+1} = G(\lambda\Delta)\mathbf{y}_p + \mathbf{z}_p, \quad (9.71)$$

где G — отображение комплексной плоскости в себя; $\mathbf{z}_p$ — случайные величины, которые не зависят от λ и $\mathbf{y}_p$, $p = 0, 1, \dots$

Определение 9.4 [86]. *Множество комплексных чисел $\lambda\Delta$, для которых $\operatorname{Re}(\lambda) < 0$ и $|G(\lambda\Delta)| < 1$, называется областью абсолютной устойчивости численной схемы.*

Известно, что в детерминированном случае A -устойчивой численной схемой называется такая численная схема, для которой ее область абсолютной устойчивости совпадает с левой полуплоскостью комплексной плоскости. В стохастическом случае также будем называть численную схему A -устойчивой, если ее область абсолютной устойчивости является следующим множеством:

$$\{\lambda\Delta \in C : \operatorname{Re}(\lambda) < 0, \Delta > 0\},$$

где C — множество комплексных чисел.

Рассмотрим области абсолютной устойчивости некоторых сильных численных методов.

В [86] показано, что для неявных методов Г. Н. Мильштейна (8.3) при $\tilde{\alpha}_1 = \tilde{\alpha}_2 = \alpha \in [0, 1]$ (здесь и далее в этом разделе рассматривается случай $\mathbf{y}_p \in \mathbb{R}^2$) отображение G имеет вид

$$G(\lambda\Delta) = (1 - \alpha\lambda\Delta)^{-1}(1 + (1 - \alpha)\lambda\Delta).$$

Поэтому неравенство $|G(\lambda\Delta)| < 1$ в данном случае преобразуется в неравенство вида [86]

$$(1 - 2\alpha)(\lambda_1^2 + \lambda_2^2)\Delta^2 + 2\lambda_1\Delta < 0. \quad (9.72)$$

Если $\frac{1}{2} \leq \alpha \leq 1$ и $\lambda_1 < 0$, то неравенство (9.72) выполнено и рассматриваемые неявные методы Г. Н. Мильштейна являются A -устойчивыми. Если $0 \leq \alpha < \frac{1}{2}$, то (9.72) можно записать в виде

$$(\lambda_1\Delta + A)^2 + (\lambda_2\Delta)^2 < A^2,$$

где $A = (1 - 2\alpha)^{-1}$, т. е. область абсолютной устойчивости — внутренность круга с центром в точке $(-A, 0)$ и радиусом A .

В [86] показано, что для численных схем (8.4) и (8.6) при $\mathbf{y}_p \in \mathbb{R}^2$, $\tilde{\alpha}_1 = \tilde{\alpha}_2 = \alpha \in [0, 1]$, $\tilde{\beta}_1 = \tilde{\beta}_2 = \beta \in [0, 1]$ отображение G имеет вид

$$G(\lambda\Delta) = \left(1 - \alpha\lambda\Delta - \left(\frac{1}{2} - \alpha\right)\beta\lambda^2\Delta^2\right)^{-1} \times \\ \times \left(1 + (1 - \alpha)\lambda\Delta + \left(\frac{1}{2} - \alpha\right)(1 - \beta)\lambda^2\Delta^2\right)$$

и область абсолютной устойчивости этих численных методов определяется в полярных координатах следующим неравенством:

$$(2 + (1 - \alpha - \beta)(1 - 2\alpha)r^2) \cos\theta + 2(1 - 2\alpha)r \cos^2\theta + \\ + \frac{1}{4}(1 - 2\alpha)^2(1 - 2\beta)r^3 < 0, \quad (9.73)$$

где $\theta \in [\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}]$. Отсюда следует, что численные схемы (8.4) и (8.6) A -устойчивы тогда и только тогда, когда $\alpha = \frac{1}{2}$, $\beta \in [0, 1]$ или $\alpha, \beta \in [\frac{1}{2}, 1]$. Нетрудно видеть, что эти выводы справедливы и для версий (8.5), (8.7) численных методов (8.4), (8.6).

Предположим теперь, что параметры неявности, входящие в численные схемы, различны для разных компонент этих схем. В этом случае

определение областей абсолютной устойчивости численных схем становится существенно более сложным. Рассмотрим случай $\mathbf{y}_p \in \mathbb{R}^2$ и тестовое стохастическое дифференциальное уравнение вида [86]

$$d \begin{pmatrix} \mathbf{x}_t^{(1)} \\ \mathbf{x}_t^{(2)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & -\lambda_2 \\ \lambda_2 & \lambda_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{x}_t^{(1)} \\ \mathbf{x}_t^{(2)} \end{pmatrix} dt + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} df_t,$$

где $\mathbf{x}_t = \mathbf{x}_t^{(1)} + i\mathbf{x}_t^{(2)}$; $\lambda = \lambda_1 + i\lambda_2$; f_t — стандартный винеровский процесс. В этом случае уравнение (9.71) примет вид

$$\mathbf{y}_{p+1} = G(\lambda_1\Delta, \lambda_2\Delta)\mathbf{y}_p + \mathbf{z}_p,$$

где $G(\lambda_1\Delta, \lambda_2\Delta) \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$; $\mathbf{z}_p \in \mathbb{R}^2$ и область абсолютной устойчивости одношаговой численной схемы определяется неравенствами [86]

$$\lambda_1 < 0, \quad \|G(\lambda_1\Delta, \lambda_2\Delta)\| < 1.$$

Здесь $\|G\| = \sqrt{\sum_{i,j=1}^2 (G^{(ij)})^2}$ — норма матрицы G .

В [86] показано, что для неявной схемы Г. Н. Мильштейна (8.3) матрица G имеет вид

$$G(\lambda_1\Delta, \lambda_2\Delta) = \begin{pmatrix} 1 - \tilde{\alpha}_1\lambda_1\Delta & \tilde{\alpha}_1\lambda_2\Delta \\ -\tilde{\alpha}_2\lambda_2\Delta & 1 - \tilde{\alpha}_2\lambda_1\Delta \end{pmatrix}^{-1} \times \\ \times \begin{pmatrix} 1 + (1 - \tilde{\alpha}_1)\lambda_1\Delta & -(1 - \tilde{\alpha}_1)\lambda_2\Delta \\ (1 - \tilde{\alpha}_2)\lambda_2\Delta & 1 + (1 - \tilde{\alpha}_2)\lambda_1\Delta \end{pmatrix},$$

а область абсолютной устойчивости определяется следующим неравенством:

$$(1 - \tilde{\alpha}_1 - \tilde{\alpha}_2)(\lambda_1^2 + \lambda_2^2)\Delta^2 + 2\lambda_1\Delta < 0. \quad (9.74)$$

Из (9.74) следует, что неявная схема Г. Н. Мильштейна (8.3) A -устойчива, когда $\tilde{\alpha}_1, \tilde{\alpha}_2 \in [0, 1]$ и $1 \leq \tilde{\alpha}_1 + \tilde{\alpha}_2 \leq 2$. Если $0 \leq \tilde{\alpha}_1 + \tilde{\alpha}_2 < 1$, то область абсолютной устойчивости этого численного метода является внутренностью круга с радиусом $A = (1 - \tilde{\alpha}_1 - \tilde{\alpha}_2)^{-1}$ и центром в точке $(-A, 0)$.

В [86] также получено выражение для матрицы $G(\lambda_1\Delta, \lambda_2\Delta)$ и исследована абсолютная устойчивость численных методов (8.4) и (8.6) при $\tilde{\alpha}_1 \neq \tilde{\alpha}_2, \tilde{\beta}_1 \neq \tilde{\beta}_2$. Приведем эти соотношения:

$$G = A^{-1}B,$$

где $A, B \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ — матрицы со следующими компонентами:

$$\begin{aligned}
A^{(11)} &= 1 - \tilde{\alpha}_1 \lambda_1 \Delta - \frac{1}{2}(1 - 2\tilde{\alpha}_1)\tilde{\beta}_1 (\lambda_1^2 - \lambda_2^2) \Delta^2, \\
A^{(12)} &= \tilde{\alpha}_1 \lambda_2 \Delta + (1 - 2\tilde{\alpha}_1)\tilde{\beta}_1 \lambda_1 \lambda_2 \Delta^2, \\
A^{(21)} &= -\tilde{\alpha}_2 \lambda_2 \Delta - (1 - 2\tilde{\alpha}_2)\tilde{\beta}_2 \lambda_1 \lambda_2 \Delta^2, \\
A^{(22)} &= 1 - \tilde{\alpha}_2 \lambda_1 \Delta - \frac{1}{2}(1 - 2\tilde{\alpha}_2)\tilde{\beta}_2 (\lambda_1^2 - \lambda_2^2) \Delta^2, \\
B^{(11)} &= 1 + (1 - \tilde{\alpha}_1) \lambda_1 \Delta + \frac{1}{2}(1 - 2\tilde{\alpha}_1)(1 - \tilde{\beta}_1) (\lambda_1^2 - \lambda_2^2) \Delta^2, \\
B^{(12)} &= - (1 - \tilde{\alpha}_1) \lambda_2 \Delta - (1 - 2\tilde{\alpha}_1)(1 - \tilde{\beta}_1) \lambda_1 \lambda_2 \Delta^2, \\
B^{(21)} &= (1 - \tilde{\alpha}_2) \lambda_2 \Delta - (1 - 2\tilde{\alpha}_2)(1 - \tilde{\beta}_2) \lambda_1 \lambda_2 \Delta^2, \\
B^{(22)} &= 1 + (1 - \tilde{\alpha}_2) \lambda_1 \Delta + \frac{1}{2}(1 - 2\tilde{\alpha}_2)(1 - \tilde{\beta}_2) (\lambda_1^2 - \lambda_2^2) \Delta^2.
\end{aligned}$$

Область абсолютной устойчивости численных методов (8.4), (8.6) в полярных координатах $r \cos \theta = \lambda_1 \Delta$, $r \sin \theta = \lambda_2 \Delta$ определяется неравенством [86]

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{8} [(1 - 2\tilde{\alpha}_1)^2(1 - 2\tilde{\beta}_1) + (1 - 2\tilde{\alpha}_2)^2(1 - 2\tilde{\beta}_2)] r^3 + \\
&+ \left[2 + \frac{1}{2} \{ (1 - 2\tilde{\alpha}_1)(1 - \tilde{\alpha}_1 - \tilde{\beta}_1) + (1 - 2\tilde{\alpha}_2)(1 - \tilde{\alpha}_2 - \tilde{\beta}_2) \} r^2 \right] \cos \theta + \\
&+ 2(1 - \tilde{\alpha}_1 - \tilde{\alpha}_2) r \cos^2 \theta < 0.
\end{aligned} \tag{9.75}$$

Если в (9.75) положить $\tilde{\alpha}_1 = \tilde{\alpha}_2 = \alpha$, $\tilde{\beta}_1 = \tilde{\beta}_2 = \beta$, то оно преобразуется в неравенство (9.73).

Отметим, что численный метод (8.9) обладает такой же областью абсолютной устойчивости, как и численные методы (8.4), (8.6), поскольку численные методы (8.4), (8.6) и (8.9) имеют одинаковую систематическую часть и различаются только стохастическими членами. Этот вывод справедлив, очевидно, для версий (8.5), (8.7), (8.8) численных методов (8.4), (8.6), (8.9).

Заметим, что описанная концепция устойчивости применима также и к слабым численным методам.

Для тестовых стохастических дифференциальных уравнений с мультипликативным шумом построение концепции устойчивости для сильных численных методов сопряжено с существенными трудностями, которые, однако, могут быть преодолены при использовании слабых численных методов. Круг вопросов, связанных с устойчивостью слабых

численных методов решения тестовых стохастических дифференциальных уравнений с мультипликативным шумом, рассмотрен в [94, 95] (см. также главу 10).

Глава 10

Слабые численные методы решения стохастических дифференциальных уравнений Ито

В предыдущих главах книги рассматривались разнообразные сильные численные методы решения стохастических дифференциальных уравнений Ито. Данные численные методы позволяют с той или иной степенью точности аппроксимировать траекторию решения стохастического дифференциального уравнения Ито. При этом основной вычислительной трудностью при реализации сильных численных методов является моделирование повторных стохастических интегралов Стратоновича и Ито. Проблема сильной аппроксимации повторных стохастических интегралов не проста и теоретически, и с вычислительной точки зрения (см. главу 6). В результате сильные численные методы оказываются достаточно сложными в реализации, что является платой за высокую степень качества аппроксимации ими решения стохастического дифференциального уравнения.

В ряде практически важных случаев (см. главу 2) достаточно аппроксимировать не значение $\mathbf{x}_T$ траектории решения стохастического дифференциального уравнения Ито в финальный момент времени T , а величину вида $M\{g(\mathbf{x}_T)\}$ для некоторой функции $g(\mathbf{x})$, что ведет к построению так называемых слабых численных методов (их определение будет дано далее). При этом достаточно с той или иной степенью точности аппроксимировать лишь распределение случайной величины $\mathbf{x}_T$. Очевидно, что в данном случае используется меньшее количество информации о процессе $\mathbf{x}_t$, чем в случае сильной аппроксимации. В результате при построении слабых дискретных аппроксимаций мы располагаем гораздо большим числом степеней свободы, что ведет к получению сравнительно простых численных методов.

Первые результаты по слабой аппроксимации решений стохастиче-

ских дифференциальных уравнений были получены в работах [68–70] (Г. Н. Мильштейн), [144] (D. Talay), [89] (R. Mikulevicius, E. Platen), [139] (E. Platen), [86] (P. E. Kloeden, E. Platen), [151] (Т. А. Аверина, С. С. Артемьев), а также в [97, 145, 146, 150, 152, 153].

В настоящей главе приводятся как известные, так и новые слабые численные методы решения стохастических дифференциальных уравнений Ито. При этом данная глава предназначена, скорее, для практически ориентированного читателя. Тем, кто хотел бы более детально изучить слабые численные методы решения стохастических дифференциальных уравнений, мы рекомендуем обратиться к перечисленным работам.

10.1 Слабая сходимость и тестирование слабых численных методов

Пусть $\mathbf{x}_t, t \in [0, T]$, — решение стохастического дифференциального уравнения (7.18). Рассмотрим разбиение $\{\tau_j\}_{j=0}^N$ промежутка $[0, T]$, для которого

$$0 = \tau_0 < \tau_1 < \dots < \tau_N = T, \quad \Delta = \max_{0 \leq j \leq N-1} |\tau_{j+1} - \tau_j|.$$

Через $\mathbf{y}_{\tau_j}, j = 0, 1, \dots, N$, обозначим дискретную аппроксимацию процесса $\mathbf{x}_t, t \in [0, T]$, соответствующую максимальному шагу дискретизации Δ .

Будем говорить, что функция $F(\mathbf{x}) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^1$ имеет полиномиальный рост, если существуют такие постоянные $C > 0$ и $q \in \mathbb{N}$, зависящие от $F(\mathbf{x})$, что для всех $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ выполнено неравенство

$$|F(\mathbf{x})| \leq C(1 + |\mathbf{x}|^{2q}).$$

Обозначим через $C^l(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^1)$ пространство l раз непрерывно дифференцируемых функций: $g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^1$, которые вместе со своими частными производными до порядка l включительно возрастают полиномиально.

Дадим определение слабой сходимости дискретной аппроксимации.

Определение 10.1 [86]. Будем говорить, что дискретная аппроксимация $\mathbf{y}_{\tau_j}, j = 0, 1, \dots, N$, соответствующая максимальному шагу дискретизации Δ , сходится слабо при $\Delta \downarrow 0$ к процессу $\mathbf{x}_t, t \in [0, T]$, в момент времени T на классе $\mathcal{C}$ функций $g(\mathbf{x}) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^1$, если

$$\lim_{\Delta \downarrow 0} |\mathbb{M}\{g(\mathbf{x}_T)\} - \mathbb{M}\{g(\mathbf{y}_T)\}| = 0$$

для всех $g(\mathbf{x}) \in \mathcal{C}$.

Рассмотрим определение, характеризующее скорость слабой сходимости дискретной аппроксимации.

Определение 10.2 [86]. Будем говорить, что дискретная аппроксимация $\mathbf{y}_{\tau_j}$, $j = 0, 1, \dots, N$, сходится слабо с порядком $\gamma > 0$ к процессу $\mathbf{x}_t$, $t \in [0, T]$, в момент времени T при $\Delta \downarrow 0$, если для любой функции $g(\mathbf{x}) \in C^{2(\gamma+1)}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^1)$ существуют положительная постоянная C , которая не зависит от Δ , и конечное $\delta > 0$ такие, что

$$|\mathbb{M}\{g(\mathbf{x}_T)\} - \mathbb{M}\{g(\mathbf{y}_T)\}| \leq C\Delta^\gamma \quad (10.1)$$

для всех $\Delta \in (0, \delta)$.

В данном определении предполагается, что узлы τ_j , $j = 0, 1, \dots, N$, неслучайны. Однако в конце данной главы будет также рассмотрен случай, когда узлы τ_j , $j = 0, 1, \dots, N$, являются случайными величинами, удовлетворяющими определенным условиям.

Настоящая глава посвящена всевозможным слабым численным методам решения стохастических дифференциальных уравнений Ито. Для этих численных методов даны теоретические оценки их скорости сходимости, т. е. приведены оценки типа (10.1).

Так же, как и в случае сильных численных методов, интерес представляет тестирование слабых численных методов. Рассмотрим теоретические основы данного вопроса.

Пусть $\mathbf{y}_T^{(k,j)}$, $k = 1, \dots, L$; $j = 1, \dots, M$, — независимые реализации значения дискретной аппроксимации $\mathbf{y}_{\tau_j}$, $j = 0, 1, \dots, N$, в момент времени T . Положим

$$\begin{aligned} \hat{\mu}_L^{(j)} &= \frac{1}{L} \sum_{k=1}^L \mathbf{y}_T^{(k,j)} - \mathbb{M}\{\mathbf{x}_T\}, \\ \hat{\mu}_{L,M} &= \frac{1}{LM} \sum_{k=1}^L \sum_{j=1}^M \mathbf{y}_T^{(k,j)} - \mathbb{M}\{\mathbf{x}_T\}, \\ \hat{\sigma}_\mu^2 &= \frac{1}{M-1} \sum_{j=1}^M \left(\hat{\mu}_L^{(j)} - \hat{\mu}_{L,M} \right)^2, \end{aligned} \quad (10.2)$$

где $\hat{\mu}_{L,M}$ и $\hat{\sigma}_\mu^2$ — оценки математического ожидания и дисперсии случайных величин $\hat{\mu}_L^{(j)}$, $j = 1, \dots, M$, соответственно.

По аналогии с рассуждениями в разд. 7.2 построим приближенно доверительный интервал с уровнем достоверности $1 - \alpha$ для $\mu \stackrel{\text{def}}{=} \mathbb{M}\{g(\mathbf{y}_T)\} - \mathbb{M}\{g(\mathbf{x}_T)\}$:

$$I_{L,M} = (\hat{\mu}_{L,M} - \Delta \hat{\mu}_{L,M}, \hat{\mu}_{L,M} + \Delta \hat{\mu}_{L,M}),$$

где

$$\Delta\hat{\mu}_{L,M} = t_{M-1}^{1-\alpha} \sqrt{\frac{\hat{\sigma}_{\mu}^2}{M}},$$

т. е. приближенно (при достаточно больших L) истинное значение μ с вероятностью $1 - \alpha$ лежит в интервале $I_{L,M}$; здесь коэффициент $t_{M-1}^{1-\alpha}$ определяется из статистических таблиц для t -распределения Стьюдента с $M - 1$ степенью свободы и вероятностью α .

Рассмотренная схема построения доверительного интервала применена к тестированию слабых численных методов решения стохастических дифференциальных уравнений Ито в [86, 87] и будет использоваться нами в дальнейшем.

Отметим, что в данной главе в численных экспериментах так же, как и в [86], в качестве тестовых уравнений выбираем стохастические дифференциальные уравнения (7.4), (7.5) и при этом, как правило, полагаем $N = 100$, $M = 20$, $\alpha = 0.1$.

10.2 Явные слабые численные методы

10.2.1 Явный метод Эйлера

В данном разделе рассмотрим наиболее простой из слабых численных методов — метод Эйлера. Применительно к стохастическому дифференциальному уравнению (7.18) в автономном случае данный численный метод принимает вид

$$\mathbf{y}_{p+1} = \mathbf{y}_p + \mathbf{a}(\mathbf{y}_p)\Delta + \Sigma(\mathbf{y}_p) (\mathbf{f}_{\tau_{p+1}} - \mathbf{f}_{\tau_p}), \quad (10.3)$$

где $\mathbf{y}_{\tau_p} \stackrel{\text{def}}{=} \mathbf{y}_p$; $\tau_p = p\Delta$, $p = 0, 1, \dots, N$; $\Delta = \frac{T}{N}$; $\mathbf{a} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^1$; $\Sigma : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$.

Впервые метод Эйлера (10.3) как слабый численный метод трактовался Г. Н. Мильштейном в [68].

Для слабой сходимости численной схемы (10.3) с порядком $\gamma = 1.0$ достаточно [68, 86] заменить приращение винеровского процесса $\mathbf{f}_{\tau_{p+1}} - \mathbf{f}_{\tau_p}$ случайной величиной $\Delta\tilde{\mathbf{f}}_p = (\Delta\tilde{\mathbf{f}}_p^{(1)}, \dots, \Delta\tilde{\mathbf{f}}_p^{(m)})^\top$, каждая компонента $\Delta\tilde{\mathbf{f}}_p^{(i)}$ которой удовлетворяет следующему моментному условию:

$$|\mathbb{M} \{ \Delta\tilde{\mathbf{f}}_p^{(i)} \}| + |\mathbb{M} \{ (\Delta\tilde{\mathbf{f}}_p^{(i)})^3 \}| + |\mathbb{M} \{ (\Delta\tilde{\mathbf{f}}_p^{(i)})^2 \} - \Delta| \leq K\Delta^2, \quad (10.4)$$

где $i = 1, \dots, m$; $K < \infty$ — постоянная, а также потребовать, чтобы $\mathbf{a}^{(i)}(\mathbf{x})$, $\Sigma^{(ik)}(\mathbf{x}) \in C^4(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^1)$, $i = 1, \dots, n$; $k = 1, \dots, m$, и для всех

$\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$ выполнялись условия

$$|\mathbf{a}(\mathbf{x})| + \sum_{i=1}^m |\Sigma_i(\mathbf{x})| \leq K_1(1 + |\mathbf{x}|),$$

$$|\mathbf{a}(\mathbf{x}) - \mathbf{a}(\mathbf{y})| + \sum_{i=1}^m |\Sigma_i(\mathbf{x}) - \Sigma_i(\mathbf{y})| \leq K_1|\mathbf{x} - \mathbf{y}|,$$

где $K_1 < \infty$ — постоянная; $\Sigma_i(\mathbf{x})$ — i -й столбец матрицы $\Sigma(\mathbf{x})$. Здесь $\Delta \tilde{\mathbf{f}}_p^{(i)}$ — независимые при различных i или p и $\mathcal{F}_{\tau_{p+1}}$ -измеримые случайные величины, удовлетворяющие условию (10.4).

Простым примером случайной величины $\Delta \tilde{\mathbf{f}}_p^{(i)}$ является [68, 86] случайная величина, для которой

$$\mathbb{P}\{\Delta \tilde{\mathbf{f}}_p^{(i)} = \pm \sqrt{\Delta}\} = \frac{1}{2}.$$

Нетрудно видеть, что возможен также следующий вариант выбора случайных величин $\Delta \tilde{\mathbf{f}}_p^{(i)}$: $\Delta \tilde{\mathbf{f}}_p^{(i)} \sim N(0, \Delta)$.

Таким образом, в рамках сделанных допущений слабый метод Эйлера имеет порядок слабой сходимости $\gamma = 1.0$ и записывается как

$$\mathbf{y}_{p+1} = \mathbf{y}_p + \mathbf{a}(\mathbf{y}_p)\Delta + \Sigma(\mathbf{y}_p)\Delta \tilde{\mathbf{f}}_p. \quad (10.5)$$

В [86] отмечается, что переход к неавтономному случаю, т. е. когда функции $\mathbf{a}$ и Σ зависят не только от $\mathbf{x}$, но и от t , осуществляется путем рассмотрения процесса Ито размерности $n+1$, первой компонентой которого, например, является t , а последующими n компонентами — компоненты процесса $\mathbf{x}_t$. При этом сформулированные требования слабой сходимости метода Эйлера (10.3) могут быть несколько ослаблены по переменной t [86].

Численный эксперимент 10.1³ (рис. 10.1). Для стохастического дифференциального уравнения Ито

$$dx_t = ax_t dt + bx_t df_t, \quad x_0 = 1, \quad t \in [0, T], \quad f_t \in \mathbb{R}^1, \quad (10.6)$$

с моделировать 2000 ($M = 20$ групп по $N = 100$ реализаций) независимых реализаций случайной величины x_T при $T = 1$, $a = 1.5$, $b = 0.05$, $\Delta = 2^{-2}$ с помощью явного слабого метода Эйлера (10.5). Вычислить оценку $\hat{\mu}_{100,20}$ ошибки $\mu = M\{y_T\} - M\{x_T\}$ по формуле (10.2), учитывая, что $M\{x_T\} = x_0 e^{aT}$ (y_T определяется из (10.5)). Построить

³Если не оговаривается противное, то для моделирования повторных стохастических интегралов Ито при реализации слабых численных методов главы 10 используются гауссовские случайные величины.

90%-й доверительный интервал для μ . Повторить вычисления при $\Delta = 2^{-j}$, $j = 3, 4, 5, 6$, и изобразить графически зависимости $\hat{\mu}_{100,20}(\Delta)$ и $|\hat{\mu}_{100,20}(\Delta)|$, а также 90%-е доверительные интервалы для μ при указанных значениях Δ .

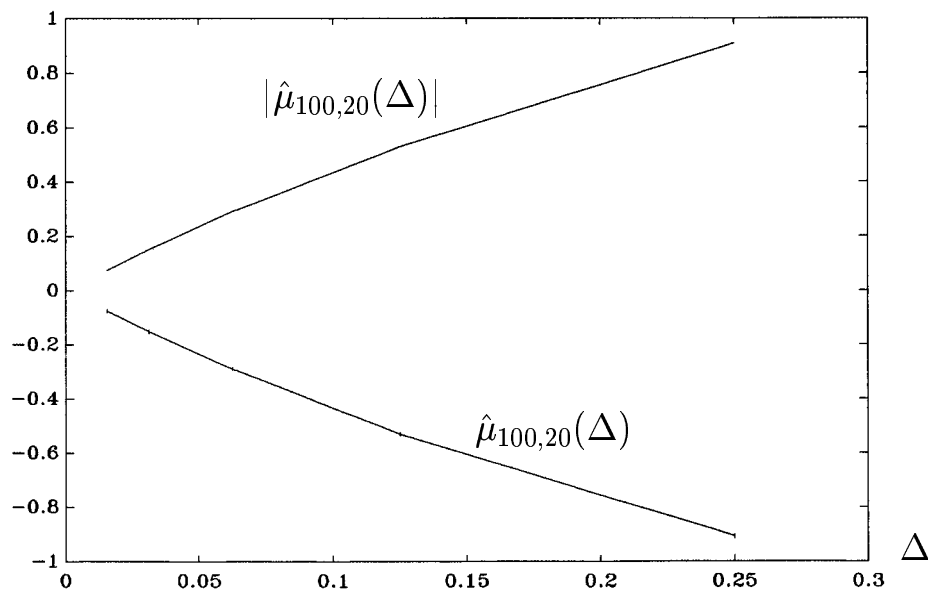


Рис. 10.1. Результат численного эксперимента 10.1.

В [86, 89] показано, что при несколько более слабых условиях, нежели сформулированные ранее, метод Эйлера сходится слабо с порядком $\gamma \in (0, 1)$. Приведем формулировку соответствующего утверждения [86, 89] в случае скалярного винеровского процесса ($m = 1$) и $\Sigma(\mathbf{x}, t) : \mathbb{R}^n \times [0, T] \rightarrow \mathbb{R}^n$, $n \geq 1$.

Будем говорить, что функция $h(\mathbf{x}) : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^1$ является гельдеровой с показателем $\alpha \in (0, 1)$, если существует положительная постоянная K такая, что для всех $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^d$

$$|h(\mathbf{x}) - h(\mathbf{y})| \leq K|\mathbf{x} - \mathbf{y}|^\alpha.$$

Введем обозначения [86]:

$$\partial_{\mathbf{x}}^\eta \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\partial^{\eta_1}}{\partial(\mathbf{x}^{(1)})^{\eta_1}} \cdots \frac{\partial^{\eta_n}}{\partial(\mathbf{x}^{(n)})^{\eta_n}}, \quad \eta = \sum_{i=1}^n \eta_i \geq 1,$$

$$\partial_t^0 = \partial_{\mathbf{x}}^0 \stackrel{\text{def}}{=} .,$$

$$\partial_t^k \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\partial^k}{\partial t^k}, \quad k = 1, 2, \dots,$$

где $\mathbf{x} = (\mathbf{x}^{(1)} \dots \mathbf{x}^{(n)})^\top$; $\eta_i = 0, 1, \dots, i = 1, \dots, n$.

Обозначим через $H_l([0, T])$ пространство функций $h : \mathbb{R}^n \times [0, T] \rightarrow \mathbb{R}^1$, для которых частные производные $\partial_t^q \partial_{\mathbf{x}}^g h$ являются гельдеровыми с показателем $l - [l]$ по $\mathbf{x}$ и $(l - 2q - g)/2$ по t для таких q и g , что $2q + g \leq l$; здесь $l \in \bigcup_{i=0}^2 (i, i+1)$ ($[l]$ — целая часть числа l).

Через H_l будем обозначать пространство всех функций $h \in H_l([0, T])$, которые не зависят от t .

Теорема 10.1 [86, 89]. Пусть выполнены следующие условия:

1. Процесс $\mathbf{x}_t, t \in [0, T]$, — решение стохастического дифференциального уравнения Ито (7.18) при $m = 1$ ($\Sigma(\mathbf{x}, t) : \mathbb{R}^n \times [0, T] \rightarrow \mathbb{R}^n$), для которого $M\{|\mathbf{x}_T|^k\} < \infty, k = 1, 2, \dots$.

2. Величина $(\Sigma(\mathbf{x}, t)\Sigma^\top(\mathbf{x}, t)\mathbf{z}, \mathbf{z}) \geq C|\mathbf{z}|^2$ для всех $t \in [0, T]$; $\mathbf{x}, \mathbf{z} \in \mathbb{R}^n$ и некоторой положительной постоянной C (здесь $(\cdot, \cdot)$ — скалярное произведение).

3. Функции $\mathbf{a}(\mathbf{x}, t), \Sigma(\mathbf{x}, t) \in H_l([0, T])$ для некоторого $l \in \bigcup_{i=0}^2 (i, i+1)$.

4. Функция $g(\mathbf{x}) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^1$ — функция из пространства H_{l+2} .

5. Процесс $\mathbf{y}_t, t \in [0, T]$, — случайный процесс, определенный равенством

$$\mathbf{y}_t = \mathbf{y}_{\tau_p} + \mathbf{a}(\mathbf{y}_{\tau_p}, \tau_p)(t - \tau_p) + \Sigma(\mathbf{y}_{\tau_p}, \tau_p)(\mathbf{f}_t - \mathbf{f}_{\tau_p}),$$

где $t \in [\tau_p, \tau_{p+1}]$, $p = 0, 1, \dots, N$, $\tau_p = p\Delta$; $\Delta = T/N$.

Тогда

$$|M\{g(\mathbf{x}_T)\} - M\{g(\mathbf{y}_T)\}| \leq K\Delta^{r(l)},$$

где

$$r(l) = \begin{cases} \frac{l}{2} & \text{при } l \in (0, 1), \\ \frac{1}{3-l} & \text{при } l \in (1, 2), \\ 1 & \text{при } l \in (2, 3), \end{cases}$$

а $K < \infty$ — постоянная, которая не зависит от Δ .

10.2.2 Метод порядка точности 2.0

В этом разделе рассмотрим полученные в [68] (Г. Н. Мильштейн) и [144] (D. Talay) слабые численные методы порядка точности 2.0.

Для построения данных численных методов воспользуемся разложением Тейлора–Ито в форме Вагнера и Платена вида (4.12) при $s = \tau_{p+1}$, $t = \tau_p$, $r = 2$, $R(\mathbf{x}, t) \equiv \mathbf{x}$. После отбрасывания остаточного члена в этом разложении получим

$$\begin{aligned} \mathbf{y}_{p+1} = & \mathbf{y}_p + {}^{(1)}G_0\{\mathbf{y}_p\} \cdot {}^{(1)}J_{(1)\tau_{p+1}, \tau_p} + L\{\mathbf{y}_p\}\Delta + \\ & + {}^{(2)}G_0G_0\{\mathbf{y}_p\} \cdot {}^{(2)}J_{(11)\tau_{p+1}, \tau_p} + {}^{(1)}LG_0\{\mathbf{y}_p\} \cdot {}^{(1)}J_{(01)\tau_{p+1}, \tau_p} + \\ & + {}^{(1)}G_0L\{\mathbf{y}_p\} \cdot {}^{(1)}J_{(10)\tau_{p+1}, \tau_p} + \frac{\Delta^2}{2}L^2\{\mathbf{y}_p\}, \end{aligned} \quad (10.7)$$

где $\mathbf{y}_{\tau_p} \stackrel{\text{def}}{=} \mathbf{y}_p$.

Запишем (10.7) в развернутой форме и заменим повторные стохастические интегралы Ито, входящие в (10.7), на подобранные таким образом аппроксимации (6.164), (6.165), что при определенных условиях (см. теорему 10.2) на функции $\mathbf{a}(\mathbf{x})$, $\Sigma(\mathbf{x})$ полученная численная схема имела бы порядок слабой сходимости 2.0. В результате придем к следующему численному методу [68, 86, 144]:

$$\begin{aligned} \mathbf{y}_{p+1} = & \mathbf{y}_p + \mathbf{a}\Delta + \sum_{i_1=1}^m \Sigma_{i_1} \Delta \tilde{\mathbf{f}}_p^{(i_1)} + \\ & + \frac{1}{2} \sum_{i_1, i_2=1}^m G_0^{(i_2)} \Sigma_{i_1} (\Delta \tilde{\mathbf{f}}_p^{(i_1)} \Delta \tilde{\mathbf{f}}_p^{(i_2)} + V_p^{(i_1 i_2)}) + \\ & + \frac{1}{2} \Delta \sum_{i_1=1}^m (L \Sigma_{i_1} + G_0^{(i_1)} \mathbf{a}) \Delta \tilde{\mathbf{f}}_p^{(i_1)} + \frac{\Delta^2}{2} L \mathbf{a}, \end{aligned} \quad (10.8)$$

где функции $\mathbf{a}$, Σ_{i_1} , $G_0^{(i_2)} \Sigma_{i_1}$, $L \Sigma_{i_1}$, $G_0^{(i_1)} \mathbf{a}$ вычислены в точке $(\mathbf{y}_p, \tau_p)$; $\Delta \tilde{\mathbf{f}}_p^{(i)}$ — независимые при различных $p = 0, 1, \dots, N$ или $i = 1, \dots, m$ случайные величины, удовлетворяющие условию

$$\begin{aligned} & |\mathbb{M} \{ \Delta \tilde{\mathbf{f}}_p^{(i)} \}| + |\mathbb{M} \{ (\Delta \tilde{\mathbf{f}}_p^{(i)})^3 \}| + |\mathbb{M} \{ (\Delta \tilde{\mathbf{f}}_p^{(i)})^5 \}| + \\ & + |\mathbb{M} \{ (\Delta \tilde{\mathbf{f}}_p^{(i)})^2 \} - \Delta| + |\mathbb{M} \{ (\Delta \tilde{\mathbf{f}}_p^{(i)})^4 \} - 3\Delta^2| \leq K \Delta^3, \end{aligned} \quad (10.9)$$

где $i = 1, \dots, m$; $K < \infty$ — постоянная; $V_p^{(i_1 i_2)}$ — независимые при различных $i_2 = 1, \dots, i_1 - 1$; $i_1 = 1, \dots, m$ или $p = 0, 1, \dots, N$ дискретные случайные величины, для которых

$$\mathbb{P}\{V_p^{(i_1 i_2)} = \pm \Delta\} = \frac{1}{2},$$

причем

$$V_p^{(i_1 i_1)} = -\Delta$$

и

$$V_p^{(i_1 i_2)} = -V_p^{(i_2 i_1)}$$

при $i_2 = i_1 + 1, \dots, m$ и $i_1 = 1, \dots, m$.

Известно [68, 86, 144], что одним из возможных вариантов выбора случайных величин $\Delta \mathbf{f}_p^{(i)}$, удовлетворяющих условию (10.9), является случайная величина, для которой

$$\mathbf{P}\{\Delta \tilde{\mathbf{f}}_p^{(i)} = \pm \sqrt{3\Delta}\} = \frac{1}{6}, \quad \mathbf{P}\{\Delta \tilde{\mathbf{f}}_p^{(i)} = 0\} = \frac{2}{3}.$$

Отметим, что гауссовская случайная величина с нулевым математическим ожиданием и дисперсией Δ также удовлетворяет условию (10.9).

Рассмотрим случай $m = 1$. Тогда (10.7) перепишем в виде

$$\begin{aligned} \mathbf{y}_{p+1} = & \mathbf{y}_p + \Sigma \Delta f_{\tau_p} + \mathbf{a} \Delta + \frac{1}{2} G_0 \Sigma \left((\Delta f_{\tau_p})^2 - \Delta \right) + \\ & + G_0 \mathbf{a} J_{(10)\tau_{p+1}, \tau_p} + L \Sigma J_{(01)\tau_{p+1}, \tau_p} + \frac{\Delta^2}{2} L \mathbf{a}, \end{aligned} \quad (10.10)$$

где $\Sigma : \mathbb{R}^n \times [0, T] \rightarrow \mathbb{R}^n$; функции $\Sigma, \mathbf{a}, G_0 \Sigma, G_0 \mathbf{a}, L \Sigma, L \mathbf{a}$ вычислены в точке $(\mathbf{y}_p, \tau_p)$; $\Delta f_{\tau_p} = f_{\tau_{p+1}} - f_{\tau_p}$ — приращение скалярного винеровского процесса f_t ;

$$J_{(10)\tau_{p+1}, \tau_p} = \int_{\tau_p}^{\tau_{p+1}} \int_{\tau_p}^s df_{\theta} ds, \quad J_{(01)\tau_{p+1}, \tau_p} = \int_{\tau_p}^{\tau_{p+1}} \int_{\tau_p}^s d\theta df_s.$$

Численная схема (10.10) была впервые предложена Г. Н. Мильштейном [68].

Рассмотрим различные способы численного моделирования стохастических интегралов, входящих в (10.10). Поскольку

$$J_{(01)\tau_{p+1}, \tau_p} = \Delta \cdot \Delta f_{\tau_p} - J_{(10)\tau_{p+1}, \tau_p} \text{ с в.1,} \quad (10.11)$$

то для численного моделирования стохастических интегралов, входящих в правую часть (10.10), достаточно смоделировать две гауссовские коррелированные случайные величины: Δf_{τ_p} , $J_{(01)\tau_{p+1}, \tau_p}$. Это можно сделать, например, по следующим формулам:

$$\Delta f_{\tau_p} = \sqrt{\Delta} \zeta_p^{(1)}, \quad J_{(01)\tau_{p+1}, \tau_p} = \frac{1}{2} \Delta^{\frac{3}{2}} \left(\zeta_p^{(1)} + \frac{1}{\sqrt{3}} \zeta_p^{(2)} \right), \quad (10.12)$$

где $\zeta_p^{(i)}, i = 1, 2$, — независимые при различных p или i стандартные гауссовские случайные величины.

Интересным представляется тот факт, что формулы (10.12) есть не что иное, как результат применения метода аппроксимации повторных стохастических интегралов Ито, основанного на кратных рядах Фурье по полиномам Лежандра, к паре стохастических интегралов Ито

$$\int_{\tau_p}^{\tau_{p+1}} df_s, \int_{\tau_p}^{\tau_{p+1}} (s - \tau_p) df_s \quad (10.13)$$

(ср. с формулами (6.30), (6.31)). В данном случае стохастические интегралы Ито (10.13) с вероятностью 1 совпадают с соответствующими им стохастическими интегралами Стратоновича.

Возможен также и другой вариант [86] совместного численного моделирования случайных величин $\Delta f_{\tau_p}, J_{(01)\tau_{p+1}, \tau_p}$. Вместо Δf_{τ_p} можно взять $\Delta \tilde{f}_p$, а вместо $J_{(01)\tau_{p+1}, \tau_p}$ — $\frac{1}{2} \Delta (\Delta \tilde{f}_p)$, где $\Delta \tilde{f}_p$ — $\mathcal{F}_{\tau_{p+1}}$ -измеримая случайная величина, удовлетворяющая условию типа (10.9). Способы выбора данной случайной величины рассмотрены ранее.

Выпишем варианты численной схемы (10.10) для указанных двух способов численного моделирования пары случайных величин $\Delta f_{\tau_p}, J_{(01)\tau_{p+1}, \tau_p}$:

$$\begin{aligned} \mathbf{y}_{p+1} = \mathbf{y}_p + \Sigma \sqrt{\Delta} \zeta_p^{(1)} + \mathbf{a} \Delta + \frac{1}{2} \Delta G_0 \Sigma \left((\zeta_p^{(1)})^2 - 1 \right) + \frac{1}{2} \Delta^2 L \mathbf{a} + \\ + \frac{1}{2} \Delta^{\frac{3}{2}} \left(G_0 \mathbf{a} \left(\zeta_p^{(1)} - \frac{1}{\sqrt{3}} \zeta_p^{(2)} \right) + L \Sigma \left(\zeta_p^{(1)} + \frac{1}{\sqrt{3}} \zeta_p^{(2)} \right) \right), \end{aligned} \quad (10.14)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{y}_{p+1} = \mathbf{y}_p + \Sigma \Delta \tilde{f}_p + \mathbf{a} \Delta + \frac{1}{2} G_0 \Sigma \left((\Delta \tilde{f}_p)^2 - \Delta \right) + \frac{1}{2} \Delta^2 L \mathbf{a} + \\ + \frac{1}{2} \Delta (G_0 \mathbf{a} + L \Sigma) \Delta \tilde{f}_p. \end{aligned} \quad (10.15)$$

В заключение приведем формулировку теоремы о слабой сходимости численной схемы (10.8). Результат такого характера впервые был получен в [144] (D. Talay).

Теорема 10.2 [68, 86, 144]. Пусть в автономном случае $\mathbf{y}_0$ и $\mathbf{x}_0$ имеют одинаковое распределение со всеми конечными моментами, т. е. $M\{|\mathbf{y}_0|^i\} < \infty, M\{|\mathbf{x}_0|^i\} < \infty, i = 1, 2, \dots$. Пусть также функции $\mathbf{a}(\mathbf{x}), \Sigma(\mathbf{x})$ шесть раз непрерывно дифференцируемы, причем все производные ограничены и для всех $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$

$$|\Sigma^{(kj)}(\mathbf{x}) \Sigma^{(lj)}(\mathbf{x})| \leq K(1 + |\mathbf{x}|),$$

где $k, l = 1, \dots, n$; $j = 1, \dots, m$; $K < \infty$ — постоянная. Тогда численные схемы (10.8), (10.10), (10.14), (10.15) являются слабыми численными схемами порядка точности 2.0.

Переход к неавтономному случаю осуществляется путем увеличения размерности процесса Ито на единицу так, что, например, его первой компонентой является t , а последующими n компонентами — компоненты процесса $\mathbf{x}_t$.

Численный эксперимент 10.2 (рис. 10.2). Повторить численный эксперимент 10.1 для явного слабого численного метода порядка точности 2.0 вида (10.15) при $\Delta = 2^{-j}$, $j = 3, 4, 5, 6$.

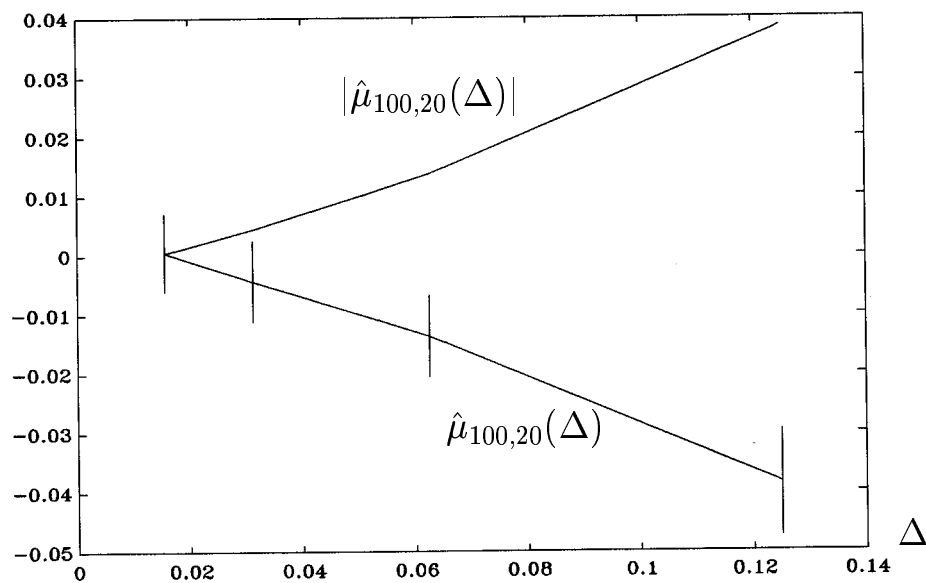


Рис. 10.2. Результат численного эксперимента 10.2.

10.2.3 Методы порядка точности 3.0

В данном разделе рассмотрим варианты слабого численного метода порядка точности 3.0. Слабый численный метод порядка точности 3.0 решения скалярного стохастического дифференциального уравнения Ито ($n = 1$) со скалярным шумом ($m = 1$) получен в [139], а слабый численный метод порядка точности 3.0 решения векторного

стохастического дифференциального уравнения ($n > 1$) с векторным ($m > 1$), но аддитивным шумом содержится в [70].

В качестве основы построения слабого численного метода порядка точности 3.0 возьмем разложение Тейлора–Ито в форме Вагнера и Платена вида (4.12) при $s = \tau_{p+1}$, $t = \tau_p$, $r = 3$, $R(\mathbf{x}, t) \equiv \mathbf{x}$. После отбрасывания остаточного члена в этом разложении получим

$$\begin{aligned}
\mathbf{y}_{p+1} = & \mathbf{y}_p + {}^{(1)}G_0\{\mathbf{y}_p\} \cdot {}^{(1)}J_{(1)\tau_{p+1}, \tau_p} + L\{\mathbf{y}_p\}\Delta + \\
& + {}^{(2)}G_0G_0\{\mathbf{y}_p\} \cdot {}^{(2)}J_{(11)\tau_{p+1}, \tau_p} + {}^{(1)}LG_0\{\mathbf{y}_p\} \cdot {}^{(1)}J_{(01)\tau_{p+1}, \tau_p} + \\
& + {}^{(1)}G_0L\{\mathbf{y}_p\} \cdot {}^{(1)}J_{(10)\tau_{p+1}, \tau_p} + \frac{\Delta^2}{2}L^2\{\mathbf{y}_p\} + \frac{\Delta^3}{6}L^3\{\mathbf{y}_p\} + \\
& + {}^{(3)}G_0G_0G_0\{\mathbf{y}_p\} \cdot {}^{(3)}J_{(111)\tau_{p+1}, \tau_p} + {}^{(2)}G_0G_0L\{\mathbf{y}_p\} \cdot {}^{(2)}J_{(110)\tau_{p+1}, \tau_p} + \\
& + {}^{(2)}G_0LG_0\{\mathbf{y}_p\} \cdot {}^{(2)}J_{(101)\tau_{p+1}, \tau_p} + {}^{(2)}LG_0G_0\{\mathbf{y}_p\} \cdot {}^{(2)}J_{(011)\tau_{p+1}, \tau_p} + \\
& + {}^{(1)}L^2G_0\{\mathbf{y}_p\} \cdot {}^{(1)}J_{(001)\tau_{p+1}, \tau_p} + {}^{(1)}LG_0L\{\mathbf{y}_p\} \cdot {}^{(1)}J_{(010)\tau_{p+1}, \tau_p} + \\
& + {}^{(1)}G_0L^2\{\mathbf{y}_p\} \cdot {}^{(1)}J_{(100)\tau_{p+1}, \tau_p}, \tag{10.16}
\end{aligned}$$

где $\mathbf{y}_{\tau_p} \stackrel{\text{def}}{=} \mathbf{y}_p$.

Рассмотрим формулу (10.16) при $m = n = 1$ и заменим в ней повторные стохастические интегралы Ито на специальные слабые аппроксимации (см. разд. 6.7), которые при определенных дополнительных условиях (см. теорему 10.3) обеспечат слабую сходимость порядка 3.0 соответствующей численной схемы. В результате получим следующий численный метод [86, 139]:

$$\begin{aligned}
\mathbf{y}_{p+1} = & \mathbf{y}_p + \Sigma \Delta f_{\tau_p} + \mathbf{a} \Delta + \frac{1}{2}G_0\Sigma \left((\Delta f_{\tau_p})^2 - \Delta \right) + \\
& + G_0\mathbf{a}J_{(10)\tau_{p+1}, \tau_p} + L\Sigma \left(\Delta \cdot \Delta f_{\tau_p} - J_{(10)\tau_{p+1}, \tau_p} \right) + \frac{\Delta^2}{2}L\mathbf{a} + \\
& + \frac{1}{6} \left(L^2\Sigma + LG_0\mathbf{a} + G_0L\mathbf{a} \right) \Delta^2 \cdot \Delta f_{\tau_p} + \\
& + \frac{1}{6} \left(G_0G_0\mathbf{a} + G_0L\Sigma + LG_0\Sigma \right) \Delta \left((\Delta f_{\tau_p})^2 - \Delta \right) + \\
& + \frac{\Delta^3}{6}L^2\mathbf{a} + \frac{1}{6}G_0G_0\Sigma \left((\Delta f_{\tau_p})^2 - 3\Delta \right) \Delta f_{\tau_p}, \tag{10.17}
\end{aligned}$$

где $\mathbf{a}, \Sigma : \mathbb{R}^1 \times [0, T] \rightarrow \mathbb{R}^1$, функции $\mathbf{h}, G_0\mathbf{h}, L\mathbf{h}, G_0G_0\mathbf{h}, G_0L\mathbf{h}, LG_0\mathbf{h}, L^2\mathbf{h}$ ($\mathbf{h} = \mathbf{a}$ или Σ) вычислены в точке $(\mathbf{y}_p, \tau_p)$; Δf_{τ_p} и $J_{(10)\tau_{p+1}, \tau_p}$ — коррелированные гауссовские случайные величины вида

$$\Delta f_{\tau_p} = \int_{\tau_p}^{\tau_{p+1}} df_s, \quad J_{(10)\tau_{p+1}, \tau_p} = \int_{\tau_p}^{\tau_{p+1}} \int_{\tau_p}^s df_{\theta} ds,$$

которые могут быть смоделированы численно с помощью формул (10.11), (10.12) или (6.167), (6.168).

Г. Н. Мильштейном [70] рассмотрен вариант слабого численного метода порядка точности 3.0 в случае аддитивного шума при $n, m > 1$, т. е. когда $\Sigma : [0, T] \rightarrow \mathbb{R}^{n \times m}$. Приведем выражение данного численного метода [70]:

$$\begin{aligned} \mathbf{y}_{p+1} = & \mathbf{y}_p + \mathbf{a}\Delta + \sum_{i_1=1}^m \Sigma_{i_1} \Delta \mathbf{f}_{\tau_p}^{(i_1)} + \frac{\Delta^2}{2} L\mathbf{a} + \frac{\Delta^3}{6} L^2\mathbf{a} + \\ & + \sum_{i_1=1}^m \left(L\Sigma_{i_1} \left(\Delta \cdot \Delta \mathbf{f}_{\tau_p}^{(i_1)} - J_{(10)\tau_{p+1}, \tau_p}^{(i_1)} \right) + G_0^{(i_1)} \mathbf{a} J_{(10)\tau_{p+1}, \tau_p}^{(i_1)} + \right. \\ & \left. + \frac{1}{6} \left(L^2 \Sigma_{i_1} + LG_0^{(i_1)} \mathbf{a} + G_0^{(i_1)} L\mathbf{a} \right) \Delta^2 \cdot \Delta \mathbf{f}_{\tau_p}^{(i_1)} \right) + \\ & + \frac{1}{6} \sum_{i_1, i_2=1}^m G_0^{(i_2)} G_0^{(i_1)} \mathbf{a} \left(\Delta \mathbf{f}_{\tau_p}^{(i_1)} \Delta \mathbf{f}_{\tau_p}^{(i_2)} - \mathbf{1}_{\{i_1=i_2\}} \Delta \right) \Delta, \end{aligned} \quad (10.18)$$

где коррелированные гауссовские случайные величины

$$J_{(1)\tau_{p+1}, \tau_p}^{(i)} = \Delta \mathbf{f}_{\tau_p}^{(i)} = \int_{\tau_p}^{\tau_{p+1}} d\mathbf{f}_s^{(i)}, \quad J_{(10)\tau_{p+1}, \tau_p}^{(i)} = \int_{\tau_p}^{\tau_{p+1}} \int_{\tau_p}^s d\mathbf{f}_{\theta}^{(i)} ds, \quad i = 1, \dots, m,$$

могут быть смоделированы численно по формулам

$$\hat{J}_{(1)\tau_{p+1}, \tau_p}^{(i)} = \sqrt{\Delta} \zeta_p^{(i)}, \quad \hat{J}_{(10)\tau_{p+1}, \tau_p}^{(i)} = \frac{1}{2} \Delta^{\frac{3}{2}} \left(\zeta_p^{(i)} - \frac{1}{\sqrt{3}} \eta_p^{(i)} \right), \quad (10.19)$$

или по формулам

$$\hat{J}_{(1)\tau_{p+1}, \tau_p}^{(i)} = \Delta \tilde{\mathbf{f}}_p^{(i)}, \quad \hat{J}_{(10)\tau_{p+1}, \tau_p}^{(i)} = \Delta \hat{\mathbf{f}}_p^{(i)}, \quad (10.20)$$

где $\zeta_p^{(i)}, \eta_p^{(i)}$, $i = 1, \dots, m$; $p = 0, 1, \dots, N$, — независимые в совокупности стандартные гауссовские случайные величины; $\Delta \tilde{\mathbf{f}}_p^{(i)}, \Delta \hat{\mathbf{f}}_p^{(i)}$, $i = 1, \dots, m$; $p = 0, 1, \dots, N$, — попарно независимые при различных i

случайные величины, для которых $\Delta \tilde{\mathbf{f}}_p^{(i)} \sim N(0, \Delta)$, $\Delta \hat{\mathbf{f}}_p^{(i)} \sim N(0, \frac{1}{3}\Delta^3)$, $M\{\Delta \tilde{\mathbf{f}}_p^{(i)} \Delta \hat{\mathbf{f}}_p^{(i)}\} = \frac{1}{2}\Delta^2$. Нетрудно видеть, что аппроксимации (10.19) являются частным случаем аппроксимаций (10.20).

Условия, при которых численный метод (10.18) имеет порядок слабой сходимости 3.0, задаются теоремой 10.3 ([86, теорема 14.5.2. С. 474]).

Численный эксперимент 10.3 (рис. 10.3). Повторить численный эксперимент 10.1 для явного слабого численного метода порядка точности 3.0 вида (10.17) при $\Delta = 2^{-j}$, $j = 1, \dots, 6$. При этом не моделировать те повторные стохастические интегралы Ито, коэффициенты перед которыми оказываются равными нулю после применения численного метода (10.17) к уравнению (10.6) и приведения подобных слагаемых.

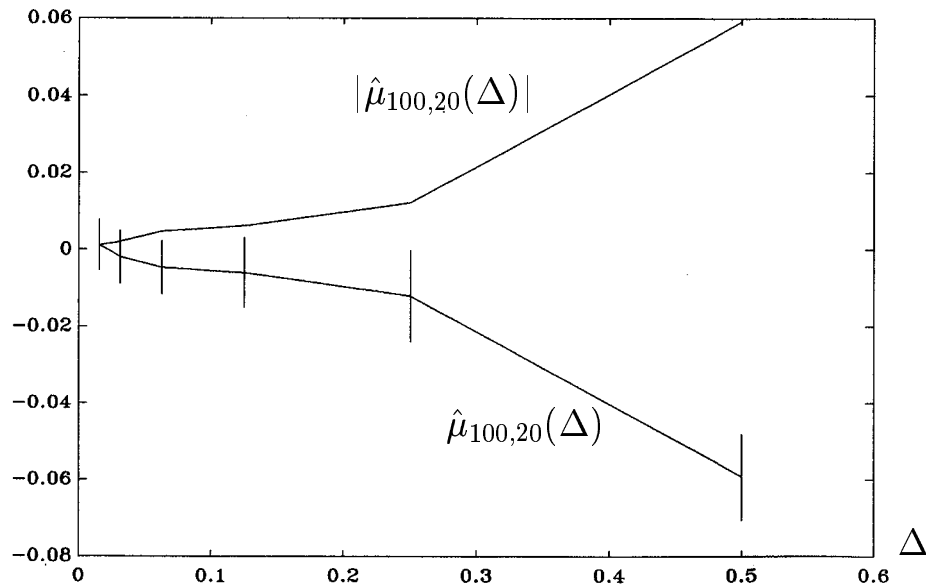


Рис.10. 3. Результат численного эксперимента 10.3.

10.2.4 Методы порядка точности 4.0

Приведем слабый численный метод порядка точности 4.0 для скалярного случая ($n = m = 1$) с аддитивным шумом ($\Sigma : [0, T] \rightarrow \mathbb{R}^1$), который получен в [87]. Этот численный метод имеет следующий вид:

$$y_{p+1} = y_p + \mathbf{a}\Delta + \Sigma\Delta f_{\tau_p} + \frac{\Delta^2}{2}L\mathbf{a} + G_0\mathbf{a}J_{(10)\tau_{p+1},\tau_p} +$$

$$\begin{aligned}
& +L\Sigma \left(\Delta \cdot \Delta f_{\tau_p} - J_{(10)\tau_{p+1}, \tau_p} \right) + \\
& +\frac{1}{6} \left(L^2\Sigma + LG_0\mathbf{a} \right) \Delta^2 \cdot \Delta f_{\tau_p} + G_0L\mathbf{a} \left(\Delta J_{(10)\tau_{p+1}, \tau_p} - \frac{1}{6}\Delta^3 \cdot \Delta f_{\tau_p} \right) + \\
& +G_0G_0\mathbf{a} \left(2\Delta f_{\tau_p} J_{(10)\tau_{p+1}, \tau_p} - \frac{5}{6} (\Delta f_{\tau_p})^2 \Delta - \frac{1}{6}\Delta^2 \right) + \\
& +\frac{\Delta^3}{6} L^2\mathbf{a} + \frac{\Delta^4}{24} L^3\mathbf{a} + \\
& +\frac{1}{24} \left(G_0L^2\mathbf{a} + LG_0L\mathbf{a} + L^2G_0\mathbf{a} + L^3\Sigma \right) \Delta^3 \cdot \Delta f_{\tau_p} + \\
& +\frac{1}{24} \left(G_0G_0L\mathbf{a} + LG_0G_0\mathbf{a} + G_0LG_0\mathbf{a} \right) \left((\Delta f_{\tau_p})^2 - \Delta \right) \Delta^2 + \\
& +\frac{1}{24} G_0G_0G_0\mathbf{a} \Delta f_{\tau_p} \left((\Delta f_{\tau_p})^2 - 3\Delta \right) \Delta, \tag{10.21}
\end{aligned}$$

где коррелированные гауссовские случайные величины Δf_{τ_p} , $J_{(10)\tau_{p+1}, \tau_p}$ такие же, как и в предыдущем разделе.

В [86] рассматривается другой вариант численного метода (10.21).

Сравнительная простота численной схемы (10.21) объясняется тем, что в силу аддитивности стохастического возмущения значительная часть повторных стохастических интегралов Ито кратности 2–4 из разложения Тейлора–Ито (4.12) при $r = 4$ в правой части (10.21) (коэффициентные функции перед этими стохастическими интегралами равны нулю) отсутствует.

Откажемся теперь от предположения аддитивности шума и будем считать, что $\Sigma = \Sigma(\mathbf{x}, t) : \mathbb{R}^n \times [0, T] \rightarrow \mathbb{R}^n$, $m = 1, n \geq 1$. Построим слабый численный метод порядка точности 4.0 решения стохастического дифференциального уравнения Ито (7.18) в этом случае.

Согласно теореме 10.3 (см. также теорему 14.5.2, [86. С. 474]) для построения слабого численного метода порядка точности 4.0 решения стохастического дифференциального уравнения Ито (7.18) необходимо использовать разложение Тейлора–Ито в форме Вагнера и Платена (4.12) при $r = 4$, т. е. разложение, включающее в себя подлежащие аппроксимации повторные стохастические интегралы Ито кратности 1 – 4. Число этих стохастических интегралов Ито равно 26. Если вместо разложения Тейлора–Ито в форме Вагнера и Платена (4.12) при $r = 4$ использовать унифицированное разложение Тейлора–Ито (4.55) при $r = 4$, то число подлежащих аппроксимации повторных стохастических интегралов Ито можно сократить до 15.

Рассмотрим унифицированное разложение Тейлора–Ито (4.55) при $r = 4$, отбросим в нем остаточный член в интегральной форме и заменим входящие в него повторные стохастические интегралы Ито на их аппроксимации. В результате получим численный метод вида [100]

$$\begin{aligned}
\mathbf{y}_{p+1} = & \mathbf{y}_p + \Delta \mathbf{a} + \Sigma \hat{I}_{0\tau_{p+1}, \tau_p} + \frac{\Delta^2}{2} L \mathbf{a} + \\
& + G_1 \mathbf{y}_p \hat{I}_{1\tau_{p+1}, \tau_p} + \Delta G_0 \mathbf{a} \hat{I}_{0\tau_{p+1}, \tau_p} + G_0 \Sigma \hat{I}_{00\tau_{p+1}, \tau_p} + G_0 G_0 \Sigma \hat{I}_{000\tau_{p+1}, \tau_p} + \\
& + \Delta G_1 \mathbf{a} \hat{I}_{1\tau_{p+1}, \tau_p} + \frac{\Delta^2}{2} G_0 L \mathbf{a} \hat{I}_{0\tau_{p+1}, \tau_p} + G_2 \mathbf{y}_p \hat{I}_{2\tau_{p+1}, \tau_p} + G_1 \Sigma \hat{I}_{10\tau_{p+1}, \tau_p} + \\
& + G_0 G_1 \mathbf{y}_p \hat{I}_{01\tau_{p+1}, \tau_p} + \Delta G_0 G_0 \mathbf{a} \hat{I}_{00\tau_{p+1}, \tau_p} + \frac{\Delta^3}{6} L L \mathbf{a} + \frac{\Delta^4}{24} L L L \mathbf{a} + \\
& + \frac{\Delta^3}{6} G_0 L L \mathbf{a} \hat{I}_{0\tau_{p+1}, \tau_p} + \frac{\Delta^2}{2} G_1 L \mathbf{a} \hat{I}_{1\tau_{p+1}, \tau_p} + \Delta G_2 \mathbf{a} \hat{I}_{2\tau_{p+1}, \tau_p} + \\
& + G_3 \mathbf{y}_p \hat{I}_{3\tau_{p+1}, \tau_p} + G_1 G_1 \mathbf{y}_p \hat{I}_{11\tau_{p+1}, \tau_p} + G_2 \Sigma \hat{I}_{20\tau_{p+1}, \tau_p} + G_0 G_2 \mathbf{y}_p \hat{I}_{02\tau_{p+1}, \tau_p} + \\
& + \Delta G_1 G_0 \mathbf{a} \hat{I}_{10\tau_{p+1}, \tau_p} + \Delta G_0 G_1 \mathbf{a} \hat{I}_{01\tau_{p+1}, \tau_p} + \frac{\Delta^2}{2} G_0 G_0 L \mathbf{a} \hat{I}_{00\tau_{p+1}, \tau_p} + \\
& + \Delta G_0 G_0 G_0 \mathbf{a} \hat{I}_{000\tau_{p+1}, \tau_p} + G_1 G_0 \Sigma \hat{I}_{100\tau_{p+1}, \tau_p} + G_0 G_1 \Sigma \hat{I}_{010\tau_{p+1}, \tau_p} + \\
& + G_0 G_0 G_1 \mathbf{y}_p \hat{I}_{001\tau_{p+1}, \tau_p} + G_0 G_0 G_0 \Sigma \hat{I}_{0000\tau_{p+1}, \tau_p}, \tag{10.22}
\end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned}
G_1 &= G_0 L - L G_0; \\
G_2 &= \frac{1}{2} G_0 L L - L G_0 L + \frac{1}{2} L L G_0; \\
G_3 &= \frac{1}{6} G_0 L L L - \frac{1}{2} L G_0 L L + \frac{1}{2} L L G_0 L - \frac{1}{6} L L L G_0; \\
L \mathbf{y}_p &= \mathbf{a}(\mathbf{y}_p, \tau_p), \quad G_0 \mathbf{y}_p = \Sigma(\mathbf{y}_p, \tau_p);
\end{aligned}$$

функции $\mathbf{a}, \Sigma, L \mathbf{a}, \dots, G_0 G_0 G_0 \Sigma$, входящие в (10.22), вычислены в точке $(\mathbf{y}_p, \tau_p)$; $\mathbf{y}_{\tau_p} \stackrel{\text{def}}{=} \mathbf{y}_p$;

$$I_{l_1 \dots l_{ks}, t} \stackrel{\text{def}}{=} \int_t^s (t - t_k)^{l_k} \dots \int_t^{t_2} (t - t_1)^{l_1} df_{t_1} \dots df_{t_k}, \quad k \geq 1,$$

— повторный стохастический интеграл Ито; $\hat{I}_{l_1 \dots l_{ks}, t}$ — его аппроксимация; $f_t, t \in [0, T]$, — скалярный стандартный винеровский процесс;

дифференциальные операторы L, G_0 входят в формулу Ито и имеют в данном случае следующий вид:

$$Lf(\mathbf{x}, t) = \frac{\partial f}{\partial t}(\mathbf{x}, t) + \sum_{i=1}^n \mathbf{a}^{(i)}(\mathbf{x}, t) \frac{\partial f}{\partial \mathbf{x}^{(i)}}(\mathbf{x}, t) + \frac{1}{2} \sum_{i,k=1}^n \Sigma^{(i)}(\mathbf{x}, t) \Sigma^{(k)}(\mathbf{x}, t) \frac{\partial^2 f}{\partial \mathbf{x}^{(i)} \partial \mathbf{x}^{(k)}}(\mathbf{x}, t), \quad (10.23)$$

$$G_0 f(\mathbf{x}, t) = \sum_{i=1}^n \Sigma^{(i)}(\mathbf{x}, t) \frac{\partial f}{\partial \mathbf{x}^{(i)}}(\mathbf{x}, t); \quad (10.24)$$

здесь $f : \mathbb{R}^n \times [0, T] \rightarrow \mathbb{R}^1$ — некоторая функция, для которой существуют правые части (10.23), (10.24).

Для того чтобы численный метод (10.22) был слабым численным методом порядка точности 4.0, необходимо выполнение ряда условий (см. теоремы 10.3, 10.4). Отметим здесь некоторые из них. Так, функции $\mathbf{a}^{(k)}(\mathbf{x}, t)$, $\Sigma^{(k)}(\mathbf{x}, t)$, $k = 1, \dots, n$, должны удовлетворять условиям AI, AII (теорема 1.6), а, кроме того, следующему условию: $\mathbf{a}^{(k)}(\mathbf{x}, t)$, $\Sigma^{(k)}(\mathbf{x}, t) \in C^{10}(\mathbb{R}^n \times [0, T], \mathbb{R}^1)$.

Выполнение для аппроксимаций $\hat{I}_{l_1 \dots l_{k,s,t}}$ повторных стохастических интегралов Ито $I_{l_1 \dots l_{k,s,t}}$ условия

$$\left| \mathbb{M} \left\{ \prod_{k=1}^l I_{\alpha_{k,s,t}} - \prod_{k=1}^l \hat{I}_{\alpha_{k,s,t}} | \mathcal{F}_t \right\} \right| \leq K(s-t)^5 \quad (10.25)$$

при всех $s, t \in [0, T]$, всех мультииндексах $\alpha_k \in \mathcal{A}_4$, всех $k = 1, \dots, l$; $l = 1, 2, \dots, 9$ и некоторой постоянной $K \in (0, \infty)$ обеспечит выполнение условия (10.37) теоремы 10.4 при $r = 4$. Здесь

$$\mathcal{A}_4 = \{0, 1, 00, 000, 2, 10, 01, 3, 11, 20, 02, 100, 010, 001, 0000\}.$$

Таким образом, для завершения построения слабого численного метода порядка точности 4.0 в случае скалярного неаддитивного шума необходимо построить такие слабые аппроксимации повторных стохастических интегралов Ито, входящие в (10.22), которые удовлетворяют условию (10.25) и являются по возможности наиболее простыми. В качестве таких аппроксимаций возьмем аппроксимации, определяемые формулами (6.170)–(6.178):

$$\hat{I}_{0_{\tau_{p+1}, \tau_p}} = \sqrt{\Delta} \zeta_0, \quad \hat{I}_{00_{\tau_{p+1}, \tau_p}} = \frac{1}{2} \Delta ((\zeta_0)^2 - 1), \quad (10.26)$$

$$\hat{I}_{1_{\tau_{p+1}, \tau_p}} = -\frac{\Delta^{\frac{3}{2}}}{2} \left(\zeta_0 + \frac{1}{\sqrt{3}} \zeta_1 \right), \quad \hat{I}_{000_{\tau_{p+1}, \tau_p}} = \frac{\Delta^{\frac{3}{2}}}{6} ((\zeta_0)^3 - 3\zeta_0), \quad (10.27)$$

$$\hat{I}_{0000_{\tau_{p+1}, \tau_p}} = \frac{\Delta^2}{24} ((\zeta_0)^4 - 6(\zeta_0)^2 + 3), \quad (10.28)$$

$$\hat{I}_{100_{\tau_{p+1}, \tau_p}} = -\frac{\Delta^{\frac{5}{2}}}{24} ((\zeta_0)^3 - 3\zeta_0), \quad \hat{I}_{010_{\tau_{p+1}, \tau_p}} = -\frac{\Delta^{\frac{5}{2}}}{12} ((\zeta_0)^3 - 3\zeta_0), \quad (10.29)$$

$$\hat{I}_{001_{\tau_{p+1}, \tau_p}} = -\frac{\Delta^{\frac{5}{2}}}{8} ((\zeta_0)^3 - 3\zeta_0), \quad \hat{I}_{11} = \frac{\Delta^3}{8} ((\zeta_0)^2 - 1), \quad (10.30)$$

$$\hat{I}_{20_{\tau_{p+1}, \tau_p}} = \frac{\Delta^3}{12} ((\zeta_0)^2 - 1), \quad \hat{I}_{02_{\tau_{p+1}, \tau_p}} = \frac{\Delta^3}{4} ((\zeta_0)^2 - 1), \quad (10.31)$$

$$\hat{I}_{3_{\tau_{p+1}, \tau_p}} = -\frac{\Delta^{\frac{7}{2}}}{4} \zeta_0, \quad \hat{I}_{2_{\tau_{p+1}, \tau_p}} = \frac{\Delta^{\frac{5}{2}}}{3} \left(\zeta_0 + \frac{\sqrt{3}}{2} \zeta_1 \right), \quad (10.32)$$

$$\hat{I}_{10_{\tau_{p+1}, \tau_p}} = \Delta^2 \left(-\frac{1}{6} ((\zeta_0)^2 - 1) - \frac{1}{4\sqrt{3}} \zeta_0 \zeta_1 \pm \frac{1}{12\sqrt{2}} ((\zeta_1)^2 - 1) \right), \quad (10.33)$$

$$\hat{I}_{01_{\tau_{p+1}, \tau_p}} = \Delta^2 \left(-\frac{1}{3} ((\zeta_0)^2 - 1) - \frac{1}{4\sqrt{3}} \zeta_0 \zeta_1 \mp \frac{1}{12\sqrt{2}} ((\zeta_1)^2 - 1) \right), \quad (10.34)$$

где

$$\zeta_0 \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{\sqrt{\Delta}} \int_{\tau_p}^{\tau_{p+1}} df_s; \quad \zeta_1 \stackrel{\text{def}}{=} \frac{2\sqrt{3}}{\Delta^{\frac{3}{2}}} \int_{\tau_p}^{\tau_{p+1}} \left(s - \tau_p - \frac{\Delta}{2} \right) df_s.$$

Нетрудно видеть, что случайные величины ζ_0, ζ_1 являются независимыми стандартными гауссовскими случайными величинами.

Соотношения (10.22), (10.26)–(10.34) определяют явный слабый численный метод порядка точности 4.0 решения векторного стохастического дифференциального уравнения Ито со скалярным неаддитивным шумом.

Численный эксперимент 10.4 (рис. 10.4, 10.5). *Повторить численный эксперимент 10.1 для явного слабого численного метода порядка точности 4.0 вида (10.22) при $\Delta = 2^{-j}$, $j = 0, 1, \dots, 6$. При этом не моделировать те повторные стохастические интегралы Ито, коэффициенты перед которыми оказываются равными нулю после применения численного метода (10.22) к уравнению (10.6) и приведения подобных слагаемых. Повторить вычисления при $b = 0.01$.*

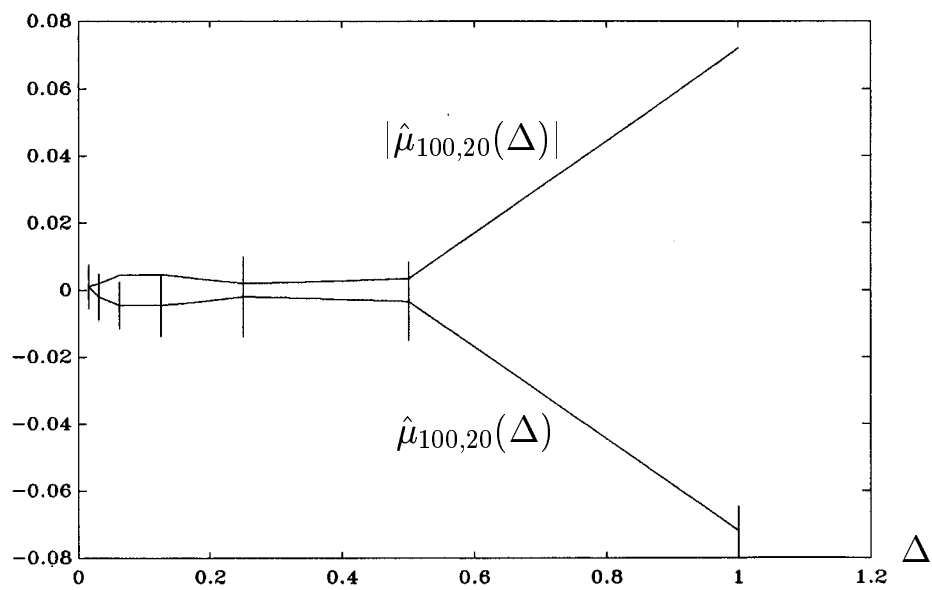


Рис. 10.4. Результат численного эксперимента 10.4 при $b = 0.05$.

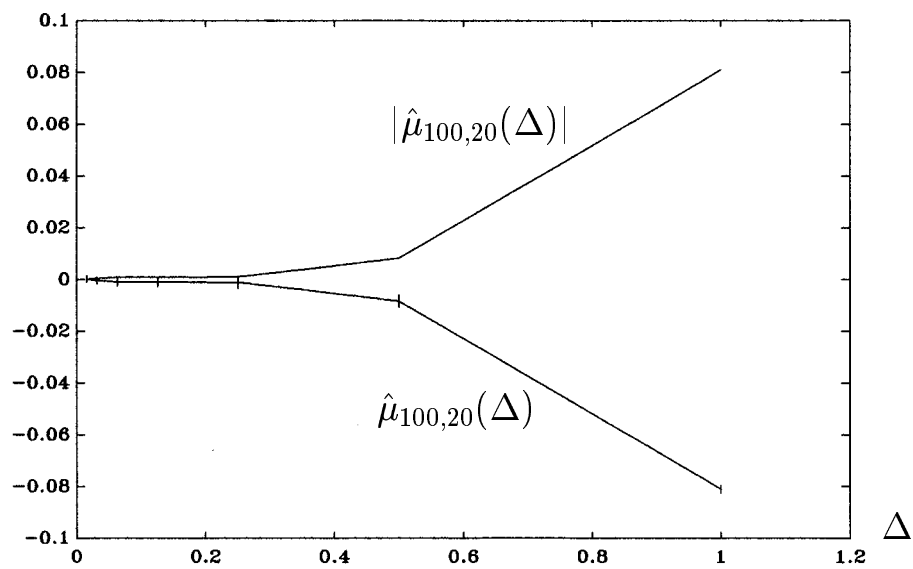


Рис. 10.5. Результат численного эксперимента 10.4 при $b = 0.01$.

10.3 Теорема о сходимости слабых численных методов

В настоящем разделе приведем формулировку теоремы о сходимости слабых численных методов с порядком слабой сходимости 1.0, 2.0, 3.0, ..., которая доказана в [139].

Рассмотрим разложение Тейлора–Ито в форме Вагнера и Платена для функции $R(\mathbf{x}, t) \equiv \mathbf{x}$ при $s = \tau_{p+1}$, $t = \tau_p$, которое получено из (4.12) путем отбрасывания остаточного члена $D_{r+1, \tau_{p+1}, \tau_p}$:

$$\mathbf{y}_{p+1} = \mathbf{y}_p + \sum_{k=1}^r \sum_{(\lambda_k, \dots, \lambda_1)}^{(p_k)} Q_{\lambda_k} \dots Q_{\lambda_1} \{\mathbf{y}_p\}^{p_k} J_{(\lambda_k \dots \lambda_1) \tau_{p+1}, \tau_p}^{(p_k)} \quad (10.35)$$

Здесь сохранен смысл обозначений, введенных в (4.12); $\mathbf{y}_{\tau_p} \stackrel{\text{def}}{=} \mathbf{y}_p$, а $\{\tau_p\}_{p=0}^N$ — разбиение промежутка $[0, T]$, удовлетворяющее условию:

$$0 = \tau_0 < \dots < \tau_N = T, \quad \max_{0 \leq j \leq N-1} |\tau_{j+1} - \tau_j| = \Delta \text{ с в.1,}$$

где τ_{j+1} — $\mathcal{F}_{\tau_j}$ -измеримые случайные величины; $j = 0, 1, \dots, N-1$.

Пусть $\mathbf{u}_p$, $p = 0, 1, \dots, N$, — дискретная аппроксимация решения $\mathbf{x}_t$, $t \in [0, T]$, стохастического дифференциального уравнения Ито (7.18) в автономном случае. Одним из возможных вариантов такой дискретной аппроксимации может являться, например, численный метод, получаемый из (10.35) путем замены повторных стохастических интегралов Ито, входящих в (10.35), на их слабые аппроксимации:

$$\mathbf{u}_{p+1} = \mathbf{u}_p + \sum_{k=1}^r \sum_{(\lambda_k, \dots, \lambda_1)}^{(p_k)} Q_{\lambda_k} \dots Q_{\lambda_1} \{\mathbf{u}_p\}^{p_k} \hat{J}_{(\lambda_k \dots \lambda_1) \tau_{p+1}, \tau_p}^{(p_k)},$$

где

$$^{(p_k)} \hat{J}_{(\lambda_k \dots \lambda_1) \tau_{p+1}, \tau_p} = \left\| \hat{J}_{(\lambda_k \dots \lambda_1) \tau_{p+1}, \tau_p}^{(i_k \dots i_1)} \right\|_{i_1=\lambda_1, \dots, i_l=\lambda_l}^{m\lambda_1 \dots m\lambda_l};$$

$\hat{J}_{(\lambda_k \dots \lambda_1) \tau_{p+1}, \tau_p}^{(i_k \dots i_1)}$ — слабая аппроксимация повторного стохастического интеграла Ито $J_{(\lambda_k \dots \lambda_1) \tau_{p+1}, \tau_p}^{(i_k \dots i_1)}$.

Теорема 10.3 [86, 139]. Пусть выполнены следующие условия:

1. $\mathbf{u}_p$, $p = 0, 1, \dots, N$, — дискретная аппроксимация решения $\mathbf{x}_t$ стохастического дифференциального уравнения Ито (7.18) в автономном случае, причем $M\{|\mathbf{x}_0|^k\} < \infty$, $k = 1, 2, \dots$, и $\mathbf{u}_0$ сходится слабо с порядком r при $\Delta \rightarrow 0$ к $\mathbf{x}_0$ для фиксированного $r = 1.0, 2.0, 3.0, \dots$

2. Для всех $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$ существует постоянная $K < \infty$ такая, что

$$|\mathbf{a}(\mathbf{x})| + \sum_{i=1}^m |\Sigma_i(\mathbf{x})| \leq K(1 + |\mathbf{x}|),$$

$$|\mathbf{a}(\mathbf{x}) - \mathbf{a}(\mathbf{y})| + \sum_{i=1}^m |\Sigma_i(\mathbf{x}) - \Sigma_i(\mathbf{y})| \leq K|\mathbf{x} - \mathbf{y}|,$$

где $\Sigma_i(\mathbf{x})$ — i -й столбец матрицы $\Sigma(\mathbf{x})$.

3. Для всех $k = 1, \dots, n$ и $j = 1, \dots, m$

$$\mathbf{a}^{(k)}(\mathbf{x}), \Sigma^{(kj)}(\mathbf{x}) \in C^{2(r+1)}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^1).$$

4. Для всех $k \in N$ существуют постоянные $K_1 < \infty$ и $d \in N$, которые не зависят от Δ и такие, что для всех $q \in \{1, \dots, k\}$ выполнены условия:

a. $\mathbb{M} \left\{ \max_{0 \leq j \leq N} |\mathbf{u}_j|^{2q} | \mathcal{F}_0 \right\} \leq K_1(1 + |\mathbf{u}_0|^{2d}).$

b. Для всех $j = 0, 1, \dots, N-1$

$$\mathbb{M} \left\{ |\mathbf{u}_{j+1} - \mathbf{u}_j|^{2q} | \mathcal{F}_{\tau_j} \right\} \leq K_1(1 + \max_{0 \leq i \leq j} |\mathbf{u}_i|^{2d})(\tau_{j+1} - \tau_j)^q.$$

c. Для всех $j = 0, 1, \dots, N-1$ и $i_1, \dots, i_l = 1, \dots, n$; $l = 1, 2, \dots, 2r+1$

$$\begin{aligned} & \left| \mathbb{M} \left\{ \prod_{h=1}^l \left(\mathbf{u}_{j+1}^{(i_h)} - \mathbf{u}_j^{(i_h)} \right) - \right. \right. \\ & \left. \left. - \prod_{h=1}^l \left(\sum_{k=1}^r \sum_{(\lambda_k, \dots, \lambda_1)}^{(p_k)} Q_{\lambda_k} \dots Q_{\lambda_1} \{ \mathbf{u}_j^{(i_h)} \}^{p_k} J_{(\lambda_k \dots \lambda_1) \tau_{j+1}, \tau_j} \right) | \mathcal{F}_{\tau_j} \right\} \right| \leq \\ & \leq K_1 \left(1 + \max_{0 \leq i \leq N} |\mathbf{u}_i|^{2d} \right) \Delta^r (\tau_{j+1} - \tau_j). \end{aligned}$$

Тогда дискретная аппроксимация $\mathbf{u}_j, j = 0, 1, \dots, N$, сходится слабо с порядком r при $\Delta \downarrow 0$ к процессу $\mathbf{x}_t$ в момент времени T .

Доказательство теоремы 10.3 можно найти в [86, 139].

В [86] показано, что в случае неслучайного разбиения $\{\tau_i\}_{i=0}^N$ промежутка $[0, T]$ в условиях теоремы 10.3 для любой функции $g \in C^{2(r+1)}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^1)$ существует такая постоянная $C_g < \infty$, которая не зависит от Δ , что

$$\max_{0 \leq i \leq N} |\mathbb{M}\{g(\mathbf{x}_{\tau_i})\} - \mathbb{M}\{g(\mathbf{u}_i)\}| \leq C_g \Delta^r.$$

В заключение приведем аналог теоремы 10.3 для унифицированного разложения Тейлора–Ито.

Рассмотрим унифицированное разложение Тейлора–Ито для функции $R(\mathbf{x}, t) \equiv \mathbf{x}$ при $s = \tau_{p+1}$, $t = \tau_p$, которое получено из (4.55) путем отбрасывания остаточного члена $D_{r+1, \tau_{p+1}, \tau_p}$:

$$\mathbf{y}_{p+1} = \mathbf{y}_p + \sum_{q=1}^r \sum_{(k, j, l_1, \dots, l_k) \in \mathcal{A}_q} \frac{(\tau_{p+1} - \tau_p)^j}{j!} {}^{(k)}G_{l_1} \dots G_{l_k} L^j \{\mathbf{y}_p\} \cdot {}^k {}^{(k)}I_{l_1 \dots l_k \tau_{p+1}, \tau_p}. \quad (10.36)$$

Здесь сохранен смысл обозначений, введенных в (4.55); $\mathbf{y}_{\tau_p} \stackrel{\text{def}}{=} \mathbf{y}_p$, а $\{\tau_p\}_{p=0}^N$ — разбиение промежутка $[0, T]$ такое же, как в (10.35), но неслучайное.

Пусть, как и раньше, $\mathbf{u}_p$, $p = 0, 1, \dots, N$, — дискретная аппроксимация процесса $\mathbf{x}_t$, $t \in [0, T]$. Одним из возможных вариантов такой дискретной аппроксимации, основанной на унифицированном разложении Тейлора–Ито, может являться, например, численный метод, получаемый из (10.36) путем замены повторных стохастических интегралов Ито, входящих в (10.36), их слабыми аппроксимациями:

$$\mathbf{u}_{p+1} = \mathbf{u}_p + \sum_{q=1}^r \sum_{(k, j, l_1, \dots, l_k) \in \mathcal{A}_q} \frac{(\tau_{p+1} - \tau_p)^j}{j!} {}^{(k)}G_{l_1} \dots G_{l_k} L^j \{\mathbf{u}_p\} \cdot {}^k {}^{(k)}\hat{I}_{l_1 \dots l_k \tau_{p+1}, \tau_p},$$

где

$$\hat{I}_{l_1 \dots l_k \tau_{p+1}, \tau_p} = \left\| \hat{I}_{l_1 \dots l_k \tau_{p+1}, \tau_p}^{(i_1 \dots i_k)} \right\|_{i_1, \dots, i_k=1}^m,$$

а $\hat{I}_{l_1 \dots l_k \tau_{p+1}, \tau_p}^{(i_1 \dots i_k)}$ — слабая аппроксимация повторного стохастического интеграла Ито $I_{l_1 \dots l_k \tau_{p+1}, \tau_p}^{(i_1 \dots i_k)}$.

Теорема 10.4. Пусть $\mathbf{u}_p$, $p = 0, 1, \dots, N$, — дискретная аппроксимация решения $\mathbf{x}_t$ стохастического дифференциального уравнения Ито (7.18) в автономном случае. Пусть также выполнены все условия теоремы 10.3, кроме условия 4с, которое следует заменить следующим условием:

$$\begin{aligned} & \left| \mathbb{M} \left\{ \prod_{h=1}^l \left(\mathbf{u}_{p+1}^{(i_h)} - \mathbf{u}_p^{(i_h)} \right) - \right. \right. \\ & \left. \left. - \prod_{h=1}^l \left(\sum_{q=1}^r \sum_{(k, j, l_1, \dots, l_k) \in \mathcal{A}_q} \frac{(\Delta_p)^j}{j!} {}^{(k)}G_{l_1} \dots G_{l_k} L^j \{\mathbf{u}_p^{(i_h)}\} \cdot {}^k {}^{(k)}I_{l_1 \dots l_k \tau_{p+1}, \tau_p} \right) \middle| \mathcal{F}_{\tau_p} \right\} \right| \leq \\ & \leq K_1 \left(1 + \max_{0 \leq i \leq N} |\mathbf{u}_i|^{2d} \right) \Delta^r (\tau_{j+1} - \tau_j) \end{aligned} \quad (10.37)$$

для всех $p = 0, 1, \dots, N - 1$ и $i_1, \dots, i_l \in \{1, \dots, n\}$, где d, K_1 входят в условия 4a, 4b теоремы 10.3; $\Delta_p = \tau_{p+1} - \tau_p$. Тогда дискретная аппроксимация $\mathbf{u}_p, p = 0, 1, \dots, N$, сходится слабо с порядком r при $\Delta \downarrow 0$ к процессу $\mathbf{x}_t$ в момент времени T .

Отметим, что переход к неавтономному случаю в теоремах 10.3, 10.4 осуществляется так же, как и раньше, т. е. путем ввода t как дополнительной компоненты процесса Ито.

10.4 Экстраполяционные численные методы

В детерминированном численном анализе известен целый класс численных методов, называемых экстраполяционными, которые обладают достаточно высокими порядками скорости сходимости и основываются на численных методах, имеющих существенно более низкие порядки скорости сходимости. Этот подход допускает обобщение на случай стохастических уравнений при вычислении функционалов вида $M\{g(\mathbf{x}_T)\}$, где $\mathbf{x}_t, t \in [0, T]$, — процесс Ито, являющийся решением стохастического дифференциального уравнения Ито (7.18); $g(\mathbf{x}) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^1$ — достаточно гладкая функция.

Наиболее простой экстраполяционный численный метод, имеющий порядок слабой сходимости 2.0, получен в [143] и имеет вид

$$F_{g,2}^\Delta(T) = 2M\{g(\mathbf{y}_T^{\Delta,1.0})\} - M\{g(\mathbf{y}_T^{2\Delta,1.0})\}, \quad (10.38)$$

где $\mathbf{y}_T^{\Delta,1.0}, \mathbf{y}_T^{2\Delta,1.0}$ — значения слабых эйлеровских аппроксимаций процесса $\mathbf{x}_t, t \in [0, T]$, в момент времени T , которые соответствуют постоянным шагам дискретизации Δ и 2Δ соответственно. В [143] также доказана слабая сходимость порядка 2.0 численной схемы (10.38).

Численный эксперимент 10.5 (рис. 10.6). Повторить численный эксперимент 10.1 для экстраполяционного слабого численного метода порядка точности 2.0 вида (10.38) при $a = 1.5, b = 0.01, \Delta = 2^{-j}, j = 3, 4, 5, 6$.

В [86] предложен подход, позволяющий конструировать экстраполяционные численные методы, имеющие порядок слабой сходимости 2β ($\beta = 1.0, 2.0, \dots$) и основывающиеся на слабых аппроксимациях порядка β ($\beta = 1.0, 2.0, \dots$), вычисленных при различных шагах дискретизации. Согласно данному подходу [86] слабая аппроксимация порядка 2β , вычисленная в момент времени T , определяется равенством

$$F_{g,2\beta}^\Delta(T) = \sum_{l=1}^{\beta+1} a_l M\{g(\mathbf{y}_T^{\Delta_l, \beta})\}, \quad (10.39)$$

где

$$\begin{cases} \sum_{l=1}^{\beta+1} a_l = 1, \\ \sum_{l=1}^{\beta+1} a_l (d_l)^\gamma = 0, \end{cases} \quad \gamma = \beta, \beta + 1, \dots, 2\beta - 1,$$

$$\Delta_l = d_l \Delta; \quad 0 < d_1 < \dots < d_{\beta+1} < \infty; \quad l = 1, 2, \dots, \beta + 1.$$

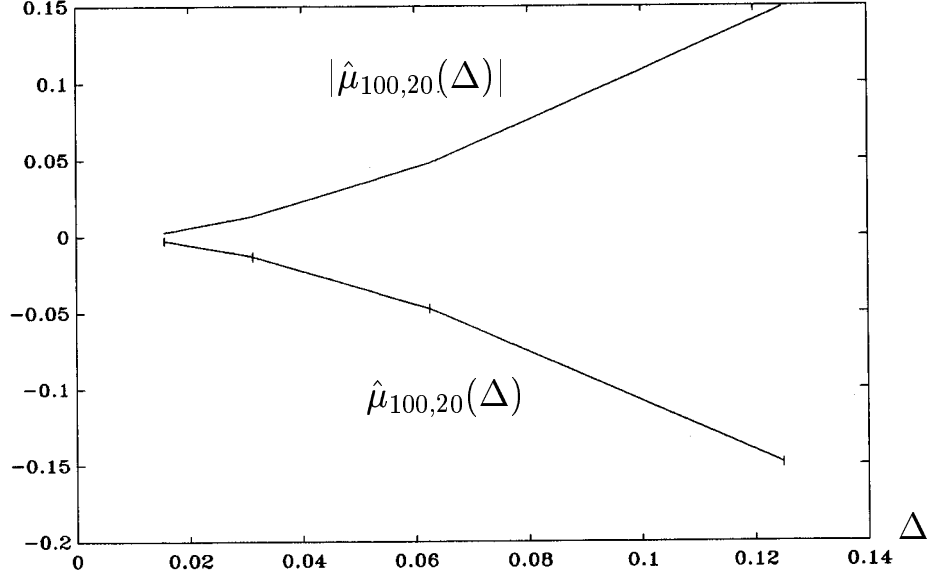


Рис. 10.6. Результат численного эксперимента 10.5.

В (10.39) $\mathbf{y}_T^{\Delta_l, \beta}$, $l = 1, 2, \dots, \beta + 1$, — значения слабых аппроксимаций порядка β процесса $\mathbf{x}_t$, $t \in [0, T]$, в момент времени T , которые соответствуют постоянным шагам дискретизации Δ_l , $l = 1, 2, \dots, \beta + 1$.

В [86, 148] доказана слабая сходимость порядка 2β численного метода (10.39) и приведен ряд экстраполяционных численных методов, основанных на формуле (10.39). Рассмотрим некоторые из них [86, 148]:

$$F_{g,4}^\Delta(T) = \frac{1}{21} \left[32\mathbb{M}\{g(\mathbf{y}_T^{\Delta,2,0})\} - 12\mathbb{M}\{g(\mathbf{y}_T^{2\Delta,2,0})\} + \mathbb{M}\{g(\mathbf{y}_T^{4\Delta,2,0})\} \right], \quad (10.40)$$

$$F_{g,4}^\Delta(T) = \frac{1}{11} \left[18\mathbb{M}\{g(\mathbf{y}_T^{\Delta,2,0})\} - 9\mathbb{M}\{g(\mathbf{y}_T^{2\Delta,2,0})\} + 2\mathbb{M}\{g(\mathbf{y}_T^{3\Delta,2,0})\} \right],$$

$$F_{g,6}^{\Delta}(T) = \frac{1}{2905} \left[4032M\{g(\mathbf{y}_T^{\Delta,3.0})\} - 1512M\{g(\mathbf{y}_T^{2\Delta,3.0})\} + \right. \\ \left. + 448M\{g(\mathbf{y}_T^{3\Delta,3.0})\} - 63M\{g(\mathbf{y}_T^{4\Delta,3.0})\} \right].$$

Здесь и далее $\mathbf{y}_T^{\Delta,\beta}$ — значение слабой аппроксимации порядка β в момент времени T , соответствующей постоянному шагу дискретизации Δ .

Численный эксперимент 10.6 (рис. 10.7). Повторить численный эксперимент 10.1 для экстраполяционного слабого численного метода порядка точности 4.0 вида (10.40) при $a = 1.5$, $b = 0.01$, $\Delta = 2^{-j}$, $j = 2, 3, 4, 5$. В качестве слабого численного метода порядка точности 2.0, используемого в формуле (10.40), взять численный метод (10.15).

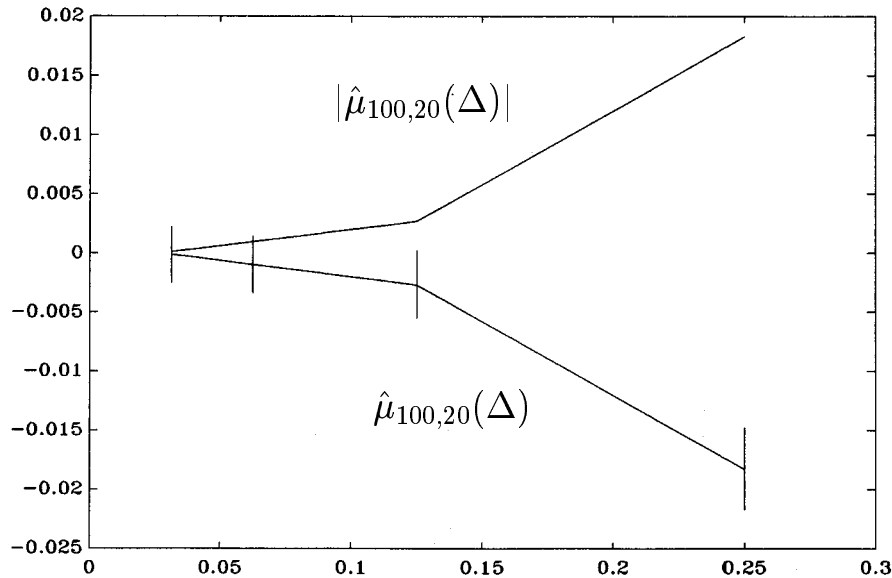


Рис. 10.7. Результат численного эксперимента 10.6.

Предложим следующие экстраполяционные численные методы со слабым порядком сходимости 8.0, которые основаны на слабых аппроксимациях порядка точности 4.0 вида (10.22) или (10.21) и вытекают из формулы (10.39):

$$F_{g,8}^{\Delta}(T) = \frac{1080000}{874853} \left[M\{g(\mathbf{y}_T^{\Delta,4.0})\} - \frac{1}{4}M\{g(\mathbf{y}_T^{2\Delta,4.0})\} + \frac{2}{27}M\{g(\mathbf{y}_T^{3\Delta,4.0})\} - \right.$$

$$-\frac{1}{64}\mathbf{M}\{g(\mathbf{y}_T^{4\Delta,4.0})\} + \frac{1}{625}\mathbf{M}\{g(\mathbf{y}_T^{5\Delta,4.0})\}\Big],$$

$$F_{g,8}^\Delta(T) = \frac{1}{248031}\Big[\frac{4194304}{15}\mathbf{M}\{g(\mathbf{y}_T^{\Delta,4.0})\} - 32768\mathbf{M}\{g(\mathbf{y}_T^{2\Delta,4.0})\} + \\ + \frac{3584}{3}\mathbf{M}\{g(\mathbf{y}_T^{4\Delta,4.0})\} - 16\mathbf{M}\{g(\mathbf{y}_T^{8\Delta,4.0})\} + \frac{1}{15}\mathbf{M}\{g(\mathbf{y}_T^{16\Delta,4.0})\}\Big].$$

В [87] предложен другой подход к построению экстраполяционных численных методов, который позволяет получать слабые численные методы порядка точности β ($\beta = 2.0, 3.0, \dots$) на основе слабых аппроксимаций фиксированного порядка точности $\gamma \in \{1.0, 2.0, \dots, \beta-1\}$, соответствующих различным шагам дискретизации. Согласно данному подходу [87]

$$F_{g,\alpha,\beta}^\Delta(T) = \frac{1}{2^{\beta-1}-1} (2^{\beta-1}F_{g,\alpha,\beta-1}^\Delta(T) - F_{g,\alpha,\beta-1}^{2\Delta}(T)), \quad (10.41)$$

где $\alpha \in \{1.0, 2.0, \dots, \beta-1\}$, а величину $F_{g,\alpha,\alpha}^\Delta(T)$ следует понимать как $\mathbf{M}\{g(\mathbf{y}_T^{\Delta,\alpha})\}$.

На основе формулы (10.41) в [87] построен ряд экстраполяционных численных методов. Приведем некоторые из них [87]:

$$F_{g,1,3}^\Delta(T) = \frac{1}{3} \left[8\mathbf{M}\{g(\mathbf{y}_T^{\Delta,1.0})\} - 6\mathbf{M}\{g(\mathbf{y}_T^{2\Delta,1.0})\} + \mathbf{M}\{g(\mathbf{y}_T^{4\Delta,1.0})\} \right], \quad (10.42)$$

$$F_{g,1,4}^\Delta(T) = \frac{1}{21} \left[64\mathbf{M}\{g(\mathbf{y}_T^{\Delta,1.0})\} - 56\mathbf{M}\{g(\mathbf{y}_T^{2\Delta,1.0})\} + \right. \\ \left. + 14\mathbf{M}\{g(\mathbf{y}_T^{4\Delta,1.0})\} - \mathbf{M}\{g(\mathbf{y}_T^{8\Delta,1.0})\} \right], \quad (10.43)$$

$$F_{g,4,5}^\Delta(T) = \frac{1}{15} \left[16\mathbf{M}\{g(\mathbf{y}_T^{\Delta,4.0})\} - \mathbf{M}\{g(\mathbf{y}_T^{2\Delta,4.0})\} \right],$$

$$F_{g,1,5}^\Delta(T) = \frac{1}{315} \left[1024\mathbf{M}\{g(\mathbf{y}_T^{\Delta,1.0})\} - 960\mathbf{M}\{g(\mathbf{y}_T^{2\Delta,1.0})\} + 280\mathbf{M}\{g(\mathbf{y}_T^{4\Delta,1.0})\} - \right. \\ \left. - 30\mathbf{M}\{g(\mathbf{y}_T^{8\Delta,1.0})\} + \mathbf{M}\{g(\mathbf{y}_T^{16\Delta,1.0})\} \right]. \quad (10.44)$$

Отметим, что, с одной стороны, соотношение (10.41) позволяет строить экстраполяционные формулы, в правых частях которых находятся слабые аппроксимации, вычисленные в момент времени T и

соответствующие шагам дискретизации $\Delta, 2\Delta, 4\Delta, 8\Delta, \dots$, т. е. последовательность шагов дискретизации фиксируется достаточно жестко (формула (10.39) предоставляет больше свободы в выборе последовательности шагов дискретизации: $\Delta_l = d_l \Delta$; $0 < d_1 < \dots < d_{\beta+1} < \infty$; $l = 1, 2, \dots, \beta + 1$). С другой стороны, формула (10.41) позволяет строить экстраполяционные численные методы достаточно высокого порядка точности (3.0, 4.0, 5.0, $\dots$), используя только слабые аппроксимации существенно более низкого порядка, например, порядка точности 1.0 (см. (10.42)–(10.44)).

Следует отметить, что при реализации экстраполяционных численных методов приходится решать стохастическое дифференциальное уравнение Ито несколько раз независимо с различными шагами интегрирования.

10.5 Явные слабые конечно-разностные численные методы

Как и в случае сильных численных методов, интерес представляет построение конечно-разностных слабых численных методов. В [70, 139, 144] представлены различные явные слабые конечно-разностные численные методы порядка точности 2.0. Среди данных численных методов отметим метод, полученный в [139] для автономного случая:

$$\begin{aligned} \mathbf{y}_{p+1} = & \mathbf{y}_p + \frac{1}{2} (\mathbf{a} + \mathbf{a}(\bar{Y}_p)) \Delta + \\ & + \frac{1}{4} \sum_{j=1}^m \left\{ (\Sigma_j(R_p^{(j)+}) + \Sigma_j(R_p^{(j)-}) + 2\Sigma_j) \Delta \tilde{\mathbf{f}}_p^{(j)} + \right. \\ & + \sum_{\substack{r=1 \\ r \neq j}}^m (\Sigma_j(U_p^{(r)+}) + \Sigma_j(U_p^{(r)-}) - 2\Sigma_j) \Delta \tilde{\mathbf{f}}_p^{(j)} \Big\} + \\ & + \frac{1}{4\sqrt{\Delta}} \sum_{j=1}^m \left\{ (\Sigma_j(R_p^{(j)+}) - \Sigma_j(R_p^{(j)-})) ((\Delta \tilde{\mathbf{f}}_p^{(j)})^2 - \Delta) + \right. \\ & + \sum_{\substack{r=1 \\ r \neq j}}^m (\Sigma_j(U_p^{(r)+}) - \Sigma_j(U_p^{(r)-})) (\Delta \tilde{\mathbf{f}}_p^{(j)} \Delta \tilde{\mathbf{f}}_p^{(r)} + V_p^{(rj)}) \Big\}, \end{aligned} \quad (10.45)$$

где $\mathbf{y}_{\tau_p} \stackrel{\text{def}}{=} \mathbf{y}_p$; $\Delta \tilde{\mathbf{f}}_{\tau_p}^{(j)} \stackrel{\text{def}}{=} \Delta \tilde{\mathbf{f}}_p^{(j)}$; $\tau_p = p\Delta$, $p = 0, 1, \dots, N$; $T = N\Delta$;

$$\bar{Y}_p = \mathbf{y}_p + \mathbf{a}\Delta + \sum_{j=1}^m \Sigma_j \Delta \tilde{\mathbf{f}}_p^{(j)}, \quad R_p^{(j)\pm} = \mathbf{y}_p + \mathbf{a}\Delta \pm \sqrt{\Delta} \Sigma_j,$$

$$U_p^{(j)\pm} = \mathbf{y}_p \pm \sqrt{\Delta} \Sigma_j;$$

Σ_j — j -й столбец матрицы Σ ; случайные величины $\Delta \tilde{\mathbf{f}}_p^{(j)}$, $V_p^{(rj)}$ такие же, как в (10.8). В (10.45) и далее, как обычно, аргумент $\mathbf{y}_p$ опускается, т. е. вместо $\mathbf{a}(\mathbf{y}_p)$, $\Sigma_j(\mathbf{y}_p)$ и т. д. пишем $\mathbf{a}$, Σ_j и т. д.

Рассмотрим слабый конечно-разностный численный метод порядка точности 2.0 для случая скалярного шума ($m = 1$) [139]:

$$\begin{aligned} \mathbf{y}_{p+1} = & \mathbf{y}_p + \frac{1}{2} (\mathbf{a} + \mathbf{a}(\bar{Y}_p)) \Delta + \\ & + \frac{1}{4} (\Sigma(Y_p^+) + \Sigma(Y_p^-) + 2\Sigma) \Delta \tilde{\mathbf{f}}_p + \\ & + \frac{1}{4\sqrt{\Delta}} (\Sigma(Y_p^+) - \Sigma(Y_p^-)) ((\Delta \tilde{\mathbf{f}}_p)^2 - \Delta), \end{aligned} \quad (10.46)$$

где $\Sigma : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^1$;

$$\bar{Y}_p = \mathbf{y}_p + \mathbf{a}\Delta + \Sigma \Delta \tilde{\mathbf{f}}_p; \quad Y_p^\pm = \mathbf{y}_p + \mathbf{a}\Delta \pm \sqrt{\Delta} \Sigma;$$

остальные обозначения такие же, как в (10.45).

Численный эксперимент 10.7 (рис. 10.8). *Повторить численный эксперимент 10.1 для явного слабого конечно-разностного численного метода порядка точности 2.0 вида (10.46) при $\Delta = 2^{-j}$, $j = 3, 4, 5, 6$.*

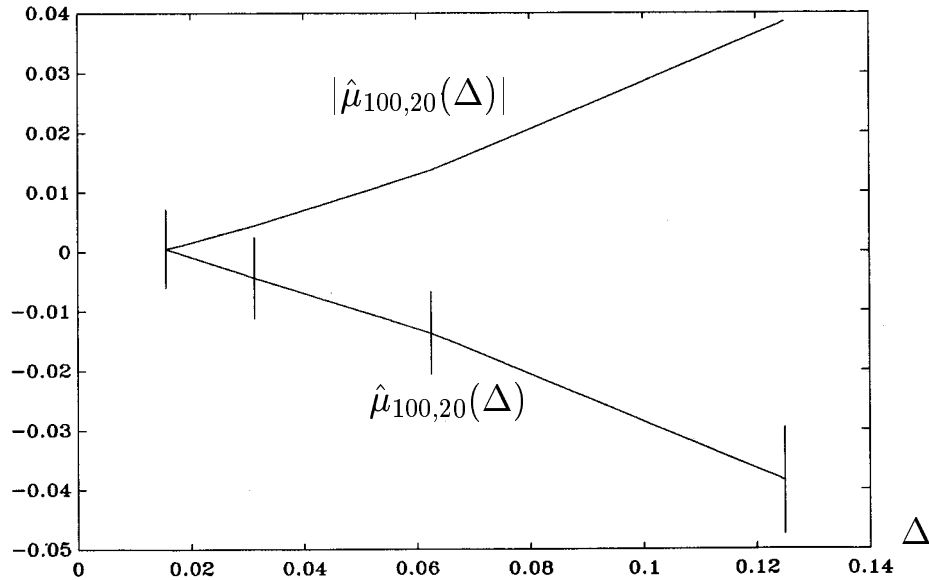


Рис. 10.8. Результат численного эксперимента 10.7.

Предложим следующий явный слабый конечно-разностный численный метод порядка точности 2.0 для автономного случая:

$$\begin{aligned}
\mathbf{y}_{p+1} = & \mathbf{y}_p + \frac{1}{2} (\mathbf{a} + \mathbf{a}(Z_p)) \Delta + \\
& + \frac{1}{4} \Delta \sum_{i=1}^m (\mathbf{a}(Y_p^{(i)+}) + \mathbf{a}(Y_p^{(i)-}) - 2\mathbf{a}) + \\
& + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^m \left\{ \Sigma_i(Z_p) + \Sigma_i + \frac{1}{2} \sum_{r=1}^m (\Sigma_i(Y_p^{(r)+}) + \Sigma_i(Y_p^{(r)-}) - 2\Sigma_i) \right\} \Delta \tilde{\mathbf{f}}_p^{(i)} + \\
& + \frac{\sqrt{\Delta}}{4} \sum_{i=1}^m (\mathbf{a}(Y_p^{(i)+}) - \mathbf{a}(Y_p^{(i)-})) \Delta \tilde{\mathbf{f}}_p^{(i)} + \\
& + \frac{1}{4\sqrt{\Delta}} \sum_{i,j=1}^m (\Sigma_i(Y_p^{(j)+}) - \Sigma_i(Y_p^{(j)-})) (\Delta \tilde{\mathbf{f}}_p^{(i)} \Delta \tilde{\mathbf{f}}_p^{(j)} + V_p^{(ji)}), \quad (10.47)
\end{aligned}$$

где

$$Y_p^{(j)\pm} = \mathbf{y}_p \pm \sqrt{\Delta} \Sigma_j; \quad Z_p = \mathbf{y}_p + \mathbf{a} \Delta;$$

остальные обозначения такие же, как в (10.45).

Вариант численной схемы (10.47) в случае скалярного шума ($m = 1$) имеет вид

$$\begin{aligned}
\mathbf{y}_{p+1} = & \mathbf{y}_p + \frac{1}{2} (\mathbf{a} + \mathbf{a}(Z_p)) \Delta + \\
& + \frac{1}{4} \Delta \tilde{\mathbf{f}}_p \sqrt{\Delta} (\mathbf{a}(Y_p^+) - \mathbf{a}(Y_p^-)) + \\
& + \frac{\Delta \tilde{\mathbf{f}}_p}{4} (\Sigma(Y_p^+) + \Sigma(Y_p^-) + 2\Sigma(Z_p)) + \\
& + \frac{1}{4} \Delta (\mathbf{a}(Y_p^+) + \mathbf{a}(Y_p^-) - 2\mathbf{a}) + \\
& + \frac{1}{4\sqrt{\Delta}} (\Sigma(Y_p^+) - \Sigma(Y_p^-)) ((\Delta \tilde{\mathbf{f}}_p)^2 - \Delta), \quad (10.48)
\end{aligned}$$

где $\Sigma : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^1$;

$$Y_p^\pm = \mathbf{y}_p \pm \sqrt{\Delta} \Sigma; \quad Z_p = \mathbf{y}_p + \mathbf{a} \Delta;$$

остальные обозначения такие же, как в (10.47).

Численный эксперимент 10.8 (рис. 10.9). *Повторить численный эксперимент 10.1 для явного слабого конечно-разностного численного метода порядка точности 2.0 вида (10.48) при $\Delta = 2^{-j}$, $j = 3, 4, 5, 6$.*

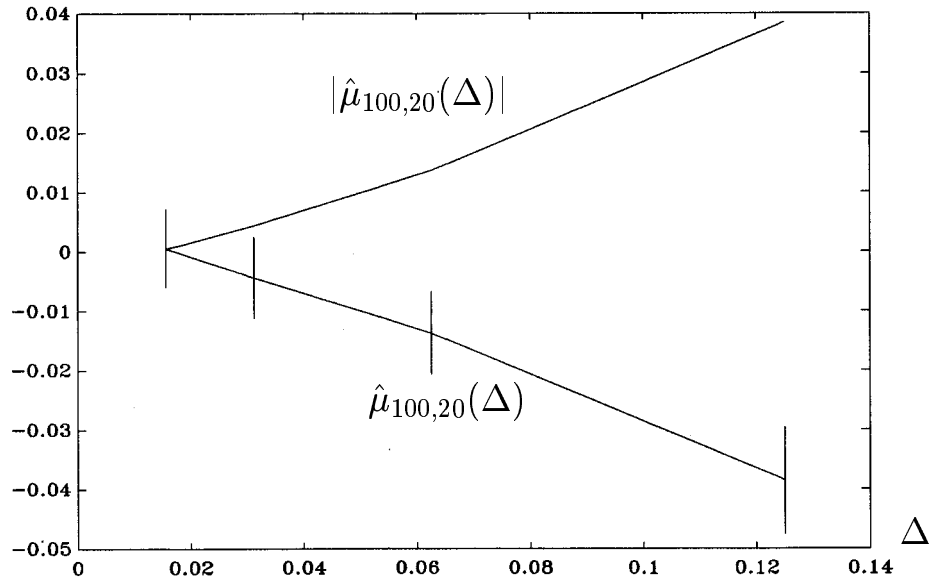


Рис. 10.9. Результат численного эксперимента 10.8.

Сходимость приведенных и рассматриваемых далее численных методов будет обоснована в конце данной главы.

10.6 Неявные слабые численные методы

10.6.1 Неявные методы Эйлера

В предыдущих главах отмечалось, что неявные сильные численные методы обладают лучшей устойчивостью, чем явные сильные численные методы. Аналогичный вывод справедлив и для слабых численных методов [94, 95], что мотивирует необходимость построения неявных слабых численных схем.

Рассмотрим следующее, предложенное в [86], семейство неявных методов Эйлера:

$$\begin{aligned} \mathbf{y}_{p+1} = & \mathbf{y}_p + \{k\bar{\mathbf{a}}_\eta(\mathbf{y}_{p+1}, \tau_{p+1}) + (1-k)\bar{\mathbf{a}}_\eta(\mathbf{y}_p, \tau_p)\} \Delta + \\ & + \{\eta\Sigma(\mathbf{y}_{p+1}, \tau_{p+1}) + (1-\eta)\Sigma(\mathbf{y}_p, \tau_p)\} \Delta \tilde{\mathbf{f}}_p, \end{aligned} \quad (10.49)$$

где $\mathbf{y}_{\tau_p} \stackrel{\text{def}}{=} \mathbf{y}_p$, $p = 0, 1, \dots, N$; $\tau_p = p\Delta$; $N = T/\Delta$; k, η — вещественные параметры; $\Delta \tilde{\mathbf{f}}_p$ — m -мерный случайный столбец с независимыми компонентами $\Delta \tilde{\mathbf{f}}_p^{(i)}$, $i = 1, \dots, m$, которые являются дискретными случайными величинами, для которых $P\{\Delta \tilde{\mathbf{f}}_p^{(i)} = \pm \sqrt{\Delta}\} = \frac{1}{2}$;

$$\bar{\mathbf{a}}_\eta(\mathbf{x}, t) = \mathbf{a}(\mathbf{x}, t) - \eta \sum_{i=1}^m \sum_{l=1}^n \Sigma^{(li)}(\mathbf{x}, t) \frac{\partial \Sigma_i}{\partial \mathbf{x}^{(l)}}(\mathbf{x}, t).$$

Рассмотрим некоторые частные случаи формулы (10.49):

1. Явный метод Эйлера ($k = \eta = 0$) :

$$\mathbf{y}_{p+1} = \mathbf{y}_p + \mathbf{a}(\mathbf{y}_p, \tau_p) \Delta + \Sigma(\mathbf{y}_p, \tau_p) \Delta \tilde{\mathbf{f}}_p. \quad (10.50)$$

2. Полуявный метод Эйлера ($k = 1, \eta = 0$) :

$$\mathbf{y}_{p+1} = \mathbf{y}_p + \mathbf{a}(\mathbf{y}_{p+1}, \tau_{p+1}) \Delta + \Sigma(\mathbf{y}_p, \tau_p) \Delta \tilde{\mathbf{f}}_p.$$

3. Полностью неявный метод Эйлера ($k = \eta = 1$) :

$$\mathbf{y}_{p+1} = \mathbf{y}_p + \bar{\mathbf{a}}_1(\mathbf{y}_{p+1}, \tau_{p+1}) \Delta + \Sigma(\mathbf{y}_{p+1}, \tau_{p+1}) \Delta \tilde{\mathbf{f}}_p.$$

4. Симметричные методы Эйлера ($k = \eta = \frac{1}{2}$ и $k = \frac{1}{2}, \eta = 0$):

$$\begin{aligned} \mathbf{y}_{p+1} = \mathbf{y}_p + \frac{1}{2} \left(\bar{\mathbf{a}}_{\frac{1}{2}}(\mathbf{y}_{p+1}, \tau_{p+1}) + \bar{\mathbf{a}}_{\frac{1}{2}}(\mathbf{y}_p, \tau_p) \right) \Delta + \\ + \frac{1}{2} (\Sigma(\mathbf{y}_{p+1}, \tau_{p+1}) + \Sigma(\mathbf{y}_p, \tau_p)) \Delta \tilde{\mathbf{f}}_p, \end{aligned}$$

$$\mathbf{y}_{p+1} = \mathbf{y}_p + \frac{1}{2} (\mathbf{a}(\mathbf{y}_{p+1}, \tau_{p+1}) + \mathbf{a}(\mathbf{y}_p, \tau_p)) \Delta + \Sigma(\mathbf{y}_p, \tau_p) \Delta \tilde{\mathbf{f}}_p.$$

Численный метод (10.49) называется [94] супернеявным методом Эйлера, если k или η не принадлежат отрезку $[0, 1]$.

Далее будет показано (см. [94, 95]), что неявные слабые методы Эйлера, и особенно супернеявные методы Эйлера, обладают лучшей устойчивостью по сравнению с явным методом Эйлера. Заметим также, что при подходящих условиях [86] численный метод (10.49) имеет порядок слабой сходимости $\gamma = 1.0$. Кроме того, в тех случаях, когда в (10.49) $\eta \neq 0$, т. е. неявность входит не только в систематическое, но и в стохастическое слагаемое, вообще говоря, не следует брать в качестве $\Delta \tilde{\mathbf{f}}_p^{(i)}$, $i = 1, \dots, m$, гауссовские случайные величины [86], так как в этом случае для процесса $\mathbf{y}_p$, $p = 0, 1, \dots$,

определяемого равенством (10.49), перестают существовать моментные характеристики. Это нетрудно проверить на примере тестового линейного стохастического дифференциального уравнения с мультипликативным шумом (см. [86. С. 336–337]).

Численный эксперимент 10.9 (рис. 10.10–10.12). Для стохастического дифференциального уравнения Ито

$$d \begin{pmatrix} \mathbf{x}_t^{(1)} \\ \mathbf{x}_t^{(2)} \end{pmatrix} = a \begin{pmatrix} \mathbf{x}_t^{(2)} - \mathbf{x}_t^{(1)} \\ \mathbf{x}_t^{(1)} - \mathbf{x}_t^{(2)} \end{pmatrix} dt + b \begin{pmatrix} \mathbf{x}_t^{(1)} \\ \mathbf{x}_t^{(2)} \end{pmatrix} df_t,$$

$$\begin{pmatrix} \mathbf{x}_0^{(1)} \\ \mathbf{x}_0^{(2)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad f_t \in \mathbb{R}^1, \quad t \in [0, T],$$

смоделировать 2000 ($M = 20$ групп по $N = 100$ реализаций) независимых реализаций векторной случайной величины $\mathbf{x}_T = \begin{pmatrix} \mathbf{x}_T^{(1)} & \mathbf{x}_T^{(2)} \end{pmatrix}^T$ при $T = 1$, $a = 1.5$, $b = 0.01$, $\Delta = 2^{-3}$, $\eta = 0$, $k = 0$ с помощью метода Эйлера (10.49). Вычислить оценку $\hat{\mu}_{100,20} = \begin{pmatrix} \hat{\mu}_{100,20}^{(1)} & \hat{\mu}_{100,20}^{(2)} \end{pmatrix}^T$ ошибки $\mu = \begin{pmatrix} \mu^{(1)} & \mu^{(2)} \end{pmatrix}^T$, $\mu^{(i)} = M\{\mathbf{y}_T^{(i)}\} - M\{\mathbf{x}_T^{(i)}\}$, $i = 1, 2$, с помощью формулы (10.2), учитывая, что

$$M\{\mathbf{x}_T\} = e^{AT} \mathbf{x}_0 = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}(1 + e^{-2aT}) \\ \frac{1}{2}(1 - e^{-2aT}) \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} -a & a \\ a & -a \end{pmatrix}$$

($\mathbf{y}_T$ определяется численным методом (10.49)). Построить 90%-е доверительные интервалы для $\mu^{(1)}$ и $\mu^{(2)}$. Повторить вычисления при $\Delta = 2^{-j}$, $j = 4, 5, 6$, и изобразить графически зависимости $\hat{\mu}_{100,20}^{(1)}(\Delta)$, $\hat{\mu}_{100,20}^{(2)}(\Delta)$, $|\hat{\mu}_{100,20}(\Delta)|$, а также 90%-е доверительные интервалы для $\mu^{(1)}$ и $\mu^{(2)}$ при указанных значениях Δ . Повторить вычисления при $\eta = 0$, $k = \frac{1}{2}$ и $\eta = 0$, $k = 1$. Для моделирования приращений винеровского процесса использовать независимые случайные величины $\Delta \tilde{f}_p$, $p = 0, 1, \dots, N - 1$; $N = T/\Delta$, для которых $P\{\Delta \tilde{f}_p = \pm \sqrt{\Delta}\} = \frac{1}{2}$.

Численный эксперимент 10.10 (рис. 10.13). Повторить численный эксперимент 10.9 для метода Эйлера (10.49) при $\eta = k = 1$, $a = 5$, $b = 0.01$ (остальные параметры и указания такие же, как в численном эксперименте 10.9).

10.6.2 Методы порядка точности 2.0

Г. Н. Мильштейном в [70] предложено двухпараметрическое семейство неявных слабых численных методов порядка точности 2.0 вида:

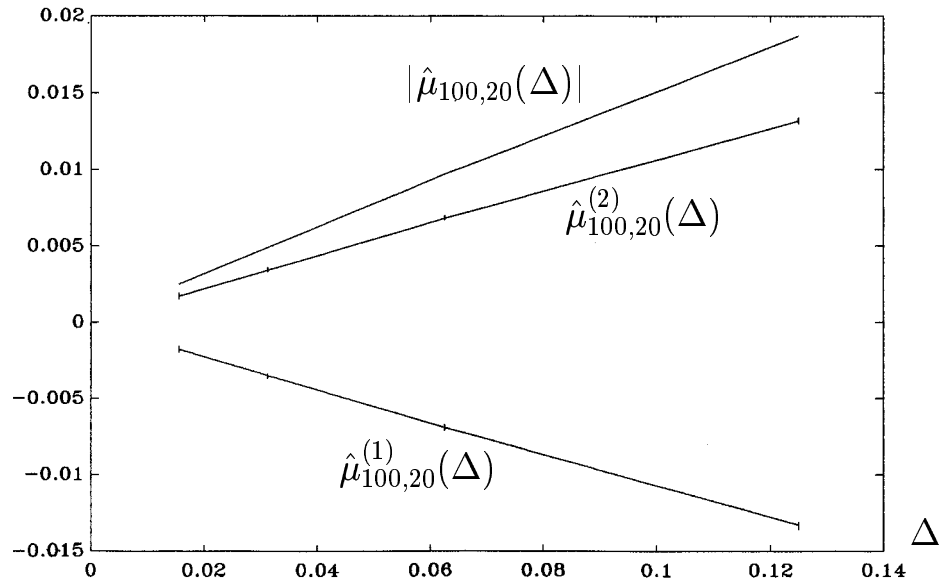


Рис. 10.10. Результат численного эксперимента 10.9 при $\eta = k = 0$.

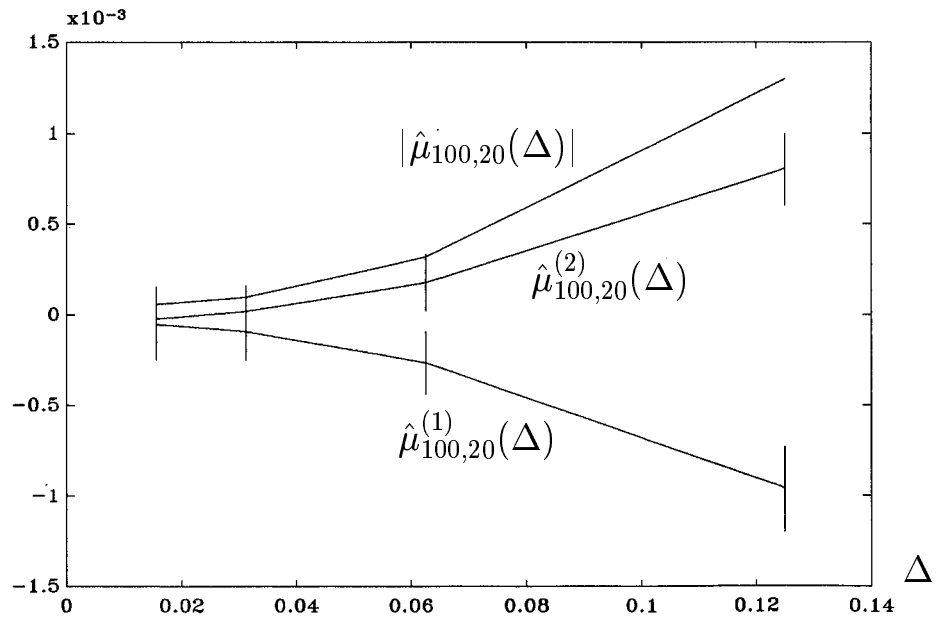


Рис. 10.11. Результат численного эксперимента 10.9 при $\eta = 0$, $k = \frac{1}{2}$.

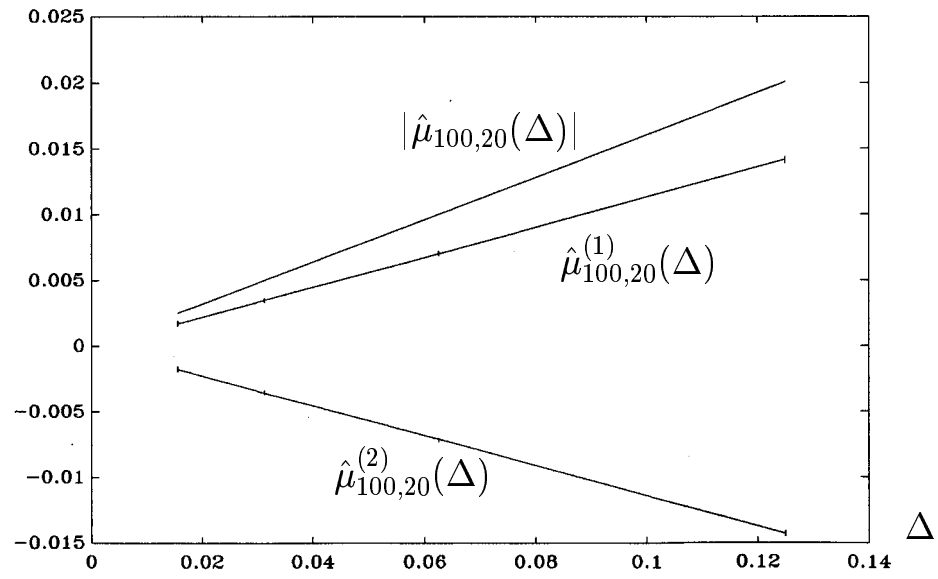


Рис. 10.12. Результат численного эксперимента 10.9 при $\eta = 0$, $k = 1$.

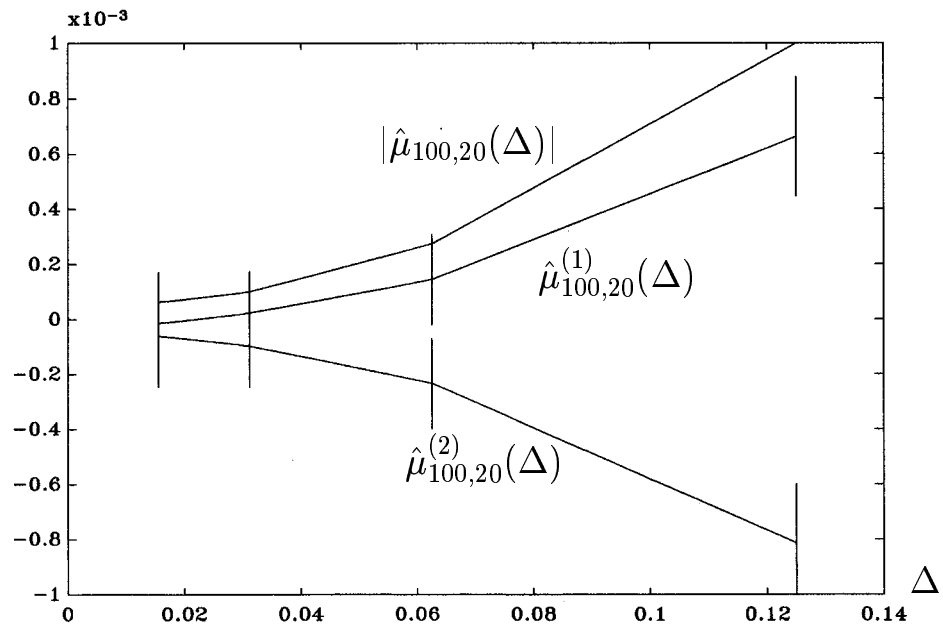


Рис. 10.13. Результат численного эксперимента 10.10.

$$\begin{aligned}
\mathbf{y}_{p+1} = & \mathbf{y}_p + \{\tilde{\alpha} \mathbf{a}(\mathbf{y}_{p+1}, \tau_{p+1}) + (1 - \tilde{\alpha}) \mathbf{a}\} \Delta + \\
& + \frac{1}{2} \sum_{i_1, i_2=1}^m G_0^{(i_1)} \Sigma_{i_2} (\Delta \tilde{\mathbf{f}}_p^{(i_1)} \Delta \tilde{\mathbf{f}}_p^{(i_2)} + V_p^{(i_1 i_2)}) + \\
& + \sum_{i_1=1}^m \left(\Sigma_{i_1} + \frac{1}{2} (L \Sigma_{i_1} + (1 - 2\tilde{\alpha}) G_0^{(i_1)} \mathbf{a}) \Delta \right) \Delta \tilde{\mathbf{f}}_p^{(i_1)} + \\
& + \frac{1}{2} (1 - 2\tilde{\alpha}) \{ \tilde{\beta} L \mathbf{a} + (1 - \tilde{\beta}) L \mathbf{a}(\mathbf{y}_{p+1}, \tau_{p+1}) \} \Delta^2, \tag{10.51}
\end{aligned}$$

где $\tilde{\alpha}, \tilde{\beta} \in [0, 1]$; случайные величины $\Delta \tilde{\mathbf{f}}_p^{(i)}, V_p^{(ij)}$ такие же, как в (10.8).

В [86] показано, что численная схема (10.51) при $\tilde{\alpha} = \frac{1}{2}$ является A -устойчивой на классе тестовых стохастических дифференциальных уравнений Ито с аддитивным шумом.

Численный эксперимент 10.11 (рис. 10.14). *Повторить численный эксперимент 10.9 для неявного слабого численного метода (10.51) при $\tilde{\alpha} = \frac{1}{2}$. Для моделирования повторных стохастических интегралов Ито, входящих в (10.51), использовать независимые случайные величины $\Delta \tilde{f}_p$, $p = 0, 1, \dots, N - 1$; $N = T/\Delta$, для которых $P\{\Delta \tilde{f}_p = \pm \sqrt{\Delta}\} = \frac{1}{2}$.*

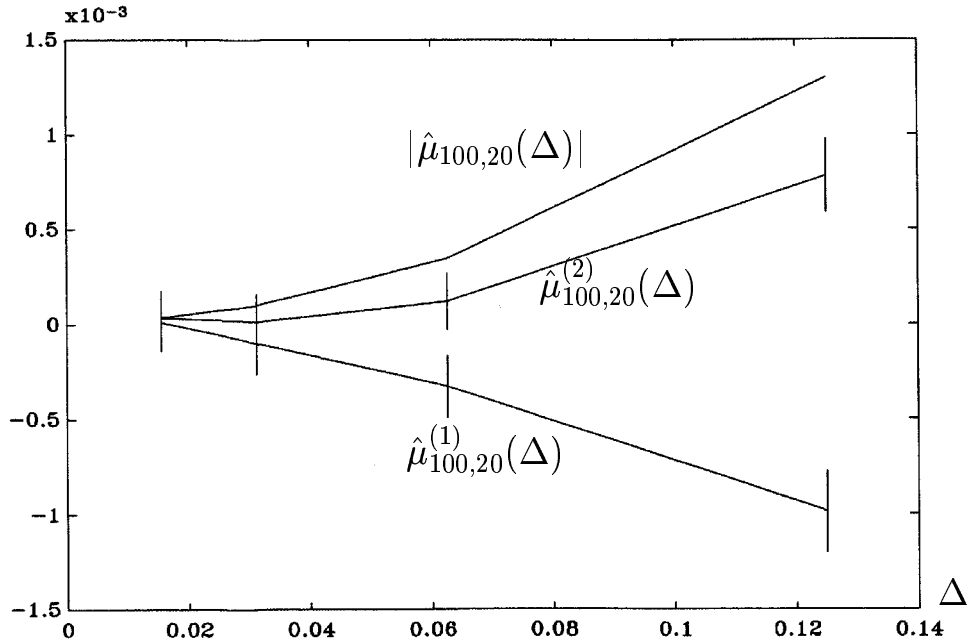


Рис. 10.14. Результат численного эксперимента 10.11.

10.6.3 Конечно-разностные методы порядка точности 2.0

Приведем неявный слабый конечно-разностный численный метод порядка точности 2.0 для автономного случая, который получен в [86]:

$$\begin{aligned}
\mathbf{y}_{p+1} = & \mathbf{y}_p + \frac{1}{2} (\mathbf{a} + \mathbf{a}(\mathbf{y}_{p+1})) \Delta + \\
& + \frac{1}{4} \sum_{j=1}^m \left\{ \Sigma_j(R_p^{(j)+}) + \Sigma_j(R_p^{(j)-}) + 2\Sigma_j + \right. \\
& + \sum_{\substack{r=1 \\ r \neq j}}^m (\Sigma_j(U_p^{(r)+}) + \Sigma_j(U_p^{(r)-}) - 2\Sigma_j) \frac{1}{\sqrt{\Delta}} \left. \right\} \Delta \tilde{\mathbf{f}}_p^{(j)} + \\
& + \frac{1}{4\sqrt{\Delta}} \sum_{j=1}^m \left\{ (\Sigma_j(R_p^{(j)+}) - \Sigma_j(R_p^{(j)-})) \left((\Delta \tilde{\mathbf{f}}_p^{(j)})^2 - \Delta \right) + \right. \\
& + \sum_{\substack{r=1 \\ r \neq j}}^m (\Sigma_j(U_p^{(r)+}) - \Sigma_j(U_p^{(r)-})) \left. \left(\Delta \tilde{\mathbf{f}}_p^{(j)} \Delta \tilde{\mathbf{f}}_p^{(r)} + V_p^{(rj)} \right) \right\}, \quad (10.52)
\end{aligned}$$

где сохранен смысл обозначений, входящих в (10.45).

В [86] также представлен неявный слабый конечно-разностный численный метод порядка точности 2.0 для случая скалярного шума ($m = 1$):

$$\begin{aligned}
\mathbf{y}_{p+1} = & \mathbf{y}_p + \frac{1}{2} (\mathbf{a} + \mathbf{a}(\mathbf{y}_{p+1})) \Delta + \\
& + \frac{1}{4} (\Sigma(Y_p^+) + \Sigma(Y_p^-) + 2\Sigma) \Delta \tilde{\mathbf{f}}_p + \\
& + \frac{1}{4\sqrt{\Delta}} (\Sigma(Y_p^+) - \Sigma(Y_p^-)) \left((\Delta \tilde{\mathbf{f}}_p)^2 - \Delta \right), \quad (10.53)
\end{aligned}$$

где сохранен смысл обозначений, входящих в (10.46).

Предложим неявный слабый конечно-разностный численный метод порядка точности 2.0 вида

$$\begin{aligned}
\mathbf{y}_{p+1} = & \mathbf{y}_p + \frac{1}{2} (\mathbf{a} + \mathbf{a}(\mathbf{y}_{p+1})) \Delta + \\
& + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^m \left\{ \Sigma_i(Z_p) + \Sigma_i + \frac{1}{2} \sum_{r=1}^m (\Sigma_i(Y_p^{(r)+}) + \Sigma_i(Y_p^{(r)-}) - 2\Sigma_i) \right\} \Delta \tilde{\mathbf{f}}_p^{(i)} + \\
& + \frac{1}{4\sqrt{\Delta}} \sum_{i,j=1}^m (\Sigma_i(Y_p^{(j)+}) - \Sigma_i(Y_p^{(j)-})) (\Delta \tilde{\mathbf{f}}_p^{(i)} \Delta \tilde{\mathbf{f}}_p^{(j)} + V_p^{(ji)}), \quad (10.54)
\end{aligned}$$

где введены такие же обозначения, как в (10.47).

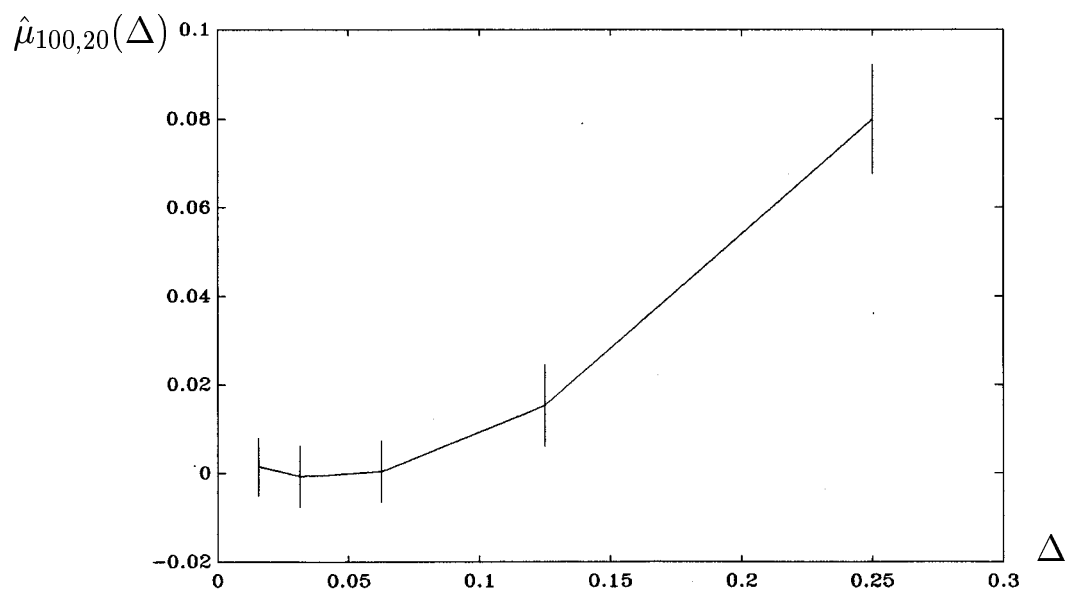


Рис. 10.15. Результат численного эксперимента 10.12.

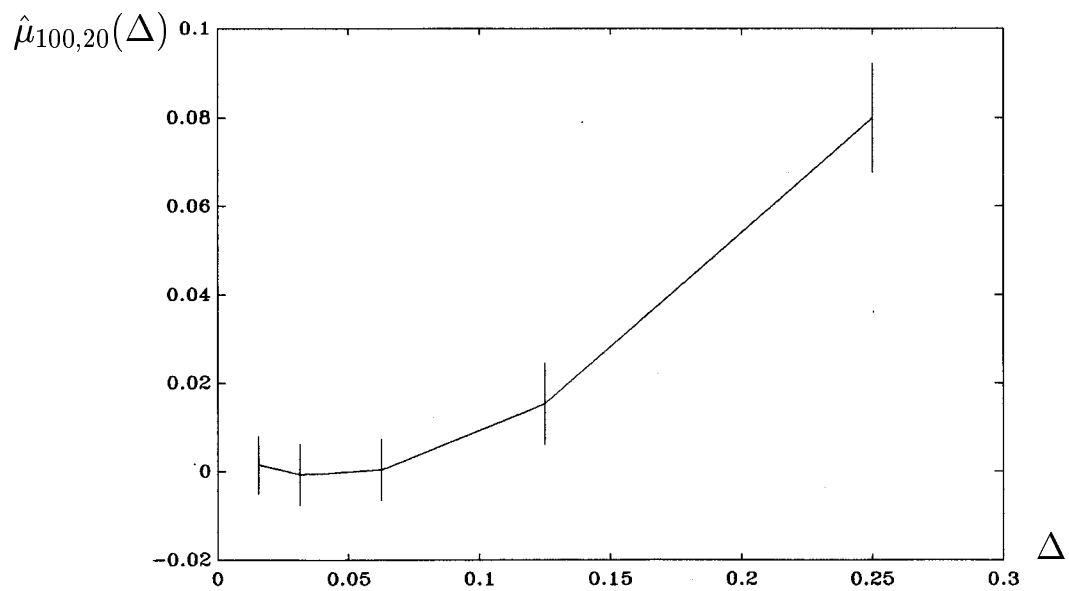


Рис. 10.16. Результат численного эксперимента 10.13.

Вариант численной схемы (10.54) для случая скалярного шума ($m = 1$) имеет вид

$$\begin{aligned} \mathbf{y}_{p+1} = & \mathbf{y}_p + \frac{1}{2} (\mathbf{a} + \mathbf{a}(\mathbf{y}_{p+1})) \Delta + \\ & + \frac{\Delta \tilde{\mathbf{f}}_p}{4} (\Sigma(Y_p^+) + \Sigma(Y_p^-) + 2\Sigma(Z_p)) + \\ & + \frac{1}{4\sqrt{\Delta}} (\Sigma(Y_p^+) - \Sigma(Y_p^-)) ((\Delta \tilde{\mathbf{f}}_p)^2 - \Delta), \end{aligned} \quad (10.55)$$

где сохранен смысл обозначений, введенных в (10.48).

Отметим, что численные схемы (10.52)–(10.55) являются A -устойчивыми на классе тестовых стохастических дифференциальных уравнений Ито с аддитивным шумом.

Численный эксперимент 10.12 (рис. 10.15). *Повторить численный эксперимент 10.1 для неявного слабого конечно-разностного численного метода порядка точности 2.0 вида (10.53) (не строить зависимость $|\hat{\mu}_{100,20}(\Delta)|$).*

Численный эксперимент 10.13 (рис. 10.16). *Повторить численный эксперимент 10.1 для неявного слабого конечно-разностного численного метода порядка точности 2.0 вида (10.55) (не строить зависимость $|\hat{\mu}_{100,20}(\Delta)|$).*

10.7 Численные методы типа ”предсказатель–корректор”

В [96] предложено семейство специфических слабых численных методов, называемых численными методами типа ”предсказатель–корректор”. В качестве предсказателя выступает случайная величина $\bar{\mathbf{y}}_{p+1}$, вычисленная на фиксированном p -м шаге интегрирования с помощью явной слабой численной схемы некоторого порядка точности γ . Роль корректора играет неявная слабая численная схема того же порядка точности γ , в которой неявность $\mathbf{y}_{p+1}$ в правой части заменяется на величину $\bar{\mathbf{y}}_{p+1}$. Например, семейство слабых численных методов типа ”предсказатель–корректор” порядка точности 1.0 имеет вид [86]

$$\begin{aligned} \mathbf{y}_{p+1} = & \mathbf{y}_p + \{k\bar{\mathbf{a}}_\eta(\bar{\mathbf{y}}_{p+1}, \tau_{p+1}) + (1-k)\bar{\mathbf{a}}_\eta(\mathbf{y}_p, \tau_p)\} \Delta + \\ & + \sum_{j=1}^m \{\eta\Sigma_j(\bar{\mathbf{y}}_{p+1}, \tau_{p+1}) + (1-\eta)\Sigma(\mathbf{y}_p, \tau_p)\} \Delta \tilde{\mathbf{f}}_p^{(j)}, \end{aligned} \quad (10.56)$$

где $k, \eta \in [0, 1]$; $\bar{\mathbf{y}}_{p+1}$ определяется правой частью (10.50);

$$\bar{\mathbf{a}}_\eta(\mathbf{x}, t) = \mathbf{a}(\mathbf{x}, t) - \eta \sum_{i=1}^m \sum_{l=1}^n \Sigma^{(li)}(\mathbf{x}, t) \frac{\partial \Sigma_i}{\partial \mathbf{x}^{(l)}}(\mathbf{x}, t);$$

остальные обозначения, входящие в (10.56), такие же, как в (10.45).

В [96] получен следующий слабый численный метод типа "предсказатель-корректор" порядка точности 2.0:

$$\mathbf{y}_{p+1} = \mathbf{y}_p + \frac{1}{2} (\mathbf{a} + \mathbf{a}(\bar{\mathbf{y}}_{p+1}, \tau_{p+1})) \Delta + U_p,$$

где

$$U_p = \sum_{j=1}^m \left(\Sigma_j + \frac{1}{2} \Delta L \Sigma_j \right) \Delta \tilde{\mathbf{f}}_p^{(j)} + \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^m G_0^{(i)} \Sigma_j (\Delta \tilde{\mathbf{f}}_p^{(i)} \Delta \tilde{\mathbf{f}}_p^{(j)} + V_p^{(ij)});$$

$$\bar{\mathbf{y}}_{p+1} = \mathbf{y}_p + \mathbf{a} \Delta + U_p + \frac{1}{2} L \mathbf{a} \Delta^2 + \frac{1}{2} \sum_{j=1}^m G_0^{(j)} \mathbf{a} \Delta \cdot \Delta \tilde{\mathbf{f}}_p^{(j)};$$

остальные обозначения такие же, как в (10.45).

Предложим следующий слабый конечно-разностный численный метод типа "предсказатель-корректор" порядка точности 2.0:

$$\mathbf{y}_{p+1} = \mathbf{y}_p + \frac{1}{2} (\mathbf{a} + \mathbf{a}(\bar{\mathbf{y}}_{p+1})) \Delta + U_p, \quad (10.57)$$

где

$$U_p = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^m \left\{ \Sigma_i(Z_p) + \Sigma_i + \frac{1}{2} \sum_{r=1}^m (\Sigma_i(Y_p^{(r)+}) + \Sigma_i(Y_p^{(r)-}) - 2\Sigma_i) \right\} \Delta \tilde{\mathbf{f}}_p^{(i)} +$$

$$+ \frac{1}{4\sqrt{\Delta}} \sum_{i,j=1}^m (\Sigma_i(Y_p^{(j)+}) - \Sigma_i(Y_p^{(j)-})) (\Delta \tilde{\mathbf{f}}_p^{(i)} \Delta \tilde{\mathbf{f}}_p^{(j)} + V_p^{(ji)});$$

$$\bar{\mathbf{y}}_{p+1} = \mathbf{y}_p + \frac{1}{2} (\mathbf{a} + \mathbf{a}(Z_p)) \Delta + U_p +$$

$$+ \frac{1}{4} \sqrt{\Delta} \sum_{i=1}^m (\mathbf{a}(Y_p^{(i)+}) - \mathbf{a}(Y_p^{(i)-})) \Delta \tilde{\mathbf{f}}_p^{(i)} +$$

$$+ \frac{1}{4} \Delta \sum_{i=1}^m (\mathbf{a}(Y_p^{(i)+}) + \mathbf{a}(Y_p^{(i)-}) - 2\mathbf{a});$$

$$Y_p^{(j)\pm} = \mathbf{y}_p \pm \sqrt{\Delta} \Sigma_j; \quad Z_p = \mathbf{y}_p + \mathbf{a} \Delta;$$

остальные обозначения такие же, как в (10.47).

В [86] на примере численных экспериментов показано, что слабые численные методы типа "предсказатель-корректор" обладают хорошей численной устойчивостью, хотя и являются явными численными методами.

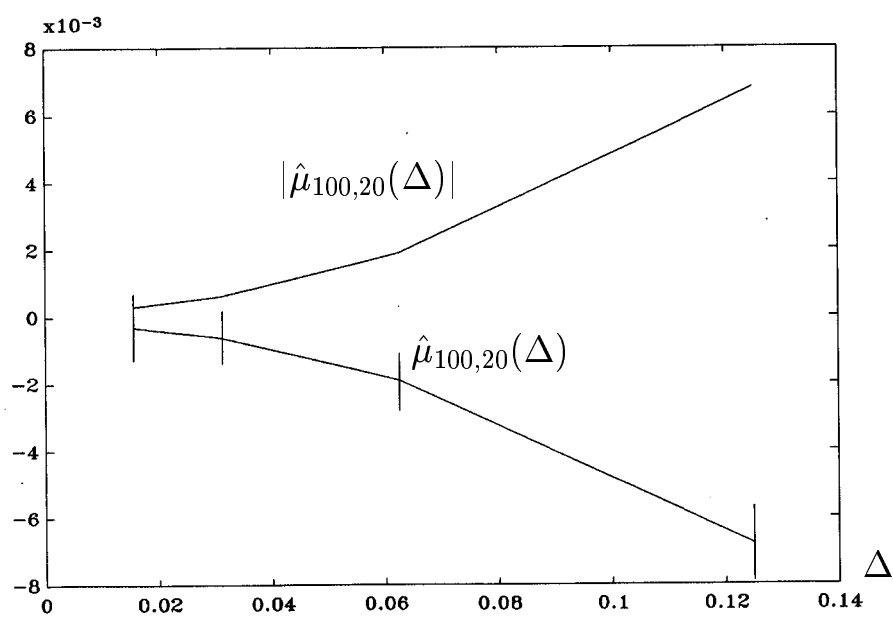


Рис. 10.17. Результат численного эксперимента 10.14.

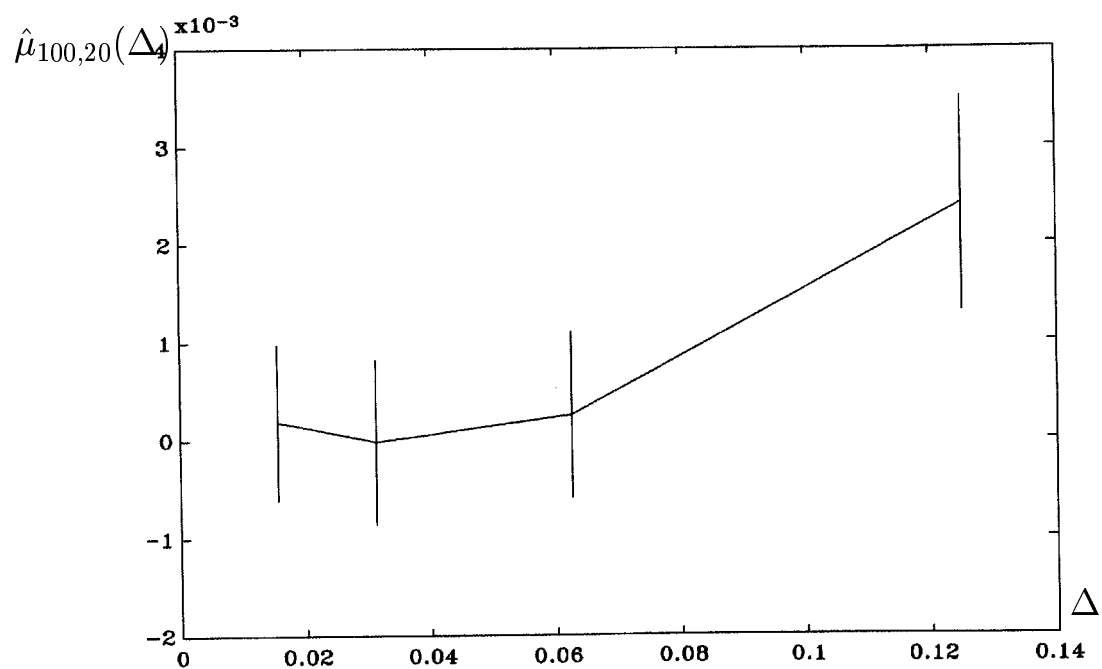


Рис. 10.18. Результат численного эксперимента 10.15.

Численный эксперимент 10.14 (рис. 10.17). Повторить численный эксперимент 10.1 для слабого численного метода порядка точности 1.0 типа "предсказатель–корректор" вида (10.56) при $\eta = 0$, $k = \frac{1}{2}$; $a = 1$; $b = 0.01$; $\Delta = 2^{-j}$, $j = 3, 4, 5, 6$. В качестве $\bar{y}_{p+1}$ в (10.56) взять правую часть численного метода (10.50). Для моделирования приращений винеровского процесса использовать независимые случайные величины Δf_p , $p = 0, 1, \dots, N - 1$; $N = T/\Delta$, для которых $P\{\Delta \tilde{f}_p = \pm \sqrt{\Delta}\} = \frac{1}{2}$.

Численный эксперимент 10.15 (рис. 10.18). Повторить численный эксперимент 10.14 для слабого численного метода порядка точности 2.0 типа "предсказатель–корректор" вида (10.57) (не строить зависимость $|\hat{\mu}_{100,20}(\Delta)|$). Для моделирования повторных стохастических интегралов Ито, входящих в (10.57), использовать те же случайные величины, что и в численном эксперименте 10.14.

10.8 О сходимости слабых численных методов

Сходимость слабых численных методов рассмотрим на примере численных методов порядка точности 2.0.

Приведем выражения условных математических ожиданий

$$M \left\{ \prod_{g=1}^k \left(y_{\tau_{p+1}}^{(i_g)} - y_{\tau_p}^{(i_g)} \right) | \mathcal{F}_{\tau_p} \right\}, \quad k = 1, 2, \dots, 5; \quad i_1, \dots, i_5 = 1, \dots, m,$$

где y_{τ_p} , $p = 0, 1, \dots, N$, определяется из (10.7). Имеем

$$M \left\{ y_{\tau_{p+1}}^{(i_1)} - y_{\tau_p}^{(i_1)} | \mathcal{F}_{\tau_p} \right\} = a^{(i_1)} \Delta + \frac{1}{2} L a^{(i_1)} \Delta^2 + O(\Delta^3), \quad (10.58)$$

$$\begin{aligned} M \left\{ \prod_{g=1}^2 \left(y_{\tau_{p+1}}^{(i_g)} - y_{\tau_p}^{(i_g)} \right) | \mathcal{F}_{\tau_p} \right\} &= \Delta \sum_{j=1}^m \Sigma^{(i_2 j)} \Sigma^{(i_1 j)} + \\ &+ \frac{\Delta^2}{2} \left\{ 2a^{(i_1)} a^{(i_2)} + \sum_{j=1}^m \left(\Sigma^{(i_1 j)} L \Sigma^{(i_2 j)} + \Sigma^{(i_1 j)} G_0^{(j)} a^{(i_2)} + \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + L \Sigma^{(i_1 j)} \Sigma^{(i_2 j)} + G_0^{(j)} a^{(i_1)} \Sigma^{(i_2 j)} \right) + \right. \\ &\quad \left. + \sum_{i,j=1}^m G_0^{(i)} \Sigma^{(i_1 j)} G_0^{(i)} \Sigma^{(i_2 j)} \right\} + O(\Delta^3), \end{aligned} \quad (10.59)$$

$$M \left\{ \prod_{g=1}^3 \left(y_{\tau_{p+1}}^{(i_g)} - y_{\tau_p}^{(i_g)} \right) | \mathcal{F}_{\tau_p} \right\} = \Delta^2 \sum_{j=1}^m \left(a^{(i_1)} \Sigma^{(i_2 j)} \Sigma^{(i_3 j)} + \right.$$

$$\begin{aligned}
& + \mathbf{a}^{(i_2) \Sigma(i_1 j) \Sigma(i_3 j)} + \mathbf{a}^{(i_3) \Sigma(i_1 j) \Sigma(i_2 j)} \Big) + \\
& + \sum_{i,j,k,l=1}^m \left(\Sigma^{(i_1 i) \Sigma(i_2 j) \Sigma(i_3 l)} G_0^{(k)} \Sigma^{(i_3 l)} + \Sigma^{(i_1 i) \Sigma(i_3 j) \Sigma(i_2 l)} G_0^{(k)} \Sigma^{(i_2 l)} + \right. \\
& \left. + \Sigma^{(i_2 i) \Sigma(i_3 j) \Sigma(i_1 l)} G_0^{(k)} \Sigma^{(i_1 l)} \right) G^{(ijkl)}(\Delta) + O(\Delta^3), \tag{10.60}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathbb{M} \left\{ \prod_{g=1}^4 \left(\mathbf{y}_{\tau_{p+1}}^{(i_g)} - \mathbf{y}_{\tau_p}^{(i_g)} \right) \middle| \mathcal{F}_{\tau_p} \right\} &= \Delta^2 \sum_{k,q=1}^m \left(\Sigma^{(i_1 k) \Sigma(i_2 k) \Sigma(i_3 q) \Sigma(i_4 q)} + \right. \\
& + \Sigma^{(i_1 k) \Sigma(i_2 q) \Sigma(i_3 k) \Sigma(i_4 q)} + \Sigma^{(i_1 k) \Sigma(i_2 q) \Sigma(i_3 q) \Sigma(i_4 k)} \Big) + \\
& + \sum_{i,j,k,l=1}^m \Sigma^{(i_1 i) \Sigma(i_2 j) \Sigma(i_3 k) \Sigma(i_4 l)} Q^{(ijkl)}(\Delta) + O(\Delta^3), \tag{10.61}
\end{aligned}$$

$$\mathbb{M} \left\{ \prod_{g=1}^5 \left(\mathbf{y}_{\tau_{p+1}}^{(i_g)} - \mathbf{y}_{\tau_p}^{(i_g)} \right) \middle| \mathcal{F}_{\tau_p} \right\} = O(\Delta^3), \tag{10.62}$$

где

$$G^{(ijkl)}(\Delta) = \begin{cases} \Delta^2 & \text{при } i = j = k = l, \\ \frac{1}{2} \Delta^2 & \text{при } k \neq l, i = k, j = l \\ & \text{или } k \neq l, i = l, j = k, \\ 0 & \text{в противном случае;} \end{cases}$$

$$Q^{(ijkl)}(\Delta) = \begin{cases} 3\Delta^2 & \text{при } i = j = k = l, \\ \Delta^2 & \text{если среди } i, j, k, l \text{ имеются} \\ & \text{две пары одинаковых чисел,} \\ 0 & \text{в противном случае;} \end{cases}$$

$i_1, \dots, i_5 = 1, \dots, m$; все функции в правых частях (10.58)–(10.62) вычислены в точке $\mathbf{y}_{\tau_p}$; $O(\Delta^\gamma)$ означает величину, для которой существует и конечен предел $\lim_{\Delta \rightarrow 0} \frac{O(\Delta^\gamma)}{\Delta^\gamma}$.

Нетрудно проверить, что для численной схемы (10.8) получаем такие же по виду выражения для условных моментов

$$M \left\{ \prod_{g=1}^k \left(\mathbf{y}_{\tau_{p+1}}^{(i_g)} - \mathbf{y}_{\tau_p}^{(i_g)} \right) \middle| \mathcal{F}_{\tau_p} \right\}, \quad k = 1, 2, \dots, 5; \quad i_1, \dots, i_5 = 1, \dots, m,$$

как и (10.58)–(10.62). Далее, используя теорему 10.3, можно показать, что численный метод (10.8) имеет порядок слабой сходимости 2.0.

Если мы рассматриваем явные конечно-разностные слабые численные методы (10.45), (10.47), то с помощью обычного разложения Тейлора правые части данных численных методов могут быть приведены к выражениям, с помощью которых нетрудно получить равенства вида (10.58)–(10.62) для численных методов (10.45), (10.47). Далее слабая сходимость численных методов (10.45), (10.47) порядка точности 2.0 проверяется аналогично тому, как это делается для численного метода (10.8) [86]. По рассмотренной схеме можно также обосновать сходимость слабых численных методов типа ”предсказатель–корректор”.

Поясним теперь, как обосновывается сходимость неявных слабых численных методов на примере слабых численных методов порядка точности 2.0.

Используя разложение Тейлора–Ито и слабые аппроксимации повторных стохастических интегралов Ито, можно получить следующее приближенное представление [70, 86, 96]:

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_{\tau_{p+1}} - \mathbf{x}_{\tau_p} &\approx \{ \tilde{\alpha} \mathbf{a}(\mathbf{x}_{\tau_{p+1}}, \tau_{p+1}) + (1 - \tilde{\alpha}) \mathbf{a}(\mathbf{x}_{\tau_p}, \tau_p) \} \Delta + \\ &+ \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^m G_0^{(i)} \Sigma_j(\mathbf{x}_{\tau_p}, \tau_p) \left(\Delta \tilde{\mathbf{f}}_p^{(i)} \Delta \tilde{\mathbf{f}}_p^{(j)} + V_p^{(ij)} \right) + \\ &+ \sum_{j=1}^m \left(\Sigma_j(\mathbf{x}_{\tau_p}, \tau_p) + \frac{\Delta}{2} \left(L \Sigma_j(\mathbf{x}_{\tau_p}, \tau_p) + (1 - 2\tilde{\alpha}) G_0^{(j)} \mathbf{a}(\mathbf{x}_{\tau_p}, \tau_p) \right) \right) \Delta \tilde{\mathbf{f}}_p^{(j)} + \\ &+ \frac{1}{2} (1 - 2\tilde{\alpha}) \{ \tilde{\beta} L \mathbf{a}(\mathbf{x}_{\tau_p}, \tau_p) + (1 - \tilde{\beta}) L \mathbf{a}(\mathbf{x}_{\tau_{p+1}}, \tau_{p+1}) \} \Delta^2, \end{aligned} \quad (10.63)$$

где $\tilde{\alpha}, \tilde{\beta} \in [0, 1]$; знак ” $\approx$ ” означает, что левая и правая части (10.63) имеют одинаковые условные моменты, необходимые для обеспечения слабой сходимости порядка 2.0 численной схемы (10.51) (см. теорему 10.3); случайные величины $\Delta \tilde{\mathbf{f}}_p^{(i)}, V_p^{(ij)}$ такие же, как в (10.8). С помощью представления (10.63) и теоремы 10.3 можно доказать слабую сходимость порядка 2.0 семейства неявных численных методов (10.51), а с помощью обычного разложения Тейлора и тех же аргументов можно доказать слабую сходимость порядка 2.0 неявных конечно-разностных

численных схем (10.52)–(10.55). Более подробно сходимость слабых численных методов рассмотрена в [70, 86, 96].

10.9 Устойчивость слабых численных методов в случае мультипликативного шума

При решении прикладных задач стохастические дифференциальные уравнения с мультипликативным шумом встречаются отнюдь не реже стохастических дифференциальных уравнений с аддитивным шумом. В связи с этим возникает необходимость построения концепции устойчивости численных методов решения стохастических дифференциальных уравнений с мультипликативным шумом.

В частности, в [94, 95] предлагается рассматривать устойчивость численных методов в случае мультипликативного шума на следующем классе тестовых стохастических дифференциальных уравнений Стратоновича:

$$dx_t = (1 - \alpha)\lambda x_t dt + \sqrt{\alpha}\gamma x_t d^* f_t, \quad (10.64)$$

где $\lambda = \lambda_1 + i\lambda_2$; $\gamma = \gamma_1 + i\gamma_2$; f_t — скалярный стандартный винеровский процесс; $\alpha \in [0, 2]$; i — мнимая единица. Параметр α регулирует вес сносового и диффузионного слагаемых в правой части (10.64).

Выберем следующие значения γ_1, γ_2 [94, 95]:

$$\gamma_1 = -\sqrt{\frac{1}{2}(|\lambda| + \lambda_1)}, \quad \gamma_2 = -\frac{\lambda_2}{2\gamma_1},$$

т. е. $\gamma^2 = \lambda$.

Концепция слабых численных методов позволяет изучать устойчивость численных методов с неявностью не только в систематических, но и в стохастических членах относительно класса (10.64) тестовых уравнений. Именно такие слабые численные методы, как будет видно далее, обладают [94, 95] наилучшей устойчивостью. Возможность применения слабых численных методов с неявностью в стохастических членах к стохастическому дифференциальному уравнению (10.64) объясняется возможностью выбора ограниченных случайных величин, входящих в рассматриваемые численные методы и играющих роль слабых аппроксимаций стохастических интегралов Ито. Более детально этот вопрос рассмотрен в [86. С. 336–337].

Предположим, что применение некоторой численной схемы с постоянным шагом интегрирования Δ к тестовому уравнению (10.64) дает

следующий результат [94, 95]:

$$\mathbf{y}_{\tau_{p+1}} = G(\lambda\Delta, \alpha)\mathbf{y}_{\tau_p}, \quad (10.65)$$

где G — случайная комплекснозначная функция, которая независима с $\mathbf{y}_{\tau_0}, \mathbf{y}_{\tau_1}, \dots, \mathbf{y}_{\tau_{p+1}}$; $\tau_p = p\Delta$, $p = 0, 1, \dots, N-1$.

В [94, 95] вводится область сильной устойчивости Γ_α численной схемы, которая является подмножеством комплексной плоскости C и определяется равенством

$$\Gamma_\alpha = \{\lambda\Delta \in C : \operatorname{Re}(\lambda) < 0, \operatorname{ess}_\omega \sup |G(\lambda\Delta, \alpha)|^2 < 1\}, \quad (10.66)$$

где $\operatorname{ess}_\omega \sup$ — essential supremum по всем $\omega \in \Omega$.

Если для данной численной схемы область Γ_α при некотором $\alpha \in [0, 2]$ содержит всю левую полуплоскость комплексной плоскости C , то соответствующую численную схему будем называть сильно A -устойчивой [94, 95] при данном $\alpha \in [0, 2]$.

Главное различие при исследовании устойчивости численных методов решения стохастических дифференциальных уравнений с аддитивными и мультипликативными шумами заключается в том, что в случае мультипликативного шума в выражение функции G из (10.65) входят случайные величины, а в случае аддитивного шума функция G из (9.71) является неслучайной.

Отметим, что, очевидно, класс тестовых стохастических дифференциальных уравнений, относительно которого исследуется устойчивость численных методов, сам по себе должен обладать хорошей устойчивостью решений. Кроме того, устойчивость решений тестовых уравнений должна наблюдаться при $\operatorname{Re}(\lambda) < 0$ (см. (10.66)) и в достаточно широком диапазоне изменения α . В связи с этим поясним, почему выбор класса (10.64) [94, 95] тестовых уравнений оправдан.

Поскольку точное решение уравнения (10.64) имеет вид [94]

$$x_t = e^{(1-\alpha)\lambda t + \sqrt{\alpha}\gamma f_t} x_0,$$

то [94, 95]

$$\begin{aligned} (x_t)^\nu &= (x_0)^\nu + \int_0^t \nu(1-\alpha)\lambda(x_s)^\nu ds + \int_0^t \nu\sqrt{\alpha}\gamma(x_s)^\nu d^*f_s = \\ &= (x_0)^\nu + \int_0^t \left(\nu(1-\alpha)\lambda + \frac{1}{2}\nu^2\alpha\gamma^2 \right) (x_s)^\nu ds + \end{aligned}$$

$$+ \int_0^t \nu \sqrt{\alpha} \gamma(x_s)^\nu df_s \text{ с в.1, } \nu \geq 0. \quad (10.67)$$

С помощью (10.67) получаем

$$|\mathbf{M}\{(x_t)^\nu\}| = |\mathbf{M}\{(x_0)^\nu\}| e^{\lambda_1 t \nu (1 + \alpha(\frac{\nu}{2} - 1))}. \quad (10.68)$$

Это означает, что условие $\lambda_1 = \operatorname{Re}(\lambda) \leq 0$ при $\nu \geq 0$, $\alpha \in [0, 1]$ обеспечивает выполнение оценки [94, 95]

$$|\mathbf{M}\{(x_t)^\nu\}| \leq |\mathbf{M}\{(x_0)^\nu\}|,$$

которая означает устойчивость всех моментов решения тестового уравнения (10.64). Если $\alpha \in [1, 2]$, то согласно (10.68) имеем устойчивость моментов x_t порядка $\nu \geq 2(1 - \frac{1}{\alpha})$ [94, 95].

В [94, 95] найдены точные выражения функции

$$H_\alpha(\lambda_1 \Delta, \lambda_2 \Delta) \stackrel{\text{def}}{=} \operatorname{ess}_{\omega} \sup |G(\lambda \Delta, \alpha)|^2$$

для явного, полунявного, полностью неявного, симметричных и супернеявных слабых методов Эйлера. Кроме того, в [94, 95] визуализированы в координатах $\lambda_1 \Delta$, $\lambda_2 \Delta$, α семейства областей Γ_α сильной устойчивости для указанных численных методов.

Для явного слабого метода Эйлера

$$y_{\tau_{p+1}} = y_{\tau_p} + a(y_{\tau_p}, \tau_p) \Delta + \sigma(y_{\tau_p}, \tau_p) \sqrt{\Delta} \zeta_p. \quad (10.69)$$

Здесь и далее $\tau_p = p\Delta$, $p = 0, 1, \dots, N-1$; $a, \sigma : \mathbb{R}^1 \times [0, T] \rightarrow \mathbb{R}^1$; ζ_p — независимые случайные величины, для которых вероятность $\mathbf{P}\{\zeta_p = \pm 1\} = \frac{1}{2}$, функция $H_\alpha(\lambda_1 \Delta, \lambda_2 \Delta)$ имеет вид [94, 95]

$$\begin{aligned} H_\alpha(\lambda_1 \Delta, \lambda_2 \Delta) = & \left(1 + \left(1 - \frac{\alpha}{2}\right) \lambda_1 \Delta\right)^2 + \left(1 - \frac{\alpha}{2}\right)^2 (\lambda_2 \Delta)^2 + \\ & + \alpha |\lambda| \Delta + \sqrt{2\alpha \Delta (|\lambda| + \lambda_1)} \left(1 + \left(1 - \frac{\alpha}{2}\right) |\lambda| \Delta\right); \end{aligned} \quad (10.70)$$

$\alpha \in [0, 2]$.

Из (10.70) следует, что при $\alpha = 0$ (детерминированный случай) область Γ_α — внутренность круга с центром в точке $(-1, 0)$ и радиусом 1. Для фиксированного $\alpha \in (0, 1)$ область Γ_α — внутренность соответствующего эллипса, симметричного вдоль оси $\lambda_1 \Delta$. При $\alpha \geq 1$ численный метод (10.69) неустойчив по определению (10.66).

Для полунявного слабого метода Эйлера

$$y_{\tau_{p+1}} = y_{\tau_p} + a(y_{\tau_{p+1}}, \tau_{p+1})\Delta + \sigma(y_{\tau_p}, \tau_p)\sqrt{\Delta}\zeta_p \quad (10.71)$$

функция $H_\alpha(\lambda_1\Delta, \lambda_2\Delta)$; $\alpha \in [0, 2]$ имеет вид [94, 95]

$$H_\alpha(\lambda_1\Delta, \lambda_2\Delta) = \frac{1 + \sqrt{2\alpha\Delta(|\lambda| + \lambda_1)} + \alpha|\lambda|\Delta}{(1 - (1 - \frac{\alpha}{2})\lambda_1\Delta)^2 + (1 - \frac{\alpha}{2})^2(\lambda_2\Delta)^2}. \quad (10.72)$$

Согласно (10.72) при $\alpha = 0$ область Γ_α — внешность круга с центром в точке $(1, 0)$ и радиусом 1. При изменении α на отрезке $[0, 1]$ семейство областей Γ_α в координатах $\lambda_1\Delta, \lambda_2\Delta, \alpha$ представляет собой внешность соответствующей поверхности [94, 95], расширяющейся с ростом α . Отметим [95], что при $\alpha \in [0, 0.2]$ численный метод (10.71) сильно A -устойчив. При росте α , когда $\alpha > 0.2$, область, в которой численный метод (10.71) не является сильно устойчивым, увеличивается и распространяется в левую полуплоскость комплексной плоскости C [95].

Приведенные результаты показывают, что при достаточно больших α и достаточно малых Δ численные методы (10.69), (10.71) оказываются неустойчивыми по критерию (10.66), однако численный метод (10.71) все же несколько более устойчив, чем численный метод (10.69).

Рассмотрим два симметричных слабых метода Эйлера [95]:

$$y_{\tau_{p+1}} = y_{\tau_p} + \frac{1}{2} \{a(y_{\tau_p}, \tau_p) + a(y_{\tau_{p+1}}, \tau_{p+1})\} \Delta + \sigma(y_{\tau_p}, \tau_p)\sqrt{\Delta}\zeta_p, \quad (10.73)$$

$$\begin{aligned} y_{\tau_{p+1}} = y_{\tau_p} + \frac{1}{2} \{ \bar{a}(y_{\tau_p}, \tau_p) + \bar{a}(y_{\tau_{p+1}}, \tau_{p+1}) \} \Delta + \\ + \frac{1}{2} \{ \sigma(y_{\tau_p}, \tau_p) + \sigma(y_{\tau_{p+1}}, \tau_{p+1}) \} \sqrt{\Delta}\zeta_p, \end{aligned} \quad (10.74)$$

где $\bar{a}(x, t) \stackrel{\text{def}}{=} a(x, t) - \frac{1}{2}\sigma(x, t)\frac{\partial a}{\partial x}(x, t)$.

При $\alpha = 0$ численные методы (10.73), (10.74) являются сильно A -устойчивыми. Однако при росте α вплоть до единицы области Γ_α сильной устойчивости этих численных методов уменьшаются, причем численный метод (10.74) всюду в C сильно неустойчив при $\alpha \geq 1$ [95].

Рассмотрим семейство слабых методов Эйлера [86, 94] вида

$$\begin{aligned} y_{\tau_{p+1}} = y_{\tau_p} + \{k\bar{a}_\eta(y_{\tau_{p+1}}, \tau_{p+1}) + (1 - k)\bar{a}_\eta(y_{\tau_p}, \tau_p)\} \Delta + \\ + \{\eta\sigma(y_{\tau_{p+1}}, \tau_{p+1}) + (1 - \eta)\sigma(y_{\tau_p}, \tau_p)\} \sqrt{\Delta}\zeta_p, \end{aligned} \quad (10.75)$$

где $\bar{a}_\eta(x, t) \stackrel{\text{def}}{=} a(x, t) - \eta \sigma(x, t) \frac{\partial \sigma}{\partial x}(x, t)$; k, η — вещественные параметры, которые могут быть отрицательными и превышающими по модулю единицу. Напомним, что если k или η не принадлежат отрезку $[0, 1]$, то численный метод (10.75) называется [94] супернеявным методом Эйлера.

Если $k = \eta = 1$ в (10.75), то такой численный метод назывался ранее полностью неявным слабым методом Эйлера. Для этого численного метода имеем [94]

$$\begin{aligned} H_\alpha(\lambda_1 \Delta, \lambda_2 \Delta) = & \left| \left(1 - \left(1 - \frac{3}{2} \alpha \right) \lambda_1 \Delta \right)^2 + \right. \\ & \left. + \left(1 - \frac{3}{2} \alpha \right)^2 (\lambda_2 \Delta)^2 + \alpha |\lambda| \Delta - \right. \\ & \left. - \sqrt{2\alpha \Delta (|\lambda| + \lambda_1)} \left| 1 - \left(1 - \frac{3}{2} \alpha \right) |\lambda| \Delta \right| \right|^{-1}. \end{aligned} \quad (10.76)$$

Согласно (10.76) [94] при увеличении α от нуля до $\alpha \approx 0.3$ полностью неявный слабый метод Эйлера сильно A -устойчив. При дальнейшем увеличении α до единицы рассматриваемый численный метод постепенно теряет сильную устойчивость (область Γ_α уменьшается), однако при $\alpha > 1$ сильная устойчивость его все более возрастает (область Γ_α увеличивается). При достаточно больших α ($\alpha \approx 2$) полностью неявный слабый метод Эйлера почти сильно A -устойчив [94]. Поскольку $\alpha = 2$ соответствует тестовому стохастическому дифференциальному уравнению Ито без сноса, то полностью неявный слабый метод Эйлера целесообразно применять к такого типа уравнениям, так как он при $\alpha = 2$ обладает высокой степенью сильной устойчивости [94].

В [94] показано, что супернеявные слабые методы Эйлера при $k = 1, \eta = -2$ и $k = 1, \eta = -5$ обладают существенно лучшей сильной устойчивостью (они почти сильно A -устойчивы для всех $\alpha \in [0, 1]$), чем полностью неявный слабый метод Эйлера ($k = \eta = 1$) и тем более явный слабый метод Эйлера.

Таким образом, супернеявные слабые методы Эйлера, в частности, соответствующие $k = 1, \eta = -2$ и $k = 1, \eta = -5$, оказываются более предпочтительными по устойчивости, чем другие, рассмотренные ранее модификации метода Эйлера.

10.10 Численное моделирование стохастических дифференциальных уравнений с использованием метода Монте–Карло и уменьшение дисперсии

Рассмотрим функционал вида $M\{g(\mathbf{x}_T)\}$, где $\mathbf{x}_t, t \in [0, T]$, — решение стохастического дифференциального уравнения Ито (7.18), а $g(\mathbf{x}) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^1$ — некоторая заданная функция.

Пусть $\mathbf{y}_{\tau_p}, p = 0, 1, \dots, N$, — слабая дискретная аппроксимация процесса $\mathbf{x}_t, t \in [0, T]$, которая соответствует разбиению $\{\tau_p\}_{p=0}^N$ промежутка $[0, T]$ с рангом дробления Δ_N , причем $0 = \tau_0 < \tau_1 < \dots < \tau_N = T$. Согласно методу Монте–Карло оценка для величины $M\{g(\mathbf{y}_T)\}$ имеет вид

$$\zeta_M = \frac{1}{M} \sum_{j=1}^M g(\mathbf{y}_T(\omega_j)),$$

где $\mathbf{y}_T(\omega_j), j = 1, \dots, M$, — независимые реализации случайной величины $\mathbf{y}_T$.

Введем ошибку ε , соответствующую разнице между истинным значением функционала $M\{g(\mathbf{x}_T)\}$ и его оценкой ζ_M [70, 86]:

$$\varepsilon \stackrel{\text{def}}{=} \zeta_M - M\{g(\mathbf{x}_T)\} = \varepsilon_{\text{syst}} + \varepsilon_{\text{stat}},$$

где

$$\begin{aligned} \varepsilon_{\text{syst}} &= M\{g(\mathbf{y}_T)\} - M\{g(\mathbf{x}_T)\}; \\ \varepsilon_{\text{stat}} &= \varepsilon - \varepsilon_{\text{syst}} = \zeta_M - M\{g(\mathbf{y}_T)\}. \end{aligned}$$

Систематическая ошибка $\varepsilon_{\text{syst}}$ определяется используемой слабой численной схемой и удовлетворяет оценке

$$|\varepsilon_{\text{syst}}| \leq C(\Delta_N)^\gamma,$$

где $C < \infty$ — постоянная, которая не зависит от Δ_N , а $\gamma > 0$ — порядок соответствующего слабого численного метода.

Статистическая ошибка $\varepsilon_{\text{stat}}$ при $M \rightarrow \infty$ очевидно является асимптотически нормальной с нулевым математическим ожиданием и дисперсией вида

$$D\{\varepsilon_{\text{stat}}\} = \frac{1}{M} D\{g(\mathbf{y}_T)\}.$$

Отметим, что длина доверительного интервала убывает с ростом числа N независимых реализаций достаточно медленно — со скоростью $\sqrt{M}$. Таким образом, для получения достаточно малого доверительного интервала необходимо, чтобы дисперсия $D\{g(\mathbf{y}_T)\}$ была

небольшой, поскольку длина доверительного интервала пропорциональна $\sqrt{D\{g(\mathbf{y}_T)\}}$. В [70, 86] отмечается, что при использовании для моделирования процесса $\mathbf{x}_t, t \in [0, T]$, слабых численных методов дисперсия $D\{g(\mathbf{y}_T)\}$ оказывается достаточно близкой к дисперсии $D\{g(\mathbf{x}_T)\}$, которая, в свою очередь, зависит от функции g и конкретного стохастического дифференциального уравнения и в ряде случаев может быть достаточно большой. В связи с этим возникает вопрос, возможно ли уменьшение дисперсии $D\{g(\mathbf{x}_T)\}$?

В литературе [70, 86] известно несколько подходов к уменьшению такой дисперсии. Один из них был предложен Г. Н. Мильштейном в [70] (см. также [86]). Он основан на преобразовании Гирсанова исходной вероятностной меры P и переходе от процесса Ито $\mathbf{x}_t$ к новому процессу Ито $\hat{\mathbf{x}}_t$ и специальному корректирующему скалярному процессу z_t так, что

$$M\{g(\hat{\mathbf{x}}_T)z_T\} = M\{g(\mathbf{x}_T)\}.$$

При этом дисперсия $D\{g(\hat{\mathbf{x}}_T)z_T\}$ может быть уменьшена путем специального выбора $\hat{\mathbf{x}}_T$ [70, 86]. Рассмотрим данный подход подробнее, руководствуясь работами [70, 86].

Пусть заданы вероятностное пространство $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ и поток σ -алгебр $\{\mathcal{F}_\tau, \tau \in [0, T]\}$. Пусть также $\mathbf{x}_t^{s, \mathbf{x}} \in \mathbb{R}^n, s \leq t \leq T$, — процесс Ито, являющийся решением следующего стохастического дифференциального уравнения Ито:

$$\mathbf{x}_t^{s, \mathbf{x}} = \mathbf{x} + \int_s^t \mathbf{a}(\mathbf{x}_\tau^{s, \mathbf{x}}, \tau) d\tau + \int_s^t \Sigma(\mathbf{x}_\tau^{s, \mathbf{x}}, \tau) d\mathbf{f}_\tau,$$

где неслучайные функции $\mathbf{a}(\mathbf{x}, t) : \mathbb{R}^n \times [0, T] \rightarrow \mathbb{R}^n, \Sigma(\mathbf{x}, t) : \mathbb{R}^n \times [0, T] \rightarrow \mathbb{R}^{n \times m}$ удовлетворяют условиям теоремы 1.6; $\mathbf{f}_\tau, \tau \in [0, T]$, — m -мерный и $\mathcal{F}_\tau$ -измеримый при каждом $\tau \in [0, T]$ стандартный винеровский процесс с независимыми компонентами; $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$.

Рассмотрим функционал вида

$$u(\mathbf{x}, s) = M\{g(\mathbf{x}_T^{s, \mathbf{x}})\}, \quad (10.77)$$

где $g(\mathbf{x}) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^1$ — заданная функция. В соответствии с (10.77) нашей целью является аппроксимация $u(\mathbf{x}, 0)$.

Предположим, что функции $g(\mathbf{x}), \mathbf{a}(\mathbf{x}, t), \Sigma(\mathbf{x}, t)$ удовлетворяют условиям теоремы 2.6. Тогда функция $u(\mathbf{x}, s)$ является решением задачи

$$Lu(\mathbf{x}, s) = 0, \quad u(\mathbf{y}, T) = g(\mathbf{y}), \quad (10.78)$$

для всех $(\mathbf{x}, s) \in (0, T) \times \mathbb{R}^n$, $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$,

$$\begin{aligned} Lu(\mathbf{x}, s) &= \frac{\partial u}{\partial s}(\mathbf{x}, s) + \sum_{i=1}^n \mathbf{a}^{(i)}(\mathbf{x}, s) \frac{\partial u}{\partial \mathbf{x}^{(i)}}(\mathbf{x}, s) + \\ &+ \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^n \sum_{l=1}^m \Sigma^{(il)}(\mathbf{x}, s) \Sigma^{(jl)}(\mathbf{x}, s) \frac{\partial^2 u}{\partial \mathbf{x}^{(i)} \partial \mathbf{x}^{(j)}}(\mathbf{x}, s). \end{aligned}$$

В [70] предлагается использовать преобразование Гирсанова (1.29) для преобразования исходной вероятностной меры $\mathbf{P}$ так, что процесс $\hat{\mathbf{f}}_t$ с компонентами

$$\hat{\mathbf{f}}_t^{(i)} = \mathbf{f}_t^{(i)} - \int_0^t \mathbf{c}^{(i)}(\hat{\mathbf{x}}_\tau^{0,\mathbf{x}}, \tau) d\tau, \quad i = 1, \dots, m,$$

оказывается винеровским относительно вероятностной меры $\hat{\mathbf{P}}$, т. е. на новом вероятностном пространстве $(\Omega, \mathcal{F}, \hat{\mathbf{P}})$, мера $\hat{\mathbf{P}}$ абсолютно непрерывна относительно меры $\mathbf{P}$ и имеет производную Радона–Никодима вида

$$\frac{d\hat{\mathbf{P}}}{d\mathbf{P}} = \frac{z_t}{z_0}, \quad (10.79)$$

процессы Ито $\hat{\mathbf{x}}_t^{0,\mathbf{x}}$ и z_t удовлетворяют следующим стохастическим дифференциальным уравнениям Ито:

$$\hat{\mathbf{x}}_t^{0,\mathbf{x}} = \mathbf{x} + \int_s^t \mathbf{a}(\hat{\mathbf{x}}_\tau^{0,\mathbf{x}}, \tau) d\tau + \int_s^t \Sigma(\hat{\mathbf{x}}_\tau^{0,\mathbf{x}}, \tau) d\hat{\mathbf{f}}_\tau, \quad (10.80)$$

$$z_t = z_0 + \sum_{j=1}^m \int_0^t z_\tau \mathbf{c}^{(j)}(\hat{\mathbf{x}}_\tau^{0,\mathbf{x}}, \tau) d\mathbf{f}_\tau^{(j)}; \quad (10.81)$$

$z_0 \neq 0$; $\mathbf{c}^{(j)}(\mathbf{x}, t) : \mathbb{R}^n \times [0, T] \rightarrow \mathbb{R}^1$ — заданная функция.

Используя (10.79)–(10.81), нетрудно получить [70, 86], что

$$\mathbf{M}\{g(\mathbf{x}_T^{0,\mathbf{x}})\} = \mathbf{M}\left\{g(\hat{\mathbf{x}}_T^{0,\mathbf{x}}) \frac{z_T}{z_0}\right\}. \quad (10.82)$$

Если предположить, что существуют решения уравнений (10.80) и (10.81), $u(\mathbf{x}, s) > 0$ при всех $(\mathbf{x}, s) \in \mathbb{R}^n \times [0, T]$, и положить [70, 86]

$$\mathbf{c}^{(i)}(\mathbf{x}, s) = -\frac{1}{u(\mathbf{x}, s)} \sum_{j=1}^n \Sigma^{(ji)}(\mathbf{x}, s) \frac{\partial u}{\partial \mathbf{x}^{(j)}}(\mathbf{x}, s) \quad (10.83)$$

для всех $(\mathbf{x}, s) \in \mathbb{R}^n \times [0, T]$, $i = 1, \dots, m$, то с помощью (10.78), (10.80), (10.81), (10.83) и формулы Ито можно установить [70], [86], что

$$u(\hat{\mathbf{x}}_t^{0,\mathbf{x}}, t) z_t = u(\mathbf{x}, 0) z_0 \quad (10.84)$$

для всех $t \in [0, T]$. Теперь из (10.78) и (10.84) получаем

$$u(\mathbf{x}, 0) = g(\hat{\mathbf{x}}_T^{0,\mathbf{x}}) \frac{z_T}{z_0}, \quad (10.85)$$

т. е. величина $g(\hat{\mathbf{x}}_T^{0,\mathbf{x}}) \frac{z_T}{z_0}$ неслучайна и, следовательно, имеет нулевую дисперсию!

Казалось бы, величину $\mathbb{M} \left\{ g(\hat{\mathbf{x}}_T^{0,\mathbf{x}}) \frac{z_T}{z_0} \right\}$ можно численно смоделировать с помощью слабых численных методов решения системы уравнений (10.80) и (10.81). Однако при получении (10.85) мы использовали представление (10.83), в которое входит неизвестная функция $u(\mathbf{x}, s)$ вида (10.77), являющаяся решением задачи (10.78), и аппроксимация значения которой при $s = 0$ является нашей исходной целью. Тем не менее если по каким-либо соображениям подобрана функция $\hat{u}(\mathbf{x}, s)$, которая достаточно близка к функции $u(\mathbf{x}, s)$, то можно надеяться, что $g(\hat{\mathbf{x}}_T^{0,\mathbf{x}}) \frac{z_T}{z_0}$ окажется случайной величиной с достаточно малой дисперсией при следующем выборе функции $\mathbf{c}(\mathbf{x}, t)$:

$$\mathbf{c}^{(i)}(\mathbf{x}, s) = -\frac{1}{\hat{u}(\mathbf{x}, s)} \sum_{j=1}^n \Sigma^{(ji)}(\mathbf{x}, s) \frac{\partial \hat{u}}{\partial \mathbf{x}^{(j)}}(\mathbf{x}, s), \quad i = 1, \dots, m.$$

Теперь, при таком выборе функции $\mathbf{c}(\mathbf{x}, s)$ с помощью слабых численных схем можно аппроксимировать величину $\mathbb{M} \left\{ g(\hat{\mathbf{x}}_T^{0,\mathbf{x}}) \frac{z_T}{z_0} \right\}$ и тем самым аппроксимировать согласно (10.82) функционал $\mathbb{M} \{ g(\mathbf{x}_T^{0,\mathbf{x}}) \}$.

Мы предполагали ранее, что функция u является строго положительной. Это условие очевидно выполнено, если, в свою очередь, функция g строго положительна, что далеко не всегда выполнимо. В [70, 86] описан способ снятия условия $g > 0$.

Так, если функция g ограничена и не является строго положительной, то можно подобрать такую постоянную $K \in (0, +\infty)$, что функция $g + K$ будет строго положительной. Если же функция g не ограничена, то ее можно представить в виде разности двух неотрицательных функций g_+ и g_- . Далее для некоторой постоянной $K_1 \in (0, +\infty)$ функции $g_+ + K_1$ и $g_- + K_1$ будут строго положительными и при этом $g = (g_+ + K_1) - (g_- + K_1)$. Теперь видно, что описанный метод можно применять для строго положительных функций $g + K$, $g_+ + K_1$, $g_- + K_1$.

Глава 11

Численное моделирование решений стационарных систем линейных стохастических дифференциальных уравнений

Линейные стохастические системы занимают особое место как в теории стохастических систем, так и в их приложениях в механике, электротехнике и других областях. Прикладная значимость линейных систем определяется тем, что они являются универсальным средством математического описания малых отклонений поведения реальных систем от номинальных режимов их функционирования. Теория стационарных систем линейных стохастических дифференциальных уравнений основывается на точных интегральных представлениях их решений и допускает применение специальных, особенно эффективных методов численно-статистического моделирования. Настоящая глава посвящена специальным методам численного моделирования стационарных систем линейных стохастических дифференциальных уравнений и их практической реализации.

11.1 Системы линейных стохастических дифференциальных уравнений: Расчетные формулы и вспомогательные результаты

Рассмотрим систему линейных стохастических дифференциальных уравнений общего вида (СЛСДУОВ):

$$dx_t = (A(t)x_t + g(t)) dt + \sum_{j=1}^m B_j(t)x_t df_t^{(j)} + \Sigma(t)df_t, \quad x_0 = x(0, \omega), \quad (11.1)$$

где $t \in [0, T]$; $\mathbf{x}_t$ — n -мерный случайный процесс, являющийся решением СЛСДУОВ (11.1) с начальным условием $\mathbf{x}_0$; $\mathbf{f}_t$ — m -мерный стандартный винеровский случайный процесс с независимыми компонентами $\mathbf{f}_t^{(i)}$, $i = 1, \dots, m$; начальное условие $\mathbf{x}_0$ и матричные функции $A(t)$, $B_1(t), \dots, B_m(t) : [0, T] \rightarrow \mathbb{R}^{n \times n}$, $\mathbf{g}(t) : [0, T] \rightarrow \mathbb{R}^n$, $\Sigma(t) : [0, T] \rightarrow \mathbb{R}^{n \times m}$ удовлетворяют условиям AI–AIII (теорема 1.6) существования и единственности решений стохастических дифференциальных уравнений Ито.

Если все матричные функции $B_1(t), \dots, B_m(t)$ в (11.1) равны нулевой матрице, то система (11.1) принимает вид

$$d\mathbf{x}_t = (A(t)\mathbf{x}_t + \mathbf{g}(t))dt + \Sigma(t)d\mathbf{f}_t, \quad \mathbf{x}_0 = \mathbf{x}(0, \omega), \quad (11.2)$$

и в дальнейшем называется системой линейных стохастических дифференциальных уравнений (СЛСДУ).

Если матричные функции $\mathbf{g}(t)$ и $\Sigma(t)$ в (11.1) равны нулевым матрицам соответствующих размеров, то СЛСДУОВ (11.1) преобразуется в следующую однородную систему линейных стохастических дифференциальных уравнений (ОСЛСДУ):

$$d\mathbf{x}_t = A(t)\mathbf{x}_t dt + \sum_{j=1}^m B_j(t)\mathbf{x}_t d\mathbf{f}_t^{(j)}, \quad \mathbf{x}_0 = \mathbf{x}(0, \omega). \quad (11.3)$$

Систему (11.2) можно трактовать как систему стохастических дифференциальных уравнений Ито, Стратоновича или в другом смысле, поскольку эта система по своей структуре имеет одно и то же решение, как бы она не рассматривалась (имеется в виду способ определения стохастического интеграла $\int_0^t \Sigma(\tau)d\mathbf{f}_\tau$ в соответствии с определениями 1.8, 1.12 или 1.13 при интегральной форме записи уравнения (11.2)). В связи с этим часто применяемая в технической литературе форма описания системы (11.2) в виде

$$\frac{d\mathbf{x}_t}{dt} = A(t)\mathbf{x}_t + \mathbf{g}(t) + \Sigma(t)\mathbf{f}_t, \quad \mathbf{x}_0 = \mathbf{x}(0, \omega)$$

с белым шумом $\mathbf{f}_t$ в правой части не приводит к неоднозначности математического определения решений системы (11.2).

Линейные стохастические дифференциальные уравнения (ЛСДУ) исследовались в ряде работ. Так, в [4, 8, 86, 154–157] рассматривались скалярные ЛСДУ. В этих работах получено интегральное представление решения скалярного ЛСДУ через фундаментальное решение,

а также изучены свойства решений скалярных ЛСДУ. Точные решения некоторых скалярных ЛСДУ можно найти в [86, 140, 154, 158, 159]. В работах [4, 8, 86, 159–161] выведены интегральные представления решений СЛСДУ и СЛСДУОВ через фундаментальную матрицу решений. В книге М. Арато [31] дано интегральное представление решений СЛСДУ с постоянными коэффициентами через матричную экспоненту и исследованы основные свойства этих систем. Кроме того, в [31] изучены дискретные линейные стохастические системы с постоянными коэффициентами, для которых построен алгоритм численного моделирования. Вопросы, связанные с численным моделированием СЛСДУ, рассматривались также в работах [162, 163].

Настоящая глава посвящена построению численных методов решения стационарных СЛСДУ (их определение будет дано далее), основанных на точном интегральном представлении решений таких систем. При этом рассматривается ряд вопросов, связанных с особенностями численной реализации построенных численных методов.

11.1.1 Интегральные представления решений СЛСДУ

Рассмотрим хорошо известные результаты (см., например, [4, 8, 86, 159–161]) по интегральному представлению решений СЛСДУОВ.

Сначала обратимся к скалярному случаю:

$$dx_t = (a(t)x_t + g(t))dt + (b(t)x_t + \sigma(t))df_t, \quad (11.4)$$

где $a(t), b(t), g(t), \sigma(t) : [0, T] \rightarrow \mathbb{R}^1$; $x_t, f_t \in \mathbb{R}^1$. Пусть $X_{t,t_0} \in \mathbb{R}^1$, $0 \leq t_0 \leq t \leq T$, — фундаментальное решение однородного уравнения

$$dx_t = a(t)x_t dt + b(t)x_t df_t, \quad (11.5)$$

которое удовлетворяет условию $X_{t_0,t_0} = 1$. Тогда

$$dX_{t,t_0} = a(t)X_{t,t_0}dt + b(t)X_{t,t_0}df_t. \quad (11.6)$$

Рассмотрим случайный процесс $\ln(X_{t,t_0})$ и найдем с помощью формулы Ито и соотношения (11.6) его стохастический дифференциал:

$$d\ln(X_{t,t_0}) = \left(a(t) - \frac{1}{2}b^2(t)\right)dt + b(t)df_t. \quad (11.7)$$

Правая часть (11.7) содержит только известные функции, и потому X_{t,t_0} может быть найдено из (11.7):

$$X_{t,t_0} = e^{\int_{t_0}^t (a(s) - \frac{1}{2}b^2(s))ds + \int_{t_0}^t b(s)df_s}. \quad (11.8)$$

Воспользовавшись фундаментальным решением X_{t,t_0} однородного уравнения (11.5), найдем интегральное представление решения линейного стохастического дифференциального уравнения (11.4). С этой целью рассмотрим случайный процесс $X_{t,t_0}^{-1}x_t$, где x_t — решение линейного стохастического дифференциального уравнения (11.4), и найдем с помощью формулы Ито его стохастический дифференциал. Поскольку из формулы Ито и (11.6) следует равенство

$$dX_{t,t_0}^{-1} = (-a(t) + b^2(t)) X_{t,t_0}^{-1} dt - b(t) X_{t,t_0}^{-1} df_t, \quad (11.9)$$

то по формуле Ито и (11.4), (11.9) получаем

$$d(X_{t,t_0}^{-1}x_t) = (g(t) - b(t)\sigma(t)) X_{t,t_0}^{-1} dt + \sigma(t) X_{t,t_0}^{-1} df_t.$$

Из последнего равенства с учетом того, что $X_{t_0,t_0} = 1$, имеем следующее интегральное представление решения линейного стохастического дифференциального уравнения (11.4):

$$x_t = X_{t,t_0} \left(x_{t_0} + \int_{t_0}^t (g(s) - b(s)\sigma(s)) X_{s,t_0}^{-1} ds + \int_{t_0}^t \sigma(s) X_{s,t_0}^{-1} df_s \right), \quad (11.10)$$

где

$$X_{t,t_0} = e^{\int_{t_0}^t (a(s) - \frac{1}{2}b^2(s)) ds + \int_{t_0}^t b(s) df_s}.$$

Перейдем к рассмотрению СЛСДУОВ (11.1). Обобщив формулу (11.10) на случай СЛСДУОВ (11.1), получим

$$\mathbf{x}_t = X_{t,t_0} \left(\mathbf{x}_{t_0} + \int_{t_0}^t X_{s,t_0}^{-1} \left(\mathbf{g}(s) - \sum_{j=1}^m B_j(s) \Sigma_j(s) \right) ds + \int_{t_0}^t X_{s,t_0}^{-1} \Sigma(s) d\mathbf{f}_s \right), \quad (11.11)$$

где $0 \leq t_0 \leq t \leq T$; $\mathbf{x}_t \in \mathbb{R}^n$ — решение СЛСДУОВ (11.1); $X_{t,t_0} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ — фундаментальная матрица решений ОСЛСДУ (11.3); $\Sigma_j(t)$ — j -й столбец матрицы $\Sigma(t)$; $\mathbf{f}_s$ — m -мерный стандартный винеровский процесс с независимыми компонентами $\mathbf{f}_s^{(i)}$, $i = 1, \dots, m$; остальные обозначения, входящие в (11.11), такие же, как в (11.1).

Таким образом, проблема отыскания решения СЛСДУОВ (11.1) свелась к отысканию фундаментальной матрицы решений ОСЛСДУ (11.3). Известно (см., например, [86]), что фундаментальная матрица решений ОСЛСДУ (11.3) может быть найдена в том случае, когда матрицы $A(t)$, $B_j(t)$, $j = 1, \dots, m$, постоянны и попарно коммутируют, т. е.

$$AB_j = B_jA, \quad B_iB_j = B_jB_i, \quad i, j = 1, \dots, m.$$

В этом случае фундаментальная матрица решений ОСЛСДУ (11.3) имеет вид

$$X_{t,t_0} = e^{\left(A - \frac{1}{2} \sum_{j=1}^m B_j^2\right)(t-t_0) + \sum_{j=1}^m B_j(\mathbf{f}_t^{(j)} - \mathbf{f}_{t_0}^{(j)})}, \quad (11.12)$$

где e^C — матричная экспонента [17]

$$e^C \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{C^k}{k!},$$

C — квадратная матрица; $C^0 \stackrel{\text{def}}{=} I$ — единичная матрица.

Если матрицы $B_j(t)$, $j = 1, \dots, m$, нулевые, то из (11.12) получаем

$$X_{t,t_0} = e^{A(t-t_0)}.$$

Стационарной СЛСДУ называем систему (11.2), если $A(t) \equiv A$, $\Sigma(t) \equiv \Sigma$:

$$d\mathbf{x}_t = (A\mathbf{x}_t + \mathbf{g}(t))dt + \Sigma d\mathbf{f}_t, \quad \mathbf{x}_0 = \mathbf{x}(0, \omega). \quad (11.13)$$

В этом случае фундаментальная матрица решений X_{t,t_0} представляет собой матричную экспоненту:

$$X_{t,t_0} = e^{A(t-t_0)} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^k(t-t_0)^k}{k!}.$$

Формулу (11.11) запишем при этом в виде

$$\mathbf{x}_t = e^{A(t-t_0)}\mathbf{x}_{t_0} + \int_{t_0}^t e^{A(t-s)}\mathbf{g}(s)ds + \int_{t_0}^t e^{A(t-s)}\Sigma d\mathbf{f}_s, \quad 0 \leq t_0 \leq t \leq T. \quad (11.14)$$

Формулу (11.14) в дальнейшем иногда будем называть формулой Коши в силу ее некоторого внешнего сходства с формулой Коши решения обыкновенных линейных дифференциальных уравнений.

Таким образом, если в случае стационарной СЛСДУ (11.13) взять эквидистантную временную сетку $\{\tau_k\}_{k=0}^K$ такую, что

$$\tau_k = k\Delta, \quad K\Delta = T, \quad k = 0, 1, \dots, K,$$

где Δ — шаг сетки, и ввести обозначения

$$\tilde{A}(\Delta) = e^{A\Delta},$$

$$\tilde{\mathbf{g}}(k, \Delta) \stackrel{\text{def}}{=} \int_0^{\Delta} e^{A(\Delta-s)}\mathbf{g}(k\Delta + s)ds, \quad \tilde{\mathbf{f}}_{k+1}(\Delta) \stackrel{\text{def}}{=} \int_0^{\Delta} e^{A(\Delta-s)}\Sigma d\mathbf{f}_{k\Delta+s},$$

то решение системы (11.13) в дискретные моменты времени τ_k может быть найдено с помощью рекуррентной формулы

$$\mathbf{x}_{k+1} = \tilde{A}(\Delta)\mathbf{x}_k + \tilde{\mathbf{g}}(k, \Delta) + \tilde{\mathbf{f}}_{k+1}(\Delta), \quad \mathbf{x}_0 = \mathbf{x}(0, \omega), \quad (11.15)$$

где $\mathbf{x}_{\tau_k} \stackrel{\text{def}}{=} \mathbf{x}_k$; $\tilde{\mathbf{f}}_k(\Delta)$ — векторный гауссовский дискретный случайный процесс такой, что

$$\mathbf{M}\{\tilde{\mathbf{f}}_k(\Delta)\} = 0, \quad \mathbf{M}\{\tilde{\mathbf{f}}_k(\Delta)\tilde{\mathbf{f}}_l^T(\Delta)\} = O_{n \times n} \text{ при } k \neq l,$$

с дисперсионной матрицей

$$D_f(\Delta) \stackrel{\text{def}}{=} \mathbf{M}\{\tilde{\mathbf{f}}_k(\Delta)\tilde{\mathbf{f}}_k^T(\Delta)\} = \int_0^\Delta e^{A(\Delta-s)}\Sigma\Sigma^T e^{A^T(\Delta-s)}ds, \quad (11.16)$$

равной при $t = \Delta$ решению матричного дифференциального уравнения вида

$$\frac{dD_f(t)}{dt} = AD_f(t) + D_f(t)A^T + \Sigma\Sigma^T, \quad D_f(0) = O_{n \times n}, \quad (11.17)$$

которое может быть получено с использованием формулы Ито; здесь $O_{n \times n}$ — нулевая $(n \times n)$ -матрица.

Если все собственные числа матрицы A лежат в левой полуплоскости: $\text{Re}(\lambda_i(A)) < 0$, где $\lambda_i(A)$ — собственные числа матрицы A , то уравнение (11.17) имеет стационарное решение $D(\infty)$, удовлетворяющее следующей системе линейных алгебраических уравнений:

$$0 = AD(\infty) + D(\infty)A^T + \Sigma\Sigma^T.$$

11.1.2 Моментные характеристики решений СЛСДУ

Приведем известные в литературе (см., например, [4, 8, 86, 159–161]) уравнения, которым удовлетворяют моментные характеристики решений СЛСДУ. Введем обозначения

$$\mathbf{M}\{\mathbf{x}_t\} \stackrel{\text{def}}{=} \mathbf{m}_x(t), \quad \mathbf{x}_t - \mathbf{m}_x(t) \stackrel{\text{def}}{=} \mathring{\mathbf{x}}_t, \quad \mathbf{M}\{\mathbf{x}_t\mathbf{x}_t^T\} \stackrel{\text{def}}{=} Q_x(t),$$

$$\mathbf{M}\left\{\mathring{\mathbf{x}}_t\mathring{\mathbf{x}}_\tau^T\right\} \stackrel{\text{def}}{=} R_x(t, \tau), \quad R_x(t, t) \stackrel{\text{def}}{=} D_x(t).$$

В случае СЛСДУОВ из (11.1) с учетом введенных обозначений получим:

1. Для $\mathbf{m}_x(t)$ при $t \geq 0$

$$\frac{d\mathbf{m}_x(t)}{dt} = A(t)\mathbf{m}_x(t) + \mathbf{g}(t), \quad \mathbf{m}_x(0) = M\{\mathbf{x}_0\}.$$

2. Для $Q_x(t)$ при $t \geq 0$

$$\begin{aligned} \frac{dQ_x(t)}{dt} = & A(t)Q_x(t) + Q_x(t)A^\top(t) + \sum_{i=1}^m B_i(t)Q_x(t)B_i^\top(t) + \mathbf{g}(t)\mathbf{m}_x^\top(t) + \\ & + \mathbf{m}_x(t)\mathbf{g}^\top(t) + \sum_{i=1}^m (B_i(t)\mathbf{m}_x(t)\Sigma_i^\top(t) + \Sigma_i(t)\mathbf{m}_x^\top(t)B_i(t) + \Sigma_i(t)\Sigma_i^\top(t)), \end{aligned} \quad (11.18)$$

где $Q_x(0) = M\{\mathbf{x}_0\mathbf{x}_0^\top\}$; $\mathbf{m}_x(0) = M\{\mathbf{x}_0\}$. Отметим, что уравнение (11.18) может быть получено с использованием формулы Ито.

Рассмотрим СЛСДУ (11.2). В этом случае имеем:

1. Для $\mathbf{m}_x(t)$ при $t \geq 0$

$$\frac{d\mathbf{m}_x(t)}{dt} = A(t)\mathbf{m}_x(t) + \mathbf{g}(t), \quad \mathbf{m}_x(0) = M\{\mathbf{x}_0\}.$$

2. Для $D_x(t)$ при $t \geq 0$

$$\frac{dD_x(t)}{dt} = A(t)D_x(t) + D_x(t)A^\top(t) + \Sigma(t)\Sigma^\top(t), \quad D_x(0) = M\{\mathring{\mathbf{x}}_0\mathring{\mathbf{x}}_0^\top\}.$$

3. Для $R_x(t, \tau)$ при $t, \tau \geq 0$

$$\frac{\partial R_x}{\partial t}(t, \tau) = A(t)R_x(t, \tau) \text{ при } t \geq \tau, \quad R_x(\tau, \tau) = D_x(\tau),$$

$$R(t, \tau) = R^\top(\tau, t) \text{ при } t \leq \tau.$$

В случае стационарной СЛСДУ (11.13)

$$\frac{d\mathbf{m}_x(t)}{dt} = A\mathbf{m}_x(t) + \mathbf{g}(t), \quad \mathbf{m}_x(0) = M\{\mathbf{x}_0\},$$

или в интегральной форме,

$$\mathbf{m}_x(t) = e^{At}\mathbf{m}_x(0) + \int_0^t e^{A(t-\tau)}\mathbf{g}(\tau)d\tau,$$

$$\frac{dD_x(t)}{dt} = AD_x(t) + D_x(t)A^\top + \Sigma\Sigma^\top, \quad D_x(0) = M\{\mathring{\mathbf{x}}_0\mathring{\mathbf{x}}_0^\top\}, \quad (11.19)$$

$$\frac{\partial R_x}{\partial t}(t, \tau) = AR_x(t, \tau) \text{ при } t \geq \tau, \quad R_x(\tau, \tau) = D_x(\tau),$$

$$R(t, \tau) = R^\top(\tau, t) \text{ при } t \leq \tau.$$

Нетрудно видеть, что в данном случае

$$R_x(t, \tau) = \begin{cases} e^{A(t-\tau)} D_x(\tau) & \text{при } t \geq \tau, \\ D_x(t) e^{A^\top(\tau-t)} & \text{при } \tau \geq t. \end{cases}$$

Для гурвицевой матрицы A матричное уравнение (11.19) имеет стационарное решение, удовлетворяющее системе линейных алгебраических уравнений вида

$$0 = AD_x(\infty) + D_x(\infty)A^\top + \Sigma\Sigma^\top.$$

Если $D_x(0) = D_x(\infty)$, то $D_x(t) = D_x(\infty)$ — постоянная. Тогда

$$R_x(t, \tau) \equiv R_x(t - \tau) = \begin{cases} e^{A(t-\tau)} D_x(\infty) & \text{при } t \geq \tau, \\ D_x(\infty) e^{A^\top(\tau-t)} & \text{при } \tau \geq t. \end{cases} \quad (11.20)$$

Если $D_x(0) \neq D_x(\infty)$, то в силу гурвицевости матрицы $A : D_x(t) \rightarrow D_x(\infty)$ при $t \rightarrow \infty$, и формула (11.20) оказывается справедливой асимптотически при $t, \tau \rightarrow \infty$, $|t - \tau| < \infty$, т. е.

$$\lim R_x(t, \tau) = R_x(t - \tau) \text{ при } t, \tau \rightarrow \infty, \quad |t - \tau| < \infty,$$

где $R_x(t - \tau)$ определяется правой частью формулы (11.20).

Таким образом, центрированная составляющая решения системы (11.13) $\overset{\circ}{\mathbf{x}}_t = \mathbf{x}_t - \mathbf{m}_x(t)$ в случае гурвицевой матрицы A является либо стационарным процессом при $D_x(0) = D_x(\infty)$, либо асимптотически стационарным при $D_x(0) \neq D_x(\infty)$.

Пусть выходными переменными стационарной СЛСДУ (11.13) являются линейные комбинации компонент вектора состояния $\mathbf{x}_t$:

$$\mathbf{y}_t = H^\top \mathbf{x}_t \in \mathfrak{R}^l,$$

где $H \in \mathfrak{R}^{n \times l}$ — числовая матрица. Тогда моментные характеристики процесса $\mathbf{y}_t$ определяются по формулам

$$\begin{aligned} \mathbf{M} \{ \mathbf{y}_t \} &\stackrel{\text{def}}{=} \mathbf{m}_y(t) = H^\top \mathbf{m}_x(t), \\ \mathbf{M} \left\{ \overset{\circ}{\mathbf{y}}_t \overset{\circ}{\mathbf{y}}_\tau^\top \right\} &\stackrel{\text{def}}{=} R_y(t, \tau) = H^\top R_x(t, \tau) H, \quad R_y(t, t) \stackrel{\text{def}}{=} D_y(t) = H^\top D_x(t) H. \end{aligned} \quad (11.21)$$

В установившемся режиме для гурвицевой матрицы A формулы (11.21) при $\tau, t \rightarrow \infty, |t - \tau| < \infty$ принимают вид

$$D_y(\infty) = H^T D_x(\infty) H, \quad \lim R_y(t, \tau) = R_y(t - \tau) = H^T R_x(t - \tau) H,$$

где $R_x(t - \tau)$ определяется правой частью формулы (11.20).

Спектральная плотность центрированной составляющей стационарного выходного процесса y_t представима в виде

$$\begin{aligned} S_y(\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} R_y(t) e^{-i\omega t} dt = H^T (i\omega I - A)^{-1} \Sigma \Sigma^T (-i\omega I - A^T)^{-1} H = \\ &= G(i\omega) G^T(-i\omega), \end{aligned}$$

где I — единичная матрица; i — мнимая единица; $G(p) = H^T (pI - A)^{-1} \Sigma$ — матричная передаточная функция системы от входа f_t к выходу y_t .

11.1.3 Свойства дискретных систем линейных стохастических уравнений в стационарном случае

Рассмотрим дискретную линейную стохастическую систему (11.15) и положим в ней

$$\tilde{A}(\Delta) = \tilde{A}, \quad \tilde{g}(k, \Delta) = \tilde{B}u(k), \quad \tilde{f}_k(\Delta) = \tilde{\Sigma}v_k, \quad y_k = H^T x_k.$$

Здесь $u(k) \in \mathbb{R}^r$ — детерминированное векторное возмущение; $v_k \in \mathbb{R}^m$ — бел шумный векторный гауссовский дискретный случайный процесс с нулевым средним и дисперсионной матрицей, равной единичной матрице:

$$M \{v_k\} \equiv 0, \quad M \{v_k v_k^T\} = I,$$

$y_k \in \mathbb{R}^l$ — выходная переменная; $\tilde{B} \in \mathbb{R}^{n \times r}$, $\tilde{\Sigma} \in \mathbb{R}^{n \times m}$, $H \in \mathbb{R}^{n \times l}$ — числовые матрицы.

С учетом принятых обозначений систему (11.15) запишем в виде

$$x_{k+1} = \tilde{A}x_k + \tilde{B}u(k) + \tilde{\Sigma}v_{k+1}, \quad x_0 = x(0, \omega), \quad (11.22)$$

$$y_k = H^T x_k.$$

Введем обозначения

$$M \{x_k\} \stackrel{\text{def}}{=} m_x(k), \quad x_k - m_x(k) \stackrel{\text{def}}{=} \tilde{x}_k,$$

$$\mathbf{M} \left\{ \overset{\circ}{\mathbf{x}}_k \overset{\circ}{\mathbf{x}}_r^\top \right\} \stackrel{\text{def}}{=} R_x(k, r), \quad R_x(k, k) \stackrel{\text{def}}{=} D_x(k).$$

Рассмотрим моментные характеристики решения системы (11.22) (см., например, [159]).

1. Для $\mathbf{m}_x(k)$ и $\mathbf{m}_y(k)$

$$\begin{aligned} \mathbf{m}_x(k+1) &= \tilde{A}\mathbf{m}_x(k) + \tilde{B}\mathbf{u}(k), \quad \mathbf{m}_x(0) = \mathbf{M} \{ \mathbf{x}_0 \}, \\ \mathbf{m}_y(k) &= H^\top \mathbf{m}_x(k) \end{aligned}$$

или

$$\begin{aligned} \mathbf{m}_x(k+1) &= \tilde{A}^{k+1} \mathbf{m}_x(0) + \sum_{i=0}^{k-1} \tilde{A}^{k-i} \tilde{B} \mathbf{u}(i), \\ \mathbf{m}_y(k+1) &= H^\top \tilde{A}^{k+1} \mathbf{m}_x(0) + \sum_{i=0}^{k-1} H^\top \tilde{A}^{k-i} \tilde{B} \mathbf{u}(i). \end{aligned}$$

2. Для $D_x(k)$ и $D_y(k)$

$$D_x(k+1) = \tilde{A}D_x(k)\tilde{A}^\top + \tilde{\Sigma}^2, \quad D_x(0) = \mathbf{M} \left\{ \overset{\circ}{\mathbf{x}}_0 \overset{\circ}{\mathbf{x}}_0^\top \right\}, \quad (11.23)$$

$$D_y(k) = H^\top D_x(k) H.$$

3. Для $R_x(k, r)$ и $R_y(k, r)$

$$\begin{aligned} R_x(k, r) &= \begin{cases} e^{A(k-r)} D_x(r) & \text{при } k \geq r, \\ D_x(k) e^{A^\top(r-k)} & \text{при } r \geq k, \end{cases} \\ R_y(k, r) &= \begin{cases} H^\top e^{A(k-r)} D_x(r) H & \text{при } k \geq r, \\ H^\top D_x(k) e^{A^\top(r-k)} H & \text{при } r \geq k. \end{cases} \end{aligned}$$

Предположим, что все собственные числа матрицы $\tilde{A}$ в (11.22) лежат внутри единичного круга. Тогда уравнение (11.23) имеет асимптотически устойчивое решение, удовлетворяющее следующей системе линейных алгебраических уравнений:

$$D_x(\infty) = \tilde{A}D_x(\infty)\tilde{A}^\top + \tilde{\Sigma}^2,$$

при этом

$$D_y(\infty) = H^\top D_x(\infty) H.$$

Если $D_x(0) = D_x(\infty)$, то $D_x(k) = D_x(\infty)$ — постоянная. Тогда

$$R_x(k, r) \equiv R_x(k-r) = \begin{cases} e^{A(k-r)} D_x(\infty) & \text{при } k \geq r, \\ D_x(\infty) e^{A^\top(r-k)} & \text{при } r \geq k. \end{cases} \quad (11.24)$$

Если $D_x(0) \neq D_x(\infty)$, то в силу предположения о собственных числах матрицы $\tilde{A} : D_x(k) \rightarrow D_x(\infty)$ при $k \rightarrow \infty$, и формула (11.24) оказывается справедливой асимптотически при $k, r \rightarrow \infty, |k - r| < \infty$, т. е.

$$\lim R_x(k, r) = R_x(k - r) \text{ при } k, r \rightarrow \infty, |k - r| < \infty.$$

Таким образом, в случае когда все собственные числа матрицы $\tilde{A}$ лежат внутри единичного круга центрированная составляющая решения системы (11.22) $\tilde{\mathbf{x}}_k = \mathbf{x}_k - \mathbf{m}_x(k)$ является либо стационарным процессом при $D_x(0) = D_x(\infty)$, либо асимптотически стационарным при $D_x(0) \neq D_x(\infty)$.

11.2 Метод численного моделирования решений стационарных СЛСДУ, основанный на формуле Коши и спектральном разложении

В данном разделе изучается метод численного решения стационарных СЛСДУ, основанный на представлении их решений по формуле Коши и спектральном разложении дисперсионной матрицы случайной составляющей решения стационарной СЛСДУ.

В предыдущих главах рассматривалась общая теория численного решения нелинейных стохастических дифференциальных уравнений Ито, основанная на разложениях Тейлора–Ито и Тейлора–Стратоновича, а также на специальных методах численного моделирования повторных стохастических интегралов, входящих в эти разложения. Естественным, что данная общая теория численного решения стохастических дифференциальных уравнений Ито применима и к стационарным СЛСДУ. Однако структура стационарных СЛСДУ допускает построение специальных методов численного интегрирования, основанных на точном интегральном представлении их решений, которые оказываются существенно проще в сравнении с численными методами решения этих систем, построенными согласно общей теории численного интегрирования стохастических дифференциальных уравнений Ито. Построению именно одного из таких эффективных методов численного решения стационарных СЛСДУ посвящен настоящий раздел.

Поясним подробнее, как рекомендуется численно решать стационарную СЛСДУ (11.13) согласно общей теории численного интегрирования стохастических дифференциальных уравнений Ито.

Унифицированное разложение Тейлора–Ито решения системы (11.13)

при $t > t_0$ имеет следующий вид:

$$\mathbf{x}_t = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{j!} \left((t - t_0)^j A^j \mathbf{x}_{t_0} + \int_{t_0}^t (t - s)^j A^j B \mathbf{u}(s) ds + \int_{t_0}^t (t - s)^j A^j \Sigma d\mathbf{f}_s \right), \quad (11.25)$$

где ряд сходится с вероятностью 1 для всех $t \in (t_0, T] \subset [0, T]$. Затем необходимо положить в (11.25) $t = \tau_{k+1}$, $t_0 = \tau_k$, $\tau_k = k\Delta$, $\Delta > 0$, $k = 0, 1, \dots$, и заменить в нем ряд конечной суммой. В результате получаем рекуррентное представление аппроксимации $\tilde{\mathbf{x}}_k$ процесса $\mathbf{x}_k$:

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbf{x}}_{k+1} = \sum_{j=0}^J \frac{1}{j!} \left(\Delta^j A^j \tilde{\mathbf{x}}_k + \int_{\tau_k}^{\tau_{k+1}} (\tau_{k+1} - s)^j A^j B \mathbf{u}(s) ds + \right. \\ \left. + \int_{\tau_k}^{\tau_{k+1}} (\tau_{k+1} - s)^j A^j \Sigma d\mathbf{f}_s \right), \end{aligned} \quad (11.26)$$

где $\tilde{\mathbf{x}}_{k\Delta} \stackrel{\text{def}}{=} \tilde{\mathbf{x}}_k$; $\mathbf{x}_{k\Delta} \stackrel{\text{def}}{=} \mathbf{x}_k$, $k = 0, 1, \dots$. Далее на каждом шаге интегрирования необходимо моделировать совокупности стохастических интегралов Ито вида

$$\int_{\tau_k}^{\tau_{k+1}} (\tau_{k+1} - s)^j d\mathbf{f}_s^{(i)}, \quad j = 0, 1, \dots, J < \infty; \quad i = 1, \dots, m,$$

входящих в правую часть (11.26). Для среднеквадратической аппроксимации этих интегралов в работах [70, 86] рекомендуется разлагать их в ряды по системе стандартных гауссовских случайных величин с использованием разложения броуновского моста в тригонометрический ряд Фурье. В результате можно получить (см. главу 6) следующие сходящиеся в среднеквадратическом смысле разложения:

$$\begin{aligned} \int_{\tau_k}^{\tau_{k+1}} d\mathbf{f}_s^{(i)} = \sqrt{\Delta} \zeta_0^{(i)}, \quad \int_{\tau_k}^{\tau_{k+1}} (\tau_{k+1} - s) d\mathbf{f}_s^{(i)} = \frac{\Delta^{\frac{3}{2}}}{2} \left[\zeta_0^{(i)} + \frac{\sqrt{2}}{\pi} \sum_{r=1}^{\infty} \frac{1}{r} \zeta_{2r-1}^{(i)} \right], \\ \int_{\tau_k}^{\tau_{k+1}} (\tau_{k+1} - s)^2 d\mathbf{f}_s^{(i)} = \Delta^{\frac{5}{2}} \left[\frac{1}{3} \zeta_0^{(i)} + \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_{r=1}^{\infty} \left(\frac{1}{\pi^2 r^2} \zeta_{2r}^{(i)} + \frac{1}{\pi r} \zeta_{2r-1}^{(i)} \right) \right], \end{aligned}$$

где $\zeta_j^{(i)} = \int_{\tau_k}^{\tau_{k+1}} \phi_j(s) d\mathbf{f}_s^{(i)}$, а $\{\phi_j(s)\}_{j=0}^{\infty}$ — полная ортонормированная в пространстве $L_2([\tau_k, \tau_{k+1}])$ система тригонометрических функций.

В главе 6 рассмотрен более общий метод разложения повторных стохастических интегралов, который допускает применение различных полных ортонормированных в пространстве $L_2([\tau_k, \tau_{k+1}])$ систем

функций. Согласно этому методу, используя полиномы Лежандра (см. главу 6), с вероятностью 1 имеем

$$\int_{\tau_k}^{\tau_{k+1}} d\mathbf{f}_s^{(i)} = \sqrt{\Delta} \zeta_0^{(i)}, \quad \int_{\tau_k}^{\tau_{k+1}} (\tau_{k+1} - s) d\mathbf{f}_s^{(i)} = \frac{\Delta^{\frac{3}{2}}}{2} \left(\zeta_0^{(i)} - \frac{1}{\sqrt{3}} \zeta_1^{(i)} \right), \quad (11.27)$$

$$\int_{\tau_k}^{\tau_{k+1}} (\tau_{k+1} - s)^2 d\mathbf{f}_s^{(i)} = \frac{\Delta^{\frac{5}{2}}}{3} \left(\zeta_0^{(i_1)} - \frac{\sqrt{3}}{2} \zeta_1^{(i_1)} + \frac{1}{2\sqrt{5}} \zeta_2^{(i_1)} \right), \quad (11.28)$$

где $\zeta_j^{(i)} = \int_{\tau_k}^{\tau_{k+1}} \phi_j(s) d\mathbf{f}_s^{(i)}$, а $\{\phi_j(s)\}_{j=0}^{\infty}$ — полная ортонормированная в пространстве $L_2([\tau_k, \tau_{k+1}])$ система полиномов Лежандра.

Несмотря на простоту, разложения типа (11.27), (11.28) все же неудобны, поскольку для получения приемлемой точности при численном решении стационарной СЛСДУ (11.13) необходимо выбирать число J в (11.26) по возможности большим, что ведет к существенному усложнению вычислительной схемы.

Цель настоящего раздела показать на примере построенного далее численного метода, что применение общей теории численного интегрирования стохастических дифференциальных уравнений Ито к стационарным СЛСДУ не рационально, поскольку последние допускают построение значительно более простых численных методов.

11.2.1 Общий подход к моделированию. Структурирование проблемы

Рассмотрим СЛСДУ вида (11.2) в предположениях:

$$A(t) \equiv A, \quad \mathbf{g}(t) \equiv B\mathbf{u}(t), \quad \Sigma(t) \equiv \Sigma. \quad (11.29)$$

Выходом системы будем считать линейную комбинацию компонент вектора состояния системы. С учетом (11.29) система уравнений (11.2) может быть переписана в виде

$$d\mathbf{x}_t = (A\mathbf{x}_t + B\mathbf{u}(t)) dt + \Sigma d\mathbf{f}_t, \quad \mathbf{x}_0 = \mathbf{x}(0, \omega), \quad (11.30)$$

$$\mathbf{y}_t = H^\top \mathbf{x}_t.$$

Здесь $\mathbf{x}_t \in \mathbb{R}^n$ — решение стационарной СЛСДУ (11.30); $\mathbf{u}(t) : [0, T] \rightarrow \mathbb{R}^k$ — детерминированное внешнее возмущение; $\mathbf{y}_t \in \mathbb{R}^l$ — процесс на выходе, численная реализация которого является целью численного моделирования; $H \in \mathbb{R}^{n \times l}$, $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $\Sigma \in \mathbb{R}^{n \times m}$, $B \in \mathbb{R}^{n \times k}$ —

числовые матрицы; $\mathbf{f}_t \in \mathbb{R}^m$ — стандартный винеровский случайный процесс с независимыми компонентами $\mathbf{f}_t^{(i)}$, $i = 1, \dots, m$.

Рассмотрим временную сетку $\{\tau_k\}_{k=0}^K$ с постоянным шагом $\Delta > 0$, т. е. такую, что

$$\tau_k = k\Delta, \quad K\Delta = T, \quad k = 0, 1, \dots, K.$$

Интегральное представление решения системы (11.30) на этой временной сетке с постоянным шагом Δ запишем в форме Коши в виде

$$\mathbf{x}_{k+1} = e^{A\Delta} \mathbf{x}_k + \int_0^\Delta e^{A(\Delta-\tau)} B \mathbf{u}(\tau + k\Delta) d\tau + \int_0^\Delta e^{A(\Delta-\tau)} \Sigma d\mathbf{f}_{\tau+k\Delta}, \quad (11.31)$$

где $\mathbf{x}_{k\Delta} \stackrel{\text{def}}{=} \mathbf{x}_k$, $k = 0, 1, \dots, K$; $K\Delta = T$.

Исходя из сущности слагаемых, входящих в правую часть (11.31), будем называть первое слагаемое *переходной*, или *динамической*, составляющей, второе — *систематической* составляющей, а третье — *случайной* составляющей векторного случайного процесса $\mathbf{x}_k$, $k = 0, 1, \dots, K$. Рассмотрим особенности численного моделирования каждой из этих составляющих.

11.2.2 Алгоритм численного моделирования динамической составляющей решения

Вычисление динамической составляющей процесса $\mathbf{x}_k$, $k = 0, 1, \dots, K$, на каждом шаге численного моделирования требует знания матрицы $e^{A\Delta}$. По определению матричная экспонента задается в виде ряда [17]:

$$e^{A\Delta} = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{A^i \Delta^i}{i!}, \quad (11.32)$$

где $A^0 \stackrel{\text{def}}{=} I$ — единичная матрица. Однако использование формулы (11.32) непосредственно для вычисления $e^{A\Delta}$ не рационально, так как достижение приемлемой точности вычисления матричной экспоненты требует в этом случае выполнения большого числа операций матричного умножения и сложения. Для эффективного вычисления матричной экспоненты в [165] рекомендуется использовать специальный алгоритм "быстрого" вычисления, основанный на формуле

$$e^{A\Delta} = \left(e^{A \frac{\Delta}{2^M}} \right)^{2^M} \approx \left(\sum_{i=0}^N \frac{A^i}{i!} \left(\frac{\Delta}{2^M} \right)^i \right)^{2^M}, \quad (11.33)$$

где $N \geq 1$, $M \geq 0$ — некоторые целые числа.

Отметим, что если $M = 0$, $N = \infty$, то правая часть формулы (11.33) совпадает с правой частью формулы (11.32). При $M = 2, 3, \dots$ величина $\frac{\Delta}{2^M}$ значительно меньше Δ , и, следовательно, для аппроксимации с достаточной точностью матричной экспоненты $e^{A\Delta}$ число $N + 1$ членов суммы в (11.33) может быть взято значительно меньшим, чем при $M = 0$. При этом указанное различие тем значительнее, чем больше значение M .

При вычислениях по формуле (11.33) необходимо выполнить $M + N$ умножений квадратных $(n \times n)$ -матриц и, кроме того, произвести N сложений $(n \times n)$ -матриц и N умножений $(n \times n)$ -матрицы на число. Отсюда следует, что при достаточно большом n общее число арифметических операций, затрачиваемых на вычисление по формуле (11.33), можно считать пропорциональным $N + M$.

В работе [169] (см. также [170]) показано, что для вычисления матричной экспоненты $e^{A\Delta}$ по формуле (11.33) с точностью не хуже ε :

$$\|e^{A\Delta} - e_*^{A\Delta}\| \leq \varepsilon,$$

достаточно выбрать такие целые $N \geq 1$ и $M \geq 0$, при которых выполняется условие

$$\frac{e^{\|A\|\Delta} (\|A\|\Delta)^{N+1}}{2^{MN}(N+1)!} \leq \varepsilon, \quad (11.34)$$

поскольку [169]

$$\|e^{A\Delta} - e_*^{A\Delta}\| \leq \frac{e^{\|A\|\Delta} (\|A\|\Delta)^{N+1}}{2^{MN}(N+1)!}$$

при условии, что

$$\left(\frac{\|A\|\Delta}{2^M}\right)^{N+1} \frac{1}{(N+1)!} \leq 1; \quad (11.35)$$

здесь и далее

$$\|A\| = \max_{1 \leq i \leq n} \sum_{j=1}^n |A^{(ij)}|,$$

$A^{(ij)}$ — компонента матрицы A ; $e_*^{A\Delta}$ — приближенное значение $e^{A\Delta}$.

В [169] поставлены и решены задачи об определении оптимальной пары (M, N) , используемой в формуле (11.33). Оказалось [169], что соотношения, связывающие оптимальные M и N в задаче об определении минимума числа арифметических операций при заданном уровне

погрешности ε вычисления матричной экспоненты и в задаче минимизации оценки погрешности вычисления матричной экспоненты при ограничении сверху на число арифметических операций, эквивалентны и имеют вид

$$M = \begin{cases} [z] + 1 & \text{при } \|A\|\Delta > v, \\ 0 & \text{при } \|A\|\Delta \leq v, \end{cases} \quad (11.36)$$

где $[x]$ — целая часть числа x ;

$$z = \frac{1}{\ln 2} \left(\ln \frac{\|A\|\Delta}{N+1} - \frac{1}{2(N+1)} \right) + N;$$

$$v = \frac{1}{2^N} (N+1) e^{\frac{1}{2(N+1)}}.$$

В [169] даны также практические рекомендации по выбору M и N . Так, например, перебор натуральных N следует начинать с 4–5 при $\|A\|\Delta \leq 1.3$ и с 2–3 при $\|A\|\Delta \geq 1.3$. После фиксации конкретного N определяется M , удовлетворяющее (11.34) и (11.36).

Следует отметить, что соотношение (11.36) в [169] получено без учета условия (11.35). В работе [167] продолжается изучение задач оптимизации вычисления матричной экспоненты с учетом условия (11.35).

Положим

$$F(M, N) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{e^{\|A\|\Delta} (\|A\|\Delta)^{N+1}}{2^{MN} (N+1)!},$$

$$G(M, N) \stackrel{\text{def}}{=} \left(\frac{\|A\|\Delta}{2^M} \right)^{N+1} \frac{1}{(N+1)!}.$$

Рассмотрим следующие задачи оптимизации:

$$\min_{M, N} \{M + N : F(M, N) \leq \varepsilon, G(M, N) \leq 1; M = 0, 1, \dots; N = 1, 2, \dots\}, \quad (11.37)$$

$$\min_{M, N} \{F(M, N) : M + N \leq L, G(M, N) \leq 1; M = 0, 1, \dots; N = 1, 2, \dots\}, \quad (11.38)$$

где L — заданная постоянная. Задача (11.37) является задачей минимизации числа арифметических операций при заданном уровне погрешности ε вычисления матричной экспоненты с учетом условия (11.35). Задача (11.38) представляет собой задачу о минимизации оценки погрешности вычисления матричной экспоненты при ограничении L на число арифметических операций с учетом того же условия.

В [167] решены обе задачи — (11.37), (11.38). Приведем их решения.

Рассмотрим задачу (11.38). Область возможных значений $\|A\|\Delta$ (положительная полуось) разбивается на интервалы $(0, C_1]$, (C_1, C_2) , $[C_2, C_3]$, $(C_3, +\infty)$:

$$C_1 = 2^{-L}e^{\psi(L+2)}, \quad C_2 = 2^{L-2}e^{\frac{3}{2}-C}, \quad C_3 = 2^{L-\frac{1}{2}},$$

где $\psi(z) = \frac{\Gamma'(z)}{\Gamma(z)}$ ($\Gamma(z)$ — гамма-функция; штрих соответствует производной по z); $C = 0.5772156\dots$ — постоянная Эйлера.

Если $\|A\|\Delta \in (0, C_1]$, то оптимальными параметрами являются $N = L$, $M = 0$, а наиболее точной формулой для вычисления матричной экспоненты — формула

$$e^{A\Delta} \approx \sum_{k=0}^L \frac{A^k \Delta^k}{k!}.$$

В том случае, когда $\|A\|\Delta \in (C_1, C_2)$, оптимальным N является одно из двух целых чисел, между которыми находится единственный корень $\bar{N} \in [1, L]$ уравнения

$$2N \ln 2 - \psi(N+2) = L \ln 2 - \ln(\|A\|\Delta). \quad (11.39)$$

При этом оптимальное N равно $[\bar{N}]$, если $Q([\bar{N}]) < Q([\bar{N}] + 1)$ или $P([\bar{N}] + 1) > 0$, и равно $[\bar{N}] + 1$ в противном случае; здесь

$$Q(N) \stackrel{\text{def}}{=} \ln \left\{ \frac{e^{\|A\|\Delta} (\|A\|\Delta)^{N+1}}{2^{(L-N)N} \Gamma(N+2)} \right\};$$

$$P(N) \stackrel{\text{def}}{=} \ln \left\{ \left(\frac{\|A\|\Delta}{2^{L-N}} \right)^{N+1} \frac{1}{\Gamma(N+2)} \right\};$$

$[x]$ — целая часть числа x ,

После определения оптимального N оптимальное M находим по формуле $M = L - N$.

Единственный корень уравнения (11.39) может быть вычислен, например, с помощью метода Ньютона, старт которого осуществляется из точки $N = L$ [167].

Если $\|A\|\Delta \in [C_2, C_3]$, то оптимальными параметрами являются $N = 1$, $M = L - 1$, а наиболее точной формулой для вычисления матричной экспоненты — следующая формула:

$$e^{\|A\|\Delta} \approx \left(I + \frac{A\Delta}{2^{L-1}} \right)^{2^{L-1}}.$$

Наконец, если $\|A\|\Delta \in (C_2, +\infty)$, то решения задачи (11.38) не существует.

Отметим, что в [168] приводится несколько иной способ решения задачи (11.38).

Рассмотрим теперь задачу (11.37). В [167] показано, что задача (11.37) эквивалентна задаче одномерной целочисленной оптимизации

$$\min_{N \geq 1} \{N + M(N)\}, \quad (11.40)$$

где

$$M(N) = \max\{M_1(N), M_2(N)\}; \quad (11.41)$$

$$M_1(N) = \max\left\{0, \left\lceil \frac{1}{N \ln 2} \ln \left\{ \frac{e^{\|A\|\Delta} (\|A\|\Delta)^{N+1}}{(N+1)! \varepsilon} \right\} \right\rceil + 1 \right\};$$

$$M_2(N) = \max\left\{0, \left\lceil \frac{1}{(N+1) \ln 2} \ln \left\{ \frac{(\|A\|\Delta)^{N+1}}{(N+1)!} \right\} \right\rceil + 1 \right\};$$

$[x]$ — целая часть числа x , а ε — то же, что и в формуле (11.34).

В [167] предлагается решать задачу (11.40) следующим образом. Пусть

$$\hat{N} = \min_{N \geq 1} \{N : M(N) = 0\}.$$

Если $N > \hat{N}$, то очевидно, что задача (11.40) переходит в задачу

$$\min \left\{ \hat{N}, \min_{1 \leq N \leq \hat{N}} \{N + M(N)\} \right\},$$

которая решается одномерным целочисленным перебором по N от 1 до $\hat{N}$. При этом перебор можно прекратить как только текущее значение N достигнет текущего минимального значения $M + N$. После того как определено оптимальное N , оптимальное M находим как $M(N)$ по формуле (11.41).

Приведем алгоритм вычисления матричной экспоненты.

Алгоритм 11.1. *Вычисление матричной экспоненты $e^{A\Delta}$ с точностью ε .*

1. Вычисление $\|A\|\Delta$.
2. По заданному $\varepsilon > 0$ выбирают оптимальные значения M и N как решение задачи (11.37).
3. $i := 0$.
4. $G := \sum_{j=0}^N \frac{A^j}{j!} \left(\frac{\Delta}{2^M}\right)^j$.

5. $i := i + 1$.
6. $G := G^2$.
7. Если $i < M$, то выполняется переход к шагу 5.
8. $e_*^{A\Delta} := G$.
9. Конец работы алгоритма 11.1.

11.2.3 Алгоритм численного моделирования систематической составляющей решения

Проблема численного моделирования систематической составляющей решения стационарной СЛСДУ (11.30) согласно (11.31) сводится к вычислению интеграла

$$J_{\Delta} = \int_0^{\Delta} e^{A(\Delta-\tau)} B \mathbf{u}(\tau + k\Delta) d\tau, \quad (11.42)$$

где $k = 0, 1, \dots, K - 1$.

Рассмотрим различные способы приближенного вычисления интеграла J_{Δ} . Будем считать, что векторная функция $\mathbf{u}(k\Delta + \tau)$ при всех $k = 0, 1, \dots, K - 1$ и $\tau \in [0, \Delta]$ представима в виде

$$\mathbf{u}(k\Delta + \tau) = \sum_{j=0}^l \mathbf{v}_j(k) \tau^j + \mathbf{r}_{l+1}(k, \tau), \quad (11.43)$$

причем

$$\|\mathbf{r}_{l+1}(k, \tau)\| \leq C_l \tau^{l+1}, \quad (11.44)$$

где $C_l < \infty$; $k = 0, 1, \dots, K - 1$; $\tau \in [0, \Delta]$; $\|\mathbf{x}\| = \max_{1 \leq i \leq n} |\mathbf{x}^{(i)}|$ — норма вектора $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$; векторные коэффициенты $\mathbf{v}_j(k)$, $j = 0, 1, \dots, l$, могут быть выбраны разными способами (далее будут рассмотрены некоторые из них).

Достаточным условием, обеспечивающим возможность представления (11.43), является $(l+1)$ -кратная непрерывная дифференцируемость функции $\mathbf{u}(t)$ на промежутке $[0, T]$. Однако возможны и другие, менее ограничительные условия.

Подставим (11.43) в (11.42). В результате получим следующее выражение:

$$J_{\Delta} = \sum_{j=0}^l J_{\Delta,j} B \mathbf{v}_j(k) + R_{\Delta,l+1}, \quad (11.45)$$

где

$$J_{t,j} = \int_0^{\Delta} \tau^j e^{A(t-\tau)} d\tau;$$

$$R_{\Delta, l+1} = \int_0^{\Delta} e^{A(\Delta-\tau)} B \mathbf{r}_{l+1}(k, \tau) d\tau;$$

причем согласно (11.44)

$$\|R_{\Delta, l+1}\| \leq H_{l+1} \Delta^{l+2}, \quad H_{l+1} < \infty. \quad (11.46)$$

Остановимся подробнее на вычислении интегралов $J_{\Delta, j}$, $j = 0, 1, \dots, l$. Нетрудно видеть, что

$$J_{\Delta, 0} = A^{-1} (e^{A\Delta} - I), \quad (11.47)$$

$$J_{\Delta, j} = -A^{-1} (\Delta^j I - j J_{\Delta, j-1}), \quad j = 1, 2, \dots, l. \quad (11.48)$$

Итерируя формулу (11.48), приходим к следующему выражению:

$$J_{\Delta, j} = A^{-(j+1)} j! \left[A J_{\Delta, 0} - \sum_{i=1}^j \frac{\Delta^i A^i}{i!} \right], \quad j \geq 1. \quad (11.49)$$

Подставляя (11.47) в (11.49), получаем окончательное выражение для интеграла $J_{\Delta, j}$, $j \geq 0$:

$$J_{\Delta, j} = A^{-(j+1)} j! \left[e^{A\Delta} - \sum_{i=0}^j \frac{\Delta^i A^i}{i!} \right], \quad j \geq 0, \quad (11.50)$$

где $A^0 \stackrel{\text{def}}{=} I$ — единичная матрица.

Подставляя (11.50) в (11.45) и отбрасывая остаточный член $R_{\Delta, l+1}$, приходим к следующему приближенному представлению:

$$J_{\Delta} \approx \sum_{j=0}^l A^{-(j+1)} j! \left[e^{A\Delta} - \sum_{i=0}^j \frac{\Delta^i A^i}{i!} \right] B \mathbf{v}_j(k). \quad (11.51)$$

Рассмотрим некоторые способы выбора коэффициентов $\mathbf{v}_j(k)$, $j = 0, 1, \dots, l$, по формуле (11.43) и соответствующие этим способам приближенные представления для интеграла J_{Δ} . При этом положим $\mathbf{u}((k + \frac{p}{q})\Delta) \stackrel{\text{def}}{=} \mathbf{u}_{k+\frac{p}{q}}$, $p = 0, 1, 2, \dots; k, q = 1, 2, \dots$

1. Аппроксимация с помощью формулы Тейлора:

$$\mathbf{v}_j(k) = \frac{1}{j!} \frac{d^j \mathbf{u}_k}{dt^j}, \quad \mathbf{r}_{l+1}(k, \tau) = \frac{\tau^{l+1}}{(l+1)!} \frac{d^{l+1} \mathbf{u}}{dt^{l+1}}(\xi(k, \tau)),$$

где $\xi(k, \tau) = k\Delta + \theta\tau$, $0 < \theta < 1$,

$$J_{\Delta} \approx \sum_{j=0}^l A^{-(j+1)} \left[e^{A\Delta} - \sum_{i=0}^j \frac{\Delta^i A^i}{i!} \right] B \frac{d^j \mathbf{u}_k}{dt^j}.$$

2. Кусочно-постоянная аппроксимация ($l = 0$):

$$\mathbf{v}_0(k) = \mathbf{u}_k,$$

$$J_{\Delta} \approx A^{-1} (e^{A\Delta} - I) B \mathbf{u}_k.$$

3. Линейная интерполяция ($l = 1$):

$$\mathbf{v}_0(k) = \mathbf{u}_k, \quad \mathbf{v}_1(k) = \frac{1}{\Delta} (\mathbf{u}_{k+1} - \mathbf{u}_k),$$

$$J_{\Delta} \approx A^{-1} (e^{A\Delta} - I) B \mathbf{u}_k + \frac{A^{-2}}{\Delta} [e^{A\Delta} - I - \Delta A] B (\mathbf{u}_{k+1} - \mathbf{u}_k).$$

4. Квадратичная интерполяция ($l = 2$):

$$\mathbf{v}_0(k) = \mathbf{u}_k, \quad \mathbf{v}_1(k) = \frac{1}{\Delta} \left(4\mathbf{u}_{k+\frac{1}{2}} - 3\mathbf{u}_k - \mathbf{u}_{k+1} \right),$$

$$\mathbf{v}_2(k) = \frac{2}{\Delta^2} \left(\mathbf{u}_{k+1} + \mathbf{u}_k - 2\mathbf{u}_{k+\frac{1}{2}} \right),$$

$$\begin{aligned} J_{\Delta} \approx & A^{-1} (e^{A\Delta} - I) B \mathbf{u}_k + \\ & + \frac{A^{-2}}{\Delta} [e^{A\Delta} - I - \Delta A] B \left(4\mathbf{u}_{k+\frac{1}{2}} - 3\mathbf{u}_k - \mathbf{u}_{k+1} \right) + \\ & + \frac{4A^{-3}}{\Delta^2} \left[e^{A\Delta} - I - \Delta A - \frac{\Delta^2 A^2}{2} \right] B \left(\mathbf{u}_{k+1} + \mathbf{u}_k - 2\mathbf{u}_{k+\frac{1}{2}} \right). \end{aligned}$$

5. Кубическая интерполяция ($l = 3$):

$$\mathbf{v}_0(k) = \mathbf{u}_k, \quad \mathbf{v}_1(k) = \frac{1}{2\Delta} \left(2\mathbf{u}_{k+1} + 18\mathbf{u}_{k+\frac{1}{3}} - 9\mathbf{u}_{k+\frac{2}{3}} - 11\mathbf{u}_k \right),$$

$$\begin{aligned} \mathbf{v}_2(k) &= \frac{9}{2\Delta^2} \left(-\mathbf{u}_{k+1} - 5\mathbf{u}_{k+\frac{1}{3}} + 4\mathbf{u}_{k+\frac{2}{3}} + 2\mathbf{u}_k \right), \\ \mathbf{v}_3(k) &= \frac{9}{2\Delta^3} \left(\mathbf{u}_{k+1} + 3\mathbf{u}_{k+\frac{1}{3}} - 3\mathbf{u}_{k+\frac{2}{3}} - \mathbf{u}_k \right), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} J_\Delta &\approx A^{-1} (e^{A\Delta} - I) B \mathbf{u}_k + \\ &+ \frac{A^{-2}}{2\Delta} [e^{A\Delta} - I - \Delta A] B \left(2\mathbf{u}_{k+1} + 18\mathbf{u}_{k+\frac{1}{3}} - 9\mathbf{u}_{k+\frac{2}{3}} - 11\mathbf{u}_k \right) + \\ &+ \frac{9A^{-3}}{\Delta^2} \left[e^{A\Delta} - I - \Delta A - \frac{\Delta^2 A^2}{2} \right] B \left(-\mathbf{u}_{k+1} - 5\mathbf{u}_{k+\frac{1}{3}} + 4\mathbf{u}_{k+\frac{2}{3}} + 2\mathbf{u}_k \right) + \\ &+ \frac{27A^{-4}}{\Delta^3} \left[e^{A\Delta} - I - \Delta A - \frac{\Delta^2 A^2}{2} - \frac{\Delta^3 A^3}{6} \right] \times \\ &\times B \left(\mathbf{u}_{k+1} + 3\mathbf{u}_{k+\frac{1}{3}} - 3\mathbf{u}_{k+\frac{2}{3}} - \mathbf{u}_k \right). \end{aligned}$$

Из (11.51) следует, что численное моделирование систематической составляющей решения стационарной СЛСДУ (11.30) сводится практически к вычислению матриц $B_j(\Delta)$ вида

$$B_j(\Delta) = A^{-(j+1)} j! \left[e^{A\Delta} - \sum_{i=0}^j \frac{\Delta^i A^i}{i!} \right] B, \quad j = 0, 1, \dots, l. \quad (11.52)$$

Если матрица A невырожденная, то матрицы $B_j(\Delta)$ могут быть вычислены непосредственно по формуле (11.52) с использованием алгоритма 11.1 вычисления матричной экспоненты $e^{A\Delta}$. Однако матрицы $B_j(\Delta)$ могут быть вычислены и в случае вырожденной матрицы A , поскольку $B_j(\Delta)$ согласно (11.52) представимы в виде

$$B_j(\Delta) = j! A^{-(j+1)} \sum_{i=j+1}^{\infty} \frac{\Delta^i}{i!} A^i B, \quad j = 0, 1, \dots, l. \quad (11.53)$$

Из последнего равенства следует существование конечного предела правой части (11.53) при $\det(A) \rightarrow 0$.

Для вычисления матриц $B_j(\Delta)$ в случае вырожденной матрицы A используем следующий подход.

Рассмотрим систему обыкновенных дифференциальных уравнений вида

$$\frac{d\hat{\mathbf{x}}(t)}{dt} = A\hat{\mathbf{x}}(t) + B \sum_{j=0}^l t^j \mathbf{v}_j(k), \quad \hat{\mathbf{x}}(0) = O_{n,1}, \quad (11.54)$$

где $\hat{\mathbf{x}}(t) \in \mathbb{R}^n$; $O_{n,1}$ — нулевой столбец длиной n .

Нетрудно видеть, что решение системы (11.54) имеет вид [164]

$$\hat{\mathbf{x}}(t) = e^{At} \hat{\mathbf{x}}(0) + \sum_{j=0}^l J_{t,j} B \mathbf{v}_j(k),$$

откуда следует, что

$$\hat{\mathbf{x}}(\Delta) = e^{A\Delta} \hat{\mathbf{x}}(0) + \sum_{j=0}^l B_j(\Delta) \mathbf{v}_j(k).$$

Введем в рассмотрение расширенную векторную функцию

$$\hat{\mathbf{y}}(t) = \begin{pmatrix} \hat{\mathbf{x}}(t) \\ \mathbf{x}_{n+1}(t) \\ \dots \\ \mathbf{x}_{n+l+1}(t) \\ \mathbf{x}_{n+l+2}(t) \end{pmatrix},$$

которая является решением однородной системы обыкновенных дифференциальных уравнений вида

$$\frac{d\hat{\mathbf{y}}(t)}{dt} = A_1 \hat{\mathbf{y}}(t), \quad \hat{\mathbf{y}}(0) = \begin{pmatrix} O_{n,1} \\ \mathbf{v}_0(k) \\ \mathbf{v}_1(k) \\ 2! \mathbf{v}_2(k) \\ \dots \\ l! \mathbf{v}_l(k) \end{pmatrix}, \quad (11.55)$$

где

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_{n+1}(t) &= \sum_{j=0}^l t^j \mathbf{v}_j(k); \\ \frac{d\mathbf{x}_{n+p+1}(t)}{dt} &= \mathbf{x}_{n+p+2}(t), \quad p = 0, 1, \dots, l; \\ \frac{d\mathbf{x}_{n+l+2}(t)}{dt} &= O_{k,1}; \\ A_1 &= \begin{pmatrix} A & B & O_{n,k} & O_{n,k} & \dots & O_{n,k} & O_{n,k} \\ O_{k,n} & O_k & I_k & O_k & \dots & O_k & O_k \\ & & & \dots & & & \\ O_{k,n} & O_k & O_k & O_k & \dots & I_k & O_k \\ O_{k,n} & O_k & O_k & O_k & \dots & O_k & I_k \\ O_{k,n} & O_k & O_k & O_k & \dots & O_k & O_k \end{pmatrix}; \end{aligned}$$

O_k — нулевая $(k \times k)$ -матрица; I_k — единичная $(k \times k)$ -матрица;
 $O_{n,k}$ — нулевая $(n \times k)$ -матрица.

Решением системы (11.55) является матричная функция вида

$$\hat{\mathbf{y}}(t) = e^{A_1 t} \hat{\mathbf{y}}(0) = \begin{pmatrix} e^{At} & J_{t,0}B & J_{t,1}B & \dots & \frac{1}{l!}J_{t,l}B \\ & & & & \\ & & \dots & & \end{pmatrix} \begin{pmatrix} O_{n,1} \\ \mathbf{v}_0(k) \\ \mathbf{v}_1(k) \\ 2!\mathbf{v}_2(k) \\ \dots \\ l!\mathbf{v}_l(k) \end{pmatrix}.$$

Таким образом, вычислив матричную экспоненту $e^{A_1 \Delta}$, можно получить сразу как матрицу $e^{A \Delta}$, так и матрицы $B_j(\Delta)$, $j = 0, 1, \dots, l$.

Сформулируем полученный результат в виде следующего специального алгоритма.

Алгоритм 11.2. *Вычисление матриц $e^{A \Delta}$ и $B_j(\Delta)$, $j = 0, 1, \dots, l$.*

1. Из матриц A и B системы (11.30) формируется матрица A_1 системы (11.55).

2. К матрице $A_1 \Delta$ применяется алгоритм 11.1 вычисления матричной экспоненты, результатом которого с точностью ε оказывается матрица

$$\tilde{A}_1(\Delta) = \begin{pmatrix} e^{A \Delta} & J_{\Delta,0}B & J_{\Delta,1}B & \dots & \frac{1}{l!}J_{\Delta,l}B \\ & & & & \\ & & \dots & & \end{pmatrix}.$$

3. Левый верхний блок (размера $n \times n$) матрицы $\tilde{A}_1(\Delta)$ является с точностью ε матрицей $e^{A \Delta}$.

4. $j := 1$.

5. $(j + 1)$ -й левый верхний блок (размера $n \times k$) матрицы $\tilde{A}_1(\Delta)$ является с точностью ε матрицей $\hat{B}_j(\Delta) = \frac{1}{j!}J_{\Delta,j}B$.

6. $B_j(\Delta) := j!\hat{B}_j(\Delta)$.

7. Если $j < l + 1$, то $j := j + 1$ и выполняется переход к шагу 5.

8. Конец работы алгоритма 11.2.

11.2.4 Алгоритм численного моделирования стохастической составляющей решения

Сначала рассмотрим основные идеи, которые будут использованы при построении алгоритма численного моделирования случайной

составляющей решения стационарной СЛСДУ, а затем приведем сам алгоритм.

Найдем такое представление случайного столбца $\tilde{\mathbf{f}}_{k+1}(\Delta)$ вида

$$\tilde{\mathbf{f}}_{k+1}(\Delta) = \int_0^\Delta e^{A(\Delta-s)\Sigma} d\mathbf{f}_{k\Delta+s},$$

которое было бы удобно для численного моделирования. Для этого рассмотрим дисперсионную матрицу случайного столбца $\tilde{\mathbf{f}}_{k+1}(\Delta)$:

$$\mathbf{M} \{ \tilde{\mathbf{f}}_{k+1}(\Delta) \tilde{\mathbf{f}}_{k+1}^\top(\Delta) \} \stackrel{\text{def}}{=} D_f(\Delta).$$

Спектральное разложение дисперсионной матрицы $D_f(\Delta)$ имеет вид

$$D_f(\Delta) = S_D(\Delta) \Lambda_D^2(\Delta) S_D^{-1}(\Delta), \quad (11.56)$$

где $S_D(\Delta)$ — матрица ортонормированных собственных векторов матрицы $D_f(\Delta)$, а $\Lambda_D(\Delta)$ — диагональная матрица, на главной диагонали которой стоят собственные числа матрицы $D_f(\Delta)$. Отметим, что $D_f(\Delta)$ — симметричная, неотрицательно определенная матрица, поэтому ее собственные числа неотрицательны, а матрица собственных векторов ортогональная.

Представим случайный столбец $\tilde{\mathbf{f}}_{k+1}(\Delta)$ в виде

$$\tilde{\mathbf{f}}_{k+1}(\Delta) = S_D(\Delta) \Lambda_D(\Delta) \bar{\mathbf{f}}_{k+1}, \quad (11.57)$$

где $\bar{\mathbf{f}}_{k+1}$ — такой случайный столбец, что его компоненты $\bar{\mathbf{f}}_{k+1}^{(i)}$, $i = 1, \dots, n$, являются независимыми стандартными гауссовскими случайными величинами, причем столбцы $\bar{\mathbf{f}}_{k+1}$ и $\bar{\mathbf{f}}_{l+1}$ независимы при $k \neq l$.

Таким образом, при представлении (11.57) справедливо соотношение (11.56). Для численного моделирования случайного столбца $\tilde{\mathbf{f}}_{k+1}(\Delta)$ по формуле (11.57) необходимо найти матрицу $D_f(\Delta)$, ее собственные числа и собственные векторы, а также численно смоделировать n независимых стандартных гауссовских случайных величин, которые являются компонентами случайного столбца $\bar{\mathbf{f}}_{k+1}$. Выражение для матрицы $D_f(\Delta)$ и дифференциальное уравнение для ее определения даны соотношениями (11.16) и (11.17) соответственно. Отметим, что так как матрица $D_f(\Delta)$ симметричная, то полезную информацию несут $\frac{n^2+n}{2}$ ее элементов, расположенных над(под) главной диагональю $D_f(\Delta)$, включая главную диагональ.

Для нахождения матрицы $D_f(\Delta)$ необходимо решить уравнение (11.17). С этой целью данное уравнение приводим к уравнению вида

$$\frac{d\mathbf{d}_f(t)}{dt} = \hat{A}\mathbf{d}_f(t) + \mathbf{b}, \quad (11.58)$$

где столбцы $\mathbf{d}_f(t)$, $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^{\frac{n^2+n}{2}}$ и имеют вид

$$\mathbf{d}_f(t) = \begin{pmatrix} \mathbf{d}_{f_1}(t) \\ \dots \\ \mathbf{d}_{f_n}(t) \end{pmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} \mathbf{b}_1 \\ \dots \\ \mathbf{b}_n \end{pmatrix}, \quad (11.59)$$

$$\mathbf{d}_{f_j}(t) = \begin{pmatrix} D_f^{(1j)}(t) \\ \dots \\ D_f^{(n-j+1 \ n)}(t) \end{pmatrix}, \quad \mathbf{b}_j = \begin{pmatrix} S^{(1j)} \\ \dots \\ S^{(n-j+1 \ n)} \end{pmatrix},$$

$j = 1, \dots, n$; $S \stackrel{\text{def}}{=} \Sigma \Sigma^\top$.

Матрицу $\hat{A}$ размера $\frac{n^2+n}{2} \times \frac{n^2+n}{2}$, входящую в (11.58), строим следующим образом. Сначала строим матрицы Q_{ip} , $p = 0, \dots, n-1$, $i = 1, \dots, n-p$, размера $n \times n$ с элементами $Q_{ip}^{(kl)}$ вида

$$Q_{ip}^{(kl)} = \begin{cases} 1 & \text{при } k = i, \ l = i + p \text{ или } k = i + p, \ l = i, \\ 0 & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Затем рассматриваем матрицы R_{ip} , $p = 0, \dots, n-1$, $i = 1, \dots, n-p$, вида

$$R_{ip} = Q_{ip}A^\top + AQ_{ip}.$$

Далее нетрудно заметить, что первые n столбцов матрицы $\hat{A}$ строятся из матриц R_{i0} , $i = 1, \dots, n$, подобно тому, как строится столбец $\mathbf{d}_f(t)$ из матрицы $D_f(t)$ по правилу (11.59). После этого из матриц R_{i1} , $i = 1, \dots, n-1$, получаем следующие $n-1$ столбец матрицы $\hat{A}$ по тому же правилу, и т. д. Теперь, когда определены $\mathbf{d}_f(t)$, $\mathbf{b}$ и $\hat{A}$, можно найти решение уравнения (11.58)

$$\mathbf{d}_f(t) = \hat{A}^{-1} (e^{\hat{A}t} - I) \mathbf{b}$$

и вычислить $\mathbf{d}_f(\Delta)$.

Следует отметить, что при переходе от (11.17) к (11.58) резко возрастает размерность задачи, что является недостатком рассматриваемого метода.

Далее после перехода от $\mathbf{d}_f(\Delta)$ к $D_f(\Delta)$ можно вычислить матрицы $S_D(\Delta)$ и $\Lambda_D(\Delta)$. После этого можно приступить к моделированию случайной составляющей решения стационарной СЛСДУ по формуле (11.57).

Сформулируем изложенные идеи в виде алгоритмов.

Алгоритм 11.3. Преобразование симметричной $(n \times n)$ -матрицы A в столбец $\mathbf{b}$ размера $\frac{n^2+n}{2}$.

1. $i := 0$.
2. $j := 1$.
3. $q := 1$.
4. $\mathbf{b}^{(q+i)} := A^{(q \ q+j-1)}$.
5. Если $q < n - j + 1$, то $q := q + 1$ и требуется выполнить переход к шагу 4.
6. $i := i + n - j + 1$.
7. Если $j < n$, то $j := j + 1$ и требуется выполнить переход к шагу 3.
8. Конец работы алгоритма 11.3.

Алгоритм 11.4. Преобразование столбца $\mathbf{b}$ размера $\frac{n^2+n}{2}$ в симметричную $(n \times n)$ -матрицу A .

1. $i := 0$.
2. $j := 1$.
3. $q := 1$.
4. $A^{(q \ q+j-1)} := \mathbf{b}^{(q+i)}$.
5. $A^{(q+j-1 \ q)} := \mathbf{b}^{(q+i)}$.
6. Если $q < n - j + 1$, то $q := q + 1$ и требуется выполнить переход к шагу 4.
7. $i := i + n - j + 1$.
8. Если $j < n$, то $j := j + 1$ и требуется выполнить переход к шагу 3.
9. Конец работы алгоритма 11.4.

Алгоритм 11.5. Преобразование симметричной $(n \times n)$ -матрицы A в матрицу $\hat{A}$ размера $\frac{n^2+n}{2} \times \frac{n^2+n}{2}$.

1. $Q := O_n$ (нулевая матрица размера $n \times n$).
2. $r := 1$.
3. $j := 1$.

4. $q := 1$.
5. $i := q + j - 1$.
6. $Q^{(qi)} := 1$.
7. $Q^{(iq)} := 1$.
8. $R := QA^T + AQ$.
9. $m := 0$.
10. $s := 1$.
11. $l := 1$.
12. $\hat{A}^{(l+m \ r)} := R^{(l \ l+s-1)}$.
13. Если $l < n - s + 1$, то $l := l + 1$ и требуется выполнить переход к шагу 12.
14. $m := m + n - s + 1$.
15. Если $s < n$, то $s := s + 1$ и требуется выполнить переход к шагу 11.
16. $Q := O_n$.
17. $r := r + 1$.
18. Если $q < n - j + 1$, то $q := q + 1$ и требуется выполнить переход к шагу 5.
19. Если $j < n$, то $j := j + 1$ и требуется выполнить переход к шагу 4.
20. Конец работы алгоритма 11.5.

Алгоритм 11.6. Численное моделирование случайной составляющей решения стационарной СЛСДУ.

1. Формирование столбца $\mathbf{b}$ из матрицы $\Sigma\Sigma^T$ по алгоритму 11.3.
2. Формирование матрицы $\hat{A}$ из матрицы A по алгоритму 11.5.
3. Определение столбца $\mathbf{d}_f(\Delta) = \hat{A}^{-1} (e^{\hat{A}\Delta} - I) \mathbf{b}$ по алгоритму 11.2.
4. Формирование матрицы $D_f(\Delta)$ из столбца $\mathbf{d}_f(\Delta)$ по алгоритму 11.4.
5. Выполнение спектрального разложения матрицы $D_f(\Delta)$ и определение матриц $S_D(\Delta)$, $\Lambda_D^2(\Delta)$.
6. Определение матрицы $\Lambda_D(\Delta)$.
7. $i := 1$.
8. Моделирование случайной величины $\bar{\mathbf{f}}_{k+1}^{(i)}$.
9. Если $i < n$, то $i := i + 1$ и требуется выполнить переход к шагу 7.
10. $\tilde{\mathbf{f}}_{k+1}(\Delta) := S_D(\Delta)\Lambda_D(\Delta)\bar{\mathbf{f}}_{k+1}$.
11. Конец работы алгоритма 11.6.

11.2.5 Алгоритм численного моделирования решений стационарных СЛСДУ и оценка скорости его сходимости

Приведем алгоритм численного моделирования решения стационарной СЛСДУ.

Алгоритм 11.7. Численное моделирование решения стационарной СЛСДУ.

1. Вычисление матриц $e^{A\Delta}$ и $B_j(\Delta) = \int_0^\Delta e^{A(\Delta-\tau)} \tau^j d\tau B$, $j = 0, 1, \dots, l$, с точностью ε по алгоритму 11.2.
2. $\mathbf{x}_1 := \mathbf{x}(0)$.
3. $k := 1$.
4. Моделирование случайного столбца $\tilde{\mathbf{f}}_{k+1}(\Delta)$ по алгоритму 11.6.
5. $\mathbf{x}_{k+1} := e^{A\Delta} \mathbf{x}_k + \sum_{j=0}^l B_j(\Delta) \mathbf{v}_j(k) + \tilde{\mathbf{f}}_{k+1}(\Delta)$.
6. $\mathbf{y}_k := H^\top \mathbf{x}_k$.
7. Если $k < N$, то $k := k + 1$ и требуется выполнить переход к шагу 4.
8. Конец работы алгоритма 11.7.

Таким образом, воспользовавшись приведенными рассуждениями, запишем следующие точное и приближенное представления решения стационарной СЛСДУ:

$$\mathbf{x}_{k+1} = e^{A\Delta} \mathbf{x}_k + \sum_{j=0}^{l-1} B_j(\Delta) \mathbf{v}_j(k) + R_{\Delta,l} + S_D(\Delta) \Lambda_D(\Delta) \tilde{\mathbf{f}}_{k+1}(\Delta), \quad (11.60)$$

$$\tilde{\mathbf{x}}_{k+1} = e_*^{A\Delta} \tilde{\mathbf{x}}_k + \sum_{j=0}^{l-1} B_j^*(\Delta) \mathbf{v}_j(k) + S_D^*(\Delta) \Lambda_D^*(\Delta) \tilde{\mathbf{f}}_{k+1}(\Delta), \quad \tilde{\mathbf{x}}_0 = \mathbf{x}_0, \quad (11.61)$$

где $\mathbf{x}_{k\Delta} \stackrel{\text{def}}{=} \mathbf{x}_k$, $\tilde{\mathbf{x}}_{k\Delta} \stackrel{\text{def}}{=} \tilde{\mathbf{x}}_k$ — точное решение стационарной СЛСДУ (11.13) и его аппроксимация соответственно в моменты времени $k\Delta$, $k = 0, 1, \dots, K$; $e_*^{A\Delta}$, $B_j^*(\Delta)$, $S_D^*(\Delta)$, $\Lambda_D^*(\Delta)$ — вычисленные приближенные значения матриц $e^{A\Delta}$, $B_j(\Delta)$, $S_D(\Delta)$, $\Lambda_D(\Delta)$. При этом $e_*^{A\Delta}$, $B_j^*(\Delta)$ вычисляются с помощью изложенных в предыдущих разделах алгоритмов, а $S_D(\Delta)$, $\Lambda_D(\Delta)$ — стандартными численными методами [165].

Оценим скорость сходимости алгоритма (11.61).

Лемма 11.1. Пусть для всех $j = 0, 1, \dots, l$ существует такая постоянная $L < \infty$, что

$$\|S_D(\Delta) - S_D^*(\Delta)\| \leq L\Delta^{l+1}, \quad \|\Lambda_D(\Delta) - \Lambda_D^*(\Delta)\| \leq L\Delta^{l+1}, \quad \|B_j^*(\Delta)\| \leq L,$$

$$\|e^{A\Delta} - e_*^{A\Delta}\| \leq L\Delta^{l+2}, \quad \|B_j(\Delta) - B_j^*(\Delta)\| \leq L\Delta^{l+1},$$

$$\|\mathbf{v}_j(k)\| \leq L, \quad \|\Lambda_D^*(\Delta)\| \leq L, \quad \|S_D^*(\Delta)\| \leq L.$$

Пусть также

$$\|e^{A\Delta}\| \leq 1, \quad \|e_*^{A\Delta}\| \leq 1.$$

Тогда

$$\mathbf{M}\{\|\mathbf{e}_K\|\} \leq C\Delta^l,$$

где C — постоянная, которая не зависит от Δ ; $\tilde{\mathbf{x}}_k - \mathbf{x}_k \stackrel{\text{def}}{=} \mathbf{e}_k$; $T = K\Delta$; l — натуральное; норма вектора и матрицы понимаются в том же смысле, что и раньше.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Из (11.60), (11.61) и условий леммы 11.1 получаем

$$\begin{aligned} \|\mathbf{e}_{k+1}\| &\leq \|e_*^{A\Delta} - e^{A\Delta}\| \|\tilde{\mathbf{x}}_k\| + \|e^{A\Delta}\| \|\mathbf{e}_k\| + \\ &+ \sum_{j=0}^{l-1} \|B_j^*(\Delta) - B_j(\Delta)\| \|\mathbf{v}_j(k)\| + \|R_{\Delta,l}\| + \\ &+ (\|S_D^*(\Delta) - S_D(\Delta)\| \|\Lambda_D^*(\Delta)\| + \|S_D(\Delta)\| \|\Lambda_D^*(\Delta) - \Lambda_D(\Delta)\|) \|\tilde{\mathbf{f}}_{k+1}(\Delta)\| \end{aligned}$$

с вероятностью 1,

$$\mathbf{M}\{\|\tilde{\mathbf{x}}_k\|\} \leq C_0 k,$$

где C_0 — постоянная, которая не зависит от Δ .

Далее в силу предположений леммы 11.1 и (11.46) имеем

$$\mathbf{M}\{\|\mathbf{e}_{k+1}\|\} \leq \mathbf{M}\{\|\mathbf{e}_k\|\} + C_1\Delta^{l+1},$$

где постоянная C_1 не зависит от Δ . Итерируя это неравенство и учитывая, что $\|\mathbf{e}_0\| = 0$, получаем

$$\mathbf{M}\{\|\mathbf{e}_K\|\} \leq C_1 K \Delta^{l+1} \leq C \Delta^l.$$

Лемма доказана. $\square$

11.3 Метод численного моделирования решений стационарных СЛСДУ, основанный на кусочно-постоянной гауссовской аппроксимации белого шума

Рассмотренный в предыдущем разделе метод численного решения стационарных СЛСДУ позволяет точно представлять случайную составляющую решения такой СЛСДУ, однако обладает недостатком, связанным с необходимостью вычисления дисперсионной матрицы случайной составляющей решения стационарной СЛСДУ с последующим ее спектральным разложением. Вычисление данной дисперсионной матрицы является алгоритмически достаточно трудоемким и приводит в силу преобразований к резкому повышению размерности задачи.

В настоящем разделе будет представлен метод численного решения стационарных СЛСДУ, который позволяет избежать этого недостатка. Идея указанного метода заключается в том, что белый шум $\mathbf{f}_t$ аппроксимируется кусочно-постоянным случайным гауссовским процессом $\mathbf{w}_t$ с достаточно малым шагом дискретизации δ .

Выберем на промежутке интегрирования $[0, T]$ шаг Δ такой, что $\Delta = T/M$. Покроем промежуток $[0, T]$ более густой сеткой с шагом $\delta = \Delta/(NM)$, $N > 1$, и рассмотрим постоянный на интервалах времени $[r\delta, (r+1)\delta)$, $r = 0, 1, \dots, MN$, гауссовский случайный векторный процесс $\mathbf{w}_t \in \mathbb{R}^m$ с независимыми значениями на этих промежутках:

1. $\mathbf{w}_t = \mathbf{w}_{r\delta}$ при $t \in [r\delta, (r+1)\delta)$, $r = 0, 1, \dots, MN$.
2. $M\{\mathbf{w}_{r\delta}\} \equiv 0$.
3. $M\{\mathbf{w}_{r\delta}\mathbf{w}_{q\delta}^T\} = \frac{1}{\delta}I1_{\{r=q\}}$, где I — единичная матрица.
4. Компоненты $\mathbf{w}_{r\delta}^{(i)}$, $i = 1, \dots, m$, векторной случайной величины $\mathbf{w}_{r\delta}$ являются независимыми стандартными гауссовскими случайными величинами.

Нетрудно показать, что корреляционная функция и спектральная плотность случайного процесса $\mathbf{w}_t$ имеют вид

$$R_w(\tau) = \begin{cases} \frac{1}{\delta} \left(1 - \frac{|\tau|}{\delta}\right) I & \text{при } |\tau| \leq \delta, \\ 0 & \text{при } |\tau| > \delta, \end{cases}$$

$$S_w(\omega) = \frac{2}{\omega^2 \delta^2} (1 - \cos \omega \delta) I \underset{\delta \rightarrow 0}{\sim} \left(1 - \frac{\omega^2 \delta^2}{12}\right) I. \quad (11.62)$$

Таким образом, при $\delta \rightarrow 0$ корреляционные функции компонент процесса $\mathbf{w}_t$ стремятся к δ -функции, а спектральные плотности компонент $\mathbf{w}_t$ стремятся к единице. Это позволяет предполагать, что при

уменьшении шага дискретизации δ процесс $\mathbf{w}_t$ приближается по свойствам к белому шуму. Из (11.62) следует, что при $\omega_{\max}\delta \leq \frac{\pi}{4}$ спектральные плотности компонент процесса $\mathbf{w}_t$ с погрешностью не более 5% отличаются от единицы, а значит, приближенно соответствуют спектральной плотности белого шума. Из вышесказанного следует, что ”приемлемая” оценка сверху для шага дискретизации δ имеет вид

$$\delta \leq \frac{\pi}{4\omega_{\max}}.$$

11.3.1 Алгоритм численного моделирования решений стационарных СЛСДУ

Рассмотрим стационарную СЛСДУ (11.13) и запишем рекуррентное соотношение для ее решения на сетке с постоянным шагом $\Delta > 0$ по формуле Коши

$$\mathbf{x}_{k+1} = e^{A\Delta}\mathbf{x}_k + \int_0^\Delta e^{A(\Delta-\tau)}B\mathbf{u}(\tau+k\Delta)d\tau + \int_0^\Delta e^{A(\Delta-\tau)}\Sigma d\mathbf{f}_{\tau+k\Delta}, \quad (11.63)$$

где $\mathbf{x}_{k\Delta} \stackrel{\text{def}}{=} \mathbf{x}_k$, $k = 0, 1, \dots, M$; $M\Delta = T$.

Введем приближенное представление $\tilde{\mathbf{x}}_k$ процесса $\mathbf{x}_k$:

$$\tilde{\mathbf{x}}_{k+1} = e^{A\Delta}\tilde{\mathbf{x}}_k + \int_0^\Delta e^{A(\Delta-\tau)}B\mathbf{u}(\tau+k\Delta)d\tau + \int_0^\Delta e^{A(\Delta-\tau)}\Sigma\mathbf{w}_{\tau+k\Delta}d\tau, \quad (11.64)$$

где $\tilde{\mathbf{x}}_{k\Delta} \stackrel{\text{def}}{=} \tilde{\mathbf{x}}_k$. Нетрудно видеть, что

$$\begin{aligned} \int_0^\Delta e^{A(\Delta-\tau)}\Sigma\mathbf{w}_{\tau+k\Delta}d\tau &= \sum_{j=1}^N \int_{(j-1)\delta}^{j\delta} e^{A(\Delta-\tau)}d\tau \Sigma\mathbf{w}_{(kN+j-1)\delta} = \\ &= \frac{1}{\sqrt{\delta}}A^{-1} [e^{A\delta} - I] \sum_{j=1}^N e^{A(\Delta-j\delta)}\Sigma\mathbf{z}_{k,j}, \end{aligned} \quad (11.65)$$

где $\mathbf{z}_{k,j} \stackrel{\text{def}}{=} \sqrt{\delta}\mathbf{w}_{(kN+j-1)\delta} \in \mathfrak{R}^m$ — столбец независимых стандартных гауссовских случайных величин. Кроме того, столбцы $\mathbf{z}_{k,j}$ и $\mathbf{z}_{k',j'}$ независимы при $k \neq k'$ или $j \neq j'$.

Воспользовавшись результатами из разд. 11.2 и формулами (11.64) и (11.65), запишем следующие рекуррентные формулы для процессов $\tilde{\mathbf{x}}_k$ и $\tilde{\mathbf{y}}_k$:

$$\tilde{\mathbf{x}}_{k+1} = e^{A\Delta}\tilde{\mathbf{x}}_k + \sum_{j=0}^l B_j(\Delta)\mathbf{v}_j(k) + R_{\Delta,l+1} + \frac{1}{\sqrt{\delta}}\bar{A}(\delta) \sum_{j=1}^N e^{A(\Delta-j\delta)}\Sigma\mathbf{z}_{k,j}, \quad (11.66)$$

$$\tilde{\mathbf{y}}_k = H^\top \tilde{\mathbf{x}}_k,$$

где

$$\|R_{\Delta, l+1}\| \leq H_{l+1} \Delta^{l+2}; \quad \bar{A}(\delta) = A^{-1} [e^{A\delta} - I];$$

$$B_j(\Delta) = A^{-(j+1)} j! \left[e^{A\Delta} - \sum_{i=0}^j \frac{\Delta^i A^i}{i!} \right] B;$$

$\mathbf{v}_j(k) \in \mathbb{R}^n$ — векторные коэффициенты, входящие в формулу (11.43); $H_{l+1} < \infty$ — постоянная.

С учетом рекуррентного соотношения (11.66) построим алгоритм численного моделирования решений стационарных СЛСДУ.

Алгоритм 11.8. Численное моделирование решений стационарных СЛСДУ.

1. Вычисление с точностью ε матрицы $e^{A\delta}$ по алгоритму 11.1.
2. Вычисление матриц $e^{A\Delta}$, $B_j(\Delta)$, $j = 0, 1, \dots, l$, с точностью ε по алгоритму 11.2.
3. $\bar{A}(\delta) := A^{-1} [e^{A\delta} - I]$.
4. $\tilde{\mathbf{x}}_1 := \mathbf{x}(0)$.
5. $k := 1$.
6. $i := 1$.
7. $l := 1$.
8. Численное моделирование случайной величины $\mathbf{z}_{k,i}^{(l)}$ — компоненты вектора $\mathbf{z}_{k,i}$.
9. Если $l < n$, то $l := l + 1$, и требуется перейти к шагу 8.
10. Вычисление с точностью ε матрицы $e^{A(\Delta-i\delta)}$ по алгоритму 11.1.
11. Если $i < N$, то $i := i + 1$, и требуется перейти к шагу 7.
12. $\tilde{\mathbf{x}}_{k+1} := e^{A\Delta} \tilde{\mathbf{x}}_k + \sum_{j=0}^l B_j(\Delta) \mathbf{v}_j(k) + \frac{1}{\sqrt{\delta}} \bar{A}(\delta) \sum_{j=1}^N e^{A(\Delta-j\delta)} \Sigma \mathbf{z}_{k,j}$.
13. $\tilde{\mathbf{y}}_k = H^\top \tilde{\mathbf{x}}_k$.
14. Если $k < M$, то $k := k + 1$, и требуется перейти к шагу 6.
15. Конец работы алгоритма 11.8.

11.3.2 Оценка скорости сходимости алгоритма по шагу дискретизации δ

Сравним моментные характеристики случайных процессов $\mathbf{x}_k$ и $\tilde{\mathbf{x}}_k$, определяемых соотношениями (11.63) и (11.66) соответственно.

Введем обозначения

$$\mathbb{M} \left\{ \overset{\circ}{\mathbf{x}}_k \overset{\circ}{\mathbf{x}}_k^\top \right\} \stackrel{\text{def}}{=} D_x(k), \quad \mathbb{M} \left\{ \overset{\circ}{\tilde{\mathbf{x}}}_k \overset{\circ}{\tilde{\mathbf{x}}}_k^\top \right\} \stackrel{\text{def}}{=} D_{\tilde{x}}(k), \quad D_x(k) - D_{\tilde{x}}(k) \stackrel{\text{def}}{=} E_D(k),$$

$\|G\|$ — максимальное по модулю собственное число матрицы G .

Заметим, что, если $M\{\tilde{\mathbf{x}}_0\} = M\{\mathbf{x}_0\}$, то согласно соотношениям (11.63), (11.64) имеем

$$M\{\tilde{\mathbf{x}}_k\} = M\{\mathbf{x}_k\}, \quad k = 1, 2, \dots, M.$$

Докажем следующую лемму.

Лемма 11.2. Пусть матрица A гурвицева и $E_D(0) = O_{n \times n}$. Тогда справедлива оценка

$$\|E_D(\infty)\| \leq C\delta^2,$$

где $\|E_D(\infty)\| \stackrel{\text{def}}{=} \lim_{k \rightarrow \infty} \|E_D(k)\|$ при $k \rightarrow \infty$; C — постоянная, зависящая только от Δ , A и Σ ; $O_{n \times n}$ — нулевая $(n \times n)$ -матрица.

Доказательство. Рассмотрим рекуррентное соотношение для дисперсионной матричной функции $D_x(k)$. Согласно (11.63) имеем

$$\begin{aligned} D_x(k+1) &= e^{A\Delta} D_x(k) e^{A^T \Delta} + \int_0^\Delta e^{A(\Delta-\tau)} \tilde{\Sigma} e^{A^T(\Delta-\tau)} d\tau = \\ &= e^{A\Delta} D_x(k) e^{A^T \Delta} + \sum_{i=1}^N \int_{(i-1)\delta}^{i\delta} e^{A(\Delta-\tau)} \tilde{\Sigma} e^{A^T(\Delta-\tau)} d\tau = \\ &= e^{A\Delta} D_x(k) e^{A^T \Delta} + \sum_{i=1}^N e^{A(\Delta-i\delta)} \int_0^\delta e^{A(\delta-\tau)} \tilde{\Sigma} e^{A^T(\delta-\tau)} d\tau e^{A^T(\Delta-i\delta)}, \end{aligned} \quad (11.67)$$

где $\tilde{\Sigma} \stackrel{\text{def}}{=} \Sigma \Sigma^T$.

Запишем рекуррентное соотношение для централизованной составляющей процесса $\tilde{\mathbf{x}}_k$, $k = 0, 1, \dots, M$:

$$\begin{aligned} \overset{\circ}{\tilde{\mathbf{x}}}_{k+1} &= e^{A\Delta} \overset{\circ}{\tilde{\mathbf{x}}}_k + \int_0^\Delta e^{A(\Delta-\tau)} \Sigma \mathbf{w}_{\tau+k\Delta} d\tau = \\ &= e^{A\Delta} \overset{\circ}{\tilde{\mathbf{x}}}_k + \sum_{i=1}^N \int_{(i-1)\delta}^{i\delta} e^{A(\Delta-\tau)} \Sigma d\tau \mathbf{w}_{(i-1)\delta+k\Delta} = \\ &= e^{A\Delta} \overset{\circ}{\tilde{\mathbf{x}}}_k - A^{-1} \sum_{i=1}^N e^{A(\Delta-i\delta)} (e^{A\delta} - I) \Sigma \mathbf{w}_{(i-1+kN)\delta}. \end{aligned} \quad (11.68)$$

С помощью (11.68) нетрудно получить следующее рекуррентное соотношение для дисперсионной матричной функции $D_{\tilde{x}}(k)$:

$$D_{\tilde{x}}(k+1) = e^{A\Delta} D_{\tilde{x}}(k) e^{A^T \Delta} +$$

$$+\frac{1}{\delta}A^{-1}\sum_{i=1}^Ne^{A(\Delta-i\delta)}(e^{A\delta}-I)\tilde{\Sigma}\left(e^{A^T\delta}-I\right)e^{A^T(\Delta-i\delta)}(A^{-1})^T. \quad (11.69)$$

Вычитая (11.69) из (11.67) и учитывая, что

$$A^{-1}C_i(\delta, \Delta) = C_i(\delta, \Delta)A^{-1}, \quad (A^{-1})^T(C_i(\delta, \Delta))^T = (C_i(\delta, \Delta))^T(A^{-1})^T,$$

где $e^{A(\Delta-i\delta)}(e^{A\delta}-I) \stackrel{\text{def}}{=} C_i(\delta, \Delta)$, получаем следующее рекуррентное соотношение для ошибки $E_D(k)$:

$$E_D(k+1) = e^{A\Delta}E_D(k)e^{A^T\Delta} + \sum_{i=1}^N Q_i(\delta, \Delta), \quad (11.70)$$

где

$$Q_i(\delta, \Delta) = e^{A(\Delta-i\delta)}\left[\int_0^\delta e^{A(\delta-\tau)}\tilde{\Sigma}e^{A^T(\delta-\tau)}d\tau - \frac{1}{\delta}(e^{A\delta}-I)A^{-1}\tilde{\Sigma}(A^{-1})^T(e^{A^T\delta}-I)\right]e^{A^T(\Delta-i\delta)}. \quad (11.71)$$

С помощью стандартной формулы Тейлора имеем

$$\begin{aligned} & \int_0^\delta e^{A(\delta-\tau)}\tilde{\Sigma}e^{A^T(\delta-\tau)}d\tau = \int_0^\delta e^{Au}\tilde{\Sigma}e^{A^Tu}du = \\ & = \int_0^\delta \left[I + Au + \frac{A^2u^2}{2} + O(u^3)\right]\tilde{\Sigma}\left[I + A^Tu + \frac{(A^T)^2u^2}{2} + O(u^3)\right]du = \\ & = \tilde{\Sigma}\delta + (A\tilde{\Sigma})^s\delta^2 + \frac{1}{3}\left[A\tilde{\Sigma}A^T + (A^2\tilde{\Sigma})^s\right]\delta^3 + O(\delta^4), \end{aligned} \quad (11.72)$$

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\delta}(e^{A\delta}-I)A^{-1}\tilde{\Sigma}(A^{-1})^T(e^{A^T\delta}-I) = \\ & = \frac{1}{\delta}\left[A\delta + \frac{A^2\delta^2}{2} + \frac{A^3\delta^3}{6} + O(\delta^4)\right]A^{-1}\tilde{\Sigma}(A^{-1})^T \times \\ & \quad \times \left[A^T\delta + \frac{(A^T)^2\delta^2}{2} + \frac{(A^T)^3\delta^3}{6} + O(\delta^4)\right] = \\ & = \tilde{\Sigma}\delta + (A\tilde{\Sigma})^s\delta^2 + \left[\frac{1}{4}A\tilde{\Sigma}A^T + \frac{1}{3}(A^2\tilde{\Sigma})^s\right]\delta^3 + O(\delta^4), \end{aligned} \quad (11.73)$$

где $B^s \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{2}(B + B^T)$ — симметричная часть матрицы B .

Подставляя (11.72) и (11.73) в (11.71), а затем (11.71) — в (11.70), получаем

$$E_D(k+1) = e^{A\Delta} E_D(k) e^{A^T \Delta} + \frac{\delta^3}{12} \sum_{i=1}^N e^{A(\Delta-i\delta)} A \tilde{\Sigma} A^T e^{A^T(\Delta-i\delta)} + O(\delta^4). \quad (11.74)$$

Оценим норму $\|E_D(k+1)\|$:

$$\begin{aligned} \|E_D(k+1)\| &\leq \|e^{A\Delta}\|^2 \|E_D(k)\| + \\ &+ \frac{\delta^3}{12} \|A\|^2 \|\tilde{\Sigma}\| \sum_{i=1}^N e^{2\|A\|(N-i)\delta} + O(\delta^4). \end{aligned} \quad (11.75)$$

Поскольку

$$\sum_{i=1}^N e^{2\|A\|(N-i)\delta} < N e^{2\|A\|\Delta},$$

то из (11.75) имеем

$$\|E_D(k+1)\| < \|e^{A\Delta}\|^2 \|E_D(k)\| + \frac{\Delta\delta^2}{12} \|A\|^2 \|\tilde{\Sigma}\| e^{2\|A\|\Delta} + O(\delta^4). \quad (11.76)$$

Если матрица A гурвицева, то все собственные числа матрицы $e^{A\Delta}$ лежат внутри единичного круга, и, следовательно, $\|e^{A\Delta}\| < 1$. Переходя к пределу при $k \rightarrow \infty$ в (11.76), получаем оценку

$$\|E_D(\infty)\| \leq \frac{\Delta\delta^2}{12} \frac{\|A\|^2 \|\tilde{\Sigma}\| e^{2\|A\|\Delta}}{1 - \|e^{A\Delta}\|^2} + O(\delta^4) \leq C\delta^2,$$

где $C < \infty$ — постоянная, которая зависит только от Δ , Σ и A . Существование предела $\|E_D(\infty)\|$ следует из гурвицевости матрицы A и уравнения (11.74). Лемма доказана. $\square$

Уже отмечалось, что метод численного моделирования решений стационарных СЛСДУ, основанный на формуле Коши и спектральном разложении, позволяет точно представлять случайную составляющую решений стационарных СЛСДУ. Однако этот метод имеет недостаток, связанный с необходимостью вычисления дисперсионной матрицы случайной составляющей решения стационарной СЛСДУ с ее последующим спектральным разложением. Вычисление этой дисперсионной матрицы является алгоритмически достаточно трудоемким и в силу проводимых преобразований вызывает резкое повышение размерности задачи. Рассмотренный в настоящем разделе метод численного моделирования решений стационарных СЛСДУ, основанный

на кусочно-постоянной аппроксимации белого шума, позволяет устранить этот недостаток, хотя случайная составляющая решения стационарной СЛСДУ представляется этим методом приближенно даже на алгоритмическом уровне.

Глава 12

Численное интегрирование стохастических дифференциальных уравнений со скачкообразной компонентой

В настоящей главе рассматриваются методы численного интегрирования стохастических дифференциальных уравнений со скачкообразной компонентой. При построении таких численных методов используется специальная, адаптированная к скачкам процесса Пуассона, временная дискретизация, которая позволяет отдельно моделировать численно диффузионную и скачкообразную составляющие решения стохастического дифференциального уравнения со скачкообразной компонентой. Представленные численные методы отличаются от известных в литературе способом численного моделирования диффузионной составляющей решения стохастического дифференциального уравнения со скачкообразной компонентой. Различия связаны с применением унифицированных разложений Тейлора–Ито и Тейлора–Стратоновича, а также новых методов численного моделирования повторных стохастических интегралов Стратоновича и Ито.

Наряду со стохастическими дифференциальными уравнениями Ито на практике интерес представляют также более общие стохастические уравнения — стохастические дифференциальные уравнения со скачкообразной компонентой. Данные стохастические уравнения, в частности, применяются в качестве математических моделей в стохастической финансовой математике [18–23] (см. также главу 2) и адекватно отражают скачкообразные изменения в динамике процентных, форвардных процентных ставок и цены облигаций.

Одна из первых попыток построения численных методов решения стохастических дифференциальных уравнений со скачкообразной

компонентой и их численной реализации была предпринята в работе [137] (D. J. Wright, 1980). В указанной работе рассматривалось скалярное стохастическое дифференциальное уравнение со скачкообразной компонентой без диффузионного и сносового членов. В данном уравнении вместо пуассоновской меры выбирался также обычный процесс Пуассона. Для таких частных стохастических дифференциальных уравнений со скачкообразной компонентой в [137] построены численные методы, причем правая часть стохастического уравнения выбиралась специальным образом. В [73] (З. А. Дзагнидзе, Р. Я. Читашвили, 1975) рассмотрено скалярное стохастическое дифференциальное уравнение со скачкообразной компонентой и построены численные методы решения данного уравнения. В [5] (И. И. Гихман, А. В. Скороход, 1975) рассмотрен метод Эйлера решения стохастических дифференциальных уравнений со скачкообразной компонентой и доказана его среднеквадратическая сходимость.

Дальнейшее развитие теория численного интегрирования стохастических дифференциальных уравнений со скачкообразной компонентой получила в работах [83] (E. Platen, 1982), [77] (Y. Maghsoodi, C. J. Harris, 1987), [78] (Y. Maghsoodi, 1994), [88] (R. Mikulevicius, E. Platen, 1988). В [83] построен аналог разложения Тейлора–Ито для решения стохастического дифференциального уравнения со скачкообразной компонентой и предложен подход к численному интегрированию, основанный на применении данного разложения, который позволяет “раздельно” моделировать численно диффузионную и скачкообразную компоненты решения стохастического дифференциального уравнения со скачкообразной компонентой на каждом шаге интегрирования. В [83] представлен ряд сильных, а в [88] — слабых численных методов решения стохастических дифференциальных уравнений со скачкообразной компонентой, которые основаны на данном подходе, а также доказана сходимость этих численных методов. Таким образом, благодаря работам [83, 88] можно численно решать стохастические дифференциальные уравнения со скачкообразной компонентой так, что на каждом шаге интегрирования диффузионная и скачкообразная компоненты решения моделируются “раздельно”. Это означает, что для численного моделирования диффузионной компоненты решения можно использовать численные методы решения стохастических дифференциальных уравнений Ито, которым посвящено большое число работ (см. библиографию к данной работе), а также некоторые главы настоящей монографии.

В данной главе приводятся основные результаты численного инте-

гирования стохастических дифференциальных уравнений со скачкообразной компонентой, полученные в [83, 88]. Кроме того, предлагаются модификации численных методов, построенных в [83, 88], которые отличаются от своих аналогов способом моделирования диффузионной составляющей решения стохастического дифференциального уравнения со скачкообразной компонентой. При этом различия связаны с использованием унифицированных разложений Тейлора–Ито и Тейлора–Стратоновича, а также новых методов численного моделирования повторных стохастических интегралов Стратоновича и Ито.

12.1 Аналог разложения Тейлора–Ито для решений стохастических дифференциальных уравнений со скачкообразной компонентой

Пусть $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ — фиксированное вероятностное пространство, а $\{\mathcal{F}_t, t \in [0, T]\}$ — неубывающее, непрерывное справа семейство σ -подалгебр $\mathcal{F}$. Рассмотрим следующую систему стохастических дифференциальных уравнений со скачкообразной компонентой:

$$\mathbf{x}_t = \mathbf{x}_0 + \int_0^t \mathbf{a}(\mathbf{x}_s, s) ds + \int_0^t \Sigma(\mathbf{x}_s, s) d\mathbf{f}_s + \int_0^t \int_X \mathbf{c}(\mathbf{x}_s, s, \mathbf{y}) \tilde{\nu}(ds, d\mathbf{y}), \quad (12.1)$$

где $\mathbf{x}_s \in \mathbb{R}^n$ — решение системы (12.1); $\mathbf{f}_s$ — $\mathcal{F}_s$ -измеримый при всех $s \in [0, T]$ m -мерный стандартный винеровский процесс с независимыми компонентами $\mathbf{f}_s^{(i)}, i = 1, \dots, m$; $\mathbb{R}^d \setminus \{0\} \stackrel{\text{def}}{=} X$; $\nu(ds, d\mathbf{y})$ — пуассоновская мера, заданная в $[0, T] \times X$ и независимая с винеровским процессом $\mathbf{f}_s$; $\tilde{\nu}(ds, d\mathbf{y}) = \nu(ds, d\mathbf{y}) - \Pi(d\mathbf{y})ds$ — мартингальная пуассоновская мера; $M\{\nu(ds, d\mathbf{y})\} = \Pi(d\mathbf{y})ds$; $\Pi(d\mathbf{y})ds$ — мера интенсивности; $\Pi(X) < \infty$; $\mathbf{a}(\mathbf{x}, s) : \mathbb{R}^n \times [0, T] \rightarrow \mathbb{R}^n$, $\Sigma(\mathbf{x}, s) : \mathbb{R}^n \times [0, T] \rightarrow \mathbb{R}^{n \times m}$, $\mathbf{c}(\mathbf{x}, s, \mathbf{y}) : \mathbb{R}^n \times [0, T] \times X \rightarrow \mathbb{R}^n$ — матричные функции, удовлетворяющие условиям теоремы 1.12 о существовании и единственности решения уравнения (12.1); $\mathbf{x}_0 \in \mathbb{R}^n$ — $\mathcal{F}_0$ -измеримая случайная величина. Второй интеграл в правой части (12.1) понимается как стохастический интеграл Ито, а третий — как стохастический интеграл по мартингальной пуассоновской мере (см. главу 1).

Далее в настоящем разделе будем использовать компактные обозначения, принятые в [83].

Пусть

$$\mathcal{M} \stackrel{\text{def}}{=} \{(i_1, \dots, i_k) : k \in N, i_l = 0, 1, \dots, m+1; l = 1, \dots, k\},$$

$\alpha \stackrel{\text{def}}{=} (i_1, \dots, i_k), l(\alpha) \stackrel{\text{def}}{=} k \geq 1, -\alpha \stackrel{\text{def}}{=} (i_2, \dots, i_k), \alpha- \stackrel{\text{def}}{=} (i_1, \dots, i_{k-1})$.

Через $\mathcal{G}_k([0, T])$, $k = 0, 1, \dots$, обозначим класс $\mathcal{F}_t$ -измеримых функций $G(t, \mathbf{y}_1, \dots, \mathbf{y}_k, \omega) : [0, T] \times X^k \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$, для которых

$$\mathbb{M} \left\{ \int_0^T \int_X \dots \int_X |G(t, \mathbf{y}_1, \dots, \mathbf{y}_k, \omega)|^2 \Pi(d\mathbf{y}_1) \dots \Pi(d\mathbf{y}_k) dt \right\} < \infty,$$

где повторный интеграл понимается как предел последовательности непрерывных слева $\mathcal{F}_t$ -измеримых ступенчатых функций

$$G_p(t, \mathbf{y}_1, \dots, \mathbf{y}_k, \omega),$$

для которых

$$\mathbb{M} \left\{ \int_0^T \int_X \dots \int_X |G(t, \mathbf{y}_1, \dots, \mathbf{y}_k, \omega) - G_p(t, \mathbf{y}_1, \dots, \mathbf{y}_k, \omega)|^2 \times \right. \\ \left. \times \Pi(d\mathbf{y}_1) \dots \Pi(d\mathbf{y}_k) dt \right\} \rightarrow 0 \text{ при } p \rightarrow \infty.$$

Положим

$$I_\alpha[G(\cdot)]_{\tau, t} \stackrel{\text{def}}{=} \begin{cases} \int_t^\tau I_{\alpha-}[G(\cdot)]_{s, t} ds & \text{при } i_{l(\alpha)} = 0, \\ \int_t^\tau I_{\alpha-}[G(\cdot)]_{s, t} d\mathbf{f}_s^{(i_{l(\alpha)})} & \text{при } i_{l(\alpha)} = 1, \dots, m, \\ \int_t^\tau \int_X I_{\alpha-}[G(\cdot)]_{s, t} \tilde{\nu}(ds, d\mathbf{y}_{z(\alpha)}) & \text{при } i_{l(\alpha)} = m+1, \end{cases}$$

где $G(\cdot, \mathbf{y}_1, \dots, \mathbf{y}_{z(\alpha)}) \stackrel{\text{def}}{=} G(\cdot)$; $z(\alpha)$ — число компонент мультииндекса α , которые равны $m+1$; $G(\cdot) \in \mathcal{G}_{z(\alpha)}([0, T])$; t, τ — моменты останова, для которых $0 \leq t \leq \tau \leq T$ с вероятностью 1.

Пусть $D_n([0, T])$ — множество непрерывных справа функций $\xi(t, \omega) \stackrel{\text{def}}{=} \xi_t : [0, T] \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$, имеющих пределы слева.

Введем в рассмотрение множества $\mathcal{L}_i$, $i = 0, 1, \dots, m+1$, функций $g(\mathbf{x}, t) : \mathbb{R}^n \times [0, T] \rightarrow \mathbb{R}^n$ следующим образом: $\mathcal{L}_0$ — множество функций $g(\mathbf{x}, t)$, для которых существуют частные производные

$$\frac{\partial g}{\partial t}(\mathbf{x}, t), \frac{\partial g}{\partial \mathbf{x}^{(i)}}(\mathbf{x}, t), \frac{\partial^2 g}{\partial \mathbf{x}^{(i)} \partial \mathbf{x}^{(j)}}(\mathbf{x}, t), i, j = 1, \dots, n,$$

и при всех $t \in [0, T]$, $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ функция

$$g(\mathbf{x} + \mathbf{c}(\mathbf{x}, t, \mathbf{y}), t) - g(\mathbf{x}, t) - \sum_{k=1}^n \mathbf{c}^{(k)}(\mathbf{x}, t, \mathbf{y}) \frac{\partial g}{\partial \mathbf{x}^{(k)}}(\mathbf{x}, t)$$

является $\Pi(dy)$ -интегрируемой; $\mathcal{L}_i$, $i = 1, \dots, m$, — множества функций $g(\mathbf{x}, t)$, для которых существуют частные производные $\frac{\partial g}{\partial \mathbf{x}^{(i)}}(\mathbf{x}, t)$, $i = 1, \dots, n$, а $\mathcal{L}_{m+1}$ — множество функций $g(\mathbf{x}, t)$, для которых функция

$$(g(\mathbf{x} + \mathbf{c}(\mathbf{x}, t, \mathbf{y}), t) - g(\mathbf{x}, t))^2$$

является $\Pi(dy)$ -интегрируемой при всех $t \in [0, T]$, $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$.

Определим операторы L_i , $i = 0, 1, \dots, m+1$, на множествах $\mathcal{L}_i$, $i = 0, 1, \dots, m+1$, соотношениями

$$\begin{aligned} L_0 g(\xi_t, t) &= \frac{\partial g}{\partial t}(\xi_t, t) + \sum_{k=1}^n \mathbf{a}^{(k)}(\xi_t, t) \frac{\partial g}{\partial \mathbf{x}^{(k)}}(\xi_t, t) + \\ &+ \frac{1}{2} \sum_{j,k=1}^n \frac{\partial^2 g}{\partial \mathbf{x}^{(j)} \partial \mathbf{x}^{(k)}}(\xi_t, t) \sum_{i=1}^m \Sigma^{(ki)}(\xi_t, t) \Sigma^{(ji)}(\xi_t, t) + \\ &+ \int_X \left(g(\xi_t + \mathbf{c}(\xi_t, t, \mathbf{y}), t) - g(\xi_t, t) - \right. \\ &\left. - \sum_{k=1}^n \mathbf{c}^{(k)}(\xi_t, t, \mathbf{y}) \frac{\partial g}{\partial \mathbf{x}^{(k)}}(\xi_t, t) \right) \Pi(d\mathbf{y}), \end{aligned}$$

$$L_i g(\xi_t, t) = \sum_{k=1}^n \Sigma^{(ki)}(\xi_t, t) \frac{\partial g}{\partial \mathbf{x}^{(k)}}(\xi_t, t), \quad i = 1, \dots, m,$$

$$L_{m+1} g(\xi_t, t) = g(\xi_{t-} + \mathbf{c}(\xi_t, t, \mathbf{y}), t) - g(\xi_{t-}, t),$$

где $t \in [0, T]$; $\xi_t \in D_n([0, T])$.

Для всех $\alpha = (i_1, \dots, i_{l(\alpha)})$ определим функции $F_\alpha : \mathbb{R}^n \times [0, T] \times X^{z(\alpha)} \rightarrow \mathbb{R}^n$ следующим образом:

$$F_\alpha(\xi_t, t) = \begin{cases} \mathbf{a}(\xi_t, t) & \text{при } l(\alpha) = 1, i_1 = 0, \\ \Sigma_{i_1}(\xi_t, t) & \text{при } l(\alpha) = 1, i_1 = 1, \dots, m, \\ \mathbf{c}(\xi_t, t, \mathbf{y}_1) & \text{при } l(\alpha) = 1, i_1 = m+1, \\ L_{i_1} F_{-\alpha}(\xi_t, t) & \text{при } l(\alpha) \geq 2, i_1 = 0, 1, \dots, m+1, \end{cases}$$

где $F_\alpha(\xi_t, t, \mathbf{y}_1, \dots, \mathbf{y}_{z(\alpha)}) \stackrel{\text{def}}{=} F_\alpha(\xi_t, t)$; $t \in [0, T]$; $\xi_t \in D_n([0, T])$; $\Sigma_i(\mathbf{x}, t)$ — i -й столбец матрицы $\Sigma(\mathbf{x}, t)$.

Приведем формулировку доказанной в [83] теоремы об аналоге разложения Тейлора–Ито для решения стохастического дифференциального уравнения (12.1).

Теорема 12.1 [83]. Пусть для $A \subset \mathcal{M}$, $A \neq \emptyset$ выполнены условия:

1. $\sup_{\alpha \in A} l(\alpha) < \infty$.

2. $-\alpha \in A$ для всех $\alpha \in A$.
 3. $F_{-\alpha} \in \bigcap_{i=0}^{m+1} \mathcal{L}_i$ для всех $\alpha \in A \cup B(A)$; $B(A) \stackrel{\text{def}}{=} \{\alpha \in \mathcal{M} \setminus A : -\alpha \in A\}$.
 4. $F_\alpha(\mathbf{x}_s, s, \mathbf{y}_1, \dots, \mathbf{y}_{z(\alpha)}) \in \mathcal{G}_{z(\alpha)}([0, T])$ для всех $\alpha \in A$ и всех моментов остановки $s \in [0, T]$.
 5. $F_\alpha(\mathbf{x}_t, t, \mathbf{y}_1, \dots, \mathbf{y}_{z(\alpha)}) \in \mathcal{G}_{z(\alpha)}([0, T])$ для всех $\alpha \in B(A)$.
- Тогда для любых двух моментов остановки s, τ таких, что $P\{0 \leq \tau \leq s \leq T\} = 1$, с вероятностью 1 справедливо разложение

$$\mathbf{x}_s = \mathbf{x}_\tau + \sum_{\alpha \in A} I_\alpha[F_\alpha(\mathbf{x}_\tau, \tau)]_{s, \tau} + \sum_{\alpha \in B(A)} I_\alpha[F_\alpha(\mathbf{x}_\cdot, \cdot)]_{s, \tau}, \quad (12.2)$$

где $F_\alpha(\mathbf{x}_t, t, \mathbf{y}_1, \dots, \mathbf{y}_{z(\alpha)}) \stackrel{\text{def}}{=} F_\alpha(\mathbf{x}_t, t)$, а $\mathbf{x}_t$ — решение стохастического дифференциального уравнения (12.1).

12.2 Сильные численные методы решения стохастических дифференциальных уравнений со скачкообразной компонентой

Нетрудно видеть, что разложение (12.2) может быть использовано для построения численных методов решения стохастических дифференциальных уравнений со скачкообразной компонентой подобно тому, как разложения Тейлора–Ито и Тейлора–Стратоновича использовались для построения численных методов решения стохастических дифференциальных уравнений Ито. Формула (12.2) включает в себя повторные стохастические интегралы не только по винеровскому процессу, но и по мартингальной пуассоновской мере. Во избежание проблем, связанных с аппроксимацией повторных стохастических интегралов по мартингальной пуассоновской мере, при построении численных методов решения стохастического дифференциального уравнения (12.1) можно выбрать специальное, адаптированное к скачкам процесса $\mathbf{x}_t$, $t \in [0, T]$, разбиение промежутка $[0, T]$ [83, 88]. При этом удастся добиться того, что на каждом шаге интегрирования диффузионная и скачкообразная компоненты решения моделируются ”раздельно”.

Рассмотрим указанный подход подробнее, опираясь на работы [83, 88]. В данном разделе вернемся к принятым в настоящей книге ранее обозначениям.

Процесс Пуассона $\nu([0, t), X)$, $t \in [0, T]$, с интенсивностью $\Pi(X) < \infty$ генерирует последовательность моментов своих скачков, которые

очевидно являются моментами скачков и процесса $\mathbf{x}_t$, $t \in [0, T]$, являющегося решением уравнения (12.1).

Введем в рассмотрение последовательность $\{\tau_j\}_{j=0}^\infty$ моментов остановки, для которой

$$0 = \tau_0 < \tau_1 < \dots < \tau_{n_T+1} = T, \quad n_T < \infty \text{ с в.1,}$$

$$\max_{1 \leq i \leq n_T+1} |\tau_i - \tau_{i-1}| \leq \Delta \text{ с в.1,}$$

где

$$n_t = \max\{i : \tau_i < t\}$$

для всех $t \in [0, T]$. Предполагается также, что среди $\tau_0, \tau_1, \dots, \tau_{n_T+1}$ встречаются все моменты скачков процесса $\nu([0, t), X)$, $t \in [0, T]$, не превосходящие T , и если τ_{i+1} не является моментом скачка процесса $\nu([0, t), X)$, $t \in [0, T]$, то он $\mathcal{F}_{\tau_i}$ -измерим.

Нетрудно видеть, что

$$\mathbf{x}_t = \mathbf{x}_{\tau_i} + \int_{\tau_i}^t \tilde{\mathbf{a}}(\mathbf{x}_s, s) ds + \int_{\tau_i}^t \Sigma(\mathbf{x}_s, s) d\mathbf{f}_s \text{ с в.1} \quad (12.3)$$

при $t \in [\tau_i, \tau_{i+1})$, где $\tilde{\mathbf{a}}(\mathbf{x}, s) = \mathbf{a}(\mathbf{x}, s) - \int_X \mathbf{c}(\mathbf{x}, s, \mathbf{y}) \Pi(d\mathbf{y})$, $i = 0, 1, \dots, n_T$.

В то же время

$$\mathbf{x}_{\tau_i} = \mathbf{x}_{\tau_{i-1}} + \int_{\tau_{i-1}}^{\tau_{i+1}-} \int_X \mathbf{c}(\mathbf{x}_{\tau_{i-1}}, \tau_i, \mathbf{y}) \nu(ds, d\mathbf{y}), \quad (12.4)$$

где $i = 1, 2, \dots, n_T + 1$.

Из (12.3), (12.4) получаем

$$\begin{cases} \mathbf{x}_{\tau_{i+1}-} = \mathbf{x}_{\tau_i} + \int_{\tau_i}^{\tau_{i+1}-} \tilde{\mathbf{a}}(\mathbf{x}_s, s) ds + \int_{\tau_i}^{\tau_{i+1}-} \Sigma(\mathbf{x}_s, s) d\mathbf{f}_s, \\ \mathbf{x}_{\tau_{i+1}} = \mathbf{x}_{\tau_{i+1}-} + \int_X \mathbf{c}(\mathbf{x}_{\tau_{i+1}-}, \tau_{i+1}, \mathbf{y}) \nu(\{\tau_{i+1}\}, d\mathbf{y}) \end{cases} \quad (12.5)$$

с вероятностью 1, где $i = 0, 1, \dots, n_T$. Если момент τ_{i+1} в (12.5) является моментом скачка процесса Пуассона, то в [73, 88] предлагается численно моделировать стохастический интеграл во втором соотношении (12.5) по формуле

$$\int_X \mathbf{c}(\mathbf{x}_{\tau_{i+1}-}, \tau_{i+1}, \mathbf{y}) \nu(\{\tau_{i+1}\}, d\mathbf{y}) = \mathbf{c}(\mathbf{x}_{\tau_{i+1}-}, \tau_{i+1}, \xi_{i+1}),$$

где ξ_i , $i = 1, \dots, n_T + 1$, — независимые, $\Pi(d\mathbf{y})/\Pi(X)$ — распределенные случайные величины. При этом, как известно, временные интервалы

между последовательными скачками процесса Пуассона являются независимыми и экспоненциально распределенными с параметром $\Pi(X)$ случайными величинами, т. е. $P\{\theta_{i+1} - \theta_i > t\} = e^{-\Pi(X)t}$, где θ_i, θ_{i+1} — последовательные моменты скачков процесса Пуассона.

Согласно (12.3) между моментами скачков процесса $\nu([0, t], X)$, $t \in [0, T]$, процесс Ито $\mathbf{x}_t, t \in [0, T]$, описывается стохастическим дифференциальным уравнением Ито, численным методом интегрирования которых было посвящено несколько предыдущих глав книги.

Пусть $\mathcal{L}$ — множество функций $R(\mathbf{x}, t) : \mathbb{R}^n \times [0, T] \rightarrow \mathbb{R}^n$, для которых при всех $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n, t \in [0, T]$, существуют и непрерывны частные производные

$$\frac{\partial R}{\partial t}(\mathbf{x}, t), \frac{\partial R}{\partial \mathbf{x}^{(i)}}(\mathbf{x}, t), \frac{\partial^2 R}{\partial \mathbf{x}^{(i)} \partial \mathbf{x}^{(j)}}(\mathbf{x}, t), \quad i, j = 1, \dots, n.$$

Формулы (12.5) позволяют конструировать численные методы решения стохастического дифференциального уравнения (12.1). Так, в [83] предложено семейство явных сильных численных методов, основанных на разложении Тейлора–Ито в форме Вагнера и Платена

$$\begin{cases} \mathbf{y}_{\tau_{p+1}-} = \mathbf{y}_{\tau_p} + \sum_{q,k=1}^r \sum_{(\lambda_k, \dots, \lambda_1) \in \mathcal{E}'_{qk}} {}^{(p_k)}\tilde{Q}_{\lambda_k} \dots \tilde{Q}_{\lambda_1} \{\mathbf{y}_{\tau_p}\} {}^{p_k} \dots {}^{(p_k)}\hat{J}_{(\lambda_k \dots \lambda_1)\tau_{p+1}, \tau_p}, \\ \mathbf{y}_{\tau_{p+1}} = \mathbf{y}_{\tau_{p+1}-} + \int_X \mathbf{c}(\mathbf{y}_{\tau_{p+1}-}, \tau_{p+1}, \mathbf{y}) \nu(\{\tau_{p+1}\}, d\mathbf{y}), \end{cases} \quad (12.6)$$

где $p = 0, 1, \dots, n_T$;

$${}^{(p_k)}\hat{J}_{(\lambda_k \dots \lambda_1)\tau_{p+1}, \tau_p} = \left\| \hat{J}_{(\lambda_k \dots \lambda_1)\tau_{p+1}, \tau_p}^{(i_k \dots i_1)} \right\|_{i_1=\lambda_1, \dots, i_k=\lambda_k}^{m\lambda_1 \dots m\lambda_k};$$

$\hat{J}_{(\lambda_k \dots \lambda_1)\tau_{p+1}, \tau_p}^{(i_k \dots i_1)}$ — аппроксимация повторного стохастического интеграла Ито

$$J_{(\lambda_k \dots \lambda_1)\tau_{p+1}, \tau_p}^{(i_k \dots i_1)} = \int_{\tau_p}^{\tau_{p+1}} \dots \int_{\tau_p}^{t_2} d\mathbf{w}_{t_1}^{(i_k)} \dots d\mathbf{w}_{t_k}^{(i_1)};$$

$\mathbf{w}_t^{(i)} = \mathbf{f}_t^{(i)}$ при $i = 1, \dots, m$ и $\mathbf{w}_t^{(0)} = \tau$; $\mathbf{f}_t^{(i)}$ — независимые стандартные винеровские процессы; $\lambda_l = 1$ или $\lambda_l = 0$; $p_l = \sum_{j=1}^l \lambda_j$; $\tilde{Q}_{\lambda_l}^{(i_l)} = \tilde{L}$ и $i_l = 0$ при $\lambda_l = 0$; $\tilde{Q}_{\lambda_l}^{(i_l)} = G_0^{(i_l)}$ и $i_l = 1, \dots, m$ при $\lambda_l = 1$; $l = 1, \dots, k$;

$$\mathcal{E}'_{qk} = \mathcal{E}_{qk} \cup \{(\lambda_k, \dots, \lambda_1) : \lambda_1 = \dots = \lambda_k = 0 \text{ и } 2k = q + 1\};$$

операторы $\tilde{L}$ и $G_0^{(i)}$, $i = 1, \dots, m$, имеют вид

$$\begin{aligned}\tilde{L}R(\mathbf{x}, t) &= \frac{\partial R}{\partial t}(\mathbf{x}, t) + \sum_{k=1}^n \tilde{\mathbf{a}}^{(k)}(\mathbf{x}, t) \frac{\partial R}{\partial \mathbf{x}^{(k)}}(\mathbf{x}, t) + \\ &+ \frac{1}{2} \sum_{j,k=1}^n \sum_{i=1}^m \Sigma^{(ki)}(\mathbf{x}, t) \Sigma^{(ji)}(\mathbf{x}, t) \frac{\partial^2 R}{\partial \mathbf{x}^{(j)} \partial \mathbf{x}^{(k)}}(\mathbf{x}, t); \\ G_0^{(i)} R(\mathbf{x}, t) &= \sum_{j=1}^n \Sigma^{(ji)}(\mathbf{x}, t) \frac{\partial R}{\partial \mathbf{x}^{(j)}}(\mathbf{x}, t), i = 1, \dots, m.\end{aligned}$$

Здесь $R(\mathbf{x}, t) \in \mathcal{L}$; $\tilde{\mathbf{a}}(\mathbf{x}, t) = \mathbf{a}(\mathbf{x}, t) - \int_X \mathbf{c}(\mathbf{x}, t, \mathbf{y}) \Pi(d\mathbf{y})$.

Через $\bar{\mathbf{y}}_{\tau_p}$, $p = 0, 1, \dots, n_T + 1$, будем обозначать дискретную аппроксимацию, которая отличается от дискретной аппроксимации $\mathbf{y}_{\tau_p}$, $p = 0, 1, \dots, n_T + 1$, вида (12.6) тем, что в $\bar{\mathbf{y}}_{\tau_p}$ производится замена ${}^{(p_k)}\hat{J}_{(\lambda_k \dots \lambda_1)_{\tau_p, \tau_{p-1}}}$ на ${}^{(p_k)}J_{(\lambda_k \dots \lambda_1)_{\tau_p, \tau_{p-1}}}$.

В [83] сформулировано и доказано следующее утверждение.

Теорема 12.2 [83]. Пусть для данных $r \in N$, $\Delta > 0$ выполнены следующие условия:

1. Для всех $(\lambda_k, \dots, \lambda_1) \in \bigcup_{q,k=1}^r \mathcal{E}'_{qk}$, $t \in [0, T]$ и $\mathbf{x}, \mathbf{z} \in \mathbb{R}^n$

$$\left| \tilde{Q}_{\lambda_k}^{(i_k)} \dots \tilde{Q}_{\lambda_1}^{(i_1)} \mathbf{x} - \tilde{Q}_{\lambda_k}^{(i_k)} \dots \tilde{Q}_{\lambda_1}^{(i_1)} \mathbf{z} \right| \leq K_1 |\mathbf{x} - \mathbf{z}|, \quad K_1 < \infty,$$

$$|\mathbf{c}(\mathbf{x}, t, \mathbf{y}) - \mathbf{c}(\mathbf{z}, t, \mathbf{y})| \leq C_1(\mathbf{y}) |\mathbf{x} - \mathbf{z}|,$$

где $(C_1(\mathbf{y}))^2$ — $\Pi(d\mathbf{y})$ -интегрируемая функция.

2. Для всех $p \in \{0, 1, \dots, n_T\}$: τ_{p+1} — $\mathcal{F}_{\tau_p}$ -измеримая случайная величина, если τ_{p+1} не является моментом скачка процесса Пуассона $\nu([0, t], X)$, $t \in [0, T]$, и $P\{\tau_{p+1} - \tau_p \leq \Delta\} = 1$.

3. Для всех $(\lambda_k, \dots, \lambda_1) \in \bigcup_{q=1}^r \mathcal{M}_q$: $\tilde{Q}_{\lambda_k}^{(i_k)} \dots \tilde{Q}_{\lambda_1}^{(i_1)} \mathbf{x} \in \mathcal{L}$, $\tilde{Q}_{\lambda_k}^{(i_k)} \dots \tilde{Q}_{\lambda_1}^{(i_1)} \mathbf{x}_{\tau_p} \in \mathcal{G}_0([0, T])$, $p \in \{0, 1, \dots, n_T + 1\}$, и для всех $(\lambda_k, \dots, \lambda_1) \in \mathcal{M}_{r+1}$: $\tilde{Q}_{\lambda_k}^{(i_k)} \dots \tilde{Q}_{\lambda_1}^{(i_1)} \mathbf{x}_s \in \mathcal{G}_0([0, T])$.

4. Для всех $(\lambda_k, \dots, \lambda_1) \in \bigcup_{q=1}^{r+1} \mathcal{M}_q$, $t \in [0, T]$, $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ и $\mathbf{y} \in X$

$$\left| \tilde{Q}_{\lambda_k}^{(i_k)} \dots \tilde{Q}_{\lambda_1}^{(i_1)} \mathbf{x} \right| \leq K_2 (1 + |\mathbf{x}|), \quad K_2 < \infty,$$

$$|\mathbf{c}(\mathbf{x}, t, \mathbf{y})| \leq C_2(\mathbf{y}) (1 + |\mathbf{x}|),$$

где $(C_2(\mathbf{y}))^2$ — $\Pi(d\mathbf{y})$ -интегрируемая функция; здесь $\mathcal{M}_q = \{(\lambda_q, \dots, \lambda_1) : \lambda_l \in \{0, 1\}; l = 1, \dots, q\}$.

5. Для всех $s, t \in [0, T]$, $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$, $\mathbf{y} \in X$ и $i = 1, \dots, m$

$$|\mathbf{a}(\mathbf{x}, s) - \mathbf{a}(\mathbf{x}, t)| \leq K_3(1 + |\mathbf{x}|)|s - t|^{\frac{1}{2}}, \quad K_3 < \infty,$$

$$|\Sigma_i(\mathbf{x}, s) - \Sigma_i(\mathbf{x}, t)| \leq K_4(1 + |\mathbf{x}|)|s - t|^{\frac{1}{2}}, \quad K_4 < \infty,$$

$$|\mathbf{c}(\mathbf{x}, s, \mathbf{y}) - \mathbf{c}(\mathbf{x}, t, \mathbf{y})| \leq C_3(\mathbf{y})(1 + |\mathbf{x}|)|s - t|^{\frac{1}{2}},$$

где $(C_3(\mathbf{y}))^2$ — $\Pi(d\mathbf{y})$ -интегрируемая функция; $\Sigma_i(\mathbf{x}, t)$ — i -й столбец матрицы $\Sigma(\mathbf{x}, t)$.

Тогда

$$\mathbb{M} \left\{ \sup_{0 \leq t \leq T} |\mathbf{x}_t - \bar{\mathbf{y}}_t|^2 | \mathcal{F}_0 \right\} \leq K_5(1 + |\mathbf{x}_0|^2) \Delta^r + K_6 |\mathbf{x}_0 - \bar{\mathbf{y}}_0|^2, \quad (12.7)$$

где постоянные K_5, K_6 не зависят от Δ , и

$$\begin{aligned} \bar{\mathbf{y}}_t = \bar{\mathbf{y}}_0 + \sum_{q,k=1}^r \sum_{(\lambda_k, \dots, \lambda_1) \in \mathcal{E}'_{qk}} \left[\sum_{p=0}^{n_t-1} {}^{(p_k)} \tilde{Q}_{\lambda_k} \dots \tilde{Q}_{\lambda_1} \{ \bar{\mathbf{y}}_{\tau_p} \} {}^{p_k} {}^{(p_k)} J_{(\lambda_k \dots \lambda_1) \tau_{p+1}, \tau_p} + \right. \\ \left. + {}^{(p_k)} \tilde{Q}_{\lambda_k} \dots \tilde{Q}_{\lambda_1} \{ \bar{\mathbf{y}}_{\tau_{n_t}} \} {}^{p_k} {}^{(p_k)} J_{(\lambda_k \dots \lambda_1) t, \tau_{n_t}} \right] + \int_0^t \int_X \mathbf{c}(\bar{\mathbf{y}}_{\tau_{n_s}}, \tau_{n_s}, \mathbf{y}) \nu(ds, d\mathbf{y}); \end{aligned} \quad (12.8)$$

$t \in [0, T]$; $\bar{\mathbf{y}}_0, \mathbf{x}_0$ — $\mathcal{F}_0$ -измеримые случайные величины.

Если предположить, что дополнительно к условиям теоремы 12.2 выполнены условия

$$\mathbb{M}\{|\mathbf{x}_0|^2\} < \infty, \quad (12.9)$$

$$\mathbb{M}\{|\mathbf{x}_0 - \bar{\mathbf{y}}_0|^2\} \leq K_7 \Delta^r, \quad K_7 < \infty, \quad (12.10)$$

то из (12.7) получаем следующую оценку [83]:

$$\mathbb{M} \left\{ \sup_{0 \leq t \leq T} |\mathbf{x}_t - \bar{\mathbf{y}}_t|^2 \right\} \leq K_8 \Delta^r,$$

где постоянная K_8 не зависит от Δ .

Следует отметить, что теорема 12.2 фактически обобщает результат среднеквадратической сходимости метода Эйлера для стохастического дифференциального уравнения (12.1), полученный в [5].

Предположим, что кроме условий теоремы 12.2 и условий (12.9), (12.10) выполнены условия

$$\mathbb{M}\{|\mathbf{x}_0 - \mathbf{y}_0|^2\} \leq C_0 \Delta^r,$$

$$\begin{aligned} \mathbb{M} \left\{ \left(J_{(\lambda_k \dots \lambda_1) \tau_{p+1}, \tau_p}^{(i_k \dots i_1)} - \hat{J}_{(\lambda_k \dots \lambda_1) \tau_{p+1}, \tau_p}^{(i_k \dots i_1)} \right)^2 \right\} &\leq C \Delta^{r+1}, \\ \mathbb{M} \left\{ \left(J_{(\lambda_k \dots \lambda_1) t, \tau_{n_t}}^{(i_k \dots i_1)} - \hat{J}_{(\lambda_k \dots \lambda_1) t, \tau_{n_t}}^{(i_k \dots i_1)} \right)^2 \right\} &\leq C \Delta^{r+1} \end{aligned}$$

для всех $p \in \{0, 1, \dots, n_t - 1\}$ и $(\lambda_k, \dots, \lambda_1) \in \bigcup_{q,k=1}^r \mathcal{E}_{qk}$, $\sum_{q=1}^k i_q^2 > 0$, где $C_0, C < \infty$ — постоянные, а $\mathbf{y}_0$ — $\mathcal{F}_0$ -измеримая случайная величина. Тогда нетрудно найти следующую оценку:

$$\mathbb{M} \{ |\mathbf{x}_T - \mathbf{y}_T|^2 \} \leq C_1 \Delta^r,$$

где постоянная C_1 не зависит от Δ , а процесс $\mathbf{y}_t, t \in [0, T]$, получаем из процесса $\bar{\mathbf{y}}_t, t \in [0, T]$, вида (12.8) путем замены в (12.8) $^{(p_k)} J_{(\lambda_k \dots \lambda_1) \tau_{p+1}, \tau_p}$, $p = 0, 1, \dots, n_t - 1$, и $^{(p_k)} J_{(\lambda_k \dots \lambda_1) t, \tau_{n_t}}$ на $^{(p_k)} \hat{J}_{(\lambda_k \dots \lambda_1) \tau_{p+1}, \tau_p}$, $p = 0, 1, \dots, n_t - 1$, и $^{(p_k)} \hat{J}_{(\lambda_k \dots \lambda_1) t, \tau_{n_t}}$ соответственно.

Для аппроксимации величины $\mathbf{x}_{\tau_{i+1}-}$ из (12.5) можно использовать разложение Тейлора–Стратоновича в форме Клоедена и Платена. Тогда вместо (12.6) при четном r получаем, в частности, следующую численную схему:

$$\begin{cases} \mathbf{y}_{\tau_{p+1}-} = \mathbf{y}_{\tau_p} + \sum_{q,k=1}^r \sum_{(\lambda_k, \dots, \lambda_1) \in \mathcal{E}_{qk}} ^{(p_k)} \tilde{D}_{\lambda_k} \dots \tilde{D}_{\lambda_1} \{ \mathbf{y}_{\tau_p} \} ^{p_k} ^{(p_k)} \hat{J}_{(\lambda_k \dots \lambda_1) \tau_{p+1}, \tau_p}^*, \\ \mathbf{y}_{\tau_{p+1}} = \mathbf{y}_{\tau_{p+1}-} + \int_X \mathbf{c}(\mathbf{y}_{\tau_{p+1}-}, \tau_{p+1}, \mathbf{y}) \nu(\{\tau_{p+1}\}, d\mathbf{y}), \end{cases} \quad (12.11)$$

где $p = 0, 1, \dots, n_T$;

$$^{(p_k)} \hat{J}_{(\lambda_k \dots \lambda_1) \tau_{p+1}, \tau_p}^* = \left\| \hat{J}_{(\lambda_k \dots \lambda_1) \tau_{p+1}, \tau_p}^{*(i_k \dots i_1)} \right\|_{i_1=\lambda_1, \dots, i_k=\lambda_k}^{m\lambda_1 \dots m\lambda_k};$$

$\hat{J}_{(\lambda_k \dots \lambda_1) \tau_{p+1}, \tau_p}^{*(i_k \dots i_1)}$ — аппроксимация повторного стохастического интеграла Стратоновича

$$J_{(\lambda_k \dots \lambda_1) \tau_{p+1}, \tau_p}^{*(i_k \dots i_1)} = \int_{\tau_p}^{*\tau_{p+1}} \dots \int_{\tau_p}^{*t_2} d\mathbf{w}_{t_1}^{(i_k)} \dots d\mathbf{w}_{t_k}^{(i_1)};$$

$\mathbf{w}_\tau^{(i)} = \mathbf{f}_\tau^{(i)}$ при $i = 1, \dots, m$ и $\mathbf{w}_\tau^{(0)} = \tau$; $\mathbf{f}_\tau^{(i)}, i = 1, \dots, m$, — стандартные независимые винеровские процессы; $\lambda_l = 1$ или $\lambda_l = 0$; $p_l = \sum_{j=1}^l \lambda_j$; $\tilde{D}_{\lambda_l}^{(i_l)} = \tilde{L} - \frac{1}{2} \sum_{j=1}^m G_0^{(j)} G_0^{(j)}$ и $i_l = 0$ при $\lambda_l = 0$; $\tilde{D}_{\lambda_l}^{(i_l)} = G_0^{(i_l)}$ и $i_l = 1, \dots, m$ при $\lambda_l = 1, l = 1, \dots, k$;

$$\mathcal{E}_{qk} = \{(\lambda_k, \dots, \lambda_1) : \lambda_l \in \{0, 1\}; 2k - \lambda_1 - \dots - \lambda_k = q; l = 1, \dots, k\};$$

операторы $\tilde{L}$ и $G_0^{(i)}$, $i = 1, \dots, m$, такие же, как в (12.6).

Отметим, что разложение Тейлора–Ито в форме Вагнера и Платена и разложение Тейлора–Стратоновича в форме Клоедена и Платена были получены для моментов остановки, в то время как унифицированные разложения Тейлора–Ито и Тейлора–Стратоновича — для постоянных моментов времени (см. главу 4). Это означает, что формально нельзя заменить правые части (12.6) и (12.11) на аналогичные выражения, полученные с помощью унифицированных разложений Тейлора–Ито и Тейлора–Стратоновича. Однако если все узлы разбиения $\{\tau_p\}_{p=0}^{n_T+1}$ вычислены до старта численного метода или вычислен заранее хотя бы последующий по отношению к текущему шагу интегрирования узел, то очевидно (12.6) или (12.11) можно заменять аналогичными выражениями, полученными с помощью унифицированных разложений Тейлора–Ито и Тейлора–Стратоновича.

Рассмотрим разбиения $\{\tau_p\}_{p=0}^{n_T+1}$, для которых выполняются указанные требования. Ранее отмечалось, что процесс Пуассона $\nu([0, t), X)$, $t \in [0, T]$, с интенсивностью $\Pi(X) < \infty$ генерирует последовательность моментов своих скачков, которые являются одновременно моментами скачков и процесса $\mathbf{x}_t$, $t \in [0, T]$. Поскольку последовательность моментов скачков процесса Пуассона может быть численно смоделирована заранее, то последовательность моментов скачков процесса $\mathbf{x}_t$, $t \in [0, T]$, не умаляя общности, можно считать известной и фиксированной. Одним из разбиений $\{\tau_p\}_{p=0}^{n_T+1}$ может являться разбиение, представляющее собой суперпозицию некоторого детерминированного разбиения с рангом дробления Δ и последовательности моментов скачков процесса $\mathbf{x}_t$, $t \in [0, T]$ [83]. В данном случае способ вычисления узлов разбиения $\{\tau_p\}_{p=0}^{n_T+1}$ очевиден.

Рассмотрим другой способ построения разбиения $\{\tau_p\}_{p=0}^{n_T+1}$ [83]. В момент времени τ_0 вычисляется $\mathcal{F}_{\tau_0}$ -измеримый случайный момент $\tilde{\tau}_1$, для которого $\tilde{\tau}_1 - \tau_0 \leq \Delta$ с вероятностью 1. Если между τ_0 и $\tilde{\tau}_1$ скачки процесса $\nu([0, t), X)$, $t \in [0, T]$, отсутствуют, то полагаем $\tilde{\tau}_1 \stackrel{\text{def}}{=} \tau_1$. В противном случае за τ_1 принимается первый после τ_0 скачок процесса $\nu([0, t), X)$, $t \in [0, T]$. Аналогичным образом определяем момент τ_2 , и т. д.

Очевидно, что описанные способы вычисления узлов разбиения $\{\tau_j\}_{j=0}^{n_T+1}$ допускают использование унифицированных разложений Тейлора–Ито и Тейлора–Стратоновича для построения численных методов решения стохастических дифференциальных уравнений со скачкообразной компонентой, так как а priori позволяют получать численные

значения случайных величин $\tau_0, \tau_1, \dots, \tau_{n_T+1}$ перед стартом численного метода.

При использовании для аппроксимации величины $\mathbf{x}_{\tau_{i+1}-}$ из (12.5) унифицированных разложений Тейлора–Ито получаем следующие численные схемы для уравнения (12.1):

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathbf{y}_{\tau_{p+1}-} = \mathbf{y}_{\tau_p} + \\ + \sum_{q=1}^r \sum_{(k,j,l_1,\dots,l_k) \in \mathcal{D}'_q} \frac{(\Delta_p)^j}{j!} {}^{(k)}\tilde{G}_{l_1} \dots \tilde{G}_{l_k} \tilde{L}^j \{\mathbf{y}_{\tau_p}\} \cdot {}^{(k)}\hat{I}_{l_1\dots l_k\tau_{p+1},\tau_p}, \\ \mathbf{y}_{\tau_{p+1}} = \mathbf{y}_{\tau_{p+1}-} + \int_X \mathbf{c}(\mathbf{y}_{\tau_{p+1}-}, \tau_{p+1}, \mathbf{y}) \nu(\{\tau_{p+1}\}, d\mathbf{y}), \end{array} \right. \quad (12.12)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathbf{y}_{\tau_{p+1}-} = \mathbf{y}_{\tau_p} + \\ + \sum_{q=1}^r \sum_{(k,j,l_1,\dots,l_k) \in \mathcal{D}'_q} \frac{(\Delta_p)^j}{j!} {}^{(k)}\tilde{L}^j \tilde{G}_{l_1} \dots \tilde{G}_{l_k} \{\mathbf{y}_{\tau_p}\} \cdot {}^{(k)}\hat{J}_{l_1\dots l_k\tau_{p+1},\tau_p}, \\ \mathbf{y}_{\tau_{p+1}} = \mathbf{y}_{\tau_{p+1}-} + \int_X \mathbf{c}(\mathbf{y}_{\tau_{p+1}-}, \tau_{p+1}, \mathbf{y}) \nu(\{\tau_{p+1}\}, d\mathbf{y}), \end{array} \right. \quad (12.13)$$

где $p = 0, 1, \dots, n_T$; $\tau_{p+1} - \tau_p \stackrel{\text{def}}{=} \Delta_p$;

$${}^{(k)}\hat{I}_{l_1\dots l_k\tau_{p+1},\tau_p} = \left\| \hat{I}_{l_1\dots l_k\tau_{p+1},\tau_p}^{(i_1\dots i_k)} \right\|_{i_1,\dots,i_k=1}^m; \quad {}^{(k)}\hat{J}_{l_1\dots l_k\tau_{p+1},\tau_p} = \left\| \hat{J}_{l_1\dots l_k\tau_{p+1},\tau_p}^{(i_1\dots i_k)} \right\|_{i_1,\dots,i_k=1}^m;$$

$\hat{I}_{l_1\dots l_k\tau_{p+1},\tau_p}^{(i_1\dots i_k)}, \hat{J}_{l_1\dots l_k\tau_{p+1},\tau_p}^{(i_1\dots i_k)}$ — аппроксимации повторных стохастических интегралов Ито вида

$$I_{l_1\dots l_k\tau_{p+1},\tau_p}^{(i_1\dots i_k)} = \begin{cases} \int_{\tau_p}^{\tau_{p+1}} (\tau_p - t_k)^{l_k} \dots \int_{\tau_p}^{t_2} (\tau_p - t_1)^{l_1} d\mathbf{f}_{\tau_1}^{(i_1)} \dots d\mathbf{f}_{\tau_k}^{(i_k)} & \text{при } k \geq 1, \\ 1 & \text{при } k = 0; \end{cases}$$

$$\begin{aligned} J_{l_1\dots l_k\tau_{p+1},\tau_p}^{(i_1\dots i_k)} &= \\ &= \begin{cases} \int_{\tau_p}^{\tau_{p+1}} (\tau_{p+1} - t_k)^{l_k} \dots \int_{\tau_p}^{t_2} (\tau_{p+1} - t_1)^{l_1} d\mathbf{f}_{\tau_1}^{(i_1)} \dots d\mathbf{f}_{\tau_k}^{(i_k)} & \text{при } k \geq 1, \\ 1 & \text{при } k = 0; \end{cases} \end{aligned}$$

$\mathbf{f}_{\tau}^{(i)}, i = 1, \dots, m$, — независимые стандартные винеровские процессы;

$$\mathcal{D}'_q = \mathcal{D}_q \cup \{(k, j, l_1, \dots, l_k) : k = l_1 = \dots = l_k = 0 \text{ и } 2j = q + 1\};$$

$$\tilde{G}_p^{(i)} = \frac{1}{p} \left(\tilde{G}_{p-1}^{(i)} \tilde{L} - \tilde{L} \tilde{G}_{p-1}^{(i)} \right), \quad p = 1, 2, \dots, \quad i = 1, \dots, m;$$

операторы $\tilde{L}$ и $\tilde{G}_0^{(i)} \stackrel{\text{def}}{=} G_0^{(i)}, i = 1, \dots, m$, такие же, как в (12.6).

Если для аппроксимации величины $\mathbf{x}_{\tau_{i+1}-}$ из (12.5) используются унифицированные разложения Тейлора–Стратоновича, то при четном r получаем, в частности, следующие численные схемы для уравнения (12.1):

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathbf{y}_{\tau_{p+1}-} = \mathbf{y}_{\tau_p} + \\ + \sum_{q=1}^r \sum_{(k,j,l_1,\dots,l_k) \in \mathcal{D}_q} \frac{(\Delta_p)^j}{j!} {}^{(k)}\hat{G}_{l_1} \dots \hat{G}_{l_k} \hat{L}^j \{\mathbf{y}_{\tau_p}\} \cdot {}^{(k)}\hat{I}_{l_1 \dots l_k \tau_{p+1}, \tau_p}^*, \\ \mathbf{y}_{\tau_{p+1}} = \mathbf{y}_{\tau_{p+1}-} + \int_X \mathbf{c}(\mathbf{y}_{\tau_{p+1}-}, \tau_{p+1}, \mathbf{y}) \nu(\{\tau_{p+1}\}, d\mathbf{y}), \end{array} \right. \quad (12.14)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathbf{y}_{\tau_{p+1}-} = \mathbf{y}_{\tau_p} + \\ + \sum_{q=1}^r \sum_{(k,j,l_1,\dots,l_k) \in \mathcal{D}_q} \frac{(\Delta_p)^j}{j!} {}^{(k)}\hat{L}^j \hat{G}_{l_1} \dots \hat{G}_{l_k} \{\mathbf{y}_{\tau_p}\} \cdot {}^{(k)}\hat{J}_{l_1 \dots l_k \tau_{p+1}, \tau_p}^*, \\ \mathbf{y}_{\tau_{p+1}} = \mathbf{y}_{\tau_{p+1}-} + \int_X \mathbf{c}(\mathbf{y}_{\tau_{p+1}-}, \tau_{p+1}, \mathbf{y}) \nu(\{\tau_{p+1}\}, d\mathbf{y}), \end{array} \right. \quad (12.15)$$

где $p = 0, 1, \dots, n_T$; $\tau_{p+1} - \tau_p \stackrel{\text{def}}{=} \Delta_p$;

$${}^{(k)}\hat{I}_{l_1 \dots l_k \tau_{p+1}, \tau_p}^* = \left\| \hat{I}_{l_1 \dots l_k \tau_{p+1}, \tau_p}^{*(i_1 \dots i_k)} \right\|_{i_1, \dots, i_k=1}^m; \quad {}^{(k)}\hat{J}_{l_1 \dots l_k \tau_{p+1}, \tau_p}^* = \left\| \hat{J}_{l_1 \dots l_k \tau_{p+1}, \tau_p}^{*(i_1 \dots i_k)} \right\|_{i_1, \dots, i_k=1}^m;$$

$\hat{I}_{l_1 \dots l_k \tau_{p+1}, \tau_p}^{*(i_1 \dots i_k)}$, $\hat{J}_{l_1 \dots l_k \tau_{p+1}, \tau_p}^{*(i_1 \dots i_k)}$ — аппроксимации повторных стохастических интегралов Стратоновича

$$I_{l_1 \dots l_k \tau_{p+1}, \tau_p}^{*(i_1 \dots i_k)} = \begin{cases} \int_{\tau_p}^{*\tau_{p+1}} (\tau_p - t_k)^{l_k} \dots \int_{\tau_p}^{*t_2} (\tau_p - t_1)^{l_1} d\mathbf{f}_{t_1}^{(i_1)} \dots d\mathbf{f}_{t_k}^{(i_k)} & \text{при } k \geq 1, \\ 1 & \text{при } k = 1; \end{cases}$$

$$\begin{aligned} J_{l_1 \dots l_k \tau_{p+1}, \tau_p}^{*(i_1 \dots i_k)} = \\ = \begin{cases} \int_{\tau_p}^{*\tau_{p+1}} (\tau_{p+1} - t_k)^{l_k} \dots \int_{\tau_p}^{*t_2} (\tau_{p+1} - t_1)^{l_1} d\mathbf{f}_{t_1}^{(i_1)} \dots d\mathbf{f}_{t_k}^{(i_k)} & \text{при } k \geq 1, \\ 1 & \text{при } k = 1; \end{cases} \end{aligned}$$

$\mathbf{f}_\tau^{(i)}$, $i = 1, \dots, m$, — независимые стандартные винеровские процессы;

$$\hat{G}_p^{(i)} = \frac{1}{p} \left(\hat{G}_{p-1}^{(i)} \hat{L} - \hat{L} \hat{G}_{p-1}^{(i)} \right), \quad p = 1, 2, \dots, \quad i = 1, \dots, m;$$

$\hat{L} \stackrel{\text{def}}{=} \tilde{L} - \frac{1}{2} \sum_{j=1}^m G_0^{(j)} G_0^{(j)}$; $\hat{G}_0^{(i)} \stackrel{\text{def}}{=} G_0^{(i)}$, $i = 1, \dots, m$; остальные обозначения такие же, как в (12.6), (12.12), (12.13).

Отметим, что нетрудно переформулировать теорему 12.2 для численных схем (12.11)–(12.15).

12.3 Слабые численные методы решения стохастических дифференциальных уравнений со скачкообразной компонентой

В настоящем разделе рассмотрим слабые численные методы решения стохастического дифференциального уравнения (12.1) в автономном случае, т. е. когда $\mathbf{a}(\mathbf{x}, t) \equiv \mathbf{a}(\mathbf{x})$, $\Sigma(\mathbf{x}, t) \equiv \Sigma(\mathbf{x})$, $\mathbf{c}(\mathbf{x}, t, \mathbf{y}) \equiv \mathbf{c}(\mathbf{x}, \mathbf{y})$.

Для построения слабых численных методов решения стохастического дифференциального уравнения (12.1) в автономном случае в [88] используются соотношения (12.5) в автономном случае и разложение Тейлора–Ито в форме Вагнера и Платена:

$$\begin{cases} \mathbf{y}_{\tau_{p+1}-} = \mathbf{y}_{\tau_p} + \sum_{k=1}^r \sum_{(\lambda_k, \dots, \lambda_1) \in \mathcal{M}_k} {}^{(p_k)}\check{Q}_{\lambda_k} \dots \check{Q}_{\lambda_1} \{\mathbf{y}_{\tau_p}\} {}^{p_k} \hat{J}_{(\lambda_k \dots \lambda_1)\tau_{p+1}, \tau_p}, \\ \mathbf{y}_{\tau_{p+1}} = \mathbf{y}_{\tau_{p+1}-} + \int_X \mathbf{c}(\mathbf{y}_{\tau_{p+1}-}, \mathbf{y}) \nu(\{\tau_{p+1}\}, d\mathbf{y}), \end{cases} \quad (12.16)$$

где $p = 0, 1, \dots, n_T$;

$$\mathcal{M}_k = \{(\lambda_k, \dots, \lambda_1) : \lambda_l \in \{0, 1\}; l = 1, \dots, k\};$$

$\check{Q}_{\lambda_l}^{(i_l)} = \check{L}$ и $i_l = 0$ при $\lambda_l = 0$; $\check{Q}_{\lambda_l}^{(i_l)} = \check{G}_0^{(i_l)}$ и $i_l = 1, \dots, m$ при $\lambda_l = 1$, $l = 1, \dots, k$; операторы $\check{L}$ и $\check{G}_0^{(i)}$, $i = 1, \dots, m$, имеют вид

$$\begin{aligned} \check{L}R(\mathbf{x}, t) &= \frac{\partial R}{\partial t}(\mathbf{x}, t) + \sum_{k=1}^n \tilde{\mathbf{a}}^{(k)}(\mathbf{x}) \frac{\partial R}{\partial \mathbf{x}^{(k)}}(\mathbf{x}, t) + \\ &+ \frac{1}{2} \sum_{j,k=1}^n \sum_{i=1}^m \Sigma^{(ki)}(\mathbf{x}) \Sigma^{(ji)}(\mathbf{x}) \frac{\partial^2 R}{\partial \mathbf{x}^{(j)} \partial \mathbf{x}^{(k)}}(\mathbf{x}, t); \\ \check{G}_0^{(i)} R(\mathbf{x}, t) &= \sum_{j=1}^n \Sigma^{(ji)}(\mathbf{x}) \frac{\partial R}{\partial \mathbf{x}^{(j)}}(\mathbf{x}, t), \quad i = 1, \dots, m. \end{aligned}$$

Здесь $R(\mathbf{x}, t) \in \mathcal{L}$; $\tilde{\mathbf{a}}(\mathbf{x}) = \mathbf{a}(\mathbf{x}) - \int_X \mathbf{c}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \Pi(d\mathbf{y})$; остальные обозначения, входящие в (12.16), такие же, как в (12.6).

Через $\bar{\mathbf{y}}_{\tau_p}$, $p = 0, 1, \dots, n_T + 1$, будем обозначать дискретную аппроксимацию, которая отличается от дискретной аппроксимации $\mathbf{y}_{\tau_p}$, $p = 0, 1, \dots, n_T + 1$, вида (12.16) тем, что в $\bar{\mathbf{y}}_{\tau_p}$, $p = 0, 1, \dots, n_T + 1$, производится замена ${}^{(p_k)}\hat{J}_{(\lambda_k \dots \lambda_1)\tau_p, \tau_{p-1}}$ на ${}^{(p_k)}J_{(\lambda_k \dots \lambda_1)\tau_p, \tau_{p-1}}$.

В [88] сформулировано и доказано следующее утверждение.

Теорема 12.3 [88]. Пусть для фиксированного $r \in N$ выполнены условия:

1. Функция $g(\mathbf{x}) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^1$ принадлежит классу $C^{2(r+1)}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^1)$ (см. главу 10).

2. Функции $\mathbf{a}(\mathbf{x})$, $\Sigma(\mathbf{x})$, $\mathbf{c}(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ $2(r+1)$ раз непрерывно дифференцируемы, и их производные ограничены.

3. Для всех $(\lambda_k, \dots, \lambda_1) \in \bigcup_{q=1}^r \mathcal{M}_q$ и $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$

$$\left| \check{Q}_{\lambda_k}^{(i_k)} \dots \check{Q}_{\lambda_1}^{(i_1)} \mathbf{x} \right| \leq K(1 + |\mathbf{x}|), \quad K < \infty.$$

Тогда

$$|\mathbb{M}\{g(\mathbf{x}_T)\} - \mathbb{M}\{g(\bar{\mathbf{y}}_T)\}| \leq C\Delta^r,$$

где постоянная $C < \infty$ не зависит от Δ .

Предположим, что аппроксимации повторных стохастических интегралов, входящие в (12.16), удовлетворяют условию

$$\left| \mathbb{M} \left\{ \prod_{g=1}^l J_{(\lambda_{k_g}^{(g)} \dots \lambda_1^{(g)})_{\tau_{p+1}, \tau_p}}^{(i_{k_g}^{(g)} \dots i_1^{(g)})} - \prod_{g=1}^l \hat{J}_{(\lambda_{k_g}^{(g)} \dots \lambda_1^{(g)})_{\tau_{p+1}, \tau_p}}^{(i_{k_g}^{(g)} \dots i_1^{(g)})} | \mathcal{F}_{\tau_p} \right\} \right| \leq K_1 \Delta^{r+1} \quad (12.17)$$

при всех $p = 0, 1, \dots, n_T$; $(\lambda_{k_g}^{(g)}, \dots, \lambda_1^{(g)}) \in \mathcal{M}_{k_g}$; $i_1^{(g)}, \dots, i_{k_g}^{(g)} = 0, 1, \dots, m$; $k_g \leq r$, $g = 1, \dots, l$; $l = 1, 2, \dots, 2r+1$, где $K_1 < \infty$ — постоянная.

Нетрудно показать, что если выполнены условия теоремы 12.3 и условие (12.17), то справедлива оценка

$$|\mathbb{M}\{g(\mathbf{x}_T)\} - \mathbb{M}\{g(\mathbf{y}_T)\}| \leq C_1 \Delta^r, \quad (12.18)$$

где постоянная $C_1 < \infty$ не зависит от Δ , а $\mathbf{y}_T$ определяется равенствами (12.16) при $p = n_T$.

Если предположить, что узлы разбиения $\{\tau_p\}_{p=0}^{n_T+1}$ вычислены до старта численной схемы или на каждом p -м шаге интегрирования вычислен заранее узел τ_{p+1} , то правую часть (12.16) можно заменить аналогичными выражениями, полученными с помощью унифицированных разложений Тейлора–Ито. Соответствующие численные схемы имеют вид

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathbf{y}_{\tau_{p+1}-} = \mathbf{y}_{\tau_p} + \\ \quad + \sum_{q=1}^r \sum_{(k, j, l_1, \dots, l_k) \in \mathcal{A}_q} \frac{(\Delta_p)^j}{j!} {}^{(k)}\check{G}_{l_1} \dots \check{G}_{l_k} \check{L}^j \{\mathbf{y}_{\tau_p}\} \cdot {}^{(k)}\hat{I}_{l_1 \dots l_k \tau_{p+1}, \tau_p}, \\ \mathbf{y}_{\tau_{p+1}} = \mathbf{y}_{\tau_{p+1}-} + \int_X \mathbf{c}(\mathbf{y}_{\tau_{p+1}-}, \tau_{p+1}, \mathbf{y}) \nu(\{\tau_{p+1}\}, d\mathbf{y}), \end{array} \right. \quad (12.19)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathbf{y}_{\tau_{p+1}-} = \mathbf{y}_{\tau_p} + \\ + \sum_{q=1}^r \sum_{(k,j,l_1,\dots,l_k) \in \mathcal{A}_q} \frac{(\Delta_p)^j}{j!} {}^{(k)}\check{L}^j \check{G}_{l_1} \dots \check{G}_{l_k} \{\mathbf{y}_{\tau_p}\}^{\cdot k} {}^{(k)}\hat{J}_{l_1 \dots l_k \tau_{p+1}, \tau_p}, \\ \mathbf{y}_{\tau_{p+1}} = \mathbf{y}_{\tau_{p+1}-} + \int_X \mathbf{c}(\mathbf{y}_{\tau_{p+1}-}, \tau_{p+1}, \mathbf{y}) \nu(\{\tau_{p+1}\}, d\mathbf{y}), \end{array} \right. \quad (12.20)$$

где $p = 0, 1, \dots, n_T$; $\tau_{p+1} - \tau_p \stackrel{\text{def}}{=} \Delta_p$;

$$\mathcal{A}_q = \left\{ (k, j, l_1, \dots, l_k) : k + j + \sum_{p=1}^k l_p = q, \quad k, j, l_1, \dots, l_k = 0, 1, \dots \right\};$$

$$\check{G}_p^{(i)} = \frac{1}{p} \left(\check{G}_{p-1}^{(i)} \check{L} - \check{L} \check{G}_{p-1}^{(i)} \right), \quad p = 1, 2, \dots, \quad i = 1, \dots, m;$$

операторы $\check{L}$ и $\check{G}_0^{(i)}$, $i = 1, \dots, m$, такие же, как в (12.16); остальные обозначения, введенные в (12.19), (12.20), такие же, как в (12.12), (12.13).

Для того чтобы для численной схемы (12.19) выполнялась оценка (12.18), достаточно потребовать выполнения условий 1, 2 теоремы 12.3, а также следующих условий:

(i) Для всех $(k, j, l_1, \dots, l_k) \in \bigcup_{q=1}^r \mathcal{A}_q$ и $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$

$$|\check{G}_{l_1}^{(i_1)} \dots \check{G}_{l_k}^{(i_k)} \check{L}^j \{\mathbf{x}\}| \leq K(1 + |\mathbf{x}|), \quad K < \infty,$$

где $i_1, \dots, i_k = 1, \dots, m$.

(ii) Для всех $(k_g, j, l_1^{(g)}, \dots, l_{k_g}^{(g)}) \in \mathcal{A}_{k_g}$; $i_1^{(g)}, \dots, i_{k_g}^{(g)} = 1, \dots, m$; $k_g \leq r$; $g = 1, \dots, l$; $l = 1, 2, \dots, 2r + 1$; $p = 0, 1, \dots, n_T$

$$\left| \mathbb{M} \left\{ \prod_{g=1}^l I_{l_1^{(g)} \dots l_{k_g}^{(g)} \tau_{p+1}, \tau_p}^{(i_1^{(g)}) \dots i_{k_g}^{(g)}} - \prod_{g=1}^l \hat{I}_{l_1^{(g)} \dots l_{k_g}^{(g)} \tau_{p+1}, \tau_p}^{(i_1^{(g)}) \dots i_{k_g}^{(g)}} \middle| \mathcal{F}_{\tau_p} \right\} \right| \leq K_1 \Delta^{r+1-j},$$

где $K_1 < \infty$ — постоянная.

Нетрудно также сформулировать аналоги условий (i) и (ii) для численной схемы (12.20).

Часть IV

Численное моделирование: Алгоритмы, программы, результаты

Глава 13

Библиотека MatLab-функций численного моделирования решений стационарных систем линейных стохастических дифференциальных уравнений

В настоящей главе рассматривается библиотека "ITO-LIN" MatLab-функций, позволяющая численно моделировать решения стационарных систем линейных стохастических дифференциальных уравнений. Библиотека "ITO-LIN" написана для версии 3.50a системы MatLab [166], однако в силу преемственности различных версий этой системы она может быть перенесена с соответствующими изменениями на более новые версии.⁴

⁴Материалом для написания настоящей главы послужили глава 2 и Приложение 5 диссертации "Методы численного моделирования решений систем стохастических дифференциальных уравнений Ито в задачах механики" [101], в которой содержится первоначальный вариант библиотеки "ITO-LIN", а также работа [125].

Публикуемая в предлагаемой монографии библиотека "ITO-LIN" отличается от первоначального варианта текстом функций записи в файл и считывания из него исходных данных (in_file.m, out_file.m).

Функции ввода-вывода, просмотра и редактирования исходных данных (in_out.m, in_key.m, see_ed.m) написаны О. Ю. Кульчицким.

Функции вычисления матриц детерминированной, динамической и случайной составляющих решения стационарной СЛСДУ (din_det.m, stoch.m, convert.m, mat_vec.m, vec_mat.m), а также функции записи в файл и считывания из него исходных данных (in_file.m, out_file.m) написаны Д. Ф. Кузнецовым.

Функции выбора и вычисления внешнего детерминированного возмущения (uk_out.m, utt.m) написаны М. Б. Куклиной и Д. Ф. Кузнецовым.

Сценарий lito.m управления библиотекой "ITO-LIN" написан О. Ю. Кульчицким и Д. Ф. Кузнецовым.

13.1 Математическая модель объекта моделирования

Предлагаемая библиотека MatLab-функций позволяет моделировать численно на временной сетке с постоянным шагом $\Delta > 0$:

$$t_k = k\Delta, \quad k = 0, 1, \dots,$$

решения стационарных СЛСДУ вида

$$d\mathbf{x}_t = (A\mathbf{x}_t + B\mathbf{u}(t)) dt + Fd\mathbf{f}_t, \quad \mathbf{x}_0 = \mathbf{x}(0),$$

$$\mathbf{y}_t = H\mathbf{x}_t,$$

где $\mathbf{x}_t \in \mathbb{R}^n$ — решение стационарной СЛСДУ; $\mathbf{u}(t) : [0, T] \rightarrow \mathbb{R}^k$ — детерминированное внешнее возмущение; $\mathbf{y}_t \in \mathbb{R}^1$ — процесс на выходе, численная реализация которого является целью моделирования; $H^\top \in \mathbb{R}^n$, $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $F \in \mathbb{R}^{n \times m}$, $B \in \mathbb{R}^{n \times k}$ — числовые матрицы; $\mathbf{f}_t \in \mathbb{R}^m$ — стандартный винеровский случайный процесс с независимыми компонентами $\mathbf{f}_t^{(i)}$, $i = 1, \dots, m$.

Шаг интегрирования Δ предполагается настолько малым, что детерминированное воздействие $\mathbf{u}(t)$ с достаточной точностью может быть аппроксимировано кусочно-постоянной функцией

$$\mathbf{u}(t) = \mathbf{u}_k \text{ при } t \in [k\Delta, (k+1)\Delta), \quad k = 0, 1, \dots,$$

где $\mathbf{u}(k\Delta) \stackrel{\text{def}}{=} \mathbf{u}_k$.

При этом предположении с помощью формулы Коши может быть получено (см. главу 11) следующее рекуррентное соотношение для решения стационарной СЛСДУ:

$$\mathbf{x}_{k+1} = e^{A\Delta} \mathbf{x}_k + A^{-1} (e^{A\Delta} - I) B \mathbf{u}_k + \tilde{\mathbf{f}}_{k+1}(\Delta), \quad \mathbf{x}_0 = \mathbf{x}(0), \quad (13.1)$$

$$\mathbf{y}_k = H\mathbf{x}_k,$$

где $\mathbf{x}_{k\Delta} \stackrel{\text{def}}{=} \mathbf{x}_k$; $\mathbf{y}_{k\Delta} \stackrel{\text{def}}{=} \mathbf{y}_k$; $\tilde{\mathbf{f}}_{k+1}(\Delta) \in \mathbb{R}^n$ — случайный столбец, который вычисляется по формуле

$$\tilde{\mathbf{f}}_{k+1}(\Delta) = S_D(\Delta) \Lambda_D(\Delta) \bar{\mathbf{f}}_{k+1};$$

$\bar{\mathbf{f}}_k \in \mathbb{R}^n$ — столбец из независимых стандартных гауссовских случайных величин, причем

$$M \{ \bar{\mathbf{f}}_k \bar{\mathbf{f}}_r^\top \} = O_{n \times n} \text{ при } k \neq r,$$

где $O_{n \times n}$ — нулевая $(n \times n)$ -матрица; $S_D(\Delta)$ — матрица ортонормированных собственных векторов матрицы $D_f(\Delta)$ вида

$$D_f(\Delta) = M \{ \tilde{f}_{k+1}(\Delta) \tilde{f}_{k+1}^T(\Delta) \} = \int_0^{\Delta} e^{A(\Delta-\tau)} F F^T e^{A^T(\Delta-\tau)} d\tau,$$

которую получают как решение $D_f(t)$ при $t = \Delta$ матричного дифференциального уравнения вида

$$\frac{dD_f(t)}{dt} = AD_f(t) + D_f(t)A^T + FF^T, \quad D_f(0) = O_{n \times n};$$

$\Lambda_D(\Delta)$ — диагональная матрица, на главной диагонали которой стоят собственные числа матрицы $D_f(\Delta)$.

В главе 11 отмечалось, что первое слагаемое, входящее в правую часть (13.1), называется *переходной*, или *динамической*, составляющей, второе — *систематической* составляющей, а третье — *случайной* составляющей решения стационарной СЛСДУ. В дальнейшем будем придерживаться этой терминологии.

13.2 Общая характеристика и сценарий управления библиотекой

Рекуррентное соотношение (13.1) положено в основу приводимой далее библиотеки MatLab-функций численного моделирования решений стационарных СЛСДУ.

Библиотека позволяет решать следующие задачи:

1. Вводить и выводить в диалоговом режиме необходимые для моделирования исходные параметры задачи (функция `in_out.m`).
2. Вычислять матричные функции динамической и систематической составляющих решения стационарной СЛСДУ (функция `din_det.m`).
3. Вычислять матричные функции, необходимые для генерирования случайной составляющей моделируемого процесса (функция `stoch.m`).
4. Вычислять моментные характеристики решения и выхода стационарной СЛСДУ.
5. Выбирать и вычислять детерминированное воздействие на систему (функции `uk_out.m` и `utt.m`).
6. Моделировать решение стационарной СЛСДУ.
7. Представлять графически смоделированное решение и его дисперсию.

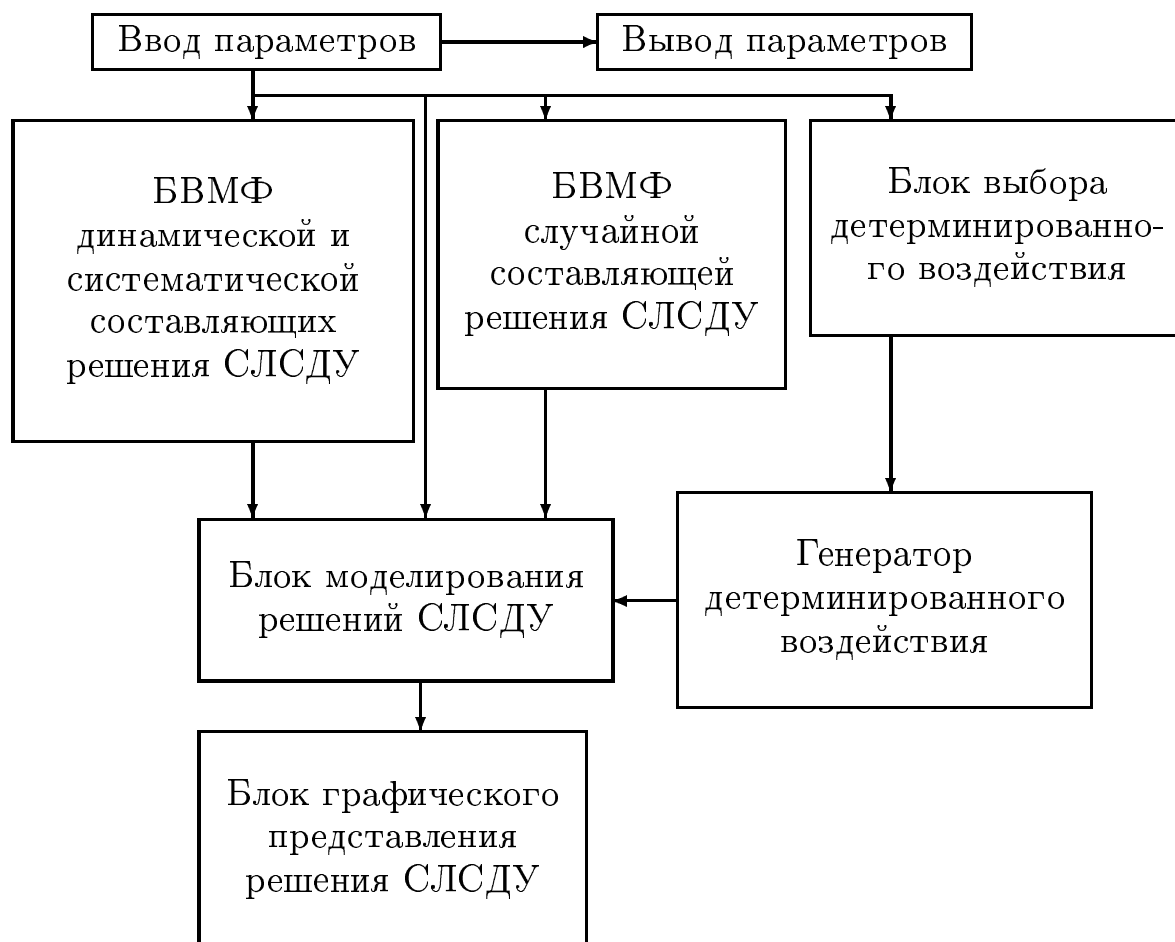


Рис.13.1. Блок-схема структуры библиотеки "ITO-LIN"
MatLab-функций моделирования решений СЛСДУ
(БВМФ — блок вычисления матричных функций).

Перечисленные задачи, решаемые библиотекой, реализуются с помощью сценария `lito.m` управления библиотекой. Дадим характеристику сценария `lito.m`.

1. Назначение: `lito.m` обеспечивает согласование работы отдельных функций библиотеки, промежуточный контроль вычислений при моделировании и графическое представление результатов моделирования.

2. Входные параметры: нет.

3. Выходные параметры: нет.

4. Структурная блок-схема сценария представлена на рис. 13.1.

5. Функции, используемые в `lito.m`: `in_out.m`, `din_det.m`, `stoch.m`, `uk_out.m`, `utt.m`.

6. Текст сценария `lito.m`.

```

%Сценарий моделирования решений стационарных систем
%линейных стохастических дифференциальных уравнений (ССЛСДУ)
casesen on;
clear;
[n,k,m,A,B,F,H,x0,dt,t0,tk]
                                =in_out(n,k,m,A,B,F,H,x0,dt,t0,tk);
type din_det.doc;                                %Вычисление матриц
[Ad,Bd]=din_det(n,k,A,B,dt);                    %Ad и Bd динамической
yn=input('Просмотр Ad, Bd [y/n]', 's'); %и систематической
if yn == 'y',                                    %составляющих
    disp('Ad= '); disp(Ad);                      %решения ССЛСДУ
    disp('Вектор-столбец собственных чисел матрицы Ad');
    disp(eig(Ad));
    disp('Bd= '); disp(Bd);
    pause;
end; %if yn == 'y'
type stoch.doc;
[Fd] = stoch(n,m,A,F,dt);                    %Вычисление матрицы Fd
yn=input('Просмотр Fd [y/n]', 's'); %случайной составляющей
if yn == 'y',                                    %решения ССЛСДУ
    disp('Fd= '); disp(Fd);
    pause;
end; %if yn == 'y'
t1 = t0; %Вспомогательные переменные t1,tk1,x1 введены
tk1 = tk; %для сохранения начальных данных t0,tk,x0
x1 = x0;
an=input('Продолжить решение? [y/n]', 's');
while an == 'y', %Цикл по an введен для изменения
    %внешнего воздействия и выполнения
    %задачи сначала
    rand('normal'); %Установка режима генерации
    %гауссовских случайных величин
    rand('seed',1428300000); %Установка начальной точки
    %датчика случайных чисел
    t0=t1; tk=tk1; x0=x1;
    dn=input('Вы готовы выбрать u(t)? [y/n]', 's');
while dn == 'y', %Цикл по dn введен для изменения внешнего
    %воздействия, начальные условия задаются
    %по результатам решения предыдущей задачи
    %Выбор параметров внешнего возмущения

```

```

[u0,r0,rr,D,w,fi,D1,w1,fi1,un,ua,deg1,deg2,U] = uk_out(k);
                                %Моделирование решения ССЛСДУ
disp('Начало промежутка интегрирования t0= ')
disp(t0);
disp('Конец промежутка интегрирования tk= ')
disp(tk);
disp('Начальное условие x0= ')
disp(x0); mx0=x0;
Dx0=zeros(n,n);
disp('Моделирование решения ССЛСДУ');
yn=input('Моделировать? [y/n] ','s');
    while yn == 'y',
        kk = 1;
        yt(kk) = H*x0; my(kk) = H*mx0;
        Dy(kk) = H*Dx0*H';
        kt(kk) = t0;
        tk2=tk; t2=tk-t0; nn=t2/dt+1;
    for kk=2:nn,
        t=t0+(kk-1)*dt;
[ut]=utt(t,k,u0,r0,rr,D,w,fi,D1,w1,fi1,un,ua,deg1,deg2,U);
        ft = rand(n,1);
        xt = Ad*x0 + Bd*ut + Fd*ft; %Решение ССЛСДУ
        mx = Ad*mx0 + Bd*ut;        %Математическое ожидание
                                    %решения ССЛСДУ
        Dx = Ad*Dx0*Ad'+Fd*Fd';    %Дисперсионная матрица
                                    %решения ССЛСДУ
        rx = expm(A*(tk-t))*Dx;    %Ковариационная матрица
                                    %решения ССЛСДУ
        yt(kk) = H*xt;            %Выход ССЛСДУ
my(kk) = H*mx;                    %Математическое ожидание выхода ССЛСДУ
Dy(kk) = H*Dx*H'; %Дисперсионная матрица выхода ССЛСДУ
ry(kk) = H*rx*H'; %Ковариационная матрица выхода ССЛСДУ
        kt(kk) = t;
        x0 = xt; mx0 = mx; Dx0 = Dx;
    end; % for
        tk = tk2 + t2; t0 = tk2;
        clc; clg;
        subplot(211) %Графический вывод выхода yt ССЛСДУ
        plot(kt,yt,'w',kt,my,'r'),
xlabel('System with noise (white) and

```



```

                                system without noise (red)'),
    pause;
bn=input('График дисперсии выхода системы? [y/n]','s');
    if bn == 'y',
        plot(kt,Dy,'w'),
        pause;
    end; %if bn=='y'
        disp('Число шагов kk= ');
        disp(kk); pause;
yn=input('Моделировать на следующем интервале? [y/n]','s');
    end; % while yn=='y'
        dn=input('Изменить характер u(t) ? [y/n]','s');
    end; % while dn=='y'
an=input('Изменить u(t) и решать задачу сначала? [y/n]','s');
    end; % while an=='y'
end; % Конец программы l_ito

```

После запуска сценария l_ito.m происходит обращение к функции in_out.m, в результате чего на экране компьютера появляется заставка (файлы заставок title.doc, menu.doc), которая выглядит следующим образом:

```

МОДЕЛИРОВАНИЕ РЕШЕНИЙ ССЛСДУ
Ввод исходных параметров:
Ввод с клавиатуры           [k]
Ввод из файла                [r]
Просмотр или редактирование [l]
Запись на МД                 [w]
Конец ввода                  [e]
Выход из программы в DOS    [q]
Введите нужное

```

После окончания ввода, редактирования, просмотра или записи на МД исходных данных можно приступить непосредственно к моделированию решения стационарной СЛСДУ. Моделирование начинается после того, как на экране компьютера появляется заставка (файл заставки lssde.doc), которая имеет вид

```

Моделируется стационарная СЛСДУ вида
dx = Axdt + Budt + Fdf; x(0) = x0,
y = Hx,
где x - (n*1)-столбец; y - скаляр; u - (k*1)-столбец;

```

f – $(m \times 1)$ -столбец; A – $(n \times n)$ -матрица; B – $(n \times k)$ -матрица;
 F – $(n \times m)$ -матрица; H – $(1 \times n)$ -строка.

13.3 Функции ввода-вывода, просмотра и редактирования исходных данных

Функция in_out.m

1. Назначение: in_out.m обеспечивает ввод с клавиатуры или из файла, вывод в виде файла и запись на МД, а также просмотр и редактирование исходных параметров системы, необходимых для моделирования ее решений.

2. Входные параметры: нет.

3. Выходные параметры:

n — размерность вектора x_t решения системы;

k — размерность вектора внешнего воздействия $u(t)$;

m — размерность вектора случайных возмущений f_t ;

A — $(n \times n)$ -матрица; B — $(n \times k)$ -матрица; F — $(n \times m)$ -матрица; H — $(1 \times n)$ -матрица.

4. Структурная блок-схема функции представлена на рис. 13.2.

5. Функции, используемые в in_out.m: in_key.m, in_file.m, see_ed.m, out_file.m.

6. Текст функции in_out.m.

%Функция ввода-вывода исходных параметров ССЛСДУ

```
function [n,k,m,A,B,F,H,x0,dt,t0,tk]
    =in_out(n,k,m,A,B,F,H,x0,dt,t0,tk)

    casesen on;
    type title.doc;
    key='k';
while key=='k' | key=='l' | key=='w' | key=='r' | key=='q'
    | key=='e',

    type menu0.doc;
    key=input('key= ? [k,r,l,w,e,q] ','s');
    if key == 'k', %Ввод параметров ССЛСДУ с клавиатуры
[n,k,m,A,B,F,H,x0,dt,t0,tk]
        =in_key(n,k,m,A,B,F,H,x0,dt,t0,tk);
    end; %if key=='k'
if key == 'l', %Просмотр и редактирование параметров ССЛСДУ
[n,k,m,A,B,F,H,x0,dt,t0,tk]
    =see_ed(n,k,m,A,B,F,H,x0,dt,t0,tk);
```



Рис.13.2. Структура функции `in_out.m`.

```

end; %if key=='l'
    if key == 'w', %Запись параметров ССЛСДУ в файл *.mat
        disp('Введите: save(пробел)имя файла, Enter, Ctrl^Z');
        keyboard
[V,tt1,tt2,tt3,tt4,tt5,tt6,key]
        =out_file(n,k,m,A,B,F,H,x0,dt,t0,tk,key);
    end; %if key == 'w'
    if key=='r', %Ввод параметров ССЛСДУ из файла *.mat
        disp('Введите: load(пробел)имя файла, Enter, Ctrl^Z');
        keyboard
[n,k,m,A,B,F,H,x0,dt,t0,tk]
        =in_file(V,tt1,tt2,tt3,tt4,tt5,tt6,key);
end; %if key=='r'
    if key== 'q', %Выход из программы l_ito
        clear ;
        quit;
    end; %if key=='q'
    if key== 'e', %Конец ввода параметров ССЛСДУ
        return
    end; %if key=='e'
end; %while key == 'k':'r':'l':'w':'e'
                                %Выход в MatLab

end; %in_out

```

Рассмотрим вспомогательные функции in_key.m, in_file.m, see_ed.m, out_file.m, используемые в функции in_out.m.

Функция in_key.m

1. Назначение: in_key.m обеспечивает в диалоговом режиме ввод с клавиатуры исходных параметров системы.
2. Входные параметры: нет.
3. Выходные параметры: n, k, m, A, B, F, H; t0, tk — границы промежутка интегрирования, dt — шаг интегрирования, x0 — начальное условие.
4. Структура функции: диалоговая.
5. Функция in_key.m не использует другие функции.
6. Текст функции in_key.m.

%Функция ввода параметров ССЛСДУ с клавиатуры

```

function [n,k,m,A,B,F,H,x0,dt,t0,tk]
    =in_key(n,k,m,A,B,F,H,x0,dt,t0,tk)

```

```

casesen on;
type lssde.doc
n=input('n=? (n>=1)'); %Ввод n,k,m
while n<1,
    n=input('Введите новое n (n>=1)');
end; %while;
k=input('k=? ((k>=1)&(k<=n))');
while k<1 | k>n,
    k=input('Введите новое k (k>=1)&(k<=n)');
end; %while
m=input('m=? ((m>=1)&(m<=n))');
while m<1 | m>n,
    m=input('Введите новое m (m>=1)&(m<=n)');
end; %while
A=input('A=?(n*n)'); %Ввод A,B,F,H,x0
B=input('B=?(n*k)');
F=input('F=?(n*m)');
H=input('H=?(1*n)');
x0=input('x0=?(n*1)');
dt=input('dt=? (dt>0)'); %Ввод dt,t0,tk
t0=input('t0=? ');
tk=input('tk=? (tk>t0)');
while dt<=0 | t0>tk-dt
    disp('Введите новые dt (dt>0), t0, tk');
    dt=input('dt=? (dt>0)');
    t0=input('t0=?');
    tk=input('tk=? (tk>=t0+dt)');
end; %while
end; %in_key

```

Функция in_file.m

1. Назначение: in_file.m обеспечивает ввод из файла исходных параметров системы.
2. Входные параметры: V — $(n \times (n+k+m+2))$ -матрица и $tt1, \dots, tt6$ — скалярные переменные, в которых содержатся исходные параметры ССЛСДУ; key — ключ входа.
3. Выходные параметры: те же, что и у функции in_key.m, а также key — ключ выхода.
4. Структура функции: простая.
5. Функция in_file.m не использует другие функции.

6. Текст функции in_file.m.

```
%Функция преобразования (n x (n+m+k+2))-матрицы V и переменных
%tt1,...,tt6 в исходные параметры ССЛСДУ
function [n,k,m,A,B,F,H,x0,dt,t0,tk,key]
    =in_file(V,tt1,tt2,tt3,tt4,tt5,tt6,key)
n=tt1; k=tt2; m=tt3;
A=V(1:n,1:n);
B=V(1:n,n+1:n+k);
F=V(1:n,n+k+1:n+k+m);
H1=V(1:n,n+k+m+1); H=H1';
x0=V(1:n,n+k+m+2);
dt=tt4; t0=tt5; tk=tt6;
    end % in_file
```

Функция see_ed.m

1. Назначение: see_ed.m обеспечивает просмотр и редактирование в диалоговом режиме значений параметров ССЛСДУ.
2. Входные параметры: те же, что и выходные параметры функции in_key.m.
3. Выходные параметры: те же, что и у функции in_key.m.
4. Структура функции: диалоговая.
5. Функция see_ed.m не использует другие функции.
6. Текст функции see_ed.m.

```
%Функция просмотра и редактирования параметров ССЛСДУ
function [n,k,m,A,B,F,H,x0,dt,t0,tk]
    =see_ed(n,k,m,A,B,F,H,x0,dt,t0,tk)
    casesen on;
    type lssde.doc;
    disp('n='); disp(n);
    disp('k='); disp(k);
    disp('m='); disp(m);
    yn='n';
    while yn=='n' | yn=='k' | yn=='m',
        yn=input('n,k,m=? [n/k/m//q] ', 's');
    if yn == 'n',
        n=input('n=? (n>=1)');
    while n < 1,
        n=input('Измените n (n>=1)');
    end; %while
```

```

    end; %if yn == 'n'
if yn == 'k',
    k=input('k=? ((k>=1)&(k<=n))');
while k < 1 | k > n,
    k=input('Измените k (k>=1)&(k<=n)');
end; %while
end; %if yn == 'k'
    if yn == 'm',
        m=input('m=? ((m>=1)&(m<=n))');
while m < 1 | m > n,
    m=input('Измените m (m>=1)&(m<=n)');
end; %while
    end; %if yn == 'm'
end; %while
        disp('A= '); disp(A); pause;
        disp('B= '); disp(B); pause;
        disp('F= '); disp(F); pause;
        disp('H= '); disp(H); pause;
        disp('x0= '); disp(x0); pause;
    yn='A';
while yn=='A' | yn=='B' | yn=='F' | yn=='H' | yn=='x0',
yn=input('A=? ,B=?, F=?, H=?, x0=?: [A/B/F/H/x0//q] ','s');
    if yn=='A',
        A=input('A=?(n*n)');
    end; %if yn == 'A'
    if yn=='B',
        B=input('B=?(n*k)');
    end; %if yn == 'B'
        if yn=='F',
            F=input('F=?(n*m)');
        end; %if yn == 'F'
    if yn=='H',
        H=input('H=?(l*n)');
    end; %if yn == 'H'
    if yn=='x0',
        x0=input('x0=?(n*n)');
    end; %if yn == 'x0'
        end; %while
        disp('dt= '); disp(dt); pause;
        disp('t0= '); disp(t0); pause;

```

```

disp('tk= '); disp(tk); pause;
yn='dt';
while yn=='dt' | yn=='t0' | yn=='tk',
    yn=input('dt,t0,tk=? [dt/t0/tk//q] ','s');
if yn == 'dt',
    dt=input('dt=? (dt>0) ');
while dt <= 0,
    dt=input('Измените dt=? (dt>0) ');
end; %while
end; %if yn == 'dt'
if yn == 't0',
    t0=input('t0=? ');
end; %if yn == 't0'
if yn == 'tk',
    tk=input('tk=? (tk>=t0+dt) ');
while tk < t0+dt,
    tk=input('Измените tk=? (tk>=t0+dt) ');
end; %while
end; %if yn == 'tk'
end; %while
end; %see_ed

```

Функция out_file.m

1. Назначение: out_file.m обеспечивает запись массива исходных данных в виде файла с расширением "mat" на МД.
2. Входные параметры: те же, что и выходные параметры у функции in_file.m.
3. Выходные параметры: V — $(n \times (n+k+m+2))$ -матрица и $tt1, \dots, tt6$ — скалярные переменные, в которых содержатся исходные параметры ССЛСДУ; key — ключ входа.
4. Структура функции: простая.
5. Функция out_file.m не использует других функций.
6. Текст функции out_file.m.

```

%Функция преобразования исходных параметров ССЛСДУ в
%(n x (n+m+k+2))-матрицу V и переменные tt1,...,tt6
function[V,tt1,tt2,tt3,tt4,tt5,tt6,key]
    =out_file(n,k,m,A,B,F,H,x0,dt,t0,tk,key)
    tt1=n; tt2=k; tt3=m;
    H1=H';

```



```

V=[A B F H1 x0];
tt4=dt; tt5=t0; tt6=tk;
end % out_file

```

13.4 Функции вычисления матриц систематической, динамической и случайной составляющих решения стационарной СЛСДУ

Функциями вычисления матриц систематической, динамической и случайной составляющих решения стационарной СЛСДУ являются функции `din_det.m` и `stoch.m`. При этом функция `stoch.m` использует вспомогательные функции `convert.m`, `mat_vec.m` и `vec_mat.m`. Рассмотрим эти функции поочередно.

Функция `din_det.m`

1. Назначение: `din_det.m` осуществляет вычисление матриц динамической и систематической составляющих решения стационарной СЛСДУ.

2. Входные параметры: u , k , A , B , dt те же, что и выходные параметры функции `in_key.m`.

3. Выходные параметры: A_d — $(n \times n)$ -матрица динамической составляющей решения СЛСДУ, B_d — $(n \times k)$ -матрица систематической составляющей решения СЛСДУ.

4. Структурная блок-схема функции реализует вычисление матриц

$$e^{A\Delta}, A^{-1}(e^{A\Delta} - I)B,$$

входящих в первые два слагаемых правой части (13.1).

5. Функция `din_det.m` не использует другие функции.

6. Текст функции `din_det.m`.

%Функция вычисления матриц A_d (динамической составляющей) и B_d (систематической составляющей)

```

function [Ad,Bd] = din_det(n,k,A,B,dt);
    Okn=zeros(k,n);
    Okk=zeros(k,k);
    Idt=eye(n+k)*dt;
    AA=[A B; Okn Okk];
    ex_aah=expm(AA*Idt);
    Ad=ex_aah(1:n,1:n);
    nb1=n+1; nbk=n+k;

```

```
Bd=ex_aah(1:n,nb1:nbk);
end; %din_det
```

7. Заставка функции din_det.m (din_det.doc):

```
Вычисление матриц
Ad (динамической составляющей),
Bd (систематической составляющей).
```

Функция stoch.m

1. Назначение: stoch.m осуществляет вычисление матрицы случайной составляющей решения ССЛСДУ.
2. Входные параметры: n, m, A, F, dt.
3. Выходные параметры: Fd — $(n \times n)$ -матрица случайной составляющей решения ССЛСДУ.
4. Структурная блок-схема функции реализует вычисление случайной составляющей решения ССЛСДУ по алгоритму 11.6.
5. Функции, используемые в stoch.m: mat_vec.m, vec_mat.m, convert.m.
6. Текст функции stoch.m.

%Функция вычисления матрицы Fd (случайной
%составляющей ССЛСДУ)

```
function [Fd] = stoch(n,m,A,F,dt);
if n == 1,
    NF = abs(F);
elseif n > 1,
    NF = norm(F,'fro');
else
    NF = -1;
end; %if
if NF >= 0.00000001,
    [Ac] = convert(A,n);
    G = F*(F');
    [gv] = mat_vec(G,n);
    nn2 = n*(n+1)/2;
    [Dd,Dv]=din_det(nn2,1,Ac,gv,dt);
    [D] = vec_mat(Dv,n);
    [S,L2] = eig(D);
    [L] = sqrt(L2);
    Fd = S*L;
```

```

else
    disp('F=0');
    Fd = zeros(n,n);
end; %if
end; %stoch

```

7. Заставка функции stoch.m (stoch.doc):

Вычисление матрицы
Fd (случайной составляющей).

Функция convert.m

1. Назначение: convert.m осуществляет преобразование симметричной матрицы A размера $n \times n$ в матрицу A_{conv} размера $(n \times (n+1))/2 \times (n \times (n+1))/2$ по алгоритму 11.5.
2. Входные параметры: n , A .
3. Выходные параметры: A_{conv} .
4. Структура функции: простая.
5. Функция convert.m не использует другие функций.
6. Текст функции covert.m.

%Функция преобразования симметричной $(n \times n)$ -матрицы A
%в матрицу A_{conv} размера $(n \times (n+1)/2) \times (n \times (n+1)/2)$

```

function [Aconv] = convert(A,n);
one1 = zeros(n,n);
rr1 = 1;
for jj1 = 1:n,
    nb1=n-jj1+1;
    for kk1 = 1:nb1,
        ii1 = kk1+jj1-1;
        one1(kk1,ii1) = 1;
        one1(ii1,kk1) = 1;
        oneA = one1*(A') + A*one1;
        oo1 = 0;
    for ss1 = 1:n,
        ll11 = n-ss1+1;
    for ll1 = 1:ll11,
        Aconv(ll1+oo1,rr1) = oneA(ll1,ll1+ss1-1);
    end; % for ll1
        oo1 = oo1+n-ss1+1;
    end; %for ss1

```

```

        one1 = zeros(n,n);
        rr1 = rr1+1;
    end; %for kk1
        end; %for jj1
    end; %convert

```

Функция **mat_vec.m**

1. Назначение: **mat_vec.m** осуществляет преобразование верхнего треугольника матрицы **Mat** размера $n \times n$ в столбец **Vec** размера $(n \times (n+1))/2$ по алгоритму 11.3.
2. Входные параметры: **n**, **Mat**.
3. Выходные параметры: **Vec**.
4. Структура функции: простая.
5. Функция **mat_vec.m** не использует другие функции.
6. Текст функции **mat_vec.m**.

```

%Функция преобразования верхнего треугольника n x n
%матрицы Mat в вектор-столбец Vec размера (n x (n+1))/2
function [Vec] = mat_vec(Mat,n);
    ii1 = 0;
    for jj1 = 1:n,
        nb1 = n-jj1+1;
        for kk1 = 1:nb1,
            Vec(kk1+ii1,1) = Mat(kk1,kk1+jj1-1);
        end; %for kk1
        ii1 = ii1+n-jj1+1;
    end; %for jj1
    end; %mat_vec

```

Функция **vec_mat.m**

1. Назначение: **vec_mat.m** осуществляет преобразование столбца **Vec** размера $(n \times (n+1))/2$ в симметричную $(n \times n)$ -матрицу **Mat** по алгоритму 11.4.
2. Входные параметры: **n**, **Vec**.
3. Выходные параметры: **Mat**.
4. Структура функции: простая.
5. Функция **vec_mat.m** не использует другие функции.
6. Текст функции **vec_mat.m**.

```

%Функция преобразования вектора-столбца Vec размера

```

```

%(n x (n+1))/2 в симметричную (n x n)-матрицу Mat
function[Mat]=vec_mat(Vec,n);
ii1=0;
for jj1 = 1:n,
    nb1 = n-jj1+1;
    for kk1 = 1:nb1,
        Mat(kk1,kk1+jj1-1) = Vec(kk1+ii1,1);
        Mat(kk1+jj1-1,kk1) = Vec(kk1+ii1,1);
    end; %for kk1
    ii1 = ii1+n-jj1+1;
end; %for jj1
end; %vec_mat

```

13.5 Функции выбора и вычисления внешнего детерминированного воздействия

Функциями выбора и вычисления внешнего детерминированного воздействия являются функции `uk_out.m` и `utt.m`.

Функция `uk_out.m`

1. Назначение: `uk_out.m` позволяет выбирать постоянное, полиномиальное, гармоническое, комбинированное и нулевое внешнее детерминированное воздействие.

2. Входные параметры: k .

3. Выходные параметры: $u_0, D, w, f_i \in \mathbb{R}^k$; $\deg_1, \deg_2, D_1, w_1, f_{i1}, r_0 \in \mathbb{R}^1$; $rr \in \mathbb{R}^q$; $U \in \mathbb{R}^{(p+1) \times k}$ — параметры различных внешних возмущений; un — вспомогательная переменная, принимающая значения $1, \dots, 5$ в зависимости от выбранного внешнего возмущения; $ua \in \mathbb{R}^k$ — вспомогательный вектор-столбец, каждая компонента которого принимает значения $1, 2, 3$ и используется при вычислении комбинированного внешнего воздействия; здесь p — степень полиномиального воздействия, а q — степень полиномиальной компоненты комбинированного воздействия.

4. Структура функции: диалоговая.

5. Функция `uk_out.m` не использует другие функции.

6. Текст функции `uk_out.m`.

```

%Функция выбора и задания внешнего возмущения u(t)
function [u0,r0,rr,D,w,fi,D1,w1,fi1,un,ua,deg1,deg2,U]
=uk_out(k);

```

```

casesen on;
key='d';
while key=='d' | key=='p' | key=='g' | key=='o' | key=='z',
    type uprav.doc;
    key=input('key= ? [d,p,g,o,z] ', 's');
    if key == 'd', % Постоянное воздействие
disp('Введите постоянное воздействие u0 - k-вектор');
    disp('k= '); disp(k);
    u0=input(' u0= ? k-вектор ');
    un=1; return;
    end; % if key=='d'
    if key == 'p', %Полиномиальное воздействие
disp('Полиномиальное воздействие U(1)+U(2)*t+... - k-вектор');
    deg=input('Введите степень полинома deg=?');
    disp('Введите коэффициенты полинома - k-столбцы');
    disp('k= '); disp(k);
    deg1=deg+1;
    for i=1:deg1,
        disp('i= '); disp(i);
        U(:,i)=input(' k-столбец U(i)= ? ');
    end; % for
    un=2; return;
    end; % if key=='p'
    if key == 'g', %Гармоническое воздействие
disp('Гармоническое воздействие D*sin(w*t+fi) - k-вектор');
    disp('Введите векторные коэффициенты - k-столбцы');
    disp('k= '); disp(k);
    D=input('k-столбец D= ?');
    w=input('k-столбец w= ?');
    fi=input('k-столбец fi= ?');
    un=3; return;
    end; % if key=='g'
    if key == 'o', %Отсутствие внешнего воздействия
    un=4; return;
    end; % if key=='o'
    if key == 'z', %Комбинированное воздействие (KB)
    un=5;
    for i=1:k,
        key='d';
    type upr.doc;

```

```

disp('i= '); disp(i);
while key=='d' | key=='p' | key=='g',
    key=input('key= ? [d,p,g] ', 's');
    if key=='d', %Постоянная составляющая КВ
        disp('Введите постоянную составляющую r0 КВ');
        r0=input('r0= ? ');
        ua(i)=1; key=0;
    end; %if key=='d'
    if key=='p', %Полиномиальная составляющая КВ
        disp('Полиномиальная составляющая КВ: rr(1)+rr(2)*t+...');
        deg3=input('Введите степень полинома deg=?');
disp('Введите коэффициенты полинома');
        deg2=deg3+1;
        for i=1:deg2,
            disp('i='); disp(i);
            rr(i)=input('rr(i)=');
        end %for
        ua(i)=2; key=0;
    end; %if key=='p'
    if key=='g', %Гармоническая составляющая (ГС) КВ
disp('Введите параметры ГС D1*sin(w1*t+fi1) КВ');
        D1=input('D1= ?'); w1=input('w1= ?');
        fi1=input('fi1= ? ');
        ua(i)=3; key=0;
    end; %if
end; % while
end; % for
return;
end; % if key=='z'
end; % while
end; % uk_out

```

7. Заставка функции uk_out.m (uprav.doc):

ВЫБОР ВНЕШНЕГО ВОЗМУЩЕНИЯ:		
Постоянное воздействие	$u=u_0$	[d]
Полиномиальное воздействие	$u=U(1)+U(2)*t+...$	[p]
Гармоническое воздействие	$u=D*\sin(w*t+fi)$	[g]
Отсутствие внешнего воздействия	$u=0$	[o]
Комбинированное воздействие		[z]
Введите нужное		

8. Заставка (upr.doc), появляющаяся при выборе комбинированного возмущения:

ВЫБОР ВНЕШНЕГО КОМБИНИРОВАННОГО ВОЗМУЩЕНИЯ:

Выбор $u(i)$ – элемента k -вектора u

Постоянное воздействие $u(i)=r0$ [d]

Полиномиальное воздействие $u(i)=rr(1)+rr(2)*t+\dots$ [p]

Гармоническое воздействие $u(i)=D1*\sin(w1*t+fi1)$ [g]

Введите нужное

Функция `utt.m`.

1. Назначение: `utt.m` вычисляет внешнее возмущение $u(t)$ по введенным параметрам на каждом шаге интегрирования.

2. Входные параметры те же, что и выходные параметры функции `uk_out.m`, а также k — размерность внешнего воздействия, t — время.

3. Выходные параметры: $ut \in \mathbb{R}^k$ — внешнее воздействие, вычисленное в момент времени t .

4. Структура функции: простая.

5. Функция `utt.m` не использует другие функции.

6. Текст функции `utt.m`.

%Функция вычисления внешнего возмущения $u(t)$

%по введенным параметрам

`function [ut]`

`=utt(t,k,u0,r0,rr,D,w,fi,D1,w1,fi1,un,ua,deg1,deg2,U);`

`casesen on;`

`ut=zeros(k,1);`

`if un == 1, %Постоянное воздействие`

`ut = u0;`

`elseif un == 2, %Полиномиальное воздействие`

`for i=1:deg1,`

`ut = ut+U(:,i)*(t^(i-1));`

`end; % for`

`elseif un == 3, %Гармоническое воздействие`

`for i = 1:k,`

`v(i) = D(i)*sin(w(i)*t+fi(i));`

`end; %for`

`ut = v';`

`elseif un == 4, %Отсутствие внешнего возмущения`

`ut = zeros(k,1);`

`else %Комбинированное воздействие (KB)`


```

        v=zeros(k,1);
        for j = 1:k,
            if ua(j) == 1,
                v(j) = r0; %Постоянная составляющая КВ
            elseif ua(j) == 2,
                for i=1:deg2,
                    v(j)=v(j)+rr(i)*(t^(i-1)); %Полиномиальная составляющая КВ
                end; %for
            else
                v(j) = D1*sin(w1*t+fi1); %Гармоническая составляющая КВ
            end; % if
        end; % for
        ut=v;
    end; % if
    end; % utt

```

13.6 Примеры численного моделирования решений стационарных СЛСДУ

В данном разделе будут рассмотрены задачи о численном моделировании чандлеровских колебаний, солнечной активности и лагранжевой динамики частицы жидкости. При их решении будет использована библиотека "ITO-LIN" MatLab-функций⁵.

13.6.1 Численное моделирование чандлеровских колебаний

Запишем математическую модель в виде СЛСДУ [31], которая описывает чандлеровские колебания:

$$d \begin{bmatrix} \mathbf{x}_t^{(1)} \\ \mathbf{x}_t^{(2)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\lambda & -\omega \\ \omega & -\lambda \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{x}_t^{(1)} \\ \mathbf{x}_t^{(2)} \end{bmatrix} dt + \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{bmatrix} d \begin{bmatrix} \mathbf{f}_t^{(1)} \\ \mathbf{f}_t^{(2)} \end{bmatrix}, \quad (13.2)$$

где $\mathbf{x}_t^{(1)}, \mathbf{x}_t^{(2)} \in \mathbb{R}^1$ — случайные процессы, определяющие положение Северного полюса Земли; $\mathbf{f}_t^{(1)}, \mathbf{f}_t^{(2)} \in \mathbb{R}^1$ — независимые стандартные винеровские процессы; $\frac{\omega}{2\pi}$ — частота (циклов в год); $\frac{1}{\lambda}$ — релаксация (лет), a — интенсивность случайных возмущений.

⁵Эти и другие задачи численного моделирования, рассмотренные в главах 14 — 16, решены с помощью версии 5.2 пакета MatLab (лицензионный номер 90291 от 3 мая 1998 года) в сотрудничестве с работниками группы по теории кодирования и теории информации Санкт-Петербургской академии аэрокосмического приборостроения.

Согласно оценкам, полученным в работах [31, 33], параметры λ , a , ω имеют следующие значения:

$$\lambda = 0.06 \left(\frac{1}{\text{год}} \right), \quad a = 0.035'', \quad \omega = 5.274.$$

Выберем исходные (на начало 1968 г.) данные, зарегистрированные Международной Службой Широты: $\mathbf{x}_0^{(1)} = -0.03''$, $\mathbf{x}_0^{(2)} = -0.27''$.

Смоделируем численно решение СЛСДУ (13.2) на временном интервале 35 лет с шагом 0.01 года с помощью точного интегрального представления решения этой системы и алгоритмов 11.1–11.7, полученных в главе 11.

На рис.13.3, 13.4 показано поведение процессов $\mathbf{x}_t^{(1)}$ и $\mathbf{x}_t^{(2)}$ во времени, а на рис. 13.5 приведены фазовые траектории системы (13.2). Если положить $a = 0.00''$, то фазовые траектории системы (13.2) принимают вид, изображенный на рис. 13.6.

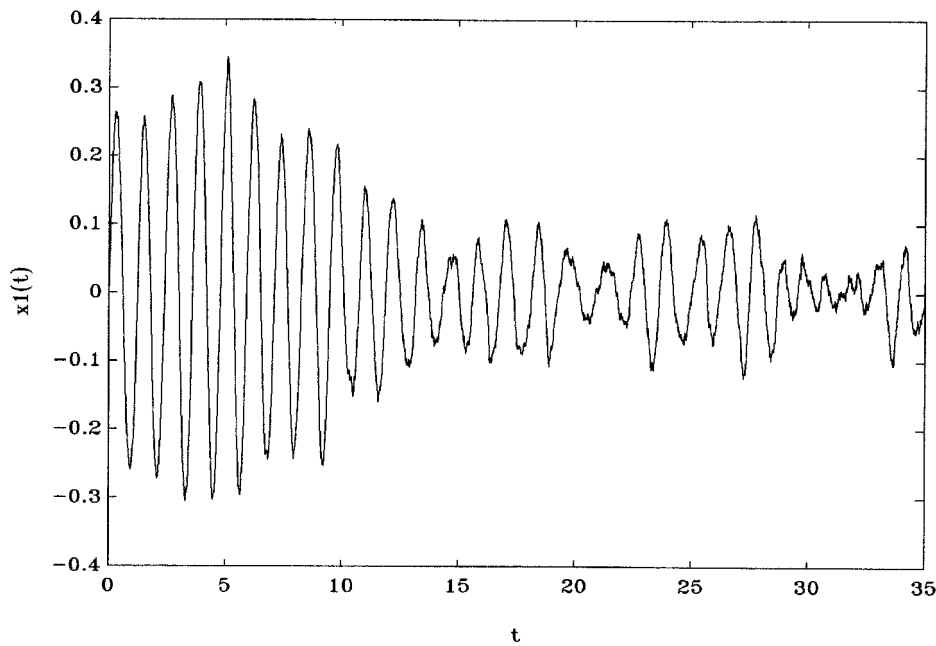


Рис.13.3. Моделирование чандлеровских колебаний при $\lambda = 0.06$, $a = 0.035$, $\omega = 5.274$.

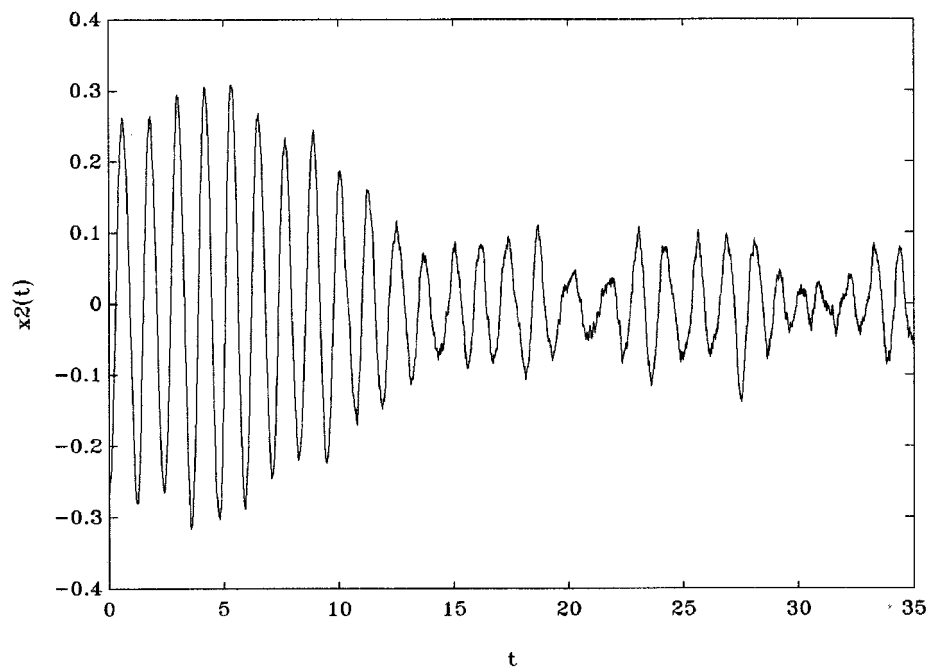


Рис.13.4. Моделирование чандлеровских колебаний при $\lambda = 0.06$, $a = 0.035$, $\omega = 5.274$.

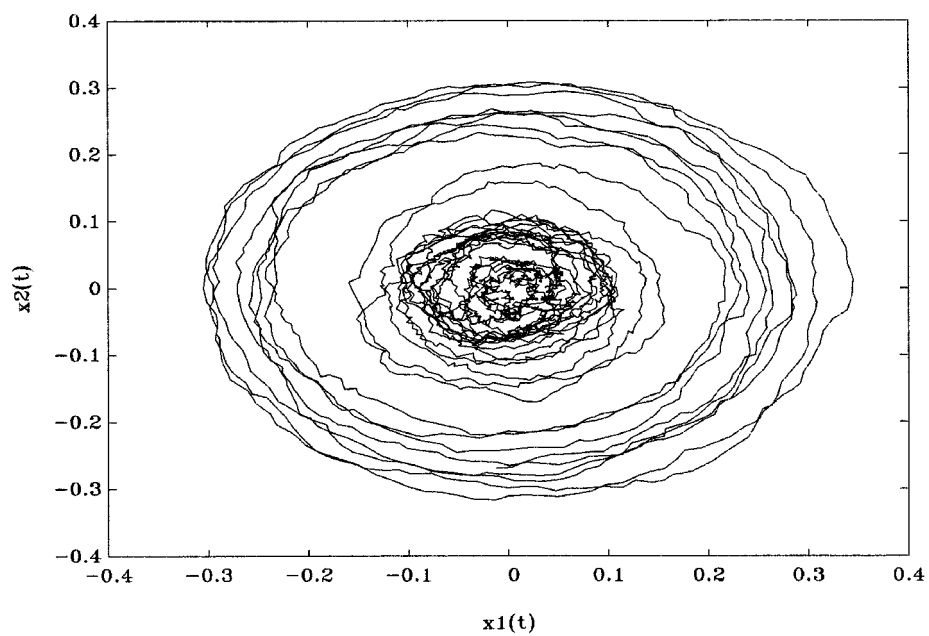


Рис.13.5. Чандлеровские колебания. Фазовый портрет при $\lambda = 0.06$, $a = 0.035$, $\omega = 5.274$.

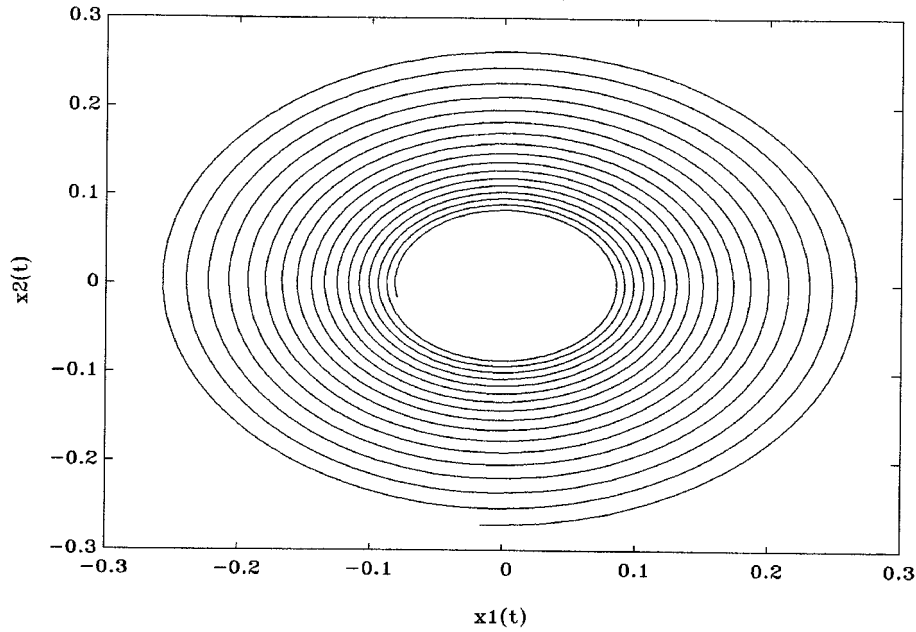


Рис.13.6. Чандлеровские колебания. Фазовый портрет при $\lambda = 0.06$, $a = 0.0$, $\omega = 5.274$.

13.6.2 Численное моделирование солнечной активности

Рассмотрим СЛСДУ [31], которая описывает солнечную активность без учета ее среднего значения:

$$d \begin{bmatrix} x_t \\ y_t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -a_2 & -a_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_t \\ y_t \end{bmatrix} dt + \begin{bmatrix} 0 \\ c \end{bmatrix} df_t, \quad (13.3)$$

где x_t — число пятен на Солнце; $f_t \in \mathfrak{R}^1$ — стандартный винеровский процесс; a_1 , a_2 , c — постоянные.

По данным Е. Е. Слуцкого [43], период T_0 колебаний солнечной активности равен 11.103 года, $\sqrt{a_2} = \frac{2\pi}{T_0} = 0.5661$, $\lambda = \frac{a_1}{2} = 0.07$. Параметр c определен в [31] и равен 5.08. Согласно числам Вольфера (см. рис. 2.9, [31]), на начало 1821 г. приходилось приблизительно семь солнечных пятен ($x_0 = 7$). Примем также $y_0 = -0.25$ (см. рис. 2.9).

Смоделируем численно решение уравнения (13.3) на временном интервале 1821–1921 гг. с шагом 0.1 года при указанных исходных данных с помощью алгоритмов 11.1–11.7 из главы 11. Результат численного моделирования представлен на рис. 13.7, 13.8. На рис. 13.7

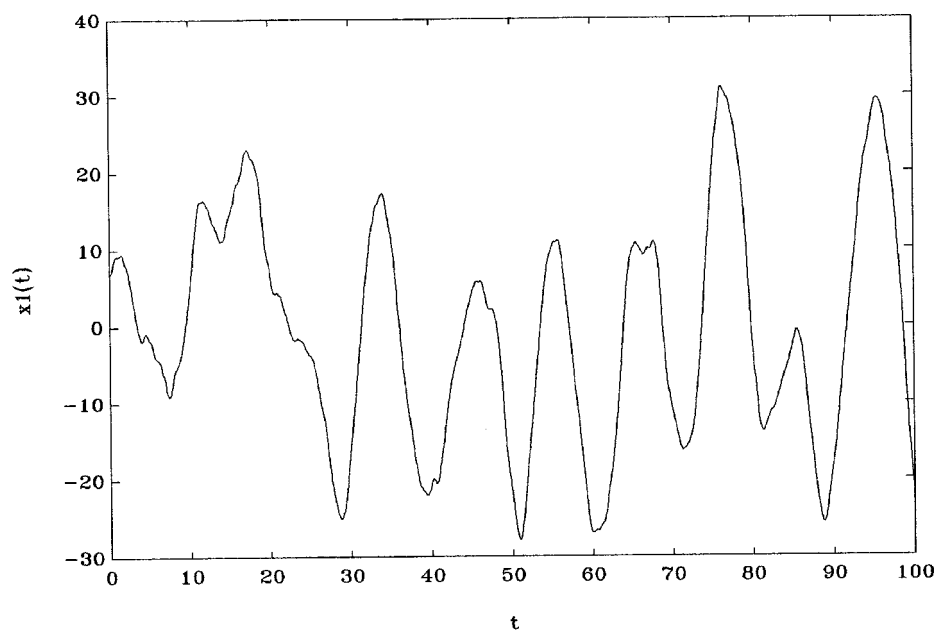


Рис.13.7. Моделирование солнечной активности при $\lambda = 0.07$, $\sqrt{a_2} = 0.5661$, $c = 5.08$.

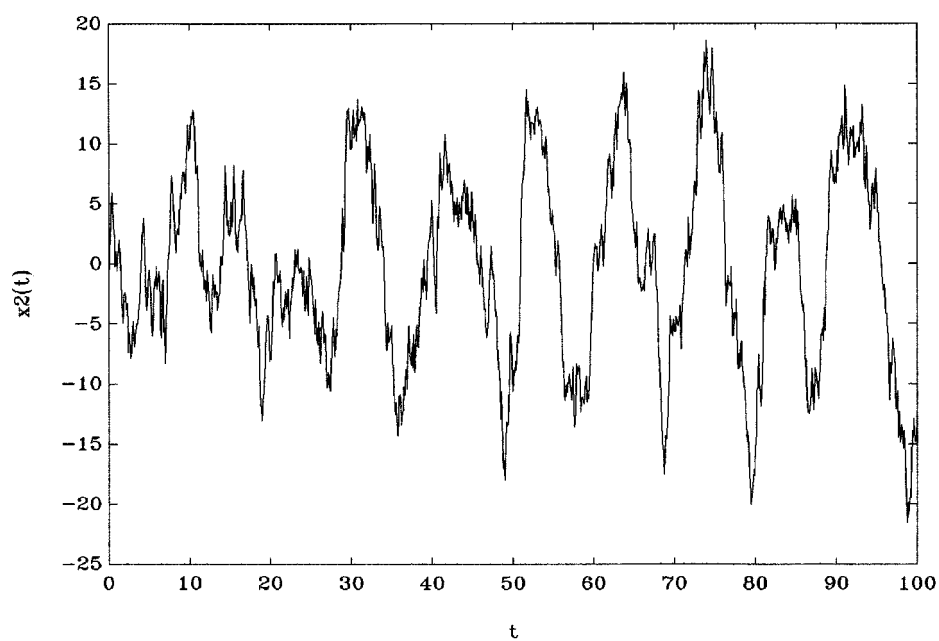


Рис.13.8. Моделирование солнечной активности при $\lambda = 0.07$, $\sqrt{a_2} = 0.5661$, $c = 5.08$.

показана зависимость числа солнечных пятен без учета среднего значения от времени. На этом рисунке прослеживается периодичность колебаний, равная приблизительно 11 годам, что соответствует экспериментальным данным.

13.6.3 Численное моделирование лагранжевой динамики частицы жидкости

Перепишем систему уравнений (2.26), (2.27), описывающую лагранжеву динамику частицы жидкости [40, 86], в следующем виде:

$$dX_t = AX_t dt + \Sigma df_t, \quad (13.4)$$

где

$$A = \begin{pmatrix} O_{3 \times 3} & I_{3 \times 3} \\ O_{3 \times 3} & -\frac{1}{T} I_{3 \times 3} \end{pmatrix}; \quad \Sigma = \begin{pmatrix} O_{3 \times 3} \\ \sigma I_{3 \times 3} \end{pmatrix}; \quad X_t = \begin{pmatrix} \mathbf{x}_t \\ \mathbf{v}_t \end{pmatrix};$$

$$\mathbf{x}_t = \begin{pmatrix} \mathbf{x}_t^{(1)} \\ \mathbf{x}_t^{(2)} \\ \mathbf{x}_t^{(3)} \end{pmatrix}; \quad \mathbf{v}_t = \begin{pmatrix} \mathbf{v}_t^{(1)} \\ \mathbf{v}_t^{(2)} \\ \mathbf{v}_t^{(3)} \end{pmatrix}; \quad \mathbf{f}_t = \begin{pmatrix} \mathbf{f}_t^{(1)} \\ \mathbf{f}_t^{(2)} \\ \mathbf{f}_t^{(3)} \end{pmatrix}; \quad X_0 = \begin{pmatrix} \mathbf{x}_0 \\ \mathbf{v}_0 \end{pmatrix};$$

$O_{3 \times 3}, I_{3 \times 3}$ — нулевая и единичная (3×3) -матрицы.

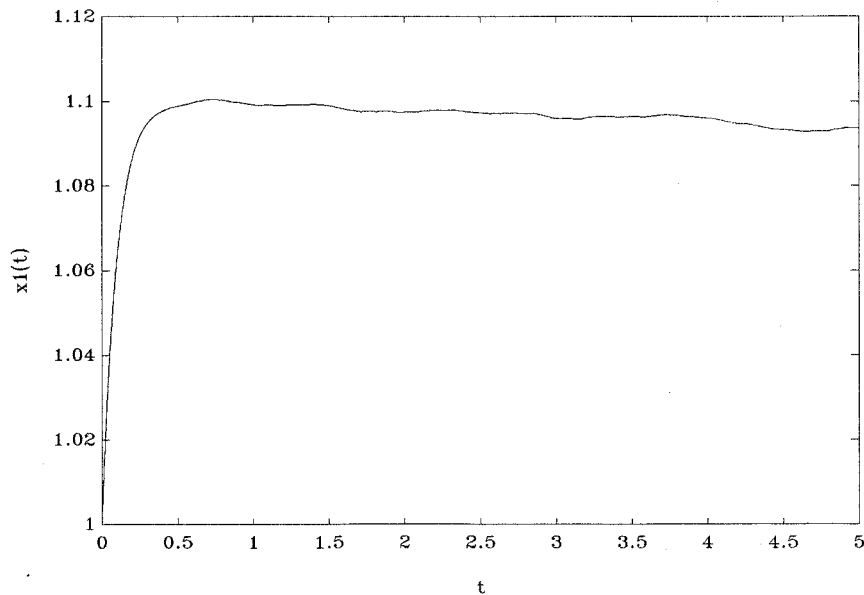


Рис.13.9. Моделирование лагранжевой динамики частицы жидкости при $T = 0.1$, $\sigma = 0.02$, $\Delta = 0.002$.

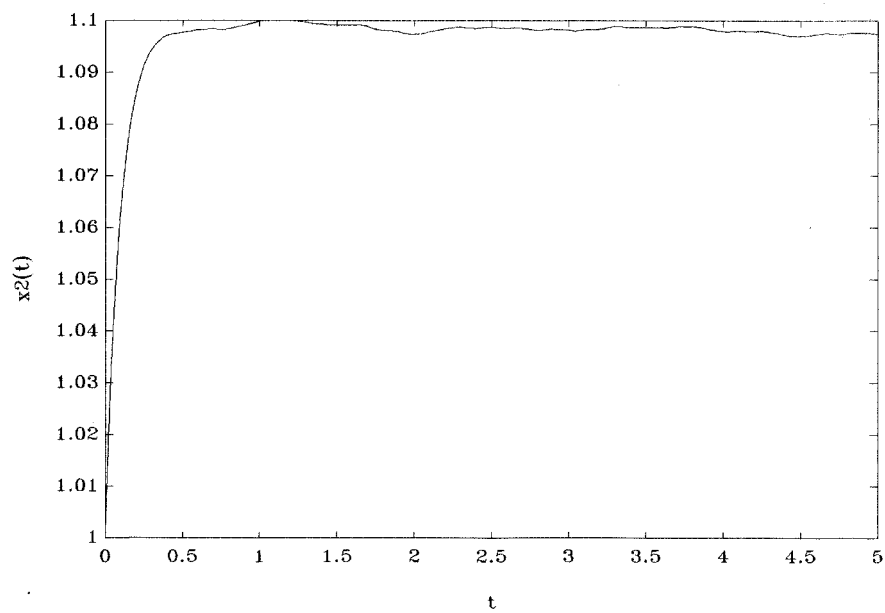


Рис.13.10. Моделирование лагранжевой динамики частицы жидкости при $T = 0.1$, $\sigma = 0.02$, $\Delta = 0.002$.

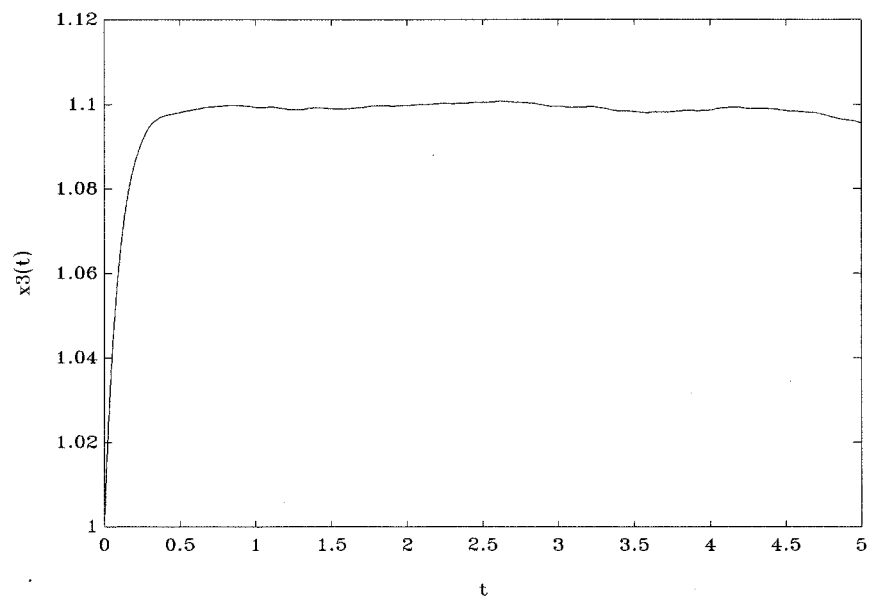


Рис.13.11. Моделирование лагранжевой динамики частицы жидкости при $T = 0.1$, $\sigma = 0.02$, $\Delta = 0.002$.

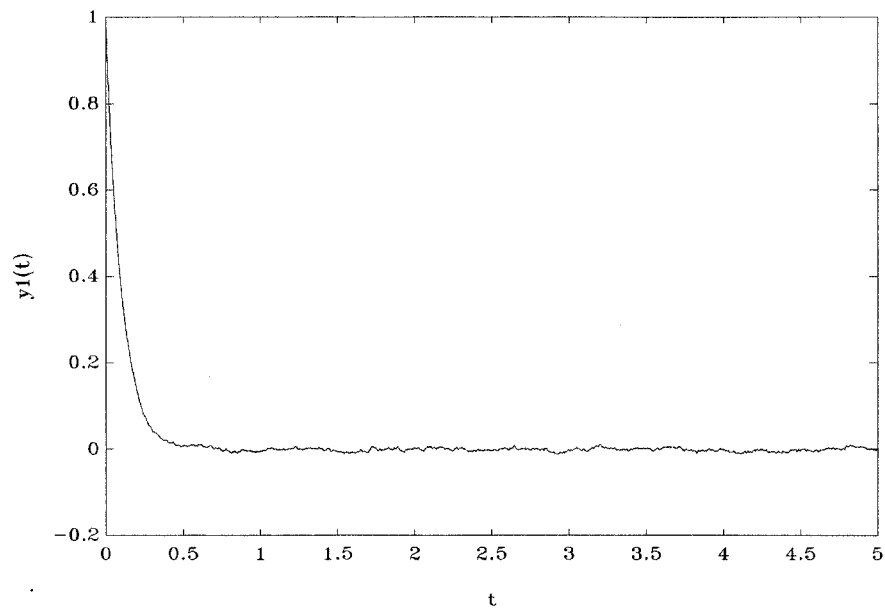


Рис.13.12. Моделирование лагранжевой динамики частицы жидкости при $T = 0.1$, $\sigma = 0.02$, $\Delta = 0.002$.

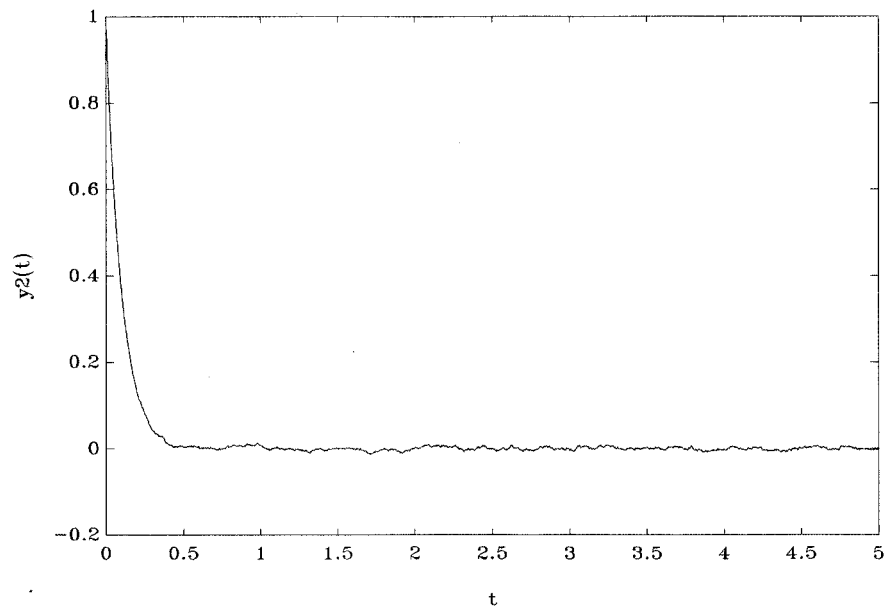


Рис.13.13. Моделирование лагранжевой динамики частицы жидкости при $T = 0.1$, $\sigma = 0.02$, $\Delta = 0.002$.

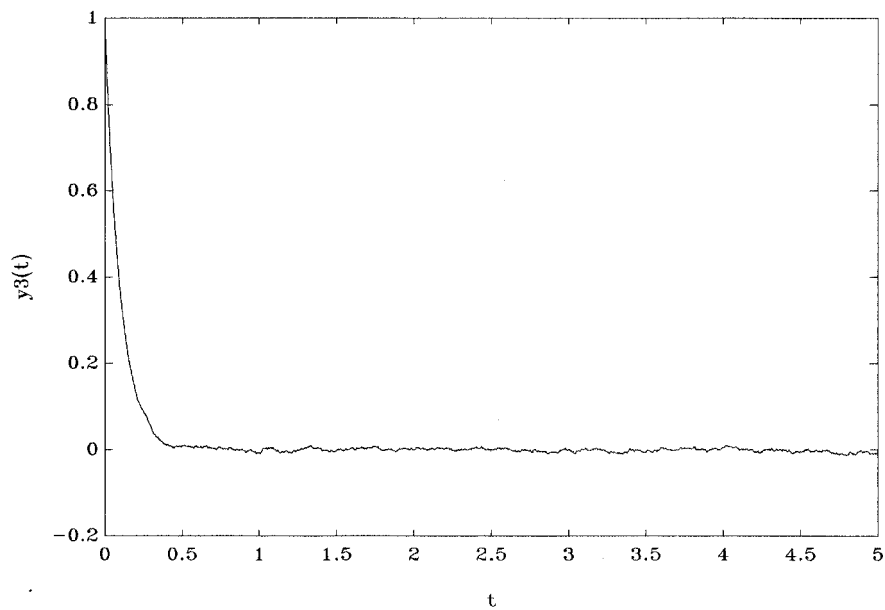


Рис.13.14. Моделирование лагранжевой динамики частицы жидкости при $T = 0.1$, $\sigma = 0.02$, $\Delta = 0.002$.

Смоделируем численно систему (13.4) при $T = 0.1$, $\sigma = 0.02$, $\mathbf{x}_0^T = (1 \ 1 \ 1)$, $\mathbf{v}_0^T = (1 \ 1 \ 1)$ на промежутке $[0, 5]$ с постоянным шагом интегрирования $\Delta = 0.002$, пользуясь алгоритмами 11.1–11.7. Результат численного моделирования представлен на рис. 13.9–13.14.

Физически при достаточно большой силе сопротивления, действующей на частицу жидкости, частица быстро теряет начальную скорость и начинает хаотично двигаться вблизи некоторого фиксированного положения при наличии сил, действующих на нее со стороны окружающих частиц жидкости. Описанная качественная картина движения частицы жидкости нашла отражение на рис. 13.9–13.14.

Глава 14

Моделирование траекторий решений стохастических дифференциальных уравнений Ито

В настоящей главе приводятся примеры численного моделирования траекторий решений стохастических дифференциальных уравнений Ито с помощью сильных численных методов. Рассматриваются преимущественно нелинейные системы стохастических дифференциальных уравнений Ито второго и третьего порядка. Для численного моделирования повторных стохастических интегралов, входящих в применяемые сильные численные схемы, используется метод, основанный на кратных рядах Фурье по полиномам Лежандра.

14.1 Численное интегрирование модели Блэка–Шоулза

Рассмотрим математическую модель динамики цены акции S_t в виде стохастического дифференциального уравнения Ито (модель Блэка–Шоулза):

$$dS_t = \mu S_t dt + \lambda S_t df_t, \quad (14.1)$$

где $t \in [0, T]$; $f_t \in \mathbb{R}^1$ — стандартный винеровский процесс; μ , λ — параметры.

Точное решение уравнения (14.1) имеет вид

$$S_t = S_0 e^{(\mu - \frac{1}{2}\lambda^2)t + \lambda f_t},$$

где $t \in [0, T]$.

Введем в рассмотрение разбиение $\{\tau_j\}_{j=0}^N$ промежутка $[0, T]$ такое, что $\tau_j = j\Delta$, $N\Delta = T$. Очевидно, что решение уравнения (14.1) может

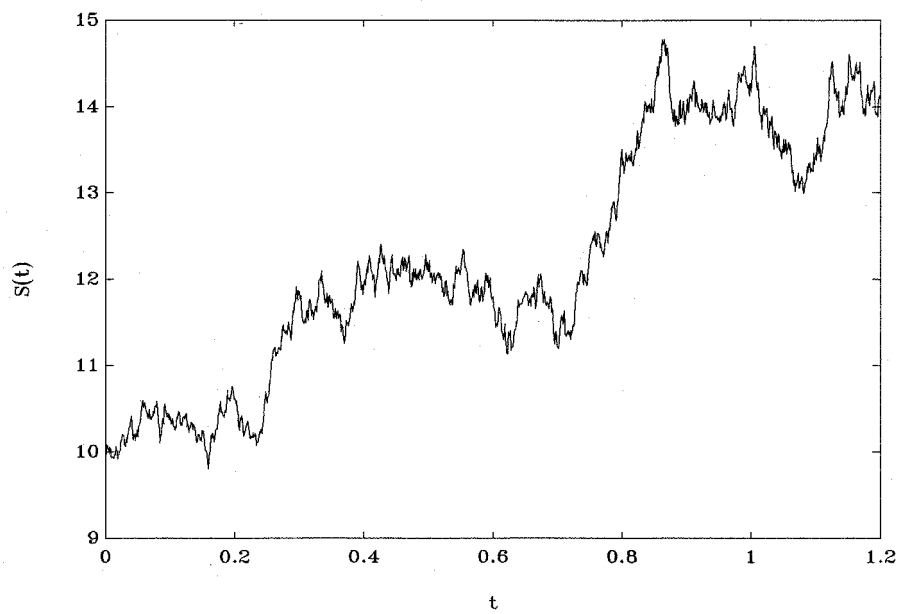


Рис.14.1. Модель Блэка–Шоулза при $\mu = 0.15$, $\lambda = 0.2$.

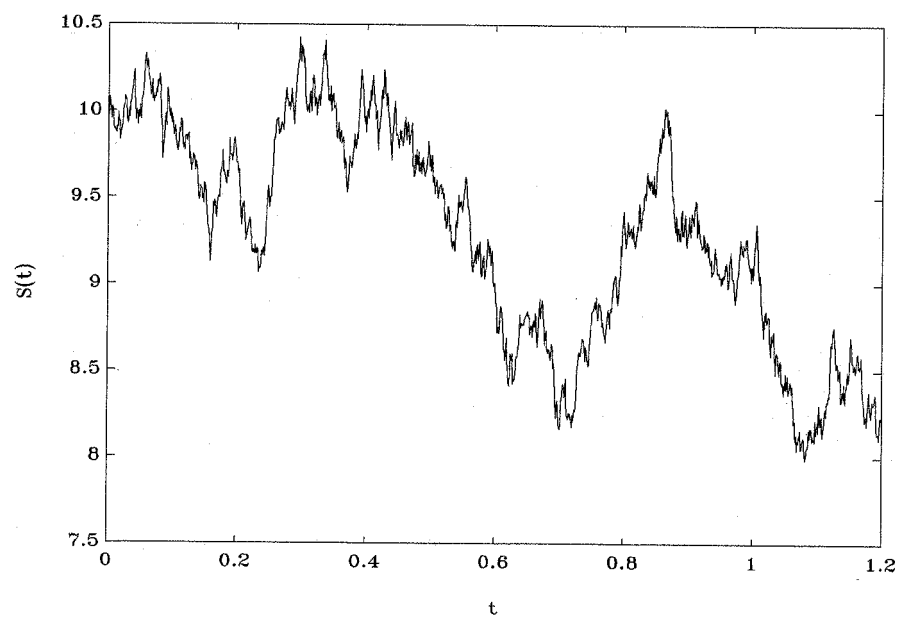


Рис.14.2. Модель Блэка–Шоулза при $\mu = -0.30$, $\lambda = 0.2$.

быть записано в дискретные моменты времени t_j следующим образом:

$$S_{k+1} = S_0 e^{(\mu - \frac{1}{2}\lambda^2)k\Delta + \lambda\sqrt{\Delta} \sum_{i=0}^{k-1} \zeta_i}, \quad (14.2)$$

где $S_{\tau_k} \stackrel{\text{def}}{=} S_k$; $\frac{1}{\sqrt{\Delta}}(f_{\tau_{k+1}} - f_{\tau_k}) \stackrel{\text{def}}{=} \zeta_k$, $k = 0, 1, \dots, N$, — независимые стандартные гауссовские случайные величины.⁶

Смоделируем решение уравнения (14.1) с помощью представления (14.2) при $\mu = 0.15$, $\lambda = 0.2$, $\Delta = 2^{-10}$, $T = 1.2$, $S_0 = 10$. Результат численного моделирования приведен на рис. 14.1. По нему можно проследить тенденцию возрастания стоимости S_t , что соответствует выбору коэффициентов μ и λ . Примем $\mu = -0.3$, $\lambda = 0.2$. Результат численного моделирования решения уравнения (14.1) с новыми параметрами, но на той же реализации последовательности случайных величин ζ_k , $k = 0, 1, \dots, N$, что и в предыдущем случае, представлен на рис. 14.2. На нем видна тенденция убывания стоимости S_t .

14.2 Влияние стохастического возмущения на трехмерную дискретную модель конвективной турбулентности Лоренца

В связи с проблемой турбулентности жидкостей, газов и плазмы возник значительный интерес к трехмерной дискретной модели конвективной турбулентности Лоренца, описываемой следующей системой обыкновенных дифференциальных уравнений:

$$\begin{aligned} d\mathbf{x}^{(1)}(t) &= (-a\mathbf{x}^{(1)}(t) + a\mathbf{x}^{(2)}(t)) dt, \\ d\mathbf{x}^{(2)}(t) &= (r\mathbf{x}^{(1)}(t) - \mathbf{x}^{(2)}(t) - \mathbf{x}^{(1)}(t)\mathbf{x}^{(3)}(t)) dt, \\ d\mathbf{x}^{(3)}(t) &= (-b\mathbf{x}^{(3)}(t) + \mathbf{x}^{(1)}(t)\mathbf{x}^{(2)}(t)) dt. \end{aligned} \quad (14.3)$$

Известно, что в системе (14.3) при определенном сочетании параметров a , r , b могут возникать хаотические движения вокруг двух состояний равновесия. Эти движения можно трактовать как переход из одного состояния равновесия в другое в результате нарастания колебаний возле каждого из них. Такие колебания могут происходить не только от одного неустойчивого состояния равновесия к другому, но и от одного неустойчивого периодического движения к другому.

⁶Эта и другие задачи численного моделирования, рассмотренные в главах 14, 15, решены с помощью версии 5.2 пакета MatLab (лицензионный номер 90291 от 3 мая 1998 года) в сотрудничестве с работниками группы по теории кодирования и теории информации Санкт-Петербургской академии аэрокосмического приборостроения.

Одно из таких хаотических движений возникает в системе (14.3) при возрастании параметра r и переходе его через значение 24.06 при $b = 8/3$, $a = 10.00$. Это движение носит название странного аттрактора Лоренца.

Выполним численное моделирование системы (14.3) с помощью метода третьего порядка точности (имеется в виду метод, основанный на стандартной формуле Тейлора) при следующих исходных данных: $t \in [0, 100.00]$, $\Delta = 5 \cdot 10^{-3}$, $b = 8/3$, $a = 10.00$. Эволюция фазовых траекторий системы (14.3) на фазовой плоскости $(\mathbf{x}^{(1)}(t), \mathbf{x}^{(2)}(t))$ при $r = 19.8, 24.00, 24.10, 24.30$ представлена на рис. 14.3–14.6 соответственно. При этом на графиках выводилась каждая пятая точка, которая соединялась с предыдущей и последующей точками ломаной линией.

Интересным представляется поведение системы (14.3) при воздействии на нее стохастического возмущения. Рассмотрим такую возмущенную систему, понимаемую как система стохастических дифференциальных уравнений Ито:

$$d \begin{bmatrix} \mathbf{x}_t^{(1)} \\ \mathbf{x}_t^{(2)} \\ \mathbf{x}_t^{(3)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -a\mathbf{x}_t^{(1)} + a\mathbf{x}_t^{(2)} \\ r\mathbf{x}_t^{(1)} - \mathbf{x}_t^{(2)} - \mathbf{x}_t^{(1)}\mathbf{x}_t^{(3)} \\ -b\mathbf{x}_t^{(3)} + \mathbf{x}_t^{(1)}\mathbf{x}_t^{(2)} \end{bmatrix} dt + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & c \end{bmatrix} d \begin{bmatrix} \mathbf{f}_t^{(1)} \\ \mathbf{f}_t^{(2)} \\ \mathbf{f}_t^{(3)} \end{bmatrix}, \quad (14.4)$$

где $\mathbf{x}_t^{(1)}$, $\mathbf{x}_t^{(2)}$, $\mathbf{x}_t^{(3)}$ — компоненты решения $\mathbf{x}_t \in \mathbb{R}^3$ уравнения (14.4); $\mathbf{f}_t^{(i)}$, $i = 1, 2, 3$, — независимые стандартные винеровские процессы; a , r , b , c — постоянные.

Представляется естественным, что стохастическое возмущение усиливает случайным образом колебания вокруг двух положений равновесия, в результате чего движение, внешне напоминающее странный аттрактор Лоренца, возникает, вообще говоря, при $r < 24.06$. Среднее пороговое значение параметра r , при котором рождается стохастический аналог аттрактора Лоренца, очевидно зависит как от интенсивности стохастического возмущения, т. е. от значения параметра c , так и от времени наблюдения за системой.

В качестве численного метода решения системы (14.4) возьмем соотношения (4.105)–(4.107) (без остаточных членов) на разбиении $\{\tau_j\}_{j=0}^N$ промежутка $[0, T]$ с шагом Δ : $\tau_j = j\Delta$, $j = 0, 1, \dots, N$, $N\Delta = T$, а также формулы (6.30)–(6.32) для моделирования стохастических интегралов. В результате получаем следующую явную численную схему:

$$\mathbf{y}_{k+1}^{(1)} = \mathbf{y}_k^{(1)} + a\Delta \left(-\mathbf{y}_k^{(1)} + \mathbf{y}_k^{(2)} \right) +$$

$$\begin{aligned}
& +a\frac{\Delta^2}{2} \left[-a \left(-\mathbf{y}_k^{(1)} + \mathbf{y}_k^{(2)} \right) + r\mathbf{y}_k^{(1)} - \mathbf{y}_k^{(2)} - \mathbf{y}_k^{(1)}\mathbf{y}_k^{(3)} \right] - \\
& -ac\mathbf{y}_k^{(1)}\Delta^{\frac{5}{2}} \left[\frac{1}{6}\zeta_{0_{k+1,k}}^{(3)} - \frac{1}{4\sqrt{3}}\zeta_{1_{k+1,k}}^{(3)} + \frac{1}{6\sqrt{20}}\zeta_{2_{k+1,k}}^{(3)} \right] + \\
& +a\frac{\Delta^3}{6} \left[a \left(-\mathbf{y}_k^{(1)} + \mathbf{y}_k^{(2)} \right) \left(a + r - \mathbf{y}_k^{(3)} \right) - (a + 1) \times \right. \\
& \times \left. \left(r\mathbf{y}_k^{(1)} - \mathbf{y}_k^{(2)} - \mathbf{y}_k^{(1)}\mathbf{y}_k^{(3)} \right) - \mathbf{y}_k^{(1)} \left(-b\mathbf{y}_k^{(3)} + \mathbf{y}_k^{(1)}\mathbf{y}_k^{(2)} \right) \right], \quad (14.5)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathbf{y}_{k+1}^{(2)} &= \mathbf{y}_k^{(2)} + \Delta \left(r\mathbf{y}_k^{(1)} - \mathbf{y}_k^{(2)} - \mathbf{y}_k^{(1)}\mathbf{y}_k^{(3)} \right) - \\
& -c\mathbf{y}_k^{(1)}\Delta^{\frac{3}{2}} \left[\frac{1}{2\sqrt{3}}\zeta_{1_{k+1,k}}^{(3)} - \frac{1}{2}\zeta_{0_{k+1,k}}^{(3)} \right] + \\
& +\frac{\Delta^2}{2} \left[a \left(-\mathbf{y}_k^{(1)} + \mathbf{y}_k^{(2)} \right) \left(r - \mathbf{y}_k^{(3)} \right) - r\mathbf{y}_k^{(1)} + \mathbf{y}_k^{(2)} + \right. \\
& +\mathbf{y}_k^{(1)}\mathbf{y}_k^{(3)} - \mathbf{y}_k^{(1)} \left(-b\mathbf{y}_k^{(3)} + \mathbf{y}_k^{(1)}\mathbf{y}_k^{(2)} \right) \left. \right] + \left(a \left(\mathbf{y}_k^{(1)} - \mathbf{y}_k^{(2)} \right) + \right. \\
& + (1 + b)\mathbf{y}_k^{(1)} \left. \right) c\Delta^{\frac{5}{2}} \left[\frac{1}{6}\zeta_{0_{k+1,k}}^{(3)} - \frac{1}{4\sqrt{3}}\zeta_{1_{k+1,k}}^{(3)} + \frac{1}{6\sqrt{20}}\zeta_{2_{k+1,k}}^{(3)} \right] + \\
& +ac\Delta^{\frac{3}{2}} \left(-\mathbf{y}_k^{(1)} + \mathbf{y}_k^{(2)} \right) \left[-\frac{1}{6}\zeta_{0_{k+1,k}}^{(3)} + \frac{1}{3\sqrt{20}}\zeta_{2_{k+1,k}}^{(3)} \right] + \\
& +\frac{\Delta^3}{6} \left[a \left(-\mathbf{y}_k^{(1)} + \mathbf{y}_k^{(2)} \right) \left(- (a + 1) \left(r - \mathbf{y}_k^{(3)} \right) + b\mathbf{y}_k^{(3)} - 2\mathbf{y}_k^{(1)}\mathbf{y}_k^{(2)} \right) + \right. \\
& + \left(r\mathbf{y}_k^{(1)} - \mathbf{y}_k^{(2)} - \mathbf{y}_k^{(1)}\mathbf{y}_k^{(3)} \right) \left(\left(r - \mathbf{y}_k^{(3)} \right) a + 1 - \left(\mathbf{y}_k^{(1)} \right)^2 \right) + \\
& + \left. \left(-b\mathbf{y}_k^{(3)} + \mathbf{y}_k^{(1)}\mathbf{y}_k^{(2)} \right) \left(a \left(\mathbf{y}_k^{(1)} - \mathbf{y}_k^{(2)} \right) + \mathbf{y}_k^{(1)}(1 + b) \right) \right], \quad (14.6)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathbf{y}_{k+1}^{(3)} &= \mathbf{y}_k^{(3)} + cI_{0_{s,t}}^{(3)} + \Delta \left(-b\mathbf{y}_k^{(3)} + \mathbf{y}_k^{(1)}\mathbf{y}_k^{(2)} \right) - \\
& -bc\Delta^{\frac{3}{2}} \left[\frac{1}{2\sqrt{3}}\zeta_{1_{k+1,k}}^{(3)} - \frac{1}{2}\zeta_{0_{k+1,k}}^{(3)} \right] + \\
& +\frac{\Delta^2}{2} \left[a \left(-\mathbf{y}_k^{(1)} + \mathbf{y}_k^{(2)} \right) \mathbf{y}_k^{(2)} + \left(r\mathbf{y}_k^{(1)} - \mathbf{y}_k^{(2)} - \mathbf{y}_k^{(1)}\mathbf{y}_k^{(3)} \right) \mathbf{y}_k^{(1)} - \right.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -b \left(-b \mathbf{y}_k^{(3)} + \mathbf{y}_k^{(1)} \mathbf{y}_k^{(2)} \right) \Big] + \\
& + c \left(b^2 - \left(\mathbf{y}_k^{(1)} \right)^2 \right) \Delta^{\frac{5}{2}} \left[\frac{1}{6} \zeta_{0k+1,k}^{(3)} - \frac{1}{4\sqrt{3}} \zeta_{1k+1,k}^{(3)} + \frac{1}{6\sqrt{20}} \zeta_{2k+1,k}^{(3)} \right] + \\
& + \frac{\Delta^3}{6} \left[a \left(-\mathbf{y}_k^{(1)} + \mathbf{y}_k^{(2)} \right) \left(-a \mathbf{y}_k^{(2)} + r \mathbf{y}_k^{(1)} - \mathbf{y}_k^{(2)} - \right. \right. \\
& \quad \left. \left. - \mathbf{y}_k^{(1)} \mathbf{y}_k^{(3)} + \mathbf{y}_k^{(1)} \left(r - \mathbf{y}_k^{(3)} \right) - b \mathbf{y}_k^{(2)} \right) + \right. \\
& \quad \left. + \left(r \mathbf{y}_k^{(1)} - \mathbf{y}_k^{(2)} - \mathbf{y}_k^{(1)} \mathbf{y}_k^{(3)} \right) \left(-a \mathbf{y}_k^{(1)} + 2a \mathbf{y}_k^{(2)} - (1+b) \mathbf{y}_k^{(1)} \right) + \right. \\
& \quad \left. + \left(-b \mathbf{y}_k^{(3)} + \mathbf{y}_k^{(1)} \mathbf{y}_k^{(2)} \right) \left(b^2 - \left(\mathbf{y}_k^{(1)} \right)^2 \right) \right] , \tag{14.7}
\end{aligned}$$

где $\mathbf{y}_{k\Delta}^{(j)} \stackrel{\text{def}}{=} \mathbf{y}_k^{(j)}$, $j = 1, 2, 3$; $\zeta_{i_{k+1,k}}^{(3)}$, $i = 0, 1, 2$; $k = 0, 1, \dots, N-1$, — независимые в совокупности стандартные гауссовские случайные величины.

Смоделируем численно решение системы (14.4) с помощью метода (14.5)–(14.7) при следующих исходных данных: $t \in [0, 100.00]$, $\Delta = 5 \cdot 10^{-3}$, $b = 8/3$, $a = 10.00$, $c = 2.00$, $\mathbf{x}_0^{(1)} = \mathbf{x}_0^{(2)} = \mathbf{x}_0^{(3)} = 0.25$. Эволюция фазовых траекторий системы (14.4) на фазовой плоскости $(\mathbf{x}_t^{(1)}, \mathbf{x}_t^{(2)})$, полученная на одной и той же реализации последовательности случайных величин, входящих в (14.5)–(14.7), при $r = 20.00, 21.00, 23.00$ и 24.30 изображена на рис.14.7–14.10. На этих рисунках видно, что движения вокруг двух положений равновесия, внешне напоминающие странный аттрактор Лоренца, возникают при $r < 24.06$. Кроме того, фазовые траектории становятся менее регулярными, чем в детерминированном случае, вследствие воздействия на систему (14.4) случайного возмущения.

Повторим численное моделирование решения системы (14.4) с помощью численного метода (14.5)–(14.7) при тех же исходных данных, что и в предыдущем случае, за исключением параметра c , который увеличим до 4.00 . В этом случае эволюция фазовых траекторий системы (14.4) на фазовой плоскости $(\mathbf{x}_t^{(1)}, \mathbf{x}_t^{(2)})$, полученная на одной (той же, что и в случае $c = 2.00$) реализации последовательности случайных величин, входящих в (14.5)–(14.7), при $r = 11.00, 13.00, 20.00$ и 24.30 , изображена на рис.14.11–14.14. На этих рисунках видно, что движения вокруг двух положений равновесия, внешне напоминающие странный аттрактор Лоренца, возникают при значениях r , существенно меньших, чем в случае $c = 2.00$. При этом нерегулярность траекторий становится еще более заметной.

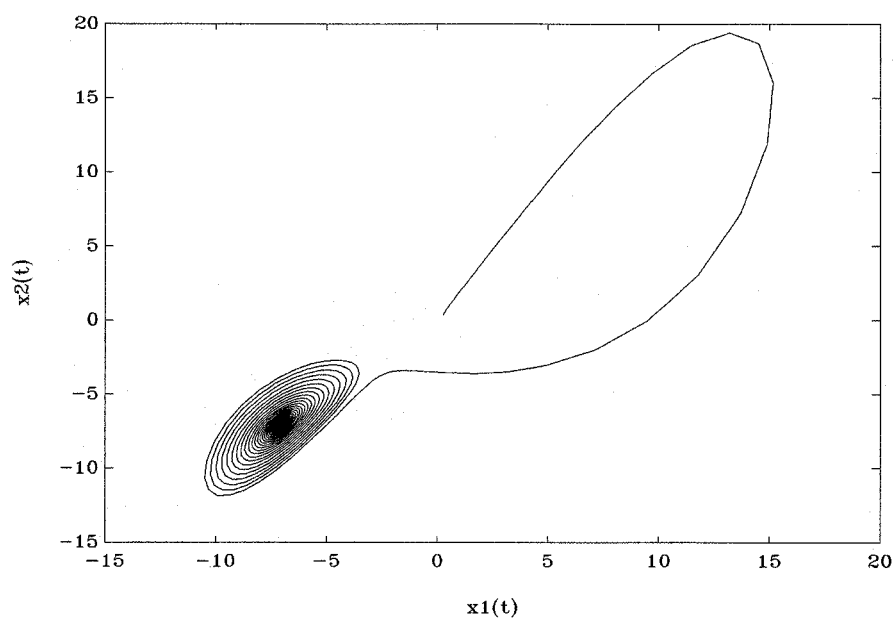


Рис.14.3. Фазовый портрет системы уравнений Лоренца при $b = 8/3$, $a = 10$, $r = 19.8$.

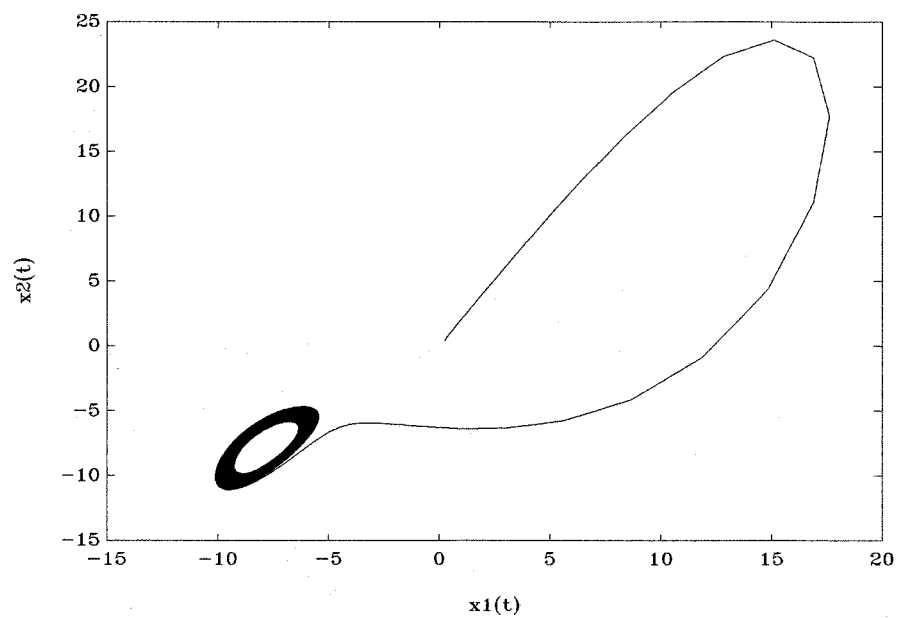


Рис.14.4. Фазовый портрет системы уравнений Лоренца при $b = 8/3$, $a = 10$, $r = 24.0$.

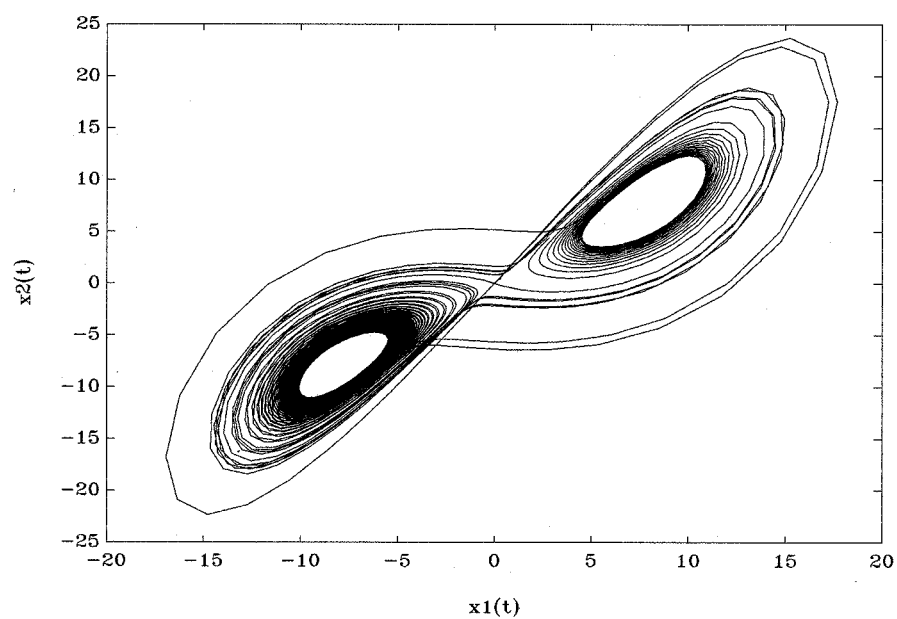


Рис.14.5. Фазовый портрет системы уравнений Лоренца при $b = 8/3$, $a = 10$, $r = 24.1$.

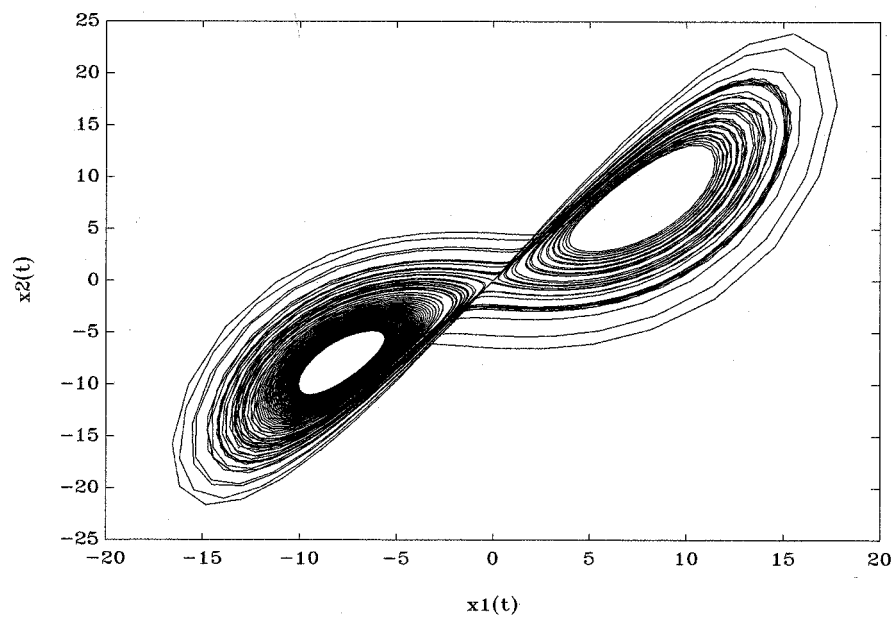


Рис.14.6. Фазовый портрет системы уравнений Лоренца при $b = 8/3$, $a = 10$, $r = 24.3$.

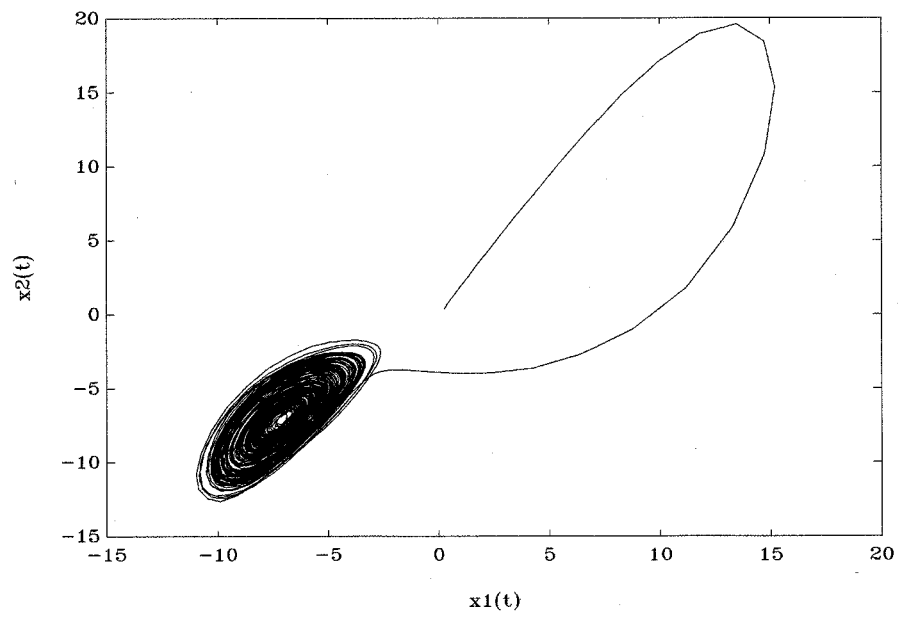


Рис.14.7. Фазовый портрет системы уравнений Лоренца со стохастическим возмущением при $b = 8/3$, $a = 10$, $r = 20.0$, $c = 2.0$.

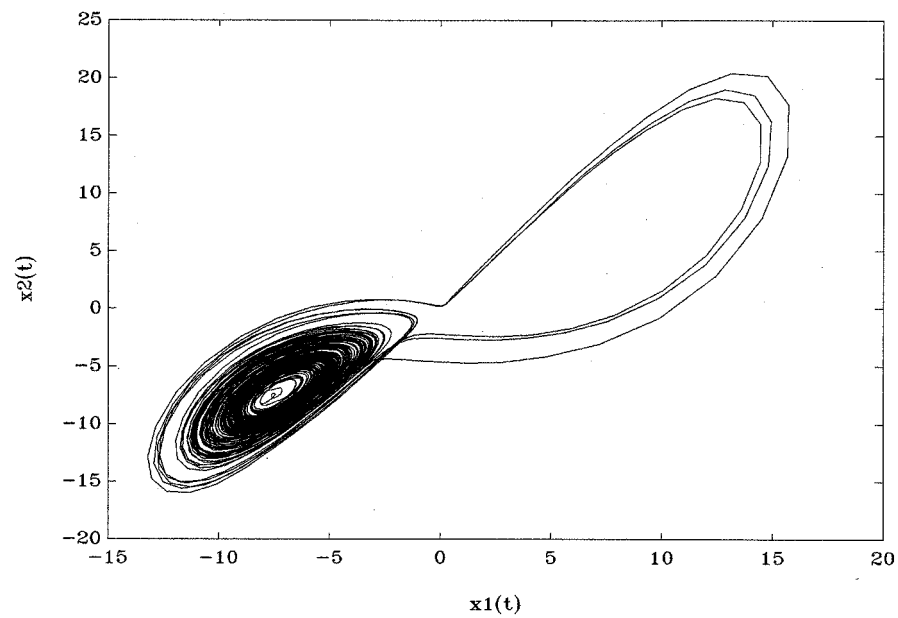


Рис.14.8. Фазовый портрет системы уравнений Лоренца со стохастическим возмущением при $b = 8/3$, $a = 10$, $r = 21.0$, $c = 2.0$.

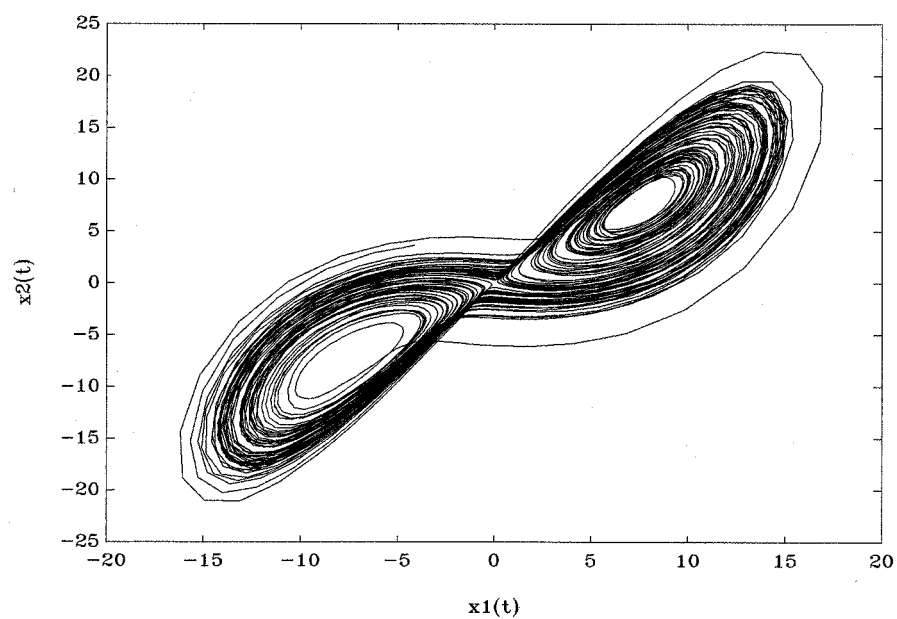


Рис.14.9. Фазовый портрет системы уравнений Лоренца со стохастическим возмущением при $b = 8/3$, $a = 10$, $r = 23.0$, $c = 2.0$.

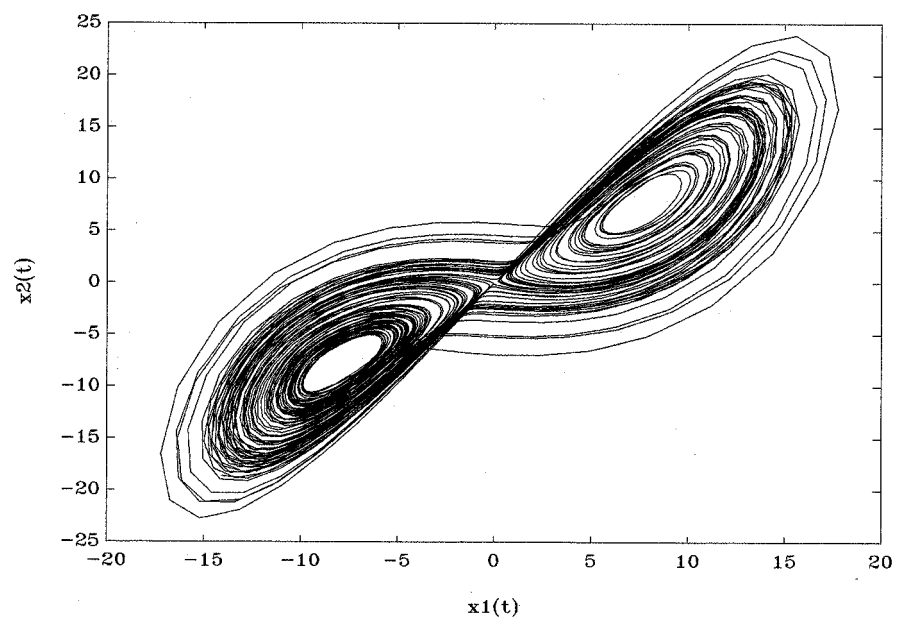


Рис.14.10. Фазовый портрет системы уравнений Лоренца со стохастическим возмущением при $b = 8/3$, $a = 10$, $r = 24.3$, $c = 2.0$.

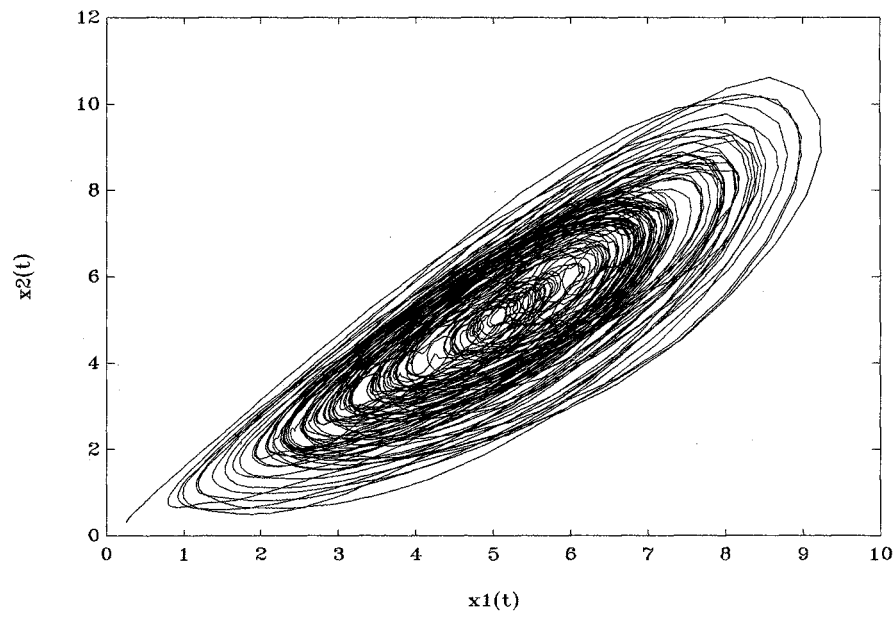


Рис.14.11. Фазовый портрет системы уравнений Лоренца со стохастическим возмущением при $b = 8/3$, $a = 10$, $r = 11.0$, $c = 4.0$.

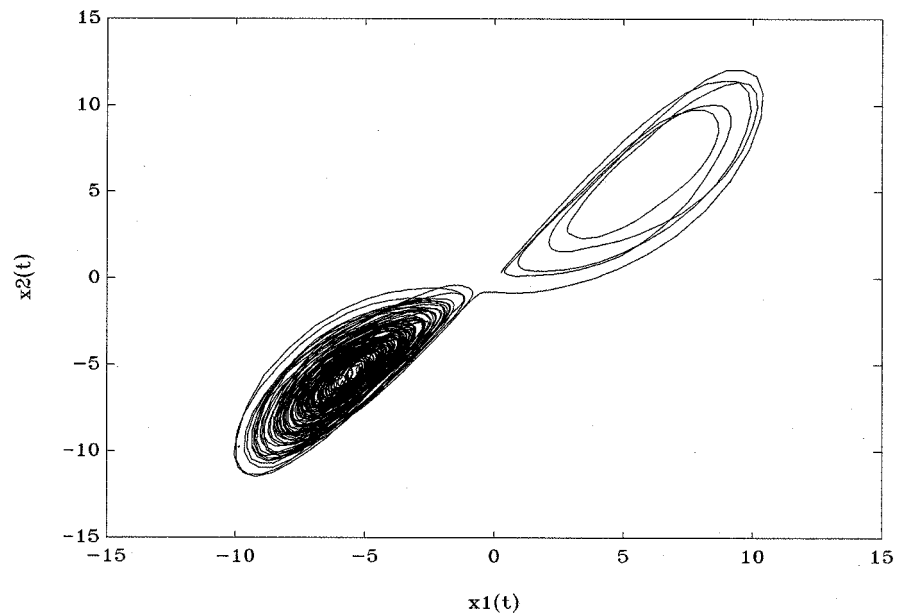


Рис.14.12. Фазовый портрет системы уравнений Лоренца со стохастическим возмущением при $b = 8/3$, $a = 10$, $r = 13.0$, $c = 4.0$.

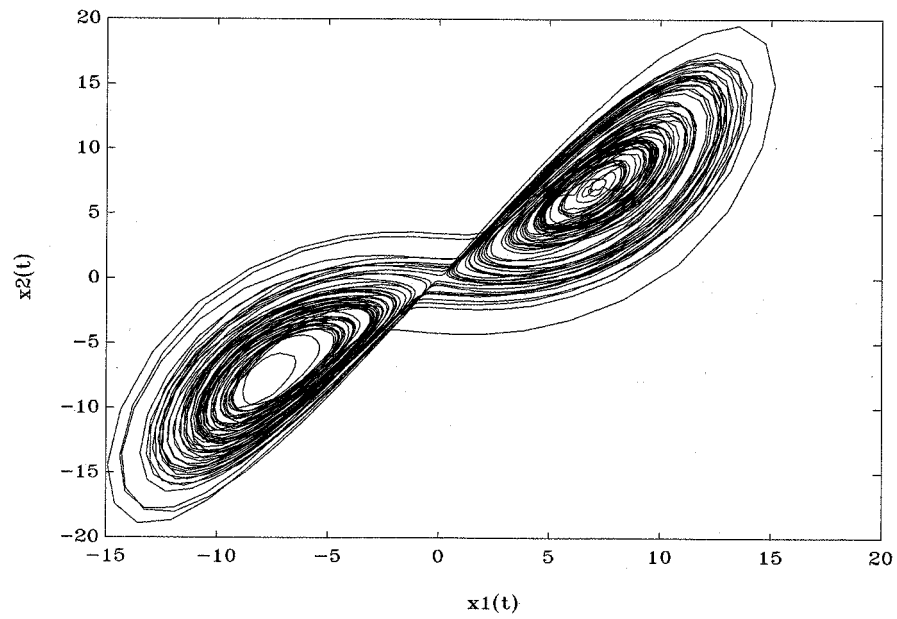


Рис.14.13. Фазовый портрет системы уравнений Лоренца со стохастическим возмущением при $b = 8/3$, $a = 10$, $r = 20.0$, $c = 4.0$.

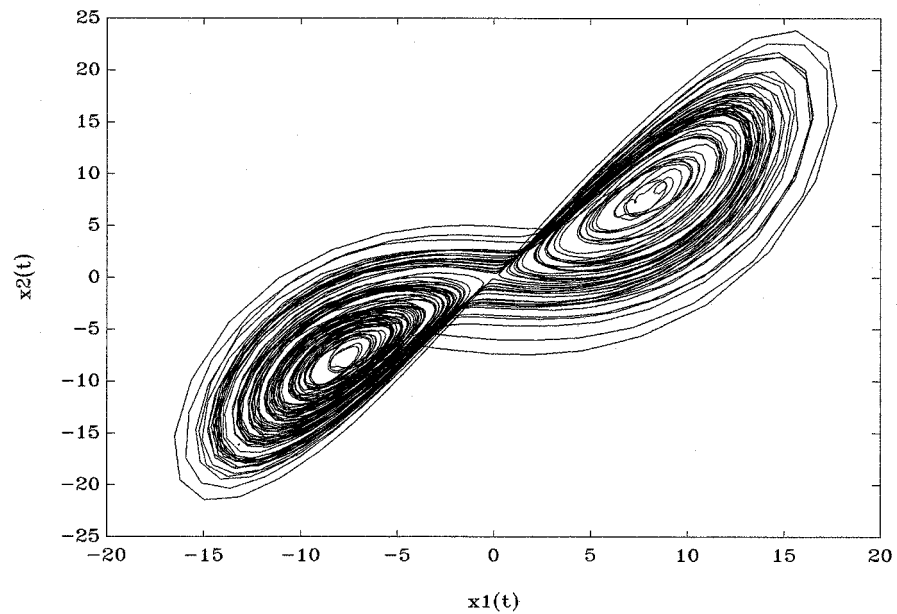


Рис.14.14. Фазовый портрет системы уравнений Лоренца со стохастическим возмущением при $b = 8/3$, $a = 10$, $r = 24.3$, $c = 4.0$.

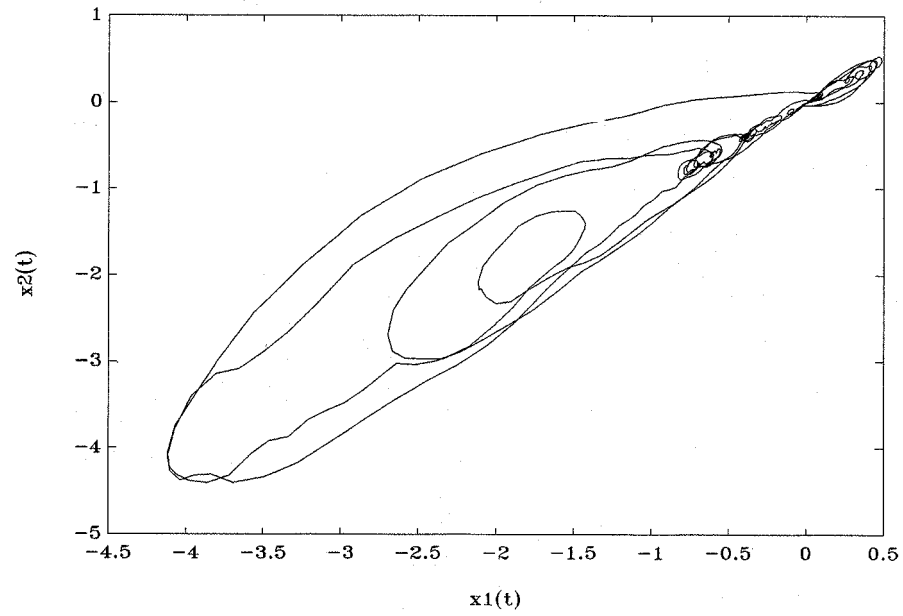


Рис.14.15. Фазовый портрет системы уравнений Лоренца со стохастическим возмущением при $b = 8/3$, $a = 10$, $r = 1.5$, $c = 8.0$.

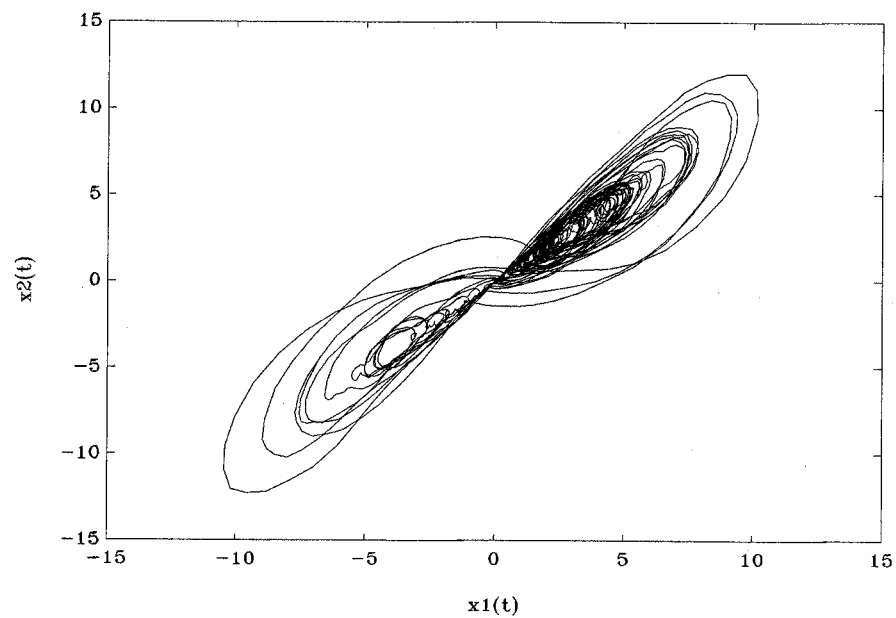


Рис.14.16. Фазовый портрет системы уравнений Лоренца со стохастическим возмущением при $b = 8/3$, $a = 10$, $r = 5.0$, $c = 8.0$.

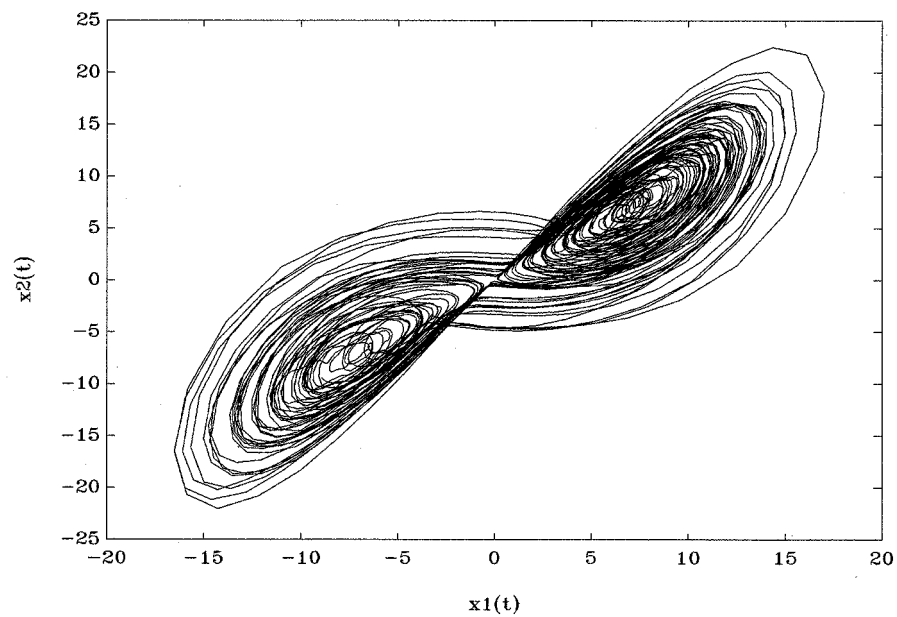


Рис.14.17. Фазовый портрет системы уравнений Лоренца со стохастическим возмущением при $b = 8/3$, $a = 10$, $r = 20.0$, $c = 8.0$.

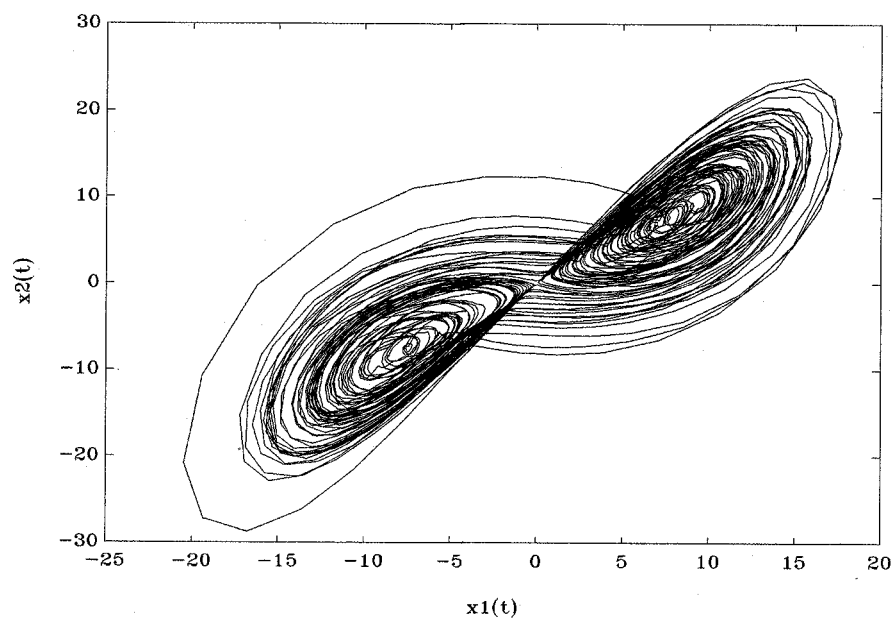


Рис.14.18. Фазовый портрет системы уравнений Лоренца со стохастическим возмущением при $b = 8/3$, $a = 10$, $r = 24.3$, $c = 8.0$.

Увеличим теперь значение параметра c до 8.00 и повторим численное моделирование решения системы (14.4) с помощью численного метода (14.5)–(14.7) при тех же значениях остальных параметров и на той же реализации последовательности случайных величин, входящих в (14.5)–(14.7), что и в предыдущих случаях. Результат численного моделирования при $r = 1.50, 5.00, 20.00$ и 24.30 представлен на рис. 14.15–14.18. На этих рисунках в еще большей степени, чем при $c = 2.00$ и $c = 4.00$, проявляется нерегулярность фазовых траекторий. Кроме того, фазовые траектории, внешне отдаленно напоминающие странный аттрактор Лоренца, наблюдаются даже при $r = 5.00$ (рис. 14.16).

14.3 Численное интегрирование стохастической модели Лотки–Вольтерра второго порядка

Рассмотрим стохастический вариант модели Лотки–Вольтерра динамики численности двух конкурирующих видов животных или динамики концентраций двух реагентов:

$$d \begin{bmatrix} \mathbf{x}_t^{(1)} \\ \mathbf{x}_t^{(2)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (k_1 + a_1 \mathbf{x}_t^{(2)}) \mathbf{x}_t^{(1)} \\ (k_2 + a_2 \mathbf{x}_t^{(1)}) \mathbf{x}_t^{(2)} \end{bmatrix} dt + \begin{bmatrix} \sigma_1 \mathbf{x}_t^{(1)} & 0 \\ 0 & \sigma_2 \mathbf{x}_t^{(2)} \end{bmatrix} d \begin{bmatrix} \mathbf{f}_t^{(1)} \\ \mathbf{f}_t^{(2)} \end{bmatrix}, \quad (14.8)$$

где $\mathbf{x}_t^{(1)}, \mathbf{x}_t^{(2)}$ — численность двух конкурирующих видов животных (концентрация двух реагирующих веществ); k_1, k_2 — коэффициенты роста численности этих видов (концентрации веществ); a_1, a_2 — коэффициенты смертности конкурирующих видов животных (коэффициенты снижения уровня концентрации реагирующих веществ); σ_1, σ_2 — коэффициенты, характеризующие степень влияния случайных факторов на систему; $\mathbf{f}_t^{(1)}, \mathbf{f}_t^{(2)}$ — независимые стандартные винеровские процессы.

Запишем явную сильную одношаговую численную схему порядка точности 1.0 для системы (14.8), используя разложения стохастических интегралов $I_{0s,t}^{(i)}, I_{1s,t}^{(i)}, i = 1, 2$, с помощью полиномов Лежандра (см. главу 6) и разложения повторных стохастических интегралов $I_{00s,t}^{(ii)}, I_{000s,t}^{(iii)}, i = 1, 2$, с помощью полиномов Эрмита (см. также главу 6):

$$\mathbf{y}_{k+1}^{(1)} = \mathbf{y}_k^{(1)} \left[1 + (k_1 + a_1 \mathbf{y}_k^{(2)}) \Delta - \frac{\sigma_1 \Delta^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{3}} (k_1 + a_1 \mathbf{y}_k^{(2)}) \zeta_1^{(1)} + \right.$$

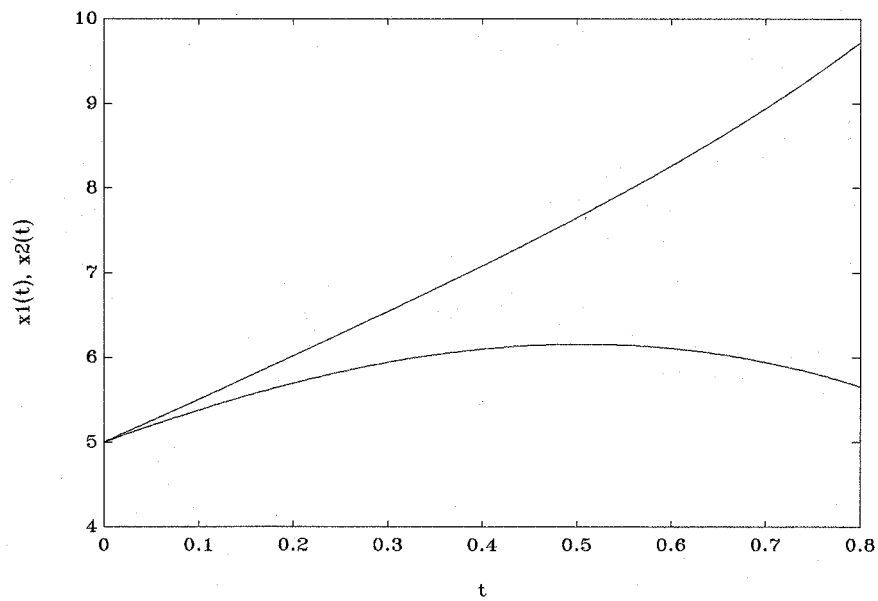


Рис.14.19. Модель Лотки–Вольтерра второго порядка при $k_1 = 2.0$, $k_2 = 2.3$, $a_1 = -0.2$, $a_2 = -0.3$, $\sigma_1 = \sigma_2 = 0.0$.

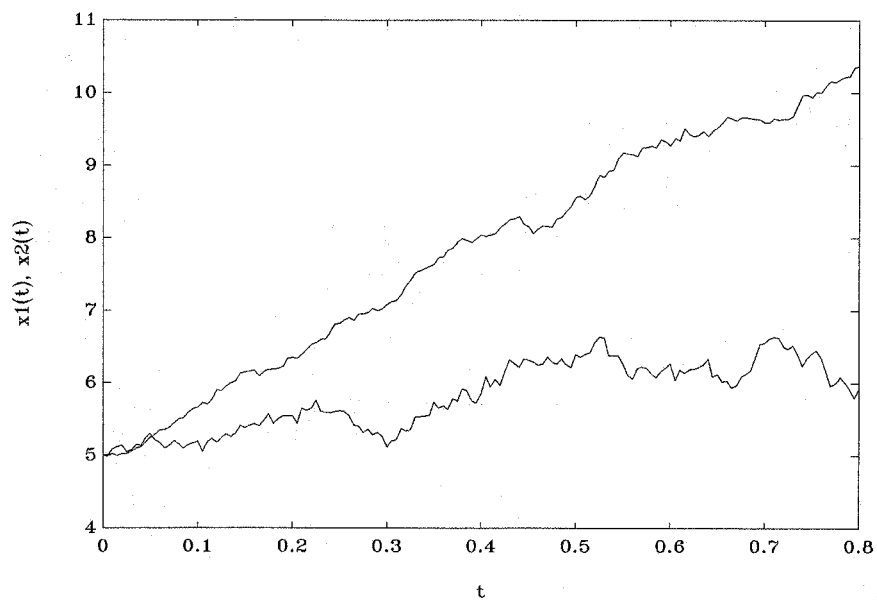


Рис.14.20. Модель Лотки–Вольтерра второго порядка при $k_1 = 2.0$, $k_2 = 2.3$, $a_1 = -0.2$, $a_2 = -0.3$, $\sigma_1 = 0.1$, $\sigma_2 = 0.2$.

$$\begin{aligned}
& + a_1 \sigma_2 \mathbf{y}_k^{(2)} \frac{\Delta^{\frac{3}{2}}}{2} \left(\zeta_0^{(2)} - \frac{1}{\sqrt{3}} \zeta_1^{(2)} \right) + \sigma_1 \sqrt{\Delta} \zeta_0^{(1)} + \\
& + \frac{\sigma_1^2 \Delta}{2} \left(\left(\zeta_0^{(1)} \right)^2 - 1 \right) + \frac{\sigma_1^3 \Delta^{\frac{3}{2}}}{6} \left(\left(\zeta_0^{(1)} \right)^3 - 3 \zeta_0^{(1)} \right) \Big], \\
\mathbf{y}_{k+1}^{(2)} = \mathbf{y}_k^{(2)} & \left[1 + \left(k_2 + a_2 \mathbf{y}_k^{(1)} \right) \Delta - \frac{\sigma_2 \Delta^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{3}} \left(k_2 + a_2 \mathbf{y}_k^{(1)} \right) \zeta_1^{(2)} + \right. \\
& + a_2 \sigma_1 \mathbf{y}_k^{(1)} \frac{\Delta^{\frac{3}{2}}}{2} \left(\zeta_0^{(1)} - \frac{1}{\sqrt{3}} \zeta_1^{(1)} \right) + \sigma_2 \sqrt{\Delta} \zeta_0^{(2)} + \\
& \left. + \frac{\sigma_2^2 \Delta}{2} \left(\left(\zeta_0^{(2)} \right)^2 - 1 \right) + \frac{\sigma_2^3 \Delta^{\frac{3}{2}}}{6} \left(\left(\zeta_0^{(2)} \right)^3 - 3 \zeta_0^{(2)} \right) \right],
\end{aligned}$$

где так же, как и в предыдущем разделе, $\mathbf{y}_{k\Delta}^{(i)} \stackrel{\text{def}}{=} \mathbf{y}_k^{(i)}$, $i = 1, 2$; Δ — шаг интегрирования; $\zeta_0^{(i)}$, $\zeta_1^{(i)}$, $i = 1, 2$, — независимые в совокупности стандартные гауссовские случайные величины, которые независимы с аналогичными случайными величинами, генерируемыми на всех предыдущих шагах интегрирования относительно текущего шага.

Смоделируем решение системы (14.8) при следующих исходных данных: $k_1 = 2.0$, $k_2 = 2.3$, $a_1 = -0.2$, $a_2 = -0.3$, $\mathbf{x}_0^{(1)} = \mathbf{x}_0^{(2)} = 5$, $\sigma_1 = 0.0$, $\sigma_2 = 0.0$, $\Delta = 5 \cdot 10^{-3}$, $t \in [0, 0.8]$. Результат численного моделирования представлен на рис.14.19.

Введем стохастическое возмущение, т. е. положим $\sigma_1 = 0.1$, $\sigma_2 = 0.2$ и повторим моделирование системы (14.8), сохранив исходные данные прежними. На рис.14.20 показано поведение обеих компонент решения системы (14.8) во времени.

14.4 Численное моделирование динамики доходности портфеля ценных бумаг

В финансовой математике наряду с многочисленными математическими моделями встречается модель динамики доходности портфеля ценных бумаг, которую можно представить в виде системы стохастических дифференциальных уравнений Ито:

$$d \begin{bmatrix} \mathbf{x}_t^{(1)} \\ \vdots \\ \mathbf{x}_t^{(n)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{m}^{(1)} \\ \vdots \\ \mathbf{m}^{(n)} \end{bmatrix} dt + e^{\frac{\gamma}{n} \sum_{i=1}^n \mathbf{x}_t^{(i)}} \begin{bmatrix} B^{(11)} & \dots & B^{(1m)} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ B^{(n1)} & \dots & B^{(nm)} \end{bmatrix} d \begin{bmatrix} \mathbf{f}_t^{(1)} \\ \vdots \\ \mathbf{f}_t^{(m)} \end{bmatrix}, \quad (14.9)$$

где $\mathbf{x}_t^{(i)}$ — доходность i -й ценной бумаги; $\mathbf{m}^{(i)}$ — средняя доходность i -й ценной бумаги; γ — эмпирический коэффициент; $\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \mathbf{x}_t^{(i)}$ — средняя доходность по множеству ценных бумаг; $\|B^{(ij)}\|_{i,j=1}^{n,m}$ — числовая матрица, характеризующая перемешивание; $\mathbf{f}_t^{(i)}$, $i = 1, \dots, m$, — независимые стандартные винеровские процессы.

Рассмотрим модель вида (14.9) при $n = 2$:

$$d \begin{bmatrix} \mathbf{x}_t^{(1)} \\ \mathbf{x}_t^{(2)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{m}^{(1)} \\ \mathbf{m}^{(2)} \end{bmatrix} dt + e^{\frac{\gamma}{2}(\mathbf{x}_t^{(1)} + \mathbf{x}_t^{(2)})} \begin{bmatrix} B^{(11)} & B^{(12)} \\ B^{(21)} & B^{(22)} \end{bmatrix} d \begin{bmatrix} \mathbf{f}_t^{(1)} \\ \mathbf{f}_t^{(2)} \end{bmatrix}. \quad (14.10)$$

Пример 14.1. Покажем, что метод Г. Н. Мильштейна решения системы (14.10) при постоянном шаге интегрирования Δ имеет вид

$$\begin{aligned} \mathbf{y}_{k+1}^{(1)} = & \mathbf{y}_k^{(1)} + \mathbf{m}^{(1)} \Delta + e^{\frac{\gamma}{2}(\mathbf{y}_k^{(1)} + \mathbf{y}_k^{(2)})} \left(B^{(11)} I_{0_{\tau_{k+1}, \tau_k}}^{(1)} + B^{(12)} I_{0_{\tau_{k+1}, \tau_k}}^{(2)} \right) + \\ & + \frac{\gamma}{2} e^{\gamma(\mathbf{y}_k^{(1)} + \mathbf{y}_k^{(2)})} \left[B^{(11)} (B^{(11)} + B^{(21)}) \frac{1}{2} \left(\left(I_{0_{\tau_{k+1}, \tau_k}}^{(1)} \right)^2 - \Delta \right) + \right. \\ & + B^{(11)} (B^{(12)} + B^{(22)}) I_{00_{\tau_{k+1}, \tau_k}}^{(21)q} + B^{(12)} (B^{(11)} + B^{(21)}) I_{00_{\tau_{k+1}, \tau_k}}^{(12)q} + \\ & \left. + B^{(12)} (B^{(12)} + B^{(22)}) \frac{1}{2} \left(\left(I_{0_{\tau_{k+1}, \tau_k}}^{(2)} \right)^2 - \Delta \right) \right], \end{aligned} \quad (14.11)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{y}_{k+1}^{(2)} = & \mathbf{y}_k^{(2)} + \mathbf{m}^{(2)} \Delta + e^{\frac{\gamma}{2}(\mathbf{y}_k^{(1)} + \mathbf{y}_k^{(2)})} \left(B^{(21)} I_{0_{\tau_{k+1}, \tau_k}}^{(1)} + B^{(22)} I_{0_{\tau_{k+1}, \tau_k}}^{(2)} \right) + \\ & + \frac{\gamma}{2} e^{\gamma(\mathbf{y}_k^{(1)} + \mathbf{y}_k^{(2)})} \left[B^{(21)} (B^{(11)} + B^{(21)}) \frac{1}{2} \left(\left(I_{0_{\tau_{k+1}, \tau_k}}^{(1)} \right)^2 - \Delta \right) + \right. \\ & + B^{(21)} (B^{(12)} + B^{(22)}) I_{00_{\tau_{k+1}, \tau_k}}^{(21)q} + B^{(22)} (B^{(11)} + B^{(21)}) I_{00_{\tau_{k+1}, \tau_k}}^{(12)q} + \\ & \left. + B^{(22)} (B^{(12)} + B^{(22)}) \frac{1}{2} \left(\left(I_{0_{\tau_{k+1}, \tau_k}}^{(2)} \right)^2 - \Delta \right) \right], \end{aligned} \quad (14.12)$$

где сохранен смысл введенных ранее обозначений.

В формулах (14.11), (14.12) аппроксимации повторных стохастических интегралов Ито выражаются соотношениями (см. главу 6)

$$I_{0_{\tau_{k+1}, \tau_k}}^{(1)} = \sqrt{\Delta} \zeta_0^{(1)}, \quad I_{0_{\tau_{k+1}, \tau_k}}^{(2)} = \sqrt{\Delta} \zeta_0^{(2)}, \quad (14.13)$$

$$I_{00_{\tau_{k+1}, \tau_k}}^{(21)q} = \frac{1}{2} \Delta \left[\zeta_0^{(1)} \zeta_0^{(2)} + \frac{1}{\pi} \sum_{r=1}^q \frac{1}{r} \left(\zeta_{2r}^{(1)} \zeta_{2r-1}^{(2)} - \zeta_{2r-1}^{(1)} \zeta_{2r}^{(2)} \right) + \right.$$

$$+\frac{\sqrt{2}}{\pi} \left(\sum_{r=1}^q \frac{1}{r} \zeta_{2r-1}^{(1)} + \sqrt{\alpha_q} \mu_q^{(1)} \right) \zeta_0^{(2)} - \frac{\sqrt{2}}{\pi} \left(\sum_{r=1}^q \frac{1}{r} \zeta_{2r-1}^{(2)} + \sqrt{\alpha_q} \mu_q^{(2)} \right) \zeta_0^{(1)} \Big], \quad (14.14)$$

$$I_{00\tau_{k+1}, \tau_k}^{(12)q} = \frac{1}{2} \Delta \left[\zeta_0^{(2)} \zeta_0^{(1)} + \frac{1}{\pi} \sum_{r=1}^q \frac{1}{r} \left(\zeta_{2r}^{(2)} \zeta_{2r-1}^{(1)} - \zeta_{2r-1}^{(2)} \zeta_{2r}^{(1)} \right) + \right. \\ \left. + \frac{\sqrt{2}}{\pi} \left(\sum_{r=1}^q \frac{1}{r} \zeta_{2r-1}^{(2)} + \sqrt{\alpha_q} \mu_q^{(2)} \right) \zeta_0^{(1)} - \frac{\sqrt{2}}{\pi} \left(\sum_{r=1}^q \frac{1}{r} \zeta_{2r-1}^{(1)} + \sqrt{\alpha_q} \mu_q^{(1)} \right) \zeta_0^{(2)} \right] \quad (14.15)$$

или

$$I_{00\tau_{k+1}, \tau_k}^{(21)q} = \frac{1}{2} \Delta \left[\zeta_0^{(1)} \zeta_0^{(2)} + \sum_{r=1}^q \frac{1}{\sqrt{4r^2 - 1}} \left(\zeta_{r-1}^{(2)} \zeta_r^{(1)} - \zeta_r^{(2)} \zeta_{r-1}^{(1)} \right) \right], \quad (14.16)$$

$$I_{00\tau_{k+1}, \tau_k}^{(12)q} = \frac{1}{2} \Delta \left[\zeta_0^{(2)} \zeta_0^{(1)} + \sum_{r=1}^q \frac{1}{\sqrt{4r^2 - 1}} \left(\zeta_{r-1}^{(1)} \zeta_r^{(2)} - \zeta_r^{(1)} \zeta_{r-1}^{(2)} \right) \right], \quad (14.17)$$

где $\zeta_j^{(i)}$, $\mu_q^{(i)}$, $j = 0, 1, \dots, 2q$, $i = 1, 2$, — независимые в совокупности стандартные гауссовские случайные величины; Δ — шаг интегрирования численного метода.

Число q в соотношениях (14.14), (14.15) выбирается из следующего условия [70, 86]:

$$\frac{\Delta^2}{2\pi^2} \left(\frac{\pi^2}{6} - \sum_{r=1}^q \frac{1}{r^2} \right) \leq C \Delta^3, \quad (14.18)$$

где $C < \infty$.

Если для аппроксимации повторных стохастических интегралов $I_{00\tau_{k+1}, \tau_k}^{(21)}$, $I_{00\tau_{k+1}, \tau_k}^{(12)}$ использовать соотношения (14.16), (14.17), то число q в них необходимо выбирать из условия

$$\frac{\Delta^2}{2} \left(\frac{1}{2} - \sum_{r=1}^q \frac{1}{4r^2 - 1} \right) \leq C \Delta^3, \quad (14.19)$$

где $C < \infty$.

Следует отметить, что на k -м шаге интегрирования система случайных величин $\zeta_j^{(i)}$, $\mu_q^{(i)}$, $j = 0, 1, \dots, 2q$; $i = 1, 2$, в случае (14.14), (14.15) или система случайных величин $\zeta_j^{(i)}$, $j = 0, 1, \dots, q$; $i = 1, 2$, в случае (14.16), (14.17) должна генерироваться независимой относительно аналогичных систем случайных величин, генерируемых на всех предшествующих шагах интегрирования с номерами $1, 2, \dots, k-1$.

Постоянная C в правой части условий (14.18), (14.19) входит в условие (7.22) при $r = 2$ теоремы 7.2.

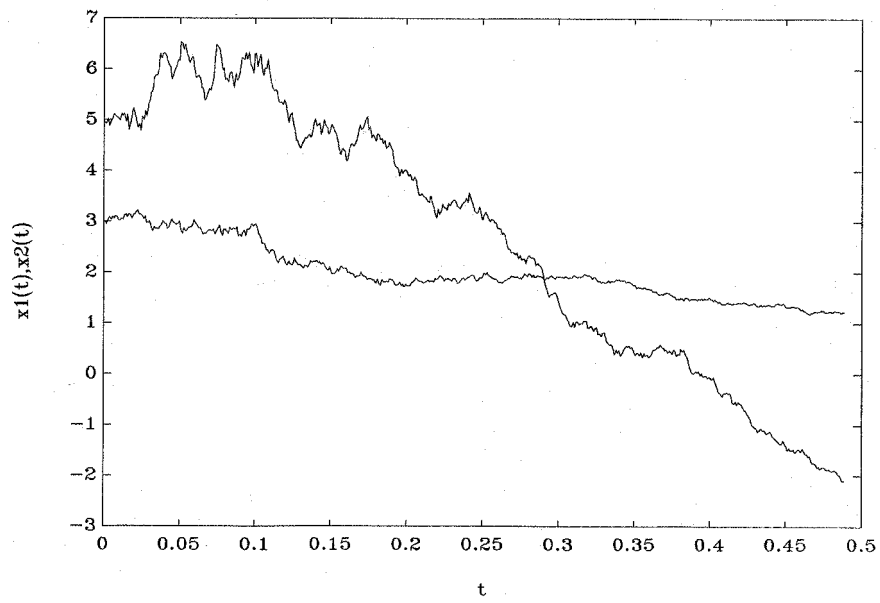


Рис.14.21. Моделирование решения системы (14.10) при $B^{(11)} = 0.5$, $B^{(22)} = 1.2$, $B^{(12)} = B^{(21)} = 0$, $q = 10$, $\mathbf{m}^{(1)} = -1$, $\mathbf{m}^{(2)} = -15$, $\mathbf{x}_0^{(1)} = 3$, $\mathbf{x}_0^{(2)} = 5$, $\gamma = 0.3$.

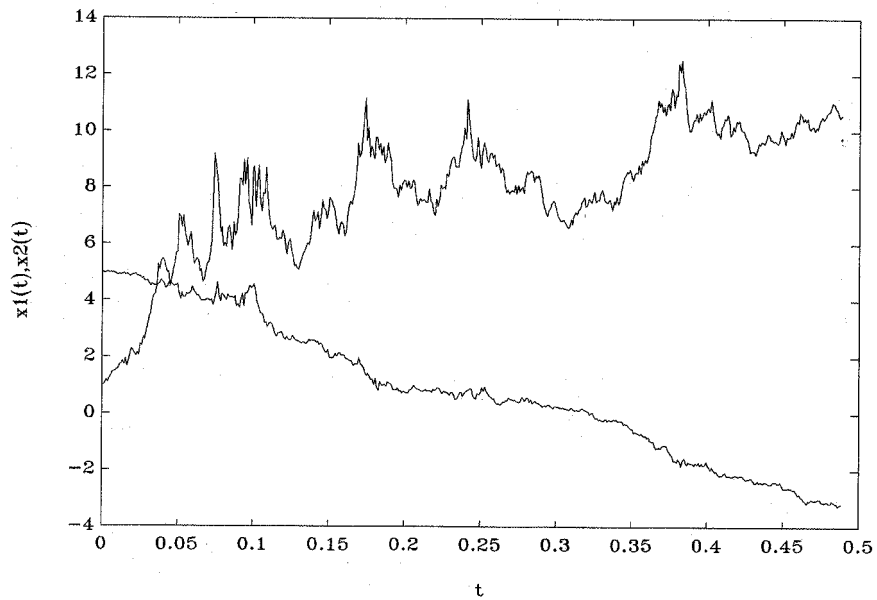


Рис.14.22. Моделирование решения системы (14.10) при $B^{(11)} = 0.1$, $B^{(22)} = 0.4$, $B^{(12)} = B^{(21)} = 0$, $q = 10$, $\mathbf{m}^{(1)} = -10$, $\mathbf{m}^{(2)} = 40$, $\mathbf{x}_0^{(1)} = 5$, $\mathbf{x}_0^{(2)} = 1$, $\gamma = 0.7$.

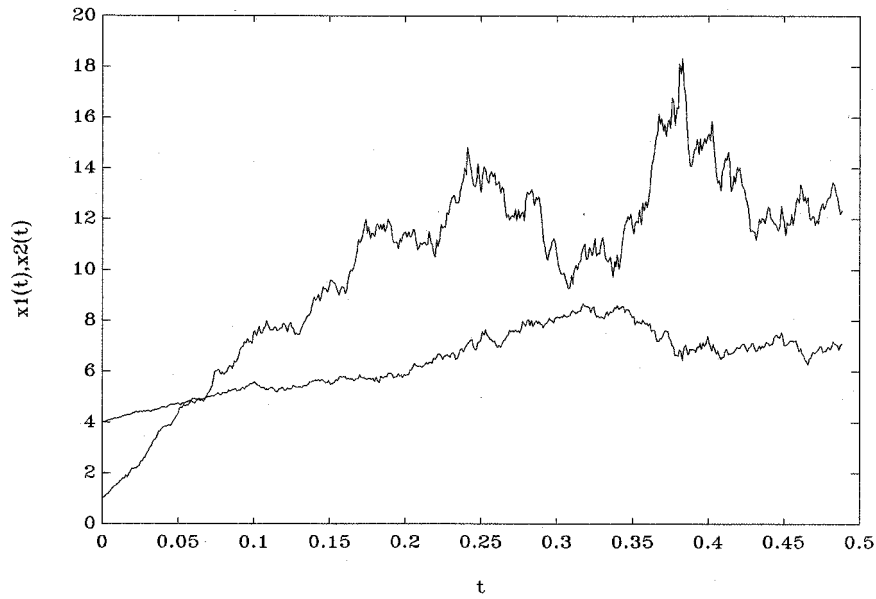


Рис.14.23. Моделирование решения системы (14.10) при $B^{(11)} = 0.2$, $B^{(22)} = 0.6$, $B^{(12)} = B^{(21)} = 0$, $q = 10$, $\mathbf{m}^{(1)} = 15$, $\mathbf{m}^{(2)} = 50$, $\mathbf{x}_0^{(1)} = 4$, $\mathbf{x}_0^{(2)} = 1$, $\gamma = 0.3$.

Выполним численное моделирование решения системы (14.10) с помощью метода Г. Н. Мильштейна (14.11), (14.12) и соотношений (14.13), (14.16), (14.17) при следующих исходных данных: $B^{(11)} = 0.5$, $B^{(22)} = 1.2$, $B^{(12)} = B^{(21)} = 0$, $q = 10$, $\mathbf{m}^{(1)} = -1$, $\mathbf{m}^{(2)} = -15$, $\mathbf{x}_0^{(1)} = 3$, $\mathbf{x}_0^{(2)} = 5$, $\gamma = 0.3$ (здесь и далее в настоящем разделе $\Delta = 2^{-10}$, число итераций $N = 500$). Результат численного моделирования представлен на рис. 14.21. На этом рисунке видна тенденция к уменьшению доходности ценных бумаг. Повторим численное моделирование решения системы (14.10) при $B^{(11)} = 0.1$, $B^{(22)} = 0.4$, $B^{(12)} = B^{(21)} = 0$, $q = 10$, $\mathbf{m}^{(1)} = -10$, $\mathbf{m}^{(2)} = 40$, $\mathbf{x}_0^{(1)} = 5$, $\mathbf{x}_0^{(2)} = 1$, $\gamma = 0.7$. На рис.14.22 отражена динамика системы (14.10) при этих начальных данных.

Положим теперь $B^{(11)} = 0.2$, $B^{(22)} = 0.6$, $B^{(12)} = B^{(21)} = 0$, $q = 10$, $\mathbf{m}^{(1)} = 15$, $\mathbf{m}^{(2)} = 50$, $\mathbf{x}_0^{(1)} = 4$, $\mathbf{x}_0^{(2)} = 1$, $\gamma = 0.3$. Результат численного моделирования системы (14.10) при этих условиях приведен на рис. 14.23. По нему можно проследить тенденцию к росту доходности ценных бумаг.

Во всех трех рассмотренных случаях численного моделирования решения системы (14.10) выбиралась одна и та же реализация последовательности случайных величин $\zeta_j^{(i)}$, $j = 0, 1, \dots, q$; $i = 1, 2$.

14.5 Влияние стохастического возмущения на систему уравнений Рёсслера

Рассмотрим систему уравнений Рёсслера со стохастическим возмущением в виде следующей системы стохастических дифференциальных уравнений Ито:

$$d \begin{bmatrix} \mathbf{x}_t^{(1)} \\ \mathbf{x}_t^{(2)} \\ \mathbf{x}_t^{(3)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\mathbf{x}_t^{(2)} - \mathbf{x}_t^{(3)} \\ \mathbf{x}_t^{(1)} + e\mathbf{x}_t^{(2)} \\ f + \mathbf{x}_t^{(1)}\mathbf{x}_t^{(3)} - \mu\mathbf{x}_t^{(3)} \end{bmatrix} dt + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -c\mathbf{x}_t^{(3)} \end{bmatrix} d\mathbf{f}_t^{(1)}, \quad (14.20)$$

где $\mathbf{x}_t^{(1)}, \mathbf{x}_t^{(2)}, \mathbf{x}_t^{(3)} \in \mathbb{R}^1$ — компоненты решения $\mathbf{x}_t \in \mathbb{R}^3$ системы (14.20); $\mathbf{f}_t^{(1)} \in \mathbb{R}^1$ — стандартный винеровский процесс; e, f, μ, c — параметры.

В главе 4 были приведены унифицированные разложения Тейлора–Ито (4.109)–(4.111) для компонент решения $\mathbf{x}_t$ системы (14.20) до малых $O\left((s-t)^{\frac{5}{2}}\right)$. Положим в этих разложениях $s = (k+1)\Delta, t = k\Delta, k = 0, 1, \dots$. Отбросим в них остаточные члены и аппроксимируем повторные стохастические интегралы Ито, входящие в эти разложения, с помощью методов, изложенных в главе 6. В результате получим следующие выражения для численного метода, основанного на представлениях (4.109)–(4.111):

$$\begin{aligned} \mathbf{y}_{k+1}^{(1)} = & \mathbf{y}_k^{(1)} + \Delta \left(-\mathbf{y}_k^{(2)} - \mathbf{y}_k^{(3)} \right) + c\mathbf{y}_k^{(3)} \left[\Delta I_{0\tau_{k+1}, \tau_k}^{(1)} + I_{1\tau_{k+1}, \tau_k}^{(1)} \right] + \\ & + \frac{\Delta^2}{2} \left[-\mathbf{y}_k^{(1)} - e\mathbf{y}_k^{(2)} - f - \mathbf{y}_k^{(1)}\mathbf{y}_k^{(3)} + \mu\mathbf{y}_k^{(3)} \right] - \\ & - c^2\mathbf{y}_k^{(3)} \left[I_{01\tau_{k+1}, \tau_k}^{(11)q} + \Delta I_{00\tau_{k+1}, \tau_k}^{(11)} \right], \end{aligned} \quad (14.21)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{y}_{k+1}^{(2)} = & \mathbf{y}_k^{(2)} + \Delta \left(\mathbf{y}_k^{(1)} + e\mathbf{y}_k^{(2)} \right) + \frac{\Delta^2}{2} \left[-\mathbf{y}_k^{(2)} - \mathbf{y}_k^{(3)} + \right. \\ & \left. + e \left(\mathbf{y}_k^{(1)} + e\mathbf{y}_k^{(2)} \right) \right], \end{aligned} \quad (14.22)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{y}_{k+1}^{(3)} = & \mathbf{y}_k^{(3)} - c\mathbf{y}_k^{(3)} I_{0\tau_{k+1}, \tau_k}^{(1)} + \Delta \left(f + \mathbf{y}_k^{(1)}\mathbf{y}_k^{(3)} - \mu\mathbf{y}_k^{(3)} \right) + \\ & + c^2\mathbf{y}_k^{(3)} I_{00\tau_{k+1}, \tau_k}^{(11)} + c\mathbf{y}_k^{(3)} \left(\mu - \mathbf{y}_k^{(1)} \right) \left[\Delta I_{0\tau_{k+1}, \tau_k}^{(1)} + I_{1\tau_{k+1}, \tau_k}^{(1)} \right] + \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& +c \left(f + \mathbf{y}_k^{(1)} \mathbf{y}_k^{(3)} - \mu \mathbf{y}_k^{(3)} \right) I_{1\tau_{k+1}, \tau_k}^{(1)} - c^3 \mathbf{y}_k^{(3)} I_{000\tau_{k+1}, \tau_k}^{(111)} + \\
& + \frac{\Delta^2}{2} \left[\left(-\mathbf{y}_k^{(2)} - \mathbf{y}_k^{(3)} \right) \mathbf{y}_k^{(3)} + \left(f + \mathbf{y}_k^{(1)} \mathbf{y}_k^{(3)} - \mu \mathbf{y}_k^{(3)} \right) \left(\mathbf{y}_k^{(1)} - \mu \right) \right] + \\
& + c^2 \mathbf{y}_k^{(3)} \left(\mathbf{y}_k^{(1)} - \mu \right) \left[I_{10\tau_{k+1}, \tau_k}^{(11)q} - I_{01\tau_{k+1}, \tau_k}^{(11)q} \right] - \\
& - c^2 \left(f + \mathbf{y}_k^{(1)} \mathbf{y}_k^{(3)} - \mu \mathbf{y}_k^{(3)} \right) I_{10\tau_{k+1}, \tau_k}^{(11)q} - \\
& - c^2 \mathbf{y}_k^{(3)} \left(\mu - \mathbf{y}_k^{(1)} \right) \left[I_{01\tau_{k+1}, \tau_k}^{(11)q} + \Delta I_{00\tau_{k+1}, \tau_k}^{(11)} \right] + \\
& + c^4 \mathbf{y}_k^{(3)} I_{0000\tau_{k+1}, \tau_k}^{(1111)}, \tag{14.23}
\end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned}
I_{0\tau_{k+1}, \tau_k}^{(1)} &= \sqrt{\Delta} \zeta_0; \quad I_{00\tau_{k+1}, \tau_k}^{(11)} = \frac{1}{2} \Delta \left[(\zeta_0)^2 - 1 \right]; \\
I_{1\tau_{k+1}, \tau_k}^{(1)} &= -\frac{\Delta^{\frac{3}{2}}}{2} \left[\zeta_0 + \frac{1}{\sqrt{3}} \zeta_1 \right]; \quad I_{000\tau_{k+1}, \tau_k}^{(111)} = \frac{\Delta^{\frac{3}{2}}}{6} \left[(\zeta_0)^3 - 3\zeta_0 \right]; \\
I_{0000\tau_{k+1}, \tau_k}^{(1111)} &= \frac{\Delta^2}{24} \left[(\zeta_0)^4 - 6(\zeta_0)^2 + 3 \right]; \\
I_{01\tau_{k+1}, \tau_k}^{(11)q} &= -\frac{\Delta^2}{4} \left[\frac{4}{3} (\zeta_0)^2 + \frac{1}{\sqrt{3}} \zeta_0 \zeta_1 + \frac{1}{3\sqrt{5}} \zeta_0 \zeta_2 + \right. \\
& + \sum_{i=1}^q \left\{ \frac{1}{\sqrt{(2i+1)(2i+5)(2i+3)}} \zeta_i \zeta_{i+2} - \frac{1}{(2i-1)(2i+3)} (\zeta_i)^2 \right\} - 2 \Bigg]; \\
I_{10\tau_{k+1}, \tau_k}^{(11)q} &= -\frac{\Delta^2}{2} \zeta_0 \left(\zeta_0 + \frac{1}{\sqrt{3}} \zeta_1 \right) + \frac{\Delta^2}{2} - I_{01\tau_{k+1}, \tau_k}^{(11)q}; \tag{14.24}
\end{aligned}$$

$\tau_k = k\Delta$; $\mathbf{y}_{\tau_k}^{(i)} \stackrel{\text{def}}{=} \mathbf{y}_k^{(i)}$, $i = 1, 2, 3$; ζ_j , $i = 0, 1, \dots, q+2$, — система независимых стандартных гауссовских случайных величин, которая генерируется на k -м шаге интегрирования и является независимой с аналогичными системами случайных величин, которые генерируются на всех предшествующих шагах интегрирования; число q выбирается (см. главу 6) из условия

$$\begin{aligned}
& \frac{\Delta^4}{16} \left\{ \sum_{i=q+1}^{\infty} \frac{1}{(2i+1)(2i+5)(2i+3)^2} + \sum_{i=q+1}^{\infty} \frac{2}{(2i-1)^2(2i+3)^2} + \right. \\
& \left. + \left(\sum_{i=q+1}^{\infty} \frac{1}{(2i-1)(2i+3)} \right)^2 \right\} \leq C\Delta^5
\end{aligned}$$

или из условия

$$\frac{\Delta^4}{16} \left[\frac{3}{16} \left(\frac{\pi^4}{90} - \sum_{i=1}^q \frac{1}{i^4} \right) + \left(\frac{1}{2} - \sum_{i=1}^q \frac{1}{4i^2 - 1} \right)^2 \right] \leq C \Delta^5,$$

где постоянная C входит в условие (7.22) теоремы 7.2 при $r = 5$.

Следует отметить, что соотношение (14.24) вытекает из равенства

$$I_{10\tau_{k+1}, \tau_k}^{(11)} + I_{01\tau_{k+1}, \tau_k}^{(11)} - \frac{\Delta^2}{2} = I_{0\tau_{k+1}, \tau_k}^{(1)} I_{1\tau_{k+1}, \tau_k}^{(1)} \text{ с в.1,}$$

которое может быть получено, например, с помощью теоремы о замене порядка интегрирования (см. главу 3) или по формуле Ито.

Положим $c = 0.0$, $e = f = 0.2$, $\mu = 5.7$, $\mathbf{x}_0^{(1)} = \mathbf{x}_0^{(2)} = \mathbf{x}_0^{(3)} = 0.1$. Результат численного моделирования системы (14.20) в этом случае на промежутке $t \in [0, 300]$ с шагом интегрирования $\Delta = 0.03$ приведен на фазовой плоскости $(\mathbf{x}^{(1)}(t), \mathbf{x}^{(2)}(t))$ (рис.14.30).

На рис.14.30 представлен аттрактор Рёслера, названный им "слоистым". Как известно [34], этот аттрактор возникает в результате последовательности бифуркаций периода, которая начинается при $\mu = 3.50$ [34] и при $\mu = 4.20$ [34] приводит к появлению аттрактора.

Увеличим параметр c и выполним численное моделирование системы (14.20) с помощью соотношений (14.21)–(14.23) при $q = 2$ и $c = 2.0, 2.5, 2.9$, сохранив при этом значения остальных параметров. На рис.14.31–14.33 представлены соответствующие фазовые траектории системы (14.20) на фазовой плоскости $(\mathbf{x}_t^{(1)}, \mathbf{x}_t^{(2)})$. На этих рисунках с ростом c прослеживается тенденция к уходу фазовых траекторий из области притяжения аттрактора, которая заканчивается этим уходом при достижении c значения 2.9.

При изменении значений e, f, μ внешний вид аттрактора меняется. Так, при $e = 0.19$, $f = 0.4$, $\mu = 8.5$, $c = 0.0$ проекция аттрактора на плоскость $(\mathbf{x}^{(1)}(t), \mathbf{x}^{(2)}(t))$ изображена на рис.14.34. На рис.14.35–14.37 показаны фазовые траектории системы (14.20) при тех же значениях параметров e, f, μ и $c = 2.0, 3.77, 3.775$ соответственно. На этих рисунках с ростом c также заметна тенденция к уходу фазовых траекторий из области притяжения аттрактора, которая завершается им при достижении c значения 3.775.

Отметим, что при построении рис.14.30–14.37 полагали $\mathbf{x}_0^{(1)} = \mathbf{x}_0^{(2)} = \mathbf{x}_0^{(3)} = 0.1$, $t \in [0, 300]$, $\Delta = 0.03$ и выбирали одну и ту же реализацию последовательности гауссовских случайных величин ζ_j , $j = 0, 1, \dots, q$ (рис.14.31–14.33, 14.35–14.37).

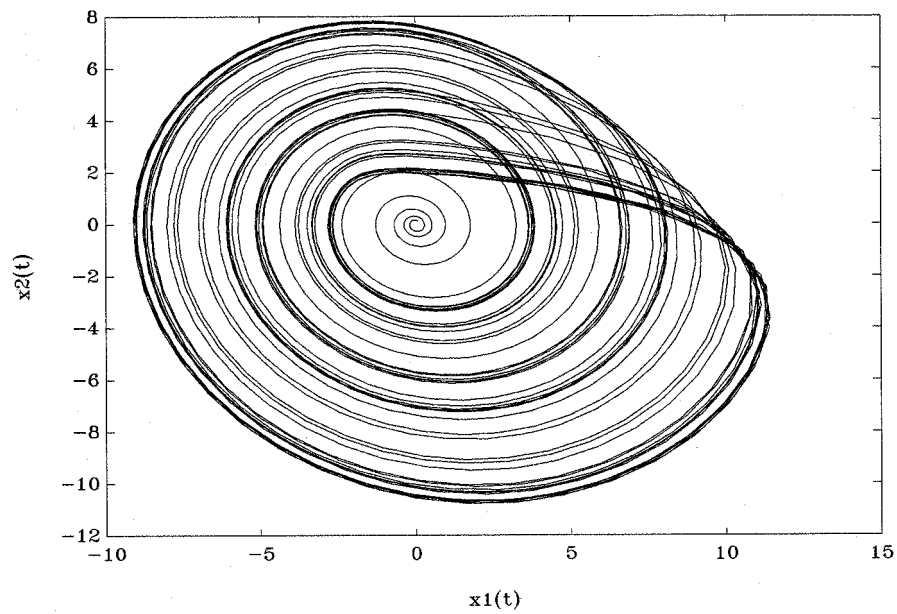


Рис.14.30. Фазовый портрет системы уравнений Рёсслера при $c = 0.0$, $e = f = 0.2$, $\mu = 5.7$.

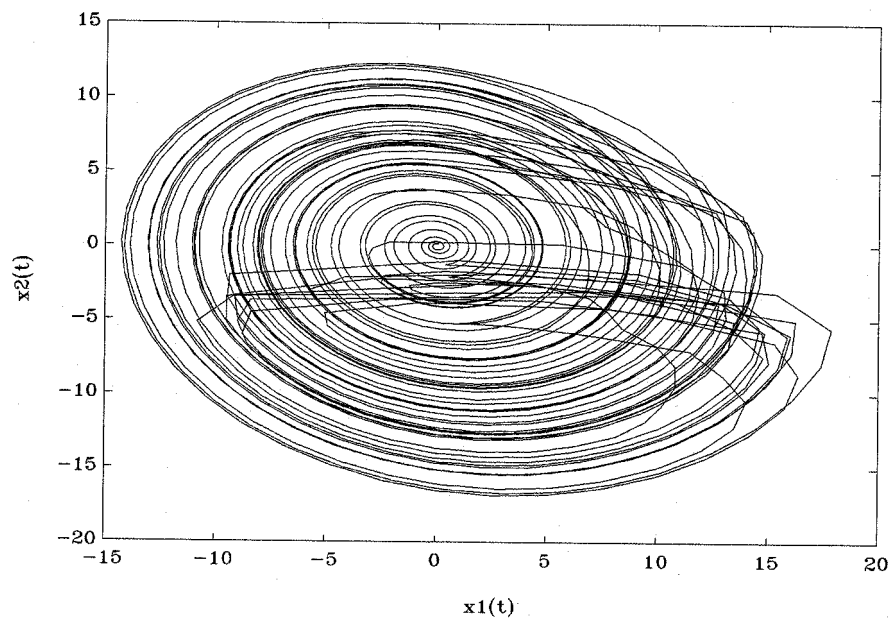


Рис.14.31. Фазовый портрет системы уравнений Рёсслера со стохастическим возмущением при $c = 2.0$, $e = f = 0.2$, $\mu = 5.7$.

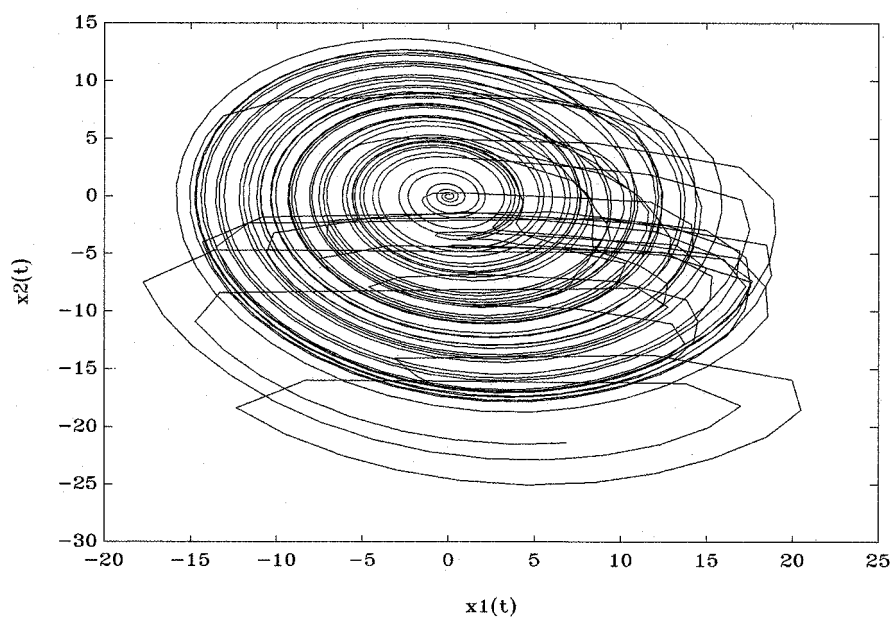


Рис.14.32. Фазовый портрет системы уравнений Рёсслера со стохастическим возмущением при $c = 2.5$, $e = f = 0.2$, $\mu = 5.7$.

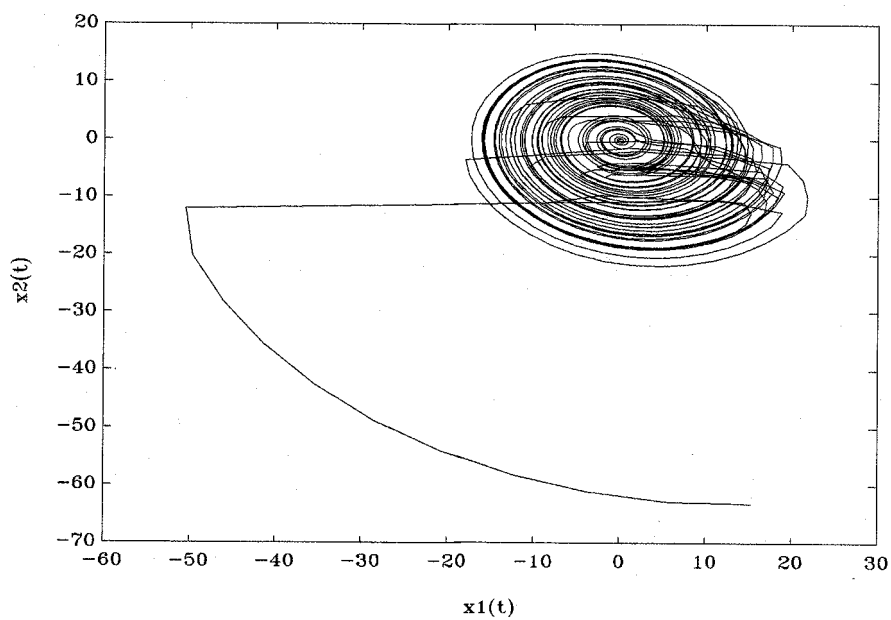


Рис.14.33. Фазовый портрет системы уравнений Рёсслера со стохастическим возмущением при $c = 2.9$, $e = f = 0.2$, $\mu = 5.7$.

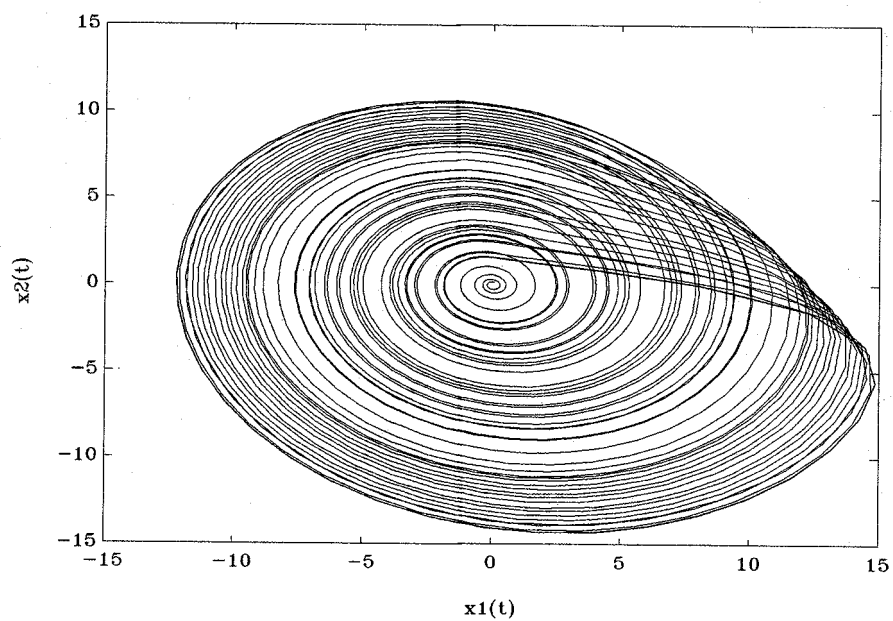


Рис.14.34. Фазовый портрет системы уравнений Рёсслера при $c = 0.0$, $e = 0.19$, $f = 0.4$, $\mu = 8.5$.

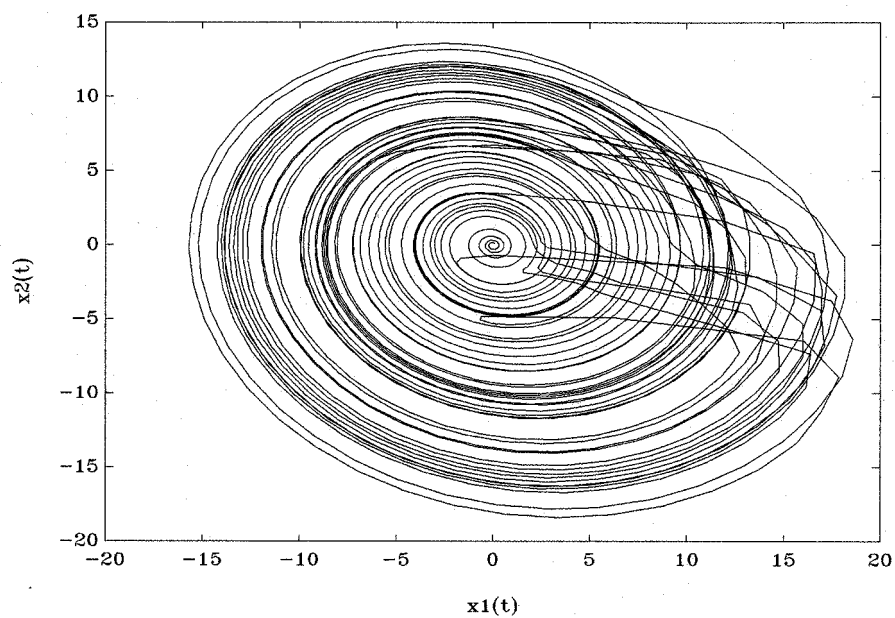


Рис.14.35. Фазовый портрет системы уравнений Рёсслера со стохастическим возмущением при $c = 2.0$, $e = 0.19$, $f = 0.4$, $\mu = 8.5$.

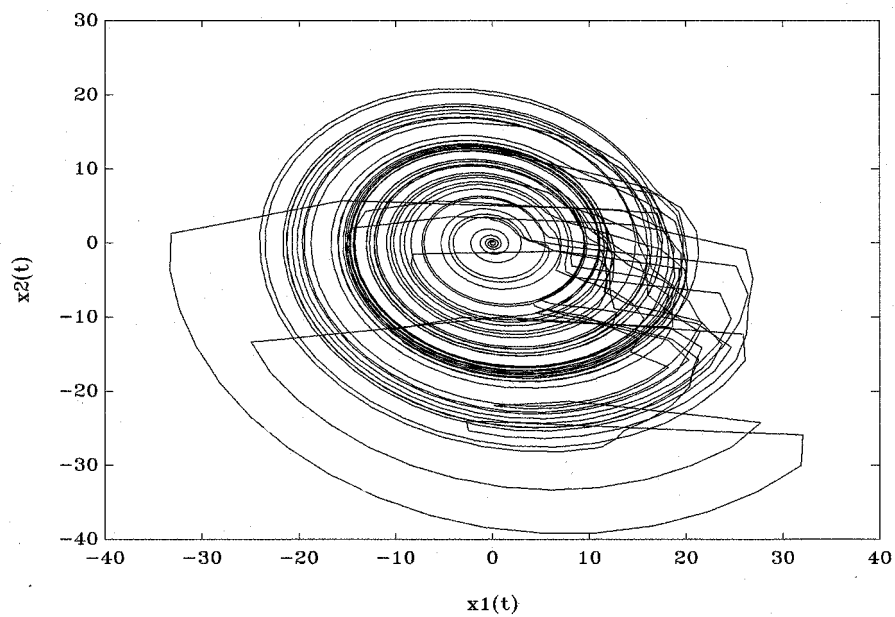


Рис.14.36. Фазовый портрет системы уравнений Рёсслера со стохастическим возмущением при $c = 3.77$, $e = 0.19$, $f = 0.4$, $\mu = 8.5$.

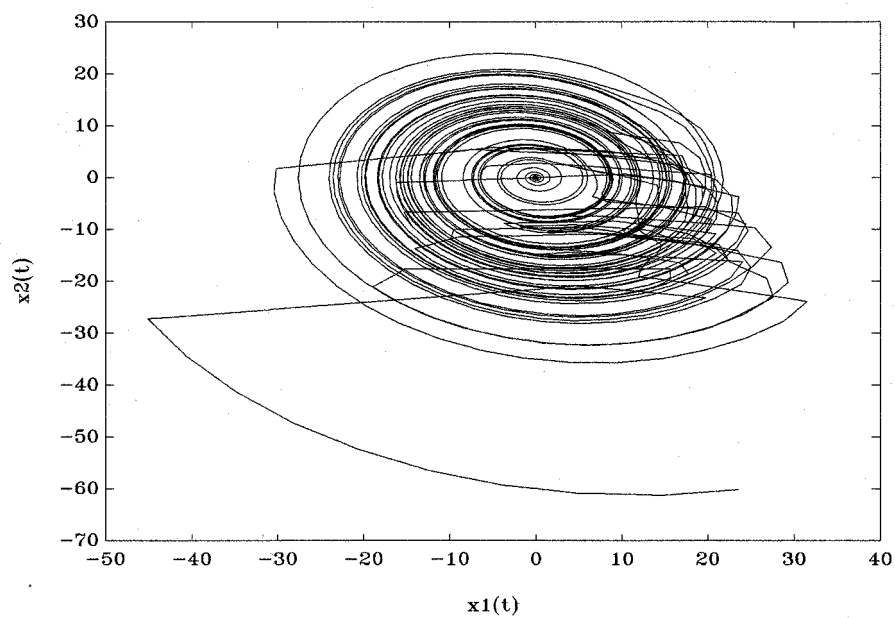


Рис.14.37. Фазовый портрет системы уравнений Рёсслера со стохастическим возмущением при $c = 3.775$, $e = 0.19$, $f = 0.4$, $\mu = 8.5$.

Глава 15

Примеры применения сильных численных методов решения стохастических дифференциальных уравнений к численному решению математических задач

15.1 Тестирование процедур оценивания параметров

Отметим, что существует ряд работ (см., например, [92]), в которых исследовалась проблема оценки параметров в коэффициенте сноса диффузионных процессов, которые наблюдаются непрерывно. При этом получены явные выражения для функции правдоподобия. На практике часто диффузионный процесс наблюдается только в дискретные моменты времени. Явные представления для функции правдоподобия известны в этой ситуации только в достаточно редких случаях.

Простой способ получения процедур оценивания параметров при дискретном наблюдении заключается в аппроксимации, на основе дискретизации по времени, известных процедур оценивания параметров при непрерывном наблюдении (см., например, [86, 87, 92]).

15.1.1 Двухмерная линейная модель

Одно из применений сильных численных методов решения стохастических дифференциальных уравнений Ито связано с тестированием процедур оценивания параметров. В настоящем разделе проил-

люстрируем это приложение на примере двухмерного процесса Ито, описываемого следующим стохастическим дифференциальным уравнением Ито:

$$d \begin{bmatrix} \mathbf{x}_t^{(1)} \\ \mathbf{x}_t^{(2)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\theta_2 & -\theta_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{x}_t^{(1)} \\ \mathbf{x}_t^{(2)} \end{bmatrix} dt + \begin{bmatrix} 0 \\ c \end{bmatrix} df_t, \quad (15.1)$$

$$\mathbf{M}\{\mathbf{x}_t^{(1)}\} = \mathbf{M}\{\mathbf{x}_t^{(2)}\} = 0,$$

где $\theta_1, \theta_2; c > 0$; $f_t \in \mathbb{R}^1$ — стандартный винеровский процесс, который независим с $\mathbf{x}_0 = (\mathbf{x}_0^{(1)} \ \mathbf{x}_0^{(2)})^\top$, $t \in [0, T]$; θ_1, θ_2 — неизвестные параметры, подлежащие определению на основе наблюдений за процессом $\mathbf{x}_t = (\mathbf{x}_t^{(1)} \ \mathbf{x}_t^{(2)})^\top$ на промежутке $[0, T]$.

Приближенные решения уравнения правдоподобия для θ_1, θ_2 из (15.1) имеют вид [31]

$$\hat{\theta}_{1,T} = - \frac{\int_0^T \mathbf{x}_t^{(2)} d\mathbf{x}_t^{(2)}}{\int_0^T \left(\mathbf{x}_t^{(2)}\right)^2 dt}, \quad (15.2)$$

$$\hat{\theta}_{2,T} = \frac{\int_0^T \left(\mathbf{x}_t^{(2)}\right)^2 dt}{\int_0^T \left(\mathbf{x}_t^{(1)}\right)^2 dt}. \quad (15.3)$$

По формуле Ито

$$\int_0^T \mathbf{x}_t^{(2)} d\mathbf{x}_t^{(2)} = \frac{1}{2} \left(\left(\mathbf{x}_T^{(2)}\right)^2 - \left(\mathbf{x}_0^{(2)}\right)^2 - c^2 T \right) \text{ с в.1.} \quad (15.4)$$

Подставляя (15.4) в (15.2), получаем

$$\hat{\theta}_{1,T} = - \frac{\frac{1}{2} \left(\left(\mathbf{x}_T^{(2)}\right)^2 - \left(\mathbf{x}_0^{(2)}\right)^2 - c^2 T \right)}{\int_0^T \left(\mathbf{x}_t^{(2)}\right)^2 dt}. \quad (15.5)$$

Заменяя стохастические интегралы в правых частях (15.3), (15.5) интегральными суммами

$$\frac{1}{2} \sum_{k=0}^{N_T-1} \left(\left(\mathbf{x}_{k\Delta}^{(2)}\right)^2 + \left(\mathbf{x}_{(k+1)\Delta}^{(2)}\right)^2 \right) \Delta, \quad \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{N_T-1} \left(\left(\mathbf{x}_{k\Delta}^{(1)}\right)^2 + \left(\mathbf{x}_{(k+1)\Delta}^{(1)}\right)^2 \right) \Delta,$$

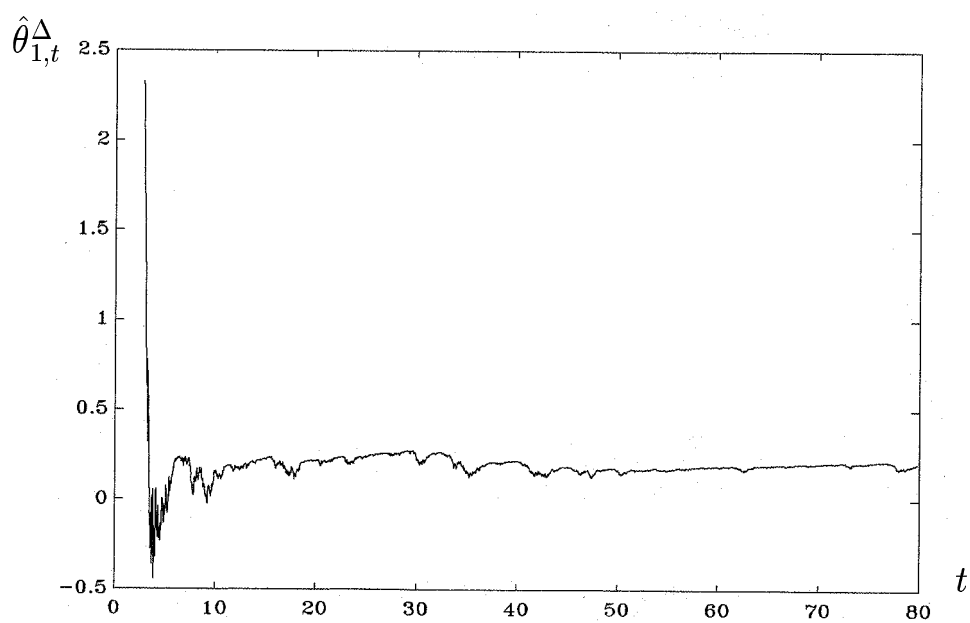


Рис.15.1. Результат численного эксперимента 15.1.

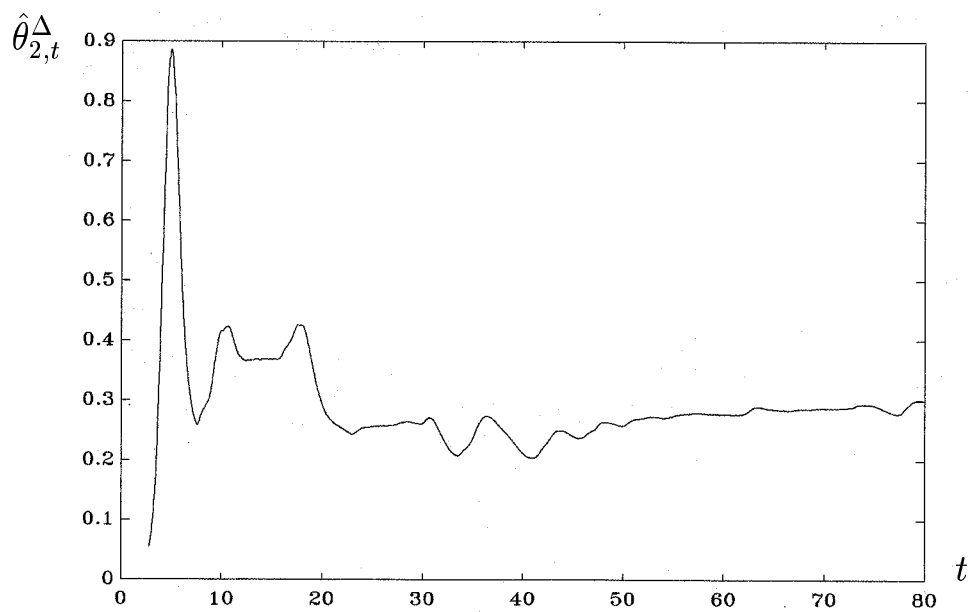


Рис.15.2. Результат численного эксперимента 15.1.

имеем следующие процедуры оценивания параметров θ_1, θ_2 :

$$\hat{\theta}_{1,T}^{\Delta} = -\frac{\left(\left(\mathbf{x}_T^{(2)}\right)^2 - \left(\mathbf{x}_0^{(2)}\right)^2 - c^2 T\right)}{\sum_{k=0}^{N_T-1} \left(\left(\mathbf{x}_{k\Delta}^{(2)}\right)^2 + \left(\mathbf{x}_{(k+1)\Delta}^{(2)}\right)^2\right) \Delta}. \quad (15.6)$$

$$\hat{\theta}_{2,T}^{\Delta} = \frac{\sum_{k=0}^{N_T-1} \left(\left(\mathbf{x}_{k\Delta}^{(2)}\right)^2 + \left(\mathbf{x}_{(k+1)\Delta}^{(2)}\right)^2\right) \Delta}{\sum_{k=0}^{N_T-1} \left(\left(\mathbf{x}_{k\Delta}^{(1)}\right)^2 + \left(\mathbf{x}_{(k+1)\Delta}^{(1)}\right)^2\right) \Delta}, \quad (15.7)$$

где $T = N_T \Delta$.

Численный эксперимент 15.1. Смоделировать решение системы (15.1) при $\theta_1 = 0.14$, $\theta_2 = 0.5661^2 \approx 0.3205$, $c = 5.08$, $\mathbf{x}_0^{(1)} = 7$, $\mathbf{x}_0^{(2)} = -0.25$ на промежутке времени $[0, T]$, $T = 80$, с шагом $\Delta = 4 \cdot 10^{-3}$, пользуясь явным сильным методом Эйлера. Смоделировать процессы $\hat{\theta}_{1,k\Delta}^{\Delta}$, $\hat{\theta}_{2,k\Delta}^{\Delta}$, $k = 0, 1, \dots, N_T$; $N_T = 20000$, $\Delta = 4 \cdot 10^{-3}$, $\hat{\theta}_{1,0}^{\Delta} = 0$, $\hat{\theta}_{2,0}^{\Delta} = 0$, с помощью формул (15.6) и (15.7), в которых T заменяется на $k\Delta$. Результат численного моделирования представить графически (рис. 15.1, 15.2). При этом следует выводить на графики каждую пятую точку, начиная с 700-й.

Отметим, что тестирование процедур оценивания параметров случайных процессов, описываемых линейными стохастическими дифференциальными уравнениями Ито, рассматривалось в ряде работ (см., например, [86, 87, 92]). Однако формулы (15.6) и (15.7) не могут быть получены с помощью подхода, описанного в [87, 92], так как в этих работах предполагается, что матрица $D = \Sigma \Sigma^T$ невырождена (здесь Σ , как обычно, матрица, умножаемая на дифференциал винеровского процесса, в правой части стохастического дифференциального уравнения Ито).

15.1.2 Нелинейная одномерная модель

В [92] рассмотрена следующая математическая модель популяционной динамики:

$$dx_t = (\theta_1 x_t + \theta_2 x_t^2) dt + \sigma \sqrt{x_t} df_t, \quad (15.8)$$

где $\theta_1 = \alpha K$, $\theta_2 = -\alpha$; σ, α, K — параметры; f_t — стандартный винеровский процесс; параметр σ предполагается известным.

В [92] получены выражения для оценок $\hat{\theta}_{1,T}$, $\hat{\theta}_{2,T}$ максимального правдоподобия параметров θ_1 , θ_2 :

$$\begin{aligned}\hat{\theta}_{1,T} &= \left((x_T - x_0) \int_0^T x_t^3 dt - \int_0^T x_t dx_t \int_0^T x_t^2 dt \right) / N_T = \\ &= \left((x_T - x_0) \int_0^T x_t^3 dt - \frac{1}{2} \left(x_T^2 - x_0^2 - \sigma^2 \int_0^T x_t dt \right) \int_0^T x_t^2 dt \right) / N_T; \quad (15.9)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\hat{\theta}_{2,T} &= \left(\int_0^T x_t dx_t \int_0^T x_t dt - (x_T - x_0) \int_0^T x_t^2 dt \right) / N_T = \\ &= \left(\frac{1}{2} \left(x_T^2 - x_0^2 - \sigma^2 \int_0^T x_t dt \right) \int_0^T x_t dt - (x_T - x_0) \int_0^T x_t^2 dt \right) / N_T, \quad (15.10)\end{aligned}$$

где $N_T = \int_0^T x_t dt \int_0^T x_t^3 dt - \left(\int_0^T x_t^2 dt \right)^2$.

Заменяя интегралы $\int_0^T x_t^j dt$; $j = 1, 2, 3$ в формулах (15.9), (15.10) интегральными суммами $\frac{1}{2} \sum_{k=0}^{N_T-1} ((x_{k\Delta})^j + (x_{(k+1)\Delta})^j) \Delta \stackrel{\text{def}}{=} S_{j,T}^\Delta$; $j = 1, 2, 3$ соответственно, получим [92] следующие процедуры оценивания параметров θ_1 , θ_2 на основе дискретных данных $x_{k\Delta}$; $k = 0, 1, \dots, N_T$; $T = N_T \Delta$:

$$\hat{\theta}_{1,T}^\Delta = \left((x_T - x_0) S_{3,T}^\Delta - \frac{1}{2} (x_T^2 - x_0^2 - \sigma^2 S_{1,T}^\Delta) S_{2,T}^\Delta \right) / N_T^\Delta; \quad (15.11)$$

$$\hat{\theta}_{2,T}^\Delta = \left(\frac{1}{2} (x_T^2 - x_0^2 - \sigma^2 S_{1,T}^\Delta) S_{1,T}^\Delta - (x_T - x_0) S_{2,T}^\Delta \right) / N_T^\Delta, \quad (15.12)$$

где $N_T^\Delta = S_{1,T}^\Delta S_{3,T}^\Delta - (S_{2,T}^\Delta)^2$.

В [92] исследованы статистические свойства процедур (15.11), (15.12) оценивания параметров с использованием численного интегрирования стохастического дифференциального уравнения Ито (15.8) явным сильным численным методом типа Рунге–Кутта порядка точности 1.0. Повторим численный эксперимент из [92], используя метод (7.89), принадлежащий к этому же классу численных методов.

Численный эксперимент 15.2 *Смоделировать решение стохастического дифференциального уравнения Ито (15.8) при $\theta_1 = 2$, $\theta_2 = -2$, $\sigma = 0.5$, $x_0 = 0.5$ на промежутке времени $[0, T]$, $T = 1100$, с шагом $\Delta = 2 \cdot 10^{-2}$, пользуясь явным сильным конечно-разностным численным методом (7.89), по формуле:*

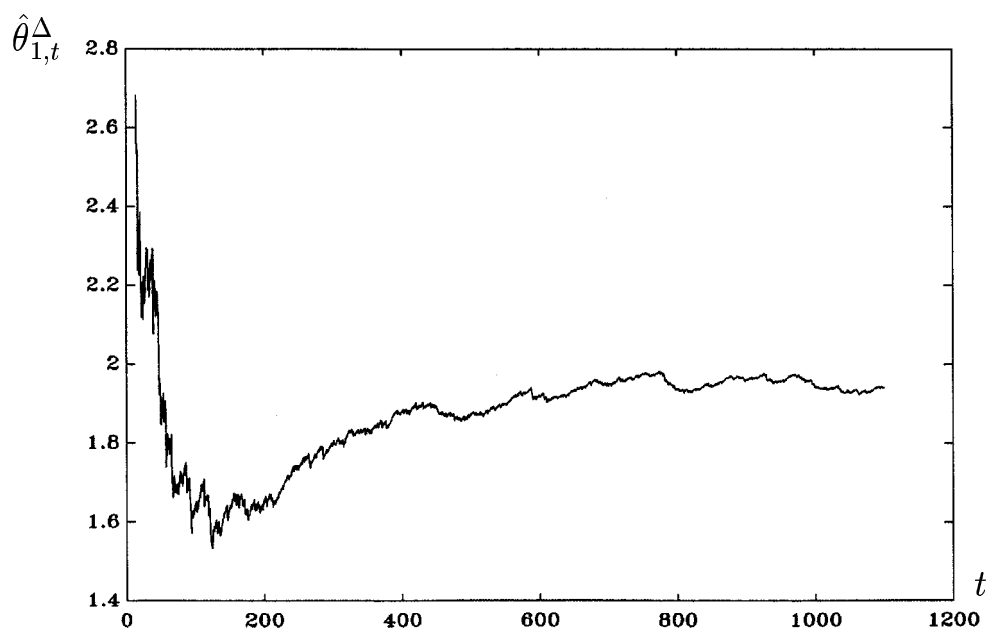


Рис.15.3. Результат численного эксперимента 15.2.

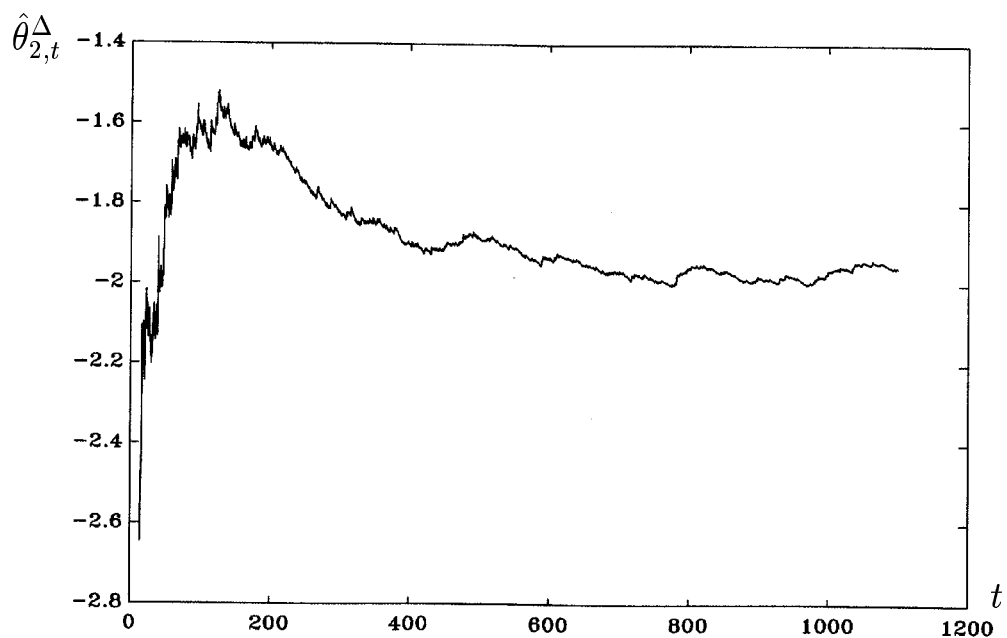


Рис.15.4. Результат численного эксперимента 15.2.

$$y_{p+1} = y_p + (\theta_1 y_p + \theta_2 y_p^2) \Delta + \sigma \sqrt{y_p^+} \sqrt{\Delta} \zeta_p + \\ + \frac{\sigma \sqrt{\Delta}}{4} (\zeta_p^2 - 1) \left(\sqrt{(y_p + 2\sqrt{\Delta} \sigma \sqrt{y_p^+})^+} - \sqrt{y_p^+} \right), \quad (15.13)$$

где $y_{p\Delta} \stackrel{\text{def}}{=} y_p$; $x^+ = x$ при $x \geq 0$ и $x^+ = 0$ при $x < 0$; ζ_p ($p = 0, 1, \dots, N_T - 1$) — независимые стандартные гауссовские случайные величины. Смоделировать процессы $\hat{\theta}_{1,k\Delta}^\Delta, \hat{\theta}_{2,k\Delta}^\Delta$ ($k = 0, 1, \dots, N_T$), $N_T = 55000$, $\Delta = 2 \cdot 10^{-2}$, $\hat{\theta}_{1,0}^\Delta = 0$, $\hat{\theta}_{2,0}^\Delta = 0$, с помощью формул (15.11), (15.12), в которых T заменяется на $k\Delta$. Результат численного моделирования представить графически (рис.15.3, 15.4). При этом следует выводить на графики каждую пятнадцатую точку, начиная с 700-й.

Отметим, что выбор конечно-разностного метода типа Рунге–Кутты для численного решения стохастического дифференциального уравнения Ито (15.8) обусловлен тем, что производная $\sqrt{x}$ при малых x принимает большие значения, что ведет к численной неустойчивости (правая часть (15.13) не содержит производных).

Результаты, приведенные на рис.15.3, 15.4, близки к соответствующим численным результатам работы [92].

15.2 Фильтрация марковской цепи с конечным числом состояний

Цель настоящего раздела — приложение сильных численных методов решения стохастических дифференциальных уравнений Ито к фильтрации марковских цепей с конечным числом состояний. При изложении мы основываемся на монографиях [86, 87].

Пусть заданы вероятностное пространство $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ с потоком σ -алгебр $\mathcal{F}_t$, $t \in [0, T]$, процесс состояния η_t , $t \in [0, T]$, который является однородной марковской цепью с непрерывным временем и пространством состояний $Y = \{y_1, \dots, y_n\}$, $n < \infty$; столбец вероятностей $p(t)$ с компонентами $p^{(i)}(t) = \mathbb{P}\{\eta_t = y_i\}$, $i = 1, \dots, n$, удовлетворяющий уравнению

$$\frac{dp}{dt} = Ap$$

(здесь $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ — матрица интенсивности).

Предположим, что наблюдаемый m -мерный процесс $\mathbf{w}_t$, $t \in [0, T]$, определяется равенством

$$\mathbf{w}_t = \int_0^t \mathbf{a}(\eta_\tau) d\tau + \mathbf{f}_t, \quad (15.14)$$

где $\mathbf{f}_t$, $t \in [0, T]$, $\mathbf{f}_0 = 0$, — $\mathcal{F}_t$ -измеримый при всех $t \in [0, T]$ m -мерный стандартный винеровский процесс с независимыми компонентами относительно вероятностной меры $\mathbf{P}$, в свою очередь независимый с процессом η_t , $t \in [0, T]$; $\mathbf{a}(\mathbf{x}) : Y \rightarrow \mathbb{R}^m$. Далее через $\mathcal{F}_t^{\mathbf{w}}$ будем обозначать σ -алгебру, порожденную процессом $\mathbf{w}_\tau$, $\tau \in [0, t]$.

Задача состоит в фильтрации процесса η_t , $t \in [0, T]$, на основе наблюдаемого процесса $\mathbf{w}_t$, $t \in [0, T]$, вида (15.14).

Для удобства с помощью преобразования Гирсанова (см. главу 1) введем новую вероятностную меру $\tilde{\mathbf{P}}$:

$$\frac{d\tilde{\mathbf{P}}}{d\mathbf{P}} = (Q_T)^{-1}, \quad Q_T = e^{-\frac{1}{2} \int_0^T |\mathbf{a}(\xi_\tau)|^2 d\tau + \int_0^T \mathbf{a}(\xi_\tau)^1 \cdot d\mathbf{w}_\tau}.$$

При этом процесс $\mathbf{w}_t$, $t \in [0, T]$, является винеровским относительно вероятностной меры $\tilde{\mathbf{P}}$.

Согласно формуле Каллианпура–Стрибел имеем

$$\mathbf{P}\{\eta_t = y_i | \mathcal{F}_t^{\mathbf{w}}\} = \mathbf{M}_{\mathbf{P}}\{1_{\{\eta_t = y_i\}} | \mathcal{F}_t^{\mathbf{w}}\} = \frac{\mathbf{x}_t^{(i)}}{\sum_{i=1}^n \mathbf{x}_t^{(i)}}$$

для всех $y_i \in Y$; $t \in [0, T]$, где $\mathbf{x}_t = (\mathbf{x}_t^{(1)} \dots \mathbf{x}_t^{(n)})^\top$ — столбец с компонентами

$$\mathbf{x}_t^{(i)} = \mathbf{M}_{\tilde{\mathbf{P}}}\{1_{\{\eta_t = y_i\}} Q_t | \mathcal{F}_t^{\mathbf{w}}\},$$

который удовлетворяет стохастическому дифференциальному уравнению Ито вида

$$d\mathbf{x}_t = A\mathbf{x}_t dt + \sum_{i=1}^m G_i \mathbf{x}_t d\mathbf{w}_t^{(i)}, \quad \mathbf{x}_0 = p(0), \quad t \in [0, T], \quad (15.15)$$

где $G_i = \text{diag}\{\mathbf{a}^{(i)}(y_j)\}_{j=1}^n$, $i = 1, \dots, m$, называемому уравнением Закаи. Здесь $\mathbf{M}_{\mathbf{P}}\{\cdot | \mathcal{F}_t^{\mathbf{w}}\}$, $\mathbf{M}_{\tilde{\mathbf{P}}}\{\cdot | \mathcal{F}_t^{\mathbf{w}}\}$ — условные математические ожидания относительно вероятностных мер $\mathbf{P}$ и $\tilde{\mathbf{P}}$ соответственно.

Оптимальная оценка для $g(\eta_t)$ ($g : Y \rightarrow \mathbb{R}^1$, $\mathbf{M}_{\mathbf{P}}\{|g(\eta_t)|^2\} < \infty$ при всех $t \in [0, T]$) по методу наименьших квадратов, полученная на основе

наблюдаемого процесса $\mathbf{w}_s$, $s \in [0, t]$, определяется равенством

$$F_{t,g} = \mathbb{M}_P\{g(\eta_t) | \mathcal{F}_t^{\mathbf{w}}\} = \frac{\sum_{i=1}^n g(y_i) \mathbf{x}_t^{(i)}}{\sum_{i=1}^n \mathbf{x}_t^{(i)}}. \quad (15.16)$$

Оценка $F_{t,g}$ вида (15.16) называется оптимальным фильтром марковской цепи.

Очевидно, что для реализации фильтра (15.16) необходимо численно интегрировать уравнение Закаи (15.15). Это можно сделать, например, с помощью численных методов, обсуждаемых в данной книге.

Отметим, что на практике, как правило, возможно наблюдать реализацию не всего процесса $\mathbf{w}_t$, $t \in [0, T]$, а лишь его некоторых интегральных характеристик, полученных по результатам наблюдений на небольших временных интервалах. Эти интегральные характеристики можно интерпретировать как повторные стохастические интегралы Ито относительно вероятностной меры $\tilde{P}$. В частности, в наиболее простом случае это могут быть приращения вида

$$\int_{\tau_{i-1}}^{\tau_i} d\mathbf{w}_s^{(j)}, \quad i = 1, 2, \dots, \quad \tau_i = i\Delta, \quad j = 1, \dots, m.$$

Используя полученную по результатам наблюдений информацию о процессе $\mathbf{w}_t$, $t \in [0, T]$, можно конструировать приближенные фильтры

$$\hat{F}_{\tau_p, g}^{\Delta} = \frac{\sum_{i=1}^n g(y_i) \mathbf{y}_{\tau_p}^{(i)}}{\sum_{i=1}^n \mathbf{y}_{\tau_p}^{(i)}}, \quad p = 0, 1, \dots, N, \quad (15.17)$$

где $\mathbf{y}_{\tau_p}$, $p = 0, 1, \dots, N$, — дискретная аппроксимация решения $\mathbf{x}_t$, $t \in [0, T]$, уравнения (15.15), которая соответствует максимальному шагу дискретизации Δ .

Определение 15.1 [86]. Будем говорить, что приближенный фильтр $\hat{F}_{\tau_p, g}^{\Delta}$, $p = 0, 1, \dots, N$, соответствующий максимальному шагу дискретизации Δ , сходится на временном интервале $[0, T]$ с порядком $\gamma > 0$ к оптимальному фильтру $F_{t,g}$, $t \in [0, T]$, для заданной функции g , если существуют постоянная $C < \infty$, которая не зависит от Δ , и число $\Delta_0 \in (0, 1)$ такие, что

$$\mathbb{M}_P \left\{ \left| F_{\tau_p, g} - \hat{F}_{\tau_p, g}^{\Delta} \right| \right\} \leq C \Delta^{\gamma}$$

для всех $\Delta \in (0, \Delta_0)$ и $\tau_p \in [0, T]$.

В [86] отмечается, что можно показать сходимость приближенного фильтра $\hat{F}_{\tau_p, g}^\Delta$, $p = 0, 1, \dots, N$, на временном интервале $[0, T]$ с порядком $\gamma > 0$ к оптимальному фильтру $F_{t, g}$, $t \in [0, T]$, для заданной ограниченной функции g , если дискретная аппроксимация $\mathbf{y}_{\tau_p}$, $p = 0, 1, \dots, N$, сходится сильно с тем же порядком $\gamma > 0$ к решению $\mathbf{x}_t$, $t \in [0, T]$, уравнения Закаи (15.15). В частности, при $\gamma = 0.5$ и $\gamma = 1.0$ этот результат получен в [171–173].

В работах [86, 87, 171–173] рассмотрен ряд явных и неявных приближенных фильтров порядка точности 0.5, 1.0, 1.5 и 2.0 для случаев $m = 1$ и $m > 1$.

Далее приводим лишь небольшую часть упомянутых приближенных фильтров для случая $m > 1$. При этом будем использовать сильные численные схемы решения уравнения Закаи (15.15), основанные на разложении Тейлора–Стратоновича.

Явные сильные методы Эйлера и Г. Н. Мильштейна, основанные на разложении Тейлора–Стратоновича и примененные к уравнению Закаи (15.15), имеют соответственно следующий вид [87]:

$$\mathbf{y}_{\tau_{p+1}} = (I + A\Delta + S_p) \mathbf{y}_{\tau_p}, \quad (15.18)$$

$$\mathbf{y}_{\tau_{p+1}} = \left(I + \bar{A}\Delta + S_p \left(I + \frac{1}{2}S_p \right) \right) \mathbf{y}_{\tau_p}, \quad (15.19)$$

где $\mathbf{y}_0 = \mathbf{x}_0$; $I \in \mathbb{R}^{n \times n}$ — единичная матрица;

$$S_p = \sum_{i=1}^m G_i \int_{\tau_p}^{\tau_{p+1}} d\mathbf{w}_s^{(i)}, \quad \bar{A} = A - \frac{1}{2} \sum_{i=1}^m (G_i)^2.$$

Отметим, что в силу специальной мультипликативной структуры уравнения Закаи (15.15) для реализации численных схем (15.18), (15.19) достаточно информации о процессе $\mathbf{w}_t$, $t \in [0, T]$, которая содержится в σ -алгебре $\hat{\mathcal{F}}_N^{1,0}$, порожденной приращениями

$$\int_{\tau_{p-1}}^{\tau_p} d\mathbf{w}_s^{(i)}, \quad p = 1, 2, \dots, N, \quad i = 1, \dots, m.$$

Обозначим через $\hat{\mathcal{F}}_N^{1,5}$ σ -алгебру, состоящую из σ -алгебры $\hat{\mathcal{F}}_N^{1,0}$ и σ -алгебры, порожденной интегральными наблюдениями:

$$J_{(10)\tau_p, \tau_{p-1}}^{(i)} = \int_{\tau_{p-1}}^{\tau_p} \int_{\tau_{p-1}}^s d\mathbf{w}_\tau^{(i)} ds, \quad p = 1, 2, \dots, N, \quad i = 1, \dots, m.$$

Информации, содержащейся в σ -алгебре $\hat{\mathcal{F}}_N^{1.5}$, достаточно для реализации численного метода [87]

$$\begin{aligned} \mathbf{y}_{\tau_{p+1}} = & \left(I + \bar{A}\Delta + S_p + \frac{\Delta^2}{2}A^2 + AR_p - R_pA + \right. \\ & \left. + S_p\bar{A}\Delta + \frac{1}{2}(S_p)^2 + \frac{1}{6}(S_p)^3 \right) \mathbf{y}_{\tau_p}, \end{aligned} \quad (15.20)$$

являющегося результатом применения явной сильной одношаговой численной схемы порядка точности 1.5 к уравнению Закаи (15.15); в (15.20) сохранен смысл обозначений, введенных в (15.18), (15.19), а R_p определяется равенством

$$R_p = \sum_{i=1}^m G_i J_{(10)\tau_{p+1}, \tau_p}^{(i)}.$$

Для реализации явной сильной одношаговой численной схемы порядка точности 2.0, примененной к уравнению Закаи (15.15), достаточно информации о процессе $\mathbf{w}_t$, $t \in [0, T]$, содержащейся в σ -алгебре $\hat{\mathcal{F}}_N^{2.0}$, состоящей из σ -алгебры $\hat{\mathcal{F}}_N^{1.5}$ и σ -алгебры, порожденной следующими повторными стохастическими интегралами Стратоновича:

$$\begin{aligned} J_{(110)\tau_{p+1}, \tau_p}^{*(i_1 i_2)} &= \int_{\tau_p}^{*\tau_{p+1}} \int_{\tau_p}^{*s} \int_{\tau_p}^{*\theta} d\mathbf{w}_u^{(i_1)} d\mathbf{w}_\theta^{(i_2)} ds, \\ J_{(101)\tau_{p+1}, \tau_p}^{*(i_1 i_2)} &= \int_{\tau_p}^{*\tau_{p+1}} \int_{\tau_p}^{*s} \int_{\tau_p}^{*\theta} d\mathbf{w}_u^{(i_1)} d\theta d\mathbf{w}_s^{(i_2)}, \end{aligned}$$

$p = 0, 1, \dots, N-1$, $i_1, i_2 = 1, \dots, m$. Соответствующая численная схема имеет вид [87]

$$\begin{aligned} \mathbf{y}_{\tau_{p+1}} = & \left(I + \bar{A}\Delta \left(I + \frac{1}{2}\bar{A}\Delta \right) - R_p\bar{A} + \bar{A}R_p + \right. \\ & \left. + S_p \left(I + \bar{A}\Delta + \frac{1}{2}S_p \left(I + \frac{1}{3}S_p \left(I + \frac{1}{4}S_p \right) \right) \right) \right) + \\ & + \sum_{i_1, i_2=1}^m \left(\bar{A}G_{i_2}G_{i_1} J_{(110)\tau_{p+1}, \tau_p}^{*(i_1 i_2)} + G_{i_2}\bar{A}G_{i_1} J_{(101)\tau_{p+1}, \tau_p}^{*(i_1 i_2)} + \right. \\ & \left. + G_{i_2}G_{i_1}\bar{A} \left(\Delta J_{(11)\tau_{p+1}, \tau_p}^{*(i_1 i_2)} - J_{(110)\tau_{p+1}, \tau_p}^{*(i_1 i_2)} - J_{(101)\tau_{p+1}, \tau_p}^{*(i_1 i_2)} \right) \right) \mathbf{y}_{\tau_p}, \end{aligned} \quad (15.21)$$

где сохранен смысл обозначений, введенных в (15.18)–(15.20),

$$J_{(11)\tau_{p+1}, \tau_p}^{*(i_1 i_2)} = \int_{\tau_p}^{*\tau_{p+1}} \int_{\tau_p}^{*s} d\mathbf{w}_{\theta}^{(i_1)} d\mathbf{w}_s^{(i_2)}.$$

Приведем иной вариант формулы (15.21), воспользовавшись повторными стохастическими интегралами Стратоновича $I_{l_1 \dots l_k \tau_{p+1}, \tau_p}^{*(i_1 \dots i_k)}$:

$$\begin{aligned} \mathbf{y}_{\tau_{p+1}} = & \left(I + \bar{A}\Delta \left(I + \frac{1}{2}\bar{A}\Delta \right) - R_p \bar{A} + \bar{A}R_p + \right. \\ & + S_p \left(I + \bar{A}\Delta + \frac{1}{2}S_p \left(I + \frac{1}{3}S_p \left(I + \frac{1}{4}S_p \right) \right) \right) + \\ & + \sum_{i_1, i_2=1}^m \left(\bar{A}G_{i_2}G_{i_1} \left(\Delta I_{00\tau_{p+1}, \tau_p}^{*(i_1 i_2)} + I_{01\tau_{p+1}, \tau_p}^{*(i_1 i_2)} \right) + \right. \\ & + G_{i_2}\bar{A}G_{i_1} \left(I_{10\tau_{p+1}, \tau_p}^{*(i_1 i_2)} - I_{01\tau_{p+1}, \tau_p}^{*(i_1 i_2)} \right) - \\ & \left. - G_{i_2}G_{i_1}\bar{A}I_{10\tau_{p+1}, \tau_p}^{*(i_1 i_2)} \right) \mathbf{y}_{\tau_p}, \end{aligned} \quad (15.22)$$

где

$$\begin{aligned} I_{l_1 \dots l_k \tau_{p+1}, \tau_p}^{*(i_1 \dots i_k)} &= \int_{\tau_p}^{*\tau_{p+1}} (\tau_p - t_k)^{l_k} \dots \int_{\tau_p}^{*t_2} (\tau_p - t_1)^{l_1} d\mathbf{w}_{t_1}^{(i_1)} \dots d\mathbf{w}_{t_k}^{(i_k)}; \\ R_p &= \sum_{i=1}^m G_i \left(\Delta I_{0\tau_{p+1}, \tau_p}^{*(i)} + I_{1\tau_{p+1}, \tau_p}^{*(i)} \right), \quad S_p = \sum_{i=1}^m G_i I_{0\tau_{p+1}, \tau_p}^{*(i)}. \end{aligned}$$

В [87] приведены также так называемые неявные приближенные фильтры, основанные на неявных сильных численных схемах. Там же отмечается, что эти фильтры ведут себя ”лучше”, чем фильтры, основанные на явных сильных численных методах, если интенсивность шумов в наблюдениях достаточно высока.

В заключение рассмотрим численные эксперименты, которые аналогичны соответствующим численным экспериментам из [86, 87] и иллюстрируют описанный подход.

Пусть $\eta_t, t \in [0, 2]$, — так называемый телеграфный процесс, являющийся марковской цепью с непрерывным временем, пространством состояний $Y = \{-1, 1\}$ и матрицей интенсивности

$$A = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

Рассмотрим одну из возможных реализаций процесса η_t , $t \in [0, 2]$, вида

$$\eta_t = \begin{cases} 1 & \text{при } t \in [0, 1), \\ -1 & \text{при } t \in [1, 2]. \end{cases} \quad (15.23)$$

Пусть также

$$\mathbf{a}(\eta_t) = \begin{cases} 10 & \text{при } \eta_t = 1, \\ 2 & \text{при } \eta_t = -1, \end{cases} \quad g(x) \equiv x. \quad (15.24)$$

В рамках сделанных предположений приближенный фильтр (15.17) имеет вид

$$\hat{F}_{\tau_p, g}^{\Delta} = \frac{\mathbf{y}_{\tau_p}^{(2)} - \mathbf{y}_{\tau_p}^{(1)}}{\mathbf{y}_{\tau_p}^{(2)} + \mathbf{y}_{\tau_p}^{(1)}}, \quad p = 0, 1, \dots, N. \quad (15.25)$$

Нетрудно видеть, что если существует $j \in \{0, 1, \dots, N\}$ такое, что $\tau_j = 1$, то с учетом (15.24) с вероятностью 1 получаем

$$I_{0\tau_{p+1}, \tau_p}^{*(1)} = \mathbf{a}(\eta_{\tau_p})\Delta + \bar{I}_{0\tau_{p+1}, \tau_p}^{*(1)}, \quad (15.26)$$

$$I_{1\tau_{p+1}, \tau_p}^{*(1)} = -\mathbf{a}(\eta_{\tau_p})\frac{\Delta^2}{2} + \bar{I}_{1\tau_{p+1}, \tau_p}^{*(1)}, \quad (15.27)$$

$$I_{01\tau_{p+1}, \tau_p}^{*(11)} = \bar{I}_{01\tau_{p+1}, \tau_p}^{*(11)} - \mathbf{a}(\eta_{\tau_p}) \left(\frac{\Delta^2}{2} \bar{I}_{0\tau_{p+1}, \tau_p}^{*(1)} + \frac{1}{2} \bar{I}_{2\tau_{p+1}, \tau_p}^{*(1)} \right) - \mathbf{a}^2(\eta_{\tau_p}) \frac{\Delta^3}{3}, \quad (15.28)$$

где $\tau_p = p\Delta$, $p = 0, 1, \dots, N$;

$$\bar{I}_{l_1 \dots l_k \tau_{p+1}, \tau_p}^{*(i_1 \dots i_k)} = \int_{\tau_p}^{*\tau_{p+1}} (\tau_p - t_k)^{l_k} \dots \int_{\tau_p}^{*t_2} (\tau_p - t_1)^{l_1} d\mathbf{f}_{t_1}^{(i_1)} \dots d\mathbf{f}_{t_k}^{(i_k)}.$$

Кроме того, с вероятностью 1

$$I_{00\tau_{p+1}, \tau_p}^{*(11)} = \frac{1}{2} \left(I_{0\tau_{p+1}, \tau_p}^{*(1)} \right)^2, \quad (15.29)$$

$$I_{10\tau_{p+1}, \tau_p}^{*(11)} = I_{0\tau_{p+1}, \tau_p}^{*(1)} I_{1\tau_{p+1}, \tau_p}^{*(1)} - I_{01\tau_{p+1}, \tau_p}^{*(11)}. \quad (15.30)$$

Для аппроксимации повторных стохастических интегралов $\bar{I}_{0\tau_{p+1}, \tau_p}^{*(1)}$, $\bar{I}_{1\tau_{p+1}, \tau_p}^{*(1)}$, $\bar{I}_{2\tau_{p+1}, \tau_p}^{*(1)}$, $\bar{I}_{01\tau_{p+1}, \tau_p}^{*(11)}$ воспользуемся формулами, полученными в главе 6:

$$\bar{I}_{0\tau_{p+1}, \tau_p}^{*(1)} = \sqrt{\Delta} \zeta_0, \quad (15.31)$$

$$\bar{I}_{1_{\tau_{p+1}, \tau_p}}^{*(1)} = -\frac{\Delta^{3/2}}{2} \left(\zeta_0 + \frac{1}{\sqrt{3}} \zeta_1 \right), \quad (15.32)$$

$$\bar{I}_{2_{\tau_{p+1}, \tau_p}}^{*(1)} = \frac{\Delta^{5/2}}{3} \left(\zeta_0 + \frac{\sqrt{3}}{2} \zeta_1 + \frac{1}{2\sqrt{5}} \zeta_2 \right), \quad (15.33)$$

$$\begin{aligned} \bar{I}_{01_{\tau_{p+1}, \tau_p}}^{*(11)q} = & -\frac{\Delta^2}{4} \left(\frac{4}{3} (\zeta_0)^2 + \frac{1}{\sqrt{3}} \zeta_0 \zeta_1 + \frac{1}{3\sqrt{5}} \zeta_0 \zeta_2 + \right. \\ & \left. + \sum_{i=1}^q \left(\frac{\zeta_i \zeta_{i+2}}{\sqrt{(2i+1)(2i+5)(2i+3)}} - \frac{(\zeta_i)^2}{(2i-1)(2i+3)} \right) \right), \end{aligned} \quad (15.34)$$

где $\zeta_{j,p} \stackrel{\text{def}}{=} \zeta_j$, $j = 0, 1, \dots, q+2$, $p = 0, 1, \dots, N$, — независимые в совокупности стандартные гауссовские случайные величины.

Численный эксперимент 15.3. Смоделировать реализацию наблюдаемого процесса $\mathbf{w}_t$, $t \in [0, 2]$, вида (15.14) с учетом (15.23), (15.24) по формуле

$$\mathbf{w}_{\tau_{p+1}} = \mathbf{w}_{\tau_p} + \mathbf{a}(\eta_{\tau_p}) \Delta + \sqrt{\Delta} \zeta_0, \quad \mathbf{w}_0 = 0,$$

где $\tau_p = p\Delta$, $p = 0, 1, \dots, 2000$; $\Delta = 10^{-3}$; $\zeta_{0,p} \stackrel{\text{def}}{=} \zeta_0$ — независимые стандартные гауссовские случайные величины. Изобразить графически результат численного моделирования (рис. 15.5).

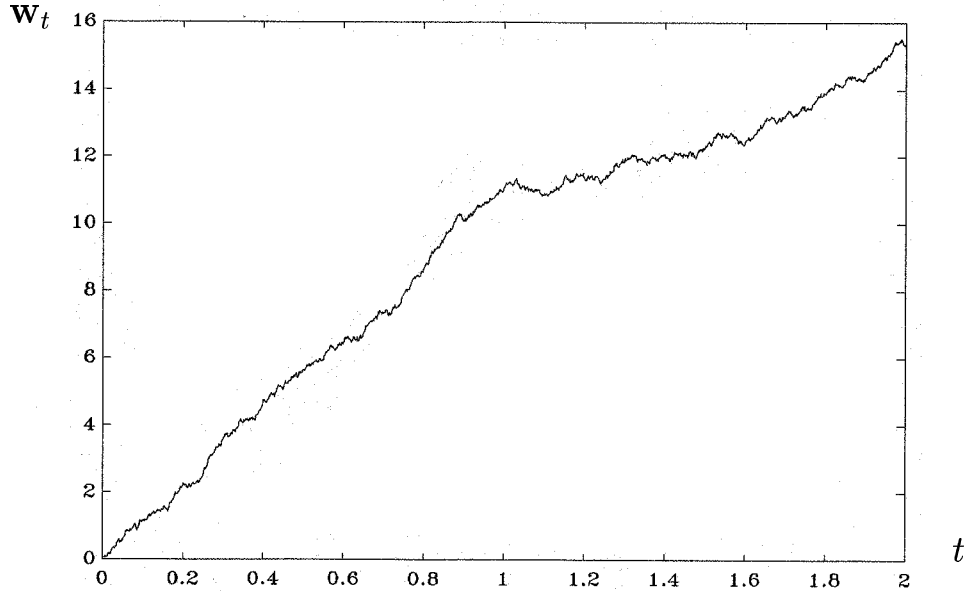


Рис.15.5. Результат численного эксперимента 15.3.

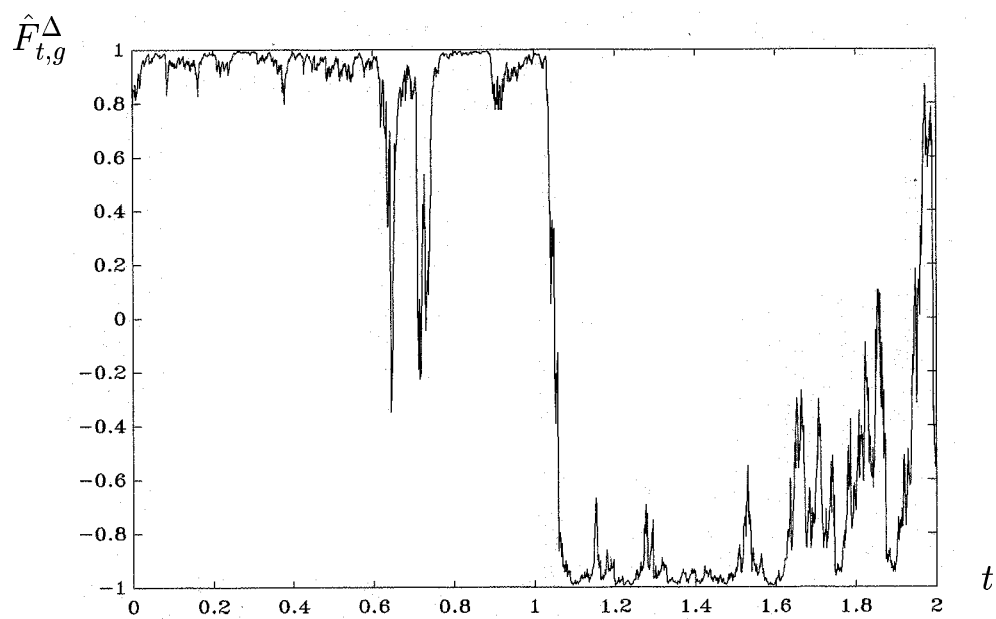


Рис.15.6. Результат численного эксперимента 15.4
(метод Эйлера).

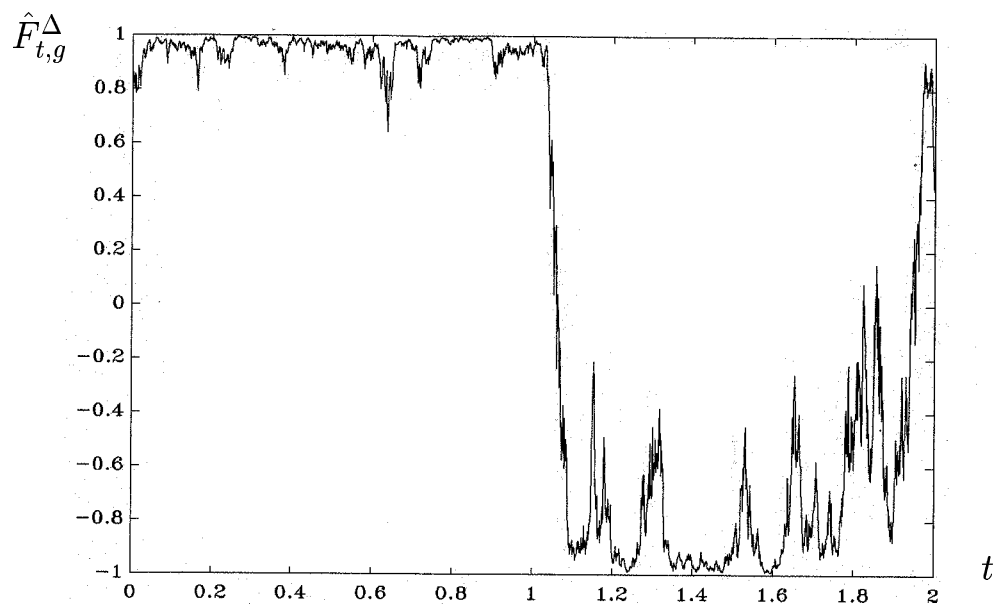


Рис.15.7. Результат численного эксперимента 15.4
(метод Г. Н. Мильштейна).

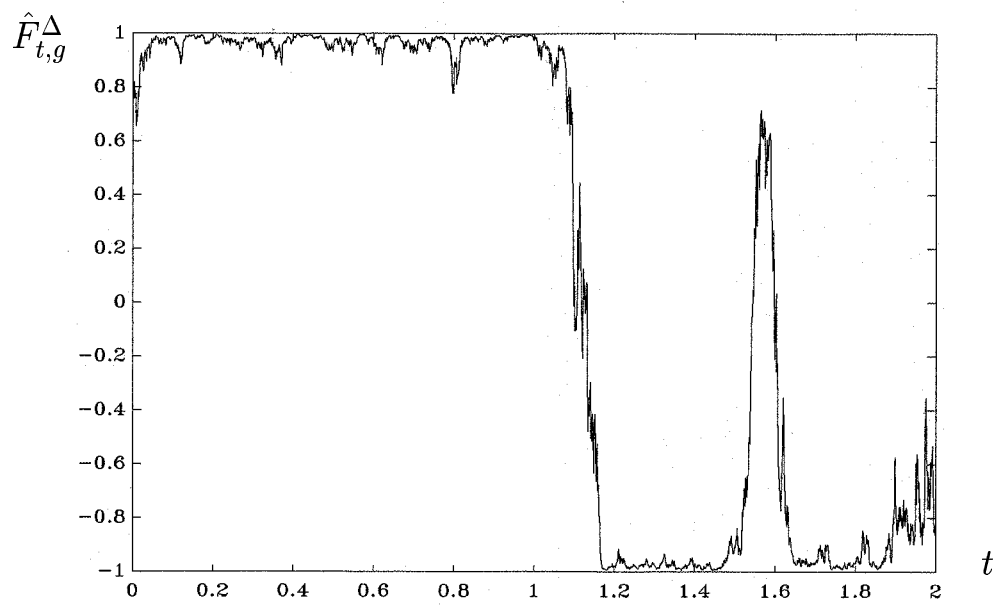


Рис.15.8. Результат численного эксперимента 15.4
(метод порядка точности 1.5).

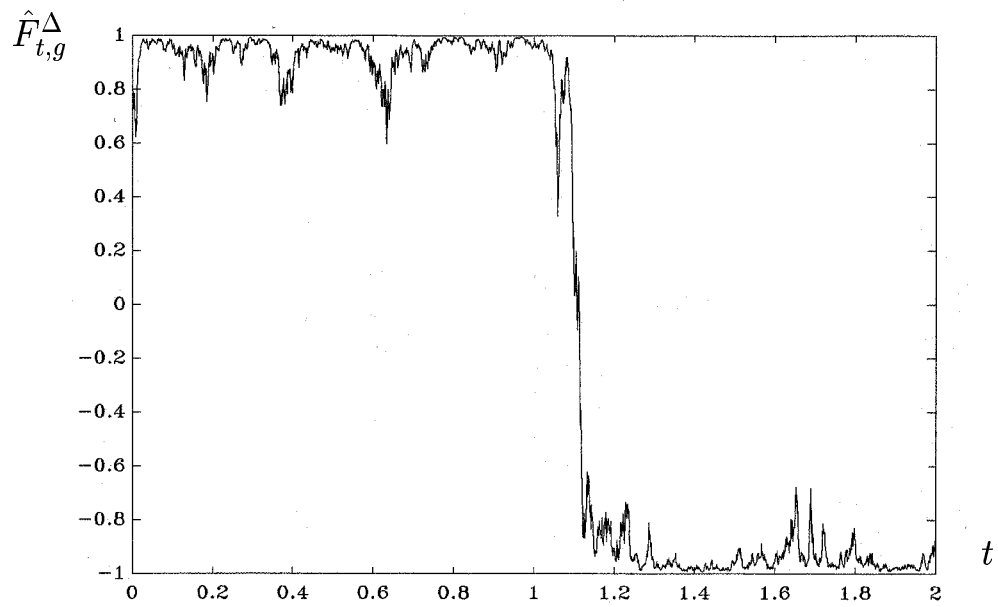


Рис.15.9. Результат численного эксперимента 15.5
(метод порядка точности 2.0), $q = 60$.

Численный эксперимент 15.4. Смоделировать приближенный фильтр (15.25) с учетом (15.23), (15.24) при $\tau_p = p\Delta$, $p = 0, 1, \dots, 2000$, $\Delta = 10^{-3}$, $p(0) = (0.2 \ 0.8)^\top$, применяя формулу (15.26) и численные методы (15.18)–(15.20). Во всех трех случаях использовать ту же реализацию последовательности случайных величин $\zeta_{0,p}$, $p = 0, 1, \dots, 2000$, что и в численном эксперименте 15.3. Изобразить графически результат численного моделирования (рис. 15.6–15.8).

Численный эксперимент 15.5. Повторить численный эксперимент 15.4 численным методом (15.22). При моделировании стохастических интегралов следует использовать формулы (15.26)–(15.34).

Последовательность случайных величин $\zeta_{0,p}$, $p = 0, 1, \dots, 2000$, выбирать ту же, что и в численном эксперименте 15.3. В (15.34) положить $q = 60$. Результат численного моделирования изобразить графически (рис. 15.9).

15.3 Линейная фильтрация Калмана–Бьюси

Рассмотрим задачу фильтрации в постановке раздела 2.4.1 и будем предполагать, что $k, l, m, n = 2$ и

$$A = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}, \quad B = bI_2, \quad (15.35)$$

$$H = I_2, \quad \Sigma = \sigma I_2, \quad (15.36)$$

где I_2 — единичная (2×2) –матрица.

Численная реализация оптимальной в среднеквадратическом смысле оценки $\hat{\mathbf{x}}_t$ процесса $\mathbf{x}_t$ на основе наблюдений $\mathbf{y}_s$, $0 \leq s \leq t$, полученной по методу Калмана–Бьюси, может осуществляться с помощью численного интегрирования стохастического дифференциального уравнения Ито сильными численными методами.

Численный эксперимент 15.6. Смоделировать решение стохастического дифференциального уравнения Ито вида

$$d \begin{bmatrix} \mathbf{e}_t \\ \hat{\mathbf{x}}_t \\ \mathbf{x}_t \\ \mathbf{y}_t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A - R(t)H^\top (\Sigma\Sigma^\top)^{-1} H & O_2 & O_2 & O_2 \\ R(t)H^\top (\Sigma\Sigma^\top)^{-1} H & A & O_2 & O_2 \\ O_2 & O_2 & A & O_2 \\ O_2 & O_2 & H & O_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{e}_t \\ \hat{\mathbf{x}}_t \\ \mathbf{x}_t \\ \mathbf{y}_t \end{bmatrix} dt +$$

$$+ \begin{bmatrix} B & -R(t)H^T(\Sigma\Sigma^T)^{-1}\Sigma \\ O_2 & R(t)H^T(\Sigma\Sigma^T)^{-1}\Sigma \\ B & O_2 \\ O_2 & \Sigma \end{bmatrix} d \begin{bmatrix} \mathbf{w}_t \\ \mathbf{f}_t \end{bmatrix},$$

где $R(t)$ определяется из уравнения Риккати (2.38), на промежутке времени $[0, 5]$ с шагом $\Delta = 10^{-3}$ с помощью явного сильного численного метода Г.Н.Мильштейна при исходных данных (15.35), (15.36) и $R(0) = O_2$, $\mathbf{e}_0 = \mathbf{y}_0 = (0 \ 0)^T$, $\mathbf{x}_0 = \hat{\mathbf{x}}_0 = (2 \ 2)^T$, $\sigma = b = 0.07$. Здесь O_2 — нулевая (2×2) –матрица. Значения $R(k\Delta)$; $k = 1, \dots, 5000$ получить с помощью решения уравнения Риккати (2.38) явным численным методом порядка точности 2.0 (численный метод, основанный на формуле Тейлора). Результат численного моделирования изобразить графически (рис.15.10, 15.11). Повторить вычисления при $\sigma = b = 0.14$ (рис.15.12, 15.13).

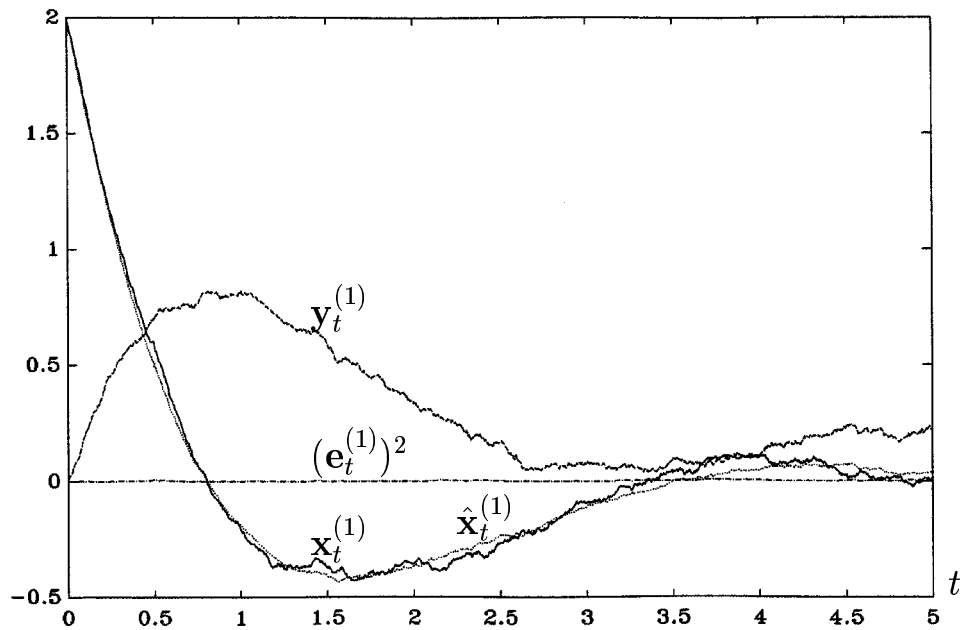


Рис.5.10. Результат численного эксперимента 15.6.

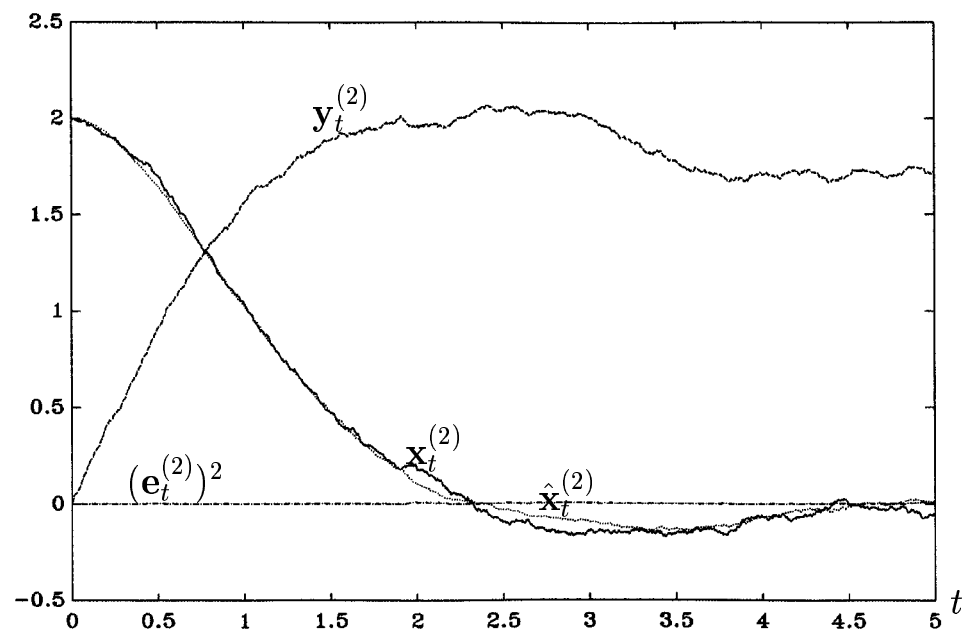


Рис.5.11. Результат численного эксперимента 15.6.

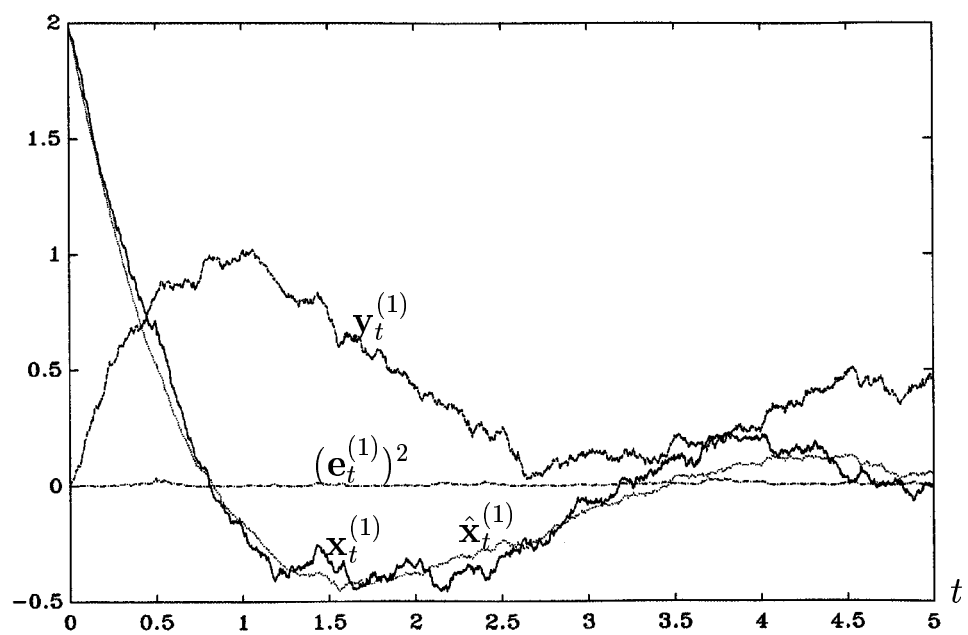


Рис.5.12. Результат численного эксперимента 15.6.

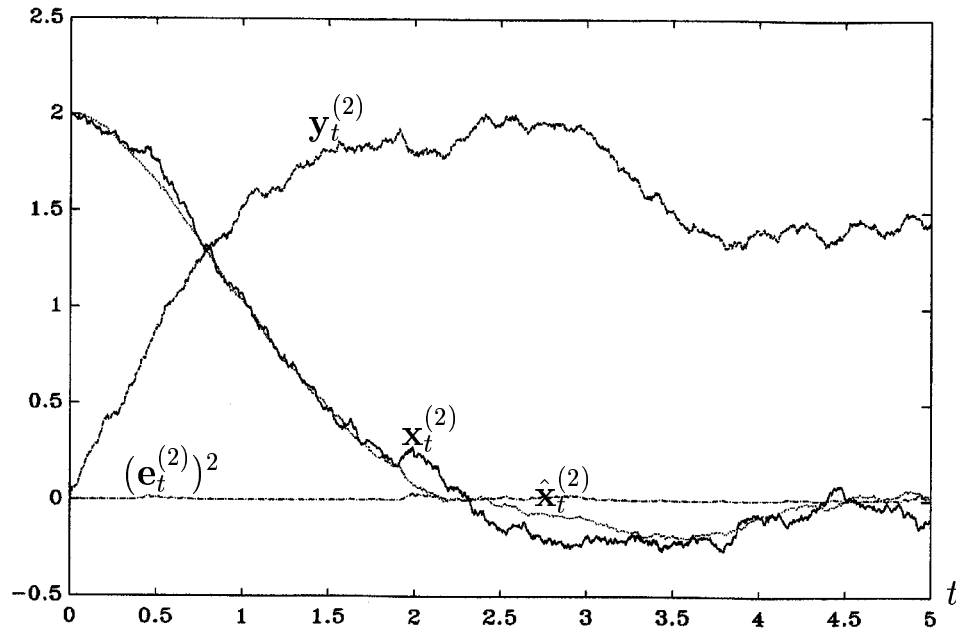


Рис.15.13. Результат численного эксперимента 15.6.

15.4 Нелинейная оптимальная фильтрация

В монографии [8] рассмотрена задача оптимальной нелинейной фильтрации частично наблюдаемых диффузионных процессов, описываемых нелинейными системами стохастических дифференциальных уравнений Ито. Рассмотрим частный случай данной задачи.

Пусть двухмерный случайный процесс (x_t, y_t) , $t \in [0, T]$ описывается системой стохастических дифференциальных уравнений Ито вида:

$$dx_t = -x_t dt + \sigma_1 \sin(y_t) df_t^{(1)} + \sigma_2 \cos(y_t) df_t^{(2)}, \quad (15.37)$$

$$dy_t = x_t dt + c df_t^{(2)}, \quad (15.38)$$

где σ_1, σ_2, c — постоянные; $f_t^{(1)}, f_t^{(2)}$ — независимые стандартные винеровские процессы; y_t — наблюдаемый, а x_t — ненаблюдаемый процесс, который подлежит оцениванию на основании наблюдения y_s , $0 \leq s \leq t$.

Для системы (15.37), (15.38) выполнены все условия теоремы ([8], С. 474). Тогда, согласно данной теореме оптимальная в среднеквадратическом смысле оценка $\hat{x}_t = M\{x_t | \mathcal{F}_t^y\}$ процесса x_t по y_s , $0 \leq s \leq t$ и процесс $\gamma_t = M\{(x_t - \hat{x}_t)^2 | \mathcal{F}_t^y\}$ являются единственным непрерывным

с вероятностью 1 и $\mathcal{F}_t^y$ -измеримым при каждом t решением системы стохастических дифференциальных уравнений Ито вида:

$$d\hat{x}_t = \left(-\hat{x}_t + \frac{c\sigma_2 \cos(y_t) + \gamma_t}{c^2} (x_t - \hat{x}_t) \right) dt + \frac{c\sigma_2 \cos(y_t) + \gamma_t}{c} d\mathbf{f}_t^{(2)}, \quad (15.39)$$

$$d\gamma_t = \left(-2\gamma_t + \sigma_1^2 \sin^2(y_t) + \sigma_2^2 \cos^2(y_t) - \frac{(c\sigma_2 \cos(y_t) + \gamma_t)^2}{c^2} \right) dt \quad (15.40)$$

с начальными условиями $\hat{x}_0 = \mathbf{M}\{x_0|y_0\}$, $\gamma_0 = \mathbf{M}\{(x_0 - \hat{x}_0)^2|y_0\}$. Здесь $\mathcal{F}_t^y$ — σ -алгебра, порожденная y_s , $0 \leq s \leq t$.

Численная реализация оценки $\hat{x}_t$ может быть осуществлена с помощью численного интегрирования системы (15.37)–(15.40) сильными численными методами для стохастических дифференциальных уравнений Ито.

Численный эксперимент 15.7. Смоделировать решение системы (15.37)–(15.40) при $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma$ с помощью явного сильного численного метода Г.Н. Мильштейна по формулам:

$$\begin{aligned} \mathbf{y}_{p+1}^{(1)} &= (1 - \Delta) \mathbf{y}_p^{(1)} + \sigma \sin(\mathbf{y}_p^{(2)}) \hat{I}_{0_{\tau_{p+1}, \tau_p}}^{(1)} + \sigma \cos(\mathbf{y}_p^{(2)}) \hat{I}_{0_{\tau_{p+1}, \tau_p}}^{(2)} - \\ &\quad - c\sigma \sin(\mathbf{y}_p^{(2)}) \hat{I}_{00_{\tau_{p+1}, \tau_p}}^{(22)} + c\sigma \cos(\mathbf{y}_p^{(2)}) \hat{I}_{00_{\tau_{p+1}, \tau_p}}^{(21)}, \\ \mathbf{y}_{p+1}^{(2)} &= \mathbf{y}_p^{(2)} + \mathbf{y}_p^{(1)} \Delta + c \hat{I}_{0_{\tau_{p+1}, \tau_p}}^{(2)}, \\ \mathbf{y}_{p+1}^{(3)} &= \mathbf{y}_p^{(3)} + \left(-\mathbf{y}_p^{(3)} + \left(\frac{\sigma}{c} \cos(\mathbf{y}_p^{(2)}) + \frac{\mathbf{y}_p^{(4)}}{c^2} \right) (\mathbf{y}_p^{(1)} - \mathbf{y}_p^{(3)}) \right) \Delta + \\ &\quad + \left(\sigma \cos(\mathbf{y}_p^{(2)}) + \frac{\mathbf{y}_p^{(4)}}{c} \right) \hat{I}_{0_{\tau_{p+1}, \tau_p}}^{(2)} - c\sigma \sin(\mathbf{y}_p^{(2)}) \hat{I}_{00_{\tau_{p+1}, \tau_p}}^{(22)}, \\ \mathbf{y}_{p+1}^{(4)} &= \mathbf{y}_p^{(4)} + \left(-2\mathbf{y}_p^{(4)} + \sigma^2 - \frac{(c\sigma \cos(\mathbf{y}_p^{(2)}) + \mathbf{y}_p^{(4)})^2}{c^2} \right) \Delta \end{aligned}$$

при $\Delta = 5 \cdot 10^{-3}$; $p = 0, 1, \dots, 2400$; $\sigma = c = 0.05$; $\mathbf{y}_0^{(1)} = \mathbf{y}_0^{(3)} = 1$; $\mathbf{y}_0^{(2)} = \mathbf{y}_0^{(4)} = 0$. Здесь $\mathbf{y}_p^{(1)}$, $\mathbf{y}_p^{(2)}$, $\mathbf{y}_p^{(3)}$, $\mathbf{y}_p^{(4)}$ — приближенные значения x_{τ_p} , y_{τ_p} , $\hat{x}_{\tau_p}$, γ_{τ_p} соответственно; $\tau_p = p\Delta$. Для моделирования стохастических интегралов Ито использовать формулы:

$$\hat{I}_{0_{\tau_{p+1}, \tau_p}}^{(1)} = \sqrt{\Delta} \zeta_0^{(1)}, \quad \hat{I}_{0_{\tau_{p+1}, \tau_p}}^{(2)} = \sqrt{\Delta} \zeta_0^{(2)}, \quad \hat{I}_{00_{\tau_{p+1}, \tau_p}}^{(22)} = \frac{\Delta}{2} \left((\zeta_0^{(1)})^2 - 1 \right),$$

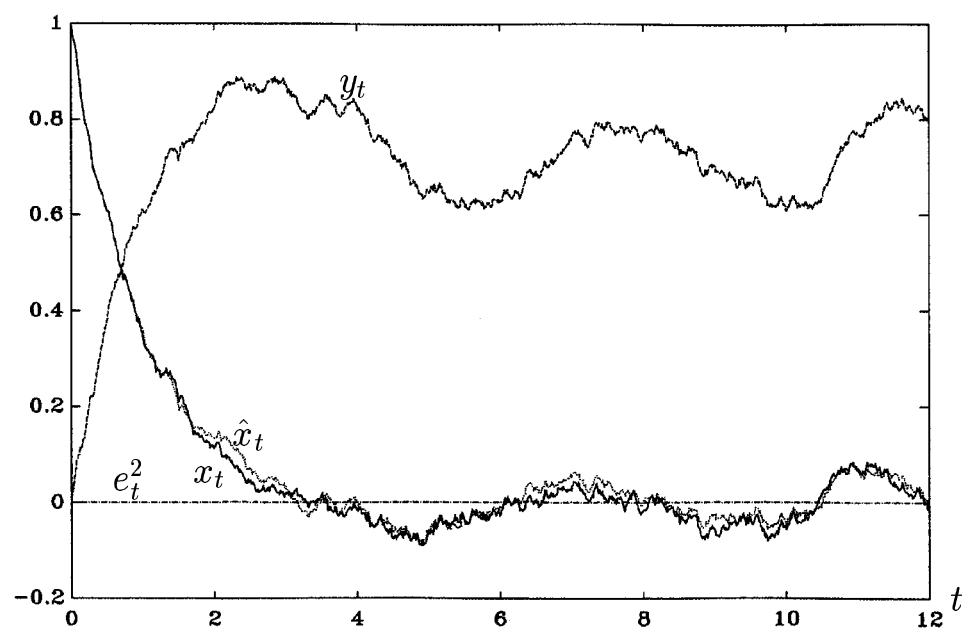


Рис.15.14. Результат численного эксперимента 15.7.

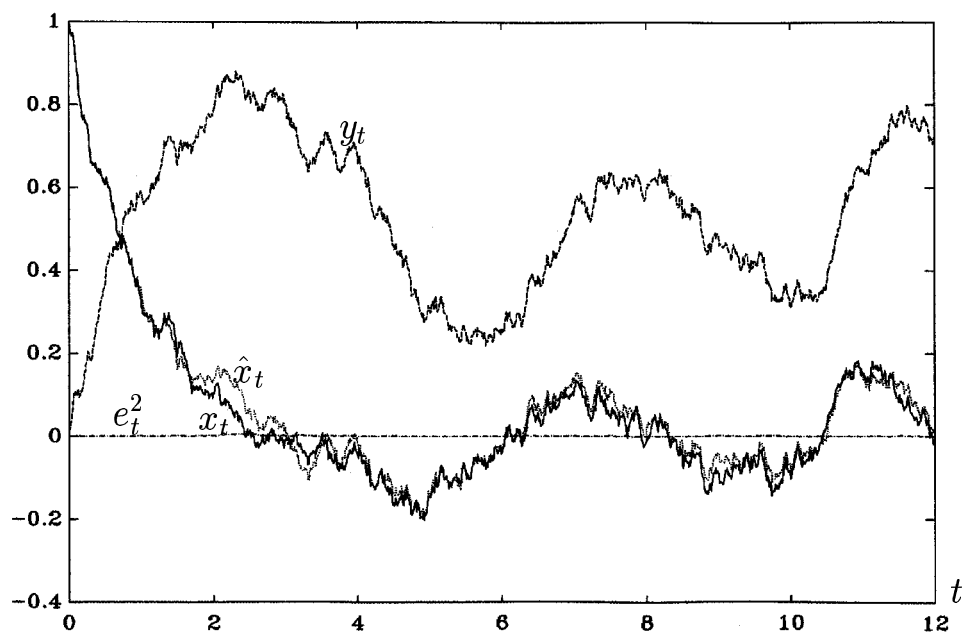


Рис.15.15. Результат численного эксперимента 15.17.

$$\hat{I}_{00_{\tau_{p+1}, \tau_p}}^{(21)} = \frac{\Delta}{2} \left[\zeta_0^{(1)} \zeta_0^{(2)} + \sum_{r=1}^{20} \frac{1}{\sqrt{4r^2 - 1}} \left(\zeta_{r-1}^{(2)} \zeta_r^{(1)} - \zeta_r^{(2)} \zeta_{r-1}^{(1)} \right) \right],$$

где $\zeta_{j,p}^{(i)} \stackrel{\text{def}}{=} \zeta_j^{(i)}$; $j = 0, 1, \dots, 20$; $i = 1, 2$; $p = 0, 1, \dots, 2399$ — независимые в совокупности стандартные гауссовские случайные величины. Изобразить результат графически (рис.15.14). Повторить численный эксперимент при $\sigma = c = 0.1$ (рис.15.15).

15.5 Оптимальное стохастическое управление по неполным данным

Рассмотрим задачу оптимального стохастического управления частично наблюдаемым диффузионным процессом (см. разд. 2.4.2, а также [8]), описываемым линейной системой стохастических дифференциальных уравнений Ито. Рассмотрим частный случай данной задачи.

Пусть функционал потерь имеет вид:

$$V(\mathbf{u}, T) = \mathbb{M} \left\{ \mathbf{x}_T^\top \bar{H} \mathbf{x}_T + \int_0^T (\mathbf{x}_t^\top Q \mathbf{x}_t + \mathbf{u}_t^\top \bar{R} \mathbf{u}_t) dt \right\}, \quad (15.41)$$

где $\mathbf{x}_t \in \mathbb{R}^2$ — недоступный наблюдению процесс, описываемый уравнением вида:

$$d\mathbf{x}_t = (A\mathbf{x}_t + \mathbf{u}_t) dt + B d\mathbf{w}_t; \quad (15.42)$$

$\mathbf{u}_t \in \mathbb{R}^2$ — управляющее воздействие; $A, B, Q, \bar{H}, \bar{R}$ — числовые (2×2) -матрицы; $\mathbf{w}_t$ — двухмерный стандартный винеровский процесс с независимыми компонентами; $\mathbf{x}_0 \in \mathbb{R}^2$ — неслучайный вектор-столбец начальных условий.

Предположим, что наблюдению доступен процесс $\mathbf{y}_t \in \mathbb{R}^2$, задаваемый в виде:

$$d\mathbf{y}_t = H\mathbf{x}_t dt + \Sigma d\mathbf{f}_t, \quad (15.43)$$

где H, Σ — числовые (2×2) -матрицы, $\mathbf{f}_t$ — двухмерный стандартный винеровский процесс с независимыми компонентами, независимый с $\mathbf{w}_t$. Предполагается также, что матрица $\Sigma \Sigma^\top$ невырождена, а измеримый процесс $\mathbf{u}_t = \mathbf{u}(\mathbf{y}_t, t)$ — $\mathcal{F}_t^y$ -измерим, причем:

$$\mathbb{M} \left\{ \int_0^T \sum_{i=1}^2 (\mathbf{u}^{(i)}(\mathbf{y}_t, t))^4 dt \right\} < \infty; \quad (15.44)$$

$\mathcal{F}_t^y$ — σ -алгебра, порожденная y_s , $0 \leq s \leq t$.

Согласно теореме ([8], С. 609) оптимальное стохастическое управление $\tilde{\mathbf{u}}_t$, доставляющее инфимум функционалу $V(\mathbf{u}, T)$ по всем управлениям, для которых система (15.42), (15.43) имеет единственное сильное решение и выполнено условие (15.44), имеет вид:

$$\tilde{\mathbf{u}}_t = -\bar{R}^{-1}P(t)\hat{\mathbf{x}}_t, \quad (15.45)$$

где

$$\begin{aligned} d\hat{\mathbf{x}}_t &= (A\hat{\mathbf{x}}_t + \tilde{\mathbf{u}}_t)dt + R(t)H^\top (\Sigma\Sigma^\top)^{-1} H\mathbf{e}_t dt + \\ &+ R(t)H^\top (\Sigma\Sigma^\top)^{-1} \Sigma d\mathbf{f}_t, \end{aligned} \quad (15.46)$$

$$\begin{aligned} d\mathbf{e}_t &= \left(A - R(t)H^\top (\Sigma\Sigma^\top)^{-1} H \right) \mathbf{e}_t dt + B d\mathbf{w}_t - \\ &- R(t)H^\top (\Sigma\Sigma^\top)^{-1} \Sigma d\mathbf{f}_t, \end{aligned} \quad (15.47)$$

$$\frac{dR(t)}{dt} = AR(t) + R(t)A^\top + BB^\top - R(t)H^\top (\Sigma\Sigma^\top)^{-1} HR(t), \quad (15.48)$$

$$-\frac{dP(t)}{dt} = A^\top P(t) + P(t)A + Q - P(t)\bar{R}^{-1}P(t); \quad (15.49)$$

$$R(0) = M\{\mathbf{e}_0\mathbf{e}_0^\top\}, P(T) = \bar{H}, \hat{\mathbf{x}}_0 = M\{\mathbf{x}_0\} = \mathbf{x}_0, \mathbf{e}_t = \mathbf{x}_t - \hat{\mathbf{x}}_t.$$

Для численной реализации закона управления (15.45) и оценки $\hat{\mathbf{x}}_t$ можно воспользоваться сильными численными методами для системы стохастических дифференциальных уравнений Ито (15.42), (15.43), (15.46), (15.47).

Численный эксперимент 15.8. Смоделировать численно решение системы стохастических дифференциальных уравнений Ито (15.42), (15.43), (15.46), (15.47) (в (15.42) положить $\mathbf{u}_t = \tilde{\mathbf{u}}_t$) с помощью явного сильного численного метода Г.Н.Мильштейна на промежутке времени $[0, 5]$ с шагом $\Delta = 10^{-3}$ при условии (15.35), (15.36) и $\sigma = b = 0.07$, $\bar{R} = I_2$, $\bar{H} = 10I_2$, $Q = 10I_2$, $R(0) = O_2$, $\mathbf{x}_0 = \hat{\mathbf{x}}_0 = (2 \ 2)^\top$, $\mathbf{e}_0 = \mathbf{y}_0 = (0 \ 0)^\top$. Здесь I_2, O_2 — единичная и нулевая (2×2) -матрицы. Значения $R(k\Delta)$, $P(k\Delta)$; $k = 0, 1, \dots, 5000$ получить с помощью решения уравнений Риккати (15.48), (15.49) явным численным методом порядка точности 2.0 (численный метод, основанный на формуле Тейлора). Для вычисления $\tilde{\mathbf{u}}_{k\Delta}$ использовать формулу (15.45). Результат численного моделирования изобразить графически (рис.15.16, 15.17). При этом на графики выводить каждую вторую точку. Повторить вычисления при $\sigma = b = 0.14$ (рис.15.18, 15.19).

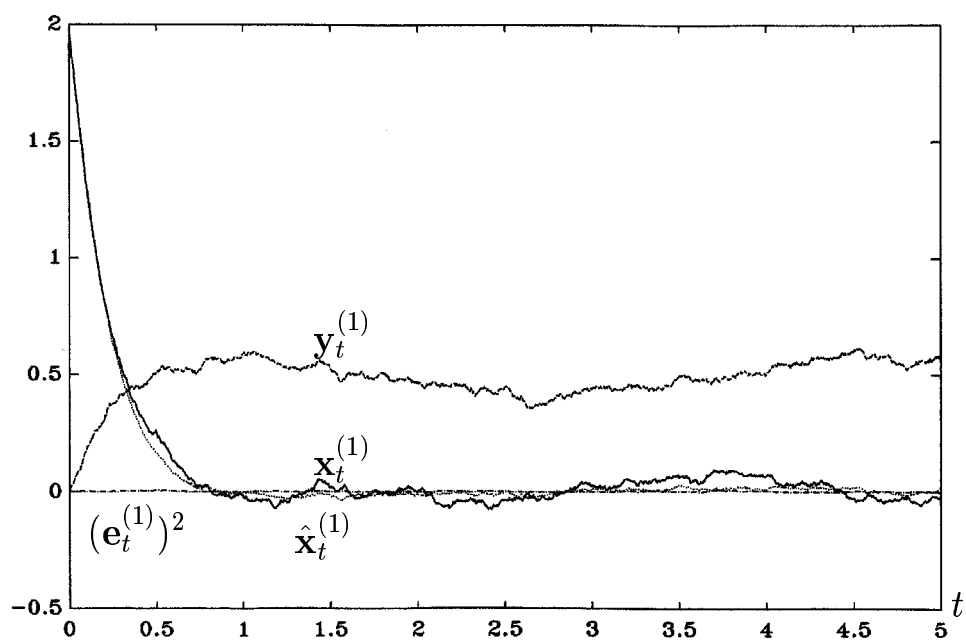


Рис.15.16. Результат численного эксперимента 15.8

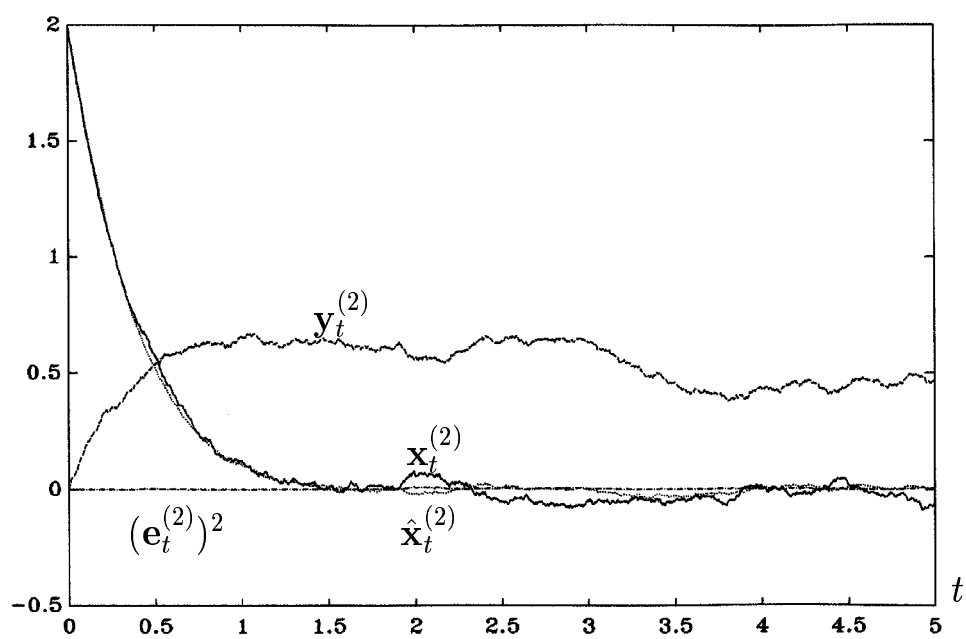


Рис.15.17. Результат численного эксперимента 15.8

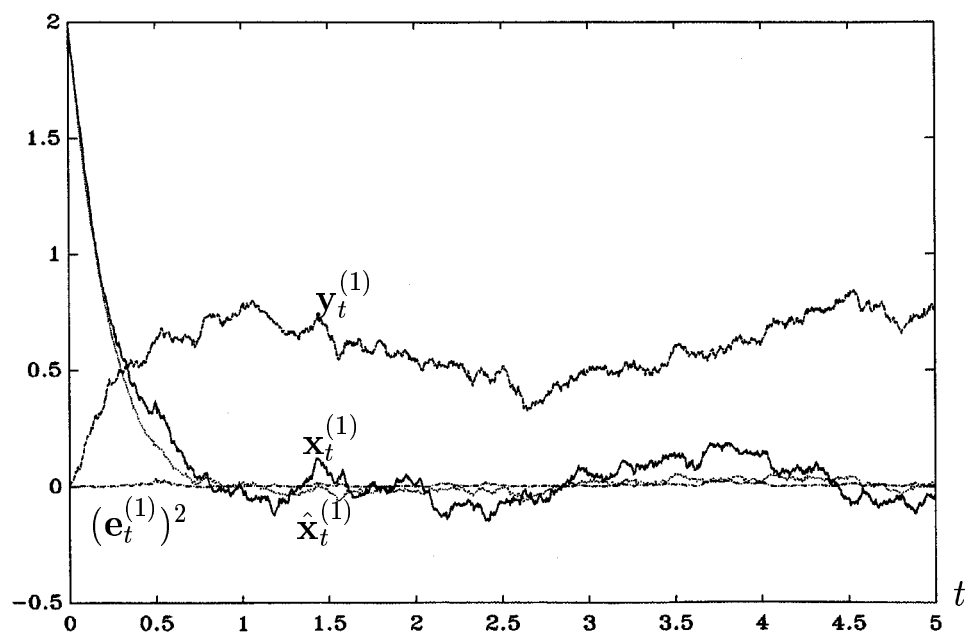


Рис.15.18. Результат численного эксперимента 15.8.

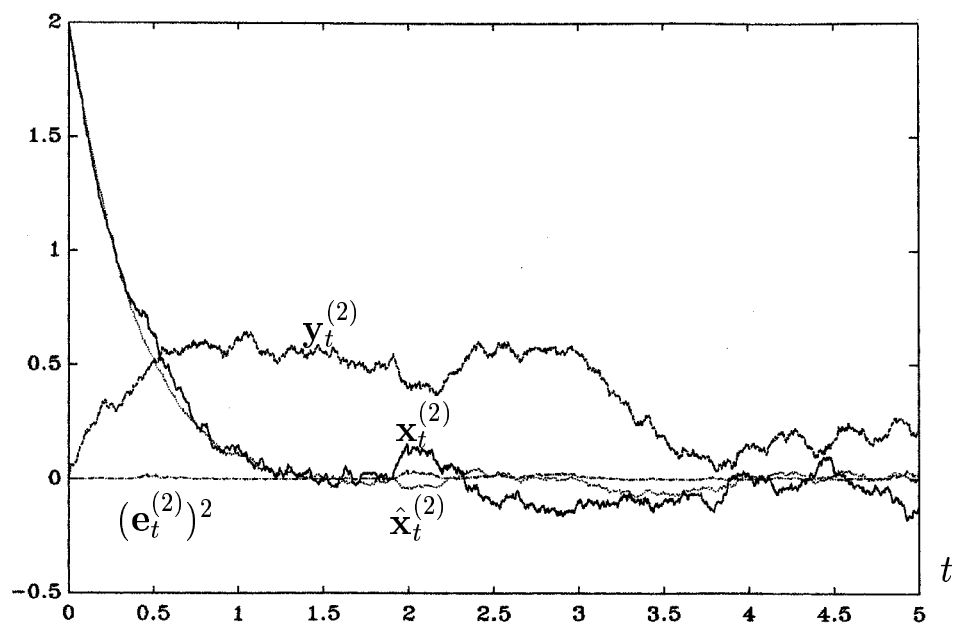


Рис.15.19. Результат численного эксперимента 15.8.

Сравнивая рис.15.10–15.13 и рис.15.16–15.19 можно увидеть, что оптимальное стохастическое управление ”прижимает” процесс $\mathbf{x}_t$ к горизонтальной оси так, чтобы минимизировался функционал потерь (15.41) (рис.15.16–15.19). Рис.15.10–15.13 соответствуют случаю отсутствия управления ($\tilde{\mathbf{u}}_t = 0$).

15.6 Стохастическое оптимальное управление механической системой

Рассмотрим механическую систему, изображенную на рис.15.20. Система дифференциальных уравнений, описывающая динамику данной механической системы имеет вид:

$$\begin{aligned} m_1 \ddot{x}_1 &= -c_1 x_1 + c_2(x_2 - x_1) + f_t + u_t, \\ m_2 \ddot{x}_2 &= -c_2(x_2 - x_1) \end{aligned} \quad (15.50)$$

где f_t — силовое воздействие на массу m_1 , являющееся белым гауссовским шумом, а u_t — управляющее воздействие также действующее на массу m_1 ; $\ddot{x}_1$, $\ddot{x}_2$ — ускорения масс m_1 и m_2 соответственно.

Запишем систему (15.50) в форме стохастического дифференциального уравнения Ито вида:

$$d\mathbf{x}_t = (A\mathbf{x}_t + Mu_t) dt + Bdf_t, \quad (15.51)$$

где

$$\mathbf{x}_t = \begin{pmatrix} \mathbf{x}_t^{(1)} \\ \mathbf{x}_t^{(2)} \\ \mathbf{x}_t^{(3)} \\ \mathbf{x}_t^{(4)} \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\frac{c_1+c_2}{m_1} & 0 & \frac{c_2}{m_1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ \frac{c_2}{m_2} & 0 & -\frac{c_2}{m_2} & 0 \end{pmatrix}, \quad M = B = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{m_1} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

f_t — стандартный винеровский процесс; $\mathbf{x}_t^{(1)} \stackrel{\text{def}}{=} x_1$, $\mathbf{x}_t^{(2)} \stackrel{\text{def}}{=} \dot{x}_1$, $\mathbf{x}_t^{(3)} \stackrel{\text{def}}{=} x_2$, $\mathbf{x}_t^{(4)} \stackrel{\text{def}}{=} \dot{x}_2$; здесь $\dot{x}_1$, $\dot{x}_2$ — скорости масс m_1 , m_2 .

Стохастическое управление u_t , входящее в (15.51), выбирается так, чтобы доставить инфимум функционалу потерь вида:

$$V(u, T, \bar{\mathbf{x}}) = M \left\{ \mathbf{x}_T^T R \mathbf{x}_T + \int_0^T (\mathbf{x}_t^T C \mathbf{x}_t + u_t G u_t) dt \mid \mathbf{x}_0 = \bar{\mathbf{x}} \right\}, \quad (15.52)$$

где

$$R = \begin{pmatrix} \alpha & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} \beta & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad G = \gamma;$$

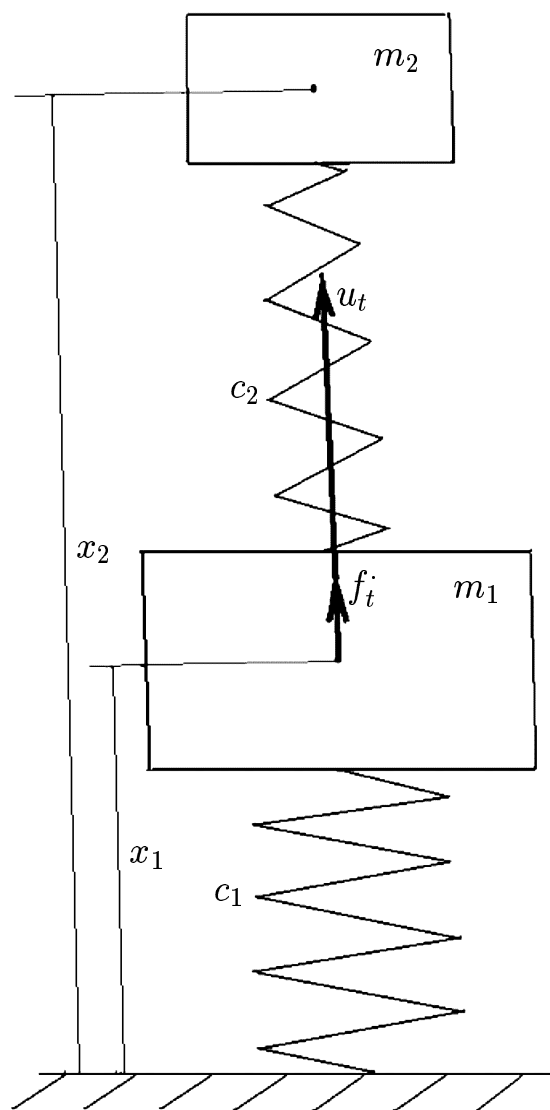


Рис.15.20. Механическая система.

$\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}^1, \gamma \neq 0$.

Нетрудно видеть, что функционал (15.52) может быть записан в виде:

$$V(u, T, \bar{\mathbf{x}}) = \mathbb{M} \left\{ \alpha \left(\mathbf{x}_T^{(1)} \right)^2 + \int_0^T \left(\beta \left(\mathbf{x}_t^{(1)} \right)^2 + \gamma u_t^2 \right) dt \mid \mathbf{x}_0 = \bar{\mathbf{x}} \right\}. \quad (15.53)$$

Известно [8], что оптимальное стохастическое управление u_t , доставляющее инфимум функционалу (15.53), имеет вид:

$$u_t = -\frac{1}{\gamma} M^\top S(t) \mathbf{x}_t, \quad (15.54)$$

где $S(t) : [0, T] \rightarrow \mathbb{R}^{4 \times 4}$ — матричная функция, являющаяся решением следующего дифференциального уравнения

$$\frac{dS(t)}{dt} = -A^\top S(t) - S(t)A + \frac{1}{\gamma} S(t) M M^\top S(t) - C \quad (15.55)$$

с граничным условием

$$S(T) = R.$$

Функционал (15.53) [8] представим в виде:

$$\begin{aligned} V(u, T, \bar{\mathbf{x}}) &= \bar{\mathbf{x}}^\top S(0) \bar{\mathbf{x}} + \int_0^T \text{tr} (B B^\top S(t)) dt = \\ &= \bar{\mathbf{x}}^\top S(0) \bar{\mathbf{x}} + \frac{1}{m_1^2} \int_0^T S^{(22)}(t) dt, \end{aligned} \quad (15.56)$$

где tr — след (сумма диагональных элементов) матрицы.

Если положить $u_t = 0$, $B = (0 \ 0 \ 0 \ 0)^\top$ в (15.51) (случай отсутствия шума и управления), то точное решение данной системы уравнений имеет вид:

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_t^{(1)} &= -\frac{c_2}{\sqrt{k_1}(k_1 m_1 - c_1 - c_2)} \left((A_1 - A_2) \cos \sqrt{k_1} t + (A_1 + A_2) \sin \sqrt{k_1} t \right) - \\ &\quad - \frac{c_2}{\sqrt{k_2}(k_2 m_1 - c_1 - c_2)} \left((A_3 - A_4) \cos \sqrt{k_2} t + (A_3 + A_4) \sin \sqrt{k_2} t \right), \\ \mathbf{x}_t^{(2)} &= -\frac{c_2}{(k_1 m_1 - c_1 - c_2)} \left((A_1 + A_2) \cos \sqrt{k_1} t + (A_2 - A_1) \sin \sqrt{k_1} t \right) - \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -\frac{c_2}{(k_2 m_1 - c_1 - c_2)} \left((A_3 + A_4) \cos \sqrt{k_2} t + (A_4 - A_3) \sin \sqrt{k_2} t \right), \\
\mathbf{x}_t^{(3)} &= \frac{1}{\sqrt{k_1}} \left((A_1 + A_2) \sin \sqrt{k_1} t + (A_1 - A_2) \cos \sqrt{k_1} t \right) + \\
& + \frac{1}{\sqrt{k_2}} \left((A_3 + A_4) \sin \sqrt{k_2} t + (A_3 - A_4) \cos \sqrt{k_2} t \right), \\
\mathbf{x}_t^{(4)} &= (A_1 + A_2) \cos \sqrt{k_1} t + (A_2 - A_1) \sin \sqrt{k_1} t + \\
& + (A_3 + A_4) \cos \sqrt{k_2} t + (A_4 - A_3) \sin \sqrt{k_2} t,
\end{aligned}$$

где

$$k_{1,2} = \frac{1}{2} \left(\frac{c_2}{m_2} + \frac{c_1 + c_2}{m_1} \pm \sqrt{\left(\frac{c_2}{m_2} + \frac{c_1 + c_2}{m_1} \right)^2 - \frac{4c_1 c_2}{m_1 m_2}} \right), \quad k_1 > k_2;$$

A_1, A_2, A_3, A_4 — произвольные постоянные; $\left(\frac{c_2}{m_2} + \frac{c_1 + c_2}{m_1} \right)^2 > \frac{4c_1 c_2}{m_1 m_2}$.

Взяв $\mathbf{x}_0^{(1)} = \mathbf{x}_0^{(3)} = a$, $\mathbf{x}_0^{(2)} = \mathbf{x}_0^{(4)} = 0$, получаем

$$\mathbf{x}_t^{(1)} = \frac{a}{m_1(k_1 - k_2)} \left(-(k_2 m_1 - c_1) \cos \sqrt{k_1} t + (k_1 m_1 - c_1) \cos \sqrt{k_2} t \right). \quad (15.57)$$

Нетрудно видеть, что при $m_1 = 4m_2$, $c_2 = \frac{3+\sqrt{5}}{10}c_1$ выполняется соотношение $k_1 = 4k_2$ и (15.57) запишется в виде:

$$\mathbf{x}_t^{(1)} = \frac{a}{12m_2 k_2} \left(-(4k_2 m_2 - c_1) \cos 2\sqrt{k_2} t + (16k_2 m_2 - c_1) \cos \sqrt{k_2} t \right),$$

т.е. $\mathbf{x}_t^{(1)}$ является в данном случае $\frac{2\pi}{\sqrt{k_2}}$ периодической функцией.

Представим $\mathbf{x}_t^{(1)}$ вида (15.57) следующим образом:

$$\begin{aligned}
\mathbf{x}_t^{(1)} &= \frac{a(k_2 m_1 - c_1)}{m_1(k_1 - k_2)} \left(\left(\frac{k_1 m_1 - c_1}{k_2 m_1 - c_1} - \cos \left(\sqrt{k_1} - \sqrt{k_2} \right) t \right) \cos \sqrt{k_2} t + \right. \\
& \left. + \sin \left(\sqrt{k_1} - \sqrt{k_2} \right) t \sin \sqrt{k_2} t \right). \quad (15.58)
\end{aligned}$$

При достаточно близких k_1, k_2 правая часть (15.58) представляет собой высокочастотные колебания с медленно меняющейся, по колебательному закону, амплитудой.

Численный эксперимент 15.9. Смоделировать решение системы стохастических дифференциальных уравнений Ито (15.51),

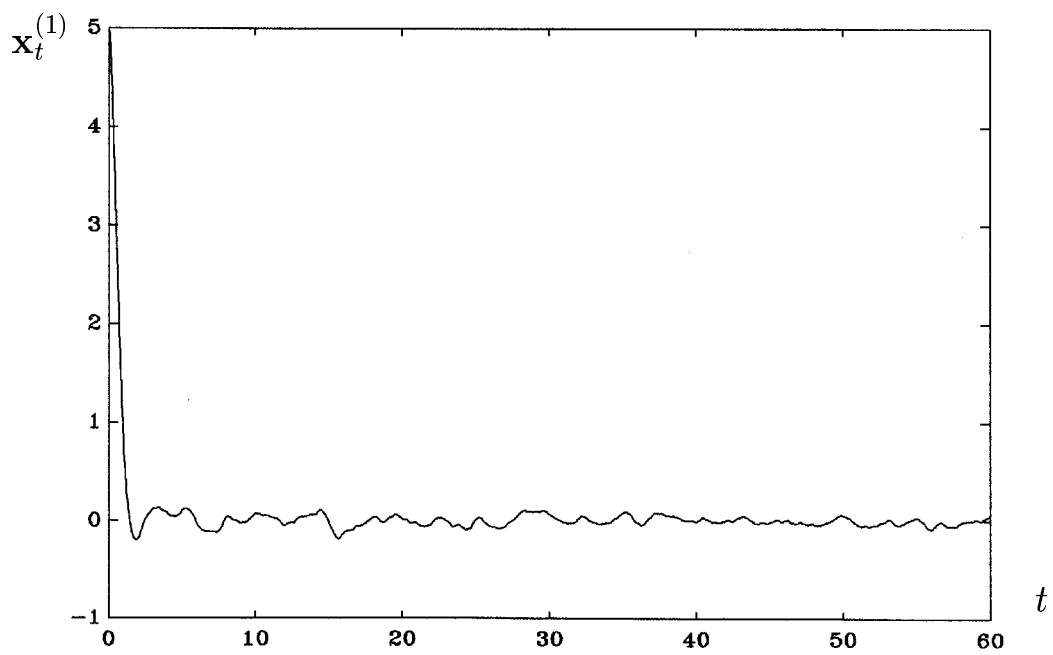


Рис.15.21. Результат численного эксперимента 15.9.

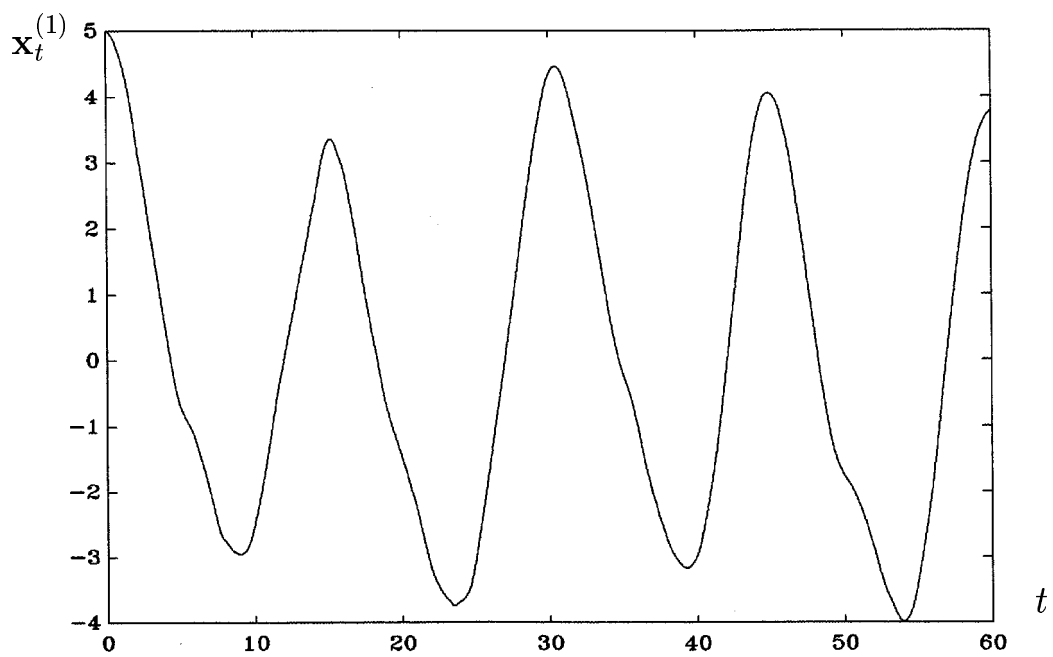


Рис.15.22. Результат численного эксперимента 15.9.

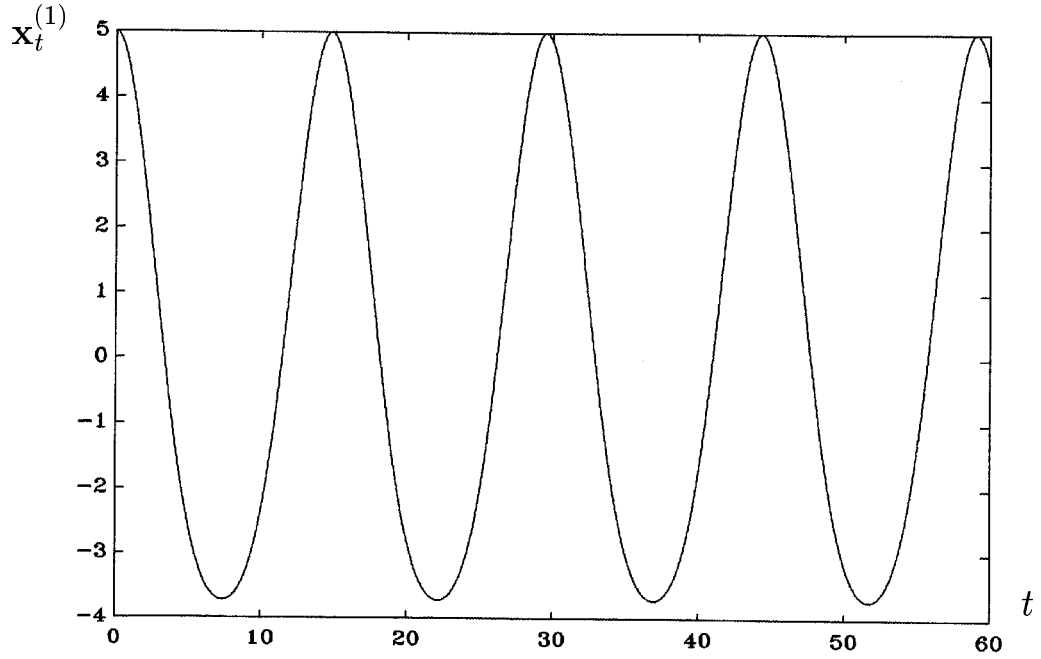


Рис.15.23. Результат численного эксперимента 15.9.

(15.54) при $m_1 = 4$, $m_2 = 1$, $c_2 = \frac{3+\sqrt{5}}{10}c_1$, $c_1 = 1$, $\mathbf{x}_0^{(1)} = \mathbf{x}_0^{(3)} = 5$, $\mathbf{x}_0^{(2)} = \mathbf{x}_0^{(4)} = 0$, $\gamma = 0.02$, $\alpha = \beta = 10$ с помощью явного сильного численного метода порядка точности 1.5:

$$\begin{aligned} \mathbf{y}_{p+1} = & \mathbf{y}_p + B\hat{I}_{0_{\tau_{p+1},\tau_p}} + (A - MM^T S(\tau_p)\gamma^{-1})\mathbf{y}_p\Delta + \\ & + \left((A - MM^T S(\tau_p)\gamma^{-1})^2 - MM^T \frac{dS}{dt}(\tau_p)\gamma^{-1} \right) \mathbf{y}_p \frac{\Delta^2}{2} + \\ & + (A - MM^T S(\tau_p)\gamma^{-1}) B \left(\Delta\hat{I}_{0_{\tau_{p+1},\tau_p}} + \hat{I}_{1_{\tau_{p+1},\tau_p}} \right), \end{aligned} \quad (15.59)$$

где $\mathbf{y}_{\tau_p} \stackrel{\text{def}}{=} \mathbf{y}_p$; $\tau_p = p\Delta$; $\Delta = 0.005$; $p = 0, 1, \dots, 11999$,

$$\hat{I}_{0_{\tau_{p+1},\tau_p}} = \zeta_{0,p}\sqrt{\Delta}, \quad \hat{I}_{1_{\tau_{p+1},\tau_p}} = -\frac{\Delta^{3/2}}{2} \left(\zeta_{0,p} + \frac{1}{\sqrt{3}}\zeta_{1,p} \right);$$

$\zeta_{0,p}, \zeta_{1,p}$; $p = 0, 1, \dots, 11999$ — независимые в совокупности стандартные гауссовские случайные величины. Значения $S(\tau_p)$ получить путем численного решения матричного уравнения (15.55) с помощью

явного численного метода второго порядка точности (численный метод, основанный на формуле Тейлора), а значения $\frac{dS}{dt}(\tau_p)$ получить из (15.55) при $t = \tau_p$ по найденным значениям $S(\tau_p)$. Изобразить графически процесс $\mathbf{x}_t^{(1)}$ (рис.15.21), используя здесь и далее значения, полученные из (15.59). Повторить вычисления при $M = (0 \ 0 \ 0 \ 0)^T$ (случай отсутствия управления) и при $M = B = (0 \ 0 \ 0 \ 0)^T$ (случай отсутствия управления и шума). Изобразить графически процесс $\mathbf{x}_t^{(1)}$ в этих случаях (рис.15.22, 15.23).

Численный эксперимент 15.10. Построить графически зависимость $V(u, \theta, \bar{\mathbf{x}})$; $\theta = 0.05, 0.10, 0.15, 0.2, 0.3, \dots, 2.9, 3.0$ при $\bar{\mathbf{x}} = (5 \ 0 \ 5 \ 0)^T$ используя формулу (15.56) и приближенно вычисляя интеграл в (15.56) по формуле трапеций:

$$V(u, \theta, \bar{\mathbf{x}}) \approx \bar{\mathbf{x}}^T S(0) \bar{\mathbf{x}} + \frac{1}{2m_1^2} \sum_{i=0}^{p-1} (S^{(22)}(\tau_i) + S^{(22)}(\tau_{i+1})) \Delta,$$

где $\tau_i = i\Delta$, $\tau_p = \theta$. Значения остальных исходных данных и способ получения $S(0)$, $S^{(22)}(\tau_i)$ такие же как в численном эксперименте 15.9 ($M = B = (0 \ m_1^{-1} \ 0 \ 0)^T$). Повторить вычисления при $c_1 = 3$ и $c_1 = 10$. Изобразить графически зависимости $V(u, \theta, \bar{\mathbf{x}})$; $\theta = 0.05, 0.10, 0.15, 0.2, 0.3, \dots, 2.9, 3.0$ при $c_1 = 1, 3, 10$ (рис.15.24; $c_1 = 1$ соответствует верхней кривой, $c_1 = 3$ — средней кривой, а $c_1 = 10$ — нижней кривой).

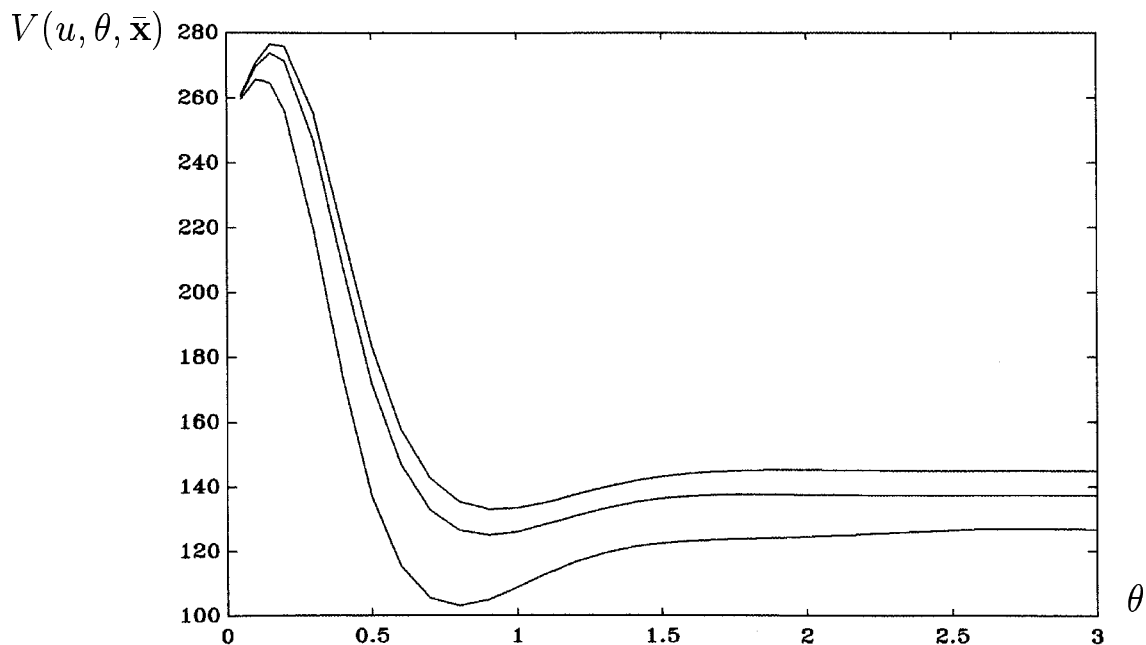


Рис.15.24. Результат численного эксперимента 15.10.

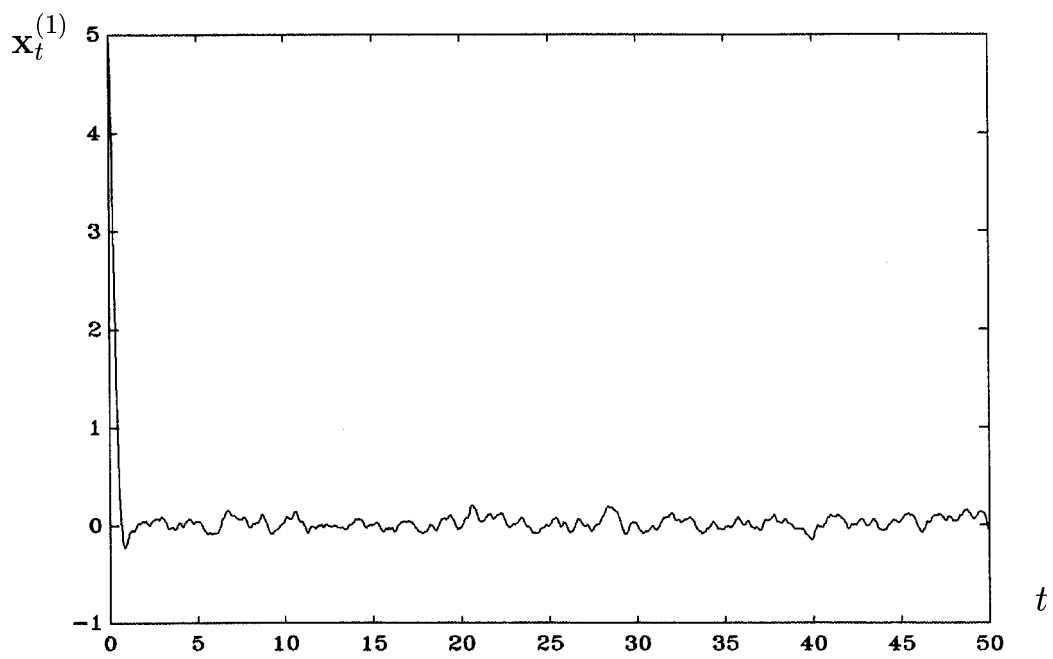


Рис.15.25. Результат численного эксперимента 15.11.

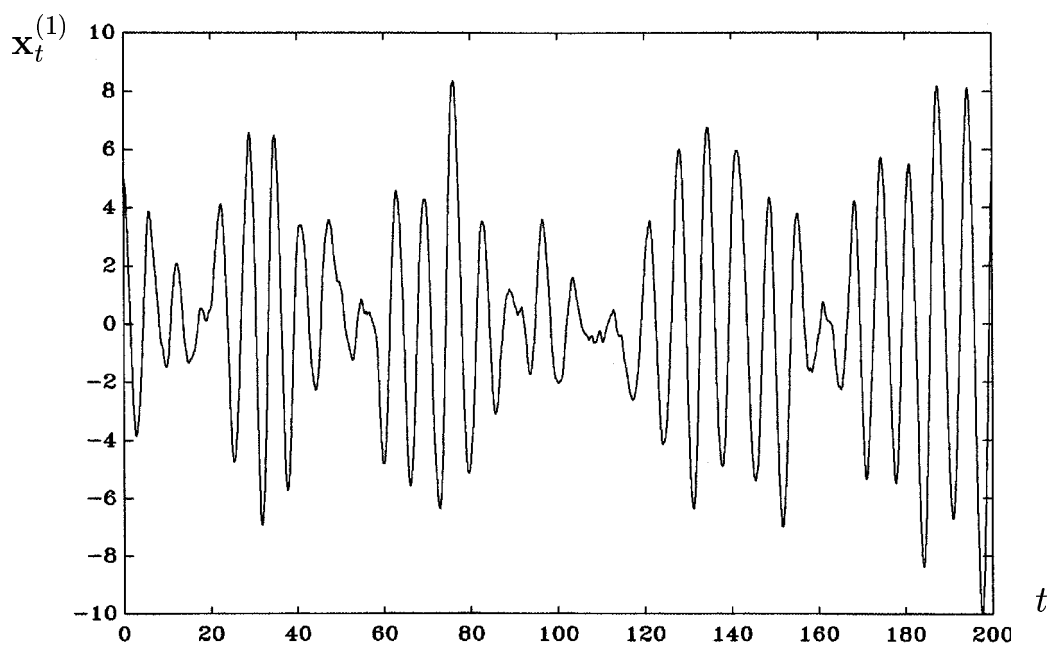


Рис.15.26. Результат численного эксперимента 15.11.

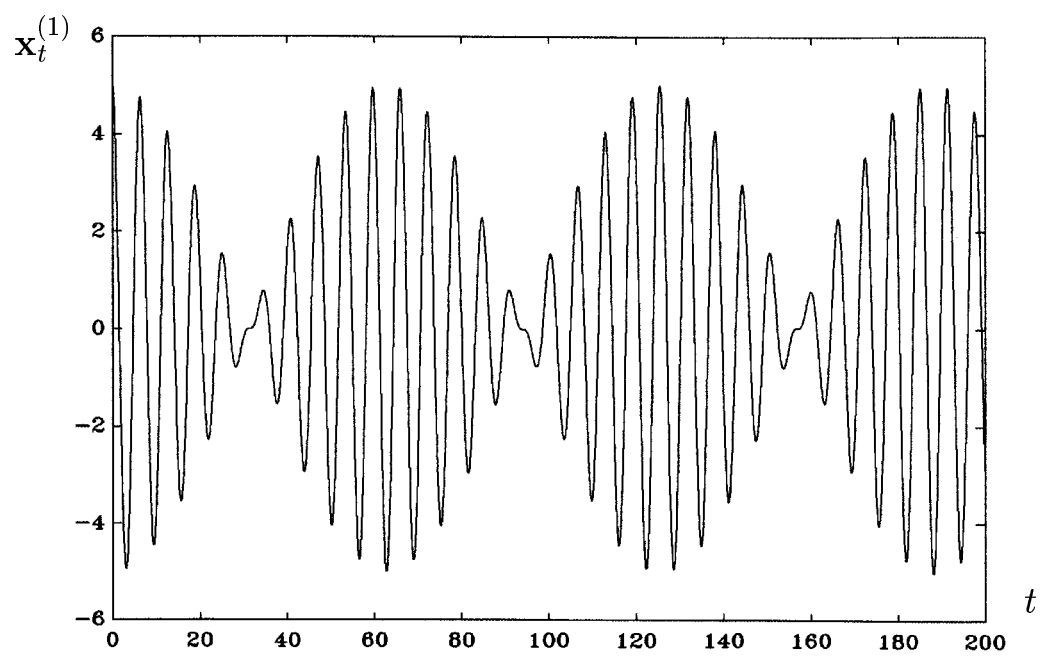


Рис.15.27. Результат численного эксперимента 15.11.

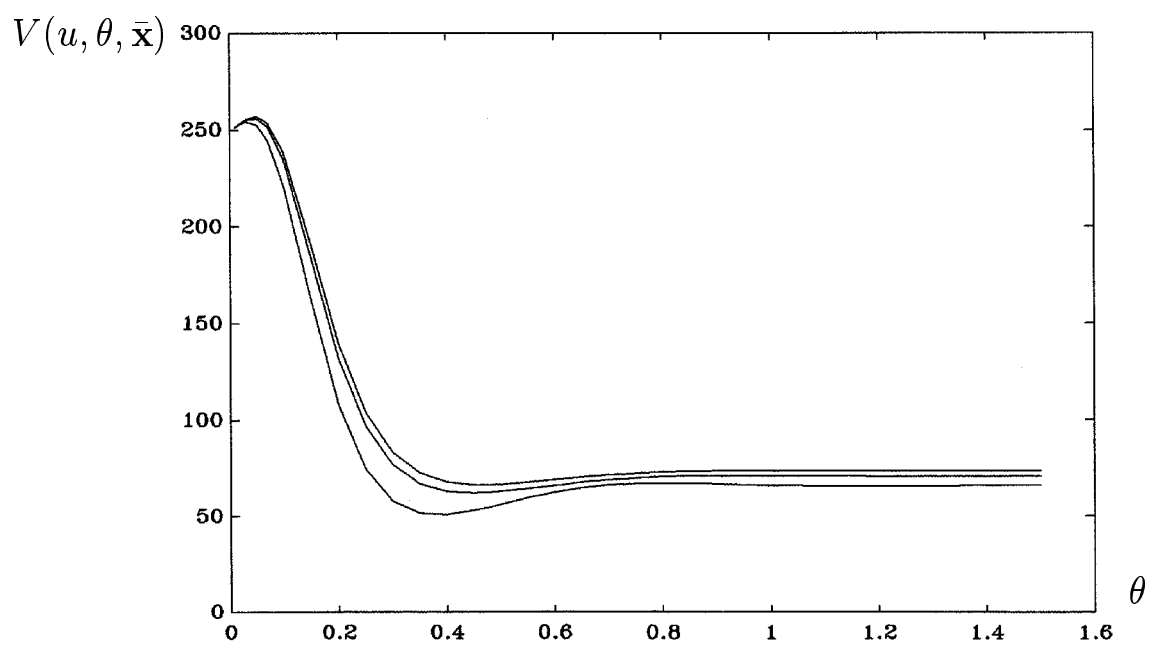


Рис.15.28. Результат численного эксперимента 15.12.

Рассмотрим другой динамический режим в системе (15.51).

Численный эксперимент 15.11. *Повторить численный эксперимент 15.8 при $c_2 = 0.01c_1$, $m_1 = 100m_2$, $c_1 = 1$, $m_2 = 0.01$, $\Delta = 0.05$ (остальные исходные данные те же). Изобразить графически процесс $\mathbf{x}_t^{(1)}$ для случаев наличия шума и управления ($p = 0, 1, \dots, 999$; рис.15.25), наличия шума и отсутствия управления ($p = 0, 1, \dots, 3999$; рис.15.26), отсутствия шума и управления ($p = 0, 1, \dots, 3999$; рис.15.27).*

Численный эксперимент 15.12. *Повторить численный эксперимент 15.9 при $\theta = 0.01, 0.02, 0.03, 0.05, 0.07, 0.10, 0.15, 0.20, \dots, 0.95, 1.00, 1.1, 1.2, 1.3, 1.4, 1.5$ и $c_1 = 1, 3, 10$. Изобразить графически результат данного численного эксперимента (рис.15.28); $c_1 = 1$ соответствует верхней кривой, $c_1 = 3$ — средней кривой, а $c_1 = 10$ — нижней кривой).*

Глава 16

Примеры применения слабых численных методов решения стохастических дифференциальных уравнений к численному решению математических задач

16.1 Вычисление наибольшего стохастического ляпуновского показателя

Рассмотрим стохастическое дифференциальное уравнение вида:

$$\frac{d^2 x_t}{dt^2} + 2\delta \frac{dx_t}{dt} + (\mu + cf_t^{\cdot})x_t = 0, \quad (16.1)$$

где δ, μ, c — числовые параметры; $f_t^{\cdot}$ — гауссовский белый шум.

Нетрудно видеть, что записи стохастического дифференциального уравнения (16.1) в форме Ито и Стратоновича оказываются эквивалентными. Например, запись в форме стохастического дифференциального уравнения Ито имеет вид:

$$d \begin{bmatrix} \mathbf{x}_t^{(1)} \\ \mathbf{x}_t^{(2)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\mu & -2\delta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{x}_t^{(1)} \\ \mathbf{x}_t^{(2)} \end{bmatrix} dt + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -c & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{x}_t^{(1)} \\ \mathbf{x}_t^{(2)} \end{bmatrix} df_t, \quad (16.2)$$

где f_t — стандартный винеровский процесс.

Известно, что асимптотическая стохастическая устойчивость нулевого решения стохастического дифференциального уравнения (1.35), в частности, стохастического дифференциального уравнения (16.2),

наступает тогда и только тогда, когда наибольший стохастический ляпуновский показатель

$$\lambda_1 = \limsup_{t \rightarrow \infty} \frac{\ln |\mathbf{x}_t^{\mathbf{x}_0, 0}|}{t} \quad (16.3)$$

отрицателен ($\mathbf{x}_t^{\mathbf{x}_0, 0}$ — означает, что для процесса $\mathbf{x}_t$ выполняется начальное условие $\mathbf{x}_0 = 0$).

Для вычисления λ_1 можно воспользоваться формулой [86]:

$$\lambda_{1,T}^\Delta = \frac{1}{N_T \Delta} \sum_{k=1}^{N_T} \ln \left(\frac{|\mathbf{y}_k|}{|\mathbf{y}_{k-1}|} \right); \quad \mathbf{y}_0^{(1)} = 1, \quad \mathbf{y}_0^{(2)} = 0, \quad (16.4)$$

где $\mathbf{y}_k$ — приближенное значение $\mathbf{x}_{k\Delta} = (\mathbf{x}_{k\Delta}^{(1)} \quad \mathbf{x}_{k\Delta}^{(2)})^\top$, полученное с помощью некоторой численной схемы для стохастического дифференциального уравнения (16.2) с постоянным шагом Δ ; $k = 0, 1, \dots, N_T$; $N_T = T/\Delta$; $|\mathbf{a}|$ — евклидова норма вектора $\mathbf{a}$.

Для вычисления λ_1 по формуле (16.4) удобнее воспользоваться слабыми численными методами для стохастического дифференциального уравнения [86].

Действительно, поскольку λ_1 неслучайна, то при достаточно большом N_T : $\lambda_{1,T}^\Delta \approx \mathbb{M}\{\lambda_{1,T}^\Delta\}$, где $\lambda_{1,T}^\Delta$ имеет вид (16.4). Если для вычисления $\lambda_{1,T}^\Delta$ используется слабый численный метод порядка точности γ , то при достаточно большом T : $|\lambda_{1,T}^{*\Delta} - \lambda_{1,T}^\Delta| \approx |\mathbb{M}\{\lambda_{1,T}^{*\Delta}\} - \mathbb{M}\{\lambda_{1,T}^\Delta\}| \leq C\Delta^\gamma$, где C — постоянная, которая не зависит от Δ , а $\lambda_{1,T}^{*\Delta}$ отличается от $\lambda_{1,T}^\Delta$ заменой $\mathbf{y}_k, \mathbf{y}_{k-1}$ на $\mathbf{x}_{k\Delta}, \mathbf{x}_{(k-1)\Delta}$ соответственно.

Если же для вычисления $\lambda_{1,T}^\Delta$ используется сильный численный метод порядка точности γ , то из выполнения неравенства $\mathbb{M}\{|\mathbf{x}_T - \mathbf{y}_{N_T}|\} \leq C\Delta^\gamma$ не следует выполнение неравенства $\mathbb{M}\{|\lambda_{1,T}^\Delta - \lambda_{1,T}^{*\Delta}|\} \leq C_1\Delta^\gamma$, где постоянные C, C_1 не зависят от Δ и $N_T\Delta = T$.

Численный эксперимент 16.1. Вычислить $\lambda_{1,200}^{0.005}(c)$ по формуле (16.4) при $c = 0, 0.625, 1.25, 1.875, 2.5j$; $j = 1, 2, \dots, 10$, где $\mathbf{y}_k = (\mathbf{y}_k^{(1)} \quad \mathbf{y}_k^{(2)})^\top$ получается с помощью применения неявного слабого численного метода порядка точности 2.0 вида (10.51) при $\tilde{\alpha} = \frac{1}{2}$ к стохастическому дифференциальному уравнению (16.2):

$$\mathbf{y}_{k+1}^{(1)} = \mathbf{y}_k^{(1)} + \frac{1}{2}\Delta\mathbf{y}_k^{(2)} + \frac{1}{2}\Delta\mathbf{y}_{k+1}^{(2)},$$

$$\mathbf{y}_{k+1}^{(2)} = \mathbf{y}_k^{(2)} + \frac{1}{2}\Delta \left(-\mu\mathbf{y}_k^{(1)} - 2\delta\mathbf{y}_k^{(2)} \right) +$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{1}{2} \Delta \left(-\mu \mathbf{y}_{k+1}^{(1)} - 2\delta \mathbf{y}_{k+1}^{(2)} \right) + \\
& + \frac{\sqrt{\Delta} \zeta_{0,k}}{2} \left(-2c \mathbf{y}_k^{(1)} - c \Delta \mathbf{y}_k^{(2)} \right)
\end{aligned}$$

или

$$\mathbf{y}_{k+1}^{(1)} = \mathbf{y}_k^{(1)} + \frac{1}{2} \Delta \mathbf{y}_k^{(2)} + \frac{1}{2} \Delta \mathbf{y}_{k+1}^{(2)},$$

$$\begin{aligned}
\mathbf{y}_{k+1}^{(2)} = & \frac{1}{1 + \frac{1}{4} \Delta^2 \mu + \delta \Delta} \left(\mathbf{y}_k^{(2)} - \frac{1}{2} \Delta \left(\mu \mathbf{y}_k^{(1)} + 2\delta \mathbf{y}_k^{(2)} \right) - \right. \\
& \left. - \frac{1}{2} \mu \Delta \left(\mathbf{y}_k^{(1)} + \frac{1}{2} \Delta \mathbf{y}_k^{(2)} \right) - c \mathbf{y}_k^{(1)} \sqrt{\Delta} \zeta_{0,k} - \frac{\Delta^{3/2}}{2} c \zeta_{0,k} \mathbf{y}_k^{(2)} \right);
\end{aligned}$$

здесь $\zeta_{0,k}$ ($k = 0, 1, \dots, N_T - 1$) — независимые стандартные гауссовские случайные величины; $\delta = 2$; $\mu = 3$. Построить графически зависимость $\lambda_{1,200}^{0.005}(c)$; $c = 0, 0.625, 1.25, 1.875, 2.5j$; $j = 1, 2, \dots, 10$ (рис.16.1) и реализацию процесса $\lambda_{1,25}^{0.005}(5)$ (рис.16.2).

Отметим, что при $c = 0$ система (16.2) при $\delta = 2$, $\mu = 3$ имеет $\lambda_1 = -1$ ($\lambda_{1,200}^{0.005}(0) \approx -0.9962$).

На рис.16.1 видно, что нулевое решение системы (16.2) теряет асимптотическую стохастическую устойчивость при $c \approx 18.9$. При этом при возрастании c от нуля стохастическое возмущение сначала стабилизирует систему (16.2), а затем при дальнейшем увеличении c снижает степень асимптотической стохастической устойчивости нулевого решения вплоть до ее потери при $c \approx 18.9$.

В [86] отмечается, что асимптотическая стохастическая устойчивость невозмущенного решения нелинейного стохастического дифференциального уравнения (1.35) в ряде случаев следует из стохастической асимптотической устойчивости нулевого решения соответствующего линеаризованного стохастического дифференциального уравнения.

Отметим, что подход к изучению стохастической устойчивости, основанный на стохастических функциях Ляпунова, требует нахождения соответствующих функций Ляпунова, что не всегда просто, а также дает, в отличие от подхода стохастических ляпуновских показателей, только достаточные условия асимптотической стохастической устойчивости.

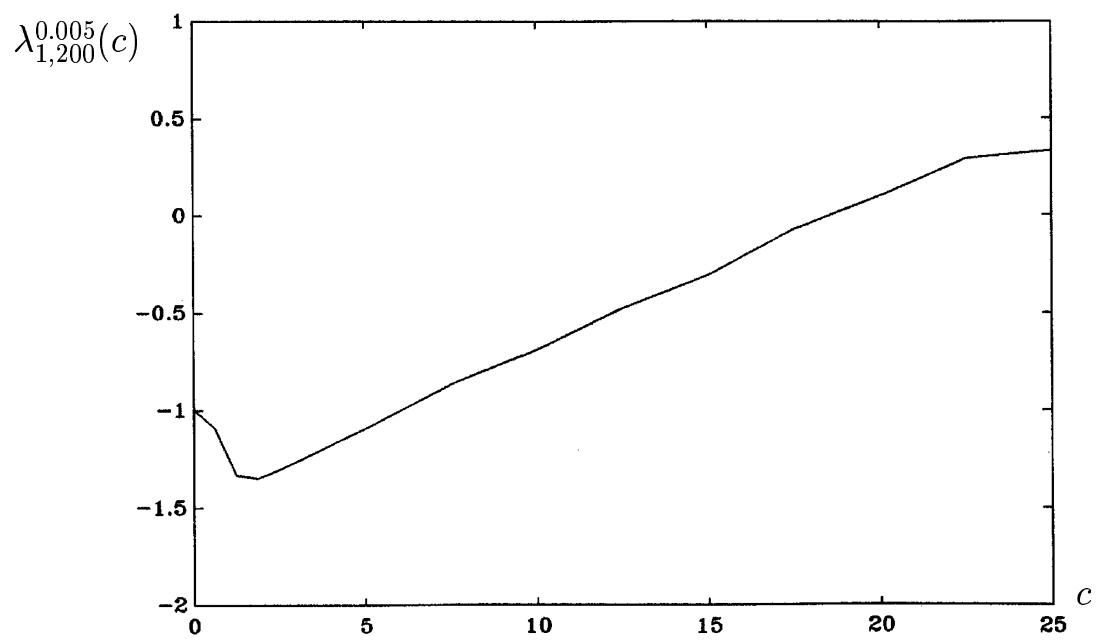


Рис.16.1. Результат численного эксперимента 16.1.

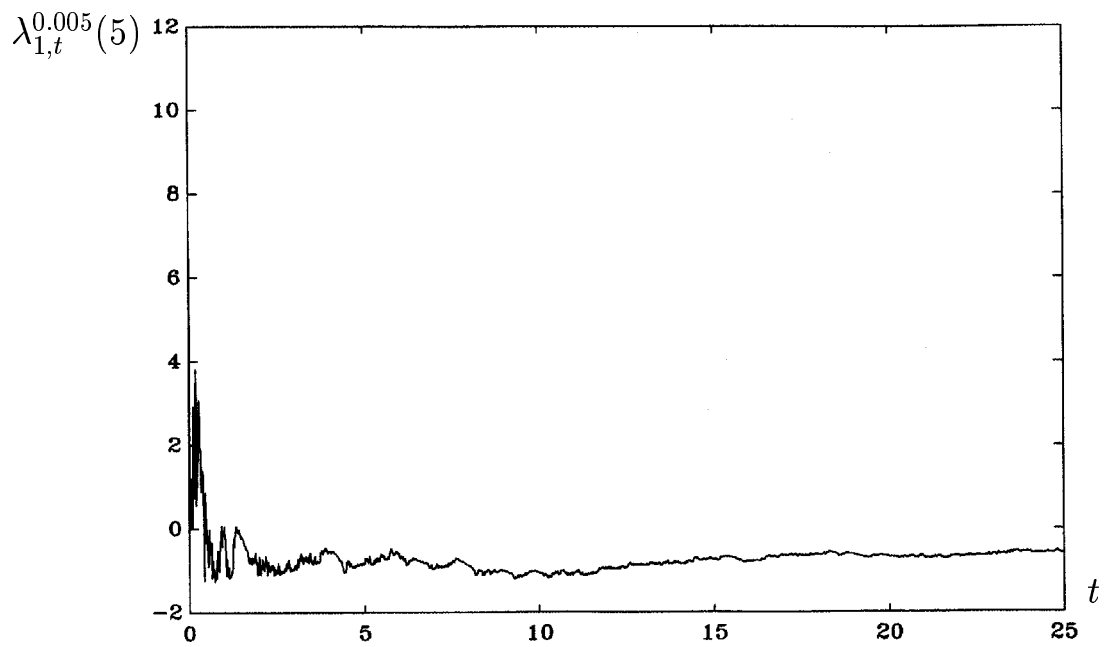


Рис.16.2. Результат численного эксперимента 16.1.

16.2 Детерминированные численные методы интегрирования задачи Коши для уравнений параболического типа, основанные на вероятностном представлении решения

Рассмотрим задачу Коши для уравнения параболического типа

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \sum_{i=1}^n \mathbf{a}^{(i)}(\mathbf{x}, t, u) \frac{\partial u}{\partial \mathbf{x}^{(i)}} + \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^n B^{(ij)}(\mathbf{x}, t, u) \frac{\partial^2 u}{\partial \mathbf{x}^{(i)} \partial \mathbf{x}^{(j)}} +$$

$$+ g(\mathbf{x}, t, u) = 0, \quad t_0 \leq t < T, \quad \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n, \quad (16.5)$$

$$u(\mathbf{x}, T) = \varphi(\mathbf{x}), \quad (16.6)$$

где $\mathbf{a}(\mathbf{x}, t) : \mathbb{R}^n \times [0, T] \rightarrow \mathbb{R}^n$; $B(\mathbf{x}, t) : \mathbb{R}^n \times [0, T] \rightarrow \mathbb{R}^{n \times n}$; $g(\mathbf{x}, t, u) : \mathbb{R}^n \times [0, T] \times \mathbb{R}^1 \rightarrow \mathbb{R}^1$; $\varphi(\mathbf{x}) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^1$ — заданные функции, $u(\mathbf{x}, t) : \mathbb{R}^n \times [0, T] \rightarrow \mathbb{R}^1$ — решение задачи (16.5), (16.6).

Г. Н. Мильштейном [72] предложено семейство детерминированных численных методов решения задачи (16.5), (16.6), основанных на вероятностном представлении решения данной задачи и слабых численных методах решения стохастических дифференциальных уравнений Ито. Далее коснемся некоторых из предложенных в [72] численных методов для случая $n = 1$.

Известно [72], что решение задачи (16.5), (16.6) допускает вероятностное представление

$$u(\mathbf{x}, t) = \mathbb{M} \{ \varphi(\mathbf{x}_T^{t, \mathbf{x}}) + z_T^{t, \mathbf{x}, 0} \}, \quad (16.7)$$

где $(\mathbf{x}_s^{t, \mathbf{x}}, z_s^{t, \mathbf{x}, 0})^T$, $s \in [t, T]$, — решение следующей системы стохастических дифференциальных уравнений Ито:

$$d \begin{bmatrix} \mathbf{x}_s \\ z_s \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{a}(\mathbf{x}_s, s, u(\mathbf{x}_s, s)) \\ g(\mathbf{x}_s, s, u(\mathbf{x}_s, s)) \end{bmatrix} ds + \begin{bmatrix} \Sigma(\mathbf{x}_s, s, u(\mathbf{x}_s, s)) \\ O_{1 \times n} \end{bmatrix} d\mathbf{f}_s, \quad (16.8)$$

$$\begin{bmatrix} \mathbf{x}_t \\ z_t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{x} \\ 0 \end{bmatrix};$$

$\mathbf{f}_s$ — n -мерный стандартный винеровский процесс с независимыми компонентами; $B = \Sigma \Sigma^T$; $O_{1 \times n}$ — нулевая строка длиной n .

Пусть $n = 1$. Рассмотрим разбиение промежутка $[t_0, T]$ узлами $\tau_p = t_0 + p\Delta$, $\Delta = (T - t_0)/N$, $p = 0, 1, \dots, N$.

Воспользовавшись (16.7), получим

$$u(\mathbf{x}, \tau_k) = \mathbb{M} \{ u(\mathbf{x}_{\tau_{k+1}}^{\tau_k, \mathbf{x}}, \tau_{k+1}) + z_{\tau_{k+1}}^{\tau_k, \mathbf{x}, 0} \}, \quad (16.9)$$

где $(\mathbf{x}_s^{\tau_k, \mathbf{x}} \ z_s^{\tau_k, \mathbf{x}, 0})^\top$, $s \in [\tau_k, \tau_{k+1}]$, — решение системы (16.8) с начальным условием

$$(\mathbf{x}_{\tau_k} \ z_{\tau_k})^\top = (\mathbf{x} \ 0)^\top. \quad (16.10)$$

Запишем явный слабый метод Эйлера для системы (16.8), (16.10):

$$\bar{\mathbf{x}}_{\tau_{k+1}}^{\tau_k, \mathbf{x}} = \mathbf{x} + \mathbf{a}(\mathbf{x}, \tau_k, u(\mathbf{x}, \tau_k))\Delta + \Sigma(\mathbf{x}, \tau_k, u(\mathbf{x}, \tau_k))\sqrt{\Delta}\zeta_k, \quad (16.11)$$

$$\bar{z}_{\tau_{k+1}}^{\tau_k, \mathbf{x}, 0} = g(\mathbf{x}, \tau_k, u(\mathbf{x}, \tau_k))\Delta, \quad (16.12)$$

где ζ_k , $k = 0, 1, \dots, N-1$, — независимые случайные величины, для которых $P\{\zeta_k = \pm 1\} = \frac{1}{2}$.

Далее, воспользовавшись (16.9), (16.11), (16.12), найдем

$$\begin{aligned} u(\mathbf{x}, \tau_k) &\approx M\{u(\bar{\mathbf{x}}_{\tau_{k+1}}^{\tau_k, \mathbf{x}}, \tau_{k+1}) + \bar{z}_{\tau_{k+1}}^{\tau_k, \mathbf{x}, 0}\} = \\ &= \frac{1}{2}u(\mathbf{x} + \mathbf{a}(\mathbf{x}, \tau_k, u(\mathbf{x}, \tau_k))\Delta + \Sigma(\mathbf{x}, \tau_k, u(\mathbf{x}, \tau_k))\sqrt{\Delta}, \tau_{k+1}) + \\ &+ \frac{1}{2}u(\mathbf{x} + \mathbf{a}(\mathbf{x}, \tau_k, u(\mathbf{x}, \tau_k))\Delta - \Sigma(\mathbf{x}, \tau_k, u(\mathbf{x}, \tau_k))\sqrt{\Delta}, \tau_{k+1}) + \\ &+ g(\mathbf{x}, \tau_k, u(\mathbf{x}, \tau_k))\Delta. \end{aligned}$$

С помощью последнего равенства запишем соотношения [72]:

$$\begin{aligned} \bar{u}(\mathbf{x}, \tau_k) &= \frac{1}{2}\bar{u}(\mathbf{x} + \mathbf{a}(\mathbf{x}, \tau_k, \bar{u}(\mathbf{x}, \tau_k))\Delta + \Sigma(\mathbf{x}, \tau_k, \bar{u}(\mathbf{x}, \tau_k))\sqrt{\Delta}, \tau_{k+1}) + \\ &+ \frac{1}{2}\bar{u}(\mathbf{x} + \mathbf{a}(\mathbf{x}, \tau_k, \bar{u}(\mathbf{x}, \tau_k))\Delta - \Sigma(\mathbf{x}, \tau_k, \bar{u}(\mathbf{x}, \tau_k))\sqrt{\Delta}, \tau_{k+1}) + \\ &+ g(\mathbf{x}, \tau_k, \bar{u}(\mathbf{x}, \tau_k))\Delta, \end{aligned} \quad (16.13)$$

$$\bar{u}(\mathbf{x}, \tau_N) = \varphi(\mathbf{x}), \quad k = N-1, N-2, \dots, 1, 0, \quad (16.14)$$

где $\bar{u}(\mathbf{x}, \tau_k)$ — аппроксимация $u(\mathbf{x}, \tau_k)$.

Алгоритм (16.13), (16.14) решения задачи (16.5), (16.6) является очевидно неявным. Для нахождения величины $\bar{u}(\mathbf{x}, \tau_k)$ при фиксированном k необходимо решить неявное уравнение (16.13). Эта процедура может быть осуществлена, например, с помощью метода простой итерации. Однако если в качестве начальной итерации взять $\bar{u}(\mathbf{x}, \tau_{k+1})$ [72], то на основе (16.13), (16.14) получим явный алгоритм решения задачи (16.5), (16.6)

$$\bar{u}(\mathbf{x}, \tau_k) = \frac{1}{2}\bar{u}(\mathbf{x} + \mathbf{a}(\mathbf{x}, \tau_k, \bar{u}(\mathbf{x}, \tau_{k+1}))\Delta + \Sigma(\mathbf{x}, \tau_k, \bar{u}(\mathbf{x}, \tau_{k+1}))\sqrt{\Delta}, \tau_{k+1}) +$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{1}{2} \bar{u}(\mathbf{x} + \mathbf{a}(\mathbf{x}, \tau_k, \bar{u}(\mathbf{x}, \tau_{k+1})) \Delta - \Sigma(\mathbf{x}, \tau_k, \bar{u}(\mathbf{x}, \tau_{k+1})) \sqrt{\Delta}, \tau_{k+1}) + \\
& + g(\mathbf{x}, \tau_k, \bar{u}(\mathbf{x}, \tau_{k+1})) \Delta,
\end{aligned} \tag{16.15}$$

$$\bar{u}(\mathbf{x}, \tau_N) = \varphi(\mathbf{x}), \quad k = N-1, N-2, \dots, 1, 0. \tag{16.16}$$

В [72] приведены различные модификации алгоритма (16.15), (16.16), а также алгоритмы решения задачи (16.5), (16.6) при $n = 1$, основанные на более точных слабых численных методах решения стохастических дифференциальных уравнений Ито. Кроме того, в [72] построены алгоритмы решения задачи (16.5), (16.6) при $n = 2$, основанные на описанном ранее подходе.

Оценка скорости сходимости алгоритма (16.15), (16.16) дается следующей теоремой.

Теорема 16.1 [72]. Пусть выполнены следующие условия:

1. Для всех $t \in [t_0, T]$, $x \in \mathbb{R}^1$, $u \in [U_1, U_2]$, $-\infty \leq U_1 < U_2 \leq +\infty$; U_1, U_2 — постоянные,

$$|\mathbf{a}(x, t, u)| + |\Sigma(x, t, u)| + |g(x, t, u)| \leq K.$$

2. Для всех $t \in [t_0, T]$, $x_1, x_2 \in \mathbb{R}^1$, $u_1, u_2 \in [U_1, U_2]$

$$|\mathbf{a}(x_2, t, u_2) - \mathbf{a}(x_1, t, u_1)| + |\Sigma(x_2, t, u_2) - \Sigma(x_1, t, u_1)| +$$

$$+ |g(x_2, t, u_2) - g(x_1, t, u_1)| \leq K(|x_2 - x_1| + |u_2 - u_1|).$$

3. Существует только ограниченное решение $u(x, t)$ задачи (16.5), (16.6): $u(x, t) \in [u^*, u^{**}]$, $U_1 < u^*$, $u^{**} < U_2$, для всех $t \in [t_0, T]$, $x \in \mathbb{R}^1$.

4. Для всех $t \in [t_0, T]$, $x \in \mathbb{R}^1$

$$\left| \frac{\partial^m u}{\partial t^i \partial x^l} \right| \leq K, \tag{16.17}$$

где $i = 0, l = 1, 2, 3, 4$; $i = 1, l = 0, 1, 2$; $i = 2, l = 0$ (предполагается, что частные производные, входящие в (16.17), существуют).

Тогда

$$|\bar{u}(x, \tau_k) - u(x, \tau_k)| \leq K_1 \Delta, \tag{16.18}$$

где постоянные K, K_1 не зависят от Δ, x, k .

Введем дискретизацию переменной x (далее скаляр $\mathbf{x}$ обозначаем через x):

$$x_j = x_0 + j\alpha\Delta, \quad j = 0, \pm 1, \pm 2, \dots, \quad x_0 \in \mathbb{R}^1, \quad \alpha > 0.$$

Тогда из (16.15), (16.16), воспользовавшись линейной интерполяцией, получим следующий численный метод [72]:

$$\begin{aligned}\bar{u}(x_j, \tau_k) = & \frac{1}{2}\bar{u}(x_j + \mathbf{a}(x_j, \tau_k, \bar{u}(x_j, \tau_{k+1}))\Delta + \Sigma(x_j, \tau_k, \bar{u}(x_j, \tau_{k+1}))\sqrt{\Delta}, \tau_{k+1}) + \\ & + \frac{1}{2}\bar{u}(x_j + \mathbf{a}(x_j, \tau_k, \bar{u}(x_j, \tau_{k+1}))\Delta - \Sigma(x_j, \tau_k, \bar{u}(x_j, \tau_{k+1}))\sqrt{\Delta}, \tau_{k+1}) + \\ & + g(x_j, \tau_k, \bar{u}(x_j, \tau_{k+1}))\Delta,\end{aligned}\quad (16.19)$$

$$\bar{u}(x, \tau_N) = \varphi(\mathbf{x}), \quad (16.20)$$

$$\bar{u}(x, \tau_k) = \frac{x_{j+1} - x_j}{\alpha\Delta}\bar{u}(x_j, \tau_k) + \frac{x - x_j}{\alpha\Delta}\bar{u}(x_{j+1}, \tau_k), \quad x_j < x < x_{j+1}, \quad (16.21)$$

$k = N - 1, N - 2, \dots, 1, 0; j = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$

В [72] показано, что в условиях теоремы 16.1 для функции $\bar{u}(x, \tau_k)$ вида (16.21) справедлива оценка (16.18).

Отметим, что в описанных численных методах вычисления проводятся для "отрицательного" направления времени, т. е. для k от $N - 1$ до нуля. Это неудобство может быть преодолено, если коэффициенты уравнения (16.5) и функция g явно не зависят от t . В частности, в таком случае для уравнения (16.5) с начальным условием $u(x, 0) = \varphi(x)$ при $n = 1, t > 0$ на основе численного метода (16.19)–(16.21) нетрудно получить следующий алгоритм с "положительным" направлением времени [72]:

$$\begin{aligned}\bar{u}(x_j, \tau_{k+1}) = & \frac{1}{2}\bar{u}(x_j + \mathbf{a}(x_j, \bar{u}(x_j, \tau_k))\Delta + \Sigma(x_j, \bar{u}(x_j, \tau_k))\sqrt{\Delta}, \tau_k) + \\ & + \frac{1}{2}\bar{u}(x_j + \mathbf{a}(x_j, \bar{u}(x_j, \tau_k))\Delta - \Sigma(x_j, \bar{u}(x_j, \tau_k))\sqrt{\Delta}, \tau_k) + \\ & + g(x_j, \bar{u}(x_j, \tau_k))\Delta,\end{aligned}\quad (16.22)$$

$$\bar{u}(x, 0) = \varphi(\mathbf{x}), \quad (16.23)$$

$$\bar{u}(x, \tau_k) = \frac{x_{j+1} - x_j}{\alpha\Delta}\bar{u}(x_j, \tau_k) + \frac{x - x_j}{\alpha\Delta}\bar{u}(x_{j+1}, \tau_k), \quad x_j < x < x_{j+1}, \quad (16.24)$$

$\tau_k = k\Delta, k = 0, 1, \dots, N - 1; j = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$

В заключение приведем численный пример [72], иллюстрирующий применение численного метода (16.22)–(16.24).

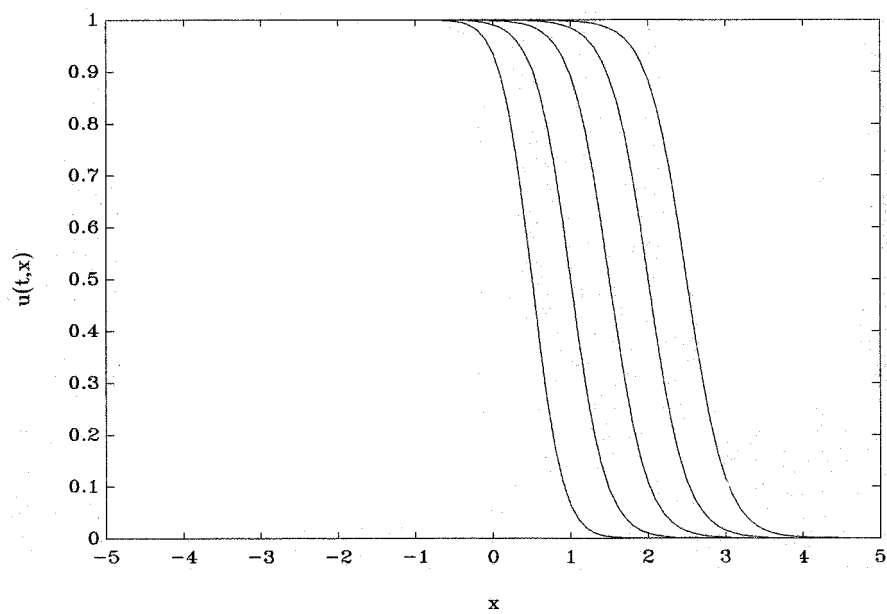


Рис.16.3. Результат численного эксперимента 16.2.

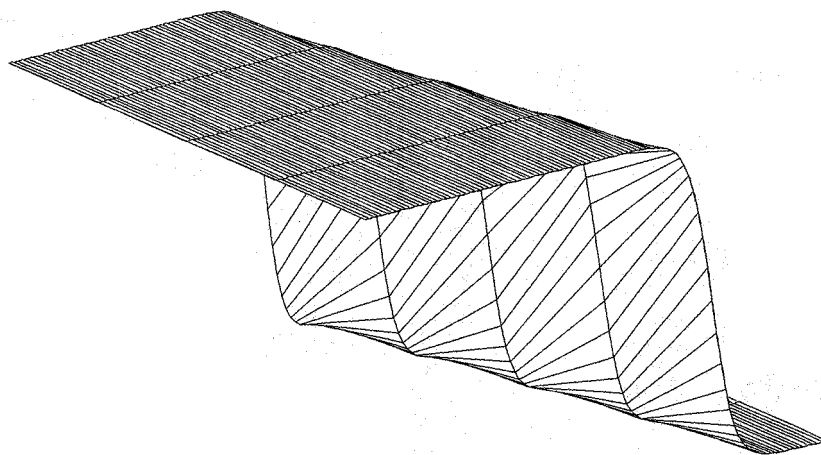


Рис.16.4. Результат численного эксперимента 16.2.

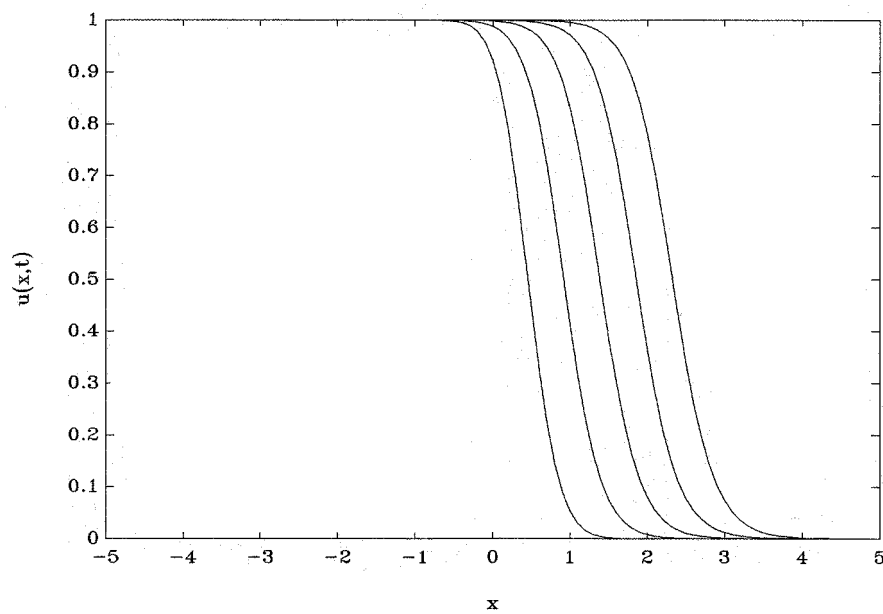


Рис.16.5. Результат численного эксперимента 16.3.

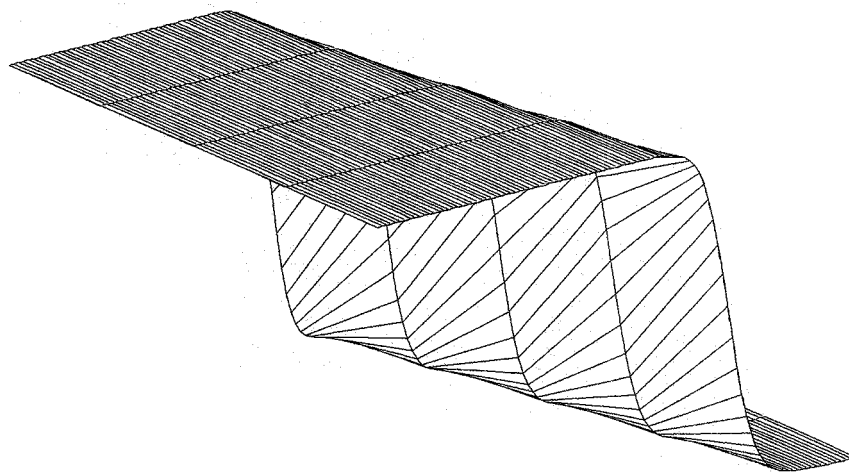


Рис.16.6. Результат численного эксперимента 16.3.

Рассмотрим следующую задачу Коши для уравнения Бюргерса [72]:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{1}{2}\sigma^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - u \frac{\partial u}{\partial x}, \quad t > 0, x \in \mathbb{R}^1, \quad (16.25)$$

$$u(x, 0) = \begin{cases} 1 & \text{при } x < 0, \\ 0 & \text{при } x \geq 0. \end{cases} \quad (16.26)$$

Известно [72], что точное решение задачи (16.25), (16.26) имеет вид

$$u(x, t) = 1 - \frac{G(-\frac{x}{\sqrt{2\sigma^2 t}})}{G(-\frac{x}{\sqrt{2\sigma^2 t}}) + e^{\frac{t-x}{2\sigma^2}} \left(2 - G(\frac{t-x}{\sqrt{2\sigma^2 t}})\right)}, \quad (16.27)$$

где

$$G(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_x^{+\infty} e^{-z^2} dz. \quad (16.28)$$

Численный эксперимент 16.2. Смоделировать решение задачи (16.25), (16.26) по формулам (16.27), (16.28) при $t = 1, 2, 3, 4, 5$, $x = j\Delta$, $j = 0, \pm 1, \dots, \pm 50$, $\Delta = 0.1$. Изобразить графически зависимости $u(x, t)$, $t = 1, 2, 3, 4, 5$, а также трехмерную поверхность $v = u(x, t)$ (рис. 16.3, 16.4).

Численный эксперимент 16.3. Повторить численный эксперимент 16.2, используя алгоритм (16.22)–(16.24) (рис. 16.5, 16.6).

Численные эксперименты, аналогичные 16.2, 16.3 рассмотрены в [72]. Численное моделирование проводилось здесь независимо и дало хорошее совпадение с результатами работы [72] (см. рис. 16.3–16.6).

16.3 Численное интегрирование задачи Коши для уравнений параболического типа, основанное на прямом статистическом моделировании

Рассмотрим менее общую задачу Коши, чем задача (16.5), (16.6), для уравнений параболического типа:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \frac{\partial^2 u}{\partial \mathbf{x}^{(i)} \partial \mathbf{x}^{(i)}} + c(\mathbf{x}, t)u = 0, \quad (16.29)$$

$$u(\mathbf{x}, T) = \varphi(\mathbf{x}, T), \quad (16.30)$$

где $t_0 \leq t < T$; $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$; $c(\mathbf{x}, t) : \mathbb{R}^n \times [0, T] \rightarrow \mathbb{R}^1$.

Вероятностное представление задачи (16.29), (16.30) имеет вид

$$u(\mathbf{x}, t) = M \left\{ \varphi(\mathbf{f}_T^{t, \mathbf{x}}, T) e^{\int_t^T c(\mathbf{f}_s^{t, \mathbf{x}}, s) ds} \right\}, \quad (16.31)$$

где $\mathbf{f}_s^{t, \mathbf{x}}, s \geq t$, — n -мерный стандартный винеровский процесс с независимыми компонентами, стартовый из точки $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ в момент времени t .

Рассмотрим $(n+1)$ -мерный процесс Ито, описываемый стохастическим дифференциальным уравнением Ито вида

$$d \begin{bmatrix} \mathbf{x}_s \\ y_s \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} O_{n \times 1} \\ c(\mathbf{x}_s, s) \end{bmatrix} ds + \begin{bmatrix} I_{n \times n} \\ O_{1 \times n} \end{bmatrix} d\mathbf{f}_s, \quad \begin{bmatrix} \mathbf{x}_t \\ y_t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{x} \\ 0 \end{bmatrix}, \quad (16.32)$$

где $\mathbf{f}_s, s \geq t$, имеет тот же смысл, что и $\mathbf{f}_s^{t, \mathbf{x}}, s \geq t$, в (16.31); $y \in \mathbb{R}^1$; $I_{n \times n}$, $O_{1 \times n}$, $O_{n \times 1}$ — единичная $(n \times n)$ -матрица, нулевая строка и нулевой столбец длиной n соответственно.

Нетрудно заметить, что правая часть (16.31) может быть переписана в форме $M\{g(\mathbf{z}_T)\}$, где

$$\mathbf{z}_s = \begin{bmatrix} \mathbf{x}_s \\ y_s \end{bmatrix}; \quad g(\mathbf{h}) = \varphi(\mathbf{h}^{(1)}, \dots, \mathbf{h}^{(n)}, T) e^{\mathbf{h}^{(n+1)}};$$

$\mathbf{h} = (\mathbf{h}^{(1)}, \dots, \mathbf{h}^{(n+1)})$; $(\mathbf{x}_s \ y_s)^\top$ — решение системы (16.32).

Из сказанного следует, что для численной реализации формулы (16.31) можно воспользоваться слабыми численными методами решения стохастического дифференциального уравнения (16.32). Отметим, что описанный подход к численному интегрированию задачи (16.29), (16.30) представлен, в частности, в данной трактовке в [70, 86, 87].

В [86] рассмотрено численное моделирование правой части (16.31), основанное на слабом явном методе Эйлера, слабом экстраполяционном методе порядка точности 2.0, неявном слабом конечно-разностном методе порядка точности 2.0, а также на слабых экстраполяционных численных методах порядка точности 4.0 для системы (16.32).

В [174] (см. также [86]) построен слабый численный метод порядка точности 4.0 специально для системы стохастических дифференциальных уравнений Ито вида

$$d \begin{bmatrix} \mathbf{x}_s \\ y_s \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} O_{n \times 1} \\ c(\mathbf{x}_s, s) y_s \end{bmatrix} ds + \begin{bmatrix} I_{n \times n} \\ O_{1 \times n} \end{bmatrix} d\mathbf{f}_s, \quad \begin{bmatrix} \mathbf{x}_t \\ y_t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{x} \\ 1 \end{bmatrix}, \quad s \geq t. \quad (16.33)$$

Здесь сохранен смысл обозначений, введенных в (16.32).

Нетрудно видеть, что правая часть (16.31) при $\varphi \equiv 1$ может быть представлена в виде $M\{y_T\}$, где y_T определяется из системы (16.33).

Отметим, что слабый метод Эйлера записывается для системы (16.32) и постоянного шага Δ в виде

$$\bar{\mathbf{x}}_{(p+1)\Delta}^{(l)} = \bar{\mathbf{x}}_{p\Delta}^{(l)} + \Delta \tilde{\mathbf{f}}_p^{(l)}, \quad l = 1, \dots, n, \quad (16.34)$$

$$\bar{y}_{(p+1)\Delta} = \bar{y}_{p\Delta} + c(\hat{\mathbf{x}}_{p\Delta}, p\Delta)\Delta, \quad (16.35)$$

где $\hat{\mathbf{x}}_0 = \mathbf{x}$; $\bar{y}_0 = 0$; $\hat{\mathbf{x}}_{p\Delta} = (\bar{\mathbf{x}}_{p\Delta}^{(1)} \dots \bar{\mathbf{x}}_{p\Delta}^{(n)})^\top$, $p = 0, 1, \dots, N_T - 1$; $T = N_T \Delta$. При этом случайные величины $\Delta \tilde{\mathbf{f}}_p^{(l)}$, $l = 1, \dots, n$; $p = 0, 1, \dots, N_T - 1$, независимы и распределены по закону $N(0, \Delta)$ или по закону

$$P\{\Delta \tilde{\mathbf{f}}_p^{(l)} = \pm \sqrt{\Delta}\} = \frac{1}{2}. \quad (16.36)$$

В терминах решения системы (16.32) усредняемое в правой части (16.31) выражение можно записать следующим образом:

$$F_{t,\mathbf{x}}(T) = \varphi(\mathbf{x}_T, T)e^{y_T}. \quad (16.37)$$

В [86], в частности, приведена формула для численного моделирования $F_{t,\mathbf{x}}(T)$ вида (16.37), основанная на численной схеме (16.34), (16.35):

$$\hat{F}_{t,\mathbf{x}}^\Delta(T) = \varphi(\bar{\mathbf{x}}_{N_T\Delta}, N_T\Delta)e^{\Delta \sum_{p=0}^{N_T-1} c(\hat{\mathbf{x}}_{p\Delta}, p\Delta)}, \quad (16.38)$$

где $T = N_T \Delta$. При этом согласно тому, что слабый метод Эйлера имеет порядок слабой сходимости $\gamma = 1.0$, имеем

$$|M\{F_{t,\mathbf{x}}(T)\} - M\{\hat{F}_{t,\mathbf{x}}^\Delta(T)\}| \leq K\Delta,$$

где постоянная K не зависит от $\Delta, t, \mathbf{x}$.

В заключение рассмотрим численный пример [70, 86], иллюстрирующий описанный подход.

Положим

$$n = 1, \quad \varphi(x, t) \equiv 1, \quad c(x, t) = -\frac{x^2}{2}, \quad \mathbf{x}^{(1)} \stackrel{\text{def}}{=} x \in \mathbb{R}^1. \quad (16.39)$$

Известно [70] (см. также [86]), что функция

$$u(x, t) = e^{\frac{1}{2}(T-t-x^2\text{th}(T-t))} \sqrt{\frac{2}{1+e^{2(T-t)}}}, \quad (16.40)$$

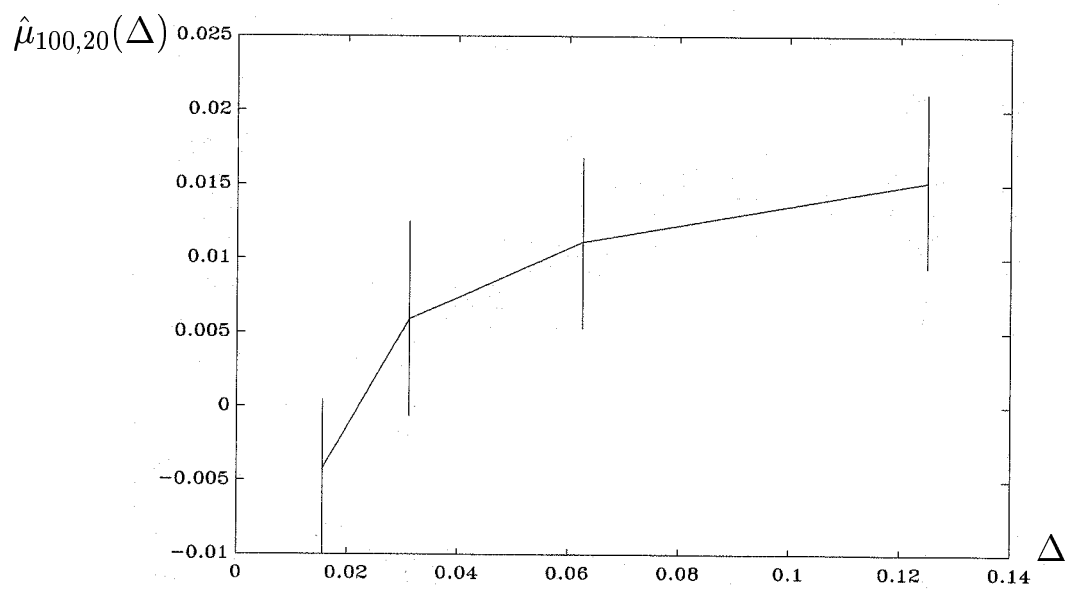


Рис.16.7. Результат численного эксперимента 16.4.

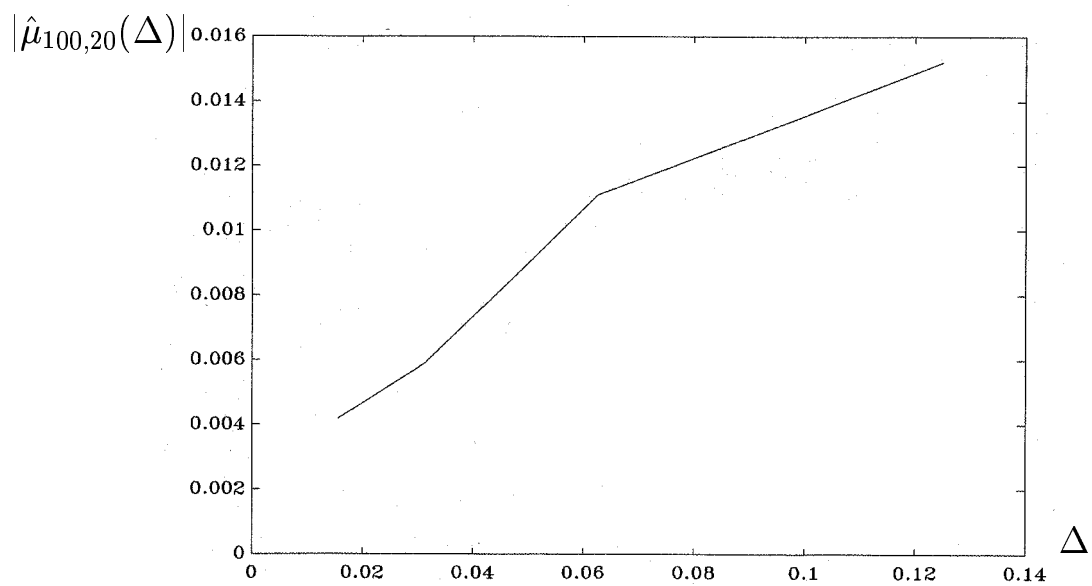


Рис.16.8. Результат численного эксперимента 16.4.

где $\text{th} y \stackrel{\text{def}}{=} \frac{e^y - e^{-y}}{e^y + e^{-y}}$; $t \in [0, T]$; $x \in \mathbb{R}^1$, является решением задачи (16.29), (16.30) в условиях (16.39).

Из (16.40) следует

$$u(0, 0) = \sqrt{\frac{2e^T}{1 + e^{2T}}} \stackrel{\text{def}}{=} U.$$

Численный эксперимент 16.4 [86]. *Смоделировать 2000 независимых реализаций ($M = 20$ групп по $N = 100$ реализаций) случайной величины $\hat{F}_{t,x}^\Delta(T)$ вида (16.38) при $x = t = 0$, $\Delta = 2^{-3}$, $T = 1$ с помощью численной схемы (16.34)–(16.36) и вычислить оценку $\hat{\mu}_{100,20}$ ошибки*

$$\mu = M\{\hat{F}_{0,0}^\Delta(1)\} - U$$

по формуле (10.2). Построить 90%-й доверительный интервал для μ . Повторить вычисления для $\Delta = 2^{-j}$, $j = 4, 5, 6$. Изобразить графически зависимость $\hat{\mu}_{100,20}(\Delta)$ с соответствующими доверительными интервалами, а также зависимость $|\hat{\mu}_{100,20}(\Delta)|$.

Результат выполнения численного эксперимента 16.4 изображен на рис.16.7, 16.8. Вычисления проводились здесь независимо, и результаты дали достаточно хорошее совпадение с результатами, полученными в [86].

16.4 Численное решение задачи Коши для уравнений в частных производных параболического типа с помощью слабых численных методов и метода Монте-Карло

Рассмотрим нелинейную задачу теплопроводности:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left((2 - \text{th} x) \frac{\partial u}{\partial x} \right), \quad (16.41)$$

$$u(x, 0) = \frac{1}{1 + (x - 1)^8}, \quad x \in \mathbb{R}^1, \quad t > 0. \quad (16.42)$$

Эта задача моделирует "растекание" начального распределения температуры (16.42) вблизи стыка двух материалов с существенно различными коэффициентами теплопроводности.

Вероятностное представление решения задачи (16.41), (16.42) имеет вид

$$u(x, t) = M\{1/(1 + (\xi_t^{0,x} - 1)^8)\}, \quad (16.43)$$

где $\xi_s^{0,x} \stackrel{\text{def}}{=} \xi_s$; $0 < s < t$; $t > 0$ — решение стохастического дифференциального уравнения Ито вида

$$d\xi_s = -\frac{ds}{\text{ch}^2 \xi_s} + \sqrt{2(2 - \text{th} \xi_s)} dw_s; \quad \xi_0 = x,$$

w_s — скалярный стандартный винеровский процесс.

Для численного решения данной задачи применим, построенный автором слабый численный метод четвертого порядка (10.22), (10.26)–(10.34).

Численный эксперимент 16.5 (рис.16.9) Реализовать численно соотношение (16.43) с помощью метода Монте–Карло и слабого численного метода 4 порядка (10.22), (10.26)–(10.34) по формуле:

$$u(x, t) \approx \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \frac{1}{1 + (y_{t,i}^{0,x} - 1)^8}$$

при $N = 1000$, $t = 1$, $y_t^{0,x}$ — приближенное значение случайной величины $\xi_t^{0,x}$, полученное с помощью численного метода (10.22), (10.26)–(10.34) при постоянном шаге интегрирования $\Delta = 2^{-5}$, $y_{t,i}^{0,x}$ ($i = 1, \dots, N$) — независимые реализации случайной величины $y_t^{0,x}$.

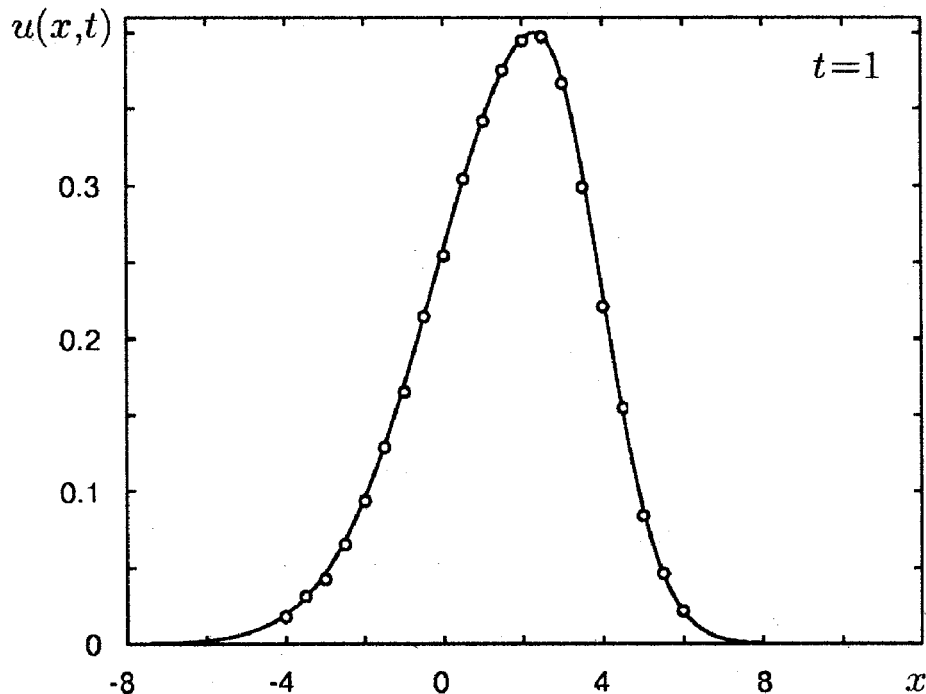


Рис.16.9. Результат численного эксперимента 16.5.

Изобразить график решения $u(x, 1)$ кружками. Повторить вычисление $u(x, 1)$ с помощью метода конечных элементов и изобразить график $u(x, 1)$ сплошной линией.

Библиография

- [1] *Boyce W. E.* Approximate solution of random ordinary differential equations // Adv. in Appl. Probab. 1978. N 10. P. 172–184.
- [2] *Кушнер Г. Дж.* Вероятностные методы аппроксимации в стохастических задачах управления и теории эллиптических уравнений. М.: Наука, 1985. 222 с.
- [3] *Гихман И.И., Скороход А.В.* Введение в теорию случайных процессов. М.: Наука, 1977. 660 с.
- [4] *Гихман И.И., Скороход А.В.* Стохастические дифференциальные уравнения. Киев: Наукова думка, 1968. 354 с.
- [5] *Гихман И.И., Скороход А.В.* Теория случайных процессов. Т.3. М.: Наука, 1975. 469 с.
- [6] *Гихман И.И., Скороход А.В.* Стохастические дифференциальные уравнения и их приложения. Киев.: Наукова думка, 1982. 612 с.
- [7] *Ширяев А.Н.* Вероятность. М.: Наука, 1989. 640 с.
- [8] *Липцер Р.Ш., Ширяев А.Н.* Статистика случайных процессов: Нелинейная фильтрация и смежные вопросы. М.: Наука, 1974. 696 с.
- [9] *Розанов Ю.А.* Стационарные случайные процессы. М.: Физматгиз, 1963. 284 с.
- [10] *Стратонович Р.Л.* Условные марковские процессы и их применение к теории оптимального управления. М: Изд-во МГУ, 1966. 320 с.
- [11] *Ермаков С.М., Михайлов Г.А.* Курс статистического моделирования. М.: Наука, 1976. 320 с.
- [12] *Фридман А.* Уравнения в частных производных параболического типа. М.: Мир, 1968. 427 с.

- [13] *Smoluhovski M. V.* Drei Vorträge über Diffusion Brownsche Bewegung und Koagulation von Kolloidteilchen // *Phys. Z.* 1906. Bd 17. S. 557–585.
- [14] *Ладыженская О.А., Солонников В.А., Уральцева Н.Н.* Линейные и квазилинейные уравнения параболического типа. М.: Наука, 1967. 736 с.
- [15] *Тихонов А.Н., Самарский А.А.* Уравнения математической физики. 5-е изд. М.: Наука, 1977. 735 с.
- [16] *Арсенин В.Я.* Методы математической физики и специальные функции. М.: Наука, 1974. 431 с.
- [17] *Гантмахер Ф.Р.* Теория матриц. М.: Наука, 1988. 552 с.
- [18] *Ширяев А.Н.* Основы стохастической финансовой математики: В 2-х т. М.: Фазис, 1998. Т. 1. 512 с. Т. 2. 544 с.
- [19] *Björk T., Kabanov Yu., Runggaldier W.* Bond market structure in the presence of marked point processes // *Math. Finance.* 1997. Vol. 7. N 2. P. 211–239.
- [20] *Hull J., White A.* The pricing of options as assets with stochastic volatilities // *J. Finance.* 1987. Vol. 42. P. 281–300.
- [21] *Merton R.C.* Option pricing when underlying stock returns and discontinuous // *J. Financial Economics.* 1976. N 3. P. 125–144.
- [22] *Merton R.C.* Continuous-time finance. Oxford; N.Y.: Blackwell, 1990. 453 p.
- [23] *Hull J.* Options, futures and other derivatives securities. N. Y.: J.Willey and Sons, 1993. 368 p.
- [24] *Bachelier L.* Théorie de la spéculation // *Ann. Sci. Ecol. Norm. Sup. Ser.3.* 1900. Vol. 17. P. 21–86.
- [25] *Einstein A.* Investigations on the theory of the Brownien movement. N. Y.: Dover, 1956. 122 p.
- [26] *Pontrjagin L.S., Andronov A.A., Witt A.A.* Statistische Auffassung dynamischer Systeme // *Phys. Z.* 1934. Bd 6. S. 1–24.
- [27] *Ван-дер-Зил А.* Флуктуации в радиотехнике и физике. М.; Л.: Госэнергоиздат, 1958. 320 с.

- [28] *Стратонович Р.Л., Полякова М.С.* Элементы молекулярной физики, термодинамики и статистической физики. М.: Изд-во МГУ, 1981. 176 с.
- [29] *Nyquist H.* Thermal agittation of electric charge in conductors // *Phys. Rev.* 1928. Vol. 32. P. 110.
- [30] *Стратонович Р. Л.* Избранные вопросы теории флуктуаций в радиотехнике. М: Советское радио, 1961. 556 с.
- [31] *Arato M.* Linear stochastic systems with constant coefficients. A statistical approach. Berlin; Heidelberg; N. Y.: Springer-Verlag, 1982. 289 p.
- [32] *Орлов А.* Служба Широты. М: Изд-во АН СССР, 1958. 126 с.
- [33] *Арато М., Колмогоров А.Н., Синай Я.Г.* Об оценках параметров комплексного стационарного гауссовского марковского процесса // *Докл. АН СССР.* 1962. Т. 146. N 4, С. 747–750.
- [34] *Неймарк Ю.И., Ланда П.С.* Стохастические и хаотические колебания. М: Наука, 1987. 424 с.
- [35] *Lotka A.J.* Undamped oscillations derived from the law of mass action // *J. Amer. Chem. Soc.* 1920. Vol. 42. N 8. P. 1595–1599.
- [36] *Вольтерра В.* Математическая теория борьбы за существование. М: Наука, 1976. 286 с.
- [37] *Белоусов Б.П.* Периодически действующая реакция и ее механизм // *Сб. рефератов по радиационной медицине.* М: Медгиз, 1959. С. 145–148.
- [38] *Жаботинский А.М.* Концентрационные автоколебания. М: Наука, 1974. 178 с.
- [39] *Романовский Ю.М., Степанова Н.В., Чернавский Д.С.* Математическая биофизика. М: Наука, 1984. 304 с.
- [40] *Obukhov A.M.* Description of turbulence in Lagrangian variables // *Adv. Geophys.* 1959. N 3. P. 113–115.
- [41] *Первозванский А.А.* Рынок: Расчет и риск. М.: ИНФРА, 1994. 210 с.

- [42] *Wolf J.R.* Neue Untersuchungen über die Periode der Sonnenflecken und ihre Bedeutung // Mit. Naturforsch. Ges. Bern. 1852. Bd 255. S. 249–270.
- [43] *Слуцкий Е.Е.* О 11-летней периодичности солнечных пятен // Докл. АН СССР. 1935. Т. 4. N 9. Вып.1–2. С. 35–38.
- [44] *Henrici P.* Discrete variable methods in ordinary differential equations. N. Y.: Wiley, 1962. 407 p.
- [45] *Rössler O.E.* An equation for continuous chaos // Phys. Lett. 1976. Vol. 57A. N 5. P. 397–398.
- [46] *Хасьминский Р.З.* Устойчивость систем дифференциальных уравнений при случайных возмущениях их параметров. М.: Наука, 1969. 365 с.
- [47] *Кушнер Г. Дж.* Стохастическая устойчивость и управление. М.: Мир, 1969. 200 с.
- [48] *Баркин А.И., Зеленцовский А.Л., Пакин П.В.* Абсолютная устойчивость детерминированных и стохастических систем управления. М.: Изд-во МАИ, 1992. 303 с.
- [49] *Козин Ф.* Введение в устойчивость стохастических систем // Автоматика. 1969. N 5. С. 95–112.
- [50] *Arnold L., Kloeden P.E.* Explicit formulae for the Lyapunov exponents and rotation number of two-dimensional systems with telegraphic noise // SIAM J. Appl. Math. 1989. Vol. 49. P. 1242–1274.
- [51] *Auslender E.I., Milstein G.N.* Asymptotic expansion of the Lyapunov index for linear stochastic systems with small noise // Prikl. Mat. Mekh. 1982. Vol. 46. P. 358–365.
- [52] *Самарский А.А., Галактионов В.А., Курдюмов С.П., Михайлов А.П.* Режимы с обострением в задачах для квазилинейных параболических уравнений. М.: Наука, 1987. 476 с.
- [53] *Самарский А.А.* Теория разностных схем: 3-е изд. М.: Наука, 1989. 614 с.
- [54] *Кас М.* On distribution of certain Wiener functionals // Trans. Amer. Math. Soc. 1949. Vol. 65. P. 1–13.

- [55] *Kac M.* On some connections between probability theory and differential and integral equations // Proc. Second Berkley Symp. Math. Stat. Probab. 1951. Vol. 1. P. 189–215.
- [56] *Philips H.B., Wiener N.* Nets and Dirichlet problem // J. Math. Phys. 1923. Vol. 2. P. 105–124.
- [57] *Petrovski I.G.* Über das Irrfahrtproblem // Math. Ann. 1934. Bd 109. S. 425–444.
- [58] *Doob J.L.* Semimartingales and subharmonic functions // Trans. Amer. Math. Soc. 1954. Vol. 77. P. 86–121.
- [59] *Ueno T.* The diffusion satisfying Wentzell's boundary conditions and the Markov processes on the boundary // Proc. Japan Akad. 1960. Vol. 36. P. 533–538.
- [60] *Maruyama G.* Continuous Markov processes and stochastic equations // Rend. Circ. Math. Palermo. 1955. N 4. P. 1–43.
- [61] *Blumenthal R.M., Gettoor R.K., McKean H.P.* Markov processes with identical hitting distributions // Illinois J. Math. 1962. Vol. 6. P. 402–421.
- [62] *Hunt G.A.* Markov processes and potentials // Illinois J. Math. 1957. Vol. 1. P. 44–93, 316–369, 1958. Vol. 2. P. 151–213.
- [63] *Ито К.* Вероятностные процессы. Вып.2. М.: ИЛ, 1963. 135 с.
- [64] *Ватанабэ С., Икэда Н.* Стохастические дифференциальные уравнения и диффузионные процессы. М.: Наука, 1986. 445 с.
- [65] *Королук В.С., Портенко Н.И., Скороход А.В., Турбин А.Ф.* Справочник по теории вероятностей и математической статистике. М.: Наука, 1985. 640 с.
- [66] *Гирсанов И.В.* О преобразовании одного класса случайных процессов с помощью абсолютно непрерывной замены меры // Теория вероятн. и ее прим. 1960. Т. 5. Вып. 3. С. 314–330.
- [67] *Мильштейн Г.Н.* Приближенное интегрирование стохастических дифференциальных уравнений // Теория вероятн. и ее прим. 1974. Т.19. С. 557–562.

- [68] *Мильштейн Г.Н.* Метод второго порядка точности интегрирования стохастических дифференциальных уравнений // Теория вероятн. и ее прим. 1978. Т. 23. С. 396–401.
- [69] *Мильштейн Г.Н.* Слабая аппроксимация решений систем стохастических дифференциальных уравнений // Теория вероятн. и ее прим. 1985. Т. 30. С. 750–766.
- [70] *Мильштейн Г.Н.* Численное интегрирование стохастических дифференциальных уравнений. Свердловск: Изд-во Уральск. ун-та, 1988. 225 с.
- [71] *Мильштейн Г.Н.* Решение первой краевой задачи для уравнений параболического типа с помощью интегрирования стохастических дифференциальных уравнений // Теория вероятн. и ее прим. 1995. Т. 40. С. 657–665.
- [72] *Milstein G.N.* The probability approach to numerical solution of nonlinear parabolic equations. 1997. Preprint N 380, WIAS. 29 p.
- [73] *Дзагнидзе З.А., Читашвили Р.Я.* Приближенное интегрирование стохастических дифференциальных уравнений // Труды IV. Тбил. гос. ун-т. Ин-т прикл. мат. 1975. С. 267–279.
- [74] *Аталла М.А.* Конечно-разностные аппроксимации для стохастических дифференциальных уравнений // Вероятностные методы исследования систем с бесконечным числом степеней свободы. Киев. 1986. С. 11–16.
- [75] *Никитин Н.Н., Разевиг В.Д.* Методы цифрового моделирования стохастических дифференциальных уравнений и оценка их погрешностей // Журн. вычисл. мат. и мат. физики. 1978. Т. 18. N 1. С. 106–117.
- [76] *Разевиг В.Д.* Цифровое моделирование многомерных динамических систем при случайных воздействиях // Автоматика и телемеханика. 1980. N 4. С. 177–186.
- [77] *Maghsoodi Y., Harris C.J.* In-probability approximation and simulation of nonlinear jump-diffusion SDE // IMA J. Math. Control Inform. 1987. N 4 P. 65–92.
- [78] *Maghsoodi Y.* Mean-square efficient numerical solution of jump-diffusion SDE. 1994. Preprint OR72. Univ. of Southampton. UK. 26 p.

- [79] *Wagner W., Platen E.* Approximation of Ito integral equations. 1978. Preprint ZIMM Akad. Wiss. DDR. Berlin. 1978. 27 p.
- [80] *Platen E.* A Taylor–Ito formula for semimartingales solving a stochastic differential equation // Springer Lecture Notes in Control and Inform. Sci. 1981. Vol. 36. P. 157–164.
- [81] *Platen E., Wagner W.* On a Taylor formula for a class of Ito processes // Probab. Math. Statist. 1982. N 3. P. 37–51.
- [82] *Platen E.* A generalized Taylor formula for solutions of stochastic differential equations // Sankhya. Vol. 44A. 1982. P. 163–172.
- [83] *Platen E.* An approximation method for a class of Ito processes with jump component // Lietuvos Mat. Rink. 1982. N 22. P. 124–136.
- [84] *Kloeden P.E., Platen E.* The Stratonovich and Ito–Taylor expansions // Math. Nachr. 1991. Bd 151. S. 33–50.
- [85] *Pettersson R.* The Stratonovich–Taylor expansion and numerical methods // Stoch. Anal. Appl. 1992. Vol.10. N 5. P. 603–612.
- [86] *Kloeden P.E., Platen E.* Numerical solution of stochastic differential equations. Berlin: Springer-Verlag, 1992. 632 p.
- [87] *Kloeden P.E., Platen E., Schurz H.* Numerical solution of SDE through computer experiments. Berlin: Springer-Verlag, 1994. 292 p.
- [88] *Mikulevicius R., Platen E.* Time discrete Taylor approximations for Ito processes with jump component // Math. Nachr. 1988. Bd 138. S. 93–104.
- [89] *Mikulevicius R., Platen E.* Rate of convergence of the Euler approximation for diffusion processes // Math. Nachr. 1991. Bd 151. S. 233–239.
- [90] *Mikulevicius R.* On some properties of solutions of stochastic differential equations // Lietuvos Mat. Rink. 1983. N 4. P. 18–31.
- [91] *Platen E.* An introduction to numerical methods for stochastic differential equations // Acta Numerica. 1999. N 8. P. 195–244.
- [92] *Kloeden P.E., Platen E., Schurz H., Sorensen M.* On effects of discretization on estimators of drift parameters for diffusion processes // J. Appl. Probab. 1996. Vol. 33. P. 1061–1076.

- [93] *Milstein G.N., Platen E., Schurz H.* Balanced implicit methods for stiff stochastic systems // SIAM J. Numer. Anal. 1998. Vol. 35. N 3. P. 1010–1019.
- [94] *Hofmann N., Platen E.* Stability of superimplisit numerical methods for stochastic differential equations // Fields Inst. Communications. 1996. Vol. 9. P. 93–104.
- [95] *Hofmann N., Platen E.* Stability of weak numerical schemes for stochastic differential equations // Comput. Math. Appl. 1994. Vol. 28, N 10–12. P. 45–57.
- [96] *Platen E.* On weak implicit and predictor–corrector methods // Math. Comput. Simulation. 1995. Vol. 38. P. 69–76.
- [97] *Platen E.* Higher-order weak approximation of Ito diffusions by Markov chains // Probab. Eng. Inform. Sci. 1992. N 6. P. 391–408.
- [98] *Kloeden P.E., Platen E., Wright I.W.* The approximation of multiple stochastic integrals // Stoch. Anal. Appl. 1992. Vol. 10. N 4. P. 431–441.
- [99] *Schurz H.* Asymptotical mean square stability of an equilibrium point of some linear numerical solutions with multiplicative noise // Stoch. Anal. Appl. 1996. Vol. 14. P. 313–354.
- [100] *Кузнецов Д.Ф.* Слабый численный метод четвертого порядка для стохастических дифференциальных уравнений Ито // Вестн. молодых ученых. Сер. прикл. мат. и мех. 2000. N 4. С. 47–52.
- [101] *Кузнецов Д.Ф.* Методы численного моделирования решений систем стохастических дифференциальных уравнений Ито в задачах механики. Автореф. дис. канд. физ.-мат. наук. СПб: ИПЦ СПбГТУ. 1996. С. 1–19.
- [102] *Кузнецов Д.Ф.* Конечно-разностная аппроксимация разложения Тейлора–Ито и конечно-разностные методы численного интегрирования стохастических дифференциальных уравнений Ито. 1996. 24 с. Деп. в ВИНТИ. 3509-B96.
- [103] *Кузнецов Д.Ф.* Конечно-разностный метод численного интегрирования стохастических дифференциальных уравнений Ито с локальной среднеквадратической погрешностью третьего порядка малости. 1996. 27 с. Деп. в ВИНТИ. 3510-B96.

- [104] *Кузнецов Д.Ф.* Теоремы о замене порядка интегрирования в повторных стохастических интегралах. 1997. 31 с. Деп. в ВИНТИ. 3607-B97. 10.12.97.
- [105] *Кульчицкий О.Ю., Кузнецов Д.Ф.* Унифицированное разложение Тейлора–Ито // Зап. науч. сем. ПОМИ им. В. А. Стеклова. 1997. Т. 244. С. 186–204.
- [106] *Кузнецов Д.Ф.* Метод разложения и аппроксимации повторных стохастических интегралов Стратоновича, основанный на кратных рядах Фурье по полным ортонормированным системам функций и его применение к численному решению стохастических дифференциальных уравнений // Труды конф. "Средства мат. моделир." СПб: Изд-во СПбГТУ. 1998. С. 135–160.
- [107] *Kuznetsov D.F.* Method of expansion and approximation of repeated stochastic Stratonovich integrals, which is based on multiple Fourier series on full orthonormal systems // Abstracts of the international conference "Asymptotic methods in probability and mathematical statistics". St.-Petersburg. 24–28 June 1998. P. 146–149.
- [108] *Кузнецов Д.Ф.* Использование различных полных ортонормированных систем функций для численного решения стохастических дифференциальных уравнений Ито // Вторая междунар. конф. "Дифференц. уравнения и их прим." 15–20 июня 1998: Тезисы докладов. СПб: Изд-во СПбГТУ. 1998. С. 128–129.
- [109] *Кузнецов Д.Ф.* Некоторые вопросы теории численного решения стохастических дифференциальных уравнений Ито. СПб.: Изд-во СПбГТУ. 1998. 203 с.
- [110] *Кузнецов Д.Ф.* Применение методов аппроксимации повторных стохастических интегралов Стратоновича и Ито к численному моделированию управляемых стохастических систем // Проблемы управления и информатики. 1999. N 4. С. 91–108.
- [111] *Кузнецов Д.Ф.* Разложение повторных стохастических интегралов Стратоновича, основанное на кратных рядах Фурье // Зап. науч. сем. ПОМИ им. В. А. Стеклова. 1999. Т. 260. С. 164–185.
- [112] *Кузнецов Д.Ф.* К проблеме численного моделирования стохастических систем // Вестн. молодых ученых. Сер. прикл. мат. и мех. 1999. N 1. С. 20–32.

- [113] *Кузнецов Д.Ф.* Симметризованные повторные стохастические интегралы по пуассоновским мерам и их аппроксимация, основанная на кратных рядах Фурье. СПб.: Изд-во СПбГТУ. 1999. 23 с.
- [114] *Кузнецов Д.Ф.* Два новых представления разложения Тейлора–Стратоновича. СПб.: Изд-во СПбГТУ. 1999. 18 с.
- [115] *Кузнецов Д.Ф.* Повторные симметризованные стохастические интегралы по мартингалам и их разложение, основанное на кратных рядах Фурье. СПб.: Изд-во СПбГТУ. 1999. 18 с.
- [116] *Кузнецов Д.Ф.* Замена порядка интегрирования в повторных стохастических интегралах по мартингалу. СПб.: Изд-во СПбГТУ. 1999. 11 с.
- [117] *Кузнецов Д.Ф.* Применение полиномов Лежандра к среднеквадратической аппроксимации решений стохастических дифференциальных уравнений // Проблемы управления и информатики. 2000. N 5. С. 84–104.
- [118] *Кузнецов Д.Ф.* Численное моделирование стохастических дифференциальных уравнений и стохастических интегралов. СПб.: Наука, 1999. 459 с.
- [119] *Кульчицкий О.Ю., Кузнецов Д.Ф.* Разложение процессов Ито в ряд Тейлора–Ито в окрестности фиксированного момента времени. 1993. 26 с. Деп. в ВИНТИ. 2637-B93. 26.10.93.
- [120] *Кульчицкий О.Ю., Кузнецов Д.Ф.* О проблеме корректного моделирования решений систем стохастических дифференциальных уравнений Ито // Механика и процессы управления. 1995. N 458. С. 162–168.
- [121] *Kulchitski O.Yu., Kuznetsov D.F.* The Taylor–Ito expansion of Ito processes, which are generated by solution of stochastic differential Ito equation // Abstracts of the 1st International scientific and practical conference "Differential equations and applications", St.Petersburg, 3–5 December 1996. P. 137–138.
- [122] *Kulchitski O.Yu., Kuznetsov D.F.* Numerical simulation of stochastic control systems // Proceedings of the International Conference on Informatics and Control, St.Petersburg, 9–13 June 1997. Vol. 1. P. 368–376.

- [123] *Кульчицкий О.Ю., Кузнецов Д.Ф.* Численное моделирование стохастических систем управления, описываемых системами дифференциальных уравнений Ито // 3-я Українська конференція з автоматичного керування "Автоматика 96". Севастополь, 21–24 сентября 1996: Тезисы докладов. Т.1. С. 162–163.
- [124] *Kulchitski O.Yu., Kuznetsov D.F.* Numerical simulation of nonlinear oscillatory systems under stochastic perturbations // Proceedings of the 1st international conference "Control of oscillations and chaos". St.Petersburg. 27–29 August 1997. Vol. 2. P. 242–245.
- [125] *Кульчицкий О.Ю., Кузнецов Д.Ф.* Библиотека программ стохастического моделирования линейных управляемых систем в среде MatLAB // Рабочая встреча "Средства математического моделирования". Санкт-Петербург, 3-6 декабря 1997: Тезисы докладов. С. 97–98.
- [126] *Кульчицкий О.Ю., Кузнецов Д.Ф.* Численные методы моделирования систем управления, описываемых стохастическими дифференциальными уравнениями // Проблемы управления и информатики. 1998. N 2. С. 57–72.
- [127] *Скорород А.В.* Случайные процессы с независимыми приращениями. М.: Наука, 1964. 280 с.
- [128] *Харди Г.Х., Rogozinskiy B.B.* Ряды Фурье. М.: Гос. изд-во физ.-мат. лит., 1963. 156 с.
- [129] *Гобсон Е.В.* Теория сферических и эллипсоидальных функций. М.: ИЛ, 1952. 476 с.
- [130] *Chung K.L., Williams R.J.* Introduction to stochastic integration. Progress in probability and stochastics. Vol. 4 / Ed. P. Huber, M. Rosenblatt. Boston; Basel; Stuttgart: Birkhäuser. 1983. 152 p.
- [131] *Рыжик И.М., Градштейн И.С.* Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. 3-е изд. М.; Л.: Гос. изд-во техн.-теор. лит., 1951. 464 с.
- [132] *Дынкин Е.Б.* Марковские процессы. М.: Наука, 1963. 860 с.
- [133] *Kamke E.* Differential Gleichungen Lösungsmethoden und Lösungen. Vol.1. Gewöhnliche differential Gleichungen. Leipzig: Verbesserte Auflage, 1959. 576 S.

- [134] *Maruyama G.* Continuous Markov processes and stochastic equations // Rend. Circ. Math. Palermo. 1955. N 4. P. 48–90.
- [135] *Clements D.J., Anderson B.D.O.* Well behaved Ito equations with simulations that always misbehave // IEEE Trans. Automat. Control. 1973. AC-18. P. 676–677.
- [136] *Wright D.J.* The digital simulation of stochastic differential equations // IEEE Trans. Automat. Control. 1974. AC-19. P. 75–76.
- [137] *Wright D.J.* Digital simulation of Poisson stochastic differential equations // Internat. J. Systems Sci. 1980. Vol. 11. N 6. P. 781–785.
- [138] *Rumelin W.* Numerical treatment of stochastic differential equations // SIAM J. Numer. Anal. 1982. Vol.19. P. 604–613.
- [139] *Platen E.* Zur zeitdiskreten Approximation von Itoprozessen. Diss. B., I Math., Akad. Wiss. DDR. 1984. Berlin.
- [140] *Gard T.C.* Introduction to stochastic differential equations. N. Y.: Marcel Dekker, 1988. 324 p.
- [141] *Chang C.C.* Numerical solution of stochastic differential equations with constant diffusion coefficients // Math. Comput. 1987. Vol. 49. P. 523–542.
- [142] *Talay D.* Convergence pour chaque trajectoire d'un schéma d'approximation des EDS // Computes Rendus Acad. Sci. Paris. Sér. I. Math. 1982. Vol. 295. P. 249–252.
- [143] *Talay D., Tubaro L.* Expansion of the global error for numerical schemes solving stochastic differential equations // Stoch. Anal. Appl. 1990. Vol. 8. N 4. P. 483–509.
- [144] *Talay D.* Efficient numerical schemes for the approximation of expectations of functionals of the solution of an SDE and applications // Springer Lecture Notes in Control and Inform. Sci. 1984. Vol. 61. P. 294–313.
- [145] *Greenside H.S., Helfand E.* Numerical integration of stochastic differential equations. II // Bell System Tech. J. 1981. Vol. 60. P. 1927–1940.
- [146] *Klauder J.R., Petersen W.P.* Numerical integration of multiplicative-noise stochastic differential equations // SIAM J. Numer. Anal. 1985. Vol. 22. P. 1153–1166.

- [147] *Kloeden P.E., Platen E.* Higher-order implicit strong numerical schemes for stochastic differential equations // J. Statist. Physics. 1992. Vol. 66. P. 283–314.
- [148] *Kloeden P.E., Platen E., Hofmann N.* Extrapolation methods for the weak approximation of Ito diffusions // SIAM J. Numer. Anal. 1995. Vol. 32. P. 1519–1534.
- [149] *Hernandez D.B., Spigler R.* Convergence and stability of implicit Runge–Kutta methods for systems with multiplicative noise // BIT. 1993. Vol. 33. P. 654–669.
- [150] *Haworth D.C., Pope S.B.* A second-order Monte–Carlo method for the solution of the Ito stochastic differential equation // Stoch. Anal. Appl. 1986. N 4. P. 151–186.
- [151] *Аверина Т.А., Артемьев С.С.* Новое семейство численных методов для решения стохастических дифференциальных уравнений // Докл. АН СССР. 1986. Т. 288. N 4. С. 777–780.
- [152] *Wagner W.* Unbiased Monte–Carlo evaluation of certain functional integrals // J. Comput. Phys. 1987. Vol. 71. P. 21–33.
- [153] *Wagner W.* Monte–Carlo evaluation of functionals of solutions of stochastic differential equations. Variance reduction and numerical examples // Stoch. Anal. Appl. 1988. N 6. P. 447–468.
- [154] *Arnold L.* Stochastic differential equations: Theory and applications. N. Y.: Wiley, 1974. 228 p.
- [155] *Richardson J.M.* The application of truncated hierarchy techniques in the solution of a stochastic linear differential equation. In Stochastic Processes in Mathematical Physics and Engineering // Proc. Symp. Appl. Math. Vol. 16. 1964 / Ed. R. Bellman. Amer. Math. Soc. Providence RI. P. 290–302.
- [156] *McKenna J., Morrison J.A.* Moments and correlation functions of a stochastic differential equation // J. Math. Phys. 1970. Vol. 11. P. 2348–2360.
- [157] *McKenna J., Morrison J.A.* Moments of solutions of a class of stochastic differential equations // J. Math. Phys. 1971. Vol. 12. P. 2126–2136.

- [158] *Klauder J.R., Petersen W.P.* Spectrum of certain non-self-adjoint operators and solutions of Langevin equations with complex drift // J. Statist. Phys. 1985. Vol. 39. P. 53–72.
- [159] *Пугачев В.С., Суничын И.Н.* Стохастические дифференциальные системы: Анализ и фильтрация. М.: Наука, 1985. 559 с.
- [160] *Mikulevicius R.* On some properties of solutions of stochastic differential equations // Lietuvos Mat. Rink. 1983. N 4. P. 18–31.
- [161] *Strook D.W., Varadhan S.R.S.* Multidimensional diffusion processes. Berlin: Springer, 1979. 338 p.
- [162] *Артемьев С.С., Шкурко И.О.* Численное решение линейных систем стохастических дифференциальных уравнений // VII Всесоюз. совещание "Методы Монте-Карло в вычислительной математике и математической физике", 9–11 октября 1985 г. Новосибирск: Тезисы докладов С. 144–146.
- [163] *Shkurko I.O.* Numerical solution of linear systems of stochastic differential equations // Numer. Methods Statist. Modeling. Collected Scientific Works. Novosibirsk, 1987. P. 101–109.
- [164] *Понтрягин Л.С.* Обыкновенные дифференциальные уравнения. Изд. 5-е. М.: Наука, 1982. 331 с.
- [165] *Бахвалов Н.С.* Численные методы. М.: Физматгиз, 1973. 631 с.
- [166] *Дьяконов В.П.* Справочник по применению системы РС MatLab. М.: Наука, 1993. 111 с.
- [167] *Кореневский М.Л.* Об оптимизации одного метода приближенного вычисления матричной экспоненты // Труды междунар. конф. "Средства математического моделирования". СПб.: Изд-во СПб ГТУ, 1997. С. 125–134.
- [168] *Арсеньев Д.Г., Иванов В.М., Кульчицкий О.Ю.* Численное моделирование линейных стохастических систем дифференциальных уравнений. СПб.: Наука, 1999. 132 с.
- [169] *Арсеньев Д.Г., Кульчицкий О.Ю.* Оптимизация алгоритмов численного интегрирования жестких линейных систем дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами. 1986. 32 с. Деп. в ВИНТИ. 732-B86. 31.01.86.

- [170] *Арсеньев Д.Г., Иванов В.М., Кульчицкий О.Ю.* Адаптивные методы вычислительной математики и механики. Стохастический вариант. СПб: Наука, 1996. 366 с.
- [171] *Newton N.J.* An asymptotically efficient difference formula for solving stochastic differential equations // *Stochastics*. 1986. Vol. 19. P. 175–206.
- [172] *Newton N.J.* Asymptotically optimal discrete approximations for stochastic differential equations. In theory and applications of nonlinear control systems / Ed. C. Byrnes, A. Lindquist. Amsterdam: North-Holland, 1986. P. 555–567.
- [173] *Newton N.J.* Asymptotically efficient Runge–Kutta methods for a class of Ito and Stratonovich equations // *SIAM J. Appl. Math.* 1991. Vol. 51. P. 542–567.
- [174] *Гладышев С.А., Мильштейн Г.Н.* Метод Рунге–Кутты для вычисления винеровских интегралов экспоненциального типа // *Журн. вычисл. мат. и мат. физики*. 1985. Т. 24 С. 1136–1149.
- [175] *Толстов Г.П.* Ряды Фурье. М.; Л.: Гос. изд-во техн.-теор. лит., 1951. 396 с.
- [176] *Кульчицкий О.Ю., Кузнецов Д.Ф.* Аппроксимация кратных стохастических интегралов Ито. 1994. Деп. в ВИНТИ. 1678-В94.
- [177] *Кузнецов Д.Ф.* Численное интегрирование стохастических дифференциальных уравнений. СПб.: Издательство С. - Петербургского государственного университета, 2001. 712 с.
- [178] *Кузнецов Д.Ф.* Новые представления явных одношаговых численных методов для стохастических дифференциальных уравнений со скачкообразной компонентой // *Журнал вычислительной математики и математической физики*. Т.41. №6. 2001. С.922–937.
- [179] *Кузнецов Д.Ф.* Новые представления разложения Тейлора–Стратоновича // *Зап. науч. сем. ПОМИ им. В. А. Стеклова*. 2001. Т. 278. С. 141–158.
- [180] *Кузнецов Д.Ф.* Конечно-разностные сильные численные методы порядков точности 1.5 и 2.0 для стохастических дифференциальных уравнений Ито с неаддитивным многомерным шумом // *Проблемы управления и информатики*. 2001. N 4. С. 59–73.

- [181] *Кузнецов Д.Ф.* Численное интегрирование стохастических дифференциальных уравнений. Автореф. дис. докт. физ.-мат. наук. СПб: Издательство СПбГПУ. 2002. 33 с.
- [182] *Кузнецов Д.Ф.* Комбинированный метод сильной аппроксимации повторных стохастических интегралов // Проблемы управления и информатики. 2002. N 4. С. 141–147.
- [183] *Кузнецов Д.Ф.* Трехшаговые сильные численные методы для стохастических дифференциальных уравнений Ито // Проблемы управления и информатики. 2002. N 6. С. 104–119.

Обозначения

- $a \in \mathcal{A}$ — a принадлежит множеству $\mathcal{A}$
 $\mathcal{A} \cup \mathcal{B}$ — объединение множеств $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$
 $\mathcal{A} \cap \mathcal{B}$ — пересечение множеств $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$
 $\mathcal{A} \setminus \mathcal{B}$ — разность множеств $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$
 $\mathcal{A} \times \mathcal{B}$ — декартово произведение множеств $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$
 $\equiv$ — тождественное равенство
 $\stackrel{\text{def}}{=}$ — равенство по определению
 $:=$ — присвоить
 $\mathbb{R}^n$ — n -мерное евклидово пространство
 $[a, b], (a, b), [a, b), (a, b]$ — закрытый ($a \leq x \leq b$), открытый ($a < x < b$) и полуоткрытые ($a \leq x < b, a < x \leq b$) интервалы соответственно
 $n!, n!!$ — факториал и двойной факториал натурального числа n соответственно
 $(\cdot, \cdot)$ — скалярное произведение
 N — множество натуральных чисел
 Z — множество целых чисел
 $\emptyset$ — пустое множество
 $[x]$ — наибольшее целое число, не превосходящее x
 $|x|$ — модуль числа x
 $\forall x$ — для всех x
 ∞ — бесконечность
 $1_{\mathcal{A}}$ — индикатор множества $\mathcal{A}$
 $1_{\mathcal{A}}(x)$ — индикаторная функция множества $\mathcal{A}$
 $F: G_1 \rightarrow G_2$ — функция F из G_1 в G_2
 $\mathbf{x} = (\mathbf{x}^{(1)}, \dots, \mathbf{x}^{(n)})^T$ — вектор $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ с компонентами $\mathbf{x}^{(i)}, i = 1, \dots, n$
 $|\mathbf{x}|$ — евклидова норма вектора $\mathbf{x}$
 $\|\cdot\|$ — норма вектора или матрицы
 $\frac{\partial F}{\partial \mathbf{x}^{(i)}}$ — частная производная функции $F: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^1$ по переменной $\mathbf{x}^{(i)}$
 $\frac{\partial^2 F}{\partial \mathbf{x}^{(i)} \partial \mathbf{x}^{(j)}}$ — смешанная частная производная функции $F: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^1$ по переменным $\mathbf{x}^{(j)}$ и $\mathbf{x}^{(i)}$
 $A = \|A^{(ij)}\|_{i,j=1}^{n,m}$ — матрица A размера $n \times m$ с элементами $A^{(ij)}$, $i = 1, \dots, n; j = 1, \dots, m$
 $\text{diag}\{a_i\}_{i=1}^n$ — диагональная матрица с диагональю $a_1, \dots, a_n$
 $|A|, \det(A)$ — определитель матрицы A

$\{a_n\}_{n=0}^N$ — последовательность a_n , $n = 1, 2, \dots, N$; $N \leq \infty$
 $\sup_{x \in \mathcal{X}}$ — супремум по всем x из множества $\mathcal{X}$
 $\max_{x \in \mathcal{X}}, \min_{x \in \mathcal{X}}$ — максимум и минимум по всем x из множества $\mathcal{X}$
соответственно
 $N(m, \sigma)$ — нормальное распределение с параметрами m и σ
 $A > 0$ — положительная определенность матрицы A
 $A^\top$ — транспонированная матрица A
 $\sum_{i=1}^n x_i$ — $x_1 + \dots + x_n$
 $\prod_{i=1}^n x_i$ — $x_1 \cdot \dots \cdot x_n$
 $\sum_{x \in \mathcal{X}}$ — сумма по всем x из множества $\mathcal{X}$
 $\sum_{i_1, \dots, i_k=1}^n$ — $\sum_{i_1=1}^n \dots \sum_{i_k=1}^n$
 ω — элементарное событие
 $M\{\cdot\}$ — математическое ожидание
 $D\{\cdot\}$ — дисперсия
 $P\{\cdot\}$ — вероятность
 $M\{\cdot|\cdot\}$ — условное математическое ожидание
l.i.m. — предел в среднем квадратическом
 x_t — случайный процесс $x(t, \omega)$
 $O(x^p)$ — величина того же порядка малости, что и x^p
 $\int$ — интеграл
 $f_t, f(t, \omega)$ — скалярный винеровский процесс
 $\int \dots df_t$ — стохастический интеграл Ито
 $\int^* \dots df_t$ — стохастический интеграл Стратоновича
 w_t — f_t или t в компактных обозначениях
 $\mathbf{f}_t$ — векторный винеровский процесс
 $\mathbf{f}_t^{(i)}$ — i -я компонента $\mathbf{f}_t$
 $\mathbf{w}_t^{(0)}$ — время t в компактных обозначениях
 $\mathbf{w}_t^{(i)}$ — компонента $\mathbf{f}_t^{(i)}$ векторного винеровского процесса $\mathbf{f}_t$ при $i = 1, \dots, m$
 $\Sigma_i(\mathbf{x}, t)$ — i -й столбец матрицы $\Sigma(\mathbf{x}, t)$
 $\Delta \mathbf{w}_{\tau_j}^{(i)}$ — приращение $\mathbf{w}_{\tau_{j+1}}^{(i)} - \mathbf{w}_{\tau_j}^{(i)}$
 $L, G_0^{(i)}, i = 1, \dots, m$, — операторы сноса и диффузии в формуле Ито
 $^{(k)}A, \|A^{(i_1 \dots i_k)}\|_{i_1, \dots, i_k=1}^{m_1, \dots, m_k}$ — матрица k -го ранга с элементами $A^{(i_1 \dots i_k)}$, $i_l = 1, \dots, m_l; l = 1, \dots, k$

$\cdot^k$ — свертка матриц
 $J_{l_1 \dots l_{k,s,t}}^{(i_1 \dots i_k)}, I_{l_1 \dots l_{k,s,t}}^{(i_1 \dots i_k)}, J_{(\lambda_k \dots \lambda_1)s,t}^{(i_k \dots i_1)}, J[\psi^{(k)}]_{T,t}$ — повторные стохастические интегралы Ито
 $J_{(\lambda_k \dots \lambda_1)s,t}^{*(i_k \dots i_1)}, J^*[\psi^{(k)}]_{T,t}, J_{l_1 \dots l_{k,s,t}}^{*(i_1 \dots i_k)}, I_{l_1 \dots l_{k,s,t}}^{*(i_1 \dots i_k)}$ — повторные стохастические интегралы Стратоновича
 $J_{T,t}^{(k)s_1 \dots s_1}$ — повторный стохастический интеграл
 $\mathcal{CA}$ — множество вида $\{(k)C_{j_1 \dots j_k} : (k, j_1, \dots, j_k) \in \mathcal{A}\}$
 $D_{r+1,s,t}, H_{r+1,s,t}, \hat{H}_{r+1,s,t}$ — остаточные члены в стохастических разложениях
 $\sum_{(\lambda_k, \dots, \lambda_1)}$ — сумма по всем возможным перестановкам $(\lambda_k, \dots, \lambda_1)$
 $[t, T]^k$ — гиперкуб $[t, T] \times \underbrace{\dots \times}_{k-1} [t, T]$
 ${}^{(r_l)}H_l \dots H_1\{\cdot\}$ — матричный дифференциальный оператор
 $C_{j_k \dots j_1}$ — коэффициент кратного ряда Фурье
 $\int_t^T \dots \int_t^T \dots d\mathbf{w}_{t_k}^{(i_k)} \dots d\mathbf{w}_{t_1}^{(i_1)}$ — кратный стохастический интеграл
 $\zeta_{(j_l)T,t}^{(i_l)}, \zeta_j^{(i)}$ — независимые стандартные гауссовские случайные величины
 $\hat{I}_{l_1 \dots l_{k,s,t}}^{(i_1 \dots i_k)}, \hat{J}_{(\lambda_k \dots \lambda_1)s,t}^{(i_k \dots i_1)}$ — аппроксимации повторных стохастических интегралов Ито
 $\hat{J}_{(\lambda_k \dots \lambda_1)s,t}^{*(i_k \dots i_1)}, I_{l_1 \dots l_{k,s,t}}^{*(i_k \dots i_1)q}, J^*[\psi^{(k)}]_{T,t}^q$ — аппроксимации повторных стохастических интегралов Стратоновича

Научное издание

Кузнецов Дмитрий Феликсович

ЧИСЛЕННОЕ ИНТЕГРИРОВАНИЕ СТОХАСТИЧЕСКИХ
ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ. 2

Лицензия ЛР N 020593 от 07.08.97

Налоговая льгота – Общероссийский классификатор продукции
ОК 005-93, т.2; 95 3004 – научная и производственная литература

Подписано в печать 22.05.2006. Формат 70×100/16.
Усл. печ. л. 67,0. Уч. - изд. л. 67,0. Тираж 150. Заказ 209.

Отпечатано с готового оригинал-макета,
предоставленного автором, в типографии Издательства
Политехнического университета.
195251, Санкт-Петербург, Политехническая ул., 29.