Федеральное агентство по образованию

САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ
ПОЛИТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ

Д. Ф. КУЗНЕЦОВ

СТОХАСТИЧЕСКИЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ: ТЕОРИЯ И ПРАКТИКА ЧИСЛЕННОГО РЕШЕНИЯ

4-е ИЗДАНИЕ, ИСПРАВЛЕННОЕ
И ДОПОЛНЕННОЕ

Санкт-Петербург
Издательство Политехнического университета
2010

УДК 519.21+518.61
ББК 22.171
К 89

Кузнецов Д.Ф. **Стохастические дифференциальные уравнения: теория и практика численного решения** / Д.Ф. Кузнецов. – 4-е изд., испр. и доп. – СПб.: Изд-во Политехн. ун-та, 2010. – 816 с.

В настоящей книге как нигде полно и глубоко освещена проблема аппроксимации повторных стохастических интегралов Ито и Стратоновича применительно к численному интегрированию стохастических дифференциальных уравнений, причем центральное место в этой части книги занимают полученные автором результаты.

Монография может рассматриваться как не имеющая аналогов на русском языке энциклопедия по численным методам и схемам для стохастических дифференциальных уравнений.

По охвату приложений и численным примерам решения математических задач, связанных со стохастическими дифференциальными уравнениями, книга занимает видное место.

Приведены полные тексты компьютерных программ в системе MATLAB 7.0.

Изложение подробно и доступно, несмотря на достаточно высокую степень новизны изучаемой проблемы (проблема численного интегрирования стохастических дифференциальных уравнений получила интенсивное развитие лишь в 80-х годах XX века) и ее высокую "формулоемкость" (такова специфика указанной проблемы).

В данной книге интенсивно развивается перспективный подход к численному интегрированию стохастических дифференциальных уравнений Ито, основанный на стохастических аналогах формулы Тейлора для решений данных уравнений и специальных методах аппроксимации повторных стохастических интегралов.

Книга окажется интересной специалистам по теории случайных процессов, прикладной и вычислительной математике, студентам старших курсов и аспирантам технических вузов и университетов, программистам.

Табл. 50. Ил. 157. Библиогр.: 191 назв.

Печатается по решению редакционно-издательского совета
Санкт-Петербургского государственного политехнического университета.

ISBN 978-5-7422-2448-8

© Кузнецов Д.Ф., 2010
© Санкт-Петербургский государственный политехнический университет, 2010

Предисловие

Данная монография является 4 изданием книги: *Кузнецов Д.Ф.* Стохастические дифференциальные уравнения: теория и практика численного решения. СПб.: Издательство Политехнического университета (2007. 777 с. 1 издание; 2007. 800 с. 2 издание; 2009. 800 с. 3 издание). Отметим, что для 4 издания в разной степени переработаны и дополнены (по сравнению с 3 изданием) разд. 3.1.2, 4.3.2, 5.1, 5.4 – 5.7, 6.2.5, 6.4, 6.6, 6.7, 6.8.2, 6.11, 6.15, 7.3.3 – 7.3.6, 11.2 (нумерация соответствует 3 изданию), кроме того добавлено введение к главе 5. Текст книги был тщательно просмотрен, исправлены замеченные неточности и опечатки.

Настоящая монография посвящена проблеме численного интегрирования стохастических дифференциальных уравнений.

Всвязи с этим следует особо отметить четыре монографии, в которых приводится систематическое изложение проблемы численного решения стохастических дифференциальных уравнений:

[I] *Milstein G.N.* Numerical integration of stochastic differential equations. Kluwer, 1995, 228 p. (перевод с издания на русском языке, 1988);

[II] *Kloeden P.E., Platen E.* Numerical solution of stochastic differential equations. Berlin: Springer-Verlag, 1992. 632 p. (2nd edition 1995, 3rd edition 1999);

[III] *Milstein G.N., Tretyakov M.V.* Stochastic numerics for mathematical physics. Berlin: Springer-Verlag, 2004. 596 p.;

[IV] *Кузнецов Д.Ф.* Стохастические дифференциальные уравнения: теория и практика численного решения. СПб.: Издательство Политехнического университета (2007. 777 с. 1 издание; 2007. 800 с. 2 издание; 2009. 800 с. 3 издание).

Сначала скажем несколько слов о преимуществах численного подхода, который применяется к стохастическим дифференциальным уравнениям во всех четырех монографиях, а затем кратко поясним существенные отличия книги [IV] и настоящего издания от монографий [I – III].

Хорошо известен достаточно общий метод В. Бьюси [1], которым может быть в принципе численно исследован широкий класс стохастических систем с использованием метода Монте–Карло. Этот метод, в силу своей общности, недостаточно эффективен в рамках весьма специфической проблемы численного решения стохастических дифференциальных уравнений, поскольку он ориентируется на общие свой-

[0] Набор и верстка книги в системе LaTeX 2_ε, а также идея обложки — Д.Ф. Кузнецов.

ства стохастических систем и, в силу этого, не учитывает в достаточной степени специфическую структуру стохастических дифференциальных уравнений, характеризуемую их коэффициентами диффузии и сноса.

Другой известный численный подход Г.Дж. Кушнера [2] к стохастическим системам основывается на дискретизации как временно́й переменной, так и пространственных переменных. В результате такой дискретизации аппроксимации случайных процессов превращаются в цепи Маркова с конечным числом состояний. При численной реализации этого подхода приходится иметь дело с матрицами перехода цепей Маркова, использование которых приводит к значительным вычислительным затратам, вследствие чего данный подход применим к задачам с небольшой размерностью пространства состояний.

В данной книге и книгах [I – IV] интенсивно развивается перспективный подход к численному интегрированию стохастических дифференциальных уравнений Ито, основанный на стохастических аналогах формулы Тейлора для решений данных уравнений. Этот подход использует конечную дискретизацию временно́й переменной и осуществляет численное моделирование решения стохастического дифференциального уравнения в дискретные моменты времени с помощью стохастических аналогов формулы Тейлора.

Принципиальной особенностью такого подхода является то, что переменные состояния в нем, в отличие от упоминавшегося подхода Г.Дж. Кушнера, не дискретизуются.

Необходимо отметить, что при этом вычислительные затраты (время и память) растут полиномиально, как отмечается в книге [II], с увеличением размерности задачи, что позволяет говорить о вычислительных резервах данного подхода.

Важнейшей отличительной особенностью стохастических аналогов формулы Тейлора для решений стохастических дифференциальных уравнений Ито является присутствие в них, так называемых, повторных стохастических интегралов в форме Ито или Стратоновича, которые являются функционалами сложной структуры относительно компонент векторного винеровского процесса.

В одной из наиболее общих форм записи в данной книге указанные повторные стохастические интегралы в форме Ито имеют следующий вид:

$$\int\limits_{t}^{T} \psi_k(t_k) \ldots \int\limits_{t}^{t_2} \psi_1(t_1) d\mathbf{w}_{t_1}^{(i_1)} \ldots d\mathbf{w}_{t_k}^{(i_k)},$$

где $\psi_l(\tau)$; $l = 1, \ldots, k$ — непрерывные на промежутке $[t, T]$ функции (как правило в приложениях они тождественно равны 1 или имеют полиномиальный вид; $\mathbf{w}_\tau$ — случайный вектор с $m+1$ компонентой вида: $\mathbf{w}_\tau^{(i)} = \mathbf{f}_\tau^{(i)}$ при $i = 1, \ldots, m$ и $\mathbf{w}_\tau^{(0)} = \tau$; величины $i_1, \ldots, i_k$ принимают значения 0, $1, \ldots, m$; $\mathbf{f}_\tau^{(i)}$; $i = 1, \ldots, m$ — независимые стандартные винеровские процессы (см. главу 1).

Приведенные повторные стохастические интегралы являются довольно специфическими объектами теории случайных процессов. С одной стороны, неслучайность весовых функций $\psi_l(\tau)$; $l = 1, \ldots, k$ является упрощающим их структуру фактором. С другой стороны (см. главы 5 и 6), векторность винеровского процесса $\mathbf{f}_\tau$ с независимыми компонентами $\mathbf{f}_\tau^{(i)}$; $i = 1, \ldots, m$, а также то, что функции $\psi_l(\tau)$; $l = 1, \ldots, k$, вообще говоря, различны при различных l; $l = 1, \ldots, k$, являются существенными усложняющими структуру повторных стохастических интегралов факторами.

Ввиду сказанного выше, системы повторных стохастических интегралов Ито играют исключительно важную и, пожалуй, ключевую роль при решении проблемы численного интегрирования стохастических дифференциальных уравнений и являются, своего рода, блоками, на которые распадается или которые формируют "винеровский хаос", порожденный решением стохастического дифференциального уравнения Ито.

Проблема совместного численного моделирования (исходя из среднеквадратического критерия сходимости) совокупностей повторных стохастических интегралов Ито помимо своей важности является и исключительно сложной как с теоретической, так и с вычислительной точки зрения.

Казалось бы, повторные стохастические интегралы можно аппроксимировать повторными интегральными суммами. Однако, этот подход подразумевает дробление промежутка интегрирования повторных стохастических интегралов (он и без того является достаточно малой величиной, поскольку играет роль шага интегрирования в численных методах для стохастических дифференциальных уравнений), что ведет, как показывают численные эксперименты, к неприемлемо большим вычислительным затратам. Задача снижения указанных затрат в разы (а то и на порядки) оказалась весьма непростой и требующей новых нетривиальных исследований (исключение составляет лишь узкий частный случай, когда $i_1 = \ldots = i_k \neq 0$ и $\psi_1(s), \ldots, \psi_k(s) \equiv \psi(s)$ (см. главы 5 и 6); изучение этого случая возможно с помощью формулы Ито).

В более общем случае, когда не все числа $i_1, \ldots, i_k$ совпадают между собой, отмеченная задача оказалась гораздо сложнее (она не может быть решена с помощью формулы Ито и требует более глубокого и сложного исследования). Заметим, что даже в случае упомянутого совпадения ($i_1 = \ldots = i_k \neq 0$ при различных $\psi_1(s), \ldots, \psi_k(s)$) указанные трудности сохраняются и не очень сложные совокупности повторных стохастических интегралов Ито, которые часто встречаются в приложениях, не могут быть эффективно выражены в конечной форме (при среднеквадратической аппроксимации) через систему стандартных гауссовских случайных величин. Формула Ито также не "спасает" в этом случае, в результате приходится прибегать к сложным разложениям.

Поскольку стохастические дифференциальные уравнения Ито являются адекватными математическими моделями динамических систем различной физической природы, находящихся под воздействием случайных возмущений (см. главу 2), то, в некотором смысле, указанные повторные стохастические интегралы Ито описывают, в определенном приближении, упомянутые природные процессы. Этим обуславливается важность задачи совместной аппроксимации систем повторных стохастических интегралов Ито.

Почему же задача среднеквадратической аппроксимации совокупностей повторных стохастических интегралов Ито столь сложна?

Во-первых, указанные интегралы при фиксированных пределах интегрирования являются случайными величинами, плотности распределения которых, в общем случае неизвестны, да и вряд ли они принесли бы пользу, скажем, для среднеквадратической аппроксимации повторных стохастических интегралов.

Во-вторых, требуется аппроксимировать не один стохастический интеграл, а совместно несколько различных стохастических интегралов, которые зависимы, в вероятностном смысле, сложным образом.

Обозначенная проблема является действительно проблемой как в случае векторного, так и скалярного стохастического возмущения даже для стохастических дифференциальных уравнений с точно известными решениями, т.е., зная точное решение, далеко не всегда возможно его смоделировать численно без привлечения численного моделирования повторных стохастических интегралов.

Проблема совместного численного моделирования свокупностей повторных стохастических интегралов является, кроме всего прочего, весьма новой. Одним из главных и неожиданных достижений данной книги является успешное применение методов функционального ана-

лиза (кратных и повторных рядов Фурье (сходящихся как в L_2, так и поточечно) по различным системам функций) в данной научной области.

Существуют два основных критерия сходимости численных методов для стохастических дифференциальных уравнений: сильный или среднеквадратический критерий и слабый критерий, в котором аппроксимируется не само решение стохастического дифференциального уравнения, а математическое ожидание от некоторой гладкой функции от решения стохастического дифференциального уравнения в фиксированный момент времени, т.е. упрощенно говоря, аппроксимируется распределение решения стохастического дифференциального уравнения.

Поскольку сильные численные методы, т.е. построенные в соответствии с сильным критерием сходимости, используют много информации о решении стохастического дифференциального уравнения (в отличии от слабых численных методов, построенных в соответствии со слабым критерием сходимости), то они оказываются существенно сложнее, чем слабые численные методы.

Оба упомянутых критерия являются самостоятельными, т.е. в общем случае нельзя утверждать, что из выполнения сильного критерия следует выполнение слабого критерия и наоборот.

Каждый из двух критериев сходимости ориентирован на решение специфических классов математических задач, связанных со стохастическими дифференциальными уравнениями.

С помощью сильных численных методов можно качественно численно строить отдельные выборочные траектории решения стохастического дифференциального уравнения. Именно эти численные методы требуют совместной среднеквадратической аппроксимации совокупностей повторных стохастических интегралов Ито, что, как уже отмечалось, является сложной проблемой.

Ввиду сказанного, сильные численные методы применяются при построении новых математических моделей на основе стохастических дифференциальных уравнений, численном решении задачи фильтрации сигнала на фоне случайной помехи в различных постановках (линейная фильтрация Калмана-Бьюси, нелинейная оптимальная фильтрация, фильтрация марковской цепи с непрерывным временем и конечным пространством состояний и т.д.), задачи стохастического оптимального управления, задачи тестирования процедур оценивания параметров стохастических систем и др.

Основным применением слабых численных методов является их

применение к численному решению задач математической физики (задачи Коши, Дирихле и Неймана для уравнений в частных производных второго порядка), причем данные численные методы способны преодолеть, в силу своей экономичности, так называемое "проклятие размерности" при размерности пространственной пременной $n > 3$. Как известно, сеточные численные методы, которые не используют сведений из теории вероятностей, ведут при $n > 3$ к гигантскому объему вычислений. Слабые численные методы применяются и при численном решении некоторых других задач, например, задачи о стохастической устойчивости.

Теперь скажем несколько слов об отличиях книг [I – IV] друг от друга.

Небольшая монография [I] является первой монографией в мире по численному интегрированию стохастических дифференциальных уравнений, в которой систематически изучаются сильные и слабые численные методы, причем понятие слабого численного метода было впервые введено автором монографии [I].

Книга [III] условно состоит из двух частей. Первая содержит результаты книги [I] по численным методам для стохастических дифференциальных уравнений в дополненной форме, а вторая и бóльшая часть посвящена преимущественно численному решению задач математической физики с помощью слабых численных методов.

Авторы книг [I] и [III] отмечают сложность проблемы аппроксимации повторных стохастических интегралов Ито и, в силу этого, тяготеют к задачам (безусловно важным с практической точки зрения), в которых указанная проблема сводится к минимуму (стохастические дифференциальные уравнения со скалярным шумом или с векторным, но аддитивным шумом, стохастические дифференциальные уравнения с малым параметром и т.д.).

В книгах [I] и [III] разобран вопрос о среднеквадратической аппроксимации только двух простейших повторных стохастических интегралов Ито первой и второй кратностей ($k = 1$ и 2; $\psi_1(s)$ и $\psi_2(s) \equiv 1$) для многомерного случая: $i_1,\ i_2 = 0,\ 1, \ldots, m$. При этом, основная идея основана на разложении, так называемого, процесса броуновского моста в ряд Фурье. Данный метод назван в [I] и [III] методом Фурье.

В монографии [II] дается большее по объему, чем в [I] и [III] и выдержанное в пропорциональном отношении между сильными и слабыми численными методами изложение. Авторы уделяют примерно одинаковое внимание как сильным, так и слабым численным методам, а также их приложениям.

В [II] методом Фурье предпринята попытка среднеквадратической аппроксимации простейших повторных стохастических интегралов первой, второй и третьей кратности ($k = 1, \ldots, 3$; $\psi_1(s), \ldots, \psi_3(s) \equiv 1$) для многомерного случая: $i_1, \ldots, i_3 = 0,\ 1, \ldots, m$.

Идеология книги [IV] и настоящего издания отличается от идеологии монографий [I – III]. В данной книге уделяется существенно большее внимание сильным численным методам и, как следствие, проблеме среднеквадратической аппроксимации повторных стохастических интегралов Ито (этим попросам посвящены по меньшей мере восемь глав книги: 5 – 9, 13 – 15), нежели слабым численным методам (этим вопросам полностью посвящены только две главы: 10 и 16). В главах 11 и 12 затрагиваются вопросы, связанные как с сильными, так и со слабыми численными методами.

Одной из основных целей данной монографии и книги [IV] является развеять сложившееся представление о том, что проблемой среднеквадратической аппроксимации совокупностей повторных стохастических интегралов Ито не стоит заниматься в большем объеме, чем в книгах [I – III], поскольку она является слишком сложной, а для некоторых приложений достаточно тех результатов, которые уже получены в данном направлении в [I – III].

Автор настоящей монографии не вполне согласен с обоими приведенными доводами.

Во-первых, в [IV] (главы 5 и 6 в настоящей монографии) предложен новый мощный метод среднеквадратической аппроксимации совокупностей повторных стохастических интегралов Ито, который основан на обобщенных кратных рядах Фурье (сходящихся в среднем) и по многим показателям (см. ниже) превосходит метод Фурье из [I – III]. Более того, данный метод мало чувствителен к кратности повторного стохастического интеграла Ито и делает процедуры аппроксимации и оценки погрешности весьма прозрачными и удобными в применении на практике.

Во-вторых, стохастические дифференциальные уравнения, как математический объект, существуют лишь несколько десятилетий и процесс построения новых и все более сложных математических моделей на их основе весьма бурно протекает в настоящее время. В силу этого, эффективные методы среднеквадратической аппроксимации повторных стохастических интегралов Ито (в том числе кратностей выше второй), как средство более глубокого изучения математических моделей и более эффективного численного решения задач на основе стохастических дифференциальных уравнений, востребованы уже сейчас

и интерес к ним будет, по мнению автора, только расти.

Есть еще одно отличие монографии [IV] от книг [I – III].

В настоящей монографии и в [IV] подробно рассмотрены стационарные системы линейных стохастических дифференциальных уравнений (ССЛСДУ), которые весьма часто встречаются в приложениях. Помимо своей важности для приложений ССЛСДУ допускают построение специальных и особенно эффективных численных методов своего решения, которые не используют численного моделирования повторных стохастических интегралов Ито и основаны на интегральном представлении решения ССЛСДУ в форме Коши. Кроме того, указанные численные методы весьма "спокойно" реагируют на повышение размерности системы стохастических дифференциальных уравнений. В подтверждение этого в главе 13 данной книги и книги [IV] приводится текст программы в системе MATLAB 7.0, которая позволяет численно моделировать решения ССЛСДУ общего вида, при этом допускается выбор размерности вектора состояния (решения) ССЛСДУ, размерности векторного винеровского процесса (стохастического возмущения) и размерностей матриц правой части ССЛСДУ.

В монографиях [I – III] данный вопрос не рассматривается. По-видимому это обстоятельство объясняется тем, что с теоретической точки зрения численное интегрирование ССЛСДУ не является серьезной проблемой и, вследствие этого, этот вопрос не попадает в поле зрения даже специалистов по проблеме численного интегрирования стохастических дифференциальных уравнений. Однако, когда дело доходит до практической реализации все оказывается не так просто (см. главы 11 и 13).

Если говорить более подробно об истории решения проблемы среднеквадратической аппроксимации совокупностей повторных стохастических интегралов, то оказалась разумной идея отыскания неких базисов случайных величин, с помощью которых можно представлять интересующие нас совокупности повторных стохастических интегралов. Эта идея претерпевала с течением времени ряд трансформаций.

Пожалуй до середины 80-х годов XX века осуществлялись попытки аппроксимировать повторные стохастические интегралы с помощью разного рода интегральных сумм, т.е. промежуток интегрирования стохастического интеграла разбивался на n частей и повторный стохастический интеграл приближенно представлялся повторной интегральной суммой, в которую входила система независимых стандартных гауссовских случайных величин, численное моделирование которой не является проблемой.

Однако, как уже отмечалось ранее, бросается в глаза то обстоятельство, что промежуток интегрирования повторных стохастических интегралов есть не что иное, как шаг интегрирования численного метода, который и без дополнительного дробления уже является достаточно малой величиной. Численные эксперименты показывают, что такой подход ведет к резкому увеличению вычислительных затрат при росте кратности стохастических интегралов (начиная уже со 2 и 3 кратности), что необходимо для построения более точных численных методов или при уменьшении шага интегрирования численного метода и, в силу этих причин, не выдерживает критики.

Новый шаг в направлении решения проблемы среднеквадратической аппроксимации повторных стохастических интегралов был сделан Г.Н.Мильштейном в монографии [I] ([70], 1988г.), который предложил использовать сходящиеся в среднеквадратическом смысле тригонометрические разложения Фурье для винеровских процессов, по которым вычисляется повторный стохастический интеграл. В [70] данным методом получены разложения в ряды из независимых стандартных гауссовских случайных величин двух простейших стохастических интегралов 1 и 2 кратности и доказана их сходимость в среднеквадратическом смысле.

Попытка развития этой идеи была предпринята в монографии [II] ([86], 1992г.), где были получены разложения и сходящиеся в среднеквадратическом смысле аппроксимации простейших повторных стохастических интегралов 1–3 кратности. Однако, в силу ряда ограничений и технических трудностей, присущих методу [70], в [86] и последующих публикациях, рассматриваемая проблема дальнейшего решения не получила. Кроме того, у автора вызывает обоснованное сомнение трактовка в [II] способа суммирования рядов, относящихся к интегралам 3 кратности (см. разд. 6.8.4 настоящей книги). Этих результатов, тем не менее, оказалось достаточно для построения в упомянутых монографиях сильных численных методов порядков точности 1.0 и 1.5 для стохастических дифференциальных уравнений Ито с многомерным шумом. Важно отметить, что метод [70] в разы, а то и на порядки, превзошел метод интегральных сумм по вычислительным затратам в смысле их уменьшения.

Несмотря на позитивные черты метода [70], наметился и ряд его очевидных недостатков: отсутствие общей явной формулы для вычисления коэффициентов разложения повторного стохастического интеграла произвольной кратности k (как следствие получены упомянутые аппроксимации повторных стохастических интегралов 1–3 кратности,

и только); практическая невозможность точного вычисления среднеквадратической погрешности аппроксимации стохастических интегралов, за исключением простейших интегралов 1 и 2 кратности (в результате приходится учитывать избыточные члены разложения, что ведет к росту вычислительных затрат и усложнению численных методов); существует жесткое ограничение на систему базисных функций при аппроксимации — это могут быть только тригонометрические функции; имеются некоторые проблемы технического характера при использовании данного метода применительно к стохастическим интегралам кратности выше второй (см. разд. 6.8.4) и др.

Хотя, следует отметить, что рассматриваемый метод является определенным шагом в данной научной области.

Прорывом, на взгляд автора, на пути решения проблемы среднеквадратической аппроксимации повторных стохастических интегралов является предложенный им метод (далее метод, основанный на кратных рядах Фурье).

Идея данного метода состоит в следующем: повторный стохастический интеграл Ито представляется в виде кратного стохастического интеграла от определенной неслучайной разрывной функции k переменных, определенной на гиперкубе $[t,T]^k$, где k — кратность стохастического интеграла Ито, $[t,T]$ — его промежуток интегрирования. Далее указанная неслучайная функция разлагается в гиперкубе в обобщенный кратный ряд Фурье, сходящийся в среднем в пространстве $L_2([t,T]^k)$. После ряда преобразований приходим к сходящемуся в среднеквадратическом смысле разложению повторного стохастического интеграла Ито в кратный ряд из произведений независимых стандартных гауссовских случайных величин (коэффициентами данного ряда являются коэффициенты обобщенного кратного ряда Фурье для упоминавшейся неслучайной функции нескольких переменных, которые вычисляются по явной формуле независимо от кратности стохастического интеграла).

В результате мы получаем следующие новые возможности и преимущества по сравнению с методом Фурье из [70]:

1. Имеется явная формула для вычисления коэффициентов разложения повторного стохастического интеграла Ито произвольной кратности k. Иными словами мы можем вычислить (без какой-либо подготовительной и дополнительной работы) коэффициент разложения с любым фиксированным номером в разложении повторного стохастического интеграла заданной фиксированной кратности, например, коэффициент с номером 123456 в разложении стохастического интеграла

шестой кратности. При этом нам не потребуется знаний о коэффициентах с другими номерами или о других стохастических интегралах, входящих в рассматриваемую совокупность.

2. Открываются новые возможности для точного вычисления среднеквадратической погрешности аппроксимации повторных стохастических интегралов. Эти возможности реализуются точными формулами (см. главу 6) для среднеквадратических погрешностей аппроксимаций повторных стохастических интегралов. В результате не потребуется учитывать избыточные члены разложения, что усложнило бы численные методы.

3. Поскольку используемый кратный ряд Фурье является обобщенным в том смысле, что он строится с использованием различных полных ортонормированных систем функций в пространстве $L_2([t,T])$, то появляются новые возможности для аппроксимации — можно использовать не только тригонометрические функции, но и полиномы Лежандра, а также системы функций Хаара и Радемахера–Уолша.

4. Как оказалось, работать при построении аппроксимаций повторных стохастических интегралов, удобнее всего именно с полиномами Лежандра — существенно проще вычислять коэффициенты кратного ряда Фурье (используется по сути только формула первообразной для степенной функции с целым неотрицательным показателем; при работе с тригономерическими функциями это не так — скажем при вычислении интеграла от произведения синуса на косинус с аргументами nt и mt соответственно $(n,m = 0,\ 1,\ 2,\ldots)$ мы уже получим три существенно различных первообразных в случаях: $n-m \neq 0, n+m \neq 0$; $\quad n-m=0, n+m \neq 0$; $\quad n-m=0, n+m=0$). Кроме того, сами аппроксимации по виду получаются гораздо проще при использовании полиномов Лежандра. Это связано с тем, что система полиномов Лежандра более однородна в том смысле, что каждая ее функция — многочлен. Тригонометрическая же система устроена сложнее — первая ее функция является многочленом нулевой степени, остальные представляют собой две бесконечные серии синусов и косинусов соответственно. Для систем функций Хаара и Радемахера–Уолша разложения повторных стохастических интегралов получаются пожалуй чересчур сложными (см. главу 5).

5. Вопрос о том, какая же система функций полиномиальная или тригонометрическая удобнее с точки зрения вычислительных затрат на аппроксимацию повторных стохастических интегралов оказался не простым, поскольку требуется сравнивать аппроксимации не одного интеграла, а нескольких интегралов одновременно. При этом может

случиться так, что для одних интегралов вычислительные затраты окажутся меньше для полиномов Лежандра, а для других для тригонометрических функций. Отметим, что сами формулы для полученных аппроксимаций достаточно громоздки, но существенно проще для системы полиномов Лежандра.

Автор (см. нижние строки таблиц 6.43 и 6.44) считает, что вычислительные затраты в 3 раза меньше для полиномов Лежандра по крайней мере при аппроксимации совокупности повторных стохастических интегралов 1–3 кратности, необходимых для построения сильного численного метода порядка точности 1.5 для стохастического дифференциального уравнения Ито с многомерным шумом (в настоящей монографии все примеры численного моделирования решений стохастических дифференциальных уравнений реализованы впервые с применением системы полиномов Лежандра). Кроме того, автор полагает, что данный эффект будет еще более выразительным при рассмотрении более сложных совокупностей повторных стохастических интегралов, что объясняется тем, что полиномиальная система функций имеет существенное преимущество перед тригонометрической системой функций при аппроксимации повторных стохастических интегралов, у которых не все весовые функции тождественно равны 1 (ср. формулы (6.38), (6.39), (6.41), (6.42) с формулами (6.77), (6.82), (6.81), (6.80) соответственно).

6. Метод Г.Н. Мильштейна приводит к повторным рядам (в противоположность кратным рядам из теоремы 5.1 в данной книге) начиная по меньшей мере с третьей кратности повторного стохастического интеграла (здесь имеется ввиду не менее чем трехкратное интегрирование по винеровским процессам). Кратные ряды гораздо более предпочтительны с точки зрения аппроксимации, чем повторные, поскольку, частичные суммы кратных рядов сходятся при любом способе одновременного стремления к бесконечности их верхних пределов суммирования (обозначим их $p_1, \ldots, p_k$). В частности, в наиболее простом и удобном для практики случае при $p_1 = \ldots = p_k = p \to \infty$. Для повторных рядов это очевидно не так. Однако, в [86] авторы, тем не менее, не вполне обоснованно используют в рамках метода Г.Н. Мильштейна именно условие $p_1 = p_2 = p_3 = p \to \infty$.

7. Доказана сходимость (см. разд. 6.7) в среднем степени $2n$, $n \in N$ аппроксимаций из теоремы 5.1 и с вероятностью 1 для некоторых из этих аппроксимаций.

Отметим, что книга не претендует на полное прояснение всего круга вопросов, связанного с обсуждаемой проблемой, однако автор

надеется, что монография вносит существенный вклад в развитие теории (главным образом среднеквадратической) и практики численного интегрирования стохастических дифференциальных уравнений и делает данную проблему во многих отношениях достаточно прозрачной.

В заключении предисловия несколько слов о содержании и некоторых особенностях настоящей книги.

Данная монография является своего рода уникальным изданием. В ней как нигде полно освещена проблема аппроксимации (в основном среднеквадратической) повторных стохастических интегралов применительно к численному интегрированию стохастических дифференциальных уравнений, причем центральное место в этой части книги занимают полученные автором результаты, которые могут расцениваться как отдельная теория (главы 5 и 6).

Монография может рассматриваться как энциклопедия, не имеющая аналогов на русском языке, по численным методам и схемам для стохастических дифференциальных уравнений.

По охвату приложений и численным примерам решения математических задач, связанных со стохастическими дифференциальными уравнениями книга также занимает видное место.

Изложение подробно и доступно, несмотря на достаточно высокую степень новизны изучаемой проблемы (проблема численного интегрирования стохастических дифференциальных уравнений получила интенсивное развитие лишь в 80-х годах XX века) и ее высокую "формулоемкость" (такова специфика указанной проблемы).

Коснемся содержания настоящей монографии по главам.

Книга состоит из четырех частей, разделенных на 17 глав.

Часть I содержит две вводные главы. В главе 1 приводятся необходимые в дальнейшем сведения из теории стохастических дифференциальных уравнений и стохастических интегралов. В главе 2 рассмотрены математические модели динамических систем, находящихся под воздействием случайных возмущений. Приведены примеры физических и технических систем, описываемых данными математическими моделями. Показано (см. разд. 2.1.1), что системы стохастических дифференциальных уравнений с цветным шумом в ряде случаев могут быть сведены к системам стохастических дифференциальных уравнений Ито более высоких размерностей. Рассмотрен также ряд математических задач, в которых встречается необходимость численного решения стохастических дифференциальных уравнений.

В часть II книги входят четыре главы (главы 3–6), в которых представлены теоретические результаты, положенные в основу численных

методов решения стохастических дифференциальных уравнений.

Глава 3 монографии знакомит с некоторыми свойствами стохастических интегралов. В частности, рассмотрена новая технология замены порядка интегрирования в повторных стохастических интегралах по мартингалу (подробно рассмотрен случай стохастических интегралов Ито) и выведены соотношения между повторными стохастическими интегралами Стратоновича и Ито произвольной кратности k. Приведена таблица стохастических интегралов.

Глава 4 посвящена стохастическим аналогам разложения Тейлора для процессов Ито. В ней представлены как известные стохастические разложения Тейлора–Ито и Тейлора–Стратоновича, так и четыре новых и весьма неожиданных представления разложений Тейлора–Ито и Тейлора–Стратоновича, названных автором унифицированными. Унифицированные разложения Тейлора–Ито и Тейлора–Стратоновича строятся с помощью введенной им технологии замены порядка интегрирования в повторных стохастических интегралах и минимизируют общее число различных повторных стохастических интегралов, входящих в разложения Тейлора–Ито и Тейлора–Стратоновича, которые изучались в [70, 79, 81, 84, 86].

В главе 5 книги рассматриваются сходящиеся в среднеквадратическом смысле разложения повторных стохастических интегралов в кратные ряды из произведений независимых стандартных гауссовских случайных величин, которые основаны на обобщенных кратных рядах Фурье. Об этом подробно говорилось выше.

Глава 6, завершающая часть II монографии, посвящена методам сильной и слабой аппроксимации повторных стохастических интегралов Ито и Стратоновича, входящих в разложения Тейлора–Ито и Тейлора–Стратоновича соответственно. На результатах главы 5 в главе 6 предложен метод сильной аппроксимации повторных стохастических интегралов Ито, основанный на кратных рядах Фурье по полным ортонормированным в пространстве $L_2([t,T])$ системам функций. Данный метод обладает рядом новых возможностей (о них говорилось выше) по сравнению с методом Г. Н. Мильштейна [70], который до настоящего времени считался общепризнанным и наиболее эффективным для сильной аппроксимации повторных стохастических интегралов.

В части III книги (главы 7–12) приведены различные численные методы решения стохастических дифференциальных уравнений.

В главах 7–9 представлены явные и неявные одношаговые, двухшаговые и трехшаговые, в том числе конечно-разностные (типа Рунге–

Кутта) сильные численные методы решения стохастических дифференциальных уравнений Ито порядка точности 0.5, 1.0, 1.5, 2.0, 2.5 и 3.0. Значительная часть из приведенных численных методов является новой вследствие использования унифицированных разложений Тейлора–Ито и Тейлора–Стратоновича, метода сильной аппроксимации повторных стохастических интегралов, основанного на кратных рядах Фурье, а также новых конечно-разностных аппроксимаций частных производных функций, входящих в правую часть соответствующего стохастического дифференциального уравнения.

Глава 10 посвящена слабым численным методам решения стохастических дифференциальных уравнений Ито. Бóльшая часть представленных в этой главе результатов принадлежит другим авторам [68–70, 86, 89, 97, 139, 144–146, 150–153]. Однако здесь предложено также несколько новых слабых численных методов.

В главе 11 рассматриваются методы численного интегрирования систем линейных стационарных стохастических дифференциальных уравнений Ито, которые основываются на точном интегральном представлении решений этих систем. Один из предложенных методов строится на спектральном разложении дисперсионной матрицы стохастической составляющей решения системы линейных стационарных стохастических дифференциальных уравнений, а другой — на аппроксимации указанной стохастической составляющей при помощи кусочно-постоянных случайных процессов. Поясняется также, как численно решать стационарные линейные стохастические системы в соответствии с общей теорией для нелинейных стохастических систем.

Глава 12, завершающая часть III книги, содержит общие представления сильных и слабых явных одношаговых численных методов решения стохастических дифференциальных уравнений со скачкообразной компонентой. При написании данной главы автор опирался на результаты других авторов [83, 88]. При этом новизна результатов, представленных в главе 12, обусловлена выбором способа численного моделирования решения стохастического дифференциального уравнения со скачкообразной компонентой на промежутках времени между скачками, на которых данное уравнение превращается в стохастическое дифференциальное уравнение Ито.

В части IV книги (главы 13–17) представлены примеры численного моделирования и тексты программ в системе MATLAB 7.0.

В главе 13 приведен текст программы в системе MATLAB 7.0 для численного решения стационарных систем линейных стохастических дифференциальных уравнений Ито, которая реализует алгоритмы из

главы 11. Приводятся примеры численного моделирования систем второго и шестого порядка с помощью указанных алгоритмов.

Глава 14 содержит примеры численного моделирования выборочных траекторий решений нелинейных систем стохастических дифференциальных уравнений Ито второго и третьего порядка. При численном моделировании впервые применена аппроксимация повторных стохастических интегралов, основанная на кратных рядах Фурье по полиномиальной системе функций.

Содержание главы 15 составляют примеры численного решения математических задач с использованием сильных численных методов для стохастических дифференциальных уравнений. Рассмотрены задачи тестирования процедур оценивания параметров, фильтрации марковской цепи с непрерывным временем и конечным числом состояний, линейной фильтрации Калмана–Бьюси, нелинейной оптимальной фильтрации, оптимального стохастического управления.

Материал 16 главы составляют примеры численного решения математических задач с использованием слабых численных методов для стохастических дифференциальных уравнений. Рассмотрена задача о вычислении наибольшего стохастического ляпуновского показателя, а также примеры численного решения задачи Коши для уравнений в частных производных параболического типа, основанные на вероятностных представлениях решений данных задач.

В заключительной 17 главе приведены тексты программ в системе MATLAB 7.0, которые реализуют численные эксперименты по тексту книги в целом.

Санкт-Петербург, январь 2010г. Д.Ф.Кузнецов

Как читать книгу

Монография адресована широкому кругу читателей, среди которых:

• Специалисты по теории случайных процессов.

• Прикладные математики в смежных научных областях, где встречаются математические модели в виде стохастических дифференциальных уравнений и прикладные задачи связанные с такими уравнениями.

• Лица, интересующиеся новыми направлениями в современной вычислительной математике, численными методами, программированием на PC.

• Студенты старших курсов и аспиранты университетов, технических ВУЗов.

Первой категории читателей окажутся интересными новые фундаментальные результаты, положенные в основу книги. В первую очередь главы 5–6, которые представляют собой целую новую теорию аппроксимации повторных стохастических интегралов применительно к численному интегрированию стохастических дифферециальных уранений. Также интересными окажутся новые представления стохастической формулы Тейлора для решений стохастических дифференциальных уравнений (глава 4) и развитая в главе 3 технология замены порядка интегрирования в стохастических интегралах.

Вторую группу читателей заинтересует глава 2, в которой собраны применения стохастических дифференциальных уравнений в различных научных областях, главы 7–12 являющиеся своего рода уникальным по объему и содержанию материалом по численным методам и схемам для стохастических дифференциальных уравнений, а также примеры численного моделирования и численного решения задач на основе стохастических дифференциальных уравнений (главы 13–16).

Для третьей категории читателей окажутся интересными главы 7–17.

Студентам старших курсов и аспирантам технических ВУЗов будет полезно ознакомиться с главами 1–2, 7–17, а их коллегам из университетов с главами 1, 3–12.

Благодарности

Моим учителям: проф. О.Ю. Кульчицкому (совместные работы [119, 176] с которым в период с 1993 по 1994 годы послужили отправной точкой этой книги) и проф. А.А. Первозванскому (который, благодаря широчайшей эрудиции, своевременно указал на полезные библиографические ссылки (в частности, на работы [70, 98]), которые помогли скорректировать направления дальнейших исследований), а также: проф. В.А. Пальмову, проф. Р.П. Филимонову, проф. Г.С. Осипенко, проф. В.А. Курзеневу, проф. Ю.К. Демьяновичу, проф. В.Б. Меласу, проф. А.Н. Васильеву, проф. Я.И. Белопольской за ценные замечания, позитивное отношение к моей научной деятельности и поддержку; проф. С.Ф. Бурдакову за любезно предоставленную возможность пользоваться компьютерной базой на кафедре "Механика и процессы управления" физико-механического факультета СПбГПУ в период с 1999 по 2003 годы и В.С. Пехову за помощь в работе с программами MATLAB и LaTeX 2_ε в этот период; участникам городского семинара под руководством акад. И.А. Ибрагимова и проф. В.Н. Судакова по теории вероятностей и математической статистике в Санкт-Петербургском отделении математического института им. В.А. Стеклова за критические замечания и советы по 4 и 5 главам книги (они были кратко доложены на двух семинарах в 1999 году), которые спустя годы нашли отражение в настоящем издании; авторам книг [86] (prof. P.E. Kloeden (Germany), prof. E.Platen (Australia)) и [70] (проф. Г.Н. Мильштейн) за некоторый интерес, проявленный к моей работе; известнейшим иностранным ученым в области теории вероятностей (prof. Y.K. Lin (USA), prof. J. Jacod (France)) за положительные отзывы о первом издании этой книги; Н.В.Звереву за ценные консультации в период с 2003 по 2008 годы, связанные с различными вопросами касающимися PC, а также за огромное терпение, проявленное при этом; В.В.Шувалову за ценные консультации по издательской системе LaTeX 2_ε в период с 2006 по 2007 годы; сотрудникам издательства Политехнического университета и лично его директору — А.В. Иванову; членам моей семьи за проявленную лояльность во время моей работы над книгой; всем, кто посетил мою домашнюю страницу и Вам — читателю этой книги.

Почта: Россия
Санкт-Петербург, 195251
Политехническая улица, дом 29
Санкт-Петербургский государственный политехнический университет
Физико-механический факультет
Кафедра "Высшая математика"
Профессору Кузнецову Д.Ф.

E-mail: sde_kuznetsov@inbox.ru
Homepage: www.sde-kuznetsov.spb.ru

Оглавление

I Стохастические дифференциальные уравнения: определения, свойства, проблемы, применения 1

1 Стохастические интегралы и стохастические дифференциальные уравнения 2

1.1 Некоторые сведения из теории вероятностей 2
1.1.1 Сходимость случайных последовательностей 2
1.1.2 Неравенства для математических ожиданий 4
1.1.3 Случайные процессы 6
1.1.4 Марковские и диффузионные процессы 10
1.1.5 Случайные процессы с независимыми приращениями. Винеровский и пуассоновский процессы 19
1.1.6 Численное моделирование пуассоновского и гауссовского распределений 25
1.2 Стохастические интегралы по винеровскому процессу и стохастические дифференциальные уравнения диффузионного типа 27
1.2.1 Стохастический интеграл Ито 27
1.2.2 Процессы Ито 33
1.2.3 Формула Ито 35
1.2.4 Стохастические дифференциальные уравнения Ито 37
1.2.5 Стохастический интеграл Стратоновича 44
1.2.6 Стохастические дифференциальные уравнения Стратоновича . 49
1.3 Стохастические интегралы по мартингалам и стохастические дифференциальные уравнения со скачкообразной компонентой 51
1.3.1 Стохастический интеграл по мартингалу 51
1.3.2 Стохастический интеграл по пуассоновской случайной мере . . 54
1.3.3 Формула Ито для процессов Ито со скачкообразной компонентой 57
1.3.4 Оценки моментов стохастических интегралов по пуассоновским мерам 59
1.3.5 Стохастические дифференциальные уравнения со скачкообразной компонентой 60
1.3.6 Интегральное представление решения линейного стохастического дифференциального уравнения со скачкообразной компонентой 61

2 Применения стохастических дифференциальных уравнений 64

2.1 Диффузионные математические модели динамических систем, находящихся под воздействием случайных возмущений 64
2.1.1 Общий вид нелинейных диффузионных моделей 64
2.1.2 Линейные диффузионные модели 68

2.2 Диффузионные модели физических и технических систем 73
2.2.1 Модель тепловых флуктуаций частиц в веществах и электрических зарядов в проводниках. Формула Найквиста 73
2.2.2 Автоколебательная электрическая система 77
2.2.3 Чандлеровские колебания 78
2.2.4 Модели химической кинетики и регуляции численности конкурирующих видов животных 80
2.2.5 Модели стохастической финансовой математики 82
2.2.6 Модель солнечной активности 82
2.2.7 Модель лагранжевой динамики частицы жидкости 83
2.2.8 Ошибки округления при численном решении обыкновенных дифференциальных уравнений 84
2.3 Математические модели диффузионно-скачкообразного типа 85
2.3.1 Диффузионно-скачкообразные модели стохастической финансовой математики 85
2.3.2 Скачкообразная модель лагранжевой динамики частицы жидкости 86
2.4 Математические задачи, связанные со стохастическими дифференциальными уравнениями 87
2.4.1 Фильтрация 87
2.4.2 Оптимальное стохастическое управление 89
2.4.3 Стохастическая устойчивость 91
2.4.4 Оценивание параметров 96
2.5 Вероятностные представления решений задач Дирихле и Коши для уравнений в частных производных параболического типа 97
2.5.1 Вероятностное представление решения задачи Дирихле 98
2.5.2 Вероятностные представления решения задачи Коши 101
2.6 О малой эффективности применения численных методов для обыкновенных дифференциальных уравнений к стохастическим дифференциальным уравнениям 104

II Теоретические результаты, положенные в основу построения численных методов 109

3 Некоторые свойства стохастических интегралов 110
3.1 Теорема о замене порядка интегрирования в повторных стохастических интегралах Ито 110
3.1.1 Формулировка и доказательство 113
3.1.2 Следствия и обобщения 121
3.1.3 Замена порядка интегрирования для конкретных повторных стохастических интегралов Ито 124
3.2 Замена порядка интегрирования в повторных стохастических интегралах по мартингалу 126
3.3 Соотношения между повторными стохастическими интегралами Стратоновича и Ито произвольной кратности 130
3.4 Аналитические формулы для вычисления стохастических интегралов . 135
3.4.1 Аддитивное разделение переменных 137
3.4.2 Мультипликативное разделение переменных 141

4 Унифицированные разложения Тейлора–Ито и Тейлора–Стратоновича 144
4.1 Дифференцируемость по Ито случайных процессов 145
4.2 Разложение Тейлора–Ито в форме Вагнера и Платена 151
4.3 Унифицированные разложения Тейлора–Ито 152
4.3.1 Обозначения 152
4.3.2 Первое унифицированное разложение Тейлора–Ито 156
4.3.3 Второе унифицированное разложение Тейлора–Ито 166
4.4 Дифференцируемость по Стратоновичу случайных процессов 170
4.5 Разложение Тейлора–Стратоновича в форме Клоедена и Платена . . . 174
4.6 Унифицированные разложения Тейлора–Стратоновича 177
4.6.1 Первое унифицированное разложение Тейлора–Стратоновича . . 177
4.6.2 Второе унифицированное разложение Тейлора–Стратоновича . . 182
4.7 Сильная сходимость стохастических разложений 184
4.8 Слабая сходимость разложений Тейлора–Ито 187
4.9 Примеры унифицированных разложений 189
4.10 Подведение итогов разделов 4.3 и 4.6 195
4.11 Стохастические базисы и их ранги 198

5 Разложения повторных стохастических интегралов, основанные на кратных рядах Фурье 202
5.1 Разложение повторных стохастических интегралов Ито произвольной кратности 204
5.2 О применении полных ортонормированных разрывных систем функций в теореме 5.1 229
5.3 Замечание о применении полных ортонормированных систем функций в теореме 5.1 233
5.4 О структуре функций $K(t_1, \ldots, t_k)$, используемых в приложениях . . . 235
5.5 Разложение повторных стохастических интегралов Стратоновича первой и второй кратности 236
5.6 О разложениях повторных стохастических интегралов Стратоновича третьей кратности 244
5.7 Другой подход к разложению повторных стохастических интегралов Стратоновича, основанный на повторных рядах Фурье 262
5.8 Разложение повторных стохастических интегралов по мартингальным пуассоновским мерам 266
5.9 Обобщение теоремы 5.1 для повторных стохастических интегралов по мартингалам 270

6 Аппроксимация повторных стохастических интегралов Ито и Стратоновича 277
6.1 Введение 277
6.2 Точное вычисление среднеквадратических погрешностей аппроксимаций повторных стохастических интегралов Ито, полученных по теореме 5.1 284
6.2.1 Случай произвольного k и попарно различных $i_1, \ldots, i_k = 1, \ldots, m$ 284
6.2.2 Вспомогательные соотношения для случая не попарно различных $i_1, \ldots, i_k = 1, \ldots, m$ 286
6.2.3 Случай $k = 1$ 289
6.2.4 Случай $k = 2$ и произвольных $i_1, i_2 = 1, \ldots, m$ 290

6.2.5 Случай $k = 3$ и произвольных $i_1, i_2, i_3 = 1, \ldots, m$ 291
6.2.6 Случай $k = 4$ и произвольных $i_1, i_2, i_3, i_4 = 1, \ldots, m$ 297
6.3 Некоторые особенности вычисления среднеквадратической погрешности аппроксимации для систем полиномиальных и тригонометрических функций 307
6.4 Сильная аппроксимация повторных стохастических интегралов кратностей 1–5 с помощью теоремы 5.1 и полиномов Лежандра 309
6.5 О коэффициентах Фурье–Лежандра 328
6.6 Сильная аппроксимация повторных стохастических интегралов кратностей 1–3 с помощью теоремы 5.1 и тригонометрической системы функций 332
6.7 Сходимость в среднем степени $2n$ и с вероятностью 1 разложений повторных стохастических интегралов из теоремы 5.1 340
6.8 Метод Г.Н. Мильштейна сильной аппроксимации повторных стохастических интегралов 344
6.8.1 Введение 344
6.8.2 Аппроксимация повторных стохастических интегралов первой и второй кратности 345
6.8.3 Сравнение с методом, основанным на кратных рядах Фурье . . 348
6.8.4 О проблемах метода Г.Н. Мильштейна применительно к повторным стохастическим интегралам кратностей выше второй 349
6.9 Представление повторных стохастических интегралов с помощью полиномов Эрмита 351
6.10 Использование кратных интегральных сумм для аппроксимации повторных стохастических интегралов Ито 354
6.11 Сравнение эффективности рядов Фурье–Лежандра, тригонометрических рядов Фурье и интегральных сумм при аппроксимации стохастических интегралов 357
6.12 Повторные стохастические интегралы как решения систем линейных стохастических дифференциальных уравнений 367
6.13 Комбинированный метод аппроксимации повторных стохастических интегралов 368
6.13.1 Основные соотношения 369
6.13.2 Вычисление среднеквадратической погрешности 370
6.13.3 Численные эксперименты 372
6.14 Слабые аппроксимации повторных стохастических интегралов Ито . . 374
6.15 Заключение 385

III Численные методы решения стохастических дифференциальных уравнений 386

7 Явные одношаговые сильные численные методы решения стохастических дифференциальных уравнений Ито 387
7.1 Сильная сходимость и тестирование сильных численных методов . . . 389
7.2 Явный метод Эйлера 393
7.3 Явные одношаговые методы, основанные на унифицированном разложении Тейлора–Ито 399
7.3.1 Метод порядка точности $r/2$. Теорема о сходимости 399
7.3.2 Метод Г.Н. Мильштейна 404

7.3.3 Методы порядка точности 1.5 407
7.3.4 Метод порядка точности 2.0 411
7.3.5 Методы порядка точности 2.5 413
7.3.6 Метод порядка точности 3.0 417
7.4 Явные одношаговые методы, основанные на разложении Тейлора–Ито в форме Вагнера и Платена 422
7.4.1 Метод порядка точности $r/2$. Теорема о сходимости 422
7.4.2 Метод порядка точности 1.5 424
7.4.3 Метод порядка точности 2.0 425
7.4.4 Метод порядка точности 2.5 425
7.5 Явные одношаговые методы, основанные на разложении Тейлора–Стратоновича в форме Клоедена и Платена 427
7.5.1 Метод порядка точности $r/2$. Теорема о сходимости 427
7.5.2 Метод порядка точности 1.0 429
7.5.3 Метод порядка точности 1.5 429
7.5.4 Метод порядка точности 2.0 430
7.5.5 Метод порядка точности 2.5 430
7.6 Явные одношаговые методы, основанные на унифицированном разложении Тейлора–Стратоновича 431
7.6.1 Метод порядка точности $r/2$. Теорема о сходимости 431
7.6.2 Метод порядка точности 1.5 432
7.6.3 Метод порядка точности 2.0 433
7.6.4 Метод порядка точности 2.5 433
7.6.5 Метод порядка точности 3.0 434
7.7 Явные одношаговые конечно-разностные численные методы, основанные на разложениях Тейлора–Ито 436
7.7.1 Некоторые тейлоровские аппроксимации производных детерминированных функций 436
7.7.2 Метод порядка точности 1.0 438
7.7.3 Методы порядка точности 1.5 439
7.7.4 Методы порядка точности 2.0 441
7.7.5 Методы порядка точности 2.5 447
7.7.6 О сходимости явных сильных одношаговых конечно-разностных численных методов 452
7.8 Об ослаблении достаточных условий сходимости численных методов . 454

8 Неявные одношаговые сильные численные методы решения стохастических дифференциальных уравнений Ито 457
8.1 Неявный метод Эйлера 458
8.2 Неявные одношаговые методы, основанные на разложениях Тейлора–Ито 461
8.2.1 Методы порядка точности 1.0 461
8.2.2 Методы порядка точности 1.5 464
8.2.3 Методы порядка точности 2.0 466
8.2.4 Методы порядка точности 2.5 468
8.2.5 Метод порядка точности 3.0 470
8.3 Неявные одношаговые конечно-разностные методы, основанные на разложениях Тейлора–Ито 472
8.3.1 Методы порядка точности 1.0 473
8.3.2 Методы порядка точности 1.5 473
8.3.3 Методы порядка точности 2.0 476

8.3.4 Методы порядка точности 2.5 478
8.4 О сходимости неявных сильных одношаговых методов 481
8.5 Сбалансированные неявные сильные численные методы 483
8.6 О полностью неявных сильных численных методах 485

9 Двухшаговые и трехшаговые сильные численные методы решения стохастических дифференциальных уравнений Ито 488
9.1 Явные двухшаговые методы, основанные на разложениях Тейлора–Ито 489
9.1.1 Метод порядка точности 1.0 489
9.1.2 Методы порядка точности 1.5 490
9.1.3 Методы порядка точности 2.0 492
9.2 Неявные двухшаговые методы, основанные на разложениях Тейлора–Ито 493
9.2.1 Методы порядка точности 1.0 и 1.5 493
9.2.2 Методы порядка точности 2.0 и 2.5 496
9.3 О сходимости неявных сильных двухшаговых методов 498
9.4 Двухшаговые конечно-разностные методы, основанные на разложениях Тейлора–Ито 502
9.4.1 Методы порядка точности 1.0 и 1.5 502
9.4.2 Метод порядка точности 2.0 505
9.5 Общие представления двухшаговых методов 507
9.6 Явные и неявные, в том числе конечно-разностные, трехшаговые численные методы, основанные на разложениях Тейлора–Ито 511
9.6.1 Методы порядка точности 1.0. 511
9.6.2 Методы порядка точности 1.5. 517
9.7 Об устойчивости численных методов 522

10 Слабые численные методы решения стохастических дифференциальных уравнений Ито 530
10.1 Слабая сходимость и тестирование слабых численных методов 531
10.2 Явные слабые численные методы 533
10.2.1 Явный метод Эйлера 533
10.2.2 Метод порядка точности 2.0 536
10.2.3 Методы порядка точности 3.0 539
10.2.4 Методы порядка точности 4.0 542
10.3 Теорема о сходимости слабых численных методов 547
10.4 Экстраполяционные численные методы 549
10.5 Явные слабые конечно-разностные численные методы 553
10.6 Неявные слабые численные методы 556
10.6.1 Неявные методы Эйлера 556
10.6.2 Методы порядка точности 2.0 559
10.6.3 Конечно-разностные методы порядка точности 2.0 560
10.7 Численные методы типа "предсказатель–корректор" 563
10.8 О сходимости слабых численных методов 564
10.9 Устойчивость слабых численных методов в случае мультипликативного шума 568
10.10 Численное моделирование стохастических дифференциальных уравнений с использованием метода Монте–Карло и уменьшение дисперсии . 572

11 Численное моделирование решений стационарных систем линейных стохастических дифференциальных уравнений 576
11.1 Системы линейных стохастических дифференциальных уравнений: расчетные формулы и вспомогательные результаты 576
11.1.1 Интегральные представления решений СЛСДУ 578
11.1.2 Моментные характеристики решений СЛСДУ 581
11.1.3 Свойства дискретных систем линейных стохастических уравнений в стационарном случае 583
11.2 Метод численного моделирования стационарных СЛСДУ, основанный на разложении Тейлора–Ито и полиномах Лежандра 585
11.3 Метод численного моделирования стационарных СЛСДУ, основанный на формуле Коши и спектральном разложении 587
11.3.1 Общий подход к моделированию. Структурирование проблемы . 587
11.3.2 Алгоритм численного моделирования динамической составляющей решения 588
11.3.3 Алгоритм численного моделирования систематической составляющей решения 591
11.3.4 Алгоритм численного моделирования стохастической составляющей решения 596
11.3.5 Алгоритм численного моделирования решений стационарных СЛСДУ и оценка скорости его сходимости 600
11.4 Метод численного моделирования стационарных СЛСДУ, основанный на кусочно-постоянных случайных процессах 601
11.4.1 Алгоритм численного моделирования решений стационарных СЛСДУ 602
11.4.2 Оценка скорости сходимости алгоритма 604

12 Численное интегрирование стохастических дифференциальных уравнений со скачкообразной компонентой 608
12.1 Разложение Тейлора–Ито для решений стохастических дифференциальных уравнений со скачкообразной компонентой 610
12.2 Сильные численные методы решения стохастических дифференциальных уравнений со скачкообразной компонентой 613
12.3 Слабые численные методы решения стохастических дифференциальных уравнений со скачкообразной компонентой 621

IV Численное моделирование: алгоритмы, программы, результаты 624

13 Компьютерная программа в системе MATLAB 7.0 для численного моделирования решений стационарных систем линейных стохастических дифференциальных уравнений 625
13.1 Введение 625
13.2 Математическая модель объекта моделирования 626
13.3 Задачи, решаемые программой 628
13.4 Текст программы 628
13.5 Работа с программой 634
13.6 Примеры численного моделирования решений стационарных СЛСДУ . 639
13.6.1 Численное моделирование чандлеровских колебаний 640

13.6.2 Численное моделирование солнечной активности 640
13.6.3 Численное моделирование лагранжевой динамики частицы жидкости 643

14 Моделирование выборочных траекторий решений стохастических дифференциальных уравнений Ито 647
14.1 Численное интегрирование модели Блэка–Шоулза 647
14.2 Численное исследование влияния стохастического возмущения на трехмерную дискретную модель конвективной турбулентности Лоренца . . 649
14.3 Численное интегрирование стохастической модели Лотки–Вольтерра второго порядка 660
14.4 Численное моделирование динамики доходности портфеля ценных бумаг 662
14.5 Численное исследование влияния стохастического возмущения на систему уравнений Рёсслера 665

15 Примеры применения сильных численных методов решения стохастических дифференциальных уравнений к численному решению математических задач 672
15.1 Тестирование процедур оценивания параметров 672
15.1.1 Двухмерная линейная модель 673
15.1.2 Нелинейная одномерная модель 675
15.2 Фильтрация марковской цепи с конечным числом состояний 677
15.3 Линейная фильтрация Калмана–Бьюси 686
15.4 Нелинейная оптимальная фильтрация 688
15.5 Оптимальное стохастическое управление по неполным данным 691
15.6 Стохастическое оптимальное управление механической системой 694

16 Примеры применения слабых численных методов решения стохастических дифференциальных уравнений к численному решению математических задач 703
16.1 Вычисление наибольшего стохастического ляпуновского показателя . . 703
16.2 Детерминированные численные методы интегрирования задачи Коши для уравнений параболического типа, основанные на вероятностном представлении решения 706
16.3 Численное интегрирование задачи Коши для уравнений параболического типа, основанное на прямом статистическом моделировании . . . 712
16.4 Численное решение задачи Коши для уравнений параболического типа с помощью слабых численных методов и метода Монте-Карло 715

17 MATLAB 7.0-программы для некоторых численных экспериментов по тексту книги 717
17.1 Введение 717
17.2 MATLAB 7.0-программы к главе 6 718
17.2.1 Программа для моделирования стохастического интеграла (6.40) при $i_1 \neq i_2$ с выбором числа q из условия (6.52) 718
17.2.2 Программа для моделирования стохастического интеграла (6.41) при $i_1 \neq i_2$ с выбором числа q из условия (6.53) 719
17.2.3 Программа для проверки условия (6.53) 720
17.2.4 Программа для проверки формулы (6.87) 720

17.2.5 Программа для совместного численного моделирования стохастических интегралов $I^{(1)}_{0_{T,t}}$, $I^{(1)}_{1_{T,t}}$, $I^{(21)}_{00_{T,t}}$, $I^{(321)}_{000_{T,t}}$ по формулам (6.37), (6.38), (6.40), (6.44) . . . 721
17.3 MATLAB 7.0-программы к главе 7 . . . 722
17.3.1 Программа для численного эксперимента 7.1 . . . 722
17.3.2 Программа для численного эксперимента 7.2 . . . 723
17.3.3 Программа для численного эксперимента 7.9 . . . 724
17.3.4 Программа для численного эксперимента 7.13 . . . 725
17.4 MATLAB 7.0-программы к главе 8 . . . 727
17.4.1 Программа для численного эксперимента 8.1 при $\tilde{\alpha}_1 = 0.5$ . . . 727
17.4.2 Программа для численного эксперимента 8.2 при $\tilde{\alpha}_1 = \tilde{\alpha}_2 = 1$ . . . 728
17.4.3 Программа для численного эксперимента 8.9 . . . 730
17.4.4 Программа для численного эксперимента 8.14 . . . 731
17.5 MATLAB 7.0-программы к главе 9 . . . 734
17.5.1 Программа для численного эксперимента 9.3 . . . 734
17.5.2 Программа для численного эксперимента 9.11 . . . 735
17.5.3 Программа для численного эксперимента 9.12 (кривая 3) . . . 739
17.5.4 Программа для построения кривой 1 на рис.9.14 . . . 741
17.6 MATLAB 7.0-программы к главе 10 . . . 743
17.6.1 Программа для численного эксперимента 10.1 при $N = 500$, $M = 100$ . . . 743
17.6.2 Программа для численного эксперимента 10.2 при $N = 500$, $M = 200$ . . . 744
17.6.3 Программа для численного эксперимента 10.4 при $N = 500$, $M = 100$, $b = 0.01$ . . . 745
17.6.4 Программа для численного эксперимента 10.7 при $N = 500$, $M = 200$ . . . 746
17.6.5 Программа для численного эксперимента 10.9 при $N = 500$, $M = 200$ . . . 748
17.6.6 Программа для численного эксперимента 10.11 при $N = 500$, $M = 200$ . . . 749
17.6.7 Программа для численного эксперимента 10.12 при $N = 500$, $M = 200$ . . . 750
17.7 MATLAB 7.0-программы к главе 14 . . . 752
17.7.1 Программа для численного эксперимента 14.1 . . . 752
17.7.2 Программа, реализующая численную схему из раздела 14.2 . . . 752
17.7.3 Программа, реализующая численную схему из раздела 14.3 . . . 753
17.7.4 Программа, реализующая численную схему из раздела 14.4 . . . 754
17.7.5 Программа, реализующая численный метод из раздела 14.5 . . . 755
17.8 MATLAB 7.0-программы к главе 15 . . . 756
17.8.1 Программа для численного эксперимента 15.1 . . . 756
17.8.2 Программа для численного эксперимента 15.2 при $T = 800$ . . . 757
17.8.3 Программа для численного эксперимента 15.5 . . . 757
17.8.4 Программа для построения рис. 15.10, 15.11 . . . 759
17.8.5 Программа для численного эксперимента 15.7 при $\sigma = c = 0.05$. 760
17.8.6 Программа для численного эксперимента 15.8 при $\sigma = b = 0.07$. 761
17.8.7 Программа для численных экспериментов 15.9 и 15.11 . . . 763
17.9 MATLAB 7.0-программы к главе 16 . . . 764

17.9.1 Программа, строящая реализацию процесса $\lambda_{1,25}^{0.005}(5)$ из численного эксперимента 16.1 764
17.9.2 Программа для численного эксперимента 16.2 765
17.9.3 Программа для численного эксперимента 16.3 766
17.9.4 Программа, реализующая построение зависимостей $\mathsf{log}_2(\mu)$ от $\mathsf{log}_2(\Delta)$ и $|\mu|$ от Δ при $N = 500$, $M = 100$ в численном эксперименте 16.4 768
17.9.5 Упрощенная программа для численного эксперимента 16.5 . . . 769

Часть I

Стохастические дифференциальные уравнения: определения, свойства, проблемы, применения

Глава 1

Стохастические интегралы и стохастические дифференциальные уравнения

В настоящей вводной главе приводятся начальные и необходимые для дальнейшего изложения сведения из теории вероятностей, стохастических интегралов и стохастических дифференциальных уравнений. Данная глава поможет при чтении книги, в первую очередь читателям, не являющимся специалистами в области теории вероятностей и случайных процессов.

1.1 Некоторые сведения из теории вероятностей

1.1.1 Сходимость случайных последовательностей

Пусть заданы вероятностное пространство $(\Omega, \mathcal{F}, \mathsf{P})$ и борелевское измеримое пространство $(\Re^1, \mathcal{B})$. Функцию $\xi(\omega) : \Omega \to \Re^1$, определенную при всех $\omega \in \Omega$, будем называть случайной величиной, если она измерима относительно σ-алгебры $\mathcal{F}$, или $\mathcal{F}$-измерима, т. е. для любого $B \in \mathcal{B}$: $\{\omega \in \Omega : \xi(\omega) \in B\} \in \mathcal{F}$.

Определение 1.1. *Последовательность случайных величин $\xi_k(\omega)$ называется сходящейся с вероятностью 1, в среднем степени $p, 0 < p < \infty$, по вероятности или по распределению к случайной величине $\xi(\omega)$, если выполнено одно из следующих предельных соотношений:*

$$\mathsf{P}\{\omega : \ \xi_k \to \xi \ \textit{при}\ k \to \infty\} = 1,$$

$$\mathsf{M}\{|\xi_k - \xi|^p\} \to 0 \ \textit{при}\ k \to \infty,$$

$$\mathsf{P}\{\omega : \ |\xi_k - \xi| > \varepsilon\} \to 0 \ \textit{при}\ k \to \infty \ \textit{для всех}\ \varepsilon > 0,$$

$$F_{\xi_k}(x) \to F_\xi(x) \ \textit{при}\ k \to \infty \ \textit{для всех}\ x \in \Re^1,$$

где $F_{\xi_k}(x)$, $F_\xi(x)$ — функции распределения случайных величин ξ_k и ξ соответственно.

Для перечисленных видов сходимости случайных величин иногда используют следующие обозначения: $\xi_k \to \xi$ с в.1 при $k \to \infty$ (сходимость с вероятностью 1); $\underset{k\to\infty}{p\text{-l.i.m.}}\ \xi_k = \xi$ (сходимость в среднем степени p); $\xi_k \xrightarrow{\mathsf{P}} \xi$ при $k \to \infty$ или $\underset{k\to\infty}{\mathsf{P}\text{-lim}}\ \xi_k = \xi$ (сходимость по вероятности); $\xi_k \xrightarrow{d} \xi$ при $k \to \infty$ (сходимость по распределению).

Отметим, что если $p = 2$, то сходимость в среднем степени 2 называют сходимостью в среднеквадратическом смысле и обозначают $\underset{k\to\infty}{\text{l.i.m.}}\ \xi_k = \xi$.

Определение 1.2. *Последовательность случайных величин $\xi_k(\omega)$ называется фундаментальной по вероятности, с вероятностью единица, в среднем степени p или по распределению, если выполнено одно из следующих условий:*

$$\mathsf{P}\left\{|\xi_k - \xi_l| > \varepsilon\right\} \to 0 \ \textit{при}\ k, l \to \infty \ \textit{для любого}\ \varepsilon > 0,$$

$$\mathsf{P}\left\{\omega : \xi_k - \xi_l \to 0 \ \textit{при}\ k, l \to \infty\right\} = 1,$$

$$\mathsf{M}\left\{|\xi_k - \xi_l|^p\right\} \to 0 \ \textit{при}\ k, l \to \infty,$$

$$|F_{\xi_k}(x) - F_{\xi_l}(x)| \to 0 \ \textit{при}\ k, l \to \infty \ \textit{для всех}\ x \in \Re^1.$$

Отметим, что фундаментальность последовательности случайных величин является необходимым и достаточным условием существования ее предела (так называемый критерий Коши [7]), т. е. для того чтобы последовательность случайных величин $\xi_k(\omega)$ сходилась по вероятности, с вероятностью 1, в среднем степени p или по распределению к некоторой случайной величине $\xi(\omega)$, необходимо и достаточно, чтобы эта последовательность была фундаментальной в соответствующем смысле.

Приведем некоторые хорошо известные факты [7], касающиеся сходимости последовательностей случайных величин.

1. *Для того чтобы последовательность случайных величин $\xi_k(\omega)$ сходилась к случайной величине $\xi(\omega)$ с вероятностью 1, необходимо и достаточно, чтобы для любого $\varepsilon > 0$ выполнялось условие*

$$\lim_{N\to\infty} \mathsf{P}\left\{\sup_{k\geq N} |\xi_k - \xi| > \varepsilon\right\} = 0.$$

2. *Если последовательность случайных величин $\xi_k(\omega)$ сходится с вероятностью 1, то она сходится и по вероятности.*

3. *Если последовательность случайных величин* $\xi_k(\omega)$ *сходится по вероятности, то из нее можно извлечь подпоследовательность случайных величин* $\xi_{k_n}(\omega)$, *сходящуюся с вероятностью* 1 *к случайной величине* $\xi(\omega)$.

4. *Если* $\xi_k \xrightarrow{\mathsf{P}} \xi$ *при* $k \to \infty$ *и для любого* $\varepsilon > 0$ *выполняется условие* $\sum\limits_{k=0}^{\infty} \mathsf{P}\left\{|\xi_k - \xi| \geq \varepsilon\right\} < \infty$, *то последовательность случайных величин* $\xi_k(\omega)$ *сходится с вероятностью* 1 *к случайной величине* $\xi(\omega)$.

5. *Если последовательность случайных величин* $\xi_k(\omega)$ *сходится в среднем степени* p, $p > 0$, *то она сходится в среднем степени* q, $q > 0$, *при* $q < p$.

6. *Если последовательность случайных величин* $\xi_k(\omega)$ *сходится в среднем степени* p, $p > 0$, *то она сходится по вероятности.*

7. *Если для некоторого* $p > 0$ *выполняется условие* $\sum\limits_{k=0}^{\infty} \mathsf{M}\left\{|\xi_k - \xi|^p\right\} < \infty$, *то последовательность случайных величин* $\xi_k(\omega)$ *сходится с вероятностью* 1 *к случайной величине* $\xi(\omega)$.

8. *Если последовательность случайных величин* $\xi_k(\omega)$ *сходится к* $\xi(\omega)$ *по вероятности, то она сходится к* $\xi(\omega)$ *и по распределению.*

9. *Для того чтобы последовательность случайных величин* $\xi_k(\omega)$ *сходилась по распределению к случайной величине* $\xi(\omega)$, *необходимо и достаточно, чтобы для любой ограниченной непрерывной функции* $f(x)$ *выполнялось условие* $\lim\limits_{k\to\infty} \mathsf{M}\left\{f(\xi_k)\right\} = \mathsf{M}\left\{f(\xi)\right\}$.

10. *Если* $\xi_k \xrightarrow{\mathsf{P}} \xi$ *при* $k \to \infty$ *и существует случайная величина* η *такая, что* $|\xi_k| \leq \eta$ *и* $\mathsf{M}\left\{\eta\right\} < \infty$, *то* $\mathsf{M}\{|\xi|\} < \infty$, $\lim\limits_{k\to\infty} \mathsf{M}\left\{\xi_k\right\} = \mathsf{M}\left\{\xi\right\}$, $\lim\limits_{k\to\infty} \mathsf{M}\left\{|\xi_k - \xi|\right\} = 0$.

11. *Если* $\xi_k \to \xi$ *с в.1 при* $k \to \infty$ *и существует случайная величина* η *такая, что* $|\xi_k| \leq \eta$ *и* $\mathsf{M}\left\{\eta^p\right\} < \infty$ *при* $p > 0$, *то* $\mathsf{M}\{|\xi|^p\} < \infty$, $\underset{k\to\infty}{\text{p -l.i.m.}}\ \xi_k = \xi$.

12. *Если последовательность случайных величин* $\xi_k(\omega)$ *сходится в среднем степени* p, $p > 0$, *к случайной величине* $\xi(\omega)$ *и для всех* k *выполнено условие* $\mathsf{M}\left\{|\xi_k|^p\right\} < \infty$, *то* $\lim\limits_{k\to\infty} \mathsf{M}\left\{|\xi_k|^p\right\} = \mathsf{M}\left\{|\xi|^p\right\}$.

1.1.2 Неравенства для математических ожиданий

В дальнейшем для доказательства ряда утверждений нам потребуются различные оценки математических ожиданий. С этой целью рассмотрим основные неравенства для математических ожиданий, которые приводим без доказательства в силу их широкой известности.

Предполагается, что случайные величины, используемые в приведенных ниже неравенствах 1 – 7, таковы, что существуют все моменты, входящие в эти неравенства.

1. Неравенство Чебышева:

$$\mathsf{P}\left\{\xi \geq \varepsilon\right\} \leq \varepsilon^{-1}\mathsf{M}\left\{\xi\right\} \ \forall \xi(\omega) \geq 0 \text{ с в.1 и } \forall \varepsilon > 0.$$

Нетрудно видеть, что из этого неравенства следуют неравенства

$$\mathsf{P}\left\{\xi \geq \varepsilon\right\} \leq \varepsilon^{-2}\mathsf{M}\left\{\xi^2\right\}, \ \mathsf{P}\left\{\left|\xi - \mathsf{M}\left\{\xi\right\}\right| \geq \varepsilon\right\} \leq \varepsilon^{-2}\mathsf{D}\left\{\xi\right\},$$

где $\mathsf{D}\left\{\xi\right\} \stackrel{\text{def}}{=} \mathsf{M}\left\{\left(\xi - \mathsf{M}\left\{\xi\right\}\right)^2\right\}$ — дисперсия случайной величины ξ.

2. Неравенство Коши–Буняковского:

$$\left(\mathsf{M}\left\{|\xi\eta|\right\}\right)^2 \leq \mathsf{M}\left\{\xi^2\right\}\mathsf{M}\left\{\eta^2\right\}.$$

3. Неравенство Ляпунова:

$$\sqrt[s]{\mathsf{M}\left\{|\xi|^s\right\}} \leq \sqrt[t]{\mathsf{M}\left\{|\xi|^t\right\}} \ \forall s,t: \ 0 < s \leq t.$$

4. Неравенство Гельдера:

$$\left|\mathsf{M}\left\{\xi\eta\right\}\right| \leq \sqrt[p]{\mathsf{M}\left\{|\xi|^p\right\}}\sqrt[q]{\mathsf{M}\left\{|\eta|^q\right\}} \ \forall p, \ q: \ \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1, \ 1 < p, q < \infty.$$

5. Неравенство Минковского:

$$\sqrt[p]{\mathsf{M}\left\{|\xi + \eta|^p\right\}} < \sqrt[p]{\mathsf{M}\left\{|\xi|^p\right\}} + \sqrt[p]{\mathsf{M}\left\{|\eta|^p\right\}} \ \forall p: \ 1 \leq p < \infty.$$

6. Неравенство Иенсена:

$$\varphi\left(\mathsf{M}\left\{\xi\right\}\right) \leq \mathsf{M}\left\{\varphi\left(\xi\right)\right\},$$

где φ — определенная на множестве значений случайной величины ξ функция, обращенная выпуклостью вниз. Для функции φ, обращенной выпуклостью вверх, неравенство Иенсена имеет вид

$$\varphi\left(\mathsf{M}\left\{\xi\right\}\right) \geq \mathsf{M}\left\{\varphi\left(\xi\right)\right\}.$$

7. $\mathsf{M}\left\{|\xi + \eta|^p\right\} \leq 2^{p-1}\left(\mathsf{M}\left\{|\xi|^p\right\} + \mathsf{M}\left\{|\eta|^p\right\}\right) \ \forall p : p \geq 1.$

Наряду с приведенными неравенствами для математических ожиданий будем использовать также неравенство Гронуолла:

$$\alpha(t) \leq \beta(t) + K\int\limits_{t_0}^{t} e^{K(t-s)}\beta(s)ds,$$

которое справедливо при всех $t \in [t_0, t]$, если для любого $t \in [t_0, t]$

$$0 \leq \alpha(t) \leq \beta(t) + K\int\limits_{t_0}^{t} \alpha(s)ds, \ K \in (0, +\infty).$$

1.1.3 Случайные процессы

Семейство случайных величин, параметризованное параметром t, интерпретируемым как время, будем называть случайным процессом и обозначать $\xi_t \stackrel{\text{def}}{=} \xi(t,\omega) \in X \subseteq \Re^1$, где $t \in \mathcal{T} \subseteq \Re^1$ — временной параметр; $\mathcal{T}$ — множество определения, а X — множество значений случайного процесса ξ_t. Область определения $\mathcal{T}$ случайного процесса может быть, например, конечным, полубесконечным или бесконечным интервалом числовой прямой. В этих случаях функция $\xi(t,\omega)$ называется случайным процессом с непрерывным временем. Если $\mathcal{T}$ содержит конечное или счетное множество элементов $t_k \in \mathcal{T} : t_k < t_{k+1};\ k = 0,1,2,\ldots$, то ξ_t называется случайным процессом с дискретным временем, или случайной последовательностью.

Случайный процесс $\xi(t,\omega)$ считается полностью заданным, если заданы его конечномерные распределения — набор функций, которые определены для любого $k \geq 1$ соотношениями

$$F_\xi(A_1,\ldots,A_k,t_1,\ldots,t_k) = \mathsf{P}\left\{\bigcap_{j=1}^{k}\{\xi(t_j,\omega) \in A_j\}\right\},$$

где $t_1,\ldots,t_k \in \mathcal{T}$; $A_1,\ldots,A_k$ — борелевские множества из области X значений процесса $\xi(t,\omega)$.

Справедливо следующее утверждение А. Н. Колмогорова [65]:

Пусть функции $F_\xi(A_1,\ldots,A_k,t_1,\ldots,t_k)$ определены при $t_1,\ldots,t_k \in \mathcal{T}$; $A_1,\ldots,A_k \in \mathcal{B}(X)$ (σ-алгебра борелевских множеств в конечномерном евклидовом пространстве X). Тогда для существования такого случайного процесса $\xi(t,\omega)$, конечномерными распределениями которого являются функции $F_\xi(A_1,\ldots,A_k,t_1,\ldots,t_k)$, необходимо и достаточно, чтобы эти функции при $k \geq 1$ удовлетворяли следующим условиям:

1. *$F_\xi(A_1,\ldots,A_k,t_1,\ldots,t_k)$ — совместная функция распределения k случайных величин при фиксированных $t_1,\ldots,t_k$.*

2. *Для любой перестановки $i_1,i_2,\ldots,i_k$ чисел $1,2,\ldots,k$*

$$F_\xi(A_1,\ldots,A_k,t_1,\ldots,t_k) = F_\xi(A_{i_1},\ldots,A_{i_k},t_{i_1},\ldots,t_{i_k}).$$

3. $F_\xi(A_1,\ldots,A_{k-1},X,t_1,\ldots,t_k) = F_\xi(A_1,\ldots,A_{k-1},t_1,\ldots,t_{k-1})$.

В качестве вероятностного пространства можно взять $(\Omega,\mathcal{F},\mathsf{P})$, где Ω — множество всех функций $\omega(t) : \mathcal{T} \to X$; $\mathcal{F}$ — σ-алгебра, порожденная цилиндрическими множествами $\{\omega :\ \omega(t_1) \in A_1,\ldots,\omega(t_k) \in A_k\} \stackrel{\text{def}}{=} C(A_1,\ldots,A_k,t_1,\ldots,t_k)$; мера P определяется соотношением $\mathsf{P}\{C(A_1,\ldots,A_k,t_1,\ldots,t_k)\} = F_\xi(A_1,\ldots,A_k,t_1,\ldots,t_k)$. Тогда искомый

случайный процесс $\xi(t,\omega)$ *на вероятностном пространстве* $(\Omega, \mathcal{F}, \mathsf{P})$ *определяется равенством* $\xi(t,\omega) = \omega(t)$.

Конечномерные плотности распределения $p_\xi(x_1,\ldots,x_k,t_1,\ldots,t_k)$ процесса $\xi(t,\omega)$ представляются равенством

$$F_\xi(A_1,\ldots,A_k,t_1,\ldots,t_k) = \int\limits_{A_1} \ldots \int\limits_{A_k} p_\xi(x_1,\ldots,x_k,t_1,\ldots,t_k)dx_k\ldots dx_1.$$

Функция $\xi(t,\omega)$ при фиксированном ω называется выборочной функцией (траекторией, реализацией) случайного процесса.

Случайный процесс называется гауссовским, если его конечномерные плотности распределения имеют вид

$$p_\xi(x_1,\ldots,x_k,t_1,\ldots,t_k) = \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^n \det(K)}} \exp\left(-\frac{(\mathbf{x}-\mathbf{m})^\mathsf{T} K^{-1}(\mathbf{x}-\mathbf{m})}{2} \right),$$

где $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_k)^\mathsf{T}$; $\mathbf{m} = (m_1, m_2, \ldots, m_k)^\mathsf{T}$; $m_i \stackrel{\text{def}}{=} \mathsf{M}\{x_i\}$; K — симметричная, положительно определенная матрица; $\det(K)$ — определитель матрицы K.

Возможно также более общее определение гауссовского случайного процесса с помощью его конечномерных распределений.

Случайный процесс ξ_t, заданный на множестве $\mathcal{T}$, называется стационарным в узком смысле [9], если для любого $n \geq 1$ и любых моментов $t_1, t_2, \ldots, t_n, t$ таких, что $t_i + t \in \mathcal{T}, i = 1, \ldots, n$, совместные функции распределения или плотности распределения совокупности случайных величин $\xi_{t_1+t}, \ldots, \xi_{t_n+t}$ не зависят от t.

Будем называть процесс $\mathring{\xi}_t = \xi_t - \mathsf{M}\{\xi_t\}$ центрированной составляющей процесса ξ_t.

Функция $R_\xi(t_1,t_2) \stackrel{\text{def}}{=} \mathsf{M}\{\mathring{\xi}_{t_1}\mathring{\xi}_{t_2}\}$ называется корреляционной функцией процесса ξ_t, причем $R_\xi(t,t) \stackrel{\text{def}}{=} \mathsf{D}\{\xi_t\}$ — дисперсия этого случайного процесса.

Очевидно, что для стационарного в узком смысле случайного процесса ξ_t имеем, что $\mathsf{M}\{\xi_t\}$ — постоянная, $R_\xi(t_1,t_2) \equiv R_\xi(t_1 - t_2)$, $\mathsf{D}\{\xi_t\} \equiv R_\xi(0)$. Однако выполнение этих условий для случайного процесса ξ_t, вообще говоря, не гарантирует его стационарности в узком смысле. Поэтому процессы ξ_t, удовлетворяющие условиям $1-3$, называются стационарными в широком смысле [9]. Понятие стационарности в широком и узком смысле оказывается эквивалентным только на классе гауссовских процессов.

Известно [3], что для того чтобы функция $R_\xi(t)$ при $t \in (-\infty, \infty)$ являлась корреляционной функцией стационарного в широком смысле

случайного процесса ξ_t, удовлетворяющего условию $\mathsf{M}\left\{(\xi_{t+\tau}-\xi_t)^2\right\} \to 0$ при $\tau \to 0$, необходимо и достаточно, чтобы было допустимо представление

$$R_\xi(t) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{itw} dF_\xi(w), \tag{1.1}$$

где $F_\xi(w)$ — произвольная неотрицательная ограниченная монотонно неубывающая функция, непрерывная слева; i — мнимая единица.

Функция $F_\xi(w)$, входящая в представление (1.1) корреляционной функции $R_\xi(t)$ стационарного в широком смысле случайного процесса ξ_t, называется спектральной функцией. Если $F_\xi(w)$ абсолютно непрерывна и допустимо представление

$$F_\xi(w) = \int\limits_{-\infty}^{w} S_\xi(v)dv,$$

то $S_\xi(w)$ называется спектральной плотностью процесса ξ_t.

Поясним физический смысл спектральной функции [3]. Пусть ξ_t интерпретируется как электрический ток, представимый в виде "континуальной суммы" гармонических колебаний со случайными амплитудами. Тогда приращение $F_\xi(w_2) - F_\xi(w_1)$, $w_2 > w_1$, равно средней мощности, рассеиваемой гармониками, частоты которых лежат в полуинтервале $[w_1, w_2)$.

Спектральная функция может быть восстановлена по корреляционной функции. Так, если w_1 и w_2 — точки непрерывности спектральной функции $F_\xi(w)$, то справедливо соотношение [3]

$$F_\xi(w_2) - F_\xi(w_1) = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-itw_1} - e^{-itw_2}}{it} R_\xi(t)dt, \tag{1.2}$$

где интеграл в правой части понимается в смысле среднего значения.

В точках разрыва спектральной функции $F_\xi(w)$ соотношение (1.2) остается справедливым, если в левую часть его вместо $F_\xi(w)$ подставить $\frac{1}{2}\left(F_\xi(w+0) - F_\xi(w)\right)$.

Если корреляционная функция $R_\xi(t)$ абсолютно интегрируема на интервале $(-\infty, \infty)$, т. е. $\int\limits_{-\infty}^{\infty} |R_\xi(t)|dt < \infty$, то существует спектральная плотность процесса ξ_t, которая определяется равенством [3]

$$S_\xi(w) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-itw} R_\xi(t)dt. \tag{1.3}$$

Пользуясь представлением (1.3), нетрудно установить следующие свойства спектральной плотности:

1. $S_\xi(w) \in \Re^1$.
2. $S_\xi(w) = S_\xi(-w)$.
3. $S_\xi(w) \geq 0$.

Определение 1.3. *Случайный процесс ξ_t, определенный при всех $t \in [0, T]$, называется непрерывным в момент времени $t^* \in [0, T]$ в одном из вышеприведенных вероятностных смыслов, если справедливо предельное соотношение $\xi_t \to \xi_{t^*}$ при $t \to t^*$, понимаемое в соответствующем вероятностном смысле.*

Определение 1.4. *Процесс ξ_t называется непрерывным на промежутке $[t_1, t_2]$ в данном вероятностном смысле, если он непрерывен в этом смысле при любом $t \in [t_1, t_2]$. Непрерывность в среднем степени 2 случайного процесса ξ_t будем называть среднеквадратической непрерывностью.*

Определение 1.5. *Случайный процесс ξ_t, определенный для всех $t \in [0, T]$, называется дифференцируемым в момент $t \in [0, T]$ в одном из вероятностных смыслов, если существует правая часть предельного соотношения $(\xi_{t+\Delta} - \xi_t)/\Delta \to d\xi_t/dt$ при $\Delta \to 0$, понимаемого в этом вероятностном смысле. Процесс ξ_t будем называть дифференцируемым на промежутке $[t_1, t_2] \subseteq [0, T]$ в данном вероятностном смысле, если он дифференцируем в этом смысле при всех $t \in [t_1, t_2]$.*

Рассмотрим случайный процесс ξ_t, для которого

$$\mathsf{M}\left\{\xi_t | \mathcal{F}_s\right\} = \xi_s \text{ с в.1 при всех } 0 \leq s < t. \tag{1.4}$$

В теории случайных процессов процессы ξ_t, обладающие свойством (1.4), называются *мартингалами.* Если знак равенства в (1.4) заменить на знак $\leq$, то процесс ξ_t называется *супермартингалом*, а если его заменить на знак $\geq$, то — *субмартингалом.*

Большинство из рассматриваемых далее случайных процессов являются мартингалами. Среди многочисленных свойств мартингалов рассмотрим неравенство Дуба.

Пусть ξ_t, $t \geq 0$ — мартингал, для которого $\mathsf{M}\left\{|\xi_t|^p\right\} < \infty$. Тогда для любого $p > 1$ справедлива оценка

$$\mathsf{M}\left\{\sup_{0 \leq s \leq t} |\xi_s|^p\right\} \leq \left(\frac{p}{p-1}\right)^p \mathsf{M}\left\{|\xi_t|^p\right\}.$$

В частности, при $p = 2$ неравенство Дуба имеет вид

$$\mathsf{M}\left\{\sup_{0 \leq s \leq t} |\xi_s|^2\right\} \leq 4\mathsf{M}\left\{|\xi_t|^2\right\}$$

и именно в такой форме будет использоваться в дальнейшем.

Отметим, что определения и свойства мартингалов в дискретном времени аналогичны соответствующим определениям и свойствам мартингалов в непрерывном времени.

1.1.4 Марковские и диффузионные процессы

В данном разделе мы рассмотрим некоторые определения и факты, касающиеся марковских и диффузионных случайных процессов. Подробное изложение теории марковских случайных процессов можно найти в [132]. Мы будем придерживаться терминологии, принятой в [57, 59–65, 132].

Пусть заданы следующие объекты:

1. Вероятностное пространство $(\Omega, \mathcal{F}, \mathsf{P})$.

2. Поток σ-алгебр $\{\mathcal{F}_t, t \in \mathcal{T}\}$, $\mathcal{T} \subseteq [0, \infty)$, т. е. семейство σ-алгебр $\mathcal{F}_t$, $t \in \mathcal{T}$, таких, что $\mathcal{F}_t \subset \mathcal{F}$ и $\mathcal{F}_s \subset \mathcal{F}_t$ при $s \leq t$, $s, t \in \mathcal{T}$.

3. Случайная функция $\xi_t = \xi(t, \omega) : \mathcal{T} \times \Omega \to (\mathbf{X}, \mathcal{B})$, измеримая при каждом $t \in \mathcal{T}$. Здесь $(\mathbf{X}, \mathcal{B})$ — некоторое измеримое пространство.

Будем считать, что случайный процесс обладает *марковским свойством* относительно потока σ-алгебр $\{\mathcal{F}_t, t \in \mathcal{T}\}$, если при $s \leq t$, $s, t \in \mathcal{T}$, $A \in \mathcal{B}$ с вероятностью 1

$$\mathsf{P}\{\xi_t \in A | \mathcal{F}_s\} = \mathsf{P}\{\xi_t \in A | \xi_s\}. \tag{1.5}$$

Случайные процессы, обладающие свойством (1.5), обычно называют *марковскими случайными функциями.*

На качественном уровне марковское свойство можно интерпретировать следующим образом. Если ξ_t — состояние некоторой системы в момент времени t, то прогноз поведения этой системы в будущие относительно t моменты времени по наблюдениям поведения этой системы в предшествующие моменты вплоть до настоящего момента t будет зависеть, главным образом, от состояния системы в настоящий момент t.

Следствием использования марковского свойства и формулы полной вероятности является уравнение Колмогорова–Чэпмена

$$\mathsf{P}\{\xi_s \in A | \xi_t\} = \mathsf{M}\{\mathsf{P}\{\xi_s \in A | \xi_\theta\} | \xi_t\}$$

с P вероятностью 1 при каждом $A \in \mathcal{B}$, $t \leq \theta \leq s$, $t, \theta, s \in \mathcal{T}$.

Функция $P(s, \mathbf{x} | t, A)$, $\mathbf{x} \in \mathbf{X}$, $A \in \mathcal{B}$, $s < t$, $s, t \in \mathcal{T}$, называется *вероятностью перехода*, если выполнены следующие условия:

1. $P(s, \mathbf{x}|t, A)$ — вероятностная мера на измеримом пространстве $(\mathbf{X}, \mathcal{B})$ при фиксированных s, t, A.

2. $P(s, \mathbf{x}|t, A)$ — $\mathcal{B}$-измеримая функция при фиксированных s, t, A.

3. $P(s, \xi_s|t, A) = \mathsf{P}\{\xi_t \in A|\xi_s\}$ с вероятностью 1 при всех s, t, A.

Используя вероятность перехода, можно переписать уравнение Колмогорова–Чэпмена в виде

$$\mathsf{P}\{t, \xi_t|s, A\} = \int\limits_{\mathbf{X}} P(\theta, \mathbf{y}|s, A) P(t, \xi_t|\theta, d\mathbf{y})$$

с P вероятностью 1, где $t < \theta < s$, $t, \theta, s \in \mathcal{T}$, $A \in \mathcal{B}$.

Часто под уравнением Колмогорова–Чэпмена понимают более сильное соотношение

$$\mathsf{P}\{t, \mathbf{x}|s, A\} = \int\limits_{\mathbf{X}} P(\theta, \mathbf{y}|s, A) P(t, \mathbf{x}|\theta, d\mathbf{y})$$

с P вероятностью 1 для всех $\mathbf{x} \in \mathbf{X}$, $t < \theta < s$, $t, \theta, s \in \mathcal{T}$, $A \in \mathcal{B}$.

При изучении марковского свойства случайных процессов обычно рассматривают семейство марковских случайных функций, стартующих в произвольный момент времени s из произвольной точки $\mathbf{x}$ фазового пространства. Это фактически означает, что на вероятностном пространстве имеется не одна фиксированная вероятностная мера P, а семейство вероятностных мер $\mathsf{P}_{s,\mathbf{x}}$, зависящее от временной и фазовой переменных. Вероятностная мера $\mathsf{P}_{s,\mathbf{x}}$ интерпретируется как условная вероятность некоторого случайного события, которое может произойти после момента s при условии, что $\xi_s = \mathbf{x}$.

Дадим определение марковского процесса. Обозначим через $\mathcal{F}_{s,t}$ совокупность σ-алгебр $\{\mathcal{F}_\theta, \theta \in [s, t]\}$.

Пусть заданы следующие объекты:

1. (Ω, U) — измеримое пространство.

2. Случайная величина $\eta(\omega) : \Omega \to [0, +\infty]$.

3. При всех s, t таких, что $0 \le s \le t$, совокупности σ-алгебр $\mathcal{F}_{s,t}$, принадлежащие U в пространстве $\Omega_t = \{\omega : \eta(\omega) > t\}$, такие, что если $s \le t \le \theta$ и $A \in \mathcal{F}_{s,t}$, то $A \cap \Omega_\theta \in \mathcal{F}_{s,\theta}$.

4. Функция $\xi_t = \xi(t, \omega)$, $t \in [0, \eta(\omega))$, $\omega \in \Omega$, принимающая значения в некотором измеримом пространстве $(\mathbf{X}, \mathcal{B})$, такая, что при всех s, t таких, что $0 \le s \le t$, отображение $\xi(t, \cdot) : (\Omega_t, \mathcal{F}_{s,t}) \to (\mathbf{X}, \mathcal{B})$ является измеримым; здесь σ-алгебра $\mathcal{B}$ содержит все одноточечные множества.

5. Для всех $s \ge 0, \mathbf{x} \in \mathbf{X}$ заданы вероятностные меры $\mathsf{P}_{s,\mathbf{x}}$ на σ-алгебре $\mathcal{F}_{s,\infty}$.

Совокупность объектов 1–5 называют *обрывающимся марковским процессом*, если выполнены следующие два условия:

1. Для всех s, t, A таких, что $0 \le s \le t$, $A \in \mathcal{B}$, функция

$$P(s, \mathbf{x}|t, A) = \mathsf{P}_{s,\mathbf{x}}\{\xi_t \in A\}$$

является $\mathcal{B}$-измеримой функцией $\mathbf{x}$, причем $P(s, \mathbf{x}|s, \mathbf{X}\backslash\{\mathbf{x}\}) = 0$.

2. Для всех $s, t, \theta, \mathbf{x}, A$ таких, что $0 \le s \le t \le \theta$, $\mathbf{x} \in \mathbf{X}$, $A \in \mathcal{B}$,

$$\mathsf{P}_{s,\mathbf{x}}\{\xi_\theta \in A|\mathcal{F}_{s,t}\} = P(t, \xi_t|\theta, A)$$

с $\mathsf{P}_{s,\mathbf{x}}$ вероятностью 1 на множестве Ω_t.

Обрывающийся марковский процесс обычно обозначают $(\xi_t, \eta, \mathcal{F}_{s,t}, \mathsf{P}_{s,\mathbf{x}})$.

Случайный момент времени $\eta(\omega)$ называется *моментом обрыва* марковского процесса. Если $\eta(\omega) = +\infty$, то марковский процесс называется *необрывающимся* и обычно обозначается $(\xi_t, \mathcal{F}_{s,t}, \mathsf{P}_{s,\mathbf{x}})$.

Функция $P(s, \mathbf{x}|t, A)$ называется *вероятностью перехода* марковского процесса и удовлетворяет уравнению Колмогорова–Чэпмена.

Марковский процесс называется *однородным*, если вероятность перехода $P(s, \mathbf{x}|t, A)$ такова, что функция $P(s, \mathbf{x}|s + \Delta, A)$ не зависит от s, $\Delta > 0$. В этом случае полагают $P(\Delta, \mathbf{x}, A) \stackrel{\text{def}}{=} P(s, \mathbf{x}|s+\Delta, A)$. Для конечномерных распределений однородного марковского процесса имеем

$$\mathsf{P}_{s,\mathbf{x}}\{\xi_{t_1} \in A_1, \ldots, \xi_{t_n} \in A_n\} = \mathsf{P}_{0,\mathbf{x}}\{\xi_{t_1-s} \in A_1, \ldots, \xi_{t_n-s} \in A_n\},$$

$0 \le s < t_1 < \ldots < t_n$. Это означает, что вместо семейства вероятностных мер $\mathsf{P}_{s,\mathbf{x}}$, зависящих от временной и пространственной переменных, в случае однородного марковского процесса достаточно рассматривать семейство вероятностных мер $\mathsf{P}_{0,\mathbf{x}} \stackrel{\text{def}}{=} \mathsf{P}_{\mathbf{x}}$, зависящих только от пространственной переменной. Таким образом, всякий раз, когда процесс стартует из точки $\mathbf{x}$ в момент времени s, можно осуществить сдвиг времени так, чтобы точка s стала нулевой.

Обозначим через G_t минимальную σ-алгебру, включающую в себя все события $\{\xi_\theta \in A\}$, $\theta \in [0, t]$, $A \in \mathcal{B}$. Очевидно, что $G_t \subseteq \mathcal{F}_t$.

Пусть $(\xi_t, \eta, G_t, \mathsf{P}_{\mathbf{x}})$ — однородный марковский процесс в фазовом пространстве $(\mathbf{X}, \mathcal{B})$ с пространством элементарных событий Ω.

Случайная функция $\tau(\omega) : \Omega \to [0, +\infty]$ называется *марковским моментом*, если:

1. $0 \le \tau(\omega) \le \eta(\omega)$ при каждом $\omega \in \Omega$.
2. $\{\tau(\omega) \le t < \eta(\omega)\} \in G_t$ при всех $t \ge 0$.

Для $\omega \notin \Omega_\tau \stackrel{\text{def}}{=} \{\omega : \tau(\omega) < \eta(\omega)\}$ полагаем $\tau(\omega) = \eta(\omega)$.

Примем

$$\tau_A(\omega) = \inf\{s : 0 \le s < \eta(\omega), \xi(s, \omega) \notin A\},\ A \in \mathcal{B},$$

если множество в фигурных скобках непусто, и $\tau_A(\omega) = \eta(\omega)$ в противном случае. Величина $\tau_A(\omega)$ называется *моментом первого выхода* из множества A.

Известно [65, 132], что если процесс ξ_t непрерывен справа, A — открытое или замкнутое множество, а $\mathbf{X}$ — топологическое пространство, то $\tau_A(\omega)$ — марковский момент.

Марковский процесс $(\xi_t, \eta, G_t, \mathsf{P}_{\mathbf{x}})$ называется *прогрессивно измеримым*, если отображение $\xi(s,\omega) : ([0,t] \times \Omega_t, \mathcal{T}_{0,t} \times G_t) \to (\mathbf{X}, \mathcal{B})$ измеримо при всех t; здесь $\mathcal{T}_{0,t}$ — σ-алгебра борелевских подмножеств $[0,t]$.

Прогрессивно измеримый марковский процесс $(\xi_t, \eta, G_t, \mathsf{P}_{\mathbf{x}})$ называется *строго марковским*, если для всех $t \geq 0$, $\mathbf{x} \in \mathbf{X}$, $A \in \mathcal{B}$ и любого марковского момента $\tau(\omega)$ выполняется соотношение

$$\mathsf{P}_{\mathbf{x}}\{\xi_{t+\tau} \in A | G_\tau\} = P(t, \xi_\tau, A) \text{ с } \mathsf{P}_{\mathbf{x}} \text{ в. } 1$$

на множестве Ω_τ; здесь G_τ — совокупность всех таких событий $A \in G$, что $A \bigcap \{\tau \leq t < \eta\} \in G_t$ (G — совокупность всех $G_t, t \geq 0$).

Перейдем к определению характеристического оператора марковского процесса.

Будем полагать, что последовательность окрестностей $\{U_n\}_{n=1}^{\infty}$ точки $\mathbf{x}$ сходится к $\mathbf{x}$ ($U_n \downarrow \mathbf{x}$), если для любой окрестности U точки $\mathbf{x}$ найдется такое натуральное N, что $U_n \subset U$ при $n > N$.

Пусть $B(\mathbf{X})$ — банахово пространство всех вещественных ограниченных $\mathcal{B}$-измеримых функций на $\mathbf{X}$ с нормой $\|\cdot\| = \sup\limits_{\mathbf{x}\in\mathbf{X}} |\cdot|$, $\mathbf{X}$ — полукомпакт.

З а м е ч а н и е 1.1. *Полукомпактом называется* [132] *локально компактное хаусдорфово пространство со счетной базой. Напомним несколько понятий, входящих в определение полукомпакта. Система подмножеств $\tilde{C} \subset C$ называется базой топологического пространства (E, C), если каждая точка $\mathbf{x} \in E$ имеет окрестность $U \in \tilde{C}$. Топологическое пространство (E, C) называется хаусдорфовым, если для любых двух различных точек $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in E$ найдутся непересекающиеся множества $U, V \in C$ такие, что $\mathbf{x} \in U$, $\mathbf{y} \in V$. Пространство (E, C) называется локально компактным, если для каждой точки найдется компактная окрестность.*

Обозначим через $D_{\mathcal{U},\mathbf{x}}$ совокупность всех функций $f \in B(\mathbf{X})$, для которых при фиксированном $\mathbf{x} \in \mathbf{X}$ существует предел

$$\mathcal{U}f(\mathbf{x}) \stackrel{\text{def}}{=} \lim_{n\to\infty} \frac{\mathsf{M}_{\mathbf{x}}\{f(\xi_{\tau_n})\} - f(\mathbf{x})}{\mathsf{M}_{\mathbf{x}}\{\tau_n\}}, \tag{1.6}$$

где $\tau_{U_n} \stackrel{\text{def}}{=} \tau_n$ — момент первого выхода из открытого множества U_n; U_n — произвольная последовательность окрестностей точки $\mathbf{x}$, сходящаяся к $\mathbf{x}$; $\mathsf{M}_{\mathbf{x}}\{\cdot\}$ — условное математическое ожидание по мере $\mathsf{P}_{\mathbf{x}}$; $(\xi_t, \eta, G_t, \mathsf{P}_{\mathbf{x}})$ — непрерывный справа строго марковский процесс в полукомпакте $\mathbf{X}$.

Для $f \in \bigcap\limits_{\mathbf{x}\in\mathbf{X}} D_{\mathcal{U},\mathbf{x}}$ предел в правой части (1.6) существует при всех $\mathbf{x} \in \mathbf{X}$ и определяет некоторую функцию $\mathcal{U}f(\mathbf{x})$. Оператор $\mathcal{U}$ называется *характеристическим оператором* процесса $(\xi_t, \eta, G_t, \mathsf{P}_{\mathbf{x}})$. Его область определения $D_{\mathcal{U}} = \bigcap\limits_{\mathbf{x}\in\mathbf{X}} D_{\mathcal{U},\mathbf{x}}$.

Дадим определение однородного диффузионного процесса, основанное на понятии характеристического оператора.

Пусть $\mathcal{B}$ — σ-алгебра борелевских подмножеств $\Re^n$ и пусть $D_{2,\mathbf{x}}$, $\mathbf{x} \in \Re^n$, — совокупность всех вещественных функций, определенных и дважды непрерывно дифференцируемых в некоторой окрестности точки $\mathbf{x}$.

Непрерывный строго марковский процесс $(\xi_t, \eta, G_t, \mathsf{P}_{\mathbf{x}})$ в фазовом пространстве $(\Re^n, \mathcal{B})$ называется *диффузионным*, если для всех $\mathbf{x} \in \Re^n$ выполняется включение $D_{2,\mathbf{x}} \subset D_{\mathcal{U},\mathbf{x}}$, где $\mathcal{U}$ — характеристический оператор случайного процесса. Это значит, что характеристический оператор диффузионного процесса определен на любой дважды непрерывно дифференцируемой функции в окрестности точки $\mathbf{x} \in \Re^n$.

Зададим некоторый базис в $\Re^n$. Пусть в этом выбранном базисе $\mathbf{x} = (\mathbf{x}^{(1)} \dots \mathbf{x}^{(n)})^{\mathsf{T}}$, $\mathbf{x}_0 = (\mathbf{x}_0^{(1)} \dots \mathbf{x}_0^{(n)})^{\mathsf{T}}$. Положим

$$\beta^{(ij)}(\mathbf{x}) = (\mathbf{x}^{(i)} - \mathbf{x}_0^{(i)})(\mathbf{x}^{(j)} - \mathbf{x}_0^{(j)}),\ \alpha^{(i)}(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^{(i)} - \mathbf{x}_0^{(i)},\ \gamma(\mathbf{x}) \equiv 1,$$

где $i, j = 1, \dots, n$. Очевидно, что введенные функции дважды непрерывно дифференцируемы в окрестности точки $\mathbf{x}_0$. Таким образом, определены следующие функции:

$$B^{(ij)}(\mathbf{x}_0) = \mathcal{U}\beta^{(ij)}(\mathbf{x}_0),\ i, j = 1, \dots, n,$$

$$\mathbf{a}^{(i)}(\mathbf{x}_0) = \mathcal{U}\alpha^{(i)}(\mathbf{x}_0),\ i = 1, \dots, n,$$

$$c(\mathbf{x}_0) = -\mathcal{U}\gamma(\mathbf{x}_0).$$

Далее нетрудно установить [132], что если $f(\mathbf{x}) \in D_{2,\mathbf{x}_0}$, то

$$\mathcal{U}f(\mathbf{x}_0) = \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{n} B^{(ij)}(\mathbf{x}_0)\frac{\partial^2 f}{\partial \mathbf{x}^{(i)}\partial \mathbf{x}^{(j)}}(\mathbf{x}_0) + \sum_{i=1}^{n} \mathbf{a}^{(i)}(\mathbf{x}_0)\frac{\partial f}{\partial \mathbf{x}^{(i)}}(\mathbf{x}_0) - c(\mathbf{x}_0)f(\mathbf{x}_0),$$

где $c(\mathbf{x}_0) \geq 0$, а матрица $B(\mathbf{x}_0)$ неотрицательно определена, т. е. $\sum\limits_{i,j=1}^{n} B^{(ij)}(\mathbf{x}_0)\mathbf{z}^{(i)}\mathbf{z}^{(j)} \geq 0$ для всех $\mathbf{z} = (\mathbf{z}^{(1)} \dots \mathbf{z}^{(n)})^{\mathsf{T}} \in \Re^n$.

Известно [132], что при переходе к другому базису вид оператора $\mathcal{U}$ сохраняется, однако изменяются коэффициенты $B^{(ij)}(\mathbf{x}_0)$, $\mathbf{a}^{(i)}(\mathbf{x}_0)$.

Функция $c(\mathbf{x})$ называется *коэффициентом обрыва*, вектор $\mathbf{a}(\mathbf{x})$ — *вектором сноса*, а матрица $B(\mathbf{x})$ — *матрицей диффузии* диффузионного процесса $(\xi_t, \eta, G_t, \mathsf{P}_{\mathbf{x}})$.

Диффузионный процесс называется *каноническим*, если функции $c(\mathbf{x})$, $\mathbf{a}(\mathbf{x})$, $B(\mathbf{x})$ удовлетворяют следующим условиям:

I. Функции $\mathbf{a}^{(i)}(\mathbf{x})$, $B^{(ij)}(\mathbf{x})$, $c(\mathbf{x}) : \Re^n \to \Re^1$; $i, j = 1, \dots, n$, ограничены и удовлетворяют условию Гельдера на $\Re^n$ (функция $f(\mathbf{x})$ удовлетворяет условию Гельдера на $\Re^n$, если существуют постоянные $K > 0$ и $0 < \gamma \leq 1$ такие, что $|f(\mathbf{x}) - f(\mathbf{y})| \leq K|\mathbf{x} - \mathbf{y}|^\gamma$ для всех $\mathbf{x}$, $\mathbf{y} \in \Re^n$).

II. Существует постоянная $\delta > 0$ такая, что при всех $\mathbf{x}$, $\mathbf{z} \in \Re^n$ выполнено неравенство

$$\sum_{i,j=1}^{n} B^{(ij)}(\mathbf{x})\mathbf{z}^{(i)}\mathbf{z}^{(j)} \geq \delta|\mathbf{z}|^2.$$

III. Функция $c(\mathbf{x}) \geq 0$ при каждом $\mathbf{x} \in \Re^n$.

Достаточные условия того, что процесс является диффузионным, содержатся в следующей теореме.

Теорема 1.1 [65, 132]. *Пусть $(\xi_t, \eta, G_t, \mathsf{P}_{\mathbf{x}})$ — непрерывный процесс в $(\Re^n, \mathcal{B})$ и пусть для всех $\mathbf{x} \in \Re^n$ выполнены следующие три условия:*

1. *Существует окрестность U_0 точки $\mathbf{x}$ такая, что $\mathsf{M}_{\mathbf{x}}\{\tau_{U_0}\} < \infty$, где τ_{U_0} — момент первого выхода из U_0.*

2. *В некоторой системе координат в $\Re^n$ существуют пределы*

$$\lim_{t\downarrow 0} \frac{1}{t}\left(1 - P(t, \mathbf{x}, \Re^n)\right) = c(\mathbf{x}),$$

$$\lim_{t\downarrow 0} \frac{1}{t} \int\limits_{\Re^n} (\mathbf{y}^{(i)} - \mathbf{x}^{(i)}) P(t, \mathbf{x}, d\mathbf{y}) = \mathbf{a}^{(i)}(\mathbf{x}), \ i = 1, \dots, n,$$

$$\lim_{t\downarrow 0} \frac{1}{t} \int\limits_{\Re^n} (\mathbf{y}^{(i)} - \mathbf{x}^{(i)})(\mathbf{y}^{(j)} - \mathbf{x}^{(j)}) P(t, \mathbf{x}, d\mathbf{y}) = B^{(ij)}(\mathbf{x}), \ i, j = 1, \dots, n,$$

причем допредельные выражения равномерно ограничены при всех $\mathbf{x} \in \Re^n$, $t \geq 0$, а функции $c(\mathbf{x})$, $\mathbf{a}(\mathbf{x})$ и $B(\mathbf{x})$ непрерывны в точке $\mathbf{x}$.

Тогда процесс $(\xi_t, \eta, G_t, \mathsf{P}_{\mathbf{x}})$ диффузионный и для него $c(\mathbf{x})$ — коэффициент обрыва, $\mathbf{a}(\mathbf{x})$ — вектор сноса, а $B(\mathbf{x})$ — матрица диффузии.

Рассмотрим утверждение о вероятностном представлении решения дифференциального уравнения в частных производных второго порядка с эллиптическим оператором $\mathcal{U}$.

Теорема 1.2 [65, 132]. *Пусть на множестве* $\Re^n$ *заданы функции* $c(\mathbf{x})$, $\mathbf{a}(\mathbf{x})$, $B(\mathbf{x})$, *удовлетворяющие условиям* I – III. *Тогда существует диффузионный процесс* $(\xi_t, \eta, G_t, \mathsf{P}_{\mathbf{x}})$ *в фазовом пространстве* $(\Re^n, \mathcal{B})$, *для которого*

$$\mathcal{U}f(\mathbf{x}) = \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{n} B^{(ij)}(\mathbf{x})\frac{\partial^2 f}{\partial \mathbf{x}^{(i)}\partial \mathbf{x}^{(j)}}(\mathbf{x}) + \sum_{i=1}^{n}\mathbf{a}^{(i)}(\mathbf{x})\frac{\partial f}{\partial \mathbf{x}^{(i)}}(\mathbf{x}) - c(\mathbf{x})f(\mathbf{x}),$$

где $f \in D_{2,\mathbf{x}}$, *а* $\mathcal{U}$ *является характеристическим оператором процесса* $(\xi_t, \eta, G_t, \mathsf{P}_{\mathbf{x}})$ *и для любой ограниченной дважды непрерывно дифференцируемой функции* $f(\mathbf{x})$, $\mathbf{x} \in \mathbf{X}$, *функция* $u(\mathbf{x}, t) = \mathsf{M}_{\mathbf{x}}\{f(\xi_t)\}$ *является дважды непрерывно дифференцируемой по* $\mathbf{x}$, *дифференцируемой по* t *и удовлетворяет уравнению*

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \mathcal{U}u, \ t > 0, \ \mathbf{x} \in \Re^n$$

с начальным условием $\lim\limits_{t\downarrow 0} u(\mathbf{x}, t) = f(\mathbf{x})$.

Эллиптический дифференциальный оператор (см. теорему 1.2) называется *производящим дифференциальным оператором диффузионного процесса* и обычно обозначается $\mathcal{L}$.

Рассмотрим другое определение диффузионного процесса, которое основано на понятии вероятности перехода и применимо в случае неоднородного диффузионного процесса.

Говорят, что задан *марковский процесс в широком смысле* со значениями из $\Re^n$, если задана вероятность перехода $P(\theta, \mathbf{x}|t, A)$, $0 \le \theta < t \le T$, $A \in \mathcal{B}$ ($\mathcal{B}$ — σ-алгебра борелевских подмножеств $\Re^n$).

Марковский процесс в широком смысле со значениями в $\Re^n$ на временном интервале $[0, T]$ называется *диффузионным*, если выполнены следующие условия:

1. Для всех $\mathbf{x} \in \Re^n$, $t \in [0, T]$, $\varepsilon > 0$

$$\lim_{t\downarrow\tau}\frac{1}{t-\tau}\int\limits_{|\mathbf{y}-\mathbf{x}|>\varepsilon} P(\tau, \mathbf{x}|t, d\mathbf{y}) = 0. \tag{1.7}$$

2. Существуют функция $\mathbf{a}(\mathbf{x}, t) : \Re^n \times [0, T] \to \Re^n$ и симметричная неотрицательно определенная матричная функция $B(\mathbf{x}, t) : \Re^n \times [0, T] \to \Re^{n\times n}$ такие, что для всех $\mathbf{x}, \mathbf{z} \in \Re^n$, $t \in [0, T]$, $\varepsilon > 0$

$$\lim_{t\downarrow\tau}\frac{1}{t-\tau}\int\limits_{|\mathbf{y}-\mathbf{x}|<\varepsilon} (\mathbf{y}-\mathbf{x})P(\tau, \mathbf{x}|t, d\mathbf{y}) = \mathbf{a}(\mathbf{x}, \tau), \tag{1.8}$$

$$\lim_{t\downarrow\tau}\frac{1}{t-\tau}\int\limits_{|\mathbf{y}-\mathbf{x}|<\varepsilon}(\mathbf{y}-\mathbf{x},\mathbf{z})^2P(\tau,\mathbf{x}|t,d\mathbf{y})=(B(\mathbf{x},\tau)\mathbf{z},\mathbf{z}),\qquad(1.9)$$

где $(\cdot,\cdot)$ — скалярное произведение в $\Re^n$.

Вектор $\mathbf{a}(\mathbf{x},t)$ называют *вектором сноса*, а матрицу $B(\mathbf{x},t)$ — *матрицей, или оператором, диффузии.* В случае $n=1$ они соответственно называются *коэффициентом сноса и коэффициентом диффузии.*

Пусть в множестве $\Re^n$ фиксирован некоторый базис. Пусть $\mathbf{a}^{(i)}(\mathbf{x},t)$, $B^{(ij)}(\mathbf{x},t)$, $i,j=1,\ldots,n$, — координаты вектора $\mathbf{a}(\mathbf{x},t)$ и элементы матрицы $B(\mathbf{x},t)$ в данном базисе.

Следующие два утверждения отражают тесную связь диффузионных процессов и дифференциальных уравнений в частных производных параболического типа.

Теорема 1.3 [65, 132]. *Пусть задан диффузионный процесс с непрерывными вектором сноса* $\mathbf{a}(\mathbf{x},\tau):\Re^n\times[0,T]\to\Re^n$ *и матрицей диффузии* $B(\mathbf{x},\tau):\Re^n\times[0,T]\to\Re^{n\times n}$. *Пусть также ограниченная непрерывная функция* $f(\mathbf{x}):\Re^n\to\Re^1$ *такова, что при всех* $\mathbf{x}\in\Re^n$, $\tau\in[0,t]$ *функция*

$$u(\mathbf{x},\tau)=\int\limits_{\Re^n}f(\mathbf{y})P(\tau,\mathbf{x}|t,d\mathbf{y})$$

дважды непрерывно дифференцируема по $\mathbf{x}$. *Тогда функция* $u(\mathbf{x},\tau)$ *дифференцируема по* τ *и удовлетворяет уравнению в частных производных параболического типа*

$$\frac{\partial u}{\partial\tau}+\frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{n}B^{(ij)}(\mathbf{x},\tau)\frac{\partial^2u}{\partial\mathbf{x}^{(i)}\partial\mathbf{x}^{(j)}}+\sum_{i=1}^{n}\mathbf{a}^{(i)}(\mathbf{x},\tau)\frac{\partial u}{\partial\mathbf{x}^{(i)}}=0,\qquad(1.10)$$

где $\mathbf{x}\in\Re^n$, $\tau\in[0,t)$, *с начальным условием* $\lim\limits_{\tau\uparrow t}u(\mathbf{x},\tau)=f(\mathbf{x})$.

Уравнение (1.10) называется *обратным уравнением А.Н. Колмогорова.*

В случаях, когда вероятность перехода $P(\tau,\mathbf{x}|t,A)$ имеет плотность $p(\tau,\mathbf{x}|t,\mathbf{y})$, т. е. для всех $\tau\in[0,t)$, $\mathbf{x}\in\Re^n$, $A\in\mathcal{B}$

$$P(\tau,\mathbf{x}|t,A)=\int\limits_{A}p(\tau,\mathbf{x}|t,\mathbf{y})d\mathbf{y},$$

и эта плотность $p(\tau,\mathbf{x}|t,\mathbf{y})$ является достаточно гладкой функцией от $(t,\mathbf{y})$, справедливо следующее утверждение.

Теорема 1.4 [65, 132]. *Пусть для диффузионного процесса предельные соотношения* (1.7) – (1.9) *выполнены равномерно по* $\mathbf{x} \in \Re^n$ *и существуют непрерывные производные*

$$\frac{\partial p(\tau, \mathbf{x}|t, \mathbf{y})}{\partial t}, \ \frac{\partial}{\partial \mathbf{y}^{(i)}} \left(\mathbf{a}^{(i)}(\mathbf{y}, t) p(\tau, \mathbf{x}|t, \mathbf{y})\right), \ \frac{\partial^2}{\partial \mathbf{y}^{(i)} \partial \mathbf{y}^{(j)}} \left(B^{(ij)}(\mathbf{y}, t) p(\tau, \mathbf{x}|t, \mathbf{y})\right)$$

для всех $i, j = 1, \ldots, n$. *Тогда функция* $p(\tau, \mathbf{x}|t, \mathbf{y})$ *для каждого* $(t, \mathbf{y}) \in (\tau, T) \times \Re^n$ *удовлетворяет уравнению вида*

$$\frac{\partial p(\tau, \mathbf{x}|t, \mathbf{y})}{\partial t} + \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial}{\partial \mathbf{y}^{(i)}} \left(\mathbf{a}^{(i)}(\mathbf{y}, t) p(\tau, \mathbf{x}|t, \mathbf{y})\right) -$$

$$-\frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial \mathbf{y}^{(i)} \partial \mathbf{y}^{(j)}} \left(B^{(ij)}(\mathbf{y}, t) p(\tau, \mathbf{x}|t, \mathbf{y})\right) = 0. \qquad (1.11)$$

Уравнение (1.11) называется *прямым уравнением А.Н. Колмогорова, или уравнением Фоккера–Планка.*

Сформулированные утверждения свидетельствуют о тесной связи диффузионных процессов с дифференциальными уравнениями в частных производных параболического типа.

Известен и другой метод построения диффузионных процессов, основанный на построении их траекторий как решений стохастических дифференциальных уравнений. Такой подход будет рассмотрен в данной главе далее.

В случае когда область определения или (и) область значений (пространство состояний) марковского процесса дискретна (конечна или счетна) марковский процесс называется *марковской цепью.*

Рассмотрим марковскую цепь ξ_t, $t \geq 0$ с непрерывным временем и дискретным пространством состояний $Y = \{y_1, \ldots, y_N\}$, где N для определенности конечно (возможен также случай $N = +\infty$). Тогда в силу марковского свойства имеем

$$\mathsf{P}\{\xi_t = y_i | \xi_{t_1} = y_{j_1}, \ldots, \xi_{t_k} = y_{j_k}, \xi_\tau = y_j\} = \mathsf{P}\{\xi_t = y_i | \xi_\tau = y_j\}$$

для всех $t_1, \ldots, t_k, \tau, t: \ 0 \leq t_1 \leq \ldots \leq t_k < \tau \leq t$ и $y_j, y_i, y_{j_1}, \ldots, y_{j_k} \in Y$; $k = 1, 2, \ldots$

Для всех $\tau, t : 0 \leq \tau \leq t$ *матрица перехода* $P_{\tau,t} = \left\| P_{\tau,t}^{(ij)} \right\|_{i,j=1}^{N}$ цепи Маркова определяется следующим образом:

$$P_{\tau,t}^{(ij)} = \mathsf{P}\{\xi_t = y_j | \xi_\tau = y_i\}; \ i, j = 1, \ldots, N,$$

где $P_{\tau,t}^{(ij)}$ называются *вероятностями перехода* цепи Маркова.

Очевидно, что при $0 \le \tau \le t$ имеем

$$P_{\tau,\tau} = I, \ p_t = P_{\tau,t}^{\mathsf{T}} p_\tau, \tag{1.12}$$

где $p_t = (p_t^{(1)} \dots p_t^{(N)})^{\mathsf{T}}$ — вектор вероятностей с компонентами $p_t^{(i)} = \mathsf{P}\{\xi_t = y_i\}$; I — единичная матрица.

Используя (1.12), нетрудно получить

$$P_{s,t} = P_{s,\tau} P_{\tau,t} \tag{1.13}$$

для всех s, τ, t таких, что $0 \le s \le \tau \le t$.

Марковская цепь называется *однородной*, если $P_{\tau,t} = P_{0,t-\tau}$ для $0 \le \tau \le t$. При этом полагаем $P_{0,t} \stackrel{\text{def}}{=} P_t$, $t \ge 0$. Очевидно, что для однородной цепи Маркова равенство (1.13) преобразуется в равенство вида

$$P_{\tau+t} = P_\tau P_t = P_t P_\tau$$

для всех $\tau, t \ge 0$.

Матрицей интенсивности однородной марковской цепи назовем матрицу $A = \left\| A^{(ij)} \right\|_{i,j=1}^N$ с компонентами

$$A^{(ij)} = \begin{cases} \lim\limits_{t \downarrow 0} \frac{P_t^{(ij)}}{t} & \text{при } i \ne j \\ \lim\limits_{t \downarrow 0} \frac{P_t^{(ii)} - 1}{t} & \text{при } i = j \end{cases}; \quad i, j = 1, \dots, N.$$

Известно, что матрица A существует (ее диагональные элементы не обязательно конечны), и если $|A^{(ii)}| < \infty$, $i = 1, \dots, N$, то вероятности перехода удовлетворяют прямому и обратному уравнениям А. Н. Колмогорова. Эти уравнения в данном случае имеют следующий вид:

$$\frac{dP_t^{(ij)}}{dt} - \sum_{l=1}^N P_t^{(il)} A^{(lj)} = 0, \ \frac{dP_t^{(ij)}}{dt} - \sum_{l=1}^N P_t^{(lj)} A^{(li)} = 0, \ \text{где } i, j = 1, \dots, N.$$

1.1.5 Случайные процессы с независимыми приращениями. Винеровский и пуассоновский процессы

Дадим определение случайного процесса с независимыми приращениями.

Определение 1.6. *Случайный процесс ξ_t, определенный на промежутке $[0, T]$, называется процессом с независимыми приращениями,*

если для любых $t_0, t_1, \ldots, t_k \in [0,T]$ *таких, что* $0 \le t_0 < t_1 < \ldots < t_k \le T$, *случайные величины* ξ_{t_0}, $\xi_{t_1} - \xi_{t_0}$, $\ldots$, $\xi_{t_k} - \xi_{t_{k-1}}$ *стохастически независимы в совокупности.*

Особую роль в дальнейшем изложении будут играть винеровские случайные процессы, относящиеся к классу гауссовских процессов с независимыми приращениями. Приведем определения и рассмотрим свойства этих процессов. Более подробное изложение теории случайных процессов с независимыми приращениями можно найти в монографии А. В. Скорохода [127].

Определение 1.7. *Случайный процесс* $f_t \in \Re^1$ *с независимыми приращениями, определенный при* $t \in [0,T]$, *будем называть винеровским, если он удовлетворяет условиям:*

1. $\mathsf{M}\{f_t\} \equiv 0$.
2. $\mathsf{M}\left\{(f_{t_2} - f_{t_1})^2\right\} = \sigma_f^2 |t_2 - t_1|$, $\sigma_f^2 > 0$, — *постоянная.*
3. *Процессы* f_{t_1} *и* $f_{t_2} - f_{t_1}$, $t_2 > t_1$, *имеют нормальное распределение при всех* $t_1, t_2 \in [0,T]$.

Часто полагают $\sigma_f^2 = 1$, $f_0 = 0$. В этом случае винеровский процесс называется стандартным. Поскольку приращения $f_{t_2} - f_{t_1}$, $t_2 > t_1$, винеровского процесса имеют нормальное распределение, их функция распределения определяется соотношением

$$\mathsf{P}\{f_{t_2} - f_{t_1} < x\} = \frac{1}{\sigma_f \sqrt{2\pi\,(t_2 - t_1)}} \int\limits_{-\infty}^{x} \exp\left(-\frac{u^2}{2\sigma_f^2 (t_2 - t_1)}\right) du.$$

Известно, что в силу нормальности $f_{t_2} - f_{t_1}$ справедлива формула

$$\mathsf{M}\{(f_{t_2} - f_{t_1})^m\} = \begin{cases} \sigma_f^m (m-1)!!\,(t_2 - t_1)^{\frac{m}{2}} & \text{при } m = 2k \\ 0 & \text{при } m = 2k+1 \end{cases},$$

где $k \in Z, k > 0$.

Известно также, что для винеровского процесса существует непрерывная с вероятностью 1 модификация, которую и будем рассматривать.

Далее будем называть случайные величины ξ_j; $j = 1, \ldots, n$ стандартными гауссовскими случайными величинами, если ξ_j; $j = 1, \ldots, n$ распределены по нормальному закону, причем имеют нулевые математические ожидания и единичные дисперсии ($\xi_j \sim \mathrm{N}(0,1)$; $j = 1, \ldots, n$).

Отметим также следующие свойства винеровского процесса:

$$\lim_{t \to \infty} \frac{f_t}{t} = 0 \text{ с в.1},$$

$$\limsup_{t\to\infty}\frac{f_t}{\sqrt{2t\ln\ln t}}=1,\ \liminf_{t\to\infty}\frac{f_t}{\sqrt{2t\ln\ln t}}=-1 \text{ с в.1.} \tag{1.14}$$

Равенства (1.14) носят название закона повторного логарифма. Нетрудно показать, что $tf_{\frac{1}{t}}$ является винеровским процессом, если f_t — винеровский процесс. Тогда закон повторного логарифма можно записать в виде

$$\limsup_{t\downarrow 0}\frac{f_t}{\sqrt{2t\ln\ln(\frac{1}{t})}}=1,\ \liminf_{t\downarrow 0}\frac{f_t}{\sqrt{2t\ln\ln(\frac{1}{t})}}=-1 \text{ с в.1.}$$

С помощью винеровского процесса можно ввести процесс броуновского моста b_t:

$$b_t=x+f_t-\frac{t}{T}\left(f_T-y+x\right);\ t\in[0,T];\ x,y\in\Re^1, \tag{1.15}$$

который играет важную роль в приложениях. Из (1.15), в частности, следует, что $b_0=x$, $b_T=y$. Известно, что b_t — гауссовский процесс, который имеет следующие математическое ожидание и корреляционную функцию:

$$\mathsf{M}\left\{b_t\right\}=x-\frac{t}{T}\left(x-y\right),\ R_b(t,s)=\min\{s,t\}-\frac{st}{T},$$

где $0\le s,t\le T$.

Хорошо известно, что стандартный винеровский процесс $f(t,\omega)$ на любом конечном промежутке времени $[0,T]$ может быть представлен в виде сходящегося в среднеквадратическом смысле ряда Фурье из независимых стандартных гауссовских случайных величин:

$$f(t,\omega)=\sum_{j=0}^{\infty}\xi_j(\omega)C_j(t),\ t\in[0,T], \tag{1.16}$$

где функции $C_j(t)$ имеют вид

$$C_j(t)=\frac{2\sqrt{2T}}{(2j+1)\pi}\sin\left(\frac{(2j+1)\pi t}{2T}\right),$$

ортогональны, т. е. $\int\limits_0^T C_i(t)C_j(t)dt=0$ при $i\ne j$, и удовлетворяют условию $\sum\limits_{j=0}^{\infty}C_j(t)C_j(s)=\min\{s,t\}=R_f(s,t)$; $\xi_j(\omega)$ — независимые стандартные гауссовские случайные величины вида

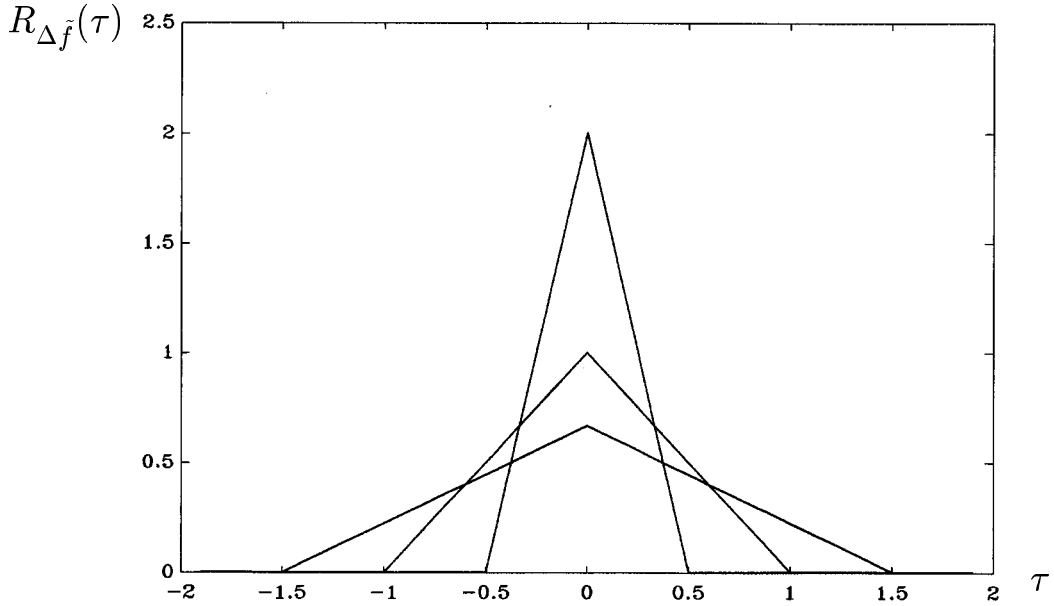

Рис.1.1. График семейства функций $R_{\Delta\tilde{f}}(\tau)$.

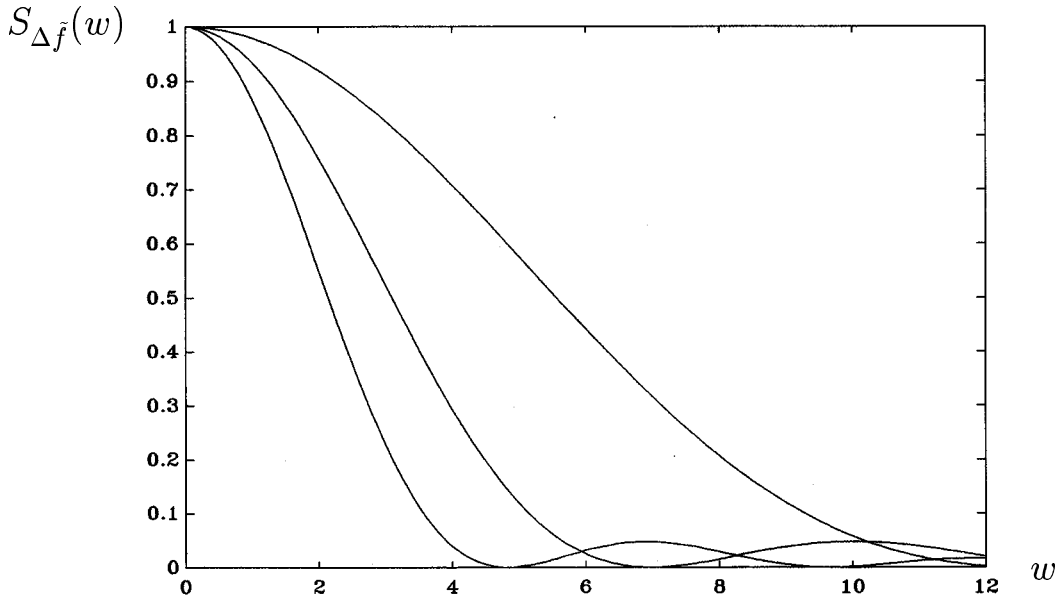

Рис.1.2. График семейства функций $S_{\Delta\tilde{f}}(w)$.

$$\xi_j(\omega) = \frac{2}{T}\left(\frac{(2j+1)\pi}{2\sqrt{2T}}\right)^2 \int\limits_0^T f(t,\omega)C_j(t)dt;\ i,j = 0,\ 1,\ldots$$

Разложение (1.16) называется в литературе разложением Карунена–Лоэва и имеет множество приложений. Оно может быть использовано для приближенного представления винеровского процесса. Г.Н. Мильштейном в [70] был предложен метод аппроксимации повторных стохастических интегралов, который основывается на модификации разложения (1.16) для процесса броуновского моста (см. главу 6).

С помощью винеровского процесса можно ввести понятие белого шума. Рассмотрим случайный процесс $\Delta\tilde{f}_t \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{\Delta}(f_{t+\Delta} - f_t),\ \Delta \geq 0$, где f_t — стандартный винеровский процесс.

Вычисляя корреляционную функцию и спектральную плотность процесса $\Delta\tilde{f}_t$, получаем

$$R_{\Delta\tilde{f}}(t) = \begin{cases} \frac{\Delta - |t|}{\Delta^2} & \text{при } |t| \leq \Delta \\ 0 & \text{при } |t| \geq \Delta \end{cases},\ S_{\Delta\tilde{f}}(w) = 2\frac{1 - \cos(w\Delta)}{(w\Delta)^2}.$$

На рис.1.1 и 1.2 приведены графики семейства функций $R_{\Delta\tilde{f}}(t)$ и $S_{\Delta\tilde{f}}(w)$ соответственно.

Очевидно, что, переходя к пределу при $\Delta \to 0$, имеем

$$\lim_{\Delta\to 0} R_{\Delta\tilde{f}}(t) = \delta(t),\ \lim_{\Delta\to 0} S_{\Delta\tilde{f}}(w) = 1,$$

где $\delta(t)$ — дельта-функция Дирака, т. е. обобщенная функция для которой $\delta(t) = 0$ при $t \neq 0$ и $\int\limits_{-\infty}^{\infty} \delta(t)g(t)dt = g(0)$ для любой непрерывной в нуле функции $g(t)$.

Рассмотрим идеализированный случайный процесс $\dot{f}_t$, которому соответствуют предельные значения корреляционной функции и спектральной плотности процесса $\Delta\tilde{f}_t$ при $\Delta \to 0$. Таким образом, случайный процесс $\dot{f}_t$ имеет δ-образную корреляционную функцию и постоянную спектральную плотность, т. е. является белым шумом. Иными словами, белый шум $\dot{f}_t$ можно рассматривать как обобщенную производную случайного процесса $f_t : \dot{f}_t \stackrel{\text{def}}{=} df_t/dt$.

Перейдем к рассмотрению процесса Пуассона.

Случайная величина ν называется распределенной по закону Пуассона с параметром λ, $\lambda > 0$, если

$$\mathsf{P}\{\nu = k\} = \frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda};\ k = 0,\ 1,\ 2, \ldots.$$

Характеристическая функция $\varphi(t)$ пуассоновского распределения имеет вид [4, 5]

$$\varphi(t) = \exp\{\lambda(e^{it} - 1)\}.$$

Нетрудно убедиться [4, 5], что

$$\mathsf{M}\{\nu\} = \lambda,\ \mathsf{M}\{\nu^2\} = \lambda^2 + \lambda,\ \mathsf{D}\{\nu\} = \lambda,$$

$$\mathsf{M}\{(\nu - \mathsf{M}\{\nu\})^k\} \stackrel{\text{def}}{=} \mu_k = \lambda \sum_{l=0}^{k-2} C_{k-1}^l \mu_l,\ k \geq 2,$$

$$\mathsf{M}\{\nu^k\} = \lambda \sum_{j=0}^{k-1} C_{k-1}^j \mathsf{M}\{\nu^j\},\ k \geq 1,$$

где $C_n^k = n!/(k!(n-k)!)$ — биномиальный коэффициент.

Однородный процесс ν_t с независимыми приращениями называется однородным процессом Пуассона, если ν_t имеет пуассоновское распределение, т. е. существует такое $\lambda > 0$, что

$$\mathsf{P}\{\nu_{t+\Delta} - \nu_t = k\} = \frac{(\lambda\Delta)^k}{k!} e^{-\lambda\Delta},\ k = 0,\ 1,\ 2, \ldots,\ \Delta > 0.$$

Характеристическая функция процесса Пуассона имеет вид [4, 5]

$$\varphi(t, \theta) = \exp\{\lambda t(e^{i\theta} - 1)\}.$$

Возникновение процесса Пуассона возможно, например, в следующей ситуации.

Предположим, что в некотором эксперименте наблюдается появление некоторых событий и при этом выполняются условия:

1. Число событий, произошедших на промежутке времени $[t, t+\Delta]$, не зависит от того, сколько событий и в какие моменты времени произошло на промежутке $[0,\ t]$.

2. Вероятность того, что на промежутке времени $[t,\ t+\Delta]$ произойдет одно событие, равна $\lambda\Delta + o(\Delta)$.

3. Вероятность того, что на промежутке времени $[t,\ t+\Delta]$ произойдет более одного события, равна $o(\Delta)$.

Тогда случайная величина ν_t, равная числу событий, которые произошли на промежутке $[0,\ t]$, как функция t является процессом Пуассона.

Возможная траектория процесса Пуассона ν_t изображена на рис. 1.3.

В дальнейнем будем рассматривать также объекты более общего вида.

Пусть $(\Theta, \mathcal{B})$ — измеримое пространство с мерой Π, а $\mathcal{B}_0$ — подалгебра $\mathcal{B}$, состоящая из таких множеств $A \subset \mathcal{B}$, для которых $\Pi(A) < \infty$. Обозначим через $\mathcal{B}_+$ σ-алгебру борелевских множеств $[0, T)$, $T \leq \infty$. Пусть также задано вероятностное пространство $(\Omega, \mathcal{F}, \mathsf{P})$ с совокупностью σ-алгебр $\{\mathcal{F}_t,\ t \in [0, T)\}$, $T \leq \infty$, которая монотонно возрастает с ростом t, непрерывна справа по t и полна относительно меры P, причем $\mathcal{F}_0$ содержит все события с нулевой вероятностью.

Пусть каждому множеству $C \subset \mathcal{B}_+ \times \mathcal{B}$ поставлена в соответствие случайная величина $\nu(C)$ такая, что:

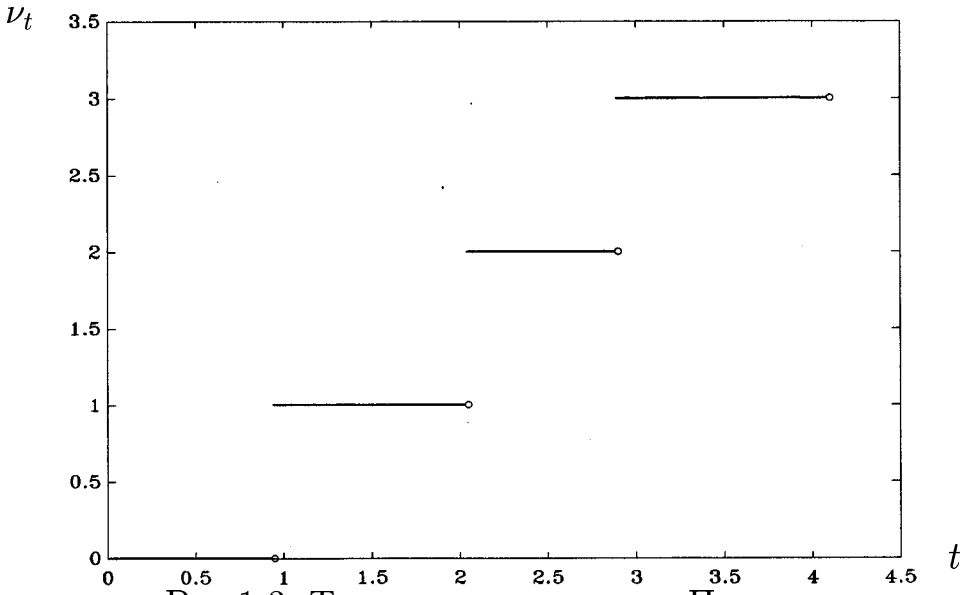

Рис.1.3. Траектория процесса Пуассона.

(I) Для каждого $A \subset \mathcal{B}_0$ случайный процесс $\nu([0,t),A)$ — однородный пуассоновский процесс с параметром $\Pi(A)$, т. е.

$$\mathsf{P}\{\nu([0,t),A) - \nu([0,s),A) = k\} = \frac{((t-s)\Pi(A))^k}{k!} e^{-(t-s)\Pi(A)},$$

где $0 \le s < t$; $k = 0,\ 1,\ 2, \ldots$, и при всех $t \ge 0$ случайные величины $\nu([0,t),A)$ измеримы относительно σ-алгебры $\mathcal{F}_t$, а приращение $\nu([0,t+s),A) - \nu([0,t),A)$, $s \ge 0$, не зависит от σ-алгебры $\mathcal{F}_t$.

(II) Для непересекающихся множеств $A_i \subset \mathcal{B}_0$, $i = 1, \ldots, n$, процессы $\nu([0,t),A_i)$ независимы.

(III) Для любой последовательности $C_1,\ C_2,\ C_3, \ldots$ попарно непересекающихся множеств из $\mathcal{B}_+ \times \mathcal{B}$: $\nu(\bigcup\limits_{i=1}^{\infty} C_i) = \sum\limits_{i=1}^{\infty} \nu(C_i)$ с в.1.

Если выполнены условия (I) – (III), то говорят, что в пространстве $[0,\ \infty) \times \Theta$ определена пуассоновская мера ν.

1.1.6 Численное моделирование пуассоновского и гауссовского распределений

В следующих главах книги рассматриваются различные численные методы решения стохастических дифференциальных уравнений. При этом на стадии численной реализации данных методов возникает необходимость в численном моделировании случайных величин, распределенных по пуассоновскому и гауссовскому законам с заданными параметрами.

Для численного моделирования случайной величины ν, имеющей пуассоновское распределение с параметром λ, воспользуемся алгоритмом, приведенным в [11].

Введем случайную величину ν, определенную равенством

$$\nu = \min\left\{n : \prod_{k=1}^{n} u_k < e^{-\lambda}\right\}, \tag{1.17}$$

где $u_1, \ldots, u_k$ — независимые, равномерно распределенные на интервале $(0,\ 1)$ случайные величины.

В [11] показано, что случайная величина ν вида (1.17) имеет пуассоновское распределение с параметром λ, т. е.

$$\mathsf{P}\{\nu = m\} = \frac{\lambda^m}{m!}e^{-\lambda};\ m = 0,\ 1, \ldots$$

Формула (1.17) позволяет построить следующий алгоритм численного моделирования пуассоновской случайной величины ν.

Алгоритм 1.1. *Моделирование пуассоновской случайной величины с параметром* λ.

1. $S := 1$.
2. $k := 1$.
3. Моделирование случайной величины u_k.
4. $S := Su_k$.
5. Если $S > e^{-\lambda}$, то $k := k + 1$, и переходим к п. 4.
6. $\nu := k$.
7. Конец работы алгоритма 1.1.

Нетрудно видеть, что если требуется моделировать m независимых пуассоновских случайных величин ν_1, ν_2,…,ν_m с параметром λ, то для этого можно m раз воспользоваться алгоритмом 1.1. Так, для моделирования ν_1 по алгоритму 1.1 используется набор случайных величин $u_1^{(1)}, \ldots, u_{n_1}^{(1)}$, для моделирования ν_2 — набор случайных величин $u_1^{(2)}, \ldots, u_{n_2}^{(2)}$ и т. д. При этом случайные величины $u_1^{(1)}, \ldots, u_{n_1}^{(1)}, \ldots,$ $u_1^{(m)}, \ldots, u_{n_m}^{(m)}$ должны быть независимыми в совокупности и равномерно распределенными на интервале $(0,\ 1)$.

Рассмотрим процесс моделирования гауссовского распределения с параметрами m и σ.

Можно убедиться [11], что случайная величина

$$\eta^{(n)} = \sqrt{\frac{12}{n}} \sum_{k=1}^{n} \left(u_k - \frac{1}{2}\right) \tag{1.18}$$

в соответствии с центральной предельной теоремой является асимптотически нормальной стандартной (т. е. с параметрами 0 и 1) случайной величиной. Здесь $u_1, \ldots, u_k$ — независимые, равномерно распределенные на интервале $(0,\ 1)$ случайные величины. Обычно в формуле (1.18) принимают $n = 12$:

$$\eta^{(12)} = \sum_{k=1}^{12} u_k - 6. \tag{1.19}$$

Для более точного моделирования гауссовского распределения с параметрами 0 и 1 иногда используют формулу [11]

$$\xi^{(n)} = \eta^{(n)} + \frac{1}{20n}\left(\left(\eta^{(n)}\right)^3 - 3\eta^{(n)}\right).$$

Для моделирования гауссовской случайной величины с параметрами m и σ можно применить формулу $\rho^{(n)} = m + \sigma\eta^{(n)}$, где $\eta^{(n)}$ определяется из формулы (1.18).

Если необходимо моделировать d независимых стандартных гауссовских случайных величин $\eta_1, \ldots, \eta_d$, то можно d раз воспользоваться формулой (1.19). Так, для моделирования η_1 используются случайные величины $u_1, \ldots, u_{12}$, для моделирования η_2 — случайные величины $u_{13}, \ldots, u_{24}$ и т. д. При этом случайные величины $u_1, \ldots, u_{12d}$ независимы в совокупности и равномерно распределены на интервале $(0,\ 1)$.

Обзоры различных методов численного моделирования гауссовского распределения приведены в [86, 87, 186].

1.2 Стохастические интегралы по винеровскому процессу и стохастические дифференциальные уравнения диффузионного типа

1.2.1 Стохастический интеграл Ито

Пусть заданы вероятностное пространство $(\Omega, \mathcal{F}, \mathsf{P})$ и винеровский случайный процесс $f_t,\ t \in [0, T]$. Рассмотрим совокупность σ-алгебр $\{\mathcal{F}_t,\ t \in [0, T]\}$, определенную на вероятностном пространстве $(\Omega, \mathcal{F}, \mathsf{P})$ и связанную с процессом f_t так, что:

1. $\mathcal{F}_s \subset \mathcal{F}_t \subset \mathcal{F}$ при $s < t$.
2. Процесс f_t измерим относительно $\mathcal{F}_t$ при каждом $t \in [0, T]$.
3. Процесс $f_{t+\Delta} - f_\Delta$ при всех $\Delta \geq 0,\ t > 0$ не зависит от событий σ-алгебры $\mathcal{F}_\Delta$.

Введем класс $\mathcal{M}_2([0, T])$ функций $\xi :\ [0, T] \times \Omega \to \Re^1$, которые удовлетворяют следующим условиям:

(I) *функции* $\xi(t,\omega)$ *измеримы по совокупности переменных* (t,ω);

(II) *функция* $\xi(t,\omega)$ $\mathcal{F}_t$*-измерима при всех* $t \in [0,T]$ *и ее значения* $\xi(\tau,\omega)$ *не зависят от приращений* $f_{t+\Delta} - f_\Delta$ *винеровского процесса при* $\Delta \geq \tau,\ t > 0$;

(III) $\int\limits_0^T \mathsf{M}\left\{(\xi(t,\omega))^2\right\} dt < \infty$;

(IV) $\mathsf{M}\left\{(\xi(t,\omega))^2\right\} < \infty$ *для всех* $t \in [0,T]$.

Введем на классе $\mathcal{M}_2([0,T])$ норму вида

$$\|\xi\|_{2,T} = \left(\int\limits_0^T \mathsf{M}\left\{(\xi(t,\omega))^2\right\} dt\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Будем отождествлять две функции ξ, η из класса $\mathcal{M}_2([0,T])$, если $\|\xi - \eta\|_{2,T} = 0$.

Для произвольного разбиения $\{\tau_j\}_{j=0}^N$ промежутка $[0,T]$ такого, что $0 = \tau_0 < \tau_1 < \ldots < \tau_N = T$, и произвольной последовательности среднеквадратически интегрируемых, $\mathcal{F}_{\tau_j}$-измеримых и не зависящих от приращений $f_{s+t} - f_t,\ t \geq \tau_j, s > 0$, случайных величин $\xi_j(\omega)$; $j = 0,\ 1, \ldots,\ N-1$ определим ступенчатую функцию $\xi \in \mathcal{M}_2([0,T])$ следующим образом: $\xi(t,\omega) = \xi_j(\omega)$ с вероятностью 1 при $\tau_j \leq t < \tau_{j+1}$; $j = 0,\ 1, \ldots, N-1$. При этом интеграл в условии (III) понимается следующим образом:

$$\int\limits_0^T \mathsf{M}\left\{(\xi(t,\omega))^2\right\} dt = \sum_{j=0}^{N-1} \mathsf{M}\left\{(\xi_j)^2\right\} (\tau_{j+1} - \tau_j).$$

Обозначим через $\mathcal{K}_2([0,T])$ множество всех ступенчатых функций в классе $\mathcal{M}_2([0,T])$. Для произвольной ступенчатой функции ξ из класса $\mathcal{K}_2([0,T])$ определим стохастический интеграл Ито:

$$\sum_{j=0}^{N-1} \xi_j(\omega)\left(f(\tau_{j+1},\omega) - f(\tau_j,\omega)\right) \stackrel{\text{def}}{=} \int\limits_0^T \xi_\tau df_\tau.$$

Нетрудно показать, что стохастический интеграл Ито $\int\limits_0^T \xi_\tau df_\tau$ является $\mathcal{F}_T$-измеримым, не зависит от приращений $f_{s+\Delta} - f_\Delta$, $\Delta \geq T, s > 0$, и для любых $\xi, \eta \in \mathcal{K}_2([0,T])$ и любых $\alpha,\ \beta \in \Re^1$ удовлетворяет следующим соотношениям:

*A*1. $\mathsf{M}\left\{\int\limits_0^T \xi_\tau df_\tau\right\} = 0$.

*A*2. $\mathsf{M}\left\{\left(\int\limits_0^T \xi_\tau df_\tau\right)^2\right\} = \int\limits_0^T \mathsf{M}\{\xi_\tau^2\} d\tau$.

$A3.$ $\int\limits_0^T (\alpha\xi_\tau + \beta\eta_\tau)\, df_\tau = \alpha \int\limits_0^T \xi_\tau df_\tau + \beta \int\limits_0^T \eta_\tau df_\tau$ с в.1.

$A4.$ $\mathsf{M}\left\{\int\limits_0^T \xi_\tau df_\tau \int\limits_0^T \eta_\tau df_\tau\right\} = \int\limits_0^T \mathsf{M}\left\{\xi_\tau \eta_\tau\right\} d\tau.$

Рассмотрим разбиение промежутка $[0,T]$, для которого

$$0 = \tau_0^{(N)} < \tau_1^{(N)} < \ldots < \tau_N^{(N)} = T,\ \Delta_N = \max_{0\le j\le N-1} \left|\tau_{j+1}^{(N)} - \tau_j^{(N)}\right| \to 0$$

при $N \to \infty$. Определим последовательность ступенчатых функций $\xi^{(N)}(t,\omega)$: $\xi^{(N)}(t,\omega) = \xi(\tau_j^{(N)},\omega)$ с в.1 при $t \in [\tau_j^{(N)}, \tau_{j+1}^{(N)})$, где $j = 0,\ 1,\ldots,N-1$; $N = 1,\ 2,\ldots$.

Можно показать (см., например, [86. С. 82–83]), что для фиксированной функции $\xi \in \mathcal{M}_2([0,T])$ введенная ранее последовательность ступенчатых функций $\xi^{(N)}(t,\omega) \in \mathcal{K}_2([0,T])$ сходится по норме $\|\cdot\|_{2,T}$ к функции $\xi(t,\omega)$ при $N \to \infty$, т. е.

$$\lim_{N\to\infty} \left(\int\limits_0^T \mathsf{M}\left\{\left|\xi^{(N)}(t,\omega) - \xi(t,\omega)\right|^2\right\} dt\right)^{\frac{1}{2}} = 0. \tag{1.20}$$

Пусть $J_N \stackrel{\text{def}}{=} \int\limits_0^T \xi^{(N)}(t,\omega) df_t$. Тогда согласно свойствам $A1 - A4$ имеем

$$\mathsf{M}\left\{|J_N - J_{N+M}|^2\right\} = \int\limits_0^T \mathsf{M}\left\{\left|\xi^{(N)}(t,\omega) - \xi^{(N+M)}(t,\omega)\right|^2\right\} dt \le$$

$$\le 2\int\limits_0^T \mathsf{M}\left\{\left|\xi^{(N)}(t,\omega) - \xi(t,\omega)\right|^2\right\} dt + 2\int\limits_0^T \mathsf{M}\left\{\left|\xi(t,\omega) - \xi^{(N+M)}(t,\omega)\right|^2\right\} dt. \tag{1.21}$$

Из (1.20) и (1.21) получаем, что последовательность J_N является фундаментальной в среднеквадратическом смысле, т. е. существует такая случайная величина J, что $\lim\limits_{N\to\infty} \mathsf{M}\left\{|J_N - J|^2\right\} = 0$. Очевидно, что J является $\mathcal{F}_T$-измеримой как предел последовательности $\mathcal{F}_T$-измеримых случайных величин. Кроме того, J является единственной с вероятностью 1 случайной величиной для любой последовательности ступенчатых функций из $\mathcal{K}_2([0,T])$, сходящейся к функции $\xi(t,\omega)$ по норме в $\mathcal{M}_2([0,T])$.

Действительно, пусть существует такая последовательность $\tilde{\xi}^{(N)} \in \mathcal{K}_2([0,T])$, что $\|\tilde{\xi}^{(N)} - \xi\|_{2,T} \to 0$ при $N \to \infty$, но при этом $\tilde{J}_N \stackrel{\text{def}}{=}$

$\int\limits_0^T \tilde{\xi}^{(N)}(t,\omega)df_t$ сходится в среднеквадратическом смысле к некоторой случайной величине $\tilde{J}$, отличной от J. Тогда

$$\mathsf{M}\left\{\left|J-\tilde{J}\right|^2\right\} \le 3\mathsf{M}\left\{\left|J-J_N\right|^2\right\} + 3\mathsf{M}\left\{\left|J_N-\tilde{J}_N\right|^2\right\} + 3\mathsf{M}\left\{\left|\tilde{J}_N-\tilde{J}\right|^2\right\}. \tag{1.22}$$

Очевидно, что первое и третье слагаемые в правой части (1.22) стремятся к нулю при $N \to \infty$. Аналогично (1.21) показывается, что $\mathsf{M}\left\{\left|J_N-\tilde{J}_N\right|^2\right\} \to 0$ при $N \to \infty$. Поэтому $\mathsf{M}\left\{\left|J-\tilde{J}\right|^2\right\} = 0$, следовательно, $J = \tilde{J}$ с вероятностью 1.

Определение 1.8. *Стохастическим интегралом Ито от функции $\xi \in \mathcal{M}_2([0,T])$ назовем среднеквадратический предел*

$$\underset{N\to\infty}{\text{l.i.m.}} \sum_{j=0}^{N-1} \xi^{(N)}(\tau_j^{(N)},\omega)\left(f(\tau_{j+1}^{(N)},\omega) - f(\tau_j^{(N)},\omega)\right) \stackrel{\text{def}}{=} \int\limits_0^T \xi_\tau df_\tau, \tag{1.23}$$

где $\xi^{(N)}(t,\omega)$ — произвольная ступенчатая функция из $\mathcal{K}_2([0,T])$, сходящаяся по норме $\|\cdot\|_{2,T}$ к функции $\xi(t,\omega)$.

Таким образом, справедлива следующая теорема.

Теорема 1.5. *Пусть $\xi \in \mathcal{M}_2([0,T])$. Тогда стохастический интеграл Ито, определенный в соответствии с определением* 1.8, *существует.*

Можно показать (см., например, [86]), что стохастический интеграл Ито для всех $\xi, \eta \in \mathcal{M}_2([0,T])$ и всех $\alpha, \beta \in \Re^1$ удовлетворяет свойствам $A1 - A4$.

Мы рассмотрели стохастический интеграл Ито на фиксированном промежутке $[0,T]$. Пусть теперь фиксированный промежуток $[t_0,t] \subseteq [0,T]$. Определим стохастический интеграл Ито $\int\limits_{t_0}^t \xi_\tau df_\tau$ для $\xi \in \mathcal{M}_2([t_0,t])$ в соответствии с определением 1.8 путем замены 0 на t_0 и T на t или следующим образом:

$$\int\limits_0^T \xi_\tau \mathbf{1}_{[t_0,t_1]}(\tau)df_\tau \stackrel{\text{def}}{=} \int\limits_{t_0}^{t_1} \xi_\tau df_\tau,$$

где $\mathbf{1}_{[t_0,t_1]}(\tau) = 1$ при $\tau \in [t_0,t_1]$, в противном случае $\mathbf{1}_{[t_0,t_1]}(\tau) = 0$. Тогда с учетом равенства $\xi_\tau \mathbf{1}_{[t_0,t]}(\tau) = \xi_\tau \mathbf{1}_{[t_0,t_1]}(\tau) + \xi_\tau \mathbf{1}_{[t_1,t]}(\tau)$, $\tau \ne t_1$, и свойства $A3$ получаем

$$\int\limits_{t_0}^{t_1} \xi_s df_s + \int\limits_{t_1}^{t} \xi_s df_s = \int\limits_{t_0}^{t} \xi_s df_s \text{ с в.1},$$

где $0 \le t_0 \le t_1 \le t \le T$.

Пусть промежуток $[t_0, t] \subseteq [0, T]$ и t — переменный момент времени. Определим случайный процесс η_t, $t_0 \le t \le T$, как

$$\eta_t = \int\limits_{t_0}^{t} \xi_\tau df_\tau \text{ с в.1},$$

где $\xi \in \mathcal{M}_2([0, T])$. Пусть η_t, $t \in [0, T]$, — сепарабельный случайный процесс [3]. Можно показать, что процесс η_t $\mathcal{F}_t$-измерим, не зависит от приращений $f_{s+\tau} - f_\tau$, $\tau \ge t, s > 0$, и удовлетворяет следующим соотношениям:

$B1$. $\mathsf{M}\left\{\eta_t - \eta_s | \mathcal{F}_s\right\} = 0$ с в.1.

$B2$. $\mathsf{M}\left\{|\eta_t - \eta_s|^2\right\} = \int\limits_s^t \mathsf{M}\left\{\xi_\tau^2\right\} d\tau$.

$B3$. $\mathsf{M}\left\{(\eta_t - \eta_s)(\eta_\theta - \eta_\tau)\right\} = 0$,

где $0 \le s \le t \le \tau \le \theta \le T$.

Таким образом, η_t — среднеквадратически непрерывный мартингал, для которого неравенство Дуба при $p = 2$ принимает вид

$$\mathsf{M}\left\{\sup_{t_0 \le s \le t} |\eta_s|^2\right\} \le 4 \int\limits_{t_0}^{t} \mathsf{M}\left\{\xi_\tau^2\right\} d\tau.$$

Определим стохастический интеграл от функции $\xi \in \mathcal{M}_2([0, T])$.

Определение 1.9. *Стохастическим интегралом от функции* $\xi \in \mathcal{M}_2([0, T])$ *назовем среднеквадратический предел*

$$\underset{N\to\infty}{\text{l.i.m.}} \sum_{j=0}^{N-1} \xi^{(N)}\left(\tau_j^{(N)}, \omega\right)\left(\tau_{j+1}^{(N)} - \tau_j^{(N)}\right) \stackrel{\text{def}}{=} \int\limits_0^T \xi_\tau d\tau,$$

где $\xi^{(N)}(t, \omega)$ *— любая ступенчатая функция из класса* $\mathcal{K}_2([0, T])$, *сходящаяся по норме* $\|\cdot\|_{2,T}$ *к* $\xi \in \mathcal{M}_2([0, T])$.

Повторяя с незначительными изменениями рассуждения, доказывающие существование стохастического интеграла Ито, с учетом неравенства

$$\int\limits_a^b f(x)dx \le \sqrt{b-a}\left(\int\limits_a^b f^2(x)dx\right)^{\frac{1}{2}}$$

можно показать, что интеграл $\int\limits_0^T \xi_\tau d\tau$, полученный в соответствии с определением 1.9, существует.

Таким образом, в условиях теоремы 1.5 существуют интегралы $\int\limits_0^T \xi_\tau df_\tau$, $\int\limits_0^T \xi_\tau d\tau$, полученные в соответствии с определениями 1.8 и 1.9.

Определим стохастический интеграл $\int\limits_{t_0}^{t} \xi_\tau d\tau$ для $\xi \in \mathcal{M}_2([t_0,t])$, где $0 \le t_0 < t_1 \le T$, а t_0, t_1 фиксированы, определением 1.9 по аналогии с интегралом Ито. Также, при условиях (I), (III) по теореме Фубини этот интеграл существует с в. 1 $\forall\ \omega$ как интеграл Лебега.

Отметим некоторые свойства стохастического интеграла $\int\limits_{t_0}^{t} \xi_\tau d\tau$:

$C1$. $\mathsf{M}\left\{\int\limits_{t_0}^{t} \xi_\tau d\tau\right\} = \int\limits_{t_0}^{t} \mathsf{M}\left\{\xi_\tau\right\} d\tau.$

$C2$. $\mathsf{M}\left\{\left(\int\limits_{t_0}^{t} \xi_\tau d\tau\right)^2\right\} \le \left(\int\limits_{t_0}^{t} \sqrt{\mathsf{M}\{\xi_\tau^2\}} d\tau\right)^2 \le (t-t_0)\int\limits_{t_0}^{t} \mathsf{M}\left\{\xi_\tau^2\right\} d\tau.$

$C3$. $\int\limits_{t_0}^{t_1} \xi_s ds + \int\limits_{t_1}^{t} \xi_s ds = \int\limits_{t_0}^{t} \xi_s ds$ с в.1 $\forall t_1:\ 0 \le t_0 < t_1 < t \le T,$

$C4$. $\int\limits_{t_0}^{t} (\alpha\xi_\tau + \beta\eta_\tau)\, d\tau = \alpha\int\limits_{t_0}^{t} \xi_\tau d\tau + \beta\int\limits_{t_0}^{t} \eta_\tau d\tau$ с в.1 $\forall \alpha,\ \beta \in \Re^1.$

Предполагается, что случайные процессы $\xi_\tau,\ \eta_\tau$, входящие в свойства $C1 - C4$, удовлетворяют условиям теоремы 1.5 на промежутке $[t_0, t]$.

В литературе (см., например, [3]) стохастический интеграл Ито чаще определяется для более широкого класса интегрируемых случайных процессов, чем $\mathcal{M}_2([0,T])$.

Так, если определить класс функций $\mathcal{P}_2([0,T])$, получающийся из класса $\mathcal{M}_2([0,T])$ путем замены условий (III), (IV) на $\int\limits_{0}^{T} (\xi(t,\omega))^2\, dt < \infty$ с в.1, то можно показать [3], что стохастический интеграл Ито существует как предел по вероятности интегральных сумм:

$$\sum_{j=0}^{N-1} \xi^{(N)}(\tau_j^{(N)},\omega)\left(f(\tau_{j+1}^{(N)},\omega) - f(\tau_j^{(N)},\omega)\right),$$

где $\xi^{(N)}(t,\omega)$ — произвольная ступенчатая функция из класса $\mathcal{P}_2([0,T])$, сходящаяся к $\xi \in \mathcal{P}_2([0,T])$ в следующем смысле: $\int\limits_{0}^{T} \left|\xi^{(N)}(t,\omega) - \xi(t,\omega)\right|^2 dt \to 0$ по вероятности при $N \to \infty$.

Известно, что стохастический интеграл $\int\limits_{0}^{T} \xi_\tau d\tau$, $\sqrt{|\xi|} \in \mathcal{P}_2([0,T])$, существует как предел по вероятности интегральных сумм:

$$\sum_{j=0}^{N-1} \xi^{(N)}\left(\tau_j^{(N)},\omega\right)\left(\tau_{j+1}^{(N)} - \tau_j^{(N)}\right),$$

где $\xi^{(N)}(t,\omega)$ — произвольная ступенчатая функция, для которой

$\sqrt{|\xi^{(N)}|} \in \mathcal{P}_2([0,T])$, и сходящаяся к $\xi(t,\omega)$ в следующем смысле: $\int\limits_0^T \left|\xi^{(N)}(t,\omega) - \xi(t,\omega)\right| dt \to 0$ по вероятности при $N \to \infty$.

1.2.2 Процессы Ито

Винеровские случайные процессы порождают широкий класс случайных процессов, называемых процессами Ито. Они имеют важное значение для теории случайных процессов с непрерывным временем и оказываются адекватными математическими моделями во многих прикладных задачах. В частности, решения стохастических дифференциальных уравнений Ито (см. разд. 1.2.4), а также достаточно гладкие функциональные преобразования решений этих уравнений являются процессами Ито.

Пусть заданы фиксированное вероятностное пространство $(\Omega, \mathcal{F}, \mathsf{P})$ и $\mathcal{F}_t$-измеримый при всех $t \in [0,T]$ векторный винеровский процесс $\mathbf{f}_t \in \Re^m$ с независимыми компонентами $\mathbf{f}_t^{(i)}$; $i = 1, \ldots, m$.

Рассмотрим некоторые случайные процессы $a_t \in \Re^1$ и $\mathbf{b}_t^{(i)} \in \Re^1$; $i = 1, \ldots, m$, $t \in [0,T]$ для которых существуют стохастические интегралы в правой части равенства

$$\eta_t = \eta_0 + \int\limits_0^t a_\tau d\tau + \sum_{i=1}^m \int\limits_0^t \mathbf{b}_\tau^{(i)} d\mathbf{f}_\tau^{(i)}, \tag{1.24}$$

где $t \in [0,T]$, а η_0 — случайная величина, стохастически не зависящая от приращений $\mathbf{f}_\tau - \mathbf{f}_0$ винеровского процесса $\mathbf{f}_t$ при всех $\tau \in (0,T]$.

Определение 1.10. *Процесс η_t, определенный на промежутке $[0,T]$ в виде (1.24), называется процессом Ито, если правая часть (1.24) существует при всех $t \in [0,T]$. При этом процесс a_t называется коэффициентом сноса, а процессы $\mathbf{b}_t^{(i)}$; $i = 1, \ldots, m$ — коэффициентами диффузии процесса η_t.*

Нетрудно видеть, что из аддитивности стохастических интегралов вытекает следующее представление процесса Ито:

$$\eta_s = \eta_t + \int\limits_t^s a_\tau d\tau + \sum_{i=1}^m \int\limits_t^s \mathbf{b}_\tau^{(i)} d\mathbf{f}_\tau^{(i)} \text{ с в.1}, \tag{1.25}$$

справедливое для всех $s, t \in [0,T]$, $s \geq t$.

Пусть процессы a_t, $\mathbf{b}_t^{(i)}$, $i = 1, \ldots, m$, удовлетворяют условиям теоремы 1.5 при всех $t \in [0,T]$. Тогда очевидно процесс Ито, определенный

соотношением (1.24), существует в среднеквадратическом смысле при всех $t \in [0,T]$. Кроме того, в этих условиях для любых $t, \tau \in [0,T]$, $\tau \geq t$, найдется такая постоянная $C < \infty$, что выполняется условие Липшица

$$\mathsf{M}\left\{(\eta_\tau - \eta_t)^2\right\} \leq C|\tau - t|. \tag{1.26}$$

Действительно, используя соотношение (1.25) и неравенство Минковского, имеем

$$\mathsf{M}\left\{(\eta_\tau - \eta_t)^2\right\} \leq \left(\left(\mathsf{M}\left\{\left(\int\limits_t^\tau a_s ds\right)^2\right\}\right)^{\frac{1}{2}} + \sum_{i=1}^m \left(\mathsf{M}\left\{\left(\int\limits_t^\tau \mathbf{b}_s^{(i)} d\mathbf{f}_s^{(i)}\right)^2\right\}\right)^{\frac{1}{2}}\right)^2.$$

В силу свойств B2 и C2 стохастических интегралов получаем

$$\mathsf{M}\left\{(\eta_\tau - \eta_t)^2\right\} \leq \left[K_1(\tau - t) + K_2(\tau - t)^{\frac{1}{2}}\right]^2, \ K_1, K_2 < \infty,$$

откуда следует оценка (1.26).

Перейдем к многомерному случаю. Рассмотрим некоторые случайные процессы $\mathbf{a}_t \in \Re^n$ и $B_t \in \Re^{n\times m}$, $t \in [0,T]$, для которых существует правая часть следующего равенства:

$$\eta_t = \eta_0 + \int\limits_0^t \mathbf{a}_\tau d\tau + \int\limits_0^t B_\tau d\mathbf{f}_\tau, \tag{1.27}$$

где $t \in [0,T]$, а случайная векторная величина $\eta_0 \in \Re^n$ является стохастически независимой от приращений $\mathbf{f}_\tau - \mathbf{f}_0$ винеровского процесса $\mathbf{f}_t$ при всех $\tau \in (0,T]$.

Определение 1.11. *Процесс $\eta_t \in \Re^n$ вида (1.27), определенный на промежутке $[0,T]$, называется векторным процессом Ито, если правая часть (1.27) существует при всех $t \in [0,T]$. При этом процессы $\mathbf{a}_t^{(i)}$; $i = 1,\ldots,n$ называются коэффициентами сноса, а процессы $B_t^{(ij)}$, $i = 1,\ldots,n$; $j = 1,\ldots,m$ — коэффициентами диффузии процесса η_t.*

Обобщением соотношения (1.25) на случай векторного процесса Ито является равенство

$$\eta_s = \eta_t + \int\limits_t^s \mathbf{a}_\tau d\tau + \int\limits_t^s B_\tau d\mathbf{f}_\tau \text{ с в.1},$$

справедливое для всех $s, t \in [0,T]$, $s \geq t$.

Предположим, что процессы $\mathbf{a}_t$ и B_t покомпонентно удовлетворяют условиям теоремы 1.5 на промежутке $[0,T]$. Тогда очевидно, что векторный процесс Ито, определенный соотношением (1.27), существует

в среднеквадратическом смысле при всех $t \in [0,T]$. Кроме того, для любых $t, \tau \in [0,T]$, $\tau \geq t$, найдется такая постоянная $C < \infty$, что выполняется условие Липшица $\mathsf{M}\left\{|\eta_\tau - \eta_t|^2\right\} \leq C|\tau - t|$.

Рассмотрим преобразование процесса Ито с помощью замены вероятностной меры.

Пусть задано вероятностное пространство $(\Omega, \mathcal{F}, \mathsf{P})$. Введем скалярный процесс Ито вида

$$x_t = x_0 + \int\limits_0^t a_s ds + f_t, \tag{1.28}$$

где f_t — стандартный скалярный винеровский процесс относительно вероятностной меры P; a_s — скалярный случайный процесс, удовлетворяющий условиям существования интеграла $\int\limits_0^t a_s ds$. Процесс $\mathbf{x}_t$ (1.28) иногда называют "винеровским процессом со сносом". В ряде ситуаций бывает удобно рассматривать процесс x_t как винеровский относительно некой меры P_x, т. е. как процесс на вероятностном пространстве $(\Omega, \mathcal{F}, \mathsf{P}_x)$. Построение меры P_x возможно с помощью преобразования Гирсанова [66], которое переводит вероятностную меру P в абсолютно непрерывную относительно P меру P_x с производной Радона–Никодима

$$\frac{d\mathsf{P}_x}{d\mathsf{P}} = \exp\Big(-\int\limits_0^T a_s df_s - \frac{1}{2}\int\limits_0^T |a_s|^2 ds\Big). \tag{1.29}$$

При этом процесс x_t является винеровским процессом на новом вероятностном пространстве $(\Omega, \mathcal{F}, \mathsf{P}_x)$.

1.2.3 Формула Ито

Пусть заданы фиксированное вероятностное пространство $(\Omega, \mathcal{F}, \mathsf{P})$ и $\mathcal{F}_t$-измеримый при всех $t \in [0,T]$ винеровский процесс $f_t \in \Re^1$. Пусть случайные процессы a_s и b_s таковы, что $\sqrt{|a_s|}, b_s \in \mathcal{P}_2([0,T])$. Рассмотрим процесс Ито $x_t, t \in [0,T]$, вида

$$x_t = x_0 + \int\limits_0^t a_\tau d\tau + \int\limits_0^t b_\tau df_\tau.$$

Используя аддитивность стохастических интегралов, представляем процесс x_t в виде

$$x_t = x_s + \int\limits_s^t a_\tau d\tau + \int\limits_s^t b_\tau df_\tau \text{ с в.1}, \tag{1.30}$$

где $0 \le s \le t \le T$.

Если представление (1.30) справедливо с вероятностью 1, то говорим, что процесс x_t имеет стохастический дифференциал dx_t, и записываем это как

$$dx_s = a_s ds + b_s df_s. \tag{1.31}$$

Отметим, что запись (1.31) является символической записью формулы (1.30).

Лемма 1.1. *Пусть функция* $R(x,t) : \Re^1 \times [0,T] \to \Re^1$ *имеет непрерывные частные производные* $\frac{\partial R}{\partial t}$, $\frac{\partial R}{\partial x}$, $\frac{\partial^2 R}{\partial x^2}$, *а процесс Ито* x_t *представлен в виде* (1.30), *причем* $\sqrt{|a_s|}, b_s \in \mathcal{P}_2([0,T])$. *Тогда для любых* s, t *таких, что* $0 \le s \le t \le T$, *с вероятностью* 1

$$R(x_t,t) = R(x_s,s) + \int_s^t \left(\frac{\partial R}{\partial t}(x_\tau,\tau) + a_\tau \frac{\partial R}{\partial x}(x_\tau,\tau) + \frac{1}{2} b_\tau^2 \frac{\partial^2 R}{\partial x^2}(x_\tau,\tau) \right) d\tau$$

$$+ \int_s^t b_\tau \frac{\partial R}{\partial x}(x_\tau,\tau) df_\tau.$$

Доказательство леммы 1.1 можно найти, например, в работах [3, 4]. Лемма 1.1 устанавливает формулу Ито в скалярном случае.

Перейдем к рассмотрению многомерного случая.

Пусть задано фиксированное вероятностное пространство $(\Omega, \mathcal{F}, \mathsf{P})$ и $\mathcal{F}_t$-измеримый при всех $t \in [0,T]$ векторный винеровский процесс $\mathbf{f}_t \in \Re^m$ с независимыми компонентами $\mathbf{f}_t^{(i)}$; $i = 1, \ldots, m$. Пусть случайные процессы $\mathbf{a}_s^{(i)}$ и $B_s^{(ij)}$, $i = 1, \ldots, n$; $j = 1, \ldots, m$ таковы, что $\sqrt{|\mathbf{a}_s^{(i)}|}, B_s^{(ij)} \in \mathcal{P}_2([0,T])$ при всех $i = 1, \ldots, n$; $j = 1, \ldots, m$. Рассмотрим векторный процесс Ито $\mathbf{x}_t \in \Re^n, t \in [0,T]$, вида

$$\mathbf{x}_t = \mathbf{x}_s + \int_s^t \mathbf{a}_\tau d\tau + \int_s^t B_\tau d\mathbf{f}_\tau \text{ с в.1}, \tag{1.32}$$

где $0 \le s \le t \le T$.

В покомпонентной форме равенство (1.32) записываем как

$$\mathbf{x}_t^{(i)} = \mathbf{x}_s^{(i)} + \int_s^t \mathbf{a}_\tau^{(i)} d\tau + \sum_{j=1}^m \int_s^t B_\tau^{(ij)} d\mathbf{f}_\tau^{(j)} \text{ с в.1},$$

где $0 \le s \le t \le T$, $i = 1, \ldots, n$.

Лемма 1.2. *Пусть функция* $R(\mathbf{x},t):\ \Re^n\times[0,T]\to\Re^1$ *имеет непрерывные частные производные* $\frac{\partial R}{\partial t}$, $\frac{\partial R}{\partial \mathbf{x}^{(i)}}$, $\frac{\partial^2 R}{\partial \mathbf{x}^{(i)}\partial \mathbf{x}^{(j)}}$; $i,j=1,\ldots,n$, *процесс Ито* $\mathbf{x}_t$ *представлен выражением* (1.32), *причем* $\sqrt{|\mathbf{a}_s^{(i)}|}, B_s^{(ij)}\in\mathcal{P}_2([0,T])$, $i=1,\ldots,n$, $j=1,\ldots,m$, *а процесс* η_t *имеет вид* $\eta_t=R(\mathbf{x}_t,t)$. *Тогда для любых* s,t *таких, что* $0\le s\le t\le T$, *с вероятностью* 1

$$\eta_t=\eta_s+\int\limits_s^t\Bigg(\frac{\partial R}{\partial t}(\mathbf{x}_\tau,\tau)+\sum_{i=1}^n\mathbf{a}_\tau^{(i)}\frac{\partial R}{\partial \mathbf{x}^{(i)}}(\mathbf{x}_\tau,\tau)+$$

$$+\frac{1}{2}\sum_{j=1}^m\sum_{i,k=1}^n B_\tau^{(ij)}B_\tau^{(kj)}\frac{\partial^2 R}{\partial \mathbf{x}^{(i)}\partial \mathbf{x}^{(k)}}(\mathbf{x}_\tau,\tau)\Bigg)d\tau+\sum_{j=1}^m\sum_{i=1}^n\int\limits_s^t B_\tau^{(ij)}\frac{\partial R}{\partial \mathbf{x}^{(i)}}(\mathbf{x}_\tau,\tau)d\mathbf{f}_\tau^{(j)}.$$

Доказательство леммы 1.2 также можно найти в [3, 4]. В лемме 1.2 формула Ито представлена в векторной форме.

1.2.4 Стохастические дифференциальные уравнения Ито

Придадим строгий математический смысл понятию стохастического дифференциального уравнения.

Пусть задано фиксированное вероятностное пространство $(\Omega,\mathcal{F},\mathsf{P})$, неубывающая совокупность σ-алгебр $\{\mathcal{F}_t, t\in[0,T]\}$ на нем и $\mathcal{F}_t$-измеримый при всех $t\in[0,T]$ скалярный винеровский процесс f_t. Рассмотрим стохастическое дифференциальное уравнение

$$dx_t=a(x_t,t)dt+\sigma(x_t,t)df_t,\ \ x_0=x(0,\omega), \tag{1.33}$$

где $x_t\in\Re^1$ — случайный процесс, являющийся решением уравнения (1.33); $a(x,t)$, $\sigma(x,t):\Re^1\times[0,T]\to\Re^1$ — измеримые при всех $(x,t)\in\Re^1\times[0,T]$ функции. Уравнение (1.33) может быть переписано в интегральном виде:

$$x_t=x_0+\int\limits_0^t a(x_\tau,\tau)d\tau+\int\limits_0^t\sigma(x_\tau,\tau)df_\tau,\ \ x_0=x(0,\omega). \tag{1.34}$$

Второй интеграл в правой части (1.34) при соответствующих дополнительных предположениях можно понимать, например, как стохастический интеграл Ито, Стратоновича или как θ-интеграл (см. разд. 1.2.5). Пусть интеграл $\int\limits_0^t\sigma(x_\tau,\tau)df_\tau$ является стохастическим

интегралом Ито. Тогда уравнение (1.33) и соответствующее ему уравнение (1.34) называются стохастическими дифференциальными уравнениями Ито. Если же интеграл $\int\limits_0^t \sigma(x_\tau, \tau) df_\tau$ является стохастическим интегралом Стратоновича (далее будет дано его определение и введено для него специальное обозначение $\int\limits_0^{*t} \sigma(x_\tau, \tau) df_\tau$), то уравнение (1.33) и соответствующее ему уравнение (1.34) называются стохастическими дифференциальными уравнениями Стратоновича.

Пусть рассматривается стохастическое дифференциальное уравнение Ито (1.33). Далее будем предполагать, что x_0 и $f_t - f_0$ при $t > 0$ являются стохастически независимыми.

Будем говорить, что случайный процесс x_t, $t \in [0, T]$ является решением уравнения Ито (1.33), если x_t — $\mathcal{F}_t$-измерим при всех $t \in [0, T]$, интегралы в правой части (1.34) существуют и равенство (1.34) справедливо при всех $t \in [0, T]$ с вероятностью 1.

К. Ито показал (см. также [3]), что если выполнены условия:

1. Функции $a(x, t), \sigma(x, t) : \Re^1 \times [0, T] \to \Re^1$ измеримы при всех $(x, t) \in \Re^1 \times [0, T]$.

2. Для всех $x, y \in \Re^1$ существует такая постоянная $K < \infty$, что

$$|a(x, t) - a(y, t)| + |\sigma(x, t) - \sigma(y, t)| \le K|x - y|,$$

$$|a(x, t)|^2 + |\sigma(x, t)|^2 \le K^2 \left(1 + |x|^2\right).$$

3. Случайная величина x_0 — $\mathcal{F}_0$-измерима и $\mathsf{M}\left\{|x_0|^2\right\} < \infty$, то существует непрерывное с вероятностью 1 решение уравнения (1.34), и если x_t, $\tilde{x}_t$ — непрерывные решения при фиксированном x_0, то

$$\mathsf{P}\left\{x_t = \tilde{x}_t\right\} = 1, \ \mathsf{P}\left\{\sup_{0 \le t \le T} |x_t - \tilde{x}_t| > 0\right\} = 0.$$

Перейдем к многомерному случаю. Рассмотрим стохастическое дифференциальное уравнение Ито вида

$$d\mathbf{x}_t = \mathbf{a}(\mathbf{x}_t, t)dt + \Sigma(\mathbf{x}_t, t)d\mathbf{f}_t, \ \mathbf{x}_0 = \mathbf{x}(0, \omega), \tag{1.35}$$

где $\mathbf{x}_t \in \Re^n$ — случайный процесс, являющийся решением уравнения (1.35); $\mathbf{f}_t \in \Re^m$ — $\mathcal{F}_t$-измеримый при всех $t \in [0, T]$ стандартный винеровский процесс с независимыми компонентами $\mathbf{f}_t^{(i)}$; $i = 1, \ldots, m$; $\mathbf{a} : \Re^n \times [0, T] \to \Re^n$, $\Sigma : \Re^n \times [0, T] \to \Re^{n \times m}$; $\mathbf{x}_0$ — начальное условие; будем предполагать далее, что $\mathbf{x}_0$ и $\mathbf{f}_t - \mathbf{f}_0$ при $t > 0$ являются стохастически независимыми.

Уравнение (1.35) эквивалентно уравнению

$$\mathbf{x}_t = \mathbf{x}_0 + \int\limits_0^t \mathbf{a}(\mathbf{x}_\tau, \tau)d\tau + \int\limits_0^t \Sigma(\mathbf{x}_\tau, \tau)d\mathbf{f}_\tau, \ \mathbf{x}_0 = \mathbf{x}(0, \omega). \tag{1.36}$$

Аналогично одномерному случаю будем полагать, что случайный процесс $\mathbf{x}_t \in \Re^n$ является решением уравнения Ито (1.36), если каждая компонента $\mathbf{x}_t$ — $\mathcal{F}_t$-измерима при всех $t \in [0, T]$, интегралы в правой части (1.36) существуют и равенство (1.36) справедливо при всех $t \in [0, T]$ с вероятностью 1.

К. Ито получил следующий результат (см. также [3]).

Теорема 1.6. *Пусть выполнены следующие условия:*

AI. *Функции* $\mathbf{a}(\mathbf{x}, t), \Sigma_k(\mathbf{x}, t) : \Re^n \times [0, T] \to \Re^n$; $k = 1, \ldots, m$ *измеримы при всех* $(\mathbf{x}, t) \in \Re^n \times [0, T]$ *функции;* $\Sigma_k(\mathbf{x}_\tau, \tau)$ — k*-й столбец матрицы* $\Sigma(\mathbf{x}_\tau, \tau)$.

AII. *Для всех* $\mathbf{x}$, $\mathbf{y} \in \Re^n$ *существует такая постоянная* $K < \infty$, *что*

$$|\mathbf{a}(\mathbf{x}, t) - \mathbf{a}(\mathbf{y}, t)| + \sum_{k=1}^m |\Sigma_k(\mathbf{x}, t) - \Sigma_k(\mathbf{y}, t)| \le K|\mathbf{x} - \mathbf{y}|,$$

$$|\mathbf{a}(\mathbf{x}, t)|^2 + \sum_{k=1}^m |\Sigma_k(\mathbf{x}, t)|^2 \le K^2 \left(1 + |\mathbf{x}|^2\right).$$

AIII. *Случайная величина* $\mathbf{x}_0$ — $\mathcal{F}_0$*-измерима и* $\mathsf{M}\left\{|\mathbf{x}_0|^2\right\} < \infty$.

Тогда существует единственное в смысле стохастической эквивалентности и непрерывное с вероятностью 1 *решение уравнения* (1.36).

Условия теоремы 1.6, в частности, условие Липшица (в такой форме, как в теореме 1.6 оно называется обычно *глобальным*), являются достаточно жесткими и не выполняются в ряде практически важных случаев. Однако существует целый ряд результатов, формулировки которых (см., например, [65]) ослабляют условия существования и единственности решения стохастического дифференциального уравнения Ито по сравнению с условиями теоремы 1.6.

Говорят, что функции $\mathbf{a}(\mathbf{x}, t)$, $\Sigma_k(\mathbf{x}, t) : \Re^n \times [0, T] \to \Re^n$; $k = 1, \ldots, m$ *удовлетворяют локальному условию Липшица, если для любого* $R > 0$ *существует такая постоянная* K_R, *что при* $|\mathbf{x}| \le R$, $|\mathbf{y}| \le R$ *и* $t \in [0, T]$ *выполняется неравенство*

$$|\mathbf{a}(\mathbf{x}, t) - \mathbf{a}(\mathbf{y}, t)| + \sum_{k=1}^m |\Sigma_k(\mathbf{x}, t) - \Sigma_k(\mathbf{y}, t)| \le K_R|\mathbf{x} - \mathbf{y}|. \tag{1.37}$$

Известно [65], что глобальное условие Липшица (первое из двух ус-

ловий AII в теореме 1.6) можно заменить на локальное условие Липшица и утверждение теоремы 1.6 при этом останется в силе.

Неравенство (1.37) можно заменить на несколько иное [65]:

$$|\mathbf{a}(\mathbf{x},t)-\mathbf{a}(\mathbf{y},t)|^2+\sum_{k=1}^{m}|\Sigma_k(\mathbf{x},t)-\Sigma_k(\mathbf{y},t)|^2\le \tilde{K}_R|\mathbf{x}-\mathbf{y}|^2,$$

где $\tilde{K}_R$ — постоянная, зависящая от $R>0$.

Рассмотрим стохастическое дифференциальное уравнение Ито в интегральной форме:

$$\mathbf{x}_t=\mathbf{x}_0+\int_0^t \mathbf{a}(\mathbf{x}_\tau,\tau)d\tau+\int_0^t \Sigma(\mathbf{x}_\tau,\tau)d\mathbf{f}_\tau,\ \mathbf{x}_0=\mathbf{x}(0,\omega), \tag{1.38}$$

где $\mathbf{a}:\Re^n\times[0,T]\to\Re^n$; $\Sigma:\Re^n\times[0,T]\to\Re^{n\times n}$; $\mathbf{f}_t$ — n-мерный $\mathcal{F}_t$-измеримый при всех $t\in[0,T]$ стандартный винеровский процесс с независимыми компонентами $\mathbf{f}_t^{(i)}$; $i=1,\dots,n$.

Пусть для функций $\mathbf{a}(\mathbf{x},t)$, $\Sigma(\mathbf{x},t)$ выполнены условия теоремы 1.6. Тогда решение $\mathbf{x}_t,\ t\in[0,T]$ стохастического дифференциального уравнения Ито (1.38) обладает [65] марковским свойством относительно потока σ-алгебр $\{\mathcal{F}_t, t\in[0,T]\}$, т. е. $\mathbf{x}_t,\ t\in[0,T]$ — марковская случайная функция с некоторым начальным распределением

$$\mu(A)=\mathsf{P}\{\mathbf{x}_0\in A\},\ A\in\mathcal{B},$$

$\mathcal{B}$ — σ-алгебра борелевских подмножеств $\Re^n$.

Вероятность перехода марковской случайной функции $\mathbf{x}_t, t\in[0,T]$, имеет вид

$$\mathsf{P}(s,\mathbf{y}|t,A)=\mathsf{P}\left\{\mathbf{x}_t^{s,\mathbf{y}}\in A\right\},\ 0\le s\le t\le T,$$

$\mathbf{x}\in\Re^n$, $A\in\mathcal{B}$, где $\mathbf{x}_t^{s,\mathbf{y}}$, $t\in[0,T]$, — решение стохастического дифференциального уравнения Ито

$$\mathbf{x}_t^{s,\mathbf{y}}=\mathbf{y}+\int_s^t \mathbf{a}(\mathbf{x}_\tau^{s,\mathbf{y}},\tau)d\tau+\int_s^t \Sigma(\mathbf{x}_\tau^{s,\mathbf{y}},\tau)d\mathbf{f}_\tau,$$

функции $\mathbf{a}(\mathbf{x},t)$, $\Sigma(\mathbf{x},t)$ такие же, как в (1.38); $\mathbf{y}$ — неслучайный вектор из $\Re^n$; $t\in[s,T]$.

Теорема 1.7 [65, 132]. *Пусть неслучайные функции* $\mathbf{a}(\mathbf{x},t):\Re^n\times[0,T]\to\Re^n$, $\Sigma(\mathbf{x},t):\Re^n\times[0,T]\to\Re^{n\times n}$ *удовлетворяют условиям теоремы* 1.6 *и непрерывны по совокупности переменных. Тогда процесс* $\mathbf{x}_t, t\in[0,T]$, *являющийся решением стохастического дифференциального уравнения Ито* (1.38), *представляет собой диффузионный процесс с вектором сноса* $\mathbf{a}(\mathbf{x},t)$ *и матрицей диффузии* $B(\mathbf{x},t)=\Sigma(\mathbf{x},t)\Sigma^{\mathsf{T}}(\mathbf{x},t)$.

В условиях теоремы 1.7 вероятность перехода решения стохастического дифференциального уравнения Ито (1.38) удовлетворяет уравнению Фоккера–Планка.

В теории стохастических дифференциальных уравнений Ито разделяют сильное и слабое решения. Приведем определения данных решений стохастического дифференциального уравнения Ито, а также ряд утверждений, касающихся этих двух понятий.

Пусть $\xi_t,\ t \in [0,T]$ – некоторый случайный процесс. Через $\mathcal{F}_t^{\xi}$ будем обозначать наименьшую σ-алгебру, содержащую все события вида $\{\xi_s \in A\}$, $s \in [0,t]$, $A \in \mathcal{B}$. Кроме того, предположим, что начальное условие $\mathbf{x}_0 \in \Re^n$ уравнения (1.38) неслучайно.

Пусть заданы вероятностное пространство $(\Omega, \mathcal{F}, \mathsf{P})$, неубывающая совокупность σ-алгебр $\{\mathcal{F}_t, t \in [0,T]\}$ на нем и n-мерный $\mathcal{F}_t$-измеримый при всех $t \in [0,T]$ винеровский случайный процесс $\{\mathbf{f}_t, \mathcal{F}_t^{\mathbf{f}}\}$, $t \in [0,T]$, с независимыми компонентами. Рассмотрим также измеримые неслучайные функции $\mathbf{a}(\mathbf{x},t) : \Re^n \times [0,T] \to \Re^n$, $\Sigma(\mathbf{x},t) : \Re^n \times [0,T] \to \Re^{n\times n}$.

Пара процессов $\{(\mathbf{x}_t,\ \mathbf{f}_t),\ \mathcal{F}_t^{\mathbf{f}}\}$ называется *сильным решением* уравнения (1.38), если процесс $\mathbf{x}_t$ при каждом t $\mathcal{F}_t^{\mathbf{f}}$-измерим и равенство (1.38) с вероятностью 1 выполняется одновременно для всех $t \in [0,T]$.

Пусть теперь заданы только функции $\mathbf{a}(\mathbf{x},t)$, $\Sigma(\mathbf{x},t)$ такие же, как в определении сильного решения.

Пара процессов $\{(\mathbf{x}_t, \mathbf{f}_t), \mathcal{F}_t^{\mathbf{f}}\}$ называется *слабым решением* уравнения (1.38), если найдутся такое вероятностное пространство $(\Omega, \mathcal{F}, \mathsf{P})$ с потоком σ-алгебр $\{\mathcal{F}_t, t \in [0,T]\}$ и такая пара процессов $(\mathbf{x}_t, \mathbf{f}_t)$, согласованных с ним, что процесс $\{\mathbf{f}_t, \mathcal{F}_t\}$ винеровский, а процессы $\mathbf{x}_t$ и $\mathbf{f}_t$ с вероятностью 1 связаны равенством (1.38) при всех $t \in [0,T]$.

Из определений сильного и слабого решений следует, что любое сильное решение уравнения (1.35) является также слабым решением.

Вводим понятия сильной и слабой единственности решения уравнения (1.38).

Принято считать, что решение уравнения (1.38) *сильно единственно*, если для любых двух решений $(\mathbf{x}_t, \mathbf{f}_t)$ и $(\tilde{\mathbf{x}}_t, \tilde{\mathbf{f}}_t)$ уравнения (1.38), заданных на одном и том же вероятностном пространстве, из равенств $\mathbf{f}_t = \tilde{\mathbf{f}}_t$, $\mathbf{x}_0 = \tilde{\mathbf{x}}_0$ с вероятностью 1 следует, что

$$\mathsf{P}\left\{ \sup_{t_0 \le t \le T} |\mathbf{x}_t - \tilde{\mathbf{x}}_t| > 0 \right\} = 0.$$

Если же два любых решения $(\mathbf{x}_t, \mathbf{f}_t)$, $(\tilde{\mathbf{x}}_t, \tilde{\mathbf{f}}_t)$ уравнения (1.38) имеют одинаковые конечномерные распределения, то выполняется *слабая* единственность решения уравнения (1.38).

В условиях теоремы 1.6 существует сильное решение уравнения (1.38), которое является сильно единственным.

Следующее утверждение показывает, при каких условиях существует слабое решение уравнения (1.38), которое является слабо единственным.

Теорема 1.8 [65]. *Пусть неслучайные функции* $\mathbf{a}(\mathbf{x},t) : \Re^n \times [0,T] \to \Re^n$, $B(\mathbf{x},t) = \Sigma(\mathbf{x},t)\Sigma^{\mathsf{T}}(\mathbf{x},t)$, *где* $\Sigma(\mathbf{x},t) : \Re^n \times [0,T] \to \Re^{n\times n}$, *измеримы и удовлетворяют условиям:*

1. $B(\mathbf{x},t)$ *является непрерывной по совокупности переменных матричной функцией, причем существует такая постоянная* $C > 0$, *что* $\sum\limits_{i,j=1}^{n} B^{(ij)}(\mathbf{x},t)\mathbf{z}^{(i)}\mathbf{z}^{(j)} \le C|\mathbf{z}|^2$ *при всех* $t \in [0,T]$, $\mathbf{x},\mathbf{z} \in \Re^n$.

2. *При каждом* $t \in [0,T]$ *и* $\mathbf{x} \in \Re^n$ $B(\mathbf{x},t)$ *— положительно определенная матрица, т. е.* $\sum\limits_{i,j=1}^{n} B^{(ij)}(\mathbf{x},t)\mathbf{z}^{(i)}\mathbf{z}^{(j)} > 0$ *при всех* $\mathbf{z} \in \Re^n$, $\mathbf{z} \ne 0$.

3. *Функция* $\mathbf{a}(\mathbf{x},t)$ *ограничена.*

Тогда существует слабое решение уравнения (1.38), *и оно слабо единственно.*

Известны также следующие утверждения [65]:

1. *Если уравнение* (1.38) *обладает сильной единственностью, то любое его решение сильное.*

2. *Если уравнение* (1.38) *обладает слабой единственностью, то любые два его сильных решения равны с вероятностью* 1 *при всех* $t \in [0,T]$.

3. *Если функции* $\mathbf{a}(\mathbf{x},t)$, $B(\mathbf{x},t) = \Sigma(\mathbf{x},t)\Sigma^{\mathsf{T}}(\mathbf{x},t)$ *удовлетворяют условиям предыдущей теоремы и на некотором вероятностном пространстве уравнение* (1.38) *имеет сильное решение, то всякое его слабое решение является сильным.*

Рассмотрим формулу Ито, соответствующую процессу, который задается нелинейным безынерционным преобразованием от решения стохастического дифференциального уравнения Ито.

Пусть $\mathcal{L}$ — множество функций $R(\mathbf{x},s) : \Re^n \times [0,T] \to \Re^1$, которые при всех $t \in [0,T]$, $\mathbf{x} \in \Re^n$ имеют непрерывные частные производные: $\frac{\partial R}{\partial t}(\mathbf{x},t)$, $\frac{\partial R}{\partial \mathbf{x}^{(i)}}(\mathbf{x},t)$, $\frac{\partial^2 R}{\partial \mathbf{x}^{(i)}\partial \mathbf{x}^{(j)}}(\mathbf{x},t)$; $i,j = 1,2,\ldots,n$, а $\mathcal{G}_0 \subset \mathcal{L}$ — множество функций $R(\mathbf{x},s) : \Re^n \times [0,T] \to \Re^1$, которые при всех $t \in [0,T]$, $\mathbf{x} \in \Re^n$ имеют непрерывные частные производные: $\frac{\partial R}{\partial \mathbf{x}^{(i)}}(\mathbf{x},t)$; $i = 1,2,\ldots,n$.

Определим на множествах $\mathcal{L}$ и $\mathcal{G}_0$ следующие операторы:

$$LR(\mathbf{x},t) = \frac{\partial R}{\partial t}(\mathbf{x},t) + \sum_{i=1}^{n} \mathbf{a}^{(i)}(\mathbf{x},t)\frac{\partial R}{\partial \mathbf{x}^{(i)}}(\mathbf{x},t) +$$

$$+\frac{1}{2}\sum_{j=1}^{m}\sum_{l,i=1}^{n}\Sigma^{(lj)}(\mathbf{x},t)\Sigma^{(ij)}(\mathbf{x},t)\frac{\partial^2 R}{\partial\mathbf{x}^{(l)}\partial\mathbf{x}^{(i)}}(\mathbf{x},t),$$

$$G_0^{(i)}R(\mathbf{x},t)=\sum_{j=1}^{n}\Sigma^{(ji)}(\mathbf{x},t)\frac{\partial R}{\partial\mathbf{x}^{(j)}}(\mathbf{x},t);\ i=1,\ldots,m.$$

Рассмотрим процесс $\eta_s=R(\mathbf{x}_s,s)$, где $R(\mathbf{x},s):\Re^n\times[0,T]\to\Re^1$ или $\Re^n\times[0,T]\to\Re^n$, а $\mathbf{x}_t$ — решение стохастического дифференциального уравнения Ито вида (1.35).

Сформулируем утверждение, касающееся формулы Ито для процесса η_s.

Лемма 1.3. *Пусть справедливы условия* AI – AIII *теоремы* 1.6, *а также следующие условия:* $R(\mathbf{x},t)\in\mathcal{L}$; $LR(\mathbf{x}_t,t)$, $G_0^{(i)}R(\mathbf{x}_t,t)\in\mathcal{M}_2([0,T])$, $i=1,\ldots,m$. *Тогда для всех* $s,t\in[0,T]$ *таких, что* $s\geq t$, *с вероятностью* 1 *справедливо равенство*

$$R(\mathbf{x}_s,s)=R(\mathbf{x}_t,t)+\int_t^s LR(\mathbf{x}_\tau,\tau)d\tau+\sum_{i=1}^{m}\int_t^s G_0^{(i)}R(\mathbf{x}_\tau,\tau)d\mathbf{f}_\tau^{(i)}.$$

Будем говорить, что процесс Ито $\mathbf{x}_t\in\Re^n$, $t\geq 0$, является *эргодическим*, если он имеет единственный инвариантный вероятностный закон ν такой, что

$$\lim_{t\to\infty}\frac{1}{t}\int_0^t g(\mathbf{x}_s)ds=\int_{\Re^n}g(\mathbf{y})d\nu(\mathbf{y})\ \text{с в.1}$$

для любой ν-интегрируемой функции g: $\Re^n\to\Re^1$ и любого неслучайного начального условия $\mathbf{x}_0=\mathbf{x}\in\Re^n$.

Рассмотрим процесс Ито вида

$$\mathbf{x}_t=\mathbf{x}_0+\int_0^t\mathbf{a}(\mathbf{x}_s)ds+\int_0^t B(\mathbf{x}_s)d\mathbf{f}_s,$$

где $\mathbf{a}:\Re^n\to\Re^n$; $B:\Re^n\to\Re^{n\times m}$; $\mathbf{f}_t\in\Re^m$ — векторный винеровский процесс с независимыми компонентами.

Следующая теорема, доказанная Р.З. Хасьминским [46], содержит достаточные условия эргодичности процесса $\mathbf{x}_t$.

Теорема 1.9. *Пусть* $a(\mathbf{x})$ *и* $B(\mathbf{x})$ *— гладкие функции с ограниченными производными любого порядка, причем функция* $B(\mathbf{x})$ *ограничена и существуют постоянная* $C>0$ *и компактное множество* $\Lambda\subset\Re^n$ *такие, что* $\mathbf{x}^T\mathbf{a}(\mathbf{x})<-C|\mathbf{x}|^2$ $\forall\mathbf{x}\in\Re^n\backslash\Lambda$. *Тогда процесс* $\mathbf{x}_t$ *эргодический.*

1.2.5 Стохастический интеграл Стратоновича

Введем класс $Q_{2m}([t,T])$ процессов Ито $\eta_\tau \in \Re^1$; $\tau \in [t,T]$ вида

$$\eta_\tau = \eta_t + \int\limits_t^\tau a_s ds + \int\limits_t^\tau b_s df_s, \tag{1.39}$$

где $f_s \in \Re^1$ — $\mathcal{F}_s$-измеримый при всех $s \in [t,T]$ стандартный винеровский процесс, а процессы $a_s,\ b_s \in \Re^1$ таковы, что выполняются следующие условия:

(DI) $a_s^m,\ b_s^m \in \mathcal{M}_2([t,T])$.

(DII) При всех $s,\ \tau \in [t,T]$ и некоторых положительных $C,\ \gamma < \infty$ процесс b_s удовлетворяет условию $\mathsf{M}\{|b_s - b_\tau|^4\} \le C|s-\tau|^\gamma$.

Через $C_2(\Re^1,[t,T])$ обозначим пространство функций $F(x,\tau) : \Re^1 \times [t,T] \to \Re^1$, которые являются дважды непрерывно дифференцируемыми по x, причем эти производные равномерно ограничены при $x \in \Re^1$, $\tau \in [t,T]$.

Определение 1.12. *Стохастическим интегралом Стратоновича от процесса $F(\eta_\tau,\tau)$; $\tau \in [t,T]$ $(F(x,\tau) \in C_2(\Re^1,[t,T]))$ назовем среднеквадратический предел*

$$\underset{N\to\infty}{\mathrm{l.i.m}} \sum_{j=0}^{N-1} F\left(\frac{1}{2}\left(\eta_{\tau_j^{(N)}} + \eta_{\tau_{j+1}^{(N)}}\right), \tau_j^{(N)}\right)\left(f_{\tau_{j+1}^{(N)}} - f_{\tau_j^{(N)}}\right) \stackrel{\mathrm{def}}{=} \int\limits_t^{*T} F(\eta_\tau,\tau)df_\tau, \tag{1.40}$$

где сохранен смысл обозначений, входящих в (1.23).

Более общая конструкция стохастического интеграла может быть определена следующим образом.

Определение 1.13. *Стохастическим θ-интегралом от процесса $F(\eta_\tau,\tau)$; $\tau \in [t,T]$ $(F(x,\tau) \in C_2(\Re^1,[t,T]))$ назовем среднеквадратический предел*

$$\underset{N\to\infty}{\mathrm{l.i.m}} \sum_{j=0}^{N-1} F\left(\theta\eta_{\tau_j^{(N)}} + (1-\theta)\eta_{\tau_{j+1}^{(N)}}, \tau_j^{(N)}\right)\left(f_{\tau_{j+1}^{(N)}} - f_{\tau_j^{(N)}}\right) \stackrel{\mathrm{def}}{=} \int\limits_t^{\circ T} F(\eta_\tau,\tau)df_\tau,$$

где сохранен смысл обозначений, входящих в (1.40), *а* $\theta \in [0,\ 1]$.

Далее для упрощения записи вместо $\tau_j^{(N)}$ используем τ_j.

Очевидно, что при $\theta = 1$ стохастический θ-интеграл переходит в стохастический интеграл Ито, а при $\theta = 1/2$ — в стохастический интеграл Стратоновича. Далее будут рассмотрены соотношения между стохастическим интегралом Ито и стохастическими θ-интегралом и интегралом Стратоновича, а также приведены достаточные условия

существования стохастического θ-интеграла и стохастического интеграла Стратоновича.

Рассмотрим интегральную версию неравенства Гельдера

$$\left|\int\limits_{t_0}^{t} h(x)g(x)dx\right| \le \left(\int\limits_{t_0}^{t} h^p(x)dx\right)^{\frac{1}{p}}\left(\int\limits_{t_0}^{t} g^q(x)dx\right)^{\frac{1}{q}}, \tag{1.41}$$

где $1/p+1/q=1,\ p,q>1$, и интегралы, входящие в (1.41), существуют.

С помощью обычного неравенства Гельдера для математических ожиданий и (1.41) имеем

$$\left|\int\limits_{t_0}^{t} \mathsf{M}\{\xi_\tau\eta_\tau\}d\tau\right| \le \int\limits_{t_0}^{t} |\mathsf{M}\{\xi_\tau\eta_\tau\}|d\tau \le \int\limits_{t_0}^{t} (\mathsf{M}\{|\xi_\tau|^p\})^{\frac{1}{p}}(\mathsf{M}\{|\eta_\tau|^q\})^{\frac{1}{q}}d\tau =$$

$$= \left|\int\limits_{t_0}^{t} (\mathsf{M}\{|\xi_\tau|^p\})^{\frac{1}{p}}(\mathsf{M}\{|\eta_\tau|^q\})^{\frac{1}{q}}d\tau\right| \le \left(\int\limits_{t_0}^{t} \mathsf{M}\{|\xi_\tau|^p\}d\tau\right)^{\frac{1}{p}}\left(\int\limits_{t_0}^{t} \mathsf{M}\{|\eta_\tau|^q\}d\tau\right)^{\frac{1}{q}}, \tag{1.42}$$

где случайные процессы ξ_τ и η_τ таковы, что существуют соответствующие математические ожидания и интегралы, входящие в (1.42).

Используем неравенства (1.41), (1.42) для доказательства следующих оценок [4] четных моментов стохастических интегралов:

$$\mathsf{M}\left\{\left|\int\limits_{t_0}^{t} \xi_\tau df_\tau\right|^{2n}\right\} \le (t-t_0)^{n-1}\left(n(2n-1)\right)^n \int\limits_{t_0}^{t} \mathsf{M}\left\{|\xi_\tau|^{2n}\right\}d\tau, \tag{1.43}$$

$$\mathsf{M}\left\{\left|\int\limits_{t_0}^{t} \xi_\tau d\tau\right|^{2n}\right\} \le (t-t_0)^{2n-1} \int\limits_{t_0}^{t} \mathsf{M}\left\{|\xi_\tau|^{2n}\right\}d\tau, \tag{1.44}$$

где случайный процесс ξ_τ таков, что $(\xi_\tau)^n \in \mathcal{M}_2([t_0,t])$, $f_t \in \Re^1$ — стандартный винеровский процесс; $n=1,\ 2,\ldots$.

Докажем сначала равенство (1.43). Применив формулу Ито к процессу $\left(\int\limits_{t_0}^{t} \xi_\tau df_\tau\right)^{2n}$; $n=1,\ 2,\ldots$ получим с в. 1

$$\left(\int\limits_{t_0}^{t} \xi_\tau df_\tau\right)^{2n} = 2n\int\limits_{t_0}^{t}\left(\int\limits_{t_0}^{s} \xi_u df_u\right)^{2n-1}\xi_s df_s + \frac{1}{2}2n(2n-1)\int\limits_{t_0}^{t}\left(\int\limits_{t_0}^{s} \xi_u df_u\right)^{2n-2}\xi_s^2 ds.$$

Тогда

$$\mathsf{M}\left\{\left(\int\limits_{t_0}^{t} \xi_\tau df_\tau\right)^{2n}\right\} = n(2n-1)\int\limits_{t_0}^{t} \mathsf{M}\left\{\left(\int\limits_{t_0}^{s} \xi_u df_u\right)^{2n-2}\xi_s^2\right\}ds,$$

откуда следует, что $\mathsf{M}\left\{\left(\int\limits_{t_0}^{t}\xi_\tau df_\tau\right)^{2n}\right\}$ возрастает с увеличением t. Используя этот факт и неравенство (1.42), выводим следующие неравенства:

$$\mathsf{M}\left\{\left(\int\limits_{t_0}^{t}\xi_\tau df_\tau\right)^{2n}\right\}\le n(2n-1)\left(\int\limits_{t_0}^{t}\mathsf{M}\left\{\left(\int\limits_{t_0}^{s}\xi_u df_u\right)^{2n}\right\}ds\right)^{\frac{2n-2}{2n}}\left(\int\limits_{t_0}^{t}\mathsf{M}\left\{|\xi_s|^{2n}\right\}ds\right)^{\frac{2}{2n}}$$

$$\le n(2n-1)\left(\int\limits_{t_0}^{t}\mathsf{M}\left\{\left(\int\limits_{t_0}^{t}\xi_u df_u\right)^{2n}\right\}ds\right)^{1-\frac{1}{n}}\left(\int\limits_{t_0}^{t}\mathsf{M}\left\{|\xi_s|^{2n}\right\}ds\right)^{\frac{1}{n}}. \qquad (1.45)$$

После возведения левой и правой частей (1.45) в степень n и сокращения обеих частей полученного неравенства на $\left(\mathsf{M}\left\{\left|\int\limits_{t_0}^{t}\xi_\tau df_\tau\right|^{2n}\right\}\right)^{n-1}$ получаем (1.43).

Докажем неравенство (1.44). Применяя неравенство Гельдера (1.41) к левой части (1.44), имеем

$$\mathsf{M}\left\{\left|\int\limits_{t_0}^{t}\xi_\tau d\tau\right|^{2n}\right\}\le\mathsf{M}\left\{\int\limits_{t_0}^{t}\xi_\tau^{2n}d\tau\right\}\left(\int\limits_{t_0}^{t}d\tau\right)^{2n-1}=(t-t_0)^{2n-1}\int\limits_{t_0}^{t}\mathsf{M}\left\{|\xi_\tau|^{2n}\right\}d\tau.$$

Неравенства (1.43), (1.44) доказаны. Приведенное доказательство можно найти, например, в [4].

Используем приведенные оценки моментов стохастических интегралов для доказательства леммы о связи стохастических интегралов Ито и Стратоновича.

Лемма 1.4. *Пусть* $\eta_\tau\in Q_8([t,T])$, $F(\eta_\tau,\tau)\in\mathcal{M}_2([t,T])$, *где* $F(x,\tau)\in C_2(\Re^1,[t,T])$. *Тогда*

$$\int\limits_{t}^{*T}F(\eta_\tau,\tau)df_\tau=\int\limits_{t}^{T}F(\eta_\tau,\tau)df_\tau+\frac{1}{2}\int\limits_{t}^{T}\frac{\partial F}{\partial x}(\eta_\tau,\tau)b_\tau d\tau\ \ c\ в.1. \qquad (1.46)$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. С помощью формулы Тейлора имеем

$$F\left(\frac{1}{2}\left(\eta_{\tau_{j+1}}+\eta_{\tau_j}\right),\tau_j\right)=F(\eta_{\tau_j},\tau_j)+\frac{\partial F}{\partial x}(\eta_{\tau_j},\tau_j)\frac{1}{2}\left(\eta_{\tau_{j+1}}-\eta_{\tau_j}\right)+$$

$$+\frac{1}{2}\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}(\xi_j,\tau_j)\frac{1}{4}\left(\eta_{\tau_{j+1}}-\eta_{\tau_j}\right)^2\ \ \forall\omega\in\Omega, \qquad (1.47)$$

где $\xi_j=\eta_{\tau_j}+\frac{\theta_j}{2}\left(\eta_{\tau_{j+1}}-\eta_{\tau_j}\right)$; $\theta_j=\theta_j(\omega)\in(0,\ 1)$ — случайная величина.

Далее согласно (1.39), неравенствам (1.43), (1.44) при $n = 4$, условиям леммы 1.4, неравенству $(a+b)^2 \le 2a^2 + 2b^2$, $a,\ b \in \Re^1$, а также согласно неравенствам Минковского и Коши–Буняковского получаем

$$\mathsf{M}\Big\{\Big(\sum_{j=0}^{N-1}\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}(\xi_j,\tau_j)\left(\eta_{\tau_{j+1}}-\eta_{\tau_j}\right)^2\left(f_{\tau_{j+1}}-f_\tau\right)\Big)^2\Big\}\le$$

$$\le\Big(\sum_{j=0}^{N-1}\Big(\mathsf{M}\Big\{\Big(\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}(\xi_j,\tau_j)\Big)^2\left(\eta_{\tau_{j+1}}-\eta_{\tau_j}\right)^4\left(f_{\tau_{j+1}}-f_\tau\right)^2\Big\}\Big)^{\frac12}\Big)^2\le$$

$$\le C\Big(\sum_{j=0}^{N-1}\Big(\Big(\mathsf{M}\Big\{\Big|\int\limits_{\tau_j}^{\tau_{j+1}}a_s ds\Big|^8\Big\}\Big)^{\frac14}+\Big(\mathsf{M}\Big\{\Big|\int\limits_{\tau_j}^{\tau_{j+1}}b_s df_s\Big|^8\Big\}\Big)^{\frac14}\Big)3^{\frac14}\sqrt{\Delta\tau_j}\Big)^2\le$$

$$\le C_1\Big(\sum_{j=0}^{N-1}\Big(\Big((\Delta\tau_j)^7\int\limits_{\tau_j}^{\tau_{j+1}}\mathsf{M}\left\{|a_s|^8\right\}ds\Big)^{\frac14}+$$

$$+\Big(28^4\left(\Delta\tau_j\right)^3\int\limits_{\tau_j}^{\tau_{j+1}}\mathsf{M}\left\{|b_s|^8\right\}d\tau\Big)^{\frac14}\Big)3^{\frac14}\sqrt{\Delta\tau_j}\Big)^2\ \to 0 \text{ при } N\to\infty, \qquad (1.48)$$

$$\mathsf{M}\Big\{\Big(\sum_{j=0}^{N-1}\frac{\partial F}{\partial x}(\eta_{\tau_j},\tau_j)\left(\left(\eta_{\tau_{j+1}}-\eta_{\tau_j}\right)\left(f_{\tau_{j+1}}-f_{\tau_j}\right)-b_{\tau_j}\Delta\tau_j\right)\Big)^2\Big\}\le$$

$$\le 2\mathsf{M}\Big\{\Big(\sum_{j=0}^{N-1}\frac{\partial F}{\partial x}(\eta_{\tau_j},\tau_j)\int\limits_{\tau_j}^{\tau_{j+1}}a_s ds\left(f_{\tau_{j+1}}-f_{\tau_j}\right)\Big)^2\Big\}+$$

$$+2\mathsf{M}\Big\{\Big(\sum_{j=0}^{N-1}\frac{\partial F}{\partial x}(\eta_{\tau_j},\tau_j)\Big(\int\limits_{\tau_j}^{\tau_{j+1}}b_s df_s\left(f_{\tau_{j+1}}-f_{\tau_j}\right)-b_{\tau_j}\Delta\tau_j\Big)\Big)^2\Big\}\le$$

$$\le 2\Big(\sum_{j=0}^{N-1}\Big(\mathsf{M}\Big\{\Big(\frac{\partial F}{\partial x}(\eta_{\tau_j},\tau_j)\Big)^2\Big(\int\limits_{\tau_j}^{\tau_{j+1}}a_s ds\Big)^2\left(f_{\tau_{j+1}}-f_{\tau_j}\right)^2\Big\}\Big)^{\frac12}\Big)^2+$$

$$+4\mathsf{M}\Big\{\Big(\sum_{j=0}^{N-1}\frac{\partial F}{\partial x}(\eta_{\tau_j},\tau_j)b_{\tau_j}\left(\left(f_{\tau_{j+1}}-f_{\tau_j}\right)^2-\Delta\tau_j\right)\Big)^2\Big\}+$$

$$+4\mathsf{M}\Big\{\Big(\sum_{j=0}^{N-1}\frac{\partial F}{\partial x}(\eta_{\tau_j},\tau_j)\int\limits_{\tau_j}^{\tau_{j+1}}(b_s-b_{\tau_j})df_s\left(f_{\tau_{j+1}}-f_{\tau_j}\right)\Big)^2\Big\}\le$$

$$\le 2(C_2)^2\Big(\sum_{j=0}^{N-1}\Big(\mathsf{M}\Big\{\Big|\int\limits_{\tau_j}^{\tau_{j+1}}a_s ds\Big|^4\Big\}\Big)^{\frac14}3^{\frac14}\sqrt{\Delta\tau_j}\Big)^2+$$

$$+4(C_2)^2\sum_{j=0}^{N-1}\mathsf{M}\left\{b_{\tau_j}^2\left(\left(f_{\tau_{j+1}}-f_{\tau_j}\right)^2-\Delta\tau_j\right)^2\right\}+$$

$$+8\sum_{j=0}^{N-1}\sum_{i=0}^{j-1}\mathsf{M}\Big\{\frac{\partial F}{\partial x}(\eta_{\tau_j},\tau_j)\frac{\partial F}{\partial x}(\eta_{\tau_i},\tau_i)b_{\tau_j}b_{\tau_i}\left(\left(f_{\tau_{j+1}}-f_{\tau_j}\right)^2-\Delta\tau_j\right)\times$$

$$\times\left(\left(f_{\tau_{i+1}}-f_{\tau_i}\right)^2-\Delta\tau_i\right)\Big\}+4(C_2)^2\left(\sum_{j=0}^{N-1}\left(\mathsf{M}\Big\{\Big|\int_{\tau_j}^{\tau_{j+1}}(b_s-b_{\tau_j})df_s\Big|^4\Big\}\right)^{\frac{1}{4}}3^{\frac{1}{4}}\sqrt{\Delta\tau_j}\right)^2, \tag{1.49}$$

где $C,\ C_1,\ C_2<\infty$; $\Delta\tau_j=\tau_{j+1}-\tau_j$.

Поскольку, известно что $\mathsf{M}\left\{\left(\left(f_{\tau_{j+1}}-f_{\tau_j}\right)^2-\Delta\tau_j\right)^2\right\}=2\left(\Delta\tau_j\right)^2$, $\mathsf{M}\left\{\left(f_{\tau_{j+1}}-f_{\tau_j}\right)^2-\Delta\tau_j|\mathcal{F}_{\tau_j}\right\}=0$ с в.1, а также по условиям леммы 1.4

$$\mathsf{M}\Big\{\Big|\int_{\tau_j}^{\tau_{j+1}}(b_s-b_{\tau_j})df_s\Big|^4\Big\}\le 36\Delta\tau_j\int_{\tau_j}^{\tau_{j+1}}\mathsf{M}\left\{\left|b_s-b_{\tau_j}\right|^4\right\}ds\le 36C\left(\Delta\tau_j\right)^{2+\gamma},$$

$$\mathsf{M}\Big\{\Big|\int_{\tau_j}^{\tau_{j+1}}a_s ds\Big|^4\Big\}\le\left(\Delta\tau_j\right)^3\int_{\tau_j}^{\tau_{j+1}}\mathsf{M}\left\{|a_s|^4\right\}ds,$$

то правая часть (1.49) стремится к нулю при $N\to\infty$. Используя этот факт, а также равенства (1.48), (1.47) и определение 1.12, приходим к утверждению леммы. Лемма доказана. □

С л е д с т в и е 1.1. *Пусть выполнены условия леммы* 1.4, *причем винеровские случайные процессы в* (1.39) *и* (1.46) *являются независимыми. Тогда с вероятностью* 1

$$\int_t^{*T}F(\eta_\tau,\tau)df_\tau=\int_t^T F(\eta_\tau,\tau)df_\tau.$$

Нетрудно видеть, что из леммы 1.4 при $F(x,\tau)\equiv x$ вытекает следующее утверждение.

Лемма 1.5. *Пусть* $\eta_\tau\in Q_4([t,T])$. *Тогда*

$$\int_t^{*T}\eta_\tau df_\tau=\int_t^T\eta_\tau df_\tau+\frac{1}{2}\int_t^T b_\tau d\tau\ \ \text{с в.1}.$$

Утверждение этой леммы можно несколько модифицировать.

Лемма 1.6. *Пусть* $\eta_\tau^{(i)}\in Q_4([t,T])$; $i=1,\ 2$. *Тогда*

$$\int_t^{*T}\eta_\tau^{(i)}d\mathbf{f}_\tau^{(j)}=\int_t^T\eta_\tau^{(i)}d\mathbf{f}_\tau^{(j)}+\frac{1}{2}\mathbf{1}_{\{i=j\}}\int_t^T b_\tau d\tau\ \ \text{с в.1},$$

где процесс $\eta_\tau^{(i)}$ *имеет вид*

$$\eta_\tau^{(i)} = \eta_t^{(i)} + \int_t^\tau a_s ds + \int_t^\tau b_s d\mathbf{f}_s^{(i)}.$$

Здесь $\mathbf{f}_\tau^{(j)} \in \Re^1$; $j = 1,\ 2$ *— независимые стандартные винеровские процессы;* $\mathbf{1}_A$ *— индикатор множества* A.

З а м е ч а н и е 1.2. *Отметим, что утверждения, аналогичные леммам* 1.4–1.6, *сохраняют силу для стохастических* θ*-интегралов при условии, что в них интегралы Стратоновича заменяются на* θ*-интегралы, а* $\frac{1}{2}$ *— на* $\theta \in [0,1]$.

Следствием леммы 1.6 является следующее утверждение.

Лемма 1.7. *Пусть процесс Ито* $\eta_\tau \in \Re^1$, $\tau \in [t,T]$, *имеет вид*

$$\eta_\tau = \eta_t + \int_t^\tau a_s ds + \sum_{i=1}^m \int_t^\tau \mathbf{b}_s^{(i)} d\mathbf{f}_s^{(i)},$$

где $\mathbf{f}_s^{(i)}$; $i = 1,\ldots,m$ *— независимые стандартные винеровские процессы; процессы* a_s, $\mathbf{b}_s^{(i)}$ *удовлетворяют условиям* (DI), (DII) *при* $m = 2$. *Тогда с вероятностью* 1 *выполнено равенство*

$$\int_t^{*T} \eta_s d\mathbf{f}_s^{(i)} = \int_t^T \eta_s d\mathbf{f}_s^{(i)} + \frac{1}{2}\int_t^T \mathbf{b}_s^{(i)} ds;\ i = 1,\ldots,m.$$

1.2.6 Стохастические дифференциальные уравнения Стратоновича

Рассмотрим стохастическое дифференциальное уравнение Стратоновича вида

$$dx_t = a(x_t,t)dt + \sigma(x_t,t)d^*f_t,\ x_0 = x(0,\omega), \tag{1.50}$$

где $x_t \in \Re^1$ — случайный процесс, являющийся решением уравнения (1.50); $a(x,t), \sigma(x,t) : \Re^1 \times [0,T] \to \Re^1$ — измеримые при всех $(x,t) \in \Re^1 \times [0,T]$ функции; обозначение d^*f_t указывает на то, что уравнение (1.50) является стохастическим дифференциальным уравнением Стратоновича; случайная величина x_0 стохастически независима с приращениями $f_t - f_0$, $t > 0$.

Уравнение (1.50) может быть переписано в эквивалентной интегральной форме

$$x_t = x_0 + \int_0^t a(x_\tau,\tau)d\tau + \int_0^{*t} \sigma(x_\tau,\tau)df_\tau,\ x_0 = x(0,\omega).$$

В многомерном случае стохастическое дифференциальное уравнение Стратоновича имеет вид

$$d\mathbf{x}_t = \mathbf{a}(\mathbf{x}_t, t)dt + \Sigma(\mathbf{x}_t, t)d^*\mathbf{f}_t,\ \mathbf{x}_0 = \mathbf{x}(0, \omega),$$

или в интегральной форме

$$\mathbf{x}_t = \mathbf{x}_0 + \int\limits_0^t \mathbf{a}(\mathbf{x}_\tau, \tau)d\tau + \int\limits_0^{*t} \Sigma(\mathbf{x}_\tau, \tau)d\mathbf{f}_\tau,\ \mathbf{x}_0 = \mathbf{x}(0, \omega),$$

где сохранен смысл обозначений, входящих в (1.35) и (1.36).

Установим связь стохастических дифференциальных уравнений Ито и Стратоновича.

Рассмотрим стохастическое дифференциальное уравнение Стратоновича (1.50). Пусть условия леммы 1.3 выполнены при $n = 1$ для функции $\sigma(x, t)$. Тогда по формуле Ито в одномерном случае

$$\sigma(x_s, s) = \sigma(x_t, t) + \int\limits_t^s L\sigma(x_\tau, \tau)d\tau + \int\limits_t^s \sigma(x_\tau, \tau)\frac{\partial\sigma}{\partial x}(x_\tau, \tau)df_\tau \text{ с в.1},$$

где $s \geq t$, а оператор L см. в лемме 1.3 при $n = m = 1$.

Таким образом, случайный процесс $\sigma(x_t, t)$ является процессом Ито с коэффициентом сноса $L\sigma(x_\tau, \tau)$ и коэффициентом диффузии $\sigma(x_\tau, \tau)\frac{\partial\sigma}{\partial x}(x_\tau, \tau)$.

Допустим, что указанные коэффициенты удовлетворяют условиям леммы 1.5. Тогда с вероятностью 1 справедливо равенство

$$\int\limits_0^{*t} \sigma(x_\tau, \tau)df_\tau = \int\limits_0^t \sigma(x_\tau, \tau)df_\tau + \frac{1}{2}\int\limits_0^t \sigma(x_\tau, \tau)\frac{\partial\sigma}{\partial x}(x_\tau, \tau)d\tau. \tag{1.51}$$

Согласно (1.51) от стохастического дифференциального уравнения Стратоновича можно перейти к соответствующему ему стохастическому дифференциальному уравнению Ито:

$$dx_t = a^*(x_t, t)dt + \sigma(x_t, t)df_t,\ x_0 = x(0, \omega), \tag{1.52}$$

где

$$a^*(x_t, t) = a(x_t, t) + \frac{1}{2}\sigma(x_t, t)\frac{\partial\sigma}{\partial x}(x_t, t).$$

Таким образом, если функции $a^*(x, t)$ и $\sigma(x, t)$ удовлетворяют условиям существования и единственности в смысле стохастической

эквивалентности решения уравнения Ито (1.52), то существует единственное в смысле стохастической эквивалентности решение стохастического дифференциального уравнения Стратоновича (1.50).

Перейдем к многомерному случаю. Рассмотрим стохастическое дифференциальное уравнение Стратоновича вида

$$d\mathbf{x}_t = \mathbf{a}(\mathbf{x}_t, t)dt + \Sigma(\mathbf{x}_t, t)d^*\mathbf{f}_t,\ \mathbf{x}_0 = \mathbf{x}(0, \omega), \tag{1.53}$$

или в интегральной форме,

$$\mathbf{x}_t = \mathbf{x}_0 + \int\limits_0^t \mathbf{a}(\mathbf{x}_\tau, \tau)d\tau + \int\limits_0^{*t} \Sigma(\mathbf{x}_\tau, \tau)d\mathbf{f}_\tau,\ \mathbf{x}_0 = \mathbf{x}(0, \omega).$$

Обобщая (1.51) на многомерный случай, с вероятностью 1 получаем

$$\int\limits_0^{*t} \Sigma(\mathbf{x}_\tau, \tau)d\mathbf{f}_\tau = \int\limits_0^t \Sigma(\mathbf{x}_\tau, \tau)d\mathbf{f}_\tau + \frac{1}{2}\sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^m \int\limits_0^t \Sigma^{(jk)}(\mathbf{x}_\tau, \tau)\frac{\partial \Sigma_k}{\partial \mathbf{x}^{(j)}}(\mathbf{x}_\tau, \tau)d\tau,$$

где $\Sigma_k(\mathbf{x}, \tau)$ — k-й столбец матрицы $\Sigma(\mathbf{x}, \tau)$.

Таким образом, стохастическому дифференциальному уравнению Стратоновича вида (1.53) соответствует стохастическое дифференциальное уравнение Ито вида

$$d\mathbf{x}_t = \mathbf{a}^*(\mathbf{x}_t, t)dt + \Sigma(\mathbf{x}_t, t)d\mathbf{f}_t,\ \mathbf{x}_0 = \mathbf{x}(0, \omega), \tag{1.54}$$

где

$$\mathbf{a}^*(\mathbf{x}, t) = \mathbf{a}(\mathbf{x}, t) + \frac{1}{2}\sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^m \Sigma^{(jk)}(\mathbf{x}, t)\frac{\partial \Sigma_k}{\partial \mathbf{x}^{(j)}}(\mathbf{x}, t).$$

Поэтому если матричные функции $\mathbf{a}^*(\mathbf{x}, t)$ и $\Sigma(\mathbf{x}, t)$ удовлетворяют условиям AI–AIII теоремы 1.6 существования и единственности в смысле стохастической эквивалентности решения стохастического дифференциального уравнения Ито (1.54), то и соответствующее ему стохастическое дифференциальное уравнение Стратоновича (1.53) имеет единственное в смысле стохастической эквивалентности решение.

1.3 Стохастические интегралы по мартингалам и стохастические дифференциальные уравнения со скачкообразной компонентой

1.3.1 Стохастический интеграл по мартингалу

Пусть заданы вероятностное пространство $(\Omega, \mathcal{F}, \mathsf{P})$ и определенная на нем неубывающая совокупность σ-алгебр $\{\mathcal{F}_t, t \in [0, t]\}$. Пусть

$M_t,\ t \in [0,T]$ — $\mathcal{F}_t$-измеримый при каждом $t \in [0,T]$ мартингал, для которого $\mathsf{M}\{|M_t|\} < \infty$ и при всех $t \in [0,T]$ существует $\mathcal{F}_t$-измеримый и неотрицательный с вероятностью 1 случайный процесс $\rho_t,\ t \in [0,T]$ такой, что

$$\mathsf{M}\{(M_s - M_t)^2 | \mathcal{F}_t\} = \mathsf{M}\left\{\int\limits_t^s \rho_\tau d\tau | \mathcal{F}_t\right\} \text{ с в.1},$$

где $0 \le t < s \le T$. Такие мартингалы, следуя [4], будем называть D-мартингалами.

Введем в рассмотрение класс $H_2(\rho,[0,T])$ случайных процессов $\varphi_t,\ t \in [0,T]$, которые $\mathcal{F}_t$-измеримы при каждом $t \in [0,T]$ и удовлетворяют условию $\mathsf{M}\left\{\int\limits_0^T \varphi_t^2 \rho_t dt\right\} < \infty$. Для произвольного разбиения $\{\tau_j\}_{j=0}^N$ промежутка $[0,T]$ такого, что $0 = \tau_0 < \tau_1 < \ldots < \tau_N = T$, и произвольной последовательности $\mathcal{F}_{\tau_j}$-измеримых случайных величин φ_j; $j = 0,1,\ldots,N-1$ определим ступенчатую функцию $\varphi_t \in H_2(\rho,[0,T])$ следующим образом: $\varphi_t = \varphi_j$ с вероятностью 1 при $\tau_j \le t < \tau_{j+1}$; $j = 0,1,\ldots,N-1$.

Через $G_2(\rho,[0,T])$ обозначим множество всех ступенчатых функций в $H_2(\rho,[0,T])$. Для произвольной ступенчатой функции $\varphi_t \in G_2(\rho,[0,T])$ определим стохастический интеграл по D-мартингалу $M_t,\ t \in [0,T]$ следующим образом:

$$\sum_{j=0}^{N-1} \varphi_j (M_{\tau_{j+1}} - M_{\tau_j}) \stackrel{\text{def}}{=} \int\limits_0^T \varphi_t dM_t.$$

Нетрудно показать, что стохастический интеграл $\int\limits_0^T \varphi_t dM_t$ для любых $\varphi_t, \psi_t \in G_2(\rho,[0,T])$ и любых постоянных $\alpha, \beta \in \Re^1$ обладает с вероятностью 1 следующими свойствами:

$F1$. $\mathsf{M}\left\{\int\limits_0^T \varphi_t dM_t | \mathcal{F}_0\right\} = 0.$

$F2$. $\mathsf{M}\left\{\left|\int\limits_0^T \varphi_t dM_t\right|^2 | \mathcal{F}_0\right\} = \mathsf{M}\left\{\int\limits_0^T \varphi_t^2 \rho_t dt | \mathcal{F}_0\right\}.$

$F3$. $\int\limits_0^T (\alpha\varphi_t + \beta\psi_t) dM_t = \alpha \int\limits_0^T \varphi_t dM_t + \beta \int\limits_0^T \psi_t dM_t.$

$F4$. $\int\limits_0^T \mathbf{1}_{[a,b)}(t) dM_t = M_b - M_a,\ a,b \in [0,T], b > a.$

$F5$. $\mathsf{M}\left\{\int\limits_0^T \varphi_t dM_t \int\limits_0^T \psi_t dM_t | \mathcal{F}_0\right\} = \mathsf{M}\left\{\int\limits_0^T \varphi_t \psi_t \rho_t dt | \mathcal{F}_0\right\}.$

$F6$. $\mathsf{P}\left\{\left|\int\limits_0^T \varphi_t dM_t\right| > C\right\} \le \mathsf{P}\left\{\int\limits_0^T \varphi_t^2 \rho_t dt > N\right\} + \frac{N}{C^2}$ для всех C, N.

Введем на классе $H_2(\rho,[0,T])$ норму

$$\|\varphi\|_{2,T,\rho}=\left(\mathsf{M}\left\{\int\limits_0^T\varphi_t^2\rho_t dt\right\}\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Отождествим функции $\varphi_t,\psi_t\in H_2(\rho,[0,T])$, если $\|\varphi-\psi\|_{2,T,\rho}=0$.

Рассмотрим разбиение промежутка $[0,T]$, для которого

$$0=\tau_0^{(N)}<\tau_1^{(N)}<\ldots<\tau_N^{(N)}=T,\ \Delta_N=\max_{0\le j\le N-1}\left|\tau_{j+1}^{(N)}-\tau_j^{(N)}\right|\to 0$$

при $N\to\infty$. Определим последовательность ступенчатых функций $\varphi_t^{(N)}$ следующим образом: $\varphi_t^{(N)}=\varphi_{\tau_j^{(N)}}$ с вероятностью 1 при $t\in[\tau_j^{(N)},\tau_{j+1}^{(N)})$; $j=0,\ 1,\ldots,N-1$; $N=1,\ 2,\ldots$.

Определение 1.14. *Назовем стохастическим интегралом по D-мартингалу $M_t\in H_2(\rho,[0,T])$ среднеквадратический предел*

$$\underset{N\to\infty}{\text{l.i.m.}}\sum_{j=0}^{N-1}\varphi_{\tau_j^{(N)}}^{(N)}\left(M_{\tau_{j+1}^{(N)}}-M_{\tau_j^{(N)}}\right)\overset{\text{def}}{=}\int\limits_0^T\varphi_t dM_t,\tag{1.55}$$

где $\varphi_t^{(N)}$ — произвольная последовательность ступенчатых функций из $G_2(\rho,[0,T])$, сходящаяся по норме $\|\cdot\|_{2,T,\rho}$ к функции φ_t.

Известно [4], что стохастический интеграл $\int\limits_0^T\varphi_t dM_t$ вида (1.55) существует, не зависит от выбора последовательности $\varphi_t^{(N)}$ и обладает свойствами $F1-F6$.

Определим случайный процесс $\eta_t,t\in[0,T]$:

$$\eta_t=\int\limits_0^t\varphi_\tau dM_\tau \text{ с в.1, если } \varphi_t\in H_2(\rho,[0,T]).$$

Отметим некоторые свойства процесса $\eta_t,\ t\in[0,T]$ [4]. Пусть $\eta_t,\ t\in[0,T]$ — сепарабельный случайный процесс. Тогда

$$\mathsf{P}\left\{\sup_{0\le t\le T}|\eta_t|>a\right\}\le\frac{1}{a^2}\int\limits_0^T\mathsf{M}\{\varphi_\tau^2\rho_\tau\}d\tau,$$

$$\mathsf{M}\left\{\sup_{0\le t\le T}|\eta_t|^2\right\}\le 4\mathsf{M}\{|\eta_T|^2\}=4\int\limits_0^T\mathsf{M}\{\varphi_\tau^2\rho_\tau\}d\tau.$$

Стохастический интеграл $\int\limits_0^T \varphi_t dM_t$ можно определить и для более широкого класса случайных функций φ_t, а именно для класса $S_2(\rho,[0,T])$ $\mathcal{F}_t$-измеримых при каждом $t \in [0,T]$ и удовлетворяющих условию $\int\limits_0^T \varphi_t^2 \rho_t dt < \infty$ с вероятностью 1 случайных процессов $\varphi_t,\ t \in [0,T]$ [4]. В этом случае полагаем [4]

$$\underset{N\to\infty}{\mathsf{P}\text{-}\lim} \sum_{j=0}^{N-1} \varphi_{\tau_j^{(N)}}^{(N)} \left(M_{\tau_{j+1}^{(N)}} - M_{\tau_j^{(N)}}\right) \stackrel{\text{def}}{=} \int\limits_0^T \varphi_t dM_t, \tag{1.56}$$

где $\varphi_t^{(N)}$ — произвольная последовательность ступенчатых функций из $S_2(\rho,[0,T])$, сходящаяся к $\varphi_t \in S_2(\rho,[0,T])$ в следующем смысле: $\underset{N\to\infty}{\mathsf{P}\text{-}\lim} \int\limits_0^T |\varphi_t^{(N)} - \varphi_t|^2 dt = 0$, $\{\tau_j^{(N)}\}_{j=0}^N$ — разбиение промежутка $[0,T]$ такого же типа, как и в определении 1.8.

Известно [4], что стохастический интеграл вида (1.56) существует, не зависит от выбора последовательности $\varphi_t^{(N)}$ и обладает свойствами $F3$ и $F6$. Кроме того, известно [4], что если процесс $\eta_t = \int\limits_0^t \varphi_\tau dM_\tau$, $\varphi_t \in H_2(\rho,[0,T])$, сепарабелен и мартингал M_t с вероятностью 1 не имеет разрывов второго рода, то η_t также не имеет разрывов второго рода, причем

$$\mathsf{P}\left\{\sup_{0\le t\le T} |\eta_t| > C\right\} \le \frac{N}{C^2} + \mathsf{P}\left\{\int\limits_0^T \varphi_\tau^2 \rho_\tau d\tau > N\right\}.$$

Отметим, что одним из наиболее простых примеров D-мартингалов является стандартный винеровский процесс, для которого очевидно $\rho_\tau \equiv 1$. При этом соответствующий стохастический интеграл по D-мартингалу преобразуется в стохастический интеграл Ито.

1.3.2 Стохастический интеграл по пуассоновской случайной мере

Рассмотрим пуассоновскую меру в пространстве $[0,T] \times \mathbf{Y}$ ($\Re^n \stackrel{\text{def}}{=} \mathbf{Y}$). Значения этой меры на множестве $\Delta \times A$ ($\Delta \subseteq [0,T]$, $A \subset \mathbf{Y}$) будем обозначать через $\nu(\Delta, A)$. Предположим, что $\mathsf{M}\{\nu(\Delta,A)\} = |\Delta|\Pi(A)$, где $|\Delta|$ — лебегова мера Δ, $\Pi(A)$ — мера на σ-алгебре $\mathcal{B}$ борелевских множеств $\mathbf{Y}$, а $\mathcal{B}_0$ — подалгебра $\mathcal{B}$, состоящая из множеств $A \subset \mathcal{B}$, для которых $\Pi(A) < \infty$.

Введем мартингальную меру $\tilde{\nu}(\Delta, A) = \nu(\Delta, A) - |\Delta|\Pi(A)$.

Рассмотрим фиксированное вероятностное пространство $(\Omega, \mathcal{F}, \mathsf{P})$ и неубывающую совокупность σ-алгебр $\{\mathcal{F}_t,\, t \in [0,T]\}$, $\mathcal{F}_t \subset \mathcal{F}$. Будем считать, что:

1. Случайные величины $\nu([0,t), A)$ — $\mathcal{F}_t$-измеримы при всех $A \subseteq \mathcal{B}_0$.

2. Случайные величины $\nu([t, t+h), A)$, $A \subseteq \mathcal{B}_0$, $h > 0$, не зависят от σ-алгебры $\mathcal{F}_t$.

Перейдем к определению стохастического интеграла по мартингальной мере $\int\limits_0^T \int\limits_{\mathbf{Y}} \varphi(t, \mathbf{y})\tilde{\nu}(dt, d\mathbf{y})$, где $\varphi : [0,T] \times \mathbf{Y} \times \Omega \to \Re^1$.

Определим классы $H_l(\Pi, [0,T])$ и $S_l(\Pi, [0,T])$ случайных функций $\varphi : [0,T] \times \mathbf{Y} \times \Omega \to \Re^1$, которые при всех $t \in [0,T]$, $\mathbf{y} \in \mathbf{Y}$ — $\mathcal{F}_t$-измеримы и удовлетворяют условиям

$$\int\limits_0^T \int\limits_{\mathbf{Y}} \mathsf{M}\{|\varphi(t,\mathbf{y})|^l\}\Pi(d\mathbf{y})dt < \infty, \ \int\limits_0^T \int\limits_{\mathbf{Y}} |\varphi(t,\mathbf{y})|^l \Pi(d\mathbf{y})dt < \infty \text{ с в.1}$$

соответственно.

Сначала предполагаем, что случайная функция $\varphi(t, \mathbf{y})$ ступенчата, т. е. $\varphi(t, \mathbf{y}) = \varphi_{j-1}(\mathbf{y})$ с вероятностью 1 при $t \in [\tau_{j-1}, \tau_j)$, $\{\tau_j\}_{j=1}^N$ — разбиение промежутка $[0,T]$ того же типа, что и в определении 1.8. Кроме того, считаем, что случайные величины $\varphi_j(\mathbf{y})$ $\mathcal{F}_{\tau_j}$-измеримы и таковы, что $\varphi(t, \mathbf{y}) \in H_2(\Pi, [0,T])$. В этом случае полагаем [4], что

$$\int\limits_0^T \int\limits_{\mathbf{Y}} \varphi(t,\mathbf{y})\tilde{\nu}(dt, d\mathbf{y}) \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{j=1}^N \int\limits_{\mathbf{Y}} \varphi(\tau_{j-1}, \mathbf{y})\tilde{\nu}([\tau_{j-1}, \tau_j), d\mathbf{y}). \tag{1.57}$$

Можно показать, что интеграл (1.57) обладает с вероятностью 1 следующими свойствами:

E1. $\int\limits_0^T \int\limits_{\mathbf{Y}} (\alpha\varphi_1(t,\mathbf{y}) + \beta\varphi_2(t,\mathbf{y}))\tilde{\nu}(dt, d\mathbf{y}) = \alpha \int\limits_0^T \int\limits_{\mathbf{Y}} \varphi_1(t,\mathbf{y})\tilde{\nu}(dt, d\mathbf{y}) +$

$$+\beta \int\limits_0^T \int\limits_{\mathbf{Y}} \varphi_2(t,\mathbf{y})\tilde{\nu}(dt, d\mathbf{y}).$$

E2. $\int\limits_0^T \int\limits_{\mathbf{Y}} \mathbf{1}_{\Delta\times A}(t,\mathbf{y})\tilde{\nu}(dt, d\mathbf{y}) = \tilde{\nu}(\Delta, A),\ A \subseteq \mathcal{B}_0,\ \Delta \subseteq [0,T]$.

E3. $\mathsf{M}\left\{\left|\int\limits_0^T \int\limits_{\mathbf{Y}} \varphi(t,\mathbf{y})\tilde{\nu}(dt, d\mathbf{y})\right|^2 |\mathcal{F}_0\right\} = \int\limits_0^T \int\limits_{\mathbf{Y}} \mathsf{M}\left\{|\varphi(t,\mathbf{y})|^2 |\mathcal{F}_0\right\} \Pi(d\mathbf{y})dt,$

$$\mathsf{M}\left\{\int\limits_0^T \int\limits_{\mathbf{Y}} \varphi(t,\mathbf{y})\tilde{\nu}(dt, d\mathbf{y}) |\mathcal{F}_0\right\} = 0.$$

E4. $\mathsf{P}\left\{\left|\int\limits_0^T \int\limits_{\mathbf{Y}} \varphi(t,\mathbf{y})\tilde{\nu}(dt, d\mathbf{y})\right| > C\right\} \le \mathsf{P}\left\{\int\limits_0^T \int\limits_{\mathbf{Y}} \varphi(t,\mathbf{y})\tilde{\nu}(dt, d\mathbf{y}) > N\right\} + \frac{N}{C^2}$.

Здесь $\alpha,\ \beta,\ N, C$ — постоянные; $\varphi_1(t,\mathbf{y})$, $\varphi_2(t,\mathbf{y})$, $\varphi(t,\mathbf{y})$ — ступенчатые случайные функции из класса $H_2(\Pi,[0,T])$.

Если $\varphi(t,\mathbf{y}) \in H_2(\Pi,[0,T])$, то полагаем [4]

$$\int\limits_0^T \int\limits_{\mathbf{Y}} \varphi(t,\mathbf{y})\tilde{\nu}(dt,d\mathbf{y}) \stackrel{\text{def}}{=} \underset{N\to\infty}{\text{l.i.m.}} \int\limits_0^T \int\limits_{\mathbf{Y}} \varphi^{(N)}(t,\mathbf{y})\tilde{\nu}(dt,d\mathbf{y}), \tag{1.58}$$

где $\varphi^{(N)}(t,\mathbf{y})$ — произвольная последовательность ступенчатых функций из $H_2(\Pi,[0,T])$ такая, что $\lim\limits_{N\to\infty} \int\limits_0^T \int\limits_{\mathbf{Y}} \mathsf{M}\{|\varphi(t,\mathbf{y})-\varphi^{(N)}(t,\mathbf{y})|^2\}\Pi(d\mathbf{y})dt \to 0$.

В случае если $\varphi(t,\mathbf{y}) \in S_2(\Pi,[0,T])$, то положим [4]

$$\int\limits_0^T \int\limits_{\mathbf{Y}} \varphi(t,\mathbf{y})\tilde{\nu}(dt,d\mathbf{y}) \stackrel{\text{def}}{=} \underset{N\to\infty}{\mathsf{P}\text{-lim}} \int\limits_0^T \int\limits_{\mathbf{Y}} \varphi^{(N)}(t,\mathbf{y})\tilde{\nu}(dt,d\mathbf{y}), \tag{1.59}$$

где $\varphi^{(N)}(t,\mathbf{y})$ — произвольная последовательность ступенчатых функций из $S_2(\Pi,[0,T])$ такая, что $\underset{N\to\infty}{\mathsf{P}\text{-lim}} \int\limits_0^T \int\limits_{\mathbf{Y}} |\varphi(t,\mathbf{y}) - \varphi^{(N)}(t,\mathbf{y})|^2\Pi(d\mathbf{y})dt \to 0$.

Можно показать [4], что стохастические интегралы (1.58), (1.59) существуют, не зависят от выбора последовательностей $\varphi^{(N)}(t,\mathbf{y})$, причем стохастический интеграл (1.58) обладает свойствами $E1$–$E4$, а стохастический интеграл (1.59) — свойствами $E1, E4$.

Рассмотрим некоторые свойства стохастического интеграла $\Phi_t = \int\limits_0^t \int\limits_{\mathbf{Y}} \varphi(s,\mathbf{y})\tilde{\nu}(ds,d\mathbf{y})$, $t \in [0,T]$, с переменным верхним пределом. При этом будем предполагать, что $\Phi_t,\ t \in [0,T]$ — сепарабельный случайный процесс.

Если $\varphi(t,\mathbf{y}) \in H_2(\Pi,[0,T])$, то:

F1. $\mathsf{M}\{\Phi_t - \Phi_s|\mathcal{F}_s\} = 0$ с в.1, $0 \le s < t \le T$.

F2. $\mathsf{M}\{|\Phi_t - \Phi_s^2|\mathcal{F}_s\} = \int\limits_s^t \int\limits_{\mathbf{Y}} \mathsf{M}\{\varphi^2(\tau,\mathbf{y})|\mathcal{F}_s\}\Pi(d\mathbf{y})d\tau$ с в.1.

F3. $\mathsf{P}\left\{\sup\limits_{0\le t\le T} |\Phi_t| > a\right\} \le \frac{1}{a^2}\int\limits_0^T \int\limits_{\mathbf{Y}} \mathsf{M}\{\varphi^2(t,\mathbf{y})\}\Pi(d\mathbf{y})dt$.

F4. $\mathsf{M}\left\{\sup\limits_{0\le t\le T} |\Phi_t|^2\right\} \le 4\mathsf{M}\left\{|\Phi_T|^2\right\} = 4\int\limits_0^T \int\limits_{\mathbf{Y}} \mathsf{M}\{\varphi^2(\tau,\mathbf{y})\}\Pi(d\mathbf{y})d\tau$.

В случае если $\varphi(t,\mathbf{y}) \in S_2(\Pi,[0,T])$, то

$$\mathsf{P}\left\{\sup_{0\le t\le T} |\Phi_t| > C\right\} \le \mathsf{P}\left\{\int\limits_0^T \int\limits_{\mathbf{Y}} \varphi^2(\tau,\mathbf{y})\Pi(d\mathbf{y})d\tau > N\right\} + \frac{N}{C^2},$$

где C, N — произвольные постоянные.

Нетрудно видеть, что для всех $\varphi(t,\mathbf{y}) \in S_1(\Pi,[0,T]) \cap S_2(\Pi,[0,T])$ определен стохастический интеграл по пуассоновской случайной мере

$$\int_0^T \int_{\mathbf{Y}} \varphi(t,\mathbf{y})\nu(dt,d\mathbf{y}) = \int_0^T \int_{\mathbf{Y}} \varphi(t,\mathbf{y})\tilde{\nu}(dt,d\mathbf{y}) + \int_0^T \int_{\mathbf{Y}} \varphi(t,\mathbf{y})\Pi(d\mathbf{y})dt.$$

1.3.3 Формула Ито для процессов Ито со скачкообразной компонентой

Пусть заданы фиксированное вероятностное пространство $(\Omega,\mathcal{F},\mathsf{P})$ и неубывающая совокупность σ-алгебр $\{\mathcal{F}_t, t \in [0,T]\}$. Рассмотрим $\mathcal{F}_t$-измеримый при всех $t \in [0,T]$ стандартный векторный винеровский процесс $\mathbf{f}_t$ с независимыми компонентами $\mathbf{f}_t^{(i)}$ $(i = 1,\ldots,m)$, пуассоновскую случайную меру $\nu(dt,d\mathbf{y})$, заданную в пространстве $[0,T]\times\mathbf{Y}$ и удовлетворяющую условиям (I) – (III) из разд. 1.1.5 при $T < \infty$ на вероятностном пространстве $(\Omega,\mathcal{F},\mathsf{P})$, а также случайные функции $\mathbf{a}_t : [0,T]\times\Omega \to \Re^n$, $B_t : [0,T]\times\Omega \to \Re^{n\times m}$, $\gamma(t,\mathbf{y}) : [0,T]\times\mathbf{Y}\times\Omega \to \Re^n$, которые $\mathcal{F}_t$-измеримы при каждом $t \in [0,T]$ и удовлетворяют условиям $\sqrt{|\mathbf{a}_t^{(i)}|}$, $B_t^{(ik)} \in \mathcal{P}_2([0,T])$, $\gamma^{(i)}(t,\mathbf{y}) \in S_1(\Pi,[0,T]) \cap S_2(\Pi,[0,T])$; $i = 1,\ 2,\ldots,n$; $k = 1,\ldots,m$.

Рассмотрим n-мерные процессы Ито $\mathbf{x}_t$ и $\mathbf{z}_t$ при $t \in [0,T]$ со скачкообразной компонентой вида

$$\mathbf{x}_t = \mathbf{x}_0 + \int_0^t \mathbf{a}_\tau d\tau + \int_0^t B_\tau d\mathbf{f}_\tau + \int_0^t \int_{\mathbf{Y}} \gamma(\tau,\mathbf{y})\tilde{\nu}(dt,d\mathbf{y}), \tag{1.60}$$

$$\mathbf{z}_t = \mathbf{z}_0 + \int_0^t \mathbf{a}_\tau d\tau + \int_0^t B_\tau d\mathbf{f}_\tau + \int_0^t \int_{\mathbf{Y}} \gamma(\tau,\mathbf{y})\nu(dt,d\mathbf{y}), \tag{1.61}$$

где $\tilde{\nu}(d\tau,d\mathbf{y}) = \nu(d\tau,d\mathbf{y}) - \Pi(d\mathbf{y})d\tau$. Отметим, что для существования третьего интеграла в правой части (1.60) достаточно выполнения условия $\gamma^{(i)}(t,\mathbf{y}) \in S_2(\Pi,[0,T])$; $i = 1,\ 2,\ldots,n$.

Введем в рассмотрение класс $D_\gamma([0,T])$ неслучайных функций $R(\mathbf{x},t) : \Re^n \times [0,T] \to \Re^1$, которые непрерывно дифференцируемы по $\mathbf{x}$ и t и удовлетворяют условиям

$$R(\Phi_t + \gamma(t,\mathbf{y}),t) - R(\Phi_t,t) \in S_2(\Pi,[0,T]),$$

$$R(\Phi_t + \gamma(t,\mathbf{y}),t) - R(\Phi_t,t) - \sum_{k=1}^n \frac{\partial R}{\partial \mathbf{x}^{(k)}}(\Phi_t,t)\gamma^{(k)}(t,\mathbf{y}) \in S_1(\Pi,[0,T]),$$

где $\Phi_t = \int\limits_0^t \int\limits_{\mathbf{Y}} \gamma(\tau, \mathbf{y})\tilde{\nu}(d\tau, d\mathbf{y})$, а случайная функция $\gamma(\tau, \mathbf{y})$ такая же, как в (1.60).

Рассмотрим также класс $E_\gamma([0,T])$ неслучайных функций $R(\mathbf{x}, t) : \Re^n \times [0,T] \to \Re^1$, которые непрерывно дифференцируемы по $\mathbf{x}$ и t и удовлетворяют условию

$$R(\Psi_t + \gamma(t, \mathbf{y}), t) - R(\Psi_t, t) \in S_1(\Pi, [0,T]) \bigcap S_2(\Pi, [0,T]),$$

где $\Psi_t = \int\limits_0^t \int\limits_{\mathbf{Y}} \gamma(\tau, \mathbf{y})\nu(d\tau, d\mathbf{y})$, а случайная функция $\gamma(\tau, \mathbf{y})$ такая же, как и в (1.61).

Приведем два утверждения [4], которые устанавливают формулу Ито для процессов Ито со скачкообразной компонентой вида (1.60), (1.61).

Теорема 1.10 [4]. *Пусть процесс Ито* $\mathbf{x}_t, t \in [0,T]$, *определен равенством* (1.60), *причем* $\sqrt{|\mathbf{a}_t^{(i)}|}$, $B_t^{(ik)} \in \mathcal{P}_2([0,T])$, $\gamma^{(i)}(t, \mathbf{y}) \in S_2(\Pi, [0,T])$; $i = 1, 2, \ldots, n$; $k = 1, \ldots, m$, *а* $R(\mathbf{x}, t) : \Re^n \times [0,T] \to \Re^1$ *— дважды непрерывно дифференцируемая по* $\mathbf{x}$ *функция из класса* $D_\gamma([0,T])$. *Тогда*

$$dR(\mathbf{x}_t, t) = \Bigg(\frac{\partial R}{\partial t}(\mathbf{x}_t, t) + \sum_{k=1}^n \mathbf{a}_t^{(k)} \frac{\partial R}{\partial \mathbf{x}^{(k)}}(\mathbf{x}_t, t) +$$

$$+ \frac{1}{2} \sum_{j,k=1}^n \frac{\partial^2 R}{\partial \mathbf{x}^{(j)} \partial \mathbf{x}^{(k)}}(\mathbf{x}_t, t) \sum_{i=1}^m B_t^{(ki)} B_t^{(ji)} +$$

$$+ \int\limits_{\mathbf{Y}} \left(R(\mathbf{x}_t + \gamma(t, \mathbf{y}), t) - R(\mathbf{x}_t, t) - \sum_{k=1}^n \gamma^{(k)}(t, \mathbf{y}) \frac{\partial R}{\partial \mathbf{x}^{(k)}}(\mathbf{x}_t, t) \right) \Pi(d\mathbf{y}) \Bigg) dt +$$

$$+ \sum_{i=1}^m \sum_{k=1}^n B_t^{(ki)} \frac{\partial R}{\partial \mathbf{x}^{(k)}}(\mathbf{x}_t, t) d\mathbf{f}_t^{(i)} + \int\limits_{\mathbf{Y}} (R(\mathbf{x}_{t-} + \gamma(t, \mathbf{y}), t) - R(\mathbf{x}_{t-}, t))\tilde{\nu}(dt, d\mathbf{y}),$$

где равенство понимается в интегральной форме с вероятностью 1.

Теорема 1.11 [4]. *Пусть процесс Ито* $\mathbf{z}_t, t \in [0,T]$, *определен равенством* (1.61), *причем* $\sqrt{|\mathbf{a}_t^{(i)}|}$, $B_t^{(ik)} \in \mathcal{P}_2([0,T])$, $\gamma^{(i)}(t, \mathbf{y}) \in S_1(\Pi, [0,T]) \cap S_2(\Pi, [0,T])$; $i = 1, 2, \ldots, n$; $k = 1, \ldots, m$, *а* $R(\mathbf{x}, t) : \Re^n \times [0,T] \to \Re^1$ *— дважды непрерывно дифференцируемая по* $\mathbf{x}$ *функция из класса* $E_\gamma([0,T])$. *Тогда*

$$dR(\mathbf{z}_t, t) = \Bigg(\frac{\partial R}{\partial t}(\mathbf{z}_t, t) + \sum_{k=1}^n \mathbf{a}_t^{(k)} \frac{\partial R}{\partial \mathbf{x}^{(k)}}(\mathbf{z}_t, t) +$$

$$+\frac{1}{2}\sum_{j,k=1}^{n}\frac{\partial^2 R}{\partial \mathbf{x}^{(j)}\partial \mathbf{x}^{(k)}}(\mathbf{z}_t,t)\sum_{i=1}^{m}B_t^{(ki)}B_t^{(ji)}\Bigg)\,dt+$$

$$+\sum_{i=1}^{m}\sum_{k=1}^{n}B_t^{(ki)}\frac{\partial R}{\partial \mathbf{x}^{(k)}}(\mathbf{z}_t,t)d\mathbf{f}_t^{(i)}+\int\limits_{\mathbf{Y}}(R(\mathbf{z}_{t-}+\gamma(t,\mathbf{y}),t)-R(\mathbf{z}_{t-},t))\nu(dt,d\mathbf{y}), \tag{1.62}$$

где равенство понимается в интегральной форме с вероятностью 1.

1.3.4 Оценки моментов стохастических интегралов по пуассоновским мерам

Пусть $\mathbf{a}_\tau^{(i)}\equiv 0$, $B_\tau^{(ij)}\equiv 0$; $i=1,\dots,n$; $j=1,\dots,m$, $R(\mathbf{x},t)=\mathbf{x}^r$, $r\in N$. Предположим также, что $n=1$, и рассмотрим формулу Ито (1.62) в этих условиях:

$$z_t^r=\int\limits_0^t\int\limits_{\mathbf{Y}}\left((z_{\tau-}+\gamma(\tau,\mathbf{y}))^r-z_{\tau-}^r\right)\nu(d\tau,d\mathbf{y}), \tag{1.63}$$

где $z_t=\int\limits_0^t\int\limits_{\mathbf{Y}}\gamma(\tau,\mathbf{y})\nu(d\tau,d\mathbf{y})$; $\gamma(\tau,\mathbf{y})\in S_1(\Pi,[0,T])\cap S_{2r}(\Pi,[0,T])$.

С помощью формулы (1.63) можно получить оценку моментов стохастических интегралов по пуассоновской мере [4. С. 264]. Приведем вывод этой формулы.

Обозначим $a_r(t)=\sup\limits_{0\le\tau\le t}\mathsf{M}\left\{|z_\tau|^r\right\}$, $b_r(\tau,\mathbf{y})=\mathsf{M}\left\{|\gamma(\tau,\mathbf{y})|^r\right\}$.

Из (1.63) получим

$$a_r(t)\le\sum_{k=0}^{r-1}C_r^k\int\limits_0^t\int\limits_{\mathbf{Y}}\mathsf{M}\{|z_\tau|^k|\gamma(\tau,\mathbf{y})|^{r-k}\}\Pi(d\mathbf{y})d\tau.$$

Используя неравенство Гельдера, приходим к оценке

$$\mathsf{M}\{|z_\tau|^k|\gamma(\tau,\mathbf{y})|^{r-k}\}\le(a_r(\tau))^{\frac{k}{r}}(b_r(\tau,\mathbf{y}))^{1-\frac{k}{r}}.$$

Если $a_r(t)\le 1$, то

$$a_r(t)\le\int\limits_0^t\int\limits_{\mathbf{Y}}\left(\left((b_r(\tau,\mathbf{y}))^{\frac{1}{r}}+1\right)^r-1\right)\Pi(d\mathbf{y})d\tau.$$

В случае если $a_r(t)\ge 1$, имеем

$$a_r(t)\le(a_r(t))^{\frac{r-1}{r}}\int\limits_0^t\int\limits_{\mathbf{Y}}\left(\left((b_r(\tau,\mathbf{y}))^{\frac{1}{r}}+1\right)^r-1\right)\Pi(d\mathbf{y})d\tau\ \Rightarrow$$

$$a_r(t) \le \left(\int\limits_0^t \int\limits_{\mathbf{Y}} \left(\left((b_r(\tau, \mathbf{y}))^{\frac{1}{r}} + 1 \right)^r - 1 \right) \Pi(d\mathbf{y}) d\tau \right)^r.$$

В результате получаем следующую оценку:

$$a_r(T) \le \max_{j \in \{r,1\}} \left\{ \left(\int\limits_0^T \int\limits_{\mathbf{Y}} \left(\left((b_r(\tau, \mathbf{y}))^{\frac{1}{r}} + 1 \right)^r - 1 \right) \Pi(d\mathbf{y}) d\tau \right)^j \right\}. \tag{1.64}$$

При этом предполагаем, что правая часть (1.64) существует.

Отметим также, что в силу соотношения $\tilde{\nu}(dt, d\mathbf{y}) = \nu(dt, d\mathbf{y}) - \Pi(d\mathbf{y})dt$ и неравенства Минковского имеем

$$\left(\mathsf{M} \left\{ |\tilde{z}_t|^{2r} \right\} \right)^{\frac{1}{2r}} \le \left(\mathsf{M} \left\{ |z_t|^{2r} \right\} \right)^{\frac{1}{2r}} + \left(\mathsf{M} \left\{ |\hat{z}_t|^{2r} \right\} \right)^{\frac{1}{2r}}, \tag{1.65}$$

где $\hat{z}_t \stackrel{\text{def}}{=} \int\limits_0^t \int\limits_{\mathbf{Y}} \gamma(\tau, \mathbf{y}) \Pi(d\mathbf{y}) d\tau$; $\tilde{z}_t = \int\limits_0^t \int\limits_{\mathbf{Y}} \gamma(\tau, \mathbf{y}) \tilde{\nu}(d\tau, d\mathbf{y})$.

Величину $\mathsf{M}\{|\hat{z}_\tau|^{2r}\}$ можно оценить с помощью неравенства (1.44) следующим образом:

$$\mathsf{M} \left\{ |\hat{z}_t|^{2r} \right\} \le t^{2r-1} \int\limits_0^t \mathsf{M} \left\{ \left| \int\limits_{\mathbf{Y}} \varphi(\tau, \mathbf{y}) \Pi(d\mathbf{y}) \right|^{2r} \right\} d\tau, \tag{1.66}$$

где предполагаем, что $\int\limits_0^t \mathsf{M} \left\{ \left| \int\limits_{\mathbf{Y}} \gamma(\tau, \mathbf{y}) \Pi(d\mathbf{y}) \right|^{2r} \right\} d\tau < \infty$.

1.3.5 Стохастические дифференциальные уравнения со скачкообразной компонентой

Рассмотрим стохастическое дифференциальное уравнение

$$d\mathbf{x}_t = \mathbf{a}(\mathbf{x}_t, t)dt + \Sigma(\mathbf{x}_t, t)d\mathbf{f}_t + \int\limits_{\mathbf{Y}} P(\mathbf{x}_t, t, \mathbf{y}) \tilde{\nu}(dt, d\mathbf{y}), \tag{1.67}$$

где $\mathbf{a}(\mathbf{x}, t) : \Re^n \times [0, T] \to \Re^n$; $\Sigma(\mathbf{x}, t) : \Re^n \times [0, T] \to \Re^{n \times m}$; $P(\mathbf{x}, t, \mathbf{y}) : \Re^n \times [0, T] \times \mathbf{Y} \to \Re^n$ — неслучайные функции; $\nu([0, t), \mathbf{y})$ — пуассоновская мера в пространстве $[0, T] \times \mathbf{Y}$, для которой справедливы предположения (I) – (III) из разд. 1.1.5; $\mathbf{f}_t$ — m-мерный стандартный винеровский процесс с независимыми компонентами $\mathbf{f}_t^{(i)}$; $i = 1, \ldots, m$, которые не зависят от значений пуассоновской меры $\nu([0, t), \mathbf{y})$.

Следующая теорема содержит достаточные условия, при которых стохастическое дифференциальное уравнение (1.67) имеет единственное с вероятностью 1 непрерывное справа решение.

Теорема 1.12 [4]. *Пусть выполнены следующие условия:*

AI. *Существует такая постоянная* $L < \infty$, *что*

$$|\mathbf{a}(\mathbf{x},t)|^2 + \|\Sigma(\mathbf{x},t)\|^2 + \int\limits_{\mathbf{Y}} |P(\mathbf{x},t,\mathbf{y})|^2 \Pi(d\mathbf{y}) \le L(1+|\mathbf{x}|^2),$$

где $\|\Sigma(\mathbf{x},t)\|^2 = \sum\limits_{i=1}^{n}\sum\limits_{j=1}^{m} \left|\Sigma^{(ij)}(\mathbf{x},t)\right|^2$.

AII. *Для всякого* $R > 0$ *найдется постоянная* $C_R < \infty$ *такая, что при* $|\mathbf{x}| \le R$, $|\mathbf{z}| \le R$ *выполняется неравенство*

$$|\mathbf{a}(\mathbf{x},t) - \mathbf{a}(\mathbf{z},t)|^2 + \|\Sigma(\mathbf{x},t) - \Sigma(\mathbf{z},t)\|^2 +$$

$$+\int\limits_{\mathbf{Y}} |P(\mathbf{x},t,\mathbf{y}) - P(\mathbf{z},t,\mathbf{y})|^2 \Pi(d\mathbf{y}) \le C_R|\mathbf{x}-\mathbf{z}|^2.$$

AIII. *Существуют постоянная* $L < \infty$ *и функция* $g(h) : g(h) \ge 0$, *которая, монотонно убывая, стремится к нулю при* $h \to 0$, *такие, что*

$$|\mathbf{a}(\mathbf{x},t+h) - \mathbf{a}(\mathbf{x},t)|^2 + \|\Sigma(\mathbf{x},t+h) - \Sigma(\mathbf{x},t)\|^2 +$$

$$+\int\limits_{\mathbf{Y}} |P(\mathbf{x},t+h,\mathbf{y}) - P(\mathbf{x},t,\mathbf{y})|^2 \Pi(d\mathbf{y}) \le L(1+|\mathbf{x}|^2)g(h).$$

Тогда стохастическое дифференциальное уравнение (1.67) *имеет единственное с вероятностью* 1 *непрерывное справа решение.*

В [4] доказаны следующие две теоремы.

Теорема 1.13. *Пусть выполнены условия* AI – AIII *теоремы* 1.12, *а также условия* $\int\limits_{\mathbf{Y}} |P(\mathbf{x},t,\mathbf{y})|^p \Pi(d\mathbf{y}) \le L(1+|\mathbf{x}|^p)$; $p = 2,\ 3,\dots,2n$, *где* $L < \infty$ — *постоянная. Тогда решение стохастического дифференциального уравнения* (1.67) *имеет конечные моменты вплоть до* $2n$*-го порядка и справедлива оценка* $\mathsf{M}\{|\xi_t|^{2p}\} \le L_{1,p}(1+\mathsf{M}\{|\xi_0|^{2p}\})$; $p = 1,\ 2,\dots,n$, *где* ξ_0 — $\mathcal{F}_0$*-измеримая случайная величина;* $L_{1,p}$ — *постоянная, которая зависит только от* L, T, p.

Теорема 1.14. *В условиях теоремы* 1.13 *существует такая, зависящая только от* L, T, p, *постоянная* $L_{2,p}$, *что* $\mathsf{M}\{|\xi_t - \xi_0|^{2p}\} \le L_{2,p}(1+\mathsf{M}\{|\xi_0|^{2p}\})t$; $p = 1,\ 2,\dots,n$.

1.3.6 Интегральное представление решения линейного стохастического дифференциального уравнения со скачкообразной компонентой

Построим с помощью формулы Ито (1.62) интегральное представление решения скалярного стохастического дифференциального уравне-

ния

$$d\xi_t = (a_0(t) + a_1(t)\xi_t)dt + \sum_{i=1}^{m} \left(b_0^{(i)}(t) + b_1^{(i)}(t)\xi_t\right) d\mathbf{f}_t^{(i)} +$$

$$+ \int_{\mathbf{Y}} (\gamma_0(t,\mathbf{y}) + \gamma_1(t,\mathbf{y})\xi_{t-})\, \nu(dt, d\mathbf{y}), \qquad (1.68)$$

где $a_0(t),\ a_1(t),\ b_0^{(i)}(t),\ b_1^{(i)}(t) : [0,T] \to \Re^1$; $\gamma_0(t,\mathbf{y}),\ \gamma_1(t,\mathbf{y}) : [0,T] \times \mathbf{Y} \to \Re^1$; $i = 1, \ldots, m$ — скалярные неслучайные функции, удовлетворяющие условиям справедливости формулы Ито (1.62) и условиям теоремы 1.12; $\mathbf{f}_t^{(i)}$ — $\mathcal{F}_t$-измеримые при всех $t \in [0,T]$ независимые стандартные винеровские процессы; $\nu(dt, d\mathbf{y})$ — пуассоновская мера, заданная в пространстве $[0,T] \times \mathbf{Y}$ ($\mathbf{Y} \stackrel{\text{def}}{=} \Re^d$), которая независима с винеровскими процессами $\mathbf{f}_t^{(i)}$; $\gamma_1(t,\mathbf{y}) > -1$.

В монографии [4] получено интегральное представление решения уравнения (1.68) при $m = 1$. Рассмотрим случай $m > 1$, основываясь на [4].

Пусть x_t — решение однородного стохастического дифференциального уравнения

$$dx_t = a_1(t)x_t dt + \sum_{i=1}^{m} b_1^{(i)}(t)x_t d\mathbf{f}_t^{(i)} + x_t \int_{\mathbf{Y}} \gamma_1(t,\mathbf{y})\nu(dt, d\mathbf{y}),\ x_{t_0} = 1.$$

Введем процесс $y_t = \ln|x_t|$. По формуле Ито (1.62) имеем

$$dy_t = \left(a_1(t) - \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{m}\left(b_1^{(i)}(t)\right)^2\right)dt + \sum_{i=1}^{m} b_1^{(i)}(t)d\mathbf{f}_t^{(i)} + \int_{\mathbf{Y}} \ln|1+\gamma_1(t,\mathbf{y})|\nu(dt, d\mathbf{y}). \qquad (1.69)$$

Из (1.69) с вероятностью 1 получаем

$$x_t = \exp\Bigg(\int_{t_0}^{t}\left(a_1(\tau) - \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{m}\left(b_1^{(i)}(\tau)\right)^2\right)d\tau + \sum_{i=1}^{m}\int_{t_0}^{t} b_1^{(i)}(\tau)d\mathbf{f}_\tau^{(i)} +$$

$$+ \int_{t_0}^{t}\int_{\mathbf{Y}} \ln|1 + \gamma_1(\tau,\mathbf{y})|\nu(d\tau, d\mathbf{y})\Bigg). \qquad (1.70)$$

Покажем, что процесс x_t^{-1} удовлетворяет стохастическому дифференциальному уравнению

$$dx_t^{-1} = x_t^{-1}\left(\left(\sum_{i=1}^{m}\left(b_1^{(i)}(t)\right)^2 - a_1(t)\right)dt -\right.$$

$$-\sum_{i=1}^{m} b_1^{(i)}(t)d\mathbf{f}_t^{(i)} - \int\limits_{\mathbf{Y}} \frac{\gamma_1(t,\mathbf{y})}{1+\gamma_1(t,\mathbf{y})}\nu(dt,d\mathbf{y})\Big). \tag{1.71}$$

Действительно, применяя формулу Ито (1.62) к процессу $x_t^{-1} = e^{\psi_t}$, где

$$d\psi_t = \Big(\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{m}\Big(b_1^{(i)}(t)\Big)^2 - a_1(t)\Big)dt - \sum_{i=1}^{m} b_1^{(i)}(t)d\mathbf{f}_t^{(i)} - \int\limits_{\mathbf{Y}} \ln|1+\gamma_1(t,\mathbf{y})|\nu(dt,d\mathbf{y}),$$

имеем

$$dx_t^{-1} = x_t^{-1}\Big(-a_1(t) + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{m}\Big(b_1^{(i)}(t)\Big)^2 + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{m}\Big(b_1^{(i)}(t)\Big)^2\Big)dt+$$

$$+x_t^{-1}\sum_{i=1}^{m}\Big(-b_1^{(i)}(t)\Big)d\mathbf{f}_t^{(i)} + \int\limits_{\mathbf{Y}}\Big(e^{\psi_{t-}-\ln|1+\gamma_1(t,\mathbf{y})|} - e^{\psi_{t-}}\Big)\nu(dt,d\mathbf{y}). \tag{1.72}$$

Далее путем несложных преобразований приводим формулу (1.72) к выражению вида (1.71).

Рассмотрим процесс $\eta_t = x_t^{-1}\xi_t$, где ξ_t — решение уравнения (1.68). Используя формулу Ито (1.62), получаем

$$d\eta_t = x_t^{-1}d\xi_t + \xi_t dx_t^{-1} - \sum_{i=1}^{m}\Big(b_0^{(i)}(t) + b_1^{(i)}(t)\xi_t\Big)x_t^{-1}b_1^{(i)}(t)dt-$$

$$-x_t^{-1}\int\limits_{\mathbf{Y}}\frac{\gamma_1(t,\mathbf{y})}{1+\gamma_1(t,\mathbf{y})}\left(\gamma_0(t,\mathbf{y}) + \gamma_1(t,\mathbf{y})\xi_{t-}\right)\nu(dt,d\mathbf{y}). \tag{1.73}$$

Подставляя $d\xi_t$ и dx_t^{-1} из формул (1.68) и (1.71) в соотношение (1.73), находим

$$d\eta_t = x_t^{-1}\Big(\Big(a_0(t) - \sum_{i=1}^{m} b_0^{(i)}(t)b_1^{(i)}(t)\Big)dt+$$

$$+\sum_{i=1}^{m} b_0^{(i)}(t)d\mathbf{f}_t^{(i)} + \int\limits_{\mathbf{Y}}\frac{\gamma_0(t,\mathbf{y})}{1+\gamma_1(t,\mathbf{y})}\nu(dt,d\mathbf{y})\Big). \tag{1.74}$$

Из (1.74) с вероятностью 1 окончательно получаем

$$\xi_t = x_t\Big(\xi_{t_0} + \int\limits_{t_0}^{t} x_\tau^{-1}\Big(a_0(\tau) - \sum_{i=1}^{m} b_0^{(i)}(\tau)b_1^{(i)}(\tau)\Big)d\tau+$$

$$+\sum_{i=1}^{m}\int\limits_{t_0}^{t} x_\tau^{-1}b_0^{(i)}(\tau)d\mathbf{f}_\tau^{(i)} + \int\limits_{t_0}^{t}\int\limits_{\mathbf{Y}}\frac{x_{\tau-}^{-1}\gamma_0(\tau,\mathbf{y})}{1+\gamma_1(\tau,\mathbf{y})}\nu(d\tau,d\mathbf{y})\Big),$$

где x_t имеет вид (1.70), причем $x_{t_0} = 1$.

Глава 2

Применения стохастических дифференциальных уравнений

Целью приведенного в данной главе обзора применений стохастических дифференциальных уравнений является заинтересовать читателя изучаемой проблемой и поддержать этот интерес при чтении им последующих довольно специфических глав книги.

2.1 Диффузионные математические модели динамических систем, находящихся под воздействием случайных возмущений

2.1.1 Общий вид нелинейных диффузионных моделей

Анализ динамики физических и технических систем при случайных внешних воздействиях сводится к исследованию вероятностных и статистических свойств решений систем дифференциальных уравнений, возмущенных случайными процессами. В достаточно общем случае такие системы описываются уравнением

$$\frac{d\mathbf{x}_t}{dt} = \mathbf{a}\left(\mathbf{x}_t, \mathbf{u}(t), t\right) + \Sigma\left(\mathbf{x}_t, t\right)\mathbf{r}_t,\ \ \mathbf{x}_0 = \mathbf{x}(0, \omega), \tag{2.1}$$

где $\mathbf{x}_t \in \Re^n$ — вектор состояния системы; $\mathbf{u}(t) : [0, T] \to \Re^k$ — управляющее неслучайное воздействие; $\mathbf{r}_t \stackrel{\text{def}}{=} \mathbf{r}(t, \omega) : [0, T] \times \Omega \to \Re^m$ — стохастическое возмущение, представляющее собой векторный случайный процесс; $\mathbf{a}(\mathbf{x}, \mathbf{u}, t) : \Re^n \times \Re^k \times [0, T] \to \Re^n$ и $\Sigma(\mathbf{x}, t) : \Re^n \times [0, T] \to \Re^{n\times m}$ — матричные функции своих аргументов; $\mathbf{x}_0 \in \Re^n$ — случайный вектор начальных условий. Уравнение (2.1) рассматривается на некотором вероятностном пространстве $(\Omega, \mathcal{F}, \mathsf{P})$.

К исследованию систем уравнений вида (2.1) сводится решение широкого класса задач статистической механики, электродинамики, теории управления, финансовой математики, кинетики и др. Первая такая задача была рассмотрена Л. Башелье [24] в связи с изучением одномерного броуновского движения частицы. Результаты Л. Башелье были обобщены А. Эйнштейном [25] и М. Смолуховским [13] на случай многомерного броуновского движения. Более широкую постановку задачи о стохастических динамических системах можно найти в работе А.А. Андронова, А.А. Витта и Л.С. Понтрягина [26]. Эти фундаментальные работы положили начало статистическому описанию динамических систем, получившему в настоящее время развитие и широкое применение.

Корреляционные или спектральные свойства решений уравнений вида (2.1) существенным образом зависят от взаимосвязи динамических характеристик системы и частотных свойств возмущающего случайного процесса. Если полоса пропускания динамической системы (2.1) на входе значительно у́же полосы частот равномерности спектра стационарного возмущающего процесса $\mathbf{r}_t$, то этот процесс может считаться белошумным относительно данной системы, т. е. имеющим постоянную спектральную плотность в диапазоне частот, существенном для динамики системы (2.1).

Как известно, белошумный процесс является обобщенным случайным процессом с δ-образной корреляционной функцией и постоянной спектральной плотностью во всем частотном диапазоне, т. е. $R_r(\tau) = I\delta(\tau)$, $S_r(\omega) = I$, где $\delta(\tau)$ — обобщенная δ-функция Дирака; I — единичная матрица (здесь речь идет о векторном белом шуме с независимыми компонентами).

Понятие белошумности случайного процесса условно. Один и тот же случайный процесс может считаться белошумным относительно одной динамической системы и небелошумным ("цветным") относительно другой, имеющей более широкую полосу пропускания. Стратоновичем была предложена следующая параметризованная модель белошумного случайного процесса. Введем малый параметр $\mu > 0$ таким образом, что $\mathbf{r}_t = \frac{1}{\mu}\xi_{\frac{t}{\mu^2}}$, где $\xi_t \in \Re^m$ — стационарный гауссовский случайный процесс с корреляционной функцией $R_\xi(\tau)$ такой, что $\int\limits_{-\infty}^{\infty} R_\xi(t, t+\tau)d\tau = I$, и спектральной плотностью $S_\xi(\omega)$. Тогда процесс $\mathbf{r}_t$ будет иметь корреляционную функцию $R_r(\tau)$ и спектральную плотность $S_r(\omega)$ такие, что при $\mu \to 0$: $R_r(\tau) = \frac{1}{\mu^2}R_\xi\left(\frac{\tau}{\mu^2}\right) \to I\delta(\tau)$,

$S_r(\omega) = S_\xi\left(\mu^2\omega\right) \to S_\xi(0)$, т. е. будет приближаться по свойствам к белому шуму.

Система дифференциальных уравнений (2.1) для параметризованных таким образом случайных возмущающих процессов принимает вид

$$\frac{d\mathbf{x}_t}{dt} = \mathbf{a}\left(\mathbf{x}_t, \mathbf{u}(t), t\right) + \Sigma\left(\mathbf{x}_t, t\right)\frac{1}{\mu}\xi_{\frac{t}{\mu^2}},\ \mathbf{x}_0 = \mathbf{x}(0,\omega). \tag{2.2}$$

При достаточно малом μ процесс $\frac{1}{\mu}\xi_{\frac{t}{\mu^2}}$ может считаться белошумным относительно данной динамической системы, так как полоса частот равномерности спектра возмущающего процесса $\frac{1}{\mu}\xi_{\frac{t}{\mu^2}}$ неограниченно расширяется при $\mu \to 0$, а полоса пропускания системы остается неизменной.

Если полоса пропускания системы (2.1) недостаточно узка относительно полосы равномерности спектра возмущающего процесса $\mathbf{r}_t$, то белошумная аппроксимация этого процесса не адекватна исходной постановке задачи стохастической динамики. В указанных случаях оказывается существенным учет "цветности" процесса $\mathbf{r}_t$, для чего, например, спектральная плотность этого процесса представляется или аппроксимируется следующим образом:

$$S_r(\omega) = H_r(i\omega)H_r(-i\omega) = \frac{F_r(i\omega)}{A_r(i\omega)}\frac{F_r(-i\omega)}{A_r(-i\omega)}, \tag{2.3}$$

где $H_r(p) = F_r(p)/A_r(p)$ — передаточная функция устойчивой системы, т. е. $F_r(p)$ — диагональная матрица, состоящая из полиномов конечной степени m; $A_r(p)$ — гурвицев полином конечной степени n $(m < n)$, а i — мнимая единица.

Известно, что спектральной плотностью (2.3) обладают установившиеся выходные процессы линейной стохастической системы, представленной в пространстве состояний в виде

$$\frac{d\mathbf{z}_t}{dt} = \tilde{A}_r\mathbf{z}_t + \tilde{F}_r\mathbf{f}_t^{\cdot},\ \mathbf{r}_t = H\mathbf{z_t}, \tag{2.4}$$

для матриц $\tilde{A}_r$, $\tilde{F}_r$, H которой справедливо равенство

$$H_r(p) = H\left(pI - \tilde{A}_r\right)^{-1}\tilde{F}_r = \frac{F_r(p)}{A_r(p)},$$

где $\mathbf{f}_t^{\cdot}$ — белошумный процесс; I — единичная матрица.

Приведем простейший пример случайного процесса $\mathbf{z}_t$ в одномерном случае. Пусть $\tilde{A}_r = a < 0$, $\tilde{F}_r = b$, $H = 1$. Перепишем уравнение (2.4)

в форме одномерного стохастического диференциального уравнения Ито с учетом выбранных параметров:

$$dr_t = ar_t dt + bdf_t,$$

где f_t — скалярный стандартный винеровский процесс. Вычислим корреляцию случайного процесса r_t (он называется случайным процессом Орнштейна–Уленбека) воспользовавшись формулой (11.20):

$$\mathsf{M}\left\{r_t r_s\right\} = \frac{b^2}{2|a|} e^{-|a|\cdot|t-s|}.$$

Таким образом случайный процесс r_t является экспоненциально коррелированным, т.е. является цветным шумом.

Вычислим спектральную плотность процесса r_t по формуле (1.3):

$$S_r(\omega) = \frac{b^2}{|a|^2 + \omega^2} = \frac{b}{|a| + i\omega} \cdot \frac{b}{|a| - i\omega}.$$

Сопоставляя полученные результаты с формулой (2.3) имеем

$$H_r(i\omega) = \frac{b}{|a| + i\omega},\ F_r(i\omega) = b,\ A_r(i\omega) = |a| + i\omega.$$

Система (2.4) называется формирующим фильтром процесса $\mathbf{r}_t$, который может быть задан также в операторной форме:

$$\mathbf{r}_t = H_r(D)\mathbf{f}_t^{\cdot},$$

где $D \stackrel{\text{def}}{=} d/dt$ — оператор дифференцирования, или в интегральной форме:

$$\mathbf{r}_t = \int\limits_{-\infty}^{t} h_r(t-\tau)\mathbf{f}_t^{\cdot} dt,$$

где $h_r(t)$ — оригинал $H_r(p)$:

$$\int\limits_{0}^{\infty} h_r(t) e^{-pt} dt = H_r(p).$$

Если расширить систему уравнений (2.1), дополнив ее уравнениями (2.4), то математическое описание динамической системы сводится к стохастической системе дифференциальных уравнений с белошумным возмущением.

Таким образом, достаточно универсальной математической моделью, описывающей стохастическую динамику систем, является модель нелинейной системы дифференциальных уравнений, возмущенных векторным белошумным случайным процессом

$$\frac{d\mathbf{x}_t}{dt} = \mathbf{a}\left(\mathbf{x}_t, \mathbf{u}(t), t\right) + \Sigma\left(\mathbf{x}_t, t\right)\dot{\mathbf{f}}_t,\ \mathbf{x}_0 = \mathbf{x}(0,\omega), \tag{2.5}$$

где сохранены все обозначения формулы (2.1). Коррелированное возмущение $\mathbf{r}_t$ заменено белым шумом $\dot{\mathbf{f}}_t$.

Необходимо отметить, что белошумный процесс является обобщенным случайным процессом с бесконечной дисперсией. Поэтому преобразованиям, включающим в себя белошумный процесс, следует придавать точный математический смысл.

Известно, что системе уравнений (2.5) можно придавать различный математический смысл, например, смысл стохастических дифференциальных уравнений Ито или стохастических дифференциальных уравнений Стратоновича (см. главу 1), которые наиболее часто встречаются в литературе. При этом в ряде случаев в ходе аналитических вычислений систему уравнений вида (2.5) бывает удобно приводить к уравнениям Ито. В то же время иногда формой уравнений, адекватной математическому описанию конкретных физических или технических систем, являются уравнения Стратоновича. Поскольку эти уравнения переводятся друг в друга, то при математическом моделировании динамических стохастических систем возможно их разумное сочетание.

2.1.2 Линейные диффузионные модели

Соответствие частотных свойств случайного возмущения и частотных характеристик динамического объекта, установленное ранее, носит сугубо качественный характер вследствие большой общности рассматриваемых моделей. Если теперь из всего множества моделей (2.1) – (2.5) выделить класс линейных моделей, то эти качественные оценки можно перевести в количественные.

Пусть система (2.1) линейна и стационарна, так что

$$\frac{d\mathbf{x}_t}{dt} = A\mathbf{x}_t + B\mathbf{u}(t) + \Sigma\mathbf{r}_t,\ \mathbf{x}_0 = \mathbf{x}(0,\omega),\ \mathbf{y}_t = H\mathbf{x}_t, \tag{2.6}$$

где $\mathbf{x}_t \in \Re^n$ — решение системы (2.6); $\mathbf{u}(t) : [0,T] \to \Re^k$; $\mathbf{r}_t : [0,T]\times\Omega \to \Re^m$ — стохастическое возмущение; $\mathbf{y}_t \in \Re^l$ — процесс на выходе; A, B, Σ, H — постоянные числовые матрицы соответствующего размера, причем матрица A гурвицева; $\mathbf{x}_0 = \bar{\mathbf{x}}_0 + \overset{\circ}{\mathbf{x}}_0 \in \Re^n$ — случайный

вектор начальных условий со средним $\bar{\mathbf{x}}_0$ и центрированной составляющей $\overset{\circ}{\mathbf{x}}_0$.

Система уравнений (2.6) может быть представлена в эквивалентной операторной форме:

$$\mathbf{y}_t = \mathbf{y}_0(t) + H_u(D)\mathbf{u}(t) + H_r(D)\mathbf{r}_t, \tag{2.7}$$

где D — оператор дифференцирования; $\mathbf{y}_0(t)$ — переходный процесс, соответствующий начальному условию $\mathbf{x}_0$; $H_u(D)$, $H_r(D)$ — передаточные операторы от управления $\mathbf{u}(t)$ к выходу $\mathbf{y}_t$ и от стохастического возмущения $\mathbf{r}_t$ к выходу $\mathbf{y}_t$ соответственно.

Процесс $\mathbf{y}_t$ и операторы $H_u(D)$, $H_r(D)$ определяются из (2.6):

$$\mathbf{y}_0(t) = H(DI - A)^{-1}\,\mathbf{x}_0\,\delta(t),$$

$$H_u(D) = H(DI - A)^{-1}B = \frac{B(D)}{A(D)},$$

$$H_r(D) = H(DI - A)^{-1}\Sigma = \frac{\Sigma(D)}{A(D)}.$$

Здесь $\delta(t)$ — δ-функция Дирака; $A(D)$ — полиномиальный, а $B(D)$, $\Sigma(D)$ — матричные и покомпонентно полиномиальные операторы; $A(p) = \det(pI - A)$ — гурвицев полином.

Процесс $\mathbf{y}_t$ имеет систематическую составляющую $\bar{\mathbf{y}}(t)$ и случайную составляющую $\overset{\circ}{\mathbf{y}}_t$:

$$\mathbf{y}_t = \bar{\mathbf{y}}(t) + \overset{\circ}{\mathbf{y}}_t,$$

причем

$$\bar{\mathbf{y}}(t) = \bar{\mathbf{y}}_0(t) + H_u(D)\mathbf{u}(t),$$

$$\overset{\circ}{\mathbf{y}}_t = \overset{\circ}{\mathbf{y}}_0(t) + H_r(D)\mathbf{r}_t.$$

В дальнейших рассуждениях данного раздела будем считать случайный процесс $\mathbf{r}_t$ скалярным.

В силу устойчивости системы (2.6) и стационарности возмущения $\mathbf{r}_t$ процесс $\overset{\circ}{\mathbf{y}}_t$ является асимптотически стационарным и обладает спектральной плотностью

$$S_y(\omega) = |H_r(j\omega)|^2 S_r(\omega),$$

где $S_r(\omega)$ — спектральная плотность возмущения $\mathbf{r}_t$.

Определим количественные характеристики полосы пропускания системы (2.7) и полосы частот равномерности спектра процесса $\mathbf{r}_t$.

Под полосой пропускания системы (2.7) будем понимать полосу частот, удовлетворяющую условию

$$\Omega_{\mathrm{c}} = \{\omega : \omega_0 \le \omega \le \omega_1\},$$

где

$$\omega_0, \omega_1 = \arg\max_{v_0, v_1} \Big\{ v_1 - v_0 > 0 : \ \frac{k_s^2}{v_1 - v_0} \int\limits_{v_0}^{v_1} |H_r(ju)|^2 du \le$$

$$\le \max\left\{ |H_r(jv_0)|^2, \ |H_r(jv_1)|^2 \right\} \Big\}$$

при некотором $k_s \in [0.1, \ 0.3]$.

Коэффициент k_s задает пороговый уровень амплитудно-частотной характеристики системы относительно ее среднего значения, что соответствует гашению сигналов системой (2.7) в частотном диапазоне $\omega < \omega_0$, $\omega > \omega_1$ не менее чем в k_s раз относительно среднего гашения в полосе частот Ω_{c}.

Полосой частот равномерности спектра процесса $\mathbf{r}_t$ будем называть полосу частот

$$\Omega_{\mathrm{r}} = \{\omega : \ \omega_0 \le \omega \le \omega_1\},$$

где

$$\omega_0, \omega_1 = \arg\max_{v_0, v_1} \Big\{ v_1 - v_0 > 0 : \max_{v_0 < v_1} |S_r(v_1) - S_r(v_0)| \le$$

$$\le k_r \min\{S_r(v_0), S_r(v_1)\} \Big\}$$

при некотором $k_r \in [0.05, \ 0.2]$.

Коэффициент k_r задает относительный пороговый уровень равномерности спектральной плотности $S_r(\omega)$ процесса $\mathbf{r}_t$. В диапазоне частот Ω_{r} спектральная плотность $S_r(\omega)$ изменяется в пределах $k_r \cdot 100\%$ от своих значений, что позволяет приближенно считать ее константой в этом диапазоне.

Рассмотрим два характерных типа возмущений динамических систем, часто встречающихся в приложениях.

Возмущение белым шумом. Предположим, что полоса пропускания системы (2.7) Ω_{c} значительно у́же полосы частот равномерности спектра Ω_{r} процесса $\mathbf{r}_t$:

$$\Omega_{\mathrm{c}} \subset \Omega_{\mathrm{r}}.$$

В этом случае процесс $\mathbf{r}_t$ может считаться широкополосным относительно системы (2.7), что соответствует гипотезе о его белошумности в системе (2.6) или (2.7). Эта ситуация изображена на рис.2.1.

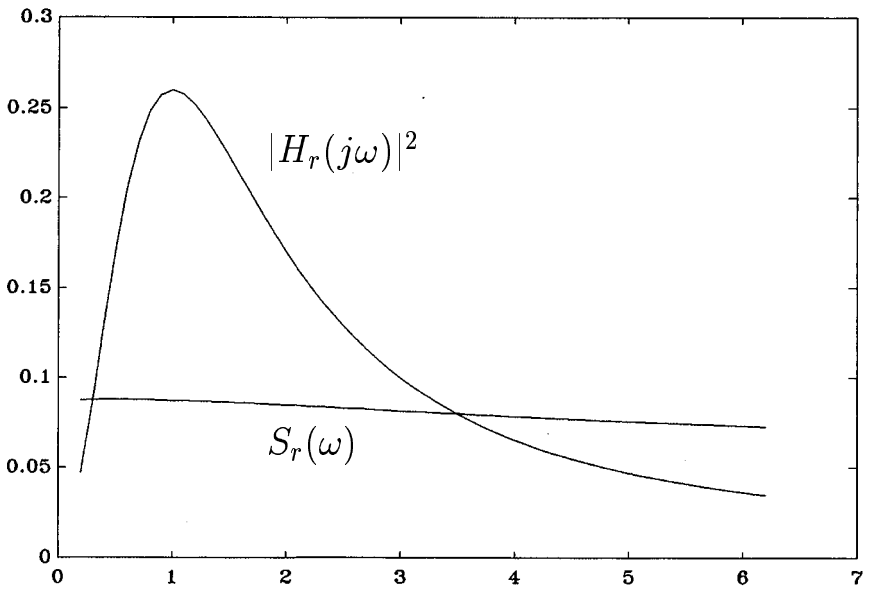

Рис.2.1. Частотная характеристика и спектральная плотность при белошумном возмущении.

Необходимо отметить, что аппроксимация процесса $\mathbf{r}_t$ белым шумом в данном случае тесно связана со свойствами самой системы. Для одной системы процесс $\mathbf{r}_t$ может считаться белошумным, а относительно другой он может не обладать этим свойством.

В рассмотренном случае $\mathbf{r}_t = \mathbf{f}_t^{\cdot}$ — белый шум (в общем случае векторный). Запишем систему уравнений (2.6) в виде

$$\frac{d\mathbf{x}_t}{dt} = A\mathbf{x}_t + B\mathbf{u}(t) + \Sigma\mathbf{f}_t^{\cdot},\ \mathbf{x}_0 = \mathbf{x}(0,\omega),\ \mathbf{y}_t = H\mathbf{x}_t,$$

что соответствует частному случаю универсальной модели (2.5).

Возмущение "цветным" шумом. Пусть полоса пропускания системы (2.7) не у́же полосы частот равномерности спектра Ω_{r} процесса $\mathbf{r}_t$:

$$\Omega_{\mathrm{c}} \supseteq \Omega_{\mathrm{r}}.$$

В рассматриваемом случае процесс $\mathbf{r}_t$ является узкополосным относительно системы (2.7), и учитывать его "цветность" обязательно. Эта ситуация изображена на рис.2.2.

Спектральную плотность $S_r(\omega)$ в данном случае можно представить или аппроксимировать функцией вида (2.3), где F_r — скаляр, а процесс $\mathbf{r}_t$ можно считать процессом на выходе формирующего фильтра (2.4). Совокупность уравнений (2.4), (2.6) является системой линейных стохастических дифференциальных уравнений с белым шумом в правой части.

В заключение покажем, как система линейных стохастических дифференциальных уравнений, заданная в операторной форме, может

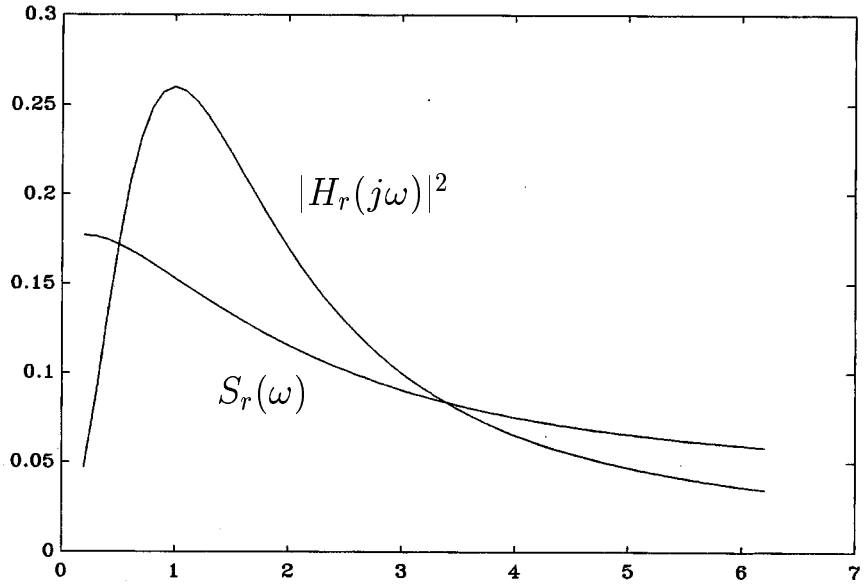

Рис.2.2. Частотная характеристика и спектральная плотность при "цветном" возмущении.

быть приведена к системе линейных стохастических дифференциальных уравнений в пространстве состояний.

Предположим, что полезный сигнал $s_t \in \Re^1$ в системе формируется из управляемой и случайной компонент:

$$s_t = H_u(D)u_t + H_f(D)\dot{f_t}, \tag{2.8}$$

где передаточные операторы $H_u(D)$ и $H_f(D)$ имеют дробно-рациональную структуру:

$$H_u(D) = B(D)/A(D), \; H_f(D) = C(D)/A(D);$$

$B(D), C(D), A(D)$ — скалярные полиномиальные операторы; $\dot{f_t} \in \Re^1$ — белошумный процесс; $u_t \in \Re^1$ — управление.

Эквивалентным (2.8) является задание системы в виде стохастического дифференциального уравнения

$$A(D)s_t = B(D)u_t + C(D)\dot{f_t}. \tag{2.9}$$

Рассмотрим один из способов приведения дифференциального уравнения (2.9) к системе уравнений в пространстве состояний.

Перепишем уравнение (2.9) в следующем виде:

$$\sum_{i=0}^{n} \frac{d^i\left(a_{n-i}s_t - b_{n-i}u_t - c_{n-i}\dot{f_t}\right)}{dt^i} = 0, \tag{2.10}$$

где a_i, b_i, c_i — коэффициенты полиномов $A(p)$, $B(p)$, $C(p)$ соответственно, $a_0 = 1$.

Обозначая $\mathbf{x}_t^{(1)} \stackrel{\text{def}}{=} s_t - b_0 u_t - c_0 \dot{f}_t$, получаем из (2.10) равенства

$$0 = \frac{d^n \mathbf{x}_t^{(1)}}{dt^n} + \sum_{i=0}^{n-1} \frac{d^i \left(a_{n-i} s_t - b_{n-i} u_t - c_{n-i} \dot{f}_t\right)}{dt^i} =$$

$$= \frac{d^{n-1} \mathbf{x}_t^{(2)}}{dt^{n-1}} + \sum_{i=0}^{n-2} \frac{d^i \left(a_{n-i} s_t - b_{n-i} u_t - c_{n-i} \dot{f}_t\right)}{dt^i},$$

где $\mathbf{x}_t^{(2)} \stackrel{\text{def}}{=} d\mathbf{x}_t^{(1)}/dt + a_1 \mathbf{x}_t^{(1)} + (a_1 b_0 - b_1) u_t + (a_1 c_0 - c_1) \dot{f}_t$.

Продолжая начатый процесс, получаем следующую систему линейных стохастических дифференциальных уравнений:

$$\frac{d\mathbf{x}_t}{dt} = \left(H - \mathbf{a}\mathbf{e}_1^{\mathsf{T}}\right) \mathbf{x}_t - \left(b_0 \mathbf{a} - \mathbf{b}\right) u_t - \left(c_0 \mathbf{a} - \mathbf{c}\right) \dot{f}_t, \tag{2.11}$$

$$s_t = \mathbf{e}_1^{\mathsf{T}} \mathbf{x}_t + b_0 u_t + c_0 \dot{f}_t, \tag{2.12}$$

где $H \in \Re^{n \times n}$; $\mathbf{e}_1 \in \Re^n$ — матрицы вида

$$H = \begin{pmatrix} -a_1 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ -a_2 & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ -a_{n-1} & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ -a_n & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix};$$

$\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c} \in \Re^n$ — векторы, составленные из коэффициентов полиномов $A(p)$, $B(p)$, $C(p)$, начиная с a_1, b_1 и c_1 соответственно.

Таким образом, линейная стохастическая модель системы управления вида (2.8) приводится к системе стохастических уравнений (2.11), (2.12), которая является частным случаем системы уравнений вида (2.5).

2.2 Диффузионные модели физических и технических систем

2.2.1 Модель тепловых флуктуаций частиц в веществах и электрических зарядов в проводниках. Формула Найквиста

В 20-х годах техника физического эксперимента достигла настолько высокого уровня, что флуктуационный предел чувствительности электроизмерительных приборов оказался легко достижимым.

В 1928 г. Х. Найквист дал количественную характеристику тепловых электрических флуктуаций в цепях, установив равномерность спектра их колебаний, т. е. белошумность, а также зависимость их интенсивности от температуры. Аналогичный результат получен и для флуктуаций мельчайших частиц, взвешенных в жидкости или газе, т. е. по существу для характеристик броуновского движения. Опишем эти результаты, придерживаясь их изложения в работах [27, 28].

Тепловое движение частиц. Рассмотрим линейное по оси x движение частицы массой m_0, взвешенной в жидкости или газе (рис. 2.3). Будем предполагать, что эта частица находится под действием случайных стационарных сил взаимодействия с молекулами окружающей среды f_t, упругой возвращающей силы $-cx_t$ и вязкого трения $-\alpha\frac{dx_t}{dt}$. Тогда уравнение движения частицы запишем в виде

$$m_0\frac{d^2x_t}{dt^2} + \alpha\frac{dx_t}{dt} + cx_t = f_t, \tag{2.13}$$

где f_t — стационарный случайный процесс с нулевым средним и спектральной плотностью $S_f(\omega)$: $S_f(\omega) \stackrel{\text{def}}{=} \int\limits_{-\infty}^{\infty} R_f(\tau)e^{-j\omega\tau}d\tau$; $R_f(\tau)$ — корреляционная функция процесса f_t.

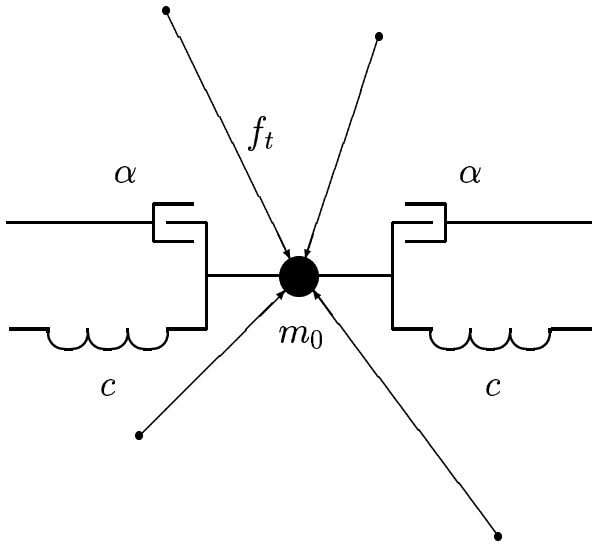

Рис. 2.3. Модель движения частицы.

Нетрудно показать, что спектральная плотность $S_v(\omega)$ установившегося процесса $v_t \stackrel{\text{def}}{=} dx_t/dt$ определяется по формуле

$$S_v(\omega) = \frac{\omega^2 S_f(\omega)}{\left(\omega^2 - \omega_0^2\right)^2 m_0^2 + \alpha\omega^2}; \quad \omega_0^2 = \frac{c}{m_0}.$$

В соответствии с положением молекулярной физики о равнораспределении энергии по степеням свободы, можно привести следующее уравнение средней кинетической энергии частицы:

$$\frac{kT}{2} = \mathsf{M}\left\{\frac{m_0 v_t^2}{2}\right\} = \frac{m_0}{2}\mathsf{M}\left\{v_t^2\right\} = \frac{m_0}{4\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{\omega^2 S_f(\omega)d\omega}{\left(\omega^2-\omega_0^2\right)^2 m_0^2 + \alpha\omega^2}, \qquad (2.14)$$

где T — абсолютная температура среды, град.; $k = 1.38\cdot 10^{-23}\frac{\text{Дж}}{\text{град}}$ — постоянная Больцмана.

Выполнив в правой части (2.14) замену переменных $z = \omega/\omega_0$, преобразуем уравнение (2.14) в уравнение вида

$$kT = \frac{1}{\pi\sqrt{m_0 c}}\int\limits_0^{\infty} \frac{S_f(\omega_0 z)dz}{\left(z-z^{-1}\right)^2+\gamma^2}; \quad \gamma = \alpha/\sqrt{m_0 c}$$

.

Учитывая, что

$$\int\limits_0^{\infty} \frac{dz}{\left(z-z^{-1}\right)^2+\gamma^2} = \frac{\pi}{2\gamma},$$

и то, что функция $L(z) = 1/\left(\left(z-z^{-1}\right)^2+\gamma^2\right)$ является δ-образной в окрестности $z = 1$ (рис. 2.4), из (2.14) при $\gamma \ll 1$ получаем формулу Найквиста [29]

$$S_f(\omega) = 2kT\alpha. \qquad (2.15)$$

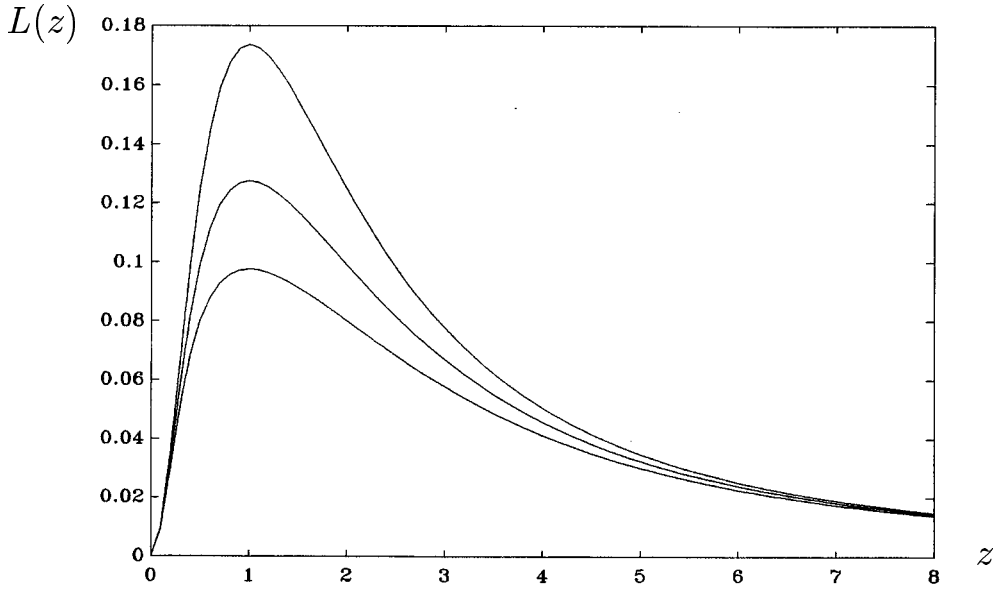

Рис. 2.4. График семейства функций $L(z)$.

Непосредственной подстановкой (2.15) в (2.14) нетрудно проверить, что $S_f(\omega) = 2kT\alpha$ является решением уравнения (2.14) и в общем случае.

Таким образом, согласно формуле Найквиста процесс воздействия на рассматриваемую частицу со стороны окружающей среды является белошумным процессом с интенсивностью $2kT\alpha$.

Тепловая флуктуация зарядов. Рассмотрим электрическую цепь [31], состоящую из последовательно соединенных конденсатора емкостью C, резистора с сопротивлением R, индуктивности L и изображенную на рис.2.5. Тогда разность потенциалов (ЭДС) в разрыве цепи можно выразить через мгновенный заряд q_t конденсатора:

$$u_t = \frac{q_t}{C} + R\frac{dq_t}{dt} + L\frac{d^2q_t}{dt^2}. \tag{2.16}$$

Эту электрическую цепь можно сравнить с только что рассмотренной механической системой. Аналогом силового воздействия f_t здесь является ЭДС u_t, массы m_0 — индуктивность L, жесткости c — величина, обратная электрической емкости $1/C$, аналогом коэффициента вязкого трения α выступает активное сопротивление R.

Учитывая это соответствие и одинаковый общий вид уравнений (2.13) и (2.16), можно проделать приведенные выкладки и получить формулу Найквиста для электрических цепей: $S_u(\omega) = 2kTR$. Согласно этой формуле процесс u_t является процессом белого шума с интенсивностью $2kTR$ [29].

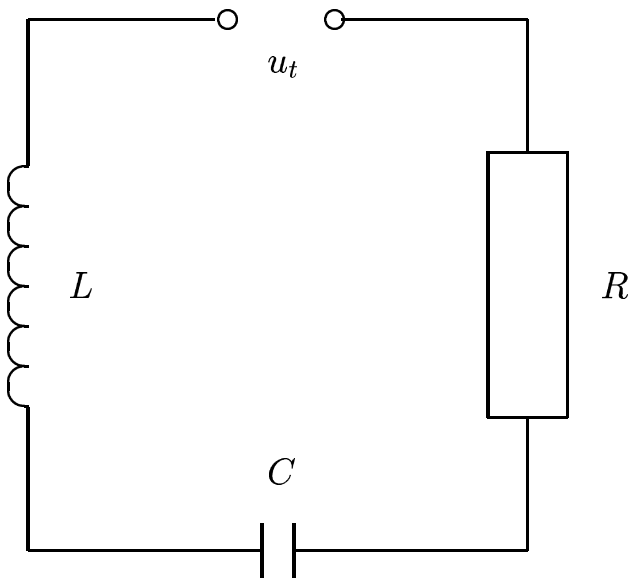

Рис. 2.5. Электрическая цепь.

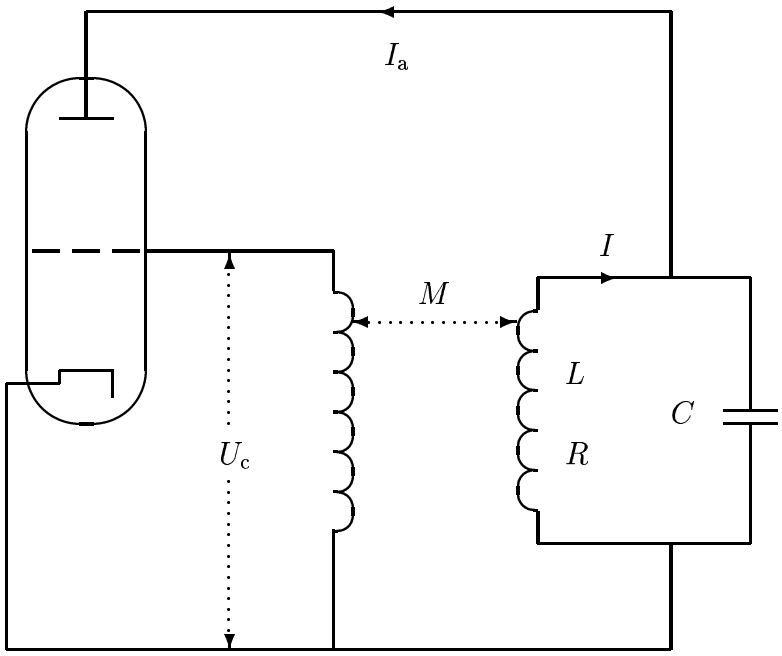

Рис. 2.6. Упрощенная схема лампового генератора.

2.2.2 Автоколебательная электрическая система

Рассмотрим ламповый генератор с колебательным контуром в цепи анода, упрощенная принципиальная схема которого приведена на рис. 2.6 [30]. Предполагается, что сеточное смещение и анодное напряжение постоянны.

В автоколебательной системе, изображенной на рис. 2.6, мгновенное значение анодного тока I_a вследствие дробовых флуктуаций отличается от среднего значения тока I_a^* на случайную величину $I_f(t)$ (флуктуационная компонента анодного тока). Если пренебречь реакцией анодной нагрузки ($D = 0$, D — коэффициент проницаемости) и сеточным током ($I_c = 0$), то можно получить [30] уравнение колебаний рассматриваемой автоколебательной системы

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \omega_0^2 x = \varepsilon\omega_0\left(1 - \frac{4}{3\omega_0^2 A_0^2}\left(\frac{dx}{dt}\right)^2\right)\frac{dx}{dt} + \omega_0^2\varepsilon\xi(t). \qquad (2.17)$$

В (2.17) использованы следующие обозначения: $x = \omega_0 M\,(I - I_=)$, где M — индуктивная связка, $\omega_0 = 1/\sqrt{LC}$, $I_=$ — постоянная составляющая анодного тока, I — ток в индуктивной ветви контура; $\varepsilon = \omega_0(MS - RC)$ — малый параметр, где S — крутизна характеристики лампы $F(U) \stackrel{\text{def}}{=} I_a^*$ (она может иметь, например, вид:

$F(U) = I_= + SU - \gamma U^3/3$, где $U = U_\text{c} + DU_\text{a}$ (в рассматриваемом случае $D = 0$), γ — параметр; U_a — анодное напряжение; U_c — сеточное напряжение, которое в пренебрежении сеточным током I_c записываем как $U_\text{c} = MdI/dt$); $A_0 = 2\sqrt{\varepsilon/(\omega_0 M\gamma)}$ — амплитуда колебаний сеточного напряжения; $\xi(t) = (\omega_0 M/\varepsilon)I_f(t)$ — случайная функция, происхождение которой обусловлено дробовыми флуктуациями анодного тока $I_\text{a} = F(U) + I_f(t)$; $\varepsilon\xi(t)$ — флуктуационный член.

Важно отметить, что происхождение флуктуационного члена $\varepsilon\xi(t)$ может обусловливаться не дробовыми флуктуациями анодного тока, а внешними шумами. Если в индуктивную ветвь контура ввести внешнее воздействие $u_k(t)$, то случайная функция $\xi(t)$ приобретает вид [30]

$$\xi(t) = \frac{\omega_0 MC}{\varepsilon} \cdot \frac{du_k}{dt}(t).$$

Предположим малость времени корреляции τ_kor случайной функции $\xi(t)$. Время корреляции τ_kor сравнивается со временем релаксации амплитуды, порядок величины которого $1/(\omega_0\varepsilon)$ [30]. Потребуем выполнения неравенства $\tau_\text{kor} \ll 1/\omega_0\varepsilon$. Это условие означает, что воздействующий на генератор шум является значительно более широкополосным, чем генерируемый сигнал, что отмечается во многих практических случаях. В предположении отсутствия корреляции моментов пролета различных электронов или кратковременности этих корреляций корреляционная функция флуктуационной составляющей анодного тока имеет δ-образный вид [30]:

$$R_{I_\text{kor}}(t,\tau) = \Gamma^2 e I_\text{a}^* \delta(t-\tau), \tag{2.18}$$

где Γ^2 — коэффициент депрессии дробового шума; e — заряд электрона. Пользуясь соотношением (2.18), находим корреляционную функцию и спектральную плотность величины $\xi(t)$ [30]:

$$R_\xi(\tau) = \Gamma^2 e I_\text{a}^* \left(\frac{\omega_0 M}{\varepsilon}\right)^2 \delta(\tau), \;\; S_\xi(\omega) = 2\Gamma^2 e I_\text{a}^* \left(\frac{\omega_0 M}{\varepsilon}\right)^2.$$

Это означает, что случайный процесс $\xi(t)$ является белым шумом, действующим на рассматриваемую систему, поскольку $\xi(t)$ имеет δ-образную корреляционную функцию и постоянную спектральную плотность.

2.2.3 Чандлеровские колебания

Хорошо известно, что мгновенная ось вращения Земли постоянно меняет положение относительно малой оси земного эллипсоида. Ко-

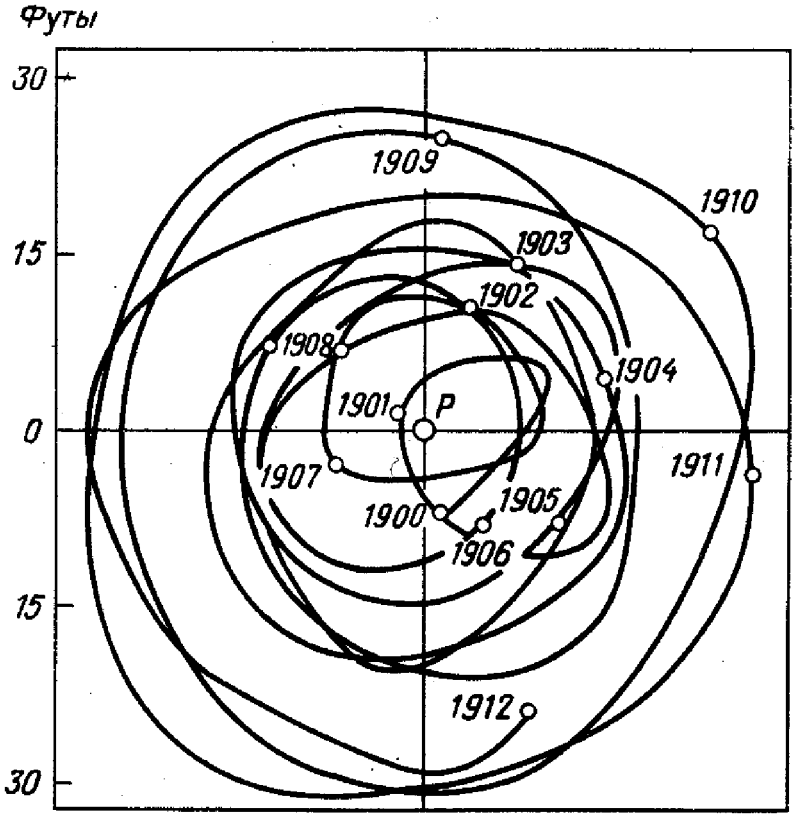

Рис. 2.7. Движение Северного полюса относительно среднего положения (данные по Ванаху за 1900–1912 гг.). Светлыми кружками обозначено положение Северного полюса в начале каждого года.

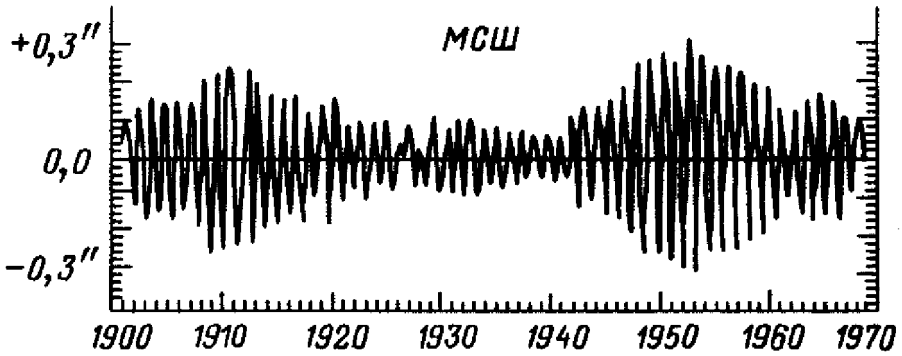

Рис. 2.8. Изменения амплитуды чандлеровского колебания (1900–1970 гг.) по данным Международной Службы Широты.

лебания Северного полюса вокруг условного полюса вращения, принятого Международной Службой Широты, имеют составляющие с периодами 1 год и 14 месяцев. Составляющая таких колебаний с периодом приблизительно 435 дней называется чандлеровским колебанием. Это колебание не является строго периодическим. Его существование было

предсказано еще в 1765 г. Л. Эйлером, который рассматривал колебания положения полюса на основе свободной нутации твердого тела. В результате им было установлено, что период указанных блужданий составляет 305 дней, что не соответствует многочисленным экспериментальным данным.

Чандлер в 1891 г. высказал предположение, что движение полюса имеет две составляющие с периодами 1 год и 428 дней соответственно, что отражает современные представления о чандлеровских колебаниях.

На рис. 2.7 и 2.8 [31] изображены колебания полюса относительно своего среднего положения в разные периоды.

Рассмотрим предложенную А.Н. Колмогоровым в 1960 г. [33] математическую модель чандлеровских колебаний:

$$d\begin{bmatrix} x_t \\ y_t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\lambda & -\omega \\ \omega & -\lambda \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_t \\ y_t \end{bmatrix} dt + d\begin{bmatrix} \phi_t \\ \psi_t \end{bmatrix}, \tag{2.19}$$

где $x_t,\ y_t \in \Re^1$ — случайные процессы, описывающие положение полюса; λ — затухание, а ω — частота чандлеровского колебания; ϕ_t, ψ_t — процессы возбуждения; величины $d\phi_t$ и $d\psi_t$ отражают изменение тензора инерции Земли во временном интервале $[t, t + dt]$.

Оказывается, что ряд экспериментальных данных [32] свидетельствует в пользу того, что значения $d\phi_t$ и $d\psi_t$ в периоды времени, разделенные несколькими годами, практически независимы. Принято считать, что наилучшая оценка периода чандлеровских колебаний составляет 435 дней.

Предположение нормального распределения этой оценки (А.Н. Колмогоров, 1966) и линейного затухания ковариационной функции, приводит к тому, что время релаксации составляет 15–30 лет. Этот промежуток времени можно считать намного превосходящим промежутки в несколько лет, на которых значения чандлеровских колебаний являются независимыми. Таким образом, случайные процессы $d\phi_t/dt$ и $d\psi_t/dt$ в определенном приближении являются широкополосными относительно полосы пропускания системы (2.19) и, следовательно, могут считаться гауссовскими белыми шумами.

2.2.4 Модели химической кинетики и регуляции численности конкурирующих видов животных

В 1951 г. Б.П. Белоусовым была получена экспериментально колебательная химическая реакция в гомогенной системе. Результаты его исследований опубликованы в работе [37].

После этого было открыто достаточно много колебательных реакций [38, 39]. Для исследования таких химических реакций создавались различные математические модели. В частности, в 1920 г. А. Лоткой [35] была предложена гипотетическая химическая реакция, которая учитывала колебания концентраций реагентов. Уравнения этой реакции имеют вид

$$\frac{dx}{dt}(t) = k_1 x(t) + a_1 x(t) y(t), \tag{2.20}$$

$$\frac{dy}{dt}(t) = k_2 y(t) + a_2 x(t) y(t), \tag{2.21}$$

где $x(t)$ и $y(t)$ — концентрация реагентов; $k_1,\ k_2,\ a_1,\ a_2$ — постоянные. Аналогичная модель впоследствии была использована В. Вольтерра [36] для объяснения изменения численности конкурирующих видов животных. При этом $x(t)$ и $y(t)$ — численность двух конкурирующих видов, $k_1,\ k_2$ — коэффициенты увеличения их численности, а a_1 и a_2 — коэффициенты их смертности.

Предположим, что параметры роста k_1 и k_2 или соответствующие коэффициенты колебательной химической реакции имеют случайную составляющую, т. е. могут быть представлены в виде

$$k_1(t) = k_1^{'} + \sigma_1 \xi^{(1)}(t),$$

$$k_2(t) = k_2^{'} + \sigma_2 \xi^{(2)}(t),$$

где $\sigma_1,\ \sigma_2,\ k_1^{'},\ k_2^{'}$ — постоянные, а $\xi^{(1)}(t)$ и $\xi^{(2)}(t)$ — случайные процессы, которые при определенных условиях протекания химических реакций или определенных условиях существования конкурирующих видов животных могут считаться независимыми гауссовскими белыми шумами. Таким образом, стохастическая модель (2.20), (2.21) принимает вид

$$\frac{dx}{dt}(t) = (k_1^{'} + a_1 y(t)) x(t) + \sigma_1 x(t) \xi^{(1)}(t), \tag{2.22}$$

$$\frac{dy}{dt}(t) = (k_2^{'} + a_2 x(t)) y(t) + \sigma_2 y(t) \xi^{(2)}(t). \tag{2.23}$$

Более общая модель, получившая название модели Лотки–Вольтерра [36] имеет вид

$$\frac{dx^{(i)}}{dt}(t) = x^{(i)}(t) \Big(\gamma_i + \sum_{j=1}^{m} \nu_{ij} x^{(j)}(t) \Big),$$

или в случае стохастической модели,

$$\frac{dx^{(i)}}{dt}(t) = x^{(i)}(t)\Big(\gamma_i' + \sum_{j=1}^{m} \nu_{ij} x^{(j)}(t)\Big) + \sigma_i x^{(i)} \xi^{(i)}(t), \qquad (2.24)$$

где $x^{(i)}$; $i = 1, \ldots, m$ — численность i-го вида животных или концентрация i-го вещества. Оправданность использования стохастических моделей (2.22)–(2.24), например, для описания колебательных химических реакций, заключается, в частности, в том, что для химических реакций, протекающих в объемах большой протяженности, существенную роль играет диффузия веществ. Если же для описания такой химической реакции выбраны уравнения (2.20), (2.21), то очевидно, что диффузия в них не учитывается, поскольку в системе двух уравнений первого порядка возможны только периодические колебания.

2.2.5 Модели стохастической финансовой математики

В стохастической финансовой математике для описания динамики цен акций и других ценных бумаг существует достаточно много различных математических моделей диффузионного типа, имеющих вид стохастических дифференциальных уравнений Ито [18–23, 41, 190].

Наиболее простыми математическими моделями данного класса являются модели Блэка–Шоулза и Башелье динамики цены акции S_t:

$$dS_t = \mu S_t dt + \sigma S_t df_t, \;\; dS_t = a dt + b df_t,$$

где f_t — стандартный скалярный винеровский процесс; μ, σ, a, b — вещественные параметры.

В качестве более сложной математической модели приведем модель [18] динамики процентных ставок R_t :

$$dR_t = a_t dt + \sum_{i=1}^{m} \mathbf{b}_t^{(i)} d\mathbf{f}_t^{(i)},$$

где $\mathbf{f}_t^{(i)}, i = 1, \ldots, m,$ — независимые винеровские процессы; случайные процессы a_t, $\mathbf{b}_t^{(i)}$; $i = 1, \ldots, m$ имеют определенный экономический смысл [18].

2.2.6 Модель солнечной активности

Систематические наблюдения за солнечной активностью стали проводить еще в 1610 г. Результаты этих наблюдений свидетельствуют о

том, что солнечная активность, измеряемая числом пятен на Солнце и групп пятен, ведет себя как случайный процесс с систематической осцилляцией и периодом приблизительно 11 лет [42]. Принято считать, что не существует убедительных теоретических оснований для объяснения такой периодичности. На рис. 2.9 [31] изображена зависимость числа пятен на Солнце от времени, которая известна как числа Вольфера.

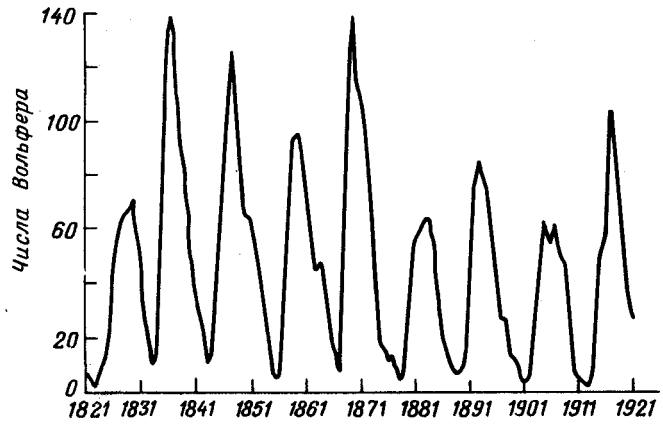

Рис. 2.9. Годичная солнечная активность.

Непрерывная математическая модель солнечной активности предложена М. Арато [31]. Эта модель представляет собой систему линейных стохастических дифференциальных уравнений, не учитывающую среднее значение солнечной активности:

$$d\begin{bmatrix} x_t \\ y_t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -a_2 & -a_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_t \\ y_t \end{bmatrix} dt + \begin{bmatrix} 0 \\ c \end{bmatrix} df_t, \tag{2.25}$$

где x_t — число пятен на Солнце; $f_t \in \Re^1$ — стандартный винеровский процесс; a_1, a_2, c — постоянные.

2.2.7 Модель лагранжевой динамики частицы жидкости

Пусть $\mathbf{x}_t \in \Re^3$ — вектор, описывающий положение частицы жидкости в момент времени t, а $\mathbf{v}_t \in \Re^3$ — вектор ее скорости. А.М. Обухов в [40] (см. также [86]) предложил простую модель лагранжевой динамики частицы жидкости в виде системы шести линейных стохастических дифференциальных уравнений Ито:

$$d\mathbf{x}_t = \mathbf{v}_t dt, \tag{2.26}$$

$$d\mathbf{v}_t = -\frac{1}{T}\mathbf{v}_t dt + b d\mathbf{f}_t, \tag{2.27}$$

где $\mathbf{f}_t \in \Re^3$ — стандартный винеровский процесс с независимыми компонентами $\mathbf{f}_t^{(i)}$ $(i = 1, 2, 3)$; $b \in \Re^1$ — скалярный диффузионный коэффициент; $T > 0$ — параметр, намного превосходящий время релаксации процесса $\mathbf{v}_t$; член $-\frac{1}{T}\mathbf{v}_t dt$ учитывает слабые силы трения, действующие на частицу жидкости извне.

2.2.8 Ошибки округления при численном решении обыкновенных дифференциальных уравнений

Рассмотрим систему обыкновенных дифференциальных уравнений

$$d\mathbf{x}(t) = \mathbf{g}(\mathbf{x}(t), t)dt, \ \mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0, \tag{2.28}$$

где $\mathbf{x}(t) \in \Re^n$; $\mathbf{g} : \Re^n \times [t_0, T] \to \Re^n$. Будем предполагать, что функция $\mathbf{g}(\mathbf{x}(t), t)$ является непрерывно дифференцируемой требуемое число раз, так что уравнение (2.28) с начальным условием имеет единственное решение.

Запишем одношаговую схему численного решения уравнения (2.28)

$$\mathbf{x}_{k+1} = \mathbf{x}_k + \Delta\mathbf{q}(\mathbf{x}_k, t_k, \Delta), \ t_k = t_0 + \Delta k, \tag{2.29}$$

с ошибкой дискретизации $\mathbf{e}_k = \mathbf{x}(t_k) - \mathbf{x}_k$ и шагом дискретизации Δ. Известно, что на значительных промежутках интегрирования ошибки округления (они зависят от особенностей конкретного компьютера и особенностей выбранного численного метода) накапливаются и приводят к значительным потерям точности вычислений.

Посмотрим, как ведут себя эти ошибки. Пусть $\hat{\mathbf{x}}_k$ — численное приближение $\mathbf{x}_k$. Тогда вместо (2.29) получаем

$$\hat{\mathbf{x}}_{k+1} = \hat{\mathbf{x}}_k + \Delta\mathbf{q}(\hat{\mathbf{x}}_k, t_k, \Delta) + \mathbf{s}_{k+1},$$

где $\mathbf{s}_k$ — ошибка округления на k-м шаге. Накопленная ошибка округления $\mathbf{r}_k = \hat{\mathbf{x}}_k - \mathbf{x}_k$ удовлетворяет уравнению

$$\mathbf{r}_{k+1} = \mathbf{r}_k + \Delta\left(\mathbf{q}(\hat{\mathbf{x}}_k, t_k, \Delta) - \mathbf{q}(\mathbf{x}_k, t_k, \Delta)\right) + \mathbf{s}_{k+1},$$

из которого видно, что она является не просто суммой локальных ошибок округления. Если предположить, что приращение $\mathbf{q}(\hat{\mathbf{x}}_k, t_k, \Delta) - \mathbf{q}(\mathbf{x}_k, t_k, \Delta)$ линейно по $\mathbf{r}_k$, то можно прийти [44] к следующему уравнению:

$$\mathbf{r}_{k+1} - \mathbf{r}_k = \Delta G(t_k)\mathbf{r}_k + \mu(\Delta)\mathbf{p}(t_{k+1}) + B_{\mathbf{s}}(t_k)\mathbf{s}_{k+1}, \ \mathbf{r}_0 = 0, \tag{2.30}$$

где $G, B_{\mathbf{s}} \in \Re^{n\times n}$; $\mu \in \Re^1$; $\mathbf{p} \in \Re^n$; $\mathsf{M}\{\mathbf{s}_k\} = 0$, $\mathsf{M}\{\mathbf{s}_k\mathbf{s}_k^T\} = I$; I — единичная матрица.

Уравнение (2.30) можно рассматривать как дискретный аналог стохастического дифференциального уравнения Ито вида

$$d\mathbf{r}_t = G(t)\mathbf{r}_t dt + \mu\mathbf{p}(t)dt + B_{\mathbf{f}}(t)d\mathbf{f}_t, \mathbf{r}_0 = 0, \tag{2.31}$$

где $\mathbf{f}_t \in \Re^m$ — стандартный винеровский процесс с независимыми компонентами.

Теория интегральных представлений решений уравнений типа (2.31) будет подробно рассматриваться в главе 11.

2.3 Математические модели диффузионно-скачкообразного типа

2.3.1 Диффузионно-скачкообразные модели стохастической финансовой математики

В стохастической финансовой математике для описания динамики процентных R_t, форвардных процентных $F_t(T)$ ставок и цен облигаций $P_t(T)$, $t \in [0, T]$, $T < \infty$, [18] существует достаточно большое число различных математических моделей диффузионного типа, т. е. моделей, представляющих собой стохастические дифференциальные уравнения Ито, или системы стохастических дифференциальных уравнений Ито. Основные модели данного типа можно найти, например, в [18–23]. В некоторых моделях диффузионного типа используется один винеровский процесс f_t, однако в ряде моделей вместо одномерного винеровского процесса вводится векторный винеровский процесс $\mathbf{f}_t$ с независимыми компонентами $\mathbf{f}_t^{(i)}$; $i = 1, \ldots, m$.

Для учета скачкообразных изменений стоимостей $P_t(T)$ в некоторых работах используются скачкообразные случайные процессы. Так, в [18, 19] рассматривается модель динамики процентных ставок R_t

$$dR_t = a_t dt + \sum_{i=1}^{m} \mathbf{b}_t^{(i)} d\mathbf{f}_t^{(i)} + \int_{\Theta} q(t, \mathbf{x})\mu(dt, d\mathbf{x}), \tag{2.32}$$

где $\mu(dt, d\mathbf{x})$ — целочисленная случайная мера (например, пуассоновская), заданная в пространстве $[0, \infty) \times \Theta$; $\mathbf{f}_t^{(i)}$; $i = 1, \ldots, m$ — независимые винеровские процессы, которые не зависят от значений случайной меры $\mu(dt, d\mathbf{x})$; случайные процессы a_t, $\mathbf{b}_t^{(i)}$; $i = 1, \ldots, m$ и $q(t, \mathbf{x})$ имеют определенный экономический смысл (см. [18]).

Уравнения, описывающие динамику $P_t(T)$ и $F_t(T)$ и соответствующие уравнению (2.32), имеют вид

$$dP_t(T) = P_t(T)\Big(A_t(T)dt + \sum_{i=1}^{m} B_t^{(i)}(T)d\mathbf{f}_t^{(i)}\Big) + P_{t-}(T)\int\limits_{\Theta} q(t,\mathbf{x},T)\mu(dt,d\mathbf{x}), \tag{2.33}$$

$$dF_t(T) = a_t(T)dt + \sum_{i=1}^{m} \mathbf{b}_t^{(i)}(T)d\mathbf{f}_t^{(i)} + \int\limits_{\Theta} \delta(t,\mathbf{x},T)\mu(dt,d\mathbf{x}), \tag{2.34}$$

где случайные процессы $A_t(T)$, $\delta(t,\mathbf{x},T)$, $B_t^{(i)}$; $i = 1,\ldots,m$ также имеют определенный экономический смысл.

В ряде работ используются менее общие математические модели, чем (2.32)–(2.34). Так, в [21, 22, 190] рассматривается стохастическое дифференциальное уравнение со скачкообразной компонентой, которое описывает динамику цены акции S_t:

$$dS_t = (\mu - \lambda k)S_t dt + \sigma S_t df_t + S_t d\nu_t, \tag{2.35}$$

где f_t — скалярный стандартный винеровский процесс; ν_t — однородный процесс Пуассона с параметром λkt, который независим с винеровским процессом f_t, а μ, λ, k, σ — числовые параметры. Модель (2.35) является обобщением модели Блэка–Шоулза, относящейся к моделям диффузионного типа.

2.3.2 Скачкообразная модель лагранжевой динамики частицы жидкости

Вернемся к рассмотрению динамики частицы жидкости. В [86] указывается, что в ряде ситуаций в системе (2.26), (2.27) вместо векторного возмущающего процесса $\mathbf{f}_t$ может быть использован векторный процесс Пуассона $\nu_t^{\mathsf{T}} = (\nu_t^{(1)}, \nu_t^{(2)}, \nu_t^{(3)})$, где $\nu_t^{(i)}$; $i = 1,2,3$ — независимые процессы Пуассона с заданным параметром. Таким образом, система (2.26), (2.27) преобразуется в систему стохастических дифференциальных уравнений со скачкообразной компонентой:

$$d\mathbf{x}_t = \mathbf{v}_t dt,\ d\mathbf{v}_t = -\frac{1}{T}\mathbf{v}_t dt + b\nu_t,$$

где сохранен смысл обозначений, введенных в (2.26), (2.27).

2.4 Математические задачи, связанные со стохастическими дифференциальными уравнениями

2.4.1 Фильтрация

Рассмотрим вектор состояния $\mathbf{x}_t \in \Re^n$, который является гауссовским и удовлетворяет системе линейных стохастических дифференциальных уравнений Ито:

$$d\mathbf{x}_t = A\mathbf{x}_t dt + Bd\mathbf{w}_t,\ \mathbf{x}_0 = \mathbf{x}(0,\omega), \tag{2.36}$$

где $A \in \Re^{n\times n}$, $B \in \Re^{n\times m}$ — числовые матрицы; $\mathbf{w}_t \in \Re^m$ — стандартный винеровский процесс с независимыми компонентами $\mathbf{w}_t^{(i)}$ $(i = 1,\ldots,m)$; $\mathbf{x}_0 \in \Re^n$ — гауссовская случайная величина. Предположим, что измерение вектора $\mathbf{x}_t$ невозможно, но допустимо измерять наблюдаемый процесс $\mathbf{y}_t \in \Re^k$, $1 \le k \le n$, который удовлетворяет следующей системе линейных стохастических дифференциальных уравнений Ито:

$$d\mathbf{y}_t = H\mathbf{x}_t dt + \Sigma d\mathbf{f}_t,\ \mathbf{y}_0 = O_{n\times 1}, \tag{2.37}$$

где $H \in \Re^{k\times n}$, $\Sigma \in \Re^{k\times l}$ — числовые матрицы; $\mathbf{f}_t \in \Re^l$ — стандартный винеровский процесс с независимыми компонентами $\mathbf{f}_t^{(i)}$ $(i = 1,\ldots,l)$, не зависящий от винеровского процесса $\mathbf{w}_t$; $O_{n\times 1}$ — нулевой столбец длины n.

Далее будем считать, что $\mathcal{F}_t, t \ge 0$, — σ-алгебра, порожденная $\mathbf{x}_0$, $\mathbf{y}_s$, $\mathbf{w}_s$, $0 \le s \le t$, и $\mathcal{Y}_t, t \ge 0$, — σ-алгебра, порожденная $\mathbf{y}_s$, $0 \le s \le t$. Запишем уравнение фильтра Калмана–Бьюси $\hat{\mathbf{x}}_t = \mathsf{M}\{\mathbf{x}_t|\mathcal{Y}_t\}$, где $\hat{\mathbf{x}}_t$ — наилучшая оценка вектора состояния $\mathbf{x}_t$, доставляющая минимум функционалу $\mathsf{M}\left\{|\mathbf{x}_t - \hat{\mathbf{x}}_t|^2\right\}$, причем $\mathsf{M}\{\mathbf{x}_t\} = \mathsf{M}\{\hat{\mathbf{x}}_t\}$ и

$$\frac{dR}{dt}(t) = AR(t) + R(t)A^{\mathsf{T}} + BB^{\mathsf{T}} - R(t)H^{\mathsf{T}}\left(\Sigma\Sigma^{\mathsf{T}}\right)^{-1} HR(t), \tag{2.38}$$

где $R(0) = \mathsf{M}\left\{\mathbf{x}_0\mathbf{x}_0^{\mathsf{T}}\right\}$; $R(t) = \mathsf{M}\left\{(\mathbf{x}_t - \hat{\mathbf{x}}_t)(\mathbf{x}_t - \hat{\mathbf{x}}_t)^{\mathsf{T}}\right\}$ — ковариационная матрица ошибки оценивания $\mathbf{e}_t \stackrel{\text{def}}{=} \mathbf{x}_t - \hat{\mathbf{x}}_t$. Известно также, что $\hat{\mathbf{x}}_t$ — гауссовский процесс, удовлетворяющий системе линейных стохастических дифференциальных уравнений

$$d\hat{\mathbf{x}}_t = \left(A - R(t)H^{\mathsf{T}}\left(\Sigma\Sigma^{\mathsf{T}}\right)^{-1} H\right)\hat{\mathbf{x}}_t dt + R(t)H^{\mathsf{T}}\left(\Sigma\Sigma^{\mathsf{T}}\right)^{-1} d\mathbf{y}_t. \tag{2.39}$$

Отметим, что соотношения (2.38), (2.39) получаем с учетом равенства $\mathsf{M}\left\{(\mathbf{x}_t - \hat{\mathbf{x}}_t)^{\mathsf{T}} \hat{\mathbf{x}}_t\right\} = 0$. Используя (2.37) и (2.39), имеем

$$d\hat{\mathbf{x}}_t = A\hat{\mathbf{x}}_t dt + R(t)H^{\mathsf{T}}\left(\Sigma\Sigma^{\mathsf{T}}\right)^{-1} H\mathbf{e}_t dt + R(t)H^{\mathsf{T}}\left(\Sigma\Sigma^{\mathsf{T}}\right)^{-1}\Sigma d\mathbf{f}_t. \quad (2.40)$$

Вычитая (2.40) из (2.36), выводим следующее стохастическое дифференциальное уравнение для ошибки оценивания $\mathbf{e}_t$:

$$d\mathbf{e}_t = \left(A - R(t)H^{\mathsf{T}}\left(\Sigma\Sigma^{\mathsf{T}}\right)^{-1} H\right)\mathbf{e}_t dt - R(t)H^{\mathsf{T}}\left(\Sigma\Sigma^{\mathsf{T}}\right)^{-1} H d\mathbf{f}_t + B d\mathbf{w}_t. \quad (2.41)$$

Объединяя уравнения (2.40) и (2.41), имеем

$$d\begin{bmatrix}\mathbf{e}_t\\ \hat{\mathbf{x}}_t\end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A - R(t)H^{\mathsf{T}}\left(\Sigma\Sigma^{\mathsf{T}}\right)^{-1} H & O \\ R(t)H^{\mathsf{T}}\left(\Sigma\Sigma^{\mathsf{T}}\right)^{-1} H & A \end{bmatrix}\begin{bmatrix}\mathbf{e}_t\\ \hat{\mathbf{x}}_t\end{bmatrix} dt +$$

$$+\begin{bmatrix} B & -R(t)H^{\mathsf{T}}\left(\Sigma\Sigma^{\mathsf{T}}\right)^{-1}\Sigma \\ O & R(t)H^{\mathsf{T}}\left(\Sigma\Sigma^{\mathsf{T}}\right)^{-1}\Sigma \end{bmatrix} d\begin{bmatrix}\mathbf{w}_t\\ \mathbf{f}_t\end{bmatrix}, \quad (2.42)$$

где O — нулевые матрицы соответствующих размеров.

Система уравнений (2.42) представляет собой систему линейных стохастических дифференциальных уравнений Ито, которая может быть решена численно с помощью методов, обсуждаемых в предлагаемой книге, если численно решено уравнение Риккати (2.38) и известна матрица $R(t)$ в дискретные моменты времени. Отметим, что если второе уравнение (2.42) заменить на уравнение состояния, то система (2.42) преобразуется в систему вида

$$d\begin{bmatrix}\mathbf{e}_t\\ \mathbf{x}_t\end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A - R(t)H^{\mathsf{T}}\left(\Sigma\Sigma^{\mathsf{T}}\right)^{-1} H & O \\ O & A \end{bmatrix}\begin{bmatrix}\mathbf{e}_t\\ \mathbf{x}_t\end{bmatrix} dt +$$

$$+\begin{bmatrix} B & -R(t)H^{\mathsf{T}}\left(\Sigma\Sigma^{\mathsf{T}}\right)^{-1}\Sigma \\ B & O \end{bmatrix} d\begin{bmatrix}\mathbf{w}_t\\ \mathbf{f}_t\end{bmatrix}.$$

Нами была рассмотрена задача линейной фильтрации. Следует отметить, что задача нелинейной фильтрации также может быть сведена к задаче численного решения стохастических дифференциальных уравнений Ито (см., например, [8, 86]).

В главе 15 рассмотрена задача о фильтрации марковской цепи с непрерывным временем и конечным числом состояний [86], а также задача оптимальной нелинейной фильтрации [8]. Там же приведены соответствующие численные эксперименты. Численное решение этих задач также основывается на численном интегрировании стохастических дифференциальных уравнений Ито, но уже нелинейных.

2.4.2 Оптимальное стохастическое управление

В ряде задач, например, в задачах об управлении портфелем ценных бумаг, управлении движением динамического объекта и т. д., возникает необходимость выбирать управляющее воздействие на основе какого-либо оптимального критерия. Предположим, что уравнение состояния представляет собой систему стохастических дифференциальных уравнений Ито вида

$$d\mathbf{x}_t = \mathbf{a}(\mathbf{x}_t, \mathbf{u}, t)dt + \Sigma(\mathbf{x}_t, \mathbf{u}, t)d\mathbf{f}_t,$$

где используются приведенные ранее обозначения, а $\mathbf{u} \in \Re^k$ — управляющее воздействие, которое выбирается из условия минимизации функционала

$$J(\mathbf{x}, \mathbf{u}, s) = \mathsf{M}\Big\{Q(\mathbf{x}_T, T) + \int\limits_s^T F(\mathbf{x}_t, \mathbf{u}, t)dt | \mathbf{x}_s = \mathbf{x}\Big\},$$

где Q, F — известные функции, а T, например, — постоянный момент времени.

Известны различные управляющие воздействия, которые могут содержать или не содержать информацию о векторе состояния системы в предшествующие моменты времени. Рассмотрим управление $\mathbf{u}(\mathbf{x}_t, t)$ марковского типа. Тогда минимальная для него по $\mathbf{u}$ величина функционала $J(\mathbf{x}, \mathbf{u}, s)$, обозначаемая через $H(\mathbf{x}, s)$, удовлетворяет уравнению Гамильтона–Якоби–Беллмана

$$\min_{\mathbf{u} \in \Re^k} \{F(\mathbf{x}, \mathbf{u}, s) + L_u H(\mathbf{x}, s)\} = 0$$

с граничным условием $H(\mathbf{x}, T) = Q(\mathbf{x}, T)$, где

$$L_u H(\mathbf{x}, s) = \frac{\partial H}{\partial s}(\mathbf{x}, s) + \sum_{i=1}^n \mathbf{a}^{(i)}(\mathbf{x}, \mathbf{u}, s)\frac{\partial H}{\partial \mathbf{x}^{(i)}}(\mathbf{x}, s) +$$

$$+\frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^n D^{(ij)}(\mathbf{x}, \mathbf{u}, s)\frac{\partial^2 H}{\partial \mathbf{x}^{(i)}\partial \mathbf{x}^{(j)}}(\mathbf{x}, s); \;\; D = \Sigma\Sigma^{\mathsf{T}}.$$

Отметим, что приведенные ранее условия являются необходимыми условиями, которым удовлетворяет минимум функционала, если он существует.

Рассмотрим линейно-квадратичную задачу стохастического управления, т. е. задачу нахождения управления $\mathbf{u}(\mathbf{x}_t, t)$ марковского типа,

доставляющего минимум функционалу

$$J(\mathbf{x},\mathbf{u},s)=\mathsf{M}\Big\{\mathbf{x}_T R\mathbf{x}_T^{\mathsf{T}}+\int\limits_s^T\left(\mathbf{x}_t^{\mathsf{T}}C(t)\mathbf{x}_t+\mathbf{u}^{\mathsf{T}}P(t)\mathbf{u}\right)|\mathbf{x}_s=\mathbf{x}\Big\},$$

где $C(t):[s,T]\to\Re^{n\times n}$; $P(t):[s,T]\to\Re^{k\times k}$, а $\mathbf{x}_t\in\Re^n$ — решение системы стохастических дифференциальных уравнений

$$d\mathbf{x}_t=\left(A(t)\mathbf{x}_t+B(t)\mathbf{u}(\mathbf{x}_t,t)\right)dt+\Sigma(t)d\mathbf{w}_t,$$

где $A(t):[s,T]\to\Re^{n\times n}$; $B(t):[s,T]\to\Re^{n\times k}$; $\Sigma(t):[s,T]\to\Re^{n\times m}$, а $\mathbf{w}_t\in\Re^m$ — стандартный винеровский процесс с независимыми компонентами $\mathbf{w}_t^{(i)}$; $i=1,\ldots,m$. Кроме того, предполагаем, что все зависящие от t матрицы непрерывны, $C(t)$ и R — симметричные неотрицательно определенные матрицы, а матрица $P(t)$ симметричная и положительно определенная.

Запишем уравнение Гамильтона–Якоби–Беллмана для данной задачи:

$$\frac{\partial H}{\partial s}+\mathbf{x}^{\mathsf{T}}C(s)\mathbf{x}+\sum_{j=1}^n\left(A(s)\mathbf{x}\right)^{(j)}\frac{\partial H}{\partial\mathbf{x}^{(j)}}+\frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^n D^{(ij)}(s)\frac{\partial^2 H}{\partial\mathbf{x}^{(i)}\partial\mathbf{x}^{(j)}}+$$

$$+\min_{\mathbf{u}\in\Re^k}\left\{\mathbf{u}^{\mathsf{T}}P(t)\mathbf{u}+\sum_{j=1}^n\left(B(s)\mathbf{u}\right)^{(j)}\frac{\partial H}{\partial\mathbf{x}^{(j)}}\right\}=0,$$

где $D(t)\stackrel{\text{def}}{=}\Sigma(t)\Sigma^{\mathsf{T}}(t)$, а граничное условие имеет вид $H(T,\mathbf{x})=\mathbf{x}^{\mathsf{T}}R\mathbf{x}$. В [86], в частности, показано, что оптимальное управление и минимальное значение функционала $J(\mathbf{x},\mathbf{u},s)$ в рассматриваемом случае приобретают вид

$$\mathbf{u}(\mathbf{x},s)=-P^{-1}(s)B(s)\mathbf{x},\tag{2.43}$$

$$H(\mathbf{x},s)=\mathbf{x}^{\mathsf{T}}S(s)\mathbf{x}+\int\limits_s^T\operatorname{tr}\left\{\Sigma(t)\Sigma^{\mathsf{T}}(t)S(t)\right\}dt,\tag{2.44}$$

где tr — след (сумма диагональных элементов) матрицы; $S(t):[s,T]\to\Re^{n\times n}$ — симметричная положительно определенная и непрерывно дифференцируемая матричная функция, которая удовлетворяет матричному уравнению Риккати

$$\frac{dS}{dt}(t)=-A(t)^{\mathsf{T}}S(t)-S(t)A(t)+S(t)B(t)P^{-1}(t)B(t)S(t)-C(t),\tag{2.45}$$

$$S(T)=R.$$

Таким образом, если решено (вообще говоря, численно) уравнение Риккати (2.45), то по формулам (2.43) и (2.44) можно найти оптимальное управление и минимальное значение функционала.

Если вместо вектора состояния $\mathbf{x}_t$ допустимо использовать только процесс наблюдения вида (2.37), где матрицы H и Σ могут зависеть от времени (задача оптимального стохастического управления по неполным данным [8], см. также главу 15), то с помощью фильтра Калмана–Бьюси можно построить оценку $\hat{\mathbf{x}}_t$ и использовать ее в оптимальном управлении $\mathbf{u}(\hat{\mathbf{x}}_t, t)$ для линейно-квадратичной задачи. В [86] обсуждаются также вопросы, связанные с другими задачами стохастического оптимального управления.

2.4.3 Стохастическая устойчивость

Рассмотрим стохастическое дифференциальное уравнение Ито

$$d\mathbf{x}_t = \mathbf{a}(\mathbf{x}_t, t)dt + \Sigma(\mathbf{x}_t, t)d\mathbf{f}_t, \ \mathbf{x}_0 = \mathbf{x}(0, \omega), \tag{2.46}$$

где сохранен смысл обозначений, входящих в (1.35). Будем считать, что $\mathbf{x}_t \equiv \mathbf{0}$ $(\underbrace{(0\ldots0)}_{n})^{\mathsf{T}} \stackrel{\text{def}}{=} \mathbf{0})$ является невозмущенным движением динамической системы, а возмущенное движение описывается уравнением (2.46). В соответствии с этим положим $\mathbf{a}(\mathbf{0}, t) \equiv 0$, $\Sigma(\mathbf{0}, t) \equiv 0$, $t \geq 0$. Пусть также выполнены условия AI–AIII теоремы 1.6, которые гарантируют существование и единственность решения уравнения (2.46).

Приведем некоторые определения основных типов устойчивости для стохастических систем.

Определение 2.1. *Невозмущенное движение системы* $\mathbf{x}_t \equiv 0$ *будем называть устойчивым по вероятности или стохастически устойчивым при* $t \geq t_0$, *если для любых* $\varepsilon > 0$ *и* $t_0 \geq 0$ *выполняется* $\lim\limits_{\mathbf{x}_0 \to 0} \mathsf{P}\Big\{\sup\limits_{t \geq t_0} \left|\mathbf{x}_t^{\mathbf{x}_0, t_0}\right| \geq \varepsilon\Big\} = 0$, *где* $\mathbf{x}_t^{\mathbf{x}_0, t_0}$ *— такое решение уравнения* (2.46), *что* $\mathbf{x}_{t_0} = \mathbf{x}_0$.

Определение 2.2. *Невозмущенное движение системы* $\mathbf{x}_t \equiv 0$ *называется асимптотически устойчивым по вероятности или асимптотически стохастически устойчивым, если оно стохастически устойчиво и, кроме того,* $\lim\limits_{\mathbf{x}_0 \to 0} \mathsf{P}\Big\{\lim\limits_{t \to \infty} \left|\mathbf{x}_t^{\mathbf{x}_0, t_0}\right| = 0\Big\} = 1$.

Приведенные определения являются обобщением классических определений устойчивости в малом по Ляпунову на случай стохастических систем.

Определение 2.3. *Невозмущенное движение системы* $\mathbf{x}_t \equiv 0$ *называется асимптотически стохастически устойчивым в целом, если оно стохастически устойчиво и, кроме того, для всех* $|\mathbf{x}_0| < \infty$ *выполняется* $\mathsf{P}\left\{\lim\limits_{t\to\infty} \left|\mathbf{x}_t^{\mathbf{x}_0,t_0}\right| = 0\right\} = 1$.

Приведем некоторые определения устойчивости, связанные с моментными характеристиками процесса $\mathbf{x}_t$.

Определение 2.4. *Невозмущенное движение системы* $\mathbf{x_t} \equiv \mathbf{0}$ *называется устойчивым в среднем степени* p, $p > 0$, *или* p*-устойчивым, если для любых* $\varepsilon > 0$ *и* $t_0 \geq 0$ *найдется* $\delta = \delta(t_0, \varepsilon) > 0$ *такое, что* $\mathsf{M}\left\{\left|\mathbf{x}_t^{\mathbf{x}_0,t_0}\right|^p\right\} < \varepsilon \quad \forall t \geq t_0$ *и* $|\mathbf{x}_0| < \delta$.

Определение 2.5. *Невозмущенное движение системы* $\mathbf{x_t} \equiv \mathbf{0}$ *называется асимптотически устойчивым в среднем степени* p, $p > 0$, *или асимптотически* p*-устойчивым, если оно* p*-устойчиво и существует* $\delta_0 = \delta_0(t_0) > 0$ *такое, что* $\lim\limits_{t\to\infty} \mathsf{M}\left\{\left|\mathbf{x}_t^{\mathbf{x}_0,t_0}\right|^p\right\} = 0 \ \forall |\mathbf{x}_0| < \delta_0$.

Определение 2.6. *Невозмущенное движение системы* $\mathbf{x_t} \equiv \mathbf{0}$ *называется экспоненциально* p*-устойчивым, если существуют постоянные* $\gamma > 0$ *и* $\alpha > 0$ *такие, что* $\mathsf{M}\left\{\left|\mathbf{x}_t^{\mathbf{x}_0,t_0}\right|^p\right\} < \gamma|\mathbf{x}_0|^p e^{-\alpha(t-t_0)}$, $t \geq t_0$.

Следует отметить, что существуют и другие определения стохастической устойчивости [46–49].

Известно, что одним из методов исследования устойчивости детерминированных систем является метод функций Ляпунова. Достоинство такого метода заключается в том, что он позволяет (если соответствующая функция Ляпунова найдена) установить характер поведения решения дифференциального уравнения, не требуя при этом знания точного решения дифференциального уравнения. Обобщения метода функций Ляпунова на класс стохастических дифференциальных уравнений были получены в основном в 60–80-е годы благодаря усилиям, главным образом, Г.Дж. Кушнера [2, 47] и Р.З. Хасьминского [46].

Рассмотрим суть метода стохастических функций Ляпунова. Положим, что функция $V(\mathbf{x}, t) : \Re^n \times [0, \infty) \to \Re^1$ при всех $(\mathbf{x}, t) \in \mathcal{U} \times [0, \infty)$ $(\mathcal{U} \subset \Re^n,\ \mathbf{0} \in \mathcal{U}, (\underbrace{0\ldots0}_{n})^{\mathsf{T}} \stackrel{\text{def}}{=} \mathbf{0})$ является непрерывной и положительно определенной. Пусть также функция $V(\mathbf{x}, t)$ дважды непрерывно дифференцируема по $\mathbf{x}$ и один раз по t за исключением, быть может, множества $\mathbf{x} = \mathbf{0}$. Кроме того, предположим, что $V(\mathbf{0}, t) = 0$. Далее через $\mathcal{C}_2^0(\mathcal{U})$ будем обозначать множество функций дважды непрерывно дифференцируемых по $\mathbf{x} \in \mathcal{U}$ и один раз по t за исключением, быть может,

множества $\mathbf{x} = \mathbf{0}$. В силу формулы Ито имеем

$$V(\mathbf{x}_t, t) - V(\mathbf{x}_{t_0}, t_0) = \int\limits_{t_0}^{t} LV(\mathbf{x}_\tau, \tau)d\tau + \sum_{i=1}^{m} \int\limits_{t_0}^{t} G_0^{(i)} V(\mathbf{x}_\tau, \tau) d\mathbf{f}_\tau^{(i)} \text{ с в.1}, \quad (2.47)$$

где операторы L и $G_0^{(i)}$ определены на множествах $\mathcal{L}$ и $\mathcal{G}_0$ (см. главу 1) и имеют вид

$$LV(\mathbf{x}, t) = \frac{\partial V}{\partial t}(\mathbf{x}, t) + \sum_{i=1}^{n} \mathbf{a}^{(i)}(\mathbf{x}, t) \frac{\partial V}{\partial \mathbf{x}^{(i)}}(\mathbf{x}, t) +$$

$$+ \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{m} \sum_{l,i=1}^{n} \Sigma^{(lj)}(\mathbf{x}, t) \Sigma^{(ij)}(\mathbf{x}, t) \frac{\partial^2 V}{\partial \mathbf{x}^{(l)} \partial \mathbf{x}^{(i)}}(\mathbf{x}, t),$$

$$G_0^{(i)} V(\mathbf{x}, t) = \sum_{j=1}^{n} \Sigma^{(ji)}(\mathbf{x}, t) \frac{\partial V}{\partial \mathbf{x}^{(j)}}(\mathbf{x}, t); \ i = 1, \ldots, m.$$

Нетрудно установить, что роль первой производной $V(\mathbf{x}, t)$ по $\mathbf{x}$ в соответствии с уравнением движения в стохастическом случае играет функция $LV(\mathbf{x}_s, s)$. Будем считать, что при $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$, $t \geq 0$ выполняется неравенство

$$LV(\mathbf{x}, t) \leq 0. \quad (2.48)$$

Функцию $V(\mathbf{x}, t)$, обладающую перечисленными свойствами, будем называть стохастической функцией Ляпунова. К стохастической функции Ляпунова могут предъявляться также некоторые дополнительные требования. Далее, используя (2.47), (2.48) и свойство интеграла Ито, получаем $\mathsf{M}\{V(\mathbf{x}_t, t) | \mathcal{F}_{t_0}\} \leq V(\mathbf{x}_{t_0}, t_0)$ с в.1.

Таким образом, $V(\mathbf{x}_t, t)$ — супермартингал. Если y_s, $s \geq 0$ — мартингал и $\mathsf{M}\{|y_s|^p\} < \infty$, то справедливо хорошо известное неравенство

$$\mathsf{P}\left\{\omega \in \Omega : \sup_{0 \leq s \leq t} |y(s, \omega)| \geq \alpha\right\} \leq \frac{1}{\alpha^p} \mathsf{M}\{|y_t|^p\} \ \forall \alpha > 0,$$

и, следовательно,

$$\mathsf{P}\left\{\sup_{t_0 \leq t \leq T} V(\mathbf{x}_t, t) \geq \delta\right\} \leq \frac{1}{\delta} V(\mathbf{x}_{t_0}, t_0) \ \forall \delta > 0, \ \forall T > t_0.$$

Из последнего неравенства, непрерывности $V(\mathbf{x}, t)$ и соотношения $V(\mathbf{0}, t) = 0$ получаем

$$\lim_{\mathbf{x}_0 \to 0} \mathsf{P}\left\{\sup_{t_0 \leq t \leq T} V(\mathbf{x}_t, t) \geq \delta\right\} = 0. \quad (2.49)$$

Далее, предполагая, что при некоторых постоянных p, k_1, k_2, $p > 0$, выполнено $k_1|\mathbf{x}|^p \leq V(\mathbf{x}, t) \leq k_2|\mathbf{x}|^p$, согласно (2.49) получаем, что невозмущенное движение системы $\mathbf{x}_t \equiv \mathbf{0}$ стохастически устойчиво.

Приведем некоторые хорошо известные факты (см., например, [46–48]), касающиеся разных видов стохастической устойчивости.

Теорема 2.1. *Пусть в области $\mathcal{U} \times [0, \infty)$, $\mathcal{U} \subset \Re^n$ включающей в себя множество $\mathbf{x} \equiv \mathbf{0}$, существует непрерывная, положительно определенная функция $V(\mathbf{x}, t) \in \mathcal{C}_2^0(\mathcal{U})$ и пусть $\lim\limits_{\mathbf{x}\to 0} \sup\limits_{t>0} V(\mathbf{x}, t) = 0$, а $LV(\mathbf{x}, t) < 0$ в этой области. Тогда невозмущенное движение $\mathbf{x}_t \equiv 0$ асимптотически стохастически устойчиво.*

Теорема 2.2. *Пусть для всех $\mathbf{x} \in \Re^n$ существует положительно определенная функция $V(\mathbf{x}, t) \in \mathcal{C}_2^0(\Re^n)$, для которой $\lim\limits_{\mathbf{x}\to 0} \sup\limits_{t>0} V(\mathbf{x}, t) = 0$, $\inf\limits_{t>0} V(\mathbf{x}, t) \to \infty$ при $|\mathbf{x}| \to \infty$ и $LV(\mathbf{x}, t) < 0$. Тогда невозмущенное движение $\mathbf{x}_t \equiv 0$ асимптотически стохастически устойчиво в целом.*

Теорема 2.3. *Для экспоненциальной p-устойчивости невозмущенного движения $\mathbf{x}_t \equiv 0$ при $t > 0$ достаточно, чтобы при всех $\mathbf{x} \in \Re^n$ существовала функция $V(\mathbf{x}, t) \in \mathcal{C}_2^0(\Re^n)$, удовлетворяющая при некоторых положительных постоянных k_1, k_2, k_3 двум неравенствам $k_1|\mathbf{x}|^p \leq V(\mathbf{x}, t) \leq k_2|\mathbf{x}|^p$, $LV(\mathbf{x}, t) \leq -k_3|\mathbf{x}|^p$.*

Другой метод, используемый в детерминистской теории устойчивости, заключается в линеаризации дифференциального уравнения в окрестности невозмущенного движения и анализе устойчивости нулевого решения линеаризованного дифференциального уравнения. Известно, что в ряде случаев устойчивость нулевого решения линеаризованной системы влечет за собой устойчивость невозмущенного решения соответствующей нелинейной системы.

Особую роль при анализе устойчивости с помощью этого метода играют ляпуновские экспоненты, или ляпуновские показатели. Оказывается, что такой метод линеаризации может быть обобщен на случай стохастических систем. Ляпуновским экспонентам для стохастических систем посвящен целый ряд работ. В частности, примеры точного вычисления ляпуновских экспонент для стохастических систем можно найти в [50, 51], а численные методы их вычисления — в [86, 87]. Проанализируем указанный метод, опираясь, главным образом, на работу [86].

Рассмотрим стохастическое дифференциальное уравнение Стратоновича

$$d\mathbf{x}_t = \mathbf{a}(\mathbf{x}_t, t)dt + \sum_{k=1}^{m} \mathbf{b}_k(\mathbf{x}_t, t)d^*\mathbf{f}_t^{(k)}, \tag{2.50}$$

где $\mathbf{a}(\mathbf{x},t)$, $\mathbf{b}_k(\mathbf{x},t) : \Re^n \times [0,T] \to \Re^n$; $\mathbf{f}_t \in \Re^m$ — стандартный винеровский процесс с независимыми компонентами $\mathbf{f}_t^{(k)}$; $k = 1,\ldots,m$. Предположим, что $\hat{\mathbf{x}}_t$ — стохастически стационарное решение уравнения (2.50). Линеаризуем уравнение (2.50) в окрестности $\hat{\mathbf{x}}_t$:

$$d\mathbf{z}_t = A_t\mathbf{z}_t dt + \sum_{k=1}^{m} B_t^k \mathbf{z}_t d^*\mathbf{f}_t^{(k)}, \tag{2.51}$$

где $\mathbf{z}_t = \mathbf{x}_t - \hat{\mathbf{x}}_t \in \Re^n$; $A_t, B_t^1, \ldots, B_t^m : [0,T] \times \Omega \to \Re^{n\times n}$ — случайные матрицы, покомпонентно определяемые следующими соотношениями:

$$(A_t)^{(ij)} = \frac{\partial \mathbf{a}^{(i)}}{\partial \mathbf{x}^{(j)}}(\hat{\mathbf{x}}_t,t),\ \left(B_t^k\right)^{(ij)} = \frac{\partial \mathbf{b}_k^{(i)}}{\partial \mathbf{x}^{(j)}}(\hat{\mathbf{x}}_t,t),$$

где $i,j = 1,\ldots,n$; $k = 1,\ldots,m$. Можно показать [86], что с вероятностью 1 существуют n неслучайных ляпуновских экспонент $\lambda_n \le \lambda_{n-1} \le \ldots \le \lambda_1$ и разбиение $\Re^n$ на случайные множества $\Lambda_n(\omega),\ldots,\Lambda_1(\omega)$ такие, что для стартовавших из этих множеств решений уравнения (2.51) пределы

$$\lambda(\mathbf{z}_0,t_0) = \limsup_{t\to\infty} \frac{1}{t-t_0} \ln\left|\mathbf{z}_t^{\mathbf{z}_0,t_0}\right|,$$

где $\mathbf{z}_{t_0} \stackrel{\text{def}}{=} \mathbf{z}_0$, равны $\lambda_n,\ldots,\lambda_1$ соответственно.

Далее можно показать, что стохастическая асимптотическая устойчивость нулевого решения $\mathbf{z}_t \equiv \mathbf{0}$ уравнения (2.51) наступает тогда и только тогда, когда $\lambda_1 < 0$. В [86, 87] предложен метод вычисления λ_1 и получена соответствующая формула в случае $\hat{\mathbf{x}}_t \equiv \mathbf{0}$ и автономной системы, получающейся из (2.50) заменой $\mathbf{a}(\mathbf{x},t)$, $\mathbf{b}_k(\mathbf{x},t)$; $k = 1,\ldots,m$ на $\mathbf{a}(\mathbf{x})$, $\mathbf{b}_k(\mathbf{x})$; $k = 1,\ldots,m$ соответственно. В этих работах также предложен численный метод для вычисления λ_1.

Отметим, что стохастические системы, для которых λ_1 намного больше λ_n, называются *жесткими* [86].

В заключение покажем, как можно решить вопрос о среднеквадратической устойчивости систем линейных стохастических дифференциальных уравнений Ито

$$d\mathbf{x}_t = A(t)\mathbf{x}_t dt + \sum_{k=1}^{m} B_k(t)\mathbf{x}_t d\mathbf{f}_t^{(k)}, \tag{2.52}$$

$$d\mathbf{x}_t = \left(A(t)\mathbf{x}_t + \mathbf{b}(t)\right)dt + \Sigma(t)d\mathbf{f}_t, \tag{2.53}$$

где $A, B_k : [0,T] \to \Re^{n\times n}$; $\mathbf{x}_t \in \Re^n, \mathbf{b} : [0,T] \to \Re^n$; $\Sigma : [0,T] \to \Re^{n\times m}$; $\mathbf{f}_t \in \Re^m$ — стандартный винеровский процесс с независимыми компонентами; $k = 1,\ldots,m$. В главе 11 будут приведены (см. также [4, 86,

159]) следующие уравнения для матрицы $P(t) \stackrel{\text{def}}{=} \mathsf{M}\{\mathbf{x}_t\mathbf{x}_t^{\mathsf{T}}\}$, где $\mathbf{x}_t$ — решение уравнения (2.52) или (2.53):

$$P'(t) = A(t)P(t) + P(t)A^{\mathsf{T}}(t) + \sum_{k=1}^{m} B_k(t)P(t)B_k^{\mathsf{T}}(t), \tag{2.54}$$

$$P'(t) = A(t)P(t)+P(t)A^{\mathsf{T}}(t)+\Sigma(t)\Sigma^{\mathsf{T}}(t)+\mathbf{b}(t)\mathbf{m}_x^{\mathsf{T}}(t)+\mathbf{m}_x(t)\mathbf{b}^{\mathsf{T}}(t), \tag{2.55}$$

где $\mathbf{m}_x(t) \stackrel{\text{def}}{=} \mathsf{M}\{\mathbf{x}_t\}$ и $\mathbf{m}_x'(t) = A(t)\mathbf{m}_x(t) + \mathbf{b}(t)$, а штрих $'$ означает производную по t.

Можно показать, что уравнения (2.54) и (2.55) могут быть приведены соответственно к уравнениям (близкий по структуре алгоритм приведения описан в главе 11 (см. также [4]))

$$\mathbf{p}'(t) = C(t)\mathbf{p}(t), \tag{2.56}$$

$$\mathbf{p}'(t) = D(t)\mathbf{p}(t) + \mathbf{d}(t), \tag{2.57}$$

где $\mathbf{p}(t) \in \Re^{\frac{1}{2}n(n+1)}$ — вектор, состоящий из элементов симметричной матрицы $P(t)$, которые располагаются над (под) главной диагональю, включая главную диагональ; $C(t), D(t)$ — квадратные матрицы; $\mathbf{d}(t) \in \Re^{\frac{1}{2}n(n+1)}$ — столбец, состоящий из элементов симметричной матрицы $\Sigma(t)\Sigma^{\mathsf{T}}(t) + \mathbf{b}(t)\mathbf{m}_x^{\mathsf{T}}(t) + \mathbf{m}_x(t)\mathbf{b}^{\mathsf{T}}(t)$, которые располагаются над (под) главной диагональю, включая главную диагональ; штрих $'$ означает производную по t. О поведении $P(t)$, и, следовательно, о среднеквадратической устойчивости нулевых решений уравнений (2.52), (2.53), можно судить теперь по характеру поведения решений уравнений (2.56) и (2.57), которые могут быть легко найдены.

2.4.4 Оценивание параметров

Рассмотрим вероятностное пространство $(\Omega, \mathcal{F}, \mathsf{P})$ и скалярное стохастическое дифференциальное уравнение Ито вида

$$dx_t = \mu a(x_t)dt + df_t, \tag{2.58}$$

где $x_t \in \Re^1$ — решение уравнения (2.58); $a(x) : \Re^1 \to \Re^1$, $f_t \in \Re^1$ — $\mathcal{F}_t$-измеримый при всех $t \in [0, T]$ стандартный винеровский процесс относительно вероятностной меры P; $\mu \in \Re^1$ — оцениваемый вещественный параметр, $t \in [0, T]$.

Оказывается, если процесс x_t является асимптотически устойчивым эргодическим стационарным решением уравнения (2.58), то, наблюдая за отдельной траекторией процесса x_t и строя определенным

образом на основе x_t оценку $\hat{\mu}(T)$ параметра μ, можно получить, что $\lim\limits_{T\to\infty} \hat{\mu}(T) = \mu$ с вероятностью 1.

Рассмотрим этот подход подробнее (см. также [8, 86]). Оценка максимального правдоподобия $\hat{\mu}(T)$ отыскивается из условия максимума по μ функции правдоподобия $L(\mu, T)$:

$$L(\mu, T) = \frac{d\mathsf{P}_x}{d\mathsf{P}} = \exp\Big(\frac{1}{2}\mu^2 \int\limits_0^T a^2(x_t)dt - \mu \int\limits_0^T a(x_t)dx_t\Big),$$

где $d\mathsf{P}_x/d\mathsf{P}$ — производная Радона–Никодима мер P_x и P, которые соответствуют процессам x_t и f_t. Решая уравнение $dL/d\mu(\mu, T) = 0$ относительно μ, находим, что оценка максимального правдоподобия $\hat{\mu}(T)$ имеет вид

$$\hat{\mu}(T) = \int\limits_0^T a(x_t)dx_t \Big/ \int\limits_0^T a^2(x_t)dt = \mu + \int\limits_0^T a(x_t)df_t \Big/ \int\limits_0^T a^2(x_t)dt.$$

Если для всех T : $\mathsf{M}\left\{\int\limits_0^T a^2(x_t)dt\right\} < \infty$ и если стохастическое дифференциальное уравнение (2.58) имеет стационарное решение с плотностью распределения $p = p(x)$, которая является решением уравнения Фоккера–Планка, то из теоремы 1.9 получаем

$$\lim_{T\to\infty} \frac{1}{T}\int\limits_0^T a(x_t)df_t = 0, \ \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T}\int\limits_0^T a^2(x_t)dt = \int\limits_{-\infty}^{\infty} a^2(x)p(x)dx \text{ с в.1.}$$

Поэтому $\lim\limits_{T\to\infty} \hat{\mu}(T) = \mu$ с вероятностью 1. Кроме того, согласно модификации центральной предельной теоремы $\sqrt{T}\,(\hat{\mu}(T) - \mu) \xrightarrow{d} \mathrm{N}(0, \sigma^2)$ при $T \to \infty$, где $\sigma^2 = 1/\int\limits_{-\infty}^{\infty} a^2(x)p(x)dx$. Используя это, можно определять доверительный интервал для μ и оценивать величину T для этого интервала.

2.5 Вероятностные представления решений задач Дирихле и Коши для уравнений в частных производных параболического типа

Рассмотрим важное применение стохастических дифференциальных уравнений к решению задач Дирихле и Коши для уравнений в

частных производных параболического типа. Значительное число работ (см., например, [52, 53]) посвящено конечно-разностным численным методам решения данных задач, которые не используют сведений из теории вероятностей и достаточно эффективно применяются на практике в случае пространственной переменной $\mathbf{x}$ размерности n при $n \leq 3$. Если же $n > 3$, то детерминированный подход становится малоэффективным из-за резко возрастающих вычислительных затрат [70, 72]. В отличие от детерминированного подхода вероятностный подход, рассматриваемый далее, может быть эффективно использован при $n > 3$ вследствие его малой чувствительности к размерности n пространственной переменной $\mathbf{x}$ [70, 72].

Еще одним существенным преимуществом вероятностного подхода при решении задачи Коши является то, что вероятностное представление решения задачи Коши для уравнений в частных производных параболического типа не предполагает невырожденность матрицы диффузии $B(\mathbf{x}, t)$ (см., например, теоремы 2.5, 2.6).

Среди первых работ, посвященных вероятностным представлениям решений задач Дирихле и Коши для уравнений в частных производных второго порядка отметим [54–58].

2.5.1 Вероятностное представление решения задачи Дирихле

Пусть $(\mathbf{x}_t, \eta, G_t, \mathsf{P}_{\mathbf{x}})$ — канонический диффузионный процесс со значениями в $\Re^n$ и производящим дифференциальным оператором $\mathcal{L}$ (см. разд. 1.1.4.). Пусть также D — ограниченное открытое множество в $\Re^n$, а ∂D — его граница.

Через $\tilde{\tau}_D(\omega)$ обозначим момент первого выхода из D после $+0$, т. е.

$$\tilde{\tau}_D(\omega) = \inf\{t : 0 < t < \eta(\omega),\ \mathbf{x}(t, \omega) \notin D\}.$$

Точка $\mathbf{x}_0 \in \partial D$ называется регулярной, если $\mathsf{P}_{\mathbf{x}_0}\{\tilde{\tau}_D > 0\} = 0$, а граница ∂D множества D — регулярной, если каждая ее точка регулярна.

Рассмотрим следующую задачу Дирихле:

$$\mathcal{L}u(\mathbf{x}) - v(\mathbf{x})u(\mathbf{x}) = -g(\mathbf{x}),\ \mathbf{x} \in D, \tag{2.59}$$

$$\lim_{\mathbf{x} \to \mathbf{x}_0} u(\mathbf{x}) = \varphi(\mathbf{x}_0)\ \forall \mathbf{x}_0 \in \partial D, \tag{2.60}$$

где $v(\mathbf{x})$, $\varphi(\mathbf{x})$, $g(\mathbf{x}) : \Re^n \to \Re^1$ — заданные функции, а $u(\mathbf{x}) : \Re^n \to \Re^1$ — решение задачи (2.59), (2.60).

Следующая теорема [132] содержит вероятностное представление решения задачи (2.59), (2.60).

Теорема 2.4 [132]. *Пусть* $(\mathbf{x}_t, \eta, G_t, \mathsf{P}_{\mathbf{x}})$ *— канонический диффузионный процесс со значениями в* $\Re^n$ *и производящим дифференциальным оператором* $\mathcal{L}$, D *— ограниченное открытое множество в* $\Re^n$ *с регулярной границей* ∂D, τ_D *— момент первого выхода из* D. *Пусть также заданы непрерывная функция* $\varphi(\mathbf{x}) : \Re^n \to \Re^1$ *на границе* ∂D *и функции* $v(\mathbf{x}), g(\mathbf{x}) : \Re^n \to \Re^1$, *удовлетворяющие на* D *условию Гельдера, причем* $v(\mathbf{x}) \geq 0$. *Тогда функция*

$$u(\mathbf{x}) = \mathsf{M}_{\mathbf{x}}\left\{\int\limits_0^{\tau_D} g(\mathbf{x}_t) e^{-\int\limits_0^t v(\mathbf{x}_\theta)d\theta} dt + \varphi(\mathbf{x}_{\tau_D}) e^{-\int\limits_0^{\tau_D} v(\mathbf{x}_\theta)d\theta}\right\}, \ \mathbf{x} \in D,$$

дважды непрерывно дифференцируема на D *и является единственным решением задачи* (2.59), (2.60)*; здесь* $\mathsf{M}_{\mathbf{x}}\{\cdot\}$ *— условное математическое ожидание при условии, что* $\mathbf{x}_0 = \mathbf{x}$.

Предположим, что выполнены условия теоремы 1.6 для функций $\mathbf{a}(\mathbf{x}) : \Re^n \to \Re^n$, $\Sigma(\mathbf{x}) : \Re^n \to \Re^{n\times n}$. Тогда случайный процесс, являющийся решением стохастического дифференциального уравнения Ито

$$d\mathbf{x}_s = \mathbf{a}(\mathbf{x}_s)ds + \Sigma(\mathbf{x}_s)d\mathbf{f}_s, \ \mathbf{x}_0 = \mathbf{x}, \tag{2.61}$$

представляет собой диффузионный процесс с вектором сноса $\mathbf{a}(\mathbf{x})$ и матрицей диффузии $B(\mathbf{x}) = \Sigma(\mathbf{x})\Sigma^{\mathsf{T}}(\mathbf{x})$; здесь $\mathbf{f}_s$ — n-мерный стандартный винеровский процесс с независимыми компонентами.

Таким образом, в условиях теорем 1.6, 2.4 решение задачи (2.59), (2.60) может быть представлено в виде

$$u(\mathbf{x}) = \mathsf{M}_{\mathbf{x}}\left\{\mathbf{z}_{\tau_D} + \varphi(\mathbf{x}_{\tau_D})\mathbf{y}_{\tau_D}\right\}, \ \mathbf{z}_t = \int\limits_0^t g(\mathbf{x}_s)\mathbf{y}_s ds, \ \mathbf{y}_t = e^{-\int\limits_0^t v(\mathbf{x}_\theta)d\theta},$$

где процесс $\mathbf{x}_s$ — решение уравнения (2.61).

Используя формулу Ито, получаем

$$d\mathbf{y}_t = -v(\mathbf{x}_t)\mathbf{y}_t dt, \ \mathbf{y}_0 = 1.$$

В результате решение задачи (2.59), (2.60) сводится к численному интегрированию следующей системы стохастических дифференциальных уравнений Ито:

$$d\begin{bmatrix}\mathbf{x}_s\\ \mathbf{y}_s\\ \mathbf{z}_s\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\mathbf{a}(\mathbf{x}_s)\\ -v(\mathbf{x}_s)\mathbf{y}_s\\ g(\mathbf{x}_s)\mathbf{y}_s\end{bmatrix} ds + \begin{bmatrix}\Sigma(\mathbf{x}_s)\\ O_{1\times n}\\ O_{1\times n}\end{bmatrix} d\mathbf{f}_s, \ \begin{bmatrix}\mathbf{x}_0\\ \mathbf{y}_0\\ \mathbf{z}_0\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\mathbf{x}\\ 1\\ 0\end{bmatrix},$$

где $O_{1\times n}$ — нулевая строка длины n.

В [71] Г.Н. Мильштейном рассмотрена более общая, чем (2.59), (2.60), задача Дирихле и построен алгоритм ее численного решения, основанный на вероятностном представлении решения задачи и слабых численных методах решения стохастических дифференциальных уравнений Ито.

Рассмотрим задачу Дирихле [71]

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \sum_{i=1}^{n} \mathbf{a}^{(i)}(\mathbf{x},t)\frac{\partial u}{\partial \mathbf{x}^{(i)}} + \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{n} B^{(ij)}(\mathbf{x},t)\frac{\partial^2 u}{\partial \mathbf{x}^{(i)}\partial \mathbf{x}^{(j)}} + c(\mathbf{x},t)u + g(\mathbf{x},t) = 0, \tag{2.62}$$

$$u(\mathbf{x},t)|_{\partial Q} = \varphi(\mathbf{x},t),\ (\mathbf{x},t) \in Q, \tag{2.63}$$

где $Q = G \times [t_0, T)$; G — ограниченная область в $\Re^n$, $0 \le t_0 < T \le \infty$, ∂Q — граница Q. Предположим, что матричная функция $B(\mathbf{x},t)$ симметрична и положительно определена. Кроме того, предположим, что заданные функции $\mathbf{a}(\mathbf{x},t) : \Re^n \times [t_0,T) \to \Re^n$, $B(\mathbf{x},t) : \Re^n \times [t_0,T) \to \Re^{n\times n}$, $c(\mathbf{x},t)$, $\varphi(\mathbf{x},t)$, $g(\mathbf{x},t) : \Re^n \times [t_0,T) \to \Re^1$ и граница ∂Q удовлетворяют условиям, обеспечивающим гладкость решения $u(\mathbf{x},t)$ вплоть до границы [12].

Известно (см., например, [71]), что решение задачи (2.62), (2.63) допускает следующее вероятностное представление:

$$u(\mathbf{x},t) = \mathsf{M}_{\mathbf{x}}\left\{\mathbf{z}_{\tau_Q}^{t,\mathbf{x},1,0} + \varphi(\mathbf{x}_{\tau_Q}^{t,\mathbf{x}},\tau_Q)\mathbf{y}_{\tau_Q}^{t,\mathbf{x},1}\right\}, \tag{2.64}$$

где $\left(\mathbf{x}_s^{t,\mathbf{x}}\ \mathbf{y}_s^{t,\mathbf{x},1}\ \mathbf{z}_s^{t,\mathbf{x},1,0}\right)^{\mathsf{T}}$ — решение системы стохастических дифференциальных уравнений Ито

$$d\begin{bmatrix}\mathbf{x}_s\\ \mathbf{y}_s\\ \mathbf{z}_s\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\mathbf{a}(\mathbf{x}_s,s)\\ c(\mathbf{x}_s,s)\mathbf{y}_s\\ g(\mathbf{x}_s,s)\mathbf{y}_s\end{bmatrix} ds + \begin{bmatrix}\Sigma(\mathbf{x}_s,s)\\ O_{1\times n}\\ O_{1\times n}\end{bmatrix} d\mathbf{f}_s,\quad \begin{bmatrix}\mathbf{x}_t\\ \mathbf{y}_t\\ \mathbf{z}_t\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\mathbf{x}\\ 1\\ 0\end{bmatrix}, \tag{2.65}$$

где $s \ge t$, $(\mathbf{x},t) \in Q$; τ_Q — момент первого выхода траектории $(\mathbf{x}_s^{t,\mathbf{x}}, s)$ на границу ∂Q; $B(\mathbf{x},t) = \Sigma(\mathbf{x},t)\Sigma^{\mathsf{T}}(\mathbf{x},t)$; $\mathbf{f}_s$ — n-мерный стандартный винеровский процесс с независимыми компонентами; $O_{1\times n}$ — нулевая строка длины n.

В [71] получены алгоритмы численного интегрирования задачи (2.62), (2.63), основанные на представлении (2.64) и слабых численных методах решения системы стохастических дифференциальных уравнений Ито (2.65). Построенные в [71] алгоритмы имеют первый порядок точности по шагу по времени.

2.5.2 Вероятностные представления решения задачи Коши

Приведем некоторые вероятностные представления решения задачи Коши для дифференциальных уравнений в частных производных второго порядка параболического типа.

Рассмотрим задачу Коши

$$\tilde{\mathcal{L}}u(\mathbf{x},t) = 0, \ \lim_{t\uparrow T} u(\mathbf{x},t) = \varphi(\mathbf{x}), \tag{2.66}$$

где $0 \le t < T$; $\mathbf{x} \in \Re^n$; $\tilde{\mathcal{L}}$ — дифференциальный оператор параболического типа вида

$$\tilde{\mathcal{L}}u(\mathbf{x},t) = \frac{\partial u}{\partial t}(\mathbf{x},t) + \sum_{i=1}^{n} \mathbf{a}^{(i)}(\mathbf{x},t)\frac{\partial u}{\partial \mathbf{x}^{(i)}}(\mathbf{x},t) + \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{n} B^{(ij)}(\mathbf{x},t)\frac{\partial^2 u}{\partial \mathbf{x}^{(i)}\partial \mathbf{x}^{(j)}}(\mathbf{x},t) \tag{2.67}$$

$\left(\sum\limits_{i,j=1}^{n} B^{(ij)}(\mathbf{x},t)\mathbf{z}^{(i)}\mathbf{z}^{(j)} \ge 0 \text{ при всех } \mathbf{z}^{(1)},\ldots,\mathbf{z}^{(n)} \in \Re^1\right)$; $\mathbf{a}(\mathbf{x},t) : \Re^n \times [0,T] \to \Re^n$, $B(\mathbf{x},t) : \Re^n \times [0,T] \to \Re^{n\times n}$, $\varphi(\mathbf{x}) : \Re^n \to \Re^1$ — заданные функции; $u(\mathbf{x},t) : \Re^n \times [0,T] \to \Re^1$ — решение задачи (2.66).

В следующей теореме устанавливается вероятностное представление решения задачи (2.66).

Теорема 2.5 [65]. *Пусть функции* $\mathbf{a}(\mathbf{x},t) : \Re^n \times [0,T] \to \Re^n$, $\Sigma(\mathbf{x},t) : \Re^n \times [0,T] \to \Re^{n\times n}$ *удовлетворяют условиям теоремы* 1.6, *непрерывны и дважды непрерывно дифференцируемы по* $\mathbf{x}$. *Пусть также существуют постоянные* $p, K > 0$ *такие, что*

$$\sum_{i,k=1}^{n}\left|\frac{\partial \mathbf{a}^{(i)}}{\partial \mathbf{x}^{(k)}}(\mathbf{x},t)\right| + \sum_{i,j,k=1}^{n}\left(\left|\frac{\partial^2 \mathbf{a}^{(i)}}{\partial \mathbf{x}^{(j)}\partial \mathbf{x}^{(k)}}(\mathbf{x},t)\right| + \left|\frac{\partial \Sigma^{(ij)}}{\partial \mathbf{x}^{(k)}}(\mathbf{x},t)\right|\right) +$$

$$+ \sum_{i,j,k,l=1}^{n}\left|\frac{\partial^2 \Sigma^{(ij)}}{\partial \mathbf{x}^{(k)}\partial \mathbf{x}^{(l)}}(\mathbf{x},t)\right| \le K(1+|\mathbf{x}|^p).$$

Кроме того, предположим, что $B(\mathbf{x},t) = \Sigma(\mathbf{x},t)\Sigma^{\mathsf{T}}(\mathbf{x},t)$ *и является неотрицательно определенной. Тогда задача Коши* (2.66), *где* $\tilde{\mathcal{L}}$ *— дифференциальный оператор параболического типа вида* (2.67), *имеет единственное решение для любой дважды непрерывно дифференцируемой функции* $\varphi(\mathbf{x})$, *удовлетворяющей условию*

$$|\varphi(\mathbf{x})| + \sum_{i=1}^{n}\left|\frac{\partial \varphi}{\partial \mathbf{x}^{(i)}}(\mathbf{x})\right| + \sum_{i,k=1}^{n}\left|\frac{\partial^2 \varphi}{\partial \mathbf{x}^{(i)}\partial \mathbf{x}^{(k)}}(\mathbf{x})\right| \le K(1+|\mathbf{x}|^p), \ K,p > 0.$$

При этом решение $u(\mathbf{x},t)$ *задачи* (2.66) *может быть представлено в виде*

$$u(\mathbf{x},t) = \mathsf{M}\left\{\varphi(\mathbf{x}_T^{t,\mathbf{x}})\right\},\ 0 \le t < T,\ \mathbf{x} \in \Re^n,$$

где $\mathbf{x}_s^{t,\mathbf{x}}; s \in [t,T]$ *— решение следующего стохастического дифференциального уравнения Ито:*

$$\mathbf{x}_s^{t,\mathbf{x}} = \mathbf{x} + \int\limits_t^s \mathbf{a}(\mathbf{x}_\tau^{t,\mathbf{x}},\tau)d\tau + \int\limits_t^s \Sigma(\mathbf{x}_\tau^{t,\mathbf{x}},\tau)d\mathbf{f}_\tau,$$

$\mathbf{x} \in \Re^n$ *— неслучайный вектор;* $s \in [t,T]$, $\mathbf{f}_\tau$ *— n-мерный стандартный винеровский процесс с независимыми компонентами.*

Пусть $C^l(\Re^n,\Re^1)$ — пространство l раз непрерывно дифференцируемых функций $g(\mathbf{x}) : \Re^n \to \Re^1$, которые вместе со своими частными производными до порядка l включительно возрастают полиномиально (функция $h(\mathbf{x}) : \Re^n \to \Re^1$ возрастает полиномиально, если существуют постоянные $C_h > 0$ и $q_h \in N$, зависящие от h и такие, что $|h(\mathbf{x})| \le C_h(1+|\mathbf{x}|^{2q_h})$ для всех $\mathbf{x} \in \Re^n$).

Приведем формулировку следующей, доказанной в [90], теоремы о вероятностном представлении решения задачи Коши.

Теорема 2.6 [90]. *Пусть выполнены следующие условия:*

1. *Функция* $\varphi(\mathbf{x}) \in C^{2(\gamma+1)}(\Re^n,\Re^1)$ *для некоторого* $\gamma \in N$.

2. *Функции* $\mathbf{a}^{(i)}(\mathbf{x}), \Sigma^{(ij)}(\mathbf{x}) \in C^{2(\gamma+1)}(\Re^n,\Re^1)$; $i = 1,\ldots,n$; $j = 1,\ldots,m$, *причем частные производные этих функций до порядка* l *включительно ограничены.*

Тогда функция $u(\mathbf{x},t) : \Re^n \times [0,T] \to \Re^1$ *вида* $u(\mathbf{x},t) = \mathsf{M}\{\varphi(\xi_T^{t,\mathbf{x}})\}$ *является решением следующей задачи:*

$$\tilde{\mathcal{L}}u(\mathbf{x},t) = 0,\ u(\mathbf{x},T) = \varphi(\mathbf{x}),$$

где функция $\frac{\partial u}{\partial t}(\mathbf{x},t)$ *непрерывна;* $u(\mathbf{x},t) \in C^{2(\gamma+1)}(\Re^n,\Re^1)$ *по переменной* $\mathbf{x}$ *при каждом* $t \in [0,T]$; *диффузионный процесс* $\xi_s^{t,\mathbf{x}}$, $t \le s \le T$, *является решением стохастического дифференциального уравнения Ито*

$$\xi_s^{t,\mathbf{x}} = \mathbf{x} + \int\limits_t^s \mathbf{a}(\xi_\tau^{t,\mathbf{x}})d\tau + \int\limits_t^s \Sigma(\xi_\tau^{t,\mathbf{x}})d\mathbf{f}_\tau;$$

оператор $\tilde{\mathcal{L}}$ *имеет вид* (2.67); *матрица* $B(\mathbf{x}) = \Sigma(\mathbf{x})\Sigma^{\mathsf{T}}(\mathbf{x})$ *неотрицательно определена;* $\mathbf{f}_\tau$ *— m-мерный стандартный винеровский процесс с независимыми компонентами.*

В работе [72] приведены вероятностные представления для более общих, чем (2.66), задач, а также построены алгоритмы численного

интегрирования этих задач, основанные на слабых численных схемах решения систем стохастических дифференциальных уравнений Ито.

Не приводя строгих формулировок, отметим некоторые вероятностные представления более общих задач, чем (2.66).

Рассмотрим решение задачи Коши для линейного параболического уравнения:

$$\tilde{\mathcal{L}}u + c(\mathbf{x},t)u + g(\mathbf{x},t) = 0,\ t_0 \le t < T,\ \mathbf{x} \in \Re^n, \tag{2.68}$$

$$u(\mathbf{x},T) = \varphi(\mathbf{x}), \tag{2.69}$$

где $c(\mathbf{x},t), g(\mathbf{x},t) : \Re^n \times [t_0,T] \to \Re^1$, а остальные обозначения, входящие в (2.68), (2.69), такие же, как в задаче (2.66). Предположим, что выполнены условия существования и единственности решения задачи (2.68), (2.69) [14, 15].

Решение задачи (2.68), (2.69) допускает следующее вероятностное представление [72]:

$$u(\mathbf{x},t) = \mathsf{M}\left\{\mathbf{z}_T^{t,\mathbf{x},1,0} + \varphi(\mathbf{x}_T^{t,\mathbf{x}})\mathbf{y}_T^{t,\mathbf{x},1}\right\},\ t \le T,\ \mathbf{x} \in \Re^n,$$

где $\left(\mathbf{x}_s^{t,\mathbf{x}}\ \mathbf{y}_s^{t,\mathbf{x},1}\ \mathbf{z}_s^{t,\mathbf{x},1,0}\right)^{\mathsf{T}}$; $s \in [t,T]$ — решение системы стохастических дифференциальных уравнений Ито

$$d\begin{bmatrix}\mathbf{x}_s\\ \mathbf{y}_s\\ \mathbf{z}_s\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\mathbf{a}(\mathbf{x}_s,s) - \Sigma(\mathbf{x}_s,s)h(\mathbf{x}_s,s)\\ c(\mathbf{x}_s,s)\mathbf{y}_s\\ g(\mathbf{x}_s,s)\mathbf{y}_s\end{bmatrix}ds + \begin{bmatrix}\Sigma(\mathbf{x}_s,s)\\ h^{\mathsf{T}}(\mathbf{x}_s,s)\mathbf{y}_s\\ O_{1\times n}\end{bmatrix}d\mathbf{f}_s; \tag{2.70}$$

$$[\mathbf{x}_t\ \mathbf{y}_t\ \mathbf{z}_t]^{\mathsf{T}} = [\mathbf{x}\ 1\ 0]^{\mathsf{T}}; \tag{2.71}$$

$\mathbf{f}_s$ — n-мерный стандартный винеровский процесс с независимыми компонентами; $h(\mathbf{x},t) : \Re^n \times [t_0,T] \to \Re^n$; $B(\mathbf{x},t) = \Sigma(\mathbf{x},t)\Sigma^{\mathsf{T}}(\mathbf{x},t)$; $O_{1\times n}$ — нулевая строка длины n. При $h(\mathbf{x},t) \equiv 0$ из (2.70), (2.71) получаем классическое вероятностное представление решения задачи (2.68), (2.69) [132].

Рассмотрим решение задачи Коши для полулинейного параболического уравнения [72]:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \sum_{i=1}^{n}\mathbf{a}^{(i)}(\mathbf{x},t,u)\frac{\partial u}{\partial \mathbf{x}^{(i)}} + \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{n}B^{(ij)}(\mathbf{x},t,u)\frac{\partial^2 u}{\partial \mathbf{x}^{(i)}\partial \mathbf{x}^{(j)}} +$$

$$+g(\mathbf{x},t,u) = 0,\ t_0 \le t < T,\ \mathbf{x} \in \Re^n, \tag{2.72}$$

$$u(\mathbf{x},T) = \varphi(\mathbf{x}), \tag{2.73}$$

где сохранен смысл введенных ранее обозначений, причем предполагаем, что выполнены условия существования и единственности решения задачи (2.72), (2.73) [14, 15].

Известно [72], что решение задачи (2.72), (2.73) допускает следующее вероятностное представление:

$$u(\mathbf{x},t) = \mathsf{M}\left\{\varphi(\mathbf{x}_T^{t,\mathbf{x}}) + \mathbf{z}_T^{t,\mathbf{x},0}\right\},$$

где $\left(\mathbf{x}_s^{t,\mathbf{x}}\ \mathbf{z}_s^{t,\mathbf{x},0}\right)^{\mathsf{T}}$, $s \in [t,T]$, — решение системы стохастических дифференциальных уравнений Ито

$$d\begin{bmatrix}\mathbf{x}_s\\ \mathbf{z}_s\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\mathbf{a}(\mathbf{x}_s,s,u(\mathbf{x}_s,s))\\ \mathbf{g}(\mathbf{x}_s,s,u(\mathbf{x}_s,s))\end{bmatrix} ds + \begin{bmatrix}\Sigma(\mathbf{x}_s,s,u(\mathbf{x}_s,s))\\ O_{1\times n}\end{bmatrix} d\mathbf{f}_s; \tag{2.74}$$

$$[\mathbf{x}_t\ \mathbf{z}_t]^{\mathsf{T}} = [\mathbf{x}\ 0]^{\mathsf{T}}; \tag{2.75}$$

$\mathbf{f}_s$ — n-мерный стандартный винеровский процесс с независимыми компонентами.

В [72] построены алгоритмы численного решения задач (2.68), (2.69) и (2.72), (2.73), основанные на слабых численных схемах различного порядка точности решения систем стохастических дифференциальных уравнений Ито (2.70), (2.71) и (2.74), (2.75) соответственно.

2.6 О малой эффективности применения численных методов для обыкновенных дифференциальных уравнений к стохастическим дифференциальным уравнениям

Поясним на примере численных методов, основанных на разложении Тейлора, почему формальное использование численных методов решения обыкновенных дифференциальных уравнений малоэффективно в отношении стохастических дифференциальных уравнений.

Отметим, что достаточно большой объем численных методов решения обыкновенных дифференциальных уравнений так или иначе использует в своей структуре разложение Тейлора. К этим методам можно отнести методы, основывающиеся непосредственно на отрезках ряда Тейлора на дискретной временной сетке (явные одношаговые методы), конечно-разностные методы (типа Рунге–Кутта), многошаговые методы, в том числе неявные численные методы, построенные с использовании формулы Тейлора.

Рассмотрим скалярное стохастическое дифференциальное уравнение

$$\frac{dx_t}{dt} = a(x_t, t) + b(x_t, t) f_t^{\cdot}, \tag{2.76}$$

где $x_t \in \Re^1$ — решение уравнения (2.76); $a, b : \Re^1 \times [0, T] \to \Re^1$; $f_t^{\cdot}$ — гауссовский белошумный случайный процесс.

Запишем уравнение (2.76) в форме стохастического дифференциального уравнения Ито

$$dx_t = a(x_t, t)dt + b(x_t, t)df_t, \tag{2.77}$$

где $f_t \in \Re^1$ — стандартный винеровский процесс.

Попробуем применить идеологию численных методов решения обыкновенных дифференциальных уравнений к решению стохастических дифференциальных уравнений (2.76) и (2.77). Если бы к случайному процессу x_t, являющемуся решением уравнения (2.76), можно было бы применить формулу Тейлора, то при $s > t$ мы получили бы следующее разложение:

$$x_s = x_t + \frac{dx_t}{dt}(s - t) + \frac{d^2 x_t}{dt^2}\frac{(s - t)^2}{2} + \ldots \tag{2.78}$$

Используя (2.76) и (2.78), получаем

$$x_s = x_t + a(x_t, t)(s-t) + b(x_t, t)(s-t)f_t^{\cdot} + \frac{d}{dt}\left(a(x_t, t) + b(x_t, t)f_t^{\cdot}\right)\frac{(s - t)^2}{2} + \ldots \tag{2.79}$$

Нетрудно видеть, что правая часть (2.79) не определена. Это связано с тем, что белый шум $f_t^{\cdot}$ является не дифференцируемым в каком-либо вероятностном смысле случайным процессом, а в правую часть (2.79) входит величина $\frac{d}{dt}(a(x_t, t) + b(x_t, t)f_t^{\cdot})$. Кроме того, не ясно в каком смысле следует понимать само равенство (2.79).

Применим эту же идеологию к решению уравнения (2.77). При этом для случайных процесов $a(x_t, t)$, $b(x_t, t)$ будем формально использовать такие же правила дифференцирования (они заведомо неверны), как и для неслучайных функций, т. е.

$$da(x_t, t) = \frac{\partial a}{\partial x}(x_t, t)dx_t + \frac{\partial a}{\partial t}(x_t, t)dt, \; db(x_t, t) = \frac{\partial b}{\partial x}(x_t, t)dx_t + \frac{\partial b}{\partial t}(x_t, t)dt. \tag{2.80}$$

Запишем равенства (2.77), (2.80), с учетом (2.77), в интегральной форме:

$$x_s = x_t + \int_t^s a(x_\tau, \tau)d\tau + \int_t^s b(x_\tau, \tau)df_\tau, \tag{2.81}$$

$$a(x_s,s)=a(x_t,t)+\int\limits_t^s\Big(a(x_\tau,\tau)\frac{\partial a}{\partial x}(x_\tau,\tau)+\frac{\partial a}{\partial\tau}(x_\tau,\tau)\Big)d\tau+$$
$$+\int\limits_t^s b(x_\tau,\tau)\frac{\partial a}{\partial x}(x_\tau,\tau)df_\tau, \tag{2.82}$$
$$b(x_s,s)=b(x_t,t)+\int\limits_t^s\Big(a(x_\tau,\tau)\frac{\partial b}{\partial x}(x_\tau,\tau)+\frac{\partial b}{\partial\tau}(x_\tau,\tau)\Big)d\tau+$$
$$+\int\limits_t^s b(x_\tau,\tau)\frac{\partial b}{\partial x}(x_\tau,\tau)df_\tau, \tag{2.83}$$

где $s>t$. Применим к интеграндам в правых частях (2.82), (2.83) формулу, аналогичную (2.82), и подставим полученные равенства в (2.82), (2.83). Подставляя преобразованные равенства (2.82), (2.83) в (2.81), приходим к разложению

$$x_s=x_t+a(x_t,t)(s-t)+b(x_t,t)\int\limits_t^s df_\tau+b(x_t,t)\frac{\partial b}{\partial x}(x_t,t)\int\limits_t^s\int\limits_t^\tau df_{\tau_1}df_\tau+$$
$$+b(x_t,t)\frac{\partial a}{\partial x}(x_t,t)\int\limits_t^s\int\limits_t^\tau df_{\tau_1}d\tau+\Big(a(x_t,t)\frac{\partial b}{\partial x}(x_t,t)+\frac{\partial b(x_t,t)}{\partial t}\Big)\int\limits_t^s\int\limits_t^\tau d\tau_1df_\tau+$$
$$+b(x_t,t)\Big(\Big(\frac{\partial b}{\partial x}(x_t,t)\Big)^2+b(x_t,t)\frac{\partial^2 b}{\partial x^2}(x_t,t)\Big)\int\limits_t^s\int\limits_t^\tau\int\limits_t^{\tau_1}df_{\tau_2}df_{\tau_1}df_\tau+O\left((s-t)^2\right). \tag{2.84}$$

Поясним, как понимается здесь обозначение $O((s-t)^\gamma)$, $\gamma>0$. Каждое слагаемое в правой части (2.84) (не учитывая $O((s-t)^2)$) можно рассматривать как повторный стохастический интеграл, интеграндом которого является значение некоторой случайной функции в момент времени t. Остаточный член $O((s-t)^2)$ представляет собой сумму нескольких повторных стохастических интегралов указанного типа и повторных стохастических интегралов с интеграндами, являющимися случайными функциями переменной θ, $t\le\theta\le s$. Каждому из этих повторных стохастических интегралов можно поставить в соответствие число $\gamma=\sum\limits_{i=1}^k r_i$, где k — кратность повторного интеграла; $r_i=1$, если i-й интеграл в повторном интеграле берется по времени, и $r_i=\frac{1}{2}$, если этот интеграл берется по винеровскому процессу. Далее полагаем, что рассмотренный повторный стохастический интеграл есть величина порядка γ, и обозначаем это через $O((s-t)^\gamma)$, где число γ получено указанным способом.

В случае если некоторая величина представляет собой сумму нескольких повторных стохастических интегралов, то за ее порядок принимаем наименьший из порядков повторных стохастических интегралов, входящих в рассматриваемую величину.

Отметим, что значительная часть рассуждений, приводимых в данном разделе, является нестрогой. Однако цель этого раздела заключается не в получении строгих выводов, а в растолковании упрощенно, на интуитивном уровне, того факта, что применение к стохастическим дифференциальным уравнениям численных подходов, используемых обычно для обыкновенных дифференциальных уравнений, не эффективно.

Поскольку для случайных процессов $a(x_t,t)$, $b(x_t,t)$ при определенных условиях справедливы отличные от (2.80) правила дифференцирования (см. формулу Ито), то разложение решения x_t уравнения (2.77) в окрестности момента времени t имеет вид, отличный от (2.84). Покажем это.

По формуле Ито с вероятностью 1 получаем

$$a(x_s,s)=a(x_t,t)+\int\limits_t^s\Bigl(\frac{\partial a}{\partial\tau}(x_\tau,\tau)+a(x_\tau,\tau)\frac{\partial a}{\partial x}(x_\tau,\tau)+$$

$$+\frac{1}{2}b^2(x_\tau,\tau)\frac{\partial^2 a}{\partial x^2}(x_\tau,\tau)\Bigr)d\tau+\int\limits_t^s b(x_\tau,\tau)\frac{\partial a}{\partial x}(x_\tau,\tau)df_\tau, \qquad (2.85)$$

$$b(x_s,s)=b(x_t,t)+\int\limits_t^s\Bigl(\frac{\partial b}{\partial\tau}(x_\tau,\tau)+a(x_\tau,\tau)\frac{\partial b}{\partial x}(x_\tau,\tau)+$$

$$+\frac{1}{2}b^2(x_\tau,\tau)\frac{\partial^2 b}{\partial x^2}(x_\tau,\tau)\Bigr)d\tau+\int\limits_t^s b(x_\tau,\tau)\frac{\partial b}{\partial x}(x_\tau,\tau)df_\tau. \qquad (2.86)$$

Применим к интеграндам в (2.85), (2.86) формулу Ито и подставим полученные равенства в (2.85), (2.86). После этого, подставляя преобразованные равенства (2.85), (2.86) в (2.81), с вероятностью 1 приходим к разложению

$$x_s=x_t+a(x_t,t)(s-t)+b(x_t,t)\int\limits_t^s df_\tau+$$

$$+b(x_t,t)\frac{\partial b}{\partial x}(x_t,t)\int\limits_t^s\int\limits_t^\tau df_{\tau_1}df_\tau+b(x_t,t)\frac{\partial a}{\partial x}(x_t,t)\int\limits_t^s\int\limits_t^\tau df_{\tau_1}d\tau+$$

$$+\left(\frac{\partial b}{\partial t}(x_t,t)+a(x_t,t)\frac{\partial b}{\partial x}(x_t,t)+\frac{1}{2}b^2(x_t,t)\frac{\partial^2 b}{\partial x^2}(x_t,t)\right)\int\limits_t^s\int\limits_t^\tau d\tau_1 df_\tau+$$

$$+b(x_t,t)\left(\left(\frac{\partial b}{\partial x}(x_t,t)\right)^2+b(x_t,t)\frac{\partial^2 b}{\partial x^2}(x_t,t)\right)+\int\limits_t^s\int\limits_t^\tau\int\limits_t^{\tau_1} df_{\tau_2}df_{\tau_1}df_\tau+$$

$$+O\left((s-t)^2\right). \qquad (2.87)$$

Сопоставляя разложения (2.84) и (2.87), видим, что в правой части (2.84) отсутствует слагаемое $\frac{1}{2}b^2(x_t,t)\frac{\partial^2 b}{\partial x^2}(x_t,t)\int\limits_t^s\int\limits_t^\tau d\tau_1 df_\tau$, которое входит в правую часть (2.87). Это слагаемое имеет порядок $\frac{3}{2}$ (здесь порядок определяется как и ранее).

Таким образом, приведенные рассуждения свидетельствуют о том, что формальное применение правил дифференцирования неслучайных функций к случайным процессам при получении разложения решения стохастического дифференциального уравнения Ито в окрестности момента времени t приводит либо к неопределенности, либо к неверному результату. При этом ошибка разложения во втором случае проявляется уже в членах порядка $\frac{3}{2}$ (исключение составляет случай, когда $\frac{\partial^2 b}{\partial x^2}(x,t)\equiv 0$). Отсюда, в частности, следует, что ошибка на конце промежутка интегрирования для сильных численных методов (определение сильного численного метода и его ошибки см. в главе 7) решения стохастических дифференциальных уравнений Ито, построенных на основе детерминированного, а не стохастического разложения Тейлора, не превосходит величины $K\sqrt{\Delta}$, где Δ — шаг интегрирования численной схемы, а K — постоянная, не зависящая от Δ.

В главе 7 будет показано, что такая ошибка на конце промежутка интегрирования характерна для сильного метода Эйлера — наиболее грубого из сильных численных методов решения стохастических дифференциальных уравнений Ито. Более точные сильные численные методы решения стохастических дифференциальных уравнений Ито, рассмотренные в главах 7–9 и построенные на основе стохастических, а не детерминированных разложений Тейлора, имеют ошибки на конце промежутка интегрирования, не превосходящие величины $K_1\Delta^\gamma$, где $\gamma=1.0,1.5,\ldots$, а K_1 — постоянная, которая не зависит от Δ.

Сходные рассуждения позволяют выявить, что конструирование слабых численных методов решения стохастических дифференциальных уравнений Ито на основе детерминированного разложения Тейлора также малоэффективно (определение слабого численного метода см. в главе 10).

Часть II

Теоретические результаты, положенные в основу построения численных методов

Глава 3

Некоторые свойства стохастических интегралов

В данной главе установлен класс повторных стохастических интегралов Ито, для которого с вероятностью 1 справедливы формулы замены порядка интегрирования, согласующиеся с правилами классического интегрального исчисления. Доказана теорема о замене порядка интегрирования для класса повторных стохастических интегралов Ито [104]. Рассмотрен ряд следствий и примеров применения этой теоремы. Данные результаты обобщены на случай повторных стохастических интегралов по D-мартингалу [116]. Получена формула, связывающая повторные стохастические интегралы Стратоновича и Ито произвольной фиксированной кратности. Выведено два семейства аналитических формул для вычисления стохастических интегралов по процессам Ито достаточно общего вида.

3.1 Теорема о замене порядка интегрирования в повторных стохастических интегралах Ито

Ниже проведена довольно кропотливая работа, связанная с теоремами о замене порядка интегрирования в повторных стохастических интегралах Ито. Однако, может возникнуть естественный вопрос о практической пользе данной теории, поскольку существенная часть ее выводов непосредственно следует из формулы Ито.

Нетрудно видеть, что для вывода различных соотношений для повторных стохастических интегралов (см., например, разд. 3.1.3) с помощью формулы Ито прежде всего эти соотношения надо угадать, после чего ввести соответствующие процессы Ито и провести затем обоснование по формуле Ито. Ясно, что это требует определенных умственных затрат и далеко не всегда тривиально.

С другой стороны технология замены порядка интегрирования, введенная в настоящей главе, формально согласуется с подобной технологией для интегралов Римана, хотя относится к другим объектам — интегралам Ито, и позволяет естественным привычным (как с интегралами Римана) образом проводить преобразования с повторными стохастическими интегралами и получать различные соотношения для них.

Таким образом, для преобразований специфического класса процессов Ито, коими являются повторные стохастические интегралы Ито, более естественно и просто использовать теоремы о замене порядка интегрирования, чем формулу Ито. Многочисленные примеры применения данных теорем присутствуют в доказательствах различных утверждений из глав 4–6 и наглядно иллюстрируют сказанное.

Пусть заданы фиксированное вероятностное пространство $(\Omega, \mathcal{F}, \mathsf{P})$ и неубывающая совокупность σ-алгебр $\{\mathcal{F}_\tau,\ \tau \in [0,T]\}$, определенная на этом пространстве. Рассмотрим винеровский процесс f_τ, который $\mathcal{F}_\tau$-измерим при всех $\tau \in [0,T]$.

Введем класс $\mathcal{S}_2([0,T])$ функций $\xi:\ [0,T] \times \Omega \to \Re^1$, которые принадлежат классу $\mathcal{M}_2([0,T])$ (определение этого класса дано в главе 1) и являются среднеквадратически непрерывными на промежутке $[0,T]$.

В главе 1 дано определение стохастического интеграла Ито и приведены достаточные условия его существования, в частности, в среднеквадратическом смысле (см. теорему 1.5). По теореме 1.5 стохастический интеграл Ито существует в среднеквадратическом смысле, если интегранд $\xi_t \in \mathcal{M}_2([0,T])$, т. е., вообще говоря, не является среднеквадратически непрерывным на промежутке $[0,T]$. В данной главе будут рассмотрены теоремы о замене порядка интегрирования для специального класса повторных стохастических интегралов Ито, при этом условие среднеквадратической непрерывности интегранда во "внутреннем" стохастическом интеграле окажется существенным.

Введем следующий класс повторных стохастических интегралов:

$$J[\phi, \psi^{(k)}]_{T,t} = \int\limits_t^T \psi_1(t_1) \ldots \int\limits_t^{t_{k-1}} \psi_k(t_k) \int\limits_t^{t_k} \phi_\tau dw_\tau^{(k+1)} dw_{t_k}^{(k)} \ldots dw_{t_1}^{(1)},$$

где $\phi_\tau \in \mathcal{S}_2([t,T])$; $\psi_i(\tau)$ $(i = 1, \ldots, k)$ — непрерывные на промежутке $[t,T]$ функции; здесь и далее $w_\tau^{(l)} = f_\tau$ либо $w_\tau^{(l)} = \tau$ при $\tau \in [t,T]$; $l = 1, \ldots, k+1$; $\psi^{(k)} \stackrel{\text{def}}{=} (\psi_1, \ldots, \psi_k)$, $\psi^{(1)} \stackrel{\text{def}}{=} \psi_1$. В дальнейшем стохастические интегралы $J[\phi, \psi^{(k)}]_{T,t}$ будем называть повторными стохастическими интегралами Ито.

Хорошо известно, что для повторного интеграла Римана при определенных условиях справедлива формула замены порядка интегрирования. В частности, если функции $f(x)$ и $g(x)$ непрерывны на промежутке $[a,b]$, то

$$\int_a^b f(x)\int_a^x g(y)dydx = \int_a^b g(y)\int_y^b f(x)dxdy. \tag{3.1}$$

Если бы стохастическому интегралу Ито $J[\phi,\psi_1]_{T,t}$ соответствовала формула замены порядка интегрирования, аналогичная (3.1), то мы имели бы

$$J[\phi,\psi_1]_{T,t} = \int_t^T \phi_\tau \int_\tau^T \psi_1(s)\ dw_s^{(1)} dw_\tau^{(2)}. \tag{3.2}$$

Если, кроме того, в (3.2) $w_s^{(1)}, w_s^{(2)} = f_s$ при $s \in [t,T]$, то случайный процесс $\eta_\tau = \phi_\tau \int_\tau^T \psi_1(\tau)dw_\tau^{(1)}$ не принадлежит классу $\mathcal{M}_2([t,T])$, и, следовательно, для стохастического интеграла Ито $\int_t^T \eta_\tau dw_\tau^{(2)}$ в правой части (3.2) не выполняются условия его существования. В то же время справедлива формула, известная как лемма Ито:

$$\int_t^T df_s \int_t^T ds = \int_t^T (s-t)df_s + \int_t^T (f_s - f_t)ds \text{ с в.1},$$

которую можно получить, например, используя формулу Ито, но ее можно рассматривать и как следствие замены порядка интегрирования. Действительно, можно показать, что

$$\int_t^T (f_s - f_t)ds = \int_t^T \int_t^s df_\tau ds = \int_t^T \int_\tau^T dsdf_\tau \text{ с в.1}.$$

Тогда

$$\int_t^T (s-t)df_s + \int_t^T (f_s - f_t)ds = \int_t^T \int_t^\tau dsdf_\tau + \int_t^T \int_\tau^T dsdf_\tau = \int_t^T df_s \int_t^T ds \text{ с в.1}.$$

Цель данного раздела установить строгий математический смысл формулы (3.2), а также ее аналога, соответствующего повторному стохастическому интегралу Ито $J[\phi,\psi^{(k)}]_{T,t}$, $k \geq 2$. При этом будем использовать более общее, чем (1.23), определение стохастического интеграла Ито.

В работе [10] Р.Л. Стратонович ввел определение так называемого смешанного стохастического интеграла для определенного класса интегрируемых процессов. Взяв за основу это определение, рассмотрим следующую конструкцию стохастического интеграла:

$$\underset{N\to\infty}{\text{l.i.m.}} \sum_{j=0}^{N-1} \phi_{\tau_j}\left(f_{\tau_{j+1}} - f_{\tau_j}\right)\theta_{\tau_{j+1}} \stackrel{\text{def}}{=} \int\limits_t^T \phi_\tau df_\tau \theta_\tau, \tag{3.3}$$

где $\phi_\tau, \theta_\tau \in \mathcal{S}_2([t,T])$; здесь и далее $\{\tau_j\}_{j=0}^N$ — разбиение промежутка $[t,T]$, для которого $t = \tau_0 < \ldots < \tau_N = T$, $\Delta_N = \max\limits_{0\le j\le N-1} |\tau_{j+1} - \tau_j| \to 0$ при $N \to \infty$.

В дальнейшем будет доказано существование интегралов вида (3.3) для $\phi_\tau \in \mathcal{S}_2([t,T])$ и θ_τ из несколько более узкого класса процессов, чем $\mathcal{S}_2([t,T])$. Кроме того, интеграл вида (3.3) будет использоваться для формулирования и доказательства теоремы о замене порядка интегрирования в повторных стохастических интегралах Ито $J[\phi,\psi^{(k)}]_{T,t}$, $k \ge 1$.

Рассмотрим некоторые справедливые с вероятностью 1 и достаточно очевидные свойства стохастических интегралов, определенных формулой (3.3):

1. $\int\limits_t^T \phi_\tau df_\tau g(\tau) = \int\limits_t^T \phi_\tau g(\tau) df_\tau$, где $g(\tau)$ — непрерывная на промежутке $[t,T]$ функция.

2. $\int\limits_t^T (\alpha\phi_\tau + \beta\psi_\tau)\, df_\tau\theta_\tau = \alpha\int\limits_t^T \phi_\tau df_\tau\theta_\tau + \beta\int\limits_t^T \psi_\tau df_\tau\theta_\tau$.

3. $\int\limits_t^T \phi_\tau df_\tau\,(\alpha\theta_\tau + \beta\psi_\tau) = \alpha\int\limits_t^T \phi_\tau df_\tau\theta_\tau + \beta\int\limits_t^T \phi_\tau df_\tau\psi_\tau$,

где $\alpha,\ \beta \in \Re^1$.

При этом будем предполагать, что случайные процессы ϕ_τ, θ_τ и ψ_τ таковы, что все интегралы, входящие в перечисленные свойства, существуют.

3.1.1 Формулировка и доказательство

Определим стохастические интегралы $\hat{I}[\psi^{(k)}]_{T,s}$, $k \ge 1$, вида

$$\hat{I}[\psi^{(k)}]_{T,s} = \int\limits_s^T \psi_k(t_k)dw_{t_k}^{(k)} \ldots \int\limits_{t_2}^T \psi_1(t_1)dw_{t_1}^{(1)}$$

в соответствии с определением (3.3) следующим рекуррентным соотношением:

$$\hat{I}[\psi^{(k)}]_{T,t} \stackrel{\text{def}}{=} \underset{N\to\infty}{\text{l.i.m.}} \sum_{l=0}^{N-1} \psi_k(\tau_l)\Delta w_{\tau_l}^{(k)} \hat{I}[\psi^{(k-1)}]_{T,\tau_{l+1}}, \tag{3.4}$$

где $k \geq 1$; $\hat{I}[\psi^{(0)}]_{T,s} \stackrel{\text{def}}{=} 1$; $[s,T] \subseteq [t,T]$; здесь и далее $\Delta w_{\tau_l}^{(i)} = w_{\tau_{l+1}}^{(i)} - w_{\tau_l}^{(i)}$; $i = 1,\ldots,k+1$; $l = 0,\ 1,\ldots,N-1$. Затем определим повторный стохастический интеграл $\hat{J}[\phi,\psi^{(k)}]_{T,t}$, $k \geq 1$:

$$\hat{J}[\phi,\psi^{(k)}]_{T,t} = \int\limits_t^T \phi_s dw_s^{(k+1)} \hat{I}[\psi^{(k)}]_{T,s}$$

также в соответствии с определением (3.3):

$$\hat{J}[\phi,\psi^{(k)}]_{T,t} \stackrel{\text{def}}{=} \underset{N\to\infty}{\text{l.i.m.}} \sum_{l=0}^{N-1} \phi_{\tau_l}\Delta w_{\tau_l}^{(k+1)} \hat{I}[\psi^{(k)}]_{T,\tau_{l+1}}.$$

Сформулируем теорему о замене порядка интегрирования в повторных стохастических интегралах Ито.

Теорема 3.1. *Пусть $\phi_\tau \in \mathcal{S}_2([t,T])$ и $\psi_l(\tau)$; $l = 1,\ldots,k$ — непрерывные на промежутке $[t,T]$ неслучайные функции. Тогда существует стохастический интеграл $\hat{J}[\phi,\psi^{(k)}]_{T,t}$ и с вероятностью* 1 $J[\phi,\psi^{(k)}]_{T,t} = \hat{J}[\phi,\psi^{(k)}]_{T,t}$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Докажем сначала теорему при $k = 1$. Имеем

$$J[\phi,\psi_1]_{T,t} \stackrel{\text{def}}{=} \underset{N\to\infty}{\text{l.i.m.}} \sum_{l=0}^{N-1} \psi_1(\tau_l)\Delta w_{\tau_l}^{(1)} \int\limits_t^{\tau_l} \phi_\tau dw_\tau^{(2)} =$$

$$= \underset{N\to\infty}{\text{l.i.m.}} \sum_{l=0}^{N-1} \psi_1(\tau_l)\Delta w_{\tau_l}^{(1)} \sum_{j=0}^{l-1} \int\limits_{\tau_j}^{\tau_{j+1}} \phi_\tau dw_\tau^{(2)}, \tag{3.5}$$

$$\hat{J}[\phi,\psi_1]_{T,t} \stackrel{\text{def}}{=} \underset{N\to\infty}{\text{l.i.m.}} \sum_{j=0}^{N-1} \phi_{\tau_j}\Delta w_{\tau_j}^{(2)} \int\limits_{\tau_{j+1}}^{T} \psi_1(s) dw_s^{(1)} =$$

$$= \underset{N\to\infty}{\text{l.i.m.}} \sum_{j=0}^{N-1} \phi_{\tau_j}\Delta w_{\tau_j}^{(2)} \sum_{l=j+1}^{N-1} \int\limits_{\tau_l}^{\tau_{l+1}} \psi_1(s) dw_s^{(1)} =$$

$$= \underset{N\to\infty}{\text{l.i.m.}} \sum_{l=0}^{N-1} \int\limits_{\tau_l}^{\tau_{l+1}} \psi_1(s) dw_s^{(1)} \sum_{j=0}^{l-1} \phi_{\tau_j}\Delta w_{\tau_j}^{(2)}. \tag{3.6}$$

Очевидно, что если разность ε_N допредельных выражений в правых частях (3.5) и (3.6) стремится в среднеквадратическом смысле к нулю при $N \to \infty$, то стохастический интеграл $\hat{J}[\phi, \psi_1]_{T,t}$ существует и $J[\phi, \psi_1]_{T,t} = \hat{J}[\phi, \psi_1]_{T,t}$ с вероятностью 1. Разность ε_N представима в виде $\varepsilon_N = \tilde{\varepsilon}_N + \hat{\varepsilon}_N$, где

$$\tilde{\varepsilon}_N = \sum_{l=0}^{N-1} \psi_1(\tau_l) \Delta w_{\tau_l}^{(1)} \sum_{j=0}^{l-1} \int\limits_{\tau_j}^{\tau_{j+1}} \left(\phi_\tau - \phi_{\tau_j}\right) dw_\tau^{(2)};$$

$$\hat{\varepsilon}_N = \sum_{l=0}^{N-1} \int\limits_{\tau_l}^{\tau_{l+1}} \left(\psi_1(\tau_l) - \psi_1(s)\right) dw_s^{(1)} \sum_{j=0}^{l-1} \phi_{\tau_j} \Delta w_{\tau_j}^{(2)}.$$

Покажем, что l.i.m.$\tilde{\varepsilon}_N = 0$ при $N \to \infty$. Для этого рассмотрим четыре случая:

1. $w_\tau^{(2)} = f_\tau,\ \Delta w_{\tau_l}^{(1)} = \Delta f_{\tau_l}$; 2. $w_\tau^{(2)} = \tau,\ \Delta w_{\tau_l}^{(1)} = \Delta f_{\tau_l}$;
3. $w_\tau^{(2)} = f_\tau,\ \Delta w_{\tau_l}^{(1)} = \Delta \tau_l$; 4. $w_\tau^{(2)} = \tau,\ \Delta w_{\tau_l}^{(1)} = \Delta \tau_l$.

Для случая 1, используя свойства $B2$ и $B3$ (см. главу 1) стохастического интеграла Ито, среднеквадратическую непрерывность (а как следствие равномерную среднеквадратическую непрерывность) процесса ϕ_τ на замкнутом отрезке $[t, T]$, получаем

$$\mathsf{M}\left\{|\tilde{\varepsilon}_N|^2\right\} = \sum_{k=0}^{N-1} \psi_1^2(\tau_k) \Delta \tau_k \sum_{j=0}^{k-1} \int\limits_{\tau_j}^{\tau_{j+1}} \mathsf{M}\left\{\left|\phi_\tau - \phi_{\tau_j}\right|^2\right\} d\tau <$$

$$< C^2 \varepsilon \sum_{k=0}^{N-1} \Delta \tau_k \sum_{j=0}^{k-1} \Delta \tau_j < C^2 \varepsilon \frac{(T-t)^2}{2},$$

т.е. $\mathsf{M}\left\{|\tilde{\varepsilon}_N|^2\right\}$ является бесконечно малой при $N \to \infty$. Здесь $\Delta \tau_j < \delta$; $j = 0,\ 1, \ldots, N-1$ ($\delta > 0$ найдено по произвольному $\varepsilon > 0$ и не зависит от τ); $|\psi_1(\tau)| < C$.

Рассмотрим случай 2. Используя неравенство Минковского, свойство $C2$ стохастического интеграла (см. главу 1) и равномерную среднеквадратическую непрерывность процесса ϕ_τ, имеем

$$\mathsf{M}\left\{|\tilde{\varepsilon}_N|^2\right\} = \sum_{k=0}^{N-1} \psi_1^2(\tau_k) \Delta \tau_k \mathsf{M}\left\{\left(\sum_{j=0}^{k-1} \int\limits_{\tau_j}^{\tau_{j+1}} (\phi_\tau - \phi_{\tau_j}) d\tau\right)^2\right\} \leq$$

$$\leq \sum_{k=0}^{N-1} \psi_1^2(\tau_k) \Delta \tau_k \left(\sum_{j=0}^{k-1} \left(\mathsf{M}\left\{\left(\int\limits_{\tau_j}^{\tau_{j+1}} (\phi_\tau - \phi_{\tau_j}) d\tau\right)^2\right\}\right)^{\frac{1}{2}}\right)^2 <$$

$$< C^2\varepsilon \sum_{k=0}^{N-1} \Delta\tau_k \Big(\sum_{j=0}^{k-1} \Delta\tau_j\Big)^2 < C^2\varepsilon \frac{(T-t)^3}{3},$$

т.е. $\mathsf{M}\left\{|\tilde{\varepsilon}_N|^2\right\}$ является бесконечно малой при $N \to \infty$. Здесь $\Delta\tau_j < \delta$; $j = 0,\ 1, \ldots, N-1$ ($\delta > 0$ найдено по произвольному $\varepsilon > 0$ и не зависит от τ); $|\psi_1(\tau)| < C$.

В случае 3, используя неравенство Минковского, свойства $B2$ и $B3$ стохастического интеграла Ито и равномерную среднеквадратическую непрерывность процесса ϕ_τ, находим

$$\mathsf{M}\left\{|\tilde{\varepsilon}_N|^2\right\} \le \Big(\sum_{k=0}^{N-1} |\psi_1(\tau_k)|\Delta\tau_k \Big(\mathsf{M}\Big\{\Big(\sum_{j=0}^{k-1} \int\limits_{\tau_j}^{\tau_{j+1}} (\phi_\tau - \phi_{\tau_j}) df_\tau\Big)^2\Big\}\Big)^{\frac{1}{2}}\Big)^2 =$$

$$= \Big(\sum_{k=0}^{N-1} |\psi_1(\tau_k)|\Delta\tau_k \Big(\sum_{j=0}^{k-1} \int\limits_{\tau_j}^{\tau_{j+1}} \mathsf{M}\left\{|\phi_\tau - \phi_{\tau_j}|^2\right\} d\tau\Big)^{\frac{1}{2}}\Big)^2 <$$

$$< C^2\varepsilon \Big(\sum_{k=0}^{N-1} \Delta\tau_k \Big(\sum_{j=0}^{k-1} \Delta\tau_j\Big)^{\frac{1}{2}}\Big)^2 < C^2\varepsilon \frac{4(T-t)^3}{9},$$

т.е. $\mathsf{M}\left\{|\tilde{\varepsilon}_N|^2\right\}$ является бесконечно малой при $N \to \infty$. Здесь $\Delta\tau_j < \delta$; $j = 0,\ 1, \ldots, N-1$ ($\delta > 0$ найдено по произвольному $\varepsilon > 0$ и не зависит от τ); $|\psi_1(\tau)| < C$.

Наконец, для случая 4, используя неравенство Минковского, свойство $C2$ стохастического интеграла и равномерную среднеквадратическую непрерывность процесса ϕ_τ, имеем

$$\mathsf{M}\left\{|\tilde{\varepsilon}_N|^2\right\} \le \Big(\sum_{k=0}^{N-1}\sum_{j=0}^{k-1} |\psi_1(\tau_k)|\Delta\tau_k \Big(\mathsf{M}\Big\{\Big(\int\limits_{\tau_j}^{\tau_{j+1}} (\phi_\tau - \phi_{\tau_j}) d\tau\Big)^2\Big\}\Big)^{\frac{1}{2}}\Big)^2 <$$

$$< C^2\varepsilon \Big(\sum_{k=0}^{N-1} \Delta\tau_k \sum_{j=0}^{k-1} \Delta\tau_j\Big)^2 < C^2\varepsilon \frac{(T-t)^4}{4},$$

т.е. $\mathsf{M}\left\{|\tilde{\varepsilon}_N|^2\right\}$ является бесконечно малой при $N \to \infty$. Здесь $\Delta\tau_j < \delta$; $j = 0,\ 1, \ldots, N-1$ ($\delta > 0$ найдено по произвольному $\varepsilon > 0$ и не зависит от τ); $|\psi_1(\tau)| < C$.

Таким образом, мы доказали, что $\mathrm{l.i.m.}\tilde{\varepsilon}_N = 0$ при $N \to \infty$. Рассуждая аналогично, с привлечением понятия равномерной непрерывности функции $\psi_1(\tau)$ на замкнутом отрезке $[t, T]$, можно показать, что $\mathrm{l.i.m.}\hat{\varepsilon}_N = 0$ при $N \to \infty$. Поэтому $\mathrm{l.i.m.}\varepsilon_N = 0$ при $N \to \infty$. Теорема доказана для случая $k = 1$.

З а м е ч а н и е 3.1. *При доказательстве теоремы мы использовали тот факт, что если случайный процесс ϕ_t среднеквадратически непрерывен на промежутке $[t,T]$, то он равномерно среднеквадратически непрерывен на этом промежутке, т. е. $\forall\ \varepsilon > 0\ \exists\ \delta(\varepsilon) > 0$ такое, что $\forall\ t_1, t_2 \in [t,T]$ и удовлетворяющих условию $|t_1 - t_2| < \delta$ выполняется неравенство $\mathsf{M}\{|\phi_{t_1} - \phi_{t_2}|^2\} < \varepsilon$ (здесь δ не зависит от t_1 и t_2).*

Действительно, пусть ϕ_t среднеквадратически непрерывен на промежутке $[t,T]$, но не является равномерно среднеквадратически непрерывным на этом промежутке. Тогда для некоторого $\varepsilon > 0$ и $\forall\ \delta > 0\ \exists\ t_1, t_2 \in [t,T]$ и такие, что $|t_1 - t_2| < \delta$, но $\mathsf{M}\{|\phi_{t_1} - \phi_{t_2}|^2\} \geq \varepsilon$. Поэтому для $\delta = \delta_n = \frac{1}{n}$, $n = 1, 2, \ldots$, $\exists\ t_1^{(n)}, t_2^{(n)} \in [t,T]$ и такие, что $|t_1^{(n)} - t_2^{(n)}| < \frac{1}{n}$, но $\mathsf{M}\{|\phi_{t_1^{(n)}} - \phi_{t_2^{(n)}}|^2\} \geq \varepsilon$.

Последовательность $t_1^{(n)}$; $n = 1, 2, \ldots$ ограничена, следовательно, по теореме Больцано–Вейерштрасса из нее можно выделить сходящуюся к некоторому числу $\tilde{t}$ (нетрудно показать, что $\tilde{t} \in [t,T]$) подпоследовательность $t_1^{(k_n)}$; $n = 1, 2, \ldots$. Аналогично этому и в силу неравенства $|t_1^{(n)} - t_2^{(n)}| < \frac{1}{n}$ имеем $t_2^{(k_n)} \to \tilde{t}$ при $n \to \infty$.

По среднеквадратической непрерывности процесса ϕ_t в момент времени $\tilde{t}$ и элементарному неравенству $(a+b)^2 \leq 2(a^2 + b^2)$ получаем

$$0 \leq \mathsf{M}\{|\phi_{t_1^{(k_n)}} - \phi_{t_2^{(k_n)}}|^2\} \leq 2\left(\mathsf{M}\{|\phi_{t_1^{(k_n)}} - \phi_{\tilde{t}}|^2\} + \mathsf{M}\{|\phi_{t_2^{(k_n)}} - \phi_{\tilde{t}}|^2\}\right) \to 0$$

при $n \to \infty$. Отсюда следует, что $\lim \mathsf{M}\{|\phi_{t_1^{(k_n)}} - \phi_{t_2^{(k_n)}}|^2\} = 0$ при $n \to \infty$. Это невозможно в силу того, что $\mathsf{M}\{|\phi_{t_1^{(k_n)}} - \phi_{t_2^{(k_n)}}|^2\} \geq \varepsilon > 0$. Полученное противоречие и доказывает требуемое утверждение.

Перейдем к доказательству теоремы 3.1 в случае $k > 1$. С этой целью введем обозначения

$$I[\psi_q^{(r+1)}]_{\theta,s} \stackrel{\text{def}}{=} \int\limits_s^{\theta} \psi_q(t_1) \ldots \int\limits_s^{t_r} \psi_{q+r}(t_{r+1}) dw_{t_{r+1}}^{(q+r)} \ldots dw_{t_1}^{(q)},$$

$$J[\phi, \psi_q^{(r+1)}]_{\theta,s} \stackrel{\text{def}}{=} \int\limits_s^{\theta} \psi_q(t_1) \ldots \int\limits_s^{t_r} \psi_{q+r}(t_{r+1}) \int\limits_s^{t_{r+1}} \phi_\tau dw_\tau^{(q+r+1)} dw_{t_{r+1}}^{(q+r)} \ldots dw_{t_1}^{(q)},$$

$$G[\psi_q^{(r+1)}]_{n,m} = \sum_{j_q=m}^{n-1} \sum_{j_{q+1}=m}^{j_q-1} \ldots \sum_{j_{q+r}=m}^{j_{q+r-1}-1} \prod_{l=q}^{r+q} I[\psi_l]_{\tau_{j_l+1}, \tau_{j_l}},$$

где $\psi_q^{(r+1)} \stackrel{\text{def}}{=} (\psi_q, \ldots, \psi_{q+r})$; $\psi_q^{(1)} \stackrel{\text{def}}{=} \psi_q$; $\psi_1^{(r+1)} \stackrel{\text{def}}{=} \psi^{(r+1)} = (\psi_1, \ldots, \psi_{r+1})$.

Для доказательства теоремы 3.1 при $k > 1$ достаточно установить, что

$$J[\phi, \psi^{(k)}]_{T,t} = \underset{N\to\infty}{\text{l.i.m.}}\ S[\phi, \psi^{(k)}]_N = \hat{J}[\phi, \psi^{(k)}]_{T,t} \text{ с в.1}, \tag{3.7}$$

где

$$S[\phi, \psi^{(k)}]_N = G[\psi^{(k)}]_{N,0} \sum_{l=0}^{j_k-1} \phi_{\tau_l} \Delta w_{\tau_l}^{(k+1)}.$$

Докажем сначала правое равенство в (3.7). Имеем

$$\hat{J}[\phi, \psi^{(k)}]_{T,t} \stackrel{\text{def}}{=} \underset{N\to\infty}{\text{l.i.m.}} \sum_{l=0}^{N-1} \phi_{\tau_l} \Delta w_{\tau_l}^{(k+1)} \hat{I}[\psi^{(k)}]_{T,\tau_{l+1}}. \tag{3.8}$$

На основании предположения индукции получаем, что

$$I[\psi^{(k)}]_{T,\tau_{l+1}} = \hat{I}[\psi^{(k)}]_{T,\tau_{l+1}} \text{ с в.1}, \tag{3.9}$$

где $\hat{I}[\psi^{(k)}]_{T,s}$ определен в соответствии с (3.4) и

$$I[\psi^{(k)}]_{T,s} = \int_s^T \psi_1(t_1) \ldots \int_s^{t_{k-1}} \psi_k(t_k) dw_{t_k}^{(k)} \ldots dw_{t_1}^{(1)}.$$

Заметим, что при $k \geq 4$ (при $k = 2,\ 3$ рассуждения аналогичны) в силу аддитивности стохастического интеграла Ито справедливы равенства

$$I[\psi^{(k)}]_{T,\tau_{l+1}} = \sum_{j_1=l+1}^{N-1} \int_{\tau_{j_1}}^{\tau_{j_1+1}} \psi_1(t_1) \int_{\tau_{l+1}}^{t_1} \psi_2(t_2) I[\psi_3^{(k-2)}]_{t_2,\tau_{l+1}} dw_{t_2}^{(2)} dw_{t_1}^{(1)} =$$

$$= \sum_{j_1=l+1}^{N-1} \int_{\tau_{j_1}}^{\tau_{j_1+1}} \psi_1(t_1) \left(\sum_{j_2=l+1}^{j_1-1} \int_{\tau_{j_2}}^{\tau_{j_2+1}} + \int_{\tau_{j_1}}^{t_1} \right) \psi_2(t_2) I[\psi_3^{(k-2)}]_{t_2,\tau_{l+1}} dw_{t_2}^{(2)} dw_{t_1}^{(1)} =$$

$$= \ldots = G[\psi^{(k)}]_{N,l+1} + H[\psi^{(k)}]_{N,l+1}, \tag{3.10}$$

где

$$H[\psi^{(k)}]_{N,l+1} = \sum_{j_1=l+1}^{N-1} \int_{\tau_{j_1}}^{\tau_{j_1+1}} \psi_1(s) \int_{\tau_{j_1}}^{s} \psi_2(\tau) I[\psi_3^{(k-2)}]_{\tau,\tau_{l+1}} dw_\tau^{(2)} dw_s^{(1)} +$$

$$+ \sum_{r=2}^{k-2} G[\psi^{(r-1)}]_{N,l+1} \sum_{j_r=l+1}^{j_{r-1}-1} \int_{\tau_{j_r}}^{\tau_{j_r+1}} \psi_r(s) \int_{\tau_{j_r}}^{s} \psi_{r+1}(\tau) I[\psi_{r+2}^{(k-r-1)}]_{\tau,\tau_{l+1}} dw_\tau^{(r+1)} dw_s^{(r)} +$$

$$+G[\psi^{(k-2)}]_{N,l+1}\sum_{j_{k-1}=l+1}^{j_{k-2}-1} I[\psi_{k-1}^{(2)}]_{\tau_{j_{k-1}+1},\tau_{j_{k-1}}}. \tag{3.11}$$

Подставим (3.10) в (3.9), а (3.9) в (3.8). Тогда

$$\hat{J}[\phi,\psi^{(k)}]_{T,t}=\underset{N\to\infty}{\text{l.i.m.}}\sum_{l=0}^{N-1}\phi_{\tau_l}\Delta w_{\tau_l}^{(k+1)}\left(G[\psi^{(k)}]_{N,l+1}+H[\psi^{(k)}]_{N,l+1}\right). \tag{3.12}$$

Поскольку

$$\sum_{j_1=0}^{N-1}\sum_{j_2=0}^{j_1-1}\ldots\sum_{j_k=0}^{j_{k-1}-1}a_{j_1\ldots j_k}=\sum_{j_k=0}^{N-1}\sum_{j_{k-1}=j_k+1}^{N-1}\ldots\sum_{j_1=j_2+1}^{N-1}a_{j_1\ldots j_k}, \tag{3.13}$$

где $a_{j_1\ldots j_k}$ — скаляры, то

$$G[\psi^{(k)}]_{N,l+1}=\sum_{j_k=l+1}^{N-1}\ldots\sum_{j_1=j_2+1}^{N-1}\prod_{l=1}^{k}I[\psi_l]_{\tau_{j_l+1},\tau_{j_l}}. \tag{3.14}$$

Подставим (3.14) в $\sum\limits_{l=0}^{N-1}\phi_{\tau_l}\Delta w_{\tau_l}^{(k+1)}G[\psi^{(k)}]_{N,l+1}$ и снова воспользуемся формулой (3.13). Тогда

$$\sum_{l=0}^{N-1}\phi_{\tau_l}\Delta w_{\tau_l}^{(k+1)}G[\psi^{(k)}]_{N,l+1}=S[\phi,\psi^{(k)}]_N. \tag{3.15}$$

Предположим, что предел l.i.m. $S[\phi,\psi^{(k)}]_N$ при $N\to\infty$ существует (его существование будет доказано далее). Тогда из (3.15) и (3.12) следует, что для доказательства правого равенства в (3.7) остается показать, что

$$\underset{N\to\infty}{\text{l.i.m.}}\sum_{l=0}^{N-1}\phi_{\tau_l}\Delta w_{\tau_l}^{(k+1)}H[\psi^{(k)}]_{N,l+1}=0. \tag{3.16}$$

Оценивая второй момент допредельного выражения в левой части (3.16) с учетом (3.11), независимости ϕ_{τ_l}, $\Delta w_{\tau_l}^{(k+1)}$ и $H[\psi^{(k)}]_{N,l+1}$, стандартных оценок вторых моментов стохастических интегралов и неравенства Минковского, убеждаемся, что (3.16) справедливо. Таким образом, в предположении существования предела l.i.m. $S[\phi,\psi^{(k)}]_N$ при $N\to\infty$ мы получили, что правое равенство в (3.7) выполняется.

Покажем, что справедливо и левое равенство в (3.7). Имеем

$$J[\phi,\psi^{(k)}]_{T,t}\stackrel{\text{def}}{=}\underset{N\to\infty}{\text{l.i.m.}}\sum_{l=0}^{N-1}\psi_1(\tau_l)\Delta w_{\tau_l}^{(1)}J[\phi,\psi_2^{(k-1)}]_{\tau_l,t}. \tag{3.17}$$

Воспользуемся применительно к интегралу $J[\phi,\psi_2^{(k-1)}]_{\tau_l,t}$ в (3.17) теми же рассуждениями, что и для интеграла $I[\psi^{(k)}]_{T,\tau_{l+1}}$, которые привели к соотношению (3.10), и подставим полученное для $J[\phi,\psi_2^{(k-1)}]_{\tau_l,t}$ выражение в (3.17). Далее с помощью неравенства Минковского и стандартных оценок вторых моментов стохастических интегралов нетрудно установить, что

$$J[\phi,\psi^{(k)}]_{T,t}=\underset{N\to\infty}{\text{l.i.m.}}\ R[\phi,\psi^{(k)}]_N \text{ с в.1}, \tag{3.18}$$

где

$$R[\phi,\psi^{(k)}]_N=\sum_{j_1=0}^{N-1}\psi_1(\tau_{j_1})\Delta w_{\tau_{j_1}}^{(1)}G[\psi_2^{(k-1)}]_{j_1,0}\sum_{l=0}^{j_k-1}\int\limits_{\tau_l}^{\tau_{l+1}}\phi_\tau dw_\tau^{(k+1)}.$$

Покажем, что

$$\underset{N\to\infty}{\text{l.i.m.}}\ R[\phi,\psi^{(k)}]_N=\underset{N\to\infty}{\text{l.i.m.}}\ S[\phi,\psi^{(k)}]_N \text{ с в.1}. \tag{3.19}$$

Нетрудно видеть, что

$$R[\phi,\psi^{(k)}]_N=U[\phi,\psi^{(k)}]_N+V[\phi,\psi^{(k)}]_N+S[\phi,\psi^{(k)}]_N, \tag{3.20}$$

где

$$U[\phi,\psi^{(k)}]_N=\sum_{j_1=0}^{N-1}\psi_1(\tau_{j_1})\Delta w_{\tau_{j_1}}^{(1)}G[\psi_2^{(k-1)}]_{j_1,0}\sum_{l=0}^{j_k-1}I[\Delta\phi]_{\tau_{l+1},\tau_l};$$

$$V[\phi,\psi^{(k)}]_N=\sum_{j_1=0}^{N-1}I[\Delta\psi_1]_{\tau_{j_1+1},\tau_{j_1}}G[\psi_2^{(k-1)}]_{j_1,0}\sum_{l=0}^{j_k-1}\phi_{\tau_l}\Delta w_{\tau_l}^{(k+1)}$$

и

$$I[\Delta\psi_1]_{\tau_{j_1+1},\tau_{j_1}}=\int\limits_{\tau_{j_1}}^{\tau_{j_1+1}}(\psi_1(\tau_{j_1})-\psi_1(\tau))dw_\tau^{(1)};$$

$$I[\Delta\phi]_{\tau_{l+1},\tau_l}=\int\limits_{\tau_l}^{\tau_{l+1}}(\phi_\tau-\phi_{\tau_l})dw_\tau^{(k+1)}.$$

Далее с помощью неравенства Минковского, стандартных оценок вторых моментов стохастических интегралов, а также непрерывности функции $\psi_1(\tau)$ и принадлежности процесса ϕ_τ классу $\mathcal{S}_2([t,T])$ убеждаемся, что l.i.m. $V[\phi,\psi^{(k)}]_N=$ l.i.m. $U[\phi,\psi^{(k)}]_N=0$ при $N\to\infty$. Тогда, учитывая (3.20), получаем (3.19). Из (3.19) и (3.18) следует левое равенство из (3.7). При этом предел l.i.m. $S[\phi,\psi^{(k)}]_N$ при $N\to\infty$ существует, поскольку он равен интегралу $J[\phi,\psi^{(k)}]_{T,t}$, который существует в условиях настоящей теоремы. Таким образом, цепочка равенств (3.7) доказана. Теорема доказана. □

3.1.2 Следствия и обобщения

Пусть $D_k = \{(t_1, \ldots, t_k) : \ t \le t_1 < \ldots < t_k \le T\}$ и выполнены следующие условия:

AI. $\xi_t \in \mathcal{S}_2([t,T])$.

AII. $\Phi(t_1, \ldots, t_{k-1})$ непрерывная неслучайная на замкнутом множестве D_{k-1} функция.

Определим следующие стохастические интегралы:

$$\hat{J}[\xi, \Phi]_{T,t}^{(k)} = \int\limits_t^T \xi_{t_k} d\mathbf{w}_{t_k}^{(i_k)} \ldots \int\limits_{t_3}^T d\mathbf{w}_{t_2}^{(i_2)} \int\limits_{t_2}^T \Phi(t_1, t_2, \ldots, t_{k-1}) d\mathbf{w}_{t_1}^{(i_1)} \stackrel{\text{def}}{=}$$

$$\stackrel{\text{def}}{=} \underset{N\to\infty}{\text{l.i.m.}} \sum_{l=0}^{N-1} \xi_{\tau_l} \Delta\mathbf{w}_{\tau_l}^{(i_k)} \int\limits_{\tau_{l+1}}^T d\mathbf{w}_{t_{k-1}}^{(i_{k-1})} \ldots \int\limits_{t_3}^T d\mathbf{w}_{t_2}^{(i_2)} \int\limits_{t_2}^T \Phi(t_1, t_2, \ldots, t_{k-1}) d\mathbf{w}_{t_1}^{(i_1)}$$

при $k \ge 3$ и

$$\hat{J}[\xi, \Phi]_{T,t}^{(2)} = \int\limits_t^T \xi_{t_2} d\mathbf{w}_{t_2}^{(i_2)} \int\limits_{t_2}^T \Phi(t_1) d\mathbf{w}_{t_1}^{(i_1)} \stackrel{\text{def}}{=} \underset{N\to\infty}{\text{l.i.m.}} \sum_{l=0}^{N-1} \xi_{\tau_l} \Delta\mathbf{w}_{\tau_l}^{(i_2)} \int\limits_{\tau_{l+1}}^T \Phi(t_1) d\mathbf{w}_{t_1}^{(i_1)},$$

где $\mathbf{w}_\tau^{(i)} = \mathbf{f}_\tau^{(i)}$ при $i = 1, \ldots, m$; $\mathbf{w}_\tau^{(0)} = \tau$; $i_1, \ldots, i_k = 0, \ 1, \ldots, m$; $\mathbf{f}_\tau^{(i)}$; $i = 1, \ldots, m$ — независимые и $\mathcal{F}_\tau$-измеримые при всех $\tau \in [t,T]$ стандартные винеровские процессы.

Обозначим

$$J[\xi, \Phi]_{T,t}^{(k)} = \int\limits_t^T \ldots \int\limits_t^{t_{k-1}} \Phi(t_1, \ldots, t_{k-1}) \xi_{t_k} d\mathbf{w}_{t_k}^{(i_k)} \ldots d\mathbf{w}_{t_1}^{(i_1)}, \ k \ge 2, \qquad (3.21)$$

где правая часть (3.21) понимается как повторный стохастический интеграл Ито. Рассмотрим одно из обобщений теоремы 3.1.

Введем в рассмотрение также следующие повторные стохастические интегралы

$$\tilde{J}[\Phi]_{T,t}^{(k-1)} = \int\limits_t^T d\mathbf{w}_{t_{k-1}}^{(i_{k-1})} \ldots \int\limits_{t_3}^T d\mathbf{w}_{t_2}^{(i_2)} \int\limits_{t_2}^T \Phi(t_1, t_2, \ldots, t_{k-1}) d\mathbf{w}_{t_1}^{(i_1)} \stackrel{\text{def}}{=}$$

$$\stackrel{\text{def}}{=} \underset{N\to\infty}{\text{l.i.m.}} \sum_{l=0}^{N-1} \Delta\mathbf{w}_{\tau_l}^{(i_{k-1})} \int\limits_{\tau_{l+1}}^T d\mathbf{w}_{t_{k-2}}^{(i_{k-2})} \ldots \int\limits_{t_3}^T d\mathbf{w}_{t_2}^{(i_2)} \int\limits_{t_2}^T \Phi(t_1, t_2, \ldots, t_{k-1}) d\mathbf{w}_{t_1}^{(i_1)},$$

$$J'[\Phi]_{T,t}^{(k-1)} = \int\limits_t^T \ldots \int\limits_t^{t_{k-2}} \Phi(t_1, \ldots, t_{k-1}) d\mathbf{w}_{t_{k-1}}^{(i_{k-1})} \ldots d\mathbf{w}_{t_1}^{(i_1)}, \ k \ge 2.$$

Нетрудно показать по аналогии с доказательством теоремы 3.1, что при выполнении условия AII данного раздела существует стохастический интеграл $\tilde{J}[\Phi]_{T,t}^{(k-1)}$ и $J'[\Phi]_{T,t}^{(k-1)} = \tilde{J}[\Phi]_{T,t}^{(k-1)}$ с вероятностью 1.

В свою очередь, используя этот факт можно по аналогии с доказательством теоремы 3.1 доказать следующую теорему.

Теорема 3.2. *Пусть выполнены условия* AI, AII *данного раздела. Тогда существует стохастический интеграл* $\hat{J}[\xi,\Phi]_{T,t}^{(k)}$ *и* $J[\xi,\Phi]_{T,t}^{(k)} = \hat{J}[\xi,\Phi]_{T,t}^{(k)}$ *с вероятностью* 1 $(k \geq 2)$.

Рассмотрим следующие повторные стохастические интегралы:

$$I = \int\limits_t^T d\mathbf{f}_{t_2}^{(i_2)} \int\limits_{t_2}^T \Phi_1(t_1,t_2) d\mathbf{f}_{t_1}^{(i_1)}, \;\; J = \int\limits_t^T \int\limits_t^{t_2} \Phi_2(t_1,t_2) d\mathbf{f}_{t_1}^{(i_1)} d\mathbf{f}_{t_2}^{(i_2)}.$$

Если считать $\int\limits_{t_2}^T \Phi_1(t_1,t_2) d\mathbf{f}_{t_1}^{(i_1)}$ интеграндом I, а $\int\limits_t^{t_2} \Phi_2(t_1,t_2) d\mathbf{f}_{t_1}^{(i_1)}$ интеграндом J, то, в силу независимости этих интеграндов, может ошибочно показаться, что $\mathsf{M}\{IJ\} = 0$. Однако, это не так. Действительно, применяя замену порядка интегрирования в I с в. 1 имеем

$$I = \int\limits_t^T \int\limits_t^{t_1} \Phi_1(t_1,t_2) d\mathbf{f}_{t_2}^{(i_2)} d\mathbf{f}_{t_1}^{(i_1)} = \int\limits_t^T \int\limits_t^{t_2} \Phi_1(t_2,t_1) d\mathbf{f}_{t_1}^{(i_2)} d\mathbf{f}_{t_2}^{(i_1)}.$$

Тогда, используя стандартные свойства стохастического интеграла Ито, получаем

$$\mathsf{M}\{IJ\} = \mathbf{1}_{\{i_1=i_2\}} \int\limits_t^T \int\limits_t^{t_2} \Phi_1(t_2,t_1)\Phi_2(t_1,t_2) dt_1 dt_2.$$

Рассмотрим следующее утверждение.

Теорема 3.3. *Пусть выполнены условия теоремы* 3.1 *и* $h(\tau)$ — *непрерывная неслучайная на промежутке* $[t,T]$ *функция. Тогда*

$$\int\limits_t^T \phi_\tau dw_\tau^{(k+1)} h(\tau) \hat{I}[\psi^{(k)}]_{T,\tau} = \int\limits_t^T \phi_\tau h(\tau) dw_\tau^{(k+1)} \hat{I}[\psi^{(k)}]_{T,\tau} \;\; \text{с в.1}, \qquad (3.22)$$

и интегралы в левой и правой частях (3.22) *существуют.*

Доказательство. Согласно теореме 3.1 повторный стохастический интеграл в правой части (3.22) существует. Кроме того,

$$\int\limits_t^T \phi_\tau h(\tau) dw_\tau^{(k+1)} \hat{I}[\psi^{(k)}]_{T,\tau} = \int\limits_t^T \phi_\tau dw_\tau^{(k+1)} h(\tau) \hat{I}[\psi^{(k)}]_{T,\tau} -$$

$$-\underset{N\to\infty}{\text{l.i.m.}} \sum_{j=0}^{N-1} \phi_{\tau_j} \Delta h(\tau_j) \Delta w_{\tau_j}^{(k+1)} \hat{I}[\psi^{(k)}]_{T,\tau_{j+1}} \text{ с в.1},$$

где $\Delta h(\tau_j) = h(\tau_{j+1}) - h(\tau_j)$. Используя рассуждения, которые привели к правому равенству в (3.7) получаем

$$\underset{N\to\infty}{\text{l.i.m.}} \sum_{l=0}^{N-1} \phi_{\tau_l} \Delta h(\tau_l) \Delta w_{\tau_l}^{(k+1)} \hat{I}[\psi^{(k)}]_{T,\tau_{l+1}} =$$

$$= \underset{N\to\infty}{\text{l.i.m.}}\ G[\psi^{(k)}]_{N,0} \sum_{l=0}^{j_k-1} \phi_{\tau_l} \Delta h(\tau_l) \Delta w_{\tau_l}^{(k+1)} \text{ с в.1}. \tag{3.23}$$

Далее с помощью неравенства Минковского, стандартных оценок вторых моментов стохастических интегралов и непрерывности функции $h(\tau)$ находим, что второй момент допредельного выражения в правой части (3.23) стремится к нулю при $N \to \infty$. Теорема доказана. □

Рассмотрим одно из следствий теоремы 3.1.

Теорема 3.4. *В условиях теоремы* 3.3

$$\int_t^T h(t_1) \int_t^{t_1} \phi_\tau dw_\tau^{(k+2)} dw_{t_1}^{(k+1)} \hat{I}[\psi^{(k)}]_{T,t_1} =$$

$$= \int_t^T \phi_\tau dw_\tau^{(k+2)} \int_\tau^T h(t_1) dw_{t_1}^{(k+1)} \hat{I}[\psi^{(k)}]_{T,t_1} \ \textit{с в.1}, \tag{3.24}$$

причем левая и правая части (3.24) *существуют.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Применяя дважды теорему 3.1, получаем

$$\int_t^T \phi_\tau dw_\tau^{(k+2)} \int_\tau^T h(t_1) dw_{t_1}^{(k+1)} \hat{I}[\psi^{(k)}]_{T,t_1} =$$

$$= \int_t^T \psi_1(t_1) \ldots \int_t^{t_{k-1}} \psi_k(t_k) \int_t^{t_k} \rho_\tau dw_\tau^{(k+1)} dw_{t_k}^{(k)} \ldots dw_{t_1}^{(1)} =$$

$$= \int_t^T \rho_\tau dw_\tau^{(k+1)} \int_\tau^T \psi_k(t_k) dw_{t_k}^{(k)} \ldots \int_{t_2}^T \psi_1(t_1) dw_{t_1}^{(1)} \text{ с в.1},$$

где $\rho_\tau \stackrel{\text{def}}{=} h(\tau) \int_t^\tau \phi_s dw_s^{(k+2)}$. Теорема доказана. □

3.1.3 Замена порядка интегрирования для конкретных повторных стохастических интегралов Ито

Как уже отмечалось ранее, формулы, приведенные в данном разделе, могут быть получены с помощью формулы Ито. Однако, способ, основанный на теореме 3.1, является более простым и привычным, поскольку согласуется с обычными правилами замены порядка интегрирования в римановых интегралах.

Пример 3.1. *С помощью теоремы* 3.1 *о замене порядка интегрирования в повторных стохастических интегралах Ито нетрудно показать, что следующие равенства справедливы с вероятностью* 1*:*

$$\int_t^T \int_t^{t_2} df_{t_1} dt_2 = \int_t^T (T - t_1) df_{t_1}, \quad \int_t^T \cos(t_2 - T) \int_t^{t_2} df_{t_1} dt_2 = \int_t^T \sin(T - t_1) df_{t_1},$$

$$\int_t^T \sin(t_2 - T) \int_t^{t_2} df_{t_1} dt_2 = \int_t^T \left(\cos(T - t_1) - 1\right) df_{t_1},$$

$$\int_t^T e^{\alpha(t_2 - T)} \int_t^{t_2} df_{t_1} dt_2 = \frac{1}{\alpha} \int_t^T \left(1 - e^{\alpha(t_1 - T)}\right) df_{t_1}, \ \alpha \neq 0,$$

$$\int_t^T (t_2 - T)^\alpha \int_t^{t_2} df_{t_1} dt_2 = -\frac{1}{\alpha + 1} \int_t^T (t_1 - T)^{\alpha+1} df_{t_1}, \ \alpha \neq -1,$$

$$J_{(10)T,t} + J_{(01)T,t} = (T - t) J_{(1)T,t} \ \text{(лемма Ито)},$$

$$J_{(100)T,t} = \frac{1}{2} \int_t^T (T - t_1)^2 df_{t_1}, \ J_{(010)T,t} = \int_t^T (t_1 - t)(T - t_1) df_{t_1},$$

$$J_{(110)T,t} = \int_t^T (T - t_2) \int_t^{t_2} df_{t_1} df_{t_2}, \ J_{(101)T,t} = \int_t^T \int_t^{t_2} (t_2 - t_1) df_{t_1} df_{t_2},$$

$$J_{(1011)T,t} = \int_t^T \int_t^{t_3} \int_t^{t_2} (t_2 - t_1) df_{t_1} df_{t_2} df_{t_3}, \ J_{(1101)T,t} = \int_t^T \int_t^{t_3} (t_3 - t_2) \int_t^{t_2} df_{t_1} df_{t_2} df_{t_3},$$

$$J_{(1110)T,t} = \int_t^T (T - t_3) \int_t^{t_3} \int_t^{t_2} df_{t_1} df_{t_2} df_{t_3}, \ J_{(1100)T,t} = \frac{1}{2} \int_t^T (T - t_2)^2 \int_t^{t_2} df_{t_1} df_{t_2},$$

$$J_{(1001)T,t} = \frac{1}{2} \int_t^T \int_t^{t_2} (t_2 - t_1)^2 df_{t_1} df_{t_2}, \ J_{(1010)T,t} = \int_t^T (T - t_2) \int_t^{t_2} (t_2 - t_1) df_{t_1} df_{t_2},$$

$$J_{(0110)T,t}=\int\limits_t^T(T-t_2)\int\limits_t^{t_2}(t_1-t)df_{t_1}df_{t_2},\ \ J_{(0101)T,t}=\int\limits_t^T\int\limits_t^{t_2}(t_2-t_1)(t_1-t)df_{t_1}df_{t_2},$$

$$J_{(0010)T,t}=\frac{1}{2}\int\limits_t^T(T-t_1)(t_1-t)^2df_{t_1},\ \ J_{(0100)T,t}=\frac{1}{2}\int\limits_t^T(T-t_1)^2(t_1-t)df_{t_1},$$

$$J_{(1000)T,t}=\frac{1}{3!}\int\limits_t^T(T-t_1)^3df_{t_1},\ \ J_{(1\underbrace{0\ldots0}_{k-1})T,t}=\frac{1}{(k-1)!}\int\limits_t^T(T-t_1)^{k-1}df_{t_1},$$

$$J_{(11\underbrace{0\ldots0}_{k-2})T,t}=\frac{1}{(k-2)!}\int\limits_t^T(T-t_2)^{k-2}\int\limits_t^{t_2}df_{t_1}df_{t_2},$$

$$J_{(\underbrace{1\ldots1}_{k-1}0)T,t}=\int\limits_t^T(T-t_1)J_{(\underbrace{1\ldots1}_{k-2})t_1,t}df_{t_1},$$

$$J_{(1\underbrace{0\ldots0}_{k-2}1)T,t}=\frac{1}{(k-2)!}\int\limits_t^T\int\limits_t^{t_2}(t_2-t_1)^{k-2}df_{t_1}df_{t_2},$$

$$J_{(10\underbrace{1\ldots1}_{k-2})T,t}=\int\limits_t^T\ldots\int\limits_t^{t_3}\int\limits_t^{t_2}(t_2-t_1)df_{t_1}df_{t_2}\ldots df_{t_{k-1}},$$

$$J_{(\underbrace{1\ldots1}_{k-2}01)T,t}=\int\limits_t^T\int\limits_t^{t_{k-1}}(t_{k-1}-t_{k-2})\int\limits_t^{t_{k-2}}\ldots\int\limits_t^{t_2}df_{t_1}\ldots df_{t_{k-3}}df_{t_{k-2}}df_{t_{k-1}};$$

обобщения леммы Ито:

$$J_{(110)T,t}+J_{(101)T,t}+J_{(011)T,t}=(T-t)J_{(11)T,t},$$

$$J_{(001)T,t}+J_{(010)T,t}+J_{(100)T,t}=\frac{(T-t)^2}{2}J_{(1)T,t},$$

$$J_{(1100)T,t}+J_{(1010)T,t}+J_{(1001)T,t}+J_{(0110)T,t}+$$

$$+J_{(0101)T,t}+J_{(0011)T,t}=\frac{(T-t)^2}{2}J_{(11)T,t},$$

$$J_{(1000)T,t}+J_{(0100)T,t}+J_{(0010)T,t}+J_{(0001)T,t}=\frac{(T-t)^3}{3!}J_{(1)T,t},$$

$$J_{(1110)T,t}+J_{(1101)T,t}+J_{(1011)T,t}+J_{(0111)T,t}=(T-t)J_{(111)T,t},$$

$$\sum_{l=1}^{k}J_{(\underbrace{0\ldots0}_{l-1}1\underbrace{0\ldots0}_{k-l})T,t}=\frac{1}{(k-1)!}(T-t)^{k-1}J_{(1)T,t},$$

$$\sum_{l=1}^{k} J_{(\underbrace{1\ldots1}_{l-1}0\underbrace{1\ldots1}_{k-l})T,t} = (T-t)J_{(\underbrace{1\ldots1}_{k-1})T,t},$$

$$\sum_{\substack{l_1+\ldots+l_k=m\\ l_i\in\{0,\ 1\};\ i=1,\ldots,k}} J_{(l_1\ldots l_k)T,t} = \frac{(T-t)^{k-m}}{(k-m)!}J_{(\underbrace{1\ldots1}_{m})T,t},$$

где введены обозначения

$$J_{(l_1\ldots l_k)T,t} = \int\limits_t^T \ldots \int\limits_t^{t_2} dw_{t_1}^{(1)}\ldots dw_{t_k}^{(k)};$$

$l_i = 1$ *при* $w_{t_i}^{(i)} = f_{t_i}$ *и* $l_i = 0$ *при* $w_{t_i}^{(i)} = t_i$; $i = 1,\ldots,k$; $f_\tau \in \Re^1$ — *стандартный винеровский процесс.*

3.2 Замена порядка интегрирования в повторных стохастических интегралах по мартингалу

Пусть заданы фиксированное вероятностное пространство $(\Omega, \mathcal{F}, \mathsf{P})$ и неубывающая совокупность σ-алгебр $\{\mathcal{F}_\tau,\ \tau \in [0,T]\}$, определенная на этом пространстве. Пусть $M_\tau,\ \tau \in [0,T]$ — заданный на вероятностном пространстве $(\Omega, \mathcal{F}, \mathsf{P})$ D-мартингал (определение D-мартингала дано в главе 1, см. также [4]). Отметим, что стандартный винеровский процесс является D-мартингалом с $\rho_\tau \equiv 1$.

В настоящем разделе мы обобщим теоремы о замене порядка интегрирования в повторных стохастических интегралах Ито на случай повторных стохастических интегралов по D-мартингалу.

В главе 1 отмечалось (см. также [4]), что стохастический интеграл по D-мартингалу $\int\limits_t^T \xi_\tau dM_\tau$, где случайный процесс $\xi_\tau,\ \tau \in [t,T]$ принадлежит классу $H_2(\rho,[0,T])$, полученный в соответствии с определением 1.14, существует (определение класса $H_2(\rho,[0,T])$ дано в главе 1).

Пусть $\tilde{H}_2(\rho,[0,T])$ — класс среднеквадратически непрерывных при всех $\tau \in [0,T]$ и принадлежащих классу $H_2(\rho,[0,T])$ случайных процессов $\xi_\tau,\ \tau \in [0,T]$.

Положим

$$S[\phi,\psi^{(k)}]_{T,t} = \int\limits_t^T \psi_1(t_1)\ldots\int\limits_t^{t_{k-1}} \psi_k(t_k)\int\limits_t^{t_k} \phi_\tau dM_\tau^{(k+1)} dM_{t_k}^{(k)}\ldots dM_{t_1}^{(1)}, \quad (3.25)$$

$$S[\psi^{(k)}]_{T,t} = \int\limits_t^T \psi_1(t_1)\ldots\int\limits_t^{t_{k-1}} dM_{t_k}^{(k)}\ldots dM_{t_1}^{(1)}. \quad (3.26)$$

Здесь и далее $\phi_\tau \in \tilde{H}_2(\rho,[t,T])$; $\psi_1(\tau),\ldots,\psi_k(\tau)$ — непрерывные на промежутке $[t,T]$ неслучайные функции; $M_\tau^{(l)} = M_\tau$ либо $M_\tau^{(l)} = \tau$ при $\tau \in [t,T]$; $l = 1,\ldots,k+1$; M_τ — D-мартингал.

Определим повторный стохастический интеграл $\hat{S}[\psi^{(k)}]_{T,s}$; $t \le s \le T$, $k \ge 1$, вида

$$\hat{S}[\psi^{(k)}]_{T,s} = \int\limits_s^T \psi_k(t_k)dM_{t_k}^{(k)} \ldots \int\limits_{t_2}^T \psi_1(t_1)dM_{t_1}^{(1)}$$

следующим рекуррентным соотношением:

$$\hat{S}[\psi^{(k)}]_{T,t} \stackrel{\text{def}}{=} \underset{N\to\infty}{\text{l.i.m.}} \sum_{l=0}^{N-1} \psi_k(\tau_l)\Delta M_{\tau_l}^{(k)} \hat{S}[\psi^{(k-1)}]_{T,\tau_{l+1}}, \tag{3.27}$$

где $k \ge 1$; $\hat{S}[\psi^{(0)}]_{T,s} \stackrel{\text{def}}{=} 1$; $[s,T] \subseteq [t,T]$; здесь и далее $\Delta M_{\tau_l}^{(i)} = M_{\tau_{l+1}}^{(i)} - M_{\tau_l}^{(i)}$; $i = 1,\ldots,k+1$; $l = 0,\ 1,\ldots,N-1$; $\{\tau_l\}_{l=0}^N$ — разбиение промежутка $[t,T]$ такое, что $t = \tau_0 < \ldots < \tau_N = T$, $\max\limits_{0\le j\le N-1} |\tau_{j+1} - \tau_j| \to 0$ при $N \to \infty$; остальные обозначения, входящие в (3.27), такие же, как в (3.25), (3.26).

Далее определим повторный стохастический интеграл $\hat{S}[\phi,\psi^{(k)}]_{T,t}$, $k \ge 1$, вида

$$\hat{S}[\phi,\psi^{(k)}]_{T,t} = \int\limits_t^T \phi_s dM_s^{(k+1)} \hat{S}[\psi^{(k)}]_{T,s}$$

равенством

$$\hat{S}[\phi,\psi^{(k)}]_{T,t} \stackrel{\text{def}}{=} \underset{N\to\infty}{\text{l.i.m.}} \sum_{l=0}^{N-1} \phi_{\tau_l}\Delta M_{\tau_l}^{(k+1)} \hat{S}[\psi^{(k)}]_{T,\tau_{l+1}},$$

где сохранен смысл обозначений, входящих в (3.25)–(3.27).

Сформулируем теорему о замене порядка интегрирования в повторных стохастических интегралах по D-мартингалу, которая является обобщением теоремы 3.1.

Теорема 3.5. *Пусть $\phi_\tau \in \tilde{H}_2(\rho,[t,T])$, $\psi_l(\tau)$; $l = 1,\ldots,k$ — непрерывные на промежутке $[t,T]$ неслучайные функции и $|\rho_\tau| \le K < \infty$ с вероятностью 1 при всех $\tau \in [t,T]$. Тогда существует стохастический интеграл $\hat{S}[\phi,\psi^{(k)}]_{T,t}$ и $S[\phi,\psi^{(k)}]_{T,t} = \hat{S}[\phi,\psi^{(k)}]_{T,t}$ с вероятностью 1.*

Доказательство теоремы 3.5 аналогично доказательству теоремы 3.1.

З а м е ч а н и е 3.2. *Отметим, что можно предложить несколько иной вариант условий теоремы* 3.5. *Так, можно не требовать ограниченности процесса* ρ_τ, *однако в этом случае необходимо потребовать, например, выполнения следующих дополнительных условий:*

1. $\mathsf{M}\{|\rho_\tau|\} < \infty$ *при всех* $\tau \in [t, T]$.

2. *Процесс* ρ_τ *независим с процессами* ϕ_τ *и* M_τ.

З а м е ч а н и е 3.3. *Следует отметить, что хорошо известна конструкция стохастического интеграла по винеровскому процессу от упреждающей* (не являющейся $\mathcal{F}_\tau$-измеримой при $\tau \in [t, T]$) *случайной функции — так называемый стохастический интеграл Стратоновича* (см. главу 1).

Стохастический интеграл $\hat{S}[\phi, \psi^{(k)}]_{T,t}$ *также является стохастическим интегралом от упреждающей случайной функции, однако в условиях теоремы* 3.5 $S[\phi, \psi^{(k)}]_{T,t} = \hat{S}[\phi, \psi^{(k)}]_{T,t}$ *с вероятностью* 1, *а* $S[\phi, \psi^{(k)}]_{T,t}$ *— обычный повторный стохастический интеграл по* D-*мартингалу. Если, например,* $M_\tau, \tau \in [t, T]$ *— винеровский процесс, то взаимосвязь стохастического интеграла* $\hat{S}[\phi, \psi^{(k)}]_{T,t}$ *и стохастического интеграла Стратоновича устанавливается как стандартная взаимосвязь стохастических интегралов Стратоновича и Ито* (см. леммы 1.4 – 1.7).

Рассмотрим ряд утверждений, которые являются обобщением сформулированных в предыдущем разделе теорем.

Пусть неслучайная функция $\Phi(t_1, \ldots, t_{k-1})$ непрерывна на замкнутом множестве $D_{k-1} = \{(t_1, \ldots, t_{k-1}) : \ t \le t_1 < \ldots < t_{k-1} \le T\}$.

Определим следующие стохастические интегралы:

$$\hat{S}[\xi, \Phi]_{T,t}^{(k)} = \int\limits_t^T \xi_{t_k} dM_{t_k}^{(k)} \ldots \int\limits_{t_3}^T dM_{t_2}^{(2)} \int\limits_{t_2}^T \Phi(t_1, t_2, \ldots, t_{k-1}) dM_{t_1}^{(1)} \stackrel{\text{def}}{=}$$

$$\stackrel{\text{def}}{=} \underset{N\to\infty}{\text{l.i.m.}} \sum_{l=0}^{N-1} \xi_{\tau_l} \Delta M_{\tau_l}^{(k)} \int\limits_{\tau_{l+1}}^T dM_{t_{k-1}}^{(k-1)} \ldots \int\limits_{t_3}^T dM_{t_2}^{(2)} \int\limits_{t_2}^T \Phi(t_1, t_2, \ldots, t_{k-1}) dM_{t_1}^{(1)}$$

при $k \ge 3$ и

$$\hat{S}[\xi, \Phi]_{T,t}^{(2)} = \int\limits_t^T \xi_{t_2} dM_{t_2}^{(2)} \int\limits_{t_2}^T \Phi(t_1) dM_{t_1}^{(1)} \stackrel{\text{def}}{=} \underset{N\to\infty}{\text{l.i.m.}} \sum_{l=0}^{N-1} \xi_{\tau_l} \Delta M_{\tau_l}^{(2)} \int\limits_{\tau_{l+1}}^T \Phi(t_1) dM_{t_1}^{(1)},$$

где сохранен смысл обозначений, входящих в (3.25)–(3.27), а случайный процесс $\xi_\tau, \ \tau \in [t, T]$ принадлежит классу $\tilde{H}_2(\rho, [t, T])$.

Кроме того, положим

$$S[\xi,\Phi]_{T,t}^{(k)}=\int\limits_t^T\ldots\int\limits_t^{t_{k-1}}\Phi(t_1,\ldots,t_{k-1})\xi_{t_k}dM_{t_k}^{(k)}\ldots dM_{t_1}^{(1)},\ k\ge 2, \qquad (3.28)$$

правая часть (3.28) понимается как повторный стохастический интеграл по D-мартингалу.

Введем в рассмотрение также следующие повторные стохастические интегралы

$$\tilde{S}[\Phi]_{T,t}^{(k-1)}=\int\limits_t^T dM_{t_{k-1}}^{(i_{k-1})}\ldots\int\limits_{t_3}^T dM_{t_2}^{(i_2)}\int\limits_{t_2}^T\Phi(t_1,t_2,\ldots,t_{k-1})dM_{t_1}^{(i_1)}\stackrel{\text{def}}{=}$$

$$\stackrel{\text{def}}{=}\underset{N\to\infty}{\text{l.i.m.}}\sum_{l=0}^{N-1}\Delta M_{\tau_l}^{(i_{k-1})}\int\limits_{\tau_{l+1}}^T dM_{t_{k-2}}^{(i_{k-2})}\ldots\int\limits_{t_3}^T dM_{t_2}^{(i_2)}\int\limits_{t_2}^T\Phi(t_1,t_2,\ldots,t_{k-1})dM_{t_1}^{(i_1)},$$

$$S'[\Phi]_{T,t}^{(k-1)}=\int\limits_t^T\ldots\int\limits_t^{t_{k-2}}\Phi(t_1,\ldots,t_{k-1})dM_{t_{k-1}}^{(i_{k-1})}\ldots dM_{t_1}^{(i_1)},\ k\ge 2.$$

Нетрудно показать по аналогии с доказательством теоремы 3.5, что если функция $\Phi(t_1,\ldots,t_{k-1})$ непрерывна на замкнутом множестве $D_{k-1}=\{(t_1,\ldots,t_{k-1}):\ t\le t_1<\ldots<t_{k-1}\le T\}$, то существует стохастический интеграл $\tilde{S}[\Phi]_{T,t}^{(k-1)}$ и с вероятностью 1 справедливо равенство: $S'[\Phi]_{T,t}^{(k-1)}=\tilde{S}[\Phi]_{T,t}^{(k-1)}$.

В свою очередь, используя этот факт можно по аналогии с доказательством теоремы 3.5 доказать следующую теорему.

Теорема 3.6. *Пусть выполнено условие* AII *разд.* 3.1.2, $\xi_\tau\in\tilde{H}_2(\rho,[t,T])$ *и* $|\rho_\tau|\le K<\infty$ *с вероятностью* 1 *при всех* $\tau\in[t,T]$. *Тогда существует стохастический интеграл* $\hat{S}[\xi,\Phi]_{T,t}^{(k)}$ *и* $S[\xi,\Phi]_{T,t}^{(k)}=\hat{S}[\xi,\Phi]_{T,t}^{(k)}$ *с вероятностью* 1 $(k\ge 2)$.

Теорема 3.6 является обобщением теоремы 3.2 на случай повторных стохастических интегралов по D-мартингалу.

Рассмотрим еще два утверждения.

Теорема 3.7. *Пусть выполнены условия теоремы* 3.5 *и* $h(\tau)$ — *непрерывная на промежутке* $[t,T]$ *неслучайная функция. Тогда*

$$\int\limits_t^T\phi_\tau dM_\tau^{(k+1)}h(\tau)\hat{S}[\psi^{(k)}]_{T,\tau}=\int\limits_t^T\phi_\tau h(\tau)dM_\tau^{(k+1)}\hat{S}[\psi^{(k)}]_{T,\tau}\ \text{с в. } 1 \qquad (3.29)$$

и стохастические интегралы в левой и правой частях (3.29) *существуют.*

Теорема 3.8. *В условиях теоремы* 3.7

$$\int\limits_t^T h(t_1) \int\limits_t^{t_1} \phi_\tau dM_\tau^{(k+2)} dM_{t_1}^{(k+1)} \hat{S}[\psi^{(k)}]_{T,t_1} =$$

$$= \int\limits_t^T \phi_\tau dM_\tau^{(k+2)} \int\limits_\tau^T h(t_1) dM_{t_1}^{(k+1)} \hat{S}[\psi^{(k)}]_{T,t_1} \text{ с в. } 1, \tag{3.30}$$

причем левая и правая части (3.30) *существуют.*

Доказательства теорем 3.7 и 3.8 аналогичны доказательствам теорем 3.3 и 3.4 соответственно.

3.3 Соотношения между повторными стохастическими интегралами Стратоновича и Ито произвольной кратности

Пусть выполнены условия:

BI. $\mathbf{f}_\tau \in \Re^m$ — $\mathcal{F}_\tau$-измеримый при всех $\tau \in [0,T]$ стандартный векторный винеровский процесс с независимыми компонентами $\mathbf{f}_\tau^{(i)}$; $i = 1,\ldots,m$.

BII. $\psi_j(\tau)$; $j = 1,\ldots,k$ — непрерывно дифференцируемые на промежутке $[t,T]$ функции.

Введем следующие обозначения:

$$J[\psi^{(k)}]_{T,t}^{s_l,\ldots,s_1} \stackrel{\text{def}}{=} \prod_{p=1}^{l} \mathbf{1}_{\{i_{s_p}=i_{s_p+1}\neq 0\}} \times$$

$$\times \int\limits_t^T \psi_k(t_k) \ldots \int\limits_t^{t_{s_l+3}} \psi_{s_l+2}(t_{s_l+2}) \int\limits_t^{t_{s_l+2}} \psi_{s_l}(t_{s_l+1}) \psi_{s_l+1}(t_{s_l+1}) \times$$

$$\times \int\limits_t^{t_{s_l+1}} \psi_{s_l-1}(t_{s_l-1}) \ldots \int\limits_t^{t_{s_1+3}} \psi_{s_1+2}(t_{s_1+2}) \int\limits_t^{t_{s_1+2}} \psi_{s_1}(t_{s_1+1}) \psi_{s_1+1}(t_{s_1+1}) \times$$

$$\times \int\limits_t^{t_{s_1+1}} \psi_{s_1-1}(t_{s_1-1}) \ldots \int\limits_t^{t_2} \psi_1(t_1) d\mathbf{w}_{t_1}^{(i_1)} \ldots d\mathbf{w}_{t_{s_1-1}}^{(i_{s_1-1})} dt_{s_1+1} d\mathbf{w}_{t_{s_1+2}}^{(i_{s_1+2})} \ldots$$

$$\ldots d\mathbf{w}_{t_{s_l-1}}^{(i_{s_l-1})} dt_{s_l+1} d\mathbf{w}_{t_{s_l+2}}^{(i_{s_l+2})} \ldots d\mathbf{w}_{t_k}^{(i_k)}, \tag{3.31}$$

$$J^*[\psi^{(k)}]_{T,t} = \int\limits_t^{*T} \psi_k(t_k) \ldots \int\limits_t^{*t_2} \psi_1(t_1) d\mathbf{w}_{t_1}^{(i_1)} \ldots d\mathbf{w}_{t_k}^{(i_k)}, \tag{3.32}$$

$$J[\psi^{(k)}]_{T,t} = \int\limits_t^{T} \psi_k(t_k) \ldots \int\limits_t^{t_2} \psi_1(t_1) d\mathbf{w}_{t_1}^{(i_1)} \ldots d\mathbf{w}_{t_k}^{(i_k)}, \tag{3.33}$$

где в (3.31)–(3.33) $\psi^{(k)} \stackrel{\text{def}}{=} (\psi_k, \ldots, \psi_1)$, $\psi^{(1)} \stackrel{\text{def}}{=} \psi_1$,

$$\mathcal{A}_{k,l} = \{(s_l, \ldots, s_1) : \ s_l > s_{l-1} + 1, \ldots, s_2 > s_1 + 1;$$
$$s_l, \ldots, s_1 = 1, \ldots, k-1\}, \tag{3.34}$$

$(s_l, \ldots, s_1) \in \mathcal{A}_{k,l}$; $l = 1, \ldots, \left[\frac{k}{2}\right]$; $i_s = 0, \ 1, \ldots, m$; $s = 1, \ldots, k$; $[x]$ — целая часть числа x; $\mathbf{1}_A$ — индикатор множества A ($\mathbf{1}_A = 1$, если условие A выполнено и $\mathbf{1}_A = 0$ в противном случае). Отметим, что далее наряду с этими сокращенными обозначениями, там, где это необходимо, будут использоваться более развернутые.

Сформулируем теорему о связи повторных стохастических интегралов Ито и Стратоновича $J[\psi^{(k)}]_{T,t}$, $J^*[\psi^{(k)}]_{T,t}$ произвольной фиксированной кратности k.

Теорема 3.9. *Пусть условия* BI *и* BII *данного раздела выполнены. Тогда справедливо следующее соотношение между повторными стохастическими интегралами Ито и Стратоновича:*

$$J^*[\psi^{(k)}]_{T,t} = J[\psi^{(k)}]_{T,t} + \sum_{r=1}^{\left[\frac{k}{2}\right]} \frac{1}{2^r} \sum_{(s_r, \ldots, s_1) \in \mathcal{A}_{k,r}} J[\psi^{(k)}]_{T,t}^{s_r, \ldots, s_1} \ \text{с в. 1}, \tag{3.35}$$

где $\sum\limits_{\emptyset}$ *полагается равной нулю.*

Доказательство. По индукции нетрудно установить, что в условиях теоремы существуют повторные стохастические интегралы $J[\psi^{(k)}]_{T,t}$, $J[\psi^{(k)}]_{T,t}^{s_r, \ldots, s_1}$, входящие в (3.35). Докажем это равенство по индукции. Рассмотрим случай $k = 1$. Согласно (3.35) имеем верное с вероятностью 1 равенство

$$J[\psi_1]_{T,t} = J^*[\psi_1]_{T,t}. \tag{3.36}$$

Соотношение (3.36) является очевидным. При $k = 2$ из (3.35) получаем

$$J^*[\psi^{(2)}]_{T,t} = J[\psi^{(2)}]_{T,t} + \frac{1}{2} J[\psi^{(2)}]_{T,t}^{1}. \tag{3.37}$$

Покажем, что равенство (3.37) справедливо с вероятностью 1. Для этого рассмотрим процесс $\eta_{t_2,t} = \psi_2(t_2) J[\psi_1]_{t_2,t}$, $t_2 \in [t, T]$, и найдем

с помощью формулы Ито (лемма 1.1) его стохастический дифференциал:

$$d\eta_{t_2,t} = J[\psi_1]_{t_2,t} d\psi_2(t_2) + \psi_1(t_2)\psi_2(t_2) d\mathbf{w}_{t_2}^{(i_1)}. \tag{3.38}$$

Из равенства (3.38) следует, что диффузионный коэффициент процесса $\eta_{t_2,t}, t_2 \in [t,T]$, равен $\mathbf{1}_{\{i_1 \neq 0\}}\psi_1(t_2)\psi_2(t_2)$. Далее по лемме 1.6 с вероятностью 1 выводим соотношение (3.37). Таким образом, утверждение теоремы доказано при $k = 1,\ 2$.

Предположим, что утверждение теоремы справедливо при некотором $k > 2$, и докажем его справедливость при значении k, на единицу большем. В предположении индукции с вероятностью 1 имеем

$$J^*[\psi^{(k+1)}]_{T,t} =$$

$$= \int\limits_t^{*T} \psi_{k+1}(\tau)\Big\{ J[\psi^k]_{\tau,t} + \sum_{r=1}^{\left[\frac{k}{2}\right]} \frac{1}{2^r} \sum_{(s_r,\ldots,s_1)\in\mathcal{A}_{k,r}} J[\psi^{(k)}]_{\tau,t}^{s_r,\ldots,s_1} \Big\} d\mathbf{w}_\tau^{(i_{k+1})} =$$

$$= \int\limits_t^{*T} \psi_{k+1}(\tau) J[\psi^{(k)}]_{\tau,t} d\mathbf{w}_\tau^{(i_{k+1})} +$$

$$+ \sum_{r=1}^{\left[\frac{k}{2}\right]} \frac{1}{2^r} \sum_{(s_r,\ldots,s_1)\in\mathcal{A}_{k,r}} \int\limits_t^{*T} \psi_{k+1}(\tau) J[\psi^{(k)}]_{\tau,t}^{s_r,\ldots,s_1} d\mathbf{w}_\tau^{(i_{k+1})}. \tag{3.39}$$

Используя формулу Ито (лемма 1.1) и лемму 1.6, с вероятностью 1 получаем

$$\int\limits_t^{*T} \psi_{k+1}(\tau) J[\psi^{(k)}]_{\tau,t} d\mathbf{w}_\tau^{(i_{k+1})} = J[\psi^{(k+1)}]_{T,t} + \frac{1}{2} J[\psi^{(k+1)}]_{T,t}^k, \tag{3.40}$$

$$\int\limits_t^{*T} \psi_{k+1}(\tau) J[\psi^{(k)}]_{\tau,t}^{s_r,\ldots,s_1} d\mathbf{w}_\tau^{(i_{k+1})} =$$

$$= \begin{cases} J[\psi^{(k+1)}]_{T,t}^{s_r,\ldots,s_1} & \text{при } s_r = k-1, \\ J[\psi^{(k+1)}]_{T,t}^{s_r,\ldots,s_1} + \frac{1}{2} J[\psi^{(k+1)}]_{T,t}^{k,s_r,\ldots,s_1} & \text{при } s_r < k-1. \end{cases} \tag{3.41}$$

После подстановки (3.40) и (3.41) в (3.39) и перегруппировки слагаемых приходим к справедливым с вероятностью 1 соотношениям

$$J^*[\psi^{(k+1)}]_{T,t} = J[\psi^{(k+1)}]_{T,t} + \sum_{r=1}^{\left[\frac{k}{2}\right]} \frac{1}{2^r} \sum_{(s_r,\ldots,s_1)\in\mathcal{A}_{k+1,r}} J[\psi^{(k+1)}]_{T,t}^{s_r,\ldots,s_1} \tag{3.42}$$

при четном k и

$$J^*[\psi^{(k'+1)}]_{T,t} = J[\psi^{(k'+1)}]_{T,t} + \sum_{r=1}^{\left[\frac{k'}{2}\right]+1} \frac{1}{2^r} \sum_{(s_r,\ldots,s_1)\in\mathcal{A}_{k'+1,r}} J[\psi^{(k'+1)}]_{T,t}^{s_r,\ldots,s_1} \quad (3.43)$$

при $k' = k+1$ нечетном. Из (3.42) и (3.43) с вероятностью 1 имеем

$$J^*[\psi^{(k+1)}]_{T,t} = J[\psi^{(k+1)}]_{T,t} + \sum_{r=1}^{\left[\frac{k+1}{2}\right]} \frac{1}{2^r} \sum_{(s_r,\ldots,s_1)\in\mathcal{A}_{k+1,r}} J[\psi^{(k+1)}]_{T,t}^{s_r,\ldots,s_1}. \quad (3.44)$$

Соотношение (3.44) завершает доказательство теоремы. □

З а м е ч а н и е 3.4. *Результат теоремы* 3.9 *при* k=1,...,4 *для стохастических интегралов несколько иного вида, чем* $J^*[\psi^{(k)}]_{T,t}$, $J[\psi^{(k)}]_{T,t}$, *известен* [86]. *Обобщение этих результатов на случай произвольного* k, *по-видимому, приводится здесь впервые.*

З а м е ч а н и е 3.5. *Результат теоремы* 3.9 *может быть обобщен, т.е. функция* $\psi_1(s)$ *в* (3.35) *может быть заменена на случайный процесс* ϕ_s *из класса* $\mathcal{M}_2([t,T])$.

З а м е ч а н и е 3.6. *В* [86] *рассматриваются соотношения между повторными стохастическими интегралами Стратоновича и Ито, взятыми по случайному промежутку* $[t(\omega), s(\omega)]$, *где* $t(\omega), s(\omega)$ — *моменты остановки, для которых* $0 \le t(\omega) \le s(\omega) \le T$ *с вероятностью* 1. *Результаты теоремы* 3.9 *и лемм* 1.4 – 1.7 *также могут быть обобщены на случай повторных стохастических интегралов, взятых по промежутку* $[t(\omega), s(\omega)]$.

З а м е ч а н и е 3.7. *Очевидно, что в условиях теоремы* 3.9 *с вероятностью* 1 *справедливо равенство*

$$J^\circ[\psi^{(k)}]_{T,t} = J[\psi^{(k)}]_{T,t} + \sum_{r=1}^{\left[\frac{k}{2}\right]} \theta^r \sum_{(s_r,\ldots,s_1)\in\mathcal{A}_{k,r}} J[\psi^{(k)}]_{T,t}^{s_r,\ldots,s_1}, \quad (3.45)$$

где $\theta \in [0,\ 1]$; $J^\circ[\psi^{(k)}]_{T,t}$ — *повторный стохастический* θ*-интеграл* (см. главу 1) *вида*

$$J^\circ[\psi^{(k)}]_{T,t} = \int_t^{\circ T} \psi_k(t_k) \ldots \int_t^{\circ t_2} \psi_1(t_1) d\mathbf{w}_{t_1}^{(i_1)} \ldots d\mathbf{w}_{t_k}^{(i_k)}.$$

Остальные обозначения, входящие в (3.45), *такие же, как в теореме* 3.9. *Доказательство* (3.45) *повторяет доказательство теоремы* 3.9 *при замене в соответствующих местах* $\frac{1}{2}$ *на* θ.

Пример 3.2. *Нетрудно проверить, что из теоремы* 3.9 *при* $k = 1, 2, 3, 4$ *с вероятностью* 1 *вытекает следующее семейство формул*

$$\int\limits_t^{*T} \psi_1(t_1) d\mathbf{w}_{t_1}^{(i_1)} = \int\limits_t^T \psi_1(t_1) d\mathbf{w}_{t_1}^{(i_1)},$$

$$\int\limits_t^{*T} \psi_2(t_2) \int\limits_t^{*t_2} \psi_1(t_1) d\mathbf{w}_{t_1}^{(i_1)} d\mathbf{w}_{t_2}^{(i_2)} = \int\limits_t^T \psi_2(t_2) \int\limits_t^{t_2} \psi_1(t_1) d\mathbf{w}_{t_1}^{(i_1)} d\mathbf{w}_{t_2}^{(i_2)}$$

$$+\frac{1}{2}\mathbf{1}_{\{i_1=i_2\ne 0\}} \int\limits_t^T \psi_2(t_2)\psi_1(t_2) dt_2,$$

$$\int\limits_t^{*T} \psi_3(t_3) \ldots \int\limits_t^{*t_2} \psi_1(t_1) d\mathbf{w}_{t_1}^{(i_1)} \ldots d\mathbf{w}_{t_3}^{(i_3)} = \int\limits_t^T \psi_3(t_3) \ldots \int\limits_t^{t_2} \psi_1(t_1) d\mathbf{w}_{t_1}^{(i_1)} \ldots d\mathbf{w}_{t_3}^{(i_3)}$$

$$+\frac{1}{2}\mathbf{1}_{\{i_1=i_2\ne 0\}} \int\limits_t^T \psi_3(t_3) \int\limits_t^{t_3} \psi_2(t_2)\psi_1(t_2) dt_2 d\mathbf{w}_{t_3}^{(i_3)} +$$

$$+\frac{1}{2}\mathbf{1}_{\{i_2=i_3\ne 0\}} \int\limits_t^T \psi_3(t_3)\psi_2(t_3) \int\limits_t^{t_3} \psi_1(t_1) d\mathbf{w}_{t_1}^{(i_1)} dt_3,$$

$$\int\limits_t^{*T} \psi_4(t_4) \ldots \int\limits_t^{*t_2} \psi_1(t_1) d\mathbf{w}_{t_1}^{(i_1)} \ldots d\mathbf{w}_{t_4}^{(i_4)} = \int\limits_t^T \psi_4(t_4) \ldots \int\limits_t^{t_2} \psi_1(t_1) d\mathbf{w}_{t_1}^{(i_1)} \ldots d\mathbf{w}_{t_4}^{(i_4)}$$

$$+\frac{1}{2}\mathbf{1}_{\{i_1=i_2\ne 0\}} \int\limits_t^T \psi_4(t_4) \int\limits_t^{t_4} \psi_3(t_3) \int\limits_t^{t_3} \psi_1(t_2)\psi_2(t_2) dt_2 d\mathbf{w}_{t_3}^{(i_3)} d\mathbf{w}_{t_4}^{(i_4)} +$$

$$+\frac{1}{2}\mathbf{1}_{\{i_2=i_3\ne 0\}} \int\limits_t^T \psi_4(t_4) \int\limits_t^{t_4} \psi_3(t_3)\psi_2(t_3) \int\limits_t^{t_3} \psi_1(t_1) d\mathbf{w}_{t_1}^{(i_1)} dt_3 d\mathbf{w}_{t_4}^{(i_4)} +$$

$$+\frac{1}{2}\mathbf{1}_{\{i_3=i_4\ne 0\}} \int\limits_t^T \psi_4(t_4)\psi_3(t_4) \int\limits_t^{t_4} \psi_2(t_2) \int\limits_t^{t_2} \psi_1(t_1) d\mathbf{w}_{t_1}^{(i_1)} d\mathbf{w}_{t_2}^{(i_2)} dt_4 +$$

$$+\frac{1}{4}\mathbf{1}_{\{i_1=i_2\ne 0\}}\mathbf{1}_{\{i_3=i_4\ne 0\}} \int\limits_t^T \psi_4(t_4)\psi_3(t_4) \int\limits_t^{t_4} \psi_2(t_2)\psi_1(t_2) dt_2 dt_4.$$

3.4 Аналитические формулы для вычисления стохастических интегралов

Настоящий раздел посвящен получению на основе формулы Ито двух семейств аналитических формул для вычисления стохастических интегралов.

Пусть задано вероятностное пространство $(\Omega, \mathcal{F}, \mathsf{P})$. Рассмотрим процесс Ито $\eta_\tau \in \Re^n$, определенный при $\tau \in [0,T]$, $T < \infty$, как решение стохастического дифференциального уравнения Ито

$$d\eta_\tau = a(\eta_\tau, \tau)d\tau + \Sigma(\eta_\tau, \tau)d\mathbf{f}_\tau, \ \eta_0 = \eta(0, \omega), \tag{3.46}$$

где $a(\eta, \tau) : \Re^n \times [0,T] \to \Re^n$, $\Sigma(\eta, \tau) : \Re^n \times [0,T] \to \Re^{n\times m}$ — неслучайные функции; $\mathbf{f}_\tau \in \Re^m$ — $\mathcal{F}_\tau$-измеримый при всех $\tau \in [0,T]$ стандартный векторный винеровский процесс с независимыми компонентами; случайная величина η_0 не зависит от приращения $\mathbf{f}_\tau - \mathbf{f}_0$ при $\tau > 0$. Относительно функций $a(\eta, \tau)$ и $\Sigma(\eta, \tau)$ предполагаем, что они удовлетворяют условиям AI–AIII (теорема 1.6). В противном случае воспользуемся [86] точными решениями конкретных стохастических дифференциальных уравнений Ито вида (3.46) с целью демонстрации существования их решений.

Пусть $Y \subseteq \Re^n$ — множество, для которого

$$\mathsf{P}\left\{\eta_\tau \in Y \text{ при всех } \tau \in [0,T]\right\} = 1,$$

а функция $R(\eta, \tau) : \Re^n \times [0,T] \to \Re^1$ непрерывна и имеет непрерывные частные производные $\frac{\partial R}{\partial \tau}(\eta, \tau)$, $\frac{\partial R}{\partial \eta^{(i)}}(\eta, \tau)$, $\frac{\partial^2 R}{\partial \eta^{(i)} \partial \eta^{(j)}}(\eta, \tau)$; $i, j = 1, \ldots, n$ при всех $(\eta, \tau) \in Y \times [0,T]$.

Запишем формулу Ито для процесса $R(\eta_s, s)$:

$$\int\limits_t^s \frac{\partial R}{\partial \eta}(\eta_\tau, \tau) \stackrel{1}{\cdot} d\eta_\tau = R(\eta_s, s) - R(\eta_t, t) - \int\limits_t^s LR(\eta_\tau, \tau)d\tau \text{ с в.1}, \tag{3.47}$$

где $s, t \in [0,T]$; $s > t$; $\stackrel{1}{\cdot}$ — скалярное произведение; L — оператор вида

$$Lg(\eta, \tau) = \frac{\partial g}{\partial \tau}(\eta, \tau) + \frac{1}{2}\sum_{r=1}^{m}\sum_{i,j=1}^{n} \Sigma^{(ir)}(\eta, \tau)\Sigma^{(jr)}(\eta, \tau)\frac{\partial^2 g}{\partial \eta^{(i)}\partial \eta^{(j)}}(\eta, \tau), \tag{3.48}$$

где $g : Y \times [0,T] \to \Re^1$ — некоторая функция, для которой существует правая часть (3.48).

Пусть функция $R(\eta, \tau)$ удовлетворяет дифференциальному уравнению

$$LR(\eta, \tau) = \varphi(\tau), \tag{3.49}$$

где $\varphi(\tau)$ — некоторая скалярная неслучайная интегрируемая на промежутке $[0,T]$ функция. Тогда (3.47) принимает вид

$$\int\limits_t^s \frac{\partial R}{\partial \eta}(\eta_\tau,\tau) \overset{1}{\cdot} d\eta_\tau = R(\eta_s,s) - R(\eta_t,t) - \int\limits_t^s \varphi(\tau)d\tau \text{ с в.1.} \tag{3.50}$$

Соотношение (3.50) можно интерпретировать как аналитическую формулу для вычисления интеграла в левой части (3.50). В литературе известно лишь несколько формул типа формулы (3.50) для конкретных функций $a(\eta,\tau)$, $\Sigma(\eta,\tau)$, $R(\eta,\tau)$, $\varphi(\tau)$. Приведем некоторые из них:

$$\int\limits_t^s (f_\tau - f_s)df_\tau = -\frac{1}{2}(s-t) + \frac{1}{2}\left(f_s - f_t\right)^2 \text{ с в.1, } f_\tau \in \Re^1, \tag{3.51}$$

$$\int\limits_t^s \mathbf{f}_\tau \overset{1}{\cdot} d\mathbf{f}_\tau = -\frac{m}{2}(s-t) + \left(|\mathbf{f}_s|^2 - |\mathbf{f}_t|^2\right) \text{ с в.1, } \mathbf{f}_\tau \in \Re^m, \tag{3.52}$$

$$\int\limits_t^s \frac{\mathbf{f}_\tau \overset{1}{\cdot} d\mathbf{f}_\tau}{|\mathbf{f}_\tau|^m} = \frac{1}{2-m}\left(|\mathbf{f}_s|^{2-m} - |\mathbf{f}_t|^{2-m}\right) \text{ с в.1, } m \geq 3, \ \mathbf{f}_\tau \in \Re^m, \tag{3.53}$$

$$\int\limits_t^s \frac{\mathbf{f}_\tau \overset{1}{\cdot} d\mathbf{f}_\tau}{|\mathbf{f}_\tau|^2} = \ln|\mathbf{f}_s| - \ln|\mathbf{f}_t| \text{ с в.1, } \mathbf{f}_\tau \in \Re^2. \tag{3.54}$$

Формулу (3.51) можно найти в [10], а формулы (3.52)–(3.54) — в [132].

Отметим, что для стохастических интегралов Стратоновича от случайных процессов специального вида справедливы аналитические формулы их вычисления, согласующиеся с правилами классического интегрального исчисления. Так, предположим, что функция $F(x) : \Re^1 \to \Re^1$ удовлетворяет условиям леммы 1.4. Тогда согласно лемме 1.4 имеем

$$\int\limits_t^{*s} F(f_\tau)df_\tau = \int\limits_t^s F(f_\tau)df_\tau + \frac{1}{2}\int\limits_t^s \frac{dF}{dx}(f_\tau)d\tau \text{ с в.1,} \tag{3.55}$$

где $f_\tau \in \Re^1$ — стандартный винеровский процесс.

Вместе с тем по формуле Ито

$$G(f_s) - G(f_t) = \frac{1}{2}\int\limits_t^s \frac{dF}{dx}(f_\tau)d\tau + \int\limits_t^s F(f_\tau)df_\tau \text{ с в.1,} \tag{3.56}$$

где $dG(x)/dx = F(x)$. Объединяя (3.55) и (3.56), получаем

$$\int\limits_t^{*s} F(f_\tau)df_\tau = G(f_s) - G(f_t) \text{ с в.1.} \tag{3.57}$$

Формулу (3.57) можно найти, например, в [86].

Предлагаемый далее подход основывается на решении дифференциального уравнения (3.49) при некоторых допущениях относительно функций $R(\eta,\tau)$ и $\Sigma(\eta,\tau)$. Так, пусть $\eta \in \Re^1$, $\Sigma(\eta,\tau) = \theta(\eta)\sigma(\tau)$, где $\theta(\eta) : \Re^1 \to \Re^m, \sigma(\tau) : [0,T] \to \Re^1$. Тогда дифференциальное уравнение (3.49) принимает вид

$$\frac{\partial R}{\partial \tau}(\eta,\tau) + \frac{1}{2}\sigma^2(\tau)\beta^2(\eta)\frac{\partial^2 R}{\partial \eta^2}(\eta,\tau) = \varphi(\tau), \tag{3.58}$$

где $\beta^2(\eta) = \sum\limits_{r=1}^{m} \left(\theta^{(r)}(\eta)\right)^2$.

Решение уравнения (3.58) может быть найдено, например, методом аддитивного ($R(\eta,\tau) = \rho(\eta) + \psi(\tau)$) или мультипликативного ($R(\eta,\tau) = \rho(\eta)\psi(\tau)$) разделения переменных.

3.4.1 Аддитивное разделение переменных

Пусть $R(\eta,\tau) = \rho(\eta) + \psi(\tau),\ \eta \in \Re^1$. Тогда уравнение (3.58) принимает вид

$$\frac{d\psi}{d\tau}(\tau) + \frac{1}{2}\sigma^2(\tau)\beta^2(\eta)\frac{d^2\rho}{d\eta^2}(\eta) = \varphi(\tau). \tag{3.59}$$

После разделения переменных в (3.59) при $\sigma(\tau) \neq 0$ находим

$$\frac{1}{2}\beta^2(\eta)\frac{d^2\rho}{d\eta^2}(\eta) = \left(\varphi(\tau) - \frac{d\psi}{d\tau}(\tau)\right)\frac{1}{\sigma^2(\tau)} = \lambda \text{ (постоянная)}. \tag{3.60}$$

Если $\beta^2(\eta) > 0$, то из (3.60) получаем два дифференциальных уравнения: $\frac{d\psi}{d\tau}(\tau) = \varphi(\tau) - \lambda\sigma^2(\tau)$, $\frac{d^2\rho}{d\eta^2}(\eta) = 2\lambda/\beta^2(\eta)$, решения которых имеют вид

$$\psi(\tau) = \psi_0 + \int\limits_0^{\tau} \left(\varphi(u) - \lambda\sigma^2(u)\right) du, \tag{3.61}$$

$$\rho(\eta) = \rho_0 + \rho_1\eta + 2\lambda \int\limits_{y_0}^{\eta} g(u)du, \tag{3.62}$$

где $g(u) \stackrel{\text{def}}{=} \int\limits_{y_0}^{u} dz/\beta^2(z)$; $\rho_0, \rho_1, y_0, \psi_0$ — постоянные; $\beta^2(u) > 0$ при $u \in [y_0, \eta]$.

Подстановка (3.61) и (3.62) в функцию $R(\eta,\tau) = \rho(\eta) + \psi(\tau)$, $\eta \in \Re^1$, а $R(\eta,\tau)$ — в (3.50) при $\lambda \neq 0$ дает

$$\int\limits_t^s g(\eta_\tau)d\eta_\tau = -\frac{1}{2}\int\limits_t^s \sigma^2(\tau)d\tau + \int\limits_{\eta_t}^{\eta_s} g(u)du \text{ с в.1.} \tag{3.63}$$

При определенном выборе функции $\beta(z)$ интеграл $\int\limits_{\eta_t}^{\eta_s} g(u)du$ может быть вычислен аналитически. Тогда формула (3.63) при различных $\beta(z)$ определяет целое семейство аналитических выражений для вычисления стохастического интеграла $\int\limits_t^s g(\eta_\tau)d\eta_\tau$.

Рассмотрим примеры выбора функций $\beta(z)$ и соответствующих им формул из семейства (3.63). При этом, в ряде случаев, если выбираемая функция $\beta(z)$ такова, что функция $\Sigma(\eta,\tau)$ не удовлетворяет условию AII (см. теорему 1.6), или такова, что налагаются ограничения на область определения или область значений процесса η_τ, то в этом случае для демонстрации существования процессов η_τ, удовлетворяющих формуле (3.63), воспользуемся примерами стохастических дифференциальных уравнений Ито и их точных решений η_τ. Далее везде f_t — стандартный скалярный винеровский процесс ($f_0=0$).

1. $\beta^2(\eta)=1$:

$$\int\limits_t^s \eta_\tau d\eta_\tau = -\frac{1}{2}\int\limits_t^s \sigma^2(\tau)d\tau + \frac{\eta_s^2}{2} - \frac{\eta_t^2}{2} \text{ с в.1.}$$

2. $\beta^2(\eta)=\sqrt{y(\eta)},\ y(\eta)\stackrel{\text{def}}{=} a\eta^2+b\eta+c,\ \Delta=4ac-b^2>0,\ a>0$:

$$\int\limits_t^s \mathrm{Arsh}\frac{2a\eta_\tau+b}{\sqrt{\Delta}}d\eta_\tau = -\frac{1}{2}\sqrt{a}\int\limits_t^s \sigma^2(\tau)d\tau + F(\eta_s)-F(\eta_t) \text{ с в.1,} \qquad (3.64)$$

где $F(x)\stackrel{\text{def}}{=}(x+b/(2a))\mathrm{Arsh}((2ax+b)/\sqrt{\Delta})-\sqrt{y(x)}/\sqrt{a}$.

3. $\beta^2(\eta)=y(\eta),\ \Delta=4ac-b^2>0,\ a>0$:

$$\int\limits_t^s \mathrm{arctg}\frac{2a\eta_\tau+b}{\sqrt{\Delta}}d\eta_\tau = -\frac{1}{4}\sqrt{\Delta}\int\limits_t^s \sigma^2(\tau)d\tau + F(\eta_s)-F(\eta_t) \text{ с в.1,}$$

где $F(x)\stackrel{\text{def}}{=}(x+b/(2a))\mathrm{arctg}((2ax+b)/\sqrt{\Delta})-(\sqrt{\Delta}/(4a))/\ln y(x)$.

4. $\beta^2(\eta)=1/\sqrt{y(\eta)},\ \Delta=4ac-b^2>0,\ a>0$:

$$\int\limits_t^s F_1(\eta_\tau)d\eta_\tau = -\frac{1}{2}\int\limits_t^s \sigma^2(\tau)d\tau + F_2(\eta_s)-F_2(\eta_t) \text{ с в.1,}$$

где $F_1(x)\stackrel{\text{def}}{=}((2ax+b)/(4a))\sqrt{y(x)}+(\Delta/(8a\sqrt{a}))\mathrm{Arsh}((2ax+b)/\sqrt{\Delta})$; $F_2(x)\stackrel{\text{def}}{=}(\Delta/(8a\sqrt{a}))F(x)+y^{3/2}(x)/(6a)$; функция $F(x)$ такая же, как в формуле (3.64).

5. $\beta^2(\eta) = 1/P_{n-1}(\eta)$, где $P_{n-1}(\eta) > 0$ — многочлен степени $n-1$ с вещественными коэффициентами:

$$\int\limits_t^s Q_n(\eta_\tau)d\eta_\tau = -\frac{1}{2}\int\limits_t^s \sigma^2(\tau)d\tau + H_{n+1}(\eta_s) - H_{n+1}(\eta_t) \text{ с в.1},$$

где $P_{n-1}(x) = \frac{dQ_n}{dx}(x)$; $H_{n+1}(x) = \int Q_n(x)dx$.

Далее будем считать η_0 и σ постоянными.

6. $\beta^2(\eta) = e^{-2\eta}$:

$$\int\limits_0^s e^{2\eta_\tau}d\eta_\tau = -\frac{1}{2}\int\limits_0^s \sigma^2(\tau)d\tau + \frac{1}{2}\left(e^{2\eta_s} - 1\right) \text{ с в.1},$$

где, например, $\eta_t = \ln\left(f_t + e^{\eta_0}\right)$ (решение уравнения $d\eta_t = -0.5e^{-2\eta_t}dt + e^{-\eta_t}df_t$), $0 \le |\eta_0| < \infty$, $\sigma(\tau) \equiv 1$, $s < \min\left\{t \ge 0 : \ f_t + e^{\eta_0} = 0\right\}$.

7. $\beta^2(\eta) = \eta^2$:

$$\int\limits_0^s \frac{d\eta_\tau}{\eta_\tau} = \frac{1}{2}\int\limits_0^s \sigma^2(\tau)d\tau + \ln\eta_s - \ln\eta_0 \text{ с в.1}, \tag{3.65}$$

где, например, $\eta_t = \eta_0 e^{\left(a-\frac{1}{2}\sigma^2\right)t+\sigma f_t}$ (решение уравнения $d\eta_t = a\eta_t dt + \sigma\eta_t df_t$), $0 < \eta_0 < \infty$, $\sigma(\tau) \equiv \sigma$, a — постоянная.

8. $\beta^2(\eta) = \eta > 0$:

$$\int\limits_0^s \ln\eta_\tau d\eta_\tau = -\frac{1}{2}\int\limits_0^s \sigma^2(\tau)d\tau + \eta_s\ln\eta_s - \eta_s - \eta_0\ln\eta_0 + \eta_0 \text{ с в.1},$$

где, например, $\eta_t = \left(f_t + \sqrt{\eta_0}\right)^2$ (решение уравнения $d\eta_t = dt + 2\sqrt{\eta_t}df_t$), $0 < \eta_0 < \infty$, $\sigma(\tau) \equiv 2$, $s < \min\left\{t \ge 0 : \ f_t + \sqrt{\eta_0} = 0\right\}$.

9. $\beta^2(\eta) = \eta^2(\eta^2 - 1)$, $|\eta| > 1$:

$$\int\limits_0^s \left(-\frac{1}{\eta_\tau} + \frac{1}{2}\ln\frac{\eta_\tau + 1}{\eta_\tau - 1}\right)d\eta_\tau = \frac{1}{2}\int\limits_0^s \sigma^2(\tau)d\tau + F(\eta_s) - F(\eta_0) \text{ с в.1},$$

где $F(x) \stackrel{\text{def}}{=} x\text{Arcth}x + 0.5\ln(x^2 - 1) - \ln x$ и, например, $\eta_t = \sec(\sigma f_t + \text{arcsec}\eta_0)$ (решение уравнения $d\eta_t = 0.5\sigma^2\eta_t(2\eta_t^2 - 1)dt + \sigma\eta_t\sqrt{\eta_t^2 - 1}df_t$) или $\eta_t = \text{cosec}(\sigma f_t + \text{arccosec}\eta_0)$ (решение уравнения $d\eta_t = 0.5\sigma^2\eta_t(2\eta_t^2 -$

$1)dt - \sigma\eta_t\sqrt{\eta_t^2-1}df_t)$, $1 < \eta_0 < \infty$; для приведенных процессов η_t : $s < \max\{t \geq 0 : \eta_t > 1\}$. В 1 случае $\sigma(\tau) \equiv \sigma$, а во 2: $\sigma(\tau) \equiv -\sigma$.

10. $\beta^2(\eta) = \cos^4\eta$:

$$\int\limits_0^s \left(\frac{\sin\eta_\tau}{\cos^3\eta_\tau} + 2\mathrm{tg}\eta_\tau\right) d\eta_\tau = -\frac{3}{2}\int\limits_0^s \sigma^2(\tau)d\tau + F(\eta_s) - F(\eta_0) \text{ с в.1},$$

где $F(x) \stackrel{\text{def}}{=} 2^{-1}\cos^{-2}x - 2\ln\cos x$ и, например, $\eta_t = \mathrm{arctg}(\sigma f_t + \mathrm{tg}\eta_0)$ (решение уравнения $d\eta_t = -\sigma^2\sin\eta_t\cos^3\eta_t dt + \sigma\cos^2\eta_t df_t$) или $\eta_t = \mathrm{arctg}(e^{-t}(\mathrm{tg}\eta_0 + \sqrt{2}\int\limits_0^t e^s df_s))$ (решение уравнения $d\eta_t = -(0.25\sin 4\eta_t + \sin 2\eta_t)dt + \sqrt{2}\cos^2\eta_t df_t)$, $\cos\eta_0 > 0$. В первом случае $\sigma(\tau) \equiv \sigma$, а во 2: $\sigma(\tau) \equiv \sqrt{2}$.

11. $\beta^2(\eta) = \sin^4\eta$:

$$\int\limits_0^s \left(-\frac{\cos\eta_\tau}{\sin^3\eta_\tau} - 2\mathrm{ctg}\eta_\tau\right) d\eta_\tau = -\frac{3}{2}\int\limits_0^s \sigma^2(\tau)d\tau + F(\eta_s) - F(\eta_0) \text{ с в.1},$$

где $F(x) \stackrel{\text{def}}{=} 2^{-1}\sin^{-2}x - 2\ln\sin x$ и, например, $\eta_t = \mathrm{arcctg}(\sigma f_t + \mathrm{ctg}\eta_0)$ (решение уравнения $d\eta_t = \sigma^2\cos\eta_t\sin^3\eta_t dt - \sigma\sin^2\eta_t df_t)$, $\sin\eta_0 > 0$, $\sigma(\tau) \equiv -\sigma$.

12. $\beta^2(\eta) = \left(1-\eta^2\right)^2$:

$$\int\limits_0^s \left(\frac{\eta_\tau}{2(1-\eta_\tau^2)} + \frac{1}{4}u(\eta_\tau)\right)d\eta_\tau = -\frac{1}{2}\int\limits_0^s \sigma^2(\tau)d\tau + \frac{\eta_s}{4}u(\eta_s) - \frac{\eta_0}{4}u(\eta_0) \text{ с в.1}, \tag{3.66}$$

где $u(x) \stackrel{\text{def}}{=} \ln|(1+x)/(1-x)|$ и, например, $\eta_t = \mathrm{th}(\sigma f_t + \mathrm{Arth}\eta_0)$ (решение уравнения $d\eta_t = -\sigma^2\eta_t(1-\eta_t^2)dt + \sigma(1-\eta_t^2)df_t)$, $|\eta_0| < 1$ или $\eta_t = \mathrm{cth}(\sigma f_t + \mathrm{Arcth}\eta_0)$ (решение уравнения $d\eta_t = \sigma^2\eta_t(1-\eta_t^2)dt - \sigma(1-\eta_t^2)df_t)$, $1 < |\eta_0| < \infty$. В 1 случае $\sigma(\tau) \equiv \sigma$, а во 2: $\sigma(\tau) \equiv -\sigma$.

13. $\beta^2(\eta) = |1-\eta^2|$:

$$\int\limits_0^s u(\eta_\tau)d\eta_\tau = -\int\limits_0^s \sigma^2(\tau)d\tau + \eta_s u(\eta_s) + u_1(\eta_s) - \eta_0 u(\eta_0) - u_1(\eta_0), \tag{3.67}$$

где $u(x) \stackrel{\text{def}}{=} \ln|(1+x)/(1-x)|$; $u_1(x) \stackrel{\text{def}}{=} \ln|1-x^2|$ и, например, $\eta_t = \mathrm{ch}(\sigma f_t + \mathrm{Arch}\eta_0)$ (решение уравнения $d\eta_t = 0.5\sigma^2\eta_t dt + \sigma\sqrt{\eta_t^2-1}df_t)$, $\eta_t =$

$\cos(\sigma f_t + \arccos\eta_0)$ (решение уравнения $d\eta_t = -0.5\sigma^2\eta_t dt - \sigma\sqrt{1-\eta_t^2}df_t$) или $\eta_t = \sin(\sigma f_t + \arcsin\eta_0)$ (решение уравнения $d\eta_t = -0.5\sigma^2\eta_t dt + \sigma\sqrt{1-\eta_t^2}df_t$). Для 1 процесса $\eta_t : \eta_0 \neq 1$ и $s < \min\{t \geq 0 : \eta_t = 1\}$, а для 2 и 3 процессов $\eta_t : \eta_0 \neq \pm 1$ и $s < \min\{t \geq 0 : \eta_t = \pm 1\}$. В 1 и 3 случае $\sigma(\tau) \equiv \sigma$, а во 2: $\sigma(\tau) \equiv -\sigma$.

3.4.2 Мультипликативное разделение переменных

Пусть $R(\eta,\tau) = \psi(\tau)\rho(\eta)$, где $\psi(\tau) : [0,T] \to \Re^1$; $\rho(\eta) : \Re^1 \to \Re^1$. Тогда, подставляя $R(\eta,\tau) = \psi(\tau)\rho(\eta)$ в (3.58) и полагая в нем $\varphi(\tau) \equiv 0$, получаем

$$\frac{d\psi}{d\tau}(\tau)\rho(\eta) + \frac{1}{2}\beta^2(\eta)\sigma^2(\tau)\psi(\tau)\frac{d^2\rho}{d\eta^2}(\eta) = 0. \tag{3.68}$$

Деля левую и правую части (3.68) на $\rho(\eta)\psi(\tau)\sigma^2(\tau)$ в предположении, что $\psi(\tau),\ \sigma(\tau),\ \rho(\eta) \neq 0$, находим

$$\frac{1}{\psi(\tau)\sigma^2(\tau)}\frac{d\psi}{d\tau}(\tau) = -\frac{1}{2}\frac{\beta^2(\eta)}{\rho(\eta)}\frac{d^2\rho}{d\eta^2}(\eta) = \lambda \text{ (постоянная)}. \tag{3.69}$$

Уравнение (3.69) эквивалентно дифференциальным уравнениям

$$\frac{d\psi}{d\tau}(\tau) = \lambda\sigma^2(\tau)\psi(\tau), \tag{3.70}$$

$$\beta^2(\eta)\frac{d^2\rho}{d\eta^2}(\eta) + \mu\rho(\eta) = 0,\ \ \mu = 2\lambda. \tag{3.71}$$

Общее решение дифференциального уравнения (3.70) имеет вид $\psi(\tau) = \psi_0\exp\Big(\lambda\int\limits_0^\tau \sigma^2(u)du\Big)$, где ψ_0 — произвольная постоянная. Нетрудно видеть, что частным решением дифференциального уравнения (3.58) является интеграл $\int\limits_0^\tau \varphi(u)du$. Поэтому общее решение дифференциального уравнения (3.58) с учетом сделанных допущений имеет вид

$$R(\eta,\tau) = \psi(\tau)\rho(\eta) + \int\limits_0^\tau \varphi(u)du, \tag{3.72}$$

где $\rho(\eta)$ — решение дифференциального уравнения (3.71).

Подставляя (3.72) при $\psi_0 \neq 0$ в (3.50), в рамках сделанных предположений получаем следующую формулу:

$$\int\limits_t^s \psi(\tau)\frac{d\rho}{d\eta}(\eta_\tau)d\eta_\tau = \psi(s)\rho(\eta_s) - \psi(t)\rho(\eta_t) \text{ с в.1.} \tag{3.73}$$

Рассмотрим примеры выбора $\beta(\eta)$, μ и $\rho(\eta)$ [133], которые могут быть использованы в формуле (3.73). Далее C_1, C_2, σ — постоянные.

1. $\beta^2(\eta) = 1$.

1.1. $\mu < 0,\ \rho(\eta) = C_1 e^{-\sqrt{|\mu|}\eta} + C_2 e^{\sqrt{|\mu|}\eta}$.

1.2. $\mu > 0,\ \rho(\eta) = C_1 \cos(\sqrt{\mu}\eta) + C_2 \sin(\sqrt{\mu}\eta)$.

2. $\beta^2(\eta) = 4(\eta^2+1)^2(a\eta^2+a-3)^{-1},\ a > 3,\ \mu = 1,\ \rho(\eta) = \left(\eta^2+1\right)^{1/4}\left(C_1 \cos u(\eta) + C_2 \sin u(\eta)\right)$, где $u(\eta) = 0.5\sqrt{a-1}\mathrm{Arsh}\eta$.

3. $\beta^2(\eta) = (a^2\eta^2+a)^{-1},\ a > 0,\ \mu = -1,\ \rho(\eta) = e^{a\eta^2/2}\left(C_1 + C_2 F(\eta)\right)$, где $F(\eta) = \int\limits_{-\infty}^{\eta} e^{-ax^2}dx$.

4. $\beta^2(\eta) = \left(\eta^2+1\right)^2$.

4.1. $\mu + 1 = \alpha^2 > 0$, $\rho(\eta) = \sqrt{\eta^2+1}\left(C_1 \cos u(\eta) + C_2 \sin u(\eta)\right)$.

4.2. $\mu + 1 = -\alpha^2 < 0$, $\rho(\eta) = \sqrt{\eta^2+1}\left(C_1 \mathrm{ch} u(\eta) + C_2 \mathrm{sh} u(\eta)\right)$.

Здесь полагаем $u(\eta) = \alpha \mathrm{arctg}\eta$.

4.3. $\mu = -1$, $\rho(\eta) = \sqrt{\eta^2+1}\left(C_1 + C_2 \mathrm{arctg}\eta\right)$.

Процесс η_t в примерах 4, например, имеет вид $\eta_t = \mathrm{tg}\left(t + f_t + \mathrm{arctg}\eta_0\right)$ (решение уравнения $d\eta_t = (1+\eta_t)(1+\eta_t^2)dt + (1+\eta_t^2)df_t$), $\eta_t = \mathrm{tg}\left(\sigma f_t + \mathrm{arctg}\eta_0\right)$ (решение уравнения $d\eta_t = \sigma^2\eta_t(1+\eta_t^2)dt + \sigma(1+\eta_t^2)df_t$) или $\eta_t = \mathrm{ctg}\left(\sigma f_t + \mathrm{arctg}\eta_0\right)$ (решение уравнения $d\eta_t = \sigma^2\eta_t(1+\eta_t^2)dt - \sigma(1+\eta_t^2)df_t$). Здесь предполагается, что процессы η_t в 1, 2 и 3 случае рассматриваются при $t \in [0, t^*)$, где t^* — первый момент после нуля, когда указанные процессы терпят разрыв 2 рода. Например, для 1 случая можно взять: $\eta_0 = 0$, а $t^* = \min\{t \geq 0:\ t + f_t = \pm\pi/2 + \pi k,\ k \in Z\}$. Считаем также, что в данном случае формула (3.73) рассматривается при $t = 0$, т. е. интеграл в ее левой части берется по промежутку $[0, s]$.

5. $\beta^2(\eta) = \eta^2 - 1 > 0,\ \mu = -6,\ \rho(\eta) = 4(\eta^2-1)\eta$ — частное решение. При этом, например, $\eta_t = \mathrm{ch}\left(\sigma f_t + \mathrm{Arch}\eta_0\right)$ (см. (3.67)).

6. $\beta^2(\eta) = 1 - \eta^2 > 0,\ \mu = 6,\ \rho(\eta) = 4(\eta^2-1)\eta$ — частное решение. При этом, например, $\eta_t = \cos\left(\sigma f_t + \arccos\eta_0\right)$ или $\eta_t = \sin\left(\sigma f_t + \arcsin\eta_0\right)$ (см. (3.67)).

7. $\beta^2(\eta) = \eta^4$.

7.1. $\mu < 0,\ \rho(\eta) = \eta\left(C_1 e^{\sqrt{|\mu|}/\eta} + C_2 e^{-\sqrt{|\mu|}/\eta}\right)$.

7.2. $\mu > 0,\ \rho(\eta) = \eta\left(C_1 \cos(\sqrt{|\mu|}\eta^{-1}) + C_2 \sin(\sqrt{|\mu|}\eta^{-1})\right)$.

При этом, например, $\eta_t = \eta_0(1 - \eta_0\sigma f_t)^{-1}$ (решение уравнения $d\eta_t =$

$\sigma^2\eta_t^3 dt + \sigma\eta_t^2 df_t$); $\eta_0 \neq 0$, $s < \min\{t \geq 0 : \ 1 - \eta_0 \sigma f_t = 0\}$. Предполагается, что в данном случае формула (3.73) рассматривается при $t = 0$, т. е. интеграл в ее левой части берется по промежутку $[0, s]$.

8. $\beta^2(\eta) = \eta^2$.

8.1. $c^2 = 0.25 - \mu > 0$, $\rho(\eta) = \sqrt{\eta}\,(C_1\eta^c + C_2\eta^{-c})$.

8.2. $c^2 = \mu - 0.25 > 0$, $\rho(\eta) = \sqrt{\eta}\,(C_1\cos(c\ln\eta) + C_2\sin(c\ln\eta))$.

8.3. $\mu = 0.25$, $\rho(\eta) = \sqrt{\eta}\,(C_1 + C_2\ln\eta)$.

В примерах 8 процесс η_t может быть, например, таким же, как в формуле (3.65).

9. $\beta^2(\eta) = -\eta^2\ln\eta > 0$, $0 < \eta < 1$, $\mu = -1$, $\rho(\eta) = C_1\ln\eta + C_2\left(\eta - \ln\eta \int\limits_{\eta_0}^{\eta} dy/\ln y\right)$. При этом, например, $\eta_t = e^{-\left(f_t + \sqrt{-\ln\eta_0}\right)^2}$ (решение уравнения $d\eta_t = -\eta_t\,(2\ln\eta_t + 1)\,dt - 2\eta_t\sqrt{-\ln\eta_t}df_t$), где $0 < \eta_0 < 1$.

10. $\beta^2(\eta) = \eta^4/(2\eta^2 + 1)$, $\rho(\eta) = C_1(\eta^2 - \eta)e^{\frac{1}{\eta}} + C_2(\eta^2 + \eta)e^{-\frac{1}{\eta}}$, $\mu = -1$.

11. $\beta^2(\eta) = \left(\eta^2 - 1\right)^2$.

11.1. $\mu - 1 = 4\alpha^2 > 0$, $\rho(\eta) = \sqrt{|\eta^2 - 1|}\,(C_1\cos(\alpha G(\eta)) + C_2\sin(\alpha G(\eta)))$.

11.2. $\mu - 1 = -4\alpha^2 < 0$, $\rho(\eta) = (\eta + 1)\left(C_1 u(\eta)^{\alpha - \frac{1}{2}} + C_2 u(\eta)^{-\alpha - \frac{1}{2}}\right)$.

11.3. $\mu = 1$, $\rho(\eta) = \sqrt{\eta^2 - 1}\,(C_1 + C_2 G(\eta))$.

В примерах 11 полагаем $u(\eta) = |(\eta + 1)/(\eta - 1)|$, а в примерах 11.1 и 11.3 — $G(\eta) = \ln u(\eta)$.

Процесс η_t в примерах 11.1, 11.2 может быть таким же, как в формуле (3.66), а в примере 11.3 $\eta_t = \mathrm{cth}\,(\sigma f_t + \mathrm{Arcth}\eta_0)$ (см. (3.66)).

Глава 4

Унифицированные разложения Тейлора–Ито и Тейлора–Стратоновича

Построение стохастических аналогов формулы Тейлора, так называемых разложений Тейлора–Ито и Тейлора–Стратоновича, является достаточно новым вопросом в теории случайных процессов. Первые работы, посвященные ему, относятся к 70–90 годам XX века: [67] (Г.Н. Мильштейн, 1974), [79, 82] (W. Wagner и E. Platen, 1978, 1982), [80, 82] (E. Platen, 1981, 1982), [84] (P.E. Kloeden, E. Platen, 1991), [85] (R. Pettersson, 1992).

Данная глава посвящена, главным образом, получению унифицированных разложений Тейлора–Ито и Тейлора–Стратоновича.

Повторные стохастические интегралы Ито, входящие в разложение Тейлора–Ито в форме Вагнера и Платена, будут преобразованы в данной главе к одной их двух минимальных (базисных) систем канонических повторных стохастических интегралов Ито меньшей кратности и с полиномиальными весовыми функциями. Эти преобразования будут произведены на основе формул замены порядка интегрирования в повторных стохастических интегралах Ито (см. главу 3). В результате после проведения ряда преобразований будут выведены два новых и, в некотором смысле, более компактных разложения Тейлора–Ито [105, 109, 118–124], которые мы назовем унифицированными.

С помощью соотношений между повторными стохастическими интегралами Ито и Стратоновича и формул замены порядка интегрирования в повторных стохастических интегралах Ито в данной главе также будут построены два унифицированных разложения Тейлора–Стратоновича [114].

Важно отметить, что коэффициентные функции унифицированных разложений Тейлора–Ито и Тейлора–Стратоновича определяются ре-

куррентными и весьма интересными соотношениями, множителем в которых стоит знакомая по классической формуле Тейлора величина вида: $(s-t)^j/j!$.

Другой важной особенностью указанных унифицированных разложений является то, что они в отличие от разложения Тейлора–Ито в форме Вагнера и Платена [81] и разложения Тейлора–Стратоновича в форме Клоедена и Платена [84] содержат минимальные совокупности различных повторных стохастических интегралов Ито и Стратоновича соответственно.

Для сравнения отметим, что унифицированные разложения Тейлора–Ито до членов третьего и четвертого порядков малости содержат только 12 и 33 различных повторных стохастических интегралов Ито соответственно, в то время как аналогичное разложение Тейлора–Ито в форме Вагнера и Платена включает в себя уже 17 и 50 различных повторных стохастических интегралов Ито.

Сходная ситуация возникает при сравнении разложения Тейлора–Стратоновича в форме Клоедена и Платена и унифицированных разложений Тейлора–Стратоновича.

Вторая из указанных особенностей унифицированных разложений Тейлора–Ито и Тейлора–Стратоновича довольно важна, поскольку, как мы увидим в главах 5 и 6, сильная и слабая аппроксимации повторных стохастических интегралов являются сложной теоретической и вычислительной проблемой [70, 86, 98, 106 – 111, 117, 118].

4.1 Дифференцируемость по Ито случайных процессов

Введем ряд определений и обозначений, которые помогут придать формулировкам теорем и основным формулам данной главы более компактный или, если угодно, более обозримый вид.

Пусть задано вероятностное пространство $(\Omega, \mathcal{F}, \mathsf{P})$ и пусть $\mathbf{f}_t$ — $\mathcal{F}_t$-измеримый при всех $t \in [0,T]$ стандартный винеровский процесс с независимыми компонентами $\mathbf{f}_t^{(i)}$; $i = 1, \ldots, m$.

Определение 4.1. *Процесс* $\eta_s = R(\mathbf{x}_s, s)$, *где* $R: \ \Re^n \times [0,T] \to \Re^1$, *а* $\mathbf{x}_s$ *— решение стохастического дифференциального уравнения Ито* (1.35), *называется дифференцируемым по Ито в среднеквадратическом смысле на промежутке* $[0,T]$ *на траекториях уравнения* (1.35), *если для любых двух моментов остановки* s, t *таких, что* $\mathsf{P}\{0 \le t \le$

$s \le T\} = 1$, *с вероятностью* 1 *справедливо представление*

$$\eta_s = \eta_t + \int\limits_t^s B_{0_\tau} d\tau + \sum_{i=1}^m \int\limits_t^s B_{1_\tau}^{(i)} d\mathbf{f}_\tau^{(i)}. \tag{4.1}$$

В (4.1) *случайные процессы* B_{0_τ}, $B_{1_\tau}^{(i)} \in \mathcal{M}_2([0,T])$; $i = 1, \ldots, m$ *и называются прозводными по Ито процесса* η_s.

З а м е ч а н и е 4.1. *Если в определении* 4.1 *случайные процессы* B_{0_τ}, $B_{1_\tau}^{(i)} \in \mathcal{M}_2([0,T])$; $i = 1, \ldots, m$ *и являются среднеквадратически непрерывными на промежутке* $[0,T]$, *то процесс* η_s *назовем непрерывно дифференцируемым по Ито в среднеквадратическом смысле на промежутке* $[0,T]$ *на траекториях уравнения* (1.35).

Пусть $\mathcal{L}$ — класс функций $R(\mathbf{x},t) : \Re^n \times [0,T] \to \Re^1$, для которых существуют и непрерывны частные производные $\frac{\partial R}{\partial t}(\mathbf{x},t)$, $\frac{\partial R}{\partial \mathbf{x}^{(i)}}(\mathbf{x},t)$, $\frac{\partial^2 R}{\partial \mathbf{x}^{(i)} \partial \mathbf{x}^{(j)}}(\mathbf{x},t)$; $i,j = 1, \ldots, n$.

Определим на классе $\mathcal{L}$ операторы

$$LR(\mathbf{x},t) = \frac{\partial R}{\partial t}(\mathbf{x},t) + \sum_{i=1}^n a^{(i)}(\mathbf{x},t) \frac{\partial R}{\partial \mathbf{x}^{(i)}}(\mathbf{x},t) +$$

$$+ \frac{1}{2} \sum_{j=1}^m \sum_{l,i=1}^n \Sigma^{(lj)}(\mathbf{x},t) \Sigma^{(ij)}(\mathbf{x},t) \frac{\partial^2 R}{\partial \mathbf{x}^{(l)} \partial \mathbf{x}^{(i)}}(\mathbf{x},t), \tag{4.2}$$

$$G_0^{(i)} R(\mathbf{x},t) = \sum_{j=1}^n \Sigma^{(ji)}(\mathbf{x},t) \frac{\partial R}{\partial \mathbf{x}^{(j)}}(\mathbf{x},t); \ i = 1, \ldots, m. \tag{4.3}$$

Рассмотрим следующее утверждение о формуле Ито.

Лемма 4.1. *Пусть выполнены условия леммы* 1.3. *Тогда процесс* $\eta_s = R(\mathbf{x}_s, s)$ *дифференцируем по Ито в среднеквадратическом смысле на промежутке* $[0,T]$ *на траекториях уравнения* (1.35), *его производные по Ито имеют вид* $B_{0_\tau} = LR(\mathbf{x}_\tau, \tau)$, $B_{1_\tau}^{(i)} = G_0^{(i)} R(\mathbf{x}_\tau, \tau)$; $i = 1, \ldots, m$, *причем для любых двух моментов остановки* s, t, *для которых* $\mathsf{P}\{0 \le t \le s \le T\} = 1$ *с вероятностью* 1 *справедливо равенство*

$$\eta_s = \eta_t + \int\limits_t^s LR(\mathbf{x}_\tau, \tau) d\tau + \sum_{i=1}^m \int\limits_t^s G_0^{(i)} R(\mathbf{x}_\tau, \tau) d\mathbf{f}_\tau^{(i)},$$

правая часть которого существует в среднеквадратическом смысле.

Следует отметить, что в формулировке леммы 4.1 моменты t, s считаются моментами остановки, для которых $\mathsf{P}\{0 \le t \le s \le T\} = 1$. Справедливость такой обобщенной формулы Ито вытекает, например, из [8. С. 140].

В дальнейшем будем широко использовать многоиндексные обозначения. Для придания преобразованиям многоиндексных величин более компактной формы целесообразно ввести понятие матрицы произвольного ранга (размера) как совокупности многоиндексных элементов, а также ввести ряд операций над указанными матрицами.

Совокупность k-индексных элементов

$$\{A^{(i_1\ldots i_k)},\ i_1=1,\ \ldots,m_1;\ \ldots;\ i_k=1,\ \ldots,\ m_k\},$$

где $m_1,\ \ldots,m_k\in N$, будем называть матрицей k-го ранга ${}^{(k)}A$:

$${}^{(k)}A=\left\|A^{(i_1\ldots i_k)}\right\|_{i_1=1,\ldots,i_k=1}^{m_1\ \ldots\ m_k}. \tag{4.4}$$

Если $m_1=\ldots=m_k=m$, то записываем

$${}^{(k)}A=\left\|A^{(i_1\ldots i_k)}\right\|_{i_1,\ldots,i_k=1}^{m}.$$

Очевидно, что ${}^{(0)}A$ — скаляр; ${}^{(1)}A$ — матрица-столбец размера $m_1\times 1$; ${}^{(2)}A$ — прямоугольная матрица размера $m_1\times m_2$, и т. д. Далее иногда ранг скаляров, равный нулю, и ранг матриц-столбцов, равный единице, указывать не будем.

Если при некотором $l\in\{1,\ldots,k\}:m_l=0$ в (4.4), то условимся понимать правую часть этой матрицы следующим образом:

$$\left\|A^{(i_1\ldots i_{l-1}i_{l+1}\ldots i_k)}\right\|_{i_1=1,\ldots,i_{l-1}=1,i_{l+1}=1,\ldots,i_k=1}^{m_1\ \ldots\ m_{l-1}\ \ m_{l+1}\ \ldots\ m_k},$$

или в сокращенной записи, ${}^{(k-1)}A$.

Обозначение

$${}^{(k)}A=\left\|{}^{(k-1)}A^{(i_1)}\right\|_{i_1=1}^{m_1}$$

будем понимать как блочную матрицу k-го ранга с элементами-матрицами $(k-1)$-го ранга:

$${}^{(k-1)}A^{(i_1)}=\left\|A^{(i_1\ldots i_k)}\right\|_{i_2=1,\ldots,i_k=1}^{m_2\ \ldots\ m_k}.$$

Аналогично обозначение

$${}^{(k)}A=\left\|{}^{(k-l)}A^{(i_1\ldots i_l)}\right\|_{i_1=1,\ldots,i_l=1}^{m_1\ \ldots\ m_l},\ \ k>l,$$

следует понимать как блочную матрицу k-го ранга с элементами-матрицами $(k-l)$-го ранга:

$${}^{(k-l)}A^{(i_1\ldots i_l)}=\left\|A^{(i_1\ldots i_k)}\right\|_{i_{l+1}=1,\ldots,i_k=1}^{m_{l+1}\ \ldots\ m_k}.$$

Пусть

$$^{(k)}A = \left\| A^{(i_1 \dots i_k)} \right\|_{i_1=1,\dots,i_k=1}^{m_1 \ \dots \ m_k}, \quad ^{(k)}B = \left\| B^{(i_1 \dots i_k)} \right\|_{i_1=1,\dots,i_k=1}^{m_1 \ \dots \ m_k}.$$

Будем считать, что $^{(k)}A =^{(k)} B$ тогда и только тогда, когда $A^{(i_1 \dots i_k)} = B^{(i_1 \dots i_k)}$ для всех $1 \le i_p \le m_p,\ p = 1, \dots, k$. Кроме того,

$$\alpha \ ^{(k)}A + \beta \ ^{(k)}B = \left\| \alpha A^{(i_1 \dots i_k)} + \beta B^{(i_1 \dots i_k)} \right\|_{i_1=1,\dots,i_k=1}^{m_1 \ \dots \ m_k}, \quad \alpha, \beta \in \Re^1.$$

Матрицу $^{(k)}C$, определенную равенством

$$^{(k)}C = \left\| \sum_{i_1=1}^{m_1} \dots \sum_{i_l=1}^{m_l} A^{(i_1 \dots i_{k+l})} B^{(i_1 \dots i_l)} \right\|_{i_{l+1}=1,\dots,i_{l+k}=1}^{m_{l+1} \ \dots \ m_{l+k}}, \tag{4.5}$$

будем называть сверткой порядка l матриц $^{(k+l)}A$ и $^{(l)}B$ и обозначать как

$$^{(k)}C = {}^{(k+l)}A \overset{l}{\cdot} {}^{(l)}B.$$

Если в (4.5) $k = 0$, то правую часть этого равенства будем понимать так:

$$\sum_{i_1=1}^{m_1} \dots \sum_{i_l=1}^{m_l} A^{(i_1 \dots i_l)} B^{(i_1 \dots i_l)}.$$

Условимся также под $\overset{0}{\cdot}$ понимать обычное умножение.

По определению операция свертки обладает, в частности, следующими достаточно очевидными свойствами:

1. Коммутативность:

$$^{(k+l)}A \overset{l}{\cdot} {}^{(l)}B = {}^{(l)}B \overset{l}{\cdot} {}^{(k+l)}A.$$

2. Дистрибутивность:

$$\left(\alpha \ ^{(k+l)}A + \beta \ ^{(k+l)}B\right) \overset{l}{\cdot} {}^{(l)}C = \alpha \ ^{(k+l)}A \overset{l}{\cdot} {}^{(l)}C + \beta \ ^{(k+l)}B \overset{l}{\cdot} {}^{(l)}C, \ \alpha, \beta \in \Re^1.$$

Определение 4.2. *Процесс $\eta_s = R(\mathbf{x}_s, s)$, где $R: \ \Re^n \times [0, T] \to \Re^1$, называется N раз дифференцируемым по Ито в среднеквадратическом смысле на промежутке $[0, T]$ на траекториях уравнения (1.35), если для всех $l \in \{0,\ 1, \dots, N-1\}$ и любых двух моментов остановки s, t таких, что $\mathsf{P}\{0 \le t \le s \le T\} = 1$, справедливо с вероятностью 1 представление*

$$^{(p_l)}B_{\lambda_l \dots \lambda_{1_s}} = {}^{(p_l)}B_{\lambda_l \dots \lambda_{1_t}} + \int_t^s {}^{(p_l)}B_{0\lambda_l \dots \lambda_{1_\tau}} d\tau + \int_t^s {}^{(p_l+1)}B_{1\lambda_l \dots \lambda_{1_\tau}} \overset{1}{\cdot} d\mathbf{f}_\tau,$$

где $\lambda_q = 0$ *или* $\lambda_q = 1$; $p_l = \sum\limits_{i=1}^{l} \lambda_i$. *Матричные случайные процессы* ${}^{(p_q)}B_{\lambda_q \ldots \lambda_{1_\tau}}$; $q = 1, 2, \ldots, N$ *покомпонентно принадлежат классу* $\mathcal{M}_2([0,T])$ *и называются* q*-ми производными процесса* η_s *по Ито. При этом полагаем*

$$p_0 \stackrel{\text{def}}{=} 0, \ {}^{(p_0)}B_{\lambda_0 \ldots \lambda_{1_\tau}} \stackrel{\text{def}}{=} \eta_\tau,$$

$${}^{(p_0)}B_{0\lambda_0 \ldots \lambda_{1_\tau}} \stackrel{\text{def}}{=} B_{0_\tau}, \ {}^{(p_0+1)}B_{1\lambda_0 \ldots \lambda_{1_\tau}} \stackrel{\text{def}}{=} {}^{(1)}B_{1_\tau}.$$

З а м е ч а н и е 4.2. *Отметим, что если в определении* 4.2 *матричные случайные процессы* ${}^{(p_q)}B_{\lambda_q \ldots \lambda_{1_\tau}}$; $q = 1, 2, \ldots, N$ *покомпонентно принадлежат классу* $\mathcal{M}_2([0,T])$ *и являются среднеквадратически непрерывными на промежутке* $[0,T]$, *то в этом случае процесс* η_s *называем* N *раз непрерывно дифференцируемым по Ито в среднеквадратическом смысле на промежутке* $[0,T]$ *на траекториях уравнения* (1.35).

Введем обозначения

$$\left\| Q_{\lambda_l}^{(i_l)} \ldots Q_{\lambda_1}^{(i_1)} R(\mathbf{x}, s) \right\|_{i_1=\lambda_1, \ldots, i_l=\lambda_l}^{m\lambda_1 \ \ldots \ m\lambda_l} \stackrel{\text{def}}{=} {}^{(p_l)}Q_{\lambda_l} \ldots Q_{\lambda_1}\{R(\mathbf{x}, s)\},$$

где $\lambda_l = 1$ или $\lambda_l = 0$; $Q_{\lambda_l}^{(i_l)} = L$ и $i_l = 0$ при $\lambda_l = 0$; $Q_{\lambda_l}^{(i_l)} = G_0^{(i_l)}$ и $i_l = 1, \ldots, m$ при $\lambda_l = 1$; $l = 1, \ldots, N$;

$$\mathcal{M}_k = \{(\lambda_k, \ldots, \lambda_1) : \lambda_l = 1 \text{ или } \lambda_l = 0, l = 1, \ldots, k\}.$$

Рассмотрим функцию $R : \Re^n \times [0,T] \to \Re^1$ и сформулируем утверждение о N-кратной дифференцируемости по Ито случайного процесса $\eta_s = R(\mathbf{x}_s, s)$.

Лемма 4.2. *Пусть выполнены условия* AI–AIII *теоремы* 1.6 *и пусть для всех* $(\lambda_l, \ldots, \lambda_1) \in \bigcup\limits_{g=1}^{N-1} \mathcal{M}_g : Q_{\lambda_l}^{(i_l)} \ldots Q_{\lambda_1}^{(i_1)} R(\mathbf{x}, s) \in \mathcal{L}$ *и всех* $(\lambda_l, \ldots, \lambda_1) \in \bigcup\limits_{g=1}^{N} \mathcal{M}_g : Q_{\lambda_l}^{(i_l)} \ldots Q_{\lambda_1}^{(i_1)} R(\mathbf{x}_s, s) \in \mathcal{M}_2([0,T])$. *Тогда процесс* $\eta_s = R(\mathbf{x}_s, s)$ N *раз дифференцируем по Ито в среднеквадратическом смысле на промежутке* $[0,T]$ *на траекториях уравнения* (1.35) *и его производные по Ито имеют вид*

$${}^{(p_l)}B_{\lambda_l \ldots \lambda_{1_s}} = {}^{(p_l)}Q_{\lambda_l} \ldots Q_{\lambda_1}\{R(\mathbf{x_s}, s)\}, \tag{4.6}$$

где $l = 1, \ldots, N$; $p_l = \sum\limits_{p=1}^{l} \lambda_p$.

Если $R(\mathbf{x},t)\equiv\mathbf{x}$, $\mathbf{x}\in\Re^n$, то полагаем

$$Q_{\lambda_l}^{(i_l)}\ldots Q_{\lambda_1}^{(i_1)}\mathbf{x}\stackrel{\text{def}}{=}\begin{cases} Q_{\lambda_l}^{(i_l)}\ldots Q_{\lambda_2}^{(i_2)}\mathbf{a}(\mathbf{x},t) & \text{при } i_1=0;\ l\ge 2\\ Q_{\lambda_l}^{(i_l)}\ldots Q_{\lambda_2}^{(i_2)}\Sigma_{i_1}(\mathbf{x},t) & \text{при } i_1=1,\ldots,m;\ l\ge 2\\ \mathbf{a}(\mathbf{x},t) & \text{при } i_1=0;\ l=1\\ \Sigma_{i_1}(\mathbf{x},t) & \text{при } i_1=1,\ldots,m;\ l=1\end{cases}. \tag{4.7}$$

Запись (4.7) не вполне корректна, так как ее правая часть является функцией от $\mathbf{x}$ и t, а в обозначениях левой части буква t отсутствует. Далее не будет необходимости явно подчеркивать зависимость функции $Q_{\lambda_l}^{(i_l)}\ldots Q_{\lambda_1}^{(i_1)}\mathbf{x}$ от t. Поэтому записываем $Q_{\lambda_l}^{(i_l)}\ldots Q_{\lambda_1}^{(i_1)}\mathbf{x}$ и ${}^{(p_l)}Q_{\lambda_l}\ldots Q_{\lambda_1}\{\mathbf{x}\}$, подразумевая, что эти функции зависят от $\mathbf{x}$ и t, где

$$\left\|Q_{\lambda_l}^{(i_l)}\ldots Q_{\lambda_1}^{(i_1)}\mathbf{x}\right\|_{i_1=\lambda_1,\ldots,i_l=\lambda_l}^{m\lambda_1\ \ldots\ m\lambda_l}\stackrel{\text{def}}{=}{}^{(p_l)}Q_{\lambda_l}\ldots Q_{\lambda_1}\{\mathbf{x}\}. \tag{4.8}$$

Далее также будем использовать следующие записи:

$$Q_{\lambda_l}^{(i_l)}\ldots Q_{\lambda_1}^{(i_1)}\mathbf{x}_t\stackrel{\text{def}}{=}\begin{cases} Q_{\lambda_l}^{(i_l)}\ldots Q_{\lambda_2}^{(i_2)}\mathbf{a}(\mathbf{x}_t,t) & \text{при } i_1=0;\ l\ge 2\\ Q_{\lambda_l}^{(i_l)}\ldots Q_{\lambda_2}^{(i_2)}\Sigma_{i_1}(\mathbf{x}_t,t) & \text{при } i_1=1,\ldots,m;\ l\ge 2\\ \mathbf{a}(\mathbf{x}_t,t) & \text{при } i_1=0;\ l=1\\ \Sigma_{i_1}(\mathbf{x}_t,t) & \text{при } i_1=1,\ldots,m;\ l=1\end{cases}, \tag{4.9}$$

$$\left\|Q_{\lambda_l}^{(i_l)}\ldots Q_{\lambda_1}^{(i_1)}\mathbf{x}_t\right\|_{i_1=\lambda_1,\ldots,i_l=\lambda_l}^{m\lambda_1\ \ldots\ m\lambda_l}\stackrel{\text{def}}{=}{}^{(p_l)}Q_{\lambda_l}\ldots Q_{\lambda_1}\{\mathbf{x}_t\}. \tag{4.10}$$

Определение (4.9) в отличие от (4.7) не вызывает разночтений, так как индекс t у процесса $\mathbf{x}_t$ согласно (4.9) должен соответствовать переменной t.

Заметим, что вместо записи $Q_{\lambda_l}^{(i_l)}\ldots Q_{\lambda_1}^{(i_1)}\mathbf{x}$ можно было бы использовать корректную запись [86]

$$Q_{\lambda_l}^{(i_l)}\ldots Q_{\lambda_2}^{(i_2)}\mathbf{b}_{i_1}(\mathbf{x},t), \tag{4.11}$$

где

$$\mathbf{b}_{i_1}(\mathbf{x},t)=\begin{cases}\mathbf{a}(\mathbf{x},t) & \text{при } i_1=0\\ \Sigma_{i_1}(\mathbf{x},t) & \text{при } i_1=1,\ldots,m\end{cases}.$$

Однако в дальнейшем основную роль будут играть выражения, являющиеся сложными линейными комбинациями слагаемых типа (4.11), причем в каждом слагаемом i_1 может быть свое. Для таких линейных комбинаций по понятным причинам не удается ввести простые обозначения типа (4.11), поэтому для единообразия обозначений принимаем соглашение (4.7).

Далее будем считать случайный процесс $\eta_s = R(\mathbf{x}_s, s)$ N раз непрерывно дифференцируемым по Ито в среднеквадратическом смысле на промежутке $[0, T]$ на траекториях уравнения (1.35), если он удовлетворяет определению 4.2 и его производные по Ито определяются соотношением (4.6).

4.2 Разложение Тейлора–Ито в форме Вагнера и Платена

Как уже отмечалось ранее, разложения Тейлора–Ито были впервые получены в [79, 81]. Эти результаты можно найти также в монографии [86]. Рассмотрим результаты, приведенные в [79, 81]. При этом будем придерживаться обозначений и терминологии, принятых в предлагаемой монографии.

Обозначим $\mathcal{G}_{rk} = \{(\lambda_k, \ldots, \lambda_1) : r+1 \le 2k - \lambda_1 - \ldots - \lambda_k \le 2r\}$, $\mathcal{E}_{qk} = \{(\lambda_k, \ldots, \lambda_1) : \ 2k - \lambda_1 - \ldots - \lambda_k = q\}$,

$$ {}^{(p_k)}J_{(\lambda_k \ldots \lambda_1)s,t} = \left\| J^{(i_k \ldots i_1)}_{(\lambda_k \ldots \lambda_1)s,t} \right\|^{m\lambda_1 \ \ldots \ m\lambda_l}_{i_1=\lambda_1,\ldots,i_l=\lambda_l}, \ \ J^{(i_k \ldots i_1)}_{(\lambda_k \ldots \lambda_1)s,t} = \int\limits_t^s \ldots \int\limits_t^{\tau_2} d\mathbf{w}^{(i_k)}_{\tau_1} \ldots d\mathbf{w}^{(i_1)}_{\tau_k} $$

при $k \ge 1$ и $J^{(i_0 \ldots i_1)}_{(\lambda_0 \ldots \lambda_1)s,t} \stackrel{\text{def}}{=} 1$, где $\mathbf{w}^{(i)}_\tau = \mathbf{f}^{(i)}_\tau$ при $i = 1, \ldots, m$ и $\mathbf{w}^{(0)}_\tau = \tau$.

Теорема 4.1. *Пусть процесс* $\eta_s = R(\mathbf{x}_s, s)$, *где* $R : \Re^n \times [0, T] \to \Re^1$, $r+1$ *раз дифференцируем по Ито в среднеквадратическом смысле на промежутке* $[0, T]$ *на траекториях уравнения* (1.35). *Тогда для любых двух моментов остановки* s, t *таких, что* $\mathsf{P}\{0 \le t \le s \le T\} = 1$, *с вероятностью* 1 *справедливо разложение*

$$ \eta_s = \eta_t + \sum_{k=1}^{r} \sum_{(\lambda_k,\ldots,\lambda_1) \in \mathcal{M}_k} {}^{(p_k)}Q_{\lambda_k} \ldots Q_{\lambda_1}\{\eta_t\} \stackrel{p_k}{\cdot} {}^{(p_k)}J_{(\lambda_k \ldots \lambda_1)s,t} + D_{r+1_{s,t}}, \quad (4.12) $$

$$ D_{r+1_{s,t}} = $$

$$ = \sum_{(\lambda_{r+1},\ldots,\lambda_1) \in \mathcal{M}_{r+1}} \int\limits_t^s \ldots \left(\int\limits_t^{\tau_r} {}^{(p_{r+1})}Q_{\lambda_{r+1}} \ldots Q_{\lambda_1}\{\eta_{\tau_{r+1}}\} \stackrel{\lambda_{r+1}}{\cdot} d\mathbf{w}_{\tau_{r+1}} \right) \ldots \stackrel{\lambda_1}{\cdot} d\mathbf{w}_{\tau_1}, \quad (4.13) $$

причем правые части (4.12) *и* (4.13) *существуют в среднеквадратическом смысле.*

Нетрудно понять, что (4.12) получается путем $r+1$-кратного последовательного применения формулы Ито к процессу $\eta_s = R(\mathbf{x}_s, s)$.

Упорядочим члены разложения (4.12) по возрастанию порядка малости при $s \downarrow t$ в среднеквадратическом смысле.

Теорема 4.2. *Пусть процесс* $\eta_s = R(\mathbf{x}_s, s)$, *где* $R : \Re^n \times [0,T] \to \Re^1$, $r+1$ *раз дифференцируем по Ито в среднеквадратическом смысле на промежутке* $[0,T]$ *на траекториях уравнения* (1.35). *Тогда для любых двух моментов остановки* s, t *таких, что* $\mathsf{P}\{0 \le t \le s \le T\} = 1$, *с вероятностью* 1 *справедливо разложение*

$$\eta_s = \eta_t + \sum_{q,k=1}^{r} \sum_{(\lambda_k,\ldots,\lambda_1)\in\mathcal{E}_{qk}} {}^{(p_k)}Q_{\lambda_k}\ldots Q_{\lambda_1}\{\eta_t\} \overset{p_k}{\cdot} {}^{(p_k)}J_{(\lambda_k\ldots\lambda_1)s,t} + H_{r+1_{s,t}}, \tag{4.14}$$

$$H_{r+1_{s,t}} = \sum_{k=1}^{r} \sum_{(\lambda_k,\ldots,\lambda_1)\in\mathcal{G}_{rk}} {}^{(p_k)}Q_{\lambda_k}\ldots Q_{\lambda_1}\{\eta_t\} \overset{p_k}{\cdot} {}^{(p_k)}J_{(\lambda_k\ldots\lambda_1)s,t} + D_{r+1_{s,t}}, \tag{4.15}$$

причем существует такая постоянная $C_r < \infty$, *что*

$$\left(\mathsf{M}\left\{\left(H_{r+1_{s,t}}\right)^2\right\}\right)^{\frac{1}{2}} \le C_r(s-t)^{\frac{r+1}{2}},$$

а правые части (4.14) *и* (4.15) *существуют в среднеквадратическом смысле.*

Доказательство теоремы сводится к перегруппировке членов разложения (4.12), после чего приходим к (4.14).

Термин "разложение Тейлора–Ито в форме Вагнера и Платена" далее будем применять как к разложению (4.12), так и к разложению (4.14).

Нетрудно проверить с помощью формулы Ито, что многие повторные стохастические интегралы из правой части (4.12) связаны линейными соотношениями. Таким образом, эти интегралы не образуют минимальной совокупности. В следующем разделе будет построено разложение Тейлора–Ито по минимальной совокупности повторных стохастических интегралов Ито.

4.3 Унифицированные разложения Тейлора–Ито

4.3.1 Обозначения

Рассмотрим повторные стохастические интегралы Ито:

$$J_{l_1\ldots l_k s,t}^{(i_1\ldots i_k)} = \begin{cases} \int\limits_t^s (s-\tau_k)^{l_k}\ldots\int\limits_t^{\tau_2}(s-\tau_1)^{l_1} d\mathbf{f}_{\tau_1}^{(i_1)}\ldots d\mathbf{f}_{\tau_k}^{(i_k)} & \text{при } k>0 \\ 1 & \text{при } k=0 \end{cases},$$

$$I_{l_1\ldots l_k s,t}^{(i_1\ldots i_k)}=\begin{cases}\int\limits_t^s(t-\tau_k)^{l_k}\ldots\int\limits_t^{\tau_2}(t-\tau_1)^{l_1}d\mathbf{f}_{\tau_1}^{(i_1)}\ldots d\mathbf{f}_{\tau_k}^{(i_k)} & \text{при } k>0\\ 1 & \text{при } k=0\end{cases},$$

где $i_1,\ldots,i_k=1,\ldots,m$.

В соответствии с введенными ранее обозначениями

$$^{(k)}J_{l_1\ldots l_k s,t}=\left\|J_{l_1\ldots l_k s,t}^{(i_1\ldots i_k)}\right\|_{i_1,\ldots,i_k=1}^{m},\quad {}^{(k)}I_{l_1\ldots l_k s,t}=\left\|I_{l_1\ldots l_k s,t}^{(i_1\ldots i_k)}\right\|_{i_1,\ldots,i_k=1}^{m}.$$

Из теоремы 3.1 и свойств повторных стохастических интегралов, рассмотренных в главе 3, вытекают следующие свойства стохастических интегралов $J_{l_1\ldots l_k s,t}^{(i_1\ldots i_k)}$, $I_{l_1\ldots l_k s,t}^{(i_1\ldots i_k)}$ при $k>0$:

$$\mathsf{M}\left\{J_{l_1\ldots l_k s,t}^{(i_1\ldots i_k)}\right\}=0,$$

$$J_{l_1\ldots l_k s,t}^{(i_1\ldots i_k)}=\int\limits_t^s(s-\tau_1)^{l_1}d\mathbf{f}_{\tau_1}^{(i_1)}\ldots\int\limits_{\tau_{k-1}}^s(s-\tau_k)^{l_k}d\mathbf{f}_{\tau_k}^{(i_k)}\ \text{с в.1},$$

$$\mathsf{M}\left\{\left(J_{l_1\ldots l_k s,t}^{(i_1\ldots i_k)}\right)^2\right\}=\frac{(s-t)^{2(l_1+\ldots+l_k)+k}}{(2l_k+1)(2(l_k+l_{k-1})+2)\ldots(2(l_k+\ldots+l_1)+k)},\tag{4.16}$$

$$\int\limits_t^s(s-\tau)^j d\mathbf{f}_\tau^{(p)}J_{l_1\ldots l_k s,\tau}^{(i_1\ldots i_k)}\stackrel{\text{def}}{=}J_{jl_1\ldots l_k s,t}^{(pi_1\ldots i_k)},\ p=1,\ldots,m,\tag{4.17}$$

$$\int\limits_t^s(s-\tau)^j d\tau J_{l_1\ldots l_k s,\tau}^{(i_1\ldots i_k)}=\frac{(s-t)^{j+1}}{j+1}J_{l_1\ldots l_k s,t}^{(i_1\ldots i_k)}-\frac{1}{j+1}J_{l_1+j+1\ l_2\ \ldots\ l_k s,t}^{(i_1\ldots i_k)}\ \text{с в.1},\tag{4.18}$$

$$\mathsf{M}\left\{I_{l_1\ldots l_k s,t}^{(i_1\ldots i_k)}\right\}=0,$$

$$I_{l_1\ldots l_k s,t}^{(i_1\ldots i_k)}=\int\limits_t^s(t-\tau_1)^{l_1}d\mathbf{f}_{\tau_1}^{(i_1)}\ldots\int\limits_{\tau_{k-1}}^s(t-\tau_k)^{l_k}d\mathbf{f}_{\tau_k}^{(i_k)}\ \text{с в.1},$$

$$\mathsf{M}\left\{\left(I_{l_1\ldots l_k s,t}^{(i_1\ldots i_k)}\right)^2\right\}=\frac{(s-t)^{2(l_1+\ldots+l_k)+k}}{(2l_1+1)(2(l_1+l_2)+2)\ldots(2(l_1+\ldots+l_k)+k)},$$

$$\int\limits_t^s(t-\tau)^j d\mathbf{f}_\tau^{(p)}I_{l_1\ldots l_k s,\tau}^{(i_1\ldots i_k)}\stackrel{\text{def}}{=}I_{jl_1\ldots l_k s,t}^{(pi_1\ldots i_k)},\ p=1,\ldots,m,$$

$$\int\limits_t^s (t-\tau)^j d\tau I_{l_1\ldots l_{k_{s,\tau}}}^{(i_1\ldots i_k)} = -\frac{1}{j+1} I_{l_1+j+1\ l_2\ \ldots\ l_{k_{s,t}}}^{(i_1\ldots i_k)} \text{ с в.1},$$

где $j = 0, 1, \ldots$

Рассмотрим матрицы k-го ранга

$$^{(k)}(s \ominus t)_{jl_1\ldots l_k} = \left\| (s \ominus t)_{jl_1\ldots l_k}^{(i_1\ldots i_k)} \right\|_{i_1,\ldots,i_k=1}^m = \left\| \frac{(s-t)^j}{j!} J_{l_1\ldots l_{k_{s,t}}}^{(i_1\ldots i_k)} \right\|_{i_1,\ldots,i_k=1}^m,$$

$$^{(k)}(s \hat{\ominus} t)_{jl_1\ldots l_k} = \left\| (s \hat{\ominus} t)_{jl_1\ldots l_k}^{(i_1\ldots i_k)} \right\|_{i_1,\ldots,i_k=1}^m = \left\| \frac{(s-t)^j}{j!} I_{l_1\ldots l_{k_{s,t}}}^{(i_1\ldots i_k)} \right\|_{i_1,\ldots,i_k=1}^m.$$

Введем совокупность матриц k-го ранга:

$$C^{\mathcal{A}} \stackrel{\text{def}}{=} \left\{ ^{(k)}C_{jl_1\ldots l_k} : \ (k, j, l_1, \ldots, l_k) \in \mathcal{A} \right\},$$

где $\mathcal{A}$ — некоторое подмножество множества наборов $(k, j, l_1, \ldots, l_k)$ целых неотрицательных чисел.

Определим операцию над множеством матриц k-го ранга:

$$\left(C^{\mathcal{A}} \otimes D^{\mathcal{A}} \right) \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{(k,j,l_1,\ldots,l_k)\in\mathcal{A}} ^{(k)}C_{jl_1\ldots l_k} \stackrel{k}{\cdot} ^{(k)}D_{jl_1\ldots l_k}.$$

Нетрудно видеть, что введенная операция обладает переместительным и распределительным свойствами.

В соответствии с введенными обозначениями

$$(s \ominus t)^{\mathcal{A}} = \left\{ ^{(k)}(s \ominus t)_{jl_1\ldots l_k} : \ (j, l_1, \ldots, l_k, k) \in \mathcal{A} \right\},$$

$$(s \hat{\ominus} t)^{\mathcal{A}} = \left\{ ^{(k)}(s \hat{\ominus} t)_{jl_1\ldots l_k} : (j, l_1, \ldots, l_k, k) \in \mathcal{A} \right\}.$$

Под обозначением $C^{\mathcal{A}} \stackrel{1}{\cdot} ^{(1)}A$ будем понимать следующее:

$$\left\{ ^{(k)}C_{jl_1\ldots l_k} \stackrel{1}{\cdot} ^{(1)}A : (k, j, l_1, \ldots, l_k) \in \mathcal{A} \right\} \stackrel{\text{def}}{=} C^{\mathcal{A}} \stackrel{1}{\cdot} ^{(1)}A.$$

Обозначим

$$G_p^{(i)} R(\mathbf{x}, t) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{p} \left(G_{p-1}^{(i)} LR(\mathbf{x}, t) - LG_{p-1}^{(i)} R(\mathbf{x}, t) \right), \tag{4.19}$$

где $p = 1, 2, \ldots; i = 1, \ldots, m$;

$$L^j R(\mathbf{x}, t) \stackrel{\text{def}}{=} \begin{cases} \underbrace{L \ldots L}_{j} R(\mathbf{x}, t) & \text{при } j = 1, 2, \ldots \\ R(\mathbf{x}, t) & \text{при } j = 0 \end{cases}; \tag{4.20}$$

операторы L, $G_0^{(i)}$; $i = 1, \ldots, m$ определяются равенствами (4.2), (4.3).

Предполагается, что функции $R(\mathbf{x}, t)$, $\mathbf{a}(\mathbf{x}, t)$, $\Sigma(\mathbf{x}, t)$ таковы, что существуют все частные производные, входящие в правые части (4.19), (4.20).

Нетрудно видеть, что функция $G_p^{(i)} R(\mathbf{x}, t)$; $i = 1, \ldots, m$ определена в соответствии с определением функции $Q_{\lambda_l}^{(i_l)} \ldots Q_{\lambda_1}^{(i_1)} R(\mathbf{x}, t)$. Действительно, согласно (4.19)

$$G_p^{(i)} R(\mathbf{x}, t) = \frac{1}{p!} \sum_{q=0}^{p} (-1)^q C_p^q L^q G_0^{(i)} L^{p-q} R(\mathbf{x}, t), \tag{4.21}$$

где $C_p^q = p!/(q!(p-q)!)$ — биномиальный коэффициент, а правая часть (4.21) есть не что иное, как конечная линейная комбинация функций вида $Q_{\lambda_l}^{(i_l)} \ldots Q_{\lambda_1}^{(i_1)} R(\mathbf{x}, t)$.

Обозначим

$$\left\| L^j G_{l_1}^{(i_1)} \ldots G_{l_k}^{(i_k)} R(\mathbf{x}, t) \right\|_{i_1, \ldots, i_k = 1}^{m} \stackrel{\text{def}}{=} {}^{(k)} L^j G_{l_1} \ldots G_{l_k} \{R(\mathbf{x}, t)\}, \tag{4.22}$$

где $j, k, l_1, \ldots, l_k = 0, 1, \ldots$. При $k = 0$ полагаем

$$L^j G_{l_1}^{(i_1)} \ldots G_{l_0}^{(i_0)} R(\mathbf{x}, t) \stackrel{\text{def}}{=} L^j R(\mathbf{x}, t).$$

Нетрудно видеть, что функция $L^j G_{l_1}^{(i_1)} \ldots G_{l_k}^{(i_k)} R(\mathbf{x}, t)$ определена в соответствии с определением функции $Q_{\lambda_l}^{(i_l)} \ldots Q_{\lambda_1}^{(i_1)} R(\mathbf{x}, t)$, так как согласно (4.21)

$$L^j G_{l_1}^{(i_1)} \ldots G_{l_k}^{(i_k)} R(\mathbf{x}, t) = \prod_{g=1}^{k} \frac{1}{l_g!} \sum_{q_1=0}^{l_1} \ldots \sum_{q_k=0}^{l_k} (-1)^{q_1 + \ldots + q_k} \prod_{g=1}^{k} C_{l_g}^{q_g} \times$$

$$\times L^j L^{q_1} G_0^{(i_1)} L^{l_1 - q_1} \ldots L^{q_k} G_0^{(i_k)} L^{l_k - q_k} R(\mathbf{x}, t), \tag{4.23}$$

а правая часть (4.23) есть не что иное, как конечная линейная комбинация функций $Q_{\lambda_l}^{(i_l)} \ldots Q_{\lambda_1}^{(i_1)} R(\mathbf{x}, t)$.

Наряду с функцией $L^j G_{l_1}^{(i_1)} \ldots G_{l_k}^{(i_k)} R(\mathbf{x}, t)$ введем в рассмотрение следующие функции:

$$G_{l_1}^{(i_1)} \ldots G_{l_k}^{(i_k)} L^j R(\mathbf{x}, t), \ G_0^{(q)} L^j G_{l_1}^{(i_1)} \ldots G_{l_k}^{(i_k)} R(\mathbf{x}, t), \tag{4.24}$$

$$G_0^{(p)} G_0^{(q)} L^j G_{l_1}^{(i_1)} \ldots G_{l_k}^{(i_k)} R(\mathbf{x}, t), \ L G_0^{(q)} L^j G_{l_1}^{(i_1)} \ldots G_{l_k}^{(i_k)} R(\mathbf{x}, t), \tag{4.25}$$

где $i_1, \ldots, i_k, p, q = 1, \ldots, m$, которые при $k = 0$ будем понимать соответственно как

$$L^j R(\mathbf{x}, t),\ G_0^{(q)} L^j R(\mathbf{x}, t),\ G_0^{(p)} G_0^{(q)} L^j R(\mathbf{x}, t),\ L G_0^{(q)} L^j R(\mathbf{x}, t).$$

Положим

$$\left\| G_{l_1}^{(i_1)} \ldots G_{l_k}^{(i_k)} L^j R(\mathbf{x}, t) \right\|_{i_1, \ldots, i_k = 1}^{m} \stackrel{\text{def}}{=} {}^{(k)}G_{l_1} \ldots G_{l_k} L^j \{R(\mathbf{x}, t)\}, \tag{4.26}$$

$$\left\| G_0^{(q)} L^j G_{l_1}^{(i_1)} \ldots G_{l_k}^{(i_k)} R(\mathbf{x}, t) \right\|_{i_1, \ldots, i_k, q = 1}^{m} \stackrel{\text{def}}{=} {}^{(k+1)}G_0 L^j G_{l_1} \ldots G_{l_k} \{R(\mathbf{x}, t)\}, \tag{4.27}$$

$$\left\| L G_0^{(q)} L^j G_{l_1}^{(i_1)} \ldots G_{l_k}^{(i_k)} R(\mathbf{x}, t) \right\|_{i_1, \ldots, i_k, q = 1}^{m} \stackrel{\text{def}}{=} {}^{(k+1)}L G_0 L^j G_{l_1} \ldots G_{l_k} \{R(\mathbf{x}, t)\}, \tag{4.28}$$

$$\left\| G_0^{(p)} G_0^{(q)} L^j G_{l_1}^{(i_1)} \ldots G_{l_k}^{(i_k)} R(\mathbf{x}, t) \right\|_{i_1, \ldots, i_k, p, q = 1}^{m} \stackrel{\text{def}}{=}$$

$$\stackrel{\text{def}}{=} {}^{(k+2)}G_0 G_0 L^j G_{l_1} \ldots G_{l_k} \{R(\mathbf{x}, t)\}. \tag{4.29}$$

Предполагаем, что функции $R(\mathbf{x}, t)$, $\mathbf{a}(\mathbf{x}, t)$, $\Sigma(\mathbf{x}, t)$ таковы, что существуют все частные производные, входящие в левые части (4.26)–(4.29).

Если в (4.22)–(4.29) положить $R(\mathbf{x}, t) \equiv \mathbf{x}$, то полученные функции очевидно будут определены в соответствии с определением (4.7), а если в (4.22)–(4.29) заменить $R(\mathbf{x}, t)$ на $\mathbf{x}_t$, то полученные процессы очевидно будут определены в соответствии с определением (4.9).

4.3.2 Первое унифицированное разложение Тейлора–Ито

Следующая теорема устанавливает первое унифицированное разложение Тейлора–Ито процесса $\eta_s = R(\mathbf{x}_s, s)$, где $R: \ \Re^n \times [0, T] \to \Re^1$ по минимальной системе повторных стохастических интегралов Ито вида

$$J_{l_1 \ldots l_{k_{s,t}}}^{(i_1 \ldots i_k)} = \begin{cases} \int\limits_t^s (s - \tau_k)^{l_k} \ldots \int\limits_t^{\tau_2} (s - \tau_1)^{l_1} d\mathbf{f}_{\tau_1}^{(i_1)} \ldots d\mathbf{f}_{\tau_k}^{(i_k)} & \text{при } k > 0 \\ 1 & \text{при } k = 0 \end{cases}.$$

Теорема 4.3. *Пусть процесс Ито $\eta_s = R(\mathbf{x}_s, s)$ $r + 1$ раз непрерывно дифференцируем по Ито в среднеквадратическом смысле на промежутке $[0, T]$ на траекториях уравнения (1.35). Тогда при всех $s, t \in [0, T]: \ s \geq t$, с вероятностью 1 справедливо первое унифицированное разложение Тейлора–Ито*

$$\eta_s = \eta_t + \sum_{q=1}^{r} \left(C^{\mathcal{A}_q} \{\eta_t\} \otimes (s \ominus t)^{\mathcal{A}_q} \right) + D_{r+1_{s,t}}, \tag{4.30}$$

правая часть (4.30) *существует в среднеквадратическом смысле и в ней введены обозначения*

$$D_{r+1_{s,t}} = \int\limits_t^s \left(Q^{\mathcal{A}_r}\{\eta_\tau\}d\tau \otimes (s \ominus \tau)^{\mathcal{A}_r}\right) + \int\limits_t^s \left(\left(H^{\mathcal{A}_r}\{\eta_\tau\} \stackrel{1}{\cdot} d\mathbf{f}_\tau\right) \otimes (s \ominus \tau)^{\mathcal{A}_r}\right), \tag{4.31}$$

где

$$C^{\mathcal{A}_q}\{\eta_\tau\} = \left\{{}^{(k)}L^j G_{l_1} \ldots G_{l_k}\{\eta_\tau\} : (j, l_1, \ldots, l_k) \in \mathcal{A}_q\right\};$$

$$Q^{\mathcal{A}_r}\{\eta_\tau\} = \left\{{}^{(k)}L^{j+1} G_{l_1} \ldots G_{l_k}\{\eta_\tau\} : (j, l_1, \ldots, l_k) \in \mathcal{A}_r\right\};$$

$$H^{\mathcal{A}_r}\{\eta_\tau\} = \left\{{}^{(k+1)}G_0 L^j G_{l_1} \ldots G_{l_k}\{\eta_\tau\} : (j, l_1, \ldots, l_k) \in \mathcal{A}_r\right\};$$

$$\mathcal{A}_q = \left\{(k, j, l_1, \ldots, l_k) : k + j + \sum_{p=1}^{k} l_p = q;\ k, j, l_1, \ldots, l_k = 0, 1, \ldots\right\}.$$

Прежде чем доказывать теорему 4.3 выпишем первое унифицированное разложение Тейлора–Ито (4.30) в более развернутой форме специально для тех читателей, которые не хотели бы вникать в доказательство теоремы и сложные обозначения, а хотели бы обозреть формулу (4.30) в более доступной форме:

$$R(\mathbf{x}_s, s) = R(\mathbf{x}_t, t) + \sum_{q=1}^{r} \sum_{(k,j,l_1,\ldots,l_k)\in\mathcal{A}_q} \frac{(s-t)^j}{j!} \times$$

$$\times \sum_{i_1,\ldots,i_k=1}^{m} L^j G_{l_1}^{(i_1)} \ldots G_{l_k}^{(i_k)} R(\mathbf{x}_t, t) J_{l_1\ldots l_{k_{s,t}}}^{(i_1\ldots i_k)} + D_{r+1_{s,t}}$$

(1-е унифицированное разложение Тейлора–Ито).

Д о к а з а т е л ь с т в о проведем по индукции. Применим к процессу η_s формулу Ито. Тогда с вероятностью 1

$$\eta_s = \eta_t + D_{1_{s,t}}, \tag{4.32}$$

где

$$D_{1_{s,t}} = \int\limits_t^s L\{\eta_\tau\}d\tau + \int\limits_t^s G_0\{\eta_\tau\} \stackrel{1}{\cdot} d\mathbf{f}_\tau. \tag{4.33}$$

Соотношения (4.32) и (4.33) являются частными случаями (4.30) и (4.31) при $r = 0$. Применим формулу Ито к подынтегральным процессам в $D_{1_{s,t}}$. Тогда с вероятностью 1 имеем

$$D_{1_{s,t}} = \tilde{D}_{1_{s,t}} + D_{2_{s,t}}, \tag{4.34}$$

$$\tilde{D}_{1_{s,t}} = (s-t)L\{\eta_t\} + G_0\{\eta_t\} \overset{1}{\cdot} J_{0_{s,t}} = (C^{\mathcal{A}_1}\{\eta_t\} \otimes (s \ominus t)^{\mathcal{A}_1}), \qquad (4.35)$$

$$D_{2_{s,t}} = \int\limits_t^s \Big(\int\limits_t^{s_1} L^2\{\eta_\tau\}d\tau + \int\limits_t^{s_1} G_0 L\{\eta_\tau\} \overset{1}{\cdot} d\mathbf{f}_\tau \Big) ds_1 +$$

$$+ \int\limits_t^s \Big(\int\limits_t^{s_1} LG_0\{\eta_\tau\}d\tau + \int\limits_t^{s_1} {}^{(2)}G_0 G_0\{\eta_\tau\} \overset{1}{\cdot} d\mathbf{f}_\tau \Big) \overset{1}{\cdot} d\mathbf{f}_{s_1}. \qquad (4.36)$$

Заменим с вероятностью 1 порядок интегрирования в (4.36) согласно теореме 3.1:

$$D_{2_{s,t}} = \int\limits_t^s L^2\{\eta_\tau\}d\tau(s-\tau) + \int\limits_t^s LG_0\{\eta_\tau\}d\tau \overset{1}{\cdot} J_{0_{s,\tau}} +$$

$$+ \int\limits_t^s G_0 L\{\eta_\tau\} \overset{1}{\cdot} d\mathbf{f}_\tau (s-\tau) + \int\limits_t^s \Big({}^{(2)}G_0 G_0\{\eta_\tau\} \overset{1}{\cdot} d\mathbf{f}_\tau \Big) \overset{1}{\cdot} J_{0_{s,\tau}} =$$

$$= \int\limits_t^s \Big(Q^{\mathcal{A}_1}\{\eta_\tau\}d\tau \otimes (s \ominus \tau)^{\mathcal{A}_1} \Big) + \int\limits_t^s \Big(\Big(H^{\mathcal{A}_1}\{\eta_\tau\} \overset{1}{\cdot} d\mathbf{f}_\tau \Big) \otimes (s \ominus \tau)^{\mathcal{A}_1} \Big). \qquad (4.37)$$

Объединив соотношения (4.32) – (4.37), придем с вероятностью 1 к представлению

$$\eta_s = \eta_t + \big(C^{\mathcal{A}_1}\{\eta_t\} \otimes (s \ominus t)^{\mathcal{A}_1} \big) + D_{2_{s,t}}, \qquad (4.38)$$

$$D_{2_{s,t}} = \int\limits_t^s \big(Q^{\mathcal{A}_1}\{\eta_\tau\}d\tau \otimes (s \ominus \tau)^{\mathcal{A}_1} \big) + \int\limits_t^s \Big(\Big(H^{\mathcal{A}_1}\{\eta_\tau\} \overset{1}{\cdot} d\mathbf{f}_\tau \Big) \otimes (s \ominus \tau)^{\mathcal{A}_1} \Big). \qquad (4.39)$$

Нетрудно видеть, что (4.38) и (4.39) являются частными случаями (4.30) и (4.31) при $r = 1$. Таким образом, утверждение теоремы справедливо при $r = 0,\ 1$.

Продолжая начатый процесс разложения в (4.37), используя теоремы 3.1, 3.3 и 3.4, с вероятностью 1 получаем

$$D_{2_{s,t}} = \frac{1}{2}(s-t)^2 L^2\{\eta_t\} + LG_0\{\eta_t\} \overset{1}{\cdot} \big((s-t)J_{0_{s,t}} - J_{1_{s,t}} \big) +$$

$$+ G_0 L\{\eta_t\} \overset{1}{\cdot} J_{1_{s,t}} + {}^{(2)}G_0 G_0\{\eta_t\} \overset{2}{\cdot} {}^{(2)}J_{00_{s,t}} + D_{3_{s,t}} =$$

$$+ \frac{1}{2}(s-t)^2 L^2\{\eta_t\} + (s-t)LG_0\{\eta_t\} \overset{1}{\cdot} J_{0_{s,t}} +$$

$$+ G_1\{\eta_t\} \overset{1}{\cdot} J_{1_{s,t}} + {}^{(2)}G_0 G_0\{\eta_t\} \overset{2}{\cdot} {}^{(2)}J_{00_{s,t}} + D_{3_{s,t}} =$$

$$= \left(C^{\mathcal{A}_2}\{\eta_t\} \otimes (s \ominus t)^{\mathcal{A}_2}\right) + D_{3_{s,t}},$$

где

$$D_{3_{s,t}} = \int\limits_t^s L^3\{\eta_\tau\}\, d\tau \frac{1}{2}(s-\tau)^2 + \int\limits_t^s \left(G_0 L^2\{\eta_\tau\} \overset{1}{\cdot} d\mathbf{f}_\tau\right) \frac{1}{2}(s-\tau)^2 +$$

$$+ \left(\int\limits_t^s L^2 G_0\{\eta_\tau\}\, d\tau + \int\limits_t^s \left({}^{(2)}G_0 L G_0\{\eta_\tau\} \overset{1}{\cdot} d\mathbf{f}_\tau\right)\right) \overset{1}{\cdot} \left((s-\tau) J_{0_{s,\tau}} - J_{1_{s,\tau}}\right) +$$

$$+ \int\limits_t^s L G_0 L\{\eta_\tau\}\, d\tau \overset{1}{\cdot} J_{1_{s,\tau}} + \int\limits_t^s \left({}^{(2)}G_0 G_0 L\{\eta_\tau\} \overset{1}{\cdot} d\mathbf{f}_\tau\right) \overset{1}{\cdot} J_{1_{s,\tau}} +$$

$$+ \int\limits_t^s {}^{(2)}L G_0 G_0\{\eta_\tau\}\, d\tau \overset{2}{\cdot} {}^{(2)}J_{00_{s,\tau}} + \int\limits_t^s \left({}^{(3)}G_0 G_0 G_0\{\eta_\tau\} \overset{1}{\cdot} d\mathbf{f}_\tau\right) \overset{2}{\cdot} {}^{(2)}J_{00_{s,\tau}} =$$

$$= \int\limits_t^s \left(Q^{\mathcal{A}_2}\{\eta_\tau\} d\tau \otimes (s \ominus \tau)^{\mathcal{A}_2}\right) + \int\limits_t^s \left(\left(H^{\mathcal{A}_2}\{\eta_\tau\} \overset{1}{\cdot} d\mathbf{f}_\tau\right) \otimes (s \ominus \tau)^{\mathcal{A}_2}\right).$$

Следовательно, утверждение теоремы справедливо и при $r = 2$.

Проделаем по предложенной схеме еще одну итерацию:

$$D_{3_{s,t}} = L^3\{\eta_t\} \int\limits_t^s d\tau \frac{1}{2}(s-\tau)^2 + \left(G_0 L^2\{\eta_t\} \overset{1}{\cdot} \int\limits_t^s d\mathbf{f}_\tau\right) \frac{1}{2}(s-\tau)^2 +$$

$$+ L^2 G_0\{\eta_t\} \overset{1}{\cdot} \int\limits_t^s d\tau \left((s-\tau) J_{0_{s,\tau}} - J_{1_{s,\tau}}\right) +$$

$$+ \left({}^{(2)}G_0 L G_0\{\eta_t\} \overset{1}{\cdot} \int\limits_t^s d\mathbf{f}_\tau\right) \overset{1}{\cdot} \left((s-\tau) J_{0_{s,\tau}} - J_{1_{s,\tau}}\right) +$$

$$+ L G_0 L\{\eta_t\} \overset{1}{\cdot} \int\limits_t^s d\tau J_{1_{s,\tau}} + \left({}^{(2)}G_0 G_0 L\{\eta_t\} \overset{1}{\cdot} \int\limits_t^s d\mathbf{f}_\tau\right) \overset{1}{\cdot} J_{1_{s,\tau}} +$$

$$+ {}^{(2)}L G_0 G_0\{\eta_t\} \overset{2}{\cdot} \int\limits_t^s d\tau {}^{(2)}J_{00_{s,\tau}} + \left({}^{(3)}G_0 G_0 G_0\{\eta_t\} \overset{1}{\cdot} d\mathbf{f}_\tau\right) \overset{2}{\cdot} {}^{(2)}J_{00_{s,\tau}} + D_{4_{s,t}} =$$

$$= L^3\{\eta_t\} \frac{(s-t)^3}{6} + G_0 L^2\{\eta_t\} \overset{1}{\cdot} \frac{1}{2} J_{2_{s,t}} +$$

$$+ L^2 G_0\{\eta_t\} \overset{1}{\cdot} \left(\frac{1}{2} J_{2_{s,t}} - (s-t) J_{1_{s,t}} + \frac{(s-t)^2}{2} J_{0_{s,t}}\right) +$$

$$+ {}^{(2)}G_0 L G_0\{\eta_t\} \overset{2}{\cdot} \left({}^{(2)}J_{10_{s,t}} - {}^{(2)}J_{01_{s,t}}\right) +$$

$$+LG_0L\{\eta_t\}\overset{1}{\cdot}\left((s-t)J_{1_{s,t}}-J_{2_{s,t}}\right)+{}^{(2)}G_0G_0L\{\eta_t\}\overset{2}{\cdot}{}^{(2)}J_{01_{s,t}}+$$
$$+{}^{(2)}LG_0G_0\{\eta_t\}\overset{2}{\cdot}\left((s-t){}^{(2)}J_{00_{s,t}}-{}^{(2)}J_{10_{s,t}}\right)+$$
$$+{}^{(3)}G_0G_0G_0\{\eta_t\}\overset{3}{\cdot}{}^{(3)}J_{000_{s,t}}+D_{4_{s,t}}=$$
$$=\frac{(s-t)^3}{6}L^3\{\eta_t\}+\frac{(s-t)^2}{2}L^2G_0\{\eta_t\}\overset{1}{\cdot}J_{0_{s,t}}+$$
$$+G_2\{\eta_t\}\overset{1}{\cdot}J_{2_{s,t}}+(s-t)LG_1\{\eta_t\}\overset{1}{\cdot}J_{1_{s,t}}+$$
$$+{}^{(2)}G_1G_0\{\eta_t\}\overset{2}{\cdot}{}^{(2)}J_{10_{s,t}}+(s-t){}^{(2)}LG_0G_0\{\eta_t\}\overset{2}{\cdot}{}^{(2)}J_{00_{s,t}}+$$
$$+{}^{(2)}G_0G_1\{\eta_t\}\overset{2}{\cdot}{}^{(2)}J_{01_{s,t}}+{}^{(3)}G_0G_0G_0\{\eta_t\}\overset{3}{\cdot}{}^{(3)}J_{000_{s,t}}+D_{4_{s,t}}=$$
$$=\left(Q^{\mathcal{A}_3}\{\eta_t\}\otimes(s\ominus t)^{\mathcal{A}_3}\right)+D_{4_{s,t}}\text{ с в. 1},$$

где

$$D_{4_{s,t}}=\int\limits_t^s\left(\int\limits_t^\tau L^4\{\eta_\theta\}\,d\theta+\int\limits_t^\tau G_0L^3\{\eta_\theta\}\overset{1}{\cdot}d\mathbf{f}_\theta\right)d\tau\frac{1}{2}(s-\tau)^2+$$
$$+\int\limits_t^s\left(\int\limits_t^\tau LG_0L^2\{\eta_\theta\}\,d\theta+\int\limits_t^\tau{}^{(2)}G_0G_0L^2\{\eta_\theta\}\overset{1}{\cdot}d\mathbf{f}_\theta\right)\overset{1}{\cdot}d\mathbf{f}_\tau\frac{1}{2}(s-\tau)^2+$$
$$+\int\limits_t^s\left(\int\limits_t^\tau L^3G_0\{\eta_\theta\}\,d\theta+\int\limits_t^\tau{}^{(2)}G_0L^2G_0\{\eta_\theta\}\overset{1}{\cdot}d\mathbf{f}_\theta\right)d\tau\overset{1}{\cdot}\left((s-\tau)J_{0_{s,\tau}}-J_{1_{s,\tau}}\right)+$$
$$+\int\limits_t^s\left(\int\limits_t^\tau{}^{(2)}LG_0LG_0\{\eta_\theta\}\,d\theta+\right.$$
$$\left.+\int\limits_t^\tau{}^{(3)}G_0G_0LG_0\{\eta_\theta\}\overset{1}{\cdot}d\mathbf{f}_\theta\right)\overset{1}{\cdot}d\mathbf{f}_\tau\overset{1}{\cdot}\left((s-\tau)J_{0_{s,\tau}}-J_{1_{s,\tau}}\right)+$$
$$+\int\limits_t^s\left(\int\limits_t^\tau L^2G_0L\{\eta_\theta\}\,d\theta+\int\limits_t^\tau{}^{(2)}G_0LG_0L\{\eta_\theta\}\overset{1}{\cdot}d\mathbf{f}_\theta\right)d\tau\overset{1}{\cdot}J_{1_{s,\tau}}+$$
$$+\int\limits_t^s\left(\int\limits_t^\tau{}^{(2)}LG_0G_0L\{\eta_\theta\}\,d\theta+\int\limits_t^\tau{}^{(3)}G_0G_0G_0L\{\eta_\theta\}\overset{1}{\cdot}d\mathbf{f}_\theta\right)\overset{1}{\cdot}d\mathbf{f}_\tau\overset{1}{\cdot}J_{1_{s,\tau}}+$$
$$+\int\limits_t^s\left(\int\limits_t^\tau{}^{(2)}L^2G_0G_0\{\eta_\theta\}\,d\theta+\int\limits_t^\tau{}^{(3)}G_0LG_0G_0\{\eta_\theta\}\overset{1}{\cdot}d\mathbf{f}_\theta\right)d\tau\overset{2}{\cdot}{}^{(2)}J_{00_{s,\tau}}+$$
$$+\int\limits_t^s\left(\int\limits_t^\tau{}^{(3)}LG_0G_0G_0\{\eta_\theta\}\,d\theta+\int\limits_t^\tau{}^{(4)}G_0G_0G_0G_0\{\eta_\theta\}\overset{1}{\cdot}d\mathbf{f}_\theta\right)\overset{1}{\cdot}d\mathbf{f}_\tau\overset{2}{\cdot}{}^{(2)}J_{00_{s,\tau}}.\tag{4.40}$$

Применяя теоремы 3.1, 3.3 и 3.4 к правой части (4.40) с вероятностью 1 получаем:

$$D_{4_{s,t}} = \left(\int\limits_t^s L^4\{\eta_\tau\}\,d\tau + \int\limits_t^s G_0 L^3\{\eta_\tau\} \overset{1}{\cdot} d\mathbf{f}_\tau\right)\frac{1}{6}(s-\tau)^3 +$$

$$+\left(\int\limits_t^s LG_0L^2\{\eta_\tau\}\,d\tau + \int\limits_t^s {}^{(2)}G_0G_0L^2\{\eta_\tau\} \overset{1}{\cdot} d\mathbf{f}_\tau\right) \overset{1}{\cdot} \frac{1}{2}J_{2_{s,\tau}} +$$

$$+\left(\int\limits_t^s L^2G_0L\{\eta_\tau\}\,d\tau + \int\limits_t^s {}^{(2)}G_0LG_0L\{\eta_\tau\} \overset{1}{\cdot} d\mathbf{f}_\tau\right) \overset{1}{\cdot} \left((s-\tau)J_{1_{s,\tau}} - J_{2_{s,\tau}}\right) +$$

$$+\left(\int\limits_t^s {}^{(2)}LG_0G_0L\{\eta_\tau\}\,d\tau + \int\limits_t^s {}^{(3)}G_0G_0G_0L\{\eta_\tau\} \overset{1}{\cdot} d\mathbf{f}_\tau\right) \overset{2}{\cdot} {}^{(2)}J_{01_{s,\tau}} +$$

$$+\left(\int\limits_t^s L^3G_0\{\eta_\tau\}\,d\tau +\right.$$

$$\left.+\int\limits_t^s {}^{(2)}G_0L^2G_0\{\eta_\tau\} \overset{1}{\cdot} d\mathbf{f}_\tau\right) \overset{1}{\cdot} \left(\frac{1}{2}J_{2_{s,\tau}} - (s-\tau)J_{1_{s,\tau}} + \frac{1}{2}(s-\tau)^2 J_{0_{s,\tau}}\right) +$$

$$+\left(\int\limits_t^s {}^{(2)}LG_0LG_0\{\eta_\tau\}\,d\tau + \int\limits_t^s {}^{(3)}G_0G_0LG_0\{\eta_\tau\} \overset{1}{\cdot} d\mathbf{f}_\tau\right) \overset{2}{\cdot} \left({}^{(2)}J_{10_{s,\tau}} - {}^{(2)}J_{01_{s,\tau}}\right)$$

$$+\left(\int\limits_t^s {}^{(2)}L^2G_0G_0\{\eta_\tau\}\,d\tau +\right.$$

$$\left.+\int\limits_t^s {}^{(3)}G_0LG_0G_0\{\eta_\tau\} \overset{1}{\cdot} d\mathbf{f}_\tau\right) \overset{2}{\cdot} \left((s-\tau){}^{(2)}J_{00_{s,\tau}} - {}^{(2)}J_{10_{s,\tau}}\right) +$$

$$+\left(\int\limits_t^s {}^{(3)}LG_0G_0G_0\{\eta_\tau\}\,d\tau + \int\limits_t^s {}^{(4)}G_0G_0G_0G_0\{\eta_\tau\} \overset{1}{\cdot} d\mathbf{f}_\tau\right) \overset{3}{\cdot} {}^{(3)}J_{000_{s,\tau}}. \quad (4.41)$$

Перегруппировывая слагаемые в правой части (4.41) и используя соотношения:

$$G_1 = G_0L - LG_0,$$

$$G_2 = \frac{1}{2}\left(G_1L - LG_1\right) = \frac{1}{2}\left(G_0L^2 - 2LG_0L + L^2G_0\right),$$

с вероятностью 1 приходим к равенству

$$D_{4_{s,t}} = \int\limits_t^s \left(Q^{\mathcal{A}_3}\{\eta_\tau\}d\tau \otimes (s \ominus \tau)^{\mathcal{A}_3}\right) + \int\limits_t^s \left(\left(H^{\mathcal{A}_3}\{\eta_\tau\} \overset{1}{\cdot} d\mathbf{f}_\tau\right) \otimes (s \ominus \tau)^{\mathcal{A}_3}\right).$$

Таким образом, утверждение теоремы справедливо и при $r = 3$.

Предположим, что утверждение теоремы справедливо при некотором $n = r$, и докажем его справедливость при $n = r + 1$. Применяя формулу Ито к подынтегральным процессам в (4.31), с вероятностью 1 получаем следующие соотношения:

$$D_{r+1_{s,t}} = \tilde{D}_{r+1_{s,t}} + D_{r+2_{s,t}}, \tag{4.42}$$

$$\tilde{D}_{r+1_{s,t}} = \left(Q^{\mathcal{A}_r}\{\eta_t\} \otimes \int\limits_t^s d\tau (s \ominus \tau)^{\mathcal{A}_r}\right) + \left(\left(H^{\mathcal{A}_r}\{\eta_t\} \stackrel{1}{\cdot} \int\limits_t^s d\mathbf{f}_\tau\right) \otimes (s \ominus \tau)^{\mathcal{A}_r}\right), \tag{4.43}$$

$$D_{r+2_{s,t}} = \int\limits_t^s \left(\int\limits_t^{\tau_1} dU^{\mathcal{A}_r}\{\eta_\tau\} d\tau_1 \otimes (s \ominus \tau_1)^{\mathcal{A}_r}\right) +$$

$$+ \int\limits_t^s \left(\left(\int\limits_t^{\tau_1} dV^{\mathcal{A}_r}\{\eta_\tau\} \stackrel{1}{\cdot} d\mathbf{f}_{\tau_1}\right) \otimes (s \ominus \tau_1)^{\mathcal{A}_r}\right), \tag{4.44}$$

где

$$dU^{\mathcal{A}_r}\{\eta_\tau\} =$$

$$= \left\{ {}^{(k)}X_{jl_1\ldots l_k}\{\eta_\tau\} d\tau + {}^{(k+1)}Y_{jl_1\ldots l_k}\{\eta_\tau\} \stackrel{1}{\cdot} d\mathbf{f}_\tau : \ (j, l_1, \ldots, l_k, k) \in \mathcal{A}_r \right\};$$

$$dV^{\mathcal{A}_r}\{\eta_\tau\} =$$

$$= \left\{ {}^{(k+1)}Z_{jl_1\ldots l_k}\{\eta_\tau\} d\tau + {}^{(k+2)}W_{jl_1\ldots l_k}\{\eta_\tau\} \stackrel{1}{\cdot} d\mathbf{f}_\tau : \ (j, l_1, \ldots, l_k, k) \in \mathcal{A}_r \right\}.$$

Здесь

$${}^{(k)}X_{jl_1\ldots l_k}\{\eta_\tau\} = {}^{(k)}L^{j+2} G_{l_1} \ldots G_{l_k}\{\eta_\tau\};$$

$${}^{(k+1)}Z_{jl_1\ldots l_k}\{\eta_\tau\} = {}^{(k+1)}L G_0 L^j G_{l_1} \ldots G_{l_k}\{\eta_\tau\};$$

$${}^{(k+1)}Y_{jl_1\ldots l_k}\{\eta_\tau\} = {}^{(k+1)}G_0 L^{j+1} G_{l_1} \ldots G_{l_k}\{\eta_\tau\};$$

$${}^{(k+2)}W_{jl_1\ldots l_k}\{\eta_\tau\} = {}^{(k+2)}G_0 G_0 L^j G_{l_1} \ldots G_{l_k}\{\eta_\tau\}.$$

Заменим с вероятностью 1 согласно теореме 3.4 порядок интегрирования в повторных стохастических интегралах в (4.44):

$$D_{r+2_{s,t}} = \int\limits_t^s \left(\left(dU^{\mathcal{A}_r}\{\eta_\tau\} \int\limits_\tau^s d\tau_1\right) \otimes (s \ominus \tau_1)^{\mathcal{A}_r}\right) +$$

$$+ \int\limits_t^s \left(\left(dV^{\mathcal{A}_r}\{\eta_\tau\} \stackrel{1}{\cdot} \int\limits_\tau^s d\mathbf{f}_{\tau_1}\right) \otimes (s \ominus \tau_1)^{\mathcal{A}_r}\right). \tag{4.45}$$

Рассмотрим следующие стохастические интегралы:

$$\int\limits_{\tau}^{s} d\tau_1 (s \ominus \tau_1)_{jl_1\ldots l_k}^{(i_1\ldots i_k)}, \ \int\limits_{\tau}^{s} d\mathbf{f}_{\tau_1}^{(q)} (s \ominus \tau_1)_{jl_1\ldots l_k}^{(i_1\ldots i_k)} d\tau_1; \ q = 1, \ldots, m.$$

Согласно свойствам (4.17) и (4.18) имеем

$$\int\limits_{\tau}^{s} d\tau_1{}^{(k)} (s \ominus \tau_1)_{jl_1\ldots l_k} =$$

$$= \begin{cases} {}^{(k)}(s \ominus \tau)_{j+1\ l_1\ldots l_k} - \frac{1}{(s-\tau)^{j+1}} {}^{(k)}(s \ominus \tau)_{j+1\ l_1+j+1\ l_2\ldots l_k} & \text{при } k > 0 \\ \frac{(s-\tau)^{j+1}}{(j+1)!} & \text{при } k = 0 \end{cases} \tag{4.46}$$

с вероятностью 1,

$$\int\limits_{\tau}^{s} d\mathbf{f}_{\tau_1}^{(q)} (s \ominus \tau_1)_{jl_1\ldots l_k}^{(i_1\ldots i_k)} \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{(s-\tau)^j} (s \ominus \tau)_{jjl_1\ldots l_k}^{(qi_1\ldots i_k)}; \ k = 0, \ 1, \ \ldots. \tag{4.47}$$

Подставив (4.46) и (4.47) в (4.45), получим, что с вероятностью 1

$$D_{r+2_{s,t}} = \int\limits_{t}^{s} \left(Q^{\mathcal{A}_{r+1}} \{\eta_\tau\} d\tau \otimes (s \ominus \tau)^{\mathcal{A}_{r+1}} \right) +$$

$$+ \int\limits_{t}^{s} \left(\left(H^{\mathcal{A}_{r+1}} \{\eta_\tau\} \stackrel{1}{\cdot} d\mathbf{f}_\tau \right) \otimes (s \ominus \tau)^{\mathcal{A}_{r+1}} \right). \tag{4.48}$$

Итак, (4.31) доказано.

В результате подстановки (4.46) и (4.47) в (4.43) при $\tau = t$ с вероятностью 1 получим

$$\tilde{D}_{r+1_{s,t}} = \left(C^{\mathcal{A}_{r+1}} \{\eta_t\} \otimes (s \ominus t)^{\mathcal{A}_{r+1}} \right). \tag{4.49}$$

Таким образом, соотношения (4.42), (4.48) и (4.49) доказывают соотношение (4.30). Теорема доказана. □

Нетрудно видеть, что часть членов в основной части первого унифицированного разложения Тейлора–Ито (4.30) имеет больший порядок малости в среднеквадратическом смысле при $s \downarrow t$, чем порядок малости остаточного члена $D_{r+1_{s,t}}$. Такое заключение можно сделать на основании свойства (4.16).

Следующая теорема показывает, как необходимо перегруппировать члены первого унифицированного разложения Тейлора–Ито (4.30),

чтобы расположить их по порядку малости. При этом новый остаточный член разложения будет иметь больший порядок малости в среднеквадратическом смысле при $s \downarrow t$ по сравнению с членами основной части разложения.

Теорема 4.4. *Пусть процесс Ито $\eta_s = R(\mathbf{x}_s, s)$ $r+1$ раз непрерывно дифференцируем по Ито в среднеквадратическом смысле на промежутке $[0,T]$ на траекториях уравнения* (1.35). *Тогда при всех $s,t \in [0,T]:\ s \geq t$, справедливо первое унифицированное разложение Тейлора–Ито вида*

$$\eta_s = \eta_t + \sum_{q=1}^{r} \left(C^{\mathcal{D}_q}\{\eta_t\} \otimes (s \ominus t)^{\mathcal{D}_q}\right) + H_{r+1_{s,t}} \ \text{с в. 1}, \tag{4.50}$$

причем существует такая постоянная $C_r < \infty$, что справедлива оценка

$$\left(\mathsf{M}\left\{\left(H_{r+1_{s,t}}\right)^2\right\}\right)^{\frac{1}{2}} \leq C_r (s-t)^{\frac{r+1}{2}};\ r = 0,\ 1,\ \ldots,$$

где

$$H_{r+1_{s,t}} = \left(C^{\mathcal{U}_r}\{\eta_t\} \otimes (s \ominus t)^{\mathcal{U}_r}\right) + D_{r+1_{s,t}},$$

$$D_{r+1_{s,t}} = \int\limits_t^s \left(Q^{\mathcal{A}_r}\{\eta_\tau\} d\tau \otimes (s \ominus \tau)^{\mathcal{A}_r}\right) + \int\limits_t^s \left(\left(H^{\mathcal{A}_r}\{\eta_\tau\} \stackrel{1}{\cdot} d\mathbf{f}_\tau\right) \otimes (s \ominus \tau)^{\mathcal{A}_r}\right),$$

$$\mathcal{D}_q = \left\{(k, j, l_1, \ldots, l_k) : k + 2\left(j + \sum_{p=1}^{k} l_p\right) = q;\ k, j, l_1, \ldots, l_k = 0, 1, \ldots\right\},$$

$$\mathcal{U}_r = \left\{(k, j, l_1, \ldots, l_k) :\ k + j + \sum_{p=1}^{k} l_p \leq r;\ k + 2\left(j + \sum_{p=1}^{k} l_p\right) \geq r+1;\right.$$

$$\left. k, j, l_1, \ldots, l_k = 0,\ 1, \ldots\right\} = \left(\bigcup_{q=1}^{r} \mathcal{A}_q\right) \bigcap \left(\bigcup_{q=r+1}^{\infty} \mathcal{D}_q\right),$$

а другие обозначения такие же, как в теореме 4.3.

Доказательство. Перегруппируем члены разложения (4.30) следующим образом:

$$\eta_s = \eta_t + \sum_{q=1}^{r} \left(C^{\mathcal{D}_q}\{\eta_t\} \otimes (s \ominus t)^{\mathcal{D}_q}\right) + H_{r+1_{s,t}},$$

где

$$H_{r+1_{s,t}} = \left(C^{\mathcal{U}_r}\{\eta_t\} \otimes (s \ominus t)^{\mathcal{U}_r}\right) + D_{r+1_{s,t}}.$$

С помощью неравенства Минковского имеем

$$\left(\mathsf{M}\left\{\left(H_{r+1_{s,t}}\right)^2\right\}\right)^{\frac{1}{2}} \leq \left(\mathsf{M}\left\{\left(C^{\mathcal{U}_r}\{\eta_t\} \otimes (s \ominus t)^{\mathcal{U}_r}\right)^2\right\}\right)^{\frac{1}{2}} + \left(\mathsf{M}\left\{\left(D_{r+1_{s,t}}\right)^2\right\}\right)^{\frac{1}{2}}. \tag{4.51}$$

Поскольку

$$\left(C^{\mathcal{U}_r}\{\eta_t\}\otimes(s\ominus t)^{\mathcal{U}_r}\right)=$$

$$=\sum_{(k,j,l_1,\ldots,l_k)\in\mathcal{U}_r}\frac{(s-t)^j}{j!}\sum_{i_1,\ldots,i_k=1}^{m}L^jG_{l_1}^{(i_1)}\ldots G_{l_k}^{(i_k)}\{\eta_t\}\,J_{l_1\ldots l_k s,t}^{(i_1\ldots i_k)},$$

то с помощью свойства (4.16) и неравенства Минковского получим

$$\left(\mathsf{M}\left\{\left(C^{\mathcal{U}_r}\{\eta_t\}\otimes(s\ominus t)^{\mathcal{U}_r}\right)^2\right\}\right)^{\frac{1}{2}}\le K_r(s-t)^u,\ \ K_r<\infty,$$

где

$$u=\min_{(k,j,l_1,\ldots,l_k)\in\ \mathcal{U}_r}\left\{\frac{k}{2}+j+\sum_{p=1}^{k}l_p\right\}=\frac{r+1}{2}.$$

Таким образом

$$\left(\mathsf{M}\left\{\left(C^{\mathcal{U}_r}\{\eta_t\}\otimes(s\ominus t)^{\mathcal{U}_r}\right)^2\right\}\right)^{\frac{1}{2}}\le K_r(s-t)^{\frac{r+1}{2}}. \tag{4.52}$$

Рассмотрим $D_{r+1_{s,t}}$:

$$D_{r+1_{s,t}}=\int_t^s\left(Q^{\mathcal{A}_r}\{\eta_\tau\}d\tau\otimes(s\ominus\tau)^{\mathcal{A}_r}\right)+\int_t^s\left(\left(H^{\mathcal{A}_r}\{\eta_\tau\}\overset{1}{\cdot}d\mathbf{f}_\tau\right)\otimes(s\ominus\tau)^{\mathcal{A}_r}\right)$$

$$=\sum_{(k,j,l_1,\ldots,l_k)\in\mathcal{A}_r}\ \sum_{i_1,\ldots,i_k=1}^{m}\left(I_{l_1\ldots l_k,i_1\ldots i_k,j_{s,t}}+\sum_{p=1}^{m}J_{l_1\ldots l_k,i_1\ldots i_k,j_{s,t}}^{(p)}\right), \tag{4.53}$$

где

$$I_{l_1\ldots l_k,i_1\ldots i_k,j_{s,t}}=\int_t^s L^{j+1}G_{l_1}^{(i_1)}\ldots G_{l_k}^{(i_k)}\{\eta_\tau\}\,\frac{(s-\tau)^j}{j!}d\tau J_{l_1\ldots l_k s,\tau}^{(i_1\ldots i_k)};$$

$$J_{l_1\ldots l_k,i_1\ldots i_k,j_{s,t}}^{(p)}=\int_t^s G_0^{(p)}L^jG_{l_1}^{(i_1)}\ldots G_{l_k}^{(i_k)}\{\eta_\tau\}\,\frac{(s-\tau)^j}{j!}d\mathbf{f}_\tau^{(p)}J_{l_1\ldots l_k s,\tau}^{(i_1\ldots i_k)}.$$

Согласно теореме 3.1 о замене порядка интегрирования в повторных стохастических интегралах Ито с вероятностью 1 имеем

$$I_{l_1\ldots l_k,i_1\ldots i_k,j_{s,t}}=\frac{1}{j!}\int_t^s(s-\tau_k)^{l_k}\ldots\int_t^{\tau_2}(s-\tau_1)^{l_1}\int_t^{\tau_1}(s-\tau)^j\times$$

$$\times L^{j+1}G_{l_1}^{(i_1)}\ldots G_{l_k}^{(i_k)}\{\eta_\tau\}\,d\tau d\mathbf{f}_{\tau_1}^{(i_1)}\ldots d\mathbf{f}_{\tau_k}^{(i_k)}, \tag{4.54}$$

$$J_{l_1\ldots l_k,i_1\ldots i_k,j_{s,t}}^{(p)}=\frac{1}{j!}\int_t^s(s-\tau_k)^{l_k}\ldots\int_t^{\tau_2}(s-\tau_1)^{l_1}\int_t^{\tau_1}(s-\tau)^j\times$$

$$\times G_0^{(p)} L^j G_{l_1}^{(i_1)} \ldots G_{l_k}^{(i_k)} \{\eta_\tau\} \, d\mathbf{f}_\tau^{(p)} d\mathbf{f}_{\tau_1}^{(i_1)} \ldots d\mathbf{f}_{\tau_k}^{(i_k)}. \qquad (4.55)$$

Далее, применяя неравенство Минковского к (4.53), используя соотношения (4.54), (4.55), неравенства (1.43), (1.44) при $n = 1$, а также свойство (4.16), получаем следующую оценку:

$$\left(\mathsf{M}\left\{\left(D_{r+1_{s,t}}\right)^2\right\}\right)^{\frac{1}{2}} \le M_r (s-t)^v, \ M_r < \infty,$$

где

$$v = \min_{(k,j,l_1,\ldots,l_k)\in \mathcal{A}_r} \left\{ 1 + \frac{k}{2} + j + \sum_{p=1}^{k} l_p, \ \frac{1}{2} + \frac{k}{2} + j + \sum_{p=1}^{k} l_p \right\} = \frac{r+1}{2}.$$

Таким образом, имеем

$$\left(\mathsf{M}\left\{\left(D_{r+1_{s,t}}\right)^2\right\}\right)^{\frac{1}{2}} \le M_r (s-t)^{\frac{r+1}{2}}. \qquad (4.56)$$

Из (4.51)–(4.56) находим, что

$$\left(\mathsf{M}\left\{\left(H_{r+1_{s,t}}\right)^2\right\}\right)^{\frac{1}{2}} \le C_r (s-t)^{\frac{r+1}{2}}, \ C_r < \infty.$$

Теорема доказана $\square$.

Термины "первое унифицированное разложение Тейлора– Ито", или просто "унифицированное разложение Тейлора–Ито", далее будем применять как к разложению (4.30), так и к разложению (4.50).

4.3.3 Второе унифицированное разложение Тейлора–Ито

Поскольку между повторными стохастическими интегралами Ито $J_{l_1\ldots l_{k_{s,t}}}^{(i_1\ldots i_k)}$ и $I_{l_1\ldots l_{k_{s,t}}}^{(i_1\ldots i_k)}$ в силу аддитивности справедливо с вероятностью 1 соотношение

$$J_{l_1\ldots l_{k_{s,t}}}^{(i_1\ldots i_k)} = \sum_{j_1=0}^{l_1} \ldots \sum_{j_k=0}^{l_k} C_{l_1}^{j_1} \ldots C_{l_k}^{j_k} \ (s-t)^{l_1+\ldots+l_k-j_1-\ldots-j_k} \ I_{j_1\ldots j_{k_{s,t}}}^{(i_1\ldots i_k)},$$

где $C_n^m = n!/(m!(n-m)!)$ — как обычно означает биномиальный коэффициент, то разложение процесса Ито $\eta_s = R(\mathbf{x}_s, s)$ можно строить как по повторным стохастическим интегралам Ито $J_{l_1\ldots l_{k_{s,t}}}^{(i_1\ldots i_k)}$, что было сделано в предыдущем разделе, так и по повторным стохастическим интегралам Ито $I_{l_1\ldots l_{k_{s,t}}}^{(i_1\ldots i_k)}$.

Сформулируем теорему о втором унифицированном разложении процесса Ито $\eta_s = R(\mathbf{x}_s, s)$, где $R: \ \Re^n \times [0,T] \to \Re^1$, по повторным стохастическим интегралам $I_{l_1 \ldots l_{k\,s,t}}^{(i_1 \ldots i_k)}$.

Теорема 4.5. *Пусть случайный процесс $\eta_s = R(\mathbf{x}_s, s)$ $r+1$ раз непрерывно дифференцируем по Ито в среднеквадратическом смысле на промежутке $[0,T]$ на траекториях уравнения* (1.35). *Тогда при всех $s,t \in [0,T]: \ s \geq t$, справедливо второе унифицированное разложение Тейлора–Ито*

$$\eta_s = \eta_t + \sum_{q=1}^{r} \left(\hat{C}^{\mathcal{A}_q}\{\eta_t\} \otimes (s \ \hat{\ominus} \ t)^{\mathcal{A}_q} \right) + D_{r+1_{s,t}} \ \text{с в.1}, \tag{4.57}$$

$$D_{r+1_{s,t}} = \int\limits_t^s \left(Q^{\mathcal{A}_r}\{\eta_\tau\} d\tau \otimes (s \ominus \tau)^{\mathcal{A}_r} \right) + \int\limits_t^s \left(\left(H^{\mathcal{A}_r}\{\eta_\tau\} \stackrel{1}{\cdot} d\mathbf{f}_\tau \right) \otimes (s \ominus \tau)^{\mathcal{A}_r} \right), \tag{4.58}$$

правые части (4.57) *и* (4.58) *существуют в среднеквадратическом смысле, причем*

$$\hat{C}^{\mathcal{A}_q}\{\eta_t\} = \left\{ {}^{(k)}G_{l_1} \ldots G_{l_k} L^j \{\eta_t\} : (j, k, l_1, \ldots, l_k) \in \mathcal{A}_q \right\},$$

а остальные обозначения такие же, как в теореме 4.3.

Прежде чем доказывать теорему 4.5 выпишем второе унифицированное разложение Тейлора–Ито (4.57) в более развернутой форме:

$$R(\mathbf{x}_s, s) = R(\mathbf{x}_t, t) + \sum_{q=1}^{r} \sum_{(k,j,l_1,\ldots,l_k) \in \mathcal{A}_q} \frac{(s-t)^j}{j!} \times$$

$$\times \sum_{i_1,\ldots,i_k=1}^{m} G_{l_1}^{(i_1)} \ldots G_{l_k}^{(i_k)} L^j R(\mathbf{x}_t, t) I_{l_1 \ldots l_{k\,s,t}}^{(i_1 \ldots i_k)} + D_{r+1_{s,t}}$$

(2-е унифицированное разложение Тейлора–Ито).

Д о к а з а т е л ь с т в о. Используя комбинаторные соображения, нетрудно убедиться, что при $q = 0, \ 1, \ 2, \ 3, \ldots$ с вероятностью 1 выполняются равенства

$$\left(C^{\mathcal{A}_q}\{\eta_t\} \otimes (s \ominus t)^{\mathcal{A}_q} \right) = \left(\hat{C}^{\mathcal{A}_q}\{\eta_t\} \otimes (s \ \hat{\ominus} \ t)^{\mathcal{A}_q} \right). \tag{4.59}$$

Используя (4.59) и теорему 4.3, приходим к утверждению настоящей теоремы. Теорема доказана $\square$.

Упорядочим теперь члены второго унифицированного разложения Тейлора–Ито (4.57) по порядку малости при $s \downarrow t$ в среднеквадратическом смысле.

Теорема 4.6. *Пусть процесс* $\eta_s = R(\mathbf{x}_s, s)$ $r+1$ *раз непрерывно дифференцируем по Ито в среднеквадратическом смысле на промежутке* $[0,T]$ *на траекториях уравнения* (1.35). *Тогда при всех* $s,t \in [0,T]$: $s \geq t$, *справедливо второе унифицированное разложение Тейлора–Ито вида*

$$\eta_s = \eta_t + \sum_{q=1}^{r} \left(\hat{C}^{\mathcal{D}_q}\{\eta_t\} \otimes (s \hat{\ominus} t)^{\mathcal{D}_q}\right) + \hat{H}_{r+1_{s,t}} \text{ с в.1}, \tag{4.60}$$

причем существует такая постоянная $C_r < \infty$, *что*

$$\left(\mathsf{M}\left\{\left(\hat{H}_{r+1_{s,t}}\right)^2\right\}\right)^{\frac{1}{2}} \leq C_r (s-t)^{\frac{r+1}{2}}, \ r = 0, \ 1, \ldots,$$

где

$$\hat{H}_{r+1_{s,t}} \stackrel{\text{def}}{=} \left(\hat{C}^{\mathcal{U}_r}\{\eta_t\} \otimes (s \hat{\ominus} t)^{\mathcal{U}_r}\right) + D_{r+1_{s,t}}; \tag{4.61}$$

$$D_{r+1_{s,t}} = \int\limits_t^s \left(Q^{\mathcal{A}_r}\{\eta_\tau\} d\tau \otimes (s \ominus \tau)^{\mathcal{A}_r}\right) + \int\limits_t^s \left(\left(H^{\mathcal{A}_r}\{\eta_\tau\} \stackrel{1}{\cdot} d\mathbf{f}_\tau\right) \otimes (s \ominus \tau)^{\mathcal{A}_r}\right); \tag{4.62}$$

правые части (4.60)–(4.62) *существуют в среднеквадратическом смысле, и в них введены такие же обозначения, как в теоремах* 4.3–4.5.

Доказательство теоремы 4.6 аналогично доказательству теоремы 4.4.

Термины "второе унифицированное разложение Тейлора–Ито", или просто "унифицированное разложение Тейлора–Ито", будем применять как к разложению (4.57), так и к разложению (4.60).

Важно отметить, что первое и второе унифицированные разложения Тейлора–Ито могут быть получены с помощью другого подхода и без требования среднеквадратической непрерывности производных по Ито процесса η_s.

Поясним это более подробно. Заметим, что разложения, полученные в теоремах 4.3 – 4.6, строились с применением теорем о замене порядка интегрирования в повторных стохастических интегралах Ито на каждом шаге разложения. В результате при построении этих разложений было необходимо выполнение среднеквадратической непрерывности производных по Ито процесса η_s.

Однако, можно поступить иначе: сначала рассматривается разложение Тейлора–Ито в форме Вагнера и Платена (без требования среднеквадратической непрерывности производных по Ито процесса η_s), а затем с вероятностью 1 с помощью теорем о замене порядка интегри-

рования в повторных стохастических интегралах Ито сумма

$$\eta_t + \sum_{k=1}^{r} \sum_{(\lambda_k,\ldots,\lambda_1)\in\mathcal{M}_k} {}^{(p_k)}Q_{\lambda_k}\ldots Q_{\lambda_1}\{\eta_t\} \overset{p_k}{\cdot} {}^{(p_k)}J_{(\lambda_k\ldots\lambda_1)s,t} \tag{4.63}$$

преобразуется к одной из форм:

$$\eta_t + \sum_{q=1}^{r} \left(C^{\mathcal{A}_q}\{\eta_t\} \otimes (s \ominus t)^{\mathcal{A}_q}\right),\ \eta_t + \sum_{q=1}^{r} \left(\hat{C}^{\mathcal{A}_q}\{\eta_t\} \otimes (s \hat{\ominus} t)^{\mathcal{A}_q}\right).$$

При этом производные по Ито процесса η_s не входят в повторные стохастические интегралы $J^{(i_k\ldots i_1)}_{(\lambda_k\ldots\lambda_1)s,t}$ из суммы (4.63), и, следовательно, достаточно потребовать лишь их покомпонентной принадлежности к классу $\mathcal{M}_2([0,T])$.

В результате можно объединить теоремы 4.3–4.6 в одну и снять условие среднеквадратической непрерывности производных по Ито процесса η_s.

Таким образом, приходим к следующему утверждению.

Теорема 4.7. *Пусть процесс $\eta_s = R(\mathbf{x}_s, s)$ $r+1$ раз дифференцируем по Ито в среднеквадратическом смысле на промежутке $[0,T]$ на траекториях уравнения (1.35). Тогда при всех $s,t \in [0,T]:\ s \geq t$, справедливы первое и второе унифицированные разложения Тейлора–Ито вида:*

$$\eta_s = \eta_t + \sum_{q=1}^{r} \left(C^{\mathcal{A}_q}\{\eta_t\} \otimes (s \ominus t)^{\mathcal{A}_q}\right) + D_{r+1_{s,t}} \ \text{ с в.1}$$

(1-е *унифицированное разложение Тейлора–Ито*),

$$\eta_s = \eta_t + \sum_{q=1}^{r} \left(\hat{C}^{\mathcal{A}_q}\{\eta_t\} \otimes (s \hat{\ominus} t)^{\mathcal{A}_q}\right) + D_{r+1_{s,t}} \text{ с в.1}$$

(2-е *унифицированное разложение Тейлора–Ито*),

$$\eta_s = \eta_t + \sum_{q=1}^{r} \left(C^{\mathcal{D}_q}\{\eta_t\} \otimes (s \ominus t)^{\mathcal{D}_q}\right) + H_{r+1_{s,t}} \ \text{ с в.1}$$

(1-е *унифицированное разложение Тейлора–Ито*),

$$\eta_s = \eta_t + \sum_{q=1}^{r} \left(\hat{C}^{\mathcal{D}_q}\{\eta_t\} \otimes (s \hat{\ominus} t)^{\mathcal{D}_q}\right) + \hat{H}_{r+1_{s,t}} \ \text{ с в.1}$$

(2-е *унифицированное разложение Тейлора–Ито*),

где

$$H_{r+1_{s,t}} = \left(C^{\mathcal{U}_r}\{\eta_t\} \otimes (s \ominus t)^{\mathcal{U}_r}\right) + D_{r+1_{s,t}};$$

$$\hat{H}_{r+1_{s,t}} = \left(\hat{C}^{\mathcal{U}_r}\{\eta_t\} \otimes (s \hat{\ominus} t)^{\mathcal{U}_r}\right) + D_{r+1_{s,t}};$$

$$D_{r+1_{s,t}} =$$

$$= \sum_{(\lambda_{r+1},\ldots,\lambda_1)\in\mathcal{M}_{r+1}} \int\limits_t^s \ldots \left(\int\limits_t^{\tau_r} {}^{(p_{r+1})}Q_{\lambda_{r+1}} \ldots Q_{\lambda_1}\{\eta_{\tau_{r+1}}\} \overset{\lambda_{r+1}}{\cdot} d\mathbf{w}_{\tau_{r+1}} \right) \ldots \overset{\lambda_1}{\cdot} d\mathbf{w}_{\tau_1},$$

а остальные обозначения соответствуют обозначениям, введенным в теоремах 4.3–4.6.

4.4 Дифференцируемость по Стратоновичу случайных процессов

Поскольку стохастические интегралы могут быть представлены не только в форме Ито, но и в форме Стратоновича, то определения и теоремы из предыдущих разделов данной главы могут быть переформулированы в терминах стохастических интегралов Стратоновича, учитывая формулы связи последних со стохастическими интегралами Ито.

Рассмотрим процесс $\eta_s = R(\mathbf{x}_s, s)$, $s \in [0,T]$, где $R : \Re^n \times [0,T] \to \Re^1$, а $\mathbf{x}_s$ — решение стохастического дифференциального уравнения Ито (1.35).

Определение 4.3. *Процесс* $\eta_s = R(\mathbf{x}_s, s)$, $s \in [0,T]$, *называется дифференцируемым по Стратоновичу в среднеквадратическом смысле на промежутке* $[0,T]$ *на траекториях уравнения* (1.35), *если для любых двух моментов остановки* s, t *таких, что* $\mathsf{P}\{0 \le t \le s \le T\} = 1$, *с вероятностью* 1 *справедливо представление*

$$\eta_s = \eta_t + \int\limits_t^s H_{0_\tau} d\tau + \sum_{i=1}^m \int\limits_t^{*s} H_{1_\tau}^{(i)} d\mathbf{f}_\tau^{(i)}. \tag{4.64}$$

Случайные процессы H_{0_τ}, $H_{1_\tau}^{(i)}$; $i = 1,\ldots,m$, *удовлетворяют условиям существования правой части* (4.64) *в среднеквадратическом смысле и называются производными по Стратоновичу процесса* η_s, $s \in [0,T]$.

Следующая лемма устанавливает один из возможных вариантов достаточных условий дифференцируемости по Стратоновичу.

Лемма 4.3. *Пусть выполнены условия:*

1. $R(\mathbf{x}, s)$, $LR(\mathbf{x}, s)$, $G_0^{(i)}R(\mathbf{x}, s) \in \mathcal{L}$; $i = 1,\ldots,m$.

2. *Для всех* $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \Re^n$, $\tau, \theta \in [0,T]$; $i_1, i_2 = 1,\ldots,m$ *и некоторого* $\nu > 0$

$$|G_0^{(i_2)}G_0^{(i_1)}R(\mathbf{x},t) - G_0^{(i_2)}G_0^{(i_1)}R(\mathbf{y},t)| \le K_1|\mathbf{x}-\mathbf{y}|, \ K_1 < \infty,$$

$$|G_0^{(i_2)}G_0^{(i_1)}R(\mathbf{x},t)| + |LG_0^{(i_1)}R(\mathbf{x},t)| \le K_2(1+|\mathbf{x}|), \ K_2 < \infty,$$

$$|G_0^{(i_2)}G_0^{(i_1)}R(\mathbf{x},\tau)-G_0^{(i_2)}G_0^{(i_1)}R(\mathbf{x},\theta)|\le K_3|\tau-\theta|^{\nu}(1+|\mathbf{x}|),\ \ K_3<\infty.$$

3. *Справедливы условия* AI, AII (теорема 1.6).

4. $\mathsf{M}\{|\mathbf{x}_0|^8\}<\infty$.

Тогда процесс $\eta_s,\ s\in[0,T]$ *дифференцируем по Стратоновичу в среднеквадратическом смысле на промежутке* $[0,T]$ *на траекториях уравнения* (1.35) *и его производные по Стратоновичу определяются равенствами*

$$H_{0_\tau}=LR(\mathbf{x}_\tau,\tau)-\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{m}G_0^{(i)}G_0^{(i)}R(\mathbf{x}_\tau,\tau),\ H_{1_\tau}^{(i)}=G_0^{(i)}R(\mathbf{x}_\tau,\tau),\ i=1,\ldots,m. \tag{4.65}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Для доказательства леммы воспользуемся следующим утверждением [70, 86].

Лемма 4.4. *Пусть выполнены условия* AI–AIII (*теорема* 1.6) *и* $\mathsf{M}\{|\mathbf{x}_{t_0}|^{2n}\}<\infty$, $n\ge 1$. *Тогда решение стохастического дифференциального уравнения Ито* (1.35) *удовлетворяет следующим оценкам:*

$$\mathsf{M}\{|\mathbf{x}_t|^{2n}\}\le(1+\mathsf{M}\{|\mathbf{x}_{t_0}|^{2n}\})e^{C(t-t_0)},$$

$$\mathsf{M}\{|\mathbf{x}_t-\mathbf{x}_{t_0}|^{2n}\}\le C_1(1+\mathsf{M}\{|\mathbf{x}_{t_0}|^{2n}\})(t-t_0)^n e^{C(t-t_0)},$$

где $t\in[t_0,T]$, $T<\infty$; $C=2n(2n+1)K^2$; C_1 *— положительная постоянная, зависящая только от* $n,K,T-t_0$; $K<\infty$ *— постоянная.*

Используя условия леммы 4.3, лемму 4.4 и неравенство $(a+b)^2\le 2a^2+2b^2$, получим

$$\mathsf{M}\left\{|G_0^{(i_2)}G_0^{(i_1)}R(\mathbf{x}_\tau,\tau)-G_0^{(i_2)}G_0^{(i_1)}R(\mathbf{x}_\theta,\theta)|^4\right\}\le$$

$$\le 8\mathsf{M}\left\{|G_0^{(i_2)}G_0^{(i_1)}R(\mathbf{x}_\tau,\tau)-G_0^{(i_2)}G_0^{(i_1)}R(\mathbf{x}_\theta,\tau)|^4\right\}+$$

$$+8\mathsf{M}\left\{|G_0^{(i_2)}G_0^{(i_1)}R(\mathbf{x}_\theta,\tau)-G_0^{(i_2)}G_0^{(i_1)}R(\mathbf{x}_\theta,\theta)|^4\right\}\le$$

$$\le 8K_1^4\mathsf{M}\left\{|\mathbf{x}_\tau-\mathbf{x}_\theta|^4\right\}+8K_3^4|\tau-\theta|^{4\nu}\mathsf{M}\left\{(1+|\mathbf{x}_\theta|)^4\right\}\le$$

$$\le C_2|\tau-\theta|^2+C_3|\tau-\theta|^{4\nu}\to 0 \text{ при } \tau-\theta\to 0,$$

где $C_2,C_3<\infty$ — постоянные; $\tau,\theta\in[0,T]$,

$$\mathsf{M}\left\{|G_0^{(i_2)}G_0^{(i_1)}R(\mathbf{x}_\theta,\theta)|^8\right\}\le K_2^8\mathsf{M}\left\{(1+|\mathbf{x}_\theta|)^8\right\}\le$$

$$\le C_4\left(1+\mathsf{M}\left\{|\mathbf{x}_\theta|^8\right\}\right)\le C_5(1+(1+\mathsf{M}\{|\mathbf{x}_0|^8\})e^{Cs})<\infty,$$

где $C_4,C_5<\infty$ — постоянные; $\theta\in[0,T]$.

Аналогично $\mathsf{M}\left\{|LG_0^{(i_1)}R(\mathbf{x}_\theta,\theta)|^8\right\} < \infty,\ \theta \in [0,T]$.

Таким образом, $G_0^{(i_1)}R(\mathbf{x}_s,s) \in Q_8([0,T])$; $i_1 = 1,\ldots,m$.

В условиях леммы по формуле Ито для любых двух моментов остановки s,t, для которых $\mathsf{P}\{0 \le t \le s \le T\} = 1$, с вероятностью 1 справедливы равенства

$$R(\mathbf{x}_s,s) = R(\mathbf{x}_t,t) + \int\limits_t^s LR(\mathbf{x}_\tau,\tau)d\tau + \sum_{i_1=1}^m \int\limits_t^s G_0^{(i_1)}R(\mathbf{x}_\tau,\tau)d\mathbf{f}_\tau^{(i_1)}, \qquad (4.66)$$

$$G_0^{(i_1)}R(\mathbf{x}_s,s) = G_0^{(i_1)}R(\mathbf{x}_t,t) + \int\limits_t^s LG_0^{(i_1)}R(\mathbf{x}_\tau,\tau)d\tau +$$

$$+ \sum_{i_2=1}^m \int\limits_t^s G_0^{(i_2)}G_0^{(i_1)}R(\mathbf{x}_\tau,\tau)d\mathbf{f}_\tau^{(i_2)}, \qquad (4.67)$$

где $i_1,i_2 = 1,\ldots,m$, причем интегралы, входящие в правые части (4.66), (4.67), существуют в среднеквадратическом смысле.

Поскольку мы показали, что $G_0^{(i_1)}R(\mathbf{x}_s,s) \in Q_8([0,T])$; $i_1 = 1,\ldots,m$, согласно лемме 1.4 с вероятностью 1

$$\int\limits_t^s G_0^{(i_1)}R(\mathbf{x}_\tau,\tau)d\mathbf{f}_\tau^{(i_1)} = \int\limits_t^{*s} G_0^{(i_1)}R(\mathbf{x}_\tau,\tau)d\mathbf{f}_\tau^{(i_1)} - \frac{1}{2}\int\limits_t^s G_0^{(i_1)}G_0^{(i_1)}R(\mathbf{x}_\tau,\tau)d\tau. \qquad (4.68)$$

Согласно лемме 1.4 моменты t,s в (4.68) являются неслучайными, однако формула (4.68) может быть обобщена на случай моментов остановки (см., например, [86]).

Из (4.66) и (4.68) для моментов остановки t,s с вероятностью 1 получим

$$\eta_s = \eta_t + \int\limits_t^s H_{0_\tau}d\tau + \sum_{i=1}^m \int\limits_t^{*s} H_{1_\tau}^{(i)}d\mathbf{f}_\tau^{(i)}, \qquad (4.69)$$

где случайные процессы H_{0_τ}, $H_{1_\tau}^{(i)}$; $i = 1,\ldots,m$ удовлетворяют условиям существования в среднеквадратическом смысле правой части (4.69) и имеют вид (4.65). Лемма доказана. □

Дадим определение многократной дифференцируемости по Стратоновичу.

Определение 4.4. *Процесс $\eta_s = R(\mathbf{x}_s,s)$, где $R:\ \Re^n \times [0,T] \to \Re^1$, называется N раз дифференцируемым по Стратоновичу в среднеквадратическом смысле на промежутке $[0,T]$ на траекториях уравнения* (1.35)*, если для всех $l \in \{0,\ 1,\ldots,N-1\}$ и любых двух моментов*

остановки s, t *таких, что* $\mathsf{P}\{0 \le t \le s \le T\} = 1$, *с вероятностью* 1 *справедливо представление*

$$^{(p_l)}H_{\lambda_l \ldots \lambda_{1_s}} = {}^{(p_l)}H_{\lambda_l \ldots \lambda_{1_t}} + \int\limits_t^s {}^{(p_l)}H_{0\lambda_l \ldots \lambda_{1_\tau}} d\tau + \int\limits_t^s {}^{(p_l+1)}H_{1\lambda_l \ldots \lambda_{1_\tau}} \overset{1}{\cdot} d\mathbf{f}_\tau,$$

где $\lambda_q = 0$ *или* $\lambda_q = 1$; $p_l = \sum\limits_{i=1}^{l} \lambda_i$. *Матричные случайные процессы* $^{(p_q)}H_{\lambda_q \ldots \lambda_{1_\tau}}$; $q = 1, 2, \ldots, N$ *покомпонентно принадлежат классу* $\mathcal{M}_2([0, T])$ *и называются* q*-ми производными по Стратоновичу процесса* η_s. *При этом полагаем*

$$p_0 \stackrel{\text{def}}{=} 0, \ {}^{(p_0)}H_{\lambda_0 \ldots \lambda_{1_\tau}} \stackrel{\text{def}}{=} \eta_\tau,$$

$$^{(p_0)}H_{0\lambda_0 \ldots \lambda_{1_\tau}} \stackrel{\text{def}}{=} H_{0_\tau}, \ {}^{(p_0+1)}H_{1\lambda_0 \ldots \lambda_{1_\tau}} \stackrel{\text{def}}{=} {}^{(1)}H_{1_\tau}.$$

Обобщим лемму 4.3 на случай многократной дифференцируемости по Стратоновичу.

Введем обозначения:

$$\left\| D_{\lambda_l}^{(i_l)} \ldots D_{\lambda_1}^{(i_1)} R(\mathbf{x}, s) \right\|_{i_1=\lambda_1, \ldots, i_l=\lambda_l}^{m\lambda_1 \ \ldots \ m\lambda_l} \stackrel{\text{def}}{=} {}^{(p_l)}D_{\lambda_l} \ldots D_{\lambda_1}\{R(\mathbf{x}, s)\},$$

где $\lambda_l = 1$ или $\lambda_l = 0$; $D_{\lambda_l}^{(i_l)} = L - \frac{1}{2} \sum\limits_{j=1}^{m} G_0^{(j)} G_0^{(j)}$ и $i_l = 0$ при $\lambda_l = 0$; $D_{\lambda_l}^{(i_l)} = G_0^{(i_l)}$ и $i_l = 1, \ldots, m$ при $\lambda_l = 1$; $l = 1, \ldots, N$;

$$\mathcal{M}_k = \{(\lambda_k, \ldots, \lambda_1) : \lambda_l = 1 \text{ или } \lambda_l = 0; l = 1, \ldots, k\}.$$

Лемма 4.5. *Пусть выполнены условия:*

1. *Для всех* $(\lambda_l, \ldots, \lambda_1) \in \bigcup\limits_{g=1}^{N} \mathcal{M}_g : Q_{\lambda_l}^{(i_l)} \ldots Q_{\lambda_1}^{(i_1)} R(\mathbf{x}, \tau) \in \mathcal{L}$.

2. *Для всех* $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \Re^n$, $\tau, \theta \in [0, T]$, $(\lambda_l, \ldots, \lambda_1) \in \bigcup\limits_{g=1}^{N+1} \mathcal{M}_g$ *и некоторого* $\nu > 0$ *удовлетворены условия*

$$|Q_{\lambda_l}^{(i_l)} \ldots Q_{\lambda_1}^{(i_1)} R(\mathbf{x}, \tau) - Q_{\lambda_l}^{(i_l)} \ldots Q_{\lambda_1}^{(i_1)} R(\mathbf{y}, \tau)| \le K_1 |\mathbf{x} - \mathbf{y}|, \ K_1 < \infty,$$

$$|Q_{\lambda_l}^{(i_l)} \ldots Q_{\lambda_1}^{(i_1)} R(\mathbf{x}, \tau)| \le K_2 (1 + |\mathbf{x}|), \ K_2 < \infty,$$

$$|Q_{\lambda_l}^{(i_l)} \ldots Q_{\lambda_1}^{(i_1)} R(\mathbf{x}, \tau) - Q_{\lambda_l}^{(i_l)} \ldots Q_{\lambda_1}^{(i_1)} R(\mathbf{x}, \theta)| \le K_3 |\tau - \theta|^\nu (1 + |\mathbf{x}|), \ K_3 < \infty.$$

3. *Справедливы условия* AI, AII (теорема 1.6).

4. $\mathsf{M}\{|\mathbf{x}_0|^8\} < \infty$.

Тогда процесс $\eta_s, s \in [0,T]$, N *раз дифференцируем по Стратоновичу в среднеквадратическом смысле на промежутке* $[0,T]$ *на траекториях уравнения* (1.35) *и его производные по Стратоновичу имеют вид*

$$^{(p_l)}H_{\lambda_l \ldots \lambda_1 s} = {}^{(p_l)}D_{\lambda_l} \ldots D_{\lambda_1}\{R(\mathbf{x_s}, s)\},$$

где $l = 1, \ldots, N$; $p_l = \sum\limits_{p=1}^{l} \lambda_p$.

Доказательство леммы нетрудно провести по индукции.

В случае $R(\mathbf{x},t) \equiv \mathbf{x}$, $\mathbf{x} \in \Re^n$, положим

$$D_{\lambda_l}^{(i_l)} \ldots D_{\lambda_1}^{(i_1)}\mathbf{x} \stackrel{\text{def}}{=} \begin{cases} D_{\lambda_l}^{(i_l)} \ldots D_{\lambda_2}^{(i_2)}\bar{\mathbf{a}}(\mathbf{x},t) & \text{при } i_1 = 0,\ l \geq 2 \\ D_{\lambda_l}^{(i_l)} \ldots D_{\lambda_2}^{(i_2)}\Sigma_{i_1}(\mathbf{x},t) & \text{при } i_1 = 1,\ldots,m,\ l \geq 2 \\ \bar{\mathbf{a}}(\mathbf{x},t) & \text{при } i_1 = 0,\ l = 1 \\ \Sigma_{i_1}(\mathbf{x},t) & \text{при } i_1 = 1,\ldots,m,\ l = 1 \end{cases}, \tag{4.70}$$

где $\bar{\mathbf{a}}(\mathbf{x},t) \stackrel{\text{def}}{=} \mathbf{a}(\mathbf{x},t) - \frac{1}{2}\sum\limits_{j=1}^{m} G_0^{(j)}\Sigma_j(\mathbf{x},t)$; $\Sigma_j(\mathbf{x},t)$ — j-й столбец матрицы $\Sigma(\mathbf{x},t)$;

$$\left\| D_{\lambda_l}^{(i_l)} \ldots D_{\lambda_1}^{(i_1)}\mathbf{x} \right\|_{i_1=\lambda_1,\ldots,i_l=\lambda_l}^{m\lambda_1\ \ldots\ m\lambda_l} \stackrel{\text{def}}{=} {}^{(p_l)}D_{\lambda_l} \ldots D_{\lambda_1}\{\mathbf{x}\}. \tag{4.71}$$

Далее также будем часто использовать следующие записи:

$$D_{\lambda_l}^{(i_l)} \ldots D_{\lambda_1}^{(i_1)}\mathbf{x}_t \stackrel{\text{def}}{=} \begin{cases} D_{\lambda_l}^{(i_l)} \ldots D_{\lambda_2}^{(i_2)}\bar{\mathbf{a}}(\mathbf{x}_t,t) & \text{при } i_1 = 0,\ l \geq 2 \\ D_{\lambda_l}^{(i_l)} \ldots D_{\lambda_2}^{(i_2)}\Sigma_{i_1}(\mathbf{x}_t,t) & \text{при } i_1 = 1,\ldots,m,\ l \geq 2 \\ \bar{\mathbf{a}}(\mathbf{x}_t,t) & \text{при } i_1 = 0,\ l = 1 \\ \Sigma_{i_1}(\mathbf{x}_t,t) & \text{при } i_1 = 1,\ldots,m,\ l = 1 \end{cases}, \tag{4.72}$$

$$\left\| D_{\lambda_l}^{(i_l)} \ldots D_{\lambda_1}^{(i_1)}\mathbf{x}_t \right\|_{i_1=\lambda_1,\ldots,i_l=\lambda_l}^{m\lambda_1\ \ldots\ m\lambda_l} \stackrel{\text{def}}{=} {}^{(p_l)}D_{\lambda_l} \ldots D_{\lambda_1}\{\mathbf{x}_t\}. \tag{4.73}$$

Пояснения к обозначениям (4.70)–(4.73) те же, что и к формулам (4.7)–(4.10).

4.5 Разложение Тейлора–Стратоновича в форме Клоедена и Платена

Пользуясь связью между стохастическими интегралами Ито и Стратоновича, можно получить разложение процесса Ито по повторным стохастическим интегралам Стратоновича. Такое разложение для

процессов Ито, представляющих собой гладкое безынерционное преобразование от решения стохастического дифференциального уравнения Ито, впервые было получено в [84].

Сформулируем теорему о разложении дифференцируемого по Стратоновичу случайного процесса $\eta_s = R(\mathbf{x}_s, s)$, где $R: \ \Re^n \times [0,T] \to \Re^1$, по повторным стохастическим интегралам Стратоновича.

Теорема 4.8. *Пусть процесс $\eta_s = R(\mathbf{x}_s, s)$ $r+1$ раз дифференцируем по Стратоновичу в среднеквадратическом смысле на промежутке $[0,T]$ на траекториях уравнения* (1.35). *Тогда для любых двух моментов остановки s, t таких, что $\mathsf{P}\{0 \le t \le s \le T\} = 1$, с вероятностью 1 справедливо разложение Тейлора–Стратоновича вида*

$$\eta_s = \eta_t + \sum_{k=1}^{r} \sum_{(\lambda_k,\ldots,\lambda_1)\in\mathcal{M}_k} {}^{(p_k)}D_{\lambda_k}\ldots D_{\lambda_1}\{\eta_t\} \overset{p_k}{\cdot} {}^{(p_k)}J^*_{(\lambda_k\ldots\lambda_1)s,t} + D_{r+1_{s,t}}, \quad (4.74)$$

$$D_{r+1_{s,t}} =$$

$$= \sum_{(\lambda_{r+1},\ldots,\lambda_1)\in\mathcal{M}_{r+1}} \int\limits_t^{*s} \ldots \left(\int\limits_t^{*\tau_r} {}^{(p_{r+1})}D_{\lambda_{r+1}}\ldots D_{\lambda_1}\{\eta_{\tau_1}\} \overset{\lambda_{r+1}}{\cdot} d\mathbf{w}_{\tau_1} \right) \ldots \overset{\lambda_1}{\cdot} d\mathbf{w}_{\tau_{r+1}}, \quad (4.75)$$

правые части (4.74) *и* (4.75) *существуют в среднеквадратическом смысле и в них введены следующие обозначения:*

$${}^{(p_k)}J^*_{(\lambda_k\ldots\lambda_1)s,t} = \left\| J^{*(i_k\ldots i_1)}_{(\lambda_k\ldots\lambda_1)s,t} \right\|_{i_1=\lambda_1,\ldots,i_k=\lambda_k}^{m\lambda_1 \ \ldots \ m\lambda_k},$$

$$J^{*(i_k\ldots i_1)}_{(\lambda_k\ldots\lambda_1)s,t} = \int\limits_t^{*s} \ldots \int\limits_t^{*\tau_2} d\mathbf{w}^{(i_k)}_{\tau_1} \ldots d\mathbf{w}^{(i_1)}_{\tau_k} \ \text{при}\ k \ge 1,$$

$\mathbf{w}^{(i)}_\tau = \mathbf{f}^{(i)}_\tau$ *при* $i = 1,\ldots,m$ *и* $\mathbf{w}^{(0)}_\tau = \tau$.

Порядок малости при $s \downarrow t$ в среднеквадратическом смысле общего члена разложения (4.74) определяется только порядком малости повторного стохастического интеграла Стратоновича $J^{*(i_k\ldots i_1)}_{(\lambda_k\ldots\lambda_1)s,t}$. Из результатов главы 3 следует, что этот интеграл Стратоновича имеет такой же порядок малости при $s \downarrow t$ в среднеквадратическом смысле, что и соответствующий ему стохастический интеграл Ито. Поэтому общий член разложения (4.74) имеет порядок малости, равный порядку малости повторного стохастического интеграла Ито:

$$J^{(i_k\ldots i_1)}_{(\lambda_k\ldots\lambda_1)s,t} = \int\limits_t^{s} \ldots \int\limits_t^{\tau_2} d\mathbf{w}^{(i_k)}_{\tau_1} \ldots d\mathbf{w}^{(i_1)}_{\tau_k},$$

где $i_l = 0$ при $\lambda_l = 0$ и $i_l = 1, \ldots, m$ при $\lambda_l = 1$.

Нетрудно видеть, что

$$\left(\mathsf{M}\left\{\left(J^{(i_k \ldots i_1)}_{(\lambda_k \ldots \lambda_1)s,t}\right)^2\right\}\right)^{\frac{1}{2}} \le C_k (s-t)^{k-\frac{1}{2}\sum\limits_{j=1}^{k}\lambda_k},$$

где $C_k < \infty$ — постоянная.

В силу сказанного часть слагаемых разложения (4.74) имеет больший порядок малости при $s \downarrow t$ в среднеквадратическом смысле, чем порядок малости остаточного члена $D_{r+1_{s,t}}$ разложения (4.74), для которого справедлива оценка

$$\left(\mathsf{M}\left\{\left(D_{r+1_{s,t}}\right)^2\right\}\right)^{\frac{1}{2}} \le C_r (s-t)^{\frac{r+1}{2}},\ C_r < \infty \text{ — постоянная.}$$

Обозначим $\mathcal{G}_{rk} = \{(\lambda_k, \ldots, \lambda_1) : r+1 \le 2k - \lambda_1 - \ldots - \lambda_k \le 2r\}$, $\mathcal{E}_{qk} = \{(\lambda_k, \ldots, \lambda_1) : 2k - \lambda_1 - \ldots - \lambda_k = q\}$, где $\lambda_l = 1$ или $\lambda_l = 0$; $l = 1, \ldots, k$.

Сформулируем теорему об упорядоченном по порядку малости в среднеквадратическом смысле разложении по повторным стохастическим интегралам Стратоновича процесса $\eta_s = R(\mathbf{x}_s, s)$, где $R : \Re^n \times [0,T] \to \Re^1$.

Теорема 4.9. *Пусть процесс $\eta_s = R(\mathbf{x}_s, s)$ $r+1$ раз дифференцируем по Стратоновичу в среднеквадратическом смысле на промежутке $[0,T]$ на траекториях уравнения* (1.35). *Тогда для любых двух моментов остановки s, t таких, что $\mathsf{P}\{0 \le t \le s \le T\} = 1$, с вероятностью 1 справедливо разложение Тейлора–Стратоновича вида*

$$\eta_s = \eta_t + \sum_{q,k=1}^{r} \sum_{(\lambda_k,\ldots,\lambda_1)\in\mathcal{E}_{qk}} {}^{(p_k)}D_{\lambda_k} \ldots D_{\lambda_1}\{\eta_t\} \overset{p_k}{\cdot} {}^{(p_k)}J^*_{(\lambda_k \ldots \lambda_1)s,t} + H_{r+1_{s,t}}, \tag{4.76}$$

$$H_{r+1_{s,t}} = D_{r+1_{s,t}} + \sum_{k=1}^{r} \sum_{(\lambda_k,\ldots,\lambda_1)\in\mathcal{G}_{rk}} {}^{(p_k)}D_{\lambda_k} \ldots D_{\lambda_1}\{\eta_t\} \overset{p_k}{\cdot} {}^{(p_k)}J^*_{(\lambda_k \ldots \lambda_1)s,t}, \tag{4.77}$$

правые части (4.76) *и* (4.77) *существуют в среднеквадратическом смысле, причем найдется такая постоянная $C_r < \infty$, что*

$$\left(\mathsf{M}\left\{\left(H_{r+1_{s,t}}\right)^2\right\}\right)^{\frac{1}{2}} \le C_r (s-t)^{\frac{r+1}{2}},$$

а $D_{r+1_{s,t}}$ имеет вид (4.75).

Термин "разложение Тейлора–Стратоновича в форме Клоедена и Платена" будем далее применять как к разложению (4.74), так и к разложению (4.76).

4.6 Унифицированные разложения Тейлора–Стратоновича

В данном разделе путем замены порядка интегрирования в повторных стохастических интегралах Ито и с помощью соотношений между повторными стохастическими интегралами Стратоновича и Ито (см. главу 3) правая часть (4.74) будет преобразована в два представления, в которые входят минимальные совокупности различных повторных стохастических интегралов Стратоновича. Эти представления мы назовем унифицированными разложениями Тейлора–Стратоновича.

4.6.1 Первое унифицированное разложение Тейлора–Стратоновича

В дальнейшем нам потребуется следующее утверждение.

Лемма 4.6. *Пусть* $h(\tau), g(\tau), G(\tau) : [t,s] \to \Re^1$ *— непрерывные на промежутке* $[t,s]$ *функции, причем* $G(\tau)$ *— первообразная функции* $g(\tau)$. *Пусть также* $\xi_\tau^{(l)} \in Q_8([t,s])$ (см. разд. 1.2.5) *и имеет вид*

$$\xi_\tau^{(l)} = \int\limits_t^\tau a_u du + \int\limits_t^\tau b_u d\mathbf{f}_u^{(l)},\ \ l = 1,\ 2.$$

Тогда

$$\int\limits_t^s g(\tau) \int\limits_t^{*\tau} h(\theta) \int\limits_t^{*\theta} \xi_u^{(l)} d\mathbf{f}_u^{(i)} d\mathbf{f}_\theta^{(j)} d\tau = \int\limits_t^{*s} (G(s) - G(\theta)) h(\theta) \int\limits_t^{*\theta} \xi_u^{(l)} d\mathbf{f}_u^{(i)} d\mathbf{f}_\theta^{(j)} \tag{4.78}$$

с вероятностью 1, *где* $i, j, l = 1, 2$; $\mathbf{f}_\tau^{(1)}$, $\mathbf{f}_\tau^{(2)}$ *—* $\mathcal{F}_\tau$*-измеримые при всех* $\tau \in [t,s]$ *независимые стандартные винеровские процессы.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. В условиях леммы можно использовать лемму 1.4 и следствие 1.1 при $F(x,\theta) \equiv xh(\theta)$, $\eta_\theta \stackrel{\text{def}}{=} \int\limits_t^{*\theta} \xi_u^{(l)} d\mathbf{f}_u^{(i)}$, так как очевидно, что $\eta_\theta \in Q_8([t,s])$; $xh(\theta)$ — дважды непрерывно дифференцируемая по x функция, причем эти производные ограничены при всех $x \in \Re^1$; $\eta_\theta h(\theta) \in \mathcal{M}_2([t,s])$. По лемме 1.4 и следствию 1.1

$$\int\limits_t^{*\tau} h(\theta) \int\limits_t^{*\theta} \xi_u^{(l)} d\mathbf{f}_u^{(i)} d\mathbf{f}_\theta^{(j)} = \int\limits_t^\tau h(\theta) \int\limits_t^{*\theta} \xi_u^{(l)} d\mathbf{f}_u^{(i)} d\mathbf{f}_\theta^{(j)} + \frac{1}{2} \mathbf{1}_{\{i=j\}} \int\limits_t^\tau h(\theta) \xi_\theta^{(l)} d\theta, \tag{4.79}$$

$$\int\limits_t^{*\theta} \xi_u^{(l)} d\mathbf{f}_u^{(i)} = \int\limits_t^\theta \xi_u^{(l)} d\mathbf{f}_u^{(i)} + \frac{1}{2} \mathbf{1}_{\{l=i\}} \int\limits_t^\theta b_u du \tag{4.80}$$

с вероятностью 1, где $\mathbf{1}_A$ — индикатор множества A.

Подставим (4.79), (4.80) в левую часть (4.78) и дважды воспользуемся теоремой 3.1:

$$\int\limits_t^s g(\tau)\int\limits_t^{*\tau} h(\theta)\int\limits_t^{*\theta} \xi_u^{(l)} d\mathbf{f}_u^{(i)} d\mathbf{f}_\theta^{(j)} d\tau = \int\limits_t^s \xi_u^{(l)} d\mathbf{f}_u^{(i)} \int\limits_u^s h(\theta) d\mathbf{f}_\theta^{(j)} \int\limits_\theta^s g(\tau) d\tau +$$

$$+\frac{1}{2}\mathbf{1}_{\{l=i\}} \int\limits_t^s b_u du \int\limits_u^s h(\theta) d\mathbf{f}_\theta^{(j)} \int\limits_\theta^s g(\tau) d\tau + \frac{1}{2}\mathbf{1}_{\{i=j\}} \int\limits_t^s h(\theta)\xi_\theta^{(l)} d\theta \int\limits_\theta^s g(\tau) d\tau =$$

$$= G(s)\Biggl(\int\limits_t^s \xi_u^{(l)} d\mathbf{f}_u^{(i)} \int\limits_u^s h(\theta) d\mathbf{f}_\theta^{(j)} + \frac{1}{2}\mathbf{1}_{\{i=j\}} \int\limits_t^s h(\theta)\xi_\theta^{(l)} d\theta +$$

$$+\frac{1}{2}\mathbf{1}_{\{l=i\}} \int\limits_t^s b_u du \int\limits_u^s h(\theta) d\mathbf{f}_\theta^{(j)}\Biggr) -$$

$$-\Biggl(\int\limits_t^s \xi_u^{(l)} d\mathbf{f}_u^{(i)} \int\limits_u^s G(\theta)h(\theta) d\mathbf{f}_\theta^{(j)} + \frac{1}{2}\mathbf{1}_{\{i=j\}} \int\limits_t^s G(\theta)h(\theta)\xi_\theta^{(l)} d\theta +$$

$$+\frac{1}{2}\mathbf{1}_{\{l=i\}} \int\limits_t^s b_u du \int\limits_u^s h(\theta)G(\theta) d\mathbf{f}_\theta^{(j)}\Biggr) =$$

$$= G(s)\Biggl(\int\limits_t^s h(\theta) \int\limits_t^\theta \xi_u^{(l)} d\mathbf{f}_u^{(i)} d\mathbf{f}_\theta^{(j)} + \frac{1}{2}\mathbf{1}_{\{i=j\}} \int\limits_t^s h(\theta)\xi_\theta^{(l)} d\theta +$$

$$+\frac{1}{2}\mathbf{1}_{\{l=i\}} \int\limits_t^s h(\theta) \int\limits_t^\theta b_u du d\mathbf{f}_\theta^{(j)}\Biggr) -$$

$$-\Biggl(\int\limits_t^s G(\theta)h(\theta) \int\limits_t^\theta \xi_u^{(l)} d\mathbf{f}_u^{(i)} d\mathbf{f}_\theta^{(j)} + \frac{1}{2}\mathbf{1}_{\{i=j\}} \int\limits_t^s G(\theta)h(\theta)\xi_\theta^{(l)} d\theta +$$

$$+\frac{1}{2}\mathbf{1}_{\{l=i\}} \int\limits_t^s h(\theta)G(\theta) \int\limits_t^\theta b_u du d\mathbf{f}_\theta^{(j)}\Biggr) \qquad (4.81)$$

с вероятностью 1. Используя (4.79), (4.80), формулу, которая отличается от (4.79) заменой $h(\theta)$ на $G(\theta)h(\theta)$, а также (4.81), получаем (4.78). Лемма доказана. □

Введем ряд обозначений

$$I_{l_1\ldots l_{k_{s,t}}}^{*(i_1\ldots i_k)} = \begin{cases} \int\limits_t^{*s} (t-\tau_1)^{l_k} \ldots \int\limits_t^{*\tau_{k-1}} (t-\tau_k)^{l_1} d\mathbf{f}_{\tau_k}^{(i_1)} \ldots d\mathbf{f}_{\tau_1}^{(i_k)} & \text{при } k \geq 1 \\ 1 & \text{при } k = 0 \end{cases},$$

где $i_1,\ldots,i_k=1,\ldots,m$;

$$\left\|I^{*(i_1\ldots i_k)}_{l_1\ldots l_{k_{s,t}}}\right\|^m_{i_1,\ldots,i_k=1}\stackrel{\rm def}{=}{}^{(k)}I^*_{l_1\ldots l_{k_{s,t}}};$$

$${}^{(k)}(s\ominus t)^*_{jl_1\ldots l_k}=\left\|(s\ominus t)^{*(i_1\ldots i_k)}_{jl_1\ldots l_k}\right\|^m_{i_1,\ldots,i_k=1}=\left\|\frac{(s-t)^j}{j!}I^{*(i_1\ldots i_k)}_{l_1\ldots l_{k_{s,t}}}\right\|^m_{i_1,\ldots,i_k=1};$$

$$\bar G_p^{(i)}\stackrel{\rm def}{=}\frac{1}{p}\left(\bar G_{p-1}^{(i)}\bar L-\bar L\bar G_{p-1}^{(i)}\right);\ p=1,2,\ldots;\ i=1,\ldots,m; \tag{4.82}$$

$$\bar L=L-\frac{1}{2}\sum_{j=1}^m G_0^{(j)}G_0^{(j)};$$

$\bar G_0^{(i)}\stackrel{\rm def}{=}G_0^{(i)}$; $i=1,\ldots,m$; операторы L и $G_0^{(i)}$; $i=1,\ldots,m$ определяются равенствами (4.2), (4.3);

$$\mathcal{A}_q\stackrel{\rm def}{=}\left\{(k,j,l_1,\ldots,l_k):\ k+j+\sum_{p=1}^k l_p;\ k,j,l_1,\ldots,l_k=0,1,\ldots\right\};$$

$$\left\|\bar G_{l_1}^{(i_1)}\ldots\bar G_{l_k}^{(i_k)}\bar L^jR(\mathbf{x},t)\right\|^m_{i_1,\ldots,i_k=1}\stackrel{\rm def}{=}{}^{(k)}\bar G_{l_1}\ldots\bar G_{l_k}\bar L^j\{R(\mathbf{x},t)\};$$

$$\bar L^jR(\mathbf{x},t)\stackrel{\rm def}{=}\begin{cases}\underbrace{\bar L\ldots\bar L}_{j}R(\mathbf{x},t) & \text{при } j\ge 1\\ R(\mathbf{x},t) & \text{при } j=0\end{cases}.$$

Сформулируем теорему о первом унифицированном разложении Тейлора–Стратоновича.

Теорема 4.10. *Пусть процесс Ито* $\eta_s=R(\mathbf{x}_s,s)$, *где* $R:\ \Re^n\times[0,T]\to\Re^1$, $r+1$ *раз дифференцируем по Стратоновичу в среднеквадратическом смысле на промежутке* $[0,T]$ *на траекториях уравнения* (1.35). *Тогда при всех* $s,t\in[0,T]:\ s\ge t$, *с вероятностью* 1 *справедливо первое унифицированное разложение Тейлора–Стратоновича*

$$\eta_s=\eta_t+\sum_{q=1}^r\left(\bar C^{\mathcal{A}_q}\{\eta_t\}\otimes(s\ominus t)^{\mathcal{A}_q}_*\right)+D_{r+1_{s,t}}, \tag{4.83}$$

причем правая часть (4.83) *существует в среднеквадратическом смысле и в ней введены обозначения*

$$\bar C^{\mathcal{A}_q}\{\eta_\tau\}=\left\{{}^{(k)}\bar G_{l_1}\ldots\bar G_{l_k}\bar L^j\{\eta_t\}:(k,j,l_1,\ldots,l_k)\in\mathcal{A}_q\right\},$$

$$(s\ominus t)^{\mathcal{A}_q}_*=\{{}^{(k)}(s\ominus t)^*_{jl_1\ldots l_k}:\ (k,j,l_1,\ldots,l_k)\in\mathcal{A}_q\},$$

а $D_{r+1_{s,t}}$ *имеет вид* (4.75).

Д о к а з а т е л ь с т в о. Покажем, что с вероятностью 1

$$\sum_{(\lambda_q,\ldots,\lambda_1)\in\mathcal{M}_q} {}^{(p_q)}D_{\lambda_q}\ldots D_{\lambda_1}\{\eta_t\} \overset{p_q}{\cdot} {}^{(p_q)}J^*_{(\lambda_q\ldots\lambda_1)s,t} = \left(\bar{C}^{\mathcal{A}_q}\{\eta_t\}\otimes(s\ominus t)^{\mathcal{A}_q}_*\right). \tag{4.84}$$

При $q=1$ равенство (4.84) справедливо. Предположим, что (4.84) справедливо при некотором $q>1$. Тогда

$$\sum_{(\lambda_{q+1},\ldots,\lambda_1)\in\mathcal{M}_{q+1}} {}^{(p_{q+1})}D_{\lambda_1}\ldots D_{\lambda_{q+1}}\{\eta_t\} \overset{p_{q+1}}{\cdot} {}^{(p_{q+1})}J^*_{(\lambda_1\ldots\lambda_{q+1})s,t} =$$

$$= \sum_{\lambda_{q+1}\in\{1,\ 0\}} \int\limits_t^s \sum_{(\lambda_q,\ldots,\lambda_1)\in\mathcal{M}_q} \left({}^{(p_{q+1})}D_{\lambda_1}\ldots D_{\lambda_{q+1}}\{\eta_t\} \overset{p_q}{\cdot} {}^{(p_q)}J^*_{(\lambda_1\ldots\lambda_q)\theta,t}\right) \overset{\lambda_{q+1}}{\cdot} d\mathbf{w}_\theta$$

$$= \sum_{\lambda_{q+1}\in\{1,\ 0\}} \int\limits_t^s \sum_{(k,j,l_1,\ldots,l_k)\in\mathcal{A}_q} \frac{(\theta-t)^j}{j!}\times$$

$$\times\left({}^{(k+\lambda_{q+1})}\bar{G}_{l_1}\ldots\bar{G}_{l_k}\bar{L}^j D_{\lambda_{q+1}}\{\eta_t\} \overset{k}{\cdot} {}^{(k)}I^*_{l_1\ldots l_k s,t}\right) \overset{\lambda_{q+1}}{\cdot} d\mathbf{w}_\theta =$$

$$= \sum_{(k,j,l_1,\ldots,l_k)\in\mathcal{A}_q} \left({}^{(k)}\bar{G}_{l_1}\ldots\bar{G}_{l_k}\bar{L}^{j+1}\{\eta_t\} \overset{k}{\cdot} \int\limits_t^s \frac{(\theta-t)^j}{j!}{}^{(k)}I^*_{l_1\ldots l_k\theta,t}d\theta + \right.$$

$$\left. + \left({}^{(k+1)}\bar{G}_{l_1}\ldots\bar{G}_{l_k}\bar{L}^j\bar{G}_0\{\eta_t\} \overset{k}{\cdot} \int\limits_t^s \frac{(\theta-t)^j}{j!}{}^{(k)}I^*_{l_1\ldots l_k\theta,t}\right) \overset{1}{\cdot} d\mathbf{f}_\theta\right) \tag{4.85}$$

с вероятностью 1, где $\mathbf{w}_\tau^{(i)} = \mathbf{f}_\tau^{(i)}$ при $i=1,\ldots,m$ и $\mathbf{w}_\tau^{(0)}=\tau$; $\mathbf{f}_\tau^{(i)}$ — компоненты $\mathbf{f}_\tau$.

Согласно лемме 4.6

$$\int\limits_t^s \frac{(\theta-t)^j}{j!}{}^{(k)}I^*_{l_1\ldots l_k\theta,t}d\theta =$$

$$= \begin{cases} \frac{(s-t)^{j+1}}{(j+1)!} & \text{при } k=0 \\ \frac{(s-t)^{j+1}}{(j+1)!}{}^{(k)}I^*_{l_1\ldots l_k s,t} - \frac{(-1)^{j+1}}{(j+1)!}{}^{(k)}I^*_{l_1\ldots l_{k-1}\ l_k+j+1_{s,t}} & \text{при } k>0 \end{cases} \tag{4.86}$$

с вероятностью 1. Кроме того, согласно введенным обозначениям

$$\int\limits_t^s \frac{(\theta-t)^j}{j!}I^{*(i_1\ldots i_k)}_{l_1\ldots l_k\theta,t}d\mathbf{f}_\theta^{(i_{k+1})} \stackrel{\text{def}}{=} \frac{(-1)^j}{j!}I^{*(i_1\ldots i_k i_{k+1})}_{l_1\ldots l_k j_{s,t}}. \tag{4.87}$$

Подставим выражения (4.86), (4.87) в (4.85). Далее, сгруппировав слагаемые в полученном выражении при повторных стохастических

интегралах Стратоновича с одинаковыми нижними индексами и воспользовавшись равенством

$$\bar{G}_p^{(i)} R(\mathbf{x},t) = \frac{1}{p!}\sum_{q=0}^{p}(-1)^q C_p^q \bar{L}^q \bar{G}_0^{(i)} \bar{L}^{p-q} R(\mathbf{x},t),\ C_p^q = \frac{p!}{q!(p-q)!}, \quad (4.88)$$

которое вытекает из (4.82), заметим, что полученное выражение с вероятностью 1 равно

$$\sum_{(k,j,l_1,\ldots,l_k)\in\mathcal{A}_{q+1}} \frac{(s-t)^j}{j!}{}^{(k)}\bar{G}_{l_1}\ldots\bar{G}_{l_k}\bar{L}^j\{\eta_t\} \stackrel{k}{:} {}^{(k)}I^*_{l_1\ldots l_k s,t}.$$

Таким образом, (4.84) доказано.

Далее, суммируя равенства (4.84) при $q = 1, 2, \ldots, r$ и используя (4.74), приходим к (4.83). Теорема доказана $\square$.

Также как и в случае унифицированных разложений Тейлора–Ито, упорядочим члены первого унифицированного разложения Тейлора-Стратоновича (4.83) по порядку малости в среднеквадратическом смысле при $s \downarrow t$:

$$\eta_s = \eta_t + \sum_{q=1}^{r}\left(\bar{C}^{\mathcal{D}_q}\{\eta_t\} \otimes (s \ominus t)_*^{\mathcal{D}_q}\right) + \bar{H}_{r+1_{s,t}}, \quad (4.89)$$

где

$$\bar{H}_{r+1_{s,t}} \stackrel{\text{def}}{=} \left(\bar{C}^{\mathcal{U}_r}\{\eta_t\} \otimes (s \ominus t)_*^{\mathcal{U}_r}\right) + D_{r+1_{s,t}};$$

множества $\mathcal{D}_q$ и $\mathcal{U}_r$ такие же, как в теореме 4.4, а $D_{r+1_{s,t}}$ имеет вид (4.75).

Разложение (4.89) обладает тем свойством, что его остаточный член $\bar{H}_{r+1_{s,t}}$ имеет больший порядок малости при $s \downarrow t$ в среднеквадратическом смысле по сравнению с членами основной части разложения (4.89).

Термины "первое унифицированное разложение Тейлора–Стратоновича" и "унифицированное разложение Тейлора–Стратоновича" будем применять далее как к разложению (4.83), так и к разложению (4.89).

Если $r = 2, 3, 4, 5, 6, 7$, то в первое унифицированное разложение Тейлора–Стратоновича (4.89) входят соответственно 2, 4, 7, 12, 20 и 33 различных повторных стохастических интеграла Стратоновича. В то же время разложение Тейлора–Стратоновича (4.76) содержит уже 2, 5, 9, 17, 29 и 50 различных повторных стохастических интегралов Стратоновича соответственно.

4.6.2 Второе унифицированное разложение Тейлора–Стратоновича

Введем в рассмотрение повторные стохастические интегралы Стратоновича

$$J_{l_1\ldots l_{k\,s,t}}^{*(i_1\ldots i_k)} \stackrel{\rm def}{=} \begin{cases} \int\limits_t^{*s} (s-\tau_1)^{l_k} \ldots \int\limits_t^{*\tau_{k-1}} (s-\tau_k)^{l_1} d\mathbf{f}_{\tau_k}^{(i_1)} \ldots d\mathbf{f}_{\tau_1}^{(i_k)} & \text{при } k \ge 1 \\ 1 & \text{при } k = 0 \end{cases},$$

где $i_1, \ldots, i_k = 1, \ldots, m$.

Нетрудно видеть, что в силу аддитивности стохастических интегралов и формулы бинома Ньютона с вероятностью 1 справедливо равенство

$$I_{l_1\ldots l_{k\,s,t}}^{*(i_1\ldots i_k)} = \sum_{j_1=0}^{l_1} \ldots \sum_{j_k=0}^{l_k} \prod_{g=1}^{k} C_{l_g}^{j_g} (t-s)^{l_1+\ldots+l_k-j_1-\ldots-j_k} J_{j_1\ldots j_{k\,s,t}}^{*(i_1\ldots i_k)} \text{ с в.1}, \qquad (4.90)$$

где $C_l^k \stackrel{\rm def}{=} l!/(k!(l-k)!)$ — биномиальный коэффициент.

Таким образом, унифицированное разложение Тейлора–Стратоновича процесса $\eta_s = R(\mathbf{x}_s, s)$, $s \in [0,T]$, можно строить как по повторным стохастическим интегралам $I_{l_1\ldots l_{k\,s,t}}^{*(i_1\ldots i_k)}$, что было сделано в предыдущем разделе, так и по повторным стохастическим интегралам $J_{l_1\ldots l_{k\,s,t}}^{*(i_1\ldots i_k)}$. Этому вопросу посвящен данный раздел.

Положим

$$\left\| J_{l_1\ldots l_{k\,s,t}}^{*(i_1\ldots i_k)} \right\|_{i_1,\ldots,i_k=1}^{m} \stackrel{\rm def}{=} {}^{(k)}J_{l_1\ldots l_{k\,s,t}}^{*},$$

$${}^{(k)}(s \hat{\ominus} t)_{jl_1\ldots l_k}^{*} = \left\| (s \hat{\ominus} t)_{jl_1\ldots l_k}^{*(i_1\ldots i_k)} \right\|_{i_1,\ldots,i_k=1}^{m} = \left\| \frac{(s-t)^j}{j!} J_{l_1\ldots l_{k\,s,t}}^{*(i_1\ldots i_k)} \right\|_{i_1,\ldots,i_k=1}^{m},$$

$$\left\| \bar{L}^j G_{l_1}^{(i_1)} \ldots \bar{G}_{l_k}^{(i_k)} R(\mathbf{x},t) \right\|_{i_1,\ldots,i_k=1}^{m} \stackrel{\rm def}{=} {}^{(k)}\bar{L}^j \bar{G}_{l_1} \ldots \bar{G}_{l_k}\{R(\mathbf{x},t)\}.$$

Сформулируем теорему о втором унифицированном разложении Тейлора–Стратоновича.

Теорема 4.11. *Пусть процесс Ито* $\eta_s = R(\mathbf{x}_s, s)$, *где* $R: \Re^n \times [0,T] \to \Re^1$, $r+1$ *раз дифференцируем по Стратоновичу в среднеквадратическом смысле на промежутке* $[0,T]$ *на траекториях уравнения* (1.35). *Тогда при всех* $s,t \in [0,T]:\ s \ge t$, *с вероятностью* 1 *справедливо второе унифицированное разложение Тейлора–Стратоновича*

$$\eta_s = \eta_t + \sum_{q=1}^{r} \left(\tilde{C}^{\mathcal{A}_q}\{\eta_t\} \otimes (s \hat{\ominus} t)_*^{\mathcal{A}_q} \right) + D_{r+1_{s,t}}, \qquad (4.91)$$

причем правая часть (4.91) *существует в среднеквадратическом смысле и в ней введены обозначения*

$$\tilde{C}^{\mathcal{A}_q}\{\eta_\tau\} = \left\{{}^{(k)}\bar{L}^j\bar{G}_{l_1}\ldots\bar{G}_{l_k}\{\eta_t\} : (k,j,l_1,\ldots,l_k)\in\mathcal{A}_q\right\},$$

$$(s\ \hat{\ominus}\ t)_*^{\mathcal{A}_q} = \{{}^{(k)}(s\ \hat{\ominus}\ t)_{jl_1\ldots l_k}^* :\ (k,j,l_1,\ldots,l_k)\in\mathcal{A}_q\},$$

$D_{r+1_{s,t}}$ *имеет вид* (4.75).

Доказательство теоремы сводится к проверке при $q = 1,2,\ldots,r$ справедливости равенств

$$\left(\tilde{C}^{\mathcal{A}_q}\{\eta_t\}\otimes(s\ \hat{\ominus}\ t)_*^{\mathcal{A}_q}\right) = \left(\bar{C}^{\mathcal{A}_q}\{\eta_t\}\otimes(s\ominus t)_*^{\mathcal{A}_q}\right),$$

которые в развернутом виде выглядят следующим образом:

$$\sum_{(k,j,l_1,\ldots,l_k)\in\mathcal{A}_q}\frac{(s-t)^j}{j!}{}^{(k)}\bar{L}^j\bar{G}_{l_1}\ldots\bar{G}_{l_k}\{\eta_t\}\overset{k}{\cdot}{}^{(k)}J_{l_1\ldots l_k s,t}^* =$$

$$= \sum_{(k,j,l_1,\ldots,l_k)\in\mathcal{A}_q}\frac{(s-t)^j}{j!}{}^{(k)}\bar{G}_{l_1}\ldots\bar{G}_{l_k}\bar{L}^j\{\eta_t\}\overset{k}{\cdot}{}^{(k)}I_{l_1\ldots l_k s,t}^* \text{ с в.1.} \qquad (4.92)$$

Равенство (4.92) проверяется путем подстановки в его правую часть выражения (4.90) и использования формулы (4.88).

Упорядочим члены разложения (4.91) по порядку малости при $s\downarrow t$ в среднеквадратическом смысле:

$$\eta_s = \eta_t + \sum_{q=1}^{r}\left(\tilde{C}^{\mathcal{D}_q}\{\eta_t\}\otimes(s\ \hat{\ominus}\ t)_*^{\mathcal{D}_q}\right) + \tilde{H}_{r+1_{s,t}}, \qquad (4.93)$$

где

$$\tilde{H}_{r+1_{s,t}} \stackrel{\text{def}}{=} \left(\tilde{C}^{\mathcal{U}_r}\{\eta_t\}\otimes(s\ \hat{\ominus}\ t)_*^{\mathcal{U}_r}\right) + D_{r+1_{s,t}};$$

$D_{r+1_{s,t}}$ имеет вид (4.75), а $\mathcal{D}_q$ и $\mathcal{U}_r$ такие же, как в теореме 4.4.

Разложение (4.93) в отличие от разложения (4.91) обладает тем свойством, что остаточный член $\tilde{H}_{r+1_{s,t}}$ имеет больший порядок малости при $s\downarrow t$ в среднеквадратическом смысле, нежели члены основной части разложения (4.93).

Термины "второе унифицированное разложение Тейлора–Стратоновича" и "унифицированное разложение Тейлора–Стратоновича" будем применять далее как к разложению (4.91), так и к разложению (4.93).

Если $r = 2,3,4,5,6,7$, то во второе унифицированное разложение Тейлора–Стратоновича (4.93) входят соответственно 2, 4, 7, 12, 20 и

33 различных повторных стохастических интеграла Стратоновича. В то же время разложение Тейлора–Стратоновича (4.76) содержит уже 2, 5, 9, 17, 29 и 50 различных повторных стохастических интегралов Стратоновича соответственно.

Заметим, что коэффициентные функции разложений Тейлора–Ито строятся с использованием операторов L и $G_0^{(i)}$, $i=1,\ldots,m$, а коэффициентные функции разложений Тейлора–Стратоновича — с использованием операторов $\bar{L}=L-\frac{1}{2}\sum\limits_{j=1}^{m}G_0^{(j)}G_0^{(j)}$ и $G_0^{(i)}$; $i=1,\ldots,m$. Нетрудно видеть, что

$$\bar{L}=\frac{\partial}{\partial t}+\sum_{i=1}^{n}\mathbf{a}^{(i)}(\mathbf{x},t)\frac{\partial}{\partial\mathbf{x}^{(i)}}-\frac{1}{2}\sum_{j=1}^{m}\sum_{l,i=1}^{n}\Sigma^{(lj)}(\mathbf{x},t)\frac{\partial\Sigma^{(ij)}}{\partial\mathbf{x}^{(l)}}(\mathbf{x},t)\cdot\frac{\partial}{\partial\mathbf{x}^{(i)}},$$

т.е. оператор $\bar{L}$ включает в себя частные производные первого порядка. В то же время в оператор L входят частные производные первого и второго порядка. Таким образом, выражения коэффициентных функций разложений Тейлора–Ито содержат частные производные функций $R(\mathbf{x},t)$, $\mathbf{a}^{(i)}(\mathbf{x},t)$, $\Sigma^{(ij)}(\mathbf{x},t)$; $i=1,\ldots,n$; $j=1,\ldots,m$ более высокого порядка, нежели выражения соответствующих коэффициентных функций разложений Тейлора–Стратоновича.

4.7 Сильная сходимость стохастических разложений

В этом разделе рассмотрим результаты, которые получены в [81, 84, 86] и связаны с сильной сходимостью разложения Тейлора–Ито в форме Вагнера и Платена, и разложения Тейлора–Стратоновича в форме Клоедена и Платена.

Введем ряд обозначений. Пусть множество Λ_r определяется следующим образом:

$$\Lambda_r=\{(\lambda_1,\ldots,\lambda_k):\ k+n(\lambda_1,\ldots,\lambda_k)\le r,\ \lambda_p\in\{0,\ 1\},\ p=1,\ldots,k\},$$

где $n(\lambda_1,\ldots,\lambda_k)$ — число нулей среди $\lambda_1,\ldots,\lambda_k$. Введем множества $\mathcal{M}$ и $B\left(\Lambda_r\right)$ вида

$$\mathcal{M}=\{(\lambda_1,\ldots,\lambda_k):\ \lambda_p\in\{0,\ 1\},\ p=1,\ldots,k,\ k=1,\ 2,\ldots\},$$

$$B\left(\Lambda_r\right)=\{(\lambda_1,\ldots,\lambda_k)\in\mathcal{M}\backslash\Lambda_r:\ (\lambda_2,\ldots,\lambda_k)\in\Lambda_r,\ \lambda_p\in\{0,\ 1\},\ p=1,\ldots,k\}.$$

В условиях теоремы 4.1, согласно введенным обозначениям, с вероятностью 1 имеем

$$\eta_s = \eta_{s,t}^{(k)} + R_{k+1_{s,t}},$$

где

$$\eta_{s,t}^{(k)} = \eta_t + \sum_{(\lambda_1,\ldots,\lambda_k)\in\Lambda_k} {}^{(p_k)}Q_{\lambda_k}\ldots Q_{\lambda_1}\{\eta_t\} \overset{p_k}{\cdot} {}^{(p_k)}J_{(\lambda_k\ldots\lambda_1)s,t};$$

$$R_{k+1_{s,t}} = \sum_{(\lambda_1,\ldots,\lambda_k)\in B(\Lambda_k)} \int\limits_t^s \ldots \left(\int\limits_t^{\tau_{k-1}} {}^{(p_k)}Q_{\lambda_k}\ldots Q_{\lambda_1}\{\eta_{\tau_k}\} \overset{\lambda_k}{\cdot} d\mathbf{w}_{\tau_k} \right) \ldots \overset{\lambda_1}{\cdot} d\mathbf{w}_{\tau_1}.$$

Здесь сохранен смысл обозначений, входящих в теорему 4.1.

Теорема 4.12 [81, 84, 86]. *Пусть условия теоремы* 4.1 *выполнены и пусть*

$$\sup_{t_0\le t\le T} \mathsf{M}\left\{\left|Q_{\lambda_k}^{(i_k)}\ldots Q_{\lambda_1}^{(i_1)}\{\eta_t\}\right|^2\right\} \le C_1 C_2^{k+n(\lambda_1,\ldots,\lambda_k)}\left[\frac{1}{2}\left(k+n(\lambda_1,\ldots,\lambda_k)\right)\right]!$$

для любого $(\lambda_1,\ldots,\lambda_k)\in B(\Lambda_k)$; $i_1,\ldots,i_k = 0,\ 1,\ldots,m$. *Тогда для всех* $t\in[t_0,T]$

$$\mathsf{M}\left\{\left|\eta_t - \eta_{t,t_0}^{(k)}\right|^2\right\} \le C_3 \frac{\left(C_4(t-t_0)\right)^{k+1}}{\left[\frac{1}{2}(k+1)\right]!},$$

где $[x]$ *— целая часть числа* x; $C_1, C_2, C_3, C_4 < \infty$ *— постоянные, не зависящие от* k.

Из теоремы 4.12 в частности следует, что усеченное разложение Тейлора–Ито в форме Вагнера и Платена $\eta_{t,t_0}^{(k)}$ сходится в среднеквадратическом смысле к процессу Ито η_t : $\underset{k\to\infty}{\text{l.i.m.}}\ \eta_{t,t_0}^{(k)} = \eta_t$ для всех $t\in[t_0,T]$.

Следующая теорема устанавливает сходимость с вероятностью 1 при $t\in[t_0,T]$ усеченного разложения Тейлора–Ито в форме Вагнера и Платена $\eta_{t,t_0}^{(k)}$ к процессу Ито η_t.

Теорема 4.13 [81, 84, 86]. *Пусть условия теоремы* 4.12 *выполнены и пусть*

$$\sup_{t_0\le t\le T} \mathsf{M}\left\{\left|Q_{\lambda_k}^{(i_k)}\ldots Q_{\lambda_1}^{(i_1)}\{\eta_t\}\right|^2\right\} \le C_1 C_2^{k+n(\lambda_1,\ldots,\lambda_k)}$$

для любого $(\lambda_1,\ldots,\lambda_k)\in\mathcal{M}$. *Тогда усеченное разложение Тейлора–Ито в форме Вагнера и Платена* $\eta_{t,t_0}^{(k)}$ *сходится при* $k\to\infty$ *и всех*

$t \in [t_0, T]$ *с вероятностью* 1 *к процессу Ито* η_t :

$$\eta_t = \lim_{k\to\infty} \eta_{t,t_0}^{(k)} = \sum_{(\lambda_1,\ldots,\lambda_k)\in\mathcal{M}} {}^{(p_k)}Q_{\lambda_k}\ldots Q_{\lambda_1}\{\eta_{t_0}\} \overset{p_k}{\cdot} {}^{(p_k)}J_{(\lambda_k\ldots\lambda_1)t,t_0}.$$

В работах [81, 84, 86] также сформулированы и доказаны аналоги теорем 4.12 и 4.13 о сильной сходимости разложения Тейлора–Стратоновича в форме Клоедена и Платена.

В условиях теоремы 4.8 согласно введенным обозначениям с вероятностью 1 имеем

$$\eta_s = \tilde{\eta}_{s,t}^{(k)} + \tilde{R}_{k+1_{s,t}},$$

где

$$\tilde{\eta}_{s,t}^{(k)} = \eta_t + \sum_{(\lambda_1,\ldots,\lambda_k)\in\Lambda_k} {}^{(p_k)}D_{\lambda_k}\ldots D_{\lambda_1}\{\eta_t\} \overset{p_k}{\cdot} {}^{(p_k)}J^*_{(\lambda_k\ldots\lambda_1)s,t};$$

$$\tilde{R}_{k+1_{s,t}} = \sum_{(\lambda_1,\ldots,\lambda_k)\in B(\Lambda_k)} \overset{*s}{\int\limits_t} \ldots \left(\overset{*\tau_{k-1}}{\int\limits_t} {}^{(p_k)}D_{\lambda_k}\ldots D_{\lambda_1}\{\eta_{\tau_k}\} \overset{\lambda_k}{\cdot} d\mathbf{w}_{\tau_k}\right) \ldots \overset{\lambda_1}{\cdot} d\mathbf{w}_{\tau_1}.$$

Здесь сохранен смысл обозначений, введенных в теореме 4.8.

Теорема 4.14 [81, 84, 86]. *Пусть условия теоремы* 4.8 *выполнены и пусть*

$$\sup_{t_0\le t\le T} \mathsf{M}\left\{\left|D_{\lambda_k}^{(i_k)}\ldots D_{\lambda_1}^{(i_1)}\{\eta_t\}\right|^2\right\} \le C_1 C_2^{k+n(\lambda_1,\ldots,\lambda_k)}\left[\frac{1}{2}\left(k+n(\lambda_1,\ldots,\lambda_k)\right)\right]!$$

для любого $(\lambda_1,\ldots,\lambda_k) \in B(\Lambda_k)$; $i_1,\ldots,i_k = 0,\ 1,\ldots,m$. *Тогда для всех* $t \in [t_0, T]$

$$\mathsf{M}\left\{\left|\eta_t - \tilde{\eta}_{t,t_0}^{(k)}\right|^2\right\} \le C_3 \frac{\left(C_4(t-t_0)\right)^{k+1}}{\left[\frac{1}{2}(k+1)\right]!},$$

где $C_1, C_2, C_3, C_4 < \infty$ — *постоянные, не зависящие от* k.

Из теоремы 4.14 в частности следует, что усеченное разложение Тейлора–Стратоновича в форме Клоедена и Платена $\tilde{\eta}_{t,t_0}^{(k)}$ сходится в среднеквадратическом смысле к процессу Ито η_t :

$$\underset{k\to\infty}{\text{l.i.m.}}\ \tilde{\eta}_{t,t_0}^{(k)} = \eta_t \text{ для всех } t \in [t_0, T].$$

Следующая теорема устанавливает сходимость с вероятностью 1 при $t \in [t_0, T]$ усеченного разложения Тейлора–Стратоновича в форме Клоедена и Платена $\eta_{t,t_0}^{(k)}$ к процессу Ито η_t.

Теорема 4.15 [81, 84, 86]. *Пусть условия теоремы* 4.14 *выполнены и пусть*

$$\sup_{t_0\le t\le T} \mathsf{M}\left\{\left|D_{\lambda_k}^{(i_k)}\ldots D_{\lambda_1}^{(i_1)}\{\eta_t\}\right|^2\right\} \le C_1 C_2^{k+n(\lambda_1,\ldots,\lambda_k)}$$

для любого $(\lambda_1,\ldots,\lambda_k)\in\mathcal{M}$. *Тогда усеченное разложение Тейлора–Стратоновича в форме Клоедена и Платена* $\tilde{\eta}_{t,t_0}^{(k)}$ *сходится при* $k\to\infty$ *и всех* $t\in[t_0,T]$ *с вероятностью* 1 *к процессу Ито* η_t :

$$\eta_t=\lim_{k\to\infty}\tilde{\eta}_{t,t_0}^{(k)}=\sum_{(\lambda_1,\ldots,\lambda_k)\in\mathcal{M}} {}^{(p_k)}D_{\lambda_k}\ldots D_{\lambda_1}\{\eta_{t_0}\}\overset{p_k}{\cdot}{}^{(p_k)}J^*_{(\lambda_k\ldots\lambda_1)t,t_0}.$$

Отметим, что сильная сходимость унифицированных разложений Тейлора–Стратоновича вытекает из сильной сходимости разложения Тейлора–Стратоновича в форме Клоедена и Платена и равенства с вероятностью 1 при соответствующих условиях правых частей унифицированных разложений Тейлора–Стратоновича и правой части разложения Тейлора–Стратоновича в форме Клоедена и Платена. Аналогичный вывод справедлив и для разложений Тейлора–Ито.

В заключение отметим, что на практике для построения численных методов решения стохастических дифференциальных уравнений Ито обычно используется несколько первых приближений разложения Тейлора–Ито или Тейлора–Стратоновича, т.е. число k невелико (обычно $k\le 7$). Поэтому наиболее важной характеристикой отдельного члена стохастического разложения является его малость по приращению времени, а не по индексу k. Несмотря на это обстоятельство, результаты, приведенные в данном разделе, представляют интерес с теоретической точки зрения.

4.8 Слабая сходимость разложений Тейлора–Ито

В данном разделе приведем формулировку теоремы о слабой сходимости разложения Тейлора–Ито в форме Вагнера и Платена, которая сформулирована и доказана в [86] (предложение 5.11.1. С.211–221), а также формулировки соответствующих утверждений для унифицированных разложений Тейлора–Ито.

Обозначим через $C^l(\Re^n,\Re^1)$ пространство l раз непрерывно дифференцируемых функций $h(\mathbf{x}):\Re^n\to\Re^1$, которые вместе со своими частными производными до порядка l включительно возрастают полиномиально (функция $f(\mathbf{x}):\Re^n\to\Re^1$ возрастает полиномиально, если

существуют постоянные $C_f > 0$ и $q_f \in N$, зависящие от $f(\mathbf{x})$ и такие, что для всех $\mathbf{x} \in \Re^n : |f(\mathbf{x})| \le C_f(1 + |\mathbf{x}|^{2q_f}))$.

Пусть имеется стохастическое дифференциальное уравнение Ито (1.35) в автономном случае, т.е. когда $\mathbf{a}(\mathbf{x}, t) \equiv \mathbf{a}(\mathbf{x}) : \Re^n \to \Re^n$, $\Sigma(\mathbf{x}, t) \equiv \Sigma(\mathbf{x}) : \Re^n \to \Re^{n\times m}$, с начальным условием $\mathbf{x}_0$.

Через $\mathbf{x}_{s,t}^{(r)}$ обозначим усеченное разложение Тейлора–Ито в форме Вагнера и Платена при $R(\mathbf{x}, t) \equiv \mathbf{x}$ вида

$$\mathbf{x}_{s,t}^{(r)} = \mathbf{x}_t + \sum_{k=1}^{r} \sum_{(\lambda_k,\ldots,\lambda_1)\in\mathcal{M}_k} {}^{(p_k)}Q_{\lambda_k} \ldots Q_{\lambda_1}\{\mathbf{x}_t\} \overset{p_k}{\cdot} {}^{(p_k)}J_{(\lambda_k\ldots\lambda_1)s,t}, \qquad (4.94)$$

где $\mathcal{M}_k = \{(\lambda_k, \ldots, \lambda_1) : \ \lambda_l \in \{0,\ 1\};\ l = 1, \ldots, k\}$. Остальные обозначения, входящие в (4.94), такие же, как в (4.12).

Теорема 4.16 (предложение 5.11.1, [86]. С.211). *Пусть $r \in \{1, 2, \ldots\}$ и $T \in (0, \infty)$ фиксированы, а функции $\mathbf{a}^{(i)}(\mathbf{x})$, $\Sigma^{(ij)}(\mathbf{x})$; $i = 1, \ldots, n; j = 1, \ldots, m$ удовлетворяют условиям* AI, AII (теорема 1.6) *и принадлежат пространству $C^{2(r+1)}(\Re^n, \Re^1)$. Тогда для любой функции $h \in C^{2(r+1)}(\Re^n, \Re^1)$ существуют постоянные $K \in (0, \infty)$ и $n \in N$ такие, что*

$$\sup_{0\le t\le T} \left|\mathsf{M}\left\{h(\mathbf{x}_t) - h(\mathbf{x}_t^{(r)})|\mathcal{F}_0\right\}\right| \le K(1 + |\mathbf{x}_0|^{2n})T^{r+1},$$

где $\mathbf{x}_{t,0}^{(r)} \overset{\text{def}}{=} \mathbf{x}_t^{(r)}$; $\mathbf{x}_t$ — решение стохастического дифференциального уравнения Ито (1.35) *в автономном случае с начальным условием $\mathbf{x}_0$.*

Доказательство теоремы 4.16 дано в [86].

Сформулируем теперь аналог теоремы 4.16 для унифицированных разложений Тейлора–Ито.

Обозначим через $\tilde{\mathbf{x}}_{s,t}^{(r)}$, $\hat{\mathbf{x}}_{s,t}^{(r)}$ усеченные первое и второе унифицированные разложения Тейлора–Ито соответственно:

$$\tilde{\mathbf{x}}_{s,t}^{(r)} = \mathbf{x}_t + \sum_{q=1}^{r} \sum_{(k,j,l_1,\ldots,l_k)\in\mathcal{A}_q} \frac{(s-t)^j}{j!} {}^{(k)}L^j G_{l_1} \ldots G_{l_k}\{\mathbf{x}_t\} \overset{k}{\cdot} {}^{(k)}J_{l_1\ldots l_k s,t}, \quad (4.95)$$

$$\hat{\mathbf{x}}_{s,t}^{(r)} = \mathbf{x}_t + \sum_{q=1}^{r} \sum_{(k,j,l_1,\ldots,l_k)\in\mathcal{A}_q} \frac{(s-t)^j}{j!} {}^{(k)}G_{l_1} \ldots G_{l_k} L^j\{\mathbf{x}_t\} \overset{k}{\cdot} {}^{(k)}I_{l_1\ldots l_k s,t}, \quad (4.96)$$

$${}^{(k)}J_{l_1\ldots l_k s,t} = \left\| J_{l_1\ldots l_k s,t}^{(i_1\ldots i_k)} \right\|_{i_1,\ldots,i_k=1}^{m}, \quad {}^{(k)}I_{l_1\ldots l_k s,t} = \left\| I_{l_1\ldots l_k s,t}^{(i_1\ldots i_k)} \right\|_{i_1,\ldots,i_k=1}^{m},$$

$$\mathcal{A}_q = \left\{(k, j, l_1, \ldots, l_k) : k + j + \sum_{p=1}^{k} l_p = q;\ k, j, l_1, \ldots, l_k = 0, 1, \ldots\right\}.$$

Остальные обозначения, входящие в (4.95) и (4.96) такие же, как в (4.30) и (4.57) соответственно.

Теорема 4.17. *Пусть выполнены условия теоремы* 4.16. *Тогда существуют такие постоянные* $K \in (0, \infty)$ *и* $n \in N$, *что*

$$\sup_{0 \le t \le T} \left| \mathsf{M} \left\{ h(\mathbf{x}_t) - h(\tilde{\mathbf{x}}_t^{(r)}) | \mathcal{F}_0 \right\} \right| \le K(1 + |\mathbf{x}_0|^{2n}) T^{r+1},$$

$$\sup_{0 \le t \le T} \left| \mathsf{M} \left\{ h(\mathbf{x}_t) - h(\hat{\mathbf{x}}_t^{(r)}) | \mathcal{F}_0 \right\} \right| \le K(1 + |\mathbf{x}_0|^{2n}) T^{r+1},$$

где $\tilde{\mathbf{x}}_{t,0}^{(r)} \stackrel{\text{def}}{=} \tilde{\mathbf{x}}_t^{(r)}$; $\hat{\mathbf{x}}_{t,0}^{(r)} \stackrel{\text{def}}{=} \hat{\mathbf{x}}_t^{(r)}$; $\mathbf{x}_t$ — *решение стохастического дифференциального уравнения Ито* (1.35) *в автономном случае с начальным условием* $\mathbf{x}_0$.

Доказательство теоремы 4.17 следует из того, что в условиях теоремы 4.16 $\tilde{\mathbf{x}}_{s,t}^{(r)} = \hat{\mathbf{x}}_{s,t}^{(r)} = \mathbf{x}_{s,t}^{(r)}$ с в.1 для всех $0 \le t \le s \le T$.

4.9 Примеры унифицированных разложений

Сначала приведем примеры разложений Тейлора–Ито для решений скалярных стохастических дифференциальных уравнений Ито. Положим

$$I_{l_1 \ldots l_{k\,s,t}} = \begin{cases} \int\limits_t^s (t - \tau_k)^{l_k} \ldots \int\limits_t^{t_2} (t - \tau_1)^{l_1} df_{\tau_1} \ldots df_{\tau_k} & \text{при } \ k > 0 \\ 1 & \text{при } k = 0 \end{cases},$$

где $f_t \in \Re^1$ — стандартный винеровский процесс.

Рассмотрим стохастическое дифференциальное уравнение Ито вида

$$dx_t = a x_t dt + b x_t df_t, \ \ x_0 = x(0, \omega), \tag{4.97}$$

где $x_t = x(t, \omega) \in \Re^1$ — случайный процесс, определенный на промежутке $[0, T]$ и являющийся решением стохастического дифференциального уравнения Ито (4.97); $a, \ b \in \Re^1$ — постоянные; $f_t \in \Re^1$ — стандартный скалярный винеровский процесс.

Пример 4.1. *Унифицированное разложение Тейлора–Ито для случайного процесса* $R(x_t, t) \equiv x_t$, *где* x_t — *решение стохастического дифференциального уравнения* (4.97), *до малых* $O(t^3)$ *в среднеквадратическом смысле при* $t \downarrow 0$ *имеет вид*

$$x_t = x_0 \Bigl\{ 1 + b I_{0_{t,0}} + a t + b^2 I_{00_{t,0}} + abt I_{0_{t,0}} + b^3 I_{000_{t,0}} + \frac{1}{2} a^2 t^2 + ab^2 t I_{00_{t,0}}$$

$$+ b^4 I_{0000_{t,0}} + ab^3 t I_{000_{t,0}} + \frac{1}{2} b a^2 t^2 I_{0_{t,0}} + b^5 I_{00000_{t,0}} \Bigr\} + H_{6_{t,0}} \ \ \text{с в.1}.$$

Отметим, что рассмотренный пример представляет собой случай, когда унифицированное разложение Тейлора–Ито и разложение Тейлора–Ито в форме Вагнера и Платена идентичны.

Рассмотрим линейное стационарное стохастическое дифференциальное уравнение Ито вида

$$dx_t = ax_t dt + bdf_t, \ x_0 = x(0, \omega), \tag{4.98}$$

где $x_t = x(t, \omega) \in \Re^1$ — случайный процесс, определенный на промежутке $[0, T]$ как решение стохастического дифференциального уравнения Ито (4.98); $a, \ b \in \Re^1$ — постоянные; $f_t \in \Re^1$ — стандартный скалярный винеровский процесс.

Пример 4.2. *Унифицированное разложение Тейлора–Ито для случайного процесса $R(x_t, t) \equiv x_t$, где x_t — решение стохастического дифференциального уравнения* (4.98), *до малых $O(t^{r+1})$ в среднеквадратическом смысле при $t \downarrow 0$ имеет вид*

$$x_t = \sum_{j=0}^{r} \frac{a^j (s-t)^j}{j!} x_t + b \sum_{l=0}^{r} \frac{a^l}{l!} I_{l_{t,0}} + H_{r+1_{t,0}} \ \text{с в.1.} \tag{4.99}$$

Вместе с тем решение стохастического дифференциального уравнения Ито (4.98) определяется равенством

$$x_t = x_0 e^{at} + b \int_0^t e^{a(t-\tau)} df_\tau. \tag{4.100}$$

Если разложить экспоненты, входящие в (4.100), с помощью стандартной формулы Тейлора, то также получим разложение Тейлора–Ито (4.99).

Рассмотрим стохастическое дифференциальное уравнение Ито

$$dx_t = a\sin x_t df_t, \ x_0 = x(0, \omega), \tag{4.101}$$

где $x_t = x(t, \omega) \in \Re^1$ — случайный процесс, определенный на промежутке $[0, T]$ и являющийся решением стохастического дифференциального уравнения Ито (4.101); $a \in \Re^1$ — постоянная; $f_t \in \Re^1$ — стандартный скалярный винеровский процесс.

Пример 4.3. *Второе унифицированное разложение Тейлора–Ито для случайного процесса $R(x_s, s) \equiv x_s$, где x_s — решение стохастического дифференциального уравнения* (4.101), *до малых $O((s-t)^3)$ в среднеквадратическом смысле при $s \downarrow t$ имеет вид*

$$x_s = x_t + a\sin x_t I_{0_{s,t}} - \frac{a^3}{4}(\sin 3x_t - 3\sin x_t) I_{1_{s,t}} + \frac{a^3}{2}(\sin 3x_t - 3\sin x_t) I_{000_{s,t}}$$

$$-\frac{3}{8}a^4(2\sin 2x_t-\sin 4x_t)I_{01_{s,t}}+\frac{3a^4}{8}(\frac{4}{3}\sin 6x_t-2\sin 2x_t-\sin 4x_t)I_{10_{s,t}}$$

$$+\frac{a^5}{32}(9\sin 9x_t-30\sin 3x_t+9\sin x_t)I_{2_{s,t}}-\frac{3a^5}{4}(\sin 5x_t-2\sin 3x_t+\sin x_t)I_{001_{s,t}}$$

$$-\frac{a^2}{2}\sin 2x_t I_{00_{s,t}}-\frac{a^5}{8}(9\sin 9x_t-12\sin 7x_t+12\sin 5x_t-16\sin 3x_t+9\sin x_t)I_{100_{s,t}}$$

$$+\frac{3a^5}{8}(6\sin 5x_t-2\sin x_t-4\sin 7x_t)I_{010_{s,t}}+\frac{a^4}{4}(4\sin 2x_t-3\sin 4x_t)I_{0000_{s,t}}$$

$$+\frac{a^5}{2}(-5\sin 3x_t+2\sin x_t+3\sin 5x_t)I_{00000_{s,t}}+H_{6_{s,t}}\ \text{с в.1.}$$

Приведем примеры многомерных стохастических систем и разложений Тейлора–Ито их решений.

Рассмотрим стохастический вариант уравнения Матье в форме

$$\frac{d^2\varphi_t}{dt^2}+\varepsilon^2\frac{d\varphi_t}{dt}+\left(c+\varepsilon\dot{\mathbf{f}}_t^{(1)}\right)\varphi_t=\dot{\mathbf{f}}_t^{(2)}, \tag{4.102}$$

где $\varphi_t\in\Re^1$ — случайный процесс, являющийся решением уравнения (4.102); $\dot{\mathbf{f}}_t^{(1)}$ и $\dot{\mathbf{f}}_t^{(2)}$ — скалярные независимые гауссовские белые шумы; c и ε — постоянные. Перепишем (4.102) в форме стохастического дифференциального уравнения Ито:

$$d\begin{bmatrix}\mathbf{x}_t^{(1)}\\ \mathbf{x}_t^{(2)}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\mathbf{x}_t^{(2)}\\ -c\mathbf{x}_t^{(1)}-\varepsilon^2\mathbf{x}_t^{(2)}\end{bmatrix}dt+\begin{bmatrix}0 & 0\\ -\varepsilon\mathbf{x}_t^{(1)} & 1\end{bmatrix}d\begin{bmatrix}\mathbf{f}_t^{(1)}\\ \mathbf{f}_t^{(2)}\end{bmatrix}, \tag{4.103}$$

где $\mathbf{x}_t^{(1)}=\varphi_t$; $\mathbf{x}_t^{(2)}=d\varphi_t/dt$; $\mathbf{f}_t^{(1)}$ и $\mathbf{f}_t^{(2)}$ — скалярные независимые стандартные винеровские процессы.

Пример 4.4. *Второе унифицированное разложение Тейлора–Ито для компонент* $\mathbf{x}_s^{(1)}$ *и* $\mathbf{x}_s^{(2)}$ *решения системы* (4.103) *до малых* $O((s-t)^{\frac{5}{2}})$ *в среднеквадратическом смысле при* $s\downarrow t$ *имеет вид*

$$\mathbf{x}_s^{(1)}=\mathbf{x}_t^{(1)}+(s-t)\mathbf{x}_t^{(2)}-\varepsilon\mathbf{x}_t^{(1)}I_{1_{s,t}}^{(1)}+I_{1_{s,t}}^{(2)}-\varepsilon(s-t)\mathbf{x}_t^{(1)}I_{0_{s,t}}^{(1)}+(s-t)I_{0_{s,t}}^{(2)}$$

$$+\frac{(s-t)^2}{2}\left(-c\mathbf{x}_t^{(1)}-\varepsilon^2\mathbf{x}_t^{(2)}\right)+H_{5_{s,t}}^{(1)}\ \text{с в.1,}$$

$$\mathbf{x}_s^{(2)}=\mathbf{x}_t^{(2)}-\varepsilon\mathbf{x}_t^{(1)}I_{0_{s,t}}^{(1)}+I_{0_{s,t}}^{(2)}+(s-t)\left(-c\mathbf{x}_t^{(1)}-\varepsilon^2\mathbf{x}_t^{(2)}\right)+$$

$$+\left(\varepsilon\mathbf{x}_t^{(2)}+\varepsilon^3\mathbf{x}_t^{(1)}\right)I_{1_{s,t}}^{(1)}-\varepsilon^2I_{1_{s,t}}^{(2)}+\varepsilon^3(s-t)\mathbf{x}_t^{(1)}I_{0_{s,t}}^{(1)}-\varepsilon^2(s-t)I_{0_{s,t}}^{(2)}+$$

$$+\frac{(s-t)^2}{2}\left(-c\mathbf{x}_t^{(2)}+\varepsilon^2\left(c\mathbf{x}_t^{(1)}+\varepsilon^2\mathbf{x}_t^{(2)}\right)\right)-\varepsilon^2\mathbf{x}_t^{(1)}I_{01_{s,t}}^{(11)}+$$
$$+\varepsilon I_{01_{s,t}}^{(21)}+\varepsilon^2\mathbf{x}_t^{(1)}I_{10_{s,t}}^{(11)}-\varepsilon I_{10_{s,t}}^{(21)}+H_{5_{s,t}}^{(2)}\ \text{с в.1.}$$

Рассмотрим систему уравнений Лоренца [34] со стохастическим возмущением в форме многомерного стохастического дифференциального уравнения Ито:

$$d\begin{bmatrix}\mathbf{x}_t^{(1)}\\ \mathbf{x}_t^{(2)}\\ \mathbf{x}_t^{(3)}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-a\mathbf{x}_t^{(1)}+a\mathbf{x}_t^{(2)}\\ r\mathbf{x}_t^{(1)}-\mathbf{x}_t^{(2)}-\mathbf{x}_t^{(1)}\mathbf{x}_t^{(3)}\\ -b\mathbf{x}_t^{(3)}+\mathbf{x}_t^{(1)}\mathbf{x}_t^{(2)}\end{bmatrix}dt+\begin{bmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&c\end{bmatrix}d\begin{bmatrix}\mathbf{f}_t^{(1)}\\ \mathbf{f}_t^{(2)}\\ \mathbf{f}_t^{(3)}\end{bmatrix},\qquad(4.104)$$

где $\mathbf{x}_t^{(1)}$, $\mathbf{x}_t^{(2)}$, $\mathbf{x}_t^{(3)}$ — компоненты решения $\mathbf{x}_t\in\Re^3$ уравнения (4.104); $\mathbf{f}_t^{(i)}$ $(i=1,2,3)$ — скалярные стандартные независимые винеровские процессы; a, r, b, c — постоянные.

Пример 4.5. *Второе унифицированное разложение Тейлора–Ито для компонент* $\mathbf{x}_s^{(1)}$, $\mathbf{x}_s^{(2)}$ *и* $\mathbf{x}_s^{(3)}$ *решения системы* (4.104) *до малых* $O((s-t)^{\frac{7}{2}})$ *в среднеквадратическом смысле при* $s\downarrow t$ *имеет вид*

$$\mathbf{x}_s^{(1)}=\mathbf{x}_t^{(1)}+a(s-t)\left(-\mathbf{x}_t^{(1)}+\mathbf{x}_t^{(2)}\right)+$$
$$+a\frac{(s-t)^2}{2}\left[-a\left(-\mathbf{x}_t^{(1)}+\mathbf{x}_t^{(2)}\right)+r\mathbf{x}_t^{(1)}-\mathbf{x}_t^{(2)}-\mathbf{x}_t^{(1)}\mathbf{x}_t^{(3)}\right]-$$
$$-ac\mathbf{x}_t^{(1)}\left[\frac{(s-t)^2}{2}I_{0_{s,t}}^{(3)}+(s-t)I_{1_{s,t}}^{(3)}+\frac{1}{2}I_{2_{s,t}}^{(3)}\right]+$$
$$+a\frac{(s-t)^3}{6}\left[a\left(-\mathbf{x}_t^{(1)}+\mathbf{x}_t^{(2)}\right)\left(a+r-\mathbf{x}_t^{(3)}\right)-\right.$$
$$\left.-(a+1)\left(r\mathbf{x}_t^{(1)}-\mathbf{x}_t^{(2)}-\mathbf{x}_t^{(1)}\mathbf{x}_t^{(3)}\right)-\mathbf{x}_t^{(1)}\left(-b\mathbf{x}_t^{(3)}+\mathbf{x}_t^{(1)}\mathbf{x}_t^{(2)}\right)\right]+H_{7_{s,t}}^{(1)}\ \text{с в.1},\qquad(4.105)$$

$$\mathbf{x}_s^{(2)}=\mathbf{x}_t^{(2)}+(s-t)\left(r\mathbf{x}_t^{(1)}-\mathbf{x}_t^{(2)}-\mathbf{x}_t^{(1)}\mathbf{x}_t^{(3)}\right)-c\mathbf{x}_t^{(1)}\left(I_{1_{s,t}}^{(3)}+(s-t)I_{0_{s,t}}^{(3)}\right)+$$
$$+\frac{(s-t)^2}{2}\left[a\left(-\mathbf{x}_t^{(1)}+\mathbf{x}_t^{(2)}\right)\left(r-\mathbf{x}_t^{(3)}\right)-r\mathbf{x}_t^{(1)}+\mathbf{x}_t^{(2)}+\right.$$
$$\left.+\mathbf{x}_t^{(1)}\mathbf{x}_t^{(3)}-\mathbf{x}_t^{(1)}\left(-b\mathbf{x}_t^{(3)}+\mathbf{x}_t^{(1)}\mathbf{x}_t^{(2)}\right)\right]+$$
$$+\left(a\left(\mathbf{x}_t^{(1)}-\mathbf{x}_t^{(2)}\right)+c(1+b)\mathbf{x}_t^{(1)}\right)\left[\frac{(s-t)^2}{2}I_{0_{s,t}}^{(3)}+(s-t)I_{1_{s,t}}^{(3)}+\frac{1}{2}I_{2_{s,t}}^{(3)}\right]+$$

$$+ac\left(-\mathbf{x}_t^{(1)}+\mathbf{x}_t^{(2)}\right)\left(I_{2_{s,t}}^{(3)}+(s-t)I_{1_{s,t}}^{(3)}\right)+$$

$$+\frac{(s-t)^3}{6}\Big\{a\left(-\mathbf{x}_t^{(1)}+\mathbf{x}_t^{(2)}\right)\left[-(a+1)\left(r-\mathbf{x}_t^{(3)}\right)+b\mathbf{x}_t^{(3)}-2\mathbf{x}_t^{(1)}\mathbf{x}_t^{(2)}\right]+$$

$$+\left(r\mathbf{x}_t^{(1)}-\mathbf{x}_t^{(2)}-\mathbf{x}_t^{(1)}\mathbf{x}_t^{(3)}\right)\left(\left(r-\mathbf{x}_t^{(3)}\right)a+1-\left(\mathbf{x}_t^{(1)}\right)^2\right)+$$

$$+\left(-b\mathbf{x}_t^{(3)}+\mathbf{x}_t^{(1)}\mathbf{x}_t^{(2)}\right)\left(a\left(\mathbf{x}_t^{(1)}-\mathbf{x}_t^{(2)}\right)+\mathbf{x}_t^{(1)}(1+b)\right)\Big\}+H_{7_{s,t}}^{(2)}\ \text{с в.1}, \quad (4.106)$$

$$\mathbf{x}_s^{(3)}=\mathbf{x}_t^{(3)}+cI_{0_{s,t}}^{(3)}+(s-t)\left(-b\mathbf{x}_t^{(3)}+\mathbf{x}_t^{(1)}\mathbf{x}_t^{(2)}\right)-bc\left(I_{1_{s,t}}^{(3)}+(s-t)I_{0_{s,t}}^{(3)}\right)+$$

$$+\frac{(s-t)^2}{2}\Big[a\left(-\mathbf{x}_t^{(1)}+\mathbf{x}_t^{(2)}\right)\mathbf{x}_t^{(2)}+\left(r\mathbf{x}_t^{(1)}-\mathbf{x}_t^{(2)}-\mathbf{x}_t^{(1)}\mathbf{x}_t^{(3)}\right)\mathbf{x}_t^{(1)}-$$

$$-b\left(-b\mathbf{x}_t^{(3)}+\mathbf{x}_t^{(1)}\mathbf{x}_t^{(2)}\right)\Big]+$$

$$+c\left(b^2-\left(\mathbf{x}_t^{(1)}\right)^2\right)\left[\frac{(s-t)^2}{2}I_{0_{s,t}}^{(3)}+(s-t)I_{1_{s,t}}^{(3)}+\frac{1}{2}I_{2_{s,t}}^{(3)}\right]+$$

$$+\frac{(s-t)^3}{6}\Big[a\left(-\mathbf{x}_t^{(1)}+\mathbf{x}_t^{(2)}\right)\Big(-a\mathbf{x}_t^{(2)}+r\mathbf{x}_t^{(1)}-\mathbf{x}_t^{(2)}-$$

$$-\mathbf{x}_t^{(1)}\mathbf{x}_t^{(3)}+\mathbf{x}_t^{(1)}\left(r-\mathbf{x}_t^{(3)}\right)-b\mathbf{x}_t^{(2)}\Big)+$$

$$+\left(r\mathbf{x}_t^{(1)}-\mathbf{x}_t^{(2)}-\mathbf{x}_t^{(1)}\mathbf{x}_t^{(3)}\right)\left(-a\mathbf{x}_t^{(1)}+2a\mathbf{x}_t^{(2)}-(1+b)\mathbf{x}_t^{(1)}\right)+$$

$$+\left(-b\mathbf{x}_t^{(3)}+\mathbf{x}_t^{(1)}\mathbf{x}_t^{(2)}\right)\left(b^2-\left(\mathbf{x}_t^{(1)}\right)^2\right)\Big]+H_{7_{s,t}}^{(3)}\ \text{с в.1}. \quad (4.107)$$

Рассмотрим систему уравнений Ресслера [45] со стохастическим возмущением в виде следующей системы стохастических дифференциальных уравнений Ито:

$$d\begin{bmatrix}\mathbf{x}_t^{(1)}\\ \mathbf{x}_t^{(2)}\\ \mathbf{x}_t^{(3)}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-\mathbf{x}_t^{(2)}-\mathbf{x}_t^{(3)}\\ \mathbf{x}_t^{(1)}+e\mathbf{x}_t^{(2)}\\ f+\mathbf{x}_t^{(1)}\mathbf{x}_t^{(3)}-\mu\mathbf{x}_t^{(3)}\end{bmatrix}dt+\begin{bmatrix}0\\ 0\\ -c\mathbf{x}_t^{(3)}\end{bmatrix}d\mathbf{f}_t^{(1)}, \quad (4.108)$$

где $\mathbf{x}_t^{(1)}$, $\mathbf{x}_t^{(2)}$, $\mathbf{x}_t^{(3)}\in\Re^1$ — компоненты решения $\mathbf{x}_t\in\Re^3$ системы (4.108); $\mathbf{f}_t^{(1)}\in\Re^1$ — стандартный винеровский процесс; e,f,μ,c — постоянные.

Пример 4.6. *Второе унифицированное разложение Тейлора–Ито для компонент решения* $\mathbf{x}_s$ *системы* (4.108) *до малых порядка* $O\left((s-t)^{\frac{5}{2}}\right)$ *в среднеквадратическом смысле при* $s \downarrow t$ *имеет вид*

$$\mathbf{x}_s^{(1)} = \mathbf{x}_t^{(1)} + (s-t)\left(-\mathbf{x}_t^{(2)} - \mathbf{x}_t^{(3)}\right) + c\mathbf{x}_t^{(3)}\left[(s-t)I_{0_{s,t}}^{(1)} + I_{1_{s,t}}^{(1)}\right] +$$
$$+\frac{(s-t)^2}{2}\left[-\mathbf{x}_t^{(1)} - e\mathbf{x}_t^{(2)} - f - \mathbf{x}_t^{(1)}\mathbf{x}_t^{(3)} + \mu\mathbf{x}_t^{(3)}\right] -$$
$$-c^2\mathbf{x}_t^{(3)}\left[I_{01_{s,t}}^{(11)} + (s-t)I_{00_{s,t}}^{(11)}\right] + H_{5_{s,t}}^{(1)} \text{ с в.1}, \tag{4.109}$$

$$\mathbf{x}_s^{(2)} = \mathbf{x}_t^{(2)} + (s-t)\left(\mathbf{x}_t^{(1)} + e\mathbf{x}_t^{(2)}\right) + \frac{(s-t)^2}{2}\left[-\mathbf{x}_t^{(2)} - \mathbf{x}_t^{(3)} +\right.$$
$$\left.+e\left(\mathbf{x}_t^{(1)} + e\mathbf{x}_t^{(2)}\right)\right] + H_{5_{s,t}}^{(2)} \text{ с в.1}, \tag{4.110}$$

$$\mathbf{x}_s^{(3)} = \mathbf{x}_t^{(3)} - c\mathbf{x}_t^{(3)}I_{0_{s,t}}^{(1)} + (s-t)\left(f + \mathbf{x}_t^{(1)}\mathbf{x}_t^{(3)} - \mu\mathbf{x}_t^{(3)}\right) +$$
$$+c^2\mathbf{x}_t^{(3)}I_{00_{s,t}}^{(11)} + c\mathbf{x}_t^{(3)}\left(\mu - \mathbf{x}_t^{(1)}\right)\left[(s-t)I_{0_{s,t}}^{(1)} + I_{1_{s,t}}^{(1)}\right] +$$
$$+c\left(f + \mathbf{x}_t^{(1)}\mathbf{x}_t^{(3)} - \mu\mathbf{x}_t^{(3)}\right)I_{1_{s,t}}^{(1)} - c^3\mathbf{x}_t^{(3)}I_{000_{s,t}}^{(111)} +$$
$$+\frac{(s-t)^2}{2}\left[\left(-\mathbf{x}_t^{(2)} - \mathbf{x}_t^{(3)}\right)\mathbf{x}_t^{(3)} + \left(f + \mathbf{x}_t^{(1)}\mathbf{x}_t^{(3)} - \mu\mathbf{x}_t^{(3)}\right)\left(\mathbf{x}_t^{(1)} - \mu\right)\right] +$$
$$+c^2\mathbf{x}_t^{(3)}\left(\mathbf{x}_t^{(1)} - \mu\right)\left[I_{10_{s,t}}^{(11)} - I_{01_{s,t}}^{(11)}\right] - c^2\left(f + \mathbf{x}_t^{(1)}\mathbf{x}_t^{(3)} - \mu\mathbf{x}_t^{(3)}\right)I_{10_{s,t}}^{(11)} -$$
$$-c^2\mathbf{x}_t^{(3)}\left(\mu - \mathbf{x}_t^{(1)}\right)\left[I_{01_{s,t}}^{(11)} + (s-t)I_{00_{s,t}}^{(11)}\right] + c^4\mathbf{x}_t^{(3)}I_{0000_{s,t}}^{(1111)} + H_{5_{s,t}}^{(3)} \text{ с в.1}. \tag{4.111}$$

Рассмотрим стохастический вариант модели Лотки–Вольтерра, отражающей динамику численностей двух конкурирующих видов животных или динамику концентраций двух реагентов:

$$d\begin{bmatrix}\mathbf{x}_t^{(1)}\\ \mathbf{x}_t^{(2)}\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\left(k_1 + a_1\mathbf{x}_t^{(2)}\right)\mathbf{x}_t^{(1)}\\ \left(k_2 + a_2\mathbf{x}_t^{(1)}\right)\mathbf{x}_t^{(2)}\end{bmatrix}dt + \begin{bmatrix}\sigma_1\mathbf{x}_t^{(1)} & 0\\ 0 & \sigma_2\mathbf{x}_t^{(2)}\end{bmatrix}d\begin{bmatrix}\mathbf{f}_t^{(1)}\\ \mathbf{f}_t^{(2)}\end{bmatrix},$$

где $\mathbf{x}_t^{(1)}$, $\mathbf{x}_t^{(2)}$ — численность видов животных (концентрация реагентов); k_1, k_2 — коэффициенты роста численности видов животных (концентрации реагентов); a_1, a_2 — коэффициенты их смертности (уменьшения концентрации реагентов); σ_1, σ_2 — коэффициенты, характери-

зующие степень влияния случайных факторов на систему; $\mathbf{f}_t^{(1)}$, $\mathbf{f}_t^{(2)}$ — скалярные стандартные независимые винеровские процессы.

Пример 4.7. *Унифицированное разложение Тейлора–Ито до малых $O((s-t)^2)$ в среднеквадратическом смысле при $s \downarrow t$ для процессов $\mathbf{x}_s^{(1)}$, $\mathbf{x}_s^{(2)}$ имеет вид*

$$\mathbf{x}_s^{(1)} = \mathbf{x}_t^{(1)} \Biggl[1 + \left(k_1 + a_1 \mathbf{x}_t^{(2)}\right)(s-t) + \sigma_1 \left(k_1 + a_1 \mathbf{x}_t^{(2)}\right)\left((s-t) I_{0_{s,t}}^{(1)} + 2 I_{1_{s,t}}^{(1)}\right)$$

$$+ a_1 \sigma_2 \mathbf{x}_t^{(2)} \left((s-t) I_{0_{s,t}}^{(2)} + I_{1_{s,t}}^{(2)}\right) + \sigma_1 I_{0_{s,t}}^{(1)} + \sigma_1^2 I_{00_{s,t}}^{(11)} + \sigma_1^3 I_{000_{s,t}}^{(111)}\Biggr] + H_{4_{s,t}}^{(1)} \ \text{с.в.1},$$

$$\mathbf{x}_s^{(2)} = \mathbf{x}_t^{(2)} \Biggl[1 + \left(k_2 + a_2 \mathbf{x}_t^{(1)}\right)(s-t) + \sigma_2 \left(k_2 + a_2 \mathbf{x}_t^{(1)}\right)\left((s-t) I_{0_{s,t}}^{(2)} + 2 I_{1_{s,t}}^{(2)}\right)$$

$$+ a_2 \sigma_1 \mathbf{x}_t^{(1)} \left((s-t) I_{0_{s,t}}^{(1)} + I_{1_{s,t}}^{(1)}\right) + \sigma_2 I_{0_{s,t}}^{(2)} + \sigma_2^2 I_{00_{s,t}}^{(22)} + \sigma_2^3 I_{000_{s,t}}^{(222)}\Biggr] + H_{4_{s,t}}^{(2)} \ \text{с.в.1}.$$

4.10 Подведение итогов разделов 4.3 и 4.6

Рассмотрим стохастическое дифференциальное уравнение Ито вида (1.35) и будем предполагать, что относительно него выполнены соответствующие предположения (см. главу 1, сразу после формулы (1.35)).

Из предыдущих разделов данной главы следует, что при определенных условиях, налагаемых на функции $\mathbf{a}(\mathbf{x}, t)$, $\Sigma(\mathbf{x}, t)$ и $R(\mathbf{x}, t)$, для решения стохастического дифференциального уравнения Ито (1.35) справедливы четыре унифицированных разложения Тейлора–Ито и Тейлора–Стратоновича вида

$$R(\mathbf{x}_s, s) = R(\mathbf{x}_t, t) + \sum_{q=1}^{r} \sum_{(k,j,l_1,\ldots,l_k) \in \mathcal{A}_q} \frac{(s-t)^j}{j!} \times$$

$$\times \sum_{i_1,\ldots,i_k=1}^{m} L^j G_{l_1}^{(i_1)} \ldots G_{l_k}^{(i_k)} R(\mathbf{x}_t, t) J_{l_1 \ldots l_k s,t}^{(i_1 \ldots i_k)} + D_{r+1_{s,t}} \tag{4.112}$$

(1-е унифицированное разложение Тейлора–Ито),

$$R(\mathbf{x}_s, s) = R(\mathbf{x}_t, t) + \sum_{q=1}^{r} \sum_{(k,j,l_1,\ldots,l_k) \in \mathcal{A}_q} \frac{(s-t)^j}{j!} \times$$

$$\times \sum_{i_1,\ldots,i_k=1}^{m} G_{l_1}^{(i_1)} \ldots G_{l_k}^{(i_k)} L^j R(\mathbf{x}_t, t) I_{l_1 \ldots l_k s,t}^{(i_1 \ldots i_k)} + D_{r+1_{s,t}} \tag{4.113}$$

(2-е унифицированное разложение Тейлора–Ито),

$$R(\mathbf{x}_s, s) = R(\mathbf{x}_t, t) + \sum_{q=1}^{r} \sum_{(k,j,l_1,\ldots,l_k)\in\mathcal{A}_q} \frac{(s-t)^j}{j!} \times$$

$$\times \sum_{i_1,\ldots,i_k=1}^{m} \bar{G}_{l_1}^{(i_1)} \ldots \bar{G}_{l_k}^{(i_k)} \bar{L}^j R(\mathbf{x}_t, t) I_{l_1\ldots l_{k_{s,t}}}^{*(i_1\ldots i_k)} + D_{r+1_{s,t}} \tag{4.114}$$

(1-е унифицированное разложение Тейлора–Стратоновича),

$$R(\mathbf{x}_s, s) = R(\mathbf{x}_t, t) + \sum_{q=1}^{r} \sum_{(k,j,l_1,\ldots,l_k)\in\mathcal{A}_q} \frac{(s-t)^j}{j!} \times$$

$$\times \sum_{i_1,\ldots,i_k=1}^{m} \bar{L}^j \bar{G}_{l_1}^{(i_1)} \ldots \bar{G}_{l_k}^{(i_k)} R(\mathbf{x}_t, t) J_{l_1\ldots l_{k_{s,t}}}^{*(i_1\ldots i_k)} + D_{r+1_{s,t}} \tag{4.115}$$

(2-е унифицированное разложение Тейлора–Стратоновича),

общие члены которых содержат в качестве множителей повторные стохастические интегралы Ито и Стратоновича вида

$$I_{l_1\ldots l_{k_{s,t}}}^{(i_1\ldots i_k)} = \int\limits_t^s (t-t_k)^{l_k} \ldots \int\limits_t^{t_2} (t-t_1)^{l_1} d\mathbf{f}_{t_1}^{(i_1)} \ldots d\mathbf{f}_{t_k}^{(i_k)}, \tag{4.116}$$

$$J_{l_1\ldots l_{k_{s,t}}}^{(i_1\ldots i_k)} = \int\limits_t^s (s-t_k)^{l_k} \ldots \int\limits_t^{t_2} (s-t_1)^{l_1} d\mathbf{f}_{t_1}^{(i_1)} \ldots d\mathbf{f}_{t_k}^{(i_k)}, \tag{4.117}$$

$$I_{l_1\ldots l_{k_{s,t}}}^{*(i_1\ldots i_k)} = \int\limits_t^{*s} (t-t_k)^{l_k} \ldots \int\limits_t^{*t_2} (t-t_1)^{l_1} d\mathbf{f}_{t_1}^{(i_1)} \ldots d\mathbf{f}_{t_k}^{(i_k)}, \tag{4.118}$$

$$J_{l_1\ldots l_{k_{s,t}}}^{*(i_1\ldots i_k)} = \int\limits_t^{*s} (s-t_k)^{l_k} \ldots \int\limits_t^{*t_2} (s-t_1)^{l_1} d\mathbf{f}_{t_1}^{(i_1)} \ldots d\mathbf{f}_{t_k}^{(i_k)}; \tag{4.119}$$

$l_1, \ldots, l_k = 0,\ 1, \ldots;\ k = 1,\ 2, \ldots;\ i_1, \ldots, i_k = 1, \ldots, m$; при $k = 0$ эти интегралы в разложениях полагаются равными 1.

Остальные обозначения, введенные в (4.112)–(4.115), следующие

$$\mathcal{A}_q = \left\{(k, j, l_1, \ldots, l_k) : k + j + \sum_{p=1}^{k} l_p = q;\ k, j, l_1, \ldots, l_k = 0, 1, \ldots\right\},$$

$$L^j \stackrel{\text{def}}{=} \begin{cases} \underbrace{L \ldots L}_{j} & \text{при } j = 1, 2, \ldots \\ \cdot & \text{при } j = 0 \end{cases}, \quad \bar{L}^j \stackrel{\text{def}}{=} \begin{cases} \underbrace{\bar{L} \ldots \bar{L}}_{j} & \text{при } j = 1, 2, \ldots \\ \cdot & \text{при } j = 0 \end{cases},$$

$$G_p^{(i)} \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{p}\left(G_{p-1}^{(i)}L - LG_{p-1}^{(i)}\right),\ \bar{G}_p^{(i)} \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{p}\left(\bar{G}_{p-1}^{(i)}\bar{L} - \bar{L}\bar{G}_{p-1}^{(i)}\right);$$

$p = 1, 2, \ldots; i = 1, \ldots, m$; $\bar{L} = L - \frac{1}{2}\sum\limits_{i=1}^{m} G_0^{(i)}G_0^{(i)}$, $\bar{G}_0^{(i)} = G_0^{(i)}$; операторы L и $G_0^{(i)}$; $i = 1, \ldots, m$ такие же, как в лемме 1.3; $D_{r+1_{s,t}}$ – остаточный член в интегральной форме.

Кроме того, справедливы [86] разложение Тейлора–Ито в форме Вагнера и Платена и разложение Тейлора–Стратоновича в форме Клоедена и Платена, общие члены которых содержат в качестве множителей повторные стохастические интегралы Ито и Стратоновича

$$J_{(\lambda_k\ldots\lambda_1)_{s,t}}^{(i_k\ldots i_1)} = \int\limits_t^s \ldots \int\limits_t^{t_2} d\mathbf{w}_{t_1}^{(i_k)} \ldots d\mathbf{w}_{t_k}^{(i_1)}, \tag{4.120}$$

$$J_{(\lambda_k\ldots\lambda_1)_{s,t}}^{*(i_k\ldots i_1)} = \int\limits_t^{*T} \ldots \int\limits_t^{*t_2} d\mathbf{w}_{t_1}^{(i_k)} \ldots d\mathbf{w}_{t_k}^{(i_1)}. \tag{4.121}$$

Здесь $\mathbf{w}_t^{(i_l)} = \mathbf{f}_t^{(i_l)}$ и $\lambda_l = 1$ при $i_l = 1, \ldots, m$; $\mathbf{w}_t^{(i_l)} = t$ и $\lambda_l = 0$ при $i_l = 0$; $i_1, \ldots, i_k = 0,\ 1, \ldots, m$; $l = 1, \ldots, k$.

Теперь становится ясно, что одним из возможных и наиболее перспективных подходов к численному интегрированию стохастических дифференциальных уравнений Ито является подход, основанный на стохастических разложениях решений указанных уравнений.

Например, чтобы получить явный численный метод, достаточно рассмотреть отрезок разложения Тейлора–Ито или Тейлора–Стратоновича на дискретной временной сетке и аппроксимировать специальным образом повторные стохастические интегралы, входящие в него. Однако аппроксимация повторных стохастических интегралов вида (4.116) – (4.121) является сложной задачей, ей, в частности, посвящены главы 5 и 6 данной монографии. В указанных главах содержится наиболее полный и обширный материал по данному вопросу, причем основные результаты этих глав принадлежат автору настоящей монографии.

Отметим, что коэффициентные функции унифицированных разложений Тейлора–Ито и Тейлора–Стратоновича определяются "интересными" рекуррентными формулами, содержащими присущий классической формуле Тейлора множитель $(s-t)^j/j!$.

4.11 Стохастические базисы и их ранги

Наиболее важным отличием унифицированных разложений Тейлора–Ито от разложения Тейлора–Ито в форме Вагнера и Платена является то, что они содержат существенно меньшее число различных повторных стохастических интегралов Ито, и притом большинство из них имеет меньшую кратность.

Нетрудно видеть, что многие стохастические интегралы из семейства (4.120) выражаются друг через друга линейными соотношениями (это же относится и к семейству (4.121)). Для семейств (4.116)–(4.119) это не так, т.е. интегралы из данных семейств не могут быть связаны друг с другом конечными линейными соотношениями.

Всвязи с этим целесообразно назвать семейства стохастических интегралов (4.116)–(4.119) *стохастическими базисами.*

Таким образом, нами найдены четыре стохастических базиса по которым разлагается решение стохастического дифференциального уравнения Ито.

Ранее мы использовали в унифицированных разложениях Тейлора–Ито и Тейлора–Стратоновича два способа суммирования: по множествам $\mathcal{A}_q$; $q = 1, \ldots, r$ и по множествам $\mathcal{D}_q$; $q = 1, \ldots, r$.

Будем называть *рангами стохастических базисов* (4.116)–(4.119) числа $\mathrm{rank}_{\mathcal{A}}(r)$ и $\mathrm{rank}_{\mathcal{D}}(r)$ различных повторных стохастических интегралов, входящих в совокупности (4.116)–(4.119) при суммировании по множествам $\mathcal{A}_q$; $q = 1, \ldots, r$ и $\mathcal{D}_q$; $q = 1, \ldots, r$ соответственно, где r — фиксировано.

Сначала рассмотрим несколько примеров, а затем вычислим ранги стохастических базисов в общем случае.

Предположим, что суммирование в унифицированных разложениях Тейлора–Ито и Тейлора–Стратоновича ведется по множествам $\mathcal{D}_q = \{(k, j, l_1, \ldots, l_k) : k + 2(j + l_1 + \ldots + l_k) = q;\ k, j, l_1, \ldots, l_k = 0, 1, \ldots\}$, т.е. мы имеем упорядоченные по порядкам малости разложения.

Нетрудно видеть, что унифицированное разложение Тейлора–Ито (здесь и далее имеются ввиду разложения без остаточных членов), упорядоченное по порядкам малости, при $r = 3$ содержит четыре ($\mathrm{rank}_{\mathcal{D}}(3) = 4$) различных повторных стохастических интеграла: $I_{0_{s,t}}^{(i_1)}$, $I_{00_{s,t}}^{(i_2 i_1)}$, $I_{1_{s,t}}^{(i_1)}$, $I_{000_{s,t}}^{(i_3 i_2 i_1)}$. В то же время его аналог в форме Вагнера и Платена [86] содержит пять различных повторных стохастических интегралов: $J_{(1)s,t}^{(i_1)}$, $J_{(11)s,t}^{(i_2 i_1)}$, $J_{(10)s,t}^{(i_2)}$, $J_{(01)s,t}^{(i_1)}$, $J_{(111)s,t}^{(i_3 i_2 i_1)}$. При $r = 4$ имеем семь ($\mathrm{rank}_{\mathcal{D}}(4) = 7$) различных повторных стохастических интегралов Ито:

$I_{0_{s,t}}^{(i_1)}$, $I_{00_{s,t}}^{(i_2 i_1)}$, $I_{1_{s,t}}^{(i_1)}$, $I_{000_{s,t}}^{(i_3 i_2 i_1)}$, $I_{01_{s,t}}^{(i_2 i_1)}$, $I_{10_{s,t}}^{(i_2 i_1)}$, $I_{0000_{s,t}}^{(i_4 i_3 i_2 i_1)}$ против девяти: $J_{(1)s,t}^{(i_1)}$, $J_{(11)s,t}^{(i_2 i_1)}$, $J_{(10)s,t}^{(i_2)}$, $J_{(01)s,t}^{(i_1)}$, $J_{(111)s,t}^{(i_3 i_2 i_1)}$, $J_{(101)s,t}^{(i_3 i_1)}$, $J_{(110)s,t}^{(i_3 i_2)}$, $J_{(011)s,t}^{(i_2 i_1)}$, $J_{(1111)s,t}^{(i_4 i_3 i_2 i_1)}$. При $r = 5$ ($\mathrm{rank}_{\mathcal{D}}(5) = 12$) имеем соответственно 12 интегралов против 17 интегралов, при $r = 6$ и $r = 7$ имеем соответственно 20 против 29 и 33 против 50.

Точно такие же результаты получаются при сравнении двух унифицированных разложений Тейлора–Стратоновича с разложением Тейлора–Стратоновича в форме Клоедена и Платена.

Заметим, что рассмотренные разложения обычно используются при построении сильных численных методов (см. главу 7) решения стохастических дифференциальных уравнений Ито. Если рассмотреть не упорядоченные по порядку малости унифицированные разложения Тейлора–Ито и разложение Тейлора–Ито в форме Вагнера и Платена, которые обычно используются для построения слабых численных методов (см. главу 10) решения стохастических дифференциальных уравнений Ито, то различие между ними в числе различных повторных стохастических интегралов Ито окажется еще более заметным. Так, при $r = 4$ не упорядоченные по порядку малости унифицированные разложения Тейлора–Ито содержат по 15 ($\mathrm{rank}_{\mathcal{A}}(4) = 15$) различных повторных стохастических интегралов Ито, в то время как не упорядоченное по порядку малости разложение Тейлора–Ито в форме Вагнера и Платена содержит их уже 26.

Для дальнейшего нам потребуется следующая

Лемма 4.7. *Пусть дан упорядоченный набор* $(l_1, \ldots, l_k)$; $l_1, \ldots, l_k = 0,\ 1, \ldots$; $k = 1,\ 2, \ldots$, *причем* $S(k) \stackrel{\mathrm{def}}{=} l_1 + \ldots + l_k = p$; p *— фиксированное натуральное число или ноль. Тогда число всевозможных наборов* $(l_1, \ldots, l_k)$; $l_1, \ldots, l_k = 0,\ 1, \ldots$; $k = 1,\ 2, \ldots$, *для которых* $S(k) = p$ *выражается числом* $N(k, p) = C_{p+k-1}^{k-1}$, *где* $C_n^m = n!/(m!(n-m)!)$ *— биномиальный коэффициент.*

Доказательство. Простым перебором вариантов нетрудно убедиться в справедливости формул: $N(1, p) = 1 = C_{p+1-1}^{1-1}$; $N(2, p) = p + 1 = C_{p+2-1}^{2-1}$; $N(3, p) = (p+1)(p+2)/2 = C_{p+3-1}^{3-1}$. Далее, нетрудно видеть, что

$$N(k+1, p) = \sum_{l=0}^{p} N(k, l) = \sum_{l=0}^{p} C_{l+k-1}^{k-1} = C_{p+k}^{k},$$

где мы воспользовались предположением индукции и известным свойством биномиальных коэффициентов. Лемма доказана □.

Лемма 4.8. *Справедлива формула*: $\mathrm{rank}_{\mathcal{A}}(r) = 2^r - 1$.

Таблица 4.1. Числа $\mathrm{rank}_{\mathcal{A}}(r)$, $n_{\mathcal{M}}(r)$, $f(r) = n_{\mathcal{M}}(r)/\mathrm{rank}_{\mathcal{A}}(r)$

r	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$\mathrm{rank}_{\mathcal{A}}(r)$	1	3	7	15	31	63	127	255	511	1023
$n_{\mathcal{M}}(r)$	1	4	11	26	57	120	247	502	1013	2036
$f(r)$	1	1.3333	1.5714	1.7333	1.8387	1.9048	1.9449	1.9686	1.9824	1.9902

Таблица 4.2. Числа $\mathrm{rank}_{\mathcal{D}}(r)$, $n_{\mathcal{E}}(r)$, $g(r) = n_{\mathcal{E}}(r)/\mathrm{rank}_{\mathcal{D}}(r)$

r	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$\mathrm{rank}_{\mathcal{D}}(r)$	1	2	4	7	12	20	33	54	88	143
$n_{\mathcal{E}}(r)$	1	2	5	9	17	29	50	83	138	261
$g(r)$	1	1	1.2500	1.2857	1.4167	1.4500	1.5152	1.5370	1.5682	1.8252

Д о к а з а т е л ь с т в о. Проанализировав структуру множества $\bigcup\limits_{q=1}^{r} \mathcal{A}_q$ нетрудно заметить, что $\mathrm{rank}_{\mathcal{A}}(r) = N(1,0)+(N(1,1)+N(2,0))+(N(1,2)+N(2,1)+N(3,0))+\ldots+(N(1,r-1)+N(2,r-2)+\ldots+N(r,0))$. Далее, используя лемму 4.7 и известное свойство биномиальных коэффициентов, вычисляем: $\mathrm{rank}_{\mathcal{A}}(r) = C_0^0 + (C_1^0 + C_1^1) + (C_2^0 + C_2^1 + C_2^2) + \ldots + (C_{r-1}^0 + C_{r-1}^1 + C_{r-1}^2 + \ldots + C_{r-1}^{r-1}) = 2^0 + 2^1 + 2^2 + \ldots + 2^{r-1} = 2^r - 1$ $\square$.

Зададимся вопросом, а каково число (обозначим его через $n_{\mathcal{M}}(r)$) различных повторных стохастических интегралов, входящих в разложение Тейлора–Ито в форме Вагнера и Платена вида (4.12), где суммирование ведется по множеству $\bigcup\limits_{k=1}^{r} \mathcal{M}_k$.

Если исключить из рассмотрения повторные интегралы, которые равны $(s-t)^j/j!$, то очевидно, что $n_{\mathcal{M}}(r) = (2^1-1)+(2^2-1)+(2^3-1)+\ldots+(2^r-1) = 2(1+2+2^2+\ldots+2^{r-1}) - r = 2(2^r-1) - r$.

Таким образом $\lim\limits_{r\to\infty} n_{\mathcal{M}}(r)/\mathrm{rank}_{\mathcal{A}}(r) = 2$.

В таблице 4.1 приведены значения $\mathrm{rank}_{\mathcal{A}}(r)$, $n_{\mathcal{M}}(r)$, а также $f(r) = n_{\mathcal{M}}(r)/\mathrm{rank}_{\mathcal{A}}(r)$ при различных r.

Лемма 4.9. *Справедлива формула*:

$$\mathrm{rank}_{\mathcal{D}}(r) = \left[\begin{array}{ll} \sum\limits_{s=0}^{r-1} \sum\limits_{l=s}^{\frac{r-1}{2}+[\frac{s}{2}]} C_l^s & \textit{при } r = 1,\ 3,\ 5,\ldots \\ \sum\limits_{s=0}^{r-1} \sum\limits_{l=s}^{\frac{r}{2}-1+[\frac{s+1}{2}]} C_l^s & \textit{при } r = 2,\ 4,\ 6,\ldots \end{array}\right.,$$

где $[x]$ *означает целую часть числа* x.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Для доказательства леммы достаточно записать условие $k + 2(j + S(k)) \leq r$, где $S(k) \stackrel{\text{def}}{=} l_1 + \ldots + l_k$; $k, j, l_1, \ldots, l_k = 0, 1, \ldots$ в виде $j + S(k) \leq (r-k)/2$, осуществить перебор по $k = 1, \ldots, r$ и воспользоваться леммой 4.7 $\square$.

Вычислим число (обозначим его через $n_{\mathcal{E}}(r)$) различных повторных стохастических интегралов, входящих в разложение Тейлора–Ито в форме Вагнера и Платена вида (4.14), где суммирование ведется по множеству $\bigcup\limits_{q,k=1}^{r} \mathcal{E}_{qk}$.

Лемма 4.10. *Справедлива формула*:

$$n_{\mathcal{E}}(r) = \sum_{s=1}^{r} \sum_{l=0}^{[\frac{r-s}{2}]} C^{s}_{[\frac{r-s}{2}]+s-l}, \tag{4.122}$$

где $[x]$ *означает целую часть числа* x.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Условие суммирования в данном случае можно записать в виде: $0 \leq p + 2q \leq r$, где q — число интегрирований по времени, а p — число интегрирований по винеровскому процессу в каком-либо повторном стохастическом интеграле, входящем в разложение (4.14), причем $p + q$ — кратность указанного стохастического интеграла не превосходит r. Перепишем приведенное условие в виде $0 \leq q \leq (r-p)/2 \Leftrightarrow 0 \leq q \leq [(r-p)/2]$. Теперь, осуществляя перебор по $p = 1, \ldots, r$ и используя элементарные комбинаторные рассуждения получим (4.122). Лемма доказана $\square$.

В таблице 4.2 приведены значения $\mathrm{rank}_{\mathcal{D}}(r)$, $n_{\mathcal{E}}(r)$, а также $g(r) = n_{\mathcal{E}}(r)/\mathrm{rank}_{\mathcal{D}}(r)$ при различных r.

Глава 5

Разложения повторных стохастических интегралов, основанные на кратных рядах Фурье

Результаты данной главы во многом являются основополагающими для последующих глав настоящей монографии и, пожалуй, для книги в целом. Впервые применен мощный аппарат обобщенных кратных рядов Фурье, сходящихся в среднем, к получению разложений стохастических интегралов.

Идея представления повторных стохастических интегралов Ито и Стратоновича в виде кратных стохастических интегралов от определенных неслучайных функций нескольких переменных и последующего разложения данных функций с помощью рядов Фурье с целью получения эффективных среднеквадратических аппроксимаций указанных стохастических интегралов нашла свое отражение в ряде работ автора. В частности, впервые данный подход появился в [176] (1994). В данной работе отмеченная идея формулируется скорее на уровне догадки (без удовлетворительного обоснования) и как следствие работа [176] содержит весьма размытые формулировки и ряд неверных выводов. Тем не менее уже в [176] можно найти, например, формулы (6.13), (6.32), (6.33), (6.79). Отметим, что в [176] использовались кратные ряды Фурье по тригонометрической системе функций, сходящиеся в среднем. Следует также заметить, что результаты работы [176] верны для достаточно узкого частного случая, когда числа $i_1, \ldots, i_k$ попарно различны; $i_1, \ldots, i_k = 1, \ldots, m$ (см. формулу (5.1)).

Применение рядов Фурье по системе полиномов Лежандра к аппроксимации повторных стохастических интегралов впервые осуществлено в [108, 109] (1998), [111, 118] (1999), а также в [177] (2001). В

частности, в этих работах можно найти формулы (6.37) – (6.42), (6.52).

Отметим, что подход из работы [176] в окончательном варианте был сформулирован, обоснован и обобщен автором в [184] (теорема 5.1 в настоящей книге).

Весьма интересным и непростым оказался вопрос о том, какие же стохастические интегралы (Ито или Стратоновича) являются более подходящими для разложений в рамках отмеченного направления исследований.

С одной стороны теорема 5.1 убедительно демонстрирует, что структура повторных стохастических интегралов Ито является, независимо от кратности стохастического интеграла, достаточно удобной для разложений в кратные ряды по системе стандартных гауссовских случайных величин.

С другой стороны результаты разделов 5.5 – 5.7 убедительно свидетельствуют о том, что существует несомненная взаимосвязь множителя $\frac{1}{2}$, присущего стохастическому интегралу Стратоновича и входящего в слагаемое, связывающее стохастические интегралы Стратоновича и Ито (см. лемму 1.4) и того факта, что в точке конечного разрыва кусочно-гладкой функции $f(x)$ ее ряд Фурье сходится к величине $\frac{1}{2}(f(x-0)+f(x+0))$. Более того, как показано в разд. 5.5 и 5.6, окончательные формулы для разложений повторных стохастических интегралов Стратоновича (второй кратности в общем случае и третьей кратности в ряде частных случаев) оказываются более компактными, чем их аналоги для стохастических интегралов Ито.

И все же, оценивая в целом результаты глав 5 и 6 данной монографии, автор придерживается суждения о том, что структура повторных стохастических интегралов Ито является более подходящей для разложения в кратные ряды по системе стандартных гауссовских случайных величин. Действительно, при доказательстве теоремы 5.1 для случая произвольной кратности стохастического интеграла Ито использовались кратные ряды Фурье, сходящиеся в среднем. Вывод же формул (5.49), (6.44), (6.79) для повторных стохастических интегралов Стратоновича 2 и 3 кратности помимо непосредственно результатов теоремы 5.1 потребовал дополнительного использования теории кратных и повторных рядов Фурье, сходящихся поточечно, что повлекло за собой гораздо более сложные, чем при доказательстве теоремы 5.1, исследования которые тем не менее не привели к общим результатам (изучены случаи повторных стохастических интегралов Стратоновича 2 и 3 кратности, причем результаты, относящиеся к интегралам 3 кратности носят частный характер, хотя и имеют существенное зна-

чение для практики).

5.1 Разложение повторных стохастических интегралов Ито произвольной кратности

В данном разделе получим разложение повторных стохастических интегралов Ито произвольной кратности, основанное на сходящихся в среднем кратных рядах Фурье. При этом используемая техника доказательства основного утверждения данной главы — теоремы 5.1, весьма тесно перекликается с подходами главы 3.

Введем в рассмотрение следующие повторные стохастические интегралы Ито и Стратоновича:

$$J[\psi^{(k)}]_{T,t} = \int\limits_t^T \psi_k(t_k) \ldots \int\limits_t^{t_2} \psi_1(t_1) d\mathbf{w}_{t_1}^{(i_1)} \ldots d\mathbf{w}_{t_k}^{(i_k)}, \tag{5.1}$$

$$J^*[\psi^{(k)}]_{T,t} = \int\limits_t^{*T} \psi_k(t_k) \ldots \int\limits_t^{*t_2} \psi_1(t_1) d\mathbf{w}_{t_1}^{(i_1)} \ldots d\mathbf{w}_{t_k}^{(i_k)}, \tag{5.2}$$

где $\psi_l(\tau)$; $l = 1, \ldots, k$ — непрерывные на промежутке $[t, T]$ функции; $\mathbf{w}_t^{(i)} = \mathbf{f}_t^{(i)}$ при $i = 1, \ldots, m$; $\mathbf{w}_t^{(0)} = t$; $i_1, \ldots, i_k = 0,\ 1, \ldots, m$; $\mathbf{f}_\tau^{(i)}$ $(i = 1, \ldots, m)$ — независимые стандартные винеровские процессы.

Проблема совместного численного моделирования (исходя из среднеквадратического критерия сходимости) совокупностей повторных стохастических интегралов Ито, как уже отмечалось, помимо своей важности является и исключительно сложной как с теоретической, так и с вычислительной точки зрения. Исключение составляет лишь узкий частный случай, когда $i_1 = \ldots = i_k \neq 0$ и $\psi_1(s), \ldots, \psi_k(s) \equiv \psi(s)$ (см. данную главу и главу 6). Изучение этого случая возможно с помощью формулы Ито.

Данная проблема, как мы увидим в данной главе и главе 6, оказалась гораздо сложнее (она не может быть решена с помощью формулы Ито и требует более глубокого и сложного исследования) для случая, когда не все числа $i_1, \ldots, i_k$ совпадают между собой. Заметим, что даже в случае такого совпадения: $i_1 = \ldots = i_k \neq 0$ (при различных $\psi_1(s), \ldots, \psi_k(s)$) указанная проблема сохраняется и не очень сложные совокупности повторных стохастических интегралов Ито, которые часто встречаются в приложениях, не могут быть эффективно выражены в конечной форме (при среднеквадратической аппроксимации) через систему стандартных гауссовских случайных величин. Формула Ито

также не "спасает" в этом случае, в результате приходится прибегать к сложным разложениям.

Пусть $\{\phi_j(x)\}_{j=0}^{\infty}$ — полная ортонормированная система функций в пространстве $L_2([t,T])$, а $\psi_1(\tau),\ldots,\psi_k(\tau)$ — непрерывные на промежутке $[t,T]$ функции.

Введем в рассмотрение следующую функцию

$$K(t_1,\ldots,t_k)=\begin{cases}\psi_1(t_1)\ldots\psi_k(t_k),\ t_1<\ldots<t_k\\ 0,\ \text{иначе}\end{cases};\ t_1,\ldots,t_k\in[t,T].$$

Функция $K(t_1,\ldots,t_k)$ кусочно-непрерывна в гиперкубе $[t,T]^k$, т.е. гиперкуб можно разрезать на конечное число частей с помощью кусочно гладких поверхностей так, что на каждой части функция $K(t_1,\ldots,t_k)$ непрерывна и имеет пределы на границе части, а вдоль разрезов она может иметь разрывы.

В этой ситуации известно, что кратный ряд Фурье функции $K(t_1,\ldots,t_k)\in L_2([t,T]^k)$ в гиперкубе сходится в смысле среднего квадратического, т.е.:

$$\lim_{p_1,\ldots,p_k\to\infty}\left\|K(t_1,\ldots,t_k)-\sum_{j_1=0}^{p_1}\ldots\sum_{j_k=0}^{p_k}C_{j_k\ldots j_1}\prod_{l=1}^{k}\phi_{j_l}(t_l)\right\|=0, \tag{5.3}$$

где $\|f\|=\left(\int\limits_{[t,T]^k}f^2(t_1,\ldots,t_k)dt_1\ldots dt_k\right)^{\frac{1}{2}}$ и имеет место равенство Парсеваля:

$$\int\limits_{[t,T]^k}K^2(t_1,\ldots,t_k)dt_1\ldots dt_k=\lim_{p_1,\ldots,p_k\to\infty}\sum_{j_1=0}^{p_1}\ldots\sum_{j_k=0}^{p_k}C^2_{j_k\ldots j_1}. \tag{5.4}$$

Сформулируем основную теорему.

Теорема 5.1. *Пусть выполнены следующие условия:*

1. $\psi_i(\tau);\ i=1,\ 2,\ldots,k$ — *непрерывные на промежутке* $[t,T]$ *функции.*

2. $\{\phi_j(x)\}_{j=0}^{\infty}$ — *полная ортонормированная система непрерывных функций в пространстве* $L_2([t,T])$.

Тогда повторный стохастический интеграл Ито $J[\psi^{(k)}]_{T,t}$ *разлагается в сходящийся в среднеквадратическом смысле кратный ряд*

$$J[\psi^{(k)}]_{T,t}=\underset{p_1,\ldots,p_k\to\infty}{\text{l.i.m.}}\sum_{j_1=0}^{p_1}\ldots\sum_{j_k=0}^{p_k}C_{j_k\ldots j_1}\Bigl(\prod_{l=1}^{k}\zeta_{j_l}^{(i_l)}-$$

$$-\underset{N\to\infty}{\text{l.i.m.}}\sum_{(l_1,\ldots,l_k)\in\mathcal{G}_k}\phi_{j_{l_1}}(\tau_{l_1})\Delta\mathbf{w}_{\tau_{l_1}}^{(i_1)}\ldots\phi_{j_{l_k}}(\tau_{l_k})\Delta\mathbf{w}_{\tau_{l_k}}^{(i_k)}\Bigr), \tag{5.5}$$

где $\mathcal{G}_k = \mathcal{H}_k \backslash \mathcal{L}_k$; $\mathcal{H}_k = \{(l_1, \ldots, l_k) : \ l_1, \ldots, l_k = 0, \ 1, \ldots, N-1\}$,

$$\mathcal{L}_k = \Big\{(l_1, \ldots, l_k) : \ l_1, \ldots, l_k = 0, \ 1, \ldots, N-1; \\ l_g \neq l_r (g \neq r); \ g, r = 1, \ldots, k\Big\};$$

$\zeta_{(j_l)T,t}^{(i_l)} = \int\limits_t^T \phi_{j_l}(s) d\mathbf{w}_s^{(i_l)}$ — *независимые стандартные гауссовские случайные величины при различных* i_l *или* j_l *(если* $i_l \neq 0$*)*;

$$C_{j_k \ldots j_1} = \int\limits_{[t,T]^k} K(t_1, \ldots, t_k) \prod_{l=1}^{k} \phi_{j_l}(t_l) dt_1 \ldots dt_k;$$

$$K(t_1, \ldots, t_k) = \begin{cases} \psi_1(t_1) \ldots \psi_k(t_k), \ t_1 < \ldots < t_k \\ 0, \ \text{иначе} \end{cases}; \ t_1, \ldots, t_k \in [t, T].$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. В начале докажем вспомогательные леммы.

Рассмотрим разбиение $\{\tau_j\}_{j=0}^N$ промежутка $[t, T]$ такое, что

$$t = \tau_0 < \ldots < \tau_N = T, \ \Delta_N = \max_{0 \leq j \leq N-1} \Delta\tau_j \to 0 \text{ при } N \to \infty, \tag{5.6}$$

где $\Delta\tau_j = \tau_{j+1} - \tau_j$.

Лемма 5.1. *Пусть выполнено условие* 1 *теоремы* 5.1. *Тогда*

$$J[\psi^{(k)}]_{T,t} = \underset{N \to \infty}{\text{l.i.m.}} \sum_{j_k=0}^{N-1} \ldots \sum_{j_1=0}^{j_2-1} \prod_{l=1}^{k} \psi_l(\tau_{j_l}) \Delta\mathbf{w}_{\tau_{j_l}}^{(i_l)} \ \text{с в.1}, \tag{5.7}$$

где $\Delta\mathbf{w}_{\tau_{j_l}}^{(i_l)} = \mathbf{w}_{\tau_{j_l+1}}^{(i_l)} - \mathbf{w}_{\tau_{j_l}}^{(i_l)}$; $i_l = 0, \ 1, \ldots, m$; $\{\tau_{j_l}\}_{j_l=0}^{N-1}$ — *разбиение промежутка* $[t, T]$, *удовлетворяющее условию* (5.6).

Д о к а з а т е л ь с т в о. Согласно левому равенству в (3.7) имеем

$$J[\psi^{(k)}]_{T,t} = \underset{N \to \infty}{\text{l.i.m.}} \sum_{j_k=0}^{N-1} \ldots \sum_{j_2=0}^{j_3-1} \prod_{p=2}^{k} J[\psi_p]_{\tau_{j_p+1}, \tau_{j_p}} \sum_{j_1=0}^{j_2-1} \psi_1(\tau_{j_1}) \Delta\mathbf{w}_{\tau_{j_1}}^{(i_1)} \ \text{с в.1}, \tag{5.8}$$

где

$$J[\psi_p]_{s,\theta} = \int\limits_\theta^s \psi_p(\tau) d\mathbf{w}_\tau^{(i_p)}.$$

Представим $J[\psi_p]_{\tau_{j_p+1}, \tau_{j_p}}$ в виде

$$J[\psi_p]_{\tau_{j_p+1}, \tau_{j_p}} = \psi_p(\tau_{j_p}) \Delta\mathbf{w}_{\tau_{j_p}}^{(i_p)} + \int\limits_{\tau_{j_p}}^{\tau_{j_p+1}} (\psi_p(\tau) - \psi_p(\tau_{j_p})) d\mathbf{w}_\tau^{(i_p)}$$

и подставим результат в (5.8). После этого нетрудно заметить, что преобразованное допредельное выражение в правой части (5.8) представимо в условиях леммы в виде допредельного выражения из правой части (5.7) и величины, которая стремится к нулю при $N \to \infty$ в среднеквадратическом смысле. Лемма доказана. □

З а м е ч а н и е 5.1. *Результат леммы* 5.1 *может быть обобщен, т.е. функция* $\psi_1(s)$ *в* (5.7) *может быть заменена на случайный процесс* ϕ_s *из класса* $\mathcal{M}_2([0,T])$.

З а м е ч а н и е 5.2. *Нетрудно видеть, что если* $\Delta\mathbf{w}_{\tau_{j_l}}^{(i_l)}$ *в* (5.7) *при некотором* $l \in \{1,\ldots,k\}$ *заменить на* $\left(\Delta\mathbf{w}_{\tau_{j_l}}^{(i_l)}\right)^p$, $i_l \neq 0$, *то в интеграле* $J[\psi^{(k)}]_{T,t}$ *дифференциал* $d\mathbf{w}_{t_l}^{(i_l)}$ *при* $p=2$ *заменится на* dt_l. *Если же* $p=3,\ 4,\ldots,$ *то правая часть* (5.7) *с вероятностью* 1 *обратится в ноль. Если* $\Delta\mathbf{w}_{\tau_{j_l}}^{(i_l)}$ *в* (5.7) *при некотором* $l \in \{1,\ldots,k\}$ *заменить на* $(\Delta\tau_{j_l})^p$, $p=2,\ 3,\ldots,$ *то правая часть* (5.7) *с вероятностью* 1 *также обратится в ноль.*

Определим следующий стохастический интеграл:

$$\underset{N\to\infty}{\text{l.i.m.}} \sum_{j_1,\ldots,j_k=0}^{N-1} \Phi\left(\tau_{j_1},\ldots,\tau_{j_k}\right) \prod_{l=1}^{k} \Delta\mathbf{w}_{\tau_{j_l}}^{(i_l)} \stackrel{\text{def}}{=} J[\Phi]_{T,t}^{(k)}. \tag{5.9}$$

Пусть $D_k = \{(t_1,\ldots,t_k):\ t \le t_1 < \ldots < t_k \le T\}$. Будем писать $\Phi(t_1,\ldots,t_k) \in C(D_k)$, если $\Phi(t_1,\ldots,t_k)$ непрерывная в замкнутой области D_k неслучайная функция k переменных.

Рассмотрим повторный стохастический интеграл Ито вида

$$I[\Phi]_{T,t}^{(k)} \stackrel{\text{def}}{=} \int\limits_t^T \ldots \int\limits_t^{t_2} \Phi(t_1,\ldots,t_k) d\mathbf{w}_{t_1}^{(i_1)} \ldots d\mathbf{w}_{t_k}^{(i_k)},$$

где $\Phi(t_1,\ldots,t_k)$ — неслучайная функция k переменных.

Нетрудно проверить, что данный стохастический интеграл существует в среднеквадратическом смысле, если выполнено условие:

$$\int\limits_t^T \ldots \int\limits_t^{t_2} \Phi^2(t_1,\ldots,t_k) dt_1 \ldots dt_k < \infty.$$

Используя рассуждения, близкие к рассуждениям доказательства леммы 5.1, нетрудно показать, что при $\Phi(t_1,\ldots,t_k) \in C(D_k)$ выполняется равенство:

$$I[\Phi]_{T,t}^{(k)} \stackrel{\text{def}}{=} \int\limits_t^T \ldots \int\limits_t^{t_2} \Phi(t_1,\ldots,t_k) d\mathbf{w}_{t_1}^{(i_1)} \ldots d\mathbf{w}_{t_k}^{(i_k)} =$$

$$= \underset{N\to\infty}{\text{l.i.m.}} \sum_{j_k=0}^{N-1} \ldots \sum_{j_1=0}^{j_2-1} \Phi(\tau_{j_1},\ldots,\tau_{j_k}) \prod_{l=1}^{k} \Delta\mathbf{w}_{\tau_{j_l}}^{(i_l)} \text{ с в.1.} \tag{5.10}$$

В качестве пояснения проверим справедливость равенства (5.10) при $k=3$. Для определенности будем считать, что $i_1, i_2, i_3 = 1,\ldots,m$. Имеем

$$I[\Phi]_{T,t}^{(3)} \stackrel{\text{def}}{=} \int\limits_t^T \int\limits_t^{t_3} \int\limits_t^{t_2} \Phi(t_1,t_2,t_3) d\mathbf{w}_{t_1}^{(i_1)} d\mathbf{w}_{t_2}^{(i_2)} d\mathbf{w}_{t_3}^{(i_3)} =$$

$$= \underset{N\to\infty}{\text{l.i.m.}} \sum_{j_3=0}^{N-1} \int\limits_t^{\tau_{j_3}} \int\limits_t^{t_2} \Phi(t_1,t_2,\tau_{j_3}) d\mathbf{w}_{t_1}^{(i_1)} d\mathbf{w}_{t_2}^{(i_2)} \Delta\mathbf{w}_{\tau_{j_3}}^{(i_3)} =$$

$$= \underset{N\to\infty}{\text{l.i.m.}} \sum_{j_3=0}^{N-1} \sum_{j_2=0}^{j_3-1} \int\limits_{\tau_{j_2}}^{\tau_{j_2+1}} \int\limits_t^{t_2} \Phi(t_1,t_2,\tau_{j_3}) d\mathbf{w}_{t_1}^{(i_1)} d\mathbf{w}_{t_2}^{(i_2)} \Delta\mathbf{w}_{\tau_{j_3}}^{(i_3)} =$$

$$= \underset{N\to\infty}{\text{l.i.m.}} \sum_{j_3=0}^{N-1} \sum_{j_2=0}^{j_3-1} \int\limits_{\tau_{j_2}}^{\tau_{j_2+1}} \left(\int\limits_t^{\tau_{j_2}} + \int\limits_{\tau_{j_2}}^{t_2} \right) \Phi(t_1,t_2,\tau_{j_3}) d\mathbf{w}_{t_1}^{(i_1)} d\mathbf{w}_{t_2}^{(i_2)} \Delta\mathbf{w}_{\tau_{j_3}}^{(i_3)} =$$

$$= \underset{N\to\infty}{\text{l.i.m.}} \sum_{j_3=0}^{N-1} \sum_{j_2=0}^{j_3-1} \sum_{j_1=0}^{j_2-1} \int\limits_{\tau_{j_2}}^{\tau_{j_2+1}} \int\limits_{\tau_{j_1}}^{\tau_{j_1+1}} \Phi(t_1,t_2,\tau_{j_3}) d\mathbf{w}_{t_1}^{(i_1)} d\mathbf{w}_{t_2}^{(i_2)} \Delta\mathbf{w}_{\tau_{j_3}}^{(i_3)} +$$

$$+ \underset{N\to\infty}{\text{l.i.m.}} \sum_{j_3=0}^{N-1} \sum_{j_2=0}^{j_3-1} \int\limits_{\tau_{j_2}}^{\tau_{j_2+1}} \int\limits_{\tau_{j_2}}^{t_2} \Phi(t_1,t_2,\tau_{j_3}) d\mathbf{w}_{t_1}^{(i_1)} d\mathbf{w}_{t_2}^{(i_2)} \Delta\mathbf{w}_{\tau_{j_3}}^{(i_3)}. \tag{5.11}$$

Покажем, что второй предел в правой части (5.11) равен нулю. Действительно, второй момент его допредельного выражения равен

$$\sum_{j_3=0}^{N-1} \sum_{j_2=0}^{j_3-1} \int\limits_{\tau_{j_2}}^{\tau_{j_2+1}} \int\limits_{\tau_{j_2}}^{t_2} \Phi^2(t_1,t_2,\tau_{j_3}) dt_1 dt_2 \Delta\tau_{j_3} \le M^2 \sum_{j_3=0}^{N-1} \sum_{j_2=0}^{j_3-1} \frac{1}{2} \left(\Delta\tau_{j_2}\right)^2 \Delta\tau_{j_3} \to 0$$

при $N\to\infty$. Здесь M — постоянная, которая ограничивает модуль функции $\Phi(t_1,t_2,t_3)$ в силу ее непрерывности, а $\Delta\tau_j = \tau_{j+1} - \tau_j$.

С учетом полученных выводов имеем

$$I[\Phi]_{T,t}^{(3)} \stackrel{\text{def}}{=} \int\limits_t^T \int\limits_t^{t_3} \int\limits_t^{t_2} \Phi(t_1,t_2,t_3) d\mathbf{w}_{t_1}^{(i_1)} d\mathbf{w}_{t_2}^{(i_2)} d\mathbf{w}_{t_3}^{(i_3)} =$$

$$= \underset{N\to\infty}{\text{l.i.m.}} \sum_{j_3=0}^{N-1} \sum_{j_2=0}^{j_3-1} \sum_{j_1=0}^{j_2-1} \int\limits_{\tau_{j_2}}^{\tau_{j_2+1}} \int\limits_{\tau_{j_1}}^{\tau_{j_1+1}} \Phi(t_1,t_2,\tau_{j_3}) d\mathbf{w}_{t_1}^{(i_1)} d\mathbf{w}_{t_2}^{(i_2)} \Delta\mathbf{w}_{\tau_{j_3}}^{(i_3)} =$$

$$= \underset{N\to\infty}{\text{l.i.m.}} \sum_{j_3=0}^{N-1}\sum_{j_2=0}^{j_3-1}\sum_{j_1=0}^{j_2-1}\int\limits_{\tau_{j_2}}^{\tau_{j_2+1}}\int\limits_{\tau_{j_1}}^{\tau_{j_1+1}} (\Phi(t_1,t_2,\tau_{j_3})-\Phi(t_1,\tau_{j_2},\tau_{j_3}))\times$$

$$\times d\mathbf{w}_{t_1}^{(i_1)} d\mathbf{w}_{t_2}^{(i_2)} \Delta\mathbf{w}_{\tau_{j_3}}^{(i_3)}$$

$$+\underset{N\to\infty}{\text{l.i.m.}} \sum_{j_3=0}^{N-1}\sum_{j_2=0}^{j_3-1}\sum_{j_1=0}^{j_2-1}\int\limits_{\tau_{j_2}}^{\tau_{j_2+1}}\int\limits_{\tau_{j_1}}^{\tau_{j_1+1}} (\Phi(t_1,\tau_{j_2},\tau_{j_3})-\Phi(\tau_{j_1},\tau_{j_2},\tau_{j_3}))\times$$

$$\times d\mathbf{w}_{t_1}^{(i_1)} d\mathbf{w}_{t_2}^{(i_2)} \Delta\mathbf{w}_{\tau_{j_3}}^{(i_3)}$$

$$+\underset{N\to\infty}{\text{l.i.m.}} \sum_{j_3=0}^{N-1}\sum_{j_2=0}^{j_3-1}\sum_{j_1=0}^{j_2-1} \Phi(\tau_{j_1},\tau_{j_2},\tau_{j_3})\Delta\mathbf{w}_{\tau_{j_1}}^{(i_1)}\Delta\mathbf{w}_{\tau_{j_2}}^{(i_2)}\Delta\mathbf{w}_{\tau_{j_3}}^{(i_3)}. \qquad (5.12)$$

Для получения желаемого результата остается показать, что первые два предела в правой части (5.12) равны нулю. Докажем, что равен нулю первый из них (для второго предела доказательство аналогичное).

Второй момент допредельного выражения первого предела в правой части (5.12) равен следующему выражению:

$$\sum_{j_3=0}^{N-1}\sum_{j_2=0}^{j_3-1}\sum_{j_1=0}^{j_2-1}\int\limits_{\tau_{j_2}}^{\tau_{j_2+1}}\int\limits_{\tau_{j_1}}^{\tau_{j_1+1}} \left(\Phi(t_1,t_2,\tau_{j_3})-\Phi(t_1,\tau_{j_2},\tau_{j_3})\right)^2 dt_1 dt_2 \Delta\tau_{j_3}. \qquad (5.13)$$

Поскольку функция $\Phi(t_1,t_2,t_3)$ непрерывна в замкнутой ограниченной области D_3, то она и равномерно непрерывна в этой области. Поэтому, если расстояние между двумя точками области D_3 меньше $\delta>0$ (оно найдено по любому $\varepsilon>0$ и не зависит от указанных точек), то соответствующее колебание функции $\Phi(t_1,t_2,t_3)$ для этих двух точек области D_3 меньше ε.

Если предположить, что $\Delta\tau_j<\delta$ $(j=0,\ 1,\ldots,N-1)$, то расстояние между точками (t_1,t_2,τ_{j_3}), $(t_1,\tau_{j_2},\tau_{j_3})$ очевидно меньше δ. Тогда $|\Phi(t_1,t_2,\tau_{j_3})-\Phi(t_1,\tau_{j_2},\tau_{j_3})|<\varepsilon$.

Таким образом при $\Delta\tau_j<\delta$ $(j=0,\ 1,\ldots,N-1)$ выражение (5.13) оценивается сверху величиной

$$\varepsilon^2\sum_{j_3=0}^{N-1}\sum_{j_2=0}^{j_3-1}\sum_{j_1=0}^{j_2-1}\Delta\tau_{j_1}\Delta\tau_{j_2}\Delta\tau_{j_3}<\varepsilon^2\frac{(T-t)^3}{6}.$$

Поэтому первый предел в правой части (5.12) равен нулю. Аналогично доказывается равенство нулю и второго предела в правой части (5.12). Таким образом равенство (5.10) при $k=3$ доказано. Случаи $k=2$ и $k>3$ рассматриваются абсолютно аналогично.

Следует отметить, что нетрудно доказать справедливость формулы (5.10), когда функция $\Phi(t_1,\ldots,t_k)$ непрерывна в открытой области D_k и ограничена на ее границе.

Положим

$$\underset{N\to\infty}{\text{l.i.m.}} \sum_{\substack{j_1,\ldots,j_k=0\\ j_q\ne j_r;\ q\ne r;\ q,r=1,\ldots,k}}^{N-1} \Phi\left(\tau_{j_1},\ldots,\tau_{j_k}\right)\prod_{l=1}^{k}\Delta\mathbf{w}_{\tau_{j_l}}^{(i_l)} \stackrel{\text{def}}{=} J'[\Phi]_{T,t}^{(k)}.$$

Тогда согласно (5.10) получим

$$J'[\Phi]_{T,t}^{(k)} = \int\limits_t^T\ldots\int\limits_t^{t_2}\sum_{(t_1,\ldots,t_k)}\left(\Phi(t_1,\ldots,t_k)d\mathbf{w}_{t_1}^{(i_1)}\ldots d\mathbf{w}_{t_k}^{(i_k)}\right), \tag{5.14}$$

где суммирование по перестановкам $(t_1,\ldots,t_k)$ осуществляется только в выражении, которое взято в скобки, а функция $\Phi(t_1,\ldots,t_k)$ предполагается непрерывной в соответствующих областях.

Лемма 5.2. *Пусть выполнено условие* $\int\limits_t^T\ldots\int\limits_t^{t_2}\Phi^2(t_1,\ldots,t_k)dt_1\ldots dt_k<\infty$, *где* $\Phi(t_1,\ldots,t_k)$ *— неслучайная функция. Тогда*

$$\mathsf{M}\left\{\left|I[\Phi]_{T,t}^{(k)}\right|^2\right\}\le C_k\int\limits_t^T\ldots\int\limits_t^{t_2}\Phi^2(t_1,\ldots,t_k)dt_1\ldots dt_k,\ C_k<\infty.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Используя стандартные оценки стохастических интегралов (см. главу 1), при $\xi_\tau\in\mathcal{M}_2([t_0,t])$ имеем

$$\mathsf{M}\left\{\left|\int\limits_{t_0}^t\xi_\tau df_\tau\right|^2\right\}=\int\limits_{t_0}^t\mathsf{M}\left\{|\xi_\tau|^2\right\}d\tau,\ \mathsf{M}\left\{\left|\int\limits_{t_0}^t\xi_\tau d\tau\right|^2\right\}\le(t-t_0)\int\limits_{t_0}^t\mathsf{M}\left\{|\xi_\tau|^2\right\}d\tau. \tag{5.15}$$

Пусть $\xi[\Phi]_{t_{l+1},\ldots,t_k,t}^{(l)}=\int\limits_t^{t_{l+1}}\ldots\int\limits_t^{t_2}\Phi(t_1,\ldots,t_k)d\mathbf{w}_{t_1}^{(i_1)}\ldots d\mathbf{w}_{t_l}^{(i_l)}$ при $l=1,\ldots,k-1$ и $\xi[\Phi]_{t_1,\ldots,t_k,t}^{(0)}\stackrel{\text{def}}{=}\Phi(t_1,\ldots,t_k)$.

По индукции нетрудно показать, что $\xi[\Phi]_{t_{l+1},\ldots,t_k,t}^{(l)}\in\mathcal{M}_2([t,T])$ по переменной t_{l+1}. Тогда, применяя многократно оценки (5.15), приходим к утверждению леммы. □

Лемма 5.3. *Пусть* $\varphi_i(s)$; $i=1,\ldots,k$ *— непрерывные на промежутке* $[t,T]$ *функции. Тогда*

$$\prod_{l=1}^{k}J[\varphi_l]_{T,t}=J[\Phi]_{T,t}^{(k)}\ \text{с в.1}, \tag{5.16}$$

где $J[\varphi_l]_{T,t} = \int\limits_t^T \varphi_l(s)d\mathbf{w}_s^{(i_l)}$; $\Phi(t_1,\ldots,t_k) = \prod\limits_{l=1}^k \varphi_l(t_l)$, *а интеграл* $J[\Phi]_{T,t}^{(k)}$ *определен равенством* (5.9).

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть сначала $i_l \neq 0$, $l = 1,\ldots,k$. Обозначим $J[\varphi_l]_N \stackrel{\text{def}}{=} \sum\limits_{j=0}^{N-1} \varphi_l(\tau_j)\Delta\mathbf{w}_{\tau_j}^{(i_l)}$.

Поскольку

$$\prod_{l=1}^k J[\varphi_l]_N - \prod_{l=1}^k J[\varphi_l]_{T,t} = \sum_{l=1}^k \left(\prod_{g=1}^{l-1} J[\varphi_g]_{T,t}\right)\left(J[\varphi_l]_N - J[\varphi_l]_{T,t}\right)\left(\prod_{g=l+1}^k J[\varphi_g]_N\right),$$

то в силу неравенств Минковского и Коши–Буняковского

$$\left(\mathsf{M}\left\{\left|\prod_{l=1}^k J[\varphi_l]_N - \prod_{l=1}^k J[\varphi_l]_{T,t}\right|^2\right\}\right)^{\frac{1}{2}} \le C_k \sum_{l=1}^k \left(\mathsf{M}\left\{\left|J[\varphi_l]_N - J[\varphi_l]_{T,t}\right|^4\right\}\right)^{\frac{1}{4}}, \tag{5.17}$$

где $C_k < \infty$.

Заметим, что $J[\varphi_l]_N - J[\varphi_l]_{T,t} = \sum\limits_{g=0}^{N-1} J[\Delta\varphi_l]_{\tau_{g+1},\tau_g}$, где $J[\Delta\varphi_l]_{\tau_{g+1},\tau_g} = \int\limits_{\tau_g}^{\tau_{g+1}} \left(\varphi_l(\tau_g) - \varphi_l(s)\right) d\mathbf{w}_s^{(i_l)}$. Поскольку $J[\Delta\varphi_l]_{\tau_{g+1},\tau_g}$ независимы при различных g, то [127]

$$\mathsf{M}\left\{\left|\sum_{j=0}^{N-1} J[\Delta\varphi_l]_{\tau_{j+1},\tau_j}\right|^4\right\} = \sum_{j=0}^{N-1} \mathsf{M}\left\{\left|J[\Delta\varphi_l]_{\tau_{j+1},\tau_j}\right|^4\right\} +$$

$$+6\sum_{j=0}^{N-1} \mathsf{M}\left\{\left|J[\Delta\varphi_l]_{\tau_{j+1},\tau_j}\right|^2\right\} \sum_{q=0}^{j-1} \mathsf{M}\left\{\left|J[\Delta\varphi_l]_{\tau_{q+1},\tau_q}\right|^2\right\}. \tag{5.18}$$

В силу гауссовости $J[\Delta\varphi_l]_{\tau_{j+1},\tau_j}$ имеем

$$\mathsf{M}\left\{\left|J[\Delta\varphi_l]_{\tau_{j+1},\tau_j}\right|^2\right\} = \int\limits_{\tau_j}^{\tau_{j+1}} \left(\varphi_l(\tau_j) - \varphi_l(s)\right)^2 ds,$$

$$\mathsf{M}\left\{\left|J[\Delta\varphi_l]_{\tau_{j+1},\tau_j}\right|^4\right\} = 3\left(\int\limits_{\tau_j}^{\tau_{j+1}} \left(\varphi_l(\tau_j) - \varphi_l(s)\right)^2 ds\right)^2.$$

Используя эти соотношения и непрерывность, а как следствие равномерную непрерывность, функций $\varphi_i(s)$, получаем, что правая часть (5.18) стремится к нулю при $N \to \infty$. Учитывая этот факт, а также (5.17), приходим к (5.16). Если при некоторых $l \in \{1,\ldots,k\}$:

$\mathbf{w}_{t_l}^{(i_l)} = t_l$, то доказательство леммы очевидно несколько упрощается и проводится аналогично. $\square$

Согласно лемме 5.1 имеем

$$J[\psi^{(k)}]_{T,t} = \underset{N\to\infty}{\text{l.i.m.}} \sum_{l_k=0}^{N-1} \ldots \sum_{l_1=0}^{l_2-1} \psi_1(\tau_{l_1}) \ldots \psi_k(\tau_{l_k}) \Delta\mathbf{w}_{\tau_{l_1}}^{(i_1)} \ldots \Delta\mathbf{w}_{\tau_{l_k}}^{(i_k)} =$$

$$= \underset{N\to\infty}{\text{l.i.m.}} \sum_{l_k=0}^{N-1} \ldots \sum_{l_1=0}^{l_2-1} K(\tau_{l_1}, \ldots, \tau_{l_k}) \Delta\mathbf{w}_{\tau_{l_1}}^{(i_1)} \ldots \Delta\mathbf{w}_{\tau_{l_k}}^{(i_k)} =$$

$$= \underset{N\to\infty}{\text{l.i.m.}} \sum_{l_k=0}^{N-1} \ldots \sum_{l_1=0}^{N-1} K(\tau_{l_1}, \ldots, \tau_{l_k}) \Delta\mathbf{w}_{\tau_{l_1}}^{(i_1)} \ldots \Delta\mathbf{w}_{\tau_{l_k}}^{(i_k)} =$$

$$= \underset{N\to\infty}{\text{l.i.m.}} \sum_{\substack{l_1,\ldots,l_k=0 \\ l_q \ne l_r;\ q\ne r;\ q,r=1,\ldots,k}}^{N-1} K(\tau_{l_1}, \ldots, \tau_{l_k}) \Delta\mathbf{w}_{\tau_{l_1}}^{(i_1)} \ldots \Delta\mathbf{w}_{\tau_{l_k}}^{(i_k)} =$$

$$= \int_t^T \ldots \int_t^{t_2} \sum_{(t_1,\ldots,t_k)} \left(K(t_1, \ldots, t_k) d\mathbf{w}_{t_1}^{(i_1)} \ldots d\mathbf{w}_{t_k}^{(i_k)} \right), \tag{5.19}$$

где перестановки $(t_1, \ldots, t_k)$ осуществляются при суммировании только в выражении, взятом в скобки.

Нетрудно видеть, что (5.19) может быть переписано в виде:

$$J[\psi^{(k)}]_{T,t} = \sum_{(t_1,\ldots,t_k)} \int_t^T \ldots \int_t^{t_2} K(t_1, \ldots, t_k) d\mathbf{w}_{t_1}^{(i_1)} \ldots d\mathbf{w}_{t_k}^{(i_k)},$$

где перестановки $(t_1, \ldots, t_k)$ осуществляются при суммировании только в величинах $d\mathbf{w}_{t_1}^{(i_1)} \ldots d\mathbf{w}_{t_k}^{(i_k)}$, при этом соответствующим образом меняются индексы у верхних пределов интегрирования в повторных стохастических интегралах и, если t_r поменялось местами с t_q в перестановке $(t_1, \ldots, t_k)$, то и i_r поменяется местами с i_q в перестановке $(i_1, \ldots, i_k)$.

Отметим также, что поскольку для интегралов Римана интегрирование ограниченной функции по множеству нулевой меры дает нулевой результат, то для этих интегралов справедлива формула:

$$\int_{[t,T]^k} G(t_1, \ldots, t_k) dt_1 \ldots dt_k = \sum_{(t_1,\ldots,t_k)} \int_t^T \ldots \int_t^{t_2} G(t_1, \ldots, t_k) dt_1 \ldots dt_k,$$

где перестановки $(t_1, \ldots, t_k)$ осуществляются при суммировании только в величинах $dt_1, \ldots, dt_k$, при этом соответствующим образом меняются

индексы у верхних пределов интегрирования в повторных интегралах и функция $G(t_1,\ldots,t_k)$ предполагается интегрируемой на $[t,T]^k$.

Согласно леммам 5.1–5.3 и (5.14), (5.19) с в. 1 получаем следующее представление

$$J[\psi^{(k)}]_{T,t}=$$

$$=\sum_{j_1=0}^{p_1}\ldots\sum_{j_k=0}^{p_k}C_{j_k\ldots j_1}\int\limits_t^T\ldots\int\limits_t^{t_2}\sum_{(t_1,\ldots,t_k)}\Bigl(\phi_{j_1}(t_1)\ldots\phi_{j_k}(t_k)d\mathbf{w}_{t_1}^{(i_1)}\ldots d\mathbf{w}_{t_k}^{(i_k)}\Bigr)+$$

$$+R_{T,t}^{p_1,\ldots,p_k}=\sum_{j_1=0}^{p_1}\ldots\sum_{j_k=0}^{p_k}C_{j_k\ldots j_1}\times$$

$$\times\underset{N\to\infty}{\text{l.i.m.}}\sum_{\substack{l_1,\ldots,l_k=0\\ l_q\ne l_r;\ q\ne r;\ q,r=1,\ldots,k}}^{N-1}\phi_{j_1}(\tau_{l_1})\ldots\phi_{j_k}(\tau_{l_k})\Delta\mathbf{w}_{\tau_{l_1}}^{(i_1)}\ldots\Delta\mathbf{w}_{\tau_{l_k}}^{(i_k)}+$$

$$+R_{T,t}^{p_1,\ldots,p_k}=$$

$$=\sum_{j_1=0}^{p_1}\ldots\sum_{j_k=0}^{p_k}C_{j_k\ldots j_1}\Biggl(\underset{N\to\infty}{\text{l.i.m.}}\sum_{l_1,\ldots,l_k=0}^{N-1}\phi_{j_1}(\tau_{l_1})\ldots\phi_{j_k}(\tau_{l_k})\Delta\mathbf{w}_{\tau_{l_1}}^{(i_1)}\ldots\Delta\mathbf{w}_{\tau_{l_k}}^{(i_k)}-$$

$$-\underset{N\to\infty}{\text{l.i.m.}}\sum_{(l_1,\ldots,l_k)\in\mathcal{G}_k}\phi_{j_{l_1}}(\tau_{l_1})\Delta\mathbf{w}_{\tau_{l_1}}^{(i_1)}\ldots\phi_{j_{l_k}}(\tau_{l_k})\Delta\mathbf{w}_{\tau_{l_k}}^{(i_k)}\Biggr)+R_{T,t}^{p_1,\ldots,p_k}=$$

$$=\sum_{j_1=0}^{p_1}\ldots\sum_{j_k=0}^{p_k}C_{j_k\ldots j_1}\Biggl(\prod_{l=1}^{k}\zeta_{j_l}^{(i_l)}-$$

$$-\underset{N\to\infty}{\text{l.i.m.}}\sum_{(l_1,\ldots,l_k)\in\mathcal{G}_k}\phi_{j_{l_1}}(\tau_{l_1})\Delta\mathbf{w}_{\tau_{l_1}}^{(i_1)}\ldots\phi_{j_{l_k}}(\tau_{l_k})\Delta\mathbf{w}_{\tau_{l_k}}^{(i_k)}\Biggr)+R_{T,t}^{p_1,\ldots,p_k},$$

где

$$R_{T,t}^{p_1,\ldots,p_k}=\sum_{(t_1,\ldots,t_k)}\int\limits_t^T\ldots\int\limits_t^{t_2}\Biggl(K(t_1,\ldots,t_k)-$$

$$-\sum_{j_1=0}^{p_1}\ldots\sum_{j_k=0}^{p_k}C_{j_k\ldots j_1}\prod_{l=1}^{k}\phi_{j_l}(t_l)\Biggr)d\mathbf{w}_{t_1}^{(i_1)}\ldots d\mathbf{w}_{t_k}^{(i_k)},\qquad(5.20)$$

где перестановки $(t_1,\ldots,t_k)$ осуществляются при суммировании только в величинах $d\mathbf{w}_{t_1}^{(i_1)}\ldots d\mathbf{w}_{t_k}^{(i_k)}$, при этом соответствующим образом меняются индексы у верхних пределов интегрирования в повторных стохастических интегралах и, если t_r поменялось местами с t_q в перестановке $(t_1,\ldots,t_k)$, то и i_r поменяется местами с i_q в перестановке $(i_1,\ldots,i_k)$.

Оценим остаток ряда $R_{T,t}^{p_1,\ldots,p_k}$.

Согласно лемме 5.2 имеем

$$\mathsf{M}\left\{\left(R_{T,t}^{p_1,\ldots,p_k}\right)^2\right\} \le C_k \sum_{(t_1,\ldots,t_k)} \int\limits_t^T \ldots \int\limits_t^{t_2} \Bigg(K(t_1,\ldots,t_k) -$$

$$-\sum_{j_1=0}^{p_1} \ldots \sum_{j_k=0}^{p_k} C_{j_k\ldots j_1} \prod_{l=1}^{k} \phi_{j_l}(t_l)\Bigg)^2 dt_1\ldots dt_k =$$

$$= C_k \int\limits_{[t,T]^k} \Bigg(K(t_1,\ldots,t_k) - \sum_{j_1=0}^{p_1} \ldots \sum_{j_k=0}^{p_k} C_{j_k\ldots j_1} \prod_{l=1}^{k} \phi_{j_l}(t_l)\Bigg)^2 dt_1\ldots dt_k \to 0$$

при $p_1,\ldots,p_k \to \infty$, где постоянная C_k зависит только от кратности повторного стохастического интеграла Ито. Теорема доказана. $\square$

Для того, чтобы оценить значение для практики теоремы 5.1 приведем в несколько преобразованной форме ее частные случаи для $k = 1,\ldots,7$:

$$\int\limits_t^T \psi_1(t_1) d\mathbf{w}_{t_1}^{(i_1)} = \sum_{j_1=0}^{\infty} C_{j_1} \zeta_{j_1}^{(i_1)}, \tag{5.21}$$

$$\int\limits_t^T \psi_2(t_2) \int\limits_t^{t_2} \psi_1(t_1) d\mathbf{w}_{t_1}^{(i_1)} d\mathbf{w}_{t_2}^{(i_2)} = \sum_{j_1,j_2=0}^{\infty} C_{j_2 j_1} \left(\zeta_{j_1}^{(i_1)} \zeta_{j_2}^{(i_2)} - \mathbf{1}_{\{i_1=i_2\ne 0\}} \mathbf{1}_{\{j_1=j_2\}}\right), \tag{5.22}$$

$$J[\psi^{(3)}]_{T,t} = \sum_{j_1,j_2,j_3=0}^{\infty} C_{j_3 j_2 j_1} \Bigg(\zeta_{j_1}^{(i_1)} \zeta_{j_2}^{(i_2)} \zeta_{j_3}^{(i_3)} - \mathbf{1}_{\{i_1=i_2\ne 0\}} \mathbf{1}_{\{j_1=j_2\}} \zeta_{j_3}^{(i_3)} -$$

$$-\mathbf{1}_{\{i_2=i_3\ne 0\}} \mathbf{1}_{\{j_2=j_3\}} \zeta_{j_1}^{(i_1)} - \mathbf{1}_{\{i_1=i_3\ne 0\}} \mathbf{1}_{\{j_1=j_3\}} \zeta_{j_2}^{(i_2)}\Bigg), \tag{5.23}$$

$$J[\psi^{(4)}]_{T,t} = \sum_{j_1,\ldots,j_4=0}^{\infty} C_{j_4\ldots j_1} \Bigg(\prod_{l=1}^{4} \zeta_{j_l}^{(i_l)} -$$

$$-\mathbf{1}_{\{i_1=i_2\ne 0\}} \mathbf{1}_{\{j_1=j_2\}} \zeta_{j_3}^{(i_3)} \zeta_{j_4}^{(i_4)} - \mathbf{1}_{\{i_1=i_3\ne 0\}} \mathbf{1}_{\{j_1=j_3\}} \zeta_{j_2}^{(i_2)} \zeta_{j_4}^{(i_4)} -$$

$$-\mathbf{1}_{\{i_1=i_4\ne 0\}} \mathbf{1}_{\{j_1=j_4\}} \zeta_{j_2}^{(i_2)} \zeta_{j_3}^{(i_3)} - \mathbf{1}_{\{i_2=i_3\ne 0\}} \mathbf{1}_{\{j_2=j_3\}} \zeta_{j_1}^{(i_1)} \zeta_{j_4}^{(i_4)} -$$

$$-\mathbf{1}_{\{i_2=i_4\ne 0\}} \mathbf{1}_{\{j_2=j_4\}} \zeta_{j_1}^{(i_1)} \zeta_{j_3}^{(i_3)} - \mathbf{1}_{\{i_3=i_4\ne 0\}} \mathbf{1}_{\{j_3=j_4\}} \zeta_{j_1}^{(i_1)} \zeta_{j_2}^{(i_2)} +$$

$$+\mathbf{1}_{\{i_1=i_2\ne 0\}} \mathbf{1}_{\{j_1=j_2\}} \mathbf{1}_{\{i_3=i_4\ne 0\}} \mathbf{1}_{\{j_3=j_4\}} +$$

$$+\mathbf{1}_{\{i_1=i_3\ne 0\}} \mathbf{1}_{\{j_1=j_3\}} \mathbf{1}_{\{i_2=i_4\ne 0\}} \mathbf{1}_{\{j_2=j_4\}} +$$

$$+\mathbf{1}_{\{i_1=i_4\ne 0\}} \mathbf{1}_{\{j_1=j_4\}} \mathbf{1}_{\{i_2=i_3\ne 0\}} \mathbf{1}_{\{j_2=j_3\}}\Bigg), \tag{5.24}$$

$$
\begin{gathered}
J[\psi^{(5)}]_{T,t} = \sum_{j_1,\ldots,j_5=0}^{\infty} C_{j_5\ldots j_1}\Biggl(\prod_{l=1}^{5}\zeta_{j_l}^{(i_l)} - \\
-\mathbf{1}_{\{i_1=i_2\ne 0\}}\mathbf{1}_{\{j_1=j_2\}}\zeta_{j_3}^{(i_3)}\zeta_{j_4}^{(i_4)}\zeta_{j_5}^{(i_5)} - \mathbf{1}_{\{i_1=i_3\ne 0\}}\mathbf{1}_{\{j_1=j_3\}}\zeta_{j_2}^{(i_2)}\zeta_{j_4}^{(i_4)}\zeta_{j_5}^{(i_5)} - \\
-\mathbf{1}_{\{i_1=i_4\ne 0\}}\mathbf{1}_{\{j_1=j_4\}}\zeta_{j_2}^{(i_2)}\zeta_{j_3}^{(i_3)}\zeta_{j_5}^{(i_5)} - \mathbf{1}_{\{i_1=i_5\ne 0\}}\mathbf{1}_{\{j_1=j_5\}}\zeta_{j_2}^{(i_2)}\zeta_{j_3}^{(i_3)}\zeta_{j_4}^{(i_4)} - \\
-\mathbf{1}_{\{i_2=i_3\ne 0\}}\mathbf{1}_{\{j_2=j_3\}}\zeta_{j_1}^{(i_1)}\zeta_{j_4}^{(i_4)}\zeta_{j_5}^{(i_5)} - \mathbf{1}_{\{i_2=i_4\ne 0\}}\mathbf{1}_{\{j_2=j_4\}}\zeta_{j_1}^{(i_1)}\zeta_{j_3}^{(i_3)}\zeta_{j_5}^{(i_5)} - \\
-\mathbf{1}_{\{i_2=i_5\ne 0\}}\mathbf{1}_{\{j_2=j_5\}}\zeta_{j_1}^{(i_1)}\zeta_{j_3}^{(i_3)}\zeta_{j_4}^{(i_4)} - \mathbf{1}_{\{i_3=i_4\ne 0\}}\mathbf{1}_{\{j_3=j_4\}}\zeta_{j_1}^{(i_1)}\zeta_{j_2}^{(i_2)}\zeta_{j_5}^{(i_5)} - \\
-\mathbf{1}_{\{i_3=i_5\ne 0\}}\mathbf{1}_{\{j_3=j_5\}}\zeta_{j_1}^{(i_1)}\zeta_{j_2}^{(i_2)}\zeta_{j_4}^{(i_4)} - \mathbf{1}_{\{i_4=i_5\ne 0\}}\mathbf{1}_{\{j_4=j_5\}}\zeta_{j_1}^{(i_1)}\zeta_{j_2}^{(i_2)}\zeta_{j_3}^{(i_3)} + \\
+\mathbf{1}_{\{i_1=i_2\ne 0\}}\mathbf{1}_{\{j_1=j_2\}}\mathbf{1}_{\{i_3=i_4\ne 0\}}\mathbf{1}_{\{j_3=j_4\}}\zeta_{j_5}^{(i_5)} + \\
+\mathbf{1}_{\{i_1=i_2\ne 0\}}\mathbf{1}_{\{j_1=j_2\}}\mathbf{1}_{\{i_3=i_5\ne 0\}}\mathbf{1}_{\{j_3=j_5\}}\zeta_{j_4}^{(i_4)} + \\
+\mathbf{1}_{\{i_1=i_2\ne 0\}}\mathbf{1}_{\{j_1=j_2\}}\mathbf{1}_{\{i_4=i_5\ne 0\}}\mathbf{1}_{\{j_4=j_5\}}\zeta_{j_3}^{(i_3)} + \\
+\mathbf{1}_{\{i_1=i_3\ne 0\}}\mathbf{1}_{\{j_1=j_3\}}\mathbf{1}_{\{i_2=i_4\ne 0\}}\mathbf{1}_{\{j_2=j_4\}}\zeta_{j_5}^{(i_5)} + \\
+\mathbf{1}_{\{i_1=i_3\ne 0\}}\mathbf{1}_{\{j_1=j_3\}}\mathbf{1}_{\{i_2=i_5\ne 0\}}\mathbf{1}_{\{j_2=j_5\}}\zeta_{j_4}^{(i_4)} + \\
+\mathbf{1}_{\{i_1=i_3\ne 0\}}\mathbf{1}_{\{j_1=j_3\}}\mathbf{1}_{\{i_4=i_5\ne 0\}}\mathbf{1}_{\{j_4=j_5\}}\zeta_{j_2}^{(i_2)} + \\
+\mathbf{1}_{\{i_1=i_4\ne 0\}}\mathbf{1}_{\{j_1=j_4\}}\mathbf{1}_{\{i_2=i_3\ne 0\}}\mathbf{1}_{\{j_2=j_3\}}\zeta_{j_5}^{(i_5)} + \\
+\mathbf{1}_{\{i_1=i_4\ne 0\}}\mathbf{1}_{\{j_1=j_4\}}\mathbf{1}_{\{i_2=i_5\ne 0\}}\mathbf{1}_{\{j_2=j_5\}}\zeta_{j_3}^{(i_3)} + \\
+\mathbf{1}_{\{i_1=i_4\ne 0\}}\mathbf{1}_{\{j_1=j_4\}}\mathbf{1}_{\{i_3=i_5\ne 0\}}\mathbf{1}_{\{j_3=j_5\}}\zeta_{j_2}^{(i_2)} + \\
+\mathbf{1}_{\{i_1=i_5\ne 0\}}\mathbf{1}_{\{j_1=j_5\}}\mathbf{1}_{\{i_2=i_3\ne 0\}}\mathbf{1}_{\{j_2=j_3\}}\zeta_{j_4}^{(i_4)} + \\
+\mathbf{1}_{\{i_1=i_5\ne 0\}}\mathbf{1}_{\{j_1=j_5\}}\mathbf{1}_{\{i_2=i_4\ne 0\}}\mathbf{1}_{\{j_2=j_4\}}\zeta_{j_3}^{(i_3)} + \\
+\mathbf{1}_{\{i_1=i_5\ne 0\}}\mathbf{1}_{\{j_1=j_5\}}\mathbf{1}_{\{i_3=i_4\ne 0\}}\mathbf{1}_{\{j_3=j_4\}}\zeta_{j_2}^{(i_2)} + \\
+\mathbf{1}_{\{i_2=i_3\ne 0\}}\mathbf{1}_{\{j_2=j_3\}}\mathbf{1}_{\{i_4=i_5\ne 0\}}\mathbf{1}_{\{j_4=j_5\}}\zeta_{j_1}^{(i_1)} + \\
+\mathbf{1}_{\{i_2=i_4\ne 0\}}\mathbf{1}_{\{j_2=j_4\}}\mathbf{1}_{\{i_3=i_5\ne 0\}}\mathbf{1}_{\{j_3=j_5\}}\zeta_{j_1}^{(i_1)} + \\
+\mathbf{1}_{\{i_2=i_5\ne 0\}}\mathbf{1}_{\{j_2=j_5\}}\mathbf{1}_{\{i_3=i_4\ne 0\}}\mathbf{1}_{\{j_3=j_4\}}\zeta_{j_1}^{(i_1)}\Biggr), \qquad (5.25)
\end{gathered}
$$

$$
J[\psi^{(6)}]_{T,t} = \sum_{j_1,\ldots,j_6=0}^{\infty} C_{j_6\ldots j_1}\Biggl(\prod_{l=1}^{6}\zeta_{j_l}^{(i_l)} -
$$

$$-\mathbf{1}_{\{i_1=i_6\ne 0\}}\mathbf{1}_{\{j_1=j_6\}}\zeta_{j_2}^{(i_2)}\zeta_{j_3}^{(i_3)}\zeta_{j_4}^{(i_4)}\zeta_{j_5}^{(i_5)}-\mathbf{1}_{\{i_2=i_6\ne 0\}}\mathbf{1}_{\{j_2=j_6\}}\zeta_{j_1}^{(i_1)}\zeta_{j_3}^{(i_3)}\zeta_{j_4}^{(i_4)}\zeta_{j_5}^{(i_5)}$$

$$-\mathbf{1}_{\{i_3=i_6\ne 0\}}\mathbf{1}_{\{j_3=j_6\}}\zeta_{j_1}^{(i_1)}\zeta_{j_2}^{(i_2)}\zeta_{j_4}^{(i_4)}\zeta_{j_5}^{(i_5)}-\mathbf{1}_{\{i_4=i_6\ne 0\}}\mathbf{1}_{\{j_4=j_6\}}\zeta_{j_1}^{(i_1)}\zeta_{j_2}^{(i_2)}\zeta_{j_3}^{(i_3)}\zeta_{j_5}^{(i_5)}$$

$$-\mathbf{1}_{\{i_5=i_6\ne 0\}}\mathbf{1}_{\{j_5=j_6\}}\zeta_{j_1}^{(i_1)}\zeta_{j_2}^{(i_2)}\zeta_{j_3}^{(i_3)}\zeta_{j_4}^{(i_4)}-\mathbf{1}_{\{i_1=i_2\ne 0\}}\mathbf{1}_{\{j_1=j_2\}}\zeta_{j_3}^{(i_3)}\zeta_{j_4}^{(i_4)}\zeta_{j_5}^{(i_5)}\zeta_{j_6}^{(i_6)}$$

$$-\mathbf{1}_{\{i_1=i_3\ne 0\}}\mathbf{1}_{\{j_1=j_3\}}\zeta_{j_2}^{(i_2)}\zeta_{j_4}^{(i_4)}\zeta_{j_5}^{(i_5)}\zeta_{j_6}^{(i_6)}-\mathbf{1}_{\{i_1=i_4\ne 0\}}\mathbf{1}_{\{j_1=j_4\}}\zeta_{j_2}^{(i_2)}\zeta_{j_3}^{(i_3)}\zeta_{j_5}^{(i_5)}\zeta_{j_6}^{(i_6)}$$

$$-\mathbf{1}_{\{i_1=i_5\ne 0\}}\mathbf{1}_{\{j_1=j_5\}}\zeta_{j_2}^{(i_2)}\zeta_{j_3}^{(i_3)}\zeta_{j_4}^{(i_4)}\zeta_{j_6}^{(i_6)}-\mathbf{1}_{\{i_2=i_3\ne 0\}}\mathbf{1}_{\{j_2=j_3\}}\zeta_{j_1}^{(i_1)}\zeta_{j_4}^{(i_4)}\zeta_{j_5}^{(i_5)}\zeta_{j_6}^{(i_6)}$$

$$-\mathbf{1}_{\{i_2=i_4\ne 0\}}\mathbf{1}_{\{j_2=j_4\}}\zeta_{j_1}^{(i_1)}\zeta_{j_3}^{(i_3)}\zeta_{j_5}^{(i_5)}\zeta_{j_6}^{(i_6)}-\mathbf{1}_{\{i_2=i_5\ne 0\}}\mathbf{1}_{\{j_2=j_5\}}\zeta_{j_1}^{(i_1)}\zeta_{j_3}^{(i_3)}\zeta_{j_4}^{(i_4)}\zeta_{j_6}^{(i_6)}$$

$$-\mathbf{1}_{\{i_3=i_4\ne 0\}}\mathbf{1}_{\{j_3=j_4\}}\zeta_{j_1}^{(i_1)}\zeta_{j_2}^{(i_2)}\zeta_{j_5}^{(i_5)}\zeta_{j_6}^{(i_6)}-\mathbf{1}_{\{i_3=i_5\ne 0\}}\mathbf{1}_{\{j_3=j_5\}}\zeta_{j_1}^{(i_1)}\zeta_{j_2}^{(i_2)}\zeta_{j_4}^{(i_4)}\zeta_{j_6}^{(i_6)}$$

$$-\mathbf{1}_{\{i_4=i_5\ne 0\}}\mathbf{1}_{\{j_4=j_5\}}\zeta_{j_1}^{(i_1)}\zeta_{j_2}^{(i_2)}\zeta_{j_3}^{(i_3)}\zeta_{j_6}^{(i_6)}$$

$$+\mathbf{1}_{\{i_1=i_2\ne 0\}}\mathbf{1}_{\{j_1=j_2\}}\mathbf{1}_{\{i_3=i_4\ne 0\}}\mathbf{1}_{\{j_3=j_4\}}\zeta_{j_5}^{(i_5)}\zeta_{j_6}^{(i_6)}$$

$$+\mathbf{1}_{\{i_1=i_2\ne 0\}}\mathbf{1}_{\{j_1=j_2\}}\mathbf{1}_{\{i_3=i_5\ne 0\}}\mathbf{1}_{\{j_3=j_5\}}\zeta_{j_4}^{(i_4)}\zeta_{j_6}^{(i_6)}$$

$$+\mathbf{1}_{\{i_1=i_2\ne 0\}}\mathbf{1}_{\{j_1=j_2\}}\mathbf{1}_{\{i_4=i_5\ne 0\}}\mathbf{1}_{\{j_4=j_5\}}\zeta_{j_3}^{(i_3)}\zeta_{j_6}^{(i_6)}$$

$$+\mathbf{1}_{\{i_1=i_3\ne 0\}}\mathbf{1}_{\{j_1=j_3\}}\mathbf{1}_{\{i_2=i_4\ne 0\}}\mathbf{1}_{\{j_2=j_4\}}\zeta_{j_5}^{(i_5)}\zeta_{j_6}^{(i_6)}$$

$$+\mathbf{1}_{\{i_1=i_3\ne 0\}}\mathbf{1}_{\{j_1=j_3\}}\mathbf{1}_{\{i_2=i_5\ne 0\}}\mathbf{1}_{\{j_2=j_5\}}\zeta_{j_4}^{(i_4)}\zeta_{j_6}^{(i_6)}$$

$$+\mathbf{1}_{\{i_1=i_3\ne 0\}}\mathbf{1}_{\{j_1=j_3\}}\mathbf{1}_{\{i_4=i_5\ne 0\}}\mathbf{1}_{\{j_4=j_5\}}\zeta_{j_2}^{(i_2)}\zeta_{j_6}^{(i_6)}$$

$$+\mathbf{1}_{\{i_1=i_4\ne 0\}}\mathbf{1}_{\{j_1=j_4\}}\mathbf{1}_{\{i_2=i_3\ne 0\}}\mathbf{1}_{\{j_2=j_3\}}\zeta_{j_5}^{(i_5)}\zeta_{j_6}^{(i_6)}$$

$$+\mathbf{1}_{\{i_1=i_4\ne 0\}}\mathbf{1}_{\{j_1=j_4\}}\mathbf{1}_{\{i_2=i_5\ne 0\}}\mathbf{1}_{\{j_2=j_5\}}\zeta_{j_3}^{(i_3)}\zeta_{j_6}^{(i_6)}$$

$$+\mathbf{1}_{\{i_1=i_4\ne 0\}}\mathbf{1}_{\{j_1=j_4\}}\mathbf{1}_{\{i_3=i_5\ne 0\}}\mathbf{1}_{\{j_3=j_5\}}\zeta_{j_2}^{(i_2)}\zeta_{j_6}^{(i_6)}$$

$$+\mathbf{1}_{\{i_1=i_5\ne 0\}}\mathbf{1}_{\{j_1=j_5\}}\mathbf{1}_{\{i_2=i_3\ne 0\}}\mathbf{1}_{\{j_2=j_3\}}\zeta_{j_4}^{(i_4)}\zeta_{j_6}^{(i_6)}$$

$$+\mathbf{1}_{\{i_1=i_5\ne 0\}}\mathbf{1}_{\{j_1=j_5\}}\mathbf{1}_{\{i_2=i_4\ne 0\}}\mathbf{1}_{\{j_2=j_4\}}\zeta_{j_3}^{(i_3)}\zeta_{j_6}^{(i_6)}$$

$$+\mathbf{1}_{\{i_1=i_5\ne 0\}}\mathbf{1}_{\{j_1=j_5\}}\mathbf{1}_{\{i_3=i_4\ne 0\}}\mathbf{1}_{\{j_3=j_4\}}\zeta_{j_2}^{(i_2)}\zeta_{j_6}^{(i_6)}$$

$$+\mathbf{1}_{\{i_2=i_3\ne 0\}}\mathbf{1}_{\{j_2=j_3\}}\mathbf{1}_{\{i_4=i_5\ne 0\}}\mathbf{1}_{\{j_4=j_5\}}\zeta_{j_1}^{(i_1)}\zeta_{j_6}^{(i_6)}$$

$$+\mathbf{1}_{\{i_2=i_4\ne 0\}}\mathbf{1}_{\{j_2=j_4\}}\mathbf{1}_{\{i_3=i_5\ne 0\}}\mathbf{1}_{\{j_3=j_5\}}\zeta_{j_1}^{(i_1)}\zeta_{j_6}^{(i_6)}$$

$$+\mathbf{1}_{\{i_2=i_5\ne 0\}}\mathbf{1}_{\{j_2=j_5\}}\mathbf{1}_{\{i_3=i_4\ne 0\}}\mathbf{1}_{\{j_3=j_4\}}\zeta_{j_1}^{(i_1)}\zeta_{j_6}^{(i_6)}$$

$$+\mathbf{1}_{\{i_6=i_1\ne 0\}}\mathbf{1}_{\{j_6=j_1\}}\mathbf{1}_{\{i_3=i_4\ne 0\}}\mathbf{1}_{\{j_3=j_4\}}\zeta_{j_2}^{(i_2)}\zeta_{j_5}^{(i_5)}$$

$$+\mathbf{1}_{\{i_6=i_1\ne 0\}}\mathbf{1}_{\{j_6=j_1\}}\mathbf{1}_{\{i_3=i_5\ne 0\}}\mathbf{1}_{\{j_3=j_5\}}\zeta_{j_2}^{(i_2)}\zeta_{j_4}^{(i_4)}$$
$$+\mathbf{1}_{\{i_6=i_1\ne 0\}}\mathbf{1}_{\{j_6=j_1\}}\mathbf{1}_{\{i_2=i_5\ne 0\}}\mathbf{1}_{\{j_2=j_5\}}\zeta_{j_3}^{(i_3)}\zeta_{j_4}^{(i_4)}$$
$$+\mathbf{1}_{\{i_6=i_1\ne 0\}}\mathbf{1}_{\{j_6=j_1\}}\mathbf{1}_{\{i_2=i_4\ne 0\}}\mathbf{1}_{\{j_2=j_4\}}\zeta_{j_3}^{(i_3)}\zeta_{j_5}^{(i_5)}$$
$$+\mathbf{1}_{\{i_6=i_1\ne 0\}}\mathbf{1}_{\{j_6=j_1\}}\mathbf{1}_{\{i_4=i_5\ne 0\}}\mathbf{1}_{\{j_4=j_5\}}\zeta_{j_2}^{(i_2)}\zeta_{j_3}^{(i_3)}$$
$$+\mathbf{1}_{\{i_6=i_1\ne 0\}}\mathbf{1}_{\{j_6=j_1\}}\mathbf{1}_{\{i_2=i_3\ne 0\}}\mathbf{1}_{\{j_2=j_3\}}\zeta_{j_4}^{(i_4)}\zeta_{j_5}^{(i_5)}$$
$$+\mathbf{1}_{\{i_6=i_2\ne 0\}}\mathbf{1}_{\{j_6=j_2\}}\mathbf{1}_{\{i_3=i_5\ne 0\}}\mathbf{1}_{\{j_3=j_5\}}\zeta_{j_1}^{(i_1)}\zeta_{j_4}^{(i_4)}$$
$$+\mathbf{1}_{\{i_6=i_2\ne 0\}}\mathbf{1}_{\{j_6=j_2\}}\mathbf{1}_{\{i_4=i_5\ne 0\}}\mathbf{1}_{\{j_4=j_5\}}\zeta_{j_1}^{(i_1)}\zeta_{j_3}^{(i_3)}$$
$$+\mathbf{1}_{\{i_6=i_2\ne 0\}}\mathbf{1}_{\{j_6=j_2\}}\mathbf{1}_{\{i_3=i_4\ne 0\}}\mathbf{1}_{\{j_3=j_4\}}\zeta_{j_1}^{(i_1)}\zeta_{j_5}^{(i_5)}$$
$$+\mathbf{1}_{\{i_6=i_2\ne 0\}}\mathbf{1}_{\{j_6=j_2\}}\mathbf{1}_{\{i_1=i_5\ne 0\}}\mathbf{1}_{\{j_1=j_5\}}\zeta_{j_3}^{(i_3)}\zeta_{j_4}^{(i_4)}$$
$$+\mathbf{1}_{\{i_6=i_2\ne 0\}}\mathbf{1}_{\{j_6=j_2\}}\mathbf{1}_{\{i_1=i_4\ne 0\}}\mathbf{1}_{\{j_1=j_4\}}\zeta_{j_3}^{(i_3)}\zeta_{j_5}^{(i_5)}$$
$$+\mathbf{1}_{\{i_6=i_2\ne 0\}}\mathbf{1}_{\{j_6=j_2\}}\mathbf{1}_{\{i_1=i_3\ne 0\}}\mathbf{1}_{\{j_1=j_3\}}\zeta_{j_4}^{(i_4)}\zeta_{j_5}^{(i_5)}$$
$$+\mathbf{1}_{\{i_6=i_3\ne 0\}}\mathbf{1}_{\{j_6=j_3\}}\mathbf{1}_{\{i_2=i_5\ne 0\}}\mathbf{1}_{\{j_2=j_5\}}\zeta_{j_1}^{(i_1)}\zeta_{j_4}^{(i_4)}$$
$$+\mathbf{1}_{\{i_6=i_3\ne 0\}}\mathbf{1}_{\{j_6=j_3\}}\mathbf{1}_{\{i_4=i_5\ne 0\}}\mathbf{1}_{\{j_4=j_5\}}\zeta_{j_1}^{(i_1)}\zeta_{j_2}^{(i_2)}$$
$$+\mathbf{1}_{\{i_6=i_3\ne 0\}}\mathbf{1}_{\{j_6=j_3\}}\mathbf{1}_{\{i_2=i_4\ne 0\}}\mathbf{1}_{\{j_2=j_4\}}\zeta_{j_1}^{(i_1)}\zeta_{j_5}^{(i_5)}$$
$$+\mathbf{1}_{\{i_6=i_3\ne 0\}}\mathbf{1}_{\{j_6=j_3\}}\mathbf{1}_{\{i_1=i_5\ne 0\}}\mathbf{1}_{\{j_1=j_5\}}\zeta_{j_2}^{(i_2)}\zeta_{j_4}^{(i_4)}$$
$$+\mathbf{1}_{\{i_6=i_3\ne 0\}}\mathbf{1}_{\{j_6=j_3\}}\mathbf{1}_{\{i_1=i_4\ne 0\}}\mathbf{1}_{\{j_1=j_4\}}\zeta_{j_2}^{(i_2)}\zeta_{j_5}^{(i_5)}$$
$$+\mathbf{1}_{\{i_6=i_3\ne 0\}}\mathbf{1}_{\{j_6=j_3\}}\mathbf{1}_{\{i_1=i_2\ne 0\}}\mathbf{1}_{\{j_1=j_2\}}\zeta_{j_4}^{(i_4)}\zeta_{j_5}^{(i_5)}$$
$$+\mathbf{1}_{\{i_6=i_4\ne 0\}}\mathbf{1}_{\{j_6=j_4\}}\mathbf{1}_{\{i_3=i_5\ne 0\}}\mathbf{1}_{\{j_3=j_5\}}\zeta_{j_1}^{(i_1)}\zeta_{j_2}^{(i_2)}$$
$$+\mathbf{1}_{\{i_6=i_4\ne 0\}}\mathbf{1}_{\{j_6=j_4\}}\mathbf{1}_{\{i_2=i_5\ne 0\}}\mathbf{1}_{\{j_2=j_5\}}\zeta_{j_1}^{(i_1)}\zeta_{j_3}^{(i_3)}$$
$$+\mathbf{1}_{\{i_6=i_4\ne 0\}}\mathbf{1}_{\{j_6=j_4\}}\mathbf{1}_{\{i_2=i_3\ne 0\}}\mathbf{1}_{\{j_2=j_3\}}\zeta_{j_1}^{(i_1)}\zeta_{j_5}^{(i_5)}$$
$$+\mathbf{1}_{\{i_6=i_4\ne 0\}}\mathbf{1}_{\{j_6=j_4\}}\mathbf{1}_{\{i_1=i_5\ne 0\}}\mathbf{1}_{\{j_1=j_5\}}\zeta_{j_2}^{(i_2)}\zeta_{j_3}^{(i_3)}$$
$$+\mathbf{1}_{\{i_6=i_4\ne 0\}}\mathbf{1}_{\{j_6=j_4\}}\mathbf{1}_{\{i_1=i_3\ne 0\}}\mathbf{1}_{\{j_1=j_3\}}\zeta_{j_2}^{(i_2)}\zeta_{j_5}^{(i_5)}$$
$$+\mathbf{1}_{\{i_6=i_4\ne 0\}}\mathbf{1}_{\{j_6=j_4\}}\mathbf{1}_{\{i_1=i_2\ne 0\}}\mathbf{1}_{\{j_1=j_2\}}\zeta_{j_3}^{(i_3)}\zeta_{j_5}^{(i_5)}$$
$$+\mathbf{1}_{\{i_6=i_5\ne 0\}}\mathbf{1}_{\{j_6=j_5\}}\mathbf{1}_{\{i_3=i_4\ne 0\}}\mathbf{1}_{\{j_3=j_4\}}\zeta_{j_1}^{(i_1)}\zeta_{j_2}^{(i_2)}$$

$$
\begin{aligned}
&+\mathbf{1}_{\{i_6=i_5\ne 0\}}\mathbf{1}_{\{j_6=j_5\}}\mathbf{1}_{\{i_2=i_4\ne 0\}}\mathbf{1}_{\{j_2=j_4\}}\zeta_{j_1}^{(i_1)}\zeta_{j_3}^{(i_3)}\\
&+\mathbf{1}_{\{i_6=i_5\ne 0\}}\mathbf{1}_{\{j_6=j_5\}}\mathbf{1}_{\{i_2=i_3\ne 0\}}\mathbf{1}_{\{j_2=j_3\}}\zeta_{j_1}^{(i_1)}\zeta_{j_4}^{(i_4)}\\
&+\mathbf{1}_{\{i_6=i_5\ne 0\}}\mathbf{1}_{\{j_6=j_5\}}\mathbf{1}_{\{i_1=i_4\ne 0\}}\mathbf{1}_{\{j_1=j_4\}}\zeta_{j_2}^{(i_2)}\zeta_{j_3}^{(i_3)}\\
&+\mathbf{1}_{\{i_6=i_5\ne 0\}}\mathbf{1}_{\{j_6=j_5\}}\mathbf{1}_{\{i_1=i_3\ne 0\}}\mathbf{1}_{\{j_1=j_3\}}\zeta_{j_2}^{(i_2)}\zeta_{j_4}^{(i_4)}\\
&+\mathbf{1}_{\{i_6=i_5\ne 0\}}\mathbf{1}_{\{j_6=j_5\}}\mathbf{1}_{\{i_1=i_2\ne 0\}}\mathbf{1}_{\{j_1=j_2\}}\zeta_{j_3}^{(i_3)}\zeta_{j_4}^{(i_4)}\\
&-\mathbf{1}_{\{i_6=i_1\ne 0\}}\mathbf{1}_{\{j_6=j_1\}}\mathbf{1}_{\{i_2=i_5\ne 0\}}\mathbf{1}_{\{j_2=j_5\}}\mathbf{1}_{\{i_3=i_4\ne 0\}}\mathbf{1}_{\{j_3=j_4\}}\\
&-\mathbf{1}_{\{i_6=i_1\ne 0\}}\mathbf{1}_{\{j_6=j_1\}}\mathbf{1}_{\{i_2=i_4\ne 0\}}\mathbf{1}_{\{j_2=j_4\}}\mathbf{1}_{\{i_3=i_5\ne 0\}}\mathbf{1}_{\{j_3=j_5\}}\\
&-\mathbf{1}_{\{i_6=i_1\ne 0\}}\mathbf{1}_{\{j_6=j_1\}}\mathbf{1}_{\{i_2=i_3\ne 0\}}\mathbf{1}_{\{j_2=j_3\}}\mathbf{1}_{\{i_4=i_5\ne 0\}}\mathbf{1}_{\{j_4=j_5\}}\\
&-\mathbf{1}_{\{i_6=i_2\ne 0\}}\mathbf{1}_{\{j_6=j_2\}}\mathbf{1}_{\{i_1=i_5\ne 0\}}\mathbf{1}_{\{j_1=j_5\}}\mathbf{1}_{\{i_3=i_4\ne 0\}}\mathbf{1}_{\{j_3=j_4\}}\\
&-\mathbf{1}_{\{i_6=i_2\ne 0\}}\mathbf{1}_{\{j_6=j_2\}}\mathbf{1}_{\{i_1=i_4\ne 0\}}\mathbf{1}_{\{j_1=j_4\}}\mathbf{1}_{\{i_3=i_5\ne 0\}}\mathbf{1}_{\{j_3=j_5\}}\\
&-\mathbf{1}_{\{i_6=i_2\ne 0\}}\mathbf{1}_{\{j_6=j_2\}}\mathbf{1}_{\{i_1=i_3\ne 0\}}\mathbf{1}_{\{j_1=j_3\}}\mathbf{1}_{\{i_4=i_5\ne 0\}}\mathbf{1}_{\{j_4=j_5\}}\\
&-\mathbf{1}_{\{i_6=i_3\ne 0\}}\mathbf{1}_{\{j_6=j_3\}}\mathbf{1}_{\{i_1=i_5\ne 0\}}\mathbf{1}_{\{j_1=j_5\}}\mathbf{1}_{\{i_2=i_4\ne 0\}}\mathbf{1}_{\{j_2=j_4\}}\\
&-\mathbf{1}_{\{i_6=i_3\ne 0\}}\mathbf{1}_{\{j_6=j_3\}}\mathbf{1}_{\{i_1=i_4\ne 0\}}\mathbf{1}_{\{j_1=j_4\}}\mathbf{1}_{\{i_2=i_5\ne 0\}}\mathbf{1}_{\{j_2=j_5\}}\\
&-\mathbf{1}_{\{i_3=i_6\ne 0\}}\mathbf{1}_{\{j_3=j_6\}}\mathbf{1}_{\{i_1=i_2\ne 0\}}\mathbf{1}_{\{j_1=j_2\}}\mathbf{1}_{\{i_4=i_5\ne 0\}}\mathbf{1}_{\{j_4=j_5\}}\\
&-\mathbf{1}_{\{i_6=i_4\ne 0\}}\mathbf{1}_{\{j_6=j_4\}}\mathbf{1}_{\{i_1=i_5\ne 0\}}\mathbf{1}_{\{j_1=j_5\}}\mathbf{1}_{\{i_2=i_3\ne 0\}}\mathbf{1}_{\{j_2=j_3\}}\\
&-\mathbf{1}_{\{i_6=i_4\ne 0\}}\mathbf{1}_{\{j_6=j_4\}}\mathbf{1}_{\{i_1=i_3\ne 0\}}\mathbf{1}_{\{j_1=j_3\}}\mathbf{1}_{\{i_2=i_5\ne 0\}}\mathbf{1}_{\{j_2=j_5\}}\\
&-\mathbf{1}_{\{i_6=i_4\ne 0\}}\mathbf{1}_{\{j_6=j_4\}}\mathbf{1}_{\{i_1=i_2\ne 0\}}\mathbf{1}_{\{j_1=j_2\}}\mathbf{1}_{\{i_3=i_5\ne 0\}}\mathbf{1}_{\{j_3=j_5\}}\\
&-\mathbf{1}_{\{i_6=i_5\ne 0\}}\mathbf{1}_{\{j_6=j_5\}}\mathbf{1}_{\{i_1=i_4\ne 0\}}\mathbf{1}_{\{j_1=j_4\}}\mathbf{1}_{\{i_2=i_3\ne 0\}}\mathbf{1}_{\{j_2=j_3\}}\\
&-\mathbf{1}_{\{i_6=i_5\ne 0\}}\mathbf{1}_{\{j_6=j_5\}}\mathbf{1}_{\{i_1=i_2\ne 0\}}\mathbf{1}_{\{j_1=j_2\}}\mathbf{1}_{\{i_3=i_4\ne 0\}}\mathbf{1}_{\{j_3=j_4\}}\\
&-\mathbf{1}_{\{i_6=i_5\ne 0\}}\mathbf{1}_{\{j_6=j_5\}}\mathbf{1}_{\{i_1=i_3\ne 0\}}\mathbf{1}_{\{j_1=j_3\}}\mathbf{1}_{\{i_2=i_4\ne 0\}}\mathbf{1}_{\{j_2=j_4\}}\Bigg),
\end{aligned}
\tag{5.26}
$$

$$
\begin{aligned}
J[\psi^{(7)}]_{T,t}=\sum_{j_1,\ldots,j_7=0}^{\infty}C_{j_7\ldots j_1}\Bigg(\prod_{l=1}^{7}\zeta_{j_l}^{(i_l)}-\\
-\mathbf{1}_{\{i_1=i_6\ne 0,j_1=j_6\}}\prod_{\substack{l=1\\ l\ne 1,6}}^{7}\zeta_{j_l}^{(i_l)}-\mathbf{1}_{\{i_2=i_6\ne 0,j_2=j_6\}}\prod_{\substack{l=1\\ l\ne 2,6}}^{7}\zeta_{j_l}^{(i_l)}-\mathbf{1}_{\{i_3=i_6\ne 0,j_3=j_6\}}\prod_{\substack{l=1\\ l\ne 3,6}}^{7}\zeta_{j_l}^{(i_l)}\\
-\mathbf{1}_{\{i_4=i_6\ne 0,j_4=j_6\}}\prod_{\substack{l=1\\ l\ne 4,6}}^{7}\zeta_{j_l}^{(i_l)}-\mathbf{1}_{\{i_5=i_6\ne 0,j_5=j_6\}}\prod_{\substack{l=1\\ l\ne 5,6}}^{7}\zeta_{j_l}^{(i_l)}-\mathbf{1}_{\{i_1=i_2\ne 0,j_1=j_2\}}\prod_{\substack{l=1\\ l\ne 1,2}}^{7}\zeta_{j_l}^{(i_l)}
\end{aligned}
$$

$$-\mathbf{1}_{\{i_1=i_3\ne 0,j_1=j_3\}}\prod_{\substack{l=1\\ l\ne 1,3}}^{7}\zeta_{j_l}^{(i_l)}-\mathbf{1}_{\{i_1=i_4\ne 0,j_1=j_4\}}\prod_{\substack{l=1\\ l\ne 1,4}}^{7}\zeta_{j_l}^{(i_l)}-\mathbf{1}_{\{i_1=i_5\ne 0,j_1=j_5\}}\prod_{\substack{l=1\\ l\ne 1,5}}^{7}\zeta_{j_l}^{(i_l)}$$

$$-\mathbf{1}_{\{i_2=i_3\ne 0,j_2=j_3\}}\prod_{\substack{l=1\\ l\ne 2,3}}^{7}\zeta_{j_l}^{(i_l)}-\mathbf{1}_{\{i_2=i_4\ne 0,j_2=j_4\}}\prod_{\substack{l=1\\ l\ne 2,4}}^{7}\zeta_{j_l}^{(i_l)}-\mathbf{1}_{\{i_2=i_5\ne 0,j_2=j_5\}}\prod_{\substack{l=1\\ l\ne 2,5}}^{7}\zeta_{j_l}^{(i_l)}$$

$$-\mathbf{1}_{\{i_3=i_4\ne 0,j_3=j_4\}}\prod_{\substack{l=1\\ l\ne 3,4}}^{7}\zeta_{j_l}^{(i_l)}-\mathbf{1}_{\{i_3=i_5\ne 0,j_3=j_5\}}\prod_{\substack{l=1\\ l\ne 3,5}}^{7}\zeta_{j_l}^{(i_l)}-\mathbf{1}_{\{i_4=i_5\ne 0,j_4=j_5\}}\prod_{\substack{l=1\\ l\ne 4,5}}^{7}\zeta_{j_l}^{(i_l)}$$

$$-\mathbf{1}_{\{i_7=i_1\ne 0,j_7=j_1\}}\prod_{\substack{l=1\\ l\ne 1,7}}^{7}\zeta_{j_l}^{(i_l)}-\mathbf{1}_{\{i_7=i_2\ne 0,j_7=j_2\}}\prod_{\substack{l=1\\ l\ne 2,7}}^{7}\zeta_{j_l}^{(i_l)}-\mathbf{1}_{\{i_7=i_3\ne 0,j_7=j_3\}}\prod_{\substack{l=1\\ l\ne 3,7}}^{7}\zeta_{j_l}^{(i_l)}$$

$$-\mathbf{1}_{\{i_7=i_4\ne 0,j_7=j_4\}}\prod_{\substack{l=1\\ l\ne 4,7}}^{7}\zeta_{j_l}^{(i_l)}-\mathbf{1}_{\{i_7=i_5\ne 0,j_7=j_5\}}\prod_{\substack{l=1\\ l\ne 7,5}}^{7}\zeta_{j_l}^{(i_l)}-\mathbf{1}_{\{i_7=i_6\ne 0,j_7=j_6\}}\prod_{\substack{l=1\\ l\ne 7,6}}^{7}\zeta_{j_l}^{(i_l)}$$

$$+\mathbf{1}_{\{i_1=i_2\ne 0,j_1=j_2,i_3=i_4\ne 0,j_3=j_4\}}\prod_{l=5,6,7}\zeta_{j_l}^{(i_l)}+\mathbf{1}_{\{i_1=i_2\ne 0,j_1=j_2,i_3=i_5\ne 0,j_3=j_5\}}\prod_{l=4,6,7}\zeta_{j_l}^{(i_l)}$$

$$+\mathbf{1}_{\{i_1=i_2\ne 0,j_1=j_2,i_4=i_5\ne 0,j_4=j_5\}}\prod_{l=3,6,7}\zeta_{j_l}^{(i_l)}+\mathbf{1}_{\{i_1=i_3\ne 0,j_1=j_3,i_2=i_4\ne 0,j_2=j_4\}}\prod_{l=5,6,7}\zeta_{j_l}^{(i_l)}$$

$$+\mathbf{1}_{\{i_1=i_3\ne 0,j_1=j_3,i_2=i_5\ne 0,j_2=j_5\}}\prod_{l=4,6,7}\zeta_{j_l}^{(i_l)}+\mathbf{1}_{\{i_1=i_3\ne 0,j_1=j_3,i_4=i_5\ne 0,j_4=j_5\}}\prod_{l=2,6,7}\zeta_{j_l}^{(i_l)}$$

$$+\mathbf{1}_{\{i_1=i_4\ne 0,j_1=j_4,i_2=i_3\ne 0,j_2=j_3\}}\prod_{l=5,6,7}\zeta_{j_l}^{(i_l)}+\mathbf{1}_{\{i_1=i_4\ne 0,j_1=j_4,i_2=i_5\ne 0,j_2=j_5\}}\prod_{l=3,6,7}\zeta_{j_l}^{(i_l)}$$

$$+\mathbf{1}_{\{i_1=i_4\ne 0,j_1=j_4,i_3=i_5\ne 0,j_3=j_5\}}\prod_{l=2,6,7}\zeta_{j_l}^{(i_l)}+\mathbf{1}_{\{i_1=i_5\ne 0,j_1=j_5,i_2=i_3\ne 0,j_2=j_3\}}\prod_{l=4,6,7}\zeta_{j_l}^{(i_l)}$$

$$+\mathbf{1}_{\{i_1=i_5\ne 0,j_1=j_5,i_2=i_4\ne 0,j_2=j_4\}}\prod_{l=3,6,7}\zeta_{j_l}^{(i_l)}+\mathbf{1}_{\{i_1=i_5\ne 0,j_1=j_5,i_3=i_4\ne 0,j_3=j_4\}}\prod_{l=2,6,7}\zeta_{j_l}^{(i_l)}$$

$$+\mathbf{1}_{\{i_2=i_3\ne 0,j_2=j_3,i_4=i_5\ne 0,j_4=j_5\}}\prod_{l=1,6,7}\zeta_{j_l}^{(i_l)}+\mathbf{1}_{\{i_2=i_4\ne 0,j_2=j_4,i_3=i_5\ne 0,j_3=j_5\}}\prod_{l=1,6,7}\zeta_{j_l}^{(i_l)}$$

$$+\mathbf{1}_{\{i_2=i_5\ne 0,j_2=j_5,i_3=i_4\ne 0,j_3=j_4\}}\prod_{l=1,6,7}\zeta_{j_l}^{(i_l)}+\mathbf{1}_{\{i_6=i_1\ne 0,j_6=j_1,i_3=i_4\ne 0,j_3=j_4\}}\prod_{l=2,5,7}\zeta_{j_l}^{(i_l)}$$

$$+\mathbf{1}_{\{i_6=i_1\ne 0,j_6=j_1,i_3=i_5\ne 0,j_3=j_5\}}\prod_{l=2,4,7}\zeta_{j_l}^{(i_l)}+\mathbf{1}_{\{i_6=i_1\ne 0,j_6=j_1,i_2=i_5\ne 0,j_2=j_5\}}\prod_{l=3,4,7}\zeta_{j_l}^{(i_l)}$$

$$+\mathbf{1}_{\{i_6=i_1\ne 0,j_6=j_1,i_2=i_4\ne 0,j_2=j_4\}}\prod_{l=3,5,7}\zeta_{j_l}^{(i_l)}+\mathbf{1}_{\{i_6=i_1\ne 0,j_6=j_1,i_4=i_5\ne 0,j_4=j_5\}}\prod_{l=2,3,7}\zeta_{j_l}^{(i_l)}$$

$$+\mathbf{1}_{\{i_6=i_1\neq 0,j_6=j_1,i_2=i_3\neq 0,j_2=j_3\}}\prod_{l=4,5,7}\zeta_{j_l}^{(i_l)}+\mathbf{1}_{\{i_6=i_2\neq 0,j_6=j_2,i_3=i_5\neq 0,j_3=j_5\}}\prod_{l=1,4,7}\zeta_{j_l}^{(i_l)}$$

$$+\mathbf{1}_{\{i_6=i_2\neq 0,j_6=j_2,i_4=i_5\neq 0,j_4=j_5\}}\prod_{l=1,3,7}\zeta_{j_l}^{(i_l)}+\mathbf{1}_{\{i_6=i_2\neq 0,j_6=j_2,i_3=i_4\neq 0,j_3=j_4\}}\prod_{l=1,5,7}\zeta_{j_l}^{(i_l)}$$

$$+\mathbf{1}_{\{i_6=i_2\neq 0,j_6=j_2,i_1=i_5\neq 0,j_1=j_5\}}\prod_{l=3,4,7}\zeta_{j_l}^{(i_l)}+\mathbf{1}_{\{i_6=i_2\neq 0,j_6=j_2,i_1=i_4\neq 0,j_1=j_4\}}\prod_{l=3,5,7}\zeta_{j_l}^{(i_l)}$$

$$+\mathbf{1}_{\{i_6=i_2\neq 0,j_6=j_2,i_1=i_3\neq 0,j_1=j_3\}}\prod_{l=4,5,7}\zeta_{j_l}^{(i_l)}+\mathbf{1}_{\{i_6=i_3\neq 0,j_6=j_3,i_2=i_5\neq 0,j_2=j_5\}}\prod_{l=1,4,7}\zeta_{j_l}^{(i_l)}$$

$$+\mathbf{1}_{\{i_6=i_3\neq 0,j_6=j_3,i_4=i_5\neq 0,j_4=j_5\}}\prod_{l=1,2,7}\zeta_{j_l}^{(i_l)}+\mathbf{1}_{\{i_6=i_3\neq 0,j_6=j_3,i_2=i_4\neq 0,j_2=j_4\}}\prod_{l=1,5,7}\zeta_{j_l}^{(i_l)}$$

$$+\mathbf{1}_{\{i_6=i_3\neq 0,j_6=j_3,i_1=i_5\neq 0,j_1=j_5\}}\prod_{l=2,4,7}\zeta_{j_l}^{(i_l)}+\mathbf{1}_{\{i_6=i_3\neq 0,j_6=j_3,i_1=i_4\neq 0,j_1=j_4\}}\prod_{l=2,5,7}\zeta_{j_l}^{(i_l)}$$

$$+\mathbf{1}_{\{i_6=i_3\neq 0,j_6=j_3,i_1=i_2\neq 0,j_1=j_2\}}\prod_{l=4,5,7}\zeta_{j_l}^{(i_l)}+\mathbf{1}_{\{i_6=i_4\neq 0,j_6=j_4,i_3=i_5\neq 0,j_3=j_5\}}\prod_{l=1,2,7}\zeta_{j_l}^{(i_l)}$$

$$+\mathbf{1}_{\{i_6=i_4\neq 0,j_6=j_4,i_2=i_5\neq 0,j_2=j_5\}}\prod_{l=1,3,7}\zeta_{j_l}^{(i_l)}+\mathbf{1}_{\{i_6=i_4\neq 0,j_6=j_4,i_2=i_3\neq 0,j_2=j_3\}}\prod_{l=1,5,7}\zeta_{j_l}^{(i_l)}$$

$$+\mathbf{1}_{\{i_6=i_4\neq 0,j_6=j_4,i_1=i_5\neq 0,j_1=j_5\}}\prod_{l=2,3,7}\zeta_{j_l}^{(i_l)}+\mathbf{1}_{\{i_6=i_4\neq 0,j_6=j_4,i_1=i_3\neq 0,j_1=j_3\}}\prod_{l=2,5,7}\zeta_{j_l}^{(i_l)}$$

$$+\mathbf{1}_{\{i_6=i_4\neq 0,j_6=j_4,i_1=i_2\neq 0,j_1=j_2\}}\prod_{l=3,5,7}\zeta_{j_l}^{(i_l)}+\mathbf{1}_{\{i_6=i_5\neq 0,j_6=j_5,i_3=i_4\neq 0,j_3=j_4\}}\prod_{l=1,2,7}\zeta_{j_l}^{(i_l)}$$

$$+\mathbf{1}_{\{i_6=i_5\neq 0,j_6=j_5,i_2=i_4\neq 0,j_2=j_4\}}\prod_{l=1,3,7}\zeta_{j_l}^{(i_l)}+\mathbf{1}_{\{i_6=i_5\neq 0,j_6=j_5,i_2=i_3\neq 0,j_2=j_3\}}\prod_{l=1,4,7}\zeta_{j_l}^{(i_l)}$$

$$+\mathbf{1}_{\{i_6=i_5\neq 0,j_6=j_5,i_1=i_4\neq 0,j_1=j_4\}}\prod_{l=2,3,7}\zeta_{j_l}^{(i_l)}+\mathbf{1}_{\{i_6=i_5\neq 0,j_6=j_5,i_1=i_3\neq 0,j_1=j_3\}}\prod_{l=2,4,7}\zeta_{j_l}^{(i_l)}$$

$$+\mathbf{1}_{\{i_6=i_5\neq 0,j_6=j_5,i_1=i_2\neq 0,j_1=j_2\}}\prod_{l=3,4,7}\zeta_{j_l}^{(i_l)}+\mathbf{1}_{\{i_7=i_1\neq 0,j_7=j_1,i_2=i_3\neq 0,j_2=j_3\}}\prod_{l=4,5,6}\zeta_{j_l}^{(i_l)}$$

$$+\mathbf{1}_{\{i_7=i_1\neq 0,j_7=j_1,i_2=i_4\neq 0,j_2=j_4\}}\prod_{l=3,5,6}\zeta_{j_l}^{(i_l)}+\mathbf{1}_{\{i_7=i_1\neq 0,j_7=j_1,i_2=i_5\neq 0,j_2=j_5\}}\prod_{l=3,4,6}\zeta_{j_l}^{(i_l)}$$

$$+\mathbf{1}_{\{i_7=i_1\neq 0,j_7=j_1,i_2=i_6\neq 0,j_2=j_6\}}\prod_{l=3,4,5}\zeta_{j_l}^{(i_l)}+\mathbf{1}_{\{i_7=i_1\neq 0,j_7=j_1,i_3=i_4\neq 0,j_3=j_4\}}\prod_{l=2,5,6}\zeta_{j_l}^{(i_l)}$$

$$+\mathbf{1}_{\{i_7=i_1\neq 0,j_7=j_1,i_3=i_5\neq 0,j_3=j_5\}}\prod_{l=2,4,6}\zeta_{j_l}^{(i_l)}+\mathbf{1}_{\{i_7=i_1\neq 0,j_7=j_1,i_3=i_6\neq 0,j_3=j_6\}}\prod_{l=2,4,5}\zeta_{j_l}^{(i_l)}$$

$$+\mathbf{1}_{\{i_7=i_1\neq 0,j_7=j_1,i_4=i_5\neq 0,j_4=j_5\}}\prod_{l=2,3,6}\zeta_{j_l}^{(i_l)}+\mathbf{1}_{\{i_7=i_1\neq 0,j_7=j_1,i_4=i_6\neq 0,j_4=j_6\}}\prod_{l=2,3,5}\zeta_{j_l}^{(i_l)}$$

$$+\mathbf{1}_{\{i_1=i_2\ne 0,j_7=j_1,i_7=i_1\ne 0,j_5=j_6\}}\prod_{l=2,3,4}\zeta_{j_l}^{(i_l)}+\mathbf{1}_{\{i_7=i_2\ne 0,j_7=j_2,i_1=i_3\ne 0,j_1=j_3\}}\prod_{l=4,5,6}\zeta_{j_l}^{(i_l)}$$

$$+\mathbf{1}_{\{i_7=i_2\ne 0,j_7=j_2,i_1=i_4\ne 0,j_1=j_4\}}\prod_{l=3,5,6}\zeta_{j_l}^{(i_l)}+\mathbf{1}_{\{i_7=i_2\ne 0,j_7=j_2,i_1=i_5\ne 0,j_1=j_5\}}\prod_{l=3,4,6}\zeta_{j_l}^{(i_l)}$$

$$+\mathbf{1}_{\{i_7=i_2\ne 0,j_7=j_2,i_1=i_6\ne 0,j_1=j_6\}}\prod_{l=3,4,5}\zeta_{j_l}^{(i_l)}+\mathbf{1}_{\{i_7=i_2\ne 0,j_7=j_2,i_3=i_4\ne 0,j_3=j_4\}}\prod_{l=1,5,6}\zeta_{j_l}^{(i_l)}$$

$$+\mathbf{1}_{\{i_7=i_2\ne 0,j_7=j_2,i_3=i_5\ne 0,j_3=j_5\}}\prod_{l=1,4,6}\zeta_{j_l}^{(i_l)}+\mathbf{1}_{\{i_7=i_2\ne 0,j_7=j_2,i_3=i_6\ne 0,j_3=j_6\}}\prod_{l=1,4,5}\zeta_{j_l}^{(i_l)}$$

$$+\mathbf{1}_{\{i_7=i_2\ne 0,j_7=j_2,i_4=i_5\ne 0,j_4=j_5\}}\prod_{l=1,3,6}\zeta_{j_l}^{(i_l)}+\mathbf{1}_{\{i_7=i_2\ne 0,j_7=j_2,i_4=i_6\ne 0,j_4=j_6\}}\prod_{l=1,3,5}\zeta_{j_l}^{(i_l)}$$

$$+\mathbf{1}_{\{i_7=i_2\ne 0,j_7=j_2,i_5=i_6\ne 0,j_5=j_6\}}\prod_{l=1,3,4}\zeta_{j_l}^{(i_l)}+\mathbf{1}_{\{i_7=i_3\ne 0,j_7=j_3,i_1=i_2\ne 0,j_1=j_2\}}\prod_{l=4,5,6}\zeta_{j_l}^{(i_l)}$$

$$+\mathbf{1}_{\{i_7=i_3\ne 0,j_7=j_3,i_1=i_4\ne 0,j_1=j_4\}}\prod_{l=2,3,5}\zeta_{j_l}^{(i_l)}+\mathbf{1}_{\{i_7=i_3\ne 0,j_7=j_3,i_1=i_5\ne 0,j_1=j_5\}}\prod_{l=2,4,6}\zeta_{j_l}^{(i_l)}$$

$$+\mathbf{1}_{\{i_7=i_3\ne 0,j_7=j_3,i_1=i_6\ne 0,j_1=j_6\}}\prod_{l=4,2,5}\zeta_{j_l}^{(i_l)}+\mathbf{1}_{\{i_7=i_3\ne 0,j_7=j_3,i_2=i_4\ne 0,j_2=j_4\}}\prod_{l=3,5,6}\zeta_{j_l}^{(i_l)}$$

$$+\mathbf{1}_{\{i_7=i_3\ne 0,j_7=j_3,i_2=i_5\ne 0,j_2=j_5\}}\prod_{l=1,4,6}\zeta_{j_l}^{(i_l)}+\mathbf{1}_{\{i_7=i_3\ne 0,j_7=j_3,i_2=i_6\ne 0,j_2=j_6\}}\prod_{l=1,4,5}\zeta_{j_l}^{(i_l)}$$

$$+\mathbf{1}_{\{i_7=i_3\ne 0,j_7=j_3,i_4=i_5\ne 0,j_4=j_5\}}\prod_{l=1,2,6}\zeta_{j_l}^{(i_l)}+\mathbf{1}_{\{i_7=i_3\ne 0,j_7=j_3,i_4=i_6\ne 0,j_4=j_6\}}\prod_{l=1,2,5}\zeta_{j_l}^{(i_l)}$$

$$+\mathbf{1}_{\{i_7=i_3\ne 0,j_7=j_3,i_5=i_6\ne 0,j_5=j_6\}}\prod_{l=1,2,4}\zeta_{j_l}^{(i_l)}+\mathbf{1}_{\{i_7=i_4\ne 0,j_7=j_4,i_1=i_2\ne 0,j_1=j_2\}}\prod_{l=3,5,6}\zeta_{j_l}^{(i_l)}$$

$$+\mathbf{1}_{\{i_7=i_4\ne 0,j_7=j_4,i_1=i_3\ne 0,j_1=j_3\}}\prod_{l=2,5,6}\zeta_{j_l}^{(i_l)}+\mathbf{1}_{\{i_7=i_4\ne 0,j_7=j_4,i_1=i_5\ne 0,j_1=j_5\}}\prod_{l=2,3,6}\zeta_{j_l}^{(i_l)}$$

$$+\mathbf{1}_{\{i_7=i_4\ne 0,j_7=j_4,i_1=i_6\ne 0,j_1=j_6\}}\prod_{l=2,3,5}\zeta_{j_l}^{(i_l)}+\mathbf{1}_{\{i_7=i_4\ne 0,j_7=j_4,i_2=i_3\ne 0,j_2=j_3\}}\prod_{l=1,5,6}\zeta_{j_l}^{(i_l)}$$

$$+\mathbf{1}_{\{i_7=i_4\ne 0,j_7=j_4,i_2=i_5\ne 0,j_2=j_5\}}\prod_{l=1,3,6}\zeta_{j_l}^{(i_l)}+\mathbf{1}_{\{i_7=i_4\ne 0,j_7=j_4,i_2=i_6\ne 0,j_2=j_6\}}\prod_{l=1,3,5}\zeta_{j_l}^{(i_l)}$$

$$+\mathbf{1}_{\{i_7=i_4\ne 0,j_7=j_4,i_3=i_5\ne 0,j_3=j_5\}}\prod_{l=1,2,6}\zeta_{j_l}^{(i_l)}+\mathbf{1}_{\{i_7=i_4\ne 0,j_7=j_4,i_3=i_6\ne 0,j_3=j_6\}}\prod_{l=1,2,5}\zeta_{j_l}^{(i_l)}$$

$$+\mathbf{1}_{\{i_7=i_4\ne 0,j_7=j_4,i_5=i_6\ne 0,j_5=j_6\}}\prod_{l=1,2,3}\zeta_{j_l}^{(i_l)}+\mathbf{1}_{\{i_7=i_5\ne 0,j_7=j_5,i_1=i_2\ne 0,j_1=j_2\}}\prod_{l=3,4,6}\zeta_{j_l}^{(i_l)}$$

$$+\mathbf{1}_{\{i_7=i_5\ne 0,j_7=j_5,i_1=i_3\ne 0,j_1=j_3\}}\prod_{l=2,4,6}\zeta_{j_l}^{(i_l)}+\mathbf{1}_{\{i_7=i_5\ne 0,j_7=j_5,i_1=i_4\ne 0,j_1=j_4\}}\prod_{l=2,3,6}\zeta_{j_l}^{(i_l)}$$

$$+\mathbf{1}_{\{i_7=i_5\ne 0,j_7=j_5,i_1=i_6\ne 0,j_1=j_6\}}\prod_{l=2,3,4}\zeta_{j_l}^{(i_l)}+\mathbf{1}_{\{i_7=i_5\ne 0,j_7=j_5,i_2=i_3\ne 0,j_2=j_3\}}\prod_{l=1,4,6}\zeta_{j_l}^{(i_l)}$$

$$+\mathbf{1}_{\{i_7=i_5\ne 0,j_7=j_5,i_2=i_4\ne 0,j_2=j_4\}}\prod_{l=1,3,6}\zeta_{j_l}^{(i_l)}+\mathbf{1}_{\{i_7=i_5\ne 0,j_7=j_5,i_2=i_6\ne 0,j_2=j_6\}}\prod_{l=1,3,5}\zeta_{j_l}^{(i_l)}$$

$$+\mathbf{1}_{\{i_7=i_5\ne 0,j_7=j_5,i_3=i_4\ne 0,j_3=j_4\}}\prod_{l=1,2,6}\zeta_{j_l}^{(i_l)}+\mathbf{1}_{\{i_7=i_5\ne 0,j_7=j_5,i_3=i_6\ne 0,j_3=j_6\}}\prod_{l=1,2,4}\zeta_{j_l}^{(i_l)}$$

$$+\mathbf{1}_{\{i_7=i_5\ne 0,j_7=j_5,i_4=i_6\ne 0,j_4=j_6\}}\prod_{l=1,2,3}\zeta_{j_l}^{(i_l)}+\mathbf{1}_{\{i_7=i_6\ne 0,j_7=j_6,i_1=i_2\ne 0,j_1=j_2\}}\prod_{l=3,4,5}\zeta_{j_l}^{(i_l)}$$

$$+\mathbf{1}_{\{i_7=i_6\ne 0,j_7=j_6,i_1=i_3\ne 0,j_1=j_3\}}\prod_{l=2,4,5}\zeta_{j_l}^{(i_l)}+\mathbf{1}_{\{i_7=i_6\ne 0,j_7=j_6,i_1=i_4\ne 0,j_1=j_4\}}\prod_{l=2,3,5}\zeta_{j_l}^{(i_l)}$$

$$+\mathbf{1}_{\{i_7=i_6\ne 0,j_7=j_6,i_1=i_5\ne 0,j_1=j_5\}}\prod_{l=2,3,4}\zeta_{j_l}^{(i_l)}+\mathbf{1}_{\{i_7=i_6\ne 0,j_7=j_6,i_2=i_3\ne 0,j_2=j_3\}}\prod_{l=1,4,5}\zeta_{j_l}^{(i_l)}$$

$$+\mathbf{1}_{\{i_7=i_6\ne 0,j_7=j_6,i_2=i_4\ne 0,j_2=j_4\}}\prod_{l=1,3,5}\zeta_{j_l}^{(i_l)}+\mathbf{1}_{\{i_7=i_6\ne 0,j_7=j_6,i_2=i_5\ne 0,j_2=j_5\}}\prod_{l=1,3,4}\zeta_{j_l}^{(i_l)}$$

$$+\mathbf{1}_{\{i_7=i_6\ne 0,j_7=j_6,i_3=i_5\ne 0,j_3=j_5\}}\prod_{l=1,2,4}\zeta_{j_l}^{(i_l)}+\mathbf{1}_{\{i_7=i_6\ne 0,j_7=j_6,i_4=i_5\ne 0,j_4=j_5\}}\prod_{l=1,2,3}\zeta_{j_l}^{(i_l)}$$

$$+\mathbf{1}_{\{i_7=i_6\ne 0,j_7=j_6,i_3=i_4\ne 0,j_3=j_4\}}\prod_{l=1,2,5}\zeta_{j_l}^{(i_l)}-$$

$$\Bigl(\mathbf{1}_{\{i_2=i_3\ne 0,j_2=j_3,i_4=i_5\ne 0,j_4=j_5,i_6=i_7\ne 0,j_6=j_7\}}+\mathbf{1}_{\{i_2=i_3\ne 0,j_2=j_3,i_4=i_6\ne 0,j_4=j_6,i_5=i_7\ne 0,j_5=j_7\}}$$

$$+\mathbf{1}_{\{i_2=i_3\ne 0,j_2=j_3,i_4=i_7\ne 0,j_4=j_7,i_5=i_6\ne 0,j_5=j_6\}}+\mathbf{1}_{\{i_2=i_4\ne 0,j_2=j_4,i_3=i_5\ne 0,j_3=j_5,i_6=i_7\ne 0,j_6=j_7\}}$$

$$+\mathbf{1}_{\{i_2=i_4\ne 0,j_2=j_4,i_3=i_6\ne 0,j_3=j_6,i_5=i_7\ne 0,j_5=j_7\}}+\mathbf{1}_{\{i_2=i_4\ne 0,j_2=j_4,i_3=i_7\ne 0,j_3=j_7,i_5=i_6\ne 0,j_5=j_6\}}$$

$$+\mathbf{1}_{\{i_2=i_5\ne 0,j_2=j_5,i_3=i_4\ne 0,j_3=j_4,i_6=i_7\ne 0,j_6=j_7\}}+\mathbf{1}_{\{i_2=i_5\ne 0,j_2=j_5,i_3=i_6\ne 0,j_3=j_6,i_4=i_7\ne 0,j_4=j_7\}}$$

$$+\mathbf{1}_{\{i_2=i_5\ne 0,j_2=j_5,i_3=i_7\ne 0,j_3=j_7,i_4=i_6\ne 0,j_4=j_6\}}+\mathbf{1}_{\{i_2=i_6\ne 0,j_2=j_6,i_3=i_4\ne 0,j_3=j_4,i_5=i_7\ne 0,j_5=j_7\}}$$

$$+\mathbf{1}_{\{i_2=i_6\ne 0,j_2=j_6,i_3=i_5\ne 0,j_3=j_5,i_4=i_7\ne 0,j_4=j_7\}}+\mathbf{1}_{\{i_2=i_6\ne 0,j_2=j_6,i_3=i_7\ne 0,j_3=j_7,i_4=i_5\ne 0,j_4=j_5\}}$$

$$+\mathbf{1}_{\{i_2=i_7\ne 0,j_2=j_7,i_3=i_4\ne 0,j_3=j_4,i_5=i_6\ne 0,j_5=j_6\}}+\mathbf{1}_{\{i_2=i_7\ne 0,j_2=j_7,i_3=i_5\ne 0,j_3=j_5,i_4=i_6\ne 0,j_4=j_6\}}$$

$$+\mathbf{1}_{\{i_2=i_7\ne 0,j_2=j_7,i_3=i_6\ne 0,j_3=j_6,i_4=i_5\ne 0,j_4=j_5\}}\Bigr)\,\zeta_{j_1}^{(i_1)}-$$

$$\Bigl(\mathbf{1}_{\{i_1=i_3\ne 0,j_1=j_3,i_4=i_7\ne 0,j_4=j_7,i_5=i_6\ne 0,j_5=j_6\}}+\mathbf{1}_{\{i_1=i_3\ne 0,j_1=j_3,i_4=i_5\ne 0,j_4=j_5,i_6=i_7\ne 0,j_6=j_7\}}$$

$$+\mathbf{1}_{\{i_1=i_3\ne 0,j_1=j_3,i_4=i_6\ne 0,j_4=j_6,i_5=i_7\ne 0,j_5=j_7\}}+\mathbf{1}_{\{i_1=i_4\ne 0,j_1=j_4,i_3=i_5\ne 0,j_3=j_5,i_6=i_7\ne 0,j_6=j_7\}}$$

$$+\mathbf{1}_{\{i_1=i_4\ne 0,j_1=j_4,i_3=i_6\ne 0,j_3=j_6,i_5=i_7\ne 0,j_5=j_7\}}+\mathbf{1}_{\{i_1=i_4\ne 0,j_1=j_4,i_3=i_7\ne 0,j_3=j_7,i_5=i_6\ne 0,j_5=j_6\}}$$

$$+\mathbf{1}_{\{i_1=i_5\ne 0,j_1=j_5,i_3=i_4\ne 0,j_3=j_4,i_6=i_7\ne 0,j_6=j_7\}}+\mathbf{1}_{\{i_1=i_5\ne 0,j_1=j_5,i_3=i_6\ne 0,j_3=j_6,i_4=i_7\ne 0,j_4=j_7\}}$$

$$+\mathbf{1}_{\{i_1=i_5\ne 0,j_1=j_5,i_3=i_7\ne 0,j_3=j_7,i_4=i_6\ne 0,j_4=j_6\}}+\mathbf{1}_{\{i_1=i_6\ne 0,j_1=j_6,i_3=i_4\ne 0,j_3=j_4,i_5=i_7\ne 0,j_5=j_7\}}$$

$$+\mathbf{1}_{\{i_6=i_1\ne 0,j_6=j_1,i_3=i_5\ne 0,j_3=j_5,i_4=i_7\ne 0,j_4=j_7\}}+\mathbf{1}_{\{i_6=i_1\ne 0,j_6=j_1,i_3=i_7\ne 0,j_3=j_7,i_4=i_5\ne 0,j_4=j_5\}}$$

$$+\mathbf{1}_{\{i_1=i_7\neq 0,j_1=j_7,i_3=i_4\neq 0,j_3=j_4,i_5=i_6\neq 0,j_5=j_6\}}+\mathbf{1}_{\{i_1=i_7\neq 0,j_1=j_7,i_3=i_5\neq 0,j_3=j_5,i_4=i_6\neq 0,j_4=j_6\}}$$

$$+\mathbf{1}_{\{i_1=i_7\neq 0,j_1=j_7,i_3=i_6\neq 0,j_3=j_6,i_4=i_5\neq 0,j_4=j_5\}}\Bigr)\,\zeta_{j_2}^{(i_2)}-$$

$$\Bigl(\mathbf{1}_{\{i_1=i_2\neq 0,j_1=j_2,i_4=i_5\neq 0,j_4=j_5,i_6=i_7\neq 0,j_6=j_7\}}+\mathbf{1}_{\{i_1=i_2\neq 0,j_1=j_2,i_4=i_6\neq 0,j_4=j_6,i_5=i_7\neq 0,j_5=j_7\}}$$

$$+\mathbf{1}_{\{i_1=i_2\neq 0,j_1=j_2,i_4=i_7\neq 0,j_4=j_7,i_5=i_6\neq 0,j_5=j_6\}}+\mathbf{1}_{\{i_1=i_4\neq 0,j_1=j_4,i_2=i_5\neq 0,j_2=j_5,i_6=i_7\neq 0,j_6=j_7\}}$$

$$+\mathbf{1}_{\{i_1=i_4\neq 0,j_1=j_4,i_2=i_6\neq 0,j_2=j_6,i_5=i_7\neq 0,j_5=j_7\}}+\mathbf{1}_{\{i_1=i_4\neq 0,j_1=j_4,i_2=i_7\neq 0,j_2=j_7,i_5=i_6\neq 0,j_5=j_6\}}$$

$$+\mathbf{1}_{\{i_1=i_5\neq 0,j_1=j_5,i_2=i_4\neq 0,j_2=j_4,i_6=i_7\neq 0,j_6=j_7\}}+\mathbf{1}_{\{i_1=i_5\neq 0,j_1=j_5,i_2=i_6\neq 0,j_2=j_6,i_4=i_7\neq 0,j_4=j_7\}}$$

$$+\mathbf{1}_{\{i_1=i_5\neq 0,j_1=j_5,i_2=i_7\neq 0,j_2=j_7,i_4=i_6\neq 0,j_4=j_6\}}+\mathbf{1}_{\{i_6=i_1\neq 0,j_6=j_1,i_2=i_4\neq 0,j_2=j_4,i_5=i_7\neq 0,j_5=j_7\}}$$

$$+\mathbf{1}_{\{i_6=i_1\neq 0,j_6=j_1,i_2=i_5\neq 0,j_2=j_5,i_4=i_7\neq 0,j_4=j_7\}}+\mathbf{1}_{\{i_6=i_1\neq 0,j_6=j_1,i_2=i_7\neq 0,j_2=j_7,i_4=i_5\neq 0,j_4=j_5\}}$$

$$+\mathbf{1}_{\{i_1=i_7\neq 0,j_1=j_7,i_2=i_4\neq 0,j_2=j_4,i_5=i_6\neq 0,j_5=j_6\}}+\mathbf{1}_{\{i_1=i_7\neq 0,j_1=j_7,i_2=i_5\neq 0,j_2=j_5,i_4=i_6\neq 0,j_4=j_6\}}$$

$$+\mathbf{1}_{\{i_1=i_7\neq 0,j_1=j_7,i_2=i_6\neq 0,j_2=j_6,i_4=i_5\neq 0,j_4=j_5\}}\Bigr)\,\zeta_{j_3}^{(i_3)}-$$

$$\Bigl(\mathbf{1}_{\{i_1=i_2\neq 0,j_1=j_2,i_3=i_5\neq 0,j_3=j_5,i_6=i_7\neq 0,j_6=j_7\}}+\mathbf{1}_{\{i_1=i_2\neq 0,j_1=j_2,i_3=i_6\neq 0,j_3=j_6,i_5=i_7\neq 0,j_5=j_7\}}$$

$$+\mathbf{1}_{\{i_1=i_2\neq 0,j_1=j_2,i_3=i_7\neq 0,j_3=j_7,i_5=i_6\neq 0,j_5=j_6\}}+\mathbf{1}_{\{i_1=i_3\neq 0,j_1=j_3,i_2=i_5\neq 0,j_2=j_5,i_6=i_7\neq 0,j_6=j_7\}}$$

$$+\mathbf{1}_{\{i_1=i_3\neq 0,j_1=j_3,i_2=i_6\neq 0,j_2=j_6,i_5=i_7\neq 0,j_5=j_7\}}+\mathbf{1}_{\{i_1=i_3\neq 0,j_1=j_3,i_2=i_7\neq 0,j_2=j_7,i_5=i_6\neq 0,j_5=j_6\}}$$

$$+\mathbf{1}_{\{i_1=i_5\neq 0,j_1=j_5,i_2=i_3\neq 0,j_2=j_3,i_6=i_7\neq 0,j_6=j_7\}}+\mathbf{1}_{\{i_1=i_5\neq 0,j_1=j_5,i_2=i_6\neq 0,j_2=j_6,i_3=i_7\neq 0,j_3=j_7\}}$$

$$+\mathbf{1}_{\{i_1=i_5\neq 0,j_1=j_5,i_2=i_7\neq 0,j_2=j_7,i_3=i_6\neq 0,j_3=j_6\}}+\mathbf{1}_{\{i_6=i_1\neq 0,j_6=j_1,i_2=i_3\neq 0,j_2=j_3,i_5=i_7\neq 0,j_5=j_7\}}$$

$$+\mathbf{1}_{\{i_6=i_1\neq 0,j_6=j_1,i_2=i_5\neq 0,j_2=j_5,i_3=i_7\neq 0,j_3=j_7\}}+\mathbf{1}_{\{i_6=i_1\neq 0,j_6=j_1,i_2=i_7\neq 0,j_2=j_7,i_3=i_5\neq 0,j_3=j_5\}}$$

$$+\mathbf{1}_{\{i_7=i_1\neq 0,j_7=j_1,i_2=i_3\neq 0,j_2=j_3,i_5=i_6\neq 0,j_5=j_6\}}+\mathbf{1}_{\{i_7=i_1\neq 0,j_7=j_1,i_2=i_5\neq 0,j_2=j_5,i_3=i_6\neq 0,j_3=j_6\}}$$

$$+\mathbf{1}_{\{i_7=i_1\neq 0,j_7=j_1,i_2=i_6\neq 0,j_2=j_6,i_3=i_5\neq 0,j_3=j_5\}}\Bigr)\,\zeta_{j_4}^{(i_4)}-$$

$$\Bigl(\mathbf{1}_{\{i_1=i_2\neq 0,j_1=j_2,i_3=i_4\neq 0,j_3=j_4,i_6=i_7\neq 0,j_6=j_7\}}+\mathbf{1}_{\{i_1=i_2\neq 0,j_1=j_2,i_3=i_6\neq 0,j_3=j_6,i_4=i_7\neq 0,j_4=j_7\}}$$

$$+\mathbf{1}_{\{i_1=i_2\neq 0,j_1=j_2,i_3=i_7\neq 0,j_3=j_7,i_4=i_6\neq 0,j_4=j_6\}}+\mathbf{1}_{\{i_1=i_3\neq 0,j_1=j_3,i_2=i_4\neq 0,j_2=j_4,i_6=i_7\neq 0,j_6=j_7\}}$$

$$+\mathbf{1}_{\{i_1=i_3\neq 0,j_1=j_3,i_2=i_6\neq 0,j_2=j_6,i_4=i_7\neq 0,j_4=j_7\}}+\mathbf{1}_{\{i_1=i_3\neq 0,j_1=j_3,i_2=i_7\neq 0,j_2=j_7,i_4=i_6\neq 0,j_4=j_6\}}$$

$$+\mathbf{1}_{\{i_1=i_4\neq 0,j_1=j_4,i_2=i_3\neq 0,j_2=j_3,i_6=i_7\neq 0,j_6=j_7\}}+\mathbf{1}_{\{i_1=i_4\neq 0,j_1=j_4,i_2=i_6\neq 0,j_2=j_6,i_3=i_7\neq 0,j_3=j_7\}}$$

$$+\mathbf{1}_{\{i_1=i_4\neq 0,j_1=j_4,i_2=i_7\neq 0,j_2=j_7,i_3=i_6\neq 0,j_3=j_6\}}+\mathbf{1}_{\{i_6=i_1\neq 0,j_6=j_1,i_2=i_3\neq 0,j_2=j_3,i_4=i_7\neq 0,j_4=j_7\}}$$

$$+\mathbf{1}_{\{i_6=i_1\neq 0,j_6=j_1,i_2=i_4\neq 0,j_2=j_4,i_3=i_7\neq 0,j_3=j_7\}}+\mathbf{1}_{\{i_6=i_1\neq 0,j_6=j_1,i_2=i_7\neq 0,j_2=j_7,i_3=i_4\neq 0,j_3=j_4\}}$$

$$+\mathbf{1}_{\{i_1=i_7\neq 0,j_1=j_7,i_2=i_3\neq 0,j_2=j_3,i_4=i_6\neq 0,j_4=j_6\}}+\mathbf{1}_{\{i_1=i_7\neq 0,j_1=j_7,i_2=i_4\neq 0,j_2=j_4,i_3=i_6\neq 0,j_3=j_6\}}$$

$$+\mathbf{1}_{\{i_7=i_1\neq 0,j_7=j_1,i_2=i_6\neq 0,j_2=j_6,i_3=i_4\neq 0,j_3=j_4\}}\Bigr)\,\zeta_{j_5}^{(i_5)}-$$

$$\Bigl(\mathbf{1}_{\{i_1=i_2\neq 0,j_1=j_2,i_3=i_4\neq 0,j_3=j_4,i_5=i_7\neq 0,j_5=j_7\}}+\mathbf{1}_{\{i_1=i_2\neq 0,j_1=j_2,i_3=i_5\neq 0,j_3=j_5,i_4=i_7\neq 0,j_4=j_7\}}$$

$$+\mathbf{1}_{\{i_1=i_2\neq 0,j_1=j_2,i_3=i_7\neq 0,j_3=j_7,i_4=i_5\neq 0,j_4=j_5\}}+\mathbf{1}_{\{i_1=i_3\neq 0,j_1=j_3,i_2=i_4\neq 0,j_2=j_4,i_5=i_7\neq 0,j_5=j_7\}}$$

$$+\mathbf{1}_{\{i_1=i_3\neq 0,j_1=j_3,i_2=i_5\neq 0,j_2=j_5,i_4=i_7\neq 0,j_4=j_7\}}+\mathbf{1}_{\{i_1=i_3\neq 0,j_1=j_3,i_2=i_7\neq 0,j_2=j_7,i_4=i_5\neq 0,j_4=j_5\}}$$
$$+\mathbf{1}_{\{i_1=i_4\neq 0,j_1=j_4,i_2=i_3\neq 0,j_2=j_3,i_5=i_7\neq 0,j_5=j_7\}}+\mathbf{1}_{\{i_1=i_4\neq 0,j_1=j_4,i_2=i_5\neq 0,j_2=j_5,i_3=i_7\neq 0,j_3=j_7\}}$$
$$+\mathbf{1}_{\{i_1=i_4\neq 0,j_1=j_4,i_2=i_7\neq 0,j_2=j_7,i_3=i_5\neq 0,j_3=j_5\}}+\mathbf{1}_{\{i_1=i_5\neq 0,j_1=j_5,i_2=i_3\neq 0,j_2=j_3,i_4=i_7\neq 0,j_4=j_7\}}$$
$$+\mathbf{1}_{\{i_1=i_5\neq 0,j_1=j_5,i_2=i_4\neq 0,j_2=j_4,i_3=i_7\neq 0,j_3=j_7\}}+\mathbf{1}_{\{i_1=i_5\neq 0,j_1=j_5,i_2=i_7\neq 0,j_2=j_7,i_3=i_4\neq 0,j_3=j_4\}}$$
$$+\mathbf{1}_{\{i_7=i_1\neq 0,j_7=j_1,i_2=i_3\neq 0,j_2=j_3,i_4=i_5\neq 0,j_4=j_5\}}+\mathbf{1}_{\{i_7=i_1\neq 0,j_7=j_1,i_2=i_4\neq 0,j_2=j_4,i_3=i_5\neq 0,j_3=j_5\}}$$
$$+\mathbf{1}_{\{i_7=i_1\neq 0,j_7=j_1,i_2=i_5\neq 0,j_2=j_5,i_3=i_4\neq 0,j_3=j_4\}}\Big)\,\zeta_{j_6}^{(i_6)}-$$
$$\Big(\mathbf{1}_{\{i_1=i_2\neq 0,j_1=j_2,i_3=i_4\neq 0,j_3=j_4,i_5=i_6\neq 0,j_5=j_6\}}+\mathbf{1}_{\{i_1=i_2\neq 0,j_1=j_2,i_3=i_5\neq 0,j_3=j_5,i_4=i_6\neq 0,j_4=j_6\}}$$
$$+\mathbf{1}_{\{i_1=i_2\neq 0,j_1=j_2,i_3=i_6\neq 0,j_3=j_6,i_4=i_5\neq 0,j_4=j_5\}}+\mathbf{1}_{\{i_1=i_3\neq 0,j_1=j_3,i_2=i_4\neq 0,j_2=j_4,i_5=i_6\neq 0,j_5=j_6\}}$$
$$+\mathbf{1}_{\{i_1=i_3\neq 0,j_1=j_3,i_2=i_5\neq 0,j_2=j_5,i_4=i_6\neq 0,j_4=j_6\}}+\mathbf{1}_{\{i_1=i_3\neq 0,j_1=j_3,i_2=i_6\neq 0,j_2=j_6,i_4=i_5\neq 0,j_4=j_5\}}$$
$$+\mathbf{1}_{\{i_4=i_1\neq 0,j_4=j_1,i_2=i_3\neq 0,j_2=j_3,i_5=i_6\neq 0,j_5=j_6\}}+\mathbf{1}_{\{i_4=i_1\neq 0,j_4=j_1,i_2=i_5\neq 0,j_2=j_5,i_3=i_6\neq 0,j_3=j_6\}}$$
$$+\mathbf{1}_{\{i_4=i_1\neq 0,j_4=j_1,i_2=i_6\neq 0,j_2=j_6,i_3=i_5\neq 0,j_3=j_5\}}+\mathbf{1}_{\{i_5=i_1\neq 0,j_5=j_1,i_2=i_3\neq 0,j_2=j_3,i_4=i_6\neq 0,j_4=j_6\}}$$
$$+\mathbf{1}_{\{i_5=i_1\neq 0,j_5=j_1,i_2=i_4\neq 0,j_2=j_4,i_3=i_6\neq 0,j_3=j_6\}}+\mathbf{1}_{\{i_5=i_1\neq 0,j_5=j_1,i_2=i_6\neq 0,j_2=j_6,i_3=i_4\neq 0,j_3=j_4\}}$$
$$+\mathbf{1}_{\{i_6=i_1\neq 0,j_6=j_1,i_2=i_3\neq 0,j_2=j_3,i_4=i_5\neq 0,j_4=j_5\}}+\mathbf{1}_{\{i_6=i_1\neq 0,j_6=j_1,i_2=i_4\neq 0,j_2=j_4,i_3=i_5\neq 0,j_3=j_5\}}$$
$$+\mathbf{1}_{\{i_6=i_1\neq 0,j_6=j_1,i_2=i_5\neq 0,j_2=j_5,i_3=i_4\neq 0,j_3=j_4\}}\Big)\,\zeta_{j_7}^{(i_7)}\Bigg), \qquad (5.27)$$

где $\mathbf{1}_A$ — индикатор множества A ($\mathbf{1}_A=1$, если условие A выполнено и $\mathbf{1}_A=0$ в противном случае).

Обобщим формулы (5.21) – (5.27) на случай произвольной кратности повторного стохастического интеграла Ито. Для этого введем ряд обозначений.

Рассмотрим неупорядоченный набор $\{1,2,\ldots,k\}$ и разобъем его на две части: первая часть пусть состоит из r неупорядоченных пар (порядок следования этих пар также неважен), а вторая — из неупорядоченного набора оставшихся $k-2r$ чисел. Таким образом мы имеем:

$$(\{\underbrace{\{g_1,g_2\},\ldots,\{g_{2r-1},g_{2r}\}}_{\text{1 часть}}\},\{\underbrace{q_1,\ldots,q_{k-2r}}_{\text{2 часть}}\}), \qquad (5.28)$$

где $\{g_1,g_2,\ldots,g_{2r-1},g_{2r},q_1,\ldots,q_{k-2r}\}=\{1,2,\ldots,k\}$, фигурные скобки подчеркивают неупорядоченность взятого в них множества, а круглые — упорядоченность.

Назовем (5.28) разбиением и рассмотрим сумму по всевозможным разбиениям;

$$\sum_{\substack{(\{\{g_1,g_2\},\ldots,\{g_{2r-1},g_{2r}\}\},\{q_1,\ldots,q_{k-2r}\})\\ \{g_1,g_2,\ldots,g_{2r-1},g_{2r},q_1,\ldots,q_{k-2r}\}=\{1,2,\ldots,k\}}} a_{g_1g_2,\ldots,g_{2r-1}g_{2r},q_1\ldots q_{k-2r}}. \qquad (5.29)$$

Договоримся, что

$$\sum_{\substack{(\{q_1,\ldots,q_k\})\\ \{q_1,\ldots,q_k\}=\{1,2,\ldots,k\}}} a_{q_1\ldots q_k} = a_{12\ldots k}\ (r=0).$$

Приведем примеры сумм вида (5.29):

$$\sum_{\substack{(\{g_1,g_2\})\\ \{g_1,g_2\}=\{1,2\}}} a_{g_1g_2} = a_{12},$$

$$\sum_{\substack{(\{\{g_1,g_2\},\{g_3,g_4\}\})\\ \{g_1,g_2,g_3,g_4\}=\{1,2,3,4\}}} a_{g_1g_2g_3g_4} = a_{1234}+a_{1324}+a_{2314},$$

$$\sum_{\substack{(\{g_1,g_2\},\{q_1,q_2\})\\ \{g_1,g_2,q_1,q_2\}=\{1,2,3,4\}}} a_{g_1g_2,q_1q_2} = a_{12,34}+a_{13,24}+a_{14,23}+$$
$$+a_{23,14}+a_{24,13}+a_{34,12},$$

$$\sum_{\substack{(\{g_1,g_2\},\{q_1,q_2,q_3\})\\ \{g_1,g_2,q_1,q_2,q_3\}=\{1,2,3,4,5\}}} a_{g_1g_2,q_1q_2q_3} = a_{12,345}+a_{13,245}+a_{14,235}+$$
$$+a_{15,234}+a_{23,145}+a_{24,135}+a_{25,134}+a_{34,125}+a_{35,124}+a_{45,123},$$

$$\sum_{\substack{(\{\{g_1,g_2\},\{g_3,g_4\}\},\{q_1\})\\ \{g_1,g_2,g_3,g_4,q_1\}=\{1,2,3,4,5\}}} a_{g_1g_2,g_3g_4,q_1} = a_{12,34,5}+a_{13,24,5}+a_{14,23,5}+$$
$$+a_{12,35,4}+a_{13,25,4}+a_{15,23,4}+a_{12,54,3}+a_{15,24,3}+a_{14,25,3}+$$
$$+a_{15,34,2}+a_{13,54,2}+a_{14,53,2}+a_{52,34,1}+a_{53,24,1}+a_{54,23,1}.$$

Теперь можно сформулировать основной результат теоремы 5.1 (формулу (5.5)) в следующем виде:

$$J[\psi^{(k)}]_{T,t} = \sum_{j_1,\ldots,j_k=0}^{\infty} C_{j_k\ldots j_1}\Biggl(\prod_{l=1}^{k}\zeta_{j_l}^{(i_l)}+$$

$$+\sum_{r=1}^{[\frac{k}{2}]}(-1)^r\cdot \sum_{\substack{(\{\{g_1,g_2\},\ldots,\{g_{2r-1},g_{2r}\}\},\{q_1,\ldots,q_{k-2r}\})\\ \{g_1,g_2,\ldots,g_{2r-1},g_{2r},q_1,\ldots,q_{k-2r}\}=\{1,2,\ldots,k\}}} \prod_{s=1}^{r}\mathbf{1}_{\{i_{g_{2s-1}}=\ i_{g_{2s}}\neq 0\}}\times$$

$$\times \mathbf{1}_{\{j_{g_{2s-1}}=\ j_{g_{2s}}\}} \prod_{l=1}^{k-2r} \zeta_{j_{q_l}}^{(i_{q_l})}\Bigg). \tag{5.30}$$

В частности, из (5.30) при $k=5$ получаем:

$$J[\psi^{(5)}]_{T,t} = \sum_{j_1,\ldots,j_5=0}^{\infty} C_{j_5\ldots j_1}\Bigg(\prod_{l=1}^{5} \zeta_{j_l}^{(i_l)} -$$

$$- \sum_{\substack{(\{g_1,g_2\},\{q_1,q_2,q_3\}) \\ \{g_1,g_2,q_1,q_2,q_3\}=\{1,2,3,4,5\}}} \mathbf{1}_{\{i_{g_1}=\ i_{g_2}\neq 0\}} \mathbf{1}_{\{j_{g_1}=\ j_{g_2}\}} \prod_{l=1}^{3} \zeta_{j_{q_l}}^{(i_{q_l})} +$$

$$+ \sum_{\substack{(\{\{g_1,g_2\},\{g_3,g_4\}\},\{q_1\}) \\ \{g_1,g_2,g_3,g_4,q_1\}=\{1,2,3,4,5\}}} \mathbf{1}_{\{i_{g_1}=\ i_{g_2}\neq 0\}} \mathbf{1}_{\{j_{g_1}=\ j_{g_2}\}} \times$$

$$\times \mathbf{1}_{\{i_{g_3}=\ i_{g_4}\neq 0\}} \mathbf{1}_{\{j_{g_3}=\ j_{g_4}\}} \zeta_{j_{q_1}}^{(i_{q_1})}\Bigg).$$

Последнее равенство, очевидно совпадает с (5.25).

Отметим, что справедливость формул (5.21) – (5.27) косвенно подтверждается тем, что при $i_1 = \ldots = i_7 = i = 1,\ldots,m$ и $\psi_1(s),\ldots,\psi_7(s) \equiv \psi(s)$ из них можно вывести следующие справедливые с в.1 равенства:

$$J[\psi^{(1)}]_{T,t} = \frac{1}{1!}\delta_{T,t},\ \ J[\psi^{(2)}]_{T,t} = \frac{1}{2!}\left(\delta_{T,t}^2 - \Delta_{T,t}\right),$$

$$J[\psi^{(3)}]_{T,t} = \frac{1}{3!}\left(\delta_{T,t}^3 - 3\delta_{T,t}\Delta_{T,t}\right),\ \ J[\psi^{(4)}]_{T,t} = \frac{1}{4!}\left(\delta_{T,t}^4 - 6\delta_{T,t}^2\Delta_{T,t} + 3\Delta_{T,t}^2\right),$$

$$J[\psi^{(5)}]_{T,t} = \frac{1}{5!}\left(\delta_{T,t}^5 - 10\delta_{T,t}^3\Delta_{T,t} + 15\delta_{T,t}\Delta_{T,t}^2\right),$$

$$J[\psi^{(6)}]_{T,t} = \frac{1}{6!}\left(\delta_{T,t}^6 - 15\delta_{T,t}^4\Delta_{T,t} + 45\delta_{T,t}^2\Delta_{T,t}^2 - 15\Delta_{T,t}^3\right),$$

$$J[\psi^{(7)}]_{T,t} = \frac{1}{7!}\left(\delta_{T,t}^7 - 21\delta_{T,t}^5\Delta_{T,t} + 105\delta_{T,t}^3\Delta_{T,t}^2 - 105\delta_{T,t}\Delta_{T,t}^3\right),$$

где $\delta_{T,t} = \int\limits_t^T \psi(s)d\mathbf{f}_s^{(i)}$, $\Delta_{T,t} = \int\limits_t^T \psi^2(s)ds$, которые могут быть независимо получены с помощью формулы Ито (см. разд. 6.9).

При $k=1$ все очевидно. Рассмотрим случаи $k=2,\ 3$. При $k=2$:

$$J[\psi^{(2)}]_{T,t} = \underset{p\to\infty}{\text{l.i.m.}} \left(\sum_{j_1,j_2=0}^{p} C_{j_2j_1}\zeta_{j_1}^{(i)}\zeta_{j_2}^{(i)} - \sum_{j_1=0}^{p} C_{j_1j_1}\right) =$$

$$= \underset{p\to\infty}{\text{l.i.m.}} \left(\sum_{j_1=0}^{p}\sum_{j_2=0}^{j_1-1}\left(C_{j_2j_1}+C_{j_1j_2}\right)\zeta_{j_1}^{(i)}\zeta_{j_2}^{(i)}+\sum_{j_1=0}^{p}C_{j_1j_1}\left(\left(\zeta_{j_1}^{(i)}\right)^2-1\right)\right)=$$

$$= \underset{p\to\infty}{\text{l.i.m.}} \left(\sum_{j_1=0}^{p}\sum_{j_2=0}^{j_1-1}C_{j_1}C_{j_2}\zeta_{j_1}^{(i)}\zeta_{j_2}^{(i)}+\frac{1}{2}\sum_{j_1=0}^{p}C_{j_1}^2\left(\left(\zeta_{j_1}^{(i)}\right)^2-1\right)\right)=$$

$$= \underset{p\to\infty}{\text{l.i.m.}} \left(\frac{1}{2}\sum_{\substack{j_1,j_2=0\\ j_1\neq j_2}}^{p}C_{j_1}C_{j_2}\zeta_{j_1}^{(i)}\zeta_{j_2}^{(i)}+\frac{1}{2}\sum_{j_1=0}^{p}C_{j_1}^2\left(\left(\zeta_{j_1}^{(i)}\right)^2-1\right)\right)=$$

$$= \underset{p\to\infty}{\text{l.i.m.}} \left(\frac{1}{2}\left(\sum_{j_1=0}^{p}C_{j_1}\zeta_{j_1}^{(i)}\right)^2-\frac{1}{2}\sum_{j_1=0}^{p}C_{j_1}^2\right)=\frac{1}{2!}\left(\delta_{T,t}^2-\Delta_{T,t}\right). \qquad (5.31)$$

Поясним подробнее последний переход в (5.31). Для стохастических интегралов Ито справедлива известная оценка [65]

$$\mathsf{M}\left\{\left|\int_t^T\xi_\tau df_\tau\right|^q\right\}\le K_q\mathsf{M}\left\{\left(\int_t^T|\xi_\tau|^2d\tau\right)^{\frac{q}{2}}\right\}, \qquad (5.32)$$

где $q>0$ — фиксированное число; f_τ — скалярный стандартный винеровский процесс; $\xi_\tau\in\mathcal{M}_2([t,T])$; K_q — постоянная, зависящая только от q; $\int\limits_t^T|\xi_\tau|^2d\tau<\infty$ с в. 1; $\mathsf{M}\left\{\left(\int\limits_t^T|\xi_\tau|^2d\tau\right)^{\frac{q}{2}}\right\}<\infty$.

Поскольку $\delta_{T,t}-\sum\limits_{j_1=0}^{p}C_{j_1}\zeta_{j_1}^{(i)}=\int\limits_t^T\Big(\psi(s)-\sum\limits_{j_1=0}^{p}C_{j_1}\phi_{j_1}(s)\Big)d\mathbf{f}_s^{(i)}$, то применяя оценку (5.32) к правой части этого выражения и учитывая, что $\int\limits_t^T\Big(\psi(s)-\sum\limits_{j_1=0}^{p}C_{j_1}\phi_{j_1}(s)\Big)^2ds\ \to 0$ при $p\to\infty$ получаем

$$\int_t^T\psi(s)d\mathbf{f}_s^{(i)}=q\ \underset{p\to\infty}{\text{-l.i.m.}}\ \sum_{j_1=0}^{p}C_{j_1}\zeta_{j_1}^{(i)},\ q>0. \qquad (5.33)$$

Отсюда при $q=4$ нетрудно вывести, что $\underset{p\to\infty}{\text{l.i.m.}}\left(\sum\limits_{j_1=0}^{p}C_{j_1}\zeta_{j_1}^{(i)}\right)^2=\delta_{T,t}^2$. Это равенство и использовалось в последнем переходе формулы (5.31).

При $k=3$:

$$J[\psi^{(3)}]_{T,t}=\underset{p\to\infty}{\text{l.i.m.}}\left(\sum_{j_1,j_2,j_3=0}^{p}C_{j_3j_2j_1}\zeta_{j_1}^{(i)}\zeta_{j_2}^{(i)}\zeta_{j_3}^{(i)}-\sum_{j_1,j_3=0}^{p}C_{j_3j_1j_1}\zeta_{j_3}^{(i)}-\right.$$

$$\left.-\sum_{j_1,j_2=0}^{p}C_{j_2j_2j_1}\zeta_{j_1}^{(i)}-\sum_{j_1,j_2=0}^{p}C_{j_1j_2j_1}\zeta_{j_2}^{(i)}\right)=$$

$$= \underset{p\to\infty}{\text{l.i.m.}} \left(\sum_{j_1,j_2,j_3=0}^{p} C_{j_3 j_2 j_1} \zeta_{j_1}^{(i)} \zeta_{j_2}^{(i)} \zeta_{j_3}^{(i)} - \sum_{j_1,j_3=0}^{p} \left(C_{j_3 j_1 j_1} + C_{j_1 j_1 j_3} + C_{j_1 j_3 j_1} \right) \zeta_{j_3}^{(i)} \right)$$

$$= \underset{p\to\infty}{\text{l.i.m.}} \left(\sum_{j_1=0}^{p} \sum_{j_2=0}^{j_1-1} \sum_{j_3=0}^{j_2-1} \left(C_{j_3 j_2 j_1} + C_{j_3 j_1 j_2} + C_{j_2 j_1 j_3} + C_{j_2 j_3 j_1} + \right.\right.$$

$$\left. + C_{j_1 j_2 j_3} + C_{j_1 j_3 j_2} \right) \zeta_{j_1}^{(i)} \zeta_{j_2}^{(i)} \zeta_{j_3}^{(i)} +$$

$$+ \sum_{j_1=0}^{p} \sum_{j_3=0}^{j_1-1} \left(C_{j_3 j_1 j_3} + C_{j_1 j_3 j_3} + C_{j_3 j_3 j_1} \right) \left(\zeta_{j_3}^{(i)} \right)^2 \zeta_{j_1}^{(i)} +$$

$$+ \sum_{j_1=0}^{p} \sum_{j_3=0}^{j_1-1} \left(C_{j_3 j_1 j_1} + C_{j_1 j_1 j_3} + C_{j_1 j_3 j_1} \right) \left(\zeta_{j_1}^{(i)} \right)^2 \zeta_{j_3}^{(i)} + \sum_{j_1=0}^{p} C_{j_1 j_1 j_1} \left(\zeta_{j_1}^{(i)} \right)^3 -$$

$$\left. - \sum_{j_1,j_3=0}^{p} \left(C_{j_3 j_1 j_1} + C_{j_1 j_1 j_3} + C_{j_1 j_3 j_1} \right) \zeta_{j_3}^{(i)} \right) =$$

$$= \underset{p\to\infty}{\text{l.i.m.}} \left(\sum_{j_1=0}^{p} \sum_{j_2=0}^{j_1-1} \sum_{j_3=0}^{j_2-1} C_{j_1} C_{j_2} C_{j_3} \zeta_{j_1}^{(i)} \zeta_{j_2}^{(i)} \zeta_{j_3}^{(i)} + \right.$$

$$+ \frac{1}{2} \sum_{j_1=0}^{p} \sum_{j_3=0}^{j_1-1} C_{j_3}^2 C_{j_1} \left(\zeta_{j_3}^{(i)} \right)^2 \zeta_{j_1}^{(i)} + \frac{1}{2} \sum_{j_1=0}^{p} \sum_{j_3=0}^{j_1-1} C_{j_1}^2 C_{j_3} \left(\zeta_{j_1}^{(i)} \right)^2 \zeta_{j_3}^{(i)} +$$

$$\left. + \frac{1}{6} \sum_{j_1=0}^{p} C_{j_1}^3 \left(\zeta_{j_1}^{(i)} \right)^3 - \frac{1}{2} \sum_{j_1,j_3=0}^{p} C_{j_1}^2 C_{j_3} \zeta_{j_3}^{(i)} \right) =$$

$$= \underset{p\to\infty}{\text{l.i.m.}} \left(\frac{1}{6} \sum_{\substack{j_1,j_2,j_3=0 \\ j_1\neq j_2, j_2\neq j_3, j_1\neq j_3}}^{p} C_{j_1} C_{j_2} C_{j_3} \zeta_{j_1}^{(i)} \zeta_{j_2}^{(i)} \zeta_{j_3}^{(i)} + \right.$$

$$+ \frac{1}{2} \sum_{j_1=0}^{p} \sum_{j_3=0}^{j_1-1} C_{j_3}^2 C_{j_1} \left(\zeta_{j_3}^{(i)} \right)^2 \zeta_{j_1}^{(i)} + \frac{1}{2} \sum_{j_1=0}^{p} \sum_{j_3=0}^{j_1-1} C_{j_1}^2 C_{j_3} \left(\zeta_{j_1}^{(i)} \right)^2 \zeta_{j_3}^{(i)} +$$

$$\left. + \frac{1}{6} \sum_{j_1=0}^{p} C_{j_1}^3 \left(\zeta_{j_1}^{(i)} \right)^3 - \frac{1}{2} \sum_{j_1,j_3=0}^{p} C_{j_1}^2 C_{j_3} \zeta_{j_3}^{(i)} \right) = \underset{p\to\infty}{\text{l.i.m.}} \left(\frac{1}{6} \sum_{j_1,j_2,j_3=0}^{p} C_{j_1} C_{j_2} C_{j_3} \zeta_{j_1}^{(i)} \zeta_{j_2}^{(i)} \zeta_{j_3}^{(i)} \right.$$

$$- \frac{1}{6} \left(3 \sum_{j_1=0}^{p} \sum_{j_3=0}^{j_1-1} C_{j_3}^2 C_{j_1} \left(\zeta_{j_3}^{(i)} \right)^2 \zeta_{j_1}^{(i)} + 3 \sum_{j_1=0}^{p} \sum_{j_3=0}^{j_1-1} C_{j_1}^2 C_{j_3} \left(\zeta_{j_1}^{(i)} \right)^2 \zeta_{j_3}^{(i)} + \sum_{j_1=0}^{p} C_{j_1}^3 \left(\zeta_{j_1}^{(i)} \right)^3 \right)$$

$$+ \frac{1}{2} \sum_{j_1=0}^{p} \sum_{j_3=0}^{j_1-1} C_{j_3}^2 C_{j_1} \left(\zeta_{j_3}^{(i)} \right)^2 \zeta_{j_1}^{(i)} + \frac{1}{2} \sum_{j_1=0}^{p} \sum_{j_3=0}^{j_1-1} C_{j_1}^2 C_{j_3} \left(\zeta_{j_1}^{(i)} \right)^2 \zeta_{j_3}^{(i)} +$$

$$\left. + \frac{1}{6} \sum_{j_1=0}^{p} C_{j_1}^3 \left(\zeta_{j_1}^{(i)} \right)^3 - \frac{1}{2} \sum_{j_1,j_3=0}^{p} C_{j_1}^2 C_{j_3} \zeta_{j_3}^{(i)} \right) =$$

$$= \underset{p\to\infty}{\text{l.i.m.}} \left(\frac{1}{6}\left(\sum_{j_1=0}^{p} C_{j_1}\zeta_{j_1}^{(i)}\right)^3 - \frac{1}{2}\sum_{j_1=0}^{p} C_{j_1}^2 \sum_{j_3=0}^{p} C_{j_3}\zeta_{j_3}^{(i)}\right) = \frac{1}{3!}\left(\delta_{T,t}^3 - 3\delta_{T,t}\Delta_{T,t}\right). \tag{5.34}$$

Последний шаг в (5.34) следует из равенства $\underset{p\to\infty}{\text{l.i.m.}} \left(\sum\limits_{j_1=0}^{p} C_{j_1}\zeta_{j_1}^{(i)}\right)^3 = \delta_{T,t}^3$, которое несложно получить при $q = 8$ из (5.33).

Также мы использовали для рассматриваемого случая следующие соотношения между коэффициентами Фурье: $C_{j_1j_2} + C_{j_2j_1} = C_{j_1}C_{j_2}$, $2C_{j_1j_1} = C_{j_1}^2$, $C_{j_1j_2j_3} + C_{j_1j_3j_2} + C_{j_2j_3j_1} + C_{j_2j_1j_3} + C_{j_3j_2j_1} + C_{j_3j_1j_2} = C_{j_1}C_{j_2}C_{j_3}$, $2\left(C_{j_1j_1j_3} + C_{j_1j_3j_1} + C_{j_3j_1j_1}\right) = C_{j_1}^2C_{j_3}$, $6C_{j_1j_1j_1} = C_{j_1}^3$ и формулу (6.19) при $k = 2,\ 3$.

Случаи $k = 4,\ 5,\ 6,\ 7$ могут быть рассмотрены аналогично с привлечением формулы (6.19) при $k = 4,\ 5,\ 6,\ 7$.

5.2 О применении полных ортонормированных разрывных систем функций в теореме 5.1

При анализе доказательства теоремы 5.1 возникает естественный вопрос: можно ли ослабить условие непрерывности функций $\phi_j(x)$; $j = 1,\ 2, \ldots$?

Будем говорить, что функция $f(x) : [t, T] \to \Re^1$ удовлетворяет условию $(\star)$, если она непрерывна на отрезке $[t, T]$ за исключением может быть конечного числа точек конечного разрыва, а также непрерывна справа на отрезке $[t, T]$.

Далее предположим, что $\{\phi_j(x)\}_{j=0}^{\infty}$ — полная ортонормированная в пространсве $L_2([t, T])$ система функций, причем $\phi_j(x)$, $j < \infty$ удовлетворяет условию $(\star)$.

Нетрудно видеть, что непрерывность функций $\phi_j(x)$ существенно использовалась при доказательстве теоремы 5.1 в двух местах: лемма 5.3 и формула (5.10).

Ясно, что без ущерба общности разбиение $\{\tau_j\}_{j=0}^{N}$ отрезка $[t, T]$ в лемме 5.3 и формуле (5.10) можно взять столь "мелким", что среди узлов τ_j этого разбиения окажутся все точки разрыва функций $\varphi_1(\tau) = \phi_{j_1}(\tau)$, $\ldots$, $\varphi_k(\tau) = \phi_{j_k}(\tau)$; $j_1, \ldots, j_k < \infty$ и среди точек $(\tau_{j_1}, \ldots, \tau_{j_k})$; $0 \le j_1 < \ldots < j_k \le N - 1$ окажутся все точки разрыва функции $\Phi(t_1, \ldots, t_k)$, в которую также входят функции $\phi_{j_1}(t_1), \ldots, \phi_{j_k}(t_k)$ при обращении к формуле (5.10) в концовке доказательства теоремы 5.1.

Покажем, как следует модифицировать доказательства леммы 5.3 и формулы (5.10) в том случае, когда $\{\phi_j(x)\}_{j=0}^{\infty}$ — полная ортонор-

мированная в пространсве $L_2([t,T])$ система функций, причем $\phi_j(x)$, $j<\infty$ удовлетворяет условию $(\star)$.

Сначала обратимся к лемме 5.3. В процессе доказательства этой леммы были получены соотношения:

$$\mathsf{M}\left\{\left|\sum_{j=0}^{N-1} J[\Delta\varphi_l]_{\tau_{j+1},\tau_j}\right|^4\right\} = \sum_{j=0}^{N-1} \mathsf{M}\left\{\left|J[\Delta\varphi_l]_{\tau_{j+1},\tau_j}\right|^4\right\} +$$

$$+6\sum_{j=0}^{N-1} \mathsf{M}\left\{\left|J[\Delta\varphi_l]_{\tau_{j+1},\tau_j}\right|^2\right\} \sum_{q=0}^{j-1} \mathsf{M}\left\{\left|J[\Delta\varphi_l]_{\tau_{q+1},\tau_q}\right|^2\right\}, \tag{5.35}$$

$$\mathsf{M}\left\{\left|J[\Delta\varphi_l]_{\tau_{j+1},\tau_j}\right|^2\right\} = \int\limits_{\tau_j}^{\tau_{j+1}} (\varphi_l(\tau_j)-\varphi_l(s))^2 ds, \tag{5.36}$$

$$\mathsf{M}\left\{\left|J[\Delta\varphi_l]_{\tau_{j+1},\tau_j}\right|^4\right\} = 3\left(\int\limits_{\tau_j}^{\tau_{j+1}} (\varphi_l(\tau_j)-\varphi_l(s))^2 ds\right)^2. \tag{5.37}$$

Предположим, что функции $\varphi_l(s)$; $l=1,\ldots,k$ удовлетворяют условию $(\star)$, а разбиение $\{\tau_j\}_{j=0}^{N-1}$ содержит среди своих узлов все точки разрыва функций $\varphi_l(s)$; $l=1,\ldots,k$. Это означает, что для интеграла $\int\limits_{\tau_j}^{\tau_{j+1}} (\varphi_l(\tau_j)-\varphi_l(s))^2 ds$ подынтегральная функция непрерывна при $[\tau_j,\ \tau_{j+1})$ и возможно терпит конечный разрыв в точке τ_{j+1}.

Пусть $\mu\in(0,\ \Delta\tau_j)$ и фиксировано, тогда в силу непрерывности, а значит и равномерной непрерывности функций $\varphi_l(s)$; $l=1,\ldots,k$ на отрезке $[\tau_j,\ \tau_{j+1}-\mu]$ имеем:

$$\int\limits_{\tau_j}^{\tau_{j+1}} (\varphi_l(\tau_j)-\varphi_l(s))^2 ds = \int\limits_{\tau_j}^{\tau_{j+1}-\mu} (\varphi_l(\tau_j)-\varphi_l(s))^2 ds +$$

$$+\int\limits_{\tau_{j+1}-\mu}^{\tau_{j+1}} (\varphi_l(\tau_j)-\varphi_l(s))^2 ds < \varepsilon^2(\Delta\tau_j-\mu)+M^2\mu. \tag{5.38}$$

При получении неравенства (5.38) предполагалось, что $\Delta\tau_j<\delta$; $j=0,\ 1,\ldots,N-1$ ($\delta>0$ найдено по любому $\varepsilon>0$ и не зависит от s); $|\varphi_l(\tau_j)-\varphi_l(s)|<\varepsilon$ при $s\in[\tau_j,\ \tau_{j+1}-\mu]$ (в силу равномерной непрерывности функций $\varphi_l(s)$; $l=1,\ldots,k$); $|\varphi_l(\tau_j)-\varphi_l(s)|<M$ при $s\in[\tau_{j+1}-\mu,\ \tau_{j+1}]$, M — постоянная; потенциальная точка разрыва функции $\varphi_l(s)$ предполагается в узле τ_{j+1}.

Осуществляя предельный переход в неравенстве (5.38) при $\mu \to +0$, получаем следующую оценку:

$$\int\limits_{\tau_j}^{\tau_{j+1}} (\varphi_l(\tau_j) - \varphi_l(s))^2 ds \le \varepsilon^2 \Delta\tau_j.$$

Используя эту оценку для оценки правой части (5.35), получаем

$$\mathsf{M}\left\{\left|\sum_{j=0}^{N-1} J[\Delta\varphi_l]_{\tau_{j+1},\tau_j}\right|^4\right\} \le \varepsilon^4\left(3\sum_{j=0}^{N-1}(\Delta\tau_j)^2 + 6\sum_{j=0}^{N-1}\Delta\tau_j\sum_{q=0}^{j-1}\Delta\tau_q\right) <$$

$$< 3\varepsilon^4\left(\delta(T-t) + (T-t)^2\right). \qquad (5.39)$$

Отсюда следует, что $\mathsf{M}\left\{\left|\sum\limits_{j=0}^{N-1} J[\Delta\varphi_l]_{\tau_{j+1},\tau_j}\right|^4\right\} \to 0$ при $N \to \infty$ и лемма 5.3 остается справедливой.

Теперь приведем пояснения по поводу справедливости формулы (5.10), когда $\{\phi_j(x)\}_{j=0}^{\infty}$ — полная ортонормированная в пространсве $L_2([t,T])$ система функций, причем $\phi_j(x)$, $j < \infty$ удовлетворяет условию $(\star)$.

Рассмотрим случай $k = 3$ и представление (5.12). Покажем, что в рассматриваемом случае первый предел в правой части (5.12) равен нулю (аналогично показывается, что второй предел в правой части (5.12) равен нулю; доказательство равенства нулю второго предела в правой части (5.11) такое же, как и для случая непрерывных функций $\phi_j(x)$; $j = 0,\ 1, \ldots$).

Второй момент допредельного выражения первого предела в правой части (5.12) имеет вид

$$\sum_{j_3=0}^{N-1}\sum_{j_2=0}^{j_3-1}\sum_{j_1=0}^{j_2-1}\int\limits_{\tau_{j_2}}^{\tau_{j_2+1}}\int\limits_{\tau_{j_1}}^{\tau_{j_1+1}} \left(\Phi(t_1,t_2,\tau_{j_3}) - \Phi(t_1,\tau_{j_2},\tau_{j_3})\right)^2 dt_1 dt_2 \Delta\tau_{j_3}.$$

Далее для фиксированных $\mu \in (0,\ \Delta\tau_{j_2})$ и $\rho \in (0,\ \Delta\tau_{j_1})$ имеем

$$\int\limits_{\tau_{j_2}}^{\tau_{j_2+1}}\int\limits_{\tau_{j_1}}^{\tau_{j_1+1}} \left(\Phi(t_1,t_2,\tau_{j_3}) - \Phi(t_1,\tau_{j_2},\tau_{j_3})\right)^2 dt_1 dt_2 =$$

$$= \left(\int\limits_{\tau_{j_2}}^{\tau_{j_2+1}-\mu} + \int\limits_{\tau_{j_2+1}-\mu}^{\tau_{j_2+1}}\right)\left(\int\limits_{\tau_{j_1}}^{\tau_{j_1+1}-\rho} + \int\limits_{\tau_{j_1+1}-\rho}^{\tau_{j_1+1}}\right) \left(\Phi(t_1,t_2,\tau_{j_3}) - \Phi(t_1,\tau_{j_2},\tau_{j_3})\right)^2 dt_1 dt_2$$

$$= \left(\int\limits_{\tau_{j_2}}^{\tau_{j_2+1}-\mu} \int\limits_{\tau_{j_1}}^{\tau_{j_1+1}-\rho} + \int\limits_{\tau_{j_2}}^{\tau_{j_2+1}-\mu} \int\limits_{\tau_{j_1+1}-\rho}^{\tau_{j_1+1}} + \int\limits_{\tau_{j_2+1}-\mu}^{\tau_{j_2+1}} \int\limits_{\tau_{j_1}}^{\tau_{j_1+1}-\rho} + \int\limits_{\tau_{j_2+1}-\mu}^{\tau_{j_2+1}} \int\limits_{\tau_{j_1+1}-\rho}^{\tau_{j_1+1}} \right) \times$$

$$\times \left(\Phi(t_1, t_2, \tau_{j_3}) - \Phi(t_1, \tau_{j_2}, \tau_{j_3})\right)^2 dt_1 dt_2 <$$

$$< \varepsilon^2 \left(\Delta\tau_{j_2} - \mu\right)\left(\Delta\tau_{j_1} - \rho\right) + M^2 \rho \left(\Delta\tau_{j_2} - \mu\right) + M^2 \mu \left(\Delta\tau_{j_1} - \rho\right) + M^2 \mu\rho, \tag{5.40}$$

где M — постоянная; $\Delta\tau_j < \delta$; $j = 0,\ 1, \ldots, N-1$ ($\delta > 0$ найдено по любому $\varepsilon > 0$ и не зависит от точек (t_1, t_2, τ_{j_3}), $(t_1, \tau_{j_2}, \tau_{j_3})$); предполагается также, что разбиение $\{\tau_j\}_{j=0}^{N-1}$ содержит среди своих узлов все точки разрыва функции $\Phi(t_1, t_2, t_3)$ по каждой переменной; потенциальные точки разрыва указанной функции по каждой переменной при получении (5.40) предполагаются в узлах $\tau_{j_1+1}, \tau_{j_2+1}, \tau_{j_3+1}$.

Поясним более подробно, как мы получили неравенство (5.40). Поскольку функция $\Phi(t_1, t_2, t_3)$ непрерывна на замкнутом ограниченном множестве $Q_3 = \{(t_1, t_2, t_3) : t_1 \in [\tau_{j_1}, \tau_{j_1+1} - \rho], t_2 \in [\tau_{j_2}, \tau_{j_2+1} - \mu], t_3 \in [\tau_{j_3}, \tau_{j_3+1} - \nu], \}$, где ρ, μ, ν — фиксированные малые положительные числа ($\nu \in (0,\ \Delta\tau_{j_3})$, $\mu \in (0,\ \Delta\tau_{j_2})$, $\rho \in (0,\ \Delta\tau_{j_1})$), то она и равномерно непрерывна на этом множестве, а также ограничена на замкнутом множестве D_3.

Так как расстояние между точками (t_1, t_2, τ_{j_3}), $(t_1, \tau_{j_2}, \tau_{j_3}) \in Q_3$ очевидно меньше δ при $\Delta\tau_j < \delta$; $j = 0,\ 1, \ldots, N-1$, то $|\Phi(t_1, t_2, \tau_{j_3}) - \Phi(t_1, \tau_{j_2}, \tau_{j_3})| < \varepsilon$. Это неравенство использовалось при оценке первого двойного интеграла в (5.40). При оценке трех оставшихся двойных интегралов использовалось свойство ограниченности функции $\Phi(t_1, t_2, t_3)$ в виде неравенства $|\Phi(t_1, t_2, \tau_{j_3}) - \Phi(t_1, \tau_{j_2}, \tau_{j_3})| < M$.

Осуществляя предельный переход в неравенстве (5.40) при $\mu, \rho \to +0$ получаем оценку

$$\int\limits_{\tau_{j_2}}^{\tau_{j_2+1}} \int\limits_{\tau_{j_1}}^{\tau_{j_1+1}} \left(\Phi(t_1, t_2, \tau_{j_3}) - \Phi(t_1, \tau_{j_2}, \tau_{j_3})\right)^2 dt_1 dt_2 \le \varepsilon^2 \Delta\tau_{j_2} \Delta\tau_{j_1}.$$

Использование этой оценки дает

$$\sum_{j_3=0}^{N-1} \sum_{j_2=0}^{j_3-1} \sum_{j_1=0}^{j_2-1} \int\limits_{\tau_{j_2}}^{\tau_{j_2+1}} \int\limits_{\tau_{j_1}}^{\tau_{j_1+1}} \left(\Phi(t_1, t_2, \tau_{j_3}) - \Phi(t_1, \tau_{j_2}, \tau_{j_3})\right)^2 dt_1 dt_2 \Delta\tau_{j_3} \le$$

$$\le \varepsilon^2 \sum_{j_3=0}^{N-1} \sum_{j_2=0}^{j_3-1} \sum_{j_1=0}^{j_2-1} \Delta\tau_{j_1} \Delta\tau_{j_2} \Delta\tau_{j_3} < \varepsilon^2 \frac{(T-t)^3}{6}.$$

Последняя оценка означает, что что в рассматриваемом случае первый предел в правой части (5.12) равен нулю (аналогично показывается, что второй предел в правой части (5.12) равен нулю).

Таким образом формула (5.10) справедлива при $k = 3$ в рассмотренном случае. Аналогично проводится обоснование и при $k = 2$ или $k > 3$.

Таким образом, в теореме 5.1 можно использовать полные ортонормированные в пространстве $L_2([t,T])$ системы функций $\{\phi_j(x)\}_{j=0}^{\infty}$, для которых $\phi_j(x)$, $j < \infty$ удовлетворяет условию $(\star)$.

Примером такой системы функций может служить полная ортонормированная в пространстве $L_2([t,T])$ система функций Хаара:

$$\phi_0(x) = \frac{1}{\sqrt{T-t}},\ \phi_{nj}(x) = \frac{1}{\sqrt{T-t}}\varphi_{nj}\left(\frac{x-t}{T-t}\right),$$

где $n = 0,\ 1,\ldots;\ j = 1,\ 2,\ldots,2^n$, а функции $\varphi_{nj}(x)$ имеют вид:

$$\varphi_{nj}(x) = \begin{cases} 2^{\frac{n}{2}},\ x \in [\frac{j-1}{2^n},\ \frac{j-1}{2^n} + \frac{1}{2^{n+1}}) \\ -2^{\frac{n}{2}},\ x \in [\frac{j-1}{2^n} + \frac{1}{2^{n+1}},\ \frac{j}{2^n}) \\ 0 \text{ иначе} \end{cases};$$

$n = 0,\ 1,\ldots;\ j = 1,\ 2,\ldots,\ 2^n$ (мы выбираем значения функций Хаара в точках разрыва так, чтобы они были непрерывны справа).

Другим примером подобной системы функций служит полная ортонормированная в пространстве $L_2([t,T])$ система функций Радемахера–Уолша:

$$\phi_0(x) = \frac{1}{\sqrt{T-t}},\ \phi_{m_1\ldots m_k}(x) = \frac{1}{\sqrt{T-t}}\varphi_{m_1}\left(\frac{x-t}{T-t}\right)\ldots\varphi_{m_k}\left(\frac{x-t}{T-t}\right),$$

где $0 < m_1 < \ldots < m_k;\ m_1,\ldots,m_k = 1,\ 2,\ldots;\ k = 1,\ 2,\ldots;\ \varphi_m(x) = (-1)^{[2^m x]};\ x \in [0,1];\ m = 1,\ 2,\ldots;\ [y]$ — целая часть y.

5.3 Замечание о применении полных ортонормированных систем функций в теореме 5.1

Отметим, что, вообще говоря, функции $\phi_j(s)$ полной ортонормированной системы функций $\{\phi_j(s)\}_{j=0}^{\infty}$ в пространстве $L_2([t,T])$ зависят не только от s, но и от t, T.

Например, полные ортонормированные системы полиномов Лежандра и тригонометрических функций в пространстве $L_2([t,T])$ имеют

соответственно следующий вид:

$$\phi_j(s,t,T)=\sqrt{\frac{2j+1}{T-t}}P_j\left(\left(s-\frac{T+t}{2}\right)\frac{2}{T-t}\right),$$

$P_j(s)$ — полином Лежандра;

$$\phi_j(s,t,T)=\frac{1}{\sqrt{T-t}}\begin{cases}1 & \text{при } j=0\\ \sqrt{2}\sin\frac{2\pi r(s-t)}{T-t} & \text{при } j=2r-1\\ \sqrt{2}\cos\frac{2\pi r(s-t)}{T-t} & \text{при } j=2r\end{cases};$$

$r=1,\ 2,\ldots.$

В дальнейшем указанные системы функций будут применяться в контексте реализации сильных численных методов для стохастических дифференциальных уравнений (см. главы 7–9, 12, 14, 15) для последовательностей временных отрезков вида: $[T_0,T_1]$, $[T_1,T_2]$, $[T_2,T_3],\ldots$, т.е. в простраствах $L_2([T_0,T_1])$, $L_2([T_1,T_2])$, $L_2([T_2,T_3]),\ldots$.

Поясним, что зависимость функций $\phi_j(s,t,T)$ от $t,\ T$ (в дальнейшем эти постоянные будут иметь смысл фиксированных моментов времени) не повлияет на основные свойства независимости случайных величин $\zeta_{(j_l)T,t}^{(i_l)}=\int\limits_t^T\phi_{j_l}(s,t,T)d\mathbf{w}_s^{(i_l)}$; $i_l\neq 0$; $l=1,\ldots,k$.

Действительно, при фиксированных $t,\ T$, в силу ортонормированности приведенных систем функций, имеем:

$$\mathsf{M}\left\{\zeta_{(j_l)T,t}^{(i_l)}\zeta_{(j_r)T,t}^{(i_r)}\right\}=\mathbf{1}_{\{i_l=i_r\neq 0\}}\mathbf{1}_{\{j_l=j_r\}},$$

где $\zeta_{(j_l)T,t}^{(i_l)}=\int\limits_t^T\phi_{j_l}(s,t,T)d\mathbf{w}_s^{(i_l)}$; $i_l\neq 0$; $l,\ r=1,\ldots,k$.

С другой стороны случайные величины $\zeta_{(j_l)T_1,t_1}^{(i_l)}=\int\limits_{t_1}^{T_1}\phi_{j_l}(s,t_1,T_1)d\mathbf{w}_s^{(i_l)}$ и $\zeta_{(j_l)T_2,t_2}^{(i_l)}=\int\limits_{t_2}^{T_2}\phi_{j_l}(s,t_2,T_2)d\mathbf{w}_s^{(i_l)}$ являются независимыми при $[t_1,T_1]\cap[t_2,T_2]=\emptyset$ (возможен случай $T_1=t_2$) по свойству стохастического интеграла Ито.

Таким образом два важных свойства независимости случайных величин $\zeta_{(j_l)T,t}^{(i_l)}$, которые являются основным мотивом их использования, сохранены.

В дальнейшем, также как и раньше, вместо $\phi_j(s,t,T)$ мы будем для краткости писать $\phi_j(s)$.

5.4 О структуре функций $K(t_1,\ldots,t_k)$, используемых в приложениях

В стохастические разложения Тейлора (унифицированные и классические), рассмотренные в главе 4, входят системы повторных стохастических интегралов (4.116) – (4.119), (4.120), (4.121). Всвязи с теоремами 5.1, 5.2 и результатами разд. 5.6 особый интерес представляют системы (4.116), (4.117), (4.120) при $k=1,\ 2,\ 3,\ldots$, системы (4.118), (4.119), (4.121) при $k=1,\ 2$, а также стохастические интегралы вида (4.118) и (4.119) при $k=3$, $l_1=l_2=l_3=l$.

Функции $K(t_1,\ldots,t_k)$, входящие в формулировку теоремы 5.1, для семейства (4.116) имеют вид:

$$K(t_1,\ldots,t_k)=\begin{cases}(t-t_k)^{l_k}\ldots(t-t_1)^{l_1},\ t_1<\ldots<t_k\\ 0,\ \text{иначе}\end{cases};\ t_1,\ldots,t_k\in[t,T]. \tag{5.41}$$

В частности, для стохастических интегралов $I_{1_{T,t}}^{(i_1)}$, $I_{2_{T,t}}^{(i_1)}$, $I_{00_{T,t}}^{(i_1i_2)}$, $I_{000_{T,t}}^{(i_1i_2i_3)}$, $I_{01_{T,t}}^{(i_1i_2)}$, $I_{10_{T,t}}^{(i_1i_2)}$, $I_{0000_{T,t}}^{(i_1\ldots i_4)}$, $I_{20_{T,t}}^{(i_1i_2)}$, $I_{11_{T,t}}^{(i_1i_2)}$, $I_{02_{T,t}}^{(i_1i_2)}$; $i_1,\ldots,i_4=1,\ldots,m$ функции $K(t_1,\ldots,t_k)$ вида (5.41) имеют соответственно следующий вид:

$$K_1(t_1)=t-t_1,\ K_2(t_1)=(t-t_1)^2, \tag{5.42}$$

$$K_{00}(t_1,t_2)=\begin{cases}1,\ t_1<t_2\\ 0,\ \text{иначе}\end{cases},\ K_{000}(t_1,t_2,t_3)=\begin{cases}1,\ t_1<t_2<t_3\\ 0,\ \text{иначе}\end{cases}, \tag{5.43}$$

$$K_{01}(t_1,t_2)=\begin{cases}t-t_2,\ t_1<t_2\\ 0,\ \text{иначе}\end{cases},\ K_{10}(t_1,t_2)=\begin{cases}t-t_1,\ t_1<t_2\\ 0,\ \text{иначе}\end{cases}, \tag{5.44}$$

$$K_{0000}(t_1,t_2)=\begin{cases}1,\ t_1<t_2<t_3<t_4\\ 0,\ \text{иначе}\end{cases},\ K_{20}(t_1,t_2)=\begin{cases}(t-t_1)^2,\ t_1<t_2\\ 0,\ \text{иначе}\end{cases}, \tag{5.45}$$

$$K_{11}(t_1,t_2)=\begin{cases}(t-t_1)(t-t_2),\ t_1<t_2\\ 0,\ \text{иначе}\end{cases},\ K_{02}(t_1,t_2)=\begin{cases}(t-t_2)^2,\ t_1<t_2\\ 0,\ \text{иначе}\end{cases}, \tag{5.46}$$

где $t_1,\ldots,t_4\in[t,T]$.

Очевидно, что наиболее простым (имеющим конечное число слагаемых) разложением в ряд Фурье по полной ортонормированной в пространстве $L_2([t,T])$ системе функций для полинома конечной степени будет его разложение по системе полиномов Лежандра. Полиномиальные функции входят в функции (5.42) – (5.46) как их составные части, поэтому логично ожидать, что наиболее простыми разложениями в кратные ряды Фурье для функций (5.42) – (5.46) будут их разложения в кратные ряды Фурье–Лежандра при $l_1^2+\ldots+l_k^2>0$. Если же

$l_1 = \ldots = l_k = 0$ (см. функции $K_{00}(t_1, t_2)$, $K_{000}(t_1, t_2, t_3)$, $K_{0000}(t_1, \ldots, t_4)$), то можно ожидать, что в этом случае разложения указанных функций в кратные ряды Фурье по тригонометрическим функциям и полиномам Лежандра будут иметь примерно одинаковую сложность.

Забегая вперед отметим, что приведенные предположения полностью подтверждаются (сравни формулы (6.38), (6.39), (6.41), (6.42) с формулами (6.77), (6.82), (6.81), (6.80) соответственно).

Таким образом, применение полиномов Лежандра в рассматриваемой области является несомненным шагом вперед. В разд. 6.1 будет отмечен и ряд других преимуществ и новых возможностей метода аппроксимации повторных стохастических интегралов, основанного на теоремах 5.1 и 5.2.

5.5 Разложение повторных стохастических интегралов Стратоновича первой и второй кратности

Пусть $\psi_1(\tau)$, $\psi_2(\tau)$ — непрерывно дифференцируемые на промежутке $[t, T]$ функции.

Для случая $k = 1$ очевидно имеем

$$\int\limits_t^{*T} \psi_1(t_1) d\mathbf{f}_{t_1}^{(i_1)} = \sum_{j_1=0}^{\infty} C_{j_1} \zeta_{j_1}^{(i_1)},$$

где ряд сходится в среднеквадратическом смысле;

$$C_{j_1} = \int\limits_t^T \psi_1(t_1) \phi_{j_1}(t_1) dt_1; \ \zeta_{j_1}^{(i_1)} = \int\limits_t^T \phi_{j_1}(t_1) d\mathbf{f}_{t_1}^{(i_1)}; \ i_1 = 1, \ldots, m.$$

Согласно примеру 3.2 при $k = 2$ с вероятностью 1 имеем

$$J^*[\psi^{(2)}]_{T,t} = J[\psi^{(2)}]_{T,t} + \frac{1}{2} \mathbf{1}_{\{i_1 = i_2 \neq 0\}} \int\limits_t^T \psi_1(t_1) \psi_2(t_1) dt_1.$$

С другой стороны по теореме 5.1

$$\int\limits_t^T \psi_2(t_2) \int\limits_t^{t_2} \psi_1(t_1) d\mathbf{f}_{t_1}^{(i_1)} d\mathbf{f}_{t_2}^{(i_2)} = \sum_{j_1, j_2=0}^{\infty} C_{j_2 j_1} \left(\zeta_{j_1}^{(i_1)} \zeta_{j_2}^{(i_2)} - \mathbf{1}_{\{i_1 = i_2 \neq 0\}} \mathbf{1}_{\{j_1 = j_2\}} \right) =$$

$$= \sum_{j_1, j_2=0}^{\infty} C_{j_2 j_1} \zeta_{j_1}^{(i_1)} \zeta_{j_2}^{(i_2)} - \mathbf{1}_{\{i_1 = i_2 \neq 0\}} \sum_{j_1=0}^{\infty} C_{j_1 j_1}.$$

Возникают естественные вопросы: законно ли разбиение предела на два предела в последней формуле и справедливо ли равенство (оно и обосновывает возможность такого разбиения):

$$\frac{1}{2}\int\limits_t^T \psi_1(t_1)\psi_2(t_1)dt_1 = \sum_{j_1=0}^{\infty} C_{j_1 j_1}. \tag{5.47}$$

Поскольку при $\psi_1(s) \equiv \psi_2(s)$ выполняется равенство $C_{j_1 j_1} = \frac{1}{2}C_{j_1}^2$, то в этом случае равенство (5.47) является следствием равенства Парсеваля.

Для проверки равенства (5.47) в общем случае достаточно показать, что

$$\sum_{j_1,j_2=0}^{\infty} C_{j_2 j_1}\phi_{j_1}(t_1)\phi_{j_2}(t_1) = \frac{1}{2}\psi_1(t_1)\psi_2(t_1), \tag{5.48}$$

где ряд сходится равномерно по t_1 на отрезке $[t, T]$.

Очевидно, проинтегировав равенство (5.48) и воспользовавшись ортонормированностью функций $\phi_j(\tau)$ мы получим равенство (5.47), что в свою очередь уже будет означать, что

$$J^*[\psi^{(2)}]_{T,t} = \sum_{j_1,j_2=0}^{\infty} C_{j_2 j_1}\zeta_{j_1}^{(i_1)}\zeta_{j_2}^{(i_2)}, \tag{5.49}$$

где ряд сходится в среднеквадратическом смысле.

Для доказательства (5.48) нам придется обратиться к сведениям из теории кратных рядов Фурье, суммируемых по Принсгейму.

Для каждого $\delta > 0$ назовем модулем непрерывности функции $f(\mathbf{t})$ ($\mathbf{t} = (t_1, \ldots, t_k)$) в k-мерной области D ($k \geq 1$) точную верхнюю грань разности $|f(\mathbf{t}') - f(\mathbf{t}'')|$ на множестве всех точек $\mathbf{t}'$, $\mathbf{t}''$, которые принадлежат области D, причем расстояние $\rho(\mathbf{t}', \mathbf{t}'') < \delta$.

Будем говорить, что функция k ($k \geq 1$) переменных $f(\mathbf{t})$ ($\mathbf{t} = (t_1, \ldots, t_k)$) принадлежит в области D классу Гельдера с показателем 1 ($f(\mathbf{t}) \in C^1(D)$), если модуль непрерывности функции $f(\mathbf{t})$ ($\mathbf{t} = (t_1, \ldots, t_k)$) в области D имеет порядок $O(\delta)$.

Рассмотрим полную ортонормированную систему $\{\phi_j(x)\}_{j=0}^{\infty}$ на отрезке $[t, T]$.

Будем говорить, что эта система удовлетворяет условию $(*)$, если система $\{\phi_j(x)\}_{j=0}^{\infty}$ такова, что для всякой функции k переменных, которая непрерывна на $[t, T]^k$ и принадлежит классу $C^1([t, T]^k)$ ее кратный ряд Фурье (суммируемый методом прямоугольных сумм) на $[t, T]^k$, построенный по системе функций $\{\phi_j(x)\}_{j=0}^{\infty}$, сходится равномерно к этой функции в $[t, T]^k$ и сходится на границе $[t, T]^k$.

В 1967г. Л.В. Жижиашвили установил, что прямоугольные суммы кратного тригонометрического ряда Фурье в гиперкубе $[t,T]^k$ функции k переменных сходятся равномерно в гиперкубе к этой функции, если она принадлежит $C^{\alpha}([t,T]^k)$; $\alpha > 0$ (определение класса Гельдера с показателем $\alpha > 0$ см. в [188]).

Известно также, что для справедливости аналогичного утверждения для рядов Фурье–Хаара, по крайней мере для двумерного случая, достаточно одной непрерывности функции двух переменных в квадрате $[t,T]^2$.

Автор полагает, что для двойных рядов Фурье–Лежандра аналогичная формулировка будет верной, если функция двух переменных принадлежит $C^1([t,T]^2)$. Если же этого условия недостаточно, то по крайней мере результат будет верным, если функция постоянна в $[t,T]^2$ (это соответствует $\psi_i(\tau) \equiv 1$; $i = 1,2,3$ в дальнейших рассуждениях).

Отметим также, что согласно (6.70), (6.71) формула (5.47) верна по крайней мере и при $\psi_1(\tau) \equiv t-\tau$, $\psi_2(\tau) \equiv 1$; $\psi_1(\tau) \equiv 1$, $\psi_2(\tau) \equiv t-\tau$; $\psi_1(\tau), \psi_2(\tau) \equiv t-\tau$; $\psi_1(\tau) \equiv (t-\tau)^2$, $\psi_2(\tau) \equiv 1$; $\psi_1(\tau) \equiv 1$, $\psi_2(\tau) \equiv (t-\tau)^2$; $\tau \in [t,T]$.

Рассмотрим вспомогательную функцию:

$$K'(t_1,t_2) = \begin{cases} \psi_2(t_1)\psi_1(t_2), & t_1 \geq t_2 \\ \psi_1(t_1)\psi_2(t_2), & t_1 \leq t_2 \end{cases}, \quad t_1,t_2 \in [t,T]$$

и покажем, что она принадлежит $C^1([t,T]^2)$.

Рассмотрим приращение: $\Delta K' = K'(t_1,t_2) - K'(t_1^*,t_2^*)$, где

$$\sqrt{(t_1-t_1^*)^2 + (t_2-t_2^*)^2} < \delta, \ (t_1,t_2), \ (t_1^*,t_2^*) \in [t,T]^2.$$

По формуле Лагранжа для $\psi_1(t_1^*)$, $\psi_2(t_1^*)$ на $[\min\{t_1,t_1^*\}, \max\{t_1,t_1^*\}]$ и для $\psi_1(t_2^*)$, $\psi_2(t_2^*)$ на $[\min\{t_2,t_2^*\}, \max\{t_2,t_2^*\}]$ придем к представлению:

$$\Delta K' = \begin{cases} \psi_2(t_1)\psi_1(t_2), & t_1 \geq t_2 \\ \psi_1(t_1)\psi_2(t_2), & t_1 \leq t_2 \end{cases} - \begin{cases} \psi_2(t_1)\psi_1(t_2), & t_1^* \geq t_2^* \\ \psi_1(t_1)\psi_2(t_2), & t_1^* \leq t_2^* \end{cases} + O(\delta).$$

Далее понятно, что разность, стоящая в правой части последнего равенства отлична от нуля и равна

$$\pm(\psi_1(t_1)\psi_2(t_2) - \psi_1(t_2)\psi_2(t_1)) + O(\delta) \tag{5.50}$$

на множестве: $\mathcal{M} = \{(t_1,t_2) : \min\{t_1, t_1+\varepsilon\} \leq t_2 \leq \max\{t_1, t_1+\varepsilon\};\ t_1 \in [t,T]\}$, где $\varepsilon = (t_1^* - t_1) - (t_2^* - t_2) = O(\delta)$.

Поскольку на множестве $\mathcal{M}$: $|t_2 - t_1| = O(\delta)$, то применяя формулу Лагранжа к $\psi_2(t_2)$, $\psi_1(t_2)$ на отрезке $[\min\{t_1,t_2\},\ \max\{t_1,t_2\}]$ и подставляя результат в (5.50), получим, что $K'(t_1,t_2) \in C^1([t,T]^2)$.

Разложим функцию $K'(t_1,t_2)$ в квадрате $[t,T]^2$ в кратный ряд Фурье, суммируемый методом прямоугольных сумм, т.е.

$$K'(t_1,t_2)=\lim_{n_1,n_2\to\infty}\sum_{j_1=0}^{n_1}\sum_{j_2=0}^{n_2}\int\limits_t^T\int\limits_t^T K'(t_1,t_2)\phi_{j_1}(t_1)\phi_{j_2}(t_2)dt_1dt_2\cdot\phi_{j_1}(t_1)\phi_{j_2}(t_2)=$$

$$=\lim_{n_1,n_2\to\infty}\sum_{j_1=0}^{n_1}\sum_{j_2=0}^{n_2}\left(\int\limits_t^T\psi_2(t_2)\phi_{j_2}(t_2)\left(\int\limits_t^{t_2}\psi_1(t_1)\phi_{j_1}(t_1)dt_1\right)dt_2+\right.$$

$$\left.+\int\limits_t^T\psi_1(t_2)\phi_{j_2}(t_2)\left(\int\limits_{t_2}^T\psi_2(t_1)\phi_{j_1}(t_1)dt_1\right)dt_2\right)\phi_{j_1}(t_1)\phi_{j_2}(t_2)=$$

$$=\lim_{n_1,n_2\to\infty}\sum_{j_1=0}^{n_1}\sum_{j_2=0}^{n_2}\left(C_{j_2j_1}+C_{j_1j_2}\right)\phi_{j_1}(t_1)\phi_{j_2}(t_2). \qquad (5.51)$$

При получении (5.51) мы заменили порядок интегрирования во втором повторном интеграле.

Нетрудно видеть, что положив $t_1=t_2$ в (5.51), разбив предел в правой части полученного равенства на два предела и заменив j_1 на j_2, j_2 на j_1, n_1 на n_2 и n_2 на n_1 во втором пределе, получим

$$\psi_1(t_1)\psi_2(t_1)=2\lim_{n_1,n_2\to\infty}\sum_{j_1=0}^{n_1}\sum_{j_2=0}^{n_2}C_{j_2j_1}\phi_{j_1}(t_1)\phi_{j_2}(t_1).$$

Требуемое равенство получено.

Таким образом справедлива

Теорема 5.2 *Пусть выполнены следующие условия:*

1. $\psi_1(\tau),\psi_2(\tau)$ — *непрерывно дифференцируемые на промежутке* $[t,T]$ *функции;*

2. $\{\phi_j(x)\}_{j=0}^{\infty}$ — *полная ортонормированная на отрезке* $[t,T]$ *система функций, которая удовлетворяет при* $k=2$ *условию* $(*)$ *на с.* 237, *причем каждая ее функция при конечном* j *удовлетворяет условию* $(\star)$ *на с.* 229.

Тогда повторный стохастический интеграл Стратоновича второй кратности

$$J^*[\psi^{(2)}]_{T,t}=\int\limits_t^{*T}\psi_2(t_2)\int\limits_t^{*t_2}\psi_1(t_1)d\mathbf{f}_{t_1}^{(i_1)}d\mathbf{f}_{t_2}^{(i_2)}\ \ (i_1,i_2=1,\ldots,m)$$

разлагается в сходящийся в среднеквадратическом смысле кратный ряд

$$J^*[\psi^{(2)}]_{T,t}=\sum_{j_1,j_2=0}^{\infty}C_{j_2j_1}\zeta_{j_1}^{(i_1)}\zeta_{j_2}^{(i_2)},$$

где сохранен смысл обозначений, введенных в формулировке теоремы 5.1.

Приведем разложения повторных стохастических интегралов Стратоновича первой и второй кратностей с помощью формулы (5.49) и полиномов Лежандра, тригонометрических функций, функций Хаара и функций Радемахера–Уолша.

С помощью полиномов Лежандра:

$$\int\limits_t^{*T} d\mathbf{f}_\tau^{(i_1)} = \sqrt{T-t}\zeta_0^{(i_1)},$$

$$\int\limits_t^{*T} (t-\tau)d\mathbf{f}_\tau^{(i_1)} = -\frac{(T-t)^{3/2}}{2}\left(\zeta_0^{(i_1)} + \frac{1}{\sqrt{3}}\zeta_1^{(i_1)}\right),$$

$$\int\limits_t^{*T}\int\limits_t^{*s} d\mathbf{f}_\tau^{(i_1)} d\mathbf{f}_s^{(i_2)} = \frac{T-t}{2}\left[\zeta_0^{(i_1)}\zeta_0^{(i_2)} + \sum_{i=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{4i^2-1}}\left\{\zeta_{i-1}^{(i_1)}\zeta_i^{(i_2)} - \zeta_i^{(i_1)}\zeta_{i-1}^{(i_2)}\right\}\right].$$

Для системы тригонометрических функций:

$$\int\limits_t^{*T} d\mathbf{f}_\tau^{(i_1)} = \sqrt{T-t}\zeta_0^{(i_1)},$$

$$\int\limits_t^{*T} (t-\tau)d\mathbf{f}_\tau^{(i_1)} = -\frac{(T-t)^{\frac{3}{2}}}{2}\left[\zeta_0^{(i_1)} + \frac{\sqrt{2}}{\pi}\sum_{r=1}^{\infty}\frac{1}{r}\zeta_{2r-1}^{(i_1)}\right],$$

$$\int\limits_t^{*T}\int\limits_t^{*s} d\mathbf{f}_\tau^{(i_1)} d\mathbf{f}_s^{(i_2)} = \frac{1}{2}(T-t)\left[\zeta_0^{(i_1)}\zeta_0^{(i_2)} + \frac{1}{\pi}\sum_{r=1}^{\infty}\frac{1}{r}\left\{\zeta_{2r}^{(i_1)}\zeta_{2r-1}^{(i_2)} - \zeta_{2r-1}^{(i_1)}\zeta_{2r}^{(i_2)} + \right.\right.$$

$$\left.\left. + \sqrt{2}\left(\zeta_{2r-1}^{(i_1)}\zeta_0^{(i_2)} - \zeta_0^{(i_1)}\zeta_{2r-1}^{(i_2)}\right)\right\}\right].$$

С помощью системы функций Хаара:

$$\int\limits_t^{*T} d\mathbf{f}_\tau^{(i_1)} = \sqrt{T-t}\zeta_0^{(i_1)},$$

$$\int\limits_t^{*T} (t-\tau)d\mathbf{f}_\tau^{(i_1)} = -\frac{(T-t)^{\frac{3}{2}}}{2}\left(\zeta_0^{(i_1)} + \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{j=1}^{2^n}\bar{C}_{nj}\zeta_{nj}^{(i_1)}\right),$$

$$\int\limits_t^{*T}\int\limits_t^{*s} d\mathbf{f}_\tau^{(i_1)} d\mathbf{f}_s^{(i_2)} = \frac{T-t}{2}\left(\zeta_0^{(i_1)}\zeta_0^{(i_2)} + \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{j=1}^{2^n}\bar{C}_{nj}(\zeta_{nj}^{(i_2)}\zeta_0^{(i_1)} - \zeta_{nj}^{(i_1)}\zeta_0^{(i_2)}) + \right.$$

$$+\sum_{n_1,n_2=0}^{\infty}\sum_{j_1=1}^{2^{n_1}}\sum_{j_2=1}^{2^{n_2}}\bar{C}_{n_2j_2,n_1j_1}\zeta_{n_2j_2}^{(i_2)}\zeta_{n_1j_1}^{(i_1)}\Bigg),$$

где

$$\bar{C}_{nj}=2^{\frac{n}{2}}\left(2\left(\frac{j-1}{2^n}+\frac{1}{2^{n+1}}\right)^2-\left(\frac{j-1}{2^n}\right)^2-\left(\frac{j}{2^n}\right)^2\right),$$

$$\bar{C}_{n_2j_2,n_1j_1}=2^{\frac{n_1+n_2}{2}}\Bigg(\Bigg(\left(\min\left\{\frac{j_2-1}{2^{n_2}}+\frac{1}{2^{n_2+1}},\ \frac{j_1-1}{2^{n_1}}+\frac{1}{2^{n_1+1}}\right\}-\frac{j_1-1}{2^{n_1}}\right)^2$$

$$-\left(\max\left\{\frac{j_2-1}{2^{n_2}},\ \frac{j_1-1}{2^{n_1}}\right\}-\frac{j_1-1}{2^{n_1}}\right)^2\Bigg)\times$$

$$\times\mathbf{1}_{\left\{\max\left\{\frac{j_2-1}{2^{n_2}},\ \frac{j_1-1}{2^{n_1}}\right\}<\min\left\{\frac{j_2-1}{2^{n_2}}+\frac{1}{2^{n_2+1}},\ \frac{j_1-1}{2^{n_1}}+\frac{1}{2^{n_1+1}}\right\}\right\}}-$$

$$-\Bigg(\left(\min\left\{\frac{j_2}{2^{n_2}},\ \frac{j_1-1}{2^{n_1}}+\frac{1}{2^{n_1+1}}\right\}-\frac{j_1-1}{2^{n_1}}\right)^2-$$

$$-\left(\max\left\{\frac{j_2-1}{2^{n_2}}+\frac{1}{2^{n_2+1}},\ \frac{j_1-1}{2^{n_1}}\right\}-\frac{j_1-1}{2^{n_1}}\right)^2\Bigg)\times$$

$$\times\mathbf{1}_{\left\{\max\left\{\frac{j_2-1}{2^{n_2}}+\frac{1}{2^{n_2+1}},\ \frac{j_1-1}{2^{n_1}}\right\}<\min\left\{\frac{j_2}{2^{n_2}},\ \frac{j_1-1}{2^{n_1}}+\frac{1}{2^{n_1+1}}\right\}\right\}}+$$

$$+\Bigg(\left(\min\left\{\frac{j_2}{2^{n_2}},\ \frac{j_1}{2^{n_1}}\right\}-\frac{j_1}{2^{n_1}}\right)^2-$$

$$-\left(\max\left\{\frac{j_2-1}{2^{n_2}}+\frac{1}{2^{n_2+1}},\ \frac{j_1-1}{2^{n_1}}+\frac{1}{2^{n_1+1}}\right\}-\frac{j_1}{2^{n_1}}\right)^2\Bigg)\times$$

$$\times\mathbf{1}_{\left\{\max\left\{\frac{j_2-1}{2^{n_2}}+\frac{1}{2^{n_2+1}},\ \frac{j_1-1}{2^{n_1}}+\frac{1}{2^{n_1+1}}\right\}<\min\left\{\frac{j_2}{2^{n_2}},\ \frac{j_1}{2^{n_1}}\right\}\right\}}-$$

$$-\Bigg(\left(\min\left\{\frac{j_2-1}{2^{n_2}}+\frac{1}{2^{n_2+1}},\ \frac{j_1}{2^{n_1}}\right\}-\frac{j_1}{2^{n_1}}\right)^2-$$

$$-\left(\max\left\{\frac{j_2-1}{2^{n_2}},\ \frac{j_1-1}{2^{n_1}}+\frac{1}{2^{n_1+1}}\right\}-\frac{j_1}{2^{n_1}}\right)^2\Bigg)\times$$

$$\times\mathbf{1}_{\left\{\max\left\{\frac{j_2-1}{2^{n_2}},\ \frac{j_1-1}{2^{n_1}}+\frac{1}{2^{n_1+1}}\right\}<\min\left\{\frac{j_2-1}{2^{n_2}}+\frac{1}{2^{n_2+1}},\ \frac{j_1}{2^{n_1}}\right\}\right\}}\Bigg);$$

$\zeta_0^{(i)}=\int\limits_t^T\phi_0(\tau)d\mathbf{f}_\tau^{(i)}$, $\zeta_{nj}^{(l)}=\int\limits_t^T\phi_{nj}(\tau)d\mathbf{f}_\tau^{(l)}$; $n=0,\ 1,\ldots;\ j=1,\ 2,\ldots,\ 2^n$ — независимые в совокупности по нижним индексам или при $i\neq l$ $(i,\ l=1,\ldots,m)$ N(0, 1)-распределенные случайные величины; $i_1,\ i_2=1,\ldots,m$.

Для системы функций Радемахера–Уолша:

$$\int\limits_t^{*T}d\mathbf{f}_\tau^{(i_1)}=\sqrt{T-t}\zeta_0^{(i_1)},$$

$$\int\limits_t^{*T}(t-\tau)d\mathbf{f}_\tau^{(i_1)}=-\frac{(T-t)^{\frac{3}{2}}}{2}\Biggl(\zeta_0^{(i_1)}+\sum_{\substack{1\le m_1<\ldots<m_k\le\infty\\ 1\le k\le\infty}}\bar{C}_{m_1\ldots m_k}\zeta_{m_1\ldots m_k}^{(i_1)}\Biggr),$$

$$\int\limits_t^{*T}\int\limits_t^{*s}d\mathbf{f}_\tau^{(i_1)}d\mathbf{f}_s^{(i_2)}=\frac{T-t}{2}\Biggl(\zeta_0^{(i_1)}\zeta_0^{(i_2)}+$$

$$+\sum_{\substack{1\le m_1<\ldots<m_k\le\infty\\ 1\le k\le\infty}}\bar{C}_{m_1\ldots m_k}(\zeta_{m_1\ldots m_k}^{(i_2)}\zeta_0^{(i_1)}-\zeta_{m_1\ldots m_k}^{(i_1)}\zeta_0^{(i_2)})+$$

$$+\sum_{\substack{1\le n_1<\ldots<n_{k_1}\le\infty\\ 1\le m_1<\ldots<m_{k_2}\le\infty\\ 1\le k_1,k_2\le\infty}}\bar{C}_{n_1\ldots n_{k_2},m_1\ldots m_{k_1}}\zeta_{n_1\ldots n_{k_2}}^{(i_2)}\zeta_{m_1\ldots m_{k_1}}^{(i_1)}\Biggr),$$

где

$$\bar{C}_{m_1\ldots m_k}=\sum_{s_1=0}^{2^{m_1}-1}(-1)^{s_1}\ldots\sum_{s_k=0}^{2^{m_k}-1}(-1)^{s_k}\times$$

$$\times\mathbf{1}_{\left\{\max\left\{\frac{s_1}{2^{m_1}},\ldots,\frac{s_k}{2^{m_k}}\right\}<\min\left\{\frac{s_1+1}{2^{m_1}},\ldots,\frac{s_k+1}{2^{m_k}}\right\}\right\}}\times$$

$$\times\Biggl(\Biggl(\min\Biggl\{\frac{s_1+1}{2^{m_1}},\ldots,\frac{s_k+1}{2^{m_k}}\Biggr\}\Biggr)^2-\Biggl(\max\Biggl\{\frac{s_1}{2^{m_1}},\ldots,\frac{s_k}{2^{m_k}}\Biggr\}\Biggr)^2\Biggr),$$

$$\bar{C}_{n_1\ldots n_{k_2},m_1\ldots m_{k_1}}=\sum_{s_1=0}^{2^{m_1}-1}(-1)^{s_1}\ldots\sum_{s_{k_1}=0}^{2^{m_{k_1}}-1}(-1)^{s_{k_1}}\sum_{q_1=0}^{2^{n_1}-1}(-1)^{q_1}\ldots\sum_{q_{k_2}=0}^{2^{n_{k_2}}-1}(-1)^{q_{k_2}}\times$$

$$\times\mathbf{1}_{\left\{\max\left\{\frac{s_1}{2^{m_1}},\ldots,\frac{s_{k_1}}{2^{m_{k_1}}}\right\}<\min\left\{\frac{s_1+1}{2^{m_1}},\ldots,\frac{s_{k_1}+1}{2^{m_{k_1}}}\right\}\right\}}\mathbf{1}_{\left\{\max\left\{\frac{q_1}{2^{n_1}},\ldots,\frac{q_{k_2}}{2^{n_{k_2}}}\right\}<\min\left\{\frac{q_1+1}{2^{n_1}},\ldots,\frac{q_{k_2}+1}{2^{n_{k_2}}}\right\}\right\}}\times$$

$$\times\mathbf{1}_{\left\{\max\left\{\max\left\{\frac{q_1}{2^{n_1}},\ldots,\frac{q_{k_2}}{2^{n_{k_2}}}\right\},\max\left\{\frac{s_1}{2^{m_1}},\ldots,\frac{s_{k_1}}{2^{m_{k_1}}}\right\}\right\}<\min\left\{\min\left\{\frac{q_1+1}{2^{n_1}},\ldots,\frac{q_{k_2}+1}{2^{n_{k_2}}}\right\},\min\left\{\frac{s_1+1}{2^{m_1}},\ldots,\frac{s_{k_1}+1}{2^{m_{k_1}}}\right\}\right\}\right\}}$$

$$\times\Biggl(\Biggl(\min\Biggl\{\min\Biggl\{\frac{q_1+1}{2^{n_1}},\ldots,\frac{q_{k_2}+1}{2^{n_{k_2}}}\Biggr\},\min\Biggl\{\frac{s_1+1}{2^{m_1}},\ldots,\frac{s_{k_1}+1}{2^{m_{k_1}}}\Biggr\}\Biggr\}-$$

$$-\max\Biggl\{\frac{s_1}{2^{m_1}},\ldots,\frac{s_{k_1}}{2^{m_{k_1}}}\Biggr\}\Biggr)^2-$$

$$-\Biggl(\max\Biggl\{\max\Biggl\{\frac{q_1}{2^{n_1}},\ldots,\frac{q_{k_2}}{2^{n_{k_2}}}\Biggr\},\max\Biggl\{\frac{s_1}{2^{m_1}},\ldots,\frac{s_{k_1}}{2^{m_{k_1}}}\Biggr\}\Biggr\}-$$

$$-\max\Biggl\{\frac{s_1}{2^{m_1}},\ldots,\frac{s_{k_1}}{2^{m_{k_1}}}\Biggr\}\Biggr)^2\Biggr)+$$

$$+2\cdot\mathbf{1}_{\left\{\max\left\{\max\left\{\frac{q_1}{2^{n_1}},\ldots,\frac{q_{k_2}}{2^{n_{k_2}}}\right\},\min\left\{\frac{s_1+1}{2^{m_1}},\ldots,\frac{s_{k_1}+1}{2^{m_{k_1}}}\right\}\right\}<\min\left\{\min\left\{\frac{q_1+1}{2^{n_1}},\ldots,\frac{q_{k_2}+1}{2^{n_{k_2}}}\right\},\ 1\right\}\right\}}$$

$$\times\left(\min\left\{\frac{s_1+1}{2^{m_1}},\ldots,\frac{s_{k_1}+1}{2^{m_{k_1}}}\right\}-\max\left\{\frac{s_1}{2^{m_1}},\ldots,\frac{s_{k_1}}{2^{m_{k_1}}}\right\}\right)\times$$

$$\times\left(\min\left\{\min\left\{\frac{q_1+1}{2^{n_1}},\ldots,\frac{q_{k_2}+1}{2^{n_{k_2}}}\right\},\ 1\right\}-\right.$$

$$\left.-\max\left\{\max\left\{\frac{q_1}{2^{n_1}},\ldots,\frac{q_{k_2}}{2^{n_{k_2}}}\right\},\min\left\{\frac{s_1+1}{2^{m_1}},\ldots,\frac{s_{k_1}+1}{2^{m_{k_1}}}\right\}\right\}\right);$$

$\zeta_0^{(p)}=\int\limits_t^T\phi_0(\tau)d\mathbf{f}_\tau^{(p)}$, $\zeta_{m_1\ldots m_k}^{(g)}=\int\limits_t^T\phi_{m_1\ldots m_k}(\tau)d\mathbf{f}_\tau^{(g)}$; $0<m_1<\ldots<m_k$; $k,\ m_1,\ldots,\ m_k=1,\ 2,\ldots$ — независимые в совокупности по нижним индексам или при $p\neq g$ $(p,\ g=1,\ldots,m)$ $\mathrm{N}(0,\ 1)$-распределенные случайные величины; $i_1,\ i_2=1,\ldots,m$.

По-видимому, из-за своей сложности (по сравнению с разложениями по полиномам Лежандра и тригонометрическим функциям), приведенные разложения с помощью систем Хаара и Радемахера–Уолша представляют скорее теоретический, нежели практический интерес.

Сделаем еще некоторые замечания в рамках рассматриваемого вопроса.

Заметим, что верно следующее утверждение.

Пусть $\xi_{n,m},\ \mu_m,\ \rho_n;\ n,\ m=0,\ 1,\ 2,\ldots$ — *последовательности случайных величин, причем*

$$\underset{n,m\to\infty}{\mathrm{l.i.m.}}\ \xi_{n,m}=\zeta,\ \underset{n\to\infty}{\mathrm{l.i.m.}}\ \xi_{n,m}=\mu_m,\ \underset{m\to\infty}{\mathrm{l.i.m.}}\ \xi_{n,m}=\rho_n,$$

где ζ — *случайная величина. Тогда*

$$\lim_{n\to\infty}\lim_{m\to\infty}\mathsf{M}\{(\xi_{n,m}-\zeta)^2\}=\lim_{m\to\infty}\lim_{n\to\infty}\mathsf{M}\{(\xi_{n,m}-\zeta)^2\}=0.$$

Обоснование этого факта проводится также, как и в детерминированном случае с использованием неравенства: $\mathsf{M}\{(x-y)^2\}\le 2\mathsf{M}\{(x-z)^2\}+2\mathsf{M}\{(z-y)^2\}$ вместо неравенства: $|x-y|\le|x-z|+|z-y|$.

Положим

$$\xi_{n,m}=\sum_{j_1=0}^{n}\sum_{j_2=0}^{m}C_{j_2j_1}\zeta_{j_1}^{(i_1)}\zeta_{j_2}^{(i_2)},\ \zeta=J^*[\psi^{(2)}]_{T,t}.$$

В качестве μ_m и ρ_n можно взять

$$\sum_{j_2=0}^{m}\left(\sum_{j_1=0}^{\infty}C_{j_2j_1}\zeta_{j_1}^{(i_1)}\right)\zeta_{j_2}^{(i_2)}\ \text{и}\ \sum_{j_1=0}^{n}\left(\sum_{j_2=0}^{\infty}C_{j_2j_1}\zeta_{j_2}^{(i_2)}\right)\zeta_{j_1}^{(i_1)}$$

соответственно.

Действительно, поскольку

$$\mathsf{M}\{(\xi_{n,m}-\mu_m)^2\}=\sum_{j_2=0}^{m}\sum_{j_1=n+1}^{\infty}C_{j_2j_1}^2;\ \mathsf{M}\{(\xi_{n,m}-\rho_n)^2\}=\sum_{j_1=0}^{n}\sum_{j_2=m+1}^{\infty}C_{j_2j_1}^2;$$

$$\sum_{j_1=0}^{n}C_{j_2j_1}^2\le\sum_{j_1,j_2=0}^{\infty}C_{j_2j_1}^2;\ \sum_{j_2=0}^{m}C_{j_2j_1}^2\le\sum_{j_1,j_2=0}^{\infty}C_{j_2j_1}^2;$$

$$\sum_{j_1,j_2=0}^{\infty}C_{j_2j_1}^2=\int\limits_{[t,T]^2}K^2(t_1,t_2)dt_1dt_2<\infty,$$

то

$$\underset{n\to\infty}{\text{l.i.m.}}\ \xi_{n,m}=\mu_m,\ \underset{m\to\infty}{\text{l.i.m.}}\ \xi_{n,m}=\rho_n.$$

Тогда, воспользовавшись приведенным выше утверждением, получим

$$J^*[\psi^{(2)}]_{T,t}=\sum_{j_1=0}^{\infty}\sum_{j_2=0}^{\infty}C_{j_2j_1}\zeta_{j_1}^{(i_1)}\zeta_{j_2}^{(i_2)},\ J^*[\psi^{(2)}]_{T,t}=\sum_{j_2=0}^{\infty}\sum_{j_1=0}^{\infty}C_{j_2j_1}\zeta_{j_1}^{(i_1)}\zeta_{j_2}^{(i_2)},$$

где ряды сходятся в среднеквадратическом смысле, т.е., например, для первого случая

$$\lim_{n\to\infty}\lim_{m\to\infty}\mathsf{M}\left\{\left(J^*[\psi^{(2)}]_{T,t}-\sum_{j_1=0}^{n}\sum_{j_2=0}^{m}C_{j_2j_1}\zeta_{j_1}^{(i_1)}\zeta_{j_2}^{(i_2)}\right)^2\right\}=0.$$

Кажется вполне естественной возможность обобщения теоремы 5.2 на случай повторных стохастических интегралов Стратоновича произвольной кратности. Однако, данный вопрос, как показано в следующем разделе, оказался весьма непростым.

5.6 О разложениях повторных стохастических интегралов Стратоновича третьей кратности

Исследуя вопрос о возможности обобщения теоремы 5.2 на случай повторных стохастических интегралов Стратоновича 3 кратности, автор не получил общих результатов. Однако, им был замечен ряд интересных и полезных для практики фактов. В частности, в данном разделе будет показано, что в случае $\psi_1(\tau)$, $\psi_2(\tau)$, $\psi_3(\tau)\equiv 1$; $i_1,i_2,i_3=1,\ldots,m$ и системы полиномов Лежандра или системы тригонометрических функций обобщение теоремы 5.2 для стохастических интегралов Стратоновича 3 кратности является верным.

В данном разделе также будет рассмотрена более общая ситуация, для которой, с помощью полученных в данном разделе формул, возможно сформулировать достаточные условия справедливости обобщения теоремы 5.2 для стохастических интегралов Стратоновича 3 кратности в более общем случае в терминах сходимости числовых рядов.

На протяжении разд. 5.6 и 5.7 под $\{\phi_j(x)\}_{j=0}^{\infty}$ будем понимать полные ортонормированные на отрезке $[t,T]$ системы полиномов Лежандра или тригонометрических функций.

В указанных разделах будем также обращать внимание на следующие общеизвестные факты относительно этих двух систем функций.

Пусть $f(x)$ — ограниченная на отрезке $[t,T]$ и кусочно-гладкая на открытом интервале (t,T) функция. Тогда ряд Фурье $\sum\limits_{j=0}^{\infty} C_j\phi_j(x)$; $C_j = \int\limits_t^T f(x)\phi_j(x)dx$ сходится во всякой внутренней точке x промежутка $[t,T]$ к величине $\frac{1}{2}\left(f(x-0)+f(x+0)\right)$ и сходится к $f(x)$ в любом замкнутом интервале непрерывности $f(x)$, лежащем внутри $[t,T]$. При этом ряд Фурье по полиномам Лежандра сходится при $x=t$ и $x=T$ к $f(t+0)$ и $f(T-0)$ соответственно, а тригонометрический ряд Фурье сходится при $x=t$ и $x=T$ к $\frac{1}{2}\left(f(t+0)+f(T-0)\right)$ в случае периодического продолжения функции $f(x)$.

Итак, попытаемся развить подход, изложенный в предыдущем разделе для повторных стохастических интегралов Стратоновича 3 кратности.

Запишем соотношение, связывающее с в.1 упомянутые интегралы третьей кратности:

$$J^*[\psi^{(3)}]_{T,t} = J[\psi^{(3)}]_{T,t} + \frac{1}{2}\mathbf{1}_{\{i_1=i_2\ne 0\}}\int\limits_t^T \psi_3(t_3)\int\limits_t^{t_3}\psi_2(t_2)\psi_1(t_2)dt_2 d\mathbf{f}_{t_3}^{(i_3)}+$$

$$+\frac{1}{2}\mathbf{1}_{\{i_2=i_3\ne 0\}}\int\limits_t^T \psi_3(t_3)\psi_2(t_3)\int\limits_t^{t_3}\psi_1(t_1)d\mathbf{f}_{t_1}^{(i_1)}dt_3, \qquad (5.52)$$

где $\psi_1(\tau)$, $\psi_2(\tau)$, $\psi_3(\tau)$ — непрерывно дифференцируемые на промежутке $[t,T]$ функции.

Отсюда видно, что имеются следующие частные случаи: 1. i_1,i_2,i_3 попарно различны; 2. $i_1=i_2\ne i_3$; 3. $i_1\ne i_2=i_3$; 4. $i_1=i_3\ne i_2$; 5. $i_1=i_2=i_3$. Здесь предполагается, что $i_1,i_2,i_3=1,\ldots,m$.

Ясно, что в первом случае повторные стохастические интегралы Стратоновича и Ито просто совпадают (это же касается и произвольной кратности k), поэтому к этим интегралам применима теорема 5.1.

Перейдем к рассмотрению второго частного случая.

Из теоремы 5.1 при $i_1 = i_2 \neq i_3$ следует, что

$$J[\psi^{(3)}]_{T,t} = \sum_{j_1,j_2,j_3=0}^{\infty} C_{j_3 j_2 j_1} \Bigl(\zeta_{j_1}^{(i_1)} \zeta_{j_2}^{(i_1)} \zeta_{j_3}^{(i_3)} - \mathbf{1}_{\{j_1=j_2\}} \zeta_{j_3}^{(i_3)} \Bigr).$$

Если бы последнее равенство можно было переписать в виде

$$J[\psi^{(3)}]_{T,t} = \sum_{j_1,j_2,j_3=0}^{\infty} C_{j_3 j_2 j_1} \zeta_{j_1}^{(i_1)} \zeta_{j_2}^{(i_1)} \zeta_{j_3}^{(i_3)} - \sum_{j_1,j_3=0}^{\infty} C_{j_3 j_1 j_1} \zeta_{j_3}^{(i_3)}$$

и удалось бы показать, что в среднеквадратическом смысле

$$\sum_{j_1,j_3=0}^{\infty} C_{j_3 j_1 j_1} \zeta_{j_3}^{(i_3)} = \frac{1}{2} \int\limits_t^T \psi_3(t_3) \int\limits_t^{t_3} \psi_2(t_1) \psi_1(t_1) dt_1 d\mathbf{f}_{t_3}^{(i_3)}, \tag{5.53}$$

то мы тогда получили бы

$$J^*[\psi^{(3)}]_{T,t} = \sum_{j_1,j_2,j_3=0}^{\infty} C_{j_3 j_2 j_1} \prod_{l=1}^{3} \zeta_{j_l}^{(i_l)} \ (i_1 = i_2 \neq i_3), \tag{5.54}$$

где ряд сходится в среднеквадратическом смысле.

Автор не располагает доказательством равенства (5.53) в общем случае (забегая вперед отметим, что данное равенство выполняется в некоторых практически важных случаях). Покажем лишь, что

$$\sum_{j_3=0}^{\infty} \sum_{j_1=0}^{\infty} C_{j_3 j_1 j_1} \zeta_{j_3}^{(i_3)} = \frac{1}{2} \int\limits_t^T \psi_3(t_3) \int\limits_t^{t_3} \psi_2(t_1) \psi_1(t_1) dt_1 d\mathbf{f}_{t_3}^{(i_3)}, \tag{5.55}$$

где ряд сходится в среднеквадратическом смысле.

Согласно теореме 3.1 последнее равенство можно переписать в виде

$$\sum_{j_3=0}^{\infty} \sum_{j_1=0}^{\infty} C_{j_3 j_1 j_1} \zeta_{j_3}^{(i_3)} = \frac{1}{2} \int\limits_t^T \psi_1(t_1) \psi_2(t_1) \int\limits_{t_1}^T \psi_3(t_3) d\mathbf{f}_{t_3}^{(i_3)} dt_1.$$

Покажем, что

$$K_2(t_1, t_3) = \begin{cases} \frac{1}{2} \psi_3(t_3) \psi_1(t_1) \psi_2(t_1), & t_1 < t_3 \\ 0, & t_1 > t_3 \\ \frac{1}{6} \psi_3(t_1) \psi_1(t_1) \psi_2(t_1), & t_1 = t_3 \end{cases} =$$

$$= \sum_{j_3=0}^{\infty} \sum_{j_2,j_1=0}^{\infty} C_{j_3 j_2 j_1} \phi_{j_1}(t_1) \phi_{j_2}(t_1) \phi_{j_3}(t_3), \tag{5.56}$$

где $t_1, t_3 \in [t,T]$ и сходимость рядов по t_1 и t_3 равномерная на интервалах непрерывности разлагаемых функций.

Рассмотрим вспомогательную функцию

$$K_2'(t_1,t_2,t_3) = \begin{cases} \psi_3(t_3)\psi_2(t_2)\psi_1(t_1), & t_1 \le t_2 < t_3 \\ \psi_3(t_3)\psi_1(t_2)\psi_2(t_1), & t_2 \le t_1 < t_3 \\ 0, & \text{иначе} \end{cases}, \ t_1,t_2,t_3 \in [t,T].$$

Зафиксируем t_1, t_2 и разложим функцию $K_2'(t_1,t_2,t_3)$ по переменной t_3 на отрезке $[t,T]$ в ряд Фурье.

$$K_2'(t_1,t_2,t_3) = \sum_{j_3=0}^{\infty}\Bigl(\psi_1(t_1)\psi_2(t_2)\int\limits_{t_2}^{T}\psi_3(t_3)\phi_{j_3}(t_3)dt_3\mathbf{1}_{\{t_1<t_2\}}+$$

$$+\psi_1(t_1)\psi_2(t_2)\int\limits_{t_2}^{T}\psi_3(t_3)\phi_{j_3}(t_3)dt_3\mathbf{1}_{\{t_1=t_2\}}+$$

$$+\psi_1(t_2)\psi_2(t_1)\int\limits_{t_1}^{T}\psi_3(t_3)\phi_{j_3}(t_3)dt_3\mathbf{1}_{\{t_2<t_1\}}\Bigr)\phi_{j_3}(t_3) \quad (t_3 \ne t_1,\ t_2). \qquad (5.57)$$

Нетрудно видеть, что функция, стоящая в скобках, имеет вид

$$\tilde{K}_{j_3}(t_1,t_2) = \begin{cases} \psi_1(t_1)\Psi_{j_3}(t_2), & t_1 \le t_2 \\ \psi_1(t_2)\Psi_{j_3}(t_1), & t_2 \le t_1 \end{cases}; \ \Psi_{j_3}(s) = \psi_2(s)\int\limits_{s}^{T}\psi_3(t_3)\phi_{j_3}(t_3)dt_3.$$

Поэтому эта функция принадлежит классу Гельдера $C^1([t,T]^2)$ (см. предыдущий раздел). Разложим ее в квадрате $[t,T]^2$ в кратный ряд Фурье, суммируемый по Принсгейму и подставим результат в (5.57):

$$K_2'(t_1,t_2,t_3) = \sum_{j_3=0}^{\infty}\lim_{p_1,p_2\to\infty}\sum_{j_1=0}^{p_1}\sum_{j_2=0}^{p_2}\left(C_{j_3j_2j_1}+C_{j_3j_1j_2}\right)\phi_{j_1}(t_1)\phi_{j_2}(t_2)\phi_{j_3}(t_3).$$

Полагая в этом равенстве (оно верно при $t_3 \ne t_1,\ t_2$) $t_1 = t_2$ получаем (см. предыдущий раздел)

$$\frac{1}{2}K_2'(t_1,t_1,t_3) = \sum_{j_3=0}^{\infty}\sum_{j_2,j_1=0}^{\infty}C_{j_3j_2j_1}\phi_{j_1}(t_1)\phi_{j_2}(t_1)\phi_{j_3}(t_3) \quad (t_3 \ne t_1).$$

Рассмотрим вспомогательную функцию

$$K_4(t_1,t_2,t_3) = \begin{cases} \psi_3(t_3)\psi_2(t_2)\psi_1(t_1), & t_1 \le t_2 \le t_3 \\ \psi_3(t_3)\psi_1(t_2)\psi_2(t_1), & t_2 \le t_1 \le t_3 \\ \psi_1(t_3)\psi_3(t_2)\psi_2(t_1), & t_3 \le t_1 \le t_2 \\ \psi_2(t_3)\psi_3(t_2)\psi_1(t_1), & t_1 \le t_3 \le t_2 \\ \psi_1(t_3)\psi_2(t_2)\psi_3(t_1), & t_3 \le t_2 \le t_1 \\ \psi_2(t_3)\psi_1(t_2)\psi_3(t_1), & t_2 \le t_3 \le t_1 \end{cases}, \ t_1,t_2,t_3 \in [t,T].$$

Разложим эту функцию в кубе $[t,T]^3$ в кратный ряд Фурье, суммируемый по Принсгейму:

$$K_4(t_1,t_2,t_3)=\lim_{n_1,n_2,n_3\to\infty}\sum_{j_1=0}^{n_1}\sum_{j_2=0}^{n_2}\sum_{j_3=0}^{n_3}C_{j_3j_2j_1}^{(1)}\prod_{l=1}^{3}\phi_{j_l}(t_l), \tag{5.58}$$

где

$$C_{j_3j_2j_1}^{(1)}=\int\limits_{[t,T]^3}K_4(t_1,t_2,t_3)\prod_{l=1}^{3}\phi_{j_l}(t_l)dt_1dt_2dt_3.$$

Функция $K_4(t_1,t_2,t_3)$ подобрана так, чтобы после использования свойства аддитивности римановых интегралов и использования замены порядка интегрирования в этих интегралах мы пришли к равенству:

$$C_{j_3j_2j_1}^{(1)}=C_{j_3j_2j_1}+C_{j_3j_1j_2}+C_{j_2j_1j_3}+C_{j_2j_3j_1}+C_{j_1j_2j_3}+C_{j_1j_3j_2}. \tag{5.59}$$

Подставляя (5.59) в (5.58), полагая в полученном равенстве $t_1=t_2=t_3$ и разбивая предел в правой части полученного равенства на 6 пределов получаем

$$\frac{1}{6}\psi_1(t_1)\psi_2(t_1)\psi_3(t_1)=\sum_{j_1,j_2,j_3=0}^{\infty}C_{j_3j_2j_1}\phi_{j_1}(t_1)\phi_{j_2}(t_1)\phi_{j_3}(t_1).$$

В силу того, что

$$\sum_{j_1,j_2=0}^{\infty}C_{j_3j_2j_1}\phi_{j_1}(t_1)\phi_{j_2}(t_1)=\frac{1}{2}\tilde{K}_{j_3}(t_1,t_1)=\psi_1(t_1)\psi_2(t_1)\int\limits_{t_1}^{T}\psi_3(s)\phi_{j_3}(s)ds$$

и, в силу известного утверждения о сведении предела к повторному, приходим к (5.56).

Полученные результаты доказывают (5.56).

Рассмотрим

$$\mathsf{M}\left\{\left(\frac{1}{2}\psi_1(t_1)\psi_2(t_1)\int\limits_{t_1}^{T}\psi_3(t_3)d\mathbf{f}_{t_3}^{(i_3)}-\sum_{j_3=0}^{n}\zeta_{j_3}^{(i_3)}\sum_{j_1,j_2=0}^{\infty}C_{j_3j_2j_1}\phi_{j_1}(t_1)\phi_{j_2}(t_1)\right)^2\right\}=$$

$$=\mathsf{M}\left\{\left(\int\limits_{t}^{T}\left(K_2(t_1,t_3)-\sum_{j_3=0}^{n}\phi_{j_3}(t_3)\sum_{j_1,j_2=0}^{\infty}C_{j_3j_2j_1}\phi_{j_1}(t_1)\phi_{j_2}(t_1)\right)d\mathbf{f}_{t_3}^{(i_3)}\right)^2\right\}=$$

$$=\int\limits_{t}^{T}\left(K_2(t_1,t_3)-\sum_{j_3=0}^{n}\phi_{j_3}(t_3)\sum_{j_1,j_2=0}^{\infty}C_{j_3j_2j_1}\phi_{j_1}(t_1)\phi_{j_2}(t_1)\right)^2dt_3.$$

Правая часть последнего равенства стремится к нулю при $n \to \infty$ в силу равномерной сходимости ряда по $t_3 \in (t, T)$ при $t_3 \neq t_1$ (t_1 фиксировано).

Таким образом, в среднеквадратическом смысле

$$\sum_{j_3=0}^{\infty} \zeta_{j_3}^{(i_3)} \sum_{j_1,j_2=0}^{\infty} C_{j_3 j_2 j_1} \phi_{j_1}(t_1)\phi_{j_2}(t_1) = \frac{1}{2}\psi_1(t_1)\psi_2(t_1) \int\limits_{t_1}^{T} \psi_3(t_3) d\mathbf{f}_{t_3}^{(i_3)}.$$

С учетом равенства Парсеваля имеем

$$\mathsf{M}\Biggl\{\Biggl(\int\limits_{t}^{T} \sum_{j_3=0}^{\infty} \zeta_{j_3}^{(i_3)} \sum_{j_1,j_2=0}^{\infty} C_{j_3 j_2 j_1} \phi_{j_1}(t_1)\phi_{j_2}(t_1) dt_1 -$$

$$- \int\limits_{t}^{T} \sum_{j_3=0}^{n} \zeta_{j_3}^{(i_3)} \sum_{j_1,j_2=0}^{\infty} C_{j_3 j_2 j_1} \phi_{j_1}(t_1)\phi_{j_2}(t_1) dt_1\Biggr)^2\Biggr\} \leq$$

$$\leq L \int\limits_{t}^{T} \sum_{j_3=n+1}^{\infty} \Biggl(\sum_{j_1,j_2=0}^{\infty} C_{j_3 j_2 j_1} \phi_{j_1}(t_1)\phi_{j_2}(t_1)\Biggr)^2 dt_1 =$$

$$= L \int\limits_{t}^{T} \Biggl(\frac{1}{4}\psi_1^2(t_1)\psi_2^2(t_1) \int\limits_{t_1}^{T} \psi_3^2(t_3) dt_3 - \sum_{j_3=0}^{n} \Biggl(\sum_{j_1,j_2=0}^{\infty} C_{j_3 j_2 j_1} \phi_{j_1}(t_1)\phi_{j_2}(t_1)\Biggr)^2\Biggr) dt_1,$$

где L — постоянная.

В силу непрерывности (здесь $\phi_j(\tau)$ предполагаются непрерывными) и неубывания членов функциональной последовательности

$$u_n(t_1) = \sum_{j_3=0}^{n} \Biggl(\sum_{j_1,j_2=0}^{\infty} C_{j_3 j_2 j_1} \phi_{j_1}(t_1)\phi_{j_2}(t_1)\Biggr)^2,$$

а также в силу свойства непрерывности предельной функции $u(t_1) = \frac{1}{4}\psi_1^2(t_1)\psi_2^2(t_1) \int\limits_{t_1}^{T} \psi_3^2(t_3) dt_3$ по признаку Дини имеем равномерную сходимость $u_n(t_1)$ к $u(t_1)$ на отрезке $[t, T]$. Поэтому, осуществляя предельный переход под знаком интеграла в последнем равенстве, получаем, что в среднеквадратическом смысле

$$\sum_{j_3=0}^{\infty} \zeta_{j_3}^{(i_3)} \int\limits_{t}^{T} \sum_{j_1,j_2=0}^{\infty} C_{j_3 j_2 j_1} \phi_{j_1}(t_1)\phi_{j_2}(t_1) dt_1 = \frac{1}{2} \int\limits_{t}^{T} \psi_1(t_1)\psi_2(t_1) \int\limits_{t_1}^{T} \psi_3(t_3) d\mathbf{f}_{t_3}^{(i_3)} dt_1.$$

Меняя в левой части этого равенства знак интеграла и знак правого ряда, что возможно в силу равномерной сходимости последнего по

t_1 на отрезке $[t,T]$, и учитывая ортонормированность функций $\phi_j(\tau)$, приходим к (5.55).

Перейдем к рассмотрению третьего частного случая.

Из теоремы 5.1 при $i_1 \neq i_2 = i_3$ следует, что

$$J[\psi^{(3)}]_{T,t} = \sum_{j_1,j_2,j_3=0}^{\infty} C_{j_3 j_2 j_1} \Bigl(\zeta_{j_1}^{(i_1)} \zeta_{j_2}^{(i_1)} \zeta_{j_3}^{(i_3)} - \mathbf{1}_{\{j_2=j_3\}} \zeta_{j_1}^{(i_1)}\Bigr).$$

Опять таки, если бы можно было записать

$$J[\psi^{(3)}]_{T,t} = \sum_{j_1,j_2,j_3=0}^{\infty} C_{j_3 j_2 j_1} \zeta_{j_1}^{(i_1)} \zeta_{j_2}^{(i_1)} \zeta_{j_3}^{(i_3)} - \sum_{j_1,j_3=0}^{\infty} C_{j_3 j_3 j_1} \zeta_{j_1}^{(i_1)}$$

и удалось бы показать, что в среднеквадратическом смысле

$$\sum_{j_1,j_3=0}^{\infty} C_{j_3 j_3 j_1} \zeta_{j_1}^{(i_1)} = \frac{1}{2} \int\limits_t^T \psi_3(t_3)\psi_2(t_3) \int\limits_t^{t_3} \psi_1(t_1) d\mathbf{f}_{t_1}^{(i_1)} dt_3, \tag{5.60}$$

то в силу связи стохастических интегралов Ито и Стратоновича мы получили бы:

$$J^*[\psi^{(3)}]_{T,t} = \sum_{j_1,j_2,j_3=0}^{\infty} C_{j_3 j_2 j_1} \prod_{l=1}^{3} \zeta_{j_l}^{(i_l)} \ (i_1 \neq i_2 = i_3),$$

где ряд сходится в среднеквадратическом смысле.

Покажем лишь, что в среднеквадратическом смысле

$$\sum_{j_1=0}^{\infty} \sum_{j_3=0}^{\infty} C_{j_3 j_3 j_1} \zeta_{j_1}^{(i_1)} = \frac{1}{2} \int\limits_t^T \psi_3(t_3)\psi_2(t_3) \int\limits_t^{t_3} \psi_1(t_1) d\mathbf{f}_{t_1}^{(i_1)} dt_3. \tag{5.61}$$

Покажем, что

$$K_3(t_1,t_3) = \begin{cases} \frac{1}{2}\psi_3(t_3)\psi_2(t_3)\psi_1(t_1), & t_1 < t_3 \\ 0, & t_1 > t_3 \\ \frac{1}{6}\psi_3(t_1)\psi_1(t_1)\psi_2(t_1), & t_1 = t_3 \end{cases} =$$

$$= \sum_{j_1=0}^{\infty} \sum_{j_2,j_3=0}^{\infty} C_{j_3 j_2 j_1} \phi_{j_1}(t_1)\phi_{j_2}(t_3)\phi_{j_3}(t_3), \tag{5.62}$$

где $t_1, t_3 \in [t,T]$ и ряды сходятся равномерно по t_1 и t_3 на интервалах непрерывности разлагаемых функций.

Рассмотрим вспомогательную функцию

$$K_3'(t_1,t_2,t_3) = \begin{cases} \psi_3(t_3)\psi_2(t_2)\psi_1(t_1), & t_1 < t_2 \le t_3 \\ \psi_3(t_2)\psi_2(t_3)\psi_1(t_1), & t_1 < t_3 \le t_2 \\ 0, & \text{иначе} \end{cases}, \ t_1,t_2,t_3 \in [t,T].$$

Зафиксируем t_2, t_3 и разложим функцию $K_3'(t_1, t_2, t_3)$ по переменной t_1 на отрезке $[t, T]$ в ряд Фурье.

$$K_3'(t_1, t_2, t_3) = \sum_{j_1=0}^{\infty} \Bigg(\psi_2(t_2)\psi_3(t_3) \int_t^{t_2} \psi_1(t_1)\phi_{j_1}(t_1)dt_1 \mathbf{1}_{\{t_2<t_3\}} +$$

$$+\psi_2(t_2)\psi_3(t_3) \int_t^{t_2} \psi_1(t_1)\phi_{j_1}(t_1)dt_1 \mathbf{1}_{\{t_2=t_3\}} +$$

$$+\psi_3(t_2)\psi_2(t_3) \int_t^{t_3} \psi_1(t_1)\phi_{j_1}(t_1)dt_1 \mathbf{1}_{\{t_3<t_2\}} \Bigg) \phi_{j_1}(t_1) \quad (t_1 \neq t_2,\ t_3). \qquad (5.63)$$

Нетрудно видеть, что функция, стоящая в скобках, имеет вид

$$\begin{cases} \psi_3(t_3)\Psi_{j_1}(t_2), \ t_2 \leq t_3 \\ \psi_3(t_2)\Psi_{j_1}(t_3), \ t_3 \leq t_2 \end{cases} ; \ \Psi_{j_1}(s) = \psi_2(s) \int_t^s \psi_1(t_1)\phi_{j_1}(t_1)dt_1.$$

Поэтому эта функция принадлежит классу Гельдера $C^1([t, T]^2)$ (см. предыдущий раздел). Разложим ее в квадрате $[t, T]^2$ в кратный ряд Фурье, суммируемый по Принсгейму и подставим результат в (5.63):

$$K_3'(t_1, t_2, t_3) = \sum_{j_1=0}^{\infty} \lim_{p_2, p_3 \to \infty} \sum_{j_2=0}^{p_2} \sum_{j_3=0}^{p_3} \left(C_{j_3 j_2 j_1} + C_{j_2 j_3 j_1} \right) \phi_{j_1}(t_1)\phi_{j_2}(t_2)\phi_{j_3}(t_3).$$

Полагая в этом равенстве (оно верно при $t_1 \neq t_2,\ t_3$) $t_2 = t_3$ получаем (см. предыдущий раздел)

$$\frac{1}{2} K_3'(t_1, t_3, t_3) = \sum_{j_1=0}^{\infty} \sum_{j_2, j_3=0}^{\infty} C_{j_3 j_2 j_1} \phi_{j_1}(t_1)\phi_{j_2}(t_3)\phi_{j_3}(t_3) \quad (t_1 \neq t_3).$$

Равенство (5.62) доказано. Дальнейшее доказательство соотношения (5.61) аналогично уже рассмотренному случаю.

В четвертом частном случае рассматриваемые стохастические интегралы Ито и Стратоновича с в.1 совпадут, но как следует из теоремы 5.1 ряд $\sum\limits_{j_3, j_2, j_1=0}^{\infty} C_{j_3 \ldots j_1} \prod\limits_{l=1}^{3} \zeta_{j_l}^{(i_l)}$, вообще говоря, может не сходиться к стохастическому интегралу Стратоновича $J^*[\psi^{(3)}]_{T,t}$ при $i_1 = i_3 \neq i_2$. В этом случае придется воспользоваться теоремой 5.1 и формулой (5.52) при $i_1 = i_3 \neq i_2$.

Тем не менее тесная связь формул (5.53) и (5.55), а также формул (5.60) и (5.61) не случайна. Покажем, что для случая $\psi_1(\tau)$, $\psi_2(\tau)$,

$\psi_3(\tau) \equiv 1$ и системы полиномов Лежандра или системы тригонометрических функций формулы (5.53) и (5.60) переходят в формулы (5.55) и (5.61) соответственно. Более того, покажем, что в рамках указанного случая верно обобщение теоремы 5.2 для повторных стохастических интегралов Стратоновича 3 кратности.

Итак, пусть $\psi_1(\tau)$, $\psi_2(\tau)$, $\psi_3(\tau) \equiv 1$, $\{\phi_j(x)\}_{j=0}^{\infty}$ — полная ортонормированная на отрезке $[t,T]$ система полиномов Лежандра.

Из (5.55), (5.61) имеем

$$\sum_{j_3=0}^{\infty}\sum_{j_1=0}^{\infty} C_{j_3j_1j_1}\zeta_{j_3}^{(i_3)} = \frac{1}{2}\int\limits_t^T(\tau-t)d\mathbf{f}_{\tau}^{(i_3)} = \frac{1}{4}(T-t)^{\frac{3}{2}}\left(\zeta_0^{(i_3)} + \frac{1}{\sqrt{3}}\zeta_1^{(i_3)}\right),$$

$$\sum_{j_1=0}^{\infty}\sum_{j_3=0}^{\infty} C_{j_3j_3j_1}\zeta_{j_1}^{(i_1)} = \frac{1}{2}\int\limits_t^T\int\limits_t^{\tau} d\mathbf{f}_s^{(i_1)}d\tau = \frac{1}{2}\int\limits_t^T(T-s)d\mathbf{f}_s^{(i_1)} =$$

$$= \frac{1}{2}\left((T-t)\int\limits_t^T d\mathbf{f}_s^{(i_1)} + \int\limits_t^T(t-s)d\mathbf{f}_s^{(i_1)}\right) = \frac{1}{2}(T-t)^{\frac{3}{2}}\left(\zeta_0^{(i_1)} - \frac{1}{2}\zeta_0^{(i_1)} - \frac{1}{2\sqrt{3}}\zeta_1^{(i_1)}\right) =$$

$$= \frac{1}{4}(T-t)^{\frac{3}{2}}\left(\zeta_0^{(i_1)} - \frac{1}{\sqrt{3}}\zeta_1^{(i_1)}\right).$$

Поэтому $C_{j_3j_1j_1} = 0$ при $j_3 \geq 2$ и $C_{j_3j_3j_1} = 0$ при $j_1 \geq 2$. Таким образом, в данном случае

$$\sum_{j_1,j_3=0}^{\infty} C_{j_3j_1j_1}\zeta_{j_3}^{(i_3)} = \sum_{j_3=0}^{\infty}\sum_{j_1=0}^{\infty} C_{j_3j_1j_1}\zeta_{j_3}^{(i_3)} = \frac{1}{4}(T-t)^{\frac{3}{2}}\left(\zeta_0^{(i_3)} + \frac{1}{\sqrt{3}}\zeta_1^{(i_3)}\right), \quad (5.64)$$

$$\sum_{j_1,j_3=0}^{\infty} C_{j_3j_3j_1}\zeta_{j_1}^{(i_1)} = \sum_{j_1=0}^{\infty}\sum_{j_3=0}^{\infty} C_{j_3j_3j_1}\zeta_{j_1}^{(i_1)} = \frac{1}{4}(T-t)^{\frac{3}{2}}\left(\zeta_0^{(i_1)} - \frac{1}{\sqrt{3}}\zeta_1^{(i_1)}\right). \quad (5.65)$$

Поскольку при $\psi_1(\tau)$, $\psi_2(\tau)$, $\psi_3(\tau) \equiv 1$ имеет место (см. разд. 5.1) равенство: $C_{j_1j_1j_3} + C_{j_1j_3j_1} + C_{j_3j_1j_1} = \frac{1}{2}C_{j_1}^2C_{j_3}$; $C_j = 0$ при $j \geq 1$ и $C_0 = \sqrt{T-t}$, то

$$\sum_{j_1,j_3=0}^{\infty} C_{j_1j_3j_1}\zeta_{j_3}^{(i_2)} = \sum_{j_1,j_3=0}^{\infty}\left(\frac{1}{2}C_{j_1}^2C_{j_3} - C_{j_1j_1j_3} - C_{j_3j_1j_1}\right)\zeta_{j_3}^{(i_2)}, \quad (5.66)$$

следовательно с учетом (5.64) и (5.65) имеем:

$$\sum_{j_1,j_3=0}^{\infty} C_{j_1j_3j_1}\zeta_{j_3}^{(i_2)} = \frac{1}{2}C_0^3\zeta_0^{(i_2)} - \sum_{j_1,j_3=0}^{\infty} C_{j_1j_1j_3}\zeta_{j_3}^{(i_2)} - \sum_{j_1,j_3=0}^{\infty} C_{j_3j_1j_1}\zeta_{j_3}^{(i_2)} =$$

$$= \frac{1}{2}(T-t)^{\frac{3}{2}}\zeta_0^{(i_2)} - \frac{1}{4}(T-t)^{\frac{3}{2}}\left(\zeta_0^{(i_2)} - \frac{1}{\sqrt{3}}\zeta_1^{(i_2)}\right) -$$

$$-\frac{1}{4}(T-t)^{\frac{3}{2}}\left(\zeta_0^{(i_2)}+\frac{1}{\sqrt{3}}\zeta_1^{(i_2)}\right)=0. \tag{5.67}$$

Перепишем (5.64) и (5.65) в другой форме:

$$\sum_{j_1,j_3=0}^{\infty} C_{j_3j_1j_1}\zeta_{j_3}^{(i_3)}=\frac{1}{2}\int\limits_t^T\int\limits_t^{\tau} ds d\mathbf{f}_{\tau}^{(i_3)}, \tag{5.68}$$

$$\sum_{j_1,j_3=0}^{\infty} C_{j_3j_3j_1}\zeta_{j_1}^{(i_1)}=\frac{1}{2}\int\limits_t^T\int\limits_t^{\tau} d\mathbf{f}_{s}^{(i_1)} d\tau. \tag{5.69}$$

Согласно теореме 5.1 и (5.67) – (5.69) получаем:

$$\int\limits_t^T\int\limits_t^{t_3}\int\limits_t^{t_2} d\mathbf{f}_{t_1}^{(i_1)}d\mathbf{f}_{t_2}^{(i_2)}d\mathbf{f}_{t_3}^{(i_3)}=\sum_{j_1,j_2,j_3=0}^{\infty} C_{j_3j_2j_1}\zeta_{j_1}^{(i_1)}\zeta_{j_2}^{(i_2)}\zeta_{j_3}^{(i_3)}-$$

$$-\mathbf{1}_{\{i_1=i_2\}}\frac{1}{2}\int\limits_t^T\int\limits_t^{\tau} ds d\mathbf{f}_{\tau}^{(i_3)}-\mathbf{1}_{\{i_2=i_3\}}\frac{1}{2}\int\limits_t^T\int\limits_t^{\tau} d\mathbf{f}_{s}^{(i_1)} d\tau. \tag{5.70}$$

С помощью (5.70) и (5.52) окончательно приходим к равенству

$$\int\limits_t^{*T}\int\limits_t^{*t_3}\int\limits_t^{*t_2} d\mathbf{f}_{t_1}^{(i_1)}d\mathbf{f}_{t_2}^{(i_2)}d\mathbf{f}_{t_3}^{(i_3)}=\sum_{j_1,j_2,j_3=0}^{\infty} C_{j_3j_2j_1}\zeta_{j_1}^{(i_1)}\zeta_{j_2}^{(i_2)}\zeta_{j_3}^{(i_3)}, \tag{5.71}$$

где ряд сходится в среднеквадратическом смысле.

Проверим справедливость формулы (5.71), когда $\{\phi_j(x)\}_{j=0}^{\infty}$ — полная ортонормированная на отрезке $[t,T]$ система тригонометрических функций.

В этом случае (см. предыдущий раздел) можно записать

$$\sum_{j_3=0}^{\infty}\sum_{j_1=0}^{\infty} C_{j_3j_1j_1}\zeta_{j_3}^{(i_3)}=\sum_{j_1,j_3=0}^{\infty} C_{j_3j_1j_1}\zeta_{j_3}^{(i_3)}=\frac{1}{2}\int\limits_t^T(s-t)d\mathbf{f}_{s}^{(i_3)}=$$

$$=\frac{1}{4}(T-t)^{\frac{3}{2}}\left[\zeta_0^{(i_3)}+\frac{\sqrt{2}}{\pi}\sum_{r=1}^{\infty}\frac{1}{r}\zeta_{2r-1}^{(i_3)}\right], \tag{5.72}$$

$$\sum_{j_1=0}^{\infty}\sum_{j_3=0}^{\infty} C_{j_3j_3j_1}\zeta_{j_1}^{(i_1)}=\sum_{j_1,j_3=0}^{\infty} C_{j_3j_3j_1}\zeta_{j_1}^{(i_1)}=\frac{1}{2}\left((T-t)\int\limits_t^T d\mathbf{f}_{s}^{(i_1)}+\int\limits_t^T(t-s)d\mathbf{f}_{s}^{(i_1)}\right)=$$

$$=\frac{1}{2}(T-t)^{\frac{3}{2}}\left[\zeta_0^{(i_1)}-\frac{1}{2}\zeta_0^{(i_1)}-\frac{\sqrt{2}}{2\pi}\sum_{r=1}^{\infty}\frac{1}{r}\zeta_{2r-1}^{(i_1)}\right]=\frac{1}{4}(T-t)^{\frac{3}{2}}\left[\zeta_0^{(i_1)}-\frac{\sqrt{2}}{\pi}\sum_{r=1}^{\infty}\frac{1}{r}\zeta_{2r-1}^{(i_1)}\right], \tag{5.73}$$

где ряды в правых частях (5.72) и (5.73) сходятся в среднеквадратическом смысле.

Теперь, используя (5.72) и (5.73), получаем:

$$\sum_{j_1,j_3=0}^{\infty} C_{j_1j_3j_1}\zeta_{j_3}^{(i_2)} = \frac{1}{2}C_0^3\zeta_0^{(i_2)} - \sum_{j_1,j_3=0}^{\infty} C_{j_1j_1j_3}\zeta_{j_3}^{(i_2)} - \sum_{j_1,j_3=0}^{\infty} C_{j_3j_1j_1}\zeta_{j_3}^{(i_2)} =$$

$$= \frac{1}{2}(T-t)^{\frac{3}{2}}\zeta_0^{(i_2)} - \frac{1}{4}(T-t)^{\frac{3}{2}}\left[\zeta_0^{(i_2)} + \frac{\sqrt{2}}{\pi}\sum_{r=1}^{\infty}\frac{1}{r}\zeta_{2r-1}^{(i_2)}\right]-$$

$$-\frac{1}{4}(T-t)^{\frac{3}{2}}\left[\zeta_0^{(i_2)} - \frac{\sqrt{2}}{\pi}\sum_{r=1}^{\infty}\frac{1}{r}\zeta_{2r-1}^{(i_2)}\right] = 0. \qquad (5.74)$$

Поскольку равенства (5.72) и (5.73) могут быть переписаны в виде (5.68) и (5.69) соответственно, то с учетом (5.74) и теоремы 5.1 приходим к (5.70) и (5.71). Требуемое равенство получено.

Равенство (5.71) в данном случае может быть получено и путем прямых вычислений.

Действительно, по теореме 5.1 имеем:

$$\int\limits_t^T\int\limits_t^{t_3}\int\limits_t^{t_2} d\mathbf{f}_{t_1}^{(i_3)}d\mathbf{f}_{t_2}^{(i_2)}d\mathbf{f}_{t_3}^{(i_1)} = \sum_{j_1,j_2,j_3=0}^{\infty} C_{j_3j_2j_1}\zeta_{j_1}^{(i_3)}\zeta_{j_2}^{(i_2)}\zeta_{j_3}^{(i_1)}-$$

$$-\mathbf{1}_{\{i_1=i_2\}}\Bigl(-\frac{1}{4}(T-t)^{\frac{3}{2}}\left[\zeta_0^{(i_3)} + \frac{\sqrt{2}}{\pi}\sum_{r=1}^{\infty}\frac{1}{r}\zeta_{2r-1}^{(i_3)}\right]+$$

$$+\frac{1}{2}(T-t)^{\frac{3}{2}}\zeta_0^{(i_3)} + \frac{1}{2\pi^2}(T-t)^{\frac{3}{2}}\left(\sum_{r=1}^{\infty}\frac{1}{r^2} - \frac{\pi^2}{6}\right)\zeta_0^{(i_3)}\Bigr)+$$

$$+\mathbf{1}_{\{i_2=i_3\}}\Bigl(-\frac{1}{4}(T-t)^{\frac{3}{2}}\left[\zeta_0^{(i_1)} + \frac{\sqrt{2}}{\pi}\sum_{r=1}^{\infty}\frac{1}{r}\zeta_{2r-1}^{(i_1)}\right]-$$

$$-\frac{1}{2\pi^2}(T-t)^{\frac{3}{2}}\left(\sum_{r=1}^{\infty}\frac{1}{r^2} - \frac{\pi^2}{6}\right)\zeta_0^{(i_1)}\Bigr)+$$

$$+\mathbf{1}_{\{i_1=i_3\}}\frac{1}{\pi^2}(T-t)^{\frac{3}{2}}\left(\sum_{r=1}^{\infty}\frac{1}{r^2} - \frac{\pi^2}{6}\right)\zeta_0^{(i_2)}, \qquad (5.75)$$

причем

$$\sum_{j_1,j_2,j_3=0}^{\infty} C_{j_3j_2j_1}\zeta_{j_1}^{(i_3)}\zeta_{j_2}^{(i_2)}\zeta_{j_3}^{(i_1)} = (T-t)^{\frac{3}{2}}\Bigl(\frac{1}{6}\zeta_0^{(i_1)}\zeta_0^{(i_2)}\zeta_0^{(i_3)}+$$

$$+\frac{1}{2\sqrt{2}}\sum_{r=1}^{\infty}\left[\frac{1}{\pi r}\left\{\zeta_{2r-1}^{(i_1)}\zeta_0^{(i_2)}\zeta_0^{(i_3)} - \zeta_{2r-1}^{(i_3)}\zeta_0^{(i_2)}\zeta_0^{(i_1)}\right\}+\right.$$

$$+\frac{1}{\pi^2 r^2}\left\{\zeta_{2r}^{(i_1)}\zeta_0^{(i_2)}\zeta_0^{(i_3)}-2\zeta_{2r}^{(i_2)}\zeta_0^{(i_3)}\zeta_0^{(i_1)}+\zeta_{2r}^{(i_3)}\zeta_0^{(i_2)}\zeta_0^{(i_1)}\right\}\Bigg]+$$

$$+\frac{1}{2\pi^2}\sum_{\substack{r,l=1\\ r\neq l}}^{\infty}\Bigg[\frac{1}{r^2-l^2}\Bigg\{\zeta_{2r}^{(i_1)}\zeta_{2l}^{(i_2)}\zeta_0^{(i_3)}-\zeta_{2r}^{(i_2)}\zeta_0^{(i_1)}\zeta_{2l}^{(i_3)}+$$

$$+\frac{r}{l}\zeta_{2r-1}^{(i_1)}\zeta_{2l-1}^{(i_2)}\zeta_0^{(i_3)}-\frac{l}{r}\zeta_0^{(i_1)}\zeta_{2r-1}^{(i_2)}\zeta_{2l-1}^{(i_3)}\Bigg\}-\frac{1}{rl}\zeta_{2r-1}^{(i_1)}\zeta_0^{(i_2)}\zeta_{2l-1}^{(i_3)}\Bigg]$$

$$+\sum_{r=1}^{\infty}\Bigg[\frac{1}{4\pi r}\left\{\zeta_{2r}^{(i_1)}\zeta_{2r-1}^{(i_2)}\zeta_0^{(i_3)}-\zeta_{2r-1}^{(i_1)}\zeta_{2r}^{(i_2)}\zeta_0^{(i_3)}-\zeta_{2r-1}^{(i_2)}\zeta_{2r}^{(i_3)}\zeta_0^{(i_1)}+\zeta_{2r-1}^{(i_3)}\zeta_{2r}^{(i_2)}\zeta_0^{(i_1)}\right\}$$

$$+\frac{1}{8\pi^2 r^2}\Bigg\{3\zeta_{2r-1}^{(i_1)}\zeta_{2r-1}^{(i_2)}\zeta_0^{(i_3)}+\zeta_{2r}^{(i_1)}\zeta_{2r}^{(i_2)}\zeta_0^{(i_3)}-6\zeta_{2r-1}^{(i_1)}\zeta_{2r-1}^{(i_3)}\zeta_0^{(i_2)}+$$

$$+3\zeta_{2r-1}^{(i_2)}\zeta_{2r-1}^{(i_3)}\zeta_0^{(i_1)}-2\zeta_{2r}^{(i_1)}\zeta_{2r}^{(i_3)}\zeta_0^{(i_2)}+\zeta_{2r}^{(i_3)}\zeta_{2r}^{(i_2)}\zeta_0^{(i_1)}\Bigg\}\Bigg]+$$

$$+\frac{1}{4\sqrt{2}\pi^2}\Bigg\{\sum_{r,m=1}^{\infty}\Bigg[\frac{2}{rm}\Big[-\zeta_{2r-1}^{(i_1)}\zeta_{2m-1}^{(i_2)}\zeta_{2m}^{(i_3)}+\zeta_{2r-1}^{(i_1)}\zeta_{2r}^{(i_2)}\zeta_{2m-1}^{(i_3)}+$$

$$+\zeta_{2r-1}^{(i_1)}\zeta_{2m}^{(i_2)}\zeta_{2m-1}^{(i_3)}-\zeta_{2r}^{(i_1)}\zeta_{2r-1}^{(i_2)}\zeta_{2m-1}^{(i_3)}\Big]+$$

$$+\frac{1}{m(r+m)}\Big[-\zeta_{2(m+r)}^{(i_1)}\zeta_{2r}^{(i_2)}\zeta_{2m}^{(i_3)}-\zeta_{2(m+r)-1}^{(i_1)}\zeta_{2r-1}^{(i_2)}\zeta_{2m}^{(i_3)}-$$

$$-\zeta_{2(m+r)-1}^{(i_1)}\zeta_{2r}^{(i_2)}\zeta_{2m-1}^{(i_3)}+\zeta_{2(m+r)}^{(i_1)}\zeta_{2r-1}^{(i_2)}\zeta_{2m-1}^{(i_3)}\Big]\Bigg]+$$

$$+\sum_{m=1,l=m+1}^{\infty}\Bigg[\frac{1}{m(l-m)}\Big[\zeta_{2(l-m)}^{(i_1)}\zeta_{2l}^{(i_2)}\zeta_{2m}^{(i_3)}+\zeta_{2(l-m)-1}^{(i_1)}\zeta_{2l-1}^{(i_2)}\zeta_{2m}^{(i_3)}-$$

$$-\zeta_{2(l-m)-1}^{(i_1)}\zeta_{2l}^{(i_2)}\zeta_{2m-1}^{(i_3)}+\zeta_{2(l-m)}^{(i_1)}\zeta_{2l-1}^{(i_2)}\zeta_{2m-1}^{(i_3)}\Big]+$$

$$+\frac{1}{l(l-m)}\Big[-\zeta_{2(l-m)}^{(i_1)}\zeta_{2m}^{(i_2)}\zeta_{2l}^{(i_3)}+\zeta_{2(l-m)-1}^{(i_1)}\zeta_{2m-1}^{(i_2)}\zeta_{2l}^{(i_3)}-$$

$$-\zeta_{2(l-m)-1}^{(i_1)}\zeta_{2m}^{(i_2)}\zeta_{2l-1}^{(i_3)}-\zeta_{2(l-m)}^{(i_1)}\zeta_{2m-1}^{(i_2)}\zeta_{2l-1}^{(i_3)}\Big]\Bigg]\Bigg\}\Bigg).$$

Поскольку $\sum\limits_{r=1}^{\infty}\frac{1}{r^2}=\frac{\pi^2}{6}$ и (см. разд. 5.5)

$$\int\limits_t^T(t-\tau)d\mathbf{f}_\tau^{(i)}=-\frac{1}{2}(T-t)^{\frac{3}{2}}\Bigg[\zeta_0^{(i)}+\frac{\sqrt{2}}{\pi}\sum_{r=1}^{\infty}\frac{1}{r}\zeta_{2r-1}^{(i)}\Bigg],$$

то из (5.75) получаем требуемое

$$\sum_{j_1,j_2,j_3=0}^{\infty} C_{j_3j_2j_1}\zeta_{j_1}^{(i_3)}\zeta_{j_2}^{(i_2)}\zeta_{j_3}^{(i_1)} = \int\limits_t^T\int\limits_t^{t_3}\int\limits_t^{t_2} d\mathbf{f}_{t_1}^{(i_3)}d\mathbf{f}_{t_2}^{(i_2)}d\mathbf{f}_{t_3}^{(i_1)} + \mathbf{1}_{\{i_1=i_2\}}\frac{1}{2}\int\limits_t^T\int\limits_t^{\tau} d\mathbf{f}_s^{(i_3)}d\tau+$$

$$+\mathbf{1}_{\{i_2=i_3\}}\frac{1}{2}\int\limits_t^T\int\limits_t^{\tau} ds d\mathbf{f}_{\tau}^{(i_1)} = \int\limits_t^{*T}\int\limits_t^{*t_3}\int\limits_t^{*t_2} d\mathbf{f}_{t_1}^{(i_3)}d\mathbf{f}_{t_2}^{(i_2)}d\mathbf{f}_{t_3}^{(i_1)}.$$

Приведем формулы для разложений повторных стохастических интегралов Стратоновича и Ито третьей кратности с использованием системы полиномов Лежандра.

Примем далее в настоящем разделе следующие обозначения:

$$I_{l_1\ldots l_kT,t}^{(i_1\ldots i_k)} = \int\limits_t^T (t-t_k)^{l_k}\ldots\int\limits_t^{t_2}(t-t_1)^{l_1}d\mathbf{f}_{t_1}^{(i_1)}\ldots d\mathbf{f}_{t_k}^{(i_k)},$$

$$I_{l_1\ldots l_kT,t}^{*(i_1\ldots i_k)} = \int\limits_t^{*T} (t-t_k)^{l_k}\ldots\int\limits_t^{*t_2}(t-t_1)^{l_1}d\mathbf{f}_{t_1}^{(i_1)}\ldots d\mathbf{f}_{t_k}^{(i_k)},$$

где $i_1,\ldots,i_k=1,\ldots,m$; $l_1,\ldots,l_k=0,\ 1,\ldots$.

Прямое вычисление с помощью теоремы 5.1 дает:

$$I_{000_{T,t}}^{(i_1i_2i_3)} = -\frac{1}{T-t}\left(I_{0_{T,t}}^{(i_3)}I_{10_{T,t}}^{*(i_2i_1)} + I_{0_{T,t}}^{(i_1)}I_{10_{T,t}}^{*(i_2i_3)}\right)+$$

$$+\frac{1}{2}I_{0_{T,t}}^{(i_3)}\left(I_{00_{T,t}}^{*(i_1i_2)} - I_{00_{T,t}}^{*(i_2i_1)}\right)-$$

$$-(T-t)^{\frac{3}{2}}\left[\frac{1}{6}\zeta_0^{(i_1)}\zeta_0^{(i_3)}\left(\zeta_0^{(i_2)}+\sqrt{3}\zeta_1^{(i_2)}-\frac{1}{\sqrt{5}}\zeta_2^{(i_2)}\right)+\right.$$

$$+\frac{1}{4}\mathbf{1}_{\{i_1=i_2\}}\left(\zeta_0^{(i_3)}+\frac{1}{\sqrt{3}}\zeta_1^{(i_3)}+\frac{1}{3\sqrt{5}}\zeta_2^{(i_3)}+G_{T,t}^{(i_3)}\right)+$$

$$+\frac{1}{4}\mathbf{1}_{\{i_2=i_3\}}\left(\zeta_0^{(i_1)}-\frac{1}{\sqrt{3}}\zeta_1^{(i_1)}+\frac{1}{3\sqrt{5}}\zeta_2^{(i_1)}+G_{T,t}^{(i_1)}\right)+$$

$$\left.+\frac{1}{6}\mathbf{1}_{\{i_1=i_3\}}\left(\zeta_0^{(i_2)}-\frac{1}{\sqrt{5}}\zeta_2^{(i_2)}+Q_{T,t}^{(i_2)}\right)+\frac{1}{4}D_{T,t}^{(i_1i_2i_3)}\right],$$

$$I_{0_{T,t}}^{(i_1)} = \sqrt{T-t}\zeta_0^{(i_1)},$$

$$I_{00_{T,t}}^{*(i_1i_2)} = \frac{T-t}{2}\left[\zeta_0^{(i_1)}\zeta_0^{(i_2)}+\sum_{i=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{4i^2-1}}\left\{\zeta_{i-1}^{(i_1)}\zeta_i^{(i_2)}-\zeta_i^{(i_1)}\zeta_{i-1}^{(i_2)}\right\}\right],$$

$$I_{10_{T,t}}^{*(i_1 i_2)} = -\frac{T-t}{2} I_{00_{T,t}}^{*(i_1 i_2)} - \frac{(T-t)^2}{4}\Biggl[\frac{1}{\sqrt{3}}\zeta_0^{(i_2)}\zeta_1^{(i_1)} +$$

$$+\sum_{i=0}^{\infty}\Biggl(\frac{(i+1)\zeta_{i+2}^{(i_2)}\zeta_i^{(i_1)} - (i+2)\zeta_i^{(i_2)}\zeta_{i+2}^{(i_1)}}{\sqrt{(2i+1)(2i+5)}(2i+3)} + \frac{\zeta_i^{(i_1)}\zeta_i^{(i_2)}}{(2i-1)(2i+3)}\Biggr)\Biggr],$$

$$D_{T,t}^{(i_1 i_2 i_3)} = \sum_{\substack{i=1,j=0,k=i \\ 2i\ge k+i-j\ge -2;\ k+i-j\ -\ \text{четное}}}^{\infty} N_{ijk} K_{i+1,k+1,\frac{k+i-j}{2}+1}\zeta_i^{(i_1)}\zeta_j^{(i_2)}\zeta_k^{(i_3)} +$$

$$+ \sum_{\substack{i=1,j=0 \\ 2k\ge k+i-j\ge -2;\ k+i-j\ -\ \text{четное}}}^{\infty}\ \sum_{k=1}^{i-1} N_{ijk} K_{k+1,i+1,\frac{k+i-j}{2}+1}\zeta_i^{(i_1)}\zeta_j^{(i_2)}\zeta_k^{(i_3)} -$$

$$- \sum_{\substack{i=1,j=0,k=i+2 \\ 2i+2\ge k+i-j\ge 0;\ k+i-j\ -\ \text{четное}}}^{\infty} N_{ijk} K_{i+1,k-1,\frac{k+i-j}{2}}\zeta_i^{(i_1)}\zeta_j^{(i_2)}\zeta_k^{(i_3)} -$$

$$- \sum_{\substack{i=1,j=0 \\ 2k-2\ge k+i-j\ge 0;\ k+i-j\ -\ \text{четное}}}^{\infty}\ \sum_{k=1}^{i+1} N_{ijk} K_{k-1,i+1,\frac{k+i-j}{2}}\zeta_i^{(i_1)}\zeta_j^{(i_2)}\zeta_k^{(i_3)} -$$

$$- \sum_{\substack{i=1,j=0,k=i-2,k\ge 1 \\ 2i-2\ge k+i-j\ge 0;\ k+i-j\ -\ \text{четное}}}^{\infty} N_{ijk} K_{i-1,k+1,\frac{k+i-j}{2}}\zeta_i^{(i_1)}\zeta_j^{(i_2)}\zeta_k^{(i_3)} -$$

$$- \sum_{\substack{i=1,j=0 \\ 2k+2\ge k+i-j\ge 0;\ k+i-j\ -\ \text{четное}}}^{\infty}\ \sum_{k=1}^{i-3} N_{ijk} K_{k+1,i-1,\frac{k+i-j}{2}}\zeta_i^{(i_1)}\zeta_j^{(i_2)}\zeta_k^{(i_3)} +$$

$$+ \sum_{\substack{i=1,j=0,k=i \\ 2i\ge k+i-j\ge 2;\ k+i-j\ -\ \text{четное}}}^{\infty} N_{ijk} K_{i-1,k-1,\frac{k+i-j}{2}-1}\zeta_i^{(i_1)}\zeta_j^{(i_2)}\zeta_k^{(i_3)} +$$

$$+ \sum_{\substack{i=1,j=0 \\ 2k\ge k+i-j\ge 2;\ k+i-j\ -\ \text{четное}}}^{\infty}\ \sum_{k=1}^{i-1} N_{ijk} K_{k-1,i-1,\frac{k+i-j}{2}-1}\zeta_i^{(i_1)}\zeta_j^{(i_2)}\zeta_k^{(i_3)},$$

$$G_{T,t}^{(i_3)} = -\sum_{j=1}^{\infty}\Biggl\{\sum_{k=j,\ k\ -\ \text{четное}}^{2j} N_{jjk} K_{j+1,k+1,\frac{k}{2}+1}\zeta_k^{(i_3)} +$$

$$+\sum_{k=1,\ k\ -\ \text{четное}}^{j-1} N_{jjk} K_{k+1,j+1,\frac{k}{2}+1} \zeta_k^{(i_3)} -$$

$$-\sum_{k=j-2,\ k\geq 1,\ k\ -\ \text{четное}}^{2j-2} N_{jjk} K_{j-1,k+1,\frac{k}{2}} \zeta_k^{(i_3)} -$$

$$-\sum_{k=1,\ k\ -\ \text{четное}}^{j-3} N_{jjk} K_{k+1,j-1,\frac{k}{2}} \zeta_k^{(i_3)} -$$

$$-\sum_{k=j+2,\ k\ -\ \text{четное}}^{2j+2} N_{jjk} K_{j+1,k-1,\frac{k}{2}} \zeta_k^{(i_3)} -$$

$$-\sum_{k=1,\ k\ -\ \text{четное}}^{j+1} N_{jjk} K_{k-1,j+1,\frac{k}{2}} \zeta_k^{(i_3)} +$$

$$+\sum_{k=j,\ k\ -\ \text{четное}}^{2j} N_{jjk} K_{j-1,k-1,\frac{k}{2}-1} \zeta_k^{(i_3)} +$$

$$+\sum_{k=1,\ k\ -\ \text{четное}}^{j-1} N_{jjk} K_{k-1,j-1,\frac{k}{2}-1} \zeta_k^{(i_3)} \Bigg\},$$

$$Q_{T,t}^{(i_2)} = -\frac{3}{2}\sum_{i=1}^{\infty} \Bigg\{ \sum_{j=0,\ j\ -\ \text{четное}}^{2i+2} N_{iji} K_{i+1,i+1,i+1-\frac{j}{2}} \zeta_j^{(i_2)} -$$

$$-2\sum_{j=2,\ j\ -\ \text{четное}}^{2i} N_{iji} K_{i-1,i-1,i-\frac{j}{2}} \zeta_j^{(i_2)} +$$

$$+\sum_{j=0,\ j\ -\ \text{четное}}^{2i-2} N_{iji} K_{i-1,i-1,i-1-\frac{j}{2}} \zeta_j^{(i_2)} \Bigg\},$$

где

$$N_{ijk} = \sqrt{\frac{1}{(2k+1)(2j+1)(2i+1)}},$$

$$K_{m,n,k} = \frac{a_{m-k} a_k a_{n-k}}{a_{m+n-k}} \cdot \frac{2n+2m-4k+1}{2n+2m-2k+1};\ a_k = \frac{(2k-1)!!}{k!};\ m \leq n.$$

С другой стороны, согласно формуле (5.71), можно записать гораздо более компактные выражения

$$I_{000_{T,t}}^{*(i_1 i_2 i_3)} = -\frac{1}{T-t}\left(I_{0_{T,t}}^{(i_3)} I_{10_{T,t}}^{*(i_2 i_1)} + I_{0_{T,t}}^{(i_1)} I_{10_{T,t}}^{*(i_2 i_3)}\right) +$$

$$+\frac{1}{2}I_{0_{T,t}}^{(i_3)}\left(I_{00_{T,t}}^{*(i_1i_2)}-I_{00_{T,t}}^{*(i_2i_1)}\right)-$$

$$-(T-t)^{\frac{3}{2}}\left[\frac{1}{6}\zeta_0^{(i_1)}\zeta_0^{(i_3)}\left(\zeta_0^{(i_2)}+\sqrt{3}\zeta_1^{(i_2)}-\frac{1}{\sqrt{5}}\zeta_2^{(i_2)}\right)+\frac{1}{4}D_{T,t}^{(i_1i_2i_3)}\right]$$

или

$$I_{000_{T,t}}^{(i_1i_2i_3)}=-\frac{1}{T-t}\left(I_{0_{T,t}}^{(i_3)}I_{10_{T,t}}^{*(i_2i_1)}+I_{0_{T,t}}^{(i_1)}I_{10_{T,t}}^{*(i_2i_3)}\right)+$$

$$+\frac{1}{2}I_{0_{T,t}}^{(i_3)}\left(I_{00_{T,t}}^{*(i_1i_2)}-I_{00_{T,t}}^{*(i_2i_1)}\right)-$$

$$-(T-t)^{\frac{3}{2}}\left[\frac{1}{6}\zeta_0^{(i_1)}\zeta_0^{(i_3)}\left(\zeta_0^{(i_2)}+\sqrt{3}\zeta_1^{(i_2)}-\frac{1}{\sqrt{5}}\zeta_2^{(i_2)}\right)+\frac{1}{4}D_{T,t}^{(i_1i_2i_3)}\right]+$$

$$+\mathbf{1}_{\{i_1=i_2\}}\frac{1}{2}I_{1_{T,t}}^{(i_3)}-\mathbf{1}_{\{i_2=i_3\}}\frac{1}{2}\left((T-t)I_{0_{T,t}}^{(i_1)}+I_{1_{T,t}}^{(i_1)}\right),$$

где

$$I_{1_{T,t}}^{(i)}=-\frac{1}{2}(T-t)^{\frac{3}{2}}\left(\zeta_0^{(i)}+\frac{1}{\sqrt{3}}\zeta_1^{(i)}\right),$$

$\zeta_j^{(i)}=\int\limits_t^T\phi_j(s)d\mathbf{f}_s^{(i)}$; $\{\phi_j(x)\}_{j=0}^{\infty}$ — полная ортонормированная ситема полиномов Лежандра на отрезке $[t,T]$.

Рассмотрим некоторые соображения для несколько более общей ситуации, когда $\psi_i(\tau)\equiv(t-\tau)^{l_i}$; $l_i=0,\ 1,\ 2,\ldots$ — фиксированные натуральные числа; $i=1,\ 2,\ 3$. С помощью теоремы 3.1 или с помощью формулы Ито (для второй из следующих формул) с в. 1 получаем:

$$\frac{1}{2}\int\limits_t^T\psi_3(t_3)\int\limits_t^{t_3}\psi_2(t_1)\psi_1(t_1)dt_1d\mathbf{f}_{t_3}^{(i_3)}=\frac{1}{2}\int\limits_t^T(t-t_3)^{l_3}\int\limits_t^{t_3}(t-t_1)^{l_1+l_2}dt_1d\mathbf{f}_{t_3}^{(i_3)}=$$

$$=-\frac{1}{2(l_1+l_2+1)}\int\limits_t^T(t-t_3)^{l_1+l_2+l_3+1}d\mathbf{f}_{t_3}^{(i_3)},\qquad(5.76)$$

$$\frac{1}{2}\int\limits_t^T\psi_3(t_3)\psi_2(t_3)\int\limits_t^{t_3}\psi_1(t_1)d\mathbf{f}_{t_1}^{(i_1)}dt_3=\frac{1}{2}\int\limits_t^T(t-t_3)^{l_2+l_3}\int\limits_t^{t_3}(t-t_1)^{l_1}d\mathbf{f}_{t_1}^{(i_1)}dt_3=$$

$$=\frac{1}{2}\int\limits_t^T(t-t_1)^{l_1}d\mathbf{f}_{t_1}^{(i_1)}\int\limits_{t_1}^T(t-t_3)^{l_2+l_3}dt_3=$$

$$=\frac{1}{2(l_2+l_3+1)}\Bigg((-1)^{l_2+l_3}(T-t)^{l_2+l_3+1}\int\limits_t^T(t-t_1)^{l_1}d\mathbf{f}_{t_1}^{(i_1)}+$$

$$+\int\limits_t^T (t-t_1)^{l_1+l_2+l_3+1} d\mathbf{f}_{t_1}^{(i_1)}\Bigr). \tag{5.77}$$

Из вида правых частей (5.76) и (5.77) следует, что при их разложении с помощью полиномов Лежандра повторные ряды:

$$\sum_{j_3=0}^{\infty}\sum_{j_1=0}^{\infty} C_{j_3j_1j_1}\zeta_{j_3}^{(i_3)},\ \sum_{j_1=0}^{\infty}\sum_{j_3=0}^{\infty} C_{j_3j_3j_1}\zeta_{j_1}^{(i_1)}$$

будут содержать лишь конечное число слагаемых. Если же для разложения используются тригонометрические функции, то указанные повторные ряды будут выражаться соответствующими однократными рядами. Это означает, что в данном случае формулы (5.53) и (5.60) переходят в формулы (5.55) и (5.61) соответственно. Значит, по крайней мере, для 1, 2 и 3 частного случая имеет место

$$I_{l_1l_2l_{3T,t}}^{*(i_1i_2i_3)} = \sum_{j_1,j_2,j_3=0}^{\infty} C_{j_3j_2j_1}\zeta_{j_1}^{(i_1)}\zeta_{j_2}^{(i_2)}\zeta_{j_3}^{(i_3)}. \tag{5.78}$$

Поскольку при $l_1 = l_2 = l_3 = l$ в рассматриваемом случае имеет место: $\psi_1(\tau), \psi_2(\tau), \psi_3(\tau) \equiv (t-\tau)^l$, то (см. раздел 5.1) справедливо равенство: $C_{j_1j_1j_3}+C_{j_1j_3j_1}+C_{j_3j_1j_1} = \frac{1}{2}C_{j_1}^2C_{j_3}$ и соответственно равенство (5.66).

Далее, по-доказанному

$$\sum_{j_1,j_3=0}^{\infty} C_{j_1j_1j_3}\zeta_{j_3}^{(i_2)} = \frac{1}{2(2l+1)}\Bigl((T-t)^{2l+1}\int\limits_t^T (t-s)^l d\mathbf{f}_s^{(i_2)}+$$

$$+\int\limits_t^T (t-s)^{3l+1} d\mathbf{f}_s^{(i_2)}\Bigr), \tag{5.79}$$

$$\sum_{j_1,j_3=0}^{\infty} C_{j_3j_1j_1}\zeta_{j_3}^{(i_2)} = -\frac{1}{2(2l+1)}\int\limits_t^T (t-s)^{3l+1} d\mathbf{f}_s^{(i_2)}. \tag{5.80}$$

Кроме того, если речь идет о разложениях с помощью полиномов Лежандра, то известно, что $C_j = 0$ при $j > l$. Тогда используя (5.66), (5.79), (5.80), получаем

$$\sum_{j_1,j_3=0}^{\infty} C_{j_1j_3j_1}\zeta_{j_3}^{(i_2)} = \frac{1}{2}\sum_{j_1=0}^{l} C_{j_1}^2 \sum_{j_3=0}^{l} C_{j_3}\zeta_{j_3}^{(i_2)}-$$

$$-\frac{1}{2(2l+1)}(T-t)^{2l+1}\int\limits_t^T (t-s)^l d\mathbf{f}_s^{(i_2)}. \tag{5.81}$$

Поскольку с в. 1

$$\int\limits_t^T (t-s)^l d\mathbf{f}_s^{(i_2)} = \sum_{j_3=0}^{l} C_{j_3}\zeta_{j_3}^{(i_2)}, \tag{5.82}$$

а согласно равенству Парсеваля

$$\sum_{j_1=0}^{l} C_{j_1}^2 = \int\limits_t^T (t-s)^{2l} ds = \frac{(T-t)^{2l+1}}{2l+1},$$

то из (5.81) с в. 1 окончательно получаем

$$\sum_{j_1,j_3=0}^{\infty} C_{j_1 j_3 j_1}\zeta_{j_3}^{(i_2)} = 0.$$

Это означает, что в 4 частном случае при $l_1 = l_2 = l_3 = l$ имеет место (5.78).

Однако, в этих условиях и в 5 частном случае формула (5.78) будет верной.

Действительно, согласно (6.136) и (5.82):

$$I_{lll_{T,t}}^{*(i_1 i_1 i_1)} = \frac{1}{6}\Bigl(\int\limits_t^T (t-s)^l d\mathbf{f}_s^{(i_1)}\Bigr)^3 = \frac{1}{6}\left(\sum_{j_1=0}^{l} C_{j_1}\zeta_{j_1}^{(i_1)}\right)^3 =$$

$$= \sum_{j_1,j_2,j_3=0}^{l} C_{j_3 j_2 j_1}\zeta_{j_1}^{(i_1)}\zeta_{j_2}^{(i_1)}\zeta_{j_3}^{(i_1)}. \tag{5.83}$$

Последний переход при получении (5.83) сделан на основании вывода формулы (5.34).

Нетрудно видеть, что полученные результаты для 4 и 5 частных случаев для $\psi_1(\tau), \psi_2(\tau), \psi_3(\tau) \equiv (t-\tau)^l$ и системы полиномов Лежандра можно без труда перенести и на случай тригонометрической системы функций.

Оценивая в целом результаты данного раздела автор придерживается суждения о том, что по-видимому в общем случае, для разложения повторных стохастических интегралов Стратоновича высоких кратностей все же целесообразно сначала использовать переход по стандартным формулам от данных интегралов к соответствующим стохастическим интегралам Ито, а затем применять к последним теорему 5.1. В частных же случаях несомненно полезными являются теорема 5.2 (для повторных стохастических интегралов Стратоновича 2 кратности) и формула (5.71) (для повторных стохастических интегралов Стратоновича 3 кратности).

5.7 Другой подход к разложению повторных стохастических интегралов Стратоновича, основанный на повторных рядах Фурье

Рассмотрим, на примере повторных стохастических интегралов Стратоновича второй кратности, подход к разложению повторных стохастических интералов, который отличается от подхода из разд. 5.1 и 5.5.

Итак, пусть рассматривается повторный стохастический интеграл Стратоновича вида:

$$J^*[\psi^{(2)}]_{T,t} = \int\limits_t^{*T} \psi_2(t_2) \int\limits_t^{*t_2} \psi_1(t_1) d\mathbf{f}_{t_1}^{(i_1)} d\mathbf{f}_{t_2}^{(i_2)};\ i_1, i_2 = 1, \ldots, m,$$

где $\mathbf{f}_\tau^{(i)}$; $i = 1, \ldots, m$ — независимые стандартные винеровские процессы, а $\psi_1(\tau)$ и $\psi_2(\tau)$ — непрерывно дифференцируемые на промежутке $[t, T]$ функции.

Рассмотрим функцию

$$K^*(t_1, t_2) = K(t_1, t_2) + \frac{1}{2}\mathbf{1}_{\{t_1 = t_2\}} \psi_1(t_1)\psi_2(t_1),$$

где $t_1, t_2 \in [t, T]$, а $K(t_1, t_2)$ имеет вид:

$$K(t_1, t_2) = \begin{cases} \psi_1(t_1)\psi_2(t_2), & t_1 < t_2 \\ 0, & \text{иначе} \end{cases};\ t_1, t_2 \in [t, T].$$

В силу доказанных в разделе 5.1 лемм и формулы

$$J^*[\psi^{(2)}]_{T,t} = \int\limits_t^T \psi_2(t_2) \int\limits_t^{t_2} \psi_1(t_1) d\mathbf{f}_{t_1}^{(i_1)} d\mathbf{f}_{t_2}^{(i_2)} + \frac{1}{2}\mathbf{1}_{\{i_1 = i_2\}} \int\limits_t^T \psi_2(t_2)\psi_1(t_2) dt_2$$

с в. 1 имеем:

$$J^*[\psi^{(2)}]_{T,t} = \underset{N\to\infty}{\text{l.i.m.}} \sum_{l_1=0}^{N-1} \sum_{l_2=0}^{N-1} K^*(\tau_{l_1}, \tau_{l_2}) \Delta\mathbf{f}_{\tau_{l_1}}^{(i_1)} \Delta\mathbf{f}_{\tau_{l_2}}^{(i_2)}, \tag{5.84}$$

где сохранен смысл обозначений формулы (5.7).

Разложим функцию $K^*(t_1, t_2)$ по переменной t_1, при фиксированном t_2, в ряд Фурье на интервале (t, T) :

$$K^*(t_1, t_2) = \sum_{j_1=0}^{\infty} C_{j_1}(t_2)\phi_{j_1}(t_1) \quad (t_1 \neq t, T), \tag{5.85}$$

где

$$C_{j_1}(t_2) = \int\limits_t^T K^*(t_1,t_2)\phi_{j_1}(t_1)dt_1 = \int\limits_t^T K(t_1,t_2)\phi_{j_1}(t_1)dt_1 =$$

$$= \psi_2(t_2)\int\limits_t^{t_2} \psi_1(t_1)\phi_{j_1}(t_1)dt_1,$$

$\{\phi_j(x)\}_{j=0}^{\infty}$ — полная ортонормированная на отрезке $[t,T]$ система непрерывных функций.

Равенство (5.85) выполняется поточечно в каждой точке интервала (t,T) по переменной t_1, при фиксированном $t_2 \in [t,T]$, в силу кусочной гладкости функции $K^*(t_1,t_2)$ по переменной $t_1 \in [t,T]$ (t_2 — фиксировано). Отметим также, что в силу известных свойств рядов Фурье, ряд (5.85) сходится при $t_1 = t, T$ (не обязательно к функции $K^*(t_1,t_2)$).

При получении (5.85) мы также использовали то, что правая часть (5.85) сходится при $t_1 = t_2$ (точка конечного разрыва функции $K(t_1,t_2)$) к величине

$$\frac{1}{2}\left(K(t_2-0,t_2)+K(t_2+0,t_2)\right) = \frac{1}{2}\psi_1(t_2)\psi_2(t_2) = K^*(t_2,t_2).$$

Функция $C_{j_1}(t_2)$ является непрерывно дифференцируемой на отрезке $[t,T]$. Разложим ее на интервале (t,T) в ряд Фурье:

$$C_{j_1}(t_2) = \sum_{j_2=0}^{\infty} C_{j_2 j_1}\phi_{j_2}(t_2) \quad (t_2 \neq t,T), \tag{5.86}$$

где

$$C_{j_2 j_1} = \int\limits_t^T C_{j_1}(t_2)\phi_{j_2}(t_2)dt_2 = \int\limits_t^T \psi_2(t_2)\phi_{j_2}(t_2)\int\limits_t^{t_2}\psi_1(t_1)\phi_{j_1}(t_1)dt_1dt_2,$$

а равенство (5.86) выполняется поточечно в любой точке интервала (t,T), причем правая часть (5.86) сходится при $t_2 = t,T$ (не обязательно к $C_{j_1}(t_2)$).

Подставим (5.86) в (5.85):

$$K^*(t_1,t_2) = \sum_{j_1=0}^{\infty}\sum_{j_2=0}^{\infty} C_{j_2 j_1}\phi_{j_1}(t_1)\phi_{j_2}(t_2); \quad (t_1,t_2) \in (t,T)^2, \tag{5.87}$$

причем ряд в правой части (5.87) сходится на границе квадрата $[t,T]^2$ (не обязательно к $K^*(t_1,t_2)$).

Далее, используя схему доказательства теоремы 5.1 и (5.84), получаем:

$$J^*[\psi^{(2)}]_{T,t} = \sum_{j_1=0}^{p_1} \sum_{j_2=0}^{p_2} C_{j_2 j_1} \zeta_{j_1}^{(i_1)} \zeta_{j_2}^{(i_2)} + R_{T,t}^{p_1 p_2}, \tag{5.88}$$

где

$$R_{T,t}^{p_1 p_2} = \int\limits_t^T \int\limits_t^{t_2} G_{p_1 p_2}(t_1, t_2) d\mathbf{f}_{t_1}^{(i_1)} d\mathbf{f}_{t_2}^{(i_2)} + \int\limits_t^T \int\limits_t^{t_1} G_{p_1 p_2}(t_1, t_2) d\mathbf{f}_{t_2}^{(i_2)} d\mathbf{f}_{t_1}^{(i_1)} +$$

$$+ \mathbf{1}_{\{i_1 = i_2\}} \int\limits_t^T G_{p_1 p_2}(t_1, t_1) dt_1;$$

$$G_{p_1 p_2}(t_1, t_2) \stackrel{\text{def}}{=} K^*(t_1, t_2) - \sum_{j_1=0}^{p_1} \sum_{j_2=0}^{p_2} C_{j_2 j_1} \phi_{j_1}(t_1) \phi_{j_2}(t_2);$$

$p_1,\ p_2 < \infty$.

Используя оценки (1.43), (1.44) имеем

$$\mathsf{M}\left\{\left(R_{T,t}^{p_1 p_2}\right)^{2n}\right\} \le C_n \Bigg(\int\limits_t^T \int\limits_t^{t_2} \left(G_{p_1 p_2}(t_1, t_2)\right)^{2n} dt_1 dt_2 +$$

$$+ \int\limits_t^T \int\limits_t^{t_1} \left(G_{p_1 p_2}(t_1, t_2)\right)^{2n} dt_2 dt_1 + \mathbf{1}_{\{i_1 = i_2\}} \int\limits_t^T \left(G_{p_1 p_2}(t_1, t_1)\right)^{2n} dt_1 \Bigg), \tag{5.89}$$

где $C_n < \infty$ — постоянная, которая зависит от n и $T - t$; $n = 1,\ 2, \ldots$

Отметим, что в силу выдвинутых ранее предположений, функция $G_{p_1 p_2}(t_1, t_2)$ непрерывна в областях интегрирования интегралов в правой части (5.89) и ограничена на границе квадрата $[t, T]^2$.

Оценим первый интеграл в правой части (5.89):

$$0 \le \int\limits_t^T \int\limits_t^{t_2} \left(G_{p_1 p_2}(t_1, t_2)\right)^{2n} dt_1 dt_2 = \left(\int\limits_{D_\varepsilon} + \int\limits_{\Gamma_\varepsilon} \right) \left(G_{p_1 p_2}(t_1, t_2)\right)^{2n} dt_1 dt_2 \le$$

$$\le \sum_{i=0}^{N-1} \sum_{j=0}^{i} \max_{(t_1, t_2) \in [\tau_i, \tau_{i+1}] \times [\tau_j, \tau_{j+1}]} \left(G_{p_1 p_2}(t_1, t_2)\right)^{2n} \Delta\tau_i \Delta\tau_j + M S_{\Gamma_\varepsilon} \le$$

$$\le \sum_{i=0}^{N-1} \sum_{j=0}^{i} \left(G_{p_1 p_2}(\tau_i, \tau_j)\right)^{2n} \Delta\tau_i \Delta\tau_j +$$

$$+ \sum_{i=0}^{N-1} \sum_{j=0}^{i} \left| \left(G_{p_1 p_2}(t_i^{(p_1 p_2)}, t_j^{(p_1 p_2)})\right)^{2n} - \left(G_{p_1 p_2}(\tau_i, \tau_j)\right)^{2n} \right| \Delta\tau_i \Delta\tau_j + M S_{\Gamma_\varepsilon} \le$$

$$\leq \sum_{i=0}^{N-1} \sum_{j=0}^{i} \left(G_{p_1p_2}(\tau_i,\tau_j)\right)^{2n} \Delta\tau_i\Delta\tau_j + \varepsilon_1 \frac{1}{2}(T-t-3\varepsilon)^2 \left(1+\frac{1}{N}\right) + MS_{\Gamma_\varepsilon}, \tag{5.90}$$

где $D_\varepsilon = \{(t_1,t_2) : t_2 \in [t+2\varepsilon, T-\varepsilon], t_1 \in [t+\varepsilon, t_2-\varepsilon]\}$; $\Gamma_\varepsilon = D\backslash D_\varepsilon$; $D = \{(t_1,t_2) : t_2 \in [t,T], t_1 \in [t,t_2]\}$; ε — достаточно малое положительное число; S_{Γ_ε} — площадь Γ_ε; $M > 0$ — постоянная, ограничивающая $\left(G_{p_1p_2}(t_1,t_2)\right)^{2n}$; $(t_i^{(p_1p_2)}, t_j^{(p_1p_2)})$ — точка максимума этой функции при $(t_1,t_2) \in [\tau_i,\tau_{i+1}]\times[\tau_j,\tau_{j+1}]$; $\tau_i = t+2\varepsilon+i\Delta$ $(i=0,1,\ldots,N)$; $\tau_N = T-\varepsilon$; $\Delta = (T-t-3\varepsilon)/N$; $\Delta < \varepsilon$; $\varepsilon_1 > 0$ — сколь угодно малое положительное число.

При получении (5.90) мы использовали известные свойства интегралов, первую и вторую теорему Вейерштрасса для функции двух переменных, а также непрерывность и, как следствие, равномерную непрерывность функции $\left(G_{p_1p_2}(t_1,t_2)\right)^{2n}$ в D_ε ($\forall\varepsilon_1 > 0$ $\exists\delta(\varepsilon_1) > 0$, которое не зависит от t_1, t_2, p_1, p_2 и такое, что при $\sqrt{2}\Delta < \delta$ имеет место неравенство: $\left|\left(G_{p_1p_2}(t_i^{(p_1p_2)}, t_j^{(p_1p_2)})\right)^{2n} - \left(G_{p_1p_2}(\tau_i,\tau_j)\right)^{2n}\right| < \varepsilon_1$).

Учитывая (5.87) запишем:

$$\lim_{p_1\to\infty}\lim_{p_2\to\infty}\left(G_{p_1p_2}(t_1,t_2)\right)^{2n} = 0 \text{ при } (t_1,t_2) \in D_\varepsilon$$

и осуществим повторный предельный переход $\lim\limits_{\varepsilon\to+0}\lim\limits_{p_1\to\infty}\lim\limits_{p_2\to\infty}$ в неравенстве (5.90). Тогда, в силу произвольности ε_1, имеем

$$\lim_{p_1\to\infty}\lim_{p_2\to\infty}\int_t^T\int_t^{t_2}\left(G_{p_1p_2}(t_1,t_2)\right)^{2n} dt_1dt_2 = 0. \tag{5.91}$$

Аналогично приведенным выше рассуждениям имеем:

$$\lim_{p_1\to\infty}\lim_{p_2\to\infty}\int_t^T\int_t^{t_1}\left(G_{p_1p_2}(t_1,t_2)\right)^{2n} dt_2dt_1 = 0, \tag{5.92}$$

$$\lim_{p_1\to\infty}\lim_{p_2\to\infty}\int_t^T\left(G_{p_1p_2}(t_1,t_1)\right)^{2n} dt_1 = 0. \tag{5.93}$$

Из (5.89), (5.91) – (5.93) получаем, что

$$\lim_{p_1\to\infty}\lim_{p_2\to\infty}\mathsf{M}\left\{\left(R_{T,t}^{p_1p_2}\right)^{2n}\right\} = 0;\ n \in N.$$

Последнее равенство и (5.88) позволяют записать

$$J^*[\psi^{(2)}]_{T,t} = \sum_{j_1=0}^{\infty}\sum_{j_2=0}^{\infty} C_{j_2j_1}\zeta_{j_1}^{(i_1)}\zeta_{j_2}^{(i_2)},$$

где сходимость повторного ряда понимается в среднем степени $2n$; $n \in N$.

Нетрудно заметить, что если функцию $K^*(t_1, t_2)$ разложить в ряд Фурье на интервале (t, T) сначала по переменной t_2 (t_1 фиксировано), а затем коэффициент Фурье $\psi_1(t_1) \int\limits_{t_1}^{T} \psi_2(t_2)\phi_{j_2}(t_2)dt_2$ полученного ряда разложить в ряд Фурье на интервале (t, T) по переменной t_1, то учтя, что

$$\int\limits_{t}^{T} \psi_1(t_1)\phi_{j_1}(t_1) \int\limits_{t_1}^{T} \psi_2(t_2)\phi_{j_2}(t_2)dt_2 dt_1 = C_{j_2 j_1},$$

придем к следующей формуле разложения повторного стохастического интеграла Стратоновича второй кратности:

$$J^*[\psi^{(2)}]_{T,t} = \sum_{j_2=0}^{\infty} \sum_{j_1=0}^{\infty} C_{j_2 j_1} \zeta_{j_1}^{(i_1)} \zeta_{j_2}^{(i_2)}.$$

В силу того, что обобщение (на случай повторных стохастических интегралов кратности выше второй) подхода, изложенного в данном разделе, весьма нетривиально и он (как мы увидим в главе 6) менее перспективен, чем подход, основанный на теореме 5.1, мы не будем его развивать далее.

5.8 Разложение повторных стохастических интегралов по мартингальным пуассоновским мерам

Введем в рассмотрение следующий повторный стохастический интеграл

$$P[\chi^{(k)}]_{T,t} = \int\limits_{t}^{T} \int\limits_{X} \chi_k(t_k, \mathbf{y}_k) \ldots \int\limits_{t}^{t_2} \int\limits_{X} \chi_1(t_1, \mathbf{y}_1) \tilde{\nu}^{(i_1)}(dt_1, d\mathbf{y}_1) \ldots \tilde{\nu}^{(i_k)}(dt_k, d\mathbf{y}_k), \tag{5.94}$$

где $\Re^n \stackrel{\text{def}}{=} X$; $i_1, \ldots, i_k = 0,\ 1, \ldots, m$; $\nu^{(i)}(dt, d\mathbf{y})$ — независимые пуассоновские меры, заданные в $[0, T] \times X$ и удовлетворяющие условиям (I)–(III) разд. 1.1.5; $\tilde{\nu}^{(i)}(dt, d\mathbf{y}) = \nu^{(i)}(dt, d\mathbf{y}) - \Pi(d\mathbf{y})dt$ — мартингальные пуассоновские меры; $i = 1, \ldots, m$; $\tilde{\nu}^{(0)}(dt, d\mathbf{y}) \stackrel{\text{def}}{=} \Pi(d\mathbf{y})dt$; $\chi_l(\tau, \mathbf{y}) = \psi_l(\tau)\varphi_l(\mathbf{y})$; $\psi_l(\tau) : [t, T] \to \Re^1$; $\varphi_l(\mathbf{y}) : X \to \Re^1$; $\chi_l(s, \mathbf{y}) \in H_2(\Pi, [t, T])$, $l = 1, \ldots, k$; определение класса $H_2(\Pi, [t, T])$ приводится в разд. 1.3.2.

Теорема 5.3. *Пусть выполнены следующие условия:*

1. $\psi_i(\tau)$; $i=1,\ 2,\ldots,k$ — *непрерывные на промежутке* $[t,T]$ *функции.*

2. $\{\phi_j(x)\}_{j=0}^{\infty}$ — *полная ортонормированная система функций в пространстве* $L_2([t,T])$, *каждая функция которой при конечном* j *удовлетворяет условию* $(\star)$ *на с.229.*

3. $\int\limits_X |\varphi_l(\mathbf{y})|^s\,\Pi(dy)<\infty$; $l=1,\ldots,k$; $s=1,2,\ldots,2^{k+1}$.

Тогда повторный стохастический интеграл по мартингальным пуассоновским мерам $P[\chi^{(k)}]_{T,t}$ *разлагается в сходящийся в среднеквадратическом смысле кратный ряд*

$$P[\chi^{(k)}]_{T,t}=\sum_{j_1,\ldots,j_k=0}^{\infty}C_{j_k\ldots j_1}\Biggl(\prod_{l=1}^{k}\pi_{(j_l)T,t}^{(l,i_l)}-$$

$$-\underset{N\to\infty}{\text{l.i.m.}}\sum_{(l_1,\ldots,l_k)\in\mathcal{G}_k}\prod_{r=1}^{k}\phi_{j_r}(\tau_{l_r})\int\limits_X\varphi_r(\mathbf{y})\tilde{\nu}^{(i_r)}([\tau_{l_r},\tau_{l_r+1}),d\mathbf{y})\Biggr),\qquad(5.95)$$

где $\mathcal{G}_k=\mathcal{H}_k\backslash\mathcal{L}_k$; $\mathcal{H}_k=\{(l_1,\ldots,l_k):\ l_1,\ldots,l_k=0,\ 1,\ldots,N-1\}$,

$$\mathcal{L}_k=\Biggl\{(l_1,\ldots,l_k):\ l_1,\ldots,l_k=0,\ 1,\ldots,N-1;$$
$$l_g\neq l_r(g\neq r);\ g,r=1,\ldots,k\Biggr\};$$

$\pi_{(j)T,t}^{(l,i_l)}=\int\limits_t^T\int\limits_X\phi_j(\tau)\varphi_l(\mathbf{y})\tilde{\nu}^{(i_l)}(d\tau,d\mathbf{y})$ — *независимые при различных* $i_l\neq 0$ *и некорелированные при различных* j *случайные величины;*

$$C_{j_k\ldots j_1}=\int\limits_{[t,T]^k}K(t_1,\ldots,t_k)\prod_{l=1}^{k}\phi_{j_l}(t_l)dt_1\ldots dt_k;$$

$$K(t_1,\ldots,t_k)=\begin{cases}\psi_1(t_1)\ldots\psi_k(t_k),\ t_1<\ldots<t_k\\ 0,\ \textit{иначе}\end{cases};\ t_1,\ldots,t_k\in[t,T].$$

Данная теорема доказывается также, как и теорема 5.1. Небольшие отличия будут лишь в установлении аналогов лемм 5.1–5.3 для рассматриваемого случая.

Лемма 5.4. *Пусть* $\psi_l(\tau)$ — *непрерывные на промежутке* $[t,T]$ *функции, а функции* $\varphi_l(\mathbf{y})$ *таковы, что* $\int\limits_X|\varphi_l(\mathbf{y})|^p\,\Pi(d\mathbf{y})<\infty$; $p=1,\ 2$; $l=1,\ldots,k$. *Тогда с вероятностью 1*

$$P[\bar{\chi}^{(k)}]_{T,t}=\underset{N\to\infty}{\text{l.i.m.}}\sum_{j_k=0}^{N-1}\ldots\sum_{j_1=0}^{j_2-1}\prod_{l=1}^{k}\int\limits_X\chi_l(\tau_{j_l},\mathbf{y})\bar{\nu}^{(i_l)}([\tau_{j_l},\tau_{j_l+1}),d\mathbf{y}),\qquad(5.96)$$

где $\{\tau_{j_l}\}_{j_l=0}^{N-1}$ *— разбиение промежутка* $[t,T]$, *которое удовлетворяет условию* (5.6), $\bar{\nu}^{(i)}([\tau,s),d\mathbf{y}) = \tilde{\nu}^{(i)}([\tau,s),d\mathbf{y})$ *или* $\nu^{(i)}([\tau,s),d\mathbf{y})$; *интеграл* $P[\bar{\chi}^{(k)}]_{T,t}$ *отличается от интеграла* $P[\chi^{(k)}]_{T,t}$ *тем, что в* $P[\bar{\chi}^{(k)}]_{T,t}$ *вместо* $\tilde{\nu}^{(i_l)}(dt_l,d\mathbf{y}_l)$ *стоят* $\bar{\nu}^{(i_l)}(dt_l,d\mathbf{y}_l)$; $l=1,\ldots,k$.

Доказательство. Используя (1.64) при $r=2$ и (1.65), (1.66) при $r=1$, а также условия леммы 5.4, нетрудно заметить, что интегральная сумма интеграла $P[\bar{\chi}^{(k)}]_{T,t}$ в условиях леммы 5.4 может быть представлена в виде допредельного выражения из правой части (5.96) и величины, которая стремится в среднеквадратическом смысле к нулю при $N\to\infty$. $\square$

Введем в рассмотрение следующие повторные стохастические интегралы:

$$\underset{N\to\infty}{\text{l.i.m.}} \sum_{j_1,\ldots,j_k=0}^{N-1} \Phi(\tau_{j_1},\ldots,\tau_{j_k}) \prod_{l=1}^{k} \int\limits_X \varphi_l(\mathbf{y})\tilde{\nu}^{(i_l)}([\tau_{j_l},\tau_{j_l+1}),d\mathbf{y}) \stackrel{\text{def}}{=} P[\Phi]_{T,t}^{(k)},$$

$$\int\limits_t^T \ldots \int\limits_t^{t_2} \Phi(t_1,\ldots,t_k) \int\limits_X \varphi_1(\mathbf{y})\tilde{\nu}^{(i_1)}(dt_1,d\mathbf{y}) \ldots \int\limits_X \varphi_k(\mathbf{y})\tilde{\nu}^{(i_k)}(dt_k,d\mathbf{y}) \stackrel{\text{def}}{=}$$

$$\stackrel{\text{def}}{=} \hat{P}[\Phi]_{T,t}^{(k)},$$

где сохранен смысл обозначений, входящих в (5.96); $\Phi(t_1,\ldots,t_k) : [t,T]^k \to \Re^1$ — ограниченная неслучайная функция.

Заметим, что если функции $\varphi_l(\mathbf{y})$; $l=1,\ldots,k$ удовлетворяют условиям леммы 5.4, а функция $\Phi(t_1,\ldots,t_k)$ непрерывна, то для интеграла $\hat{P}[\Phi]_{T,t}^{(k)}$ справедливо с вероятностью 1 равенство типа (5.96).

Лемма 5.5. *Пусть для* $l=1,\ldots,k$ *выполнены условия:* $g_l(\tau,\mathbf{y}) = h_l(\tau)\varphi_l(\mathbf{y})$; *функции* $h_l(\tau) : [t,T] \to \Re^1$ *— удовлетворяют условию* $(\star)$ *на с.229, а функции* $\varphi_l(\mathbf{y}) : X \to \Re^1$ *удовлетворяют условию* $\int\limits_X |\varphi_l(\mathbf{y})|^p \Pi(d\mathbf{y}) < \infty$; $p=1,2,3,\ldots,2^{k+1}$. *Тогда*

$$\prod_{l=1}^{k} \int\limits_t^T \int\limits_X g_l(s,\mathbf{y})\bar{\nu}^{(i_l)}(ds,d\mathbf{y}) = P[\Phi]_{T,t}^{(k)} \text{ с в.1, } \Phi(t_1,\ldots,t_k) = \prod_{l=1}^{k} h_l(t_l).$$

Доказательство. Введем обозначения:

$$J[\bar{g}_l]_N \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{j=0}^{N-1} \int\limits_X g_l(\tau_j,\mathbf{y})\bar{\nu}^{(i_l)}([\tau_j,\tau_{j+1}),d\mathbf{y}),\ J[\bar{g}_l]_{T,t} \stackrel{\text{def}}{=} \int\limits_t^T \int\limits_X g_l(s,\mathbf{y})\bar{\nu}^{(i_l)}(ds,d\mathbf{y}).$$

Заметим, что

$$\prod_{l=1}^{k} J[\bar{g}_l]_N - \prod_{l=1}^{k} J[\bar{g}_l]_{T,t} = \sum_{l=1}^{k}\left(\prod_{q=1}^{l-1} J[\bar{g}_q]_{T,t}\right)\left(J[\bar{g}_l]_N - J[\bar{g}_l]_{T,t}\right)\left(\prod_{q=l+1}^{k} J[\bar{g}_q]_N\right).$$

Используя неравенства Минковского и Коши–Буняковского, вместе с (1.64)–(1.66) и условиями леммы 5.5 получаем

$$\left(\mathsf{M}\left\{\left|\prod_{l=1}^{k} J[\bar{g}_l]_N - \prod_{l=1}^{k} J[\bar{g}_l]_{T,t}\right|^2\right\}\right)^{\frac{1}{2}} \le C_k \sum_{l=1}^{k}\left(\mathsf{M}\left\{\left|J[\bar{g}_l]_N - J[\bar{g}_l]_{T,t}\right|^4\right\}\right)^{\frac{1}{4}}, \tag{5.97}$$

где $C_k < \infty$. Поскольку ясно, что

$$J[\bar{g}_l]_N - J[\bar{g}_l]_{T,t} = \sum_{q=0}^{N-1} J[\Delta\bar{g}_l]_{\tau_{q+1},\tau_q},$$

$$J[\Delta\bar{g}_l]_{\tau_{q+1},\tau_q} = \int\limits_{\tau_q}^{\tau_{q+1}}\int\limits_{X}\left(g_l(\tau_q,\mathbf{y}) - g_l(s,\mathbf{y})\right)\bar{\nu}^{(i_l)}(ds,d\mathbf{y}),$$

то в силу независимости $J[\Delta\bar{g}_l]_{\tau_{q+1},\tau_q}$ при различных q имеем [127]

$$\mathsf{M}\left\{\left|\sum_{j=0}^{N-1} J[\Delta\bar{g}_l]_{\tau_{j+1},\tau_j}\right|^4\right\} = \sum_{j=0}^{N-1}\mathsf{M}\left\{\left|J[\Delta\bar{g}_l]_{\tau_{j+1},\tau_j}\right|^4\right\} +$$

$$+6\sum_{j=0}^{N-1}\mathsf{M}\left\{\left|J[\Delta\bar{g}_l]_{\tau_{j+1},\tau_j}\right|^2\right\}\sum_{q=0}^{j-1}\mathsf{M}\left\{\left|J[\Delta\bar{g}_l]_{\tau_{q+1},\tau_q}\right|^2\right\}. \tag{5.98}$$

Далее, используя (1.64)–(1.66) и условия леммы 5.5, получаем, что правая часть (5.98) стремится к нулю при $N \to \infty$. Учитывая этот факт и (5.97), приходим к утверждению леммы. □

Продолжая доказательство теоремы 5.3 по схеме доказательства теоремы 5.1 с использованием лемм 5.4, 5.5 и (1.64)–(1.66) приходим к утверждению теоремы 5.3. □

Приведем пример на применение теоремы 5.3.

При $i_1 \ne i_2,\ i_1, i_2 = 1,\ldots,m$ по теореме 5.3 с использованием системы полиномов Лежандра получаем

$$\int\limits_{t}^{T}\int\limits_{X}\varphi_2(\mathbf{y}_1)\int\limits_{t}^{t_1}\int\limits_{X}\varphi_1(\mathbf{y}_2)\tilde{\nu}^{(i_2)}(dt_2,d\mathbf{y}_2)\tilde{\nu}^{(i_1)}(dt_1,d\mathbf{y}_1) =$$

$$= \frac{T-t}{2}\left(\pi_{(0)T,t}^{(1,i_1)}\pi_{(0)T,t}^{(2,i_2)} + \sum_{i=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{4i^2-1}}\left(\pi_{(i-1)T,t}^{(2,i_2)}\pi_{(i)T,t}^{(1,i_1)} - \pi_{(i-1)T,t}^{(1,i_1)}\pi_{(i)T,t}^{(2,i_2)}\right)\right),$$

$$\int\limits_t^T \int\limits_X \varphi_1(\mathbf{y}_1)\tilde{\nu}^{(i_1)}(dt_1, d\mathbf{y}_1) = \sqrt{T-t}\pi_{(0)T,t}^{(1,i_1)},$$

где $\pi_{(j)T,t}^{(l,i_l)} = \int\limits_t^T \int\limits_X \phi_j(\tau)\varphi_l(\mathbf{y})\tilde{\nu}^{(i_l)}(d\tau, d\mathbf{y})$; $l = 1,\ 2$; $\{\phi_j(\tau)\}_{j=0}^{\infty}$ — полная ортонормированная в пространстве $L_2([t,T])$ система полиномов Лежандра.

5.9 Обобщение теоремы 5.1 для повторных стохастических интегралов по мартингалам

Пусть задано фиксированное вероятностное пространство $(\Omega, \mathcal{F}, \mathsf{P})$ и пусть $\{\mathcal{F}_t, t \in [0,T]\}$ — неубывающая совокупность σ-подалгебр $\mathcal{F}$. Через $\mathcal{M}_2(\rho, [0,T])$ будем обозначать класс $\mathcal{F}_t$-измеримых при каждом $t \in [0,T]$ мартингалов M_t, удовлетворяющих условиям $\mathsf{M}\left\{(M_s - M_t)^2\right\} = \int\limits_t^s \rho(\tau)d\tau$, $\mathsf{M}\left\{|M_s - M_t|^p\right\} \le C_p|s-t|$, где $0 \le t < s \le T$; $\rho(\tau)$ — неотрицательная непрерывно дифференцируемая на промежутке $[0,T]$ неслучайная функция; $C_p < \infty$ — постоянная; $p = 3, 4, \ldots$.

Очевидно, что мартингал из класса $\mathcal{M}_2(\rho, [0,T])$ является D-мартингалом.

Пусть $\{\tau_j\}_{j=0}^N$ — разбиение промежутка $[0,T]$, для которого

$$0 = \tau_0 < \tau_1 < \ldots < \tau_N = T, \max_{0 \le j \le N-1} |\tau_{j+1} - \tau_j| \to 0 \text{ при } N \to \infty. \quad (5.99)$$

В соответствии со свойствами функции $\rho(\tau)$ условие принадлежности $\mathcal{F}_t$-измеримого при каждом $t \in [0,T]$ случайного процесса $\xi_t, t \in [0,T]$, классу $H_2(\rho, [0,T])$ запишем в виде $\int\limits_0^T \mathsf{M}\{|\xi_t|^2\}\rho(t)dt < \infty$.

Определим на разбиении $\{\tau_j\}_{j=0}^N$ ступенчатую случайную функцию $\xi_t^{(N)}$ следующим образом: $\xi_t^{(N)} = \xi_{\tau_{j-1}}$ с вероятностью 1 при $t \in [\tau_{j-1}, \tau_j)$; $j = 1, \ldots, N$. В главе 1 (см. также [4]) был введен стохастический интеграл от процесса $\xi_t \in H_2(\rho, [0,T])$ по D-мартингалу. В соответствии с этим стохастический интеграл по мартингалу $M_t \in \mathcal{M}_2(\rho, [0,T])$ определяется равенством

$$\underset{N\to\infty}{\text{l.i.m.}} \sum_{j=0}^{N-1} \xi_{\tau_j}^{(N)} \left(M_{\tau_{j+1}} - M_{\tau_j}\right) \stackrel{\text{def}}{=} \int\limits_0^T \xi_t dM_t, \quad (5.100)$$

где $\{\tau_j\}_{j=0}^N$ — разбиение промежутка $[0,T]$, удовлетворяющее условию (5.99); $\xi_t^{(N)}$ — произвольная последовательность ступенчатых функций из $H_2(\rho,[0,T])$, для которой $\int\limits_0^T \mathsf{M}\{|\xi_t^{(N)}-\xi_t|^2\}\rho(t)dt \to 0$ при $N\to\infty$.

Обозначим через $Q_4(\rho,[0,T])$ подкласс $\mathcal{M}_2(\rho,[0,T])$ мартингалов $M_t, t\in[0,T]$, для которых при некотором $\alpha>0$ справедлива оценка:

$$\mathsf{M}\left\{\left|\int\limits_\theta^\tau g(s)dM_s\right|^4\right\} \le K_4\int\limits_\theta^\tau |g(s)|^\alpha ds,$$

где $0\le\theta<\tau\le T$; $g(s)$ — ограниченная на промежутке $[0,T]$ неслучайная функция; $K_4<\infty$ — постоянная.

Через $G_n(\rho,[0,T])$ обозначим подкласс $\mathcal{M}_2(\rho,[0,T])$ мартингалов $M_t, t\in[0,T]$, для которых

$$\mathsf{M}\left\{\left|\int\limits_\theta^\tau g(s)dM_s\right|^n\right\} < \infty,$$

где $0\le\theta<\tau\le T$; $n\in N$; $g(s)$ — такая же функция, как в определении $Q_4(\rho,[0,T])$.

Напомним (см. главу 1), что если $(\xi_t)^n\in H_2(\rho,[0,T])$ при $\rho(t)\equiv 1$, то справедлива оценка [4]

$$\mathsf{M}\left\{\left|\int\limits_\theta^\tau \xi_t dt\right|^{2n}\right\} \le (\tau-\theta)^{2n-1}\int\limits_\theta^\tau \mathsf{M}\{|\xi_t|^{2n}\}dt,\ 0\le\theta<\tau\le T. \qquad (5.101)$$

Положим

$$J[\psi^{(k)}]_{T,t}^M \stackrel{\text{def}}{=} \int\limits_t^T \psi_k(t_k)\ldots\int\limits_t^{t_2}\psi_1(t_1)dM_{t_1}^{(1,i_1)}\ldots dM_{t_k}^{(k,i_k)}; i_1,\ldots,i_k=0,1,\ldots,m.$$

Докажем следующую теорему.

Теорема 5.4. *Пусть выполнены условия:*

I. $M_\tau^{(l,i_l)}\in Q_4(\rho,[t,T])$, $G_n(\rho,[t,T])$; $n=2,4,\ldots,2^k$; $k\in N$; $i_l=1,\ldots,m$; $l=1,\ldots,k$.

II. $\{\phi_j(x)\}_{j=0}^\infty$ — *полная ортонормированная система функций в пространстве* $L_2([t,T])$, *каждая функция которой при конечном* j *удовлетворяет условию* $(\star)$ *на с.229.*

III. $\psi_i(\tau)$; $i=1,\ 2,\ldots,k$ — *непрерывные на отрезке* $[t,T]$ *функции.*

Тогда повторный стохастический интеграл $J[\psi^{(k)}]_{T,t}^M$ *разлагается в сходящийся в среднеквадратическом смысле кратный ряд*

$$J[\psi^{(k)}]_{T,t}^M = \sum_{j_1,\ldots,j_k=0}^\infty C_{j_k\ldots j_1}\Bigg(\prod_{l=1}^k \xi_{j_l}^{(l,i_l)} -$$

$$-\underset{N\to\infty}{\text{l.i.m.}} \sum_{(l_1,\ldots,l_k)\in\mathcal{G}_k} \phi_{j_{l_1}}(\tau_{l_1})\Delta M_{\tau_{l_1}}^{(1,i_1)}\ldots\phi_{j_{l_k}}(\tau_{l_k})\Delta M_{\tau_{l_k}}^{(k,i_k)}\Bigg),$$

где $\mathcal{G}_k=\mathcal{H}_k\backslash\mathcal{L}_k$; $\mathcal{H}_k=\{(l_1,\ldots,l_k):\ l_1,\ldots,l_k=0,\ 1,\ldots,N-1\}$,

$$\mathcal{L}_k=\Big\{(l_1,\ldots,l_k):\ l_1,\ldots,l_k=0,\ 1,\ldots,N-1;$$
$$l_g\neq l_r(g\neq r);\ g,r=1,\ldots,k\Big\};$$

$\xi_{(j_l)T,t}^{(l,i_l)}=\int\limits_t^T\phi_{j_l}(s)dM_s^{(l,i_l)}$ *— независимые при различных* $i_l=1,\ldots,m$; $l=1,\ldots,k$ *и некоррелированные при различных* j_l *(если* $\rho(\tau)$ *— постоянная,* $i_l\neq 0$*) случайные величины;*

$$C_{j_k\ldots j_1}=\int\limits_{[t,T]^k}K(t_1,\ldots,t_k)\prod_{l=1}^k\phi_{j_l}(t_l)dt_1\ldots dt_k;$$

$$K(t_1,\ldots,t_k)=\begin{cases}\psi_1(t_1)\ldots\psi_k(t_k),\ t_1<\ldots<t_k\\ 0,\ \text{иначе}\end{cases};\ t_1,\ldots,t_k\in[t,T].$$

Доказательство. Для доказательства теоремы 5.4 рассмотрим ряд лемм.

Лемма 5.6. *Пусть* $M_\tau^{(l,i_l)}\in\mathcal{M}_2(\rho,[t,T])$; $i_l=1,\ldots,m$; $l=1,\ldots,k$, *а* $\psi_i(\tau)$; $i=1,\ 2,\ldots,k$ *— непрерывные на промежутке* $[t,T]$ *функции. Тогда*

$$J[\psi^{(k)}]_{T,t}^M=\underset{N\to\infty}{\text{l.i.m.}}\sum_{j_k=0}^{N-1}\ldots\sum_{j_1=0}^{j_2-1}\prod_{l=1}^k\psi_l(\tau_{j_l})\Delta M_{\tau_{j_l}}^{(l,i_l)}\ \text{ с в.1,}\tag{5.102}$$

где $\{\tau_j\}_{j=0}^N$ *— разбиение промежутка* $[0,T]$, *удовлетворяющее условию типа* (5.99).

Доказательство. Поскольку (см.главу 1)

$$\mathsf{M}\Big\{\Big(\int\limits_\theta^\tau\xi_s dM_s^{(l,i_l)}\Big)^2\Big\}=\int\limits_\theta^\tau\mathsf{M}\{|\xi_s|^2\}\rho(s)ds,$$

$$\mathsf{M}\Big\{\Big(\int\limits_\theta^\tau\xi_s ds\Big)^2\Big\}\leq(\tau-\theta)\int\limits_\theta^\tau\mathsf{M}\{|\xi_s|^2\}ds,$$

где $\xi_t\in H_2(\rho,[0,T])$; $t\leq\theta<\tau\leq T$; $i_l=1,\ldots,m$; $l=1,\ldots,k$, то интегральная сумма интеграла $J[\psi^{(k)}]_{T,t}^M$ в условиях леммы 5.6 может

быть представлена в виде допредельного выражения из правой части (5.102) и величины, которая стремится в среднеквадратическом смысле к нулю при $N \to \infty$. $\square$

Положим

$$\underset{N\to\infty}{\text{l.i.m.}} \sum_{j_1,\ldots,j_k=0}^{N-1} \Phi(\tau_{j_1},\ldots,\tau_{j_k}) \prod_{l=1}^{k} \Delta M_{\tau_{j_l}}^{(l,i_l)} \stackrel{\text{def}}{=} I[\Phi]_{T,t}^{(k)}, \tag{5.103}$$

где $\{\tau_j\}_{j=0}^{N}$ — разбиение промежутка $[0,T]$, удовлетворяющее условию типа (5.99).

Лемма 5.7. *Пусть* $M_s^{(l,i_l)} \in Q_r(\rho,[t,T])$; $r = 2,4,\ldots,2^k$; $i_l = 1,\ldots,m$; $l = 1,\ldots,k$, *а* $g_1(s),\ldots,g_k(s)$ — *удовлетворяющие условию* $(\star)$ *на с.229. функции. Тогда*

$$\prod_{l=1}^{k} \int_t^T g_l(s) dM_s^{(l,i_l)} = I[\Phi]_{T,t}^{(k)} \text{ с в.1, } \Phi(t_1,\ldots,t_k) = \prod_{l=1}^{k} g_l(t_l).$$

Доказательство. Обозначим

$$I[g_l]_N \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{j=0}^{N-1} g_l(\tau_j) \Delta M_{\tau_j}^{(l,i_l)}, \ I[g_l]_{T,t} \stackrel{\text{def}}{=} \int_t^T g_l(s) dM_s^{(l,i_l)}.$$

Заметим, что

$$\prod_{l=1}^{k} I[g_l]_N - \prod_{l=1}^{k} I[g_l]_{T,t} = \sum_{l=1}^{k} \left(\prod_{q=1}^{l-1} I[g_q]_{T,t}\right) (I[g_l]_N - I[g_l]_{T,t}) \left(\prod_{q=l+1}^{k} I[g_q]_N\right).$$

Используя неравенства Минковского и Коши–Буняковского, а также условия леммы 5.7, получаем

$$\left(\mathsf{M}\left\{\left|\prod_{l=1}^{k} I[g_l]_N - \prod_{l=1}^{k} I[g_l]_{T,t}\right|^2\right\}\right)^{\frac{1}{2}} \le C_k \sum_{l=1}^{k} \left(\mathsf{M}\left\{|I[g_l]_N - I[g_l]_{T,t}|^4\right\}\right)^{\frac{1}{4}}, \tag{5.104}$$

где $C_k < \infty$ — постоянная. Поскольку

$$I[g_l]_N - I[g_l]_{T,t} = \sum_{q=0}^{N-1} I[\Delta g_l]_{\tau_{q+1},\tau_q}, \ I[\Delta g_l]_{\tau_{q+1},\tau_q} = \int_{\tau_q}^{\tau_{q+1}} (g_l(\tau_q) - g_l(s))\, dM_s^{(l,i_l)},$$

то в силу независимости $I[\Delta g_l]_{\tau_{q+1},\tau_q}$ при различных q имеем [127]

$$\mathsf{M}\left\{\left|\sum_{j=0}^{N-1} I[\Delta g_l]_{\tau_{j+1},\tau_j}\right|^4\right\} = \sum_{j=0}^{N-1} \mathsf{M}\left\{\left|I[\Delta g_l]_{\tau_{j+1},\tau_j}\right|^4\right\} +$$

$$+6\sum_{j=0}^{N-1}\mathsf{M}\left\{\left|I[\Delta g_l]_{\tau_{j+1},\tau_j}\right|^2\right\}\sum_{q=0}^{j-1}\mathsf{M}\left\{\left|I[\Delta g_l]_{\tau_{q+1},\tau_q}\right|^2\right\}. \qquad (5.105)$$

Далее, используя условия леммы 5.7, получаем, что правая часть (5.105) стремится к нулю при $N\to\infty$. Учитывая этот факт и (5.104), приходим к утверждению леммы. □

Далее воспользовавшись доказанными леммами и повторяя с соответствующими изменениями доказательство теоремы 5.1 придем к утверждению теоремы 5.4. □

Отметим, что в теореме 5.4 могут использоваться полные ортонормированные не только с весом 1, но и с некоторым другим весом в пространстве $L_2([t,T])$ системы функций.

Рассмотрим краевую задачу вида:

$$(p(x)\Phi'(x))' + q(x)\Phi(x) = -\lambda r(x)\Phi(x),$$

$$\alpha\Phi(a) + \beta\Phi'(a) = 0,\ \gamma\Phi(a) + \delta\Phi'(a) = 0,$$

где функции $p(x), q(x), r(x)$ удовлетворяют известным условиям [175], а $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \lambda$ — вещественные числа.

Известно (В.А. Стеклов), что собственные функции $\Phi_0(x)$, $\Phi_1(x), \ldots$ данной краевой задачи образуют полную ортонормированную с весом $r(x)$ систему функций в пространстве $L_2([a,b])$, а также, что ряд Фурье функции $\sqrt{r(x)}f(x) \in L_2([a,b])$ по системе функций $\sqrt{r(x)}\Phi_0(x)$, $\sqrt{r(x)}\Phi_1(x), \ldots$ сходится в среднем к этой функции на данном отрезке, причем коэффициенты Фурье определяются по формуле

$$C_j = \int_a^b r(x)f(x)\Phi_j(x)dx. \qquad (5.106)$$

Отметим, что если разлагать в ряд Фурье функцию $f(x) \in L_2([a,b])$ по системе функций $\Phi_0(x)$, $\Phi_1(x), \ldots$, то коэффициенты разложения также будут определяться формулой (5.106) и будет иметь место сходимость ряда Фурье в среднем с весом $r(x)$ к функции $f(x)$ на отрезке $[a,b]$.

Известно [175], что при рассмотрении задачи о колебаниях круглой мембраны (общий случай) возникает краевая задача для уравнения Эйлера-Бесселя с параметром λ и целым индексом n :

$$r^2R''(r) + rR'(r) + \left(\lambda^2r^2 - n^2\right)R(r) = 0. \qquad (5.107)$$

Собственными функциями данной задачи, с учетом специфических граничных условий [175], являются функции

$$J_n\left(\mu_j\frac{r}{L}\right), \qquad (5.108)$$

где $r \in [0, L]$, μ_j; $j = 0,\ 1,\ 2, \ldots$ — упорядоченные в порядке возрастания положительные корни функции Бесселя $J_n(\mu)$; $n = 0,\ 1,\ 2, \ldots$.

В задаче о радиальных колебаниях круглой мембраны возникает краевая задача для уравнения (5.107) при $n = 0$, собственными функциями которой соответственно являются функции (5.108) при $n = 0$ [175].

Рассмотрим систему функций

$$\Psi_j(\tau) = \frac{\sqrt{2}}{TJ_{n+1}(\mu_j)} J_n\Big(\frac{\mu_j}{T}\tau\Big);\ j = 0,\ 1,\ 2, \ldots, \tag{5.109}$$

где $J_n(x) = \sum\limits_{m=0}^{\infty} (-1)^m \left(\frac{x}{2}\right)^{n+2m} (\Gamma(m+1)\Gamma(m+n+1))^{-1}$ — функция Бесселя первого рода, а $\Gamma(z) = \int\limits_0^{\infty} e^{-x} x^{z-1} dx$ — гамма-функция; μ_j — пронумерованные в порядке возрастания положительные корни функции $J_n(x)$, n — натуральное или ноль.

В силу сказанного, а также в силу известных свойств бесселевых функций система $\{\Psi_j(\tau)\}_{j=0}^{\infty}$ является полной ортонормированной с весом τ в пространстве $L_2([0, T])$ системой непрерывных функций.

Применим систему функций (5.109) в теореме 5.4.

Рассмотрим повторный стохастический интеграл $\int\limits_0^T \int\limits_0^s dM_\tau^{(1)} dM_s^{(2)}$; где $M_s^{(i)} = \int\limits_0^s \sqrt{\tau} d\mathbf{f}_\tau^{(i)}$, $\mathbf{f}_\tau^{(i)}$ $(i = 1, 2)$ — независимые стандартные винеровские процессы, $0 \le s \le T$. Нетрудно видеть, что $M_s^{(i)}$ — D-мартингал (см. главу 1), причем $\rho(\tau) = \tau$. Кроме того, $M_s^{(i)}$ имеет гауссовское распределение. Очевидно, что условия теоремы 5.4 при $k = 2$ выполнены.

Повторяя доказательство теоремы 5.4 при $k = 2$ для системы функций (5.109), получаем

$$\int\limits_0^T \int\limits_0^s dM_\tau^{(1)} dM_s^{(2)} = \sum_{j_1, j_2 = 0}^{\infty} C_{j_2 j_1} \zeta_{j_1}^{(1)} \zeta_{j_2}^{(2)},$$

где кратный ряд сходится в среднеквадратическом смысле и $\zeta_j^{(i)} = \int\limits_0^T \Psi_j(\tau) dM_\tau^{(i)} \sim \mathrm{N}(0, 1)$; $j = 0, 1, 2, \ldots,\ i = 1, 2$; $\mathsf{M}\{\zeta_{j_1}^{(1)} \zeta_{j_2}^{(2)}\} = 0$;

$$C_{j_2 j_1} = \int\limits_0^T s \Psi_{j_2}(s) \int\limits_0^s \tau \Psi_{j_1}(\tau) d\tau ds.$$

Очевидно, что к этому же результату можно было бы прийти по-другому: применить теорему 5.1 к повторному стохастическому интегралу Ито $\int\limits_0^T \sqrt{s} \int\limits_0^s \sqrt{\tau} d\mathbf{f}_\tau^{(1)} d\mathbf{f}_s^{(2)}$, а в качестве системы функций $\{\phi_j(s)\}_{j=0}^{\infty}$ в теореме 5.1 взять $\phi_j(s) = \frac{\sqrt{2s}}{TJ_{n+1}(\mu_j)} J_n\Big(\frac{\mu_j}{T}s\Big)$; $j = 0, 1, 2, \ldots$.

В результате мы получили бы

$$\int\limits_0^T \sqrt{s} \int\limits_0^s \sqrt{\tau} d\mathbf{f}_\tau^{(1)} d\mathbf{f}_s^{(2)} = \sum_{j_1, j_2=0}^{\infty} C_{j_2 j_1} \zeta_{j_1}^{(1)} \zeta_{j_2}^{(2)},$$

где кратный ряд сходится в среднеквадратическом смысле и $\zeta_j^{(i)} = \int\limits_0^T \phi_j(\tau) d\mathbf{f}_\tau^{(i)} \sim \mathrm{N}(0,1)$; $j = 0, 1, 2, \ldots$; $i = 1, 2$; $\mathsf{M}\{\zeta_{j_1}^{(1)} \zeta_{j_2}^{(2)}\} = 0$;

$$C_{j_2 j_1} = \int\limits_0^T \sqrt{s} \phi_{j_2}(s) \int\limits_0^s \sqrt{\tau} \phi_{j_1}(\tau) d\tau ds.$$

Простой подсчет показывает, что $\tilde{\phi}_j(s) = \frac{\sqrt{2(s-t)}}{(T-t)J_{n+1}(\mu_j)} J_n\left(\frac{\mu_j}{T-t}(s-t)\right)$; $j = 0, 1, 2, \ldots$ — полная ортонормированная система функций в пространстве $L_2([t, T])$.

Тогда по теореме 5.1 получаем

$$\int\limits_t^T \sqrt{s-t} \int\limits_t^s \sqrt{\tau - t} d\mathbf{f}_\tau^{(1)} d\mathbf{f}_s^{(2)} = \sum_{j_1, j_2=0}^{\infty} \tilde{C}_{j_2 j_1} \tilde{\zeta}_{j_1}^{(1)} \tilde{\zeta}_{j_2}^{(2)},$$

где кратный ряд сходится в среднеквадратическом смысле и $\tilde{\zeta}_j^{(i)} = \int\limits_t^T \tilde{\phi}_j(\tau) d\mathbf{f}_\tau^{(i)} \sim \mathrm{N}(0,1)$; $j = 0, 1, 2, \ldots$; $i = 1, 2$; $\mathsf{M}\{\tilde{\zeta}_{j_1}^{(1)} \tilde{\zeta}_{j_2}^{(2)}\} = 0$;

$$\tilde{C}_{j_2 j_1} = \int\limits_t^T \sqrt{s-t} \tilde{\phi}_{j_2}(s) \int\limits_t^s \sqrt{\tau - t} \tilde{\phi}_{j_1}(\tau) d\tau ds.$$

Глава 6

Аппроксимация повторных стохастических интегралов Ито и Стратоновича

Данная глава основывается на результатах предшествующей главы (точнее на теореме 5.1) и адаптирует ее результаты для практических нужд (построения численных методов для стохастических дифференциальных уравнений).

6.1 Введение

Опишем класс рассматриваемых далее повторных стохастических интегралов, поясним возможные приложения этого класса, а также коснемся истории вопроса об аппроксимации повторных стохастических интегралов из данного класса.

Рассмотрим стохастическое дифференциальное уравнение Ито

$$d\mathbf{x}_t = \mathbf{a}(\mathbf{x}_t, t)dt + \Sigma(\mathbf{x}_t, t)d\mathbf{f}_t, \ \mathbf{x}_0 = \mathbf{x}(0, \omega), \tag{6.1}$$

где $\mathbf{x}_t \in \Re^n$ — случайный процесс, являющийся решением уравнения (6.1); неслучайные функции $\mathbf{a}(\mathbf{x}, t) : \ \Re^n \times [0, T] \to \Re^n$, $\Sigma(\mathbf{x}, t) : \Re^n \times [0, T] \to \Re^{n\times m}$ удовлетворяют условиям AI–AIII (теорема 1.6) существования и единственности в смысле стохастической эквивалентности решения уравнения (6.1); $\mathbf{f}_t \in \Re^m$ — $\mathcal{F}_t$-измеримый при всех $t \in [0, T]$ стандартный векторный винеровский процесс с независимыми компонентами $\mathbf{f}_t^{(i)}$; $i = 1, \ldots, m$; случайная величина $\mathbf{x}_0 \in \Re^n$ стохастически не зависит от приращений $\mathbf{f}_t - \mathbf{f}_0$ при $t > 0$.

Из результатов главы 4 следует, что при определенных условиях, налагаемых на функции $\mathbf{a}(\mathbf{x}, t)$, $\Sigma(\mathbf{x}, t)$, для решения стохастического

дифференциального уравнения Ито (6.1) справедливы 4 унифицированных разложения Тейлора–Ито и Тейлора–Стратоновича, общие члены которых содержат в качестве множителей повторные стохастические интегралы Ито и Стратоновича вида

$$I_{l_1\ldots l_{kT,t}}^{(i_1\ldots i_k)} = \int\limits_t^T (t-t_k)^{l_k} \ldots \int\limits_t^{t_2} (t-t_1)^{l_1} d\mathbf{f}_{t_1}^{(i_1)} \ldots d\mathbf{f}_{t_k}^{(i_k)}, \tag{6.2}$$

$$J_{l_1\ldots l_{kT,t}}^{(i_1\ldots i_k)} = \int\limits_t^T (T-t_k)^{l_k} \ldots \int\limits_t^{t_2} (T-t_1)^{l_1} d\mathbf{f}_{t_1}^{(i_1)} \ldots d\mathbf{f}_{t_k}^{(i_k)}, \tag{6.3}$$

$$I_{l_1\ldots l_{kT,t}}^{*(i_1\ldots i_k)} = \int\limits_t^{*T} (t-t_k)^{l_k} \ldots \int\limits_t^{*t_2} (t-t_1)^{l_1} d\mathbf{f}_{t_1}^{(i_1)} \ldots d\mathbf{f}_{t_k}^{(i_k)}, \tag{6.4}$$

$$J_{l_1\ldots l_{kT,t}}^{*(i_1\ldots i_k)} = \int\limits_t^{*T} (T-t_k)^{l_k} \ldots \int\limits_t^{*t_2} (T-t_1)^{l_1} d\mathbf{f}_{t_1}^{(i_1)} \ldots d\mathbf{f}_{t_k}^{(i_k)}, \tag{6.5}$$

где $l_1,\ldots,l_k = 0,\ 1,\ldots;\ k = 1,\ 2,\ldots;\ i_1,\ldots,i_k = 1,\ldots,m$, а также справедливы [79, 81, 84, 86] разложение Тейлора–Ито в форме Вагнера и Платена и разложение Тейлора–Стратоновича в форме Клоедена и Платена, общие члены которых содержат в качестве множителей повторные стохастические интегралы Ито и Стратоновича

$$J_{(\lambda_k\ldots\lambda_1)_{T,t}}^{(i_k\ldots i_1)} = \int\limits_t^T \ldots \int\limits_t^{t_2} d\mathbf{w}_{t_1}^{(i_k)} \ldots d\mathbf{w}_{t_k}^{(i_1)}, \tag{6.6}$$

$$J_{(\lambda_k\ldots\lambda_1)_{T,t}}^{*(i_k\ldots i_1)} = \int\limits_t^{*T} \ldots \int\limits_t^{*t_2} d\mathbf{w}_{t_1}^{(i_k)} \ldots d\mathbf{w}_{t_k}^{(i_1)}. \tag{6.7}$$

Здесь и далее $\mathbf{w}_t^{(i_l)} = \mathbf{f}_t^{(i_l)}$ и $\lambda_l = 1$ при $i_l = 1,\ldots,m$; $\mathbf{w}_t^{(i_l)} = t$ и $\lambda_l = 0$ при $i_l = 0$; $i_1,\ldots,i_k = 0,\ 1,\ldots,m$; $l = 1,\ldots,k$.

В связи с этим проблема численного решения стохастических дифференциальных уравнений Ито, возникающая при решении широкого круга задач (см. главу 2), сводится к совместному численному моделированию систем повторных стохастических интегралов вида (6.2) – (6.7). Эта задача оказалась не такой простой, как может показаться на первый взгляд.

Учитывая все сказанное, в данной главе будем уделять особое внимание аппроксимации систем повторных стохастических интегралов

Ито и Стратоновича вида

$$J[\psi^{(k)}]_{T,t} = \int\limits_t^T \psi_k(t_k) \ldots \int\limits_t^{t_2} \psi_1(t_1) d\mathbf{w}_{t_1}^{(i_1)} \ldots d\mathbf{w}_{t_k}^{(i_k)}, \tag{6.8}$$

$$J^*[\psi^{(k)}]_{T,t} = \int\limits_t^{*T} \psi_k(t_k) \ldots \int\limits_t^{*t_2} \psi_1(t_1) d\mathbf{w}_{t_1}^{(i_1)} \ldots d\mathbf{w}_{t_k}^{(i_k)}, \tag{6.9}$$

где $\psi_l(\tau);\ l = 1, \ldots, k$ — непрерывные или непрерывно дифференцируемые на промежутке $[t, T]$ функции.

Кратко коснемся истории вопроса о методах сильной аппроксимации повторных стохастических интегралов вида (6.8) и (6.9).

Пожалуй до середины 80-х годов XX века осуществлялись попытки аппроксимировать повторные стохастические интегралы с помощью разного рода интегральных сумм, т.е. промежуток интегрирования стохастического интеграла разбивался на n частей и повторный стохастический интеграл приближенно представлялся повторной интегральной суммой, в которую входила система независимых стандартных гауссовских случайных величин, численное моделирование которой не является проблемой.

Однако, сразу бросается в глаза то обстоятельство, что промежуток интегрирования повторных стохастических интегралов есть не что иное, как шаг интегрирования численного метода, который и без дополнительного дробления уже является достаточно малой величиной. Численные эксперименты показывают, что такой подход ведет к резкому увеличению вычислительных затрат при росте кратности стохастических интегралов, что необходимо для построения более точных численных методов или при уменьшении шага интегрирования численного метода и, в силу этих причин, не выдерживает критики.

Новый шаг в направлении решения рассматриваемой проблемы был сделан Г.Н. Мильштейном [70] (1988г.), который предложил использовать сходящееся в среднеквадратическом смысле тригонометрическое разложение Фурье для винеровских процессов, по которым вычисляется повторный стохастический интеграл. В [70] данным методом получены разложения в ряды из независимых стандартных гауссовских случайных величин двух простейших стохастических интегралов 1 и 2 кратности и доказана их сходимость в среднеквадратическом смысле.

В [86] (1992г.) была предпринята попытка развить подход из [70] для повторных стохастических интегралов третьей кратности. При этом, в [86] с помощью компьютерной программы MAPLE были полу-

чены разложения и среднеквадратические аппроксимации повторных стохастических интегралов Стратоновича 1–3 кратности.

Однако, в силу сложности преобразований, на которых основан метод [70] и в силу отсутствия удобной явной формулы для формирующих аппроксимации коэффициентов (в нашем подходе это формула для коэффициентов $C_{j_k \ldots j_1}$), в [86] и последующих публикациях, дальше этого "дело не пошло" даже с учетом применения компьютерных пакетов аналитических преобразований типа MAPLE. Кроме того, сходимость аппроксимаций в [86], на взгляд автора, должна трактоваться в смысле повторных рядов (что вызывает дополнительные трудности при оценке среднеквадратической погрешности аппроксимации в рамках данного подхода), в противоположность кратным рядам из теоремы 5.1.

Этих результатов, тем не менее, оказалось достаточно для построения сильных численных методов порядков точности 1.0 и 1.5 для стохастических дифференциальных уравнений Ито с многомерным шумом (см. главу 7). Важно отметить, что метод [70] в разы, а то и на порядки, превзошел метод интегральных сумм по вычислительным затратам в смысле их уменьшения.

Для получения разложения повторного стохастического интеграла Стратоновича вида (6.9) в повторный ряд из произведений стандартных гауссовских случайных величин по методу Г.Н.Мильштейна [70] необходимо осуществить итеративный процесс, начиная с внутренних интегралов в (6.9), подстановки с последующим интегрированием тригонометрических разложений Фурье компонент винеровского процесса $\mathbf{f}_t$. Эта процедура является очень сложной и не приводит [70, 86, 98] к общей формуле разложения повторного стохастического интеграла произвольной кратности k. В результате в работах [70, 86, 98] рассмотрены лишь разложения повторных стохастических интегралов вида (6.7) (с единичными весовыми функциями) кратности $1, 2, 3$, при этом в [70] они имеют кратность 1 и 2, а в [86, 98] — кратность $1, 2, 3$.

Несмотря на позитивные черты метода [70], наметился и ряд его очевидных недостатков: отсутствие, как уже отмечалось, общей явной формулы для вычисления коэффициентов разложения повторного стохастического интеграла произвольной кратности k (в результате получены упомянутые аппроксимации повторных стохастических интегралов 1–3 кратности, и только), как следствие практическая невозможность точного вычисления среднеквадратической погрешности аппроксимации стохастического интеграла, за исключением простейших интегралов 1 и 2 кратности (поэтому приходится учитывать

избыточные члены разложения, что ведет к усложнению численных методов и росту вычислительных затрат). Хотя, следует отметить, что рассматриваемый метод является новым шагом в данной научной области.

Прорывом в решении проблемы среднеквадратической аппроксимации повторных стохастических интегралов является, на взгляд автора, предложенный им в 5 главе метод, основанный на обобщенных кратных рядах Фурье (далее метод, основанный на кратных рядах Фурье).

Отметим, что теорема 5.1 дает следующие преимущества и новые возможности по сравнению с методом [70]:

1. Имеется явная формула для вычисления коэффициентов разложения повторного стохастического интеграла Ито произвольной кратности k. С помощью этой формулы можно вычислять коэффициент с фиксированным номером в повторном стохастическом интеграле фиксированной кратности. При этом не требуется информации о коэффициентах с другими номерами или о других повторных стохастических интегралах.

2. Как следствие пункта 1 открываются новые возможности для точного вычисления среднеквадратической погрешности аппроксимации повторных стохастических интегралов, которые убедительно продемонстрированы в разд. 6.2.

3. Поскольку используемый кратный ряд Фурье является обобщенным в том смысле, что он строится с использованием различных полных ортонормированных систем функций в пространстве $L_2([t,T])$, то появляются новые возможности для аппроксимации — можно использовать не только тригонометрические функции (как в методе из [70]), но и полиномы Лежандра, функции Хаара и Радемахера–Уолша.

4. Как оказалось, работать при построении аппроксимаций повторных стохастических интегралов, удобнее всего с полиномами Лежандра — существенно проще вычислять коэффициенты кратного ряда Фурье (используется по сути только формула первообразной для степенной функции с целым неотрицательным показателем; при работе с тригономерическими функциями это не так — скажем при вычислении интеграла от произведения синуса на косинус с аргументами nt и mt соответственно $(n,m=0,\ 1,\ 2,\ldots)$ мы получим три существенно различных первообразных в случаях: $n-m\neq 0, n+m\neq 0;\quad n-m=0, n+m\neq 0;\quad n-m=0, n+m=0$). Кроме того, сами аппроксимации по виду получаются проще при использовании полиномов Лежандра. Это связано с тем, что система полиномов Лежандра более однородна в том смысле, что каждая ее функция — многочлен. Тригонометриче-

ская же система устроена сложнее — первая ее функция является многочленом нулевой степени, остальные представляют собой две бесконечные серии синусов и косинусов соответственно. Системы функций Хаара и Радемахера–Уолша тем более вряд ли являются подходящими для наших нужд (см. разложения по этим двум системам функций, полученные в главе 5).

5. Вопрос о том, какая же система функций полиномиальная или тригонометрическая удобнее с точки зрения вычислительных затрат на аппроксимацию повторных стохастических интегралов оказался не простым, поскольку требуется сравнивать аппроксимации не одного интеграла, а нескольких интегралов одновременно. При этом может случиться так, что для одних интегралов вычислительные затраты окажутся меньше для полиномов Лежандра, а для других для тригонометрических функций. Отметим, что сами формулы для полученных аппроксимаций достаточно громоздки.

Автор (см. нижние строки таблиц 6.43, 6.44) считает, что вычислительные затраты в 3 раза меньше для полиномов Лежандра при аппроксимации совокупности повторных стохастических интегралов 1–3 кратности, необходимых для сильного численного метода порядка точности 1.5 (см.главу 7) для стохастического дифференциального уравнения Ито с многомерным шумом. Кроме того, автор полагает, что данный эффект будет еще более выразительным при рассмотрении более сложных совокупностей повторных стохастических интегралов, что объясняется тем, что полиномиальная система функций имеет существенное преимущество перед тригонометрической системой функций при аппроксимации повторных стохастических интегралов, у которых не все весовые функции тождественно равны 1 (ср. формулы (6.38), (6.39), (6.41), (6.42) с формулами (6.77), (6.82), (6.81), (6.80) соответственно).

6. Метод Г.Н. Мильштейна приводит к повторным рядам (в противоположность кратным рядам из теоремы 5.1) начиная по меньшей мере с третьей кратности повторного стохастического интеграла (здесь имеется ввиду не менее чем трехкратное интегрирование по винеровским процессам). Кратные ряды гораздо более предпочтительны с точки зрения аппроксимации, чем повторные, поскольку, кратные ряды сходятся при любом способе одновременного стремления к бесконечности верхних пределов суммирования в их частичных суммах (обозначим их $p_1, \ldots, p_k$). В частности, в наиболее простом случае при $p_1 = \ldots = p_k = p \to \infty$. Для повторных рядов это очевидно не так, хотя в [86] не вполне обоснованно используется именно условие:

$p_1 = p_2 = p_3 = p \to \infty$ [86. С. 202, 204].

7. Доказана сходимость (см. разд. 6.7) в среднем степени $2n$, $n \in N$ аппроксимаций из теоремы 5.1 и с вероятностью 1 для некоторых из этих аппроксимаций.

В литературе [64, 86, 130] известны представления стохастических интегралов (6.8), (6.9) при $i_1 = \ldots = i_k = i \neq 0$; $\psi_1(\tau), \ldots, \psi_k(\tau) \equiv \psi(\tau)$, а также представления стохастических интегралов несколько более общего вида как многочленов конечных степеней от одной гауссовской случайной величины с применением полиномов Эрмита. Эти представления также рассматриваются в данной главе и, например, в случае стохастических интегралов (6.8) являются, как показано в главе 5, частным случаем метода, основанного на кратных рядах Фурье.

Перечисленные методы аппроксимации повторных стохастических интегралов являются сильными. В литературе (см., например, [70, 86]) представлены также слабые аппроксимации повторных стохастических интегралов Ито. Большинство из них, а также некоторые новые слабые аппроксимации приведены в данной главе.

Таким образом, в данной главе в основном речь пойдет о разложении функционалов интегрального типа от векторного винеровского процесса в ряды из произведений стандартных гауссовских случайных величин. Однако используемый здесь подход (основанный на теореме 5.1) кардинально отличается от классического подхода, позволяющего разложить гильбертов случайный процесс, т. е. среднеквадратически непрерывный процесс с конечным вторым моментом, в ряд из некоррелированных случайных величин. А именно, известно (см., например, [3]), что измеримый, среднеквадратически непрерывный и имеющий конечный второй момент случайный процесс ξ_τ, $\tau \in [t, T]$, может быть разложен в ряд вида

$$\xi_\tau = \sum_{j=1}^{\infty} \zeta_j \phi_j(\tau), \tag{6.10}$$

сходящийся в $L_2([t, T])$ при всех $\tau \in [t, T]$. В разложении (6.10): ζ_j — некоррелированные случайные величины; $\mathsf{M}\{|\xi_\tau|^2\} = \lambda_j$; λ_j — собственные числа, а $\phi_j(\tau)$ — собственные функции ковариации $B(t_1, t_2) = \mathsf{M}\{\xi_{t_1}\xi_{t_2}\}$ процесса ξ_τ. При этом, если процесс ξ_τ гауссовский и $\mathsf{M}\{\xi_\tau\} = 0$, то ζ_j в (6.10) — независимые гауссовские случайные величины и ряд (6.10) сходится с вероятностью 1 при всех $\tau \in [t, T]$.

Из сказанного следует, что если мы хотим напрямую разложить с помощью классического подхода совокупность из нескольких зависимых в вероятностном смысле случайных процессов $\xi_\tau^{(1)}, \ldots, \xi_\tau^{(n)}$, и притом негауссовских, в ряды типа (6.10), то системы случайных ве-

личин, соответствующие разным процессам $\xi_\tau^{(j)}$, могут оказаться зависимыми в вероятностном смысле, и притом, возможно, сложным образом. Кроме того, будут проблемы с нахождением распределений некоррелированных случайных величин, входящих в указанные системы, а также с нахождением собственных функций ковариаций процессов $\xi_\tau^{(j)}$. Эти обстоятельства затрудняют применение данного подхода в достаточно общем случае для моделирования совокупностей из нескольких зависимых случайных процессов. Перечисленные трудности частично преодолены в подходе Г.Н.Мильштейна [70] для случая, когда рассматриваемая совокупность случайных процессов является совокупностью повторных стохастических интегралов вида (6.6) или (6.7). Как уже отмечалось, метод Г.Н.Мильштейна позволяет использовать тригонометрическое разложение процесса броуновского моста (этот ряд является частным случаем разложения (6.10)) с целью разложения указанных совокупностей повторных стохастических интегралов. Однако этот путь приводит к ряду неудобств и ограничений, о которых говорилось ранее.

Далее в настоящей главе будем интенсивно развивать метод, основанный на кратных рядах Фурье.

6.2 Точное вычисление среднеквадратических погрешностей аппроксимаций повторных стохастических интегралов Ито, полученных по теореме 5.1

6.2.1 Случай произвольного k и попарно различных $i_1, \ldots, i_k = 1, \ldots, m$

Сначала будем строить среднеквадратические аппроксимации повторных стохастических интегралов Ито $J[\psi^{(k)}]_{T,t}$ при попарно различных $i_1, \ldots, i_k = 1, \ldots, m$ (в этом случае они совпадают с соответствующими стохастическими интегралами Стратоновича) в виде усеченных кратных рядов, в которые они разлагаются согласно подходу, основанному на кратных рядах Фурье, сходящихся в среднем.

Пусть $J[\psi^{(k)}]_{T,t}^{q_1,\ldots,q_k}$ — аппроксимация повторного стохастического интеграла Ито $J[\psi^{(k)}]_{T,t}$ при попарно различных $i_1, \ldots, i_k = 1, \ldots, m$, которая имеет вид

$$J[\psi^{(k)}]_{T,t}^{q_1,\ldots,q_k} = \sum_{j_1=0}^{q_1} \ldots \sum_{j_k=0}^{q_k} C_{j_k \ldots j_1} \prod_{l=1}^{k} \zeta_{(j_l)T,t}^{(i_l)}, \tag{6.11}$$

где числа $q_i < \infty$ удовлетворяют следующему условию на среднеквадратическую точность аппроксимации:

$$\mathsf{M}\left\{\left(J[\psi^{(k)}]_{T,t}^{q_1,\ldots,q_k} - J[\psi^{(k)}]_{T,t}\right)^2\right\} \le \varepsilon, \tag{6.12}$$

ε — заданное малое положительное число.

Теорема 5.1 дает возможность точно вычислить среднеквадратическую погрешность аппроксимации повторного стохастического интеграла Ито произвольной кратности.

Начнем рассмотрение со случая попарно различных $i_1,\ldots,i_k = 1,\ldots,m$.

Лемма 6.1. *Пусть $i_1,\ldots,i_k = 1,\ldots,m$ и попарно различны. Тогда среднеквадратическая погрешность аппроксимации* (6.11) *повторного стохастического интеграла Ито $[\psi^{(k)}]_{T,t}$ определяется формулой*

$$\mathsf{M}\left\{\left(J[\psi^{(k)}]_{T,t}^{q_1,\ldots,q_k} - J[\psi^{(k)}]_{T,t}\right)^2\right\} = \int\limits_{[t,T]^k} K^2(t_1,\ldots,t_k)dt_1\ldots dt_k -$$

$$-\sum_{j_1=0}^{q_1}\ldots\sum_{j_k=0}^{q_k} C_{j_k\ldots j_1}^2; \tag{6.13}$$

сходимость в (6.11) *имеет место смысле предела при $q_1,\ldots,q_k \to \infty$.*

Доказательство. Имеем

$$\mathsf{M}\left\{\left(J[\psi^{(k)}]_{T,t}\right)^2\right\} = \int\limits_t^T \psi_k^2(t_k)\ldots\int\limits_t^{t_2}\psi_1^2(t_1)dt_1\ldots dt_k =$$

$$= \int\limits_{[t,T]^k} K^2(t_1,\ldots,t_k)dt_1\ldots dt_k. \tag{6.14}$$

Равенство Парсеваля в нашем случае имеет вид

$$\int\limits_{[t,T]^k} K^2(t_1,\ldots,t_k)dt_1\ldots dt_k = \lim_{q_1,\ldots,q_k\to\infty}\sum_{j_1=0}^{q_1}\ldots\sum_{j_k=0}^{q_k} C_{j_k\ldots j_1}^2.$$

Далее

$$\mathsf{M}\left\{\left(J[\psi^{(k)}]_{T,t} - J[\psi^{(k)}]_{T,t}^{q_1,\ldots,q_k}\right)^2\right\} = \mathsf{M}\left\{\left(J[\psi^{(k)}]_{T,t}\right)^2\right\} -$$

$$-2\mathsf{M}\left\{J[\psi^{(k)}]_{T,t}J[\psi^{(k)}]_{T,t}^{q_1,\ldots,q_k}\right\} + \mathsf{M}\left\{\left(J[\psi^{(k)}]_{T,t}^{q_1,\ldots,q_k}\right)^2\right\}. \tag{6.15}$$

Поскольку согласно теореме 5.1

$$J[\psi^{(k)}]_{T,t}=\left\{\sum_{j_1,\ldots,j_k=0}^{\infty}-\sum_{j_1=0}^{q_1}\ldots\sum_{j_k=0}^{q_k}\right\}C_{j_k\ldots j_1}\prod_{l=1}^{k}\zeta_{(j_l)T,t}^{(i_l)}+J[\psi^{(k)}]_{T,t}^{q_1,\ldots,q_k},$$

то

$$\mathsf{M}\left\{J[\psi^{(k)}]_{T,t}J[\psi^{(k)}]_{T,t}^{q_1,\ldots,q_k}\right\}=\mathsf{M}\left\{\left(J[\psi^{(k)}]_{T,t}^{q_1,\ldots,q_k}\right)^2\right\}. \tag{6.16}$$

Подставляя (6.14) и (6.16) в (6.15), получаем

$$\mathsf{M}\left\{\left(J[\psi^{(k)}]_{T,t}-J[\psi^{(k)}]_{T,t}^{q_1,\ldots,q_k}\right)^2\right\}=\int\limits_{[t,T]^k}K^2(t_1,\ldots,t_k)dt_1\ldots dt_k-$$

$$-\mathsf{M}\left\{\left(J[\psi^{(k)}]_{T,t}^{q_1,\ldots,q_k}\right)^2\right\}. \tag{6.17}$$

Учитывая (6.17) и соотношение

$$\mathsf{M}\left\{\left(J[\psi^{(k)}]_{T,t}^{q_1,\ldots,q_k}\right)^2\right\}=\sum_{j_1=0}^{q_1}\ldots\sum_{j_k=0}^{q_k}C_{j_k\ldots j_1}^2,$$

которое справедливо для попарно различных $i_1,\ldots,i_k=1,\ldots,m$, приходим к утверждению леммы 6.1. Лемма доказана. □

6.2.2 Вспомогательные соотношения для случая не попарно различных $i_1,\ldots,i_k=1,\ldots,m$

В процессе доказательства леммы 6.1 мы фактически установили следующую формулу при произвольных $i_1,\ldots,i_k=1,\ldots,m$:

$$\mathsf{M}\left\{\left(J[\psi^{(k)}]_{T,t}^{q_1,\ldots,q_k}-J[\psi^{(k)}]_{T,t}\right)^2\right\}=\int\limits_{[t,T]^k}K^2(t_1,\ldots,t_k)dt_1\ldots dt_k+$$

$$+2\left(\mathsf{M}\left\{J[\psi^{(k)}]_{T,t}^{q_1,\ldots,q_k}\right\}\right)^2-\mathsf{M}\left\{\left(J[\psi^{(k)}]_{T,t}^{q_1,\ldots,q_k}\right)^2\right\}. \tag{6.18}$$

В дальнейшем при вычислении среднеквадратической погрешности аппроксимации повторных стохастических интегралов Ито нам потребуется вычислять математические ожидания от кратных сумм случайных величин со сложными многоиндексными коэффициентами. Всвязи с этим введем ряд обозначений и приведем представление для кратной суммы, которое будет использоваться далее.

Обозначим

$$S_N^{(k)}(a)=\sum_{j_k=0}^{N-1}\ldots\sum_{j_1=0}^{j_2-1}\sum_{(j_1,\ldots,j_k)}a_{(j_1,\ldots,j_k)},$$

$$\mathcal{C}_{s_r}\ldots\mathcal{C}_{s_1}S_N^{(k)}(a)=\sum_{j_k=0}^{N-1}\ldots\sum_{j_{s_r+1}=0}^{j_{s_r+2}-1}\sum_{j_{s_r-1}=0}^{j_{s_r+1}-1}\ldots\sum_{j_{s_1+1}=0}^{j_{s_1+2}-1}\sum_{j_{s_1-1}=0}^{j_{s_1+1}-1}\ldots\sum_{j_1=0}^{j_2-1}\times$$

$$\times\sum_{\prod\limits_{l=1}^{r}\mathbf{I}_{j_{s_l},j_{s_l+1}}(j_1,\ldots,j_k)}a_{\prod\limits_{l=1}^{r}\mathbf{I}_{j_{s_l},j_{s_l+1}}(j_1,\ldots,j_k)},$$

где

$$\prod_{l=1}^{r}\mathbf{I}_{j_{s_l},j_{s_l+1}}(j_1,\ldots,j_k)\stackrel{\text{def}}{=}\mathbf{I}_{j_{s_r},j_{s_r+1}}\ldots\mathbf{I}_{j_{s_1},j_{s_1+1}}(j_1,\ldots,j_k),$$

$$\mathcal{C}_{s_0}\ldots\mathcal{C}_{s_1}S_N^{(k)}(a)=S_N^{(k)}(a);\ \prod_{l=1}^{0}\mathbf{I}_{j_{s_l},j_{s_l+1}}(j_1,\ldots,j_k)=(j_1,\ldots,j_k);$$

$$\mathbf{I}_{j_l,j_{l+1}}(j_{q_1},\ldots,j_{q_2},j_l,j_{q_3},\ldots,j_{q_{k-2}},j_l,j_{q_{k-1}},\ldots,j_{q_k})\stackrel{\text{def}}{=}$$

$$\stackrel{\text{def}}{=}(j_{q_1},\ldots,j_{q_2},j_{l+1},j_{q_3},\ldots,j_{q_{k-2}},j_{l+1},j_{q_{k-1}},\ldots,j_{g_k});$$

здесь $l=1,\ 2,\ldots;\ l\neq q_1,\ldots,q_2,q_3,\ldots,q_{k-2},q_{k-1},\ldots,q_k=1,\ 2,\ldots;$ $s_1,\ldots,s_r=1,\ldots,k-1;\ s_r>\ldots>s_1;\ a_{(j_{q_1},\ldots,j_{q_k})}$ — скаляры; $q_1,\ldots,q_k=1,\ldots,k$; выражение $\sum\limits_{(j_{q_1},\ldots,j_{q_k})}$ означает сумму по всевозможным перестановкам $(j_{q_1},\ldots,j_{q_k})$.

По индукции нетрудно доказать следующее равенство:

$$\sum_{j_k=0}^{N-1}\ldots\sum_{j_1=0}^{N-1}a_{(j_1,\ldots,j_k)}=\sum_{r=0}^{k-1}\sum_{\substack{s_r,\ldots,s_1=1\\ s_r>\ldots>s_1}}^{k-1}\mathcal{C}_{s_r}\ldots\mathcal{C}_{s_1}S_N^{(k)}(a),\tag{6.19}$$

где $k=1,\ 2,\ldots;$ сумма по пустому множеству полагается равной 1.

В дальнейшем мы будем отождествлять следующие записи:

$$a_{(j_1,\ldots,j_k)}=a_{(j_1\ldots j_k)}=a_{j_1\ldots j_k}.$$

В частности, из (6.19) при $k=2,\ 3,\ 4$ получим следующие формулы

$$\sum_{j_2=0}^{N-1}\sum_{j_1=0}^{N-1}a_{(j_1,j_2)}=S_N^{(2)}(a)+\mathcal{C}_1S_N^{(2)}(a)=$$

$$=\sum_{j_2=0}^{N-1}\sum_{j_1=0}^{j_2-1}\sum_{(j_1,j_2)}a_{(j_1j_2)}+\sum_{j_2=0}^{N-1}a_{(j_2j_2)}=$$

$$=\sum_{j_2=0}^{N-1}\sum_{j_1=0}^{j_2-1}(a_{j_1j_2}+a_{j_2j_1})+\sum_{j_2=0}^{N-1}a_{j_2j_2};$$

$$\sum_{j_3=0}^{N-1}\sum_{j_2=0}^{N-1}\sum_{j_1=0}^{N-1} a_{(j_1,j_2,j_3)} = S_N^{(3)}(a) + \mathcal{C}_1 S_N^{(3)}(a) +$$

$$+\mathcal{C}_2 S_N^{(3)}(a) + \mathcal{C}_2\mathcal{C}_1 S_N^{(3)}(a) =$$

$$= \sum_{j_3=0}^{N-1}\sum_{j_2=0}^{j_3-1}\sum_{j_1=0}^{j_2-1}\sum_{(j_1,j_2,j_3)} a_{(j_1j_2j_3)} + \sum_{j_3=0}^{N-1}\sum_{j_2=0}^{j_3-1}\sum_{(j_2,j_2,j_3)} a_{(j_2j_2j_3)} +$$

$$+ \sum_{j_3=0}^{N-1}\sum_{j_1=0}^{j_3-1}\sum_{(j_1,j_3,j_3)} a_{(j_1j_3j_3)} + \sum_{j_3=0}^{N-1} a_{(j_3j_3j_3)} =$$

$$= \sum_{j_3=0}^{N-1}\sum_{j_2=0}^{j_3-1}\sum_{j_1=0}^{j_2-1} (a_{j_1j_2j_3} + a_{j_1j_3j_2} + a_{j_2j_1j_3} + a_{j_2j_3j_1} + a_{j_3j_2j_1} + a_{j_3j_1j_2}) +$$

$$+ \sum_{j_3=0}^{N-1}\sum_{j_2=0}^{j_3-1} (a_{j_2j_2j_3} + a_{j_2j_3j_2} + a_{j_3j_2j_2}) +$$

$$+ \sum_{j_3=0}^{N-1}\sum_{j_1=0}^{j_3-1} (a_{j_1j_3j_3} + a_{j_3j_1j_3} + a_{j_3j_3j_1}) +$$

$$+ \sum_{j_3=0}^{N-1} a_{j_3j_3j_3}.$$

$$\sum_{j_4=0}^{N-1}\sum_{j_3=0}^{N-1}\sum_{j_2=0}^{N-1}\sum_{j_1=0}^{N-1} a_{(j_1,j_2,j_3,j_4)} = S_N^{(4)}(a) + \mathcal{C}_1 S_N^{(4)}(a) + \mathcal{C}_2 S_N^{(4)}(a) +$$

$$+\mathcal{C}_3 S_N^{(4)}(a) + \mathcal{C}_2\mathcal{C}_1 S_N^{(4)}(a) + \mathcal{C}_3\mathcal{C}_1 S_N^{(4)}(a) + \mathcal{C}_3\mathcal{C}_2 S_N^{(4)}(a) + \mathcal{C}_3\mathcal{C}_2\mathcal{C}_1 S_N^{(4)}(a) =$$

$$= \sum_{j_4=0}^{N-1}\sum_{j_3=0}^{j_4-1}\sum_{j_2=0}^{j_3-1}\sum_{j_1=0}^{j_2-1}\sum_{(j_1,j_2,j_3,j_4)} a_{(j_1j_2j_3j_4)} + \sum_{j_4=0}^{N-1}\sum_{j_3=0}^{j_4-1}\sum_{j_2=0}^{j_3-1}\sum_{(j_2,j_2,j_3,j_4)} a_{(j_2j_2j_3j_4)} +$$

$$+ \sum_{j_4=0}^{N-1}\sum_{j_3=0}^{j_4-1}\sum_{j_1=0}^{j_3-1}\sum_{(j_1,j_3,j_3,j_4)} a_{(j_1j_3j_3j_4)} + \sum_{j_4=0}^{N-1}\sum_{j_2=0}^{j_4-1}\sum_{j_1=0}^{j_2-1}\sum_{(j_1,j_2,j_4,j_4)} a_{(j_1j_2j_4j_4)} +$$

$$+ \sum_{j_4=0}^{N-1}\sum_{j_3=0}^{j_4-1}\sum_{(j_3,j_3,j_3,j_4)} a_{(j_3j_3j_3j_4)} + \sum_{j_4=0}^{N-1}\sum_{j_2=0}^{j_4-1}\sum_{(j_2,j_2,j_4,j_4)} a_{(j_2j_2j_4j_4)} +$$

$$+ \sum_{j_4=0}^{N-1}\sum_{j_1=0}^{j_4-1}\sum_{(j_1,j_4,j_4,j_4)} a_{(j_1j_4j_4j_4)} + \sum_{j_4=0}^{N-1} a_{j_4j_4j_4j_4} =$$

$$= \sum_{j_4=0}^{N-1}\sum_{j_3=0}^{j_4-1}\sum_{j_2=0}^{j_3-1}\sum_{j_1=0}^{j_2-1} (a_{j_1j_2j_3j_4} + a_{j_1j_2j_4j_3} + a_{j_1j_3j_2j_4} + a_{j_1j_3j_4j_2} +$$

$$
\begin{gathered}
+a_{j_1j_4j_3j_2}+a_{j_1j_4j_2j_3}+a_{j_2j_1j_3j_4}+a_{j_2j_1j_4j_3}+a_{j_2j_4j_1j_3}+a_{j_2j_4j_3j_1}+a_{j_2j_3j_1j_4}+\\
+a_{j_2j_3j_4j_1}+a_{j_3j_1j_2j_4}+a_{j_3j_1j_4j_2}+a_{j_3j_2j_1j_4}+a_{j_3j_2j_4j_1}+a_{j_3j_4j_1j_2}+a_{j_3j_4j_2j_1}+\\
+a_{j_4j_1j_2j_3}+a_{j_4j_1j_3j_2}+a_{j_4j_2j_1j_3}+a_{j_4j_2j_3j_1}+a_{j_4j_3j_1j_2}+a_{j_4j_3j_2j_1})+\\
+\sum_{j_4=0}^{N-1}\sum_{j_3=0}^{j_4-1}\sum_{j_2=0}^{j_3-1}(a_{j_2j_2j_3j_4}+a_{j_2j_2j_4j_3}+a_{j_2j_3j_2j_4}+a_{j_2j_4j_2j_3}+a_{j_2j_3j_4j_2}+a_{j_2j_4j_3j_2}+\\
+a_{j_3j_2j_2j_4}+a_{j_4j_2j_2j_3}+a_{j_3j_2j_4j_2}+a_{j_4j_2j_3j_2}+a_{j_4j_3j_2j_2}+a_{j_3j_4j_2j_2})+\\
+\sum_{j_4=0}^{N-1}\sum_{j_3=0}^{j_4-1}\sum_{j_1=0}^{j_3-1}(a_{j_3j_3j_1j_4}+a_{j_3j_3j_4j_1}+a_{j_3j_1j_3j_4}+a_{j_3j_4j_3j_1}+a_{j_3j_4j_1j_3}+a_{j_3j_1j_4j_3}+\\
+a_{j_1j_3j_3j_4}+a_{j_4j_3j_3j_1}+a_{j_4j_3j_1j_3}+a_{j_1j_3j_4j_3}+a_{j_1j_4j_3j_3}+a_{j_4j_1j_3j_3})+\\
+\sum_{j_4=0}^{N-1}\sum_{j_2=0}^{j_4-1}\sum_{j_1=0}^{j_2-1}(a_{j_4j_4j_1j_2}+a_{j_4j_4j_2j_1}+a_{j_4j_1j_4j_2}+a_{j_4j_2j_4j_1}+a_{j_4j_2j_1j_4}+a_{j_4j_1j_2j_4}+\\
+a_{j_1j_4j_4j_2}+a_{j_2j_4j_4j_1}+a_{j_2j_4j_1j_4}+a_{j_1j_4j_2j_4}+a_{j_1j_2j_4j_4}+a_{j_2j_1j_4j_4})+\\
+\sum_{j_4=0}^{N-1}\sum_{j_3=0}^{j_4-1}(a_{j_3j_3j_3j_4}+a_{j_3j_3j_4j_3}+a_{j_3j_4j_3j_3}+a_{j_4j_3j_3j_3})+\\
+\sum_{j_4=0}^{N-1}\sum_{j_2=0}^{j_4-1}(a_{j_2j_2j_4j_4}+a_{j_2j_4j_2j_4}+a_{j_2j_4j_4j_2}+a_{j_4j_2j_2j_4}+a_{j_4j_2j_4j_2}+a_{j_4j_4j_2j_2})+\\
+\sum_{j_4=0}^{N-1}\sum_{j_1=0}^{j_4-1}(a_{j_1j_4j_4j_4}+a_{j_4j_1j_4j_4}+a_{j_4j_4j_1j_4}+a_{j_4j_4j_4j_1})+\\
+\sum_{j_4=0}^{N-1}a_{j_4j_4j_4j_4}.
\end{gathered}
$$

Возможно формула (6.19) при произвольном k впервые замечена автором. Соотношение (6.19) будет часто использоваться в дальнейшем.

Покажем систематически, на примере повторных стохастических интегралов Ито первой, второй, третьей и четвертой кратности, что нет технических проблем для получения аналога (6.13) при произвольных $i_1,\ldots,i_k=1,\ldots,m$ (для простоты далее полагаем $q_i=p$; $\zeta_{(j)T,t}^{(i)}=\zeta_j^{(i)}$).

6.2.3 Случай $k=1$

В этом случае согласно лемме 6.1 сразу получаем

$$
\mathsf{M}\left\{\left(J[\psi^{(1)}]_{T,t}^{q}-J[\psi^{(1)}]_{T,t}\right)^2\right\}=\int\limits_{[t,T]^1}K^2(t_1)dt_1-\sum_{j_1=0}^{q}C_{j_1}^2.
$$

6.2.4 Случай $k=2$ и произвольных $i_1, i_2 = 1, \ldots, m$

При $i_1 \neq i_2$ требуемая формула получается из леммы 6.1.
Пусть $i_1 = i_2 = i = 1, \ldots, m$. Имеем

$$\mathsf{M}\left\{\left(J[\psi^{(2)}]_{T,t}\right)^2\right\} = \int\limits_t^T \psi_2^2(t_2) \int\limits_t^{t_2} \psi_1^2(t_1) dt_1 dt_2 = \int\limits_{[t,T]^2} K^2(t_1, t_2) dt_1 dt_2.$$

Поскольку

$$\mathsf{M}\left\{J[\psi^{(2)}]_{T,t}^p\right\} = 0,$$

где

$$J[\psi^{(2)}]_{T,t}^p = \sum_{j_1,j_2=0}^{p} C_{j_2 j_1} \zeta_{j_1}^{(i_1)} \zeta_{j_2}^{(i_1)} - \sum_{j_1=0}^{p} C_{j_1 j_1},$$

то, согласно (6.18), получаем:

$$\mathsf{M}\left\{\left(J[\psi^{(2)}]_{T,t}^p - J[\psi^{(2)}]_{T,t}\right)^2\right\} = \int\limits_{[t,T]^2} K^2(t_1, t_2) dt_1 dt_2 - \mathsf{M}\left\{\left(J[\psi^{(2)}]_{T,t}^p\right)^2\right\}. \tag{6.20}$$

Далее с использованием (6.19) имеем

$$\mathsf{M}\left\{\left(J[\psi^{(2)}]_{T,t}^p\right)^2\right\} = \mathsf{M}\left\{\left(\sum_{j_1,j_2=0}^{p} C_{j_2 j_1} \zeta_{j_1}^{(i_1)} \zeta_{j_2}^{(i_1)} - \sum_{j_1=0}^{p} C_{j_1 j_1}\right)^2\right\} =$$

$$= \mathsf{M}\left\{\sum_{j_1,j_1',j_2,j_2'=0}^{q} C_{j_2 j_1} C_{j_2' j_1'} \zeta_{j_1}^{(i)} \zeta_{j_1'}^{(i)} \zeta_{j_2}^{(i)} \zeta_{j_2'}^{(i)}\right\} -$$

$$-2\left(\sum_{j_1=0}^{p} C_{j_1 j_1}\right)^2 + \left(\sum_{j_1=0}^{p} C_{j_1 j_1}\right)^2 = 3 \sum_{j_1=0}^{p} C_{j_1 j_1}^2 +$$

$$+ \sum_{j_2=0}^{p} \sum_{j_1=0}^{j_2-1} \left(C_{j_2 j_1}^2 + C_{j_1 j_2}^2 + 2 C_{j_1 j_1} C_{j_2 j_2} + 2 C_{j_2 j_1} C_{j_1 j_2}\right) - \left(\sum_{j_1=0}^{p} C_{j_1 j_1}\right)^2. \tag{6.21}$$

Подставляя (6.21) в (6.20) и учитывая, что

$$\sum_{j_1=0}^{p} C_{j_1 j_1}^2 + \sum_{j_2=0}^{p} \sum_{j_1=0}^{j_2-1} \left(C_{j_2 j_1}^2 + C_{j_1 j_2}^2\right) = \sum_{j_1,j_2=0}^{p} C_{j_2 j_1}^2,$$

$$\sum_{j_1=0}^{p} C_{j_1 j_1}^2 + 2 \sum_{j_2=0}^{p} \sum_{j_1=0}^{j_2-1} C_{j_1 j_1} C_{j_2 j_2} = \sum_{j_1,j_2=0}^{p} C_{j_1 j_1} C_{j_2 j_2} = \left(\sum_{j_1=0}^{p} C_{j_1 j_1}\right)^2,$$

$$\sum_{j_1=0}^{p} C_{j_1 j_1}^2 + 2 \sum_{j_2=0}^{p} \sum_{j_1=0}^{j_2-1} C_{j_1 j_2} C_{j_2 j_1} = \sum_{j_1,j_2=0}^{p} C_{j_1 j_2} C_{j_2 j_1},$$

окончательно получаем

$$\mathsf{M}\left\{\left(J[\psi^{(2)}]_{T,t}^{p}-J[\psi^{(2)}]_{T,t}\right)^2\right\}=\int\limits_{[t,T]^2}K^2(t_1,t_2)dt_1dt_2-\sum_{j_1,j_2=0}^{p}C_{j_2j_1}^2-$$

$$-\sum_{j_1,j_2=0}^{p}C_{j_1j_2}C_{j_2j_1}. \tag{6.22}$$

6.2.5 Случай $k=3$ и произвольных $i_1,i_2,i_3=1,\ldots,m$

Случай попарно различных i_1,i_2,i_3 рассмотрен в лемме 6.1, поэтому остается рассмотреть 4 случая (предполагается, что $i_1,i_2,i_3=1,\ldots,m$): 1. $i_1=i_2\neq i_3$; 2. $i_1\neq i_2=i_3$; 3. $i_1=i_3\neq i_2$; 4. $i_1=i_2=i_3$.

Начнем с первого случая:

$$\mathsf{M}\left\{\left(J[\psi^{(3)}]_{T,t}\right)^2\right\}=\int\limits_{[t,T]^3}K^2(t_1,t_2,t_3)dt_1dt_2dt_3;\ \mathsf{M}\left\{J[\psi^{(3)}]_{T,t}^{p}\right\}=0,$$

где

$$J[\psi^{(3)}]_{T,t}^{p}=\sum_{j_1,j_2,j_3=0}^{p}C_{j_3j_2j_1}\left(\zeta_{j_1}^{(i_1)}\zeta_{j_2}^{(i_1)}\zeta_{j_3}^{(i_3)}-\mathbf{1}_{\{j_1=j_2\}}\zeta_{j_3}^{(i_3)}\right).$$

Значит в нашем случае

$$\mathsf{M}\left\{\left(J[\psi^{(3)}]_{T,t}-J[\psi^{(3)}]_{T,t}^{p}\right)^2\right\}=\int\limits_{[t,T]^3}K^2(t_1,t_2,t_3)dt_1dt_2dt_3-\mathsf{M}\left\{\left(J[\psi^{(3)}]_{T,t}^{p}\right)^2\right\}. \tag{6.23}$$

Далее с использованием (6.19) имеем

$$\mathsf{M}\left\{\left(J[\psi^{(3)}]_{T,t}^{p}\right)^2\right\}=\mathsf{M}\Biggl\{\sum_{j_3,j_3',j_2,j_2',j_1,j_1'=0}^{p}C_{j_3j_2j_1}C_{j_3'j_2'j_1'}\left(\zeta_{j_1}^{(i_1)}\zeta_{j_2}^{(i_1)}-\mathbf{1}_{\{j_1=j_2\}}\right)\times$$

$$\times\left(\zeta_{j_1'}^{(i_1)}\zeta_{j_2'}^{(i_1)}-\mathbf{1}_{\{j_1'=j_2'\}}\right)\zeta_{j_3}^{(i_3)}\zeta_{j_3'}^{(i_3)}\Biggr\}=$$

$$=\mathsf{M}\Biggl\{\sum_{j_3=0}^{p}\sum_{j_2,j_2',j_1,j_1'=0}^{p}C_{j_3j_2j_1}C_{j_3j_2'j_1'}\zeta_{j_1}^{(i_1)}\zeta_{j_1'}^{(i_1)}\zeta_{j_2}^{(i_1)}\zeta_{j_2'}^{(i_1)}\Biggr\}-$$

$$-2\sum_{j_3=0}^{p}\left(\sum_{j_1=0}^{p}C_{j_3j_1j_1}\right)^2+\sum_{j_3=0}^{p}\left(\sum_{j_1=0}^{p}C_{j_3j_1j_1}\right)^2=$$

$$=3\sum_{j_3=0}^{p}\sum_{j_1=0}^{p}(C_{j_3j_1j_1})^2+\sum_{j_3=0}^{p}\sum_{j_2=0}^{p}\sum_{j_1=0}^{j_2-1}\left(C_{j_3j_2j_1}^2+C_{j_3j_1j_2}^2+\right.$$

$$+2C_{j_3j_1j_1}C_{j_3j_2j_2}+2C_{j_3j_2j_1}C_{j_3j_1j_2})-\sum_{j_3=0}^{p}\left(\sum_{j_1=0}^{p}C_{j_3j_1j_1}\right)^2. \qquad (6.24)$$

Подставляя (6.24) в (6.23) и учитывая, что

$$\sum_{j_3,j_1=0}^{p}C_{j_3j_1j_1}^2+\sum_{j_3,j_2=0}^{p}\sum_{j_1=0}^{j_2-1}\left(C_{j_3j_2j_1}^2+C_{j_3j_1j_2}^2\right)=\sum_{j_3,j_2,j_1=0}^{p}C_{j_3j_2j_1}^2,$$

$$\sum_{j_3,j_1=0}^{p}C_{j_3j_1j_1}^2+2\sum_{j_3,j_2=0}^{p}\sum_{j_1=0}^{j_2-1}C_{j_3j_1j_1}C_{j_3j_2j_2}=\sum_{j_3,j_2,j_1=0}^{p}C_{j_3j_1j_1}C_{j_3j_2j_2}=$$

$$=\sum_{j_3=0}^{p}\left(\sum_{j_1=0}^{p}C_{j_3j_1j_1}\right)^2,$$

$$\sum_{j_3,j_1=0}^{p}C_{j_3j_1j_1}^2+2\sum_{j_3,j_2=0}^{p}\sum_{j_1=0}^{j_2-1}C_{j_3j_1j_2}C_{j_3j_2j_1}=\sum_{j_3,j_2,j_1=0}^{p}C_{j_3j_1j_2}C_{j_3j_2j_1},$$

окончательно получаем

$$\mathsf{M}\left\{\left(J[\psi^{(3)}]_{T,t}^{p}-J[\psi^{(3)}]_{T,t}\right)^2\right\}=\int\limits_{[t,T]^3}K^2(t_1,t_2,t_3)dt_1dt_2dt_3-\sum_{j_3,j_2,j_1=0}^{p}C_{j_3j_2j_1}^2-$$

$$-\sum_{j_3,j_2,j_1=0}^{p}C_{j_3j_1j_2}C_{j_3j_2j_1}\ (i_1=i_2\neq i_3).$$

Во 2 и 3 случае, в полной аналогии с предыдущими рассуждениями, соответственно получаем

$$\mathsf{M}\left\{\left(J[\psi^{(3)}]_{T,t}^{p}-J[\psi^{(3)}]_{T,t}\right)^2\right\}=\int\limits_{[t,T]^3}K^2(t_1,t_2,t_3)dt_1dt_2dt_3-\sum_{j_3,j_2,j_1=0}^{p}C_{j_3j_2j_1}^2-$$

$$-\sum_{j_3,j_2,j_1=0}^{p}C_{j_2j_3j_1}C_{j_3j_2j_1}\ (i_1\neq i_2=i_3).$$

$$\mathsf{M}\left\{\left(J[\psi^{(3)}]_{T,t}^{p}-J[\psi^{(3)}]_{T,t}\right)^2\right\}=\int\limits_{[t,T]^3}K^2(t_1,t_2,t_3)dt_1dt_2dt_3-\sum_{j_3,j_2,j_1=0}^{p}C_{j_3j_2j_1}^2-$$

$$-\sum_{j_3,j_2,j_1=0}^{p}C_{j_3j_2j_1}C_{j_1j_2j_3}\ (i_1=i_3\neq i_2).$$

В 4 частном случае при $\psi_1(s),\psi_2(s),\psi_3(s)\equiv 1$ с в.1 имеем

$$I_{000_{T,t}}^{(i_1i_1i_1)}=\frac{1}{6}(T-t)^{\frac{3}{2}}\left(\left(\zeta_0^{(i_1)}\right)^3-3\zeta_0^{(i_1)}\right).$$

В более общем случае, когда $\psi_1(s), \psi_2(s), \psi_3(s) \equiv (t-s)^l$; l — фиксированное натуральное число или ноль, с в. 1 можем записать:

$$I_{lll_{T,t}}^{(i_1 i_1 i_1)} = \frac{1}{6}(T-t)^{\frac{3}{2}} \left(\left(I_{l_{T,t}}^{(i_1)} \right)^3 - 3 I_{l_{T,t}}^{(i_1)} \right),$$

$$I_{lll_{T,t}}^{*(i_1 i_1 i_1)} = \frac{1}{6}(T-t)^{\frac{3}{2}} \left(I_{l_{T,t}}^{(i_1)} \right)^3, \ I_{l_{T,t}}^{(i_1)} = \sum_{j=0}^{l} C_j \zeta_j^{(i_1)},$$

где $C_j = \int\limits_t^T (t-s)^l \phi_j(s) ds$; $\{\phi_j(s)\}_{j=0}^{\infty}$ — полная ортонормированная на отрезке $[t,T]$ система полиномов Лежандра.

Если же в 4 частном случае функции $\psi_1(s), \ldots, \psi_3(s)$ различны, то вычисление величины $\mathsf{M}\left\{ \left(J[\psi^{(3)}]_{T,t}^p - J[\psi^{(3)}]_{T,t} \right)^2 \right\}$ становится резко сложнее, чем во всех рассмотренных ранее случаях. Несмотря на это мы вычислим точно указанную среднеквадратическую ошибку аппроксимации.

Согласно теореме 5.1 при $k=3$ и $i_1 = i_2 = i_3 = 1, \ldots, m$ имеем:

$$J[\psi^{(3)}]_{T,t} = \sum_{j_1,j_2,j_3=0}^{\infty} C_{j_3 j_2 j_1} \Big(\zeta_{j_1} \zeta_{j_2} \zeta_{j_3} - \mathbf{1}_{\{j_1=j_2\}} \zeta_{j_3} - \mathbf{1}_{\{j_2=j_3\}} \zeta_{j_1} - \mathbf{1}_{\{j_1=j_3\}} \zeta_{j_2} \Big)$$

и, соответственно

$$J[\psi^{(3)}]_{T,t}^p = \sum_{j_1,j_2,j_3=0}^{p} C_{j_3 j_2 j_1} \Big(\zeta_{j_1} \zeta_{j_2} \zeta_{j_3} - \mathbf{1}_{\{j_1=j_2\}} \zeta_{j_3} - \mathbf{1}_{\{j_2=j_3\}} \zeta_{j_1} - \mathbf{1}_{\{j_1=j_3\}} \zeta_{j_2} \Big),$$

где для простоты мы положили $\zeta_j^{(i)} = \zeta_j$.

Согласно (6.18) достаточно вычислить лишь $\mathsf{M}\left\{ \left(J[\psi^{(3)}]_{T,t}^p \right)^2 \right\}$. Имеем

$$\mathsf{M}\left\{ \left(J[\psi^{(3)}]_{T,t}^p \right)^2 \right\} = \mathsf{M}\Bigg\{ \sum_{j_1,j_1',j_2,j_2',j_3,j_3'=0}^{p} C_{j_3 j_2 j_1} C_{j_3' j_2' j_1'} \zeta_{j_1} \zeta_{j_1'} \zeta_{j_2} \zeta_{j_2'} \zeta_{j_3} \zeta_{j_3'} \Bigg\} -$$

$$-2 \sum_{j_2'=0}^{p} \mathsf{M}\Bigg\{ \sum_{j_1,j_2,j_3,j_3'=0}^{p} C_{j_3 j_2 j_1} C_{j_3' j_2' j_2'} \zeta_{j_1} \zeta_{j_2} \zeta_{j_3} \zeta_{j_3'} \Bigg\} -$$

$$-2 \sum_{j_3'=0}^{p} \mathsf{M}\Bigg\{ \sum_{j_1,j_2,j_3,j_1'=0}^{p} C_{j_3 j_2 j_1} C_{j_3' j_3' j_1'} \zeta_{j_1} \zeta_{j_2} \zeta_{j_3} \zeta_{j_1'} \Bigg\} -$$

$$-2 \sum_{j_3'=0}^{p} \mathsf{M}\Bigg\{ \sum_{j_1,j_2,j_3,j_2'=0}^{p} C_{j_3 j_2 j_1} C_{j_3' j_2' j_3'} \zeta_{j_1} \zeta_{j_2} \zeta_{j_3} \zeta_{j_2'} \Bigg\} +$$

$$+\sum_{j_1,j_2,j_3=0}^{p}(C_{j_3j_2j_2}C_{j_3j_1j_1}+C_{j_3j_3j_1}C_{j_2j_2j_1}+C_{j_3j_2j_3}C_{j_1j_2j_1}+$$
$$+2C_{j_3j_2j_2}C_{j_1j_1j_3}+2C_{j_3j_2j_2}C_{j_1j_3j_1}+2C_{j_3j_3j_1}C_{j_2j_1j_2})\,.$$

Согласно (6.19) при $k=4$ и $k=6$ имеем:

$$\mathsf{M}\Big\{\sum_{j_1,j_1',j_2,j_2',j_3,j_3'=0}^{p}C_{j_3j_2j_1}C_{j_3'j_2'j_1'}\zeta_{j_1}\zeta_{j_1'}\zeta_{j_2}\zeta_{j_2'}\zeta_{j_3}\zeta_{j_3'}\Big\}=$$
$$=15\sum_{j_3=0}^{p}C_{j_3j_3j_3}^2+\sum_{j_3=0}^{p}\sum_{j_2=0}^{j_3-1}\sum_{j_1=0}^{j_2-1}\sum_{(j_1,j_1,j_2,j_2,j_3,j_3)}C_{(j_3j_2j_1}C_{j_3j_2j_1)}+$$
$$+3\sum_{j_3=0}^{p}\sum_{j_1=0}^{j_3-1}\sum_{(j_1,j_1,j_3,j_3,j_3,j_3)}C_{(j_3j_3j_1}C_{j_3j_3j_1)}+$$
$$+3\sum_{j_3=0}^{p}\sum_{j_1=0}^{j_3-1}\sum_{(j_1,j_1,j_1,j_1,j_3,j_3)}C_{(j_3j_1j_1}C_{j_3j_1j_1)};$$
$$\mathsf{M}\Big\{\sum_{j_1,j_2,j_3,j_3'=0}^{p}C_{j_3j_2j_1}C_{j_3'j_2'j_2'}\zeta_{j_1}\zeta_{j_2}\zeta_{j_3}\zeta_{j_3'}\Big\}=$$
$$=3\sum_{j_3=0}^{p}C_{j_3j_3j_3}C_{j_3j_2'j_2'}+\sum_{j_3=0}^{p}\sum_{j_1=0}^{j_3-1}\sum_{(j_1,j_1,j_3,j_3)}C_{(j_3j_1j_1}C_{j_3j_2'j_2')};$$
$$\mathsf{M}\Big\{\sum_{j_1,j_2,j_3,j_1'=0}^{p}C_{j_3j_2j_1}C_{j_3'j_3'j_1'}\zeta_{j_1}\zeta_{j_2}\zeta_{j_3}\zeta_{j_1'}\Big\}=$$
$$=3\sum_{j_3=0}^{p}C_{j_3j_3j_3}C_{j_3'j_3'j_3}+\sum_{j_3=0}^{p}\sum_{j_1=0}^{j_3-1}\sum_{(j_1,j_1,j_3,j_3)}C_{(j_3j_3j_1}C_{j_3'j_3'j_1)};$$
$$\mathsf{M}\Big\{\sum_{j_1,j_2,j_3,j_2'=0}^{p}C_{j_3j_2j_1}C_{j_3'j_2'j_3'}\zeta_{j_1}\zeta_{j_2}\zeta_{j_3}\zeta_{j_2'}\Big\}=$$
$$=3\sum_{j_3=0}^{p}C_{j_3j_3j_3}C_{j_3'j_3j_3'}+\sum_{j_3=0}^{p}\sum_{j_1=0}^{j_3-1}\sum_{(j_1,j_1,j_3,j_3)}C_{(j_3j_3j_1}C_{j_3'j_1j_3')},$$

где как обычно $\sum\limits_{(j_1,\ldots,j_k)}$ — сумма по всем возможным перестановкам $(j_1,\ldots,j_k)$, а новое обозначение вида $C_{(j_1\ldots j_l}C_{j_{l+1}\ldots j_k)}$ означает, что при осуществлении перестановок индексом величины $C_{(j_1\ldots j_l}C_{j_{l+1}\ldots j_k)}$ является $(j_1\ldots j_lj_{l+1}\ldots j_k)=(j_1\ldots,j_k)$, как, если бы в (6.19) мы положили бы $a_{(j_1\ldots j_k)}=C_{(j_1\ldots j_l}C_{j_{l+1}\ldots j_k)}$.

В принципе, интересующая нас среднеквадратическая погрешность может уже считаться найденной по формуле

$$\mathsf{M}\left\{\left(J[\psi^{(3)}]_{T,t}^{p}-J[\psi^{(3)}]_{T,t}\right)^2\right\}=\int\limits_{[t,T]^3}K^2(t_1,t_2,t_3)dt_1dt_2dt_3-\mathsf{M}\left\{\left(J[\psi^{(3)}]_{T,t}^{p}\right)^2\right\},$$

поскольку величина $\mathsf{M}\left\{\left(J[\psi^{(3)}]_{T,t}^{p}\right)^2\right\}$ вычислена. Во избежание недоразумений выпишем в развернутом виде ряд сумм, входящих в полученные формулы:

$$\sum_{(j_1,j_1,j_3,j_3)}C_{(j_3j_1j_1}C_{j_3j_2'j_2'})=C_{j_3j_1j_1}C_{j_3j_2'j_2'}+C_{j_3j_1j_3}C_{j_1j_2'j_2'}+$$
$$+C_{j_3j_3j_1}C_{j_1j_2'j_2'}+C_{j_1j_3j_3}C_{j_1j_2'j_2'}+C_{j_1j_3j_1}C_{j_3j_2'j_2'}+C_{j_1j_1j_3}C_{j_3j_2'j_2'};$$

$$\sum_{(j_1,j_1,j_3,j_3)}C_{(j_3j_1j_1}C_{j_3'j_3'j_1})=C_{j_3j_3j_1}C_{j_3'j_3'j_1}+C_{j_3j_1j_3}C_{j_3'j_3'j_1}+$$
$$+C_{j_3j_1j_1}C_{j_3'j_3'j_3}+C_{j_1j_3j_3}C_{j_3'j_3'j_1}+C_{j_1j_3j_1}C_{j_3'j_3'j_3}+C_{j_1j_1j_3}C_{j_3'j_3'j_3};$$
$$\sum_{(j_1,j_1,j_3,j_3)}C_{(j_3j_3j_1}C_{j_3'j_1j_3'})=C_{j_3j_3j_1}C_{j_3'j_1j_3'}+C_{j_3j_1j_3}C_{j_3'j_1j_3'}+$$
$$+C_{j_3j_1j_1}C_{j_3'j_3j_3'}+C_{j_1j_3j_3}C_{j_3'j_1j_3'}+C_{j_1j_3j_1}C_{j_3'j_1j_3'}+C_{j_1j_1j_3}C_{j_3'j_3j_3'};$$

$$\sum_{(j_1,j_1,j_3,j_3,j_3,j_3)}C_{(j_3j_3j_1}C_{j_3j_3j_1})=2C_{j_1j_1j_3}C_{j_3j_3j_3}+2C_{j_1j_3j_1}C_{j_3j_3j_3}+$$
$$+C_{j_1j_3j_3}^2+2C_{j_1j_3j_3}C_{j_3j_1j_3}+2C_{j_3j_1j_1}C_{j_3j_3j_3}+C_{j_3j_1j_3}^2+$$
$$+C_{j_3j_3j_1}^2+2C_{j_1j_3j_3}C_{j_3j_3j_1}+2C_{j_3j_1j_3}C_{j_3j_3j_1};$$

$$\sum_{(j_1,j_1,j_1,j_1,j_3,j_3)}C_{(j_3j_1j_1}C_{j_3j_1j_1})=2C_{j_3j_3j_1}C_{j_1j_1j_1}+2C_{j_3j_1j_3}C_{j_1j_1j_1}+$$
$$+C_{j_3j_1j_1}^2+2C_{j_3j_1j_1}C_{j_1j_3j_1}+2C_{j_3j_1j_1}C_{j_1j_1j_3}+2C_{j_1j_3j_3}C_{j_1j_1j_1}+$$
$$+C_{j_1j_3j_1}^2+2C_{j_1j_3j_1}C_{j_1j_1j_3}+C_{j_1j_1j_3}^2;$$

$$\sum_{(j_1,j_1,j_2,j_2,j_3,j_3)}C_{(j_3j_2j_1}C_{j_3j_2j_1})=2C_{j_1j_1j_2}C_{j_2j_3j_3}+2C_{j_1j_1j_2}C_{j_3j_2j_3}+$$
$$+2C_{j_1j_1j_2}C_{j_3j_3j_2}+2C_{j_1j_1j_3}C_{j_2j_2j_3}+2C_{j_1j_1j_3}C_{j_2j_3j_2}+2C_{j_1j_1j_3}C_{j_3j_2j_2}+$$
$$+2C_{j_1j_2j_1}C_{j_2j_3j_3}+2C_{j_1j_2j_1}C_{j_3j_2j_3}+2C_{j_1j_2j_1}C_{j_3j_3j_2}+2C_{j_1j_3j_1}C_{j_3j_2j_2}+$$

$$+2C_{j_2j_3j_2}C_{j_1j_3j_1}+2C_{j_1j_3j_1}C_{j_2j_2j_3}+2C_{j_1j_2j_2}C_{j_1j_3j_3}+2C_{j_1j_2j_3}C_{j_1j_3j_2}+$$
$$+2C_{j_1j_2j_2}C_{j_3j_1j_3}+2C_{j_1j_2j_3}C_{j_2j_1j_3}+2C_{j_1j_3j_2}C_{j_2j_1j_3}+2C_{j_1j_3j_3}C_{j_2j_1j_2}+$$
$$+2C_{j_1j_3j_2}C_{j_3j_1j_2}+2C_{j_1j_2j_3}C_{j_3j_1j_2}+2C_{j_1j_2j_2}C_{j_3j_3j_1}+2C_{j_1j_2j_3}C_{j_2j_3j_1}+$$
$$+2C_{j_1j_3j_2}C_{j_2j_3j_1}+2C_{j_1j_3j_3}C_{j_2j_2j_1}+2C_{j_1j_3j_2}C_{j_3j_2j_1}+2C_{j_1j_2j_3}C_{j_3j_2j_1}+$$
$$+2C_{j_2j_1j_1}C_{j_2j_3j_3}+2C_{j_2j_1j_1}C_{j_3j_2j_3}+2C_{j_2j_1j_1}C_{j_3j_3j_2}+2C_{j_3j_1j_1}C_{j_3j_2j_2}+$$
$$+2C_{j_3j_1j_1}C_{j_2j_3j_2}+2C_{j_3j_1j_1}C_{j_2j_2j_3}+2C_{j_2j_1j_2}C_{j_3j_1j_3}+2C_{j_2j_1j_3}C_{j_3j_1j_2}+$$
$$+2C_{j_2j_1j_2}C_{j_3j_3j_1}+2C_{j_2j_1j_3}C_{j_2j_3j_1}+2C_{j_2j_1j_3}C_{j_3j_2j_1}+2C_{j_3j_1j_2}C_{j_3j_2j_1}+$$
$$+2C_{j_3j_1j_3}C_{j_2j_2j_1}+2C_{j_3j_1j_2}C_{j_2j_3j_1}+2C_{j_3j_3j_1}C_{j_2j_2j_1}+2C_{j_2j_3j_1}C_{j_3j_2j_1}+$$
$$+C^2_{j_1j_3j_2}+C^2_{j_1j_2j_3}+C^2_{j_2j_3j_1}+C^2_{j_2j_1j_3}+C^2_{j_3j_2j_1}+C^2_{j_3j_1j_2}.$$

Сделаем одно замечание по-поводу вычисления среднеквадратической погрешности аппроксимации повторного стохастического интеграла Стратоновича 3 кратности вида

$$\int\limits_t^{*T}\int\limits_t^{*t_3}\int\limits_t^{*t_2} d\mathbf{f}_{t_1}^{(i_1)}d\mathbf{f}_{t_2}^{(i_2)}d\mathbf{f}_{t_3}^{(i_3)} \stackrel{\text{def}}{=} I^{*(i_1i_2i_3)}_{000_{T,t}};\ i_1,i_2,i_3=1,\ldots,m.$$

Поскольку (см. разд. 5.6)

$$I^{*(i_1i_2i_3)}_{000_{T,t}}=I^{(i_1i_2i_3)}_{000_{T,t}}+\frac{1}{2}\mathbf{1}_{\{i_1=i_2\}}\int\limits_t^T\int\limits_t^{\tau}ds d\mathbf{f}_{\tau}^{(i_3)}+\frac{1}{2}\mathbf{1}_{\{i_2=i_3\}}\int\limits_t^T\int\limits_t^{\tau}d\mathbf{f}_s^{(i_1)}d\tau=$$
$$=I^{(i_1i_2i_3)}_{000_{T,t}}+\frac{1}{4}\mathbf{1}_{\{i_1=i_2\}}(T-t)^{\frac{3}{2}}\left(\zeta_0^{(i_3)}+\frac{1}{\sqrt{3}}\zeta_1^{(i_3)}\right)+$$
$$+\frac{1}{4}\mathbf{1}_{\{i_2=i_3\}}(T-t)^{\frac{3}{2}}\left(\zeta_0^{(i_1)}-\frac{1}{\sqrt{3}}\zeta_1^{(i_1)}\right), \qquad (6.25)$$

где $\zeta_j^{(i)}=\int\limits_t^T\phi_j(s)d\mathbf{f}_s^{(i)}$; $\{\phi_j(x)\}_{j=0}^{\infty}$ — полная ортонормированная на отрезке $[t,\ T]$ система полиномов Лежандра, то

$$I^{*(i_1i_2i_3)p}_{000_{T,t}}=I^{(i_1i_2i_3)p}_{000_{T,t}}+\frac{1}{4}\mathbf{1}_{\{i_1=i_2\}}(T-t)^{\frac{3}{2}}\left(\zeta_0^{(i_3)}+\frac{1}{\sqrt{3}}\zeta_1^{(i_3)}\right)+$$
$$+\frac{1}{4}\mathbf{1}_{\{i_2=i_3\}}(T-t)^{\frac{3}{2}}\left(\zeta_0^{(i_1)}-\frac{1}{\sqrt{3}}\zeta_1^{(i_1)}\right), \qquad (6.26)$$

где $I_{000_{T,t}}^{(i_1 i_2 i_3)p}$ — аппроксимация повторного стохастического интеграла Ито $I_{000_{T,t}}^{(i_1 i_2 i_3)}$, которая имеет вид:

$$I_{000_{T,t}}^{(i_1 i_2 i_3)p} = \sum_{j_1,j_2,j_3=0}^{p} C_{j_3 j_2 j_1} \Biggl(\zeta_{j_1}^{(i_1)} \zeta_{j_2}^{(i_2)} \zeta_{j_3}^{(i_3)} - \mathbf{1}_{\{i_1=i_2\}} \mathbf{1}_{\{j_1=j_2\}} \zeta_{j_3}^{(i_3)} -$$

$$- \mathbf{1}_{\{i_2=i_3\}} \mathbf{1}_{\{j_2=j_3\}} \zeta_{j_1}^{(i_1)} - \mathbf{1}_{\{i_1=i_3\}} \mathbf{1}_{\{j_1=j_3\}} \zeta_{j_2}^{(i_2)} \Biggr).$$

Из (6.25) и (6.26) окончательно получаем:

$$\mathsf{M}\left\{ \left(I_{000_{T,t}}^{*(i_3 i_2 i_1)} - I_{000_{T,t}}^{*(i_3 i_2 i_1)p} \right)^2 \right\} = \mathsf{M}\left\{ \left(I_{000_{T,t}}^{(i_3 i_2 i_1)} - I_{000_{T,t}}^{(i_3 i_2 i_1)p} \right)^2 \right\}. \tag{6.27}$$

Очевидно, что формула (6.27) будет верна и для тригонометрической системы функций.

6.2.6 Случай $k = 4$ и произвольных $i_1, i_2, i_3, i_4 = 1, \ldots, m$

Случай попарно различных $i_1, \ldots, i_4$ рассмотрен в лемме 6.1, поэтому остается рассмотреть следующие частные случаи: 1. $i_1 = i_2 \neq i_3, i_4$; $i_3 \neq i_4$; 2. $i_1 = i_3 \neq i_2, i_4$; $i_2 \neq i_4$; 3. $i_1 = i_4 \neq i_2, i_3$; $i_2 \neq i_3$; 4. $i_2 = i_3 \neq i_1, i_4$; $i_1 \neq i_4$; 5. $i_2 = i_4 \neq i_1, i_3$; $i_1 \neq i_3$; 6. $i_3 = i_4 \neq i_1, i_2$; $i_1 \neq i_2$; 7. $i_1 = i_2 = i_3 \neq i_4$; 8. $i_2 = i_3 = i_4 \neq i_1$; 9. $i_1 = i_2 = i_4 \neq i_3$; 10. $i_1 = i_3 = i_4 \neq i_2$; 11. $i_1 = i_2 = i_3 = i_4$.

Начнем с 1 частного случая. Согласно теореме 5.1 имеем:

$$J[\psi^{(4)}]_{T,t} = \sum_{j_1,j_2,j_3,j_4=0}^{\infty} C_{j_4 j_3 j_2 j_1} \left(\zeta_{j_1}^{(i_1)} \zeta_{j_2}^{(i_1)} \zeta_{j_3}^{(i_3)} \zeta_{j_4}^{(i_4)} - \mathbf{1}_{\{j_1=j_2\}} \zeta_{j_3}^{(i_3)} \zeta_{j_4}^{(i_4)} \right),$$

$$J[\psi^{(4)}]_{T,t}^{p} = \sum_{j_1,j_2,j_3,j_4=0}^{p} C_{j_4 j_3 j_2 j_1} \left(\zeta_{j_1}^{(i_1)} \zeta_{j_2}^{(i_1)} \zeta_{j_3}^{(i_3)} \zeta_{j_4}^{(i_4)} - \mathbf{1}_{\{j_1=j_2\}} \zeta_{j_3}^{(i_3)} \zeta_{j_4}^{(i_4)} \right).$$

Поскольку $\mathsf{M}\left\{ J[\psi^{(4)}]_{T,t}^{p} \right\} = 0$, то согласно (6.18) для вычисления среднеквадратической погрешности $\mathsf{M}\left\{ \left(J[\psi^{(4)}]_{T,t}^{p} - J[\psi^{(4)}]_{T,t} \right)^2 \right\}$ остается вычислить $\mathsf{M}\left\{ \left(J[\psi^{(4)}]_{T,t}^{p} \right)^2 \right\}$.

Используя (6.19) при $k = 4$ имеем:

$$\mathsf{M}\left\{ \left(J[\psi^{(4)}]_{T,t}^{p} \right)^2 \right\} =$$

$$= \sum_{j_3,j_4=0}^{p} \mathsf{M}\Biggl\{ \sum_{j_1,j_1',j_2,j_2'=0}^{q} C_{j_4j_3j_2j_1} C_{j_4j_3j_2'j_1'} \zeta_{(j_1)T,t}^{(i_1)} \zeta_{(j_1')T,t}^{(i_1)} \zeta_{(j_2)T,t}^{(i_1)} \zeta_{(j_2')T,t}^{(i_1)} \Biggr\} -$$

$$- \sum_{j_2,j_3,j_4,j_1'=0}^{q} C_{j_4j_3j_2j_2} C_{j_4j_3j_1'j_1'} - \sum_{j_2,j_3,j_4,j_2'=0}^{q} C_{j_4j_3j_2j_2} C_{j_4j_3j_2'j_2'} +$$

$$+ \sum_{j_2,j_3,j_4,j_2'=0}^{q} C_{j_4j_3j_2j_2} C_{j_4j_3j_2'j_2'} =$$

$$= \sum_{j_3,j_4=0}^{p} \Biggl(\mathsf{M}\Biggl\{ \sum_{j_1,j_1',j_2,j_2'=0}^{q} C_{j_4j_3j_2j_1} C_{j_4j_3j_2'j_1'} \zeta_{(j_1)T,t}^{(i_1)} \zeta_{(j_1')T,t}^{(i_1)} \zeta_{(j_2)T,t}^{(i_1)} \zeta_{(j_2')T,t}^{(i_1)} \Biggr\} -$$

$$- \Biggl(\sum_{j_2=0}^{p} C_{j_4j_3j_2j_2} \Biggr)^2 \Biggr) =$$

$$= \sum_{j_3,j_4=0}^{p} \Biggl(3 \sum_{j_1=0}^{p} C_{j_4j_3j_1j_1}^2 + \sum_{j_2=0}^{p} \sum_{j_1=0}^{j_2-1} \Biggl(C_{j_4j_3j_2j_1}^2 + C_{j_4j_3j_1j_2}^2 +$$

$$+ 2C_{j_4j_3j_1j_1} C_{j_4j_3j_2j_2} + 2C_{j_4j_3j_2j_1} C_{j_4j_3j_1j_2} \Biggr) - \Biggl(\sum_{j_2=0}^{p} C_{j_4j_3j_2j_2} \Biggr)^2 \Biggr) =$$

$$= \sum_{j_1,j_2,j_3,j_4=0}^{p} C_{j_4j_3j_2j_1}^2 + \sum_{j_1,j_2,j_3,j_4=0}^{p} C_{j_4j_3j_1j_2} C_{j_4j_3j_2j_1}.$$

Поэтому

$$\mathsf{M}\left\{ \left(J[\psi^{(4)}]_{T,t}^{p} - J[\psi^{(4)}]_{T,t} \right)^2 \right\} = \int\limits_{[t,T]^4} K^2(t_1,\ldots,t_4)dt_1\ldots dt_4 -$$

$$- \sum_{j_4,j_3,j_2,j_1=0}^{p} C_{j_4j_3j_2j_1}^2 - \sum_{j_4,j_3,j_2,j_1=0}^{p} C_{j_4j_3j_1j_2} C_{j_4j_3j_2j_1} \ (i_1 = i_2 \neq i_3, i_4;\ i_3 \neq i_4).$$

Для 2–6 частных случаев в полной аналогии получаем:

$$\mathsf{M}\left\{ \left(J[\psi^{(4)}]_{T,t}^{p} - J[\psi^{(4)}]_{T,t} \right)^2 \right\} = \int\limits_{[t,T]^4} K^2(t_1,\ldots,t_4)dt_1\ldots dt_4 -$$

$$- \sum_{j_4,j_3,j_2,j_1=0}^{p} C_{j_4j_3j_2j_1}^2 - \sum_{j_4,j_3,j_2,j_1=0}^{p} C_{j_4j_3j_2j_1} C_{j_4j_1j_2j_3} \ (i_1 = i_3 \neq i_2, i_4;\ i_2 \neq i_4);$$

$$\mathsf{M}\left\{ \left(J[\psi^{(4)}]_{T,t}^{p} - J[\psi^{(4)}]_{T,t} \right)^2 \right\} = \int\limits_{[t,T]^4} K^2(t_1,\ldots,t_4)dt_1\ldots dt_4 -$$

$$-\sum_{j_4,j_3,j_2,j_1=0}^{p} C_{j_4j_3j_2j_1}^2 - \sum_{j_4,j_3,j_2,j_1=0}^{p} C_{j_4j_3j_2j_1}C_{j_1j_3j_2j_4}\ (i_1=i_4\neq i_2,i_3;\ i_2\neq i_3);$$

$$\mathsf{M}\left\{\left(J[\psi^{(4)}]_{T,t}^p - J[\psi^{(4)}]_{T,t}\right)^2\right\} = \int\limits_{[t,T]^4} K^2(t_1,\ldots,t_4)dt_1\ldots dt_4-$$

$$-\sum_{j_4,j_3,j_2,j_1=0}^{p} C_{j_4j_3j_2j_1}^2 - \sum_{j_4,j_3,j_2,j_1=0}^{p} C_{j_4j_3j_2j_1}C_{j_4j_2j_3j_1}\ (i_2=i_3\neq i_1,i_4;\ i_1\neq i_4);$$

$$\mathsf{M}\left\{\left(J[\psi^{(4)}]_{T,t}^p - J[\psi^{(4)}]_{T,t}\right)^2\right\} = \int\limits_{[t,T]^4} K^2(t_1,\ldots,t_4)dt_1\ldots dt_4-$$

$$-\sum_{j_4,j_3,j_2,j_1=0}^{p} C_{j_4j_3j_2j_1}^2 - \sum_{j_4,j_3,j_2,j_1=0}^{p} C_{j_4j_3j_2j_1}C_{j_2j_3j_4j_1}\ (i_2=i_4\neq i_1,i_3;\ i_1\neq i_3);$$

$$\mathsf{M}\left\{\left(J[\psi^{(4)}]_{T,t}^p - J[\psi^{(4)}]_{T,t}\right)^2\right\} = \int\limits_{[t,T]^4} K^2(t_1,\ldots,t_4)dt_1\ldots dt_4-$$

$$-\sum_{j_4,j_3,j_2,j_1=0}^{p} C_{j_4j_3j_2j_1}^2 - \sum_{j_4,j_3,j_2,j_1=0}^{p} C_{j_4j_3j_2j_1}C_{j_3j_4j_2j_1}\ (i_3=i_4\neq i_1,i_2;\ i_1\neq i_2).$$

Для 7 частного случая $(i_1=i_2=i_3\neq i_4)$ имеем:

$$J[\psi^{(4)}]_{T,t}^p = \sum_{j_1,j_2,j_3,j_4=0}^{p} C_{j_4j_3j_2j_1}\Bigl(\zeta_{j_1}\zeta_{j_2}\zeta_{j_3}\tilde{\zeta}_{j_4} - \mathbf{1}_{\{j_1=j_2\}}\zeta_{j_3}\tilde{\zeta}_{j_4}-$$

$$-\mathbf{1}_{\{j_1=j_3\}}\zeta_{j_2}\tilde{\zeta}_{j_4} - \mathbf{1}_{\{j_2=j_3\}}\zeta_{j_1}\tilde{\zeta}_{j_4}\Bigr),$$

где $\zeta_j^{(i_1)}=\zeta_j^{(i_2)}=\zeta_j^{(i_3)}=\zeta_j$, $\zeta_j^{(i_4)}=\tilde{\zeta}_j$;

$$\mathsf{M}\left\{\left(J[\psi^{(4)}]_{T,t}^p\right)^2\right\} = \sum_{j_4=0}^{p}\mathsf{M}\Biggl\{\sum_{j_1,j_1',j_2,j_2',j_3,j_3'=0}^{p} C_{j_4j_3j_2j_1}C_{j_4j_3'j_2'j_1'}\zeta_{j_1}\zeta_{j_1'}\zeta_{j_2}\zeta_{j_2'}\zeta_{j_3}\zeta_{j_3'}\Biggr\}-$$

$$-2\sum_{j_2',j_4=0}^{p}\mathsf{M}\Biggl\{\sum_{j_1,j_2,j_3,j_3'=0}^{p} C_{j_4j_3j_2j_1}C_{j_4j_3'j_2'j_2'}\zeta_{j_1}\zeta_{j_2}\zeta_{j_3}\zeta_{j_3'}\Biggr\}-$$

$$-2\sum_{j_3',j_4=0}^{p}\mathsf{M}\Biggl\{\sum_{j_1,j_2,j_3,j_2'=0}^{p} C_{j_4j_3j_2j_1}C_{j_4j_3'j_2'j_3'}\zeta_{j_1}\zeta_{j_2}\zeta_{j_3}\zeta_{j_2'}\Biggr\}-$$

$$-2\sum_{j_3',j_4=0}^{p}\mathsf{M}\Biggl\{\sum_{j_1,j_2,j_3,j_1'=0}^{p} C_{j_4j_3j_2j_1}C_{j_4j_3'j_3'j_1'}\zeta_{j_1}\zeta_{j_2}\zeta_{j_3}\zeta_{j_1'}\Biggr\}+$$

$$+\sum_{j_1,j_2,j_3,j_4=0}^{p}\left(C_{j_4j_3j_2j_2}C_{j_4j_3j_1j_1}+C_{j_4j_3j_2j_3}C_{j_4j_1j_2j_1}+C_{j_4j_3j_3j_1}C_{j_4j_2j_2j_1}+\right.$$
$$\left.+2C_{j_4j_3j_2j_2}C_{j_4j_1j_3j_1}+2C_{j_4j_3j_2j_2}C_{j_4j_1j_1j_3}+2C_{j_4j_3j_2j_3}C_{j_4j_1j_1j_2}\right);$$

Далее, согласно (6.19) при $k=6$ и $k=4$ имеем:

$$\mathsf{M}\left\{\sum_{j_1,j_1',j_2,j_2',j_3,j_3'=0}^{p}C_{j_4j_3j_2j_1}C_{j_4j_3'j_2'j_1'}\zeta_{j_1}\zeta_{j_1'}\zeta_{j_2}\zeta_{j_2'}\zeta_{j_3}\zeta_{j_3'}\right\}=$$
$$=15\sum_{j_3=0}^{p}C^2_{j_4j_3j_3j_3}+\sum_{j_3=0}^{p}\sum_{j_2=0}^{j_3-1}\sum_{j_1=0}^{j_2-1}\sum_{(j_1,j_1,j_2,j_2,j_3,j_3)}C_{(j_4j_3j_2j_1}C_{j_4j_3j_2j_1)}+$$
$$+3\sum_{j_3=0}^{p}\sum_{j_1=0}^{j_3-1}\sum_{(j_1,j_1,j_3,j_3,j_3,j_3)}C_{(j_4j_3j_3j_1}C_{j_4j_3j_3j_1)}+$$
$$+3\sum_{j_3=0}^{p}\sum_{j_1=0}^{j_3-1}\sum_{(j_1,j_1,j_1,j_1,j_3,j_3)}C_{(j_4j_3j_1j_1}C_{j_4j_3j_1j_1)};$$

$$\mathsf{M}\left\{\sum_{j_1,j_2,j_3,j_3'=0}^{p}C_{j_4j_3j_2j_1}C_{j_4j_3'j_2'j_2'}\zeta_{j_1}\zeta_{j_2}\zeta_{j_3}\zeta_{j_3'}\right\}=$$
$$=3\sum_{j_3=0}^{p}C_{j_4j_3j_3j_3}C_{j_4j_3j_2'j_2'}+\sum_{j_3=0}^{p}\sum_{j_1=0}^{j_3-1}\sum_{(j_1,j_1,j_3,j_3)}C_{(j_4j_3j_1j_1}C_{j_4j_3j_2'j_2')};$$

$$\mathsf{M}\left\{\sum_{j_1,j_2,j_3,j_2'=0}^{p}C_{j_4j_3j_2j_1}C_{j_4j_3'j_2'j_3'}\zeta_{j_1}\zeta_{j_2}\zeta_{j_3}\zeta_{j_2'}\right\}=$$
$$=3\sum_{j_3=0}^{p}C_{j_4j_3j_3j_3}C_{j_4j_3'j_3j_3'}+\sum_{j_3=0}^{p}\sum_{j_1=0}^{j_3-1}\sum_{(j_1,j_1,j_3,j_3)}C_{(j_4j_3j_3j_1}C_{j_4j_3'j_1j_3')};$$

$$\mathsf{M}\left\{\sum_{j_1,j_2,j_3,j_1'=0}^{p}C_{j_4j_3j_2j_1}C_{j_4j_3'j_3'j_1'}\zeta_{j_1}\zeta_{j_2}\zeta_{j_3}\zeta_{j_1'}\right\}=$$
$$=3\sum_{j_3=0}^{p}C_{j_4j_3j_3j_3}C_{j_4j_3'j_3'j_3}+\sum_{j_3=0}^{p}\sum_{j_1=0}^{j_3-1}\sum_{(j_1,j_1,j_3,j_3)}C_{(j_4j_3j_3j_1}C_{j_4j_3'j_3'j_1)}.$$

Комбинируя полученные равенства вычисляем интересующую нас среднеквадратическую погрешность аппроксимации по формуле:

$$\mathsf{M}\left\{\left(J[\psi^{(4)}]^p_{T,t}-J[\psi^{(4)}]_{T,t}\right)^2\right\}=\int\limits_{[t,T]^4}K^2(t_1,\ldots,t_4)dt_1\ldots dt_4-$$

$$-\mathsf{M}\left\{\left(J[\psi^{(4)}]_{T,t}^{p}\right)^2\right\}. \tag{6.28}$$

Для 8 частного случая ($i_2 = i_3 = i_4 \neq i_1$) имеем:

$$J[\psi^{(4)}]_{T,t}^{p} = \sum_{j_1,j_2,j_3,j_4=0}^{p} C_{j_4j_3j_2j_1}\Bigl(\zeta_{j_2}\zeta_{j_3}\zeta_{j_4}\tilde{\zeta}_{j_1} - \mathbf{1}_{\{j_2=j_3\}}\zeta_{j_4}\tilde{\zeta}_{j_1} -$$

$$-\mathbf{1}_{\{j_2=j_4\}}\zeta_{j_3}\tilde{\zeta}_{j_1} - \mathbf{1}_{\{j_3=j_4\}}\zeta_{j_2}\tilde{\zeta}_{j_1}\Bigr),$$

где $\zeta_j^{(i_2)} = \zeta_j^{(i_3)} = \zeta_j^{(i_4)} = \zeta_j$, $\zeta_j^{(i_1)} = \tilde{\zeta}_j$;

$$\mathsf{M}\left\{\left(J[\psi^{(4)}]_{T,t}^{p}\right)^2\right\} = \sum_{j_1=0}^{p}\mathsf{M}\Biggl\{\sum_{j_2,j_2',j_3,j_3',j_4,j_4'=0}^{p} C_{j_4j_3j_2j_1}C_{j_4'j_3'j_2'j_1}\zeta_{j_2}\zeta_{j_2'}\zeta_{j_3}\zeta_{j_3'}\zeta_{j_4}\zeta_{j_4'}\Biggr\}-$$

$$-2\sum_{j_3',j_1=0}^{p}\mathsf{M}\Biggl\{\sum_{j_2,j_3,j_4,j_4'=0}^{p} C_{j_4j_3j_2j_1}C_{j_4'j_3'j_3'j_1}\zeta_{j_2}\zeta_{j_3}\zeta_{j_4}\zeta_{j_4'}\Biggr\}-$$

$$-2\sum_{j_1,j_4'=0}^{p}\mathsf{M}\Biggl\{\sum_{j_2,j_3,j_4,j_3'=0}^{p} C_{j_4j_3j_2j_1}C_{j_4'j_3'j_4'j_1}\zeta_{j_2}\zeta_{j_3}\zeta_{j_4}\zeta_{j_3'}\Biggr\}-$$

$$-2\sum_{j_4',j_1=0}^{p}\mathsf{M}\Biggl\{\sum_{j_2,j_3,j_4,j_2'=0}^{p} C_{j_4j_3j_2j_1}C_{j_4'j_4'j_2'j_1}\zeta_{j_2}\zeta_{j_3}\zeta_{j_4}\zeta_{j_2'}\Biggr\}+$$

$$+\sum_{j_1,j_2,j_3,j_4=0}^{p}\Bigl(C_{j_4j_2j_2j_1}C_{j_4j_3j_3j_1} + C_{j_4j_3j_4j_1}C_{j_2j_3j_2j_1} + C_{j_4j_4j_2j_1}C_{j_3j_3j_2j_1}+$$

$$+2C_{j_4j_3j_4j_1}C_{j_3j_2j_2j_1} + 2C_{j_4j_4j_2j_1}C_{j_2j_3j_3j_1} + 2C_{j_4j_4j_2j_1}C_{j_3j_2j_3j_1}\Bigr).$$

Далее, согласно (6.19) при $k = 6$ и $k = 4$ имеем:

$$\mathsf{M}\Biggl\{\sum_{j_2,j_2',j_3,j_3',j_4,j_4'=0}^{p} C_{j_4j_3j_2j_1}C_{j_4'j_3'j_2'j_1}\zeta_{j_2}\zeta_{j_2'}\zeta_{j_3}\zeta_{j_3'}\zeta_{j_4}\zeta_{j_4'}\Biggr\} =$$

$$= 15\sum_{j_4=0}^{p} C_{j_4j_4j_4j_1}^2 + \sum_{j_4=0}^{p}\sum_{j_3=0}^{j_4-1}\sum_{j_2=0}^{j_3-1}\sum_{(j_2,j_2,j_3,j_3,j_4,j_4)} C_{(j_4j_3j_2j_1}C_{j_4j_3j_2j_1)}+$$

$$+3\sum_{j_4=0}^{p}\sum_{j_2=0}^{j_4-1}\sum_{(j_2,j_2,j_4,j_4,j_4,j_4)} C_{(j_4j_4j_2j_1}C_{j_4j_4j_2j_1)}+$$

$$+3\sum_{j_4=0}^{p}\sum_{j_2=0}^{j_4-1}\sum_{(j_2,j_2,j_2,j_2,j_4,j_4)} C_{(j_4j_2j_2j_1}C_{j_4j_2j_2j_1)};$$

$$\mathsf{M}\Biggl\{\sum_{j_2,j_3,j_4,j_4'=0}^{p} C_{j_4j_3j_2j_1}C_{j_4'j_3'j_3'j_1}\zeta_{j_2}\zeta_{j_3}\zeta_{j_4}\zeta_{j_4'}\Biggr\}=$$

$$=3\sum_{j_4=0}^{p} C_{j_4j_4j_4j_1}C_{j_4j_3'j_3'j_1}+\sum_{j_4=0}^{p}\sum_{j_2=0}^{j_4-1}\sum_{(j_2,j_2,j_4,j_4)} C_{(j_4j_2j_2j_1}C_{j_4j_3'j_3'j_1)};$$

$$\mathsf{M}\Biggl\{\sum_{j_2,j_3,j_3',j_4=0}^{p} C_{j_4j_3j_2j_1}C_{j_4'j_3'j_4'j_1}\zeta_{j_2}\zeta_{j_3}\zeta_{j_4}\zeta_{j_3'}\Biggr\}=$$

$$=3\sum_{j_4=0}^{p} C_{j_4j_4j_4j_1}C_{j_4'j_4j_4'j_1}+\sum_{j_4=0}^{p}\sum_{j_2=0}^{j_4-1}\sum_{(j_2,j_2,j_4,j_4)} C_{(j_4j_2j_2j_1}C_{j_4'j_4j_4'j_1)};$$

$$\mathsf{M}\Biggl\{\sum_{j_2,j_2',j_3,j_4=0}^{p} C_{j_4j_3j_2j_1}C_{j_4'j_4'j_2'j_1}\zeta_{j_2}\zeta_{j_3}\zeta_{j_4}\zeta_{j_2'}\Biggr\}=$$

$$=3\sum_{j_4=0}^{p} C_{j_4j_4j_4j_1}C_{j_4'j_4'j_4j_1}+\sum_{j_4=0}^{p}\sum_{j_2=0}^{j_4-1}\sum_{(j_2,j_2,j_4,j_4)} C_{(j_4j_4j_2j_1}C_{j_4'j_4'j_2j_1)}.$$

Объединяя полученные равенства и используя (6.28), получим интересующую нас среднеквадратическую погрешность аппроксимации.

Рассмотрим по аналогии 9 частный случай ($i_1=i_2=i_4\neq i_3$):

$$J[\psi^{(4)}]_{T,t}^{p}=\sum_{j_1,j_2,j_3,j_4=0}^{p} C_{j_4j_3j_2j_1}\Biggl(\zeta_{j_1}\zeta_{j_2}\zeta_{j_4}\tilde{\zeta}_{j_3}-\mathbf{1}_{\{j_1=j_2\}}\zeta_{j_4}\tilde{\zeta}_{j_3}-$$

$$-\mathbf{1}_{\{j_1=j_4\}}\zeta_{j_2}\tilde{\zeta}_{j_3}-\mathbf{1}_{\{j_2=j_4\}}\zeta_{j_1}\tilde{\zeta}_{j_3}\Biggr),$$

где $\zeta_j^{(i_1)}=\zeta_j^{(i_2)}=\zeta_j^{(i_4)}=\zeta_j$, $\zeta_j^{(i_3)}=\tilde{\zeta}_j$;

$$\mathsf{M}\left\{\left(J[\psi^{(4)}]_{T,t}^{p}\right)^2\right\}=\sum_{j_3=0}^{p}\mathsf{M}\Biggl\{\sum_{j_1,j_1',j_2,j_2',j_4,j_4'=0}^{p} C_{j_4j_3j_2j_1}C_{j_4'j_3j_2'j_1'}\zeta_{j_1}\zeta_{j_2}\zeta_{j_4}\zeta_{j_1'}\zeta_{j_2'}\zeta_{j_4'}\Biggr\}-$$

$$-2\sum_{j_3,j_2'=0}^{p}\mathsf{M}\Biggl\{\sum_{j_4,j_2,j_1,j_4'=0}^{p} C_{j_4j_3j_2j_1}C_{j_4'j_3j_2'j_2'}\zeta_{j_1}\zeta_{j_2}\zeta_{j_4}\zeta_{j_4'}\Biggr\}-$$

$$-2\sum_{j_3,j_4'=0}^{p}\mathsf{M}\Biggl\{\sum_{j_1,j_2,j_4,j_2'=0}^{p} C_{j_4j_3j_2j_1}C_{j_4'j_3j_2'j_4'}\zeta_{j_1}\zeta_{j_2}\zeta_{j_4}\zeta_{j_2'}\Biggr\}-$$

$$-2\sum_{j_4',j_3=0}^{p}\mathsf{M}\Biggl\{\sum_{j_1,j_2,j_4,j_1'=0}^{p} C_{j_4j_3j_2j_1}C_{j_4'j_3j_4'j_1'}\zeta_{j_1}\zeta_{j_2}\zeta_{j_4}\zeta_{j_1'}\Biggr\}+$$

$$+\sum_{j_1,j_2,j_3,j_4=0}^{p}\left(C_{j_4j_3j_2j_2}C_{j_4j_3j_1j_1}+C_{j_4j_3j_2j_4}C_{j_1j_3j_2j_1}+C_{j_4j_3j_4j_1}C_{j_2j_3j_2j_1}+\right.$$

$$\left.+2C_{j_4j_3j_2j_4}C_{j_2j_3j_1j_1}+2C_{j_4j_3j_4j_1}C_{j_1j_3j_2j_2}+2C_{j_4j_3j_4j_1}C_{j_2j_3j_1j_2}\right);$$

$$\mathsf{M}\left\{\sum_{j_1,j_1',j_2,j_2',j_4,j_4'=0}^{p}C_{j_4j_3j_2j_1}C_{j_4'j_3j_2'j_1'}\zeta_{j_1}\zeta_{j_2}\zeta_{j_4}\zeta_{j_1'}\zeta_{j_2'}\zeta_{j_4'}\right\}=$$

$$=15\sum_{j_4=0}^{p}C_{j_4j_3j_4j_4}^2+\sum_{j_4=0}^{p}\sum_{j_2=0}^{j_4-1}\sum_{j_1=0}^{j_2-1}\sum_{(j_1,j_1,j_2,j_2,j_4,j_4)}C_{(j_4j_3j_2j_1}C_{j_4j_3j_2j_1)}+$$

$$+3\sum_{j_4=0}^{p}\sum_{j_1=0}^{j_4-1}\sum_{(j_1,j_1,j_4,j_4,j_4,j_4)}C_{(j_4j_3j_4j_1}C_{j_4j_3j_4j_1)}+$$

$$+3\sum_{j_4=0}^{p}\sum_{j_1=0}^{j_4-1}\sum_{(j_1,j_1,j_1,j_1,j_4,j_4)}C_{(j_4j_3j_1j_1}C_{j_4j_3j_1j_1)};$$

$$\mathsf{M}\left\{\sum_{j_1,j_2,j_4,j_4'=0}^{p}C_{j_4j_3j_2j_1}C_{j_4'j_3j_2'j_2'}\zeta_{j_1}\zeta_{j_2}\zeta_{j_4}\zeta_{j_4'}\right\}=$$

$$=3\sum_{j_4=0}^{p}C_{j_4j_3j_4j_4}C_{j_4j_3j_2'j_2'}+\sum_{j_4=0}^{p}\sum_{j_1=0}^{j_4-1}\sum_{(j_1,j_1,j_4,j_4)}C_{(j_4j_3j_1j_1}C_{j_4j_3j_2'j_2')};$$

$$\mathsf{M}\left\{\sum_{j_1,j_2,j_4,j_2'=0}^{p}C_{j_4j_3j_2j_1}C_{j_4'j_3j_2'j_4'}\zeta_{j_1}\zeta_{j_2}\zeta_{j_4}\zeta_{j_2'}\right\}=$$

$$=3\sum_{j_4=0}^{p}C_{j_4j_3j_4j_4}C_{j_4'j_3j_4j_4'}+\sum_{j_4=0}^{p}\sum_{j_1=0}^{j_4-1}\sum_{(j_1,j_1,j_4,j_4)}C_{(j_4j_3j_1j_1}C_{j_4'j_3j_4j_4')};$$

$$\mathsf{M}\left\{\sum_{j_1,j_2,j_4,j_1'=0}^{p}C_{j_4j_3j_2j_1}C_{j_4'j_3j_4'j_1'}\zeta_{j_1}\zeta_{j_2}\zeta_{j_4}\zeta_{j_1'}\right\}=$$

$$=3\sum_{j_4=0}^{p}C_{j_4j_3j_4j_4}C_{j_4'j_3j_4'j_4}+\sum_{j_4=0}^{p}\sum_{j_1=0}^{j_4-1}\sum_{(j_1,j_1,j_4,j_4)}C_{(j_4j_3j_1j_1}C_{j_4'j_3j_4'j_4)}.$$

Аналогично в 10 частном случае ($i_1=i_3=i_4\neq i_2$) имеем:

$$J[\psi^{(4)}]_{T,t}^{p}=\sum_{j_1,j_2,j_3,j_4=0}^{p}C_{j_4j_3j_2j_1}\Bigl(\zeta_{j_1}\zeta_{j_3}\zeta_{j_4}\tilde{\zeta}_{j_2}-\mathbf{1}_{\{j_1=j_3\}}\zeta_{j_4}\tilde{\zeta}_{j_2}-$$

$$-\mathbf{1}_{\{j_1=j_4\}}\zeta_{j_3}\tilde{\zeta}_{j_2}-\mathbf{1}_{\{j_3=j_4\}}\zeta_{j_1}\tilde{\zeta}_{j_2}\Bigr),$$

где $\zeta_j^{(i_1)} = \zeta_j^{(i_3)} = \zeta_j^{(i_4)} = \zeta_j$, $\zeta_j^{(i_2)} = \tilde{\zeta}_j$;

$$\mathsf{M}\left\{\left(J[\psi^{(4)}]_{T,t}^p\right)^2\right\} = \sum_{j_2=0}^{p} \mathsf{M}\left\{\sum_{j_1,j_1',j_3,j_3',j_4,j_4'=0}^{p} C_{j_4j_3j_2j_1}C_{j_4'j_3'j_2j_1'}\zeta_{j_1}\zeta_{j_1'}\zeta_{j_3}\zeta_{j_3'}\zeta_{j_4}\zeta_{j_4'}\right\}-$$

$$-2\sum_{j_3',j_2=0}^{p} \mathsf{M}\left\{\sum_{j_1,j_3,j_4,j_4'=0}^{p} C_{j_4j_3j_2j_1}C_{j_4'j_3'j_2j_3'}\zeta_{j_1}\zeta_{j_3}\zeta_{j_4}\zeta_{j_4'}\right\}-$$

$$-2\sum_{j_2,j_4'=0}^{p} \mathsf{M}\left\{\sum_{j_1,j_3,j_4,j_3'=0}^{p} C_{j_4j_3j_2j_1}C_{j_4'j_3'j_2j_4'}\zeta_{j_1}\zeta_{j_3}\zeta_{j_4}\zeta_{j_3'}\right\}-$$

$$-2\sum_{j_4',j_2=0}^{p} \mathsf{M}\left\{\sum_{j_1,j_3,j_4,j_1'=0}^{p} C_{j_4j_3j_2j_1}C_{j_4'j_4'j_2j_1'}\zeta_{j_1}\zeta_{j_3}\zeta_{j_4}\zeta_{j_1'}\right\}+$$

$$+\sum_{j_1,j_2,j_3,j_4=0}^{p}\left(C_{j_4j_3j_2j_3}C_{j_4j_1j_2j_1}+C_{j_4j_3j_2j_4}C_{j_1j_3j_2j_1}+C_{j_4j_4j_2j_1}C_{j_3j_3j_2j_1}+\right.$$

$$\left.+2C_{j_4j_3j_2j_4}C_{j_3j_1j_2j_1}+2C_{j_4j_4j_2j_1}C_{j_1j_3j_2j_3}+2C_{j_4j_4j_2j_1}C_{j_3j_1j_2j_3}\right);$$

$$\mathsf{M}\left\{\sum_{j_1,j_1',j_3,j_3',j_4,j_4'=0}^{p} C_{j_4j_3j_2j_1}C_{j_4'j_3'j_2j_1'}\zeta_{j_1}\zeta_{j_1'}\zeta_{j_3}\zeta_{j_3'}\zeta_{j_4}\zeta_{j_4'}\right\} =$$

$$= 15\sum_{j_4=0}^{p} C_{j_4j_4j_2j_4}^2 + \sum_{j_4=0}^{p}\sum_{j_3=0}^{j_4-1}\sum_{j_1=0}^{j_3-1}\sum_{(j_1,j_1,j_3,j_3,j_4,j_4)} C_{(j_4j_3j_2j_1}C_{j_4j_3j_2j_1)}+$$

$$+3\sum_{j_4=0}^{p}\sum_{j_1=0}^{j_4-1}\sum_{(j_1,j_1,j_4,j_4,j_4,j_4)} C_{(j_4j_4j_2j_1}C_{j_4j_4j_2j_1)}+$$

$$+3\sum_{j_4=0}^{p}\sum_{j_1=0}^{j_4-1}\sum_{(j_1,j_1,j_1,j_1,j_4,j_4)} C_{(j_4j_1j_2j_1}C_{j_4j_1j_2j_1)};$$

$$\mathsf{M}\left\{\sum_{j_1,j_3,j_4,j_4'=0}^{p} C_{j_4j_3j_2j_1}C_{j_4'j_3'j_2j_3'}\zeta_{j_1}\zeta_{j_3}\zeta_{j_4}\zeta_{j_4'}\right\} =$$

$$= 3\sum_{j_4=0}^{p} C_{j_4j_4j_2j_4}C_{j_4j_3'j_2j_3'} + \sum_{j_4=0}^{p}\sum_{j_1=0}^{j_4-1}\sum_{(j_1,j_1,j_4,j_4)} C_{(j_4j_1j_2j_1}C_{j_4j_3'j_2j_3')};$$

$$\mathsf{M}\left\{\sum_{j_1,j_3,j_4,j_3'=0}^{p} C_{j_4j_3j_2j_1}C_{j_4'j_3'j_2j_4'}\zeta_{j_1}\zeta_{j_3}\zeta_{j_4}\zeta_{j_3'}\right\} =$$

$$= 3\sum_{j_4=0}^{p} C_{j_4j_4j_2j_4}C_{j_4'j_4j_2j_4'} + \sum_{j_4=0}^{p}\sum_{j_1=0}^{j_4-1}\sum_{(j_1,j_1,j_4,j_4)} C_{(j_4j_4j_2j_1}C_{j_4'j_1j_2j_4')};$$

$$\mathsf{M}\left\{\sum_{j_1,j_3,j_4,j_1'=0}^{p} C_{j_4j_3j_2j_1}C_{j_4'j_4'j_2j_1'}\zeta_{j_1}\zeta_{j_3}\zeta_{j_4}\zeta_{j_1'}\right\} =$$

$$= 3\sum_{j_4=0}^{p} C_{j_4j_4j_2j_4}C_{j_4'j_4'j_2j_4} + \sum_{j_4=0}^{p}\sum_{j_1=0}^{j_4-1}\sum_{(j_1,j_1,j_4,j_4)} C_{(j_4j_4j_2j_1}C_{j_4'j_4'j_2j_1)}.$$

Перейдем к последнему 11 частному случаю ($i_1 = i_2 = i_3 = i_4$). В этом случае, согласно теореме 5.1, имеем:

$$J[\psi^{(4)}]_{T,t}^{p} = \sum_{j_1,j_2,j_3,j_4=0}^{p} C_{j_4j_3j_2j_1}\Biggl(\prod_{l=1}^{4}\zeta_{j_l} - \mathbf{1}_{\{j_1=j_2\}}\zeta_{j_3}\zeta_{j_4} - \mathbf{1}_{\{j_1=j_3\}}\zeta_{j_2}\zeta_{j_4} -$$

$$-\mathbf{1}_{\{j_1=j_4\}}\zeta_{j_2}\zeta_{j_3} - \mathbf{1}_{\{j_2=j_3\}}\zeta_{j_1}\zeta_{j_4} - \mathbf{1}_{\{j_2=j_4\}}\zeta_{j_1}\zeta_{j_3} - \mathbf{1}_{\{j_3=j_4\}}\zeta_{j_1}\zeta_{j_2} +$$

$$+\mathbf{1}_{\{j_1=j_2\}}\mathbf{1}_{\{j_3=j_4\}} + \mathbf{1}_{\{j_1=j_3\}}\mathbf{1}_{\{j_2=j_4\}} + \mathbf{1}_{\{j_1=j_4\}}\mathbf{1}_{\{j_2=j_3\}}\Biggr), \qquad (6.29)$$

где $\zeta_j^{(i_1)} = \zeta_j^{(i_2)} = \zeta_j^{(i_3)} = \zeta_j^{(i_4)} = \zeta_j$.

В силу некоторой громоздкости мы не будем полностью изучать данный случай, а сделаем два замечания (принципиальной сложности при рассмотрении данного случая по сравнению с предыдущими очевидно нет).

Во-первых, в рамках рассматриваемого случая, при $\psi_1(s), \ldots, \psi_4(s) \equiv 1$, как уже отмечалось ранее, с в.1 справедлива формула:

$$J[\psi^{(4)}]_{T,t} = I_{0000_{T,t}}^{(i_1i_1i_1i_1)} = \frac{(T-t)^2}{24}\left(\left(\zeta_0^{(i_1)}\right)^4 - 6\left(\zeta_0^{(i_1)}\right)^2 + 3\right).$$

В более общем случае, когда $\psi_1(s), \ldots, \psi_4(s) \equiv (t-s)^l$; l — фиксированное натуральное число или ноль, с в. 1 также можем записать:

$$J[\psi^{(4)}]_{T,t} = I_{llll_{T,t}}^{(i_1i_1i_1i_1)} = \frac{(T-t)^2}{24}\left(\left(I_{l_{T,t}}^{(i_1)}\right)^4 - 6\left(I_{l_{T,t}}^{(i_1)}\right)^2 + 3\right),$$

$$J^*[\psi^{(4)}]_{T,t} = I_{llll_{T,t}}^{*(i_1i_1i_1i_1)} = \frac{(T-t)^2}{24}\left(I_{l_{T,t}}^{(i_1)}\right)^4,$$

$$I_{l_{T,t}}^{(i)} = \sum_{j=0}^{l} C_j\zeta_j^{(i_1)},$$

где в последней формуле предполагается, что разложение стохастического интеграла осуществляется с помощью полиномов Лежандра.

Во-вторых, основная трудность, которая встретится в данном случае, при вычислении $\mathsf{M}\left\{\left(J[\psi^{(4)}]_{T,t}^{p}-J[\psi^{(4)}]_{T,t}\right)^2\right\}$ или, согласно формуле (6.28), при вычислении $\mathsf{M}\left\{\left(J[\psi^{(4)}]_{T,t}^{p}\right)^2\right\}$, будет связана с вычислением следующего математического ожидания:

$$\mathsf{M}\left\{\sum_{j_1,j_1',j_2,j_2',j_3,j_3',j_4,j_4'=0}^{p} C_{j_4j_3j_2j_1}C_{j_4'j_3'j_2'j_1'}\zeta_{j_1}\zeta_{j_1'}\zeta_{j_2}\zeta_{j_2'}\zeta_{j_3}\zeta_{j_3'}\zeta_{j_4}\zeta_{j_4'}\right\}.$$

Согласно (6.19) при $k=8$ имеем:

$$\mathsf{M}\left\{\sum_{j_1,j_1',j_2,j_2',j_3,j_3',j_4,j_4'=0}^{p} C_{j_4j_3j_2j_1}C_{j_4'j_3'j_2'j_1'}\zeta_{j_1}\zeta_{j_1'}\zeta_{j_2}\zeta_{j_2'}\zeta_{j_3}\zeta_{j_3'}\zeta_{j_4}\zeta_{j_4'}\right\}=$$

$$=105\sum_{j_4=0}^{p}C_{j_4j_4j_4j_4}^2+15\sum_{j_4=0}^{p}\sum_{j_1=0}^{j_4-1}\sum_{(j_1,j_1,j_4,j_4,j_4,j_4,j_4,j_4)}C_{(j_4j_4j_4j_1}C_{j_4j_4j_4j_1)}+$$

$$+15\sum_{j_4=0}^{p}\sum_{j_1=0}^{j_4-1}\sum_{(j_1,j_1,j_1,j_1,j_1,j_1,j_4,j_4)}C_{(j_4j_1j_1j_1}C_{j_4j_1j_1j_1)}+$$

$$+9\sum_{j_4=0}^{p}\sum_{j_1=0}^{j_4-1}\sum_{(j_1,j_1,j_1,j_1,j_4,j_4,j_4,j_4)}C_{(j_4j_4j_1j_1}C_{j_4j_4j_1j_1)}+$$

$$+3\sum_{j_4=0}^{p}\sum_{j_2=0}^{j_4-1}\sum_{j_1=0}^{j_2-1}\sum_{(j_1,j_1,j_2,j_2,j_4,j_4,j_4,j_4)}C_{(j_4j_4j_2j_1}C_{j_4j_4j_2j_1)}+$$

$$+3\sum_{j_4=0}^{p}\sum_{j_2=0}^{j_4-1}\sum_{j_1=0}^{j_2-1}\sum_{(j_1,j_1,j_2,j_2,j_2,j_2,j_4,j_4)}C_{(j_4j_2j_2j_1}C_{j_4j_2j_2j_1)}+$$

$$+3\sum_{j_4=0}^{p}\sum_{j_3=0}^{j_4-1}\sum_{j_1=0}^{j_3-1}\sum_{(j_1,j_1,j_1,j_1,j_3,j_3,j_4,j_4)}C_{(j_4j_3j_1j_1}C_{j_4j_3j_1j_1)}+$$

$$+\sum_{j_4=0}^{p}\sum_{j_3=0}^{j_4-1}\sum_{j_2=0}^{j_3-1}\sum_{j_1=0}^{j_2-1}\sum_{(j_1,j_1,j_2,j_2,j_3,j_3,j_4,j_4)}C_{(j_4j_3j_2j_1}C_{j_4j_3j_2j_1)}.$$

По предложенной выше схеме можно методически повышая кратность k повторного стохастического интеграла Ито и, разделяя различные частные случаи, которые соответствуют различным сочетаниям индексов $i_1,\ldots,i_k=1,\ldots,m$ вычислять точно среднеквадратические погрешности аппроксимаций повторных стохастических интегралов, полученные в соответствии с теоремой 5.1.

6.3 Некоторые особенности вычисления среднеквадратической погрешности аппроксимации для систем полиномиальных и тригонометрических функций

Покажем на примере, что для случая тригонометрической системы функций аппроксимация на основе формулы (6.11) может быть усовершенствована таким образом, что ошибка $\mathsf{M}\left\{\left(J[\psi^{(2)}]_{T,t}^{q}-J[\psi^{(2)}]_{T,t}\right)^2\right\}$ $(i_1\neq i_2)$ окажется значительно меньше, чем правая часть (6.13).

Пусть в качестве системы функций $\{\phi_j(s)\}_{j=0}^{\infty}$ взята тригонометрическая система функций

$$\phi_j(s)=\frac{1}{\sqrt{T-t}}\begin{cases}1 & \text{при } j=0\\ \sqrt{2}\sin\frac{2\pi r(s-t)}{T-t} & \text{при } j=2r-1\\ \sqrt{2}\cos\frac{2\pi r(s-t)}{T-t} & \text{при } j=2r\end{cases}, \tag{6.30}$$

где $r=1,\ 2,\ldots$

Применяя (6.11) для системы функций (6.30) к повторному стохастическому интегралу Ито вида

$$I_{00_{T,t}}^{(i_2i_1)}=\int\limits_t^T\int\limits_t^s d\mathbf{f}_{\tau}^{(i_2)}d\mathbf{f}_s^{(i_1)},\ i_1,i_2=1,\ldots,m;\ i_1\neq i_2,$$

получаем

$$I_{00_{T,t}}^{(i_2i_1)}=\frac{1}{2}(T-t)\Biggl[\zeta_0^{(i_1)}\zeta_0^{(i_2)}+\frac{1}{\pi}\sum_{r=1}^{\infty}\frac{1}{r}\Biggl\{\zeta_{2r}^{(i_1)}\zeta_{2r-1}^{(i_2)}-\zeta_{2r-1}^{(i_1)}\zeta_{2r}^{(i_2)}+$$

$$+\sqrt{2}\left(\zeta_{2r-1}^{(i_1)}\zeta_0^{(i_2)}-\zeta_0^{(i_1)}\zeta_{2r-1}^{(i_2)}\right)\Biggr\}\Biggr], \tag{6.31}$$

где $\zeta_j^{(i)}\stackrel{\text{def}}{=}\int\limits_t^T\phi_j(s)d\mathbf{f}_s^{(i)}$; $\mathbf{f}_s^{(i)}$ $(i=1,\ldots,m)$ — независимые стандартные винеровские процессы. При этом ряд (6.31) сходится в среднеквадратическом смысле.

Согласно (6.11) следует записать

$$I_{00_{T,t}}^{(i_2i_1)q}=\frac{1}{2}(T-t)\Biggl[\zeta_0^{(i_1)}\zeta_0^{(i_2)}+\frac{1}{\pi}\sum_{r=1}^{q}\frac{1}{r}\Biggl\{\zeta_{2r}^{(i_1)}\zeta_{2r-1}^{(i_2)}-\zeta_{2r-1}^{(i_1)}\zeta_{2r}^{(i_2)}+$$

$$+\sqrt{2}\left(\zeta_{2r-1}^{(i_1)}\zeta_0^{(i_2)}-\zeta_0^{(i_1)}\zeta_{2r-1}^{(i_2)}\right)\Biggr\}\Biggr]. \tag{6.32}$$

Из (6.31) и (6.32) при $i_1 \neq i_2$ имеем

$$\mathsf{M}\left\{\left(I_{00_{T,t}}^{(i_2 i_1)} - I_{00_{T,t}}^{(i_2 i_1)q}\right)^2\right\} = \frac{3(T-t)^2}{2\pi^2}\left(\frac{\pi^2}{6} - \sum_{r=1}^{q}\frac{1}{r^2}\right). \qquad (6.33)$$

Нетрудно видеть, что правую часть (6.33) можно уменьшить в три раза, если вместо аппроксимации вида (6.32) взять следующую аппроксимацию [70]:

$$I_{00_{T,t}}^{(i_2 i_1)q} = \frac{1}{2}(T-t)\Bigg[\zeta_0^{(i_1)}\zeta_0^{(i_2)} + \frac{1}{\pi}\sum_{r=1}^{q}\frac{1}{r}\Bigg\{\zeta_{2r}^{(i_1)}\zeta_{2r-1}^{(i_2)} - \zeta_{2r-1}^{(i_1)}\zeta_{2r}^{(i_2)} +$$

$$+\sqrt{2}\left(\zeta_{2r-1}^{(i_1)}\zeta_0^{(i_2)} - \zeta_0^{(i_1)}\zeta_{2r-1}^{(i_2)}\right)\Bigg\} + \frac{\sqrt{2}}{\pi}\sqrt{\alpha_q}\left(\xi_q^{(i_1)}\zeta_0^{(i_2)} - \zeta_0^{(i_1)}\xi_q^{(i_2)}\right)\Bigg], \qquad (6.34)$$

где

$$\xi_q^{(i)} = \frac{1}{\sqrt{\alpha_q}}\sum_{r=q+1}^{\infty}\frac{1}{r}\,\zeta_{2r-1}^{(i)} \sim \mathrm{N}(0,1);\ \alpha_q = \frac{\pi^2}{6} - \sum_{r=1}^{q}\frac{1}{r^2}.$$

При этом гауссовские случайные величины $\zeta_0^{(i)}$, $\zeta_{2r}^{(i)}$, $\zeta_{2r-1}^{(i)}$, $\xi_q^{(i)}$; $r = 1,\ldots,q$; $i = 1,\ldots,m$ независимы в совокупности.

Из (6.31) и (6.34) при $i_1 \neq i_2$ получаем

$$\mathsf{M}\left\{\left(I_{00_{T,t}}^{(i_2 i_1)} - I_{00_{T,t}}^{(i_2 i_1)q}\right)^2\right\} = \frac{(T-t)^2}{2\pi^2}\left(\frac{\pi^2}{6} - \sum_{r=1}^{q}\frac{1}{r^2}\right), \qquad (6.35)$$

т. е. правая часть равенства (6.35) в три раза меньше, чем правая часть равенства (6.33).

Приведенный способ усовершенствования аппроксимаций повторных стохастических интегралов обобщен на случай интегралов третьей кратности в [86, 98]. По-видимому, при рассмотрении стохастических интегралов более высокой кратности, чем третья, нельзя предложить универсальный способ ввода дополнительных случайных величин так, как это сделано в (6.34). В результате в каждом случае приходится действовать индивидуально.

Этого не приходится однако делать при выборе в качестве системы функций $\{\phi_j(s)\}_{j=0}^{\infty}$ полной ортонормированной в пространстве $L_2([t,T])$ системы полиномов Лежандра.

6.4 Сильная аппроксимация повторных стохастических интегралов кратностей 1–5 с помощью теоремы 5.1 и полиномов Лежандра

Полная ортонормированная система полиномов Лежандра в пространстве $L_2([t,T])$ имеет вид

$$\{\phi_j(x)\}_{j=0}^{\infty},\ \phi_j(x)=\sqrt{\frac{2j+1}{T-t}}P_j\left(\left(x-\frac{T+t}{2}\right)\frac{2}{T-t}\right), \tag{6.36}$$

где $P_j(x)$ — полином Лежандра. Известно [129], что полином $P_j(x)$ представим, например, в виде

$$P_j(x)=\frac{1}{2^j j!}\frac{d^j}{dx^j}\left(x^2-1\right)^j.$$

Это выражение, как известно, называется формулой Родрига. Отметим некоторые хорошо известные свойства полиномов $P_j(x)$:

$$P_j(1)=1;\ P_{j+1}(-1)=-P_j(-1);\ j=0,\ 1,\ 2,\ \ldots,$$

$$\frac{dP_{j+1}(x)}{dx}-\frac{dP_{j-1}(x)}{dx}=(2j+1)P_j(x);\ j=1,\ 2,\ldots,$$

$$\int\limits_{-1}^{1}x^kP_j(x)dx=0;\ k=0,\ 1,\ 2,\ldots,j-1,$$

$$\int\limits_{-1}^{1}P_k(x)P_j(x)dx=\left\{\begin{array}{ll}0 & \text{при } k\neq j\\ \frac{2}{2j+1} & \text{при } k=j\end{array}\right.,$$

$$xP_j(x)=\frac{(j+1)P_{j+1}(x)+jP_{j-1}(x)}{2j+1};\ j=1,\ 2,\ldots,$$

$$P_n(x)P_m(x)=\sum_{k=0}^{m}K_{m,n,k}P_{n+m-2k}(x),$$

где

$$K_{m,n,k}=\frac{a_{m-k}a_ka_{n-k}}{a_{m+n-k}}\cdot\frac{2n+2m-4k+1}{2n+2m-2k+1};\ a_k=\frac{(2k-1)!!}{k!};\ m\leq n.$$

Учитывая эти свойства и используя систему функций (6.36), с использованием результатов главы 5, получаем следующие разложения повторных стохастических интегралов Ито и Стратоновича:

$$I_{0_{T,t}}^{(i_1)}=\sqrt{T-t}\zeta_0^{(i_1)}, \tag{6.37}$$

$$I_{1_{T,t}}^{(i_1)} = -\frac{(T-t)^{3/2}}{2}\left(\zeta_0^{(i_1)} + \frac{1}{\sqrt{3}}\zeta_1^{(i_1)}\right), \tag{6.38}$$

$$I_{2_{T,t}}^{(i_1)} = \frac{(T-t)^{5/2}}{3}\left(\zeta_0^{(i_1)} + \frac{\sqrt{3}}{2}\zeta_1^{(i_1)} + \frac{1}{2\sqrt{5}}\zeta_2^{(i_1)}\right), \tag{6.39}$$

$$I_{00_{T,t}}^{*(i_1 i_2)} = \frac{T-t}{2}\left[\zeta_0^{(i_1)}\zeta_0^{(i_2)} + \sum_{i=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{4i^2-1}}\left\{\zeta_{i-1}^{(i_1)}\zeta_i^{(i_2)} - \zeta_i^{(i_1)}\zeta_{i-1}^{(i_2)}\right\}\right], \tag{6.40}$$

$$I_{01_{T,t}}^{*(i_1 i_2)} = -\frac{T-t}{2}I_{00_{T,t}}^{*(i_1 i_2)} - \frac{(T-t)^2}{4}\Bigg[\frac{1}{\sqrt{3}}\zeta_0^{(i_1)}\zeta_1^{(i_2)} +$$
$$+\sum_{i=0}^{\infty}\left(\frac{(i+2)\zeta_i^{(i_1)}\zeta_{i+2}^{(i_2)} - (i+1)\zeta_{i+2}^{(i_1)}\zeta_i^{(i_2)}}{\sqrt{(2i+1)(2i+5)}(2i+3)} - \frac{\zeta_i^{(i_1)}\zeta_i^{(i_2)}}{(2i-1)(2i+3)}\right)\Bigg], \tag{6.41}$$

$$I_{10_{T,t}}^{*(i_1 i_2)} = -\frac{T-t}{2}I_{00_{T,t}}^{*(i_1 i_2)} - \frac{(T-t)^2}{4}\Bigg[\frac{1}{\sqrt{3}}\zeta_0^{(i_2)}\zeta_1^{(i_1)} +$$
$$+\sum_{i=0}^{\infty}\left(\frac{(i+1)\zeta_{i+2}^{(i_2)}\zeta_i^{(i_1)} - (i+2)\zeta_i^{(i_2)}\zeta_{i+2}^{(i_1)}}{\sqrt{(2i+1)(2i+5)}(2i+3)} + \frac{\zeta_i^{(i_1)}\zeta_i^{(i_2)}}{(2i-1)(2i+3)}\right)\Bigg], \tag{6.42}$$

$$I_{10_{T,t}}^{(i_1 i_2)} = I_{10_{T,t}}^{*(i_1 i_2)} + \frac{1}{4}\mathbf{1}_{\{i_1=i_2\}}(T-t)^2;\ I_{01_{T,t}}^{(i_1 i_2)} = I_{01_{T,t}}^{*(i_1 i_2)} + \frac{1}{4}\mathbf{1}_{\{i_1=i_2\}}(T-t)^2, \tag{6.43}$$

$$I_{000_{T,t}}^{*(i_1 i_2 i_3)} = -\frac{1}{T-t}\left(I_{0_{T,t}}^{(i_3)}I_{10_{T,t}}^{*(i_2 i_1)} + I_{0_{T,t}}^{(i_1)}I_{10_{T,t}}^{*(i_2 i_3)}\right) +$$
$$+\frac{1}{2}I_{0_{T,t}}^{(i_3)}\left(I_{00_{T,t}}^{*(i_1 i_2)} - I_{00_{T,t}}^{*(i_2 i_1)}\right) -$$
$$-(T-t)^{\frac{3}{2}}\Bigg[\frac{1}{6}\zeta_0^{(i_1)}\zeta_0^{(i_3)}\left(\zeta_0^{(i_2)} + \sqrt{3}\zeta_1^{(i_2)} - \frac{1}{\sqrt{5}}\zeta_2^{(i_2)}\right) +$$
$$+\frac{1}{4}D_{T,t}^{(i_1 i_2 i_3)}\Bigg], \tag{6.44}$$

$$I_{000_{T,t}}^{(i_1 i_2 i_3)} = I_{000_{T,t}}^{*(i_1 i_2 i_3)} + \mathbf{1}_{\{i_1=i_2\}}\frac{1}{2}I_{1_{T,t}}^{(i_3)} - \mathbf{1}_{\{i_2=i_3\}}\frac{1}{2}\left((T-t)I_{0_{T,t}}^{(i_1)} + I_{1_{T,t}}^{(i_1)}\right),$$

$$I_{02_{T,t}}^{*(i_1 i_2)} = -\frac{(T-t)^2}{4} I_{00_{T,t}}^{*(i_1 i_2)} - (T-t) I_{01_{T,t}}^{*(i_1 i_2)} + \frac{(T-t)^3}{8}\Biggl[\frac{2}{3\sqrt{5}}\zeta_2^{(i_2)}\zeta_0^{(i_1)} +$$

$$+\frac{1}{3}\zeta_0^{(i_1)}\zeta_0^{(i_2)} + \sum_{i=0}^{\infty}\Biggl(\frac{(i+2)(i+3)\zeta_{i+3}^{(i_2)}\zeta_i^{(i_1)} - (i+1)(i+2)\zeta_i^{(i_2)}\zeta_{i+3}^{(i_1)}}{\sqrt{(2i+1)(2i+7)}(2i+3)(2i+5)} +$$

$$+\frac{(i^2+i-3)\zeta_{i+1}^{(i_2)}\zeta_i^{(i_1)} - (i^2+3i-1)\zeta_i^{(i_2)}\zeta_{i+1}^{(i_1)}}{\sqrt{(2i+1)(2i+3)}(2i-1)(2i+5)}\Biggr)\Biggr], \qquad (6.45)$$

$$I_{20_{T,t}}^{*(i_1 i_2)} = -\frac{(T-t)^2}{4} I_{00_{T,t}}^{*(i_1 i_2)} - (T-t) I_{10_{T,t}}^{*(i_1 i_2)} + \frac{(T-t)^3}{8}\Biggl[\frac{2}{3\sqrt{5}}\zeta_0^{(i_2)}\zeta_2^{(i_1)} +$$

$$+\frac{1}{3}\zeta_0^{(i_1)}\zeta_0^{(i_2)} + \sum_{i=0}^{\infty}\Biggl(\frac{(i+1)(i+2)\zeta_{i+3}^{(i_2)}\zeta_i^{(i_1)} - (i+2)(i+3)\zeta_i^{(i_2)}\zeta_{i+3}^{(i_1)}}{\sqrt{(2i+1)(2i+7)}(2i+3)(2i+5)} +$$

$$+\frac{(i^2+3i-1)\zeta_{i+1}^{(i_2)}\zeta_i^{(i_1)} - (i^2+i-3)\zeta_i^{(i_2)}\zeta_{i+1}^{(i_1)}}{\sqrt{(2i+1)(2i+3)}(2i-1)(2i+5)}\Biggr)\Biggr], \qquad (6.46)$$

$$I_{11_{T,t}}^{*(i_1 i_2)} = -\frac{(T-t)^2}{4} I_{00_{T,t}}^{*(i_1 i_2)} - \frac{(T-t)}{2}\left(I_{10_{T,t}}^{*(i_1 i_2)} + I_{01_{T,t}}^{*(i_1 i_2)}\right) + \frac{(T-t)^3}{8}\Biggl[\frac{1}{3}\zeta_1^{(i_1)}\zeta_1^{(i_2)} +$$

$$+\sum_{i=0}^{\infty}\Biggl(\frac{(i+1)(i+3)\left(\zeta_{i+3}^{(i_2)}\zeta_i^{(i_1)} - \zeta_i^{(i_2)}\zeta_{i+3}^{(i_1)}\right)}{\sqrt{(2i+1)(2i+7)}(2i+3)(2i+5)} +$$

$$+\frac{(i+1)^2\left(\zeta_{i+1}^{(i_2)}\zeta_i^{(i_1)} - \zeta_i^{(i_2)}\zeta_{i+1}^{(i_1)}\right)}{\sqrt{(2i+1)(2i+3)}(2i-1)(2i+5)}\Biggr)\Biggr], \qquad (6.47)$$

$$I_{02_{T,t}}^{(i_1 i_2)} = I_{02_{T,t}}^{*(i_1 i_2)} - \frac{1}{6}\mathbf{1}_{\{i_1=i_2\}}(T-t)^3;\ I_{20_{T,t}}^{(i_1 i_2)} = I_{20_{T,t}}^{*(i_1 i_2)} - \frac{1}{6}\mathbf{1}_{\{i_1=i_2\}}(T-t)^3, \qquad (6.48)$$

$$I_{11_{T,t}}^{(i_1 i_2)} = I_{11_{T,t}}^{*(i_1 i_2)} - \frac{1}{6}\mathbf{1}_{\{i_1=i_2\}}(T-t)^3, \qquad (6.49)$$

$$I_{3_{T,t}}^{(i_1)} = -\frac{(T-t)^{7/2}}{4}\left(\zeta_0^{(i_1)} + \frac{3\sqrt{3}}{5}\zeta_1^{(i_1)} + \frac{1}{\sqrt{5}}\zeta_2^{(i_1)} + \frac{1}{5\sqrt{7}}\zeta_3^{(i_1)}\right), \qquad (6.50)$$

$$D_{T,t}^{(i_1 i_2 i_3)} = \sum_{\substack{i=1,j=0,k=i \\ 2i\geq k+i-j\geq -2;\ k+i-j\ -\ \text{четное}}}^{\infty} N_{ijk} K_{i+1,k+1,\frac{k+i-j}{2}+1} \zeta_i^{(i_1)} \zeta_j^{(i_2)} \zeta_k^{(i_3)} +$$

$$+ \sum_{\substack{i=1,j=0 \\ 2k\geq k+i-j\geq -2;\ k+i-j\ -\ \text{четное}}}^{\infty} \sum_{k=1}^{i-1} N_{ijk} K_{k+1,i+1,\frac{k+i-j}{2}+1} \zeta_i^{(i_1)} \zeta_j^{(i_2)} \zeta_k^{(i_3)} -$$

$$- \sum_{\substack{i=1,j=0,k=i+2 \\ 2i+2\geq k+i-j\geq 0;\ k+i-j\ -\ \text{четное}}}^{\infty} N_{ijk} K_{i+1,k-1,\frac{k+i-j}{2}} \zeta_i^{(i_1)} \zeta_j^{(i_2)} \zeta_k^{(i_3)} -$$

$$- \sum_{\substack{i=1,j=0 \\ 2k-2\geq k+i-j\geq 0;\ k+i-j\ -\ \text{четное}}}^{\infty} \sum_{k=1}^{i+1} N_{ijk} K_{k-1,i+1,\frac{k+i-j}{2}} \zeta_i^{(i_1)} \zeta_j^{(i_2)} \zeta_k^{(i_3)} -$$

$$- \sum_{\substack{i=1,j=0,k=i-2,k\geq 1 \\ 2i-2\geq k+i-j\geq 0;\ k+i-j\ -\ \text{четное}}}^{\infty} N_{ijk} K_{i-1,k+1,\frac{k+i-j}{2}} \zeta_i^{(i_1)} \zeta_j^{(i_2)} \zeta_k^{(i_3)} -$$

$$- \sum_{\substack{i=1,j=0 \\ 2k+2\geq k+i-j\geq 0;\ k+i-j\ -\ \text{четное}}}^{\infty} \sum_{k=1}^{i-3} N_{ijk} K_{k+1,i-1,\frac{k+i-j}{2}} \zeta_i^{(i_1)} \zeta_j^{(i_2)} \zeta_k^{(i_3)} +$$

$$+ \sum_{\substack{i=1,j=0,k=i \\ 2i\geq k+i-j\geq 2;\ k+i-j\ -\ \text{четное}}}^{\infty} N_{ijk} K_{i-1,k-1,\frac{k+i-j}{2}-1} \zeta_i^{(i_1)} \zeta_j^{(i_2)} \zeta_k^{(i_3)} +$$

$$+ \sum_{\substack{i=1,j=0 \\ 2k\geq k+i-j\geq 2;\ k+i-j\ -\ \text{четное}}}^{\infty} \sum_{k=1}^{i-1} N_{ijk} K_{k-1,i-1,\frac{k+i-j}{2}-1} \zeta_i^{(i_1)} \zeta_j^{(i_2)} \zeta_k^{(i_3)}, \qquad (6.51)$$

где

$$N_{ijk} = \sqrt{\frac{1}{(2k+1)(2j+1)(2i+1)}},$$

$$K_{m,n,k} = \frac{a_{m-k} a_k a_{n-k}}{a_{m+n-k}} \cdot \frac{2n+2m-4k+1}{2n+2m-2k+1};\ a_k = \frac{(2k-1)!!}{k!};\ m \leq n.$$

Рассмотрим аппроксимацию повторного стохастического интеграла $I_{00_{T,t}}^{*(i_1 i_2)}$, полученную из (6.40) путем замены ∞ на q.

Можно показать, что

$$\mathsf{M}\left\{\left(I_{00_{T,t}}^{*(i_1 i_2)} - I_{00_{T,t}}^{*(i_1 i_2)q}\right)^2\right\} = \frac{(T-t)^2}{2}\left(\frac{1}{2} - \sum_{i=1}^{q} \frac{1}{4i^2-1}\right). \qquad (6.52)$$

Далее, с использованием леммы 6.1 получаем

$$\mathsf{M}\left\{\left(I_{10_{T,t}}^{*(i_1i_2)}-I_{10_{T,t}}^{*(i_1i_2)q}\right)^2\right\}=\mathsf{M}\left\{\left(I_{01_{T,t}}^{*(i_1i_2)}-I_{01_{T,t}}^{*(i_1i_2)q}\right)^2\right\}=$$

$$=\frac{(T-t)^4}{16}\left(\frac{5}{9}-2\sum_{i=2}^{q}\frac{1}{4i^2-1}-\sum_{i=1}^{q}\frac{1}{(2i-1)^2(2i+3)^2}-\right.$$

$$\left.-\sum_{i=0}^{q}\frac{(i+2)^2+(i+1)^2}{(2i+1)(2i+5)(2i+3)^2}\right). \tag{6.53}$$

В формулах (6.52), (6.53) предполагалось $i_1\neq i_2$. Рассмотрим (6.41), (6.42) при $i_1=i_2$:

$$I_{01_{T,t}}^{*(i_1i_1)}=-\frac{(T-t)^2}{4}\left[\left(\zeta_0^{(i_1)}\right)^2+\frac{1}{\sqrt{3}}\zeta_0^{(i_1)}\zeta_1^{(i_1)}+\right.$$

$$\left.+\sum_{i=0}^{\infty}\left\{\frac{1}{\sqrt{(2i+1)(2i+5)}(2i+3)}\zeta_i^{(i_1)}\zeta_{i+2}^{(i_1)}-\frac{1}{(2i-1)(2i+3)}\left(\zeta_i^{(i_1)}\right)^2\right\}\right], \tag{6.54}$$

$$I_{10_{T,t}}^{*(i_1i_1)}=-\frac{(T-t)^2}{4}\left[\left(\zeta_0^{(i_1)}\right)^2+\frac{1}{\sqrt{3}}\zeta_0^{(i_1)}\zeta_1^{(i_1)}+\right.$$

$$\left.+\sum_{i=0}^{\infty}\left\{-\frac{1}{\sqrt{(2i+1)(2i+5)}(2i+3)}\zeta_i^{(i_1)}\zeta_{i+2}^{(i_1)}+\frac{1}{(2i-1)(2i+3)}\left(\zeta_i^{(i_1)}\right)^2\right\}\right], \tag{6.55}$$

откуда, с учетом (6.37) и (6.38), имеем:

$$I_{10_{T,t}}^{*(i_1i_1)}+I_{01_{T,t}}^{*(i_1i_1)}=-\frac{(T-t)^2}{2}\left(\left(\zeta_0^{(i_1)}\right)^2+\frac{1}{\sqrt{3}}\zeta_0^{(i_1)}\zeta_1^{(i_1)}\right)=I_{0_{T,t}}^{(i_1)}I_{1_{T,t}}^{(i_1)}\ \text{с в. 1.} \tag{6.56}$$

При получении (6.56) мы предполагали, что равенства (6.41), (6.42) выполняются с в. 1. Строгое обоснование этого факта будет приведено в дальнейшем в настоящей главе.

Отметим, что равенство (6.56) также нетрудно получить с помощью формулы Ито и формул связи повторных стохастических интегралов Ито и Стратоновича.

Прямое вычисление с помощью (6.54), (6.55) дает:

$$\mathsf{M}\left\{\left(I_{10_{T,t}}^{*(i_1i_1)}-I_{10_{T,t}}^{*(i_1i_1)q}\right)^2\right\}=\mathsf{M}\left\{\left(I_{01_{T,t}}^{*(i_1i_1)}-I_{01_{T,t}}^{*(i_1i_1)q}\right)^2\right\}=$$

$$= \frac{(T-t)^4}{16}\Biggl[\sum_{i=q+1}^{\infty}\frac{1}{(2i+1)(2i+5)(2i+3)^2}+\sum_{i=q+1}^{\infty}\frac{2}{(2i-1)^2(2i+3)^2}+$$

$$+\left(\sum_{i=q+1}^{\infty}\frac{1}{(2i-1)(2i+3)}\right)^2\Biggr],$$

где $I_{01_{T,t}}^{*(i_1i_1)q}$, $I_{10_{T,t}}^{*(i_1i_1)q}$ определяются из (6.54), (6.55) путем замены ∞ на q.

С другой стороны формула (6.22) дает возможность получить более удобные с точки зрения практики выражения, но уже для повторных стохастических интегралов Ито:

$$\mathsf{M}\left\{\left(I_{10_{T,t}}^{(i_1i_1)}-I_{10_{T,t}}^{(i_1i_1)q}\right)^2\right\}=\mathsf{M}\left\{\left(I_{01_{T,t}}^{(i_1i_1)}-I_{01_{T,t}}^{(i_1i_1)q}\right)^2\right\}=$$

$$=\frac{(T-t)^4}{16}\left(\frac{1}{9}-\sum_{i=0}^{q}\frac{1}{(2i+1)(2i+5)(2i+3)^2}-2\sum_{i=1}^{q}\frac{1}{(2i-1)^2(2i+3)^2}\right). \tag{6.57}$$

В таблицах 6.1 – 6.3 приведены расчеты по формулам (6.52), (6.53), (6.57) при различных значениях q. В указанных таблицах ε означает правые части этих формул.

Из (6.136) следует, что

$$I_{11_{T,t}}^{*(i_1i_1)}=\frac{\left(I_{1_{T,t}}^{(i_1)}\right)^2}{2}\ \text{с в. 1}. \tag{6.58}$$

Кроме того, с помощью формулы Ито или теоремы 3.1 имеем

$$I_{20_{T,t}}^{(i_1i_1)}+I_{02_{T,t}}^{(i_1i_1)}=I_{0_{T,t}}^{(i_1)}I_{2_{T,t}}^{(i_1)}-\frac{(T-t)^3}{3}\ \text{с в. 1},$$

откуда, с учетом формул (6.48), получаем:

$$I_{20_{T,t}}^{*(i_1i_1)}+I_{02_{T,t}}^{*(i_1i_1)}=I_{0_{T,t}}^{(i_1)}I_{2_{T,t}}^{(i_1)}\ \text{с в. 1}. \tag{6.59}$$

Проверим, следуют ли формулы (6.58), (6.59) из (6.45) – (6.47), если в последних положить $i_1=i_2$.

Из (6.45) – (6.47) при $i_1=i_2$ получаем:

$$I_{20_{T,t}}^{*(i_1i_1)}+I_{02_{T,t}}^{*(i_1i_1)}=-\frac{(T-t)^2}{2}I_{00_{T,t}}^{*(i_1i_1)}-(T-t)\left(I_{10_{T,t}}^{*(i_1i_1)}+I_{01_{T,t}}^{*(i_1i_1)}\right)+$$

$$+\frac{(T-t)^3}{4}\left(\frac{1}{3}\left(\zeta_0^{(i_1)}\right)^2+\frac{2}{3\sqrt{5}}\zeta_2^{(i_1)}\zeta_0^{(i_1)}\right), \tag{6.60}$$

$$I_{11_{T,t}}^{*(i_1 i_1)} = -\frac{(T-t)^2}{4} I_{00_{T,t}}^{*(i_1 i_1)} - \frac{T-t}{2}\left(I_{10_{T,t}}^{*(i_1 i_1)} + I_{01_{T,t}}^{*(i_1 i_1)}\right) +$$

$$+\frac{(T-t)^3}{24}\left(\zeta_1^{(i_1)}\right)^2. \qquad (6.61)$$

Нетрудно видеть, что из (6.60) и (6.61), с учетом (6.56) и (6.37) – (6.40), действительно получаются равенства (6.58) и (6.59), что косвенно подтверждает правильность формул (6.45) – (6.47).

На основе приведенных разложений повторных стохастических интегралов видно, что повышение кратностей этих интегралов или показателей степеней их весовых функций ведет к заметному усложнению формул для указанных разложений. Однако, увеличение упомянутых параметров приводит к увеличению порядков малости по $T-t$ в среднеквадратическом смысле для повторных стохастических интегралов, что в свою очередь ведет к резкому уменьшению количеств членов в разложениях повторных стохастических интегралов, требуемых для достижения приемлемых точностей аппроксимаций (см. условие (7.22)). Всвязи с этим рассмотрим подход к аппроксимации повторных стохастических интергралов, который позволяет получать среднеквадратические аппроксимации требуемой точности без использования общих разложений типа (6.44).

Рассмотрим следующую аппроксимацию:

$$I_{000_{T,t}}^{(i_1 i_2 i_3) q_1} = \sum_{i,j,k=0}^{q_1} C_{kji}\Bigl(\zeta_i^{(i_1)}\zeta_j^{(i_2)}\zeta_k^{(i_3)} -$$

$$-\mathbf{1}_{\{i_1=i_2\}}\mathbf{1}_{\{i=j\}}\zeta_k^{(i_3)} - \mathbf{1}_{\{i_2=i_3\}}\mathbf{1}_{\{j=k\}}\zeta_i^{(i_1)} - \mathbf{1}_{\{i_1=i_3\}}\mathbf{1}_{\{i=k\}}\zeta_j^{(i_2)}\Bigr), \qquad (6.62)$$

где $i_1, i_2, i_3 = 1, \ldots, m$ и

$$C_{kji} = \int\limits_t^T \phi_k(z) \int\limits_t^z \phi_j(y) \int\limits_t^y \phi_i(x)dxdydz =$$

$$= \frac{\sqrt{(2i+1)(2j+1)(2k+1)}}{8}(T-t)^{3/2}\bar{C}_{kji};$$

$$\bar{C}_{kji} = \int\limits_{-1}^1 P_k(z) \int\limits_{-1}^z P_j(y) \int\limits_{-1}^y P_i(x)dxdydz;$$

$P_i(x);\ i = 0,\ 1,\ 2, \ldots$ – полиномы Лежандра.

В частности, из (6.62) при $i_1 \neq i_2$, $i_2 \neq i_3$, $i_1 \neq i_3$ получаем:

$$I_{000_{T,t}}^{(i_1 i_2 i_3) q_1} = \sum_{i,j,k=0}^{q_1} C_{kji} \zeta_i^{(i_1)} \zeta_j^{(i_2)} \zeta_k^{(i_3)}. \tag{6.63}$$

Отметим, что в силу результатов раздела 5.6 правая часть формулы (6.63) определяет аппроксимацию $I_{000_{T,t}}^{*(i_1 i_2 i_3) q_1}$ повторного стохастического интеграла Стратоновича $I_{000_{T,t}}^{*(i_1 i_2 i_3)}$, но уже для произвольных $i_1, i_2, i_3 = 1, \ldots, m$.

Напомним, полученные в начале главы 6, формулы для среднеквадратических погрешностей аппроксимаций вида (6.62) при различных сочетаниях i_1, i_2, i_3 :

$$\mathsf{M}\left\{\left(I_{000_{T,t}}^{(i_1 i_2 i_3)} - I_{000_{T,t}}^{(i_1 i_2 i_3) q_1}\right)^2\right\} = \frac{(T-t)^3}{6} - \sum_{i,j,k=0}^{q_1} C_{kji}^2 \ (i_1 \neq i_2, i_1 \neq i_3, i_2 \neq i_3), \tag{6.64}$$

$$\mathsf{M}\left\{\left(I_{000_{T,t}}^{(i_1 i_2 i_3)} - I_{000_{T,t}}^{(i_1 i_2 i_3) q_1}\right)^2\right\} = \frac{(T-t)^3}{6} - \sum_{i,j,k=0}^{q_1} C_{kji}^2 -$$

$$- \sum_{i,j,k=0}^{q_1} C_{jki} C_{kji} \ (i_1 \neq i_2 = i_3), \tag{6.65}$$

$$\mathsf{M}\left\{\left(I_{000_{T,t}}^{(i_1 i_2 i_3)} - I_{000_{T,t}}^{(i_1 i_2 i_3) q_1}\right)^2\right\} = \frac{(T-t)^3}{6} - \sum_{i,j,k=0}^{q_1} C_{kji}^2 -$$

$$- \sum_{i,j,k=0}^{q_1} C_{kji} C_{ijk} \ (i_1 = i_3 \neq i_2), \tag{6.66}$$

$$\mathsf{M}\left\{\left(I_{000_{T,t}}^{(i_1 i_2 i_3)} - I_{000_{T,t}}^{(i_1 i_2 i_3) q_1}\right)^2\right\} = \frac{(T-t)^3}{6} - \sum_{i,j,k=0}^{q_1} C_{kji}^2 -$$

$$- \sum_{i,j,k=0}^{q_1} C_{kij} C_{kji} \ (i_1 = i_2 \neq i_3). \tag{6.67}$$

Для случая $i_1 = i_2 = i_3 = i$ удобно использовать следующие формулы:

$$I_{000_{T,t}}^{*(iii)} = \frac{1}{6}(T-t)^{\frac{3}{2}} \left(\zeta_0^{(i)}\right)^3, I_{000_{T,t}}^{(iii)} = \frac{1}{6}(T-t)^{\frac{3}{2}} \left(\left(\zeta_0^{(i)}\right)^3 - 3\zeta_0^{(i)}\right) \text{ с в. 1.} \tag{6.68}$$

В более общем случае, когда $\psi_1(s), \psi_2(s), \psi_3(s) \equiv (t-s)^l$; l — фиксированное натуральное число или ноль, с в. 1 можем записать:

$$I_{lll_{T,t}}^{(iii)} = \frac{1}{6}(T-t)^{\frac{3}{2}}\left(\left(I_{l_{T,t}}^{(i)}\right)^3 - 3I_{l_{T,t}}^{(i)}\right),$$

$$I_{lll_{T,t}}^{*(iii)} = \frac{1}{6}(T-t)^{\frac{3}{2}}\left(I_{l_{T,t}}^{(i)}\right)^3,\ I_{l_{T,t}}^{(i)} = \sum_{j=0}^{l} C_j\zeta_j^{(i)}.$$

Теперь становится понятно, что для аппроксимации стохастического интеграла $I_{000_{T,t}}^{(i_1i_2i_3)}$ можно использовать формулы (6.62) – (6.68) вместо сложного разложения (6.44). Также можно поступить и с более сложными повторными стохастическими интегралами. Например, для аппроксимации стохастического интеграла $I_{0000_{T,t}}^{(i_1i_2i_3i_4)}$, согласно теореме 5.1, можем записать:

$$I_{0000_{T,t}}^{(i_1i_2i_3i_4)q_2} = \sum_{i,j,k,l=0}^{q_2} C_{lkji}\Bigl(\zeta_i^{(i_1)}\zeta_j^{(i_2)}\zeta_k^{(i_3)}\zeta_l^{(i_4)} -$$

$$-\mathbf{1}_{\{i_1=i_2\}}\mathbf{1}_{\{i=j\}}\zeta_k^{(i_3)}\zeta_l^{(i_4)} - \mathbf{1}_{\{i_1=i_3\}}\mathbf{1}_{\{i=k\}}\zeta_j^{(i_2)}\zeta_l^{(i_4)} -$$

$$-\mathbf{1}_{\{i_1=i_4\}}\mathbf{1}_{\{i=l\}}\zeta_j^{(i_2)}\zeta_k^{(i_3)} - \mathbf{1}_{\{i_2=i_3\}}\mathbf{1}_{\{j=k\}}\zeta_i^{(i_1)}\zeta_l^{(i_4)} -$$

$$-\mathbf{1}_{\{i_2=i_4\}}\mathbf{1}_{\{j=l\}}\zeta_i^{(i_1)}\zeta_k^{(i_3)} - \mathbf{1}_{\{i_3=i_4\}}\mathbf{1}_{\{k=l\}}\zeta_i^{(i_1)}\zeta_j^{(i_2)} +$$

$$+\mathbf{1}_{\{i_1=i_2\}}\mathbf{1}_{\{i=j\}}\mathbf{1}_{\{i_3=i_4\}}\mathbf{1}_{\{k=l\}} + \mathbf{1}_{\{i_1=i_3\}}\mathbf{1}_{\{i=k\}}\mathbf{1}_{\{i_2=i_4\}}\mathbf{1}_{\{j=l\}} +$$

$$+\mathbf{1}_{\{i_1=i_4\}}\mathbf{1}_{\{i=l\}}\mathbf{1}_{\{j_2=j_3\}}\mathbf{1}_{\{j=k\}}\Bigr),$$

где

$$C_{lkji} = \int_t^T \phi_l(u)\int_t^u \phi_k(z)\int_t^z \phi_j(y)\int_t^y \phi_i(x)dxdydzdu =$$

$$= \frac{\sqrt{(2i+1)(2j+1)(2k+1)(2l+1)}}{16}(T-t)^2\bar{C}_{lkji};$$

$$\bar{C}_{lkji} = \int_{-1}^1 P_l(u)\int_{-1}^u P_k(z)\int_{-1}^z P_j(y)\int_{-1}^y P_i(x)dxdydzdu.$$

В разд. 6.2.6 получены точные формулы для среднеквадратической погрешности аппроксимации $\mathsf{M}\left\{\left(J[\psi^{(4)}]_{T,t}^{q_2} - J[\psi^{(4)}]_{T,t}\right)^2\right\}$ при различных сочетаниях индексов i_1, i_2, i_3, i_4. Полагая в этих формулах $\psi_1(\tau), \ldots, \psi_4(\tau) \equiv 1$, получим соответствующие формулы для

Таблица 6.1. Проверка формулы (6.52)

$2\varepsilon/(T-t)^2$	0.1667	0.0238	0.0025	$2.4988\cdot 10^{-4}$	$2.4999\cdot 10^{-5}$
q	1	10	100	1000	10000

Таблица 6.2. Проверка формулы (6.53)

$16\varepsilon/(T-t)^4$	0.3797	0.0581	0.0062	$6.2450\cdot 10^{-4}$	$6.2495\cdot 10^{-5}$
q	1	10	100	1000	10000

$\mathsf{M}\left\{\left(I_{0000_{T,t}}^{(i_1i_2i_3i_4)q_2}-I_{0000_{T,t}}^{(i_1i_2i_3i_4)}\right)^2\right\}$. Случай $i_1=\ldots=i_4=i$ в разд. 6.2.6 разобран неполностью, однако в этом случае существуют следующие представления:

$$I_{0000_{T,t}}^{(iiii)}=\frac{(T-t)^2}{24}\left(\left(\zeta_0^{(i)}\right)^4-6\left(\zeta_0^{(i)}\right)^2+3\right),\ I_{0000_{T,t}}^{*(iiii)}=\frac{(T-t)^2}{24}\left(\zeta_0^{(i)}\right)^4 \text{ с в. 1.}$$

В более общем случае, когда $\psi_1(\tau),\ldots,\psi_4(\tau)\equiv(t-\tau)^l$; l — фиксированное натуральное число или ноль, с в. 1 можем записать:

$$I_{llll_{T,t}}^{(iiii)}=\frac{(T-t)^2}{24}\left(\left(I_{l_{T,t}}^{(i)}\right)^4-6\left(I_{l_{T,t}}^{(i)}\right)^2+3\right),$$

$$I_{llll_{T,t}}^{*(iiii)}=\frac{(T-t)^2}{24}\left(I_{l_{T,t}}^{(i)}\right)^4,\ I_{l_{T,t}}^{(i)}=\sum_{j=0}^{l}C_j\zeta_j^{(i)}.$$

Положим $q_1=6$. В табл. 6.4–6.10 приведены точные значения коэффициентов $\bar{C}_{kji}$ при $i,j,k=0,1,\ldots,6$.

Вычисляя значение выражения (6.64) при $q_1=6$, $i_1\neq i_2$, $i_1\neq i_3$, $i_3\neq i_2$ получаем следующее приближенное равенство:

$$\mathsf{M}\left\{\left(I_{000_{T,t}}^{(i_1i_2i_3)}-I_{000_{T,t}}^{(i_1i_2i_3)q_1}\right)^2\right\}\approx 0.01956(T-t)^3.$$

Выберем, например, $q_2=2$. В табл. 6.11–6.19 приведены точные значения коэффициентов $\bar{C}_{lkji}$; $i,j,k,l=0,1,2$.

Таблица 6.3. Проверка формулы (6.57)

$16\varepsilon/(T-t)^4$	0.0070	$4.3551\cdot 10^{-5}$	$6.0076\cdot 10^{-8}$	$6.2251\cdot 10^{-11}$	$6.3178\cdot 10^{-14}$
q	1	10	100	1000	10000

Таблица 6.4. Коэффициенты $\bar{C}_{0jk}$

j^k	0	1	2	3	4	5	6
0	4/3	−2/3	2/15	0	0	0	0
1	0	2/15	−2/15	4/105	0	0	0
2	−4/15	2/15	2/105	−2/35	2/105	0	0
3	0	−2/35	2/35	2/315	−2/63	8/693	0
4	0	0	−8/315	2/63	2/693	−2/99	10/1287
5	0	0	0	−10/693	2/99	2/1287	−2/143
6	0	0	0	0	−4/429	2/143	2/2145

Таблица 6.5. Коэффициенты $\bar{C}_{1jk}$

j^k	0	1	2	3	4	5	6
0	2/3	−4/15	0	2/105	0	0	0
1	2/15	0	−4/105	0	2/315	0	0
2	−2/15	8/105	0	−2/105	0	4/1155	0
3	−2/35	0	8/315	0	−38/3465	0	20/9009
4	0	−4/315	0	46/3465	0	−64/9009	0
5	0	0	−4/693	0	74/9009	0	−32/6435
6	0	0	0	−10/3003	0	4/715	0

Таблица 6.6. Коэффициенты $\bar{C}_{2jk}$

j^k	0	1	2	3	4	5	6
0	2/15	0	−4/105	0	2/315	0	0
1	2/15	−4/105	0	−2/315	0	8/3465	0
2	2/105	0	0	0	−2/495	0	4/3003
3	−2/35	8/315	0	−2/3465	0	−116/45045	0
4	−8/315	0	4/495	0	−2/6435	0	−16/9009
5	0	−4/693	0	38/9009	0	−8/45045	0
6	0	0	−8/3003	0	−118/45045	0	−4/36465

Таблица 6.7. Коэффициенты $\bar{C}_{3jk}$

j^k	0	1	2	3	4	5	6
0	0	2/105	0	−4/315	0	2/693	0
1	4/105	0	−2/315	0	−8/3465	0	10/9009
2	2/35	−2/105	0	4/3465	0	−74/45045	0
3	2/315	0	−2/3465	0	16/45045	0	−10/9009
4	−2/63	46/3465	0	−32/45045	0	2/9009	0
5	−10/693	0	38/9009	0	−4/9009	0	122/765765
6	0	−10/3003	0	20/9009	0	−226/765765	0

Таблица 6.8. Коэффициенты $\bar{C}_{4jk}$

j^k	0	1	2	3	4	5	6
0	0	0	2/315	0	−4/693	0	2/1287
1	0	2/315	0	−8/3465	0	−10/9009	0
2	2/105	0	−2/495	0	4/6435	0	−38/45045
3	2/63	−38/3465	0	16/45045	0	2/9009	0
4	2/693	0	−2/6435	0	0	0	2/13923
5	−2/99	74/9009	0	−4/9009	0	−2/153153	0
6	−4/429	0	118/45045	0	−4/13923	0	−2/188955

Таблица 6.9. Коэффициенты $\bar{C}_{5jk}$

j^k	0	1	2	3	4	5	6
0	0	0	0	2/693	0	−4/1287	0
1	0	0	8/3465	0	−10/9009	0	−4/6435
2	0	4/1155	0	−74/45045	0	16/45045	0
3	8/693	0	−116/45045	0	2/9009	0	8/58905
4	2/99	−64/9009	0	2/9009	0	4/153153	0
5	2/1287	0	−8/45045	0	−2/153153	0	4/415701
6	−2/143	4/715	0	−226/765765	0	−8/415701	0

Таблица 6.10. Коэффициенты $\bar{C}_{6jk}$

j^k	0	1	2	3	4	5	6
0	0	0	0	0	2/1287	0	−4/2145
1	0	0	0	10/9009	0	−4/6435	0
2	0	0	4/3003	0	−38/45045	0	8/36465
3	0	20/9009	0	−10/9009	0	8/58905	0
4	10/1287	0	−16/9009	0	2/13923	0	4/188955
5	2/143	−32/6435	0	122/765765	0	4/415701	0
6	2/2145	0	−4/36465	0	−2/188955	0	0

Таблица 6.11. Коэффициенты $\bar{C}_{00kl}$

k^l	0	1	2
0	2/3	−2/5	2/15
1	−2/15	2/15	−2/21
2	−2/15	2/35	2/105

Таблица 6.12. Коэффициенты $\bar{C}_{10kl}$

$k \backslash l$	0	1	2
0	$2/5$	$-2/9$	$2/35$
1	$-2/45$	$2/35$	$-2/45$
2	$-2/21$	$2/45$	$2/315$

Таблица 6.13. Коэффициенты $\bar{C}_{02kl}$

$k \backslash l$	0	1	2
0	$-2/15$	$2/21$	$-4/105$
1	$2/35$	$-4/105$	$2/105$
2	$4/105$	$-2/105$	0

Таблица 6.14. Коэффициенты $\bar{C}_{01kl}$

$k \backslash l$	0	1	2
0	$2/15$	$-2/45$	$-2/105$
1	$2/45$	$-2/105$	$2/315$
2	$-2/35$	$2/63$	$-2/315$

Таблица 6.15. Коэффициенты $\bar{C}_{11kl}$

$k \backslash l$	0	1	2
0	$2/15$	$-2/35$	0
1	$2/105$	0	$-2/315$
2	$-4/105$	$2/105$	0

Таблица 6.16. Коэффициенты $\bar{C}_{20kl}$

$k \backslash l$	0	1	2
0	$2/15$	$-2/35$	0
1	$2/105$	0	$-2/315$
2	$-4/105$	$2/105$	0

Таблица 6.17. Коэффициенты $\bar{C}_{21kl}$

$k \backslash l$	0	1	2
0	$2/21$	$-2/45$	$2/315$
1	$2/315$	$2/315$	$-2/225$
2	$-2/105$	$2/225$	$2/1155$

Таблица 6.18. Коэффициенты $\bar{C}_{12kl}$

$k \backslash l$	0	1	2
0	$-2/35$	$2/45$	$-2/105$
1	$2/63$	$-2/105$	$2/225$
2	$2/105$	$-2/225$	$-2/3465$

При попарно различных i_1, i_2, i_3, i_4 имеем следующее равенство:

$$\mathsf{M}\left\{\left(I_{0000_{T,t}}^{(i_1 i_2 i_3 i_4)} - I_{0000_{T,t}}^{(i_1 i_2 i_3 i_4) q_2}\right)^2\right\} = \frac{(T-t)^4}{24} - \sum_{i,j,k,l=0}^{2} C_{lkji}^2. \tag{6.69}$$

Вычисляя по значениям, приведенным в табл. 6.11–6.19, правую часть (6.69), получаем

$$\mathsf{M}\left\{\left(I_{0000_{T,t}}^{(i_1 i_2 i_3 i_4)} - I_{0000_{T,t}}^{(i_1 i_2 i_3 i_4) q_2}\right)^2\right\} \approx 0.0236084(T-t)^4.$$

Пример 6.1. *Проверить справедливость следующих равенств:*

$$\sum_{j=0}^{\infty} C_{jj}^{10} = \sum_{j=0}^{\infty} C_{jj}^{01} = -\frac{(T-t)^2}{4}, \tag{6.70}$$

$$\sum_{j=0}^{\infty} C_{jj}^{20} = \sum_{j=0}^{\infty} C_{jj}^{11} = \sum_{j=0}^{\infty} C_{jj}^{02} = \frac{(T-t)^3}{6}, \tag{6.71}$$

где

$$C_{jj}^{10} = \int_t^T \phi_j(x) \int_t^x \phi_j(y)(t-y)dydx,$$

$$C_{jj}^{01} = \int_t^T \phi_j(x)(t-x) \int_t^x \phi_j(y)dydx,$$

$$C_{jj}^{11} = \int_t^T \phi_j(x)(t-x) \int_t^x \phi_j(y)(t-y)dydx,$$

$$C_{jj}^{20} = \int_t^T \phi_j(x) \int_t^x \phi_j(y)(t-y)^2 dydx,$$

$$C_{jj}^{02} = \int_t^T \phi_j(x)(t-x)^2 \int_t^x \phi_j(y)dydx,$$

$\{\phi_j(x)\}_{j=0}^{\infty}$ — полная ортонормированная в пространстве $L_2([t,T])$ система полиномов Лежандра.

Заметим, что равенства (6.70) и (6.71) вместе с теоремой 5.1 при $k = 2$ и формулами (6.43), (6.48), (6.49) подтверждают формулу (5.49) для повторных стохастических интегралов Стратоновича $I_{10_{T,t}}^{*(i_1 i_2)}$, $I_{01_{T,t}}^{*(i_1 i_2)}$, $I_{20_{T,t}}^{*(i_1 i_2)}$, $I_{11_{T,t}}^{*(i_1 i_2)}$, $I_{02_{T,t}}^{*(i_1 i_2)}$; $i_1, i_2 = 1, \ldots, m$.

Рассмотрим аппроксимации еще четырех повторных стохастических интегралов Ито:

$$I_{001_{T,t}}^{(i_1 i_2 i_3) q_3} = \sum_{i,j,k=0}^{q_3} C_{kji}^{001} \Bigl(\zeta_i^{(i_1)} \zeta_j^{(i_2)} \zeta_k^{(i_3)} -$$

$$-\mathbf{1}_{\{i_1=i_2\}} \mathbf{1}_{\{i=j\}} \zeta_k^{(i_3)} - \mathbf{1}_{\{i_2=i_3\}} \mathbf{1}_{\{j=k\}} \zeta_i^{(i_1)} - \mathbf{1}_{\{i_1=i_3\}} \mathbf{1}_{\{i=k\}} \zeta_j^{(i_2)} \Bigr),$$

$$I_{010_{T,t}}^{(i_1 i_2 i_3) q_4} = \sum_{i,j,k=0}^{q_4} C_{kji}^{010} \Bigl(\zeta_i^{(i_1)} \zeta_j^{(i_2)} \zeta_k^{(i_3)} -$$

$$-\mathbf{1}_{\{i_1=i_2\}} \mathbf{1}_{\{i=j\}} \zeta_k^{(i_3)} - \mathbf{1}_{\{i_2=i_3\}} \mathbf{1}_{\{j=k\}} \zeta_i^{(i_1)} - \mathbf{1}_{\{i_1=i_3\}} \mathbf{1}_{\{i=k\}} \zeta_j^{(i_2)} \Bigr),$$

$$I_{100_{T,t}}^{(i_1 i_2 i_3) q_5} = \sum_{i,j,k=0}^{q_5} C_{kji}^{100} \Bigl(\zeta_i^{(i_1)} \zeta_j^{(i_2)} \zeta_k^{(i_3)} -$$

$$-\mathbf{1}_{\{i_1=i_2\}} \mathbf{1}_{\{i=j\}} \zeta_k^{(i_3)} - \mathbf{1}_{\{i_2=i_3\}} \mathbf{1}_{\{j=k\}} \zeta_i^{(i_1)} - \mathbf{1}_{\{i_1=i_3\}} \mathbf{1}_{\{i=k\}} \zeta_j^{(i_2)} \Bigr),$$

$$I_{00000_{T,t}}^{(i_1 i_2 i_3 i_4 i_5) q_6} = \sum_{i,j,k,l,r=0}^{q_6} C_{rlkji} \Bigl(\zeta_r^{(i_5)} \zeta_l^{(i_4)} \zeta_k^{(i_3)} \zeta_j^{(i_2)} \zeta_i^{(i_1)} -$$

$$-\mathbf{1}_{\{i_1=i_2\}} \mathbf{1}_{\{i=j\}} \zeta_k^{(i_3)} \zeta_l^{(i_4)} \zeta_r^{(i_5)} - \mathbf{1}_{\{i_1=i_3\}} \mathbf{1}_{\{i=k\}} \zeta_j^{(i_2)} \zeta_l^{(i_4)} \zeta_r^{(i_5)} -$$

$$-\mathbf{1}_{\{i_1=i_4\}} \mathbf{1}_{\{i=l\}} \zeta_j^{(i_2)} \zeta_k^{(i_3)} \zeta_r^{(i_5)} - \mathbf{1}_{\{i_1=i_5\}} \mathbf{1}_{\{i=r\}} \zeta_j^{(i_2)} \zeta_k^{(i_3)} \zeta_l^{(i_4)} -$$

$$-\mathbf{1}_{\{i_2=i_3\}} \mathbf{1}_{\{j=k\}} \zeta_i^{(i_1)} \zeta_l^{(i_4)} \zeta_r^{(i_5)} - \mathbf{1}_{\{i_2=i_4\}} \mathbf{1}_{\{j=l\}} \zeta_i^{(i_1)} \zeta_k^{(i_3)} \zeta_r^{(i_5)} -$$

$$-\mathbf{1}_{\{i_2=i_5\}} \mathbf{1}_{\{j=r\}} \zeta_i^{(i_1)} \zeta_k^{(i_3)} \zeta_l^{(i_4)} - \mathbf{1}_{\{i_3=i_4\}} \mathbf{1}_{\{k=l\}} \zeta_i^{(i_1)} \zeta_j^{(i_2)} \zeta_r^{(i_5)} -$$

$$-\mathbf{1}_{\{i_3=i_5\}} \mathbf{1}_{\{k=r\}} \zeta_i^{(i_1)} \zeta_j^{(i_2)} \zeta_l^{(i_4)} - \mathbf{1}_{\{i_4=i_5\}} \mathbf{1}_{\{l=r\}} \zeta_i^{(i_1)} \zeta_j^{(i_2)} \zeta_k^{(i_3)} +$$

$$+\mathbf{1}_{\{i_1=i_2\}} \mathbf{1}_{\{i=j\}} \mathbf{1}_{\{i_3=i_4\}} \mathbf{1}_{\{k=l\}} \zeta_r^{(i_5)} + \mathbf{1}_{\{i_1=i_2\}} \mathbf{1}_{\{i=j\}} \mathbf{1}_{\{i_3=i_5\}} \mathbf{1}_{\{k=r\}} \zeta_l^{(i_4)} +$$

$$+\mathbf{1}_{\{i_1=i_2\}}\mathbf{1}_{\{i=j\}}\mathbf{1}_{\{i_4=i_5\}}\mathbf{1}_{\{l=r\}}\zeta_k^{(i_3)}+\mathbf{1}_{\{i_1=i_3\}}\mathbf{1}_{\{i=k\}}\mathbf{1}_{\{i_2=i_4\}}\mathbf{1}_{\{j=l\}}\zeta_r^{(i_5)}+$$
$$+\mathbf{1}_{\{i_1=i_3\}}\mathbf{1}_{\{i=k\}}\mathbf{1}_{\{i_2=i_5\}}\mathbf{1}_{\{j=r\}}\zeta_l^{(i_4)}+\mathbf{1}_{\{i_1=i_3\}}\mathbf{1}_{\{i=k\}}\mathbf{1}_{\{i_4=i_5\}}\mathbf{1}_{\{l=r\}}\zeta_j^{(i_2)}+$$
$$+\mathbf{1}_{\{i_1=i_4\}}\mathbf{1}_{\{i=l\}}\mathbf{1}_{\{i_2=i_3\}}\mathbf{1}_{\{j=k\}}\zeta_r^{(i_5)}+\mathbf{1}_{\{i_1=i_4\}}\mathbf{1}_{\{i=l\}}\mathbf{1}_{\{i_2=i_5\}}\mathbf{1}_{\{j=r\}}\zeta_k^{(i_3)}+$$
$$+\mathbf{1}_{\{i_1=i_4\}}\mathbf{1}_{\{i=l\}}\mathbf{1}_{\{i_3=i_5\}}\mathbf{1}_{\{k=r\}}\zeta_j^{(i_2)}+\mathbf{1}_{\{i_1=i_5\}}\mathbf{1}_{\{i=r\}}\mathbf{1}_{\{i_2=i_3\}}\mathbf{1}_{\{j=k\}}\zeta_l^{(i_4)}+$$
$$+\mathbf{1}_{\{i_1=i_5\}}\mathbf{1}_{\{i=r\}}\mathbf{1}_{\{i_2=i_4\}}\mathbf{1}_{\{j=l\}}\zeta_k^{(i_3)}+\mathbf{1}_{\{i_1=i_5\}}\mathbf{1}_{\{i=r\}}\mathbf{1}_{\{i_3=i_4\}}\mathbf{1}_{\{k=l\}}\zeta_j^{(i_2)}+$$
$$+\mathbf{1}_{\{i_2=i_3\}}\mathbf{1}_{\{j=k\}}\mathbf{1}_{\{i_4=i_5\}}\mathbf{1}_{\{l=r\}}\zeta_i^{(i_1)}+\mathbf{1}_{\{i_2=i_4\}}\mathbf{1}_{\{j=l\}}\mathbf{1}_{\{i_3=i_5\}}\mathbf{1}_{\{k=r\}}\zeta_i^{(i_1)}+$$
$$\left.+\mathbf{1}_{\{i_2=i_5\}}\mathbf{1}_{\{j=r\}}\mathbf{1}_{\{i_3=i_4\}}\mathbf{1}_{\{k=l\}}\zeta_i^{(i_1)}\right),$$

где

$$C_{kji}^{001}=\int\limits_t^T(t-z)\phi_k(z)\int\limits_t^z\phi_j(y)\int\limits_t^y\phi_i(x)dxdydz=$$
$$=\frac{\sqrt{(2i+1)(2j+1)(2k+1)}}{16}(T-t)^{\frac{5}{2}}\bar{C}_{kji}^{001};$$
$$C_{kji}^{010}=\int\limits_t^T\phi_k(z)\int\limits_t^z(t-y)\phi_j(y)\int\limits_t^y\phi_i(x)dxdydz=$$
$$=\frac{\sqrt{(2i+1)(2j+1)(2k+1)}}{16}(T-t)^{\frac{5}{2}}\bar{C}_{kji}^{010};$$
$$C_{kji}^{100}=\int\limits_t^T\phi_k(z)\int\limits_t^z\phi_j(y)\int\limits_t^y(t-x)\phi_i(x)dxdydz=$$
$$=\frac{\sqrt{(2i+1)(2j+1)(2k+1)}}{16}(T-t)^{\frac{5}{2}}\bar{C}_{kji}^{100};$$
$$C_{rlkji}=\int\limits_t^T\phi_r(v)\int\limits_t^v\phi_l(u)\int\limits_t^u\phi_k(z)\int\limits_t^z\phi_j(y)\int\limits_t^y\phi_i(x)dxdydzdudv=$$
$$=\frac{\sqrt{(2i+1)(2j+1)(2k+1)(2l+1)(2r+1)}}{32}(T-t)^{\frac{5}{2}}\bar{C}_{rlkji},$$

где

$$\bar{C}_{kji}^{100}=-\int\limits_{-1}^1P_k(z)\int\limits_{-1}^zP_j(y)\int\limits_{-1}^yP_i(x)(x+1)dxdydz;$$
$$\bar{C}_{kji}^{010}=-\int\limits_{-1}^1P_k(z)\int\limits_{-1}^zP_j(y)(y+1)\int\limits_{-1}^yP_i(x)dxdydz;$$

Таблица 6.19. Коэффициенты $\bar{C}_{22kl}$

$k \backslash l$	0	1	2
0	2/105	−2/315	0
1	2/315	0	−2/1155
2	0	2/3465	0

Таблица 6.20. Коэффициенты $\bar{C}_{0jk}^{001}$

$j \backslash k$	0	1	2
0	−2	14/15	−2/15
1	−2/15	−2/15	6/35
2	2/5	−22/105	−2/105

$$\bar{C}_{kji}^{001} = -\int\limits_{-1}^{1} P_k(z)(z+1)\int\limits_{-1}^{z} P_j(y)\int\limits_{-1}^{y} P_i(x)dxdydz;$$

$$\bar{C}_{rlkji} = \int\limits_{-1}^{1} P_r(v)\int\limits_{-1}^{v} P_l(u)\int\limits_{-1}^{u} P_k(z)\int\limits_{-1}^{z} P_j(y)\int\limits_{-1}^{y} P_i(x)dxdydzdudv.$$

Пусть $q_3 = q_4 = q_5 = 2$, $q_6 = 1$. В табл. 6.20–6.36 приведены точные значения коэффициентов $\bar{C}_{kji}^{001}$, $\bar{C}_{kji}^{010}$, $\bar{C}_{kji}^{001}$; $i, j, k = 0, 1, 2$; $\bar{C}_{rlkji}$; $i, j, k, l, r = 0, 1$.

В случае попарно различных $i_1, \ldots, i_5$ из табл. 6.20–6.36 имеем

$$\mathsf{M}\left\{\left(I_{100_{T,t}}^{(i_1 i_2 i_3)} - I_{100_{T,t}}^{(i_1 i_2 i_3) q_3}\right)^2\right\} = \frac{(T-t)^5}{60} - \sum_{i,j,k=0}^{q_3}\left(C_{kji}^{100}\right)^2 \approx$$

$$\approx 0.00815429(T-t)^5,$$

$$\mathsf{M}\left\{\left(I_{010_{T,t}}^{(i_1 i_2 i_3)} - I_{010_{T,t}}^{(i_1 i_2 i_3) q_4}\right)^2\right\} = \frac{(T-t)^5}{20} - \sum_{i,j,k=0}^{q_4}\left(C_{kji}^{010}\right)^2 \approx$$

$$\approx 0.0173903(T-t)^5,$$

Таблица 6.21. Коэффициенты $\bar{C}_{1jk}^{001}$

$j \backslash k$	0	1	2
0	−6/5	22/45	−2/105
1	−2/9	−2/105	26/315
2	22/105	−38/315	−2/315

Таблица 6.22. Коэффициенты $\bar{C}^{001}_{2jk}$

j^k	0	1	2
0	$-2/5$	$2/21$	$4/105$
1	$-22/105$	$4/105$	$2/105$
2	0	$-2/105$	0

Таблица 6.23. Коэффициенты $\bar{C}^{100}_{0jk}$

j^k	0	1	2
0	$-2/3$	$2/15$	$2/15$
1	$-2/15$	$-2/45$	$2/35$
2	$2/15$	$-2/35$	$-4/105$

Таблица 6.24. Коэффициенты $\bar{C}^{100}_{1jk}$

j^k	0	1	2
0	$-2/5$	$2/45$	$2/21$
1	$-2/15$	$-2/105$	$4/105$
2	$2/35$	$-2/63$	$-2/105$

Таблица 6.25. Коэффициенты $\bar{C}^{100}_{2jk}$

j^k	0	1	2
0	$-2/15$	$-2/105$	$4/105$
1	$-2/21$	$-2/315$	$2/105$
2	$-2/105$	$-2/315$	0

Таблица 6.26. Коэффициенты $\bar{C}^{010}_{0jk}$

j^k	0	1	2
0	$-4/3$	$8/15$	0
1	$-4/15$	0	$8/105$
2	$4/15$	$-16/105$	0

Таблица 6.27. Коэффициенты $\bar{C}^{010}_{1jk}$

j^k	0	1	2
0	$-4/5$	$4/15$	$4/105$
1	$-4/15$	$4/105$	$4/105$
2	$4/35$	$-8/105$	0

Таблица 6.28. Коэффициенты $\bar{C}_{2jk}^{010}$

j^k	0	1	2
0	$-4/15$	$4/105$	$4/105$
1	$-4/21$	$4/105$	$4/315$
2	$-4/105$	0	0

Таблица 6.29. Коэффициенты $\bar{C}_{000lr}$

l^r	0	1
0	$4/15$	$-8/45$
1	$-4/45$	$8/105$

Таблица 6.30. Коэффициенты $\bar{C}_{010lr}$

l^r	0	1
0	$4/45$	$-16/315$
1	$-4/315$	$4/315$

Таблица 6.31. Коэффициенты $\bar{C}_{110lr}$

l^r	0	1
0	$8/105$	$-2/45$
1	$-4/315$	$4/315$

Таблица 6.32. Коэффициенты $\bar{C}_{011lr}$

l^r	0	1
0	$8/315$	$-4/315$
1	0	$2/945$

Таблица 6.33. Коэффициенты $\bar{C}_{001lr}$

l^r	0	1
0	0	$4/315$
1	$8/315$	$-2/105$

Таблица 6.34. Коэффициенты $\bar{C}_{100lr}$

l^r	0	1
0	$8/45$	$-4/35$
1	$-16/315$	$2/45$

Таблица 6.35. Коэффициенты $\bar{C}_{101lr}$

l^r	0	1
0	4/315	0
1	4/315	−8/945

Таблица 6.36. Коэффициенты $\bar{C}_{111lr}$

l^r	0	1
0	2/105	−8/945
1	2/945	0

$$\mathsf{M}\left\{\left(I_{001_{T,t}}^{(i_1i_2i_3)}-I_{001_{T,t}}^{(i_1i_2i_3)q_5}\right)^2\right\}=\frac{(T-t)^5}{10}-\sum_{i,j,k=0}^{q_5}\left(C_{kji}^{001}\right)^2\approx$$
$$\approx 0.0252801(T-t)^5,$$

$$\mathsf{M}\left\{\left(I_{00000_{T,t}}^{(i_1i_2i_3i_4i_5)}-I_{00000_{T,t}}^{(i_1i_2i_3i_4i_5)q_6}\right)^2\right\}=\frac{(T-t)^5}{120}-\sum_{i,j,k,l,r=0}^{q_6}C_{rlkji}^2\approx$$
$$\approx 0.00759105(T-t)^5.$$

6.5 О коэффициентах Фурье–Лежандра

Как следует из результатов главы 5, основная по трудоемкости работа при построении аппроксимаций повторных стохастических интегралов связана с вычислением коэффициентов

$$C_{j_k\ldots j_1}=\int\limits_{[t,T]^k}K(t_1,\ldots,t_k)\prod_{l=1}^{k}\phi_{j_l}(t_l)dt_1\ldots dt_k; \tag{6.72}$$

$$K(t_1,\ldots,t_k)=\begin{cases}\prod\limits_{l=1}^{k}\psi_l(t_l)\prod\limits_{l=1}^{k-1}\mathbf{1}_{\{t_l<t_{l+1}\}} & \text{при } k\geq 2\\ \psi_1(t_1) & \text{при } k=1\end{cases},$$

здесь $(t_1,\ldots,t_k)\in[t,T]^k$; $\{\phi_j(x)\}_{j=0}^{\infty}$ — полная ортонормированная система функций в пространстве $L_2([t,T])$.

Цель данного раздела — выявить некоторые особенности вычисления коэффициентов Фурье $C_{j_k\ldots j_1}$ (k — произвольное) разложений

повторных стохастических интегралов из стохастических разложений Тейлора–Ито и Тейлора–Стратоновича при использовании системы полиномов Лежандра.

Для классических разложений в (6.72) надо положить $\psi_1(s), \ldots, \psi_k(s) \equiv 1$, а для унифицированных — $\psi_q(s) = (t-s)^{l_q}$; $q = 1, \ldots, k$; $l_q = 0,\ 1,\ 2, \ldots$.

Таким образом мы будем вычислять интегралы

$$\bar{C}_{j_k \ldots j_1} = \int\limits_t^T \phi_{j_k}(t_k) \int\limits_t^{t_k} \phi_{j_{k-1}}(t_{k-1}) \ldots \int\limits_t^{t_2} \phi_{j_1}(t_1) dt_1 \ldots dt_{k-1} dt_k;$$

$$\hat{C}_{j_k \ldots j_1}^{l_1 \ldots l_k} = \int\limits_t^T (t-t_k)^{l_k} \phi_{j_k}(t_k) \ldots \int\limits_t^{t_2} (t-t_1)^{l_1} \phi_{j_1}(t_1) dt_1 \ldots dt_k,$$

где $\{\phi_j(x)\}_{j=0}^{\infty}$ — полная ортонормированная система полиномов Лежандра в пространстве $L_2([t,T])$.

Имеем

$$\bar{C}_{j_k \ldots j_1} = \frac{(T-t)^{\frac{k}{2}}}{2^k} \prod_{l=1}^{k} \sqrt{2j_l+1} \cdot A_{j_k \ldots j_1},$$

где

$$A_{j_k \ldots j_1} = \int\limits_{-1}^{1} P_{j_k}(t_k) \int\limits_{-1}^{t_k} P_{j_{k-1}}(t_{k-1}) \ldots \int\limits_{-1}^{t_2} P_{j_1}(t_1) dt_1 \ldots dt_{k-1} dt_k; \tag{6.73}$$

$\{P_n(x)\}_{n=0}^{\infty}$ — полная ортонормированная система полиномов Лежандра в пространстве $L_2([-1,1])$:

$$P_n(x) = \frac{1}{2^n} \sum_{q=0}^{[\frac{n}{2}]} \frac{(-1)^q (2n-2q)!}{q!(n-q)!(n-2q)!} x^{n-2q}. \tag{6.74}$$

Подставляя (6.74) в (6.73) получаем

$$A_{j_k \ldots j_1} = \frac{1}{2^{j_1+\ldots+j_k}} \sum_{q_1=0}^{[\frac{j_1}{2}]} \ldots \sum_{q_k=0}^{[\frac{j_k}{2}]} \prod_{l=1}^{k} \frac{(-1)^{q_l}(2j_l-2q_l)!}{q_l!(j_l-q_l)!(j_l-2q_l)!} \times$$

$$\times \int\limits_{-1}^{1} (t_k)^{j_k-2q_k} \ldots \int\limits_{-1}^{t_2} (t_1)^{j_1-2q_1} dt_1 \ldots dt_k.$$

Таким образом вычисление $\bar{C}_{j_k \ldots j_1}$ свелось к вычислению интеграла

$$I_{p_k \ldots p_1} = \int\limits_{-1}^{1} (t_k)^{p_k} \ldots \int\limits_{-1}^{t_2} (t_1)^{p_1} dt_1 \ldots dt_k;\ p_1, \ldots, p_k = 0,\ 1,\ 2, \ldots. \tag{6.75}$$

Рассмотрим теперь вычисление $\hat{C}^{l_1\ldots l_k}_{j_k\ldots j_1}$. Имеем

$$\hat{C}^{l_1\ldots l_k}_{j_k\ldots j_1} = \frac{(T-t)^{\frac{k}{2}}}{2^k}\prod_{l=1}^{k}\sqrt{2j_l+1}\cdot\left(\frac{(-1)(T-t)}{2}\right)^{l_1+\ldots+l_k} I^{l_1\ldots l_k}_{j_k\ldots j_1},$$

где

$$I^{l_1\ldots l_k}_{j_k\ldots j_1} = \int\limits_{-1}^{1}(1+t_k)^{l_k}P_{j_k}(t_k)\ldots\int\limits_{-1}^{t_2}(1+t_1)^{l_1}P_{j_1}(t_1)dt_1\ldots dt_k =$$

$$= \sum_{s_k=0}^{l_k}\ldots\sum_{s_1=0}^{l_1}C^{s_k}_{l_k}\ldots C^{s_1}_{l_1}\int\limits_{-1}^{1}(t_k)^{s_k}P_{j_k}(t_k)\ldots\int\limits_{-1}^{t_2}(t_1)^{s_1}P_{j_1}(t_1)dt_1\ldots dt_k,$$

где C^k_n — биномиальный коэффициент.

Далее

$$\int\limits_{-1}^{1}(t_k)^{s_k}P_{j_k}(t_k)\ldots\int\limits_{-1}^{t_2}(t_1)^{s_1}P_{j_1}(t_1)dt_1\ldots dt_k =$$

$$= \frac{1}{2^{j_1+\ldots+j_k}}\sum_{q_1=0}^{[\frac{j_1}{2}]}\ldots\sum_{q_k=0}^{[\frac{j_k}{2}]}\prod_{l=1}^{k}\frac{(-1)^{q_l}(2j_l-2q_l)!}{q_l!(j_l-q_l)!(j_l-2q_l)!}\times$$

$$\times\int\limits_{-1}^{1}(t_k)^{j_k-2q_k+s_k}\ldots\int\limits_{-1}^{t_2}(t_1)^{j_1-2q_1+s_1}dt_1\ldots dt_k.$$

Таким образом вычисление $\hat{C}^{l_1\ldots l_k}_{j_k\ldots j_1}$ опять таки свелось к вычислению интеграла (6.75).

Вычисление интеграла (6.75) не является проблемой:

$$I_{p_1} = \frac{1}{p_1+1}\left(1-(-1)^{p_1+1}\right);$$

$$I_{p_2p_1} = \frac{1}{p_1+1}\left(\frac{1}{p_1+p_2+2}\left(1-(-1)^{p_1+p_2+2}\right)-\frac{(-1)^{p_1+1}}{p_2+1}\left(1-(-1)^{p_2+1}\right)\right);$$

$$I_{p_3p_2p_1} = \frac{1}{p_1+1}\left(\frac{1}{p_1+p_2+2}\left(\frac{1}{p_1+p_2+p_3+3}\left(1-(-1)^{p_1+p_2+p_3+3}\right)-\right.\right.$$

$$\left.-\frac{(-1)^{p_1+p_2+2}}{p_3+1}\left(1-(-1)^{p_3+1}\right)\right)-$$

$$-\frac{(-1)^{p_1+1}}{p_2+1}\left(\frac{1}{p_3+p_2+2}\left(1-(-1)^{p_3+p_2+2}\right)-\right.$$

$$-\frac{(-1)^{p_2+1}}{p_3+1}\left(1-(-1)^{p_3+1}\right)\Bigg)\Bigg)$$

и т.д.

Вообще говоря, интеграл типа $I_{p_k\ldots p_1}$ может быть вычислен при различных значениях k с помощью компьютерных пакетов символьных преобразований типа DERIVE или MAPLE.

Совсем не так просто будет обстоять дело, если мы будем использовать вместо полиномов Лежандра тригонометрические функции. Это связано с тем, что интегралы

$$\bar{C}_{j_k\ldots j_1}=\int\limits_t^T\phi_{j_k}(t_k)\int\limits_t^{t_k}\phi_{j_{k-1}}(t_{k-1})\ldots\int\limits_t^{t_2}\phi_{j_1}(t_1)dt_1\ldots dt_{k-1}dt_k;$$

$$\hat{C}_{j_k\ldots j_1}^{l_1\ldots l_k}=\int\limits_t^T(t-t_k)^{l_k}\phi_{j_k}(t_k)\ldots\int\limits_t^{t_2}(t-t_1)^{l_1}\phi_{j_1}(t_1)dt_1\ldots dt_k,$$

где $\{\phi_j(x)\}_{j=0}^{\infty}$ — полная ортонормированная система тригонометрических функций в пространстве $L_2([t,T])$:

$$\phi_j(s)=\frac{1}{\sqrt{T-t}}\begin{cases}1 & \text{при } j=0\\ \sqrt{2}\sin\frac{2\pi r(s-t)}{T-t} & \text{при } j=2r-1\\ \sqrt{2}\cos\frac{2\pi r(s-t)}{T-t} & \text{при } j=2r\end{cases};$$

$r=1,\ 2,\ldots$ "сильно ветвятся" для различных сочетаний индексов $j_1,\ldots,j_k$, т.е. при различных сочетаниях индексов $j_1,\ldots,j_k$ указанные интегралы вычисляются по существенно различным формулам, причем количество этих формул резко растет с ростом кратности стохастического интеграла. Объективно, уже при $k=4$ вычисления становятся крайне сложными.

Поясним сказанное на примере. При использовании тригонометрических функций, например, может потребоваться интегрирование произведения, скажем вида: $\sin\frac{2\pi r(s-t)}{T-t}\sin\frac{2\pi q(s-t)}{T-t}$ $(r,q\geq 0)$, которое равно $\frac{1}{2}\left(-\cos\frac{2\pi(r+q)(s-t)}{T-t}+\cos\frac{2\pi(r-q)q(s-t)}{T-t}\right)$.

Понятно, что при интегрировании последнего выражения уже возникнут следующие случаи: 1. $r+q\neq 0$ и $r-q\neq 0$; 2. $r+q\neq 0$ и $r-q=0$; 3. $r+q=0$ и $r-q=0$.

В каждом из трех случаев первообразная будет вычисляться по "своей формуле".

Ничего подобного не просходит с многочленами Лежандра, поскольку произведение двух многочленов есть многочлен, и при интегрировании многочленов мы фактически пользуемся только формулой

первообразной от степенной функции с целым неотрицательным показателем.

6.6 Сильная аппроксимация повторных стохастических интегралов кратностей 1–3 с помощью теоремы 5.1 и тригонометрической системы функций

Рассмотрим аппроксимации некоторых повторных стохастических интегралов вида

$$I_{l_1\ldots l_k T,t}^{(i_1\ldots i_k)} = \int\limits_t^T (t-t_k)^{l_k} \ldots \int\limits_t^{t_2} (t-t_1)^{l_1} d\mathbf{f}_{t_1}^{(i_1)} \ldots d\mathbf{f}_{t_k}^{(i_k)},$$

$$I_{l_1\ldots l_k T,t}^{*(i_1\ldots i_k)} = \int\limits_t^{*T} (t-t_k)^{l_k} \ldots \int\limits_t^{*t_2} (t-t_1)^{l_1} d\mathbf{f}_{t_1}^{(i_1)} \ldots d\mathbf{f}_{t_k}^{(i_k)},$$

полученные с использованием результатов главы 5 с применением тригонометрической системы функций:

$$I_{0_{T,t}}^{(i_1)} = \sqrt{T-t}\zeta_0^{(i_1)}, \tag{6.76}$$

$$I_{1_{T,t}}^{(i_1)q} = -\frac{(T-t)^{\frac{3}{2}}}{2}\left[\zeta_0^{(i_1)} + \frac{\sqrt{2}}{\pi}\left(\sum_{r=1}^{q}\frac{1}{r}\zeta_{2r-1}^{(i_1)} + \sqrt{\alpha_q}\xi_q^{(i_1)}\right)\right], \tag{6.77}$$

$$I_{00_{T,t}}^{*(i_2 i_1)q} = \frac{1}{2}(T-t)\left[\zeta_0^{(i_1)}\zeta_0^{(i_2)} + \frac{1}{\pi}\sum_{r=1}^{q}\frac{1}{r}\left\{\zeta_{2r}^{(i_1)}\zeta_{2r-1}^{(i_2)} - \zeta_{2r-1}^{(i_1)}\zeta_{2r}^{(i_2)} + \right.\right.$$

$$\left.\left. + \sqrt{2}\left(\zeta_{2r-1}^{(i_1)}\zeta_0^{(i_2)} - \zeta_0^{(i_1)}\zeta_{2r-1}^{(i_2)}\right)\right\} + \frac{\sqrt{2}}{\pi}\sqrt{\alpha_q}\left(\xi_q^{(i_1)}\zeta_0^{(i_2)} - \zeta_0^{(i_1)}\xi_q^{(i_2)}\right)\right], \tag{6.78}$$

$$I_{000_{T,t}}^{*(i_3 i_2 i_1)q} = (T-t)^{\frac{3}{2}}\left(\frac{1}{6}\zeta_0^{(i_1)}\zeta_0^{(i_2)}\zeta_0^{(i_3)} + \frac{\sqrt{\alpha_q}}{2\sqrt{2}\pi}\left(\xi_q^{(i_1)}\zeta_0^{(i_2)}\zeta_0^{(i_3)} - \xi_q^{(i_3)}\zeta_0^{(i_2)}\zeta_0^{(i_1)}\right)\right.$$

$$+ \frac{1}{2\sqrt{2}\pi^2}\sqrt{\beta_q}\left(\mu_q^{(i_1)}\zeta_0^{(i_2)}\zeta_0^{(i_3)} - 2\mu_q^{(i_2)}\zeta_0^{(i_1)}\zeta_0^{(i_3)} + \mu_q^{(i_3)}\zeta_0^{(i_1)}\zeta_0^{(i_2)}\right) +$$

$$+ \frac{1}{2\sqrt{2}}\sum_{r=1}^{q}\left[\frac{1}{\pi r}\left\{\zeta_{2r-1}^{(i_1)}\zeta_0^{(i_2)}\zeta_0^{(i_3)} - \zeta_{2r-1}^{(i_3)}\zeta_0^{(i_2)}\zeta_0^{(i_1)}\right\} + \right.$$

$$+\frac{1}{\pi^2 r^2}\left\{\zeta_{2r}^{(i_1)}\zeta_0^{(i_2)}\zeta_0^{(i_3)}-2\zeta_{2r}^{(i_2)}\zeta_0^{(i_3)}\zeta_0^{(i_1)}+\zeta_{2r}^{(i_3)}\zeta_0^{(i_2)}\zeta_0^{(i_1)}\right\}\Bigg]+$$

$$+\frac{1}{2\pi^2}\sum_{\substack{r,l=1\\ r\neq l}}^{q}\Bigg[\frac{1}{r^2-l^2}\Bigg\{\zeta_{2r}^{(i_1)}\zeta_{2l}^{(i_2)}\zeta_0^{(i_3)}-\zeta_{2r}^{(i_2)}\zeta_0^{(i_1)}\zeta_{2l}^{(i_3)}+$$

$$+\frac{r}{l}\zeta_{2r-1}^{(i_1)}\zeta_{2l-1}^{(i_2)}\zeta_0^{(i_3)}-\frac{l}{r}\zeta_0^{(i_1)}\zeta_{2r-1}^{(i_2)}\zeta_{2l-1}^{(i_3)}\Bigg\}-\frac{1}{rl}\zeta_{2r-1}^{(i_1)}\zeta_0^{(i_2)}\zeta_{2l-1}^{(i_3)}\Bigg]$$

$$+\sum_{r=1}^{q}\Bigg[\frac{1}{4\pi r}\left\{\zeta_{2r}^{(i_1)}\zeta_{2r-1}^{(i_2)}\zeta_0^{(i_3)}-\zeta_{2r-1}^{(i_1)}\zeta_{2r}^{(i_2)}\zeta_0^{(i_3)}-\zeta_{2r-1}^{(i_2)}\zeta_{2r}^{(i_3)}\zeta_0^{(i_1)}+\zeta_{2r-1}^{(i_3)}\zeta_{2r}^{(i_2)}\zeta_0^{(i_1)}\right\}$$

$$+\frac{1}{8\pi^2 r^2}\Bigg\{3\zeta_{2r-1}^{(i_1)}\zeta_{2r-1}^{(i_2)}\zeta_0^{(i_3)}+\zeta_{2r}^{(i_1)}\zeta_{2r}^{(i_2)}\zeta_0^{(i_3)}-6\zeta_{2r-1}^{(i_1)}\zeta_{2r-1}^{(i_3)}\zeta_0^{(i_2)}+$$

$$+3\zeta_{2r-1}^{(i_2)}\zeta_{2r-1}^{(i_3)}\zeta_0^{(i_1)}-2\zeta_{2r}^{(i_1)}\zeta_{2r}^{(i_3)}\zeta_0^{(i_2)}+\zeta_{2r}^{(i_3)}\zeta_{2r}^{(i_2)}\zeta_0^{(i_1)}\Bigg\}\Bigg]+$$

$$+\frac{1}{4\sqrt{2}\pi^2}\Bigg\{\sum_{r,m=1}^{q}\Bigg[\frac{2}{rm}\Big[-\zeta_{2r-1}^{(i_1)}\zeta_{2m-1}^{(i_2)}\zeta_{2m}^{(i_3)}+\zeta_{2r-1}^{(i_1)}\zeta_{2r}^{(i_2)}\zeta_{2m-1}^{(i_3)}+$$

$$+\zeta_{2r-1}^{(i_1)}\zeta_{2m}^{(i_2)}\zeta_{2m-1}^{(i_3)}-\zeta_{2r}^{(i_1)}\zeta_{2r-1}^{(i_2)}\zeta_{2m-1}^{(i_3)}\Big]+$$

$$+\frac{1}{m(r+m)}\Big[-\zeta_{2(m+r)}^{(i_1)}\zeta_{2r}^{(i_2)}\zeta_{2m}^{(i_3)}-\zeta_{2(m+r)-1}^{(i_1)}\zeta_{2r-1}^{(i_2)}\zeta_{2m}^{(i_3)}-$$

$$-\zeta_{2(m+r)-1}^{(i_1)}\zeta_{2r}^{(i_2)}\zeta_{2m-1}^{(i_3)}+\zeta_{2(m+r)}^{(i_1)}\zeta_{2r-1}^{(i_2)}\zeta_{2m-1}^{(i_3)}\Big]\Bigg]+$$

$$+\sum_{m=1}^{q}\sum_{l=m+1}^{q}\Bigg[\frac{1}{m(l-m)}\Big[\zeta_{2(l-m)}^{(i_1)}\zeta_{2l}^{(i_2)}\zeta_{2m}^{(i_3)}+\zeta_{2(l-m)-1}^{(i_1)}\zeta_{2l-1}^{(i_2)}\zeta_{2m}^{(i_3)}-$$

$$-\zeta_{2(l-m)-1}^{(i_1)}\zeta_{2l}^{(i_2)}\zeta_{2m-1}^{(i_3)}+\zeta_{2(l-m)}^{(i_1)}\zeta_{2l-1}^{(i_2)}\zeta_{2m-1}^{(i_3)}\Big]+$$

$$+\frac{1}{l(l-m)}\Big[-\zeta_{2(l-m)}^{(i_1)}\zeta_{2m}^{(i_2)}\zeta_{2l}^{(i_3)}+\zeta_{2(l-m)-1}^{(i_1)}\zeta_{2m-1}^{(i_2)}\zeta_{2l}^{(i_3)}-$$

$$-\zeta_{2(l-m)-1}^{(i_1)}\zeta_{2m}^{(i_2)}\zeta_{2l-1}^{(i_3)}-\zeta_{2(l-m)}^{(i_1)}\zeta_{2m-1}^{(i_2)}\zeta_{2l-1}^{(i_3)}\Big]\Bigg]\Bigg\}\Bigg), \qquad (6.79)$$

$$I_{10_{T,t}}^{*(i_2 i_1)q}=(T-t)^2\Bigg(-\frac{1}{6}\zeta_0^{(i_1)}\zeta_0^{(i_2)}-\frac{1}{2\sqrt{2}\pi}\sqrt{\alpha_q}\xi_q^{(i_1)}\zeta_0^{(i_2)}+$$

$$+\frac{1}{2\sqrt{2}\pi^2}\sqrt{\beta_q}\left(2\mu_q^{(i_2)}\zeta_0^{(i_1)}-\mu_q^{(i_1)}\zeta_0^{(i_2)}\right)+$$

$$+\frac{1}{2\sqrt{2}}\sum_{r=1}^{q}\Bigg[-\frac{1}{\pi r}\Bigg\{\zeta_{2r-1}^{(i_1)}\zeta_0^{(i_2)}-\frac{1}{\sqrt{2}}\zeta_{2r-1}^{(i_1)}\zeta_{2r}^{(i_2)}+\frac{1}{\sqrt{2}}\zeta_{2r}^{(i_1)}\zeta_{2r-1}^{(i_2)}\Bigg\}+$$

$$+\frac{1}{\pi^2 r^2}\left(-\zeta_{2r}^{(i_1)}\zeta_0^{(i_2)}+2\zeta_0^{(i_1)}\zeta_{2r}^{(i_2)}-\frac{3}{2\sqrt{2}}\zeta_{2r-1}^{(i_1)}\zeta_{2r-1}^{(i_2)}-\frac{1}{2\sqrt{2}}\zeta_{2r}^{(i_1)}\zeta_{2r}^{(i_2)}\right)\Bigg]+$$

$$+\frac{1}{2\pi^2}\sum_{\substack{k,l=1\\k\neq l}}^{q}\frac{1}{l^2-k^2}\left[\zeta_{2k}^{(i_1)}\zeta_{2l}^{(i_2)}-\frac{k}{l}\zeta_{2k-1}^{(i_1)}\zeta_{2l-1}^{(i_2)}\right]\Bigg), \tag{6.80}$$

$$I_{01_{T,t}}^{*(i_2i_1)q}=(T-t)^2\Bigg(-\frac{1}{3}\zeta_0^{(i_1)}\zeta_0^{(i_2)}+\frac{1}{\sqrt{2}\pi}\sqrt{\alpha_q}\left(\frac{1}{2}\xi_q^{(i_2)}\zeta_0^{(i_1)}-\xi_q^{(i_1)}\zeta_0^{(i_2)}\right)+$$

$$+\frac{1}{\sqrt{2}\pi^2}\sqrt{\beta_q}\left(\frac{1}{2}\mu_q^{(i_2)}\zeta_0^{(i_1)}-\mu_q^{(i_1)}\zeta_0^{(i_2)}\right)+$$

$$+\frac{1}{\sqrt{2}}\sum_{r=1}^{q}\Bigg[\frac{1}{\pi r}\left\{\frac{1}{2}\zeta_0^{(i_1)}\zeta_{2r-1}^{(i_2)}-\zeta_{2r-1}^{(i_1)}\zeta_0^{(i_2)}+\frac{1}{2\sqrt{2}}\left\{\zeta_{2r-1}^{(i_1)}\zeta_{2r}^{(i_2)}-\zeta_{2r}^{(i_1)}\zeta_{2r-1}^{(i_2)}\right\}\right\}+$$

$$+\frac{1}{\pi^2 r^2}\left(\frac{1}{2}\zeta_0^{(i_1)}\zeta_{2r}^{(i_2)}-\zeta_{2r}^{(i_1)}\zeta_0^{(i_2)}+\frac{3}{4\sqrt{2}}\zeta_{2r-1}^{(i_1)}\zeta_{2r-1}^{(i_2)}+\frac{1}{4\sqrt{2}}\zeta_{2r}^{(i_1)}\zeta_{2r}^{(i_2)}\right)\Bigg]+$$

$$+\frac{1}{2\pi^2}\sum_{\substack{k,l=1\\k\neq l}}^{q}\frac{1}{l^2-k^2}\left[\frac{l}{k}\zeta_{2k-1}^{(i_1)}\zeta_{2l-1}^{(i_2)}+\zeta_{2k}^{(i_1)}\zeta_{2l}^{(i_2)}\right]\Bigg), \tag{6.81}$$

$$I_{2_{T,t}}^{(i_1)}=(T-t)^{\frac{5}{2}}\Bigg[\frac{1}{3}\zeta_0^{(i_1)}+\frac{1}{\sqrt{2}\pi^2}\left(\sum_{r=1}^{q}\frac{1}{r^2}\zeta_{2r}^{(i_1)}+\sqrt{\beta_q}\mu_q^{(i_1)}\right)+$$

$$+\frac{1}{\sqrt{2}\pi}\left(\sum_{r=1}^{q}\frac{1}{r}\zeta_{2r-1}^{(i_1)}+\sqrt{\alpha_q}\xi_q^{(i_1)}\right)\Bigg], \tag{6.82}$$

где

$$\xi_q^{(i)}=\frac{1}{\sqrt{\alpha_q}}\sum_{r=q+1}^{\infty}\frac{1}{r}\,\zeta_{2r-1}^{(i)};\ \alpha_q=\frac{\pi^2}{6}-\sum_{r=1}^{q}\frac{1}{r^2};\ \mu_q^{(i)}=\frac{1}{\sqrt{\beta_q}}\sum_{r=q+1}^{\infty}\frac{1}{r^2}\,\zeta_{2r}^{(i)};$$

$$\beta_q=\frac{\pi^4}{90}-\sum_{r=1}^{q}\frac{1}{r^4};\ \zeta_j^{(i)}=\int_t^T\phi_j(s)d\mathbf{f}_s^{(i)};$$

$\phi_j(s)$ имеет вид (6.30); $\zeta_0^{(i)}$, $\zeta_{2r}^{(i)}$, $\zeta_{2r-1}^{(i)}$, $\xi_q^{(i)}$, $\mu_q^{(i)}$; $r=1,\ldots,q$; $i=1,\ldots,m$ — независимые в совокупности стандартные гауссовские случайные величины; $i_1,\ i_2,\ i_3=1,\ldots,m$.

Рассмотрим среднеквадратические погрешности аппроксимаций (6.78)–(6.81). Из соотношений (6.78)–(6.81) при $i_1\neq i_2,\ i_2\neq i_3,\ i_1\neq i_3$ получаем

$$\mathsf{M}\left\{\left(I_{00_{T,t}}^{*(i_2i_1)}-I_{00_{T,t}}^{*(i_2i_1)q}\right)^2\right\}=\frac{(T-t)^2}{2\pi^2}\left(\frac{\pi^2}{6}-\sum_{r=1}^{q}\frac{1}{r^2}\right), \tag{6.83}$$

$$\mathsf{M}\left\{\left(I_{000_{T,t}}^{(i_3i_2i_1)}-I_{000_{T,t}}^{(i_3i_2i_1)q}\right)^2\right\}=$$

$$=(T-t)^3\Biggl\{\frac{1}{4\pi^2}\left(\frac{\pi^2}{6}-\sum_{r=1}^{q}\frac{1}{r^2}\right)+\frac{55}{32\pi^4}\left(\frac{\pi^4}{90}-\sum_{r=1}^{q}\frac{1}{r^4}\right)+$$

$$+\frac{1}{4\pi^4}\left(\sum_{\substack{r,l=1\\r\neq l}}^{\infty}-\sum_{\substack{r,l=1\\r\neq l}}^{q}\right)\frac{5l^4+4r^4-3l^2r^2}{r^2l^2(r^2-l^2)^2}\Biggr\}, \tag{6.84}$$

$$\mathsf{M}\left\{\left(I_{01_{T,t}}^{*(i_1)}-I_{01_{T,t}}^{*(i_1)q}\right)^2\right\}=(T-t)^4\Biggl\{\frac{1}{8\pi^2}\left(\frac{\pi^2}{6}-\sum_{r=1}^{q}\frac{1}{r^2}\right)+$$

$$+\frac{5}{32\pi^4}\left(\frac{\pi^4}{90}-\sum_{r=1}^{q}\frac{1}{r^4}\right)+\frac{1}{4\pi^4}\left(\sum_{\substack{k,l=1\\k\neq l}}^{\infty}-\sum_{\substack{k,l=1\\k\neq l}}^{q}\right)\frac{l^2+k^2}{k^2(l^2-k^2)^2}\Biggr\}, \tag{6.85}$$

$$\mathsf{M}\left\{\left(I_{10_{T,t}}^{*(i_2i_1)}-I_{10_{T,t}}^{*(i_2i_1)q}\right)^2\right\}=(T-t)^4\Biggl\{\frac{1}{8\pi^2}\left(\frac{\pi^2}{6}-\sum_{r=1}^{q}\frac{1}{r^2}\right)+$$

$$+\frac{5}{32\pi^4}\left(\frac{\pi^4}{90}-\sum_{r=1}^{q}\frac{1}{r^4}\right)+\frac{1}{4\pi^4}\left(\sum_{\substack{k,l=1\\k\neq l}}^{\infty}-\sum_{\substack{k,l=1\\k\neq l}}^{q}\right)\frac{l^2+k^2}{l^2(l^2-k^2)^2}\Biggr\}. \tag{6.86}$$

Пример 6.2. *Нетрудно показать, что соотношения* (6.84), (6.85) *и* (6.86) *могут быть представлены с помощью леммы* 6.1 *в следующем виде:*

$$\mathsf{M}\left\{\left(I_{000_{T,t}}^{(i_3i_2i_1)}-I_{000_{T,t}}^{(i_3i_2i_1)q}\right)^2\right\}=(T-t)^3\Biggl\{\frac{4}{45}-\frac{1}{4\pi^2}\sum_{r=1}^{q}\frac{1}{r^2}-$$

$$-\frac{55}{32\pi^4}\sum_{r=1}^{q}\frac{1}{r^4}-\frac{1}{4\pi^4}\sum_{\substack{r,l=1\\r\neq l}}^{q}\frac{5l^4+4r^4-3r^2l^2}{r^2l^2\left(r^2-l^2\right)^2}\Biggr\}, \tag{6.87}$$

$$\mathsf{M}\left\{\left(I_{10_{T,t}}^{*(i_2i_1)}-I_{10_{T,t}}^{*(i_2i_1)q}\right)^2\right\}=\frac{(T-t)^4}{4}\Biggl\{\frac{1}{9}-\frac{1}{2\pi^2}\sum_{r=1}^{q}\frac{1}{r^2}-$$

$$-\frac{5}{8\pi^4}\sum_{r=1}^{q}\frac{1}{r^4}-\frac{1}{\pi^4}\sum_{\substack{k,l=1\\k\neq l}}^{q}\frac{k^2+l^2}{l^2\left(l^2-k^2\right)^2}\Biggr\}, \tag{6.88}$$

$$\mathsf{M}\left\{\left(I_{01_{T,t}}^{*(i_2i_1)}-I_{01_{T,t}}^{*(i_2i_1)q}\right)^2\right\}=\frac{(T-t)^4}{4}\Biggl\{\frac{1}{9}-\frac{1}{2\pi^2}\sum_{r=1}^{q}\frac{1}{r^2}-$$

$$-\frac{5}{8\pi^4}\sum_{r=1}^{q}\frac{1}{r^4}-\frac{1}{\pi^4}\sum_{\substack{k,l=1\\k\neq l}}^{q}\frac{l^2+k^2}{k^2\left(l^2-k^2\right)^2}\Biggr\}. \tag{6.89}$$

Сопоставив (6.87)–(6.89) и (6.84)–(6.86), заметим, что

$$\sum_{\substack{k,l=1\\k\neq l}}^{\infty}\frac{l^2+k^2}{k^2\left(l^2-k^2\right)^2}=\sum_{\substack{k,l=1\\k\neq l}}^{\infty}\frac{l^2+k^2}{l^2\left(l^2-k^2\right)^2}=\frac{\pi^4}{48}, \tag{6.90}$$

$$\sum_{\substack{r,l=1\\r\neq l}}^{\infty}\frac{5l^4+4r^4-3r^2l^2}{r^2l^2\left(r^2-l^2\right)^2}=\frac{9\pi^4}{80}. \tag{6.91}$$

Приведем аппроксимации стохастических интегралов $I_{10_{T,t}}^{*(i_1i_1)}$, $I_{01_{T,t}}^{*(i_1i_1)}$ и условия выбора числа q с использованием тригонометрической системы функций:

$$I_{10_{T,t}}^{*(i_1i_1)q}=(T-t)^2\Biggl(-\frac{1}{6}\left(\zeta_0^{(i_1)}\right)^2-\frac{1}{2\sqrt{2}\pi}\sqrt{\alpha_q}\xi_q^{(i_1)}\zeta_0^{(i_1)}+\frac{1}{2\sqrt{2}\pi^2}\sqrt{\beta_q}\mu_q^{(i_1)}\zeta_0^{(i_1)}+$$

$$+\frac{1}{2\sqrt{2}}\sum_{r=1}^{q}\left[\frac{1}{\pi^2r^2}\left(\zeta_{2r}^{(i_1)}\zeta_0^{(i_1)}-\frac{3}{2\sqrt{2}}\left(\zeta_{2r-1}^{(i_1)}\right)^2-\frac{1}{2\sqrt{2}}\left(\zeta_{2r}^{(i_1)}\right)^2\right)-\frac{1}{\pi r}\zeta_{2r-1}^{(i_1)}\zeta_0^{(i_1)}\right]+$$

$$+\frac{1}{2\pi^2}\sum_{\substack{k,l=1\\k\neq l}}^{q}\frac{1}{l^2-k^2}\left[\zeta_{2k}^{(i_1)}\zeta_{2l}^{(i_1)}-\frac{k}{l}\zeta_{2k-1}^{(i_1)}\zeta_{2l-1}^{(i_1)}\right]\Biggr),$$

$$I_{01_{T,t}}^{*(i_1i_1)q}=(T-t)^2\Biggl(-\frac{1}{3}\left(\zeta_0^{(i_1)}\right)^2-\frac{1}{2\sqrt{2}\pi}\sqrt{\alpha_q}\xi_q^{(i_1)}\zeta_0^{(i_1)}-\frac{1}{2\sqrt{2}\pi^2}\sqrt{\beta_q}\mu_q^{(i_1)}\zeta_0^{(i_1)}+$$

$$+\frac{1}{2\sqrt{2}}\sum_{r=1}^{q}\left[\frac{1}{\pi^2r^2}\left(\frac{3}{2\sqrt{2}}\left(\zeta_{2r-1}^{(i_1)}\right)^2+\frac{1}{2\sqrt{2}}\left(\zeta_{2r}^{(i_1)}\right)^2-\zeta_{2r}^{(i_1)}\zeta_0^{(i_1)}\right)-\frac{1}{\pi r}\zeta_{2r-1}^{(i_1)}\zeta_0^{(i_1)}\right]+$$

$$+\frac{1}{2\pi^2}\sum_{\substack{k,l=1\\k\neq l}}^{q}\frac{1}{l^2-k^2}\left[\frac{l}{k}\zeta_{2k-1}^{(i_1)}\zeta_{2l-1}^{(i_1)}+\zeta_{2k}^{(i_1)}\zeta_{2l}^{(i_1)}\right]\Biggr).$$

Далее получим

$$\mathsf{M}\left\{\left(I_{01_{T,t}}^{*(i_1i_1)}-I_{01_{T,t}}^{*(i_1i_1)q}\right)^2\right\}=\mathsf{M}\left\{\left(I_{10_{T,t}}^{*(i_1i_1)}-I_{10_{T,t}}^{*(i_1i_1)q}\right)^2\right\}=$$

Таблица 6.37. Проверка формулы (6.87)

$\varepsilon/(T-t)^3$	0.0459	0.0072	$7.5722\cdot 10^{-4}$	$7.5973\cdot 10^{-5}$	$7.5990\cdot 10^{-6}$
q	1	10	100	1000	10000

Таблица 6.38. Проверка формул (6.88), (6.89)

$4\varepsilon/(T-t)^4$	0.0540	0.0082	$8.4261\cdot 10^{-4}$	$8.4429\cdot 10^{-5}$	$8.4435\cdot 10^{-6}$
q	1	10	100	1000	10000

$$= \frac{(T-t)^4}{4}\Biggl[\frac{2}{\pi^4}\Biggl(\frac{\pi^4}{90}-\sum_{r=1}^{q}\frac{1}{r^4}\Biggr)+\frac{1}{\pi^4}\Biggl(\frac{\pi^2}{6}-\sum_{r=1}^{q}\frac{1}{r^2}\Biggr)^2+$$

$$+\frac{1}{\pi^4}\left(\sum_{\substack{k,l=1\\k\neq l}}^{\infty}-\sum_{\substack{k,l=1\\k\neq l}}^{q}\right)\frac{l^2+k^2}{k^2(l^2-k^2)^2}\Biggr]. \tag{6.92}$$

С учетом (6.90) перепишем соотношение (6.92) в виде

$$\mathsf{M}\left\{\left(I_{01_{T,t}}^{*(i_1i_1)}-I_{01_{T,t}}^{*(i_1i_1)q}\right)^2\right\}=\mathsf{M}\left\{\left(I_{10_{T,t}}^{*(i_1i_1)}-I_{10_{T,t}}^{*(i_1i_1)q}\right)^2\right\}=$$

$$=\frac{(T-t)^4}{4}\Biggl[\frac{17}{240}-\frac{1}{3\pi^2}\sum_{r=1}^{q}\frac{1}{r^2}-\frac{2}{\pi^4}\sum_{r=1}^{q}\frac{1}{r^4}+$$

$$+\frac{1}{\pi^4}\Biggl(\sum_{r=1}^{q}\frac{1}{r^2}\Biggr)^2-\frac{1}{\pi^4}\sum_{\substack{k,l=1\\k\neq l}}^{q}\frac{l^2+k^2}{k^2(l^2-k^2)^2}\Biggr]. \tag{6.93}$$

В таблицах 6.37 – 6.39 численно осуществлена проверка формул (6.87) – (6.89), (6.93) при различных значениях q. В таблицах 6.37 – 6.39 ε означает правые части указанных формул.

Формулы (6.90), (6.91) представляются весьма интересными. Подтвердим численно их правильность (таблицы 6.40, 6.41; ε_p — абсолютное отклонение кратных частичных сумм с верхним пределом суммирования p для рядов (6.90), (6.91) от правых частей формул (6.90),

Таблица 6.39. Проверка формулы (6.93)

$4\varepsilon/(T-t)^4$	0.0268	0.0034	$3.3955\cdot 10^{-4}$	$3.3804\cdot 10^{-5}$	$3.3778\cdot 10^{-6}$
q	1	10	100	1000	10000

Таблица 6.40. Проверка формулы (6.90)

ε_p	2.0294	0.3241	0.0330	0.0033	$3.2902 \cdot 10^{-4}$
p	1	10	100	1000	10000

Таблица 6.41. Проверка формулы (6.91)

ε_p	10.9585	1.8836	0.1968	0.0197	0.0020
p	1	10	100	1000	10000

(6.91); сходимость кратных рядов понимается здесь при $p_1 = p_2 = p \to \infty$, что допустимо согласно теореме 5.1).

Рассмотрим аппроксимации повторных стохастических интегралов вида (6.7) с использованием тригонометрической системы.

Нетрудно видеть, что аппроксимации $J^{*(i_2 i_1)q}_{(\lambda_2\lambda_1)T,t}$, $J^{(i_3 i_2 i_1)q}_{(\lambda_3\lambda_2\lambda_1)T,t}$ стохастических интегралов $J^{*(i_2 i_1)}_{(\lambda_2\lambda_1)T,t}$, $J^{(i_3 i_2 i_1)}_{(\lambda_3\lambda_2\lambda_1)T,t}$ определяются правыми частями формул (6.78), (6.79), в которых следует взять $\zeta_j^{(i)} = \int\limits_t^T \phi_j(s) d\mathbf{w}_s^{(i)}$; $i_1,\ i_2,\ i_3 = 0,\ 1, \ldots, m$ (для случая повторного стохастического интеграла третьей кратности следует считать индексы i_1, i_2, i_3 попарно различными или, если какие-нибудь два из этих трех индексов равны, то они равны нулю).

Пример 6.3. *Поскольку* $\int\limits_t^T \phi_j(s) d\mathbf{w}_s^{(0)} = \begin{cases} \sqrt{T-t} & \text{при } j = 0 \\ 0 & \text{при } j \neq 0 \end{cases}$, *то нетрудно получить из* (6.78) *и* (6.79), *считая, что в этих равенствах* $\zeta_j^{(i)} = \int\limits_t^T \phi_j(s) d\mathbf{w}_s^{(i)}$; $i_1,\ i_2,\ i_3 = 0,\ 1, \ldots, m$, *следующее семейство формул:*

$$J^{(i_2)q}_{(10)T,t} = \frac{1}{2}(T-t)^{\frac{3}{2}} \left[\zeta_0^{(i_2)} - \frac{\sqrt{2}}{\pi} \left(\sum_{r=1}^{q} \frac{1}{r} \zeta_{2r-1}^{(i_2)} + \sqrt{\alpha_q} \xi_q^{(i_2)} \right) \right],$$

$$J^{(i_1)q}_{(01)T,t} = \frac{1}{2}(T-t)^{\frac{3}{2}} \left[\zeta_0^{(i_1)} + \frac{\sqrt{2}}{\pi} \left(\sum_{r=1}^{q} \frac{1}{r} \zeta_{2r-1}^{(i_1)} + \sqrt{\alpha_q} \xi_q^{(i_2)} \right) \right],$$

$$J^{(i_1)q}_{(001)T,t} = (T-t)^{\frac{5}{2}} \left[\frac{1}{6} \zeta_0^{(i_1)} + \frac{1}{2\sqrt{2}\pi^2} \left(\sum_{r=1}^{q} \frac{1}{r^2} \zeta_{2r}^{(i_1)} + \sqrt{\beta_q} \mu_q^{(i_1)} \right) + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{2\sqrt{2}\pi} \left(\sum_{r=1}^{q} \frac{1}{r} \zeta_{2r-1}^{(i_1)} + \sqrt{\alpha_q} \xi_q^{(i_1)} \right) \right],$$

$$J_{(010)T,t}^{(i_2)q}=(T-t)^{\frac{5}{2}}\Biggl[\frac{1}{6}\zeta_0^{(i_2)}-\frac{1}{\sqrt{2}\pi^2}\Biggl(\sum_{r=1}^{q}\frac{1}{r^2}\zeta_{2r}^{(i_2)}+\sqrt{\beta_q}\mu_q^{(i_2)}\Biggr)\Biggr],$$

$$J_{(100)T,t}^{(i_3)q}=(T-t)^{\frac{5}{2}}\Biggl[\frac{1}{6}\zeta_0^{(i_3)}+\frac{1}{2\sqrt{2}\pi^2}\Biggl(\sum_{r=1}^{q}\frac{1}{r^2}\zeta_{2r}^{(i_3)}+\sqrt{\beta_q}\mu_q^{(i_3)}\Biggr)-$$

$$-\frac{1}{2\sqrt{2}\pi}\Biggl(\sum_{r=1}^{q}\frac{1}{r}\zeta_{2r-1}^{(i_3)}+\sqrt{\alpha_q}\xi_q^{(i_3)}\Biggr)\Biggr],$$

$$J_{(011)T,t}^{*(i_2i_1)q}=(T-t)^2\Biggl(\frac{1}{6}\zeta_0^{(i_1)}\zeta_0^{(i_2)}+\frac{1}{2\sqrt{2}\pi}\sqrt{\alpha_q}\xi_q^{(i_1)}\zeta_0^{(i_2)}+$$

$$+\frac{1}{2\sqrt{2}\pi^2}\sqrt{\beta_q}\Biggl(\mu_q^{(i_1)}\zeta_0^{(i_2)}-2\mu_q^{(i_2)}\zeta_0^{(i_1)}\Biggr)+$$

$$+\frac{1}{2\sqrt{2}}\sum_{r=1}^{q}\Biggl[\frac{1}{\pi r}\zeta_{2r-1}^{(i_1)}\zeta_0^{(i_2)}+\frac{1}{\pi^2r^2}\left\{\zeta_{2r}^{(i_1)}\zeta_0^{(i_2)}-2\zeta_{2r}^{(i_2)}\zeta_0^{(i_1)}\right\}\Biggr]+$$

$$+\frac{1}{2\pi^2}\sum_{\substack{r,l=1\\r\neq l}}^{q}\frac{1}{r^2-l^2}\Biggl[\zeta_{2r}^{(i_1)}\zeta_{2l}^{(i_2)}+\frac{r}{l}\zeta_{2r-1}^{(i_1)}\zeta_{2l-1}^{(i_2)}\Biggr]+$$

$$+\sum_{r=1}^{q}\Biggl[\frac{1}{4\pi r}\left\{\zeta_{2r}^{(i_1)}\zeta_{2r-1}^{(i_2)}-\zeta_{2r-1}^{(i_1)}\zeta_{2r}^{(i_2)}\right\}+$$

$$+\frac{1}{8\pi^2r^2}\left\{3\zeta_{2r-1}^{(i_1)}\zeta_{2r-1}^{(i_2)}+\zeta_{2r}^{(i_1)}\zeta_{2r}^{(i_2)}\right\}\Biggr]\Biggr),$$

$$J_{(110)T,t}^{*(i_3i_2)q}=(T-t)^2\Biggl(\frac{1}{6}\zeta_0^{(i_3)}\zeta_0^{(i_2)}-\frac{1}{2\sqrt{2}\pi}\sqrt{\alpha_q}\xi_q^{(i_3)}\zeta_0^{(i_2)}+$$

$$+\frac{1}{2\sqrt{2}\pi^2}\sqrt{\beta_q}\Biggl(\mu_q^{(i_3)}\zeta_0^{(i_2)}-2\mu_q^{(i_2)}\zeta_0^{(i_3)}\Biggr)+$$

$$+\frac{1}{2\sqrt{2}}\sum_{r=1}^{q}\Biggl[-\frac{1}{\pi r}\zeta_{2r-1}^{(i_3)}\zeta_0^{(i_2)}+\frac{1}{\pi^2r^2}\left\{-2\zeta_{2r}^{(i_2)}\zeta_0^{(i_3)}+\zeta_{2r}^{(i_3)}\zeta_0^{(i_2)}\right\}\Biggr]+$$

$$+\frac{1}{2\pi^2}\sum_{\substack{r,l=1\\r\neq l}}^{q}\frac{1}{l^2-r^2}\Biggl[\frac{l}{r}\zeta_{2r-1}^{(i_2)}\zeta_{2l-1}^{(i_3)}+\zeta_{2r}^{(i_2)}\zeta_{2l}^{(i_3)}\Biggr]+$$

$$+\sum_{r=1}^{q}\Biggl[\frac{1}{4\pi r}\left\{-\zeta_{2r-1}^{(i_2)}\zeta_{2r}^{(i_3)}+\zeta_{2r-1}^{(i_3)}\zeta_{2r}^{(i_2)}\right\}+$$

$$+\frac{1}{8\pi^2 r^2}\left\{3\zeta_{2r-1}^{(i_2)}\zeta_{2r-1}^{(i_3)}+\zeta_{2r}^{(i_3)}\zeta_{2r}^{(i_2)}\right\}\Bigg]\Bigg),$$

$$J_{(101)T,t}^{*(i_3 i_1)q}=(T-t)^2\Bigg(\frac{1}{6}\zeta_0^{(i_1)}\zeta_0^{(i_3)}+\frac{1}{2\sqrt{2}\pi}\sqrt{\alpha_q}\left(\xi_q^{(i_1)}\zeta_0^{(i_3)}-\xi_q^{(i_3)}\zeta_0^{(i_1)}\right)+$$

$$+\frac{1}{2\sqrt{2}\pi^2}\sqrt{\beta_q}\left(\mu_q^{(i_1)}\zeta_0^{(i_3)}+\mu_q^{(i_3)}\zeta_0^{(i_1)}\right)+$$

$$+\frac{1}{2\sqrt{2}}\sum_{r=1}^{q}\Bigg[\frac{1}{\pi r}\left\{\zeta_{2r-1}^{(i_1)}\zeta_0^{(i_3)}-\zeta_{2r-1}^{(i_3)}\zeta_0^{(i_1)}\right\}+$$

$$+\frac{1}{\pi^2 r^2}\left\{\zeta_{2r}^{(i_1)}\zeta_0^{(i_3)}+\zeta_{2r}^{(i_3)}\zeta_0^{(i_1)}\right\}\Bigg]-\frac{1}{2\pi^2}\sum_{\substack{r,l=1\\ r\neq l}}^{q}\frac{1}{rl}\zeta_{2r-1}^{(i_1)}\zeta_{2l-1}^{(i_3)}-$$

$$-\sum_{r=1}^{q}\frac{1}{4\pi^2 r^2}\left\{3\zeta_{2r-1}^{(i_1)}\zeta_{2r-1}^{(i_3)}+\zeta_{2r}^{(i_1)}\zeta_{2r}^{(i_3)}\right\}\Bigg).$$

6.7 Сходимость в среднем степени $2n$ и с вероятностью 1 разложений повторных стохастических интегралов из теоремы 5.1

При построении разложений стохастических интегралов Ито из теоремы 5.1 мы сохранили всю информацию об этих интегралах, поэтому естественно ожидать, что указанные разложения будут сходиться не только в среднеквадратическом, но и в более сильных вероятностных смыслах.

Получим сначала общую оценку, которая доказывает сходимость в среднем степени $2n$, $n\in N$ аппроксимаций из теоремы 5.1.

Согласно обозначениям теоремы 5.1:

$$R_{T,t}^{p_1,\ldots,p_k}=\sum_{(t_1,\ldots,t_k)}\int\limits_t^T\ldots\int\limits_t^{t_2}R_{p_1\ldots p_k}(t_1,\ldots,t_k)d\mathbf{f}_{t_1}^{(i_1)}\ldots d\mathbf{f}_{t_k}^{(i_k)},\tag{6.94}$$

$$R_{p_1\ldots p_k}(t_1,\ldots,t_k)\stackrel{\text{def}}{=}K(t_1,\ldots,t_k)-\sum_{j_1=0}^{p_1}\ldots\sum_{j_k=0}^{p_k}C_{j_k\ldots j_1}\prod_{l=1}^{k}\phi_{j_l}(t_l).$$

Для определенности будем считать, что $i_1,\ldots,i_k=1,\ldots,m$ (этого очевидно вполне достаточно для унифицированных разложений Тейлора–Ито), а расшифровку остальных обозначений данного раздела см. по тексту доказательства теоремы 5.1.

Отметим, что при доказательстве теоремы 5.1 было установлено, что

$$\mathsf{M}\{(R_{T,t}^{p_1,\ldots,p_k})^2\} \le C_k \sum_{(t_1,\ldots,t_k)} \int\limits_t^T \ldots \int\limits_t^{t_2} R_{p_1\ldots p_k}^2(t_1,\ldots,t_k)dt_1\ldots dt_k =$$

$$= C_k \int\limits_{[t,T]^k} R_{p_1\ldots p_k}^2(t_1,\ldots,t_k)dt_1\ldots dt_k,\ C_k < \infty.$$

Положим

$$\eta_{t_l,t}^{(l-1)} \stackrel{\text{def}}{=} \int\limits_t^{t_l} \ldots \int\limits_t^{t_2} R_{p_1\ldots p_k}(t_1,\ldots,t_k)d\mathbf{f}_{t_1}^{(i_1)}\ldots d\mathbf{f}_{t_{l-1}}^{(i_{l-1})};\ l = 2,\ 3,\ldots,k+1,$$

$$\eta_{t_{k+1},t}^{(k)} \stackrel{\text{def}}{=} \eta_{T,t}^{(k)};\ \eta_{T,t}^{(k)} \stackrel{\text{def}}{=} \int\limits_t^T \ldots \int\limits_t^{t_2} R_{p_1\ldots p_k}(t_1,\ldots,t_k)d\mathbf{f}_{t_1}^{(i_1)}\ldots d\mathbf{f}_{t_k}^{(i_k)}.$$

При выводе оценки (1.43), в частности, было получено равенство

$$\mathsf{M}\left\{\left(\int\limits_{t_0}^t \xi_\tau df_\tau\right)^{2n}\right\} = n(2n-1)\int\limits_{t_0}^t \mathsf{M}\left\{\left(\int\limits_{t_0}^s \xi_u df_u\right)^{2n-2}\xi_s^2\right\}ds.$$

Применив в правой части под знаком интеграла неравенство Гельдера при $p = n/(n-1)$, $q = n$ и воспользовавшись возрастанием величины $\mathsf{M}\left\{\left(\int\limits_{t_0}^t \xi_\tau df_\tau\right)^{2n}\right\}$ с ростом t, получим модификацию оценки (1.43) вида:

$$\mathsf{M}\left\{\left(\int\limits_{t_0}^t \xi_\tau df_\tau\right)^{2n}\right\} \le n(2n-1)\left(\mathsf{M}\left\{\left(\int\limits_{t_0}^t \xi_\tau df_\tau\right)^{2n}\right\}\right)^{\frac{n-1}{n}} \int\limits_{t_0}^t (\mathsf{M}\{\xi_s^{2n}\})^{\frac{1}{n}}ds.$$

Возводя полученное неравенство в степень n и сокращая затем на $\left(\mathsf{M}\left\{\left(\int\limits_{t_0}^t \xi_\tau df_\tau\right)^{2n}\right\}\right)^{n-1}$ получаем следующую модификацию (1.43)

$$\mathsf{M}\left\{\left(\int\limits_{t_0}^t \xi_\tau df_\tau\right)^{2n}\right\} \le (n(2n-1))^n\left(\int\limits_{t_0}^t (\mathsf{M}\{\xi_s^{2n}\})^{\frac{1}{n}}ds\right)^n. \qquad (6.95)$$

Используя оценку (6.95) имеем

$$\mathsf{M}\{(\eta_{T,t}^{(k)})^{2n}\} \le (n(2n-1))^n\left[\int\limits_t^T (\mathsf{M}\{(\eta_{t_k,t}^{(k-1)})^{2n}\})^{\frac{1}{n}}dt_k\right]^n \le$$

$$\le (n(2n-1))^n\Biggl[\int\limits_t^T\Biggl((n(2n-1))^n\Biggl[\int\limits_t^{t_k}(\mathsf{M}\{(\eta_{t_{k-1},t}^{(k-2)})^{2n}\})^{\frac{1}{n}}dt_{k-1}\Biggr]^n\Biggr)^{\frac{1}{n}}dt_k\Biggr]^n =$$

$$= (n(2n-1))^{2n}\Biggl[\int\limits_t^T\int\limits_t^{t_k}(\mathsf{M}\{(\eta_{t_{k-1},t}^{(k-2)})^{2n}\})^{\frac{1}{n}}dt_{k-1}dt_k\Biggr]^n \le \ldots$$

$$\ldots \le (n(2n-1))^{n(k-1)}\Biggl[\int\limits_t^T\int\limits_t^{t_k}\ldots\int\limits_t^{t_3}(\mathsf{M}\{(\eta_{t_2,t}^{(1)})^{2n}\})^{\frac{1}{n}}dt_3\ldots dt_{k-1}dt_k\Biggr]^n =$$

$$= (n(2n-1))^{n(k-1)}(2n-1)!!\Biggl[\int\limits_t^T\ldots\int\limits_t^{t_2}R_{p_1\ldots p_k}^2(t_1,\ldots,t_k)dt_1\ldots dt_k\Biggr]^n \le$$

$$\le (n(2n-1))^{n(k-1)}(2n-1)!!\Biggl[\int\limits_{[t,T]^k}R_{p_1\ldots p_k}^2(t_1,\ldots,t_k)dt_1\ldots dt_k\Biggr]^n.$$

Предпоследний переход получен с помощью формулы $\mathsf{M}\{(\eta_{t_2,t}^{(1)})^{2n}\} = (2n-1)!!\Bigl[\int\limits_t^{t_2}R_{p_1\ldots p_k}^2(t_1,\ldots,t_k)dt_1\Bigr]^n$, которая вытекает из гауссовости $\eta_{t_2,t}^{(1)} = \int\limits_t^{t_2}R_{p_1\ldots p_k}(t_1,\ldots,t_k)d\mathbf{f}_{t_1}^{(i_1)}$.

Аналогичным образом оценивается каждое слагаемое в правой части (6.94). Тогда из (6.94) с помощью неравенства Минковского окончательно получаем

$$\mathsf{M}\{(R_{T,t}^{p_1,\ldots,p_k})^{2n}\} \le$$

$$\le \Biggl(k!\Biggl((n(2n-1))^{n(k-1)}(2n-1)!!\Biggl[\int\limits_{[t,T]^k}R_{p_1\ldots p_k}^2(t_1,\ldots,t_k)dt_1\ldots dt_k\Biggr]^n\Biggr)^{\frac{1}{2n}}\Biggr)^{2n}$$

$$= (k!)^{2n}(n(2n-1))^{n(k-1)}(2n-1)!!\Biggl[\int\limits_{[t,T]^k}R_{p_1\ldots p_k}^2(t_1,\ldots,t_k)dt_1\ldots dt_k\Biggr]^n. \tag{6.96}$$

Неравенство (6.96) означает, что аппроксимации повторных стохастических интегралов Ито, полученные по теореме 5.1, сходятся в среднем степени $2n$, $n \in N$, поскольку, согласно этой теореме, $\int\limits_{[t,T]^k}R_{p_1\ldots p_k}^2(t_1,\ldots,t_k)dt_1\ldots dt_k \to 0$ при $p_1,\ldots,p_k \to \infty$.

В частности, из (6.96) и (6.52) получаем

$$\mathsf{M}\left\{\left(I_{00_{T,t}}^{*(i_1i_2)} - I_{00_{T,t}}^{*(i_1i_2)q}\right)^8\right\} \le 16522\cdot 10^6\Biggl(\frac{(T-t)^2}{2}\Biggl(\frac{1}{2}-\sum_{i=1}^q\frac{1}{4i^2-1}\Biggr)\Biggr)^4.$$

Заметим, что с помощью стандартных неравенств для математических ожиданий нетрудно показать, что сходимость в среднем степени $2n$, $n \in N$ аппроксимаций повторных стохастических интегралов Ито ведет к тому, что эти аппроксимации являются не только сильными, но и слабыми (см. разд. 6.14), хотя это интересно скорее с теоретической точки зрения.

Необходимо отметить одно обстоятельство. При доказательстве теоремы 7.2 (см. разд. 7.3) фактически установлена среднеквадратическая сходимость порядка $r/2; r = 2, 3, \ldots$ численной схемы (7.21) к решению стохастического дифференциального уравнения Ито. В [86. С. 362] отмечается, что при соответствующих достаточных условиях утверждение аналога теоремы 7.2 из [86] может быть обобщено так, что неравенство (7.23) останется верным, если квадрат в определении величины z_T заменить, скажем на четную натуральную степень. При этом, очевидно окажутся полезными результаты настоящего раздела о сходящихся в среднем степени $2n$, $n \in N$ аппроксимациях повторных стохастических интегралов.

Обратимся теперь к сходимости с вероятностью 1. Подробно рассмотрим повторный стохастический интеграл вида:

$$I_{00_{T,t}}^{*(i_1 i_2)} = \frac{T-t}{2}\left[\zeta_0^{(i_1)}\zeta_0^{(i_2)} + \sum_{i=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{4i^2-1}}\left\{\zeta_{i-1}^{(i_1)}\zeta_i^{(i_2)} - \zeta_i^{(i_1)}\zeta_{i-1}^{(i_2)}\right\}\right]. \qquad (6.97)$$

При $i_1 = i_2$ из (6.97) получаем равенство: $I_{00_{T,t}}^{*(i_1 i_1)} = \frac{1}{2}(T-t)\left(\zeta_0^{(i_1)}\right)^2$, которое справедливо с вероятностью 1 и может быть получено с помощью формулы Ито.

Рассмотрим случай $i_1 \neq i_2$. Сначала отметим известный факт.

Утверждение 6.1. *Если для последовательности случайных величин ξ_n при некотором $p > 0$ сходится числовой ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \mathsf{M}\{|\xi_n|^p\}$, то последовательность ξ_n сходится к нулю с вероятностью* 1.

В нашем конкретном случае:

$$I_{00_{T,t}}^{*(i_1 i_2)} = \frac{T-t}{2}\left[\zeta_0^{(i_1)}\zeta_0^{(i_2)} + \sum_{i=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{4i^2-1}}\left\{\zeta_{i-1}^{(i_1)}\zeta_i^{(i_2)} - \zeta_i^{(i_1)}\zeta_{i-1}^{(i_2)}\right\}\right] + \xi_n,$$

$$\xi_n = \frac{T-t}{2}\sum_{i=n+1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{4i^2-1}}\left\{\zeta_{i-1}^{(i_1)}\zeta_i^{(i_2)} - \zeta_i^{(i_1)}\zeta_{i-1}^{(i_2)}\right\},$$

$$\mathsf{M}\{|\xi_n|^2\} = \int\limits_{[t,T]^2} R_n^2(t_1,t_2)dt_1dt_2 = \frac{(T-t)^2}{2}\sum_{i=n+1}^{\infty}\frac{1}{4i^2-1}, \qquad (6.98)$$

$$\sum_{i=n+1}^{\infty}\frac{1}{4i^2-1}\le\int\limits_n^{\infty}\frac{1}{4x^2-1}dx=-\frac{1}{4}\ln\left|1-\frac{2}{2n+1}\right|\le\frac{C_0}{n};\ C_0<\infty,\quad(6.99)$$

$$\xi_n\stackrel{\rm def}{=}\sum_{(t_1,t_2)}\int\limits_t^T\int\limits_t^{t_2}R_n(t_1,t_2)d\mathbf{f}_{t_1}^{(i_1)}d\mathbf{f}_{t_2}^{(i_2)}=\int\limits_{[t,T]^2}R_n(t_1,t_2)d\mathbf{f}_{t_1}^{(i_1)}d\mathbf{f}_{t_2}^{(i_2)};\ R_n(t_1,t_1)\equiv 0.$$

Поэтому, взяв $p=2$ в утверждении 6.1, мы не сможем доказать сходимость ξ_n к нулю с вероятностью 1, поскольку ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\mathsf{M}\{|\xi_n|^p\}$ будет мажорироваться расходящимся рядом Дирихле с показателем 1. Возьмем $p=4$ и оценим $\mathsf{M}\{|\xi_n|^4\}$.

Согласно (6.96) при $k=2$ и $n=2$, (6.98), (6.99) найдутся такие $C,\ C_1<\infty$, что

$$\mathsf{M}\{|\xi_n|^4\}\le C\left(\int\limits_{[t,T]^2}R_n^2(t_1,t_2)dt_1dt_2\right)^2\le\frac{C_1}{n^2}\ \Rightarrow\ \sum_{n=1}^{\infty}\mathsf{M}\{|\xi_n|^4\}\le C_1\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}.\quad(6.100)$$

Поскольку ряд в (6.100) сходится, то по утверждению 6.1 $\xi_n\to 0$ при $n\to\infty$ с в. 1 $\Rightarrow I_{00_{T,t}}^{*(i_1i_2)n}\to I_{00_{T,t}}^{*(i_1i_2)}$ при $n\to\infty$ с в. 1.

Перейдем к рассмотрению стохастических интегралов $I_{01_{T,t}}^{*(i_1i_2)}$, $I_{10_{T,t}}^{*(i_1i_2)}$, разложения которых имеют вид (6.41), (6.42). Очевидно, что случай $i_1\ne i_2$ рассматривается абсолютно аналогично вышеизложенным рассуждениям. При $i_1=i_2$ из разложений (6.41), (6.42) видно, что $\mathsf{M}\{|\xi_n|^2\}\le C_2/n^2$, т.е. при доказательстве сходимости с вероятностью 1 достаточно будет в утверждении 6.1 взять $p=2$. Разложения (6.37)–(6.39), (6.50) для интегралов $I_{0_{T,t}}^{(i_1)}$, $I_{1_{T,t}}^{(i_1)}$, $I_{2_{T,t}}^{(i_1)}$, $I_{3_{T,t}}^{(i_1)}$ изначально справедливы с вероятностью 1 (они содержат 1, 2, 3 и 4 слагаемых соответственно). По-видимому по предложенной схеме можно доказать сходимость с вероятностью 1 повторных стохастических интегралов кратности $k>2$.

6.8 Метод Г.Н. Мильштейна сильной аппроксимации повторных стохастических интегралов

6.8.1 Введение

Г.Н. Мильштейном в [70] предложен метод разложения повторных стохастических интегралов, основанный на разложении процесса броуновского моста в тригонометрический ряд Фурье со случайными коэффициентами.

Рассмотрим процесс броуновского моста

$$\mathbf{f}_t - \frac{t}{\Delta}\mathbf{f}_\Delta,\ t \in [0, \Delta],\ \Delta > 0, \tag{6.101}$$

где $\mathbf{f}_t \in \Re^m$ — стандартный векторный винеровский процесс с независимыми компонентами $\mathbf{f}_t^{(i)};\ i = 1, \ldots, m$.

Рассмотрим также сходящееся в среднеквадратическом смысле покомпонентное разложение процесса (6.101) в тригонометрический ряд Фурье:

$$\mathbf{f}_t^{(i)} - \frac{t}{\Delta}\mathbf{f}_\Delta^{(i)} = \frac{1}{2}a_{i,0} + \sum_{r=1}^{\infty}\left(a_{i,r}\cos\frac{2\pi rt}{\Delta} + b_{i,r}\sin\frac{2\pi rt}{\Delta}\right), \tag{6.102}$$

где

$$a_{i,r} = \frac{2}{\Delta}\int\limits_0^\Delta\left(\mathbf{f}_s^{(i)} - \frac{s}{\Delta}\mathbf{f}_\Delta^{(i)}\right)\cos\frac{2\pi rs}{\Delta}ds,\ b_{i,r} = \frac{2}{\Delta}\int\limits_0^\Delta\left(\mathbf{f}_s^{(i)} - \frac{s}{\Delta}\mathbf{f}_\Delta^{(i)}\right)\sin\frac{2\pi rs}{\Delta}ds;$$

$r = 0,\ 1, \ldots;\ i = 1, \ldots, m$.

Нетрудно показать [70, 86], что случайные величины $a_{i,r}, b_{i,r}$ гауссовские и удовлетворяют следующим соотношениям:

$$\mathsf{M}\left\{a_{i,r}b_{i,r}\right\} = \mathsf{M}\left\{a_{i,r}b_{i,k}\right\} = 0,\ \mathsf{M}\left\{a_{i,r}a_{i,k}\right\} = \mathsf{M}\left\{b_{i,r}b_{i,k}\right\} = 0,$$

$$\mathsf{M}\left\{a_{i_1,r}a_{i_2,r}\right\} = \mathsf{M}\left\{b_{i_1,r}b_{i_2,r}\right\} = 0,\ \mathsf{M}\left\{a_{i,r}^2\right\} = \mathsf{M}\left\{b_{i,r}^2\right\} = \frac{\Delta}{2\pi^2r^2},$$

где $i,\ i_1,\ i_2 = 1, \ldots, m;\ r \neq k;\ i_1 \neq i_2$.

Согласно (6.102) имеем

$$\mathbf{f}_t^{(i)} = \mathbf{f}_\Delta^{(i)}\frac{t}{\Delta} + \frac{1}{2}a_{i,0} + \sum_{r=1}^{\infty}\left(a_{i,r}\cos\frac{2\pi rt}{\Delta} + b_{i,r}\sin\frac{2\pi rt}{\Delta}\right), \tag{6.103}$$

где ряд сходится в среднеквадратическом смысле.

6.8.2 Аппроксимация повторных стохастических интегралов первой и второй кратности

Используя соотношение (6.103), нетрудно получить следующие сходящиеся в среднеквадратическом смысле разложения [70, 86]:

$$\int\limits_0^{*t} d\mathbf{f}_t^{(i)} = \frac{t}{\Delta}\mathbf{f}_\Delta^{(i)} + \frac{1}{2}a_{i,0} + \sum_{r=1}^{\infty}\left(a_{i,r}\cos\frac{2\pi rt}{\Delta} + b_{i,r}\sin\frac{2\pi rt}{\Delta}\right), \tag{6.104}$$

$$\int\limits_0^{*t}\int\limits_0^{*\tau} d\mathbf{f}_{\tau_1}^{(i)}d\tau=\frac{t^2}{2\Delta}\mathbf{f}_{\Delta}^{(i)}+\frac{t}{2}a_{i,0}+\frac{\Delta}{2\pi}\sum_{r=1}^{\infty}\frac{1}{r}\left\{a_{i,r}\sin\frac{2\pi rt}{\Delta}-b_{i,r}\left(\cos\frac{2\pi rt}{\Delta}-1\right)\right\}, \tag{6.105}$$

$$\int\limits_0^{*t}\int\limits_0^{*\tau} d\tau_1 d\mathbf{f}_{\tau}^{(i)}=t\int\limits_0^{*t} d\mathbf{f}_t^{(i)}-\int\limits_0^{*t}\int\limits_0^{*\tau} d\mathbf{f}_{\tau_1}^{(i)}d\tau=\frac{t^2}{2\Delta}\mathbf{f}_{\Delta}^{(i)}+t\sum_{r=1}^{\infty}\left\{a_{i,r}\cos\frac{2\pi rt}{\Delta}+\right.$$

$$\left.+b_{i,r}\sin\frac{2\pi rt}{\Delta}\right\}-\frac{\Delta}{2\pi}\sum_{r=1}^{\infty}\frac{1}{r}\left\{a_{i,r}\sin\frac{2\pi rt}{\Delta}-b_{i,r}\left(\cos\frac{2\pi rt}{\Delta}-1\right)\right\}, \tag{6.106}$$

$$\int\limits_0^{*t}\int\limits_0^{*\tau} d\mathbf{f}_{\tau_1}^{(i_1)}d\mathbf{f}_{\tau}^{(i_2)}=\frac{1}{\Delta}\mathbf{f}_{\Delta}^{(i_1)}\int\limits_0^{*t}\int\limits_0^{*\tau} d\tau_1 d\mathbf{f}_{\tau}^{(i_2)}+\frac{1}{2}a_{i_1,0}\int\limits_0^{*t} d\mathbf{f}_t^{(i_2)}+\frac{t\pi}{\Delta}\sum_{r=1}^{\infty}r\left(a_{i_1,r}b_{i_2,r}-\right.$$

$$\left.-b_{i_1,r}a_{i_2,r}\right)+\frac{1}{4}\sum_{r=1}^{\infty}\left\{\left(a_{i_1,r}a_{i_2,r}-b_{i_1,r}b_{i_2,r}\right)\left(1-\cos\frac{4\pi rt}{\Delta}\right)+\left(a_{i_1,r}b_{i_2,r}+\right.\right.$$

$$\left.\left.+b_{i_1,r}a_{i_2,r}\right)\sin\frac{4\pi rt}{\Delta}+\frac{2}{\pi r}\mathbf{f}_{\Delta}^{(i_2)}\left(a_{i_1,r}\sin\frac{2\pi rt}{\Delta}+b_{i_1,r}\left(\cos\frac{2\pi rt}{\Delta}-1\right)\right)\right\}+$$

$$+\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{r=1(r\neq k)}^{\infty}k\left\{a_{i_1,r}a_{i_2,k}\left[\frac{\cos\left(\frac{2\pi(k+r)t}{\Delta}\right)}{2(k+r)}+\frac{\cos\left(\frac{2\pi(k-r)t}{\Delta}\right)}{2(k-r)}-\frac{k}{k^2-r^2}\right]+\right.$$

$$+a_{i_1,r}b_{i_2,k}\left[\frac{\sin\left(\frac{2\pi(k+r)t}{\Delta}\right)}{2(k+r)}+\frac{\sin\left(\frac{2\pi(k-r)t}{\Delta}\right)}{2(k-r)}\right]+$$

$$+b_{i_1,r}b_{i_2,k}\left[\frac{\cos\left(\frac{2\pi(k-r)t}{\Delta}\right)}{2(k-r)}-\frac{\cos\left(\frac{2\pi(k+r)t}{\Delta}\right)}{2(k+r)}-\frac{r}{k^2-r^2}\right]+$$

$$\left.+\frac{\Delta}{2\pi}b_{i_1,r}a_{i_2,k}\left[\frac{\sin\left(\frac{2\pi(k+r)t}{\Delta}\right)}{2(k+r)}-\frac{\sin\left(\frac{2\pi(k-r)t}{\Delta}\right)}{2(k-r)}\right]\right\}. \tag{6.107}$$

Следует обратить особое внимание на то обстоятельство, что двойной ряд в (6.107) следует понимать как повторный, а не кратный (как в теореме 5.1), т.е. как повторный предел соответствующей последовательности двойных частичных сумм. Это связано с тем, что итеративная подстановка разложений винеровских процессов в повторный

стохастический интеграл приводит именно к повторному взятию операции предельного перехода.

Заметим, что кратный ряд гораздо предпочтительнее повторного при его приближенном представлении повторной частичной суммой, поскольку сходимость таких приближений обеспечивается при любом способе одновременного стремления к бесконечности верхних пределов суммирования повторной частичной суммы (для определенности обозначим их $p_1, \ldots, p_k$; см. теорему 5.1), в частности, в наиболее простом случае можно положить $p_1 = \ldots = p_k = p \to \infty$. Однако последнее условие, строго говоря, вовсе не гарантирует сходимости повторного ряда с такой же частичной суммой, как и у рассматриваемого кратного ряда.

Далее мы увидим, что применение метода Г.Н. Мильштейна к аппроксимации повторных стохастических интегралов по меньшей мере третьей кратности как раз связано с описанной выше проблемой. Отметим, что в [86] тем не менее не вполне обоснованно используется именно условие: $p_1 = p_2 = p_3 = p \to \infty$ [86. С. 202, 204].

Положим в соотношениях (6.104)–(6.107) $t = \Delta$ (при этом двойные частичные суммы повторного ряда в (6.107) обратятся в ноль).

В результате получим следующие сходящиеся в среднеквадратическом смысле разложения:

$$\int\limits_0^{*\Delta} d\mathbf{f}_t^{(i)} = \mathbf{f}_\Delta^{(i)}, \tag{6.108}$$

$$\int\limits_0^{*\Delta} \int\limits_0^{*\tau} d\mathbf{f}_{\tau_1}^{(i)} d\tau = \frac{1}{2}\Delta\left(\mathbf{f}_\Delta^{(i)} + a_{i,0}\right), \tag{6.109}$$

$$\int\limits_0^{*\Delta} \int\limits_0^{*\tau} d\tau_1 d\mathbf{f}_\tau^{(i)} = \frac{1}{2}\Delta\left(\mathbf{f}_\Delta^{(i)} - a_{i,0}\right), \tag{6.110}$$

$$\int\limits_0^{*\Delta} \int\limits_0^{*\tau} d\mathbf{f}_{\tau_1}^{(i_1)} d\mathbf{f}_\tau^{(i_2)} = \frac{1}{2}\mathbf{f}_\Delta^{(i_1)}\mathbf{f}_\Delta^{(i_2)} - \frac{1}{2}\left(a_{i_2,0}\mathbf{f}_\Delta^{(i_1)} - a_{i_1,0}\mathbf{f}_\Delta^{(i_2)}\right) +$$

$$+\pi \sum_{r=1}^{\infty} r\left(a_{i_1,r} b_{i_2,r} - b_{i_1,r} a_{i_2,r}\right). \tag{6.111}$$

При выводе (6.108)–(6.111) использовалось соотношение

$$a_{i,0} = -2\sum_{r=1}^{\infty} a_{i,r}, \tag{6.112}$$

которое следует из (6.102) при $t = \Delta$.

Объяснение того, что полученные разложения сходятся именно к соответствующим стохастическим интегралам Стратоновича приводится в [86].

6.8.3 Сравнение с методом, основанным на кратных рядах Фурье

Произведем сравнение разложений некоторых повторных стохастических интегралов Стратоновича первой и второй кратностей (здесь имеется ввиду, что интегрирование по винерорвским процессам в повторных стохастических интегралах осуществляется не более, чем два раза), полученных методом Г.Н. Мильштейна, и методом, основанным на кратных рядах Фурье по тригонометрической системе функций.

Введем в рассмотрение следующие независимые стандартные гауссовские случайные величины:

$$\xi_i = \frac{\mathbf{f}_{\Delta}^{(i)}}{\sqrt{\Delta}}, \quad \rho_{i,r} = \sqrt{\frac{2}{\Delta}}\pi r a_{i,r}, \quad \eta_{i,r} = \sqrt{\frac{2}{\Delta}}\pi r b_{i,r}, \tag{6.113}$$

где $i = 1, \ldots, m;\ r = 1,\ 2, \ldots$. В силу (6.112) имеем

$$a_{i,0} = -\sqrt{2\Delta}\sum_{r=1}^{\infty}\frac{1}{\pi r}\rho_{i,r}. \tag{6.114}$$

Подставляя соотношения (6.113) и (6.114) в (6.108)–(6.111), получаем следующие сходящиеся в среднеквадратическом смысле разложения:

$$\int\limits_0^{*\Delta} d\mathbf{f}_t^{(i)} = \sqrt{\Delta}\xi_i, \tag{6.115}$$

$$\int\limits_0^{*\Delta}\int\limits_0^{*\tau} d\mathbf{f}_{\tau_1}^{(i)} d\tau = \frac{1}{2}\Delta^{\frac{3}{2}}\left(\xi_i - \frac{\sqrt{2}}{\pi}\sum_{r=1}^{\infty}\frac{1}{r}\rho_{i,r}\right), \tag{6.116}$$

$$\int\limits_0^{*\Delta}\int\limits_0^{*\tau} d\tau_1 d\mathbf{f}_{\tau}^{(i)} = \frac{1}{2}\Delta^{\frac{3}{2}}\left(\xi_i + \frac{\sqrt{2}}{\pi}\sum_{r=1}^{\infty}\frac{1}{r}\rho_{i,r}\right), \tag{6.117}$$

$$\int\limits_0^{*\Delta}\int\limits_0^{*\tau} d\mathbf{f}_{\tau_1}^{(i_1)} d\mathbf{f}_{\tau}^{(i_2)} = \frac{\Delta}{2}\Bigg[\xi_{i_1}\xi_{i_2} + \frac{1}{\pi}\sum_{r=1}^{\infty}\frac{1}{r}\Big(\rho_{i_1,r}\eta_{i_2,r} - \eta_{i_1,r}\rho_{i_2,r} +$$

$$+\sqrt{2}\left(\rho_{i_2,r}\xi_{i_1} - \rho_{i_1,r}\xi_{i_2}\right)\Big)\Bigg]. \tag{6.118}$$

Учитывая принятые нами ранее обозначения для повторных стохастических интегралов, можно записать

$$\int\limits_0^{*\Delta} d\mathbf{f}_t^{(i)} = I_{0_{\Delta,0}}^{*(i)} = J_{(1)\Delta,0}^{*(i)}, \tag{6.119}$$

$$\int\limits_0^{*\Delta} \int\limits_0^{*\tau} d\mathbf{f}_{\tau_1}^{(i)} d\tau = \Delta I_{0_{\Delta,0}}^{*(i)} + I_{1_{\Delta,0}}^{*(i)} = J_{(10)\Delta,0}^{*(i)}, \tag{6.120}$$

$$\int\limits_0^{*\Delta} \int\limits_0^{*\tau} d\tau_1 d\mathbf{f}_{\tau}^{(i)} = -I_{1_{\Delta,0}}^{*(i)} = J_{(01)\Delta,0}^{*(i)}, \tag{6.121}$$

$$\int\limits_0^{*\Delta} \int\limits_0^{*\tau} d\mathbf{f}_{\tau_1}^{(i_1)} d\mathbf{f}_{\tau}^{(i_2)} = I_{00_{\Delta,0}}^{*(i_1 i_2)} = J_{(11)\Delta,0}^{*(i_1 i_2)}. \tag{6.122}$$

Подставляя разложения интегралов $I_{0_{\Delta,0}}^{*(i)}$, $I_{1_{\Delta,0}}^{*(i)}$, $I_{00_{\Delta,0}}^{*(i_2 i_1)}$ или интегралов $J_{(1)\Delta,0}^{*(i)}$, $J_{(10)\Delta,0}^{*(i)}$, $J_{(01)\Delta,0}^{*(i)}$, $J_{(11)\Delta,0}^{*(i_1 i_2)}$, полученные ранее с помощью метода, основанного на кратных рядах Фурье по тригонометрической системе функций, в представления (6.119)–(6.122), с точностью до обозначений получаем разложения (6.115)–(6.118). Это свидетельствует о том, что по крайней мере для рассмотренных повторных стохастических интегралов Стратоновича и тригонометрической системы функций метод Г.Н. Мильштейна и метод, основанный на кратных рядах Фурье, дают один и тот же результат (это интересный факт, хотя и вполне ожидаемый).

В следующем разделе обсудим применение метода Г.Н. Мильштейна к повторным стохастическим интегралам 3 кратности.

6.8.4 О проблемах метода Г.Н. Мильштейна применительно к повторным стохастическим интегралам кратностей выше второй

Ранее уже отмечалось, что технические особенности метода Г.Н. Мильштейна таковы, что он может приводить к повторным рядам (в противоположность кратным рядам из теоремы 5.1) из произведений независимых стандартных гауссовских случайных величин. В случае наиболее простого повторного стохастического интеграла второй кратности эту проблему удалось, как мы видели в предыдущем разделе, избежать. Однако, уже для простейших стохастических интегралов третьей кратности это оказалось не так.

Приведем, полученное в [86], разложение повторного стохастического интеграла Стратоновича третьей кратности:

$$J_{(111)\Delta,0}^{*(i_1i_2i_3)}=\frac{1}{\Delta}J_{(1)\Delta,0}^{*(i_1)}J_{(011)\Delta,0}^{*(i_2i_3)}+\frac{1}{2}a_{i_1,0}J_{(11)\Delta,0}^{*(i_2i_3)}+\frac{1}{2\pi}b_{i_1}J_{(1)\Delta,0}^{(i_2)}J_{(1)\Delta,0}^{*(i_3)}-$$

$$-\Delta J_{(1)\Delta,0}^{*(i_2)}B_{i_1i_3}+\Delta J_{(1)\Delta,0}^{*(i_3)}\left(\frac{1}{2}A_{i_1i_2}-C_{i_2i_1}\right)+\Delta^{\frac{3}{2}}D_{i_1i_2i_3}, \qquad (6.123)$$

где

$$J_{(011)\Delta,0}^{*(i_2i_3)}=\frac{1}{6}J_{(1)\Delta,0}^{*(i_2)}J_{(1)\Delta,0}^{*(i_3)}-\frac{1}{\pi}\Delta J_{(1)\Delta,0}^{*(i_3)}b_{i_2}+$$

$$+\Delta^2B_{i_2i_3}-\frac{1}{4}\Delta a_{i_3,0}J_{(1)\Delta,0}^{*(i_2)}+\frac{1}{2\pi}\Delta b_{i_3}J_{(1)\Delta,0}^{*(i_2)}+\Delta^2C_{i_2i_3}+\frac{1}{2}\Delta^2A_{i_2i_3},$$

$$A_{i_2i_3}=\frac{\pi}{\Delta}\sum_{r=1}^{\infty}r\left(a_{i_2,r}b_{i_3,r}-b_{i_2,r}a_{i_3,r}\right),$$

$$C_{i_2i_3}=-\frac{1}{\Delta}\sum_{l=1}^{\infty}\sum_{r=1(r\neq l)}^{\infty}\frac{r}{r^2-l^2}\left(ra_{i_2,r}a_{i_3,l}+lb_{i_2,r}b_{i_3,l}\right),$$

$$B_{i_2i_3}=\frac{1}{2\Delta}\sum_{r=1}^{\infty}\left(a_{i_2,r}a_{i_3,r}+b_{i_2,r}b_{i_3,r}\right),\ b_i=\sum_{r=1}^{\infty}\frac{1}{r}b_{i,r},$$

$$D_{i_1i_2i_3}=$$

$$-\frac{\pi}{2\Delta^{\frac{3}{2}}}\sum_{l=1}^{\infty}\sum_{r=1}^{\infty}l\Big(a_{i_2,l}\left(a_{i_3,l+r}b_{i_1,r}-a_{i_1,r}b_{i_3,l+r}\right)+b_{i_2,l}\left(a_{i_1,r}a_{i_3,r+l}+b_{i_1,r}b_{i_3,l+r}\right)\Big)$$

$$+\frac{\pi}{2\Delta^{\frac{3}{2}}}\sum_{l=1}^{\infty}\sum_{r=1}^{l-1}l\Big(a_{i_2,l}\left(a_{i_1,r}b_{i_3,l-r}+a_{i_3,l-r}b_{i_1,r}\right)-b_{i_2,l}\left(a_{i_1,r}a_{i_3,l-r}-b_{i_1,r}b_{i_3,l-r}\right)\Big)$$

$$+\frac{\pi}{2\Delta^{\frac{3}{2}}}\sum_{l=1}^{\infty}\sum_{r=l+1}^{\infty}l\Big(a_{i_2,l}\left(a_{i_3,r-l}b_{i_1,r}-a_{i_1,r}b_{i_3,r-l}\right)+b_{i_2,l}\left(a_{i_1,r}a_{i_3,r-l}+b_{i_1,r}b_{i_3,r-l}\right)\Big);$$

остальные обозначения встречались в предыдущем разделе.

Из вида разложения (6.123) и разложения для $J_{(011)\Delta,0}^{*(i_2i_3)}$ можно заключить, что они содержат повторные ряды. Далее, при аппроксимации рассмотренных стохастических интегралов в [86] предлагается положить верхние пределы суммирования равными p, что, согласно рассуждениям разд. 6.8.2, некорректно.

Этой и ряда других проблем можно избежать при использовании альтернативного метода, основанного на теореме 5.1 (см. введение к данной главе и предисловие к книге).

Если предположить, что члены разложения (6.123) совпадают с членами его аналога, полученного с помощью теоремы 5.1 и формул связи

стохастических интегралов Ито и Стратоновича (это, как мы видели в предыдущем разделе, действительно так для простейших стохастических интегралов первой и второй кратности), то повторные ряды в (6.123) будет можно, согласно теореме 5.1, заменить на кратные, как формально и сделано в [86]. Однако, это требует отдельного и весьма непростого обоснования.

6.9 Представление повторных стохастических интегралов с помощью полиномов Эрмита

В предыдущих разделах данной главы рассматривалась общая теория аппроксимации повторных стохастических интегралов Ито и Стратоновича. Однако в некоторых частных случаях можно получить точные представления повторных стохастических интегралов Ито и Стратоновича в виде полиномов конечных степеней от одной стандартной гауссовской случайной величины. Этому вопросу будет посвящен настоящий раздел. Результаты, излагаемые в нем, можно встретить, например, в [64, 70, 86, 130].

Рассмотрим семейство производящих многочленов $H_n(x,y);\ n = 0,\ 1,\ldots$ вида

$$H_n(x,y) = \frac{d^n}{d\alpha^n} e^{\alpha x - \frac{1}{2}\alpha^2 y}\Bigg|_{\alpha=0}.$$

Известно, что многочлены $H_n(x,y)$ связаны с многочленами Эрмита $h_n(x)$ формулой $H_n(x,y) = \left(\frac{y}{2}\right)^{\frac{n}{2}} h_n\left(\frac{x}{\sqrt{2y}}\right)$. Используя рекуррентные формулы [131]

$$\frac{dh_n}{dz}(z) = 2nh_{n-1}(z);\ n = 1,\ 2,\ldots,$$

$$h_n(z) = 2zh_{n-1}(z) - 2(n-1)h_{n-2}(z);\ n = 2,\ 3,\ldots,$$

нетрудно получить следующие рекуррентные соотношения для многочленов $H_n(x,y)$:

$$\frac{\partial H_n}{\partial x}(x,y) = nH_{n-1}(x,y);\ n = 1,\ 2,\ldots, \tag{6.124}$$

$$\frac{\partial H_n}{\partial y}(x,y) = \frac{n}{2y}H_n(x,y) - \frac{nx}{2y}H_{n-1}(x,y);\ n = 1,\ 2,\ldots, \tag{6.125}$$

$$\frac{\partial H_n}{\partial y}(x,y) = -\frac{n(n-1)}{2}H_{n-2}(x,y);\ n = 2,\ 3,\ldots \tag{6.126}$$

Из (6.124)–(6.126) следует, что

$$\frac{\partial H_n}{\partial y}(x,y)+\frac{1}{2}\frac{\partial^2 H_n}{\partial x^2}(x,y)=0;\ n=2,\ 3,\ldots \tag{6.127}$$

По формуле Ито с вероятностью 1 имеем

$$H_n(f_t,t)-H_n(0,0)=\int\limits_0^t\frac{\partial H_n}{\partial x}(f_s,s)df_s+\int\limits_0^t\left(\frac{\partial H_n}{\partial y}(f_s,s)+\frac{1}{2}\frac{\partial^2 H_n}{\partial x^2}(f_s,s)\right)ds, \tag{6.128}$$

где $f_t\in\Re^1$ — стандартный скалярный винеровский процесс. С учетом (6.127) и того, что $H_n(0,0)=0;\ n=2,\ 3,\ldots$ из (6.128) с вероятностью 1 находим

$$H_n(f_t,t)=\int\limits_0^t nH_{n-1}(f_s,s)df_s;\ n=2,\ 3,\ldots$$

Далее по индукции нетрудно получить с вероятностью 1 следующее соотношение:

$$I_t^{(n)}\stackrel{\text{def}}{=}\int\limits_0^t\ldots\int\limits_0^{t_2}df_{t_1}\ldots df_{t_n}=\frac{1}{n!}H_n(f_t,t);\ n=1,\ 2,\ldots \tag{6.129}$$

Рассмотрим одно из обобщений [130] формулы (6.129):

$$J_t^{(n)}\stackrel{\text{def}}{=}\int\limits_0^t\psi_{t_n}\ldots\int\limits_0^{t_2}\psi_{t_1}df_{t_1}\ldots df_{t_n}=\frac{1}{n!}H_n(\delta_t,\Delta_t);\ n=1,\ 2,\ldots, \tag{6.130}$$

где $\delta_t\stackrel{\text{def}}{=}\int\limits_0^t\psi_s df_s$; $\Delta_t\stackrel{\text{def}}{=}\int\limits_0^t\psi_s^2 ds$; $\psi_t\in\mathcal{M}_2([0,T])$.

Пример 6.3. *Нетрудно проверить, что первые восемь формул из семейства* (6.130) *имеют вид*

$$J_t^{(1)}=\frac{1}{1!}\delta_t,\ \ J_t^{(2)}=\frac{1}{2!}\left(\delta_t^2-\Delta_t\right),\ \ J_t^{(3)}=\frac{1}{3!}\left(\delta_t^3-3\delta_t\Delta_t\right),$$

$$J_t^{(4)}=\frac{1}{4!}\left(\delta_t^4-6\delta_t^2\Delta_t+3\Delta_t^2\right),\ \ J_t^{(5)}=\frac{1}{5!}\left(\delta_t^5-10\delta_t^3\Delta_t+15\delta_t\Delta_t^2\right),$$

$$J_t^{(6)}=\frac{1}{6!}\left(\delta_t^6-15\delta_t^4\Delta_t+45\delta_t^2\Delta_t^2-15\Delta_t^3\right),$$

$$J_t^{(7)}=\frac{1}{7!}\left(\delta_t^7-21\delta_t^5\Delta_t+105\delta_t^3\Delta_t^2-105\delta_t\Delta_t^3\right),$$

$$J_t^{(8)} = \frac{1}{8!}\left(\delta_t^8 - 28\delta_t^6\Delta_t + 210\delta_t^4\Delta_t^2 - 420\delta_t^2\Delta_t^3 + 105\Delta_t^4\right),$$

где равенства справедливы с вероятностью 1.

Докажем с вероятностью 1 следующее соотношение для повторных стохастических интегралов Стратоновича [86]:

$$I_t^{*(n)} = \frac{1}{n!}f_t^n,\ I_t^{*(n)} \stackrel{\text{def}}{=} \int\limits_0^{*t} \ldots \int\limits_0^{*t_2} df_{t_1}\ldots df_{t_n}. \tag{6.131}$$

Сначала рассмотрим случай $n = 2$. По теореме 3.9

$$I_t^{*(2)} = I_t^{(2)} + \frac{1}{2}\int\limits_0^t dt_1 \text{ с в.1.} \tag{6.132}$$

Из соотношения (6.129) при $n = 2$ следует, что с вероятностью 1

$$I_t^{(2)} = \frac{1}{2}f_t^2 - \frac{1}{2}\int\limits_0^t dt_1. \tag{6.133}$$

Подставляя (6.133) в (6.132), с вероятностью 1 имеем $I_t^{*(2)} = f_t^2/2!$. Таким образом, формула (6.131) справедлива при $n = 2$. Предположим, что формула (6.131) справедлива при $n = k$, т. е. с вероятностью 1 $I_t^{*(k)} = f_t^k/k!$, и рассмотрим $\int\limits_0^{*t} I_\tau^{*(k)} df_\tau \stackrel{\text{def}}{=} I_t^{*(k+1)}$. По леммам 1.2, 1.5 и предположению индукции с вероятностью 1 получим

$$I_t^{*(k+1)} = \int\limits_0^t \frac{f_\tau^k}{k!}df_\tau + \frac{1}{2}\int\limits_0^t \frac{f_\tau^{k-1}}{(k-1)!}d\tau. \tag{6.134}$$

Введем случайный процесс ξ_t вида $\xi_t = f_t^{k+1}/(k+1)!$ и найдем с помощью формулы Ито его стохастический дифференциал:

$$d\xi_t = \frac{1}{2}\frac{f_t^{k-1}}{(k-1)!}dt + \frac{f_t^k}{k!}df_t. \tag{6.135}$$

Поскольку $\xi_0 = 0$, то из (6.134) и (6.135) следует, что $I_t^{*(k+1)} = f_t^{k+1}/(k+1)!$ с вероятностью 1. Таким образом, соотношение (6.131) доказано по индукции.

Нетрудно видеть, что формула (6.131) допускает следующее обобщение:

$$J_t^{*(n)} = \frac{1}{n!}\delta_t^n, \tag{6.136}$$

где $J_t^{*(n)} \stackrel{\text{def}}{=} \int\limits_0^{*t} \psi(t_n)\ldots\int\limits_0^{*t_2} \psi(t_1)df_{t_1}\ldots df_{t_n}$; $\delta_t = \int\limits_0^t \psi(s)df_s$, а $\psi(s) : [0,t] \to \Re^1$ — некоторая непрерывно дифференцируемая функция.

6.10 Использование кратных интегральных сумм для аппроксимации повторных стохастических интегралов Ито

В начале данной главы уже отмечалось, что в свете современного состояния вопроса об аппроксимации повторных стохастических интегралов рассматриваемый ниже метод вряд ли имеет сколь какую-нибудь практическую ценность. Однако для получения общей картины мы все же его рассмотрим.

Отметим, что в ряде работ (см., например, [70]) предлагалось использовать различные варианты интегральных сумм для аппроксимации повторных стохастических интегралов. В данном разделе рассмотрим одну из модификаций метода интегральных сумм.

Пусть функции $\psi_l(\tau);\ l=1,\ldots,k$ удовлетворяют на промежутке $[t,T]$ условиям Липшица с постоянными C_l, т. е.

$$|\psi_l(\tau_1)-\psi_l(\tau_2)|\le C_l|\tau_1-\tau_2| \text{ при всех } \tau_1,\tau_2\in[t,T]. \tag{6.137}$$

Тогда согласно лемме 5.1 с вероятностью 1 справедливо равенство

$$J[\psi^{(k)}]_{T,t}=\underset{N\to\infty}{\text{l.i.m.}}\sum_{j_k=0}^{N-1}\ldots\sum_{j_1=0}^{j_2-1}\prod_{l=1}^{k}\psi_l(\tau_{j_l})\Delta\mathbf{w}_{\tau_{j_l}}^{(i_l)}.$$

Здесь сохранен смысл обозначений, входящих в формулу (5.7).

Будем искать аппроксимацию повторного стохастического интеграла Ито $J[\psi^{(k)}]_{T,t}$ в виде

$$J[\psi^{(k)}]_{T,t}^{N}=\sum_{j_k=0}^{N-1}\ldots\sum_{j_1=0}^{j_2-1}\prod_{l=1}^{k}\psi_l(\tau_{j_l})\Delta\mathbf{w}_{\tau_{j_l}}^{(i_l)}. \tag{6.138}$$

Соотношение (6.138) может быть переписано в следующей форме:

$$J[\psi^{(k)}]_{T,t}^{N}=\sum_{j_k=0}^{N-1}\ldots\sum_{j_1=0}^{j_2-1}\prod_{l=1}^{k}(\Delta\tau_{j_l})^{\frac{1}{2}}\psi_l(\tau_{j_l})\mathbf{u}_{j_l}^{(i_l)}, \tag{6.139}$$

где $\mathbf{u}_j^{(i)}\stackrel{\text{def}}{=}(\mathbf{w}_{\tau_{j+1}}^{(i)}-\mathbf{w}_{\tau_j}^{(i)})/(\Delta\tau_j)^{\frac{1}{2}}$; $i=1,\ldots,m$ — независимые при $i\ne 0$ и различных j стандартные гауссовские случайные величины; $\mathbf{u}_j^{(0)}=(\Delta\tau_j)^{\frac{1}{2}}$. Пусть

$$\tau_j=t+j\Delta;\ j=0,1,\ldots,N;\ \tau_N=T,\ \Delta>0. \tag{6.140}$$

Тогда формула (6.139) примет вид

$$J[\psi^{(k)}]_{T,t}^{N}=\Delta^{\frac{k}{2}}\sum_{j_k=0}^{N-1}\ldots\sum_{j_1=0}^{j_2-1}\prod_{l=1}^{k}\psi_l(t+j_l\Delta)\mathbf{u}_{j_l}^{(i_l)}, \tag{6.141}$$

где $\mathbf{u}_j^{(i)}\stackrel{\rm def}{=}(\mathbf{w}_{t+(j+1)\Delta}^{(i)}-\mathbf{w}_{t+j\Delta}^{(i)})/\sqrt{\Delta}$; $i=1,\ldots,m$.

Теорема 6.1. *Пусть функции $\psi_l(\tau)$; $l=1,\ldots,k$ удовлетворяют условию Липшица* (6.137), *а $\{\tau_j\}_{j=0}^{N-1}$ — разбиение промежутка $[t,T]$ вида* (6.140). *Тогда при достаточно малой величине $T-t$ существует такая постоянная $H_k<\infty$, что выполняется следующая оценка:*

$$\mathsf{M}\left\{\left(J[\psi^{(k)}]_{T,t}-J[\psi^{(k)}]_{T,t}^{N}\right)^2\right\}\le\frac{H_k(T-t)^2}{N}.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Нетрудно видеть, что при достаточно малой величине $T-t$ найдется такая постоянная C_k, что

$$\mathsf{M}\left\{\left(J[\psi^{(k)}]_{T,t}-J[\psi^{(k)}]_{T,t}^{N}\right)^2\right\}\le C_k\mathsf{M}\left\{\left(J[\psi^{(2)}]_{T,t}-J[\psi^{(2)}]_{T,t}^{N}\right)^2\right\}.$$

Заметим, что

$$J[\psi^{(2)}]_{T,t}-J[\psi^{(2)}]_{T,t}^{N}=\sum_{j=1}^{3}S_j^N,$$

где

$$S_1^N=\sum_{j_1=0}^{N-1}\int\limits_{\tau_{j_1}}^{\tau_{j_1+1}}\psi_2(t_2)\int\limits_{\tau_{j_1}}^{t_2}\psi_1(t_1)d\mathbf{w}_{t_1}^{(i_1)}d\mathbf{w}_{t_2}^{(i_2)};$$

$$S_2^N=\sum_{j_1=0}^{N-1}\int\limits_{\tau_{j_1}}^{\tau_{j_1+1}}\left(\psi_2(t_2)-\psi_2(\tau_{j_1})\right)d\mathbf{w}_{t_2}^{(i_2)}\sum_{j_2=0}^{j_1-1}\int\limits_{\tau_{j_2}}^{\tau_{j_2+1}}\psi_1(t_1)d\mathbf{w}_{t_1}^{(i_1)};$$

$$S_3^N=\sum_{j_1=0}^{N-1}\psi_2(\tau_{j_1})\Delta\mathbf{w}_{\tau_{j_1}}^{(i_2)}\sum_{j_2=0}^{j_1-1}\int\limits_{\tau_{j_2}}^{\tau_{j_2+1}}\left(\psi_1(t_1)-\psi_1(\tau_{j_2})\right)d\mathbf{w}_{t_1}^{(i_1)}.$$

Поэтому

$$\left(\mathsf{M}\left\{\left(J[\psi^{(2)}]_{T,t}-J[\psi^{(2)}]_{T,t}^{N}\right)^2\right\}\right)^{\frac{1}{2}}\le\sum_{j=1}^{3}\left(\mathsf{M}\left\{\left(S_j^N\right)^2\right\}\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Оценим с помощью моментных свойств стохастических интегралов (см. главу 1) величины $\mathsf{M}\left\{\left(S_i^N\right)^2\right\}$; $i=1,2,3$. Для этого рассмотрим четыре случая.

1. $i_1,\ i_2 \neq 0:$

$$\mathsf{M}\left\{\left(S_1^N\right)^2\right\} \le \frac{\Delta}{2}(T-t)\sup_{s\in[t,T]}\left\{\psi_2^2(s)\psi_1^2(s)\right\},$$
$$\mathsf{M}\left\{\left(S_2^N\right)^2\right\} \le \frac{\Delta^2}{6}(T-t)^2\left(C_2\right)^2\sup_{s\in[t,T]}\left\{\psi_1^2(s)\right\},$$
$$\mathsf{M}\left\{\left(S_3^N\right)^2\right\} \le \frac{\Delta^2}{6}(T-t)^2\left(C_1\right)^2\sup_{s\in[t,T]}\left\{\psi_2^2(s)\right\}.$$

2. $i_1 \neq 0,\ i_2 = 0:$

$$\mathsf{M}\left\{\left(S_1^N\right)^2\right\} \le \frac{\Delta}{2}(T-t)^2\sup_{s\in[t,T]}\left\{\psi_2^2(s)\psi_1^2(s)\right\},$$
$$\mathsf{M}\left\{\left(S_2^N\right)^2\right\} \le \frac{\Delta^2}{3}(T-t)^3\left(C_2\right)^2\sup_{s\in[t,T]}\left\{\psi_1^2(s)\right\},$$
$$\mathsf{M}\left\{\left(S_3^N\right)^2\right\} \le \frac{\Delta^2}{3}(T-t)^3\left(C_1\right)^2\sup_{s\in[t,T]}\left\{\psi_2^2(s)\right\}.$$

3. $i_2 \neq 0,\ i_1 = 0:$

$$\mathsf{M}\left\{\left(S_1^N\right)^2\right\} \le \frac{\Delta^2}{3}(T-t)\sup_{s\in[t,T]}\left\{\psi_2^2(s)\psi_1^2(s)\right\},$$
$$\mathsf{M}\left\{\left(S_2^N\right)^2\right\} \le \frac{\Delta^2}{3}(T-t)^3\left(C_2\right)^2\sup_{s\in[t,T]}\left\{\psi_1^2(s)\right\},$$
$$\mathsf{M}\left\{\left(S_3^N\right)^2\right\} \le \frac{\Delta^2}{8}(T-t)^3\left(C_1\right)^2\sup_{s\in[t,T]}\left\{\psi_2^2(s)\right\}.$$

4. $i_1 = i_2 = 0:$

$$\mathsf{M}\left\{\left(S_1^N\right)^2\right\} \le \frac{\Delta^2}{4}(T-t)^2\sup_{s\in[t,T]}\left\{\psi_2^2(s)\psi_1^2(s)\right\},$$
$$\mathsf{M}\left\{\left(S_2^N\right)^2\right\} \le \frac{\Delta^2}{4}(T-t)^4\left(C_2\right)^2\sup_{s\in[t,T]}\left\{\psi_1^2(s)\right\},$$
$$\mathsf{M}\left\{\left(S_3^N\right)^2\right\} \le \frac{\Delta^2}{16}(T-t)^4\left(C_1\right)^2\sup_{s\in[t,T]}\left\{\psi_2^2(s)\right\}.$$

Согласно полученным оценкам и условию (6.137) имеем

$$\mathsf{M}\left\{\left(J[\psi^{(k)}]_{T,t} - J[\psi^{(k)}]_{T,t}^N\right)^2\right\} \le H_k(T-t)\Delta = \frac{H_k(T-t)^2}{N},$$

где $H_k < \infty$. Теорема доказана. $\square$

Пример 6.4. *Показать, что справедливо следующее соотношение:*

$$\mathsf{M}\left\{\left(I_{00_{T,t}}^{(i_2 i_1)} - I_{00_{T,t}}^{(i_2 i_1)N}\right)^2\right\} = \frac{(T-t)^2}{2N}, \tag{6.142}$$

где $i_1, i_2 = 1, \ldots, m$, *а* $I_{00_{T,t}}^{(i_2 i_1)N}$ *— аппроксимация стохастического интеграла* $I_{00_{T,t}}^{(i_2 i_1)}$ *вида* (6.2), *полученная по формуле* (6.141).

Напомним, что метод, основанный на кратных интегральных суммах, сходится в среднеквадратическом смысле гораздо медленнее, чем метод, основанный на кратных рядах Фурье (см. (6.142), (6.83), (6.52) и табл. 6.42, 6.45).

6.11 Сравнение эффективности рядов Фурье–Лежандра, тригонометрических рядов Фурье и интегральных сумм при аппроксимации стохастических интегралов

В данном разделе сравним эффективность применения полиномиальных и тригонометрических функций при аппроксимации повторных стохастических интегралов. Кроме того, сравним эффективность использования методов, основанных на кратных рядах Фурье и кратных интегральных суммах.

Рассмотрим стохастические интегралы $I_{0_{T,t}}^{(1)}$, $I_{00_{T,t}}^{(21)}$, которые могут встретиться, например, при реализации сильного численного метода порядка точности 1.0 (см. главу 7). Аппроксимируем их сначала с помощью тригонометрической системы функций (формулы (6.76), (6.78)), а затем с помощью полиномов Лежандра (формулы (6.37), (6.40)). Число $q = q_{\text{trig}}$ в первом случае выберем из условия

$$\frac{(T-t)^2}{2\pi^2}\left(\frac{\pi^2}{6} - \sum_{r=1}^{q_{\text{trig}}} \frac{1}{r^2}\right) \le \varepsilon, \tag{6.143}$$

а число $q = q_{\text{pol}}$ во втором случае — из условия

$$\frac{(T-t)^2}{2}\left(\frac{1}{2} - \sum_{i=1}^{q_{\text{pol}}} \frac{1}{4i^2-1}\right) \le \varepsilon, \tag{6.144}$$

где q_{trig} и q_{pol} — минимальные натуральные числа, удовлетворяющие условиям (6.143) и (6.144) соответственно.

В табл. 6.42 приведены значения q_{trig}, q_{pol} при $\varepsilon = (T-t)^3$, $T-t = 2^{-j}$; $j = 5, 6, \ldots, 10$. Значения T_{trig}^*, T_{pol}^* соответствуют компьютерному времени, затраченному на 200 независимых моделирований интегралов $I_{0_{T,t}}^{(1)}$, $I_{00_{T,t}}^{(21)}$ по формулам (6.76), (6.78) при $q = q_{\text{trig}}$ и по формулам (6.37), (6.40) при $q = q_{\text{pol}}$. При этом каждое фиксированное моделирование

Таблица 6.42. Значения q_{trig}, q_{pol}, T^*_{trig}, T^*_{pol}.

$T-t$	2^{-5}	2^{-6}	2^{-7}	2^{-8}	2^{-9}	2^{-10}
q_{trig}	3	4	7	14	27	53
q_{pol}	5	9	17	33	65	129
T^*_{trig}, с	4	5	7	10	16	30
T^*_{pol}, с	3	4	7	13	23	45

по формулам (6.76), (6.78) и (6.37), (6.40) отвечает одной и той же реализации последовательности независимых стандартных гауссовских случайных величин.

Отметим, что формула (6.78) использовалась здесь без слагаемого

$$\frac{1}{2}(T-t)\frac{\sqrt{2}}{\pi}\sqrt{\alpha_q}\left(\xi_q^{(i_1)}\zeta_0^{(i_2)}-\zeta_0^{(i_1)}\xi_q^{(i_2)}\right),$$

на численное моделирование которого очевидно требуется определенное компьютерное время.

Из результатов, приведенных в табл. 6.42, видно, что при $T-t>2^{-7}$ полиномиальная система оказывается чуть лучше тригонометрической по затратам компьютерного времени. Однако уже при $T-t\le 2^{-8}$ использование тригонометрической системы дает незначительный выигрыш. Это очевидно связано с тем, что значения чисел q_{pol} возрастают настолько быстрее значений чисел q_{trig} при уменьшении $T-t$, что, несмотря на более простой вид формулы (6.40) по сравнению с (6.78), вычислительные затраты в случае тригонометрической системы функций оказываются меньше, чем в случае полиномиальной системы при $T-t\le 2^{-8}$.

Картина кардинально меняется при рассмотрении совокупностей более сложных стохастических интегралов.

Рассмотрим стохастические интегралы

$$I_{0_{T,t}}^{(i_1)},\ I_{1_{T,t}}^{(i_1)},\ I_{00_{T,t}}^{(i_2 i_1)},\ I_{000_{T,t}}^{(i_3 i_2 i_1)};\ i_1,i_2,i_3=1,\ldots,m, \tag{6.145}$$

которые могут встретиться, например, при реализации сильного численного метода порядка точности 1.5 (см. главу 7).

Приведем численный результат, который позволяет видеть, что при моделировании набора стохастических интегралов, необходимого для реализации сильного численного метода порядка точности 1.5 (см. главу 7), полиномиальная система функций дает выигрыш более чем в 2 раза в компьютерном времени в сравнении с тригонометрической системой функций, по крайней мере, при не очень малых $T-t$ (заметим,

что в данном разделе также будет рассмотрена достаточно общая ситуация, в которой полиномиальная система функций даст выигрыш в 3 раза по сравнению с тригонометрической в рамках рассматриваемого вопроса).

Сначала рассмотрим упрощенный, по сравнению с (6.145), набор стохастических интегралов $I_{00_{T,t}}^{(21)}$, $I_{000_{T,t}}^{(321)}$. В случае полиномиальной системы функций будем искать числа q, q_1 в аппроксимациях $I_{00_{T,t}}^{(21)q}$, $I_{000_{T,t}}^{(321)q_1}$, определяемых формулами (6.40), (6.62), исходя из следующих условий:

$$\frac{(T-t)^2}{2}\left(\frac{1}{2}-\sum_{i=1}^{q}\frac{1}{4i^2-1}\right)\le (T-t)^4, \tag{6.146}$$

$$(T-t)^3\left(\frac{1}{6}-\sum_{i,j,k=0}^{q_1}\frac{\left(C_{kji}\right)^2}{(T-t)^3}\right)\le (T-t)^4, \tag{6.147}$$

где

$$C_{kji}=\frac{\sqrt{(2i+1)(2j+1)(2k+1)}}{8}(T-t)^{3/2}\bar{C}_{kji};$$

$$\bar{C}_{kji}=\int\limits_{-1}^{1}P_k(z)\int\limits_{-1}^{z}P_j(y)\int\limits_{-1}^{y}P_i(x)dxdydz;$$

$P_i(x)$ — полином Лежандра.

В случае тригонометрической системы функций воспользуемся формулами (6.78), (6.79) при $i_3=3$, $i_2=2$, $i_1=1$, а числа q, q_1 будем искать из условий:

$$\mathsf{M}\left\{\left(I_{00_{T,t}}^{(i_2i_1)}-I_{00_{T,t}}^{(i_2i_1)q}\right)^2\right\}=\frac{(T-t)^2}{2\pi^2}\left(\frac{\pi^2}{6}-\sum_{r=1}^{q}\frac{1}{r^2}\right)\le\varepsilon, \tag{6.148}$$

$$\mathsf{M}\left\{\left(I_{000_{T,t}}^{(i_3i_2i_1)}-I_{000_{T,t}}^{(i_3i_2i_1)q,q_1}\right)^2\right\}=(T-t)^3\left\{\frac{4}{45}-\frac{1}{4\pi^2}\sum_{r=1}^{q_1}\frac{1}{r^2}-\right.$$

$$\left.-\frac{55}{32\pi^4}\sum_{r=1}^{q_1}\frac{1}{r^4}-\frac{1}{4\pi^4}\sum_{\substack{r,l=1\\ r\ne l}}^{q_1}\frac{5l^4+4r^4-3r^2l^2}{r^2l^2\left(r^2-l^2\right)^2}\right\}\le\varepsilon. \tag{6.149}$$

В табл. 6.43 приведены минимальные значения чисел q, q_1, удовлетворяющие условиям (6.146), (6.147) при различных значениях $T-t$. В табл. 6.43 даны значения тех же чисел для условий (6.148), (6.149) при $\varepsilon=(T-t)^4$.

Таблица 6.43. Значения q, q_1, T^*_{100}, $\tilde{T}^*_{100}$ (полиномиальная система).

$T-t$	0.08222	0.05020	0.02310	0.01956
q	19	51	235	328
q_1	1	2	5	6
T^*_{100}, с	5	12	52	73
$\tilde{T}^*_{100}$, с	13.5	36	181	225

Таблица 6.44. Значения q, q_1, T^*_{100}, $\tilde{T}^*_{100}$ (тригонометрическая система).

$T-t$	0.08222	0.05020	0.02310	0.01956
q	8	21	96	133
q_1	1	1	3	4
T^*_{100}, с	12	24.5	105	148
$\tilde{T}^*_{100}$, с	44	88	411	660

Смоделируем независимо по 100 раз для различных значений $T-t$ набор стохастических интегралов $I^{(21)}_{00_{T,t}}$, $I^{(321)}_{000_{T,t}}$, определяемых с помощью формул (6.40), (6.62), полученных с применением полиномиальной системы функций. В табл. 6.43 приведены значения компьютерного времени T^*_{100}, затраченного на решение данной задачи при различных значениях $T-t$. Повторим данный численный эксперимент для аппроксимаций (6.78), (6.79) при $i_3=3$, $i_2=2$, $i_1=1$, полученных с помощью тригонометрической системы функций. Его результаты помещены в табл. 6.44.

Отметим, что здесь и далее в настоящем разделе формулы (6.78) и (6.79) использовались без слагаемых

$$\frac{1}{2}(T-t)\frac{\sqrt{2}}{\pi}\sqrt{\alpha_q}\left(\xi_q^{(i_1)}\zeta_0^{(i_2)}-\zeta_0^{(i_1)}\xi_q^{(i_2)}\right)$$

и

$$(T-t)^{\frac{3}{2}}\left(\frac{1}{2\sqrt{2}\pi}\sqrt{\alpha_q}\left(\xi_q^{(i_1)}\zeta_0^{(i_2)}\zeta_0^{(i_3)}-\xi_q^{(i_3)}\zeta_0^{(i_2)}\zeta_0^{(i_1)}\right)+\right.$$
$$\left.+\frac{1}{2\sqrt{2}\pi^2}\sqrt{\beta_q}\left(\mu_q^{(i_1)}\zeta_0^{(i_2)}\zeta_0^{(i_3)}-2\mu_q^{(i_2)}\zeta_0^{(i_1)}\zeta_0^{(i_3)}+\mu_q^{(i_3)}\zeta_0^{(i_1)}\zeta_0^{(i_2)}\right)\right)$$

соответственно, что подкрепляет отмеченные в табл. 6.43 и 6.44 численные результаты.

Сравнивая полученные результаты, приходим к выводу, что в рамках численного эксперимента при моделировании соответствующей совокупности стохастических интегралов полиномиальная си-

стема функций дает выигрыш в два раза по компьютерному времени в сравнении с тригонометрической системой функций.

Выпишем в явном виде аппроксимации $I_{000_{T,t}}^{(123)q}$ (6.63) при $q=1,2,5,6$, учитывая их практическую важность (согласно результатам разд. 5.6 приведенные ниже формулы соответствуют аппроксимациям $I_{000_{T,t}}^{*(i_1i_2i_3)q}$ при произвольных $i_1,i_2,i_3=1,\ldots,m$ и $q=1,2,5,6$ при замене в них верхнего индекса (123) на индекс $(i_1i_2i_3)$ и верхних индексов (1), (2), (3) на индексы $(i_1),(i_2),(i_3)$ соответственно):

$$I_{000_{T,t}}^{(123)1}=(T-t)^{\frac{3}{2}}\left[\left(\left(\frac{1}{6}\zeta_0^{(1)}-\frac{1}{4\sqrt{3}}\zeta_1^{(1)}\right)\zeta_0^{(2)}+\frac{1}{20}\zeta_1^{(1)}\zeta_1^{(2)}\right)\zeta_0^{(3)}+\right.$$
$$\left.+\left(\left(\frac{1}{4\sqrt{3}}\zeta_0^{(1)}-\frac{1}{10}\zeta_1^{(1)}\right)\zeta_0^{(2)}+\frac{1}{20}\zeta_0^{(1)}\zeta_1^{(2)}\right)\zeta_1^{(3)}\right],$$

$$I_{000_{T,t}}^{(123)2}=(T-t)^{\frac{3}{2}}\left[\left\{\left(\frac{1}{6}\zeta_0^{(1)}-\frac{1}{4\sqrt{3}}\zeta_1^{(1)}+\frac{1}{12\sqrt{5}}\zeta_2^{(1)}\right)\zeta_0^{(2)}+\right.\right.$$
$$+\left(\frac{1}{20}\zeta_1^{(1)}-\frac{1}{4\sqrt{15}}\zeta_2^{(1)}\right)\zeta_1^{(2)}+\left(-\frac{1}{6\sqrt{5}}\zeta_0^{(1)}+\frac{1}{4\sqrt{15}}\zeta_1^{(1)}+\frac{1}{84}\zeta_2^{(1)}\right)\zeta_2^{(2)}\Bigg\}\zeta_0^{(3)}+$$
$$+\left\{\left(\frac{1}{4\sqrt{3}}\zeta_0^{(1)}-\frac{1}{10}\zeta_1^{(1)}\right)\zeta_0^{(2)}+\left(\frac{1}{20}\zeta_0^{(1)}-\frac{1}{14\sqrt{5}}\zeta_2^{(1)}\right)\zeta_1^{(2)}+\right.$$
$$\left.+\left(-\frac{1}{4\sqrt{15}}\zeta_0^{(1)}+\frac{1}{7\sqrt{5}}\zeta_1^{(1)}\right)\zeta_2^{(2)}\right\}\zeta_1^{(3)}+$$
$$+\left\{\left(\frac{1}{12\sqrt{5}}\zeta_0^{(1)}-\frac{1}{42}\zeta_2^{(1)}\right)\zeta_0^{(2)}+\left(\frac{1}{4\sqrt{15}}\zeta_0^{(1)}-\frac{1}{14\sqrt{5}}\zeta_1^{(1)}\right)\zeta_1^{(2)}+\right.$$
$$\left.\left.+\frac{1}{84}\zeta_0^{(1)}\zeta_2^{(2)}\right\}\zeta_2^{(3)}\right],$$

$$I_{000_{T,t}}^{(123)5}=I_{000_{T,t}}^{(123)2}+(T-t)^{\frac{3}{2}}\left[\left\{\frac{1}{10\sqrt{21}}\zeta_3^{(1)}\zeta_1^{(2)}+\left(-\frac{1}{4\sqrt{35}}\zeta_3^{(1)}+\frac{1}{28\sqrt{5}}\zeta_4^{(1)}\right)\zeta_2^{(2)}+\right.\right.$$
$$+\left(-\frac{\sqrt{3}}{20\sqrt{7}}\zeta_1^{(1)}+\frac{1}{4\sqrt{35}}\zeta_2^{(1)}+\frac{1}{180}\zeta_3^{(1)}-\frac{1}{12\sqrt{7}}\zeta_4^{(1)}+\frac{1}{9\sqrt{77}}\zeta_5^{(1)}\right)\zeta_3^{(2)}+$$
$$+\left(-\frac{1}{21\sqrt{5}}\zeta_2^{(1)}+\frac{1}{12\sqrt{7}}\zeta_3^{(1)}+\frac{1}{308}\zeta_4^{(1)}-\frac{1}{12\sqrt{11}}\zeta_5^{(1)}\right)\zeta_4^{(2)}+$$
$$\left.+\left(-\frac{5}{36\sqrt{77}}\zeta_3^{(1)}+\frac{1}{12\sqrt{11}}\zeta_4^{(1)}+\frac{1}{468}\zeta_5^{(1)}\right)\zeta_5^{(2)}\right\}\zeta_0^{(3)}+$$

$$+\left\{\frac{1}{20\sqrt{21}}\zeta_3^{(1)}\zeta_0^{(2)}+\frac{1}{140}\zeta_4^{(1)}\zeta_1^{(2)}+\left(-\frac{1}{12\sqrt{5}}\zeta_3^{(1)}+\frac{1}{14\sqrt{165}}\zeta_5^{(1)}\right)\zeta_2^{(2)}+\right.$$

$$+\left(\frac{\sqrt{3}}{20\sqrt{7}}\zeta_0^{(1)}+\frac{1}{3\sqrt{105}}\zeta_2^{(1)}-\frac{19}{220\sqrt{21}}\zeta_4^{(1)}\right)\zeta_3^{(2)}+$$

$$+\left(-\frac{1}{70}\zeta_1^{(1)}+\frac{23}{220\sqrt{21}}\zeta_3^{(1)}-\frac{8}{91\sqrt{33}}\zeta_5^{(1)}\right)\zeta_4^{(2)}+$$

$$\left.+\left(-\frac{\sqrt{5}}{42\sqrt{33}}\zeta_2^{(1)}+\frac{37}{364\sqrt{33}}\zeta_4^{(1)}\right)\zeta_5^{(2)}\right\}\zeta_1^{(3)}+$$

$$+\left\{\left(\frac{1}{84\sqrt{5}}\zeta_2^{(1)}-\frac{1}{154}\zeta_4^{(1)}\right)\zeta_0^{(2)}+\left(\frac{1}{180}\zeta_1^{(1)}-\frac{1}{55\sqrt{21}}\zeta_3^{(1)}-\frac{5\sqrt{3}}{364}\zeta_5^{(1)}\right)\zeta_1^{(2)}+\right.$$

$$+\left(\frac{1}{28\sqrt{5}}\zeta_0^{(1)}-\frac{1}{132}\zeta_2^{(1)}+\frac{1}{286\sqrt{5}}\zeta_4^{(1)}\right)\zeta_2^{(2)}+$$

$$+\left(\frac{1}{12\sqrt{7}}\zeta_0^{(1)}-\frac{19}{220\sqrt{21}}\zeta_1^{(1)}+\frac{2}{2145}\zeta_3^{(1)}+\frac{1}{156\sqrt{77}}\zeta_5^{(1)}\right)\zeta_3^{(2)}+$$

$$+\left(\frac{1}{308}\zeta_0^{(1)}-\frac{1}{572\sqrt{5}}\zeta_2^{(1)}\right)\zeta_4^{(2)}+$$

$$\left.+\left(-\frac{1}{12\sqrt{11}}\zeta_0^{(1)}+\frac{37}{364\sqrt{33}}\zeta_1^{(1)}-\frac{1}{78\sqrt{77}}\zeta_3^{(1)}-\frac{1}{18564}\zeta_5^{(1)}\right)\zeta_5^{(2)}\right\}\zeta_4^{(3)}+$$

$$+\left\{\left(\frac{1}{36\sqrt{77}}\zeta_3^{(1)}-\frac{1}{234}\zeta_5^{(1)}\right)\zeta_0^{(2)}+\left(\frac{1}{21\sqrt{165}}\zeta_2^{(1)}-\frac{5}{364\sqrt{33}}\zeta_4^{(1)}\right)\zeta_1^{(2)}+\right.$$

$$+\left(\frac{1}{14\sqrt{165}}\zeta_1^{(1)}-\frac{37}{468\sqrt{385}}\zeta_3^{(1)}+\frac{2}{819\sqrt{5}}\zeta_5^{(1)}\right)\zeta_2^{(2)}+$$

$$+\left(\frac{1}{9\sqrt{77}}\zeta_0^{(1)}-\frac{29}{234\sqrt{385}}\zeta_2^{(1)}+\frac{1}{156\sqrt{77}}\zeta_4^{(1)}\right)\zeta_3^{(2)}+$$

$$+\left(\frac{1}{12\sqrt{11}}\zeta_0^{(1)}-\frac{8}{91\sqrt{33}}\zeta_1^{(1)}+\frac{1}{156\sqrt{77}}\zeta_3^{(1)}+\frac{1}{9282}\zeta_5^{(1)}\right)\zeta_4^{(2)}+$$

$$\left.+\left(\frac{1}{468}\zeta_0^{(1)}-\frac{1}{819\sqrt{5}}\zeta_2^{(1)}-\frac{1}{18564}\zeta_4^{(1)}\right)\zeta_5^{(2)}\right\}\zeta_5^{(3)}+$$

$$+\left\{\left(\frac{1}{20\sqrt{21}}\zeta_1^{(1)}-\frac{1}{90}\zeta_3^{(1)}+\frac{1}{36\sqrt{77}}\zeta_5^{(1)}\right)\zeta_0^{(2)}+\right.$$

$$+\left(\frac{1}{10\sqrt{21}}\zeta_0^{(1)}-\frac{1}{12\sqrt{105}}\zeta_2^{(1)}-\frac{1}{55\sqrt{21}}\zeta_4^{(1)}\right)\zeta_1^{(2)}+$$

$$+\left(\frac{1}{4\sqrt{35}}\zeta_0^{(1)}-\frac{1}{12\sqrt{5}}\zeta_1^{(1)}+\frac{1}{186\sqrt{5}}\zeta_3^{(1)}-\frac{37}{468\sqrt{385}}\zeta_5^{(1)}\right)\zeta_2^{(2)}+$$

$$+\left(\frac{1}{180}\zeta_0^{(1)}-\frac{1}{372\sqrt{5}}\zeta_2^{(1)}+\frac{2}{2145}\zeta_4^{(1)}\right)\zeta_3^{(2)}+$$

$$+\left(-\frac{1}{12\sqrt{7}}\zeta_0^{(1)}+\frac{23}{220\sqrt{21}}\zeta_1^{(1)}-\frac{4}{2145}\zeta_3^{(1)}+\frac{1}{156\sqrt{77}}\zeta_5^{(1)}\right)\zeta_4^{(2)}+$$

$$+\left(-\frac{5}{36\sqrt{77}}\zeta_0^{(1)}+\frac{19\sqrt{5}}{468\sqrt{77}}\zeta_2^{(1)}-\frac{1}{78\sqrt{77}}\zeta_4^{(1)}\right)\zeta_5^{(2)}\Bigg\}\zeta_3^{(3)}+$$

$$+\Bigg\{\frac{1}{84\sqrt{5}}\zeta_4^{(1)}\zeta_0^{(2)}+\left(-\frac{1}{12\sqrt{105}}\zeta_3^{(1)}+\frac{1}{21\sqrt{165}}\zeta_5^{(1)}\right)\zeta_1^{(2)}-\frac{1}{132}\zeta_4^{(1)}\zeta_2^{(2)}+$$

$$+\left(-\frac{1}{4\sqrt{35}}\zeta_0^{(1)}+\frac{1}{3\sqrt{105}}\zeta_1^{(1)}-\frac{1}{372\sqrt{5}}\zeta_3^{(1)}-\frac{29}{234\sqrt{385}}\zeta_5^{(1)}\right)\zeta_3^{(2)}$$

$$+\left(-\frac{1}{21\sqrt{5}}\zeta_0^{(1)}+\frac{1}{66}\zeta_2^{(1)}-\frac{1}{572\sqrt{5}}\zeta_4^{(1)}\right)\zeta_4^{(2)}+$$

$$+\left(-\frac{\sqrt{5}}{42\sqrt{33}}\zeta_1^{(1)}+\frac{19\sqrt{5}}{468\sqrt{77}}\zeta_3^{(1)}-\frac{1}{819\sqrt{5}}\zeta_5^{(1)}\right)\zeta_5^{(2)}\Bigg\}\zeta_2^{(3)}\Bigg],$$

$$I_{000_{T,t}}^{(123)6}=I_{000_{T,t}}^{(123)5}+(T-t)^{\frac{3}{2}}\Bigg[\Bigg\{\left(\frac{1}{132\sqrt{13}}\zeta_4^{(1)}-\frac{1}{330}\zeta_6^{(1)}\right)\zeta_0^{(2)}+$$

$$+\left(\frac{5}{132\sqrt{273}}\zeta_3^{(1)}-\frac{1}{30\sqrt{429}}\zeta_5^{(1)}\right)\zeta_1^{(2)}+$$

$$+\left(\frac{5}{462\sqrt{13}}\zeta_2^{(1)}-\frac{19}{924\sqrt{65}}\zeta_4^{(1)}+\frac{1}{561\sqrt{5}}\zeta_6^{(1)}\right)\zeta_2^{(2)}+$$

$$+\left(\frac{5}{66\sqrt{273}}\zeta_1^{(1)}-\frac{5}{396\sqrt{13}}\zeta_3^{(1)}+\frac{\sqrt{143}}{8415\sqrt{7}}\zeta_5^{(1)}\right)\zeta_3^{(2)}+$$

$$+\left(\frac{5}{132\sqrt{13}}\zeta_0^{(1)}-\frac{2\sqrt{5}}{231\sqrt{13}}\zeta_2^{(1)}+\frac{1}{476\sqrt{13}}\zeta_4^{(1)}+\frac{1}{9690}\zeta_6^{(1)}\right)\zeta_4^{(2)}+$$

$$+\left(\frac{1}{4\sqrt{143}}\zeta_0^{(1)}-\frac{4}{15\sqrt{429}}\zeta_1^{(1)}+\frac{1}{510\sqrt{1001}}\zeta_3^{(1)}+\frac{1}{5814\sqrt{13}}\zeta_5^{(1)}\right)\zeta_5^{(2)}+$$

$$+\left(\frac{1}{660}\zeta_0^{(1)}+\frac{1}{1122\sqrt{5}}\zeta_2^{(1)}-\frac{1}{19380}\zeta_4^{(1)}\right)\zeta_6^{(2)}\Bigg\}\zeta_6^{(3)}+$$

$$+\Bigg\{\left(-\frac{1}{22\sqrt{13}}\zeta_4^{(1)}+\frac{1}{4\sqrt{143}}\zeta_5^{(1)}+\frac{1}{660}\zeta_6^{(1)}\right)\zeta_6^{(2)}+$$

$$
+\left(\frac{5}{132\sqrt{13}}\zeta_4^{(2)}-\frac{1}{4\sqrt{143}}\zeta_5^{(2)}\right)\zeta_6^{(1)}\Bigg\}\zeta_0^{(3)}+
$$

$$
+\Bigg\{\left(-\frac{5}{44\sqrt{273}}\zeta_1^{(1)}+\frac{5}{198\sqrt{13}}\zeta_3^{(1)}-\frac{113}{3060\sqrt{1001}}\zeta_5^{(1)}\right)\zeta_6^{(2)}+
$$

$$
+\left(\frac{5}{2132\sqrt{273}}\zeta_1^{(2)}-\frac{5}{396\sqrt{13}}\zeta_3^{(2)}+\frac{61}{3060\sqrt{1001}}\zeta_5^{(2)}\right)\zeta_6^{(1)}\Bigg\}\zeta_3^{(3)}+
$$

$$
+\Bigg\{\left(-\frac{1}{22\sqrt{13}}\zeta_0^{(1)}+\frac{59}{924\sqrt{65}}\zeta_2^{(1)}-\frac{1}{238\sqrt{13}}\zeta_4^{(1)}-\frac{1}{19380}\zeta_6^{(1)}\right)\zeta_6^{(2)}+
$$

$$
+\left(\frac{1}{132\sqrt{13}}\zeta_0^{(2)}-\frac{19}{924\sqrt{65}}\zeta_2^{(2)}+\frac{1}{476\sqrt{13}}\zeta_4^{(2)}\right)\zeta_6^{(1)}\Bigg\}\zeta_4^{(3)}+
$$

$$
+\Bigg\{\left(-\frac{5}{44\sqrt{273}}\zeta_3^{(1)}+\frac{\sqrt{3}}{10\sqrt{143}}\zeta_5^{(1)}\right)\zeta_6^{(2)}+
$$

$$
+\left(\frac{5}{66\sqrt{273}}\zeta_3^{(2)}-\frac{4}{15\sqrt{429}}\zeta_5^{(2)}\right)\zeta_6^{(1)}\Bigg\}\zeta_1^{(3)}+
$$

$$
+\Bigg\{\left(-\frac{5}{231\sqrt{13}}\zeta_2^{(1)}+\frac{59}{924\sqrt{65}}\zeta_4^{(1)}-\frac{1}{1122\sqrt{5}}\zeta_6^{(1)}\right)\zeta_6^{(2)}+
$$

$$
+\left(\frac{5}{462\sqrt{13}}\zeta_2^{(2)}-\frac{2\sqrt{5}}{231\sqrt{13}}\zeta_4^{(2)}\right)\zeta_6^{(1)}\Bigg\}\zeta_2^{(3)}+
$$

$$
+\Bigg\{\left(-\frac{1}{4\sqrt{143}}\zeta_0^{(1)}+\frac{\sqrt{3}}{10\sqrt{143}}\zeta_1^{(1)}-\frac{113}{3060\sqrt{1001}}\zeta_3^{(1)}-\frac{1}{2907\sqrt{13}}\zeta_5^{(1)}\right)\zeta_6^{(2)}+
$$

$$
+\left(\frac{1}{30\sqrt{429}}\zeta_1^{(2)}+\frac{\sqrt{143}}{8415\sqrt{7}}\zeta_3^{(2)}+\frac{1}{5814\sqrt{13}}\zeta_5^{(2)}\right)\zeta_6^{(1)}\Bigg\}\zeta_5^{(3)}\Bigg].
$$

Покажем, что на практике в некоторых ситуациях преимущество полиномиальной системы функций перед тригонометрической по компьютерному времени на моделирование совокупностей повторных стохастических интегралов оказывается еще более выразительным.

Дело в том, что при решении практических задач часто приходится на каждом шаге интегрирования моделировать по несколько однотипных стохастических интегралов, взятых при различных сочетаниях верхних индексов. При этом полезно "сокращать" общее число моделируемых интегралов с помощью соотношений

$$
I_{00_{T,t}}^{(i_1 i_2)}+I_{00_{T,t}}^{(i_2 i_1)}=I_{0_{T,t}}^{(i_1)}I_{0_{T,t}}^{(i_2)}\ \text{с в.1},
$$

$$I_{000_{T,t}}^{(i_1 i_2 i_3)} + I_{000_{T,t}}^{(i_1 i_3 i_2)} + I_{000_{T,t}}^{(i_2 i_1 i_3)} + I_{000_{T,t}}^{(i_2 i_3 i_1)} + I_{000_{T,t}}^{(i_3 i_2 i_1)} + I_{000_{T,t}}^{(i_3 i_1 i_2)} = I_{0_{T,t}}^{(i_1)} I_{0_{T,t}}^{(i_2)} I_{0_{T,t}}^{(i_3)} \text{ с в.1,}$$

где i_1, i_2, i_3 — попарно различны; $i_1, i_2, i_3 \in \{1, \ldots, m\}$.

В соответствии со сказанным рассмотрим следующую совокупность стохастических интегралов:

$$I_{0_{T,t}}^{(i)},\ I_{1_{T,t}}^{(i)},\ I_{00_{T,t}}^{(12)},\ I_{00_{T,t}}^{(13)},\ I_{00_{T,t}}^{(23)},\ I_{000_{T,t}}^{(123)},\ I_{000_{T,t}}^{(132)},\ I_{000_{T,t}}^{(213)},\ I_{000_{T,t}}^{(231)},\ I_{000_{T,t}}^{(312)}, \quad (6.150)$$

где $i = 1,\ 2,\ 3$.

Смоделируем независимо по 100 раз при различных значениях $T - t$ набор стохастических интегралов (6.150) с использованием формул (6.37), (6.38), (6.40), (6.62). В табл. 6.43 приведены значения времени $\tilde{T}_{100}^{*}$, затраченного на решение данной задачи при различных значениях $T - t$. Повторим данный численный эксперимент с помощью аппроксимаций (6.76)–(6.79). Его результаты помещены в табл. 6.44.

Сравнивая полученные численные результаты можно заметить, что в данном случае полиномиальная система функций дает выигрыш в 3 раза по компьютерному времени при моделировании совокупности повторных стохастических интегралов.

Отметим, что в набор (6.145), вообще говоря, входит $m^3 + m^2 + 2m$ различных повторных стохастических интегралов. При $m > 3$ число $m^3 + m^2 + 2m$ может оказаться существенно большим, чем в случае (6.150) ($m = 3$; в (6.150) также не учтены повторные стохастические интегралы с двумя совпадающими верхними индексами из трех) и, по предположению автора, преимущество полиномиальной системы функций окажется еще более существенным. Этот же эффект можно ожидать при рассмотрении более сложных, чем (6.145), совокупностей повторных стохастических интегралов, необходимых для построения более точных сильных численных методов для стохастических дифференциальных уравнений Ито (см. главу 7).

По-видимому, отмеченная тенденция связана с тем, что полиномиальная система функций имеет существенное преимущество перед тригонометрической при аппроксимации повторных стохастических интегралов, в которых не все весовые функции вида $\psi(\tau) = (t - \tau)^l$; $l = 0,\ 1,\ 2, \ldots$ тождественно равны 1, что соответствует $l \geq 1$ в приведенном представлении. Для понимания этого достаточно сравнить формулы (6.38), (6.39), (6.41), (6.42), полученные с помощью полиномов Лежандра, с их аналогами (6.77), (6.82), (6.81), (6.80), полученными с помощью тригонометрической системы функций.

В заключение покажем, что по вычислительным затратам на моделирование совокупности повторных стохастических интегралов ме-

Таблица 6.45. Значения q и T^*_{sum} (метод интегральных сумм).

$T-t$	2^{-5}	2^{-6}	2^{-7}
q	16	32	64
T^*_{sum}, с	26	93	391

тод, основанный на кратных рядах Фурье, вне конкуренции перед методом, основанным на кратных интегральных суммах.

Рассмотрим аппроксимации повторных стохастических интегралов Ито, полученные с помощью метода, основанного на кратных интегральных суммах:

$$I_{0_{T,t}}^{(1)q} = \sqrt{\Delta} \sum_{j=0}^{q-1} \xi_j^{(1)}, \tag{6.151}$$

$$I_{00_{T,t}}^{(21)q} = \Delta \sum_{j=0}^{q-1} \xi_j^{(2)} \sum_{i=0}^{j-1} \xi_i^{(1)}, \tag{6.152}$$

где $\xi_j^{(i)} = (\mathbf{f}_{t+(j+1)\Delta}^{(i)} - \mathbf{f}_{t+j\Delta}^{(i)})/\sqrt{\Delta}$; $i = 1, 2$ — независимые стандартные гауссовские случайные величины; $\Delta = (T-t)/q$; $I_{00_{T,t}}^{(21)q}$, $I_{0_{T,t}}^{(1)q}$ — аппроксимации интегралов $I_{00_{T,t}}^{(21)}$, $I_{0_{T,t}}^{(1)}$. Число q, входящее в (6.151), (6.152), выбираем из условия

$$\mathsf{M}\left\{\left(I_{00_{T,t}}^{(21)} - I_{00_{T,t}}^{(21)q}\right)^2\right\} = \frac{(T-t)^2}{2q} \le (T-t)^3.$$

Выполним по 200 независимых моделирований совокупности стохастических интегралов $I_{00_{T,t}}^{(21)}$, $I_{0_{T,t}}^{(1)}$ с помощью формул (6.151), (6.152) при $T-t = 2^{-j}$; $j = 5, 6, 7$. В табл. 6.37 приведено время T^*_{sum}, которое потребовалось для выполнения данной задачи.

Сравнивая табл. 6.42 и 6.45 приходим к выводу, что метод, основанный на кратных интегральных суммах, уже при $T-t = 2^{-7}$ более, чем в 50 раз хуже по компьютерному времени на моделирование совокупности стохастических интегралов $I_{00_{T,t}}^{(21)}$, $I_{0_{T,t}}^{(1)}$, чем метод, основанный на кратных рядах Фурье.

Приведенные численные эксперименты позволяют получить лишь некоторое поверхностное представление о "хороших" и "плохих" численных методах, однако вполне определенная картина вырисовывается.

6.12 Повторные стохастические интегралы как решения систем линейных стохастических дифференциальных уравнений

Г.Н. Мильштейном [70] предложен подход к численному моделированию повторных стохастических интегралов, основанный на их представлении в виде систем линейных стохастических дифференциальных уравнений. Рассмотрим данный подход на примере совокупности повторных стохастических интегралов Ито вида

$$I_{0_{s,t}}^{(i_1)} = \int\limits_t^s d\mathbf{f}_\tau^{(i_1)},\ \ I_{00_{s,t}}^{(i_1 i_2)} = \int\limits_t^s \int\limits_t^\tau d\mathbf{f}_\theta^{(i_1)} d\mathbf{f}_\tau^{(i_2)}, \tag{6.153}$$

где $i_1, i_2 = 1, \ldots, m$; $0 \le t < s \le T$; $\mathbf{f}_\tau^{(i)}$; $i = 1, \ldots, m$ — независимые стандартные винеровские процессы.

Далее имеем следующее представление:

$$d\begin{pmatrix} I_{0_{s,t}}^{(i_1)} \\ I_{00_{s,t}}^{(i_1 i_2)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_{0_{s,t}}^{(i_1)} \\ I_{00_{s,t}}^{(i_1 i_2)} \end{pmatrix} d\mathbf{f}_s^{(i_2)} + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} d\begin{pmatrix} \mathbf{f}_s^{(i_1)} \\ \mathbf{f}_s^{(i_2)} \end{pmatrix}. \tag{6.154}$$

В главе 11 будет показано (см. также [86]), что решение системы (6.154) может быть представлено в следующей интегральной форме:

$$\begin{pmatrix} I_{0_{s,t}}^{(i_1)} \\ I_{00_{s,t}}^{(i_1 i_2)} \end{pmatrix} = \int\limits_t^s e^{\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\left(\mathbf{f}_s^{(i_2)} - \mathbf{f}_\theta^{(i_2)}\right)} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} d\begin{pmatrix} \mathbf{f}_\theta^{(i_1)} \\ \mathbf{f}_\theta^{(i_2)} \end{pmatrix}, \tag{6.155}$$

где e^A — матричная экспонента: $e^A \stackrel{\text{def}}{=} \sum\limits_{k=0}^{\infty} A^k/k!$; A — квадратная матрица; $A^0 \stackrel{\text{def}}{=} I$ — единичная матрица.

Численное моделирование правой части (6.155) является едва ли более простой задачей, чем совместное численное моделирование совокупности стохастических интегралов (6.153). Поэтому численное моделирование совокупности (6.153) приходится осуществлять в рамках данного подхода путем численного интегрирования системы линейных стохастических дифференциальных уравнений (6.154). Эту процедуру можно реализовать, например, с помощью сильного метода Эйлера (см. главу 7). Отметим, что выражения более точных сильных численных методов для системы (6.154) содержат повторные стохастические интегралы, численному моделированию которых и посвящен рассматриваемый подход (см. главы 7–9).

Пусть $\{\tau_j\}_{j=0}^{N}$ — разбиение промежутка $[t,s]$, для которого $\tau_j = t + j\Delta$; $j = 0,1,\ldots,N$; $\tau_N = s$. Запишем явный метод Эйлера (см. главу 7) для системы линейных стохастических дифференциальных уравнений (6.154):

$$\begin{pmatrix} \mathbf{y}_{p+1}^{(i_1)} \\ \mathbf{y}_{p+1}^{(i_1 i_2)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{y}_{p}^{(i_1)} \\ \mathbf{y}_{p}^{(i_1 i_2)} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \Delta\mathbf{f}_{\tau_p}^{(i_1)} \\ \mathbf{y}_{p}^{(i_1)}\Delta\mathbf{f}_{\tau_p}^{(i_2)} \end{pmatrix}, \mathbf{y}_0^{(i_1)} = 0, \mathbf{y}_0^{(i_1 i_2)} = 0, \qquad (6.156)$$

где $\mathbf{y}_{\tau_p}^{(i_1)} \stackrel{\text{def}}{=} \mathbf{y}_p^{(i_1)}$; $\mathbf{y}_{\tau_p}^{(i_1 i_2)} \stackrel{\text{def}}{=} \mathbf{y}_p^{(i_1 i_2)}$ — аппроксимации повторных стохастических интегралов $I_{0_{\tau_p,t}}^{(i_1)}$, $I_{00_{\tau_p,t}}^{(i_1 i_2)}$, полученные с помощью численной схемы (6.156); $\Delta\mathbf{f}_{\tau_p}^{(i)} = \mathbf{f}_{\tau_{p+1}}^{(i)} - \mathbf{f}_{\tau_p}^{(i)}$; $i = 1,\ldots,m$.

Итерируя выражение (6.156), имеем

$$\mathbf{y}_N^{(i_1)} = \sum_{l=0}^{N-1} \Delta\mathbf{f}_{\tau_l}^{(i_1)}, \ \mathbf{y}_N^{(i_1 i_2)} = \sum_{q=0}^{N-1}\sum_{l=0}^{q-1} \Delta\mathbf{f}_{\tau_l}^{(i_1)}\Delta\mathbf{f}_{\tau_q}^{(i_2)}, \qquad (6.157)$$

где $\sum\limits_{\emptyset} \stackrel{\text{def}}{=} 0$. Формулы (6.157) являются не чем иным, как формулами для аппроксимаций повторных стохастических интегралов (6.153), полученными с помощью метода, основанного на кратных интегральных суммах.

Таким образом, эффективность методов сильной аппроксимации повторных стохастических интегралов, основанных на кратных интегральных суммах и численном интегрировании систем линейных стохастических дифференциальных уравнений методом Эйлера, оказывается одинаковой.

6.13 Комбинированный метод аппроксимации повторных стохастических интегралов

В данном разделе строится "гибрид" методов аппроксимации повторных стохастических интегралов, основанных на кратных рядах Фурье и кратных интегральных суммах (далее комбинированный метод). Показывается, что при сохранении определенного соотношения влияния одного метода на другой, удается добиться некоторых преимуществ перед "чистым" применением метода, основанного на повторных рядах Фурье. А именно, выяснено, что комбинированный метод аппроксимации повторных стохастических интегралов позволяет заметно снизить общее количество коэффициентов кратных рядов Фурье, необходимых для аппроксимации рассматриваемого повторного

стохастического интеграла (при этом точность аппроксимации остается такой же, а вычислительные затраты примерно такими же, как в методе кратных рядов Фурье).

6.13.1 Основные соотношения

Используя свойство аддитивности стохастического интеграла Ито можно записать:

$$I_{0_{T,t}}^{(i_1)} = \sqrt{\Delta} \sum_{k=0}^{N-1} \zeta_{0,k}^{(i_1)} \text{ с в. 1}, \tag{6.158}$$

$$I_{1_{T,t}}^{(i_1)} = \sum_{k=0}^{N-1} \left(I_{1_{\tau_{k+1},\tau_k}}^{(i_1)} - \Delta^{3/2} k \zeta_{0,k}^{(i_1)} \right) \text{ с в. 1}, \tag{6.159}$$

$$I_{00_{T,t}}^{(i_1 i_2)} = \Delta \sum_{k=0}^{N-1} \sum_{l=0}^{k-1} \zeta_{0,k}^{(i_2)} \zeta_{0,l}^{(i_1)} + \sum_{k=0}^{N-1} I_{00_{\tau_{k+1},\tau_k}}^{(i_1 i_2)} \text{ с в. 1}, \tag{6.160}$$

$$I_{000_{T,t}}^{(i_1 i_2 i_3)} = \Delta^{3/2} \sum_{k=0}^{N-1} \sum_{l=0}^{k-1} \sum_{q=0}^{l-1} \zeta_{0,k}^{(i_3)} \zeta_{0,l}^{(i_2)} \zeta_{0,q}^{(i_1)} +$$

$$+\sqrt{\Delta} \sum_{k=0}^{N-1} \sum_{l=0}^{k-1} \left(\zeta_{0,k}^{(i_3)} I_{00_{\tau_{l+1},\tau_l}}^{(i_1 i_2)} + \zeta_{0,l}^{(i_1)} I_{00_{\tau_{k+1},\tau_k}}^{(i_2 i_3)} \right) + \sum_{k=0}^{N-1} I_{000_{\tau_{k+1},\tau_k}}^{(i_1 i_2 i_3)} \text{ с в. 1}; \tag{6.161}$$

$i_1, \ldots, i_k = 1, \ldots, m$; $T - t = N\Delta$; $\tau_k = t + k\Delta$; $\zeta_{0,k}^{(i)} \stackrel{\text{def}}{=} \Delta^{-1/2} \int\limits_{\tau_k}^{\tau_{k+1}} d\mathbf{w}_s^{(i)}$; $k = 0, 1, \ldots, N-1$; $N < \infty$; сумма по пустому множеству считается равной нулю.

В приведенных выше формулах рассматриваются стохастические интегралы Ито из семейства (6.2).

Подставляя в (6.159) соотношение

$$I_{1_{\tau_{k+1},\tau_k}}^{(i_1)} = -\frac{\Delta^{3/2}}{2} \left(\zeta_{0,k}^{(i_1)} + \frac{1}{\sqrt{3}} \zeta_{1,k}^{(i_1)} \right) \text{ с в.1},$$

где $\zeta_{0,k}^{(i_1)}$, $\zeta_{1,k}^{(i_1)}$ – независимые стандартные гауссовские случайные величины, получаем:

$$I_{1_{T,t}}^{(i_1)} = -\Delta^{3/2} \sum_{k=0}^{N-1} \left(\left(\frac{1}{2} + k \right) \zeta_{0,k}^{(i_1)} + \frac{1}{2\sqrt{3}} \zeta_{1,k}^{(i_1)} \right) \text{ с в. 1}. \tag{6.162}$$

Аппроксимируем с помощью метода кратных рядов Фурье по полиномам Лежандра интегралы $I_{00_{\tau_{k+1},\tau_k}}^{(i_1 i_2)}$, $I_{00_{\tau_{k+1},\tau_k}}^{(i_2 i_3)}$, $I_{000_{\tau_{k+1},\tau_k}}^{(i_1 i_2 i_3)}$, входящие в правые части (6.160), (6.161).

В результате получим

$$I_{00_{T,t}}^{(i_1 i_2)N,q} = \Delta \sum_{k=0}^{N-1} \sum_{l=0}^{k-1} \zeta_{0,k}^{(i_2)} \zeta_{0,l}^{(i_1)} + \sum_{k=0}^{N-1} I_{00_{\tau_{k+1},\tau_k}}^{(i_1 i_2)q}, \tag{6.163}$$

$$I_{000_{T,t}}^{(i_1 i_2 i_3)N,q_1,q_2} = \Delta^{3/2} \sum_{k=0}^{N-1} \sum_{l=0}^{k-1} \sum_{q=0}^{l-1} \zeta_{0,k}^{(i_3)} \zeta_{0,l}^{(i_2)} \zeta_{0,q}^{(i_1)} +$$

$$+\sqrt{\Delta} \sum_{k=0}^{N-1} \sum_{l=0}^{k-1} \left(\zeta_{0,k}^{(i_3)} I_{00_{\tau_{l+1},\tau_l}}^{(i_1 i_2)q_1} + \zeta_{0,l}^{(i_1)} I_{00_{\tau_{k+1},\tau_k}}^{(i_2 i_3)q_1} \right) + \sum_{k=0}^{N-1} I_{000_{\tau_{k+1},\tau_k}}^{(i_1 i_2 i_3)q_2}, \tag{6.164}$$

где аппроксимации $I_{00_{\tau_{k+1},\tau_k}}^{(i_1 i_2)q}$, $I_{000_{\tau_{k+1},\tau_k}}^{(i_1 i_2 i_3)q_2}$ получены методом кратных рядов Фурье по полиномам Лежандра.

В частности, при $N = 2$ формулы (6.158), (6.162)-(6.164) преобретут следующий вид:

$$I_{0_{T,t}}^{(i_1)} = \sqrt{\Delta} \left(\zeta_{0,0}^{(i_1)} + \zeta_{0,1}^{(i_1)} \right) \text{ с в. 1},$$

$$I_{1_{T,t}}^{(i_1)} = -\Delta^{3/2} \left(\frac{1}{2} \zeta_{0,0}^{(i_1)} + \frac{3}{2} \zeta_{0,1}^{(i_1)} + \frac{1}{2\sqrt{3}} \left(\zeta_{1,0}^{(i_1)} + \zeta_{1,1}^{(i_1)} \right) \right) \text{ с в. 1},$$

$$I_{00_{T,t}}^{(i_1 i_2)2,q} = \Delta \left(\zeta_{0,1}^{(i_2)} \zeta_{0,0}^{(i_1)} + I_{00_{\tau_1,\tau_0}}^{(i_1 i_2)q} + I_{00_{\tau_2,\tau_1}}^{(i_1 i_2)q} \right),$$

$$I_{000_{T,t}}^{(i_1 i_2 i_3)2,q_1,q_2} = \sqrt{\Delta} \left(\zeta_{0,1}^{(i_3)} I_{00_{\tau_1,\tau_0}}^{(i_1 i_2)q_1} + \zeta_{0,0}^{(i_1)} I_{00_{\tau_2,\tau_1}}^{(i_2 i_3)q_1} \right) + I_{000_{\tau_1,\tau_0}}^{(i_1 i_2 i_3)q_2} + I_{000_{\tau_2,\tau_1}}^{(i_1 i_2 i_3)q_2},$$

где $\Delta = (T-t)/2$; $\tau_k = t + k\Delta$; $k = 0, 1, 2$.

Отметим, что (6.158), (6.162)-(6.164) при $N = 1$ переходят в формулы для численного моделирования указанных стохастических интегралов по методу кратных рядов Фурье. Таким образом можно утверждать, что метод кратных рядов Фурье является частным случаем комбинированного метода при $N = 1$.

6.13.2 Вычисление среднеквадратической погрешности

Вычислим среднеквадратические погрешности аппроксимаций, определяемых формулами (6.163), (6.164).

Имеем:

$$\varepsilon_{N,q} \stackrel{\text{def}}{=} \mathsf{M}\left\{ \left(I_{00_{T,t}}^{(i_1 i_2)} - I_{00_{T,t}}^{(i_1 i_2)N,q} \right)^2 \right\} = \sum_{k=0}^{N-1} \mathsf{M}\left\{ \left(I_{00_{\tau_{k+1},\tau_k}}^{(i_1 i_2)} - I_{00_{\tau_{k+1},\tau_k}}^{(i_1 i_2)q} \right)^2 \right\} =$$

$$= N \frac{\Delta^2}{2} \left(\frac{1}{2} - \sum_{l=1}^{q} \frac{1}{4l^2 - 1} \right) = \frac{(T-t)^2}{2N} \left(\frac{1}{2} - \sum_{l=1}^{q} \frac{1}{4l^2 - 1} \right); \tag{6.165}$$

$$\varepsilon_{N,q_1,q_2} \stackrel{\text{def}}{=} \mathsf{M}\left\{\left(I_{000_{T,t}}^{(i_1i_2i_3)} - I_{000_{T,t}}^{(i_1i_2i_3)N,q_1,q_2}\right)^2\right\} =$$

$$= \mathsf{M}\left\{\left(\sum_{k=0}^{N-1}\left(\sqrt{\Delta}\sum_{l=0}^{k-1}\left(\zeta_{0,k}^{(i_3)}\left(I_{00_{\tau_{l+1},\tau_l}}^{(i_1i_2)} - I_{00_{\tau_{l+1},\tau_l}}^{(i_1i_2)q_1}\right)+\right.\right.\right.\right.$$

$$\left.\left.\left.\left.+\zeta_{0,l}^{(i_1)}\left(I_{00_{\tau_{k+1},\tau_k}}^{(i_2i_3)} - I_{00_{\tau_{k+1},\tau_k}}^{(i_2i_3)q_1}\right)\right) + I_{000_{\tau_{k+1},\tau_k}}^{(i_1i_2i_3)} - I_{000_{\tau_{k+1},\tau_k}}^{(i_1i_2i_3)q_2}\right)\right)^2\right\} =$$

$$= \sum_{k=0}^{N-1}\mathsf{M}\left\{\left(\sqrt{\Delta}\sum_{l=0}^{k-1}\left(\zeta_{0,k}^{(i_3)}\left(I_{00_{\tau_{l+1},\tau_l}}^{(i_1i_2)} - I_{00_{\tau_{l+1},\tau_l}}^{(i_1i_2)q_1}\right)+\right.\right.\right.$$

$$\left.\left.\left.+\zeta_{0,l}^{(i_1)}\left(I_{00_{\tau_{k+1},\tau_k}}^{(i_2i_3)} - I_{00_{\tau_{k+1},\tau_k}}^{(i_2i_3)q_1}\right)\right) + I_{000_{\tau_{k+1},\tau_k}}^{(i_1i_2i_3)} - I_{000_{\tau_{k+1},\tau_k}}^{(i_1i_2i_3)q_2}\right)^2\right\} =$$

$$= \sum_{k=0}^{N-1}\left(\Delta\mathsf{M}\left\{\left(\zeta_{0,k}^{(i_3)}\sum_{l=0}^{k-1}\left(I_{00_{\tau_{l+1},\tau_l}}^{(i_1i_2)} - I_{00_{\tau_{l+1},\tau_l}}^{(i_1i_2)q_1}\right)\right)^2\right\}+\right.$$

$$\left.+\Delta\mathsf{M}\left\{\left(\left(I_{00_{\tau_{k+1},\tau_k}}^{(i_2i_3)} - I_{00_{\tau_{k+1},\tau_k}}^{(i_2i_3)q_1}\right)\sum_{l=0}^{k-1}\zeta_{0,l}^{(i_1)}\right)^2\right\} + \delta_{k,q_2}^{(i_1i_2i_3)}\right) =$$

$$= \sum_{k=0}^{N-1}\left(\Delta\sum_{l=0}^{k-1}\mathsf{M}\left\{\left(I_{00_{\tau_{l+1},\tau_l}}^{(i_1i_2)} - I_{00_{\tau_{l+1},\tau_l}}^{(i_1i_2)q_1}\right)^2\right\}+\right.$$

$$\left.+k\Delta\mathsf{M}\left\{\left(I_{00_{\tau_{k+1},\tau_k}}^{(i_2i_3)} - I_{00_{\tau_{k+1},\tau_k}}^{(i_2i_3)q_1}\right)^2\right\} + \delta_{k,q_2}^{(i_1i_2i_3)}\right) =$$

$$= \sum_{k=0}^{N-1}\left(2k\Delta\mathsf{M}\left\{\left(I_{00_{\tau_{k+1},\tau_k}}^{(i_1i_2)} - I_{00_{\tau_{k+1},\tau_k}}^{(i_1i_2)q_1}\right)^2\right\} + \delta_{k,q_2}^{(i_1i_2i_3)}\right) =$$

$$= \sum_{k=0}^{N-1}\left(2k\Delta\frac{\Delta^2}{2}\left(\frac{1}{2} - \sum_{l=1}^{q_1}\frac{1}{4l^2-1}\right) + \delta_{k,q_2}^{(i_1i_2i_3)}\right) =$$

$$= \Delta^3\frac{N(N-1)}{2}\left(\frac{1}{2} - \sum_{l=1}^{q_1}\frac{1}{4l^2-1}\right) + \sum_{k=0}^{N-1}\delta_{k,q_2}^{(i_1i_2i_3)} =$$

$$= \frac{1}{2}(T-t)^3\left(\frac{1}{N} - \frac{1}{N^2}\right)\left(\frac{1}{2} - \sum_{l=1}^{q_1}\frac{1}{4l^2-1}\right) + \sum_{k=0}^{N-1}\delta_{k,q_2}^{(i_1i_2i_3)}, \qquad (6.166)$$

где

$$\delta_{k,q_2}^{(i_1i_2i_3)} = \mathsf{M}\left\{\left(I_{000_{\tau_{k+1},\tau_k}}^{(i_1i_2i_3)} - I_{000_{\tau_{k+1},\tau_k}}^{(i_1i_2i_3)q_2}\right)^2\right\};$$

$i_1 \neq i_2$ в (6.165) и не все индексы i_1, i_2, i_3 в (6.166) одинаковы (в противном случае для моделирования интегралов $I_{00_{T,t}}^{(i_1 i_2)}$, $I_{000_{T,t}}^{(i_1 i_2 i_3)}$ существуют точные соотношения).

Пусть для определенности i_1, i_2, i_3 в (6.166) попарно различны. Тогда

$$\delta_{k,q_2}^{(i_1 i_2 i_3)} = \Delta^3 \Bigl(\frac{1}{6} - \sum_{i,j,l=0}^{q_2} \frac{C_{lji}^2}{\Delta^3}\Bigr), \tag{6.167}$$

где

$$C_{lji} = \frac{\sqrt{(2i+1)(2j+1)(2l+1)}}{8} \Delta^{3/2} \bar{C}_{lji},$$

$$\bar{C}_{lji} = \int\limits_{-1}^{1} P_l(z) \int\limits_{-1}^{z} P_j(y) \int\limits_{-1}^{y} P_i(x) dx dy dz;$$

$P_i(x)$ – полином Лежандра.

Подставляя (6.167) в (6.166) получаем

$$\varepsilon_{N,q_1,q_2} = \frac{1}{2}(T-t)^3 \left(\frac{1}{N} - \frac{1}{N^2}\right) \left(\frac{1}{2} - \sum_{l=1}^{q_1} \frac{1}{4l^2-1}\right) +$$

$$+ \frac{(T-t)^3}{N^2} \Bigl(\frac{1}{6} - \sum_{i,j,l=0}^{q_2} \frac{(2i+1)(2j+1)(2l+1)}{64} \bar{C}_{lji}^2\Bigr). \tag{6.168}$$

Отметим, что при $N = 1$ формулы (6.165), (6.168) переходят в соответствующие формулы для среднеквадратических погрешностей аппроксимаций интегралов $I_{00_{T,t}}^{(i_1 i_2)}$, $I_{000_{T,t}}^{(i_1 i_2 i_3)}$, полученных методом кратных рядов Фурье по полиномам Лежандра.

6.13.3 Численные эксперименты

Рассмотрим моделирование интегралов $I_{0_{T,t}}^{(i_1)}$, $I_{00_{T,t}}^{(i_1 i_2)}$. С этой целью можно воспользоваться соотношениями (6.158), (6.163). При этом погрешность аппроксимации интеграла $I_{00_{T,t}}^{(i_1 i_2)}$ определяется формулой (6.165) при использовании полиномов Лежандра. Вычислим величину $\varepsilon_{N,q}$ при различных значениях N и q :

$$\varepsilon_{3,2} \approx 0.0167(T-t)^2, \ \varepsilon_{2,3} \approx 0.0179(T-t)^2, \tag{6.169}$$

$$\varepsilon_{1,6} \approx 0.0192(T-t)^2. \tag{6.170}$$

Во всех трех случаях вычислительные затраты на моделирование интегралов $I_{0_{T,t}}^{(i_1)}$, $I_{00_{T,t}}^{(i_1 i_2)}$ примерно одинаковы, однако комбинированный

Таблица 6.46. $T-t=0.1$.

N	q	q_1	q_2	M
1	13	–	1	21
2	6	0	0	7
3	4	0	0	5

Таблица 6.47. $T-t=0.05$.

N	q	q_1	q_2	M
1	50	–	2	77
2	25	2	0	26
3	17	1	0	18

метод (формулы (6.169)) требует вычисления существенно меньшего числа коэффициентов Фурье, чем метод кратных рядов Фурье (формула (6.170)).

Пусть среднеквадратическая точность аппроксимации интегралов $I_{00_{T,t}}^{(i_1 i_2)}$, $I_{000_{T,t}}^{(i_1 i_2 i_3)}$ равна $(T-t)^4$. В табл.6.46–6.48 приведены значения N, q, q_1, q_2, которые удовлетворяют системе неравенств:

$$\begin{cases} \varepsilon_{N,q} \le (T-t)^4 \\ \varepsilon_{N,q_1,q_2} \le (T-t)^4 \end{cases} \tag{6.171}$$

и общее число M коэффициентов Фурье, требуемых для аппроксимации интегралов $I_{00_{T,t}}^{(i_1 i_2)}$, $I_{000_{T,t}}^{(i_1 i_2 i_3)}$ при $T-t=0.1, 0.05, 0.02$ (числа q, q_1, q_2 брались так, чтобы число M было наименьшим).

Из табл.6.46–6.48 видно, что комбинированный метод при малых N $(N=2)$ позволяет существенно снизить общее число коэффициентов Фурье, требуемых для аппроксимации интегралов $I_{00_{T,t}}^{(i_1 i_2)}$, $I_{000_{T,t}}^{(i_1 i_2 i_3)}$ по сравнению с методом кратных рядов Фурье $(N=1)$. При этом вычислительные затраты обоих методов на аппроксимацию интегралов $I_{00_{T,t}}^{(i_1 i_2)}$, $I_{000_{T,t}}^{(i_1 i_2 i_3)}$ оказываются примерно одинаковыми (точность аппроксимации стохастических интегралов для комбинированного метода и

Таблица 6.48. $T-t=0.02$.

N	q	q_1	q_2	M
1	312	–	6	655
2	156	4	2	183
3	104	6	0	105

метода кратных рядов Фурье бралась одинаковой и равной $(T-t)^4$).

6.14 Слабые аппроксимации повторных стохастических интегралов Ито

В [86] показано, что если заменить повторные стохастические интегралы Ито в правой части (4.94) их аппроксимациями, удовлетворяющими специальным моментным условиям, то основное утверждение теоремы 4.16 (предложение 5.11.1 [86. С. 211]) останется справедливым. Перейдем к обсуждению выбора таких аппроксимаций.

Введем обозначение

$$\mathbf{y}_{s,t}^{(r)} \stackrel{\text{def}}{=} \mathbf{x}_t + \sum_{k=1}^{r} \sum_{(\lambda_k,\ldots,\lambda_1)\in\mathcal{M}_k} {}^{(p_k)}Q_{\lambda_k}\ldots Q_{\lambda_1}\{\mathbf{x}_t\} \stackrel{p_k}{\cdot} {}^{(p_k)}\hat{J}_{(\lambda_k\ldots\lambda_1)s,t}, \qquad (6.172)$$

где $0 \le t < s \le T$; $r \in N$;

$$ {}^{(p_k)}\hat{J}_{(\lambda_k\ldots\lambda_1)s,t} = \left\| \hat{J}_{(\lambda_k\ldots\lambda_1)s,t}^{(i_k\ldots i_1)} \right\|_{i_1=\lambda_1,\ldots,i_k=\lambda_k}^{m\lambda_1\ \ldots\ m\lambda_k}.$$

Здесь $\hat{J}_{(\lambda_k\ldots\lambda_1)s,t}^{(i_k\ldots i_1)}$ — аппроксимация повторного стохастического интеграла Ито $J_{(\lambda_k\ldots\lambda_1)s,t}^{(i_k\ldots i_1)}$; $\mathcal{M}_k = \{(\lambda_k,\ldots,\lambda_1):\ \lambda_l = 1,\ 0;\ l = 1,\ldots,k\}$, а остальные обозначения, входящие в (6.172), такие же, как в (4.94).

Теорема 6.2 (предложение 5.12.1 [86. С. 221]). *Пусть условия теоремы* 4.16 *выполнены и для* $t \in [t_0, T]$, $r \in N$ *существует постоянная* $K \in (0,\infty)$ *такая, что условие*

$$\left|\mathsf{M}\left\{\prod_{g=1}^{l} J_{(\lambda_{k_g}^{(g)}\ldots\ \lambda_1^{(g)})t,t_0}^{(i_{k_g}^{(g)}\ldots\ i_1^{(g)})} - \prod_{g=1}^{l} \hat{J}_{(\lambda_{k_g}^{(g)}\ldots\ \lambda_1^{(g)})t,t_0}^{(i_{k_g}^{(g)}\ldots\ i_1^{(g)})} \Big|\mathcal{F}_{t_0}\right\}\right| \le K(t-t_0)^{r+1} \qquad (6.173)$$

выполнено для всех $(\lambda_{k_g}^{(g)}\ldots\lambda_1^{(g)}) \in \mathcal{M}_{k_g}$; $i_1^{(g)},\ldots,i_{k_g}^{(g)} = 0,1,\ldots,m$; $k_g \le r$; $g = 1,\ldots,l$; $l = 1,2,\ldots,2r+1$. *Тогда для каждой функции* $h \in C^{2(r+1)}(\Re^n,\Re^1)$ *существуют постоянные* $K_h \in (0,\infty)$ *и* $n \in N$ *такие, что*

$$\left|\mathsf{M}\left\{h(\mathbf{x}_t) - h(\mathbf{y}_{t,t_0}^{(r)})|\mathcal{F}_{t_0}\right\}\right| \le K_h(1+|\mathbf{x}_{t_0}|^{2n})(t-t_0)^{r+1},$$

где $\mathbf{x}_t$ *— решение стохастического дифференциального уравнения Ито* (6.1) *в автономном случае, которое стартует из точки* $\mathbf{x}_{t_0}$ *в момент времени* t_0.

Аппроксимации $\hat{J}^{(i_{k_g}^{(g)}\ldots\ i_1^{(g)})}_{(\lambda_{k_g}^{(g)}\ldots\ \lambda_1^{(g)})t,t_0}$ повторных стохастических интегралов Ито $J^{(i_{k_g}^{(g)}\ldots\ i_1^{(g)})}_{(\lambda_{k_g}^{(g)}\ldots\ \lambda_1^{(g)})t,t_0}$, которые удовлетворяют условию (6.173) при некотором фиксированном r, будем называть слабыми аппроксимациями.

Приведем аналог теоремы 6.2 для унифицированных разложений Тейлора–Ито. Положим

$$\tilde{\mathbf{y}}_{s,t}^{(r)} = \mathbf{x}_t + \sum_{q=1}^{r} \sum_{(k,j,l_1,\ldots,l_k)\in\mathcal{A}_q} \frac{(s-t)^j}{j!} {}^{(k)}L^j G_{l_1}\ldots G_{l_k}\{\mathbf{x}_t\} \overset{k}{\cdot} {}^{(k)}\hat{J}_{l_1\ldots l_{k_{s,t}}}, \quad (6.174)$$

$$\hat{\mathbf{y}}_{s,t}^{(r)} = \mathbf{x}_t + \sum_{q=1}^{r} \sum_{(k,j,l_1,\ldots,l_k)\in\mathcal{A}_q} \frac{(s-t)^j}{j!} {}^{(k)}G_{l_1}\ldots G_{l_k} L^j\{\mathbf{x}_t\} \overset{k}{\cdot} {}^{(k)}\hat{I}_{l_1\ldots l_{k_{s,t}}}, \quad (6.175)$$

$${}^{(k)}\hat{J}_{l_1\ldots l_{k_{s,t}}} = \left\| \hat{J}^{(i_1\ldots i_k)}_{l_1\ldots l_{k_{s,t}}} \right\|^m_{i_1,\ldots,i_k=1}, \quad {}^{(k)}\hat{I}_{l_1\ldots l_{k_{s,t}}} = \left\| \hat{I}^{(i_1\ldots i_k)}_{l_1\ldots l_{k_{s,t}}} \right\|^m_{i_1,\ldots,i_k=1},$$

$$\mathcal{A}_q = \left\{ (k,j,l_1,\ldots,l_k) : k+j+\sum_{p=1}^{k} l_p = q;\ k,j,l_1,\ldots,l_k = 0,1,\ldots \right\}.$$

Остальные обозначения, входящие в (6.174) и (6.175), такие же, как в (4.30) и (4.57) соответственно.

Теорема 6.3. *Пусть выполнены условия теоремы* 4.17 *и для* $t \in [t_0,T]$, $r \in N$ *существуют такие постоянные* $K_1, K_2 \in (0,\infty)$, *что условия*

$$\left| \mathsf{M}\left\{ \prod_{g=1}^{l} \frac{(t-t_0)^{j_g}}{j_g!} J^{(i_1^{(g)}\ldots\ i_{k_g}^{(g)})}_{l_1^{(g)}\ldots\ l_{k_g}^{(g)}\ t,t_0} - \prod_{g=1}^{l} \frac{(t-t_0)^{j_g}}{j_g!} \hat{J}^{(i_1^{(g)}\ldots\ i_{k_g}^{(g)})}_{l_1^{(g)}\ldots\ l_{k_g}^{(g)}\ t,t_0} \Big| \mathcal{F}_{t_0} \right\} \right| \le K_1 (t-t_0)^{r+1}, \quad (6.176)$$

$$\left| \mathsf{M}\left\{ \prod_{g=1}^{l} \frac{(t-t_0)^{j_g}}{j_g!} I^{(i_1^{(g)}\ldots\ i_{k_g}^{(g)})}_{l_1^{(g)}\ldots\ l_{k_g}^{(g)}\ t,t_0} - \prod_{g=1}^{l} \frac{(t-t_0)^{j_g}}{j_g!} \hat{I}^{(i_1^{(g)}\ldots\ i_{k_g}^{(g)})}_{l_1^{(g)}\ldots\ l_{k_g}^{(g)}\ t,t_0} \Big| \mathcal{F}_{t_0} \right\} \right| \le K_2 (t-t_0)^{r+1}, \quad (6.177)$$

выполнены для всех $(k_g, j_g, l_1^{(g)},\ldots,\ l_{k_g}^{(g)}) \in \mathcal{A}_{q_g}$; $i_1^{(g)},\ldots,i_{k_g}^{(g)} = 1,\ldots,m$; $q_g \le r$; $g = 1,\ldots,l$; $l = 1,2,\ldots,2r+1$. *Тогда для каждой функции* $h \in C^{2(r+1)}(\Re^n,\Re^1)$ *существуют постоянные* $K_h^{(1)}, K_h^{(2)} \in (0,\infty)$ *и* $n_1, n_2 \in N$ *такие, что*

$$\left| \mathsf{M}\left\{ h(\mathbf{x}_t) - h(\tilde{\mathbf{y}}_{t,t_0}^{(r)}) | \mathcal{F}_{t_0} \right\} \right| \le K_h^{(1)} (1+|\mathbf{x}_0|^{2n_1})(t-t_0)^{r+1},$$

$$\left| \mathsf{M}\left\{ h(\mathbf{x}_t) - h(\hat{\mathbf{y}}_{t,t_0}^{(r)}) | \mathcal{F}_{t_0} \right\} \right| \le K_h^{(2)} (1+|\mathbf{x}_0|^{2n_2})(t-t_0)^{r+1},$$

где $\mathbf{x}_t$ *— решение стохастического дифференциального уравнения Ито* (6.1) *в автономном случае, которое стартует из точки* $\mathbf{x}_{t_0}$ *в момент времени* t_0.

Аппроксимации $\hat{J}_{l_1^{(g)}\ldots\, l_{k_g}^{(g)}\ t,t_0}^{(i_1^{(g)}\ldots\, i_{k_g}^{(g)})}$, $\hat{I}_{l_1^{(g)}\ldots\, l_{k_g}^{(g)}\ t,t_0}^{(i_1^{(g)}\ldots\, i_{k_g}^{(g)})}$ повторных стохастических интегралов Ито $J_{l_1^{(g)}\ldots\, l_{k_g}^{(g)}\ t,t_0}^{(i_1^{(g)}\ldots\, i_{k_g}^{(g)})}$, $I_{l_1^{(g)}\ldots\, l_{k_g}^{(g)}\ t,t_0}^{(i_1^{(g)}\ldots\, i_{k_g}^{(g)})}$, которые удовлетворяют условиям (6.176), (6.177) при некотором фиксированном r, будем также называть слабыми аппроксимациями.

В [86] (см. также [70]) построены слабые аппроксимации повторных стохастических интегралов Ито $\hat{J}_{(\lambda_k\ldots\lambda_1)t,t_0}^{(i_k\ldots i_1)}$, удовлетворяющие условию (6.173) при $r=1,2$; $m,n\ge 1$ (напомним, что n — размерность процесса Ито $\mathbf{x}_t$, являющегося решением стохастического дифференциального уравнения Ито, а m — размерность винеровского процесса, входящего в это уравнение) и при $r=3$, $m=1$, $n\ge 1$. Далее приведем эти аппроксимации, а также слабые аппроксимации повторных стохастических интегралов Ито $I_{l_1\ldots l_{k t,t_0}}^{(i_1\ldots i_k)}$, удовлетворяющие более жесткому условию, чем (6.177) при $r=4$, $m=1$, $n\ge 1$.

С целью сокращения записи положим

$$\mathsf{M}\left\{\prod_{g=1}^{l} J_{(\lambda_{k_g}^{(g)}\ldots\ \lambda_1^{(g)})t_0+\Delta,t_0}^{(i_{k_g}^{(g)}\ldots\ i_1^{(g)})}\Big|\mathcal{F}_{t_0}\right\}\stackrel{\text{def}}{=}\mathsf{M}\left\{\prod_{g=1}^{l} J_{(\lambda_{k_g}^{(g)}\ldots\ \lambda_1^{(g)})}^{(i_{k_g}^{(g)}\ldots\ i_1^{(g)})}\right\}, \tag{6.178}$$

где $\Delta\in[0,T-t_0]$; $(\lambda_{k_g}^{(g)}\ldots\lambda_1^{(g)})\in\mathcal{M}_{k_g}$; $k_g\le r$; $g=1,\ldots,l$.

Приведем ряд точных значений математических ожиданий вида (6.178), полученных в [70, 86] и необходимых для построения слабых аппроксимаций $\hat{J}_{(\lambda_k\ldots\lambda_1)t_0+\Delta,t_0}^{(i_k\ldots i_1)}$ при $r=1,2$; $m,n\ge 1$:

$$\mathsf{M}\left\{J_{(1)}^{(i_1)}J_{(1)}^{(i_2)}\right\}=\Delta\mathbf{1}_{\{i_1=i_2\}}, \tag{6.179}$$

$$\mathsf{M}\left\{J_{(1)}^{(i_1)}J_{(01)}^{(0i_2)}\right\}=\mathsf{M}\left\{J_{(1)}^{(i_1)}J_{(10)}^{(i_20)}\right\}=\frac{1}{2}\Delta^2\mathbf{1}_{\{i_1=i_2\}}, \tag{6.180}$$

$$\mathsf{M}\left\{J_{(11)}^{(i_1i_2)}J_{(11)}^{(i_3i_4)}\right\}=\frac{1}{2}\Delta^2\mathbf{1}_{\{i_1=i_3\}}\mathbf{1}_{\{i_2=i_4\}}, \tag{6.181}$$

$$\mathsf{M}\left\{J_{(1)}^{(i_1)}J_{(1)}^{(i_2)}J_{(11)}^{(i_3i_4)}\right\}=\begin{cases}\Delta^2 & \text{при } i_1=\ldots=i_4\\ \frac{\Delta^2}{2} & \begin{array}{l}\text{при } i_3\ne i_4,\ i_1=i_3,\ i_2=i_4\\ \text{или } i_3\ne i_4,\ i_1=i_4,\ i_2=i_3\end{array}\\ 0 & \text{в противном случае}\end{cases}, \tag{6.182}$$

$$\mathsf{M}\left\{J_{(1)}^{(i_1)}J_{(1)}^{(i_2)}J_{(1)}^{(i_3)}J_{(1)}^{(i_4)}\right\}=\begin{cases}3\Delta^2 & \text{при } i_1=\ldots=i_4\\ \Delta^2 & \text{если среди } i_1,\ldots,i_4 \text{ имеются} \\ & \text{две пары одинаковых чисел}\\ 0 & \text{в противном случае}\end{cases}, \tag{6.183}$$

$$\mathsf{M}\left\{J_{(10)}^{(i_10)}J_{(01)}^{(0i_2)}\right\}=\frac{1}{6}\Delta^3\mathbf{1}_{\{i_1=i_2\}}, \tag{6.184}$$

$$\mathsf{M}\left\{J_{(10)}^{(i_10)}J_{(10)}^{(i_20)}\right\}=\mathsf{M}\left\{J_{(01)}^{(0i_1)}J_{(01)}^{(0i_2)}\right\}=\frac{1}{3}\Delta^3\mathbf{1}_{\{i_1=i_2\}}, \tag{6.185}$$

$$\mathsf{M}\left\{J_{(01)}^{(0i_1)}J_{(1)}^{(i_2)}J_{(1)}^{(i_3)}J_{(1)}^{(i_4)}\right\}=\mathsf{M}\left\{J_{(10)}^{(i_10)}J_{(1)}^{(i_2)}J_{(1)}^{(i_3)}J_{(1)}^{(i_4)}\right\}=$$

$$=\begin{cases}\frac{3}{2}\Delta^3 & \text{при } i_1=\ldots=i_4\\ \frac{1}{2}\Delta^3 & \text{если среди } i_1,\ldots,i_4 \text{ имеются} \\ & \text{две пары одинаковых чисел}\\ 0 & \text{в противном случае}\end{cases}, \tag{6.186}$$

$$\mathsf{M}\left\{J_{(01)}^{(0i_1)}J_{(1)}^{(i_2)}J_{(11)}^{(i_3i_4)}\right\}=\frac{1}{6}\Delta^3\mathbf{1}_{\{i_1=i_3\}}\mathbf{1}_{\{i_2=i_4\}}, \tag{6.187}$$

$$\mathsf{M}\left\{J_{(10)}^{(i_10)}J_{(1)}^{(i_2)}J_{(11)}^{(i_3i_4)}\right\}=\frac{1}{3}\Delta^3\mathbf{1}_{\{i_1=i_3\}}\mathbf{1}_{\{i_2=i_4\}}, \tag{6.188}$$

$$\mathsf{M}\left\{J_{(1)}^{(i_1)}\ldots J_{(1)}^{(i_6)}\right\}=\begin{cases}15\Delta^3 & \text{при } i_1=\ldots=i_6\\ 3\Delta^3 & \text{если среди } i_1,\ldots,i_6 \text{ имеются пара} \\ & \text{и четверка одинаковых чисел}\\ \Delta^3 & \text{если среди } i_1,\ldots,i_6 \text{ имеются три} \\ & \text{пары одинаковых чисел}\\ 0 & \text{в противном случае}\end{cases}, \tag{6.189}$$

$$\mathsf{M}\left\{J_{(11)}^{(i_1i_2)}J_{(11)}^{(i_3i_4)}J_{(11)}^{(i_5i_6)}\right\}=\frac{1}{6}\Delta^3\Bigl(\mathbf{1}_{\{i_2=i_4\}}\left(\mathbf{1}_{\{i_1=i_5\}}\mathbf{1}_{\{i_3=i_6\}}+\mathbf{1}_{\{i_1=i_6\}}\mathbf{1}_{\{i_3=i_5\}}\right)+$$

$$+\mathbf{1}_{\{i_2=i_6\}}\left(\mathbf{1}_{\{i_1=i_3\}}\mathbf{1}_{\{i_4=i_5\}}+\mathbf{1}_{\{i_1=i_4\}}\mathbf{1}_{\{i_3=i_5\}}\right)+$$

$$+\mathbf{1}_{\{i_4=i_6\}}\left(\mathbf{1}_{\{i_1=i_3\}}\mathbf{1}_{\{i_2=i_5\}}+\mathbf{1}_{\{i_2=i_3\}}\mathbf{1}_{\{i_1=i_5\}}\right)\Bigr), \tag{6.190}$$

$$\mathsf{M}\left\{J_{(11)}^{(i_1i_2)}J_{(11)}^{(i_3i_4)}J_{(1)}^{(i_5)}J_{(1)}^{(i_6)}\right\}=\frac{1}{2}\Delta^3\mathbf{1}_{\{i_1=i_3\}}\mathbf{1}_{\{i_2=i_4\}}\mathbf{1}_{\{i_5=i_6\}}+$$

$$+\frac{1}{6}\Delta^3\Bigl(2\cdot\mathbf{1}_{\{i_1=i_3\}}\left(\mathbf{1}_{\{i_2=i_5\}}\mathbf{1}_{\{i_4=i_6\}}+\mathbf{1}_{\{i_2=i_6\}}\mathbf{1}_{\{i_4=i_5\}}\right)+$$
$$+\mathbf{1}_{\{i_2=i_3\}}\left(\mathbf{1}_{\{i_1=i_5\}}\mathbf{1}_{\{i_4=i_6\}}+\mathbf{1}_{\{i_1=i_6\}}\mathbf{1}_{\{i_4=i_5\}}\right)+$$
$$+\mathbf{1}_{\{i_1=i_4\}}\left(\mathbf{1}_{\{i_3=i_5\}}\mathbf{1}_{\{i_2=i_6\}}+\mathbf{1}_{\{i_3=i_6\}}\mathbf{1}_{\{i_2=i_5\}}\right)+$$
$$+2\cdot\mathbf{1}_{\{i_2=i_4\}}\left(\mathbf{1}_{\{i_1=i_5\}}\mathbf{1}_{\{i_3=i_6\}}+\mathbf{1}_{\{i_3=i_5\}}\mathbf{1}_{\{i_1=i_6\}}\right)\Bigr), \tag{6.191}$$

$$\mathsf{M}\left\{J_{(11)}^{(i_1i_2)}J_{(1)}^{(i_3)}\ldots J_{(1)}^{(i_6)}\right\}=$$
$$=\frac{1}{2}\left(\mathsf{M}\left\{J_{(1)}^{(i_1)}\ldots J_{(1)}^{(i_6)}\right\}-\Delta\mathbf{1}_{\{i_1=i_2\}}\mathsf{M}\left\{J_{(1)}^{(i_3)}\ldots J_{(1)}^{(i_6)}\right\}\right), \tag{6.192}$$

где $\mathbf{1}_A$ — индикатор множества A.

Формулы (6.179)–(6.192) получены в [70, 86]. Следует отметить, что в [86] в формуле (6.191) отсутствует член $\frac{1}{2}\Delta^3\mathbf{1}_{\{i_1=i_3\}}\mathbf{1}_{\{i_2=i_4\}}\mathbf{1}_{\{i_5=i_6\}}$. Покажем, что наличие данного слагаемого в формуле (6.191) обязательно.

Действительно, поскольку $J_{(1)}^{(i_5)}J_{(1)}^{(i_6)}=J_{(11)}^{(i_5i_6)}+J_{(11)}^{(i_6i_5)}+\Delta\mathbf{1}_{\{i_5=i_6\}}$ с в.1, то

$$\mathsf{M}\left\{J_{(11)}^{(i_1i_2)}J_{(11)}^{(i_3i_4)}J_{(1)}^{(i_5)}J_{(1)}^{(i_6)}\right\}=\mathsf{M}\left\{J_{(11)}^{(i_1i_2)}J_{(11)}^{(i_3i_4)}J_{(11)}^{(i_5i_6)}\right\}+$$
$$+\mathsf{M}\left\{J_{(11)}^{(i_1i_2)}J_{(11)}^{(i_3i_4)}J_{(11)}^{(i_6i_5)}\right\}+\Delta\mathbf{1}_{\{i_5=i_6\}}\mathsf{M}\left\{J_{(11)}^{(i_1i_2)}J_{(11)}^{(i_3i_4)}\right\}. \tag{6.193}$$

Применяя к правой части (6.193) формулы (6.181), (6.190), приходим к (6.191).

Необходимо отметить [70, 86], что $\mathsf{M}\left\{\prod\limits_{g=1}^{l}J_{(\lambda_{k_g}^{(g)}\ldots\lambda_1^{(g)})}^{(i_{k_g}^{(g)}\ldots i_1^{(g)})}\right\}=0$, если число единиц, входящих во все мультииндексы $(\lambda_{k_g}^{(g)}\ldots\lambda_1^{(g)})$; $k_g\le r$; $g=1,\ldots,l$, нечетно.

Кроме того [70, 86] $\left|\mathsf{M}\left\{\prod\limits_{g=1}^{l}J_{(\lambda_{k_g}^{(g)}\ldots\lambda_1^{(g)})}^{(i_{k_g}^{(g)}\ldots i_1^{(g)})}\right\}\right|\le K\Delta^{\gamma_l}$, где $\gamma_l=\frac{1}{2}\delta_l+\rho_l$; δ_l — число единиц, а ρ_l — число нулей, входящих во все мультииндексы $(\lambda_{k_g}^{(g)}\ldots\lambda_1^{(g)})$; $k_g\le r$; $g=1,\ldots,l$; $K\in(0,\infty)$ — постоянная.

В случае $n,m\ge 1$; $r=1$ можно положить [70, 86] $\hat{J}_{(1)}^{(i)}=\Delta\tilde{\mathbf{f}}^{(i)}$; $i=1,\ldots,m$, где $\Delta\tilde{\mathbf{f}}^{(i)}$; $i=1,\ldots,m$ — независимые дискретные случайные величины, для которых $\mathsf{P}\left\{\Delta\tilde{\mathbf{f}}^{(i)}=\pm\sqrt{\Delta}\right\}=\frac{1}{2}$.

Нетрудно видеть, что аппроксимация [70, 86] $\hat{J}_{(1)}^{(i)}=\sqrt{\Delta}\zeta_0^{(i)}$; $i=1,\ldots,m$, где $\zeta_0^{(i)}$ — независимые стандартные гауссовские случайные величины, также удовлетворяет условию (6.173) при $r=1$.

В случае $n, m \geq 1$; $r = 2$ в качестве аппроксимаций $\hat{J}_{(1)}^{(i_1)}$, $\hat{J}_{(11)}^{(i_1 i_2)}$, $\hat{J}_{(10)}^{(i_1 0)}$, $\hat{J}_{(01)}^{(0 i_1)}$ возьмем следующие [70, 86]:

$$\hat{J}_{(1)}^{(i_1)} = \Delta\tilde{\mathbf{f}}^{(i_1)},\ \hat{J}_{(10)}^{(i_1 0)} = \hat{J}_{(01)}^{(0 i_1)} = \frac{1}{2}\Delta \cdot \Delta\tilde{\mathbf{f}}^{(i_1)}, \tag{6.194}$$

$$\hat{J}_{(11)}^{(i_1 i_2)} = \frac{1}{2}\left(\Delta\tilde{\mathbf{f}}^{(i_1)}\Delta\tilde{\mathbf{f}}^{(i_2)} + V^{(i_1 i_2)}\right), \tag{6.195}$$

где $\Delta\tilde{\mathbf{f}}^{(i)}$ — независимые гауссовские случайные величины с нулевым математическим ожиданием и дисперсией Δ или независимые дискретные случайные величины, для которых $\mathsf{P}\left\{\Delta\tilde{\mathbf{f}}^{(i)} = \pm\sqrt{3\Delta}\right\} = \frac{1}{6}$, $\mathsf{P}\left\{\Delta\tilde{\mathbf{f}}^{(i)} = 0\right\} = \frac{2}{3}$; $V^{(i_1 i_2)}$ — независимые дискретные случайные величины, удовлетворяющие условиям

$$\mathsf{P}\left\{V^{(i_1 i_2)} = \pm\Delta\right\} = \frac{1}{2} \text{ при } i_2 < i_1;$$

$$V^{(i_1 i_1)} = -\Delta;\ V^{(i_1 i_2)} = -V^{(i_2 i_1)} \text{ при } i_1 < i_2;$$

$i_1, i_2 = 1, \ldots, m$.

Заметим, что для того чтобы аппроксимации $\hat{J}_{(1)}^{(i_1)}$, $\hat{J}_{(11)}^{(i_1 i_2)}$, $\hat{J}_{(10)}^{(i_1 0)}$, $\hat{J}_{(01)}^{(0 i_1)}$ вида (6.194), (6.195) удовлетворяли условию (6.173) при $r = 2$, достаточно выполнения следующих условий:

1. $V^{(i_1 i_1)} = -\Delta$.

2. $\mathsf{M}\left\{V^{(i_1 i_2)}\right\} = 0,\ \mathsf{M}\left\{\left(V^{(i_1 i_2)}\right)^2\right\} = \Delta^2;\ i_1 \neq i_2$.

3. $V^{(i_1 i_2)}$ независима с $\Delta\tilde{\mathbf{f}}^{(i_3)}$, $\Delta\tilde{\mathbf{f}}^{(i_3)}\Delta\tilde{\mathbf{f}}^{(i_4)}$, $\Delta\tilde{\mathbf{f}}^{(i_3)}\Delta\tilde{\mathbf{f}}^{(i_4)}\Delta\tilde{\mathbf{f}}^{(i_5)}$ при всех $i_1, \ldots, i_5 = 1, \ldots, m$.

4. $V^{(i_1 i_2)} = -V^{(i_2 i_1)};\ i_1 \neq i_2$.

5. $V^{(i_1 i_2)}$ и $V^{(i_3 i_4)}$ независимы, если $\{i_1, i_2\} \neq \{i_3, i_4\}$; здесь $\{x, y\}$ означает неупорядоченную пару x, y.

6. $\Delta\tilde{\mathbf{f}}^{(i_1)}$ — такие же случайные величины, как в (6.194), (6.195); $i_1, i_2 = 1, \ldots, m$.

Условия 1–6 дают возможность предлагать различные способы построения случайных величин $V^{(i_1 i_2)}$; $i_1, i_2 = 1, \ldots, m$. Так, например, если $\Delta\tilde{\mathbf{f}}^{(i)} = \sqrt{\Delta}\zeta_0^{(i)}$, где $\zeta_0^{(i)}$ — независимые стандартные гауссовские случайные величины, то $V^{(i_1 i_2)}$ может быть гауссовской случайной величиной, удовлетворяющей условиям 1–5. В этом случае также можно предложить следующую формулу для $V^{(i_1 i_2)}$:

$$V^{(i_1 i_2)} = \frac{\Delta}{\sqrt{2}}\left(\zeta_0^{(i_1)}\zeta_1^{(i_2)} - \zeta_1^{(i_1)}\zeta_0^{(i_2)}\right) - \Delta\mathbf{1}_{\{i_1 = i_2\}}, \tag{6.196}$$

где $\zeta_0^{(i)}, \zeta_1^{(i)}; i = 1, \ldots, m$ — независимые в совокупности стандартные гауссовские случайные величины.

Перейдем к рассмотрению случая $r = 3, m = 1, n \geq 1$. В данной ситуации нам кроме формул (6.179)–(6.193) потребуется еще ряд формул для математических ожиданий вида (6.178) при $m = 1$.

Согласно [70, 86] имеем

$$\mathsf{M}\{J_{(1)}J_{(111)}\} = \mathsf{M}\{J_{(01)}J_{(111)}\} = \mathsf{M}\{J_{(10)}J_{(111)}\} = 0,$$

$$\mathsf{M}\{J_{(011)}J_{(11)}\} = \mathsf{M}\{J_{(101)}J_{(11)}\} = \mathsf{M}\{J_{(110)}J_{(11)}\} = \frac{1}{6}\Delta^3,$$

$$\mathsf{M}\{J_{(001)}J_{(1)}\} = \mathsf{M}\{J_{(010)}J_{(1)}\} = \mathsf{M}\{J_{(100)}J_{(1)}\} = \frac{1}{6}\Delta^3,$$

$$\mathsf{M}\{J_{(100)}J_{(10)}\} = \mathsf{M}\{J_{(001)}J_{(01)}\} = \frac{1}{8}\Delta^4,\ \mathsf{M}\{J_{(111)}J_{(11)}\} = 0,$$

$$\mathsf{M}\{J_{(010)}J_{(10)}\} = \mathsf{M}\{J_{(010)}J_{(01)}\} = \frac{1}{6}\Delta^4,\ \mathsf{M}\left\{\left(J_{(111)}\right)^2\right\} = \frac{1}{6}\Delta^3,$$

$$\mathsf{M}\{J_{(100)}J_{(01)}\} = \mathsf{M}\{J_{(001)}J_{(10)}\} = \frac{1}{24}\Delta^4,$$

$$\mathsf{M}\{J_{(110)}J_{(10)}\} = \mathsf{M}\{J_{(110)}J_{(01)}\} = \mathsf{M}\{J_{(101)}J_{(10)}\} = 0,$$

$$\mathsf{M}\{J_{(101)}J_{(01)}\} = \mathsf{M}\{J_{(011)}J_{(10)}\} = \mathsf{M}\{J_{(011)}J_{(01)}\} = 0,$$

$$\mathsf{M}\left\{J_{(011)}\left(J_{(1)}\right)^2\right\} = \mathsf{M}\left\{J_{(101)}\left(J_{(1)}\right)^2\right\} = \mathsf{M}\left\{J_{(110)}\left(J_{(1)}\right)^2\right\} = \frac{1}{6}\Delta^3,$$

$$\mathsf{M}\left\{J_{(111)}\left(J_{(1)}\right)^3\right\} = \Delta^3,\ \mathsf{M}\left\{J_{(111)}J_{(11)}J_{(1)}\right\} = \frac{1}{2}\Delta^3,$$

где

$$J_{(\lambda_k\ldots\lambda_1)} \stackrel{\text{def}}{=} \int\limits_{t_0}^{t_0+\Delta} \ldots \int\limits_{t_0}^{\tau_{k-1}} df_{\tau_k}^{(\lambda_k)} \ldots df_{\tau_1}^{(\lambda_1)};$$

$f_\tau^{(0)} \stackrel{\text{def}}{=} \tau$; $f_\tau^{(1)} \stackrel{\text{def}}{=} f_\tau$ — стандартный скалярный винеровский процесс; $\lambda_l = 1$ или $\lambda_l = 0$; $l = 1, \ldots, k$.

В [86] с помощью приведенных моментных соотношений предложены следующие слабые аппроксимации повторных стохастических интегралов Ито в случае $r = 3$, $m = 1$, $n \geq 1$:

$$\hat{J}_{(1)} = \Delta\tilde{f}, \tag{6.197}$$

$$\hat{J}_{(10)} = \Delta\hat{f},\ \hat{J}_{(01)} = \Delta \cdot \Delta\tilde{f} - \Delta\hat{f}, \tag{6.198}$$

$$\hat{J}_{(11)}=\frac{1}{2}\left(\left(\Delta\tilde{f}\right)^2-\Delta\right),\ \hat{J}_{(001)}=\hat{J}_{(010)}=\hat{J}_{(100)}=\frac{1}{6}\Delta^2\cdot\Delta\tilde{f},$$

$$\hat{J}_{(110)}=\hat{J}_{(101)}=\hat{J}_{(011)}=\frac{1}{6}\Delta\left(\left(\Delta\tilde{f}\right)^2-\Delta\right),\ \hat{J}_{(111)}=\frac{1}{6}\Delta\tilde{f}\left(\left(\Delta\tilde{f}\right)^2-3\Delta\right),$$

где $\Delta\tilde{f}\sim\mathrm{N}(0,\Delta)$; $\Delta\hat{f}\sim\mathrm{N}(0,\frac{1}{3}\Delta^3)$; $\mathsf{M}\{\Delta\tilde{f}\Delta\hat{f}\}=\frac{1}{2}\Delta^2$.

В заключение построим слабые аппроксимации повторных стохастических интегралов Ито в случае $r=4$, $m=1$, $n\geq 1$.

В усеченное разложение Тейлора–Ито в форме Вагнера и Платена вида (4.94) при $r=4$, $m=1$ входят 26 различных повторных стохастических интегралов Ито. Построение слабых аппроксимаций данных стохастических интегралов, удовлетворяющих условию (6.173) при $r=4$, весьма затруднительно в силу необходимости рассматривать большое число моментных условий. Однако эту проблему можно упростить, если ввести усеченное унифицированное разложение Тейлора–Ито, например, вида (4.96) при $r=4$, $m=1$, поскольку в него входят всего лишь 15 различных повторных стохастических интегралов Ито:

$$I_0,I_1,I_{00},I_{000},I_2,I_{10},I_{01},I_3,I_{11},I_{20},I_{02},I_{100},I_{010},I_{001},I_{0000},$$

где

$$I_{l_1\ldots l_k}\stackrel{\mathrm{def}}{=}\int\limits_{t_0}^{t_0+\Delta}(t_0-\tau_k)^{l_k}\ldots\int\limits_{t_0}^{\tau_2}(t_0-\tau_1)^{l_1}df_{\tau_1}\ldots df_{\tau_k},\ k\geq 1;$$

f_τ — скалярный стандартный винеровский процесс.

Нетрудно заметить, что условие (6.177) будет выполнено при $r=4$, $i_1=\ldots=i_4$, если выполнено следующее более жесткое условие:

$$\left|\mathsf{M}\left\{\prod_{g=1}^{l}I_{l_1^{(g)}\ldots\ l_{k_g}^{(g)}}-\prod_{g=1}^{l}\hat{I}_{l_1^{(g)}\ldots\ l_{k_g}^{(g)}}|\mathcal{F}_{t_0}\right\}\right|\leq K(t-t_0)^5, \tag{6.199}$$

для всех $l_1^{(g)}\ldots\ l_{k_g}^{(g)}\in A$; $k_g\leq 4$; $g=1,\ldots,l$; $l=1,2,\ldots,9$; здесь $K\in(0,\infty)$; $A=\{0,1,00,000,2,10,01,3,11,20,02,100,010,001,0000\}$.

Положим

$$\hat{I}_0=\sqrt{\Delta}\zeta_0,\ \hat{I}_{00}=\frac{1}{2}\Delta\left((\zeta_0)^2-1\right), \tag{6.200}$$

$$\hat{I}_1=-\frac{\Delta^{\frac{3}{2}}}{2}\left(\zeta_0+\frac{1}{\sqrt{3}}\zeta_1\right),\ \hat{I}_{000}=\frac{\Delta^{\frac{3}{2}}}{6}\left((\zeta_0)^3-3\zeta_0\right), \tag{6.201}$$

$$\hat{I}_{0000}=\frac{\Delta^2}{24}\left((\zeta_0)^4-6(\zeta_0)^2+3\right); \tag{6.202}$$

здесь и далее

$$\zeta_0 \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{\sqrt{\Delta}} \int\limits_{t_0}^{t_0+\Delta} df_s, \ \zeta_1 \stackrel{\text{def}}{=} \frac{2\sqrt{3}}{\Delta^{\frac{3}{2}}} \int\limits_{t_0}^{t_0+\Delta} \left(s - t_0 - \frac{\Delta}{2}\right) df_s;$$

f_s — скалярный стандартный винеровский процесс.

Нетрудно видеть, что ζ_0, ζ_1 — независимые стандартные гауссовские случайные величины. Кроме того, аппроксимации (6.200)–(6.202) с вероятностью 1 совпадают с повторными стохастическими интегралами Ито, соответствующими этим аппроксимациям. Отсюда следует, что всевозможные произведения $\prod\limits_{g=1}^{l} \hat{I}_{l_1^{(g)} \ldots \ l_{k_g}^{(g)}}$, входящие в (6.199) и содержащие только аппроксимации $\hat{I}_0$, $\hat{I}_{00}$, $\hat{I}_1$, $\hat{I}_{000}$, $\hat{I}_{0000}$ вида (6.200)–(6.202), обращают левую часть (6.199) в нуль, т. е. условие (6.199) выполнено автоматически.

Для построения аппроксимаций $\hat{I}_{100}$, $\hat{I}_{010}$, $\hat{I}_{001}$, $\hat{I}_{10}$, $\hat{I}_{01}$, $\hat{I}_{11}$, $\hat{I}_{20}$, $\hat{I}_{02}$, $\hat{I}_2$, $\hat{I}_3$ нам необходимо вычислить ряд условных математических ожиданий вида $\mathsf{M}\left\{\prod\limits_{g=1}^{l} I_{l_1^{(g)} \ldots \ l_{k_g}^{(g)}} | \mathcal{F}_{t_0}\right\}$, где $(l_1^{(g)} \ldots \ l_{k_g}^{(g)}) \in A$, которые с целью упрощения записи обозначаем через $\mathsf{M}\left\{\prod\limits_{g=1}^{l} I_{l_1^{(g)} \ldots \ l_{k_g}^{(g)}}\right\}$.

Имеем

$$\mathsf{M}\{I_3\} = \mathsf{M}\{I_3 (I_0)^2\} = \mathsf{M}\{I_3 I_{00}\} = 0, \ \mathsf{M}\{I_3 I_0\} = -\frac{\Delta^4}{4},$$

$$\mathsf{M}\{I_2 (I_0)^2\} = \mathsf{M}\{I_2 I_{00}\} = \mathsf{M}\{I_2 I_{000}\} = \mathsf{M}\{I_2 I_{0000}\} = 0,$$

$$\mathsf{M}\{I_2 (I_{00})^2\} = \mathsf{M}\{I_2 (I_0)^4\} = \mathsf{M}\{I_2 I_{000} I_0\} = 0,$$

$$\mathsf{M}\{I_2 I_{00} (I_0)^2\} = \mathsf{M}\{I_2 I_{10}\} = \mathsf{M}\{I_2 I_{01}\} = \mathsf{M}\{I_2 I_1 I_0\} = \mathsf{M}\{I_2\} = 0,$$

$$\mathsf{M}\{I_2 I_0\} = \frac{\Delta^3}{3}, \ \mathsf{M}\{I_2 (I_0)^3\} = \Delta^4, \ \mathsf{M}\{I_2 I_{00} I_0\} = \frac{\Delta^4}{3}, \ \mathsf{M}\{I_2 I_1\} = -\frac{\Delta^4}{4},$$

$$\mathsf{M}\{I_\mu\} = \mathsf{M}\{I_\mu I_0\} = \mathsf{M}\{I_\mu I_{000}\} = \mathsf{M}\{I_\mu (I_0)^3\} = 0,$$

$$\mathsf{M}\{I_\mu I_{00} I_0\} = \mathsf{M}\{I_\mu I_1\} = 0, \ \mathsf{M}\{I_{20} (I_0)^2\} = \frac{\Delta^4}{6}, \ \mathsf{M}\{I_{20} I_{00}\} = \frac{\Delta^4}{12},$$

$$\mathsf{M}\{I_{11} (I_0)^2\} = \frac{\Delta^4}{4}, \ \mathsf{M}\{I_{11} I_{00}\} = \frac{\Delta^4}{8}, \ \mathsf{M}\{I_{02} (I_0)^2\} = \frac{\Delta^4}{2}, \ \mathsf{M}\{I_{02} I_{00}\} = \frac{\Delta^4}{4},$$

$$\mathsf{M}\{I_\lambda\} = \mathsf{M}\{I_\lambda I_0\} = \mathsf{M}\{I_\lambda (I_0)^2\} = \mathsf{M}\{I_\lambda I_{00}\} = 0,$$

$$\mathsf{M}\{I_\lambda I_1\} = \mathsf{M}\{I_\lambda I_{0000}\} = \mathsf{M}\{I_\lambda (I_{00})^2\} = \mathsf{M}\{I_\lambda (I_0)^4\} = 0,$$

$$\mathsf{M}\{I_\lambda I_{000} I_0\} = \mathsf{M}\{I_\lambda I_{00} (I_0)^2\} = \mathsf{M}\{I_\lambda I_{10}\} = 0,\ \mathsf{M}\{I_\lambda I_{01}\} = \mathsf{M}\{I_\lambda I_1 I_0\} = 0,$$

$$\mathsf{M}\{I_{100} I_{000}\} = -\frac{\Delta^4}{24},\ \mathsf{M}\{I_{100} (I_0)^3\} = -\frac{\Delta^4}{4},\ \mathsf{M}\{I_{100} I_{00} I_0\} = -\frac{\Delta^4}{8},$$

$$\mathsf{M}\{I_{010} I_{000}\} = -\frac{\Delta^4}{12},\ \mathsf{M}\{I_{010} (I_0)^3\} = -\frac{\Delta^4}{2},\ \mathsf{M}\{I_{010} I_{00} I_0\} = -\frac{\Delta^4}{4},$$

$$\mathsf{M}\{I_{001} I_{000}\} = -\frac{\Delta^4}{8},\ \mathsf{M}\{I_{001} (I_0)^3\} = -\frac{3\Delta^4}{4},\ \mathsf{M}\{I_{001} I_{00} I_0\} = -\frac{3\Delta^4}{8},$$

$$\mathsf{M}\{I_\rho I_0\} = \mathsf{M}\{I_\rho I_{000}\} = \mathsf{M}\{I_\rho (I_0)^3\} = \mathsf{M}\{I_\rho I_{00} I_0\} = 0,$$

$$\mathsf{M}\{I_\rho I_1\} = \mathsf{M}\{I_\rho I_{0000}\} = \mathsf{M}\{I_\rho (I_0)^5\} = \mathsf{M}\{I_\rho (I_{00})^2 I_0\} = 0,$$

$$\mathsf{M}\{I_\rho I_{00} (I_0)^3\} = \mathsf{M}\{I_\rho I_{000} (I_0)^2\} = \mathsf{M}\{I_\rho I_{0000} I_0\} = 0,$$

$$\mathsf{M}\{I_\rho I_{000} I_{00}\} = \mathsf{M}\{I_\rho I_{100}\} = \mathsf{M}\{I_\rho I_{010}\} = 0,$$

$$\mathsf{M}\{I_\rho I_{001}\} = \mathsf{M}\{I_\rho I_2\} = \mathsf{M}\{(I_\rho)^2 I_0\} = \mathsf{M}\{I_\rho I_{00} I_1\} = 0,$$

$$\mathsf{M}\{I_{10} I_{01} I_0\} = \mathsf{M}\{I_\rho\} = \mathsf{M}\{I_\rho I_1 (I_0)^2\} = 0,$$

$$\mathsf{M}\{I_{10} (I_0)^2\} = -\frac{\Delta^3}{3},\ \mathsf{M}\{I_{10} I_{00}\} = -\frac{\Delta^3}{6},\ \mathsf{M}\{I_{10} (I_{00})^2\} = -\frac{\Delta^4}{3},$$

$$\mathsf{M}\{I_{10} (I_0)^4\} = -2\Delta^4,\ \mathsf{M}\{I_{10} I_{000} I_0\} = -\frac{\Delta^4}{6},\ \mathsf{M}\{I_{10} I_{00} (I_0)^2\} = -\frac{5\Delta^4}{6},$$

$$\mathsf{M}\{(I_{10})^2\} = \frac{\Delta^4}{12},\ \mathsf{M}\{I_{10} I_{01}\} = \frac{\Delta^4}{8},\ \mathsf{M}\{I_{10} I_1 I_0\} = \frac{5\Delta^4}{24},$$

$$\mathsf{M}\{I_{01} (I_0)^2\} = -\frac{2\Delta^3}{3},\ \mathsf{M}\{I_{01} I_{00}\} = -\frac{\Delta^3}{3},\ \mathsf{M}\{I_{01} (I_{00})^2\} = -\frac{2\Delta^4}{3},$$

$$\mathsf{M}\{I_{01} (I_0)^4\} = -4\Delta^4,\ \mathsf{M}\{I_{01} I_{000} I_0\} = -\frac{\Delta^4}{3},\ \mathsf{M}\{I_{01} I_{00} (I_0)^2\} = -\frac{5\Delta^4}{3},$$

$$\mathsf{M}\{(I_{01})^2\} = \frac{\Delta^4}{4},\ \mathsf{M}\{I_{01} I_1 I_0\} = \frac{3\Delta^4}{8},$$

где $\mu \stackrel{\text{def}}{=} 02, 11, 20$; $\lambda \stackrel{\text{def}}{=} 100, 010, 001$; $\rho \stackrel{\text{def}}{=} 10, 01$ (эти записи следует понимать как последовательности цифр).

Приведенные равенства получены с помощью стандартных свойств стохастических интегралов Ито (см.главу 1), а также следующих справедливых с вероятностью 1 и вытекающих из формулы Ито равенств:

$$(I_0)^4 = 24 I_{0000} + 12\Delta I_{00} + 3\Delta^2,\ (I_{00})^2 = 6 I_{0000} + 2\Delta I_{00} + \frac{\Delta^2}{2},$$

$$I_{00}(I_0)^2 = 12I_{0000} + 5\Delta I_{00} + \Delta^2,\ I_1 I_0 = I_{10} + I_{01} - \frac{\Delta^2}{2},$$

$$I_{00}(I_0)^3 = 60I_{00000} + 27\Delta I_{000} + 6\Delta^2 I_0,$$

$$(I_0)^5 = 120I_{00000}+60\Delta I_{000}+15\Delta^2 I_0,\ (I_{00})^2 I_0 = 30I_{00000}+12\Delta I_{000}+\frac{10\Delta^2}{4}I_0,$$

$$I_{000}(I_0)^2 = 20I_{00000} + 7\Delta I_{000} + \Delta^2 I_0,\ I_{0000}I_0 = 5I_{00000} + \Delta I_{000},$$

$$I_{000}I_{00} = 10I_{00000} + 3\Delta I_{000} + \frac{\Delta^2}{2}I_0,\ I_{00}I_1 = I_{001} + I_{010} + I_{100} - \frac{\Delta^2}{2}I_0,$$

$$(I_0)^3 = 6I_{000} + 3\Delta I_0,\ I_{00}I_0 = 3I_{000} + \Delta I_0,$$

$$I_{10}I_0 = I_{010} + I_{100} + \Delta I_1 + I_2,\ I_{000}I_0 = 4I_{0000} + \Delta I_{00},\ (I_0)^2 = 2I_{00} + \Delta,$$

$$I_{01}I_0 = 2I_{001} + I_{010} - \frac{1}{2}\left(I_2 + \Delta^2 I_0\right).$$

Используя приведенные ранее моментные соотношения, строим аппроксимации $\hat{I}_{100}$, $\hat{I}_{010}$, $\hat{I}_{001}$, $\hat{I}_{10}$, $\hat{I}_{01}$, $\hat{I}_{11}$, $\hat{I}_{20}$, $\hat{I}_{02}$, $\hat{I}_2$, $\hat{I}_3$:

$$\hat{I}_{100} = -\frac{\Delta^{\frac{5}{2}}}{24}\left((\zeta_0)^3 - 3\zeta_0\right),\ \hat{I}_{010} = -\frac{\Delta^{\frac{5}{2}}}{12}\left((\zeta_0)^3 - 3\zeta_0\right), \tag{6.203}$$

$$\hat{I}_{001} = -\frac{\Delta^{\frac{5}{2}}}{8}\left((\zeta_0)^3 - 3\zeta_0\right),\ \hat{I}_{11} = \frac{\Delta^3}{8}\left((\zeta_0)^2 - 1\right), \tag{6.204}$$

$$\hat{I}_{20} = \frac{\Delta^3}{12}\left((\zeta_0)^2 - 1\right),\ \hat{I}_{02} = \frac{\Delta^3}{4}\left((\zeta_0)^2 - 1\right), \tag{6.205}$$

$$\hat{I}_3 = -\frac{\Delta^{\frac{7}{2}}}{4}\zeta_0,\ \hat{I}_2 = \frac{\Delta^{\frac{5}{2}}}{3}\left(\zeta_0 + \frac{\sqrt{3}}{2}\zeta_1\right), \tag{6.206}$$

$$\hat{I}_{10} = \Delta^2\left(-\frac{1}{6}\left((\zeta_0)^2 - 1\right) - \frac{1}{4\sqrt{3}}\zeta_0\zeta_1 \pm \frac{1}{12\sqrt{2}}\left((\zeta_1)^2 - 1\right)\right), \tag{6.207}$$

$$\hat{I}_{01} = \Delta^2\left(-\frac{1}{3}\left((\zeta_0)^2 - 1\right) - \frac{1}{4\sqrt{3}}\zeta_0\zeta_1 \mp \frac{1}{12\sqrt{2}}\left((\zeta_1)^2 - 1\right)\right), \tag{6.208}$$

где ζ_0, ζ_1 — такие же случайные величины, как в (6.200)–(6.202). Нетрудно проверить, что аппроксимации (6.200)–(6.202), (6.203)–(6.208) удовлетворяют условию (6.199) при $r = 4$, $m = 1$, $n \geq 1$, т. е. являются слабыми аппроксимациями.

6.15 Заключение

В главах 5 и 6 приведено как нигде полное и обширное систематическое решение проблемы аппроксимации (в основном среднеквадратической) повторных стохастических интегралов применительно к численному интегрированию стохастических дифференциальных уравнений.

Всякий раз, при подготовке очередного издания настоящей книги, автор обнаруживал все новые, весьма неожиданные и полезные факты, относящиеся к аппроксимации повторных стохастических интегралов. В результате главы 5 и 6 настолько увеличились по объему, что пожалуй могут расцениваться как самостоятельная теория аппроксимации повторных стохастических интегралов.

Отметим, что для ряда специальных типов стохастических дифференциальных уравнений Ито проблема аппроксимации повторных стохастических интегралов несколько упрощается, но не решается. К таким типам уравнений относятся уравнения с аддитивным векторным шумом, скалярным неаддитивным шумом, скалярным аддитивным шумом, уравнения с малым параметром [186]. Для перечисленных типов уравнений упрощения связаны с тем, что либо некоторые коэффициентные функции из разложения Тейлора–Ито тождественно равны нулю, либо существенно влияет скалярность шума, либо за счет присутствия малого параметра можно пренебречь некоторыми членами из разложения Тейлора–Ито, которые содержат сложные для аппроксимации повторные стохастические интегралы.

Глядя в целом на результаты глав 5 и 6, можно пожалуй сказать, что подход обобщенных кратных рядов Фурье (теорема 5.1) нашел свою естественную нишу в решении вопроса об аппроксимации повторных стохастических интегралов, позволил по-новому посмотреть на их "природу" и открыл новые горизонты в исследовании проблемы численного интегрирования стохастических дифференциальных уравнений (см. последующие главы), а также видоизменил как внешнюю (формульную) сторону данной проблемы, так и внутреннюю (идеологическую), т.е. обсуждаемая проблема стала во многих отношениях прозрачной.

Часть III

Численные методы решения стохастических дифференциальных уравнений

Глава 7

Явные одношаговые сильные численные методы решения стохастических дифференциальных уравнений Ито

Настоящая глава посвящена построению явных сильных одношаговых методов численного решения стохастических дифференциальных уравнений Ито, основанных на разложениях Тейлора–Ито и Тейлора–Стратоновича. В ней приводятся новые представления некоторых известных численных методов, а также строится ряд новых численных методов, в том числе конечно-разностных, для стохастических дифференциальных уравнений Ито с многомерным шумом.

В данной главе рассматриваются методы численного интегрирования стохастических дифференциальных уравнений Ито, сходящиеся в сильном смысле (определение сильной сходимости численной схемы будет дано далее) к решениям этих уравнений.

Первые работы по этой тематике относятся, по-видимому, к 1950-м годам. В [134] (G. Maruyama, 1955) рассмотрен метод Эйлера для стохастических дифференциальных уравнений Ито и доказана его среднеквадратическая сходимость. По результатам численных экспериментов в [135] (D.J. Clements, B.D.O. Anderson, 1973) и [136] (D.J. Wright, 1974) можно видеть, что не любые эвристические стохастические обобщения хорошо известных численных методов сходятся к решениям стохастических дифференциальных уравнений. В [67, 70] (Г.Н. Мильштейн, 1974, 1988), в частности, построен явный сильный численный метод решения стохастических дифференциальных уравнений Ито порядка точности 1.0. Работа [138] (W. Rumelin, 1982) посвящена явным сильным численным схемам типа Рунге–Кутта той же точности решения стохастических дифференциальных уравнений.

Явная сильная порядка точности 1.0 конечно-разностная численная схема решения стохастического дифференциального уравнения Ито со скалярным и аддитивным шумом представлена в [139] (E. Platen, 1984). Аналогичная численная схема построена в [140] (T.C. Gard, 1988).

В [139] (E. Platen, 1984) и [86] (P.E. Kloeden, E. Platen, 1992) представлены явные сильные порядка точности 1.5 одношаговые конечно-разностные численные схемы решения стохастических дифференциальных уравнений Ито.

Явная сильная одношаговая схема порядка точности 2.0 для случая скалярного и векторного (без необходимых аппроксимаций стохастических интегралов) шума содержится в монографии [86] (P.E. Kloeden, E. Platen, 1992). В [141] (C.C. Chang, 1987) построен явный сильный порядка точности 2.0 конечно-разностный численный метод решения скалярного стохастического дифференциального уравнения Ито со скалярным шумом и автономным диффузионным коэффициентом. Аналогичная схема решения векторного стохастического дифференциального уравнения со скалярным шумом и автономной диффузионной матрицей рассматривается в работе [86] (P.E. Kloeden, E. Platen, 1992).

Необходимо отметить, что существует также большое число других работ, посвященных явным сильным одношаговым численным методам решения стохастических дифференциальных уравнений Ито (см., например, [74–76, 91, 102, 103, 126]).

В настоящей главе строятся явные сильные одношаговые численные методы решения стохастических дифференциальных уравнений Ито, основанные на унифицированных разложениях Тейлора–Ито и Тейлора–Стратоновича, разложении Тейлора–Ито в форме Вагнера и Платена, разложении Тейлора–Стратоновича в форме Клоедена и Платена, а также на методе аппроксимации повторных стохастических интегралов, основанном на кратных рядах Фурье.

Некоторые из представленных численных методов являются новыми версиями численных схем, построенных в [70] (Г.Н. Мильштейн, 1988), [86] (P.E. Kloeden, E.Platen, 1992), [87] (P.E. Kloeden, E. Platen, H. Schurz, 1994).

Другие полученные численные методы являются новыми. Новизна этих методов, с одной стороны, связана с тем, что они построены на основе унифицированных разложений Тейлора–Ито и Тейлора–Стратоновича, а с другой с тем, что в указанных численных методах для аппроксимации входящих в них повторных стохастических интегралов используется рассмотренный в главах 5 и 6 эффективный

метод, основанный на кратных рядах Фурье. Отметим, что кратные ряды Фурье по полиномам Лежандра применяются впервые к численному интегрированию стохастических дифференциальных уравнений Ито.

На основе некоторых из представленных численных методов построены конечно-разностные схемы. Среди них отметим явные сильные одношаговые конечно-разностные численные методы порядка точности 1.0, 1.5, 2.0 и 2.5, основанные на унифицированном разложении Тейлора–Ито и разложении Тейлора–Ито в форме Вагнера и Платена. Конечно-разностные численные методы порядка точности 1.5, 2.0 и 2.5 являются новыми, причем последние два для векторных стохастических дифференциальных уравнений Ито с многомерным шумом не имеют аналогов в литературе.

7.1 Сильная сходимость и тестирование сильных численных методов

Пусть $\mathbf{x}_t,\ t \in [0,T]$ — решение стохастического дифференциального уравнения Ито (1.35). Рассмотрим разбиение $\{\tau_p\}_{p=0}^{N}$ промежутка $[0,T]$ такое, что

$$0 = \tau_0 < \tau_1 < \ldots < \tau_N = T,\ \Delta_N = \max_{0 \le j \le N-1} |\tau_{j+1} - \tau_j| \,. \tag{7.1}$$

Через $\mathbf{y}_{\tau_j};\ j = 0,1,\ldots,N$ обозначим дискретную аппроксимацию процесса $\mathbf{x}_t,\ t \in [0,T]$, соответствующую максимальному шагу дискретизации Δ_N (вместо $\mathbf{y}_{\tau_j}$ правильнее было бы писать $\mathbf{y}_{\tau_j}^{\Delta_N}$, однако мы не будем этого делать для упрощения записи).

Дадим определение сильной сходимости дискретной аппроксимации.

Определение 7.1 [86]. *Будем говорить, что дискретная аппроксимация (численный метод)* $\mathbf{y}_{\tau_j};\ j = 0,1,\ldots,N$, *соответствующая максимальному шагу дискретизации* Δ_N, *сходится сильно к процессу* $\mathbf{x}_t,\ t \in [0,T]$ *в момент времени* T, *если* $\lim\limits_{\Delta_N \downarrow 0} \mathsf{M}\{|\mathbf{x}_T - \mathbf{y}_T|\} = 0$.

Рассмотрим определение, характеризующее скорость сильной сходимости дискретной аппроксимации.

Определение 7.2 [86]. *Будем говорить, что дискретная аппроксимация (численный метод)* $\mathbf{y}_{\tau_j};\ j = 0,1,\ldots,N$, *соответствующая максимальному шагу дискретизации* Δ_N, *сходится сильно с порядком* $\gamma > 0$ *в момент времени* T *к процессу* $\mathbf{x}_t,\ t \in [0,T]$, *если существуют*

постоянная $C \in (0, \infty)$, *которая не зависит от* Δ_N, *и число* $\delta > 0$ *такие, что*

$$\varepsilon \stackrel{\text{def}}{=} \mathsf{M}\{|\mathbf{x}_T - \mathbf{y}_T|\} \le C(\Delta_N)^\gamma \tag{7.2}$$

для всех $\Delta_N \in (0, \delta)$.

В данной главе, а также в последующих двух главах будут рассмотрены различные сильные численные методы решения стохастических дифференциальных уравнений Ито. Будут даны теоретические оценки скорости сходимости этих численных методов, т. е. при подходящих условиях будут получены оценки типа (7.2).

Вместе с тем интерес представляет также тестирование сильных численных методов, т. е. применение их к тестовым стохастическим дифференциальным уравнениям Ито с известными точными решениями и последующей численной оценкой величины $\mathsf{M}\{|\mathbf{x}_T - \mathbf{y}_T|\}$ при различных значениях Δ_N. Далее рассмотрим теоретические аспекты этого вопроса.

Сначала сделаем несколько замечаний по поводу статистических тестов.

Пусть $x_1, \ldots, x_N$ — последовательность независимых гауссовских случайных величин с известным математическим ожиданием M и неизвестной дисперсией D. Обычно в качестве оценки $\hat{\mathsf{D}}_N$ дисперсии D выбирают $\hat{\mathsf{D}}_N = \frac{1}{N-1}\sum\limits_{i=1}^{N}\left(x_i - \hat{\mathsf{M}}_N\right)^2$, где $\hat{\mathsf{M}}_N = \frac{1}{N}\sum\limits_{i=1}^{N} x_i$. Известно [86], что при $N > 3$ случайная величина ξ_N вида $\xi_N = (\hat{\mathsf{M}}_N - \mathsf{M})/\sqrt{\hat{\mathsf{D}}_N/N}$ удовлетворяет t-распределению Стьюдента с $N-1$ степенью свободы, нулевым математическим ожиданием и дисперсией $(N-1)/(N-3)$.

Далее имеем $\mathsf{P}\{|\hat{\mathsf{M}}_N - \mathsf{M}| < A\} = \mathsf{P}\{|\xi_N| < t\}$, где $t = A\sqrt{N/\hat{\mathsf{D}}_N}$. Теперь с помощью статистических таблиц по заданному α можно отыскать число $t = t_{N-1}^{1-\alpha}$ такое, что $\mathsf{P}\left\{|\hat{\mathsf{M}}_N - \mathsf{M}| < t_{N-1}^{1-\alpha}\sqrt{\hat{\mathsf{D}}_N/N}\right\} = 1 - \alpha$.

Таким образом, доверительный интервал для M с уровнем достоверности $1-\alpha$ имеет вид $\left(\hat{\mathsf{M}}_N - t_{N-1}^{1-\alpha}\sqrt{\hat{\mathsf{D}}_N/N},\ \hat{\mathsf{M}}_N + t_{N-1}^{1-\alpha}\sqrt{\hat{\mathsf{D}}_N/N}\right)$.

Проанализируем теперь ситуацию, когда случайные величины x_i; $i = 1, \ldots, K$ являются негауссовскими, но независимыми и одинаково распределенными с известным математическим ожиданием M и неизвестной дисперсией D. Предположим, что M, N натуральные. Разобьем последовательность $\{x_i\}_{i=1}^{MN}$ на M групп по N случайных величин в каждой: $\{x_i^{(j)}\}_{i=1}^{N}$; $j = 1, \ldots, M$, где $x_i^{(j)}$; $i = 1, \ldots, N$; $j = 1, \ldots, M$ — переобозначенные случайные величины x_i; $i = 1, \ldots, MN$ и рассмо-

трим случайные величины $\hat{\mathsf{M}}_N^{(j)} = \frac{1}{N}\sum\limits_{i=1}^{N} x_i^{(j)};\ j = 1, \ldots, M$.

Согласно центральной предельной теореме при больших N (на практике обычно берут по меньшей мере $N \geq 15$) случайные величины $\hat{\mathsf{M}}_N^{(j)}$ являются асимптотически гауссовскими. Кроме того, они независимы. Теперь можно в приближении применить описанную ранее процедуру построения доверительного интервала к последовательности случайных величин $\hat{\mathsf{M}}_N^{(j)};\ j = 1, \ldots, M$. В результате будем иметь следующий доверительный интервал для M с уровнем достоверности $1 - \alpha$: $\left(\hat{\mathsf{M}}_{N,M} - t_{M-1}^{1-\alpha}\sqrt{\hat{\mathsf{D}}_{N,M}/M},\ \hat{\mathsf{M}}_{N,M} + t_{M-1}^{1-\alpha}\sqrt{\hat{\mathsf{D}}_{N,M}/M}\right)$, где

$$\hat{\mathsf{M}}_{N,M} = \frac{1}{M}\sum_{j=1}^{M} \hat{\mathsf{M}}_N^{(j)};\ \hat{\mathsf{D}}_{N,M} = \frac{1}{M-1}\sum_{j=1}^{M}\left(\hat{\mathsf{M}}_N^{(j)} - \hat{\mathsf{M}}_{N,M}\right)^2.$$

Применим приведенные ранее рассуждения к процедуре тестирования сильных численных методов.

Пусть $\mathbf{x}_T^{(k)};\ k = 1, 2, \ldots, L$ — значения в момент времени T для L независимых реализаций процесса $\mathbf{x}_t,\ t \in [0, T]$, являющегося решением стохастического дифференциального уравнения Ито (6.1), а $\mathbf{y}_T^{(k)}$; $k = 1, 2, \ldots, L$ — значения в момент времени T для L независимых реализаций дискретной аппроксимации $\mathbf{y}_{\tau_j};\ j = 0, 1, \ldots, N$ процесса $\mathbf{x}_t,\ t \in [0, T]$. При этом предполагается, что $\mathbf{x}_T^{(k)}$ и $\mathbf{y}_T^{(k)}$ при фиксированном $k \in \{1, 2, \ldots, L\}$ соответствуют одной и той же реализации винеровского процесса $\mathbf{f}_t,\ t \in [0, T]$.

Введем оценку $\hat{\varepsilon}_L$ величины ε вида (7.2) следующим образом:

$$\hat{\varepsilon}_L = \frac{1}{L}\sum_{k=1}^{L} |\mathbf{x}_T^{(k)} - \mathbf{y}_T^{(k)}|.$$

Как уже отмечалось, в соответствии с центральной предельной теоремой $\hat{\varepsilon}_L$ — асимптотически гауссовская случайная величина при больших L, причем $\hat{\varepsilon}_L \xrightarrow{d} \varepsilon$ при $L \to \infty$. Очевидно, что на практике L всегда конечно. Однако мы можем приближенно построить доверительный интервал для ε таким же образом, как это было сделано ранее. Для этого рассмотрим M независимых реализаций $\hat{\varepsilon}_L^{(j)}$ случайной величины $\hat{\varepsilon}_L$:

$$\hat{\varepsilon}_L^{(j)} = \frac{1}{L}\sum_{k=1}^{L} |\mathbf{x}_T^{(k,j)} - \mathbf{y}_T^{(k,j)}|;\ j = 1, \ldots, M,$$

где $\mathbf{x}_T^{(k,j)}$ и $\mathbf{y}_T^{(k,j)}$; $k = 1, \ldots, L$; $j = 1, \ldots, M$ — независимые реализации значений процесса $\mathbf{x}_t$, $t \in [0, T]$ и дискретной аппроксимации $\mathbf{y}_{\tau_j}$; $j = 0, 1, \ldots, N$ соответственно в момент времени T, причем $\mathbf{x}_T^{(k,j)}$ и $\mathbf{y}_T^{(k,j)}$ при фиксированной паре (k, j) соответствуют одной и той же реализации винеровского процесса $\mathbf{f}_t$, $t \in [0, T]$.

Положим теперь

$$\hat{\varepsilon}_{L,M} = \frac{1}{LM} \sum_{k=1}^{L} \sum_{j=1}^{M} |\mathbf{x}_T^{(k,j)} - \mathbf{y}_T^{(k,j)}|, \ \hat{\sigma}_\varepsilon^2 = \frac{1}{M-1} \sum_{j=1}^{M} \left(\hat{\varepsilon}_L^{(j)} - \hat{\varepsilon}_{L,M} \right)^2, \quad (7.3)$$

где $\hat{\varepsilon}_{L,M}$ и $\hat{\sigma}_\varepsilon^2$ — оценки математического ожидания и дисперсии средних $\hat{\varepsilon}_L^{(j)}$ соответственно. Построим доверительный интервал для ε: $I_{L,M} = (\hat{\varepsilon}_{L,M} - \Delta\hat{\varepsilon}_{L,M}, \hat{\varepsilon}_{L,M} + \Delta\hat{\varepsilon}_{L,M})$, где $\Delta\hat{\varepsilon}_{L,M} = t_{M-1}^{1-\alpha}\sqrt{\hat{\sigma}_\varepsilon^2/M}$, т. е. при достаточно больших L можно приближенно считать, что с вероятностью $1 - \alpha$ истинное значение ε лежит в интервале $I_{L,M}$.

Нетрудно видеть, что $\Delta\hat{\varepsilon}_{L,M}$ убывает с ростом M, но возрастает с уменьшением параметра α или ростом вероятности $1 - \alpha$.

Отметим, что рассмотренная схема построения доверительного интервала для оценки среднего применена к тестированию сильных численных методов решения стохастических дифференциальных уравнений Ито в [86, 87] и будет использована нами в дальнейшем.

Для тестирования сильных численных методов так же, как и в [86, 87], будем выбирать следующие линейные стохастические дифференциальные уравнения Ито с мультипликативным шумом:

$$dx_t = ax_t dt + bx_t df_t, \quad (7.4)$$

$$d\mathbf{x}_t = A\mathbf{x}_t dt + B\mathbf{x}_t df_t, \quad (7.5)$$

где $x_t \in \Re^1$; $\mathbf{x}_t \in \Re^2$; $a, b \in \Re^1$; $A \in \Re^{2\times 2}$; $A^{(11)} = A^{(22)} = -a$; $A^{(12)} = A^{(21)} = a$; $B = bI \in \Re^{2\times 2}$; I — единичная (2×2)-матрица; f_t — скалярный стандартный винеровский процесс.

Выбор тестовых уравнений (7.4), (7.5) обусловлен двумя причинами. Во-первых, эти уравнения имеют достаточно простые точные решения, определяемые соответственно равенствами [86]

$$x_t = e^{(a-\frac{1}{2}b^2)t+bf_t} x_0,$$

$$\mathbf{x}_t = e^{(A-\frac{1}{2}B^2)t+Bf_t}\mathbf{x}_0 = Q \begin{pmatrix} e^{-\frac{1}{2}b^2 t+bf_t} & 0 \\ 0 & e^{(-2a-\frac{1}{2}b^2)t+bf_t} \end{pmatrix} Q^{-1}\mathbf{x}_0,$$

где

$$Q = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = Q^{-1}.$$

Во-вторых, уравнения (7.4) и (7.5) являются стохастическими дифференциальными уравнениями с мультипликативным шумом, и, как следствие, выражения рассматриваемых далее сильных численных методов, примененных к уравнениям (7.4) и (7.5), содержат значительную часть слагаемых, включающих в себя повторные стохастические интегралы Ито или Стратоновича. Это обстоятельство позволяет в достаточно полной мере оценить работу тестируемых численных методов.

Отметим, что далее так же, как и в [86], в численных экспериментах будем выбирать, как правило, $T = 1$, $N = 100$, $M = 20$, $\alpha = 0.1$.

7.2 Явный метод Эйлера

В настоящем разделе рассмотрим наиболее простой численный метод решения стохастических дифференциальных уравнений Ито — метод Эйлера (см. также [70, 84]). Применительно к уравнению (6.1) этот численный метод имеет вид

$$\mathbf{y}_{p+1} = \mathbf{y}_p + \mathbf{a}(\mathbf{y}_p, \tau_p)(\tau_{p+1} - \tau_p) + \Sigma(\mathbf{y}_p, \tau_p)(\mathbf{f}_{\tau_{p+1}} - \mathbf{f}_{\tau_p}), \qquad (7.6)$$

где $\mathbf{y}_{\tau_p} \stackrel{\text{def}}{=} \mathbf{y}_p$; $\{\tau_p\}_{p=0}^{N}$ — разбиение промежутка $[0, T]$, которое удовлетворяет условию (7.1).

Оценим скорость сходимости метода Эйлера (7.6).

Теорема 7.1 [86]. *Пусть для всех* $\mathbf{x}$, $\mathbf{y} \in \Re^n$, s, $t \in [0, T]$ *выполнены следующие условия:*

$$\begin{gathered} \mathsf{M}\{|\mathbf{x}_0|^2\} < \infty, \\ \left(\mathsf{M}\left\{|\mathbf{x}_0 - \mathbf{y}_0|^2\right\}\right)^{1/2} \le C_1\sqrt{\Delta_N}, \qquad (7.7) \\ |\mathbf{a}(\mathbf{x}, t) - \mathbf{a}(\mathbf{y}, t)| + \sum_{i=1}^{m} |\Sigma_i(\mathbf{x}, t) - \Sigma_i(\mathbf{y}, t)| \le C_2|\mathbf{x} - \mathbf{y}|, \\ |\mathbf{a}(\mathbf{x}, t)| + \sum_{i=1}^{m} |\Sigma_i(\mathbf{x}, t)| \le C_3(1 + |\mathbf{x}|), \\ |\mathbf{a}(\mathbf{x}, s) - \mathbf{a}(\mathbf{x}, t)| + \sum_{i=1}^{m} |\Sigma_i(\mathbf{x}, s) - \Sigma_i(\mathbf{x}, t)| \le C_4\sqrt{s - t}(1 + |\mathbf{x}|), \end{gathered}$$

где $C_1, \ldots, C_4$ *— постоянные, которые не зависят от* Δ_N; Σ_i *— i-й столбец матрицы* Σ. *Тогда* $\mathsf{M}\{|\mathbf{x}_T - \mathbf{y}_N|\} \le K\sqrt{\Delta_N}$, *где постоянная*

K не зависит от Δ_N, а $\mathbf{x}_T$ — решение стохастического дифференциального уравнения (6.1) *при $t = T$.*

Доказательство. В условиях настоящей теоремы выполнены условия леммы 4.4 из главы 4. Тогда $\mathsf{M}\{|\mathbf{x}_s|^2\} \le K_1(1 + \mathsf{M}\{|\mathbf{x}_0|^2\}) \le K_2 < \infty$.

Положим

$$\mathbf{z}_t = \mathbf{y}_p + \int\limits_{\tau_p}^{t} \mathbf{a}(\mathbf{y}_p, \tau_p)ds + \int\limits_{\tau_p}^{t} \Sigma(\mathbf{y}_p, \tau_p)d\mathbf{f}_s, \ t \in [\tau_p, \tau_{p+1}].$$

Очевидно, что процесс $\mathbf{z}_t$ с вероятностью 1 совпадает с $\mathbf{y}_p$ при $t = \tau_p$, $p = 0,\ 1, \ldots, N$.

Нетрудно видеть, что

$$\mathbf{z}_t - \mathbf{x}_t = \mathbf{y}_0 - \mathbf{x}_0 + D_t + F_t + H_t, \tag{7.8}$$

где

$$D_t = U_t + V_t; \ F_t = R_t + G_t; \ H_t = Q_t + P_t;$$

$$U_t = \sum_{l=0}^{n_t-1} \int\limits_{\tau_l}^{\tau_{l+1}} \left(\mathbf{a}(\mathbf{x}_s, \tau_l) - \mathbf{a}(\mathbf{x}_s, s)\right) ds + \int\limits_{\tau_{n_t}}^{t} \left(\mathbf{a}(\mathbf{x}_s, \tau_{n_t}) - \mathbf{a}(\mathbf{x}_s, s)\right) ds;$$

$$V_t = \sum_{l=0}^{n_t-1} \int\limits_{\tau_l}^{\tau_{l+1}} \left(\Sigma(\mathbf{x}_s, \tau_l) - \Sigma(\mathbf{x}_s, s)\right) d\mathbf{f}_s + \int\limits_{\tau_{n_t}}^{t} \left(\Sigma(\mathbf{x}_s, \tau_{n_t}) - \Sigma(\mathbf{x}_s, s)\right) d\mathbf{f}_s;$$

$$R_t = \sum_{l=0}^{n_t-1} \int\limits_{\tau_l}^{\tau_{l+1}} \left(\mathbf{a}(\mathbf{x}_{\tau_l}, \tau_l) - \mathbf{a}(\mathbf{x}_s, \tau_l)\right) ds + \int\limits_{\tau_{n_t}}^{t} \left(\mathbf{a}(\mathbf{x}_{\tau_{n_t}}, \tau_{n_t}) - \mathbf{a}(\mathbf{x}_s, \tau_{n_t})\right) ds;$$

$$G_t = \sum_{l=0}^{n_t-1} \int\limits_{\tau_l}^{\tau_{l+1}} \left(\Sigma(\mathbf{x}_{\tau_l}, \tau_l) - \Sigma(\mathbf{x}_s, \tau_l)\right) d\mathbf{f}_s + \int\limits_{\tau_{n_t}}^{t} \left(\Sigma(\mathbf{x}_{\tau_{n_t}}, \tau_{n_t}) - \Sigma(\mathbf{x}_s, \tau_{n_t})\right) d\mathbf{f}_s;$$

$$Q_t = \sum_{l=0}^{n_t-1} \int\limits_{\tau_l}^{\tau_{l+1}} \left(\mathbf{a}(\mathbf{y}_l, \tau_l) - \mathbf{a}(\mathbf{x}_{\tau_l}, \tau_l)\right) ds + \int\limits_{\tau_{n_t}}^{t} \left(\mathbf{a}(\mathbf{y}_{n_t}, \tau_{n_t}) - \mathbf{a}(\mathbf{x}_{\tau_{n_t}}, \tau_{n_t})\right) ds;$$

$$P_t = \sum_{l=0}^{n_t-1} \int\limits_{\tau_l}^{\tau_{l+1}} \left(\Sigma(\mathbf{y}_l, \tau_l) - \Sigma(\mathbf{x}_{\tau_l}, \tau_l)\right) d\mathbf{f}_s + \int\limits_{\tau_{n_t}}^{t} \left(\Sigma(\mathbf{y}_{n_t}, \tau_{n_t}) - \Sigma(\mathbf{x}_{\tau_{n_t}}, \tau_{n_t})\right) d\mathbf{f}_s;$$

$$n_t = \max_j \{j : \ \tau_j \le t\}.$$

Из (7.8) получаем

$$Z_t \stackrel{\text{def}}{=} \mathsf{M}\{|\mathbf{z}_t - \mathbf{x}_t|^2\} \le K_3 \left(\mathsf{M}\{|\mathbf{y}_0 - \mathbf{x}_0|^2\} + \mathsf{M}\{|U_t|^2\} + \mathsf{M}\{|V_t|^2\} + \right.$$

$$+\mathsf{M}\{|R_t|^2\}+\mathsf{M}\{|G_t|^2\}+\mathsf{M}\{|Q_t|^2\}+\mathsf{M}\{|P_t|^2\}\Big). \tag{7.9}$$

Оценим поочередно с помощью стандартных неравенств для математических ожиданий и моментов стохастических интегралов (см. главу 1) слагаемые в правой части (7.9). Имеем

$$\Big(\mathsf{M}\{|U_t^{(k)}|^2\}\Big)^{\frac{1}{2}} \le \sum_{l=0}^{n_t-1}\Bigg(\mathsf{M}\Bigg\{\Bigg(\int\limits_{\tau_l}^{\tau_{l+1}}\Big(\mathbf{a}^{(k)}(\mathbf{x}_s,\tau_l)-\mathbf{a}^{(k)}(\mathbf{x}_s,s)\Big)\,ds\Bigg)^2\Bigg\}\Bigg)^{\frac{1}{2}}+$$

$$+\Bigg(\mathsf{M}\Bigg\{\Bigg(\int\limits_{\tau_{n_t}}^{t}\Big(\mathbf{a}^{(k)}(\mathbf{x}_s,\tau_{n_t})-\mathbf{a}^{(k)}(\mathbf{x}_s,s)\Big)\,ds\Bigg)^2\Bigg\}\Bigg)^{\frac{1}{2}}\le$$

$$\le\sum_{l=0}^{n_t-1}\Bigg(\Delta_N\int\limits_{\tau_l}^{\tau_{l+1}}\mathsf{M}\left\{\Big(\mathbf{a}^{(k)}(\mathbf{x}_s,\tau_l)-\mathbf{a}^{(k)}(\mathbf{x}_s,s)\Big)^2\right\}ds\Bigg)^{\frac{1}{2}}+$$

$$+\Bigg((t-\tau_{n_t})\int\limits_{\tau_{n_t}}^{t}\mathsf{M}\left\{\Big(\mathbf{a}^{(k)}(\mathbf{x}_s,\tau_{n_t})-\mathbf{a}^{(k)}(\mathbf{x}_s,s)\Big)^2\right\}ds\Bigg)^{\frac{1}{2}}\le$$

$$\le\sqrt{\Delta_N}C_4\Bigg(\sum_{l=0}^{n_t-1}\Bigg(\Delta_N\int\limits_{\tau_l}^{\tau_{l+1}}\mathsf{M}\left\{(1+|\mathbf{x}_s|)^2\right\}ds\Bigg)^{\frac{1}{2}}+$$

$$+\Bigg((t-\tau_{n_t})\int\limits_{\tau_{n_t}}^{t}\mathsf{M}\left\{(1+|\mathbf{x}_s|)^2\right\}ds\Bigg)^{\frac{1}{2}}\Bigg)\le K_4\sqrt{\Delta_N}, \tag{7.10}$$

$$\Big(\mathsf{M}\{|V_t^{(k)}|^2\}\Big)^{\frac{1}{2}} \le \sum_{i=1}^{m}\Bigg(\mathsf{M}\Bigg\{\Bigg(\sum_{l=0}^{n_t-1}\int\limits_{\tau_l}^{\tau_{l+1}}\Big(\Sigma^{(ki)}(\mathbf{x}_s,\tau_l)-\Sigma^{(ki)}(\mathbf{x}_s,s)\Big)\,d\mathbf{f}_s^{(i)}+$$

$$+\int\limits_{\tau_{n_t}}^{t}\Big(\Sigma^{(ki)}(\mathbf{x}_s,\tau_{n_t})-\Sigma^{(ki)}(\mathbf{x}_s,s)\Big)\,d\mathbf{f}_s^{(i)}\Bigg)^2\Bigg\}\Bigg)^{\frac{1}{2}}\le$$

$$\le\sum_{i=1}^{m}\Bigg(\sum_{l=0}^{n_t-1}\int\limits_{\tau_l}^{\tau_{l+1}}\mathsf{M}\left\{\Big(\Sigma^{(ki)}(\mathbf{x}_s,\tau_l)-\Sigma^{(ki)}(\mathbf{x}_s,s)\Big)^2\right\}ds+$$

$$+\int\limits_{\tau_{n_t}}^{t}\mathsf{M}\left\{\Big(\Sigma^{(ki)}(\mathbf{x}_s,\tau_{n_t})-\Sigma^{(ki)}(\mathbf{x}_s,s)\Big)^2\right\}ds\Bigg)^{\frac{1}{2}}\le$$

$$\le C_4\sum_{i=1}^{m}\Bigg(\sum_{l=0}^{n_t-1}\int\limits_{\tau_l}^{\tau_{l+1}}\mathsf{M}\left\{(1+|\mathbf{x}_s|)^2\right\}\Delta_N ds+$$

$$+\int\limits_{\tau_{n_t}}^{t}\mathsf{M}\left\{(1+|\mathbf{x}_s|)^2\right\}|t-\tau_{n_t}|ds\Bigg)^{\frac{1}{2}}\le K_5\sqrt{\Delta_N}. \tag{7.11}$$

Далее заметим, что из леммы 4.4 (см. главу 4) и условий теоремы следуют оценки $\mathsf{M}\{|\mathbf{x}_s-\mathbf{x}_{\tau_l}|^2\}\le C_5|s-\tau_l|$, $\mathsf{M}\{|\mathbf{x}_s-\mathbf{x}_{\tau_{n_t}}|^2\}\le C_6|s-\tau_{n_t}|$, где C_5, C_6 — постоянные.

Тогда

$$\Bigl(\mathsf{M}\{|R_t^{(k)}|^2\}\Bigr)^{\frac{1}{2}}\le\sum_{l=0}^{n_t-1}\Bigl(\Delta_N\int\limits_{\tau_l}^{\tau_{l+1}}\mathsf{M}\left\{\left(\mathbf{a}^{(k)}(\mathbf{x}_{\tau_l},\tau_l)-\mathbf{a}^{(k)}(\mathbf{x}_s,\tau_l)\right)^2\right\}ds\Bigr)^{\frac{1}{2}}+$$

$$+\Bigl((t-\tau_{n_t})\int\limits_{\tau_{n_t}}^{t}\mathsf{M}\left\{\left(\mathbf{a}^{(k)}(\mathbf{x}_{\tau_{n_t}},\tau_{n_t})-\mathbf{a}^{(k)}(\mathbf{x}_s,\tau_{n_t})\right)^2\right\}ds\Bigr)^{\frac{1}{2}}\le$$

$$\le C_2\Bigl(\sum_{l=0}^{n_t-1}\Bigl(\Delta_N\int\limits_{\tau_l}^{\tau_{l+1}}\mathsf{M}\left\{|\mathbf{x}_s-\mathbf{x}_{\tau_l}|^2\right\}ds\Bigr)^{\frac{1}{2}}+$$

$$+\Bigl((t-\tau_{n_t})\int\limits_{\tau_{n_t}}^{t}\mathsf{M}\left\{|\mathbf{x}_s-\mathbf{x}_{\tau_{n_t}}|^2\right\}ds\Bigr)^{\frac{1}{2}}\Bigr)\le C_7\sqrt{\Delta_N},\qquad(7.12)$$

$$\Bigl(\mathsf{M}\{|G_t^{(k)}|^2\}\Bigr)^{\frac{1}{2}}\le\sum_{i=1}^{m}\Bigl(\sum_{l=0}^{n_t-1}\int\limits_{\tau_l}^{\tau_{l+1}}\mathsf{M}\left\{\left(\Sigma^{(ki)}(\mathbf{x}_{\tau_l},\tau_l)-\Sigma^{(ki)}(\mathbf{x}_s,\tau_l)\right)^2\right\}ds+$$

$$+\int\limits_{\tau_{n_t}}^{t}\mathsf{M}\left\{\left(\Sigma^{(ki)}(\mathbf{x}_{\tau_{n_t}},\tau_{n_t})-\Sigma^{(ki)}(\mathbf{x}_s,\tau_{n_t})\right)^2\right\}ds\Bigr)^{\frac{1}{2}}\le C_8\sqrt{\Delta_N}.\qquad(7.13)$$

Наконец, приходим к следующим оценкам:

$$\Bigl(\mathsf{M}\{|Q_t^{(k)}|^2\}\Bigr)^{\frac{1}{2}}\le C_2\Bigl(\sum_{l=0}^{n_t-1}\Bigl(\Delta_N\int\limits_{\tau_l}^{\tau_{l+1}}\mathsf{M}\left\{|\mathbf{y}_l-\mathbf{x}_{\tau_l}|^2\right\}ds\Bigr)^{\frac{1}{2}}+$$

$$+\Bigl((t-\tau_{n_t})\int\limits_{\tau_{n_t}}^{t}\mathsf{M}\left\{|\mathbf{y}_{n_t}-\mathbf{x}_{\tau_{n_t}}|^2\right\}ds\Bigr)^{\frac{1}{2}}\Bigr)\le$$

$$\le C_2\Bigl(\sum_{l=0}^{n_t-1}\Delta_N\sqrt{Z_{\tau_l}}+(t-\tau_{n_t})\sqrt{Z_{\tau_{n_t}}}\Bigr)\le C_2\int\limits_0^t\sqrt{Z_u}du\le C_9\Bigl(\int\limits_0^t Z_u du\Bigr)^{\frac{1}{2}},\qquad(7.14)$$

$$\Bigl(\mathsf{M}\{|P_t^{(k)}|^2\}\Bigr)^{\frac{1}{2}}\le\sum_{i=1}^{m}\Bigl(\sum_{l=0}^{n_t-1}\int\limits_{\tau_l}^{\tau_{l+1}}\mathsf{M}\left\{\left(\Sigma^{(ki)}(\mathbf{y}_l,\tau_l)-\Sigma^{(ki)}(\mathbf{x}_{\tau_l},\tau_l)\right)^2\right\}ds+$$

$$+\int\limits_{\tau_{n_t}}^{t} \mathsf{M}\left\{\left(\Sigma^{(ki)}(\mathbf{y}_{n_t},\tau_{n_t})-\Sigma^{(ki)}(\mathbf{x}_{\tau_{n_t}},\tau_{n_t})\right)^2\right\}ds\Bigg)^{\frac{1}{2}}\leq$$

$$\leq C_{10}\Bigg(\sum_{l=0}^{n_t-1} Z_{\tau_l}\Delta_N+Z_{\tau_{n_t}}(t-\tau_{n_t})\Bigg)^{\frac{1}{2}}\leq C_{10}\Bigg(\int\limits_0^t Z_u du\Bigg)^{\frac{1}{2}}. \qquad (7.15)$$

Отметим, что последний переход в (7.14) получаем с использованием неравенства $\left|\int\limits_0^t f(x)g(x)dx\right|^2\leq\int\limits_0^t f^2(x)dx\int\limits_0^t g^2(x)dx$ при $f(x)\equiv\sqrt{Z_x}$, $g(x)\equiv 1$.

Объединяя (7.9)–(7.11) и (7.12)–(7.15), приходим к неравенству

$$Z_t\leq K_6\mathsf{M}\{|\mathbf{y}_0-\mathbf{x}_0|^2\}+K_7\Delta_N+K_8\int\limits_0^t Z_u du.$$

Учитывая условие (7.7), имеем $Z_t\leq K_9\Delta_N+K_8\int\limits_0^t Z_u du$, откуда с помощью неравенства Гронуолла находим

$$Z_t\leq K_{10}\Delta_N,\ t\in[0,T]. \qquad (7.16)$$

Далее с учетом (7.16) имеем $\mathsf{M}\{|\mathbf{x}_T-\mathbf{y}_N|\}\leq\sqrt{Z_T}\leq K\sqrt{\Delta_N}$, где постоянная K не зависит от Δ_N. Теорема доказана. □

Численный эксперимент 7.1. *Для стохастического дифференциального уравнения Ито*

$$dx_t=ax_tdt+bx_tdf_t,\ x_0=1,\ t\in[0,T],\ f_t\in\Re^1, \qquad (7.17)$$

смоделировать 2000 ($M=20$ *групп по* $N=100$ *реализаций*) *независимых реализаций случайной величины* x_T *при* $T=1$, $a=b=1.5$ *по формуле*

$$x_T=x_0e^{\left(a-\frac{1}{2}b^2\right)T+b\sqrt{\Delta}\sum\limits_{i=0}^{N-1}\zeta_i}$$

и с помощью метода Эйлера (7.6), *выбирая* $\mathbf{f}_{\tau_{i+1}}-\mathbf{f}_{\tau_i}=\sqrt{\Delta}\zeta_i$ *в* (7.6). *Здесь* $N=T/\Delta$; $\Delta=2^{-3}$; ζ_i $(i=0,1,\ldots,N-1)$ — *независимые стандартные гауссовские случайные величины.*

Вычислить оценку $\hat{\varepsilon}_{100,20}$ *ошибки* $\varepsilon=\mathsf{M}\left\{|x_T-y_T|\right\}$ *по формуле* (7.3) (y_T *определяется из* (7.6)) *и* 90%*-й доверительный интервал для* ε. *Повторить вычисления при* $\Delta=2^{-j}$; $j=4,5,6,7$ *и изобразить графически зависимость* $\hat{\varepsilon}_{100,20}(\Delta)$ *с* 90%*-ми доверительными интервалами для* ε *при указанных значениях* Δ.

На рис. 7.1 представлен результат численного эксперимента 7.1. По данному рисунку можно судить, что зависимость $\hat{\varepsilon}_{100,20}(\Delta)$ приблизительно соответствует зависимости $C\sqrt{\Delta}$, C — постоянная.

Следует отметить, что метод Эйлера достаточно хорошо ведет себя, когда коэффициенты стохастического дифференциального уравнения Ито мало отличаются от постоянных. В то же время в ряде случаев (см. рис. 7.1) точности метода Эйлера оказывается явно недостаточно для получения приемлемых результатов. В связи с этим возникает необходимость построения более точных численных методов решения стохастических дифференциальных уравнений Ито. Этому вопросу будут посвящены последующие разделы данной главы, а также главы 8–10.

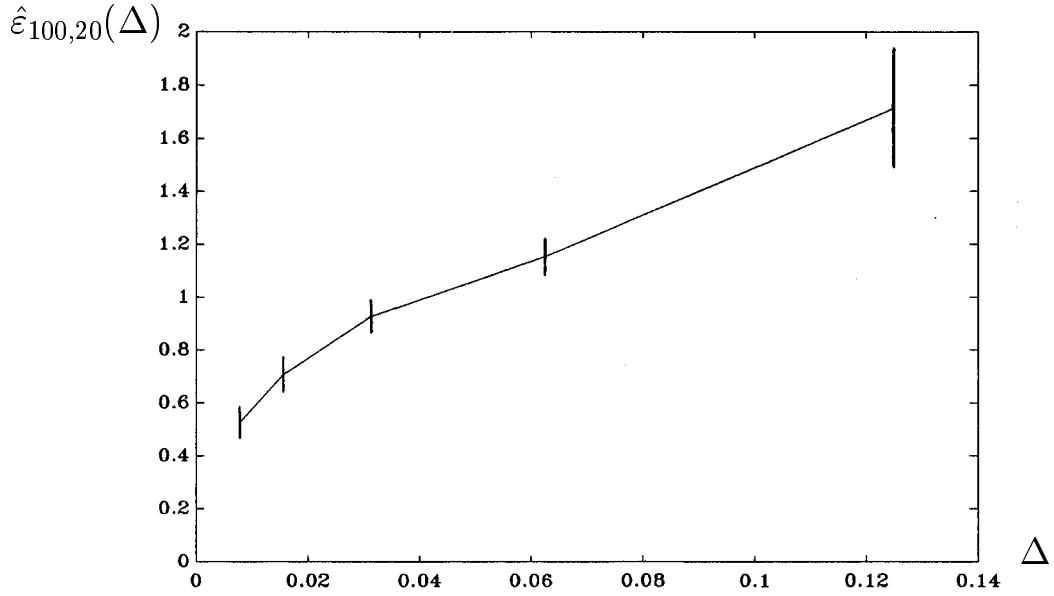

Рис. 7.1. Результат численного эксперимента 7.1.

Отметим, что ряд численных экспериментов из глав 7–10 осуществлен в [86] для других значений исходных параметров. Однако часть численных экспериментов из глав 7–10, в том числе все численные эксперименты, касающиеся сильных численных методов порядка точности 2.5 и 3.0 и всех трехшаговых численных методов, являются новыми.

Следует заметить, что существует целый ряд результатов (см. [186], библ. к [186], а также разд. 7.8), которые ослабляют достаточные условия сильной сходимости метода Эйлера по сравнению с достаточно жесткими условиями теоремы 7.1.

Однако, несмотря на несомненную важность данного вопроса, его углубленное изучение выходит за рамки настоящей монографии.

7.3 Явные одношаговые методы, основанные на унифицированном разложении Тейлора–Ито

7.3.1 Метод порядка точности $r/2$. Теорема о сходимости

Рассмотрим стохастическое дифференциальное уравнение Ито вида

$$d\mathbf{x}_t = \mathbf{a}(\mathbf{x}_t, t)dt + \Sigma(\mathbf{x}_t, t)d\mathbf{f}_t, \ \mathbf{x}_0 = \mathbf{x}(0, \omega), \tag{7.18}$$

где $\mathbf{x}_t \in \Re^n$ — случайный процесс, являющийся решением уравнения (7.18); $\mathbf{f}_t \in \Re^m$ — стандартный векторный винеровский процесс с независимыми компонентами $\mathbf{f}_t^{(i)}$ $(i = 1, \ldots, m)$; $\mathbf{a}: \ \Re^n \times [0, T] \to \Re^n$, $\Sigma: \ \Re^n \times [0, T] \to \Re^{n \times m}$ — неслучайные функции, удовлетворяющие условиям AI, AII (теорема 1.6); $\mathbf{x}_0$ — начальное условие, которое стохастически не зависит от приращения $\mathbf{f}_\tau - \mathbf{f}_0$ при $\tau > 0$ и удовлетворяет условию AIII теоремы 1.6.

Предположим, что условия теоремы 4.7 выполнены. Тогда для процесса $\eta_s = R(\mathbf{x}_s, s)$, где $R: \ \Re^n \times [0, T] \to \Re^n$, а $\mathbf{x}_s$ — решение стохастического дифференциального уравнения Ито (7.18), справедливо с вероятностью 1 следующее унифицированное разложение Тейлора–Ито:

$$\eta_s = \sum_{q=0}^{r} \sum_{(k,j,l_1,\ldots,l_k) \in \mathcal{D}'_q} \frac{(s-t)^j}{j!} \ {}^{(k)}G_{l_1} \ldots G_{l_k} L^j \{\eta_t\} \overset{k}{\cdot} {}^{(k)}I_{l_1 \ldots l_k s,t} + H'_{r+1_{s,t}},$$

$$H'_{r+1_{s,t}} = \hat{H}_{r+1_{s,t}} - \mathbf{1}_{\{r=2d+1, d \in N\}} \frac{(s-t)^{\frac{1}{2}(r+1)}}{\left(\frac{1}{2}(r+1)\right)!} L^{\frac{1}{2}(r+1)} \eta_t, \tag{7.19}$$

правая часть (7.19) существует в среднеквадратическом смысле и в ней введены обозначения

$${}^{(k)}I_{l_1 \ldots l_k s,t} = \left\| I_{l_1 \ldots l_k s,t}^{(i_1 \ldots i_k)} \right\|_{i_1, \ldots, i_k = 1}^{m},$$

$$I_{l_1 \ldots l_k s,t}^{(i_1 \ldots i_k)} = \begin{cases} \int\limits_t^s (t - \tau_k)^{l_k} \ldots \int\limits_t^{\tau_2} (t - \tau_1)^{l_1} d\mathbf{f}_{\tau_1}^{(i_1)} \ldots d\mathbf{f}_{\tau_k}^{(i_k)} & \text{при } k > 0 \\ 1 & \text{при } k = 0 \end{cases}, \tag{7.20}$$

$$G_p^{(i)} = \frac{1}{p} \left(G_{p-1}^{(i)} L - L G_{p-1}^{(i)} \right); \ p = 1, \ 2, \ldots; i = 1, \ldots, m,$$

$$\mathcal{D}'_q = \mathcal{D}_q \bigcup \{(k, j, l_1, \ldots, l_k) : k = l_1 = \ldots = l_k = 0 \text{ и } 2j = q + 1\},$$

$$\mathcal{D}_q = \left\{ (k, j, l_1, \ldots, l_k) : \ k + 2\left(j + \sum_{p=1}^{k} l_p\right) = q; \ k, j, l_1, \ldots, l_k = 0, \ 1, \ldots \right\};$$

остальные обозначения такие же, как в теореме 4.7.

Пусть $R(\mathbf{x},t) \equiv \mathbf{x}$, $s = \tau_{p+1}$, $t = \tau_p$, $\{\tau_p\}_{p=0}^{N}$ — разбиение промежутка $[0,T]$, для которого выполняется условие (7.1). Тогда из (7.19) получим общее представление явной одношаговой численной схемы решения стохастического дифференциального уравнения Ито (7.18)

$$\mathbf{y}_{\tau_{p+1}} = \sum_{q=0}^{r} \sum_{(k,j,l_1,\ldots,l_k)\in\mathcal{D}'_q} \frac{(\tau_{p+1}-\tau_p)^j}{j!}\ {}^{(k)}G_{l_1}\ldots G_{l_k}L^j\left\{\mathbf{y}_{\tau_p}\right\}\overset{k}{:}\ {}^{(k)}\hat{I}_{l_1\ldots l_k\tau_{p+1},\tau_p}, \tag{7.21}$$

где ${}^{(k)}\hat{I}_{l_1\ldots l_k\tau_{p+1},\tau_p} = \left\|\hat{I}^{(i_1\ldots i_k)}_{l_1\ldots l_k\tau_{p+1},\tau_p}\right\|^{m}_{i_1,\ldots,i_k=1}$, а $\hat{I}^{(i_1\ldots i_k)}_{l_1\ldots l_k\tau_{p+1},\tau_p}$ — аппроксимация повторного стохастического интеграла Ито вида (7.20), причем $\hat{I}^{(i_1\ldots i_0)}_{l_1\ldots l_0\tau_{p+1},\tau_p} \stackrel{\text{def}}{=} 1$.

Для среднеквадратической аппроксимации повторных стохастических интегралов Ито вида (7.20) можно воспользоваться теоремой 5.1.

Отметим, что выбор пределов суммирования в усеченном ряде, аппроксимирующем повторные стохастические интегралы Ито с помощью теоремы 5.1, является предметом отдельного исследования. Во всяком случае, согласно теореме 5.1, можно брать $p_1 = \ldots = p_k = p$.

Определим процесс $\mathbf{y}_s$, $s \in [\tau_p, \tau_{p+1}]$; $p = 0,1,\ldots,N-1$ равенством (7.21), в котором необходимо заменить τ_{p+1} на s.

Для всех $s \in [0,T]$ положим $z_s \stackrel{\text{def}}{=} \mathsf{M}\left\{\sup\limits_{0\le t\le s} |\mathbf{x}_t - \mathbf{y}_t|^2\right\}$.

Далее для простоты будем считать, что $p\Delta \stackrel{\text{def}}{=} \tau_p$, $\Delta = T/N$, $p \in \{0,1,\ldots,N\}$, $T = \tau_N$.

Сформулируем теорему о сильной сходимости явной одношаговой численной схемы (7.21).

Теорема 7.2. *Пусть для фиксированного $r = 2,3,\ldots$ выполнены следующие условия:*

1. *Для всех $\mathbf{x},\mathbf{y} \in \Re^n$; $i_1,\ldots,i_k = 1,\ldots,m$; $(k,j,l_1,\ldots,l_k) \in \bigcup\limits_{q=0}^{r}\mathcal{D}'_q$ и $t \in [0,T]$ справедливо $\left|G^{(i_1)}_{l_1}\ldots G^{(i_k)}_{l_k}L^j\mathbf{x} - G^{(i_1)}_{l_1}\ldots G^{(i_k)}_{l_k}L^j\mathbf{y}\right| \le K_1\left|\mathbf{x}-\mathbf{y}\right|$, где $\mathcal{D}'_q = \mathcal{D}_q \cup \{(k,j,l_1,\ldots,l_k) : k = l_1 = \ldots = l_k = 0$ и $2j = q+1\}$.*

2. *Для всех $(k,j,l_1,\ldots,l_k) \in \bigcup\limits_{q=0}^{r}\mathcal{D}'_q$ $(k \ne 0)$; $i_1,\ldots,i_k = 1,\ldots,m$ и $p \in \{0,\ 1,\ldots,N-1\}$ с вероятностью 1 имеем $\mathsf{M}\left\{\hat{I}^{(i_1\ldots i_k)}_{l_1\ldots l_k\tau_{p+1},\tau_p}|\mathcal{F}_{\tau_p}\right\} = 0$, и*

$$\mathsf{M}\left\{\left(I^{(i_1\ldots i_k)}_{l_1\ldots l_k\tau_{p+1},\tau_p} - \hat{I}^{(i_1\ldots i_k)}_{l_1\ldots l_k\tau_{p+1},\tau_p}\right)^2\right\} \le C\Delta^{r+1}. \tag{7.22}$$

3. *Для всех* $\mathbf{x} \in \Re^n$; $i_1, \ldots, i_k = 1, \ldots, m$; $(k, j, l_1, \ldots, l_k) \in \bigcup\limits_{q=0}^{r} \mathcal{A}_q$ *и* $t \in [0, T]$ *выполнено* $\left|G_{l_1}^{(i_1)} \ldots G_{l_k}^{(i_k)} L^j \mathbf{x}\right| \le K_2 \left(1 + |\mathbf{x}|\right)$, $G_{l_1}^{(i_1)} \ldots G_{l_k}^{(i_k)} L^j \mathbf{x} \in \mathcal{L}$ (класс $\mathcal{L}$ определен в разд. 4.1).

4. *Для всех* $(k, j, l_1, \ldots, l_k) \in \mathcal{A}_r$; $\mathbf{x} \in \Re^n$; $i_1, \ldots, i_k, q = 1, \ldots, m$ *и* $t \in [0, T]$ *имеем* $\left|G_0^{(q)} G_{l_1}^{(i_1)} \ldots G_{l_k}^{(i_k)} L^j \mathbf{x}\right| + \left|L G_{l_1}^{(i_1)} \ldots G_{l_k}^{(i_k)} L^j \mathbf{x}\right| \le K_3 \left(1 + |\mathbf{x}|\right)$.

5. *Случайные величины* $\mathbf{x}_0, \mathbf{y}_0$ — $\mathcal{F}_0$*-измеримы и* $\mathsf{M}\left\{|\mathbf{x}_0 - \mathbf{y}_0|^2\right\} \le K_4 \Delta^r$, $\mathsf{M}\left\{|\mathbf{x}_0|^2\right\} < \infty$, *где постоянные* K_1, K_2, K_3, K_4, C *не зависят от* Δ.

Тогда справедлива оценка

$$z_T \le K \Delta^r, \tag{7.23}$$

где постоянная K *не зависит от* Δ.

Доказательство. При $R(\mathbf{x}, t) \equiv \mathbf{x}$, $s = \tau_{p+1}$, $t = \tau_p$, $\tau_p \stackrel{\text{def}}{=} p\Delta$, $\Delta > 0$, $p \in \{0, 1, \ldots, N-1\}$, $T = \tau_N$ из (7.19) получим следующее справедливое с вероятностью 1 точное представление:

$$\mathbf{x}_{\tau_{p+1}} = \sum_{q=0}^{r} \sum_{(k,j,l_1,\ldots,l_k) \in \mathcal{D}'_q} \frac{\Delta^j}{j!} {}^{(k)}G_{l_1} \ldots G_{l_k} L^j \left\{\mathbf{x}_{\tau_p}\right\} \stackrel{k}{\cdot} {}^{(k)}I_{l_1 \ldots l_k \tau_{p+1}, \tau_p} +$$

$$+ H'_{r+1_{\tau_{p+1}, \tau_p}}. \tag{7.24}$$

Нетрудно видеть, что для всех $s \in [0, T]$ из (7.21) и (7.24) с вероятностью 1 имеем

$$\mathbf{x}_s - \mathbf{y}_s = \mathbf{x}_0 - \mathbf{y}_0 +$$

$$+ \sum_{q=1}^{r} \sum_{(k,j,l_1,\ldots,l_k) \in \mathcal{D}'_q} \left\{ \sum_{p=0}^{n_s - 1} \left[X_{j l_1 \ldots l_k \tau_{p+1}, \tau_p} + Y_{j l_1 \ldots l_k \tau_{p+1}, \tau_p}\right] + \right.$$

$$\left. + X_{j l_1 \ldots l_k s, \tau_{n_s}} + Y_{j l_1 \ldots l_k s, \tau_{n_s}} \right\} + \sum_{p=0}^{n_s - 1} H'_{r+1_{\tau_{p+1}, \tau_p}} + H'_{r+1_{s, \tau_{n_s}}},$$

где $\mathbf{y}_s$ определяется из (7.21), а $\mathbf{x}_s$ — из (7.24) при $\tau_{p+1} = s$;

$$X_{j l_1 \ldots l_k \theta, t} \stackrel{\text{def}}{=} \frac{(\theta - t)^j}{j!} {}^{(k)}G_{l_1} \ldots G_{l_k} L^j \left\{\mathbf{y}_t\right\} \stackrel{k}{\cdot} \left({}^{(k)}I_{l_1 \ldots l_k \theta, t} - {}^{(k)}\hat{I}_{l_1 \ldots l_k \theta, t}\right);$$

$$Y_{j l_1 \ldots l_k \theta, t} \stackrel{\text{def}}{=} \frac{(\theta - t)^j}{j!} \left[{}^{(k)}G_{l_1} \ldots G_{l_k} L^j \left\{\mathbf{x}_t\right\} - {}^{(k)}G_{l_1} \ldots G_{l_k} L^j \left\{\mathbf{y}_t\right\}\right] \stackrel{k}{\cdot} {}^{(k)}I_{l_1 \ldots l_k \theta, t};$$

$$n_s \stackrel{\text{def}}{=} \max_p \left\{p : \tau_p \le s\right\}.$$

Далее

$$z_T \le C_0\Bigg\{\mathsf{M}\left\{|\mathbf{x}_0-\mathbf{y}_0|^2\right\}+$$

$$+\sum_{q=1}^{r}\sum_{(k,j,l_1,\ldots,l_k)\in\mathcal{D}'_q}\left(V_{jl_1\ldots l_k}(T)+W_{jl_1\ldots l_k}(T)\right)+U(T)\Bigg\}, \tag{7.25}$$

где

$$V_{jl_1\ldots l_k}(T)\stackrel{\text{def}}{=}\mathsf{M}\Bigg\{\sup_{0\le s\le T}\left|\sum_{p=0}^{n_s-1}X_{jl_1\ldots l_{k\tau_{p+1},\tau_p}}+X_{jl_1\ldots l_{k_{s,\tau_{n_s}}}}\right|^2\Bigg\};$$

$$W_{jl_1\ldots l_k}(T)\stackrel{\text{def}}{=}\mathsf{M}\Bigg\{\sup_{0\le s\le T}\left|\sum_{p=0}^{n_s-1}Y_{jl_1\ldots l_{k\tau_{p+1},\tau_p}}+Y_{jl_1\ldots l_{k_{s,\tau_{n_s}}}}\right|^2\Bigg\};$$

$$U(T)\stackrel{\text{def}}{=}\mathsf{M}\Bigg\{\sup_{0\le s\le T}\left|\sum_{p=0}^{n_s-1}H'_{r+1_{\tau_{p+1},\tau_p}}+H'_{r+1_{s,\tau_{n_s}}}\right|^2\Bigg\}.$$

Оценим величины $V_{jl_1\ldots l_k}(T)$, $W_{jl_1\ldots l_k}(T)$, $U(T)$ без слагаемых с $k=0$.

Воспользовавшись условием 1 теоремы 7.2 и неравенством Дуба для дискретного мартингала $\left\{\sum\limits_{p=0}^{g}Y_{jl_1\ldots l_{k\tau_{p+1},\tau_p}},\ g=0,1,\ldots\right\}$, получим

$$W_{jl_1\ldots l_k}(T)\le 4\sup_{0\le s\le T}\mathsf{M}\Bigg\{\left|\sum_{p=0}^{n_s-1}Y_{jl_1\ldots l_{k\tau_{p+1},\tau_p}}+Y_{jl_1\ldots l_{k_{s,\tau_{n_s}}}}\right|^2\Bigg\}=$$

$$=4\sup_{0\le s\le T}\left(\sum_{p=0}^{n_s-1}\mathsf{M}\left\{\left|Y_{jl_1\ldots l_{k\tau_{p+1},\tau_p}}\right|^2\right\}+\mathsf{M}\left\{\left|Y_{jl_1\ldots l_{k_{s,\tau_{n_s}}}}\right|^2\right\}\right)\le$$

$$\le C_1\sup_{0\le s\le T}\left(\Delta\sum_{p=0}^{n_s-1}\mathsf{M}\left\{|\mathbf{x}_{\tau_p}-\mathbf{y}_{\tau_p}|^2\right\}+\mathsf{M}\left\{|\mathbf{x}_{\tau_{n_s}}-\mathbf{y}_{\tau_{n_s}}|^2\right\}(s-\tau_{n_s})\right)\le$$

$$\le C_1\int_0^T\mathsf{M}\left\{|\mathbf{x}_u-\mathbf{y}_u|^2\right\}du\le C_1\int_0^T z_u du. \tag{7.26}$$

Оценим $U(T)$. Напомним (см. главу 4), что

$$\hat{H}_{r+1_{s,t}}=\sum_{(k,j,l_1,\ldots,l_k)\in\mathcal{U}_r}Z_{jl_1\ldots l_{k_{s,t}}}+\sum_{(k,j,l_1,\ldots,l_k)\in\mathcal{A}_r}F_{jl_1\ldots l_{k_{s,t}}}, \tag{7.27}$$

где

$$Z_{jl_1\ldots l_{k_{s,t}}}=\frac{(s-t)^j}{j!}{}^{(k)}L^jG_{l_1}\ldots G_{l_k}\mathbf{x}_t\stackrel{k}{\cdot}{}^{(k)}J_{l_1\ldots l_{k_{s,t}}};$$

$$F_{jl_1\ldots l_{k_{s,t}}}=\sum_{i_1,\ldots,i_k=1}^{m}\frac{1}{j!}\int_t^s(s-\tau_k)^{l_k}\ldots\int_t^{\tau_2}(s-\tau_1)^{l_1}\int_t^{\tau_1}(s-\tau)^j\times$$

$$\times \left(L^{j+1} G_{l_1}^{(i_1)} \ldots G_{l_k}^{(i_k)} \mathbf{x}_\tau d\tau + \right.$$

$$\left. +^{(1)} G_0 L^j G_{l_1}^{(i_1)} \ldots G_{l_k}^{(i_k)} \mathbf{x}_\tau \overset{1}{\cdot} d\mathbf{f}_\tau \right) d\mathbf{f}_{\tau_1}^{(i_1)} \ldots d\mathbf{f}_{\tau_k}^{(i_k)}.$$

Применив к дискретному мартингалу $\left\{ \sum\limits_{p=0}^{g} H'_{r+1_{\tau_{p+1},\tau_p}},\ g = 0, 1, \ldots \right\}$ неравенство Дуба, получим

$$U(T) \le 4 \sup_{0 \le s \le T} \mathsf{M} \left\{ \left| \sum_{p=0}^{n_s - 1} H'_{r+1_{\tau_{p+1},\tau_p}} + H'_{r+1_{s,\tau_{n_s}}} \right|^2 \right\} =$$

$$= 4 \sup_{0 \le s \le T} \left(\sum_{p=0}^{n_s - 1} \mathsf{M} \left\{ \left| H'_{r+1_{\tau_{p+1},\tau_p}} \right|^2 \right\} + \mathsf{M} \left\{ \left| H'_{r+1_{s,\tau_{n_s}}} \right|^2 \right\} \right). \tag{7.28}$$

В соответствии с леммой 4.4 в условиях AI, AII (теорема 1.6) при $\mathsf{M}\left\{ |\mathbf{x}_0|^{2n} \right\} < \infty$, $n \ge 1$ справедлива оценка

$$\mathsf{M}\left\{ |\mathbf{x}_t|^{2n} \right\} \le \left(1 + \mathsf{M}\left\{ |\mathbf{x}_0|^{2n} \right\} \right) e^{C(t - t_0)}, \tag{7.29}$$

где $t \in [0, T]$; $C = 2n(2n+1)K^2$; $K < \infty$ — постоянная.

Воспользовавшись представлением (7.27), неравенствами (1.43), (1.44) при $n = 1$, условиями 3, 4 теоремы 7.2 и (7.28), (7.29), найдем

$$U(T) \le C_2 \left(1 + \mathsf{M}\left\{ |\mathbf{x}_0|^2 \right\} \right) \sup_{0 \le s \le T} \left(\sum_{p=0}^{n_s - 1} \Delta^{r+1} + (s - \tau_{n_s})^{r+1} \right) \le C_3 \Delta^r. \tag{7.30}$$

Оценим $V_{jl_1 \ldots l_k}(T)$. С учетом условий 2 и 3 теоремы 7.2 и неравенства Дуба для дискретного мартингала $\left\{ \sum\limits_{p=0}^{g} X_{jl_1 \ldots l_{k_{\tau_{p+1},\tau_p}}},\ g = 0, 1, \ldots \right\}$ имеем

$$V_{jl_1 \ldots l_k}(T) \le 4 \sup_{0 \le s \le T} \mathsf{M} \left\{ \left| \sum_{p=0}^{n_s - 1} X_{jl_1 \ldots l_{k_{\tau_{p+1},\tau_p}}} + X_{jl_1 \ldots l_{k_{s,\tau_{n_s}}}} \right|^2 \right\} =$$

$$= 4 \sup_{0 \le s \le T} \left(\sum_{p=0}^{n_s - 1} \mathsf{M} \left\{ \left| X_{jl_1 \ldots l_{k_{\tau_{p+1},\tau_p}}} \right|^2 \right\} + \mathsf{M} \left\{ \left| X_{jl_1 \ldots l_{k_{s,\tau_{n_s}}}} \right|^2 \right\} \right) \le$$

$$\le C_4 \sup_{0 \le s \le T} \left(\sum_{p=0}^{n_s - 1} \mathsf{M}\left\{ 1 + |\mathbf{y}_{\tau_p}|^2 \right\} \Delta^{r+1} + \mathsf{M}\left\{ 1 + |\mathbf{y}_{\tau_{n_s}}|^2 \right\} (s - \tau_{n_s})^{r+1} \right). \tag{7.31}$$

Заметим, что $\mathsf{M}\left\{ |\mathbf{y}_\theta|^2 \right\} \le 2\mathsf{M}\left\{ |\mathbf{x}_\theta|^2 \right\} + 2\mathsf{M}\left\{ |\mathbf{y}_\theta - \mathbf{x}_\theta|^2 \right\}$, $\theta \in [0, T]$.

Тогда на основании приведенных ранее рассуждений получаем из (7.31) следующую оценку:

$$V_{jl_1\ldots l_k}(T) \le \Delta^r\Big(C_5+C_6\left(1+\mathsf{M}\left\{|\mathbf{x}_0|^2\right\}\right)+C_7\int\limits_0^T z_u du\Big) \le \Delta^r\Big(C_8+C_7\int\limits_0^T z_u du\Big). \tag{7.32}$$

С помощью использованных ранее аргументов и неравенства Минковского нетрудно вывести оценки (7.26), (7.30), (7.32) с учетом слагаемых с $k=0$, входящих в $V_{jl_1\ldots l_k}(T)$, $W_{jl_1\ldots l_k}(T)$, $U(T)$.

Объединяя теперь неравенства (7.25), (7.26), (7.30), (7.32) и учитывая условие 5 теоремы 7.2, находим

$$z_T \le C_9\Delta^r + C_{10}\int\limits_0^T z_u du. \tag{7.33}$$

Согласно неравенству Гронуолла и (7.33) имеем

$$z_T \le K\Delta^r, \tag{7.34}$$

где постоянная K_3 не зависит от Δ. Теорема доказана. □

Из неравенства (7.34) и неравенства Ляпунова следует, что явный одношаговый численный метод (7.21) в условиях теоремы 7.2 сходится сильно с порядком точности $r/2$ к решению стохастического дифференциального уравнения Ито (7.18).

7.3.2 Метод Г.Н. Мильштейна

Пусть условия теоремы 7.2 выполнены при $r=2$. Тогда из (7.21) при $r=2$ получим явный одношаговый сильный численный метод порядка точности 1.0, который носит название метода Г.Н. Мильштейна [70]:

$$\mathbf{y}_{p+1} = \mathbf{y}_p + \sum_{i_1=1}^{m} \Sigma_{i_1} I_{0_{\tau_{p+1},\tau_p}}^{(i_1)} + \Delta\mathbf{a} + \sum_{i_1,i_2=1}^{m} G_0^{(i_2)}\Sigma_{i_1} I_{00_{\tau_{p+1},\tau_p}}^{(i_2 i_1)q}. \tag{7.35}$$

Здесь и далее приняты сокращенные обозначения: $\Sigma_i(\mathbf{x},t)$ — i-й столбец матрицы $\Sigma(\mathbf{x},t)$; $\mathbf{a}(\mathbf{y}_p,\tau_p) \stackrel{\text{def}}{=} \mathbf{a}$; $\Sigma_i(\mathbf{y}_p,\tau_p) \stackrel{\text{def}}{=} \Sigma_i$; $\mathbf{y}_{\tau_p} \stackrel{\text{def}}{=} \mathbf{y}_p$; индекс q указывает на то, что соответствующая величина является аппроксимацией повторного стохастического интеграла.

Согласно формулам связи повторных стохастических интегралов Ито и Стратоновича (теорема 3.9) с вероятностью 1 получаем

$$I_{0_{\tau_{p+1},\tau_p}}^{(i_1)} = I_{0_{\tau_{p+1},\tau_p}}^{*(i_1)}, \tag{7.36}$$

$$I_{00_{\tau_{p+1},\tau_p}}^{(i_2 i_1)} = I_{00_{\tau_{p+1},\tau_p}}^{*(i_2 i_1)} - \frac{1}{2}\mathbf{1}_{\{i_1=i_2\}}\Delta. \tag{7.37}$$

С помощью теоремы 5.2 имеем следующие формулы для аппроксимаций стохастических интегралов Ито $I_{0_{\tau_{p+1},\tau_p}}^{(i_1)}$, $I_{00_{\tau_{p+1},\tau_p}}^{(i_1 i_2)}$:

$$I_{0_{\tau_{p+1},\tau_p}}^{(i_1)} = \sqrt{\Delta}\zeta_0^{(i_1)}, \tag{7.38}$$

$$I_{00_{\tau_{p+1},\tau_p}}^{(i_1 i_2)q} = \sum_{j_1,j_2=0}^{q} C_{j_2 j_1}\zeta_{j_1}^{(i_1)}\zeta_{j_2}^{(i_2)} - \frac{1}{2}\mathbf{1}_{\{i_1=i_2\}}\Delta, \tag{7.39}$$

где $C_{j_2 j_1} = \int\limits_{[\tau_p,\tau_{p+1}]^2} K(t_1,t_2)\phi_{j_2}(t_2)\phi_{j_1}(t_1)dt_1dt_2$; $K(t_1,t_2) = \mathbf{1}_{\{t_1<t_2\}}$ $(t_1,t_2 \in [t,T])$; $\int\limits_{\tau_p}^{\tau_{p+1}} \phi_j(s)d\mathbf{w}_s^{(i)} \stackrel{\text{def}}{=} \zeta_j^{(i)}$; $t_1,t_2 \in [\tau_p,\tau_{p+1}]$; $\{\phi_j(\tau)\}_{j=0}^{\infty}$ — полная ортонормированная система непрерывно дифференцируемых функций в пространстве $L_2([\tau_p,\tau_{p+1}])$.

В (7.38), (7.39) предполагается, что $\phi_0(s) \equiv \frac{1}{\sqrt{\Delta}}$. Последнее справедливо, в частности, для полных ортонормированных тригонометрической и полиномиальной систем функций в пространстве $L_2([\tau_p,\tau_{p+1}])$. Число q в (7.39) следует выбирать так, чтобы выполнялось условие (7.22) в теореме 7.2 при $r=2$.

Например, если в качестве полной ортонормированной системы $\{\phi_j(t)\}_{j=0}^{\infty}$ в пространстве $L_2([\tau_p,\tau_{p+1}])$ взята полиномиальная система, то формулы (7.38), (7.39) согласно разложениям, полученным в главе 6, приобретают следующий вид:

$$I_{0_{\tau_{p+1},\tau_p}}^{(i_1)} = \sqrt{\Delta}\zeta_0^{(i_1)}, \tag{7.40}$$

$$I_{00_{\tau_{p+1},\tau_p}}^{(i_1 i_2)q} = \frac{\Delta}{2}\left[\zeta_0^{(i_1)}\zeta_0^{(i_2)} + \sum_{i=1}^{q}\frac{1}{\sqrt{4i^2-1}}\left\{\zeta_{i-1}^{(i_1)}\zeta_i^{(i_2)} - \zeta_i^{(i_1)}\zeta_{i-1}^{(i_2)}\right\}\right] - \frac{1}{2}\mathbf{1}_{\{i_1=i_2\}}\Delta, \tag{7.41}$$

где число q выбираем при $i_1 \neq i_2$ из следующего условия:

$$\mathsf{M}\left\{\left(I_{00_{\tau_{p+1},\tau_p}}^{(i_1 i_2)} - I_{00_{\tau_{p+1},\tau_p}}^{(i_1 i_2)q}\right)^2\right\} = \frac{\Delta^2}{2}\left(\frac{1}{2} - \sum_{i=1}^{q}\frac{1}{4i^2-1}\right) \le C\Delta^3; \tag{7.42}$$

постоянная C входит в условие (7.22) теоремы 7.2.

Если же в качестве полной ортонормированной системы $\{\phi_j(t)\}_{j=0}^{\infty}$ в пространстве $L_2([\tau_p,\tau_{p+1}])$ взята тригонометрическая система, то получаем [70]

$$I_{00_{\tau_{p+1},\tau_p}}^{(i_2 i_1)q} = \frac{1}{2}\Delta\Bigg[\zeta_0^{(i_1)}\zeta_0^{(i_2)} + \frac{1}{\pi}\sum_{r=1}^{q}\frac{1}{r}\left(\zeta_{2r}^{(i_1)}\zeta_{2r-1}^{(i_2)} - \zeta_{2r-1}^{(i_1)}\zeta_{2r}^{(i_2)}\right) +$$

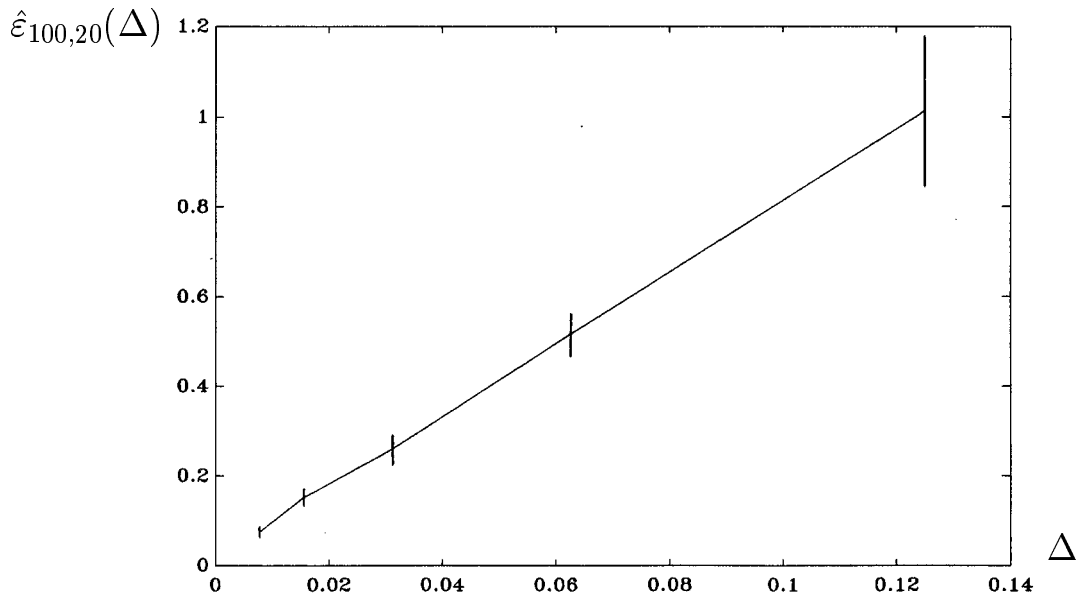

Рис. 7.2. Результат численного эксперимента 7.2.

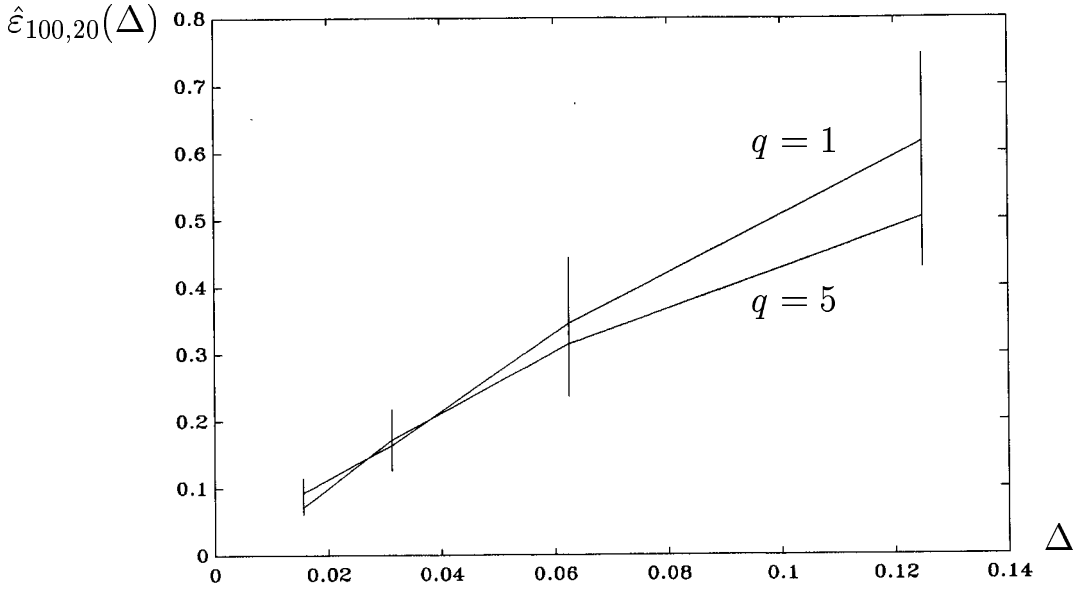

Рис. 7.3. Результат численного эксперимента 7.3.

$$+\frac{\sqrt{2}}{\pi}\left[\left(\sum_{r=1}^{q}\frac{1}{r}\zeta_{2r-1}^{(i_1)}+\sqrt{\alpha_q}\mu_q^{(i_1)}\right)\zeta_0^{(i_2)}-\left(\sum_{r=1}^{q}\frac{1}{r}\zeta_{2r-1}^{(i_2)}+\sqrt{\alpha_q}\mu_q^{(i_2)}\right)\zeta_0^{(i_1)}\right]\right]-\mathbf{1}_{\{i_1=i_2\}}\frac{\Delta}{2}, \tag{7.43}$$

где

$$\mu_q^{(i)}=\frac{1}{\sqrt{\alpha_q}}\sum_{r=q+1}^{\infty}\frac{1}{r}\,\zeta_{2r-1}^{(i)};\ \alpha_q=\frac{\pi^2}{6}-\sum_{r=1}^{q}\frac{1}{r^2}.$$

При этом для $i_1 \neq i_2$ имеем [70]

$$\mathsf{M}\left\{\left(I_{00_{\tau_{p+1},\tau_p}}^{*(i_2 i_1)} - I_{00_{\tau_{p+1},\tau_p}}^{*(i_2 i_1)q}\right)^2\right\} = \frac{\Delta^2}{2\pi^2}\left(\frac{\pi^2}{6} - \sum_{r=1}^{q}\frac{1}{r^2}\right). \tag{7.44}$$

Необходимо отметить, что на каждом p-м шаге интегрирования система независимых стандартных гауссовских случайных величин $\zeta_j^{(i)}$ должна генерироваться так, чтобы быть независимой относительно аналогичных систем гауссовских случайных величин на всех предшествующих шагах интегрирования.

Численный эксперимент 7.2[1]. *Повторить численный эксперимент* 7.1 *методом Г.Н. Мильштейна* (7.35).

Численный эксперимент 7.3. *Повторить численный эксперимент* 7.1 *для стохастического дифференциального уравнения Ито:*

$$dx_t = ax_t dt + \sum_{i=1}^{3} b_i x_t d\mathbf{f}_t^{(i)},\ \ x_0 = 1,\ \ t \in [0, T], \tag{7.45}$$

$\mathbf{f}_t^{(i)}$; $i = 1, 2, 3$ — *независимые стандартные винеровские процессы;* $a = b_1 = b_2 = b_3 = 1$; $T = 1$. *Для моделирования стохастических интегралов Ито* $I_{00_{(p+1)\Delta,p\Delta}}^{(i_2 i_1)}$ *в случае* $i_1 \neq i_2$; $i_1, i_2 = 1, 2, 3$ *применить формулу* (7.41) *при* $q = 1$, *а в случае* $i_1 = i_2$; $i_1 = 1, 2, 3$ — *формулу* (7.41) *при* $q = 0$. *В качестве формулы для моделирования точного решения уравнения* (7.45) *при* $t = T$ *использовать соотношение*

$$x_T = x_0 e^{\left(a - \frac{1}{2}\left(b_1^2 + b_2^2 + b_3^2\right)\right)T + \sqrt{\Delta}\sum\limits_{i=0}^{N-1}\left(b_1\zeta_i^{(1)} + b_2\zeta_i^{(2)} + b_3\zeta_i^{(3)}\right)},$$

где $\zeta_i^{(j)}$; $i = 0, 1, \ldots, N-1$; $j = 1, 2, 3$ — *независимые в совокупности стандартные гауссовские случайные величины (они же используются и при моделировании повторных стохастических интегралов из* (7.35)). *Повторить данный численный эксперимент при* $q = 5$.

Зависимости, изображенные на рис. 7.2 и 7.3, близки к линейным, что подтверждает тот факт, что метод Г.Н. Мильштейна при подходящих условиях является сильным численным методом порядка точности 1.0.

7.3.3 Методы порядка точности 1.5

Пусть условия теоремы 7.2 выполнены при $r = 3$. Тогда из (7.21) при $r = 3$ получим явный одношаговый сильный численный метод порядка

[1] В численных экспериментах из глав 7–10, если не оговаривается противное, для моделирования повторных стохастических интегралов Ито $I_{0\ldots0_{(p+1)\Delta,p\Delta}}^{(1\ldots1)}$; $l = 1, 2, \ldots$ используются формулы, основанные на многочленах Эрмита (см. главу 6).

точности 1.5 вида

$$\mathbf{y}_{p+1} = \mathbf{y}_p + \sum_{i_1=1}^{m} \Sigma_{i_1} I_{0_{\tau_{p+1},\tau_p}}^{(i_1)} + \Delta\mathbf{a} + \sum_{i_1,i_2=1}^{m} G_0^{(i_2)} \Sigma_{i_1} I_{00_{\tau_{p+1},\tau_p}}^{(i_2 i_1)q} +$$

$$+ \sum_{i_1=1}^{m} \left[G_0^{(i_1)} \mathbf{a} \left(\Delta I_{0_{\tau_{p+1},\tau_p}}^{(i_1)} + I_{1_{\tau_{p+1},\tau_p}}^{(i_1)} \right) - L\Sigma_{i_1} I_{1_{\tau_{p+1},\tau_p}}^{(i_1)} \right] +$$

$$+ \sum_{i_1,i_2,i_3=1}^{m} G_0^{(i_3)} G_0^{(i_2)} \Sigma_{i_1} I_{000_{\tau_{p+1},\tau_p}}^{(i_3 i_2 i_1)q} + \frac{\Delta^2}{2} L\mathbf{a}. \tag{7.46}$$

По формулам главы 6 получаем следующие выражения для совместного численного моделирования повторных стохастических интегралов Ито $I_{0_{\tau_{p+1},\tau_p}}^{(i_1)}$, $I_{1_{\tau_{p+1},\tau_p}}^{(i_1)}$, $I_{00_{\tau_{p+1},\tau_p}}^{(i_2 i_1)}$, $I_{000_{\tau_{p+1},\tau_p}}^{(i_3 i_2 i_1)}$:

$$I_{0_{\tau_{p+1},\tau_p}}^{(i_1)} = \sqrt{\Delta}\zeta_0^{(i_1)}, \tag{7.47}$$

$$I_{1_{\tau_{p+1},\tau_p}}^{(i_1)} = -\frac{\Delta^{\frac{3}{2}}}{2} \left(\zeta_0^{(i_1)} + \frac{1}{\sqrt{3}} \zeta_1^{(i_1)} \right), \tag{7.48}$$

$$I_{00_{\tau_{p+1},\tau_p}}^{(i_2 i_1)q} = I_{00_{\tau_{p+1},\tau_p}}^{*(i_2 i_1)q} - \frac{1}{2} \mathbf{1}_{\{i_1=i_2\}} \Delta, \tag{7.49}$$

$$I_{00_{\tau_{p+1},\tau_p}}^{*(i_1 i_2)q} = \frac{\Delta}{2} \left[\zeta_0^{(i_1)} \zeta_0^{(i_2)} + \sum_{i=1}^{q} \frac{1}{\sqrt{4i^2-1}} \left\{ \zeta_{i-1}^{(i_1)} \zeta_i^{(i_2)} - \zeta_i^{(i_1)} \zeta_{i-1}^{(i_2)} \right\} \right], \tag{7.50}$$

$$I_{000_{\tau_{p+1},\tau_p}}^{(i_1 i_2 i_3)q} = I_{000_{\tau_{p+1},\tau_p}}^{*(i_1 i_2 i_3)q} + \frac{1}{2} \mathbf{1}_{\{i_1=i_2\}} I_{1_{\tau_{p+1},\tau_p}}^{(i_3)} - \frac{1}{2} \mathbf{1}_{\{i_2=i_3\}} \left(\Delta I_{0_{\tau_{p+1},\tau_p}}^{(i_1)} + I_{1_{\tau_{p+1},\tau_p}}^{(i_1)} \right), \tag{7.51}$$

$$I_{000_{\tau_{p+1},\tau_p}}^{*(i_1 i_2 i_3)q} = -\frac{1}{\Delta} \left(I_{0_{\tau_{p+1},\tau_p}}^{(i_3)} I_{10_{\tau_{p+1},\tau_p}}^{*(i_2 i_1)q} + I_{0_{\tau_{p+1},\tau_p}}^{(i_1)} I_{10_{\tau_{p+1},\tau_p}}^{*(i_2 i_3)q} \right) +$$

$$+ \frac{1}{2} I_{0_{\tau_{p+1},\tau_p}}^{(i_3)} \left(I_{00_{\tau_{p+1},\tau_p}}^{*(i_1 i_2)q} - I_{00_{\tau_{p+1},\tau_p}}^{*(i_2 i_1)q} \right) -$$

$$-\Delta^{\frac{3}{2}} \left[\frac{1}{6} \zeta_0^{(i_1)} \zeta_0^{(i_3)} \left(\zeta_0^{(i_2)} + \sqrt{3} \zeta_1^{(i_2)} - \frac{1}{\sqrt{5}} \zeta_2^{(i_2)} \right) + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{4} D_{\tau_{p+1},\tau_p}^{(i_1 i_2 i_3)q} \right], \tag{7.52}$$

$$I_{10_{\tau_{p+1},\tau_p}}^{*(i_1 i_2)q} = -\frac{\Delta}{2} I_{00_{\tau_{p+1},\tau_p}}^{*(i_1 i_2)q} - \frac{\Delta^2}{4} \left[\frac{1}{\sqrt{3}} \zeta_0^{(i_2)} \zeta_1^{(i_1)} + \right.$$

$$+\sum_{i=0}^{q}\left(\frac{(i+1)\zeta_{i+2}^{(i_2)}\zeta_{i}^{(i_1)}-(i+2)\zeta_{i}^{(i_2)}\zeta_{i+2}^{(i_1)}}{\sqrt{(2i+1)(2i+5)}(2i+3)}+\frac{\zeta_{i}^{(i_1)}\zeta_{i}^{(i_2)}}{(2i-1)(2i+3)}\right)\Bigg], \qquad (7.53)$$

$$D_{\tau_{p+1},\tau_p}^{(i_1i_2i_3)q}=\sum_{\substack{i=1,j=0,k=i\\ 2i\geq k+i-j\geq -2;\ k+i-j\ -\ \text{четное}}}^{q} N_{ijk}K_{i+1,k+1,\frac{k+i-j}{2}+1}\zeta_i^{(i_1)}\zeta_j^{(i_2)}\zeta_k^{(i_3)}+$$

$$+\sum_{\substack{i=1,j=0\\ 2k\geq k+i-j\geq -2;\ k+i-j\ -\ \text{четное}}}^{q}\sum_{k=1}^{i-1} N_{ijk}K_{k+1,i+1,\frac{k+i-j}{2}+1}\zeta_i^{(i_1)}\zeta_j^{(i_2)}\zeta_k^{(i_3)}-$$

$$-\sum_{\substack{i=1,j=0,k=i+2\\ 2i+2\geq k+i-j\geq 0;\ k+i-j\ -\ \text{четное}}}^{q} N_{ijk}K_{i+1,k-1,\frac{k+i-j}{2}}\zeta_i^{(i_1)}\zeta_j^{(i_2)}\zeta_k^{(i_3)}-$$

$$-\sum_{\substack{i=1,j=0\\ 2k-2\geq k+i-j\geq 0;\ k+i-j\ -\ \text{четное}}}^{q}\sum_{k=1}^{i+1} N_{ijk}K_{k-1,i+1,\frac{k+i-j}{2}}\zeta_i^{(i_1)}\zeta_j^{(i_2)}\zeta_k^{(i_3)}-$$

$$-\sum_{\substack{i=1,j=0,k=i-2,k\geq 1\\ 2i-2\geq k+i-j\geq 0;\ k+i-j\ -\ \text{четное}}}^{q} N_{ijk}K_{i-1,k+1,\frac{k+i-j}{2}}\zeta_i^{(i_1)}\zeta_j^{(i_2)}\zeta_k^{(i_3)}-$$

$$-\sum_{\substack{i=1,j=0\\ 2k+2\geq k+i-j\geq 0;\ k+i-j\ -\ \text{четное}}}^{q}\sum_{k=1}^{i-3} N_{ijk}K_{k+1,i-1,\frac{k+i-j}{2}}\zeta_i^{(i_1)}\zeta_j^{(i_2)}\zeta_k^{(i_3)}+$$

$$+\sum_{\substack{i=1,j=0,k=i\\ 2i\geq k+i-j\geq 2;\ k+i-j\ -\ \text{четное}}}^{q} N_{ijk}K_{i-1,k-1,\frac{k+i-j}{2}-1}\zeta_i^{(i_1)}\zeta_j^{(i_2)}\zeta_k^{(i_3)}+$$

$$+\sum_{\substack{i=1,j=0\\ 2k\geq k+i-j\geq 2;\ k+i-j\ -\ \text{четное}}}^{q}\sum_{k=1}^{i-1} N_{ijk}K_{k-1,i-1,\frac{k+i-j}{2}-1}\zeta_i^{(i_1)}\zeta_j^{(i_2)}\zeta_k^{(i_3)},$$

где

$$N_{ijk}=\sqrt{\frac{1}{(2k+1)(2j+1)(2i+1)}},$$

$$K_{m,n,k}=\frac{a_{m-k}a_ka_{n-k}}{a_{m+n-k}}\cdot\frac{2n+2m-4k+1}{2n+2m-2k+1};\ a_k=\frac{(2k-1)!!}{k!};\ m\leq n.$$

Заметим, что согласно результатам разделов 5.1 и 5.6 можем записать

$$I^{*(i_1 i_2 i_3)q_1,q_2,q_3}_{000_{\tau_{p+1},\tau_p}} = \sum_{j_1=0}^{q_1}\sum_{j_2=0}^{q_2}\sum_{j_3=0}^{q_3} C_{j_3 j_2 j_1}\zeta_{j_1}^{(i_1)}\zeta_{j_2}^{(i_2)}\zeta_{j_3}^{(i_3)}$$

или

$$I^{(i_1 i_2 i_3)q_1,q_2,q_3}_{000_{\tau_{p+1},\tau_p}} = \sum_{j_1=0}^{q_1}\sum_{j_2=0}^{q_2}\sum_{j_3=0}^{q_3} C_{j_3 j_2 j_1}\Biggl(\zeta_{j_1}^{(i_1)}\zeta_{j_2}^{(i_2)}\zeta_{j_3}^{(i_3)} -$$

$$-\mathbf{1}_{\{j_1=j_2\}}\mathbf{1}_{\{i_1=i_2\}}\zeta_{j_3}^{(i_3)} - \mathbf{1}_{\{j_2=j_3\}}\mathbf{1}_{\{i_2=i_3\}}\zeta_{j_1}^{(i_1)} - \mathbf{1}_{\{j_1=j_3\}}\mathbf{1}_{\{i_1=i_3\}}\zeta_{j_2}^{(i_2)}\Biggr), \qquad (7.54)$$

где в формуле для вычисления $C_{j_3 j_2 j_1}$ следует положить $\psi_1(s),\ldots,\psi_3(s) \equiv 1$.

Ранее уже отмечалось, что выбор чисел q_1, q_2, q_3 является отдельной задачей. Далее мы ограничимся случаем $q_1 = \ldots = q_k = q$.

Число q следует выбирать так, чтобы выполнялось условие (7.22) в теореме 7.2 при $r = 3$.

Соотношения (7.46), (7.47)–(7.54) определяют явный одношаговый сильный численный метод порядка точности 1.5. Этот метод является новым благодаря применению полиномов Лежандра и унифицированного разложения Тейлора–Ито.

В заключение рассмотрим следующий явный сильный одношаговый численный метод порядка точности 1.0:

$$\mathbf{y}_{p+1} = \mathbf{y}_p + \mathbf{v}_p, \qquad (7.55)$$

где $\mathbf{v}_p$ — правая часть численного метода (7.46) без слагаемых $\mathbf{y}_p$ и $\frac{\Delta^2}{2}L\mathbf{a}(\mathbf{y}_p,\tau_p)$.

Численный эксперимент 7.4 (рис. 7.4). *Повторить численный эксперимент* 7.1 *для сильного численного метода порядка точности* 1.0 *вида* (7.55). *При этом не моделировать те повторные стохастические интегралы Ито, коэффициенты перед которыми равны нулю после применения метода* (7.55) *к уравнению* (7.17) *и приведения подобных слагаемых.*

Численный эксперимент 7.5 (рис. 7.5). *Повторить численный эксперимент* 7.4 *для численного метода порядка точности* 1.5 *вида* (7.46).

В правую часть численного метода (7.55) входят слагаемые, имеющие порядок малости $\gamma \le 1.5$ (см. главу 2), однако данный метод имеет согласно теореме 7.2 сильный порядок точности 1.0, а не 1.5. Учет слагаемого $\frac{\Delta^2}{2}L\mathbf{a}(\mathbf{y}_p,\tau_p)$ в численной схеме (7.46) делает ее сильной численной схемой порядка точности 1.5 (см. теорему 7.2). Эти

теоретические выводы хорошо подтверждаются численными экспериментами (см. рис.7.4 и 7.5).

7.3.4 Метод порядка точности 2.0

Пусть условия теоремы 7.2 выполнены при $r=4$. Тогда из (7.21) при $r=4$ получим явный одношаговый сильный численный метод порядка точности 2.0 вида

$$\mathbf{y}_{p+1}=\mathbf{y}_p+\sum_{i_1=1}^{m}\Sigma_{i_1}I_{0_{\tau_{p+1},\tau_p}}^{(i_1)}+\Delta\mathbf{a}+\sum_{i_1,i_2=1}^{m}G_0^{(i_2)}\Sigma_{i_1}I_{00_{\tau_{p+1},\tau_p}}^{(i_2i_1)q}+$$

$$+\sum_{i_1=1}^{m}\left[G_0^{(i_1)}\mathbf{a}\left(\Delta I_{0_{\tau_{p+1},\tau_p}}^{(i_1)}+I_{1_{\tau_{p+1},\tau_p}}^{(i_1)}\right)-L\Sigma_{i_1}I_{1_{\tau_{p+1},\tau_p}}^{(i_1)}\right]+$$

$$+\sum_{i_1,i_2,i_3=1}^{m}G_0^{(i_3)}G_0^{(i_2)}\Sigma_{i_1}I_{000_{\tau_{p+1},\tau_p}}^{(i_3i_2i_1)q}+\frac{\Delta^2}{2}L\mathbf{a}+$$

$$+\sum_{i_1,i_2=1}^{m}\left[G_0^{(i_2)}L\Sigma_{i_1}\left(I_{10_{\tau_{p+1},\tau_p}}^{(i_2i_1)q}-I_{01_{\tau_{p+1},\tau_p}}^{(i_2i_1)q}\right)-LG_0^{(i_2)}\Sigma_{i_1}I_{10_{\tau_{p+1},\tau_p}}^{(i_2i_1)q}+\right.$$

$$\left.+G_0^{(i_2)}G_0^{(i_1)}\mathbf{a}\left(I_{01_{\tau_{p+1},\tau_p}}^{(i_2i_1)q}+\Delta I_{00_{\tau_{p+1},\tau_p}}^{(i_2i_1)q}\right)\right]+\sum_{i_1,i_2,i_3,i_4=1}^{m}G_0^{(i_4)}G_0^{(i_3)}G_0^{(i_2)}\Sigma_{i_1}I_{0000_{\tau_{p+1},\tau_p}}^{(i_4i_3i_2i_1)q}. \tag{7.56}$$

Для численного моделирования повторных стохастических интегралов Ито, входящих в (7.56), воспользуемся формулами предыдущего раздела, а также формулами из глав 5 и 6:

$$I_{000_{\tau_{p+1},\tau_p}}^{*(i_1i_2i_3)q}=\sum_{j_1,j_2,j_3=0}^{q}C_{j_3j_2j_1}\zeta_{j_1}^{(i_1)}\zeta_{j_2}^{(i_2)}\zeta_{j_3}^{(i_3)},$$

$$I_{10_{\tau_{p+1},\tau_p}}^{(i_1i_2)q}=I_{10_{\tau_{p+1},\tau_p}}^{*(i_1i_2)q}+\frac{1}{4}\mathbf{1}_{\{i_1=i_2\}}\Delta^2,\ I_{01_{\tau_{p+1},\tau_p}}^{(i_1i_2)q}=I_{01_{\tau_{p+1},\tau_p}}^{*(i_1i_2)q}+\frac{1}{4}\mathbf{1}_{\{i_1=i_2\}}\Delta^2,$$

$$I_{01_{\tau_{p+1},\tau_p}}^{*(i_1i_2)q}=-\frac{\Delta}{2}I_{00_{\tau_{p+1},\tau_p}}^{*(i_1i_2)q}-\frac{\Delta^2}{4}\Bigg[\frac{1}{\sqrt{3}}\zeta_0^{(i_1)}\zeta_1^{(i_2)}+$$

$$+\sum_{i=0}^{q}\left(\frac{(i+2)\zeta_i^{(i_1)}\zeta_{i+2}^{(i_2)}-(i+1)\zeta_{i+2}^{(i_1)}\zeta_i^{(i_2)}}{\sqrt{(2i+1)(2i+5)}(2i+3)}-\frac{\zeta_i^{(i_1)}\zeta_i^{(i_2)}}{(2i-1)(2i+3)}\right)\Bigg], \tag{7.57}$$

$$I_{0000_{\tau_{p+1},\tau_p}}^{(i_1i_2i_3i_4)q}=\sum_{j_1,\ldots,j_4=0}^{q}C_{j_4\ldots j_1}\left(\prod_{l=1}^{4}\zeta_{j_l}^{(i_l)}-\right.$$

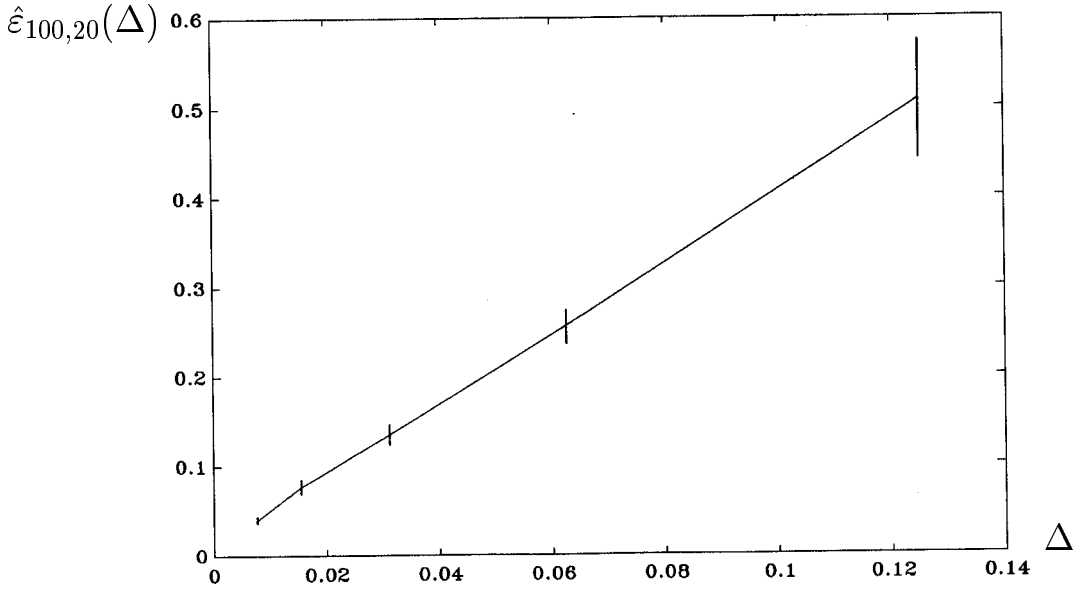

Рис. 7.4. Результат численного эксперимента 7.4.

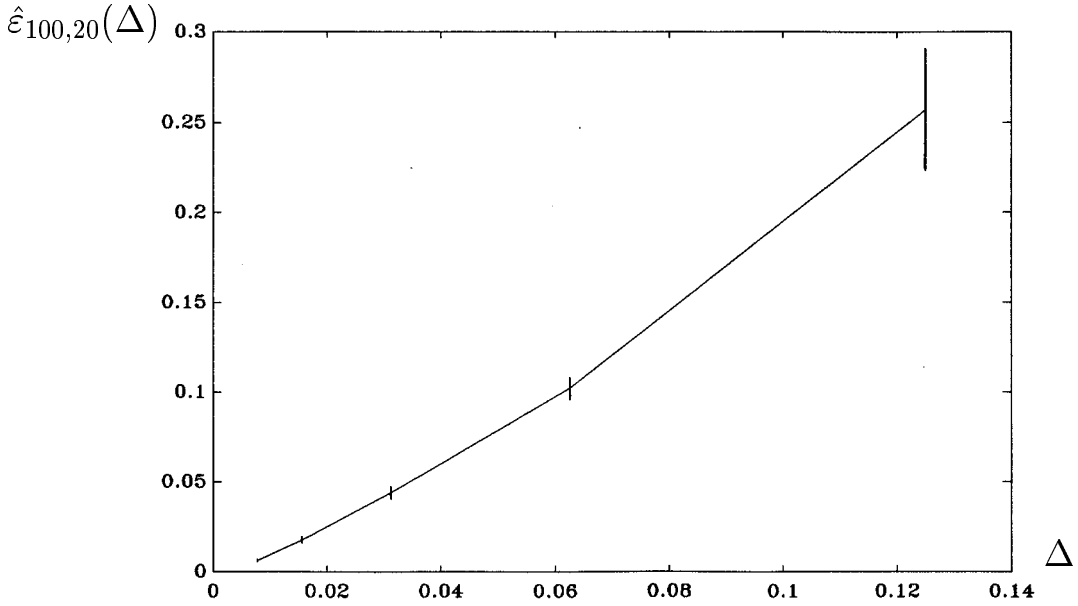

Рис. 7.5. Результат численного эксперимента 7.5.

$$-\mathbf{1}_{\{i_1=i_2\}}\mathbf{1}_{\{j_1=j_2\}}\zeta_{j_3}^{(i_3)}\zeta_{j_4}^{(i_4)}-\mathbf{1}_{\{i_1=i_3\}}\mathbf{1}_{\{j_1=j_3\}}\zeta_{j_2}^{(i_2)}\zeta_{j_4}^{(i_4)}-$$
$$-\mathbf{1}_{\{i_1=i_4\}}\mathbf{1}_{\{j_1=j_4\}}\zeta_{j_2}^{(i_2)}\zeta_{j_3}^{(i_3)}-\mathbf{1}_{\{i_2=i_3\}}\mathbf{1}_{\{j_2=j_3\}}\zeta_{j_1}^{(i_1)}\zeta_{j_4}^{(i_4)}-$$
$$-\mathbf{1}_{\{i_2=i_4\}}\mathbf{1}_{\{j_2=j_4\}}\zeta_{j_1}^{(i_1)}\zeta_{j_3}^{(i_3)}-\mathbf{1}_{\{i_3=i_4\}}\mathbf{1}_{\{j_3=j_4\}}\zeta_{j_1}^{(i_1)}\zeta_{j_2}^{(i_2)}+$$
$$+\mathbf{1}_{\{i_1=i_2\}}\mathbf{1}_{\{j_1=j_2\}}\mathbf{1}_{\{i_3=i_4\}}\mathbf{1}_{\{j_3=j_4\}}+\mathbf{1}_{\{i_1=i_3\}}\mathbf{1}_{\{j_1=j_3\}}\mathbf{1}_{\{i_2=i_4\}}\mathbf{1}_{\{j_2=j_4\}}+$$

$$+\mathbf{1}_{\{i_1=i_4\}}\mathbf{1}_{\{j_1=j_4\}}\mathbf{1}_{\{i_2=i_3\}}\mathbf{1}_{\{j_2=j_3\}}\Bigg),$$

где в $C_{j_3\ldots j_1}$, $C_{j_4\ldots j_1}$ следует положить $\psi_1(s),\ldots,\psi_4(s)\equiv 1$.

Число q в приведенных формулах следует выбирать так, чтобы выполнялось условие (7.22) в теореме 7.2 при $r=4$.

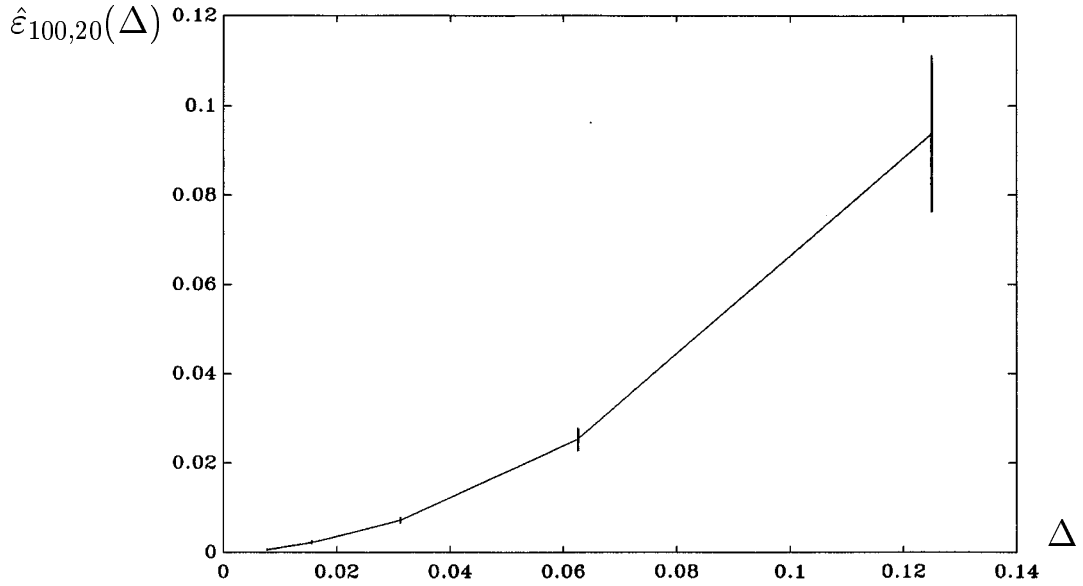

Рис. 7.6. Результат численного эксперимента 7.6.

Рассмотренный в данном разделе метод является новым благодаря применению полиномов Лежандра, а также использованию явной формулы для вычисления коэффициентов $C_{j_3j_2j_1}$ $C_{j_4\ldots j_1}$ и унифицированного разложения Тейлора–Ито.

Численный эксперимент 7.6 (рис. 7.6). *Повторить численный эксперимент* 7.4 *для сильного численного метода порядка точности* 2.0 *вида* (7.56).

7.3.5 Методы порядка точности 2.5

Пусть условия теоремы 7.2 выполнены при $r=5$. Тогда из (7.21) при $r=5$ получаем явный одношаговый сильный численный метод порядка точности 2.5 вида

$$\mathbf{y}_{p+1}=\mathbf{y}_p+\sum_{i_1=1}^{m}\Sigma_{i_1}I_{0_{\tau_{p+1},\tau_p}}^{(i_1)}+\Delta\mathbf{a}+\sum_{i_1,i_2=1}^{m}G_0^{(i_2)}\Sigma_{i_1}I_{00_{\tau_{p+1},\tau_p}}^{(i_2i_1)q}+$$

$$+\sum_{i_1=1}^{m}\left[G_0^{(i_1)}\mathbf{a}\left(\Delta I_{0_{\tau_{p+1},\tau_p}}^{(i_1)}+I_{1_{\tau_{p+1},\tau_p}}^{(i_1)}\right)-L\Sigma_{i_1}I_{1_{\tau_{p+1},\tau_p}}^{(i_1)}\right]+$$

$$+\sum_{i_1,i_2,i_3=1}^{m} G_0^{(i_3)} G_0^{(i_2)} \Sigma_{i_1} I_{000_{\tau_{p+1},\tau_p}}^{(i_3 i_2 i_1)q} + \frac{\Delta^2}{2} L\mathbf{a} + \frac{\Delta^3}{6} L^2\mathbf{a} +$$

$$+\sum_{i_1,i_2=1}^{m} \Big[G_0^{(i_2)} L \Sigma_{i_1} \left(I_{10_{\tau_{p+1},\tau_p}}^{(i_2 i_1)q} - I_{01_{\tau_{p+1},\tau_p}}^{(i_2 i_1)q} \right) - L G_0^{(i_2)} \Sigma_{i_1} I_{10_{\tau_{p+1},\tau_p}}^{(i_2 i_1)q} +$$

$$+ G_0^{(i_2)} G_0^{(i_1)} \mathbf{a} \left(I_{01_{\tau_{p+1},\tau_p}}^{(i_2 i_1)q} + \Delta I_{00_{\tau_{p+1},\tau_p}}^{(i_2 i_1)q} \right) \Big] + \sum_{i_1,i_2,i_3,i_4=1}^{m} G_0^{(i_4)} G_0^{(i_3)} G_0^{(i_2)} \Sigma_{i_1} I_{0000_{\tau_{p+1},\tau_p}}^{(i_4 i_3 i_2 i_1)q}$$

$$+\sum_{i_1=1}^{m} \Big[G_0^{(i_1)} L\mathbf{a} \left(\frac{1}{2} I_{2_{\tau_{p+1},\tau_p}}^{(i_1)} + \Delta I_{1_{\tau_{p+1},\tau_p}}^{(i_1)} + \frac{\Delta^2}{2} I_{0_{\tau_{p+1},\tau_p}}^{(i_1)} \right) +$$

$$+ \frac{1}{2} L^2 \Sigma_{i_1} I_{2_{\tau_{p+1},\tau_p}}^{(i_1)} - L G_0^{(i_1)} \mathbf{a} \left(I_{2_{\tau_{p+1},\tau_p}}^{(i_1)} + \Delta I_{1_{\tau_{p+1},\tau_p}}^{(i_1)} \right) \Big] +$$

$$+\sum_{i_1,i_2,i_3=1}^{m} \Big[G_0^{(i_3)} L G_0^{(i_2)} \Sigma_{i_1} \left(I_{100_{\tau_{p+1},\tau_p}}^{(i_3 i_2 i_1)q} - I_{010_{\tau_{p+1},\tau_p}}^{(i_3 i_2 i_1)q} \right) +$$

$$+ G_0^{(i_3)} G_0^{(i_2)} L \Sigma_{i_1} \left(I_{010_{\tau_{p+1},\tau_p}}^{(i_3 i_2 i_1)q} - I_{001_{\tau_{p+1},\tau_p}}^{(i_3 i_2 i_1)q} \right) +$$

$$+ G_0^{(i_3)} G_0^{(i_2)} G_0^{(i_1)} \mathbf{a} \left(\Delta I_{000_{\tau_{p+1},\tau_p}}^{(i_3 i_2 i_1)q} + I_{001_{\tau_{p+1},\tau_p}}^{(i_3 i_2 i_1)q} \right) - L G_0^{(i_3)} G_0^{(i_2)} \Sigma_{i_1} I_{100_{\tau_{p+1},\tau_p}}^{(i_3 i_2 i_1)q} \Big] +$$

$$+\sum_{i_1,i_2,i_3,i_4,i_5=1}^{m} G_0^{(i_5)} G_0^{(i_4)} G_0^{(i_3)} G_0^{(i_2)} \Sigma_{i_1} I_{00000_{\tau_{p+1},\tau_p}}^{(i_5 i_4 i_3 i_2 i_1)q}. \qquad (7.58)$$

Для численного моделирования повторных стохастических интегралов Ито, входящих в (7.58), воспользуемся формулами предыдущих разделов, а также формулами:

$$I_{2_{\tau_{p+1},\tau_p}}^{(i_1)} = \frac{\Delta^{\frac{5}{2}}}{3} \left(\zeta_0^{(i_1)} + \frac{\sqrt{3}}{2} \zeta_1^{(i_1)} + \frac{1}{2\sqrt{5}} \zeta_2^{(i_1)} \right),$$

$$I_{l_1 l_2 l_3 \tau_{p+1},\tau_p}^{(i_1 i_2 i_3)q} = \sum_{j_1,\ldots,j_3=0}^{q} C_{j_3 j_2 j_1} \Big(\zeta_{j_1}^{(i_1)} \zeta_{j_2}^{(i_2)} \zeta_{j_3}^{(i_3)} -$$

$$- \mathbf{1}_{\{i_1=i_2\}} \mathbf{1}_{\{j_1=j_2\}} \zeta_{j_3}^{(i_3)} - \mathbf{1}_{\{i_2=i_3\}} \mathbf{1}_{\{j_2=j_3\}} \zeta_{j_1}^{(i_1)} - \mathbf{1}_{\{i_1=i_3\}} \mathbf{1}_{\{j_1=i_3\}} \zeta_{j_2}^{(i_2)} \Big),$$

$$I_{0000_{\tau_{p+1},\tau_p}}^{(i_1 \ldots i_4)q} = \sum_{j_1,\ldots,j_4=0}^{q} C_{j_4 \ldots j_1} \Big(\prod_{l=1}^{4} \zeta_{j_l}^{(i_l)} -$$

$$- \mathbf{1}_{\{i_1=i_2\}} \mathbf{1}_{\{j_1=j_2\}} \zeta_{j_3}^{(i_3)} \zeta_{j_4}^{(i_4)} - \mathbf{1}_{\{i_1=i_3\}} \mathbf{1}_{\{j_1=j_3\}} \zeta_{j_2}^{(i_2)} \zeta_{j_4}^{(i_4)} -$$

$$- \mathbf{1}_{\{i_1=i_4\}} \mathbf{1}_{\{j_1=j_4\}} \zeta_{j_2}^{(i_2)} \zeta_{j_3}^{(i_3)} - \mathbf{1}_{\{i_2=i_3\}} \mathbf{1}_{\{j_2=j_3\}} \zeta_{j_1}^{(i_1)} \zeta_{j_4}^{(i_4)} -$$

$$-\mathbf{1}_{\{i_2=i_4\}}\mathbf{1}_{\{j_2=j_4\}}\zeta_{j_1}^{(i_1)}\zeta_{j_3}^{(i_3)}-\mathbf{1}_{\{i_3=i_4\}}\mathbf{1}_{\{j_3=j_4\}}\zeta_{j_1}^{(i_1)}\zeta_{j_2}^{(i_2)}+$$
$$+\mathbf{1}_{\{i_1=i_2\}}\mathbf{1}_{\{j_1=j_2\}}\mathbf{1}_{\{i_3=i_4\}}\mathbf{1}_{\{j_3=j_4\}}+\mathbf{1}_{\{i_1=i_3\}}\mathbf{1}_{\{j_1=j_3\}}\mathbf{1}_{\{i_2=i_4\}}\mathbf{1}_{\{j_2=j_4\}}+$$
$$+\mathbf{1}_{\{i_1=i_4\}}\mathbf{1}_{\{j_1=j_4\}}\mathbf{1}_{\{i_2=i_3\}}\mathbf{1}_{\{j_2=j_3\}}\Bigg),$$

$$I_{00000_{\tau_{p+1},\tau_p}}^{(i_1\ldots i_5)q}=\sum_{j_1,\ldots,j_5=0}^{q}C_{j_5\ldots j_1}\Bigg(\prod_{l=1}^{5}\zeta_{j_l}^{(i_l)}-$$
$$-\mathbf{1}_{\{j_1=j_2\}}\mathbf{1}_{\{i_1=i_2\}}\zeta_{j_3}^{(i_3)}\zeta_{j_4}^{(i_4)}\zeta_{j_5}^{(i_5)}-\mathbf{1}_{\{j_1=j_3\}}\mathbf{1}_{\{i_1=i_3\}}\zeta_{j_2}^{(i_2)}\zeta_{j_4}^{(i_4)}\zeta_{j_5}^{(i_5)}-$$
$$-\mathbf{1}_{\{j_1=j_4\}}\mathbf{1}_{\{i_1=i_4\}}\zeta_{j_2}^{(i_2)}\zeta_{j_3}^{(i_3)}\zeta_{j_5}^{(i_5)}-\mathbf{1}_{\{j_1=j_5\}}\mathbf{1}_{\{i_1=i_5\}}\zeta_{j_2}^{(i_2)}\zeta_{j_3}^{(i_3)}\zeta_{j_4}^{(i_4)}-$$
$$-\mathbf{1}_{\{j_2=j_3\}}\mathbf{1}_{\{i_2=i_3\}}\zeta_{j_1}^{(i_1)}\zeta_{j_4}^{(i_4)}\zeta_{j_5}^{(i_5)}-\mathbf{1}_{\{j_2=j_4\}}\mathbf{1}_{\{i_2=i_4\}}\zeta_{j_1}^{(i_1)}\zeta_{j_3}^{(i_3)}\zeta_{j_5}^{(i_5)}-$$
$$-\mathbf{1}_{\{j_2=j_5\}}\mathbf{1}_{\{i_2=i_5\}}\zeta_{j_1}^{(i_1)}\zeta_{j_3}^{(i_3)}\zeta_{j_4}^{(i_4)}-\mathbf{1}_{\{j_3=j_4\}}\mathbf{1}_{\{i_3=i_4\}}\zeta_{j_1}^{(i_1)}\zeta_{j_2}^{(i_2)}\zeta_{j_5}^{(i_5)}-$$
$$-\mathbf{1}_{\{j_3=j_5\}}\mathbf{1}_{\{i_3=i_5\}}\zeta_{j_1}^{(i_1)}\zeta_{j_2}^{(i_2)}\zeta_{j_4}^{(i_4)}-\mathbf{1}_{\{j_4=j_5\}}\mathbf{1}_{\{i_4=i_5\}}\zeta_{j_1}^{(i_1)}\zeta_{j_2}^{(i_2)}\zeta_{j_3}^{(i_3)}+$$
$$+\mathbf{1}_{\{j_1=j_2\}}\mathbf{1}_{\{i_1=i_2\}}\mathbf{1}_{\{j_3=j_4\}}\mathbf{1}_{\{i_3=i_4\}}\zeta_{j_5}^{(i_5)}+\mathbf{1}_{\{j_1=j_2\}}\mathbf{1}_{\{i_1=i_2\}}\mathbf{1}_{\{j_3=j_5\}}\mathbf{1}_{\{i_3=i_5\}}\zeta_{j_4}^{(i_4)}$$
$$+\mathbf{1}_{\{j_1=j_2\}}\mathbf{1}_{\{i_1=i_2\}}\mathbf{1}_{\{j_4=j_5\}}\mathbf{1}_{\{i_4=i_5\}}\zeta_{j_3}^{(i_3)}+\mathbf{1}_{\{j_1=j_3\}}\mathbf{1}_{\{i_1=i_3\}}\mathbf{1}_{\{j_2=j_4\}}\mathbf{1}_{\{i_2=i_4\}}\zeta_{j_5}^{(i_5)}$$
$$+\mathbf{1}_{\{j_1=j_3\}}\mathbf{1}_{\{i_1=i_3\}}\mathbf{1}_{\{j_2=j_5\}}\mathbf{1}_{\{i_2=i_5\}}\zeta_{j_4}^{(i_4)}+\mathbf{1}_{\{j_1=j_3\}}\mathbf{1}_{\{i_1=i_3\}}\mathbf{1}_{\{j_4=j_5\}}\mathbf{1}_{\{i_4=i_5\}}\zeta_{j_2}^{(i_2)}$$
$$+\mathbf{1}_{\{j_1=j_4\}}\mathbf{1}_{\{i_1=i_4\}}\mathbf{1}_{\{j_2=j_3\}}\mathbf{1}_{\{i_2=i_3\}}\zeta_{j_5}^{(i_5)}+\mathbf{1}_{\{j_1=j_4\}}\mathbf{1}_{\{i_1=i_4\}}\mathbf{1}_{\{j_2=j_5\}}\mathbf{1}_{\{i_2=i_5\}}\zeta_{j_3}^{(i_3)}$$
$$+\mathbf{1}_{\{j_1=j_4\}}\mathbf{1}_{\{i_1=i_4\}}\mathbf{1}_{\{j_3=j_5\}}\mathbf{1}_{\{i_3=i_5\}}\zeta_{j_2}^{(i_2)}+\mathbf{1}_{\{j_1=j_5\}}\mathbf{1}_{\{i_1=i_5\}}\mathbf{1}_{\{j_2=j_3\}}\mathbf{1}_{\{i_2=i_3\}}\zeta_{j_4}^{(i_4)}$$
$$+\mathbf{1}_{\{j_1=j_5\}}\mathbf{1}_{\{i_1=i_5\}}\mathbf{1}_{\{j_2=j_4\}}\mathbf{1}_{\{i_2=i_4\}}\zeta_{j_3}^{(i_3)}+\mathbf{1}_{\{j_1=j_5\}}\mathbf{1}_{\{i_1=i_5\}}\mathbf{1}_{\{j_3=j_4\}}\mathbf{1}_{\{i_3=i_4\}}\zeta_{j_2}^{(i_2)}$$
$$+\mathbf{1}_{\{j_2=j_3\}}\mathbf{1}_{\{i_2=i_3\}}\mathbf{1}_{\{j_4=j_5\}}\mathbf{1}_{\{i_4=i_5\}}\zeta_{j_1}^{(i_1)}+\mathbf{1}_{\{j_2=j_4\}}\mathbf{1}_{\{i_2=i_4\}}\mathbf{1}_{\{j_3=j_5\}}\mathbf{1}_{\{i_3=i_5\}}\zeta_{j_1}^{(i_1)}$$
$$+\mathbf{1}_{\{j_2=j_5\neq 0\}}\mathbf{1}_{\{i_2=i_5\}}\mathbf{1}_{\{j_3=j_4\neq 0\}}\mathbf{1}_{\{i_3=i_4\}}\zeta_{j_1}^{(i_1)}\Bigg),$$

где в $C_{j_3\ldots j_1}$ полагаем $\psi_1(\tau)$, $\psi_2(\tau)$, $\psi_3(\tau)\equiv 1$ для аппроксимации $I_{000_{\tau_{p+1},\tau_p}}^{(i_1i_2i_3)q}$; полагаем $\psi_1(\tau)\equiv 1$, $\psi_2(\tau)\equiv 1$, $\psi_3(\tau)\equiv t-\tau$ для аппроксимации $I_{001_{\tau_{p+1},\tau_p}}^{(i_1i_2i_3)q}$; полагаем $\psi_1(\tau)\equiv 1$, $\psi_2(\tau)\equiv t-\tau$, $\psi_3(\tau)\equiv 1$ для аппроксимации $I_{010_{\tau_{p+1},\tau_p}}^{(i_1i_2i_3)q}$; полагаем $\psi_1(\tau)\equiv t-\tau$, $\psi_2(\tau)\equiv 1$, $\psi_3(\tau)\equiv 1$ для аппроксимации $I_{100_{\tau_{p+1},\tau_p}}^{(i_1i_2i_3)q}$; в $C_{j_4\ldots j_1}$ полагаем $\psi_1(\tau)$, $\ldots$, $\psi_4(\tau)\equiv 1$ для аппроксимации $I_{0000_{\tau_{p+1},\tau_p}}^{(i_1\ldots i_4)q}$; в $C_{j_5\ldots j_1}$ полагаем $\psi_1(\tau)$, $\ldots$, $\psi_5(\tau)\equiv 1$ для аппроксимации $I_{00000_{\tau_{p+1},\tau_p}}^{(i_1\ldots i_5)q}$.

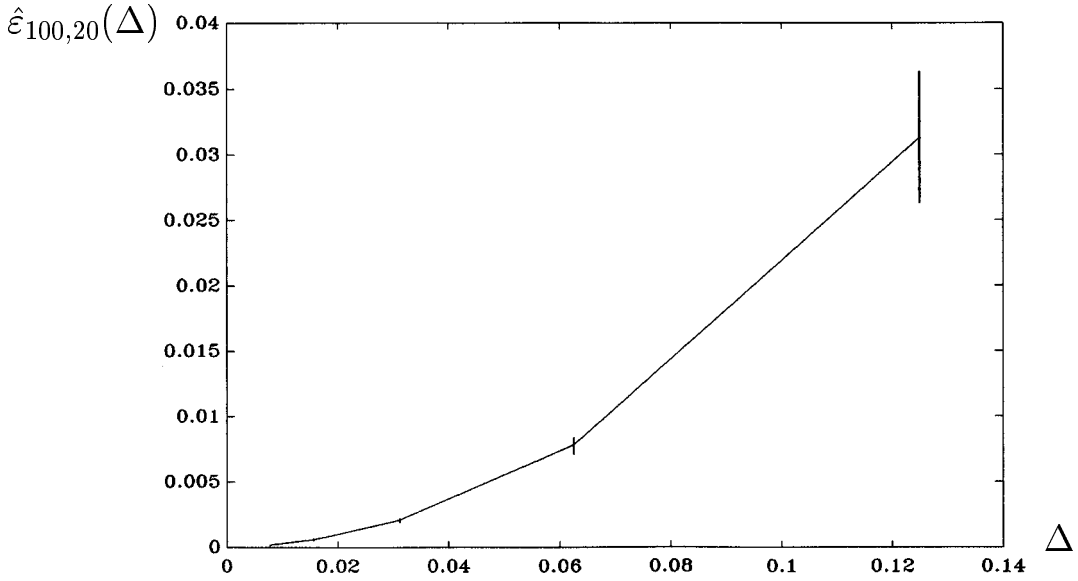

Рис. 7.7. Результат численного эксперимента 7.7.

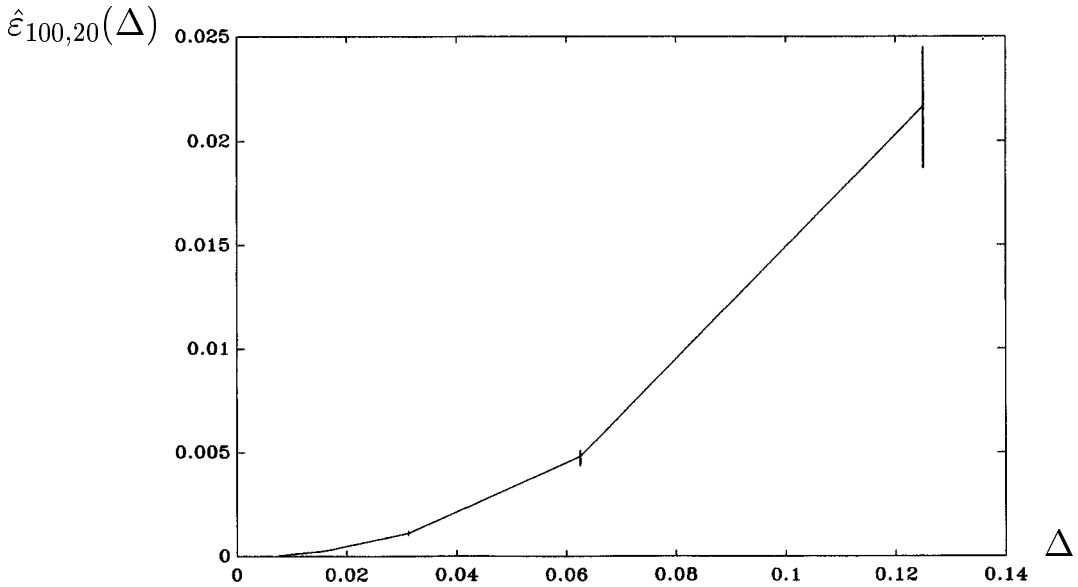

Рис. 7.8. Результат численного эксперимента 7.8.

Число q в приведенных формулах следует выбирать так, чтобы выполнялось условие (7.22) в теореме 7.2 при $r = 5$.

Наряду с численным методом (7.58) рассмотрим следующий явный сильный одношаговый численный метод порядка точности 2.0:

$$\mathbf{y}_{p+1} = \mathbf{y}_p + \mathbf{v}_p, \tag{7.59}$$

где $\mathbf{v}_p$ — правая часть численного метода (7.58) без слагаемых $\mathbf{y}_p$ и $\frac{\Delta^3}{6} L^2 \mathbf{a}(\mathbf{y}_p, \tau_p)$. Численные методы (7.56), (7.58) и (7.59) согласно теореме 7.2 имеют сильный порядок точности 2.0, 2.5 и 2.0 соответственно

(см. рис. 7.6–7.8), однако численный метод (7.59) эффективнее численного метода (7.56) (см. рис. 7.6, 7.7), по-видимому, благодаря учету нескольких дополнительных слагаемых.

Численный эксперимент 7.7. *Повторить численный эксперимент* 7.4 *для сильного численного метода порядка точности* 2.0 *вида* (7.59).

Численный эксперимент 7.8. *Повторить численный эксперимент* 7.4 *для сильного численного метода порядка точности* 2.5 *вида* (7.58).

7.3.6 Метод порядка точности 3.0

Пусть условия теоремы 7.2 выполнены при $r = 6$. Тогда из (7.21) при $r = 6$ получаем явный одношаговый сильный численный метод порядка точности 3.0 вида

$$\mathbf{y}_{p+1} = \mathbf{y}_p + \sum_{i_1=1}^{m} \Sigma_{i_1} I_{0_{\tau_{p+1},\tau_p}}^{(i_1)} + \Delta\mathbf{a} + \sum_{i_1,i_2=1}^{m} G_0^{(i_2)} \Sigma_{i_1} I_{00_{\tau_{p+1},\tau_p}}^{(i_2 i_1)q} +$$

$$+ \sum_{i_1=1}^{m} \left[G_0^{(i_1)} \mathbf{a} \left(\Delta I_{0_{\tau_{p+1},\tau_p}}^{(i_1)} + I_{1_{\tau_{p+1},\tau_p}}^{(i_1)} \right) - L\Sigma_{i_1} I_{1_{\tau_{p+1},\tau_p}}^{(i_1)} \right] +$$

$$+ \sum_{i_1,i_2,i_3=1}^{m} G_0^{(i_3)} G_0^{(i_2)} \Sigma_{i_1} I_{000_{\tau_{p+1},\tau_p}}^{(i_3 i_2 i_1)q} + \frac{\Delta^2}{2} L\mathbf{a} +$$

$$+ \sum_{i_1,i_2=1}^{m} \left[G_0^{(i_2)} L\Sigma_{i_1} \left(I_{10_{\tau_{p+1},\tau_p}}^{(i_2 i_1)q} - I_{01_{\tau_{p+1},\tau_p}}^{(i_2 i_1)q} \right) - L G_0^{(i_2)} \Sigma_{i_1} I_{10_{\tau_{p+1},\tau_p}}^{(i_2 i_1)q} + \right.$$

$$\left. + G_0^{(i_2)} G_0^{(i_1)} \mathbf{a} \left(I_{01_{\tau_{p+1},\tau_p}}^{(i_2 i_1)q} + \Delta I_{00_{\tau_{p+1},\tau_p}}^{(i_2 i_1)q} \right) \right] + \sum_{i_1,\ldots,i_4=1}^{m} G_0^{(i_4)} G_0^{(i_3)} G_0^{(i_2)} \Sigma_{i_1} I_{0000_{\tau_{p+1},\tau_p}}^{(i_4 i_3 i_2 i_1)q}$$

$$+ \sum_{i_1=1}^{m} \left[G_0^{(i_1)} L\mathbf{a} \left(\frac{1}{2} I_{2_{\tau_{p+1},\tau_p}}^{(i_1)} + \Delta I_{1_{\tau_{p+1},\tau_p}}^{(i_1)} + \frac{\Delta^2}{2} I_{0_{\tau_{p+1},\tau_p}}^{(i_1)} \right) + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{2} L^2 \Sigma_{i_1} I_{2_{\tau_{p+1},\tau_p}}^{(i_1)} - L G_0^{(i_1)} \mathbf{a} \left(I_{2_{\tau_{p+1},\tau_p}}^{(i_1)} + \Delta I_{1_{\tau_{p+1},\tau_p}}^{(i_1)} \right) \right] +$$

$$+ \sum_{i_1,i_2,i_3=1}^{m} \left[G_0^{(i_3)} L G_0^{(i_2)} \Sigma_{i_1} \left(I_{100_{\tau_{p+1},\tau_p}}^{(i_3 i_2 i_1)q} - I_{010_{\tau_{p+1},\tau_p}}^{(i_3 i_2 i_1)q} \right) + \right.$$

$$+ G_0^{(i_3)} G_0^{(i_2)} L\Sigma_{i_1} \left(I_{010_{\tau_{p+1},\tau_p}}^{(i_3 i_2 i_1)q} - I_{001_{\tau_{p+1},\tau_p}}^{(i_3 i_2 i_1)q} \right) +$$

$$\left. + G_0^{(i_3)} G_0^{(i_2)} G_0^{(i_1)} \mathbf{a} \left(\Delta I_{000_{\tau_{p+1},\tau_p}}^{(i_3 i_2 i_1)q} + I_{001_{\tau_{p+1},\tau_p}}^{(i_3 i_2 i_1)q} \right) - L G_0^{(i_3)} G_0^{(i_2)} \Sigma_{i_1} I_{100_{\tau_{p+1},\tau_p}}^{(i_3 i_2 i_1)q} \right]$$

$$
+\sum_{i_1,\ldots,i_5=1}^{m} G_0^{(i_5)}G_0^{(i_4)}G_0^{(i_3)}G_0^{(i_2)}\Sigma_{i_1}I_{00000_{\tau_{p+1},\tau_p}}^{(i_5i_4i_3i_2i_1)q}+\frac{\Delta^3}{6}L^2\mathbf{a}+
$$

$$
+\sum_{i_1,i_2=1}^{m}\Biggl[G_0^{(i_2)}G_0^{(i_1)}L\mathbf{a}\left(\frac{1}{2}I_{02_{\tau_{p+1},\tau_p}}^{(i_2i_1)q}+\Delta I_{01_{\tau_{p+1},\tau_p}}^{(i_2i_1)q}+\frac{\Delta^2}{2}I_{00_{\tau_{p+1},\tau_p}}^{(i_2i_1)q}\right)+
$$

$$
+\frac{1}{2}L^2G_0^{(i_2)}\Sigma_{i_1}I_{20_{\tau_{p+1},\tau_p}}^{(i_2i_1)q}+
$$

$$
+G_0^{(i_2)}LG_0^{(i_1)}\mathbf{a}\left(I_{11_{\tau_{p+1},\tau_p}}^{(i_2i_1)q}-I_{02_{\tau_{p+1},\tau_p}}^{(i_2i_1)q}+\Delta\left(I_{10_{\tau_{p+1},\tau_p}}^{(i_2i_1)q}-I_{01_{\tau_{p+1},\tau_p}}^{(i_2i_1)q}\right)\right)+
$$

$$
+LG_0^{(i_2)}L\Sigma_{i_1}\left(I_{11_{\tau_{p+1},\tau_p}}^{(i_2i_1)q}-I_{20_{\tau_{p+1},\tau_p}}^{(i_2i_1)q}\right)+
$$

$$
+G_0^{(i_2)}L^2\Sigma_{i_1}\left(\frac{1}{2}I_{02_{\tau_{p+1},\tau_p}}^{(i_2i_1)q}+\frac{1}{2}I_{20_{\tau_{p+1},\tau_p}}^{(i_2i_1)q}-I_{11_{\tau_{p+1},\tau_p}}^{(i_2i_1)q}\right)-
$$

$$
-LG_0^{(i_2)}G_0^{(i_1)}\mathbf{a}\left(\Delta I_{10_{\tau_{p+1},\tau_p}}^{(i_2i_1)q}+I_{11_{\tau_{p+1},\tau_p}}^{(i_2i_1)q}\right)\Biggr]+
$$

$$
+\sum_{i_1,\ldots,i_4=1}^{m}\Biggl[G_0^{(i_4)}G_0^{(i_3)}G_0^{(i_2)}G_0^{(i_1)}\mathbf{a}\left(\Delta I_{0000_{\tau_{p+1},\tau_p}}^{(i_4i_3i_2i_1)q}+I_{0001_{\tau_{p+1},\tau_p}}^{(i_4i_3i_2i_1)q}\right)+
$$

$$
+G_0^{(i_4)}G_0^{(i_3)}LG_0^{(i_2)}\Sigma_{i_1}\left(I_{0100_{\tau_{p+1},\tau_p}}^{(i_4i_3i_2i_1)q}-I_{0010_{\tau_{p+1},\tau_p}}^{(i_4i_3i_2i_1)q}\right)-
$$

$$
-LG_0^{(i_4)}G_0^{(i_3)}G_0^{(i_2)}\Sigma_{i_1}I_{1000_{\tau_{p+1},\tau_p}}^{(i_4i_3i_2i_1)q}+
$$

$$
+G_0^{(i_4)}LG_0^{(i_3)}G_0^{(i_2)}\Sigma_{i_1}\left(I_{1000_{\tau_{p+1},\tau_p}}^{(i_4i_3i_2i_1)q}-I_{0100_{\tau_{p+1},\tau_p}}^{(i_4i_3i_2i_1)q}\right)+
$$

$$
+G_0^{(i_4)}G_0^{(i_3)}G_0^{(i_2)}L\Sigma_{i_1}\left(I_{0010_{\tau_{p+1},\tau_p}}^{(i_4i_3i_2i_1)q}-I_{0001_{\tau_{p+1},\tau_p}}^{(i_4i_3i_2i_1)q}\right)\Biggr]+
$$

$$
+\sum_{i_1,\ldots,i_6=1}^{m} G_0^{(i_6)}G_0^{(i_5)}G_0^{(i_4)}G_0^{(i_3)}G_0^{(i_2)}\Sigma_{i_1}I_{000000_{\tau_{p+1},\tau_p}}^{(i_6i_5i_4i_3i_2i_1)q}. \tag{7.60}
$$

Для аппроксимации повторных стохастических интегралов Ито, входящих в правую часть (7.60), можно воспользоваться формулами из предыдущих разделов, а также формулами:

$$
I_{02_{\tau_{p+1},\tau_p}}^{*(i_1i_2)q}=-\frac{\Delta^2}{4}I_{00_{\tau_{p+1},\tau_p}}^{*(i_1i_2)q}-\Delta I_{01_{\tau_{p+1},\tau_p}}^{*(i_1i_2)q}+\frac{\Delta^3}{8}\Biggl[\frac{2}{3\sqrt{5}}\zeta_2^{(i_2)}\zeta_0^{(i_1)}+
$$

$$
+\frac{1}{3}\zeta_0^{(i_1)}\zeta_0^{(i_2)}+\sum_{i=0}^{q}\Biggl(\frac{(i+2)(i+3)\zeta_{i+3}^{(i_2)}\zeta_i^{(i_1)}-(i+1)(i+2)\zeta_i^{(i_2)}\zeta_{i+3}^{(i_1)}}{\sqrt{(2i+1)(2i+7)}(2i+3)(2i+5)}+
$$

$$
+\frac{(i^2+i-3)\zeta_{i+1}^{(i_2)}\zeta_i^{(i_1)}-(i^2+3i-1)\zeta_i^{(i_2)}\zeta_{i+1}^{(i_1)}}{\sqrt{(2i+1)(2i+3)}(2i-1)(2i+5)}\Biggr)\Biggr],
$$

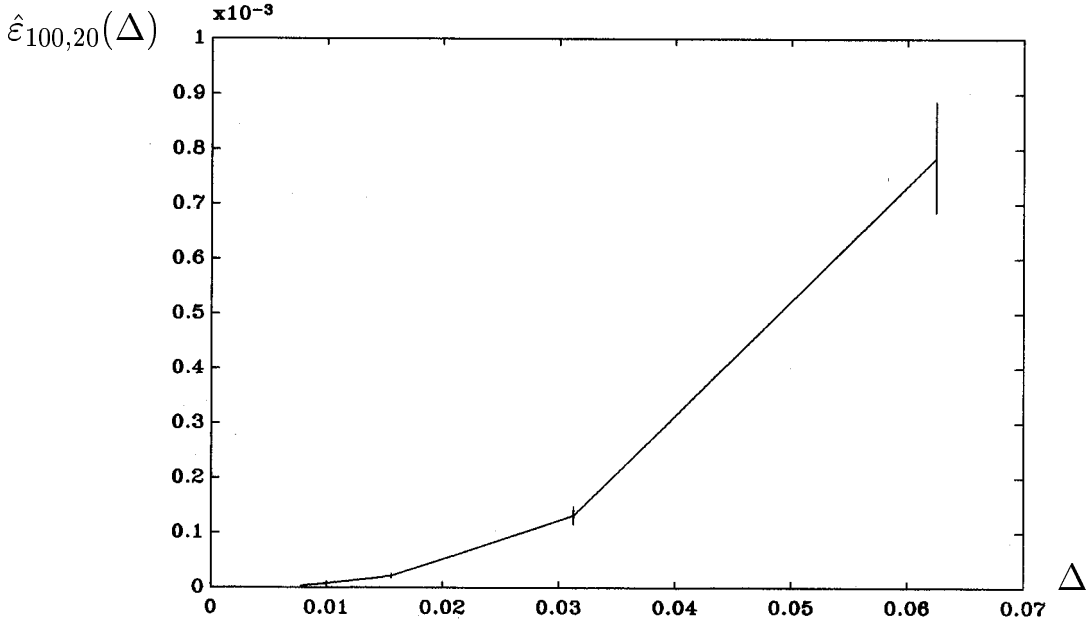

Рис. 7.9. Результат численного эксперимента 7.9.

$$I^{*(i_1i_2)q}_{20_{\tau_{p+1},\tau_p}} = -\frac{\Delta^2}{4} I^{*(i_1i_2)q}_{00_{\tau_{p+1},\tau_p}} - \Delta I^{*(i_1i_2)q}_{10_{\tau_{p+1},\tau_p}} + \frac{\Delta^3}{8}\Biggl[\frac{2}{3\sqrt{5}}\zeta_0^{(i_2)}\zeta_2^{(i_1)} +$$

$$+\frac{1}{3}\zeta_0^{(i_1)}\zeta_0^{(i_2)} + \sum_{i=0}^{q}\Biggl(\frac{(i+1)(i+2)\zeta_{i+3}^{(i_2)}\zeta_i^{(i_1)} - (i+2)(i+3)\zeta_i^{(i_2)}\zeta_{i+3}^{(i_1)}}{\sqrt{(2i+1)(2i+7)}(2i+3)(2i+5)} +$$

$$+\frac{(i^2+3i-1)\zeta_{i+1}^{(i_2)}\zeta_i^{(i_1)} - (i^2+i-3)\zeta_i^{(i_2)}\zeta_{i+1}^{(i_1)}}{\sqrt{(2i+1)(2i+3)}(2i-1)(2i+5)}\Biggr)\Biggr],$$

$$I^{*(i_1i_2)q}_{11_{\tau_{p+1},\tau_p}} = -\frac{\Delta^2}{4} I^{*(i_1i_2)q}_{00_{\tau_{p+1},\tau_p}} - \frac{\Delta}{2}\left(I^{*(i_1i_2)q}_{10_{\tau_{p+1},\tau_p}} + I^{*(i_1i_2)q}_{01_{\tau_{p+1},\tau_p}}\right) + \frac{\Delta^3}{8}\Biggl[\frac{1}{3}\zeta_1^{(i_1)}\zeta_1^{(i_2)} +$$

$$+\sum_{i=0}^{q}\Biggl(\frac{(i+1)(i+3)\left(\zeta_{i+3}^{(i_2)}\zeta_i^{(i_1)} - \zeta_i^{(i_2)}\zeta_{i+3}^{(i_1)}\right)}{\sqrt{(2i+1)(2i+7)}(2i+3)(2i+5)} +$$

$$+\frac{(i+1)^2\left(\zeta_{i+1}^{(i_2)}\zeta_i^{(i_1)} - \zeta_i^{(i_2)}\zeta_{i+1}^{(i_1)}\right)}{\sqrt{(2i+1)(2i+3)}(2i-1)(2i+5)}\Biggr)\Biggr],$$

$$I^{(i_1i_2)q}_{02_{\tau_{p+1},\tau_p}} = I^{*(i_1i_2)q}_{02_{\tau_{p+1},\tau_p}} - \frac{1}{6}\mathbf{1}_{\{i_1=i_2\}}\Delta^3;\ I^{(i_1i_2)q}_{20_{\tau_{p+1},\tau_p}} = I^{*(i_1i_2)q}_{20_{\tau_{p+1},\tau_p}} - \frac{1}{6}\mathbf{1}_{\{i_1=i_2\}}\Delta^3,$$

$$I_{11_{\tau_{p+1},\tau_p}}^{(i_1 i_2)} = I_{11_{\tau_{p+1},\tau_p}}^{*(i_1 i_2)} - \frac{1}{6}\mathbf{1}_{\{i_1=i_2\}}\Delta^3,$$

$$I_{l_1\ldots l_4\tau_{p+1},\tau_p}^{(i_1\ldots i_4)q} = \sum_{j_1,\ldots,j_4=0}^{q} C_{j_4\ldots j_1}\Biggl(\prod_{l=1}^{4}\zeta_{j_l}^{(i_l)} -$$
$$-\mathbf{1}_{\{i_1=i_2\}}\mathbf{1}_{\{j_1=j_2\}}\zeta_{j_3}^{(i_3)}\zeta_{j_4}^{(i_4)} - \mathbf{1}_{\{i_1=i_3\}}\mathbf{1}_{\{j_1=j_3\}}\zeta_{j_2}^{(i_2)}\zeta_{j_4}^{(i_4)} -$$
$$-\mathbf{1}_{\{i_1=i_4\}}\mathbf{1}_{\{j_1=j_4\}}\zeta_{j_2}^{(i_2)}\zeta_{j_3}^{(i_3)} - \mathbf{1}_{\{i_2=i_3\}}\mathbf{1}_{\{j_2=j_3\}}\zeta_{j_1}^{(i_1)}\zeta_{j_4}^{(i_4)} -$$
$$-\mathbf{1}_{\{i_2=i_4\}}\mathbf{1}_{\{j_2=j_4\}}\zeta_{j_1}^{(i_1)}\zeta_{j_3}^{(i_3)} - \mathbf{1}_{\{i_3=i_4\}}\mathbf{1}_{\{j_3=j_4\}}\zeta_{j_1}^{(i_1)}\zeta_{j_2}^{(i_2)} +$$
$$+\mathbf{1}_{\{i_1=i_2\}}\mathbf{1}_{\{j_1=j_2\}}\mathbf{1}_{\{i_3=i_4\}}\mathbf{1}_{\{j_3=j_4\}} + \mathbf{1}_{\{i_1=i_3\}}\mathbf{1}_{\{j_1=j_3\}}\mathbf{1}_{\{i_2=i_4\}}\mathbf{1}_{\{j_2=j_4\}} +$$
$$+\mathbf{1}_{\{i_1=i_4\}}\mathbf{1}_{\{j_1=j_4\}}\mathbf{1}_{\{i_2=i_3\}}\mathbf{1}_{\{j_2=j_3\}}\Biggr),$$

$$I_{000000_{\tau_{p+1},\tau_p}}^{(i_1\ldots i_6)q} = \sum_{j_1,\ldots,j_6=0}^{q} C_{j_6\ldots j_1}\Biggl(\prod_{l=1}^{6}\zeta_{j_l}^{(i_l)} -$$
$$-\mathbf{1}_{\{j_1=j_6\}}\mathbf{1}_{\{i_1=i_6\}}\zeta_{j_2}^{(i_2)}\zeta_{j_3}^{(i_3)}\zeta_{j_4}^{(i_4)}\zeta_{j_5}^{(i_5)} - \mathbf{1}_{\{j_2=j_6\}}\mathbf{1}_{\{i_2=i_6\}}\zeta_{j_1}^{(i_1)}\zeta_{j_3}^{(i_3)}\zeta_{j_4}^{(i_4)}\zeta_{j_5}^{(i_5)}$$
$$-\mathbf{1}_{\{j_3=j_6\}}\mathbf{1}_{\{i_3=i_6\}}\zeta_{j_1}^{(i_1)}\zeta_{j_2}^{(i_2)}\zeta_{j_4}^{(i_4)}\zeta_{j_5}^{(i_5)} - \mathbf{1}_{\{j_4=j_6\}}\mathbf{1}_{\{i_4=i_6\}}\zeta_{j_1}^{(i_1)}\zeta_{j_2}^{(i_2)}\zeta_{j_3}^{(i_3)}\zeta_{j_5}^{(i_5)}$$
$$-\mathbf{1}_{\{j_5=j_6\}}\mathbf{1}_{\{i_5=i_6\}}\zeta_{j_1}^{(i_1)}\zeta_{j_2}^{(i_2)}\zeta_{j_3}^{(i_3)}\zeta_{j_4}^{(i_4)} - \mathbf{1}_{\{j_1=j_2\}}\mathbf{1}_{\{i_1=i_2\}}\zeta_{j_3}^{(i_3)}\zeta_{j_4}^{(i_4)}\zeta_{j_5}^{(i_5)}\zeta_{j_6}^{(i_6)}$$
$$-\mathbf{1}_{\{j_1=j_3\}}\mathbf{1}_{\{i_1=i_3\}}\zeta_{j_2}^{(i_2)}\zeta_{j_4}^{(i_4)}\zeta_{j_5}^{(i_5)}\zeta_{j_6}^{(i_6)} - \mathbf{1}_{\{j_1=j_4\}}\mathbf{1}_{\{i_1=i_4\}}\zeta_{j_2}^{(i_2)}\zeta_{j_3}^{(i_3)}\zeta_{j_5}^{(i_5)}\zeta_{j_6}^{(i_6)}$$
$$-\mathbf{1}_{\{j_1=j_5\}}\mathbf{1}_{\{i_1=i_5\}}\zeta_{j_2}^{(i_2)}\zeta_{j_3}^{(i_3)}\zeta_{j_4}^{(i_4)}\zeta_{j_6}^{(i_6)} - \mathbf{1}_{\{j_2=j_3\}}\mathbf{1}_{\{i_2=i_3\}}\zeta_{j_1}^{(i_1)}\zeta_{j_4}^{(i_4)}\zeta_{j_5}^{(i_5)}\zeta_{j_6}^{(i_6)}$$
$$-\mathbf{1}_{\{j_2=j_4\}}\mathbf{1}_{\{i_2=i_4\}}\zeta_{j_1}^{(i_1)}\zeta_{j_3}^{(i_3)}\zeta_{j_5}^{(i_5)}\zeta_{j_6}^{(i_6)} - \mathbf{1}_{\{j_2=j_5\}}\mathbf{1}_{\{i_2=i_5\}}\zeta_{j_1}^{(i_1)}\zeta_{j_3}^{(i_3)}\zeta_{j_4}^{(i_4)}\zeta_{j_6}^{(i_6)}$$
$$-\mathbf{1}_{\{j_3=j_4\}}\mathbf{1}_{\{i_3=i_4\}}\zeta_{j_1}^{(i_1)}\zeta_{j_2}^{(i_2)}\zeta_{j_5}^{(i_5)}\zeta_{j_6}^{(i_6)} - \mathbf{1}_{\{j_3=j_5\}}\mathbf{1}_{\{i_3=i_5\}}\zeta_{j_1}^{(i_1)}\zeta_{j_2}^{(i_2)}\zeta_{j_4}^{(i_4)}\zeta_{j_6}^{(i_6)}$$
$$-\mathbf{1}_{\{j_4=j_5\}}\mathbf{1}_{\{i_4=i_5\}}\zeta_{j_1}^{(i_1)}\zeta_{j_2}^{(i_2)}\zeta_{j_3}^{(i_3)}\zeta_{j_6}^{(i_6)}$$
$$+\mathbf{1}_{\{j_1=j_2\}}\mathbf{1}_{\{i_1=i_2\}}\mathbf{1}_{\{j_3=j_4\}}\mathbf{1}_{\{i_3=i_4\}}\zeta_{j_5}^{(i_5)}\zeta_{j_6}^{(i_6)} + \mathbf{1}_{\{j_1=j_2\}}\mathbf{1}_{\{i_1=i_2\}}\mathbf{1}_{\{j_3=j_5\}}\mathbf{1}_{\{i_3=i_5\}}\zeta_{j_4}^{(i_4)}\zeta_{j_6}^{(i_6)}$$
$$+\mathbf{1}_{\{j_1=j_2\}}\mathbf{1}_{\{i_1=i_2\}}\mathbf{1}_{\{j_4=j_5\}}\mathbf{1}_{\{i_4=i_5\}}\zeta_{j_3}^{(i_3)}\zeta_{j_6}^{(i_6)} + \mathbf{1}_{\{j_1=j_3\}}\mathbf{1}_{\{i_1=i_3\}}\mathbf{1}_{\{j_2=j_4\}}\mathbf{1}_{\{i_2=i_4\}}\zeta_{j_5}^{(i_5)}\zeta_{j_6}^{(i_6)}$$
$$+\mathbf{1}_{\{j_1=j_3\}}\mathbf{1}_{\{i_1=i_3\}}\mathbf{1}_{\{j_2=j_5\}}\mathbf{1}_{\{i_2=i_5\}}\zeta_{j_4}^{(i_4)}\zeta_{j_6}^{(i_6)} + \mathbf{1}_{\{j_1=j_3\}}\mathbf{1}_{\{i_1=i_3\}}\mathbf{1}_{\{j_4=j_5\}}\mathbf{1}_{\{i_4=i_5\}}\zeta_{j_2}^{(i_2)}\zeta_{j_6}^{(i_6)}$$
$$+\mathbf{1}_{\{j_1=j_4\}}\mathbf{1}_{\{i_1=i_4\}}\mathbf{1}_{\{j_2=j_3\}}\mathbf{1}_{\{i_2=i_3\}}\zeta_{j_5}^{(i_5)}\zeta_{j_6}^{(i_6)} + \mathbf{1}_{\{j_1=j_4\}}\mathbf{1}_{\{i_1=i_4\}}\mathbf{1}_{\{j_2=j_5\}}\mathbf{1}_{\{i_2=i_5\}}\zeta_{j_3}^{(i_3)}\zeta_{j_6}^{(i_6)}$$
$$+\mathbf{1}_{\{j_1=j_4\}}\mathbf{1}_{\{i_1=i_4\}}\mathbf{1}_{\{j_3=j_5\}}\mathbf{1}_{\{i_3=i_5\}}\zeta_{j_2}^{(i_2)}\zeta_{j_6}^{(i_6)} + \mathbf{1}_{\{j_1=j_5\}}\mathbf{1}_{\{i_1=i_5\}}\mathbf{1}_{\{j_2=j_3\}}\mathbf{1}_{\{i_2=i_3\}}\zeta_{j_4}^{(i_4)}\zeta_{j_6}^{(i_6)}$$

$$
\begin{gathered}
+\mathbf{1}_{\{j_1=j_5\}}\mathbf{1}_{\{i_1=i_5\}}\mathbf{1}_{\{j_2=j_4\}}\mathbf{1}_{\{i_2=i_4\}}\zeta_{j_3}^{(i_3)}\zeta_{j_6}^{(i_6)}+\mathbf{1}_{\{j_1=j_5\}}\mathbf{1}_{\{i_1=i_5\}}\mathbf{1}_{\{j_3=j_4\}}\mathbf{1}_{\{i_3=i_4\}}\zeta_{j_2}^{(i_2)}\zeta_{j_6}^{(i_6)}\\
+\mathbf{1}_{\{j_2=j_3\}}\mathbf{1}_{\{i_2=i_3\}}\mathbf{1}_{\{j_4=j_5\}}\mathbf{1}_{\{i_4=i_5\}}\zeta_{j_1}^{(i_1)}\zeta_{j_6}^{(i_6)}+\mathbf{1}_{\{j_2=j_4\}}\mathbf{1}_{\{i_2=i_4\}}\mathbf{1}_{\{j_3=j_5\}}\mathbf{1}_{\{i_3=i_5\}}\zeta_{j_1}^{(i_1)}\zeta_{j_6}^{(i_6)}\\
+\mathbf{1}_{\{j_2=j_5\}}\mathbf{1}_{\{i_2=i_5\}}\mathbf{1}_{\{j_3=j_4\}}\mathbf{1}_{\{i_3=i_4\}}\zeta_{j_1}^{(i_1)}\zeta_{j_6}^{(i_6)}+\mathbf{1}_{\{j_6=j_1\}}\mathbf{1}_{\{i_6=i_1\}}\mathbf{1}_{\{j_3=j_4\}}\mathbf{1}_{\{i_3=i_4\}}\zeta_{j_2}^{(i_2)}\zeta_{j_5}^{(i_5)}\\
+\mathbf{1}_{\{j_6=j_1\}}\mathbf{1}_{\{i_6=i_1\}}\mathbf{1}_{\{j_3=j_5\}}\mathbf{1}_{\{i_3=i_5\}}\zeta_{j_2}^{(i_2)}\zeta_{j_4}^{(i_4)}+\mathbf{1}_{\{j_6=j_1\}}\mathbf{1}_{\{i_6=i_1\}}\mathbf{1}_{\{j_2=j_5\}}\mathbf{1}_{\{i_2=i_5\}}\zeta_{j_3}^{(i_3)}\zeta_{j_4}^{(i_4)}\\
+\mathbf{1}_{\{j_6=j_1\}}\mathbf{1}_{\{i_6=i_1\}}\mathbf{1}_{\{j_2=j_4\}}\mathbf{1}_{\{i_2=i_4\}}\zeta_{j_3}^{(i_3)}\zeta_{j_5}^{(i_5)}+\mathbf{1}_{\{j_6=j_1\}}\mathbf{1}_{\{i_6=i_1\}}\mathbf{1}_{\{j_4=j_5\}}\mathbf{1}_{\{i_4=i_5\}}\zeta_{j_2}^{(i_2)}\zeta_{j_3}^{(i_3)}\\
+\mathbf{1}_{\{j_6=j_1\}}\mathbf{1}_{\{i_6=i_1\}}\mathbf{1}_{\{j_2=j_3\}}\mathbf{1}_{\{i_2=i_3\}}\zeta_{j_4}^{(i_4)}\zeta_{j_5}^{(i_5)}+\mathbf{1}_{\{j_6=j_2\}}\mathbf{1}_{\{i_6=i_2\}}\mathbf{1}_{\{j_3=j_5\}}\mathbf{1}_{\{i_3=i_5\}}\zeta_{j_1}^{(i_1)}\zeta_{j_4}^{(i_4)}\\
+\mathbf{1}_{\{j_6=j_2\}}\mathbf{1}_{\{i_6=i_2\}}\mathbf{1}_{\{j_4=j_5\}}\mathbf{1}_{\{i_4=i_5\}}\zeta_{j_1}^{(i_1)}\zeta_{j_3}^{(i_3)}+\mathbf{1}_{\{j_6=j_2\}}\mathbf{1}_{\{i_6=i_2\}}\mathbf{1}_{\{j_3=j_4\}}\mathbf{1}_{\{i_3=i_4\}}\zeta_{j_1}^{(i_1)}\zeta_{j_5}^{(i_5)}\\
+\mathbf{1}_{\{j_6=j_2\}}\mathbf{1}_{\{i_6=i_2\}}\mathbf{1}_{\{j_1=j_5\}}\mathbf{1}_{\{i_1=i_5\}}\zeta_{j_3}^{(i_3)}\zeta_{j_4}^{(i_4)}+\mathbf{1}_{\{j_6=j_2\}}\mathbf{1}_{\{i_6=i_2\}}\mathbf{1}_{\{j_1=j_4\}}\mathbf{1}_{\{i_1=i_4\}}\zeta_{j_3}^{(i_3)}\zeta_{j_5}^{(i_5)}\\
+\mathbf{1}_{\{j_6=j_2\}}\mathbf{1}_{\{i_6=i_2\}}\mathbf{1}_{\{j_1=j_3\}}\mathbf{1}_{\{i_1=i_3\}}\zeta_{j_4}^{(i_4)}\zeta_{j_5}^{(i_5)}+\mathbf{1}_{\{j_6=j_3\}}\mathbf{1}_{\{i_6=i_3\}}\mathbf{1}_{\{j_2=j_5\}}\mathbf{1}_{\{i_2=i_5\}}\zeta_{j_1}^{(i_1)}\zeta_{j_4}^{(i_4)}\\
+\mathbf{1}_{\{j_6=j_3\}}\mathbf{1}_{\{i_6=i_3\}}\mathbf{1}_{\{j_4=j_5\}}\mathbf{1}_{\{i_4=i_5\}}\zeta_{j_1}^{(i_1)}\zeta_{j_2}^{(i_2)}+\mathbf{1}_{\{j_6=j_3\}}\mathbf{1}_{\{i_6=i_3\}}\mathbf{1}_{\{j_2=j_4\}}\mathbf{1}_{\{i_2=i_4\}}\zeta_{j_1}^{(i_1)}\zeta_{j_5}^{(i_5)}\\
+\mathbf{1}_{\{j_6=j_3\}}\mathbf{1}_{\{i_6=i_3\}}\mathbf{1}_{\{j_1=j_5\}}\mathbf{1}_{\{i_1=i_5\}}\zeta_{j_2}^{(i_2)}\zeta_{j_4}^{(i_4)}+\mathbf{1}_{\{j_6=j_3\}}\mathbf{1}_{\{i_6=i_3\}}\mathbf{1}_{\{j_1=j_4\}}\mathbf{1}_{\{i_1=i_4\}}\zeta_{j_2}^{(i_2)}\zeta_{j_5}^{(i_5)}\\
+\mathbf{1}_{\{j_6=j_3\}}\mathbf{1}_{\{i_6=i_3\}}\mathbf{1}_{\{j_1=j_2\}}\mathbf{1}_{\{i_1=i_2\}}\zeta_{j_4}^{(i_4)}\zeta_{j_5}^{(i_5)}+\mathbf{1}_{\{j_6=j_4\}}\mathbf{1}_{\{i_6=i_4\}}\mathbf{1}_{\{j_3=j_5\}}\mathbf{1}_{\{i_3=i_5\}}\zeta_{j_1}^{(i_1)}\zeta_{j_2}^{(i_2)}\\
+\mathbf{1}_{\{j_6=j_4\}}\mathbf{1}_{\{i_6=i_4\}}\mathbf{1}_{\{j_2=j_5\}}\mathbf{1}_{\{i_2=i_5\}}\zeta_{j_1}^{(i_1)}\zeta_{j_3}^{(i_3)}+\mathbf{1}_{\{j_6=j_4\}}\mathbf{1}_{\{i_6=i_4\}}\mathbf{1}_{\{j_2=j_3\}}\mathbf{1}_{\{i_2=i_3\}}\zeta_{j_1}^{(i_1)}\zeta_{j_5}^{(i_5)}\\
+\mathbf{1}_{\{j_6=j_4\}}\mathbf{1}_{\{i_6=i_4\}}\mathbf{1}_{\{j_1=j_5\}}\mathbf{1}_{\{i_1=i_5\}}\zeta_{j_2}^{(i_2)}\zeta_{j_3}^{(i_3)}+\mathbf{1}_{\{j_6=j_4\}}\mathbf{1}_{\{i_6=i_4\}}\mathbf{1}_{\{j_1=j_3\}}\mathbf{1}_{\{i_1=i_3\}}\zeta_{j_2}^{(i_2)}\zeta_{j_5}^{(i_5)}\\
+\mathbf{1}_{\{j_6=j_4\}}\mathbf{1}_{\{i_6=i_4\}}\mathbf{1}_{\{j_1=j_2\}}\mathbf{1}_{\{i_1=i_2\}}\zeta_{j_3}^{(i_3)}\zeta_{j_5}^{(i_5)}+\mathbf{1}_{\{j_6=j_5\}}\mathbf{1}_{\{i_6=i_5\}}\mathbf{1}_{\{j_3=j_4\}}\mathbf{1}_{\{i_3=i_4\}}\zeta_{j_1}^{(i_1)}\zeta_{j_2}^{(i_2)}\\
+\mathbf{1}_{\{j_6=j_5\}}\mathbf{1}_{\{i_6=i_5\}}\mathbf{1}_{\{j_2=j_4\}}\mathbf{1}_{\{i_2=i_4\}}\zeta_{j_1}^{(i_1)}\zeta_{j_3}^{(i_3)}+\mathbf{1}_{\{j_6=j_5\}}\mathbf{1}_{\{i_6=i_5\}}\mathbf{1}_{\{j_2=j_3\}}\mathbf{1}_{\{i_2=i_3\}}\zeta_{j_1}^{(i_1)}\zeta_{j_4}^{(i_4)}\\
+\mathbf{1}_{\{j_6=j_5\}}\mathbf{1}_{\{i_6=i_5\}}\mathbf{1}_{\{j_1=j_4\}}\mathbf{1}_{\{i_1=i_4\}}\zeta_{j_2}^{(i_2)}\zeta_{j_3}^{(i_3)}+\mathbf{1}_{\{j_6=j_5\}}\mathbf{1}_{\{i_6=i_5\}}\mathbf{1}_{\{j_1=j_3\}}\mathbf{1}_{\{i_1=i_3\}}\zeta_{j_2}^{(i_2)}\zeta_{j_4}^{(i_4)}\\
+\mathbf{1}_{\{j_6=j_5\}}\mathbf{1}_{\{i_6=i_5\}}\mathbf{1}_{\{j_1=j_2\}}\mathbf{1}_{\{i_1=i_2\}}\zeta_{j_3}^{(i_3)}\zeta_{j_4}^{(i_4)}\\
-\mathbf{1}_{\{j_6=j_1\}}\mathbf{1}_{\{i_6=i_1\}}\mathbf{1}_{\{j_2=j_5\}}\mathbf{1}_{\{i_2=i_5\}}\mathbf{1}_{\{j_3=j_4\}}\mathbf{1}_{\{i_3=i_4\}}\\
-\mathbf{1}_{\{j_6=j_1\}}\mathbf{1}_{\{i_6=i_1\}}\mathbf{1}_{\{j_2=j_4\}}\mathbf{1}_{\{i_2=i_4\}}\mathbf{1}_{\{j_3=j_5\}}\mathbf{1}_{\{i_3=i_5\}}\\
-\mathbf{1}_{\{j_6=j_1\}}\mathbf{1}_{\{i_6=i_1\}}\mathbf{1}_{\{j_2=j_3\}}\mathbf{1}_{\{i_2=i_3\}}\mathbf{1}_{\{j_4=j_5\}}\mathbf{1}_{\{i_4=i_5\}}\\
-\mathbf{1}_{\{j_6=j_2\}}\mathbf{1}_{\{i_6=i_2\}}\mathbf{1}_{\{j_1=j_5\}}\mathbf{1}_{\{i_1=i_5\}}\mathbf{1}_{\{j_3=j_4\}}\mathbf{1}_{\{i_3=i_4\}}\\
-\mathbf{1}_{\{j_6=j_2\}}\mathbf{1}_{\{i_6=i_2\}}\mathbf{1}_{\{j_1=j_4\}}\mathbf{1}_{\{i_1=i_4\}}\mathbf{1}_{\{j_3=j_5\}}\mathbf{1}_{\{i_3=i_5\}}\\
-\mathbf{1}_{\{j_6=j_2\}}\mathbf{1}_{\{i_6=i_2\}}\mathbf{1}_{\{j_1=j_3\}}\mathbf{1}_{\{i_1=i_3\}}\mathbf{1}_{\{j_4=j_5\}}\mathbf{1}_{\{i_4=i_5\}}\\
-\mathbf{1}_{\{j_6=j_3\}}\mathbf{1}_{\{i_6=i_3\}}\mathbf{1}_{\{j_1=j_5\}}\mathbf{1}_{\{i_1=i_5\}}\mathbf{1}_{\{j_2=j_4\}}\mathbf{1}_{\{i_2=i_4\}}\\
-\mathbf{1}_{\{j_6=j_3\}}\mathbf{1}_{\{i_6=i_3\}}\mathbf{1}_{\{j_1=j_4\}}\mathbf{1}_{\{i_1=i_4\}}\mathbf{1}_{\{j_2=j_5\}}\mathbf{1}_{\{i_2=i_5\}}
\end{gathered}
$$

$$
\begin{aligned}
&-\mathbf{1}_{\{j_3=j_6\}}\mathbf{1}_{\{i_3=i_6\}}\mathbf{1}_{\{j_1=j_2\}}\mathbf{1}_{\{i_1=i_2\}}\mathbf{1}_{\{j_4=j_5\}}\mathbf{1}_{\{i_4=i_5\}}\\
&-\mathbf{1}_{\{j_6=j_4\}}\mathbf{1}_{\{i_6=i_4\}}\mathbf{1}_{\{j_1=j_5\}}\mathbf{1}_{\{i_1=i_5\}}\mathbf{1}_{\{j_2=j_3\}}\mathbf{1}_{\{i_2=i_3\}}\\
&-\mathbf{1}_{\{j_6=j_4\}}\mathbf{1}_{\{i_6=i_4\}}\mathbf{1}_{\{j_1=j_3\}}\mathbf{1}_{\{i_1=i_3\}}\mathbf{1}_{\{j_2=j_5\}}\mathbf{1}_{\{i_2=i_5\}}\\
&-\mathbf{1}_{\{j_6=j_4\}}\mathbf{1}_{\{i_6=i_4\}}\mathbf{1}_{\{j_1=j_2\}}\mathbf{1}_{\{i_1=i_2\}}\mathbf{1}_{\{j_3=j_5\}}\mathbf{1}_{\{i_3=i_5\}}\\
&-\mathbf{1}_{\{j_6=j_5\}}\mathbf{1}_{\{i_6=i_5\}}\mathbf{1}_{\{j_1=j_4\}}\mathbf{1}_{\{i_1=i_4\}}\mathbf{1}_{\{j_2=j_3\}}\mathbf{1}_{\{i_2=i_3\}}\\
&-\mathbf{1}_{\{j_6=j_5\}}\mathbf{1}_{\{i_6=i_5\}}\mathbf{1}_{\{j_1=j_2\}}\mathbf{1}_{\{i_1=i_2\}}\mathbf{1}_{\{j_3=j_4\}}\mathbf{1}_{\{i_3=i_4\}}\\
&-\mathbf{1}_{\{j_6=j_5\}}\mathbf{1}_{\{i_6=i_5\}}\mathbf{1}_{\{j_1=j_3\}}\mathbf{1}_{\{i_1=i_3\}}\mathbf{1}_{\{j_2=j_4\}}\mathbf{1}_{\{i_2=i_4\}}\Bigg),
\end{aligned}
$$

где в $C_{j_4\ldots j_1}$ полагаем $\psi_1(\tau),\ldots,\psi_4(\tau)\equiv 1$ для аппроксимации $I^{(i_1\ldots i_4)q}_{0000_{\tau_{p+1},\tau_p}}$; полагаем $\psi_1(\tau)$, $\psi_2(\tau)$, $\psi_3(\tau)\equiv 1$, $\psi_4(\tau)\equiv t-\tau$ для аппроксимации $I^{(i_1\ldots i_4)q}_{0001_{\tau_{p+1},\tau_p}}$; полагаем $\psi_1(\tau)$, $\psi_2(\tau)$, $\psi_4(\tau)\equiv 1$, $\psi_3(\tau)\equiv t-\tau$ для аппроксимации $I^{(i_1\ldots i_4)q}_{0010_{\tau_{p+1},\tau_p}}$; полагаем $\psi_1(\tau)$, $\psi_3(\tau)$, $\psi_4(\tau)\equiv 1$, $\psi_2(\tau)\equiv t-\tau$ для аппроксимации $I^{(i_1\ldots i_4)q}_{0100_{\tau_{p+1},\tau_p}}$; полагаем $\psi_2(\tau)$, $\psi_3(\tau)$, $\psi_4(\tau)\equiv 1$, $\psi_1(\tau)\equiv t-\tau$ для аппроксимации $I^{(i_1\ldots i_4)q}_{1000_{\tau_{p+1},\tau_p}}$; в $C_{j_6\ldots j_1}$ полагаем $\psi_1(\tau),\ldots,\psi_6(\tau)\equiv 1$ для аппроксимации $I^{(i_1\ldots i_6)q}_{000000_{\tau_{p+1},\tau_p}}$.

Численный эксперимент 7.9 (рис. 7.9). *Повторить численный эксперимент* 7.4 *при* $\Delta=2^{-j}$; $j=4,5,6,7$ *для сильного численного метода порядка точности* 3.0 *вида* (7.60).

7.4 Явные одношаговые методы, основанные на разложении Тейлора–Ито в форме Вагнера и Платена

7.4.1 Метод порядка точности $r/2$. Теорема о сходимости

Предположим, что условия теоремы 4.2 выполнены. Тогда для процесса $\eta_s=R(\mathbf{x}_s,s)$, где $R:\ \Re^n\times[0,T]\to\Re^n$, а $\mathbf{x}_s$ — решение стохастического дифференциального уравнения Ито (7.18), справедливо с вероятностью 1 разложение Тейлора–Ито в форме Вагнера и Платена вида

$$
\eta_s=\eta_t+\sum_{q,k=1}^{r}\sum_{(\lambda_k,\ldots,\lambda_1)\in\mathcal{E}'_{qk}}{}^{(p_k)}Q_{\lambda_k}\ldots Q_{\lambda_1}\{\eta_t\}\overset{p_k}{\cdot}{}^{(p_k)}J_{(\lambda_k,\ldots,\lambda_1)s,t}+\tilde{H}_{r+1_{s,t}},
\tag{7.61}
$$

$$\tilde{H}_{r+1_{s,t}} = H_{r+1_{s,t}} - \mathbf{1}_{\{r=2d+1, d\in N\}} \frac{(s-t)^{\frac{1}{2}(r+1)}}{\left(\frac{1}{2}(r+1)\right)!} L^{\frac{1}{2}(r+1)} \eta_t,$$

правая часть (7.61) существует в среднеквадратическом смысле и в ней введены обозначения

$$^{(p_k)}J_{(\lambda_k\ldots\lambda_1)s,t} = \left\| J^{(i_k\ldots i_1)}_{(\lambda_k\ldots\lambda_1)s,t} \right\|^{m\lambda_1\ \ldots\ m\lambda_l}_{i_1=\lambda_1,\ldots,i_l=\lambda_l},$$

$$J^{(i_k\ldots i_1)}_{(\lambda_k\ldots\lambda_1)s,t} = \int\limits_t^s \ldots \int\limits_t^{\tau_2} d\mathbf{w}^{(i_k)}_{\tau_1} \ldots d\mathbf{w}^{(i_1)}_{\tau_k}, \tag{7.62}$$

$$\mathcal{E}'_{qk} = \mathcal{E}_{qk} \bigcup \{(\lambda_k, \ldots, \lambda_1) : \ \lambda_1 = \ldots = \lambda_k = 0 \text{ и } 2k = q+1\},$$

$$\mathcal{E}_{qk} = \{(\lambda_k, \ldots, \lambda_1) : 2k - \lambda_1 - \ldots - \lambda_k = q, \ \lambda_l \in \{1, \ 0\}, \ l = 1, \ldots, k\};$$

остальные обозначения такие же, как в теоремах 4.1 и 4.2.

Пусть $R(\mathbf{x}, t) \equiv \mathbf{x}$, $s = \tau_{p+1}$, $t = \tau_p$, $p\Delta \stackrel{\text{def}}{=} \tau_p$, $\Delta = T/N$, $p \in \{0, 1, \ldots, N\}$, $T = \tau_N$. Тогда из (7.61) получаем общее представление явной одношаговой численной схемы решения стохастического дифференциального уравнения Ито (7.18), основанной на разложении Тейлора–Ито в форме Вагнера и Платена:

$$\mathbf{y}_{\tau_{p+1}} = \mathbf{y}_{\tau_p} + \sum_{q,k=1}^{r} \sum_{(\lambda_k,\ldots,\lambda_1)\in\mathcal{E}'_{qk}} {}^{(p_k)}Q_{\lambda_k} \ldots Q_{\lambda_1} \{\mathbf{y}_{\tau_p}\}^{\ p_k} \cdot {}^{(p_k)}\hat{J}_{(\lambda_k,\ldots,\lambda_1)\tau_{p+1},\tau_p},$$

$$^{(p_k)}\hat{J}_{(\lambda_k\ldots\lambda_1)\tau_{p+1},\tau_p} = \left\| \hat{J}^{(i_k\ldots i_1)}_{(\lambda_k\ldots\lambda_1)\tau_{p+1},\tau_p} \right\|^{m\lambda_1\ \ldots\ m\lambda_l}_{i_1=\lambda_1,\ldots,i_l=\lambda_l}, \tag{7.63}$$

$\hat{J}^{(i_k\ldots i_1)}_{(\lambda_k\ldots\lambda_1)\tau_{p+1},\tau_p}$ — аппроксимация повторного стохастического интеграла Ито (7.62), причем $\hat{J}^{(i_0\ldots i_1)}_{(\lambda_0\ldots\lambda_1)\tau_{p+1},\tau_p} \stackrel{\text{def}}{=} 1$.

Положим $\mathcal{M}_g = \{(\lambda_g, \ldots, \lambda_1) : \ \lambda_l = 1, \ 0; \ l = 1, \ldots, g\}$.

Сформулируем теорему о сильной сходимости явной одношаговой численной схемы (7.63).

Теорема 7.3 [86]. *Пусть для фиксированного* $r = 2, 3, \ldots$ *выполнены следующие условия:*

1. *Для всех* $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \Re^n$; $(\lambda_k, \ldots, \lambda_1) \in \bigcup\limits_{q,k=1}^{r} \mathcal{E}'_{qk}$; $i_1, \ldots, i_k = 0, \ 1, \ldots, m$ *и* $t \in [0, T]$ *выполнено* $\left| Q^{(i_k)}_{\lambda_k} \ldots Q^{(i_1)}_{\lambda_1} \mathbf{x} - Q^{(i_k)}_{\lambda_k} \ldots Q^{(i_1)}_{\lambda_1} \mathbf{y} \right| \le K_1 \left| \mathbf{x} - \mathbf{y} \right|$.

2. *Для всех* $(\lambda_k,\ldots,\lambda_1)\in\bigcup\limits_{q,k=1}^{r}\mathcal{E}'_{qk}$; $p\in\{0,\ 1,\ldots,N-1\}$; $i_1,\ldots,i_k=0,1,\ldots,m$ *и* $i_1^2+\ldots+i_k^2>0$ *с в.* 1 *имеем* $\mathsf{M}\left\{\hat{J}^{(i_k\ldots i_1)}_{(\lambda_k\ldots\lambda_1)\tau_{p+1},\tau_p}|\mathcal{F}_{\tau_p}\right\}=0$, *и*

$$\mathsf{M}\left\{\left(J^{(i_k\ldots i_1)}_{(\lambda_k\ldots\lambda_1)\tau_{p+1},\tau_p}-\hat{J}^{(i_k\ldots i_1)}_{(\lambda_k\ldots\lambda_1)\tau_{p+1},\tau_p}\right)^2\right\}\le C^*\Delta^{r+1}. \tag{7.64}$$

3. *Для всех* $(\lambda_k,\ldots,\lambda_1)\in\bigcup\limits_{k=1}^{r}\mathcal{M}_k$; $\mathbf{x}\in\Re^n$; $i_1,\ldots,i_k=0,\ 1,\ldots,m$ *и* $t\in[0,T]$ *справедливо* $\left|Q^{(i_k)}_{\lambda_k}\ldots Q^{(i_1)}_{\lambda_1}\mathbf{x}\right|\le K_2\left(1+|\mathbf{x}|\right),\ Q^{(i_k)}_{\lambda_k}\ldots Q^{(i_1)}_{\lambda_1}\mathbf{x}\in\mathcal{L}$ (определение класса $\mathcal{L}$ дано в разд. 4.1).

4. *Для всех* $(\lambda_k,\ldots,\lambda_1)\in\mathcal{M}_r$; $\mathbf{x}\in\Re^n$; $i_1,\ldots,i_{r+1}=0,\ 1,\ldots,m$ *и* $t\in[0,T]$ *имеет место* $\left|Q^{(i_{r+1})}_{\lambda_{r+1}}\ldots Q^{(i_1)}_{\lambda_1}\mathbf{x}\right|\le K_3\left(1+|\mathbf{x}|\right)$.

5. *Случайные величины* $\mathbf{x}_0,\ \mathbf{y}_0$ — $\mathcal{F}_0$*-измеримы и* $\mathsf{M}\left\{|\mathbf{x}_0-\mathbf{y}_0|^2\right\}\le K_4\Delta^r,\ \mathsf{M}\left\{|\mathbf{x}_0|^2\right\}<\infty$.

Тогда $\mathsf{M}\left\{\sup\limits_{0\le t\le T}|\mathbf{x}_t-\mathbf{y}_t|^2\right\}\le K\Delta^r$, *где постоянные* $K,\ K_1,\ldots,K_4,\ C^*$ *не зависят от* Δ, *а* $\mathbf{y}_t$ *определяется из* (7.63) *при* $\tau_{p+1}=t$.

Из теоремы 7.3 следует, что численная схема (7.63) является явной сильной одношаговой численной схемой порядка точности $r/2$ для стохастического дифференциального уравнения Ито (7.18).

7.4.2 Метод порядка точности 1.5

Рассмотрим в условиях теоремы 7.3 при $r=3$ явный сильный одношаговый численный метод порядка точности 1.5, основанный на разложении Тейлора–Ито в форме Вагнера и Платена и вытекающий из (7.63) при $r=3$:

$$\mathbf{y}_{p+1}=\mathbf{y}_p+\sum_{i_1=1}^{m}\Sigma_{i_1}\hat{J}^{(i_1)}_{(1)\tau_{p+1},\tau_p}+\Delta\mathbf{a}+\frac{\Delta^2}{2}L\mathbf{a}+\sum_{i_1,i_2=1}^{m}G_0^{(i_2)}\Sigma_{i_1}\hat{J}^{(i_2i_1)}_{(11)\tau_{p+1},\tau_p}+$$

$$+\sum_{i_1=1}^{m}L\Sigma_{i_1}\hat{J}^{(i_1)}_{(01)\tau_{p+1},\tau_p}+\sum_{i_1=1}^{m}G_0^{(i_1)}\mathbf{a}\hat{J}^{(i_1)}_{(10)\tau_{p+1},\tau_p}+\sum_{i_1,i_2,i_3=1}^{m}G_0^{(i_3)}G_0^{(i_2)}\Sigma_{i_1}\hat{J}^{(i_3i_2i_1)}_{(111)\tau_{p+1},\tau_p}. \tag{7.65}$$

Здесь и далее $\mathbf{a}(\mathbf{y}_p,\tau_p)\stackrel{\text{def}}{=}\mathbf{a}$; $\Sigma_i(\mathbf{y}_p,\tau_p)\stackrel{\text{def}}{=}\Sigma_i$; $\mathbf{y}_{\tau_p}\stackrel{\text{def}}{=}\mathbf{y}_p$.

З а м е ч а н и е 7.1. *Следует отметить, что при* $r=2$ *из* (7.63) *получим метод Г.Н. Мильштейна, который был подробно рассмотрен ранее.*

7.4.3 Метод порядка точности 2.0

Рассмотрим в условиях теоремы 7.3 при $r = 4$ явный сильный одношаговый численный метод порядка точности 2.0, основанный на разложении Тейлора–Ито в форме Вагнера и Платена и вытекающий из (7.63) при $r = 4$:

$$\mathbf{y}_{p+1} = \mathbf{y}_p + \sum_{i_1=1}^{m} \Sigma_{i_1} \hat{J}^{(i_1)}_{(1)\tau_{p+1},\tau_p} + \mathbf{a}\Delta + \sum_{i_1,i_2=1}^{m} G_0^{(i_2)} \Sigma_{i_1} \hat{J}^{(i_2 i_1)}_{(11)\tau_{p+1},\tau_p} +$$

$$+ \sum_{i_1=1}^{m} L\Sigma_{i_1} \hat{J}^{(i_1)}_{(01)\tau_{p+1},\tau_p} + \sum_{i_1=1}^{m} G_0^{(i_1)} \mathbf{a} \hat{J}^{(i_1)}_{(10)\tau_{p+1},\tau_p} + \sum_{i_1,i_2,i_3=1}^{m} G_0^{(i_3)} G_0^{(i_2)} \Sigma_{i_1} \hat{J}^{(i_3 i_2 i_1)}_{(111)\tau_{p+1},\tau_p}$$

$$+ \sum_{i_1,i_2=1}^{m} \Bigl[G_0^{(i_2)} L\Sigma_{i_1} \hat{J}^{(i_2 i_1)}_{(101)\tau_{p+1},\tau_p} + L G_0^{(i_2)} \Sigma_{i_1} \hat{J}^{(i_2 i_1)}_{(011)\tau_{p+1},\tau_p} +$$

$$+ G_0^{(i_2)} G_0^{(i_1)} \mathbf{a} \hat{J}^{(i_2 i_1)}_{(110)\tau_{p+1},\tau_p} \Bigr] + L\mathbf{a}\frac{\Delta^2}{2} + \sum_{i_1,\ldots,i_4=1}^{m} G_0^{(i_4)} G_0^{(i_3)} G_0^{(i_2)} \Sigma_{i_1} \hat{J}^{(i_4 i_3 i_2 i_1)}_{(1111)\tau_{p+1},\tau_p}, \tag{7.66}$$

где сохранен смысл обозначений, введенных в (7.65).

7.4.4 Метод порядка точности 2.5

Рассмотрим в условиях теоремы 7.3 при $r = 5$ явный сильный одношаговый численный метод порядка точности 2.5, основанный на разложении Тейлора–Ито в форме Вагнера и Платена:

$$\mathbf{y}_{p+1} = \mathbf{y}_p + \sum_{i_1=1}^{m} \Sigma_{i_1} \hat{J}^{(i_1)}_{(1)\tau_{p+1},\tau_p} + \mathbf{a}\Delta + \sum_{i_1,i_2=1}^{m} G_0^{(i_2)} \Sigma_{i_1} \hat{J}^{(i_2 i_1)}_{(11)\tau_{p+1},\tau_p} +$$

$$+ \sum_{i_1=1}^{m} L\Sigma_{i_1} \hat{J}^{(i_1)}_{(01)\tau_{p+1},\tau_p} \sum_{i_1=1}^{m} G_0^{(i_1)} \mathbf{a} \hat{J}^{(i_1)}_{(10)\tau_{p+1},\tau_p} + \sum_{i_1,i_2,i_3=1}^{m} G_0^{(i_3)} G_0^{(i_2)} \Sigma_{i_1} \hat{J}^{(i_3 i_2 i_1)}_{(111)\tau_{p+1},\tau_p} +$$

$$+ \sum_{i_1,i_2=1}^{m} \Bigl[G_0^{(i_2)} L\Sigma_{i_1} \hat{J}^{(i_2 i_1)}_{(101)\tau_{p+1},\tau_p} + L G_0^{(i_2)} \Sigma_{i_1} \hat{J}^{(i_2 i_1)}_{(011)\tau_{p+1},\tau_p} + G_0^{(i_2)} G_0^{(i_1)} \mathbf{a} \hat{J}^{(i_2 i_1)}_{(110)\tau_{p+1},\tau_p} \Bigr]$$

$$+ L\mathbf{a}\frac{\Delta^2}{2} + L^2\mathbf{a}\frac{\Delta^3}{6} + \sum_{i_1,\ldots,i_4=1}^{m} G_0^{(i_4)} G_0^{(i_3)} G_0^{(i_2)} \Sigma_{i_1} \hat{J}^{(i_4 i_3 i_2 i_1)}_{(1111)\tau_{p+1},\tau_p} +$$

$$+ \sum_{i_1=1}^{m} \Bigl[G_0^{(i_1)} L\mathbf{a} \hat{J}^{(i_1)}_{(100)\tau_{p+1},\tau_p} + L G_0^{(i_1)} \mathbf{a} \hat{J}^{(i_1)}_{(010)\tau_{p+1},\tau_p} + L L\Sigma_{i_1} \hat{J}^{(i_1)}_{(001)\tau_{p+1},\tau_p} \Bigr] +$$

$$+ \sum_{i_1,i_2,i_3=1}^{m} \Bigl[G_0^{(i_3)} G_0^{(i_2)} G_0^{(i_1)} \mathbf{a} \hat{J}^{(i_3 i_2 i_1)}_{(1110)\tau_{p+1},\tau_p} + G_0^{(i_3)} G_0^{(i_2)} L\Sigma_{i_1} \hat{J}^{(i_3 i_2 i_1)}_{(1101)\tau_{p+1},\tau_p} +$$

$$+G_0^{(i_3)}LG_0^{(i_2)}\Sigma_{i_1)}\hat{J}^{(i_3i_2i_1)}_{(1011)\tau_{p+1},\tau_p}+LG_0^{(i_3)}G_0^{(i_2)}\Sigma_{i_1}\hat{J}^{(i_3i_2i_1)}_{(0111)\tau_{p+1},\tau_p}\Bigg]+$$

$$+\sum_{i_1,\ldots,i_5=1}^{m}G_0^{(i_5)}G_0^{(i_4)}G_0^{(i_3)}G_0^{(i_2)}\Sigma_{i_1}\hat{J}^{(i_5i_4i_3i_2i_1)}_{(11111)\tau_{p+1},\tau_p}, \qquad (7.67)$$

где сохранен смысл обозначений, введенных в (7.65).

В заключение данного раздела рассмотрим некоторые особенности численных методов, основанных на унифицированном разложении Тейлора–Ито и разложении Тейлора–Ито в форме Вагнера и Платена.

Ранее отмечалось, что численные методы, основанные на унифицированном разложении Тейлора–Ито, содержат меньшее число различных повторных стохастических интегралов, нежели методы, основанные на разложении Тейлора–Ито в форме Вагнера и Платена. Затраты на вычисление коэффициентов Фурье аппроксимаций повторных стохастических интегралов $J^{(i_k\ldots i_1)}_{(\lambda_k\ldots\lambda_1)\tau_{p+1},\tau_p}$, входящих в численные методы, основанные на разложении Тейлора–Ито в форме Вагнера и Платена и полученные с помощью метода, основанного на кратных рядах Фурье, несколько меньше, чем аналогичные затраты для повторных стохастических интегралов $I^{(i_1\ldots i_k)}_{l_1\ldots l_k\tau_{p+1},\tau_p}$ из численных методов, основанных на унифицированном разложении Тейлора–Ито. Так, для численной реализации явного сильного одношагового метода порядка точности 2.5, основанного на унифицированном разложении Тейлора–Ито, в предположении, что $\phi_0(t)\equiv\frac{1}{\sqrt{\Delta}}$, требуется вычисление одиннадцати различных коэффициентов Фурье: $C^1_{j_1}, C^{00}_{j_2j_1}, C^{000}_{j_3j_2j_1}$, $C^{01}_{j_2j_1}, C^{10}_{j_2j_1}, C^{0000}_{j_4j_3j_2j_1}, C^2_{j_1}$, $C^{100}_{j_3j_2j_1}, C^{010}_{j_3j_2j_1}, C^{001}_{j_3j_2j_1}, C^{00000}_{j_5j_4j_3j_2j_1}$. Здесь коэффициент Фурье $C^{l_k\ldots l_1}_{j_k\ldots j_1}$ соответствует разложению в кратный ряд Фурье функции вида:

$$K_{l_k\ldots l_1}(t_1,\ldots,t_k)=\begin{cases}(t-t_k)^{l_1}\ldots(t-t_1)^{l_k},\ t_1<\ldots<t_k\\ 0,\ \text{иначе}\end{cases},$$

где $t_1,\ldots,t_k\in[t,T]$.

Для численной реализации аналогичного численного метода, основанного на разложении Тейлора–Ито в форме Вагнера и Платена, требуется вычисление четырех коэффициентов Фурье: $C_{j_2j_1}, C_{j_3j_2j_1}, C_{j_4j_3j_2j_1}$, $C_{j_5j_4j_3j_2j_1}$. Здесь коэффициент Фурье $C_{j_k\ldots j_1}$ соответствует разложению в кратный ряд Фурье функции вида:

$$K(t_1,\ldots,t_k)=\begin{cases}1,\ t_1<\ldots<t_k\\ 0,\ \text{иначе}\end{cases};\ t_1,\ldots,t_k\in[t,T].$$

Однако, эти коэффициенты вычисляются один раз заранее, а затем используются при численном моделировании повторных стохастиче-

ских интегралов. Следует также отметить, что аппроксимации указанных повторных стохастических интегралов универсальны для любых стохастических дифференциальных уравнений Ито и могут быть построены опять таки заранее (см. главу 6). Поэтому на стадии численной реализации возможно удобнее иметь дело с меньшим числом различных повторных стохастических интегралов.

7.5 Явные одношаговые методы, основанные на разложении Тейлора–Стратоновича в форме Клоедена и Платена

7.5.1 Метод порядка точности $r/2$. Теорема о сходимости

Пусть процесс $\eta_s = R(\mathbf{x}_s, s)$, где $R:\ \Re^n \times [0,T] \to \Re^n$; $\mathbf{x}_s$ — решение стохастического дифференциального уравнения Ито (7.18), удовлетворяет условиям теоремы 4.9. Тогда при всех $s,t \in [0,T]:\ s>t$, с вероятностью 1 справедливо разложение

$$\eta_s = \eta_t + \sum_{q,k=1}^{r} \sum_{(\lambda_k,\ldots,\lambda_1)\in\mathcal{E}_{qk}} {}^{(p_k)}D_{\lambda_k}\ldots D_{\lambda_1}\{\eta_t\}\overset{p_k}{\cdot}{}^{(p_k)}J^*_{(\lambda_k\ldots\lambda_1)s,t}+$$

$$+\mathbf{1}_{\{r=2d+1,d\in N\}}\frac{(s-t)^{\frac{1}{2}(r+1)}}{\left(\frac{1}{2}(r+1)\right)!}L^{\frac{1}{2}(r+1)}\eta_t + H''_{r+1_{s,t}}, \tag{7.68}$$

где

$$H''_{r+1_{s,t}} = H_{r+1_{s,t}} - \mathbf{1}_{\{r=2d+1,d\in N\}}\frac{(s-t)^{\frac{1}{2}(r+1)}}{\left(\frac{1}{2}(r+1)\right)!}L^{\frac{1}{2}(r+1)}\eta_t,$$

правая часть (7.68) существует в среднеквадратическом смысле и в ней введены следующие обозначения:

$$\mathcal{E}_{qk} = \{(\lambda_k,\ldots,\lambda_1):\ 2k-\lambda_1-\ldots-\lambda_k = q, \lambda_l\in\{1,\ 0\},\ l=1,\ldots,k\};$$

$${}^{(p_k)}J^*_{(\lambda_k\ldots\lambda_1)s,t} = \left\|J^{*(i_k\ldots i_1)}_{(\lambda_k\ldots\lambda_1)s,t}\right\|^{m\lambda_1\ \ldots\ m\lambda_k}_{i_1=\lambda_1,\ldots,i_l=\lambda_k};$$

$$J^{*(i_k\ldots i_1)}_{(\lambda_k\ldots\lambda_1)s,t} = \int\limits_t^{*s}\ldots\int\limits_t^{*t_2} d\mathbf{w}^{(i_k)}_{t_1}\ldots d\mathbf{w}^{(i_1)}_{t_k}; \tag{7.69}$$

$\lambda_l = 1$ или $\lambda_l = 0$; $D^{(i_l)}_{\lambda_l} = \bar{L}$ и $i_l = 0$ при $\lambda_l = 0$; $D^{(i_l)}_{\lambda_l} = G^{(i_l)}_0$ и $i_l = 1,\ldots,m$ при $\lambda_l = 1$; $p_l = \sum\limits_{j=1}^{l}\lambda_j$; $\bar{L} = L - \frac{1}{2}\sum\limits_{j=1}^{m}G^{(j)}_0 G^{(j)}_0$; $\mathbf{w}^{(i)}_\tau = \mathbf{f}^{(i)}_\tau$ при

$i = 1, \ldots, m$ и $\mathbf{w}_\tau^{(0)} = \tau$; операторы L и $G_0^{(i)}$ $(i = 1, \ldots, m)$ такие же, как в лемме 4.1.

Пусть $R(\mathbf{x}, t) \equiv \mathbf{x}$, $s = \tau_{p+1}$, $t = \tau_p$, $\{\tau_p\}_{p=0}^N$ — разбиение промежутка $[0, T]$, для которого выполняется условие (7.1). Тогда из (7.68) получаем общее представление явной сильной численной схемы решения стохастического дифференциального уравнения Ито (7.18)

$$\mathbf{y}_{\tau_{p+1}} = \mathbf{y}_{\tau_p} + \sum_{q,k=1}^{r} \sum_{(\lambda_k,\ldots,\lambda_1)\in\mathcal{E}_{qk}} {}^{(p_k)}D_{\lambda_k}\ldots D_{\lambda_1}\{\mathbf{y}_{\tau_p}\} \overset{p_k}{\cdot} {}^{(p_k)}\hat{J}^*_{(\lambda_k\ldots\lambda_1)\tau_{p+1},\tau_p} +$$

$$+\mathbf{1}_{\{r=2d+1, d\in N\}} \frac{(\tau_{p+1}-\tau_p)^{\frac{1}{2}(r+1)}}{\left(\frac{1}{2}(r+1)\right)!} L^{\frac{1}{2}(r+1)}\mathbf{y}_{\tau_p}, \tag{7.70}$$

где ${}^{(p_k)}\hat{J}^*_{(\lambda_k\ldots\lambda_1)\tau_{p+1},\tau_p} = \left\| \hat{J}^{*(i_k\ldots i_1)}_{(\lambda_k\ldots\lambda_1)\tau_{p+1},\tau_p} \right\|_{i_1=\lambda_1,\ldots,i_l=\lambda_k}^{m\lambda_1\ \ldots\ m\lambda_k}$; $\hat{J}^{*(i_k\ldots i_1)}_{(\lambda_k\ldots\lambda_1)\tau_{p+1},\tau_p}$ — аппроксимация повторного стохастического интеграла Стратоновича.

Далее для простоты положим $p\Delta \stackrel{\text{def}}{=} \tau_p$, $\Delta = T/N$, $p \in \{0, 1, \ldots, N\}$, $T = \tau_N$.

Обозначим $\mathcal{M}_k = \{(\lambda_k, \ldots, \lambda_1) : \ \lambda_l = 1 \text{ или } \lambda_l = 0, l = 1, \ldots, k\}$.

Теорема 7.4. *Пусть для $R(\mathbf{x}, t) \equiv \mathbf{x}$ и $r = 2, 3, \ldots$ выполнены следующие условия:*

1. *Для всех $(\lambda_k, \ldots, \lambda_1) \in \bigcup\limits_{k=1}^{r} \mathcal{M}_k$ имеем $Q_{\lambda_k}^{(i_k)} \ldots Q_{\lambda_1}^{(i_1)} R(\mathbf{x}, \tau) \in \mathcal{L}$.*

2. *Для всех $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \Re^n$; $\tau, \theta \in [0, T]$; $(\lambda_k, \ldots, \lambda_1) \in \bigcup\limits_{k=1}^{r+1} \mathcal{M}_k$ и некоторого $\nu > 0$ справедливы неравенства*

$$|Q_{\lambda_k}^{(i_k)} \ldots Q_{\lambda_1}^{(i_1)} R(\mathbf{x}, \tau) - Q_{\lambda_k}^{(i_k)} \ldots Q_{\lambda_1}^{(i_1)} R(\mathbf{y}, \tau)| \le K_1|\mathbf{x} - \mathbf{y}|,$$

$$|Q_{\lambda_k}^{(i_k)} \ldots Q_{\lambda_1}^{(i_1)} R(\mathbf{x}, \tau)| \le K_2(1 + |\mathbf{x}|),$$

$$|Q_{\lambda_k}^{(i_k)} \ldots Q_{\lambda_1}^{(i_1)} R(\mathbf{x}, \tau) - Q_{\lambda_k}^{(i_k)} \ldots Q_{\lambda_1}^{(i_1)} R(\mathbf{x}, \theta)| \le K_3|\tau - \theta|^\nu (1 + |\mathbf{x}|).$$

3. *Для всех $(\lambda_k, \ldots, \lambda_1) \in \bigcup\limits_{q,k=1}^{r} \mathcal{E}_{qk}$; $p \in \{0,\ 1, \ldots, N-1\}$; $i_1, \ldots, i_k = 0, 1, \ldots, m$ и $i_1^2 + \ldots + i_k^2 > 0$ с в. 1 $\mathsf{M}\left\{ J^{*(i_k\ldots i_1)}_{(\lambda_k\ldots\lambda_1)\tau_{p+1},\tau_p} - \hat{J}^{*(i_k\ldots i_1)}_{(\lambda_k\ldots\lambda_1)\tau_{p+1},\tau_p} | \mathcal{F}_{\tau_p} \right\} = 0$, и выполнено неравенство*

$$\mathsf{M}\left\{ \left(J^{*(i_k\ldots i_1)}_{(\lambda_k\ldots\lambda_1)\tau_{p+1},\tau_p} - \hat{J}^{*(i_k\ldots i_1)}_{(\lambda_k\ldots\lambda_1)\tau_{p+1},\tau_p} \right)^2 \right\} \le C'\Delta^{r+1}. \tag{7.71}$$

4. *Случайные величины $\mathbf{x}_0, \mathbf{y}_0$ — $\mathcal{F}_0$-измеримы и $\mathsf{M}\left\{|\mathbf{x}_0 - \mathbf{y}_0|^2\right\} \le K_4\Delta^r$, $\mathsf{M}\left\{|\mathbf{x}_0|^8\right\} < \infty$, где постоянные $K_1, \ldots, K_4$, C' не зависят от Δ.*

Тогда $\mathsf{M}\left\{\sup\limits_{0\le t\le T}|\mathbf{x}_t-\mathbf{y}_t|^2\right\}\le K\Delta^r$, *где постоянная* K *не зависит от* Δ, *а* $\mathbf{y}_t$ *определяется из* (7.70) *при* $\tau_{p+1}=t$.

Доказательство похожего утверждения можно найти в монографии [86].

Таким образом, если условия теоремы 7.4 выполнены, то численный метод (7.70) является явным одношаговым сильным численным методом порядка точности $r/2$.

Аппроксимации повторных стохастических интегралов Стратоновича, входящие в (7.70), могут быть получены с помощью формул связи повторных стохастических интегралов Ито и Стратоновича (см. главу 3) и теоремы 5.1.

7.5.2 Метод порядка точности 1.0

Пусть условия теоремы 7.4 выполнены при $r=2$. Тогда из (7.70) при $r=2$ получаем следующий явный одношаговый сильный численный метод порядка точности 1.0:

$$\mathbf{y}_{p+1}=\mathbf{y}_p+\sum_{i_1=1}^{m}\Sigma_{i_1}\hat{J}^{*(i_1)}_{(1)\tau_{p+1},\tau_p}+\bar{\mathbf{a}}\Delta+\sum_{i_1,i_2=1}^{m}G_0^{(i_2)}\Sigma_{i_1}\hat{J}^{*(i_2i_1)}_{(11)\tau_{p+1},\tau_p}.$$

Здесь и далее $\bar{\mathbf{a}}(\mathbf{x},t)=\mathbf{a}(\mathbf{x},t)-\frac{1}{2}\sum\limits_{i_1=1}^{m}G_0^{(i_1)}\Sigma_{i_1}(\mathbf{x},t)$; $\Sigma_i(\mathbf{x},t)$ — i-й столбец матрицы $\Sigma(\mathbf{x},t)$; все функции в правой части вычислены в точке $(\mathbf{y}_p,\tau_p)$; $\mathbf{y}_{\tau_p}\stackrel{\mathrm{def}}{=}\mathbf{y}_p$.

7.5.3 Метод порядка точности 1.5

Предположим, что условия теоремы 7.4 выполнены при $r=3$. Тогда из (7.70) при $r=3$ получим явный одношаговый сильный численный метод порядка точности 1.5:

$$\mathbf{y}_{p+1}=\mathbf{y}_p+\sum_{i_1=1}^{m}\Sigma_{i_1}\hat{J}^{*(i_1)}_{(1)\tau_{p+1},\tau_p}+\bar{\mathbf{a}}\Delta+\frac{\Delta^2}{2}L\mathbf{a}+\sum_{i_1,i_2=1}^{m}G_0^{(i_2)}\Sigma_{i_1}\hat{J}^{*(i_2i_1)}_{(11)\tau_{p+1},\tau_p}+$$

$$+\sum_{i_1=1}^{m}\bar{L}\Sigma_{i_1}\hat{J}^{*(i_1)}_{(01)\tau_{p+1},\tau_p}+\sum_{i_1=1}^{m}G_0^{(i_1)}\bar{\mathbf{a}}\hat{J}^{*(i_1)}_{(10)\tau_{p+1},\tau_p}+\sum_{i_1,i_2,i_3=1}^{m}G_0^{(i_3)}G_0^{(i_2)}\Sigma_{i_1}\hat{J}^{*(i_3i_2i_1)}_{(111)\tau_{p+1},\tau_p}. \tag{7.72}$$

7.5.4 Метод порядка точности 2.0

Пусть условия теоремы 7.4 выполнены при $r = 4$. Тогда из (7.70) при $r = 4$ получаем явный одношаговый сильный численный метод порядка точности 2.0:

$$\mathbf{y}_{p+1} = \mathbf{y}_p + \sum_{i_1=1}^{m} \Sigma_{i_1} \hat{J}^{*(i_1)}_{(1)\tau_{p+1},\tau_p} + \bar{\mathbf{a}}\Delta + \sum_{i_1,i_2=1}^{m} G_0^{(i_2)} \Sigma_{i_1} \hat{J}^{*(i_2 i_1)}_{(11)\tau_{p+1},\tau_p} +$$

$$+ \sum_{i_1=1}^{m} \bar{L}\Sigma_{i_1} \hat{J}^{*(i_1)}_{(01)\tau_{p+1},\tau_p} + \sum_{i_1=1}^{m} G_0^{(i_1)} \bar{\mathbf{a}} \hat{J}^{*(i_1)}_{(10)\tau_{p+1},\tau_p} + \sum_{i_1,i_2,i_3=1}^{m} G_0^{(i_3)} G_0^{(i_2)} \Sigma_{i_1} \hat{J}^{*(i_3 i_2 i_1)}_{(111)\tau_{p+1},\tau_p} +$$

$$+ \sum_{i_1,i_2=1}^{m} \left[G_0^{(i_2)} \bar{L}\Sigma_{i_1} \hat{J}^{*(i_2 i_1)}_{(101)\tau_{p+1},\tau_p} + \bar{L} G_0^{(i_2)} \Sigma_{i_1} \hat{J}^{*(i_2 i_1)}_{(011)\tau_{p+1},\tau_p} + G_0^{(i_2)} G_0^{(i_1)} \bar{\mathbf{a}} \hat{J}^{*(i_2 i_1)}_{(110)\tau_{p+1},\tau_p} \right]$$

$$+ \bar{L}\bar{\mathbf{a}} \frac{\Delta^2}{2} + \sum_{i_1,\ldots,i_4=1}^{m} G_0^{(i_4)} G_0^{(i_3)} G_0^{(i_2)} \Sigma_{i_1} \hat{J}^{*(i_4 i_3 i_2 i_1)}_{(1111)\tau_{p+1},\tau_p}.$$

7.5.5 Метод порядка точности 2.5

Предположим, что условия теоремы 7.4 выполнены при $r = 5$. Тогда из (7.70) при $r = 5$ получим явный одношаговый сильный численный метод порядка точности 2.5:

$$\mathbf{y}_{p+1} = \mathbf{y}_p + \sum_{i_1=1}^{m} \Sigma_{i_1} \hat{J}^{*(i_1)}_{(1)\tau_{p+1},\tau_p} + \bar{\mathbf{a}}\Delta + \sum_{i_1,i_2=1}^{m} G_0^{(i_2)} \Sigma_{i_1} \hat{J}^{*(i_2 i_1)}_{(11)\tau_{p+1},\tau_p} +$$

$$+ \sum_{i_1=1}^{m} \bar{L}\Sigma_{i_1} \hat{J}^{*(i_1)}_{(01)\tau_{p+1},\tau_p} + \sum_{i_1=1}^{m} G_0^{(i_1)} \bar{\mathbf{a}} \hat{J}^{*(i_1)}_{(10)\tau_{p+1},\tau_p} + \sum_{i_1,i_2,i_3=1}^{m} G_0^{(i_3)} G_0^{(i_2)} \Sigma_{i_1} \hat{J}^{*(i_3 i_2 i_1)}_{(111)\tau_{p+1},\tau_p} +$$

$$+ \sum_{i_1,i_2=1}^{m} \left[G_0^{(i_2)} \bar{L}\Sigma_{i_1} \hat{J}^{*(i_2 i_1)}_{(101)\tau_{p+1},\tau_p} + \bar{L} G_0^{(i_2)} \Sigma_{i_1} \hat{J}^{*(i_2 i_1)}_{(011)\tau_{p+1},\tau_p} + G_0^{(i_2)} G_0^{(i_1)} \bar{\mathbf{a}} \hat{J}^{*(i_2 i_1)}_{(110)\tau_{p+1},\tau_p} \right]$$

$$+ \bar{L}\bar{\mathbf{a}} \frac{\Delta^2}{2} + L^2 \mathbf{a} \frac{\Delta^3}{6} + \sum_{i_1,\ldots,i_4=1}^{m} G_0^{(i_4)} G_0^{(i_3)} G_0^{(i_2)} \Sigma_{i_1} \hat{J}^{*(i_4 i_3 i_2 i_1)}_{(1111)\tau_{p+1},\tau_p} +$$

$$+ \sum_{i_1=1}^{m} \left[G_0^{(i_1)} \bar{L}\bar{\mathbf{a}} \hat{J}^{*(i_1)}_{(100)\tau_{p+1},\tau_p} + \bar{L} G_0^{(i_1)} \bar{\mathbf{a}} \hat{J}^{*(i_1)}_{(010)\tau_{p+1},\tau_p} + \bar{L}\bar{L}\Sigma_{i_1} \hat{J}^{*(i_1)}_{(001)\tau_{p+1},\tau_p} \right] +$$

$$+ \sum_{i_1,i_2,i_3=1}^{m} \left[G_0^{(i_3)} G_0^{(i_2)} G_0^{(i_1)} \bar{\mathbf{a}} \hat{J}^{*(i_3 i_2 i_1)}_{(1110)\tau_{p+1},\tau_p} + G_0^{(i_3)} G_0^{(i_2)} \bar{L}\Sigma_{i_1} \hat{J}^{*(i_3 i_2 i_1)}_{(1101)\tau_{p+1},\tau_p} + \right.$$

$$\left. + G_0^{(i_3)} \bar{L} G_0^{(i_2)} \Sigma_{i_1)} \hat{J}^{*(i_3 i_2 i_1)}_{(1011)\tau_{p+1},\tau_p} + \bar{L} G_0^{(i_3)} G_0^{(i_2)} \Sigma_{i_1} \hat{J}^{*(i_3 i_2 i_1)}_{(0111)\tau_{p+1},\tau_p} \right] +$$

$$+\sum_{i_1,\ldots,i_5=1}^{m} G_0^{(i_5)} G_0^{(i_4)} G_0^{(i_3)} G_0^{(i_2)} \Sigma_{i_1} \hat{J}^{*(i_5 i_4 i_3 i_2 i_1)}_{(11111)\tau_{p+1},\tau_p}. \tag{7.73}$$

З а м е ч а н и е 7.2. *Отметим, что если в качестве полной ортонормированной системы* $\{\phi_j(s)\}_{j=0}^{\infty}$ *в пространстве* $L_2([\tau_p,\tau_{p+1}])$ *взята, например, тригонометрическая или полиномиальная система, то* $\zeta_j^{(0)}=0$ *при* $j\neq 0$ *и* $\zeta_0^{(0)}=\sqrt{\Delta}$.

7.6 Явные одношаговые методы, основанные на унифицированном разложении Тейлора–Стратоновича

7.6.1 Метод порядка точности $r/2$. Теорема о сходимости

Пусть процесс $\eta_s=R(\mathbf{x}_s,s)$, где $R:\Re^n\times[0,T]\to\Re^n$; $\mathbf{x}_s$ — решение стохастического дифференциального уравнения Ито (7.18), удовлетворяет условиям теоремы 4.10. Тогда при всех $s,t\in[0,T]:s>t$, справедливо унифицированное разложение Тейлора–Стратоновича вида

$$\eta_s=\eta_t+\sum_{q=1}^{r}\sum_{(k,j,l_1,\ldots,l_k)\in\mathcal{D}_q}\frac{(s-t)^j}{j!}{}^{(k)}\bar{G}_{l_k}\ldots\bar{G}_{l_1}\bar{L}^j\{\eta_t\}\overset{k}{\cdot}{}^{(k)}I^*_{l_k\ldots l_1 s,t}+$$

$$+\mathbf{1}_{\{r=2d+1,d\in N\}}\frac{(s-t)^{\frac{1}{2}(r+1)}}{\left(\frac{1}{2}(r+1)\right)!}L^{\frac{1}{2}(r+1)}\eta_t+\bar{H}'_{r+1_{s,t}}\ \text{с в.1}, \tag{7.74}$$

где

$$\bar{H}'_{r+1_{s,t}}=\bar{H}_{r+1_{s,t}}-\mathbf{1}_{\{r=2d+1,d\in N\}}\frac{(s-t)^{\frac{1}{2}(r+1)}}{\left(\frac{1}{2}(r+1)\right)!}L^{\frac{1}{2}(r+1)}\eta_t,$$

правая часть существует в среднеквадратическом смысле и в ней введены следующие обозначения:

$${}^{(k)}I^*_{l_k\ldots l_1 s,t}=\left\|I^{*(i_k\ldots i_1)}_{l_k\ldots l_1 s,t}\right\|_{i_1,\ldots,i_k=1}^{m},$$

$$I^{*(i_k\ldots i_1)}_{l_k\ldots l_1 s,t}=\begin{cases}\int\limits_t^{*s}(t-\tau_k)^{l_1}\ldots\int\limits_t^{*\tau_2}(t-\tau_1)^{l_k}d\mathbf{f}_{\tau_1}^{(i_k)}\ldots d\mathbf{f}_{\tau_k}^{(i_1)} & \text{при } k>0,\\ 1 & \text{при } k=0,\end{cases}$$

$$\bar{G}_p^{(i)}=\frac{1}{p}\left(\bar{G}_{p-1}^{(i)}\bar{L}-\bar{L}\bar{G}_{p-1}^{(i)}\right),\ p=1,2,\ldots;\ i=1,\ldots,m,$$

$$\bar{L}\stackrel{\text{def}}{=}L-\frac{1}{2}\sum_{j=1}^{m}G_0^{(j)}G_0^{(j)},\quad \bar{G}_0^{(i)}\stackrel{\text{def}}{=}G_0^{(i)},\ i=1,\ldots,m,$$

$$\mathcal{D}_q = \left\{(k, j, l_1, \ldots, l_k):\ k + 2\left(j + \sum_{p=1}^{k} l_p\right) = q; k, j, l_1, \ldots, l_k = 0, 1, \ldots\right\}.$$

Рассмотрим разбиение $\{\tau_p\}_{p=0}^{N}$ промежутка $[0, T]$, для которого $0 = \tau_0 < \tau_1 < \ldots < \tau_N = T$, $\Delta_N = \max\limits_{0 \le j \le N-1} |\tau_{j+1} - \tau_j|$.

Положим $R(\mathbf{x}, t) \equiv \mathbf{x}$, $s = \tau_{p+1}$, $t = \tau_p$. Тогда из (7.74) получим следующее общее представление явной численной схемы решения стохастического дифференциального уравнения (7.18) вида

$$\mathbf{y}_{\tau_{p+1}} = \mathbf{y}_{\tau_p} + \sum_{q=1}^{r} \sum_{(k,j,l_1,\ldots,l_k) \in \mathcal{D}_q} \frac{(\tau_{p+1} - \tau_p)^j}{j!} {}^{(k)}\bar{G}_{l_k} \ldots \bar{G}_{l_1} \bar{L}^j \{\mathbf{y}_{\tau_p}\} \overset{k}{\cdot} {}^{(k)}I^*_{l_k \ldots l_1 \tau_{p+1}, \tau_p} +$$

$$+ \mathbf{1}_{\{r = 2d+1, d \in N\}} \frac{(\tau_{p+1} - \tau_p)^{\frac{1}{2}(r+1)}}{\left(\frac{1}{2}(r+1)\right)!} L^{\frac{1}{2}(r+1)} \mathbf{y}_{\tau_p}, \tag{7.75}$$

где

$${}^{(k)}\hat{I}^*_{l_k \ldots l_1 \tau_{p+1}, \tau_p} = \left\| \hat{I}^{*(i_k \ldots i_1)}_{l_k \ldots l_1 \tau_{p+1}, \tau_p} \right\|_{i_1, \ldots, i_k = 1}^{m};$$

а $\hat{I}^{*(i_k \ldots i_1)}_{l_k \ldots l_1 \tau_{p+1}, \tau_p}$ — аппроксимация повторного стохастического интеграла Стратоновича $I^{*(i_k \ldots i_1)}_{l_k \ldots l_1 \tau_{p+1}, \tau_p}$; $\hat{I}^{*(i_0 \ldots i_1)}_{l_0 \ldots l_1 \tau_{p+1}, \tau_p} \overset{\text{def}}{=} 1$.

Далее для простоты положим $p\Delta \overset{\text{def}}{=} \tau_p$, $\Delta = T/N$, $p \in \{0, 1, \ldots, N\}$, $T = \tau_N$.

Сформулируем теорему о сходимости численной схемы (7.75).

Теорема 7.5. *Пусть выполнены модификации условий теоремы* 7.4 *для формулы* (7.75). *Тогда справедлива оценка* $\mathsf{M}\left\{\sup\limits_{0 \le t \le T} |\mathbf{x}_t - \mathbf{y}_t|^2\right\} \le K\Delta^r$, *где постоянная* K *не зависит от* Δ, *а* $\mathbf{y}_t$ *определяется из* (7.75) *при* $\tau_{p+1} = t$.

Аппроксимации повторных стохастических интегралов Стратоновича, входящие в (7.75), могут быть получены с помощью теорем 3.9 и 5.1.

7.6.2 Метод порядка точности 1.5

Рассмотрение явных одношаговых сильных численных методов, основанных на унифицированном разложении Тейлора–Стратоновича, начинаем с численного метода порядка точности 1.5, а не порядка точности 1.0, поскольку численные методы порядка точности 1.0, основанные на разложении Тейлора–Стратоновича в форме Клоедена и Платена и унифицированных разложениях Тейлора–Стратоновича, идентичны.

Итак, предположим, что условия теоремы 7.5 при $r = 3$ выполнены. Тогда из (7.75) при $r = 3$ получим явный одношаговый сильный численный метод порядка точности 1.5

$$\mathbf{y}_{p+1} = \mathbf{y}_p + \sum_{i_1=1}^{m} \Sigma_{i_1} \hat{I}^{*(i_1)}_{0_{\tau_{p+1},\tau_p}} + \Delta\bar{\mathbf{a}} + \sum_{i_1,i_2=1}^{m} G_0^{(i_2)} \Sigma_{i_1} \hat{I}^{*(i_2 i_1)}_{00_{\tau_{p+1},\tau_p}} +$$

$$+ \sum_{i_1=1}^{m} \left[G_0^{(i_1)} \bar{\mathbf{a}} \left(\Delta \hat{I}^{*(i_1)}_{0_{\tau_{p+1},\tau_p}} + \hat{I}^{*(i_1)}_{1_{\tau_{p+1},\tau_p}} \right) - \bar{L} \Sigma_{i_1} \hat{I}^{*(i_1)}_{1} \right] +$$

$$+ \sum_{i_1,i_2,i_3=1}^{m} G_0^{(i_3)} G_0^{(i_2)} \Sigma_{i_1} \hat{I}^{*(i_3 i_2 i_1)}_{000_{\tau_{p+1},\tau_p}} + \frac{\Delta^2}{2} L\mathbf{a}. \qquad (7.76)$$

Здесь и далее $\bar{\mathbf{a}}(\mathbf{x}, t) = \mathbf{a}(\mathbf{x}, t) - \frac{1}{2} \sum\limits_{j=1}^{m} G_0^{(j)} \Sigma_j(\mathbf{x}, t)$; $\bar{L} = L - \frac{1}{2} \sum\limits_{j=1}^{m} G_0^{(j)} G_0^{(j)}$; функции в правой части вычислены в точке $(\mathbf{y}_p, \tau_p)$; $\mathbf{y}_{\tau_p} \stackrel{\text{def}}{=} \mathbf{y}_p$.

7.6.3 Метод порядка точности 2.0

Предположим, что условия теоремы 7.5 выполнены при $r = 4$. Тогда из (7.75) при $r = 4$ получим явный одношаговый сильный численный метод порядка точности 2.0:

$$\mathbf{y}_{p+1} = \mathbf{y}_p + \sum_{i_1=1}^{m} \Sigma_{i_1} \hat{I}^{*(i_1)}_{0_{\tau_{p+1},\tau_p}} + \Delta\bar{\mathbf{a}} + \sum_{i_1,i_2=1}^{m} G_0^{(i_2)} \Sigma_{i_1} \hat{I}^{*(i_2 i_1)}_{00_{\tau_{p+1},\tau_p}} +$$

$$+ \sum_{i_1=1}^{m} \left[G_0^{(i_1)} \bar{\mathbf{a}} \left(\Delta \hat{I}^{*(i_1)}_{0_{\tau_{p+1},\tau_p}} + \hat{I}^{*(i_1)}_{1_{\tau_{p+1},\tau_p}} \right) - \bar{L} \Sigma_{i_1} \hat{I}^{*(i_1)}_{1_{\tau_{p+1},\tau_p}} \right] +$$

$$+ \sum_{i_1,i_2,i_3=1}^{m} G_0^{(i_3)} G_0^{(i_2)} \Sigma_{i_1} \hat{I}^{*(i_3 i_2 i_1)}_{000_{\tau_{p+1},\tau_p}} + \frac{\Delta^2}{2} \bar{L}\bar{\mathbf{a}} +$$

$$+ \sum_{i_1,i_2=1}^{m} \left[G_0^{(i_2)} \bar{L} \Sigma_{i_1} \left(\hat{I}^{*(i_2 i_1)}_{10_{\tau_{p+1},\tau_p}} - \hat{I}^{*(i_2 i_1)}_{01_{\tau_{p+1},\tau_p}} \right) - \bar{L} G_0^{(i_2)} \Sigma_{i_1} \hat{I}^{*(i_2 i_1)}_{10_{\tau_{p+1},\tau_p}} + \right.$$

$$\left. + G_0^{(i_2)} G_0^{(i_1)} \bar{\mathbf{a}} \left(\hat{I}^{*(i_2 i_1)}_{01_{\tau_{p+1},\tau_p}} + \Delta \hat{I}^{*(i_2 i_1)}_{00_{\tau_{p+1},\tau_p}} \right) \right] + \sum_{i_1,i_2,i_3,i_4=1}^{m} G_0^{(i_4)} G_0^{(i_3)} G_0^{(i_2)} \Sigma_{i_1} \hat{I}^{*(i_4 i_3 i_2 i_1)}_{0000_{\tau_{p+1},\tau_p}}.$$

7.6.4 Метод порядка точности 2.5

Пусть условия теоремы 7.5 выполнены при $r = 5$. Тогда из (7.75) при $r = 5$ получим явный одношаговый сильный численный метод порядка точности 2.5:

$$\mathbf{y}_{p+1} = \mathbf{y}_p + \sum_{i_1=1}^{m} \Sigma_{i_1} \hat{I}^{*(i_1)}_{0_{\tau_{p+1},\tau_p}} + \Delta\bar{\mathbf{a}} + \sum_{i_1,i_2=1}^{m} G_0^{(i_2)} \Sigma_{i_1} \hat{I}^{*(i_2 i_1)}_{00_{\tau_{p+1},\tau_p}} +$$

$$+\sum_{i_1=1}^{m}\left[G_0^{(i_1)}\bar{\mathbf{a}}\left(\Delta\hat{I}^{*(i_1)}_{0_{\tau_{p+1},\tau_p}}+\hat{I}^{*(i_1)}_{1_{\tau_{p+1},\tau_p}}\right)-\bar{L}\Sigma_{i_1}\hat{I}^{*(i_1)}_{1_{\tau_{p+1},\tau_p}}\right]+$$

$$+\sum_{i_1,i_2,i_3=1}^{m}G_0^{(i_3)}G_0^{(i_2)}\Sigma_{i_1}\hat{I}^{*(i_3i_2i_1)}_{000_{\tau_{p+1},\tau_p}}+\frac{\Delta^2}{2}\bar{L}\bar{\mathbf{a}}+\frac{\Delta^3}{6}L^2\mathbf{a}+$$

$$+\sum_{i_1,i_2=1}^{m}\left[G_0^{(i_2)}\bar{L}\Sigma_{i_1}\left(\hat{I}^{*(i_2i_1)}_{10_{\tau_{p+1},\tau_p}}-\hat{I}^{*(i_2i_1)}_{01_{\tau_{p+1},\tau_p}}\right)-\bar{L}G_0^{(i_2)}\Sigma_{i_1}\hat{I}^{*(i_2i_1)}_{10_{\tau_{p+1},\tau_p}}+\right.$$

$$\left.+G_0^{(i_2)}G_0^{(i_1)}\bar{\mathbf{a}}\left(\hat{I}^{*(i_2i_1)}_{01_{\tau_{p+1},\tau_p}}+\Delta\hat{I}^{*(i_2i_1)}_{00_{\tau_{p+1},\tau_p}}\right)\right]+\sum_{i_1,i_2,i_3,i_4=1}^{m}G_0^{(i_4)}G_0^{(i_3)}G_0^{(i_2)}\Sigma_{i_1}\hat{I}^{*(i_4i_3i_2i_1)}_{0000_{\tau_{p+1},\tau_p}}$$

$$+\sum_{i_1=1}^{m}\left[G_0^{(i_1)}\bar{L}\bar{\mathbf{a}}\left(\frac{1}{2}\hat{I}^{*(i_1)}_{2_{\tau_{p+1},\tau_p}}+\Delta\hat{I}^{*(i_1)}_{1_{\tau_{p+1},\tau_p}}+\frac{\Delta^2}{2}\hat{I}^{*(i_1)}_{0_{\tau_{p+1},\tau_p}}\right)+\right.$$

$$\left.+\frac{1}{2}\bar{L}^2\Sigma_{i_1}\hat{I}^{*(i_1)}_{2_{\tau_{p+1},\tau_p}}-\bar{L}G_0^{(i_1)}\bar{\mathbf{a}}\left(\hat{I}^{*(i_1)}_{2_{\tau_{p+1},\tau_p}}+\Delta\hat{I}^{*(i_1)}_{1_{\tau_{p+1},\tau_p}}\right)\right]+$$

$$+\sum_{i_1,i_2,i_3=1}^{m}\left[G_0^{(i_3)}\bar{L}G_0^{(i_2)}\Sigma_{i_1}\left(\hat{I}^{*(i_3i_2i_1)}_{100_{\tau_{p+1},\tau_p}}-\hat{I}^{*(i_3i_2i_1)}_{010_{\tau_{p+1},\tau_p}}\right)+\right.$$

$$+G_0^{(i_3)}G_0^{(i_2)}\bar{L}\Sigma_{i_1}\left(\hat{I}^{*(i_3i_2i_1)}_{010_{\tau_{p+1},\tau_p}}-\hat{I}^{*(i_3i_2i_1)}_{001_{\tau_{p+1},\tau_p}}\right)+$$

$$\left.+G_0^{(i_3)}G_0^{(i_2)}G_0^{(i_1)}\bar{\mathbf{a}}\left(\Delta\hat{I}^{*(i_3i_2i_1)}_{000_{\tau_{p+1},\tau_p}}+\hat{I}^{*(i_3i_2i_1)}_{001_{\tau_{p+1},\tau_p}}\right)-\bar{L}G_0^{(i_3)}G_0^{(i_2)}\Sigma_{i_1}\hat{I}^{*(i_3i_2i_1)}_{100_{\tau_{p+1},\tau_p}}\right]+$$

$$+\sum_{i_1,i_2,i_3,i_4,i_5=1}^{m}G_0^{(i_5)}G_0^{(i_4)}G_0^{(i_3)}G_0^{(i_2)}\Sigma_{i_1}\hat{I}^{*(i_5i_4i_3i_2i_1)}_{00000_{\tau_{p+1},\tau_p}}. \qquad (7.77)$$

7.6.5 Метод порядка точности 3.0

Пусть условия теоремы 7.5 выполнены при $r=6$. Тогда из (7.75) при $r=6$ получаем явный одношаговый сильный численный метод порядка точности 3.0:

$$\mathbf{y}_{p+1}=\mathbf{y}_p+\sum_{i_1=1}^{m}\Sigma_{i_1}\hat{I}^{*(i_1)}_{0_{\tau_{p+1},\tau_p}}+\Delta\bar{\mathbf{a}}+\sum_{i_1,i_2=1}^{m}G_0^{(i_2)}\Sigma_{i_1}\hat{I}^{*(i_2i_1)}_{00_{\tau_{p+1},\tau_p}}+$$

$$+\sum_{i_1=1}^{m}\left[G_0^{(i_1)}\bar{\mathbf{a}}\left(\Delta\hat{I}^{*(i_1)}_{0_{\tau_{p+1},\tau_p}}+\hat{I}^{*(i_1)}_{1_{\tau_{p+1},\tau_p}}\right)-\bar{L}\Sigma_{i_1}\hat{I}^{*(i_1)}_{1_{\tau_{p+1},\tau_p}}\right]+$$

$$+\sum_{i_1,i_2,i_3=1}^{m}G_0^{(i_3)}G_0^{(i_2)}\Sigma_{i_1}\hat{I}^{*(i_3i_2i_1)}_{000_{\tau_{p+1},\tau_p}}+\frac{\Delta^2}{2}\bar{L}\bar{\mathbf{a}}+$$

$$+\sum_{i_1,i_2=1}^{m}\left[G_0^{(i_2)}\bar{L}\Sigma_{i_1}\left(\hat{I}^{*(i_2i_1)}_{10_{\tau_{p+1},\tau_p}}-\hat{I}^{*(i_2i_1)}_{01_{\tau_{p+1},\tau_p}}\right)-\bar{L}G_0^{(i_2)}\Sigma_{i_1}\hat{I}^{*(i_2i_1)}_{10_{\tau_{p+1},\tau_p}}+\right.$$

$$
+G_0^{(i_2)}G_0^{(i_1)}\bar{\mathbf{a}}\left(\hat{I}^{*(i_2i_1)}_{01_{\tau_{p+1},\tau_p}}+\Delta\hat{I}^{*(i_2i_1)}_{00_{\tau_{p+1},\tau_p}}\right)\Bigr]+\sum_{i_1,i_2,i_3,i_4=1}^{m}G_0^{(i_4)}G_0^{(i_3)}G_0^{(i_2)}\Sigma_{i_1}\hat{I}^{*(i_4i_3i_2i_1)}_{0000_{\tau_{p+1},\tau_p}}
$$

$$
+\sum_{i_1=1}^{m}\Bigr[G_0^{(i_1)}\bar{L}\bar{\mathbf{a}}\left(\frac{1}{2}\hat{I}^{*(i_1)}_{2_{\tau_{p+1},\tau_p}}+\Delta\hat{I}^{*(i_1)}_{1_{\tau_{p+1},\tau_p}}+\frac{\Delta^2}{2}\hat{I}^{*(i_1)}_{0_{\tau_{p+1},\tau_p}}\right)+
$$

$$
+\frac{1}{2}\bar{L}^2\Sigma_{i_1}\hat{I}^{*(i_1)}_{2_{\tau_{p+1},\tau_p}}-\bar{L}G_0^{(i_1)}\bar{\mathbf{a}}\left(\hat{I}^{*(i_1)}_{2_{\tau_{p+1},\tau_p}}+\Delta\hat{I}^{*(i_1)}_{1\tau_{p+1},\tau_p}\right)\Bigr]+
$$

$$
+\sum_{i_1,i_2,i_3=1}^{m}\Bigr[G_0^{(i_3)}\bar{L}G_0^{(i_2)}\Sigma_{i_1}\left(\hat{I}^{*(i_3i_2i_1)}_{100_{\tau_{p+1},\tau_p}}-\hat{I}^{*(i_3i_2i_1)}_{010_{\tau_{p+1},\tau_p}}\right)+
$$

$$
+G_0^{(i_3)}G_0^{(i_2)}\bar{L}\Sigma_{i_1}\left(\hat{I}^{*(i_3i_2i_1)}_{010_{\tau_{p+1},\tau_p}}-\hat{I}^{*(i_3i_2i_1)}_{001_{\tau_{p+1},\tau_p}}\right)+
$$

$$
+G_0^{(i_3)}G_0^{(i_2)}G_0^{(i_1)}\bar{\mathbf{a}}\left(\Delta\hat{I}^{*(i_3i_2i_1)}_{000_{\tau_{p+1},\tau_p}}+\hat{I}^{*(i_3i_2i_1)}_{001_{\tau_{p+1},\tau_p}}\right)-\bar{L}G_0^{(i_3)}G_0^{(i_2)}\Sigma_{i_1}\hat{I}^{*(i_3i_2i_1)}_{100_{\tau_{p+1},\tau_p}}\Bigr]
$$

$$
+\sum_{i_1,i_2,i_3,i_4,i_5=1}^{m}G_0^{(i_5)}G_0^{(i_4)}G_0^{(i_3)}G_0^{(i_2)}\Sigma_{i_1}\hat{I}^{*(i_5i_4i_3i_2i_1)}_{00000_{\tau_{p+1},\tau_p}}+\frac{\Delta^3}{6}\bar{L}^2\bar{\mathbf{a}}+
$$

$$
+\sum_{i_1,i_2=1}^{m}\Bigr[G_0^{(i_2)}G_0^{(i_1)}\bar{L}\bar{\mathbf{a}}\left(\frac{1}{2}\hat{I}^{*(i_2i_1)}_{02_{\tau_{p+1},\tau_p}}+\Delta\hat{I}^{*(i_2i_1)}_{01_{\tau_{p+1},\tau_p}}+\frac{\Delta^2}{2}\hat{I}^{*(i_2i_1)}_{00_{\tau_{p+1},\tau_p}}\right)+
$$

$$
+\frac{1}{2}\bar{L}^2G_0^{(i_2)}\Sigma_{i_1}\hat{I}^{*(i_2i_1)}_{20_{\tau_{p+1},\tau_p}}+
$$

$$
+G_0^{(i_2)}\bar{L}G_0^{(i_1)}\bar{\mathbf{a}}\left(\hat{I}^{*(i_2i_1)}_{11_{\tau_{p+1},\tau_p}}-\hat{I}^{*(i_2i_1)}_{02_{\tau_{p+1},\tau_p}}+\Delta\left(\hat{I}^{*(i_2i_1)}_{10_{\tau_{p+1},\tau_p}}-\hat{I}^{*(i_2i_1)}_{01_{\tau_{p+1},\tau_p}}\right)\right)+
$$

$$
+\bar{L}G_0^{(i_2)}\bar{L}\Sigma_{i_1}\left(\hat{I}^{*(i_2i_1)}_{11_{\tau_{p+1},\tau_p}}-\hat{I}^{*(i_2i_1)}_{20_{\tau_{p+1},\tau_p}}\right)+
$$

$$
+G_0^{(i_2)}\bar{L}^2\Sigma_{i_1}\left(\frac{1}{2}\hat{I}^{*(i_2i_1)}_{02_{\tau_{p+1},\tau_p}}+\frac{1}{2}\hat{I}^{*(i_2i_1)}_{20_{\tau_{p+1},\tau_p}}-\hat{I}^{*(i_2i_1)}_{11_{\tau_{p+1},\tau_p}}\right)-
$$

$$
-\bar{L}G_0^{(i_2)}G_0^{(i_1)}\bar{\mathbf{a}}\left(\Delta\hat{I}^{*(i_2i_1)}_{10_{\tau_{p+1},\tau_p}}+\hat{I}^{*(i_2i_1)}_{11_{\tau_{p+1},\tau_p}}\right)\Bigr]+
$$

$$
+\sum_{i_1,\ldots,i_4=1}^{m}\Bigr[G_0^{(i_4)}G_0^{(i_3)}G_0^{(i_2)}G_0^{(i_1)}\bar{\mathbf{a}}\left(\Delta\hat{I}^{*(i_4i_3i_2i_1)}_{0000_{\tau_{p+1},\tau_p}}+\hat{I}^{*(i_4i_3i_2i_1)}_{0001_{\tau_{p+1},\tau_p}}\right)+
$$

$$
+G_0^{(i_4)}G_0^{(i_3)}\bar{L}G_0^{(i_2)}\Sigma_{i_1}\left(\hat{I}^{*(i_4i_3i_2i_1)}_{0100_{\tau_{p+1},\tau_p}}-\hat{I}^{*(i_4i_3i_2i_1)}_{0010_{\tau_{p+1},\tau_p}}\right)-
$$

$$
-\bar{L}G_0^{(i_4)}G_0^{(i_3)}G_0^{(i_2)}\Sigma_{i_1}\hat{I}^{*(i_4i_3i_2i_1)}_{1000_{\tau_{p+1},\tau_p}}+
$$

$$
+G_0^{(i_4)}\bar{L}G_0^{(i_3)}G_0^{(i_2)}\Sigma_{i_1}\left(\hat{I}^{*(i_4i_3i_2i_1)}_{1000_{\tau_{p+1},\tau_p}}-\hat{I}^{*(i_4i_3i_2i_1)}_{0100_{\tau_{p+1},\tau_p}}\right)+
$$

$$
+G_0^{(i_4)}G_0^{(i_3)}G_0^{(i_2)}\bar{L}\Sigma_{i_1}\left(\hat{I}^{*(i_4i_3i_2i_1)}_{0010_{\tau_{p+1},\tau_p}}-\hat{I}^{*(i_4i_3i_2i_1)}_{0001_{\tau_{p+1},\tau_p}}\right)\Bigr]+
$$

$$
+\sum_{i_1,\ldots,i_6=1}^{m}G_0^{(i_6)}G_0^{(i_5)}G_0^{(i_4)}G_0^{(i_3)}G_0^{(i_2)}\Sigma_{i_1}\hat{I}^{*(i_6i_5i_4i_3i_2i_1)}_{000000_{\tau_{p+1},\tau_p}}. \qquad (7.78)
$$

7.7 Явные одношаговые конечно-разностные численные методы, основанные на разложениях Тейлора–Ито

В данном разделе рассматриваются явные одношаговые сильные конечно-разностные численные методы, основанные на унифицированном разложении Тейлора–Ито и разложении Тейлора–Ито в форме Вагнера и Платена. Построение таких численных методов основано на конечно-разностной аппроксимации функций $Q_{\lambda_l}^{(i_l)} \ldots Q_{\lambda_1}^{(i_1)}\mathbf{x}$, где $Q_{\lambda_l}^{(i_l)} = L$ и $i_l = 0$ при $\lambda_l = 0$; $Q_{\lambda_l}^{(i_l)} = G_0^{(i_l)}$ и $i_l = 1, \ldots, m$ при $\lambda_l = 1$; $l = 1, \ldots, k$, входящих в унифицированное разложение Тейлора–Ито и разложение Тейлора–Ито в форме Вагнера и Платена. Для получения этих конечно-разностных аппроксимаций нам потребуются некоторые соотношения, основанные на стандартной формуле Тейлора.

7.7.1 Некоторые тейлоровские аппроксимации производных детерминированных функций

Рассмотрим функции $\mathbf{f}, \mathbf{g}: \Re^n \times [0, T] \to \Re^n$. Через $\mathbf{f}^{(i)}(\mathbf{x}, t)$, $\mathbf{g}^{(i)}(\mathbf{x}, t)$ будем обозначать i-е компоненты $\mathbf{f}(\mathbf{x}, t)$, $\mathbf{g}(\mathbf{x}, t)$; $i = 1, \ldots, n$. Для произвольного $\Delta > 0$ с помощью стандартной формулы Тейлора получим соотношения

$$\Delta \sum_{i=1}^{n} \mathbf{g}^{(i)} \mathbf{f}_i' = \sum_{i=1}^{2} \pi_i \mathbf{f}(\mathbf{x} + \sigma_i \Delta \mathbf{g}, t) + O(\Delta^2), \tag{7.79}$$

$$\Delta \sum_{i=1}^{n} \mathbf{g}^{(i)} \mathbf{f}_i' = \sum_{i=1}^{2} \alpha_i \mathbf{f}(\mathbf{x} + \beta_i \Delta \mathbf{g}, t) + O(\Delta^3), \tag{7.80}$$

$$\Delta \sum_{i=1}^{n} \mathbf{g}^{(i)} \mathbf{f}_i' = \sum_{i=1}^{4} \eta_i \mathbf{f}(\mathbf{x} + \omega_i \Delta \mathbf{g}, t) + O(\Delta^4), \tag{7.81}$$

$$\Delta \sum_{i=1}^{n} \mathbf{g}^{(i)} \mathbf{f}_i' = \sum_{i=1}^{4} \theta_i \mathbf{f}(\mathbf{x} + \varepsilon_i \Delta \mathbf{g}, t) + O(\Delta^5), \tag{7.82}$$

$$\Delta^2 \sum_{i,j=1}^{n} \mathbf{g}^{(i)} \mathbf{g}^{(j)} \mathbf{f}_{ij}'' = \sum_{i=1}^{3} \varrho_i \mathbf{f}(\mathbf{x} + \varpi_i \Delta \mathbf{g}, t) + O(\Delta^3), \tag{7.83}$$

$$\Delta^2 \sum_{i,j=1}^{n} \mathbf{g}^{(i)} \mathbf{g}^{(j)} \mathbf{f}_{ij}'' = \sum_{i=1}^{4} \mu_i \mathbf{f}(\mathbf{x} + \lambda_i \Delta \mathbf{g}, t) + O(\Delta^4), \tag{7.84}$$

$$\Delta^2 \sum_{i,j=1}^{n} \mathbf{g}^{(i)} \mathbf{g}^{(j)} \mathbf{f}_{ij}'' = \sum_{i=1}^{5} \psi_i \mathbf{f}(\mathbf{x} + \phi_i \Delta \mathbf{g}, t) + O(\Delta^5), \tag{7.85}$$

$$\Delta(\dot{\mathbf{f}} + \sum_{i=1}^{n} \mathbf{g}^{(i)}\mathbf{f}_i') = \sum_{i=1}^{2} \zeta_i \mathbf{f}(\mathbf{x} + \delta_i \Delta\mathbf{g}, t + \gamma_i\Delta) + O(\Delta^2), \tag{7.86}$$

$$\Delta(\dot{\mathbf{f}} + \sum_{i=1}^{n} \mathbf{g}^{(i)}\mathbf{f}_i') = \sum_{i=1}^{3} \varphi_i \mathbf{f}(\mathbf{x} + \chi_i \Delta\mathbf{g}, t + \kappa_i\Delta) + O(\Delta^3), \tag{7.87}$$

$$2\mathbf{f} + \Delta(\dot{\mathbf{f}} + \sum_{i=1}^{n} \mathbf{g}^{(i)}\mathbf{f}_i') = \sum_{i=1}^{2} \rho_i \mathbf{f}(\mathbf{x} + \nu_i \Delta\mathbf{g}, t + \xi_i\Delta) + O(\Delta^2), \tag{7.88}$$

где $\mathbf{u}(\mathbf{x},t) \stackrel{\text{def}}{=} \mathbf{u}$; $\mathbf{u}^{(i)}(\mathbf{x},t) \stackrel{\text{def}}{=} \mathbf{u}^{(i)}$; $\frac{\partial \mathbf{f}}{\partial t} \stackrel{\text{def}}{=} \dot{\mathbf{f}}$; $\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \mathbf{x}^{(i)}} \stackrel{\text{def}}{=} \mathbf{u}_i'$; $\frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial \mathbf{x}^{(i)} \partial \mathbf{x}^{(j)}} \stackrel{\text{def}}{=} \mathbf{u}_{ij}''$; $\mathbf{u} = \mathbf{f}$ или $\mathbf{g}$; коэффициенты π_i, σ_i, α_i, β_i, η_i, ω_i, θ_i, ε_i, μ_i, λ_i, ψ_i, ϕ_i, ζ_i, δ_i, γ_i, φ_i, χ_i, κ_i, ρ_i, ν_i, ξ_i, ϱ_i, ϖ_i удовлетворяют следующим системам алгебраических уравнений:

$$\begin{cases} \sum\limits_{i=1}^{3} \mu_i = 0, \\ \sum\limits_{i=1}^{3} \mu_i\lambda_i = 0, \\ \sum\limits_{i=1}^{3} \mu_i \frac{\lambda_i^2}{2} = 1, \\ \sum\limits_{i=1}^{3} \mu_i\lambda_i^3 = 0, \end{cases} \qquad \begin{cases} \sum\limits_{i=1}^{4} \eta_i = 0, \\ \sum\limits_{i=1}^{4} \eta_i\omega_i = 1, \\ \sum\limits_{i=1}^{4} \eta_i\omega_i^2 = 0, \\ \sum\limits_{i=1}^{4} \eta_i\omega_i^3 = 0, \end{cases} \qquad \begin{cases} \sum\limits_{i=1}^{2} \alpha_i = 0, \\ \sum\limits_{i=1}^{2} \alpha_i\beta_i = 1, \\ \sum\limits_{i=1}^{2} \alpha_i\beta_i^2 = 0, \end{cases}$$

$$\begin{cases} \sum\limits_{i=1}^{5} \psi_i = 0, \\ \sum\limits_{i=1}^{5} \psi_i\phi_i = 0, \\ \sum\limits_{i=1}^{5} \frac{\psi_i\phi_i^2}{2} = 1, \\ \sum\limits_{i=1}^{5} \psi_i\phi_i^3 = 0, \\ \sum\limits_{i=1}^{5} \psi_i\phi_i^4 = 0, \end{cases} \qquad \begin{cases} \sum\limits_{i=1}^{4} \theta_i = 0, \\ \sum\limits_{i=1}^{4} \theta_i\varepsilon_i = 1, \\ \sum\limits_{i=1}^{4} \theta_i\varepsilon_i^2 = 0, \\ \sum\limits_{i=1}^{4} \theta_i\varepsilon_i^3 = 0, \\ \sum\limits_{i=1}^{4} \theta_i\varepsilon_i^4 = 0, \end{cases} \qquad \begin{cases} \sum\limits_{i=1}^{3} \varphi_i = 0, \\ \sum\limits_{i=1}^{3} \varphi_i\kappa_i = 1, \\ \sum\limits_{i=1}^{3} \varphi_i\kappa_i^2 = 0, \\ \sum\limits_{i=1}^{3} \chi_i\varphi_i = 1, \\ \sum\limits_{i=1}^{3} \varphi_i\chi_i\kappa_i = 0, \\ \sum\limits_{i=1}^{3} \varphi_i\chi_i^2 = 0, \end{cases}$$

$$\begin{cases} \sum\limits_{i=1}^{2} \zeta_i = 0, \\ \sum\limits_{i=1}^{2} \zeta_i\gamma_i = 1, \\ \sum\limits_{i=1}^{2} \zeta_i\delta_i = 1, \end{cases} \qquad \begin{cases} \sum\limits_{i=1}^{2} \rho_i = 2, \\ \sum\limits_{i=1}^{2} \xi_i\rho_i = 1, \\ \sum\limits_{i=1}^{2} \nu_i\rho_i = 1, \end{cases} \qquad \begin{cases} \sum\limits_{i=1}^{3} \varrho_i = 0, \\ \sum\limits_{i=1}^{3} \varrho_i\varpi_i = 0, \\ \sum\limits_{i=1}^{3} \varrho_i \frac{\varpi_i{}^2}{2} = 1, \end{cases}$$

$$\begin{cases} \sum\limits_{i=1}^{2} \pi_i = 0, \\ \sum\limits_{i=1}^{2} \pi_i\sigma_i = 1. \end{cases}$$

Пример 7.1. *Проверить, что следующий набор коэффициентов является решением данных систем уравнений:* $\alpha_1 = 1$, $\alpha_2 = -1$, $\beta_1 = \frac{1}{2}$, $\beta_2 = -\frac{1}{2}$, $\mu_1 = \mu_2 = 1$, $\mu_3 = -2$, $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = -1$, $\lambda_3 = 0$, $\varepsilon_1 = 1$, $\varepsilon_2 = 2$, $\varepsilon_3 = -2$, $\varepsilon_4 = -1$, $\theta_1 = \frac{2}{3}$, $\theta_2 = -\frac{1}{12}$, $\theta_3 = \frac{1}{12}$, $\theta_4 = -\frac{2}{3}$, $\eta_1 = \frac{1}{48}$, $\eta_2 = -\frac{1}{48}$, $\eta_3 = \frac{27}{48}$, $\eta_4 = -\frac{27}{48}$, $\omega_1 = -3$, $\omega_2 = 3$, $\omega_3 = 1$, $\omega_4 = -1$, $\varphi_1 = \varphi_2 = \frac{1}{2}$, $\varphi_3 = -1$, $\kappa_1 = 1$, $\kappa_2 = \kappa_3 = -1$, $\chi_1 = 1$, $\chi_2 = \chi_3 = -1$, $\rho_1 = \rho_2 = 1$, $\xi_1 = 0$, $\xi_2 = 1$, $\nu_1 = 0$; $\nu_2 = 1$, $\zeta_1 = 1$, $\zeta_2 = -1$, $\gamma_1 = \frac{1}{2}$, $\gamma_2 = -\frac{1}{2}$, $\delta_1 = \frac{1}{2}$, $\delta_2 = -\frac{1}{2}$, $\psi_1 = -\frac{65}{60}$, $\psi_2 = \frac{66}{60}$, $\psi_3 = -\frac{14}{60}$, $\psi_4 = -\frac{1}{60}$, $\psi_5 = \frac{14}{60}$, $\phi_1 = 1$, $\phi_2 = 2$, $\phi_3 = 3$, $\phi_4 = -3$, $\phi_5 = -2$, $\pi_1 = \frac{1}{2}$, $\pi_2 = -\frac{1}{2}$, $\sigma_1 = 2$, $\sigma_2 = 0$, $\varrho_1 = \varrho_2 = 1$, $\varrho_3 = -2$, $\varpi_1 = 0$, $\varpi_2 = 2$, $\varpi_3 = 1$.

7.7.2 Метод порядка точности 1.0

В качестве основы для построения явного сильного одношагового конечно-разностного численного метода порядка точности 1.0 возьмем соотношение (7.35) (метод Г.Н. Мильштейна). Аппроксимируем величину $G_0^{(i_2)}\Sigma_{i_1}(\mathbf{y}_p, \tau_p)$, где $p\Delta \stackrel{\text{def}}{=} \tau_p$, $\mathbf{y}_{\tau_p} \stackrel{\text{def}}{=} \mathbf{y}_p$ с помощью соотношения (7.79) следующим образом:

$$G_0^{(i_2)}\Sigma_{i_1}(\mathbf{y}_p, \tau_p) = \frac{1}{\sqrt{\Delta}} \sum_{j=1}^{2} \pi_j \Sigma_{i_1}(\mathbf{y}_{p\sigma}^{(ji_2)}, \tau_p) + O(\sqrt{\Delta}), \tag{7.89}$$

где $\mathbf{y}_{p\sigma}^{(ji)} = \mathbf{y}_p + \sqrt{\Delta}\sigma_j \Sigma_i(\mathbf{y}_p, \tau_p)$.

Подставляя (7.89) в (7.35) и отбрасывая величину большего порядка малости, чем $O(\Delta)$, получаем явный сильный одношаговый конечно-разностный численный метод порядка 1.0:

$$\mathbf{y}_{p+1} = \mathbf{y}_p + \Delta\mathbf{a}(\mathbf{y}_p, \tau_p) + \sum_{i_1=1}^{m} \Sigma_{i_1}(\mathbf{y}_p, \tau_p)\hat{I}_{0_{\tau_{p+1},\tau_p}}^{(i_1)} +$$

$$+\frac{1}{\sqrt{\Delta}} \sum_{i_1,i_2=1}^{m} \sum_{j=1}^{2} \pi_j \Sigma_{i_1}(\mathbf{y}_{p\sigma}^{(ji_2)}, \tau_p)\hat{I}_{00_{\tau_{p+1},\tau_p}}^{(i_2 i_1)}. \tag{7.90}$$

В дальнейшем при тестировании сильных конечно-разностных численных методов будем использовать только коэффициенты, приведенные в примере 7.1.

Численный эксперимент 7.10 (рис. 7.10). *Повторить численный эксперимент* 7.1 *для конечно-разностного сильного численного метода порядка точности* 1.0 *вида* (7.90).

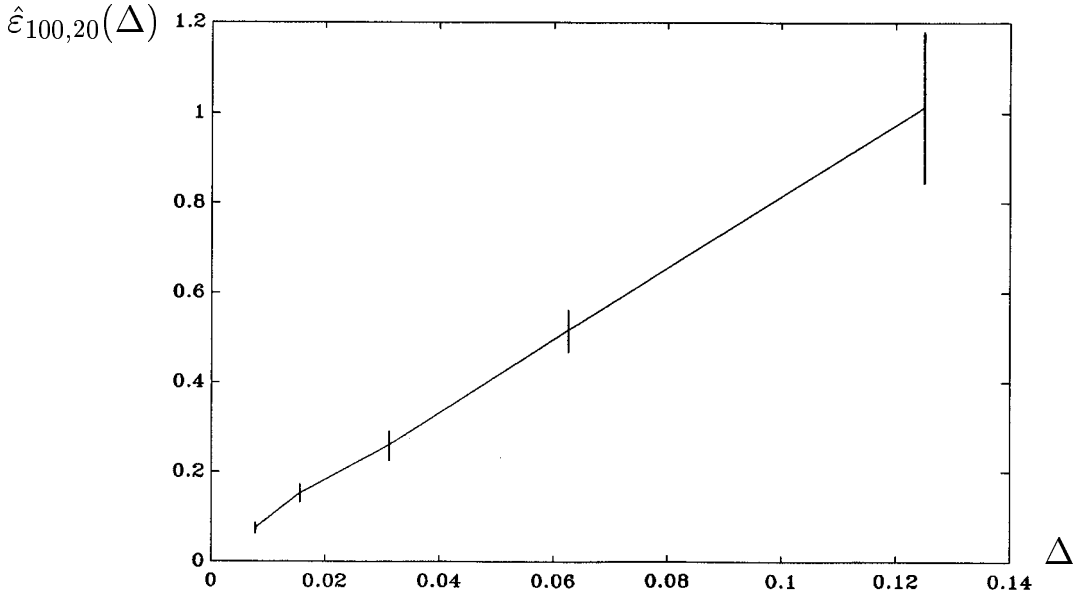

Рис. 7.10. Результат численного эксперимента 7.10.

7.7.3 Методы порядка точности 1.5

Согласно (7.46) или аналогичному представлению, основанному на разложении Тейлора–Ито в форме Вагнера и Платена, следует, что для построения явных сильных одношаговых конечно-разностных численных методов порядка точности 1.5 необходимо аппроксимировать конечными разностями функции $G_0^{(i_2)}\Sigma_{i_1}$, $G_0^{(i_1)}\mathbf{a}$, $L\Sigma_{i_1}$, $G_0^{(i_3)}G_0^{(i_2)}\Sigma_{i_1}$, $\mathbf{a}\Delta + \frac{\Delta^2}{2}L\mathbf{a}$ в точке $(\mathbf{y}_p, \tau_p)$. Введем следующие обозначения:

$$\mathbf{y}_{pr}^{(ji)} = \mathbf{y}_p + \sqrt{\Delta} r_j \Sigma_i(\mathbf{y}_p, \tau_p), \ \mathbf{z}_{p\delta}^{(j)} = \mathbf{y}_p + \Delta\delta_j \mathbf{a}(\mathbf{y}_p, \tau_p),$$

$$\mathbf{u}_{p\sigma}^{(ji)} = \mathbf{y}_p + \Delta\sigma_j \Sigma_i(\mathbf{y}_p, \tau_p), \ \Delta_{p\gamma}^{(j)} = \tau_p + \gamma_j \Delta,$$

где $r_j = \beta_j, \sigma_j, \varpi_j$. С помощью тейлоровских аппроксимаций, полученных ранее, имеем

$$G_0^{(i_2)}\Sigma_{i_1}(\mathbf{y}_p, \tau_p) = \frac{1}{\sqrt{\Delta}} \sum_{j=1}^{2} \alpha_j \Sigma_{i_1}(\mathbf{y}_{p\beta}^{(ji_2)}, \tau_p) + O(\Delta), \tag{7.91}$$

$$G_0^{(i_1)}\mathbf{a}(\mathbf{y}_p, \tau_p) = \frac{1}{\Delta} \sum_{j=1}^{2} \pi_j \mathbf{a}(\mathbf{u}_{p\sigma}^{(ji_1)}, \tau_p) + O(\sqrt{\Delta}), \tag{7.92}$$

$$L\Sigma_{i_1}(\mathbf{y}_p, \tau_p) = \frac{1}{\Delta}\left[\frac{1}{2}\sum_{r=1}^{m}\sum_{j=1}^{3} \varrho_j \Sigma_{i_1}(\mathbf{y}_{p\varpi}^{(jr)}, \tau_p) + \sum_{j=1}^{2} \zeta_j \Sigma_{i_1}(\mathbf{z}_{p\delta}^{(j)}, \Delta_{p\gamma}^{(j)})\right] + O(\sqrt{\Delta}), \tag{7.93}$$

$$G_0^{(i_3)}G_0^{(i_2)}\Sigma_{i_1}(\mathbf{y}_p,\tau_p)=\frac{1}{\Delta}\sum_{j=1}^{2}\alpha_j\mathbf{k}_{i_1i_2}(\mathbf{y}_{p\beta}^{(ji_3)},\tau_p)+O(\sqrt{\Delta}), \tag{7.94}$$

$$\mathbf{k}_{i_1i_2}(\mathbf{y}_p,\tau_p)=\sum_{j=1}^{2}\pi_j\Sigma_{i_1}(\mathbf{y}_{p\sigma}^{(ji_2)},\tau_p). \tag{7.95}$$

После подстановки соотношений (7.91)–(7.94), (7.106) в (7.46) и отбрасывания остаточных членов, получим следующий явный одношаговый сильный конечно-разностный метод порядка точности 1.5:

$$\mathbf{y}_{p+1}=\mathbf{y}_p+\frac{\Delta}{2}\left[\frac{1}{2}\sum_{r=1}^{m}\sum_{j=1}^{3}\mu_j\mathbf{a}(\mathbf{y}_{p\lambda}^{(jr)},\tau_p)+\sum_{j=1}^{2}\rho_j\mathbf{a}(\mathbf{z}_{p\nu}^{(j)},\Delta_{p\xi}^{(j)})\right]+$$

$$+\sum_{i_1=1}^{m}\Sigma_{i_1}(\mathbf{y}_p,\tau_p)\hat{I}_{0_{\tau_{p+1},\tau_p}}^{(i_1)}+\frac{1}{\sqrt{\Delta}}\sum_{i_1,i_2=1}^{m}\sum_{j=1}^{2}\alpha_j\Sigma_{i_1}(\mathbf{y}_{p\beta}^{(ji_2)},\tau_p)\hat{I}_{00_{\tau_{p+1},\tau_p}}^{(i_2i_1)}+$$

$$+\frac{1}{\Delta}\sum_{i_1=1}^{m}\left[\sum_{j=1}^{2}\pi_j\mathbf{a}(\mathbf{u}_{p\sigma}^{(ji_1)},\tau_p)\left(\Delta\hat{I}_{0_{\tau_{p+1},\tau_p}}^{(i_1)}+\hat{I}_{1_{\tau_{p+1},\tau_p}}^{(i_1)}\right)-\right.$$

$$\left.-\left(\frac{1}{2}\sum_{r=1}^{m}\sum_{j=1}^{3}\varrho_j\Sigma_{i_1}(\mathbf{y}_{p\varpi}^{(jr)},\tau_p)+\sum_{j=1}^{2}\zeta_j\Sigma_{i_1}(\mathbf{z}_{p\delta}^{(j)},\Delta_{p\gamma}^{(j)})\right)\hat{I}_{1_{\tau_{p+1},\tau_p}}^{(i_1)}\right]+$$

$$+\frac{1}{\Delta}\sum_{i_1,i_2,i_3=1}^{m}\sum_{j=1}^{2}\alpha_j\mathbf{k}_{i_1i_2}(\mathbf{y}_{p\beta}^{(ji_3)},\tau_p)\hat{I}_{000_{\tau_{p+1},\tau_p}}^{(i_3i_2i_1)}, \tag{7.96}$$

где $\mathbf{k}_{i_1i_2}(\mathbf{y}_p,\tau_p)$ имеет вид (7.95)

Рассмотрим численный метод, аналогичный (7.96) и основанный на разложении Тейлора–Ито в форме Вагнера и Платена:

$$\mathbf{y}_{p+1}=\mathbf{y}_p+\frac{\Delta}{2}\left[\frac{1}{2}\sum_{r=1}^{m}\sum_{j=1}^{3}\mu_j\mathbf{a}(\mathbf{y}_{p\lambda}^{(jr)},\tau_p)+\sum_{j=1}^{2}\rho_j\mathbf{a}(\mathbf{z}_{p\nu}^{(j)},\Delta_{p\xi}^{(j)})\right]+$$

$$+\sum_{i_1=1}^{m}\Sigma_{i_1}(\mathbf{y}_p,\tau_p)\hat{J}_{(1)_{\tau_{p+1},\tau_p}}^{(i_1)}+\frac{1}{\sqrt{\Delta}}\sum_{i_1,i_2=1}^{m}\sum_{j=1}^{2}\alpha_j\Sigma_{i_1}(\mathbf{y}_{p\beta}^{(ji_2)},\tau_p)\hat{J}_{(11)_{\tau_{p+1},\tau_p}}^{(i_2i_1)}+$$

$$+\frac{1}{\Delta}\sum_{i_1=1}^{m}\left[\sum_{j=1}^{2}\pi_j\mathbf{a}(\mathbf{u}_{p\sigma}^{(ji_1)},\tau_p)\hat{J}_{(10)_{\tau_{p+1},\tau_p}}^{(i_1)}+\right.$$

$$\left.+\left(\frac{1}{2}\sum_{r=1}^{m}\sum_{j=1}^{3}\varrho_j\Sigma_{i_1}(\mathbf{y}_{p\varpi}^{(jr)},\tau_p)+\sum_{j=1}^{2}\zeta_j\Sigma_{i_1}(\mathbf{z}_{p\delta}^{(j)},\Delta_{p\gamma}^{(j)})\right)\hat{J}_{(01)_{\tau_{p+1},\tau_p}}^{(i_1)}\right]+$$

$$+\frac{1}{\Delta}\sum_{i_1,i_2,i_3=1}^{m}\sum_{j=1}^{2}\alpha_j\mathbf{k}_{i_1i_2}(\mathbf{y}_{p\beta}^{(ji_3)},\tau_p)\hat{J}_{(111)_{\tau_{p+1},\tau_p}}^{(i_3i_2i_1)}, \tag{7.97}$$

где $\mathbf{k}_{i_1 i_2}(\mathbf{y}_p, \tau_p)$ имеет вид (7.95)

На примере численных методов (7.46) и (7.55) мы проследили, что учет слагаемого $\frac{1}{2}\Delta^2 L\mathbf{a}(\mathbf{y}_p, \tau_p)$ повысил порядок точности численного метода (7.46) на 0.5 по сравнению с численным методом (7.55). Аналогичный эффект можно ожидать и для конечно-разностных численных методов. В связи с этим рассмотрим на основе соотношения (7.55) следующую явную сильную конечно-разностную численную схему порядка точности 1.0:

$$\mathbf{y}_{p+1} = \mathbf{y}_p + \Delta\mathbf{a}(\mathbf{y}_p, \tau_p) + \sum_{i_1=1}^{m} \Sigma_{i_1}(\mathbf{y}_p, \tau_p)\hat{I}^{(i_1)}_{0_{\tau_{p+1},\tau_p}} +$$

$$+\frac{1}{\sqrt{\Delta}} \sum_{i_1,i_2=1}^{m} \sum_{j=1}^{2} \alpha_j \Sigma_{i_1}(\mathbf{y}^{(ji_2)}_{p\beta}, \tau_p)\hat{I}^{(i_2 i_1)}_{00_{\tau_{p+1},\tau_p}} +$$

$$+\frac{1}{\Delta} \sum_{i_1=1}^{m} \left[\sum_{j=1}^{2} \pi_j \mathbf{a}(\mathbf{u}^{(ji_1)}_{p\sigma}, \tau_p) \left(\Delta\hat{I}^{(i_1)}_{0_{\tau_{p+1},\tau_p}} + \hat{I}^{(i_1)}_{1_{\tau_{p+1},\tau_p}} \right) - \right.$$

$$\left. - \left(\frac{1}{2} \sum_{r=1}^{m} \sum_{j=1}^{3} \varrho_j \Sigma_{i_1}(\mathbf{y}^{(jr)}_{p\varpi}, \tau_p) + \sum_{j=1}^{2} \zeta_j \Sigma_{i_1}(\mathbf{z}^{(j)}_{p\delta}, \Delta^{(j)}_{p\gamma}) \right) \hat{I}^{(i_1)}_{1_{\tau_{p+1},\tau_p}} \right] +$$

$$+\frac{1}{\Delta} \sum_{i_1,i_2,i_3=1}^{m} \sum_{j=1}^{2} \alpha_j \mathbf{k}_{i_1 i_2}(\mathbf{y}^{(ji_3)}_{p\beta}, \tau_p)\hat{I}^{(i_3 i_2 i_1)}_{000_{\tau_{p+1},\tau_p}}, \qquad (7.98)$$

где сохранен смысл обозначений, введенных в (7.96).

Численный эксперимент 7.11 (рис. 7.11). *Повторить численный эксперимент* 7.1 *для конечно-разностного сильного численного метода порядка точности* 1.0 *вида* (7.98). *Для моделирования стохастических интегралов Ито* $I^{(1)}_{1_{(p+1)\Delta,p\Delta}}$; $p = 0, 1, \ldots, N-1$ *использовать формулу*

$$I^{(1)}_{1_{(p+1)\Delta,p\Delta}} = -\frac{1}{2}\Delta^{\frac{3}{2}} \left(\zeta^{(1)}_0 + \frac{1}{\sqrt{3}}\zeta^{(1)}_1 \right). \qquad (7.99)$$

Здесь $\zeta^{(1)}_{0_{(p+1)\Delta,p\Delta}} \stackrel{\text{def}}{=} \zeta^{(1)}_0$, $\zeta^{(1)}_{1_{(p+1)\Delta,p\Delta}} \stackrel{\text{def}}{=} \zeta^{(1)}_1$ *и* $\zeta^{(1)}_{0_{(p+1)\Delta,p\Delta}}$, $\zeta^{(1)}_{1_{(p+1)\Delta,p\Delta}}$; $p = 0, 1, \ldots, N-1$ — *независимые в совокупности стандартные гауссовские случайные величины.*

Численный эксперимент 7.12 (рис. 7.12). *Повторить численный эксперимент* 7.11 *для конечно-разностного сильного численного метода порядка точности* 1.5 *вида* (7.96).

7.7.4 Методы порядка точности 2.0

Согласно соотношениям (7.56), (7.66) для построения явных силь-

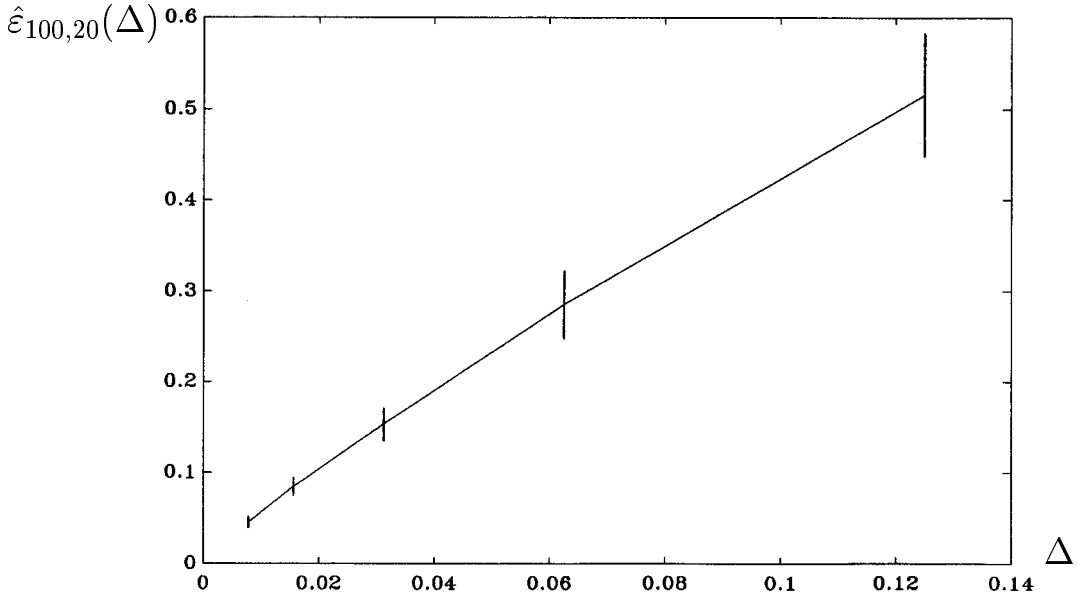

Рис. 7.11. Результат численного эксперимента 7.11.

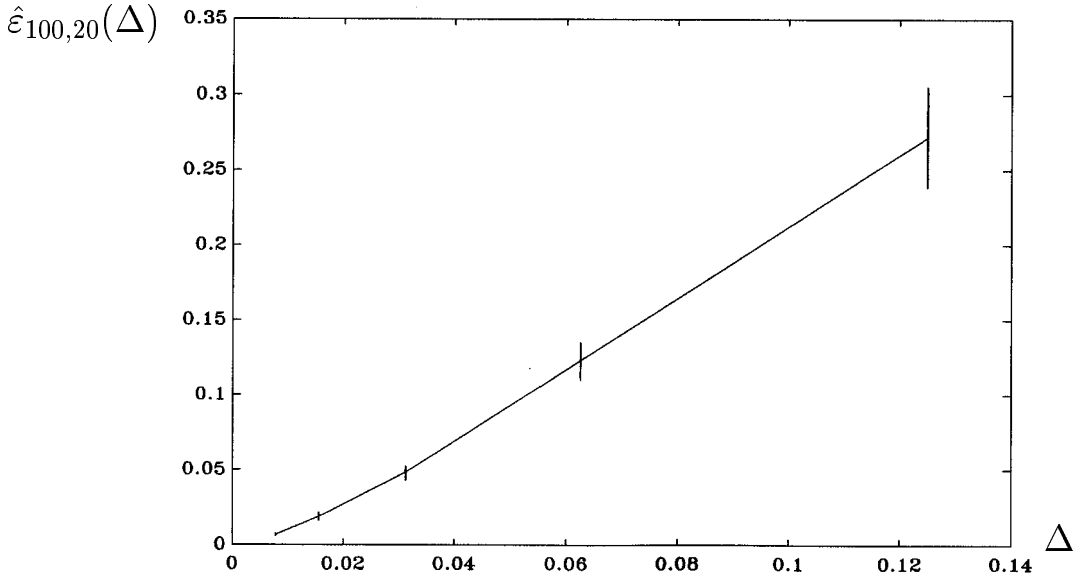

Рис. 7.12. Результат численного эксперимента 7.12.

ных одношаговых конечно-разностных численных методов порядка точности 2.0 необходимо аппроксимировать конечными разностями в точке $(\mathbf{y}_p, \tau_p)$ следующие функции:

$$G_0^{(i_2)}\Sigma_{i_1},\ G_0^{(i_1)}\mathbf{a},\ L\Sigma_{i_1},\ G_0^{(i_3)}G_0^{(i_2)}\Sigma_{i_1}, \tag{7.100}$$

$$\mathbf{a}\Delta + \frac{\Delta^2}{2}L\mathbf{a},\ G_0^{(i_2)}L\Sigma_{i_1},\ G_0^{(i_2)}G_0^{(i_1)}\mathbf{a},\ LG_0^{(i_2)}\Sigma_{i_1},\ G_0^{(i_4)}G_0^{(i_3)}G_0^{(i_2)}\Sigma_{i_1}. \tag{7.101}$$

Введем обозначения:

$$\mathbf{y}_{pr}^{(ji)} = \mathbf{y}_p + \sqrt{\Delta} r_j \Sigma_i(\mathbf{y}_p, \tau_p),\ \mathbf{z}_{pq}^{(j)} = \mathbf{y}_p + \Delta q_j \mathbf{a}(\mathbf{y}_p, \tau_p),$$

$$\mathbf{u}_{p\sigma}^{(ji)} = \mathbf{y}_p + \Delta \sigma_j \Sigma_i(\mathbf{y}_p, \tau_p),\ \Delta_{ph}^{(j)} = \tau_p + h_j \Delta,$$

где $r_j = \beta_j, \omega_j, \lambda_j, \sigma_j, \varpi_j$; $q_j = \delta_j, \nu_j$ и $h_j = \gamma_j, \xi_j$.

С помощью тейлоровских аппроксимаций, полученных ранее, имеем следующие аппроксимации для функций (7.100) в точке $(\mathbf{y}_p, \tau_p)$:

$$G_0^{(i_2)} \Sigma_{i_1}(\mathbf{y}_p, \tau_p) = \frac{1}{\sqrt{\Delta}} \sum_{j=1}^{4} \eta_j \Sigma_{i_1}(\mathbf{y}_{p\omega}^{(ji_2)}, \tau_p) + O(\Delta^{3/2}), \tag{7.102}$$

$$G_0^{(i_1)} \mathbf{a}(\mathbf{y}_p, \tau_p) = \frac{1}{\Delta} \sum_{j=1}^{2} \pi_j \mathbf{a}(\mathbf{u}_{p\sigma}^{(ji_1)}, \tau_p) + O(\Delta), \tag{7.103}$$

$$L\Sigma_{i_1}(\mathbf{y}_p, \tau_p) = \frac{1}{\Delta} \left[\frac{1}{2} \sum_{r=1}^{m} \sum_{j=1}^{3} \mu_j \Sigma_{i_1}(\mathbf{y}_{p\lambda}^{(jr)}, \tau_p) + \sum_{j=1}^{2} \zeta_j \Sigma_{i_1}(\mathbf{z}_{p\delta}^{(j)}, \Delta_{p\gamma}^{(j)}) \right] + O(\Delta), \tag{7.104}$$

$$G_0^{(i_3)} G_0^{(i_2)} \Sigma_{i_1}(\mathbf{y}_p, \tau_p) = \frac{1}{\Delta} \sum_{j=1}^{4} \eta_j \mathbf{b}_{i_1 i_2}(\mathbf{y}_{p\omega}^{(ji_3)}, \tau_p) + O(\Delta), \tag{7.105}$$

$$\mathbf{b}_{i_1 i_2}(\mathbf{y}_p, \tau_p) = \sum_{j=1}^{2} \alpha_j \Sigma_{i_1}(\mathbf{y}_{p\beta}^{(ji_2)}, \tau_p).$$

Рассмотрим аппроксимации функций (7.101) в точке $(\mathbf{y}_p, \tau_p)$ с помощью тейлоровских аппроксимаций, полученных ранее:

$$\Delta \mathbf{a}(\mathbf{y}_p, \tau_p) + \frac{\Delta^2}{2} L\mathbf{a}(\mathbf{y}_p, \tau_p) =$$

$$= \frac{\Delta}{2} \left[\frac{1}{2} \sum_{r=1}^{m} \sum_{j=1}^{3} \mu_j \mathbf{a}(\mathbf{y}_{p\lambda}^{(jr)}, \tau_p) + \sum_{j=1}^{2} \rho_j \mathbf{a}(\mathbf{z}_{p\nu}^{(j)}, \Delta_{p\xi}^{(j)}) \right] + O(\Delta^3), \tag{7.106}$$

$$G_0^{(i_2)} L\Sigma_{i_1}(\mathbf{y}_p, \tau_p) = \frac{1}{\Delta\sqrt{\Delta}} \sum_{j=1}^{4} \eta_j \mathbf{g}_{i_1}(\mathbf{y}_{p\omega}^{(ji_2)}, \tau_p) + O(\sqrt{\Delta}), \tag{7.107}$$

$$\mathbf{g}_{i_1}(\mathbf{y}_p, \tau_p) = \frac{1}{2} \sum_{r=1}^{m} \sum_{j=1}^{3} \varrho_j \Sigma_{i_1}(\mathbf{y}_{p\varpi}^{(jr)}, \tau_p) + \sum_{j=1}^{2} \zeta_j \Sigma_{i_1}(\mathbf{z}_{p\delta}^{(j)}, \Delta_{p\gamma}^{(j)}),$$

$$G_0^{(i_2)} G_0^{(i_1)} \mathbf{a}(\mathbf{y}_p, \tau_p) = \frac{1}{\Delta\sqrt{\Delta}} \sum_{j=1}^{4} \eta_j \mathbf{h}_{i_1}(\mathbf{y}_{p\omega}^{(ji_2)}, \tau_p) + O(\sqrt{\Delta}), \tag{7.108}$$

$$\mathbf{h}_{i_1}(\mathbf{y}_p,\tau_p)=\sum_{j=1}^{2}\pi_j\mathbf{a}(\mathbf{u}_{p\sigma}^{(ji_1)},\tau_p),$$

$$LG_0^{(i_2)}\Sigma_{i_1}(\mathbf{y}_p,\tau_p)=\frac{1}{\Delta\sqrt{\Delta}}\left[\frac{1}{2}\sum_{r=1}^{m}\sum_{j=1}^{3}\mu_j\mathbf{k}_{i_1i_2}(\mathbf{y}_{p\lambda}^{(jr)},\tau_p)+\right.$$

$$\left.+\sum_{j=1}^{2}\zeta_j\mathbf{k}_{i_1i_2}(\mathbf{z}_{p\delta}^{(j)},\Delta_{p\gamma}^{(j)})\right]+O(\sqrt{\Delta}),\qquad(7.109)$$

$$\mathbf{k}_{i_1i_2}(\mathbf{y}_p,\tau_p)=\sum_{j=1}^{2}\pi_j\Sigma_{i_1}(\mathbf{y}_{p\sigma}^{(ji_2)},\tau_p),$$

$$G_0^{(i_4)}G_0^{(i_3)}G_0^{(i_2)}\Sigma_{i_1}(\mathbf{y}_p,\tau_p)=\frac{1}{\Delta\sqrt{\Delta}}\sum_{j=1}^{4}\eta_j\mathbf{c}_{i_1i_2i_3}(\mathbf{y}_{p\omega}^{(ji_4)},\tau_p)+O(\sqrt{\Delta}),\quad(7.110)$$

$$\mathbf{c}_{i_1i_2i_3}(\mathbf{y}_p,\tau_p)=\sum_{j=1}^{2}\alpha_j\mathbf{k}_{i_1i_2}(\mathbf{y}_{p\beta}^{(ji_3)},\tau_p).$$

После подстановки соотношений (7.102)–(7.110) в (7.56) и отбрасывания остаточных членов, получим явный одношаговый сильный конечно-разностный метод порядка точности 2.0 вида

$$\mathbf{y}_{p+1}=\mathbf{y}_p+\frac{\Delta}{2}\left[\frac{1}{2}\sum_{r=1}^{m}\sum_{j=1}^{3}\mu_j\mathbf{a}(\mathbf{y}_{p\lambda}^{(jr)},\tau_p)+\sum_{j=1}^{2}\rho_j\mathbf{a}(\mathbf{z}_{p\nu}^{(j)},\Delta_{p\xi}^{(j)})\right]+$$

$$+\sum_{i_1=1}^{m}\Sigma_{i_1}(\mathbf{y}_p,\tau_p)\hat{I}_{0_{\tau_{p+1},\tau_p}}^{(i_1)}+\frac{1}{\sqrt{\Delta}}\sum_{i_1,i_2=1}^{m}\sum_{j=1}^{4}\eta_j\Sigma_{i_1}(\mathbf{y}_{p\omega}^{(ji_2)},\tau_p)\hat{I}_{00_{\tau_{p+1},\tau_p}}^{(i_2i_1)}+$$

$$+\frac{1}{\Delta}\sum_{i_1=1}^{m}\left[\sum_{j=1}^{2}\pi_j\mathbf{a}(\mathbf{u}_{p\sigma}^{(ji_1)},\tau_p)\left(\Delta\hat{I}_{0_{\tau_{p+1},\tau_p}}^{(i_1)}+\hat{I}_{1_{\tau_{p+1},\tau_p}}^{(i_1)}\right)-\right.$$

$$\left.-\left(\frac{1}{2}\sum_{r=1}^{m}\sum_{j=1}^{3}\mu_j\Sigma_{i_1}(\mathbf{y}_{p\lambda}^{(jr)},\tau_p)+\sum_{j=1}^{2}\zeta_j\Sigma_{i_1}(\mathbf{z}_{p\delta}^{(j)},\Delta_{p\gamma}^{(j)})\right)\hat{I}_{1_{\tau_{p+1},\tau_p}}^{(i_1)}\right]+$$

$$+\frac{1}{\Delta}\sum_{i_1,i_2,i_3=1}^{m}\sum_{j=1}^{4}\eta_j\mathbf{b}_{i_1i_2}(\mathbf{y}_{p\omega}^{(ji_3)},\tau_p)\hat{I}_{000_{\tau_{p+1},\tau_p}}^{(i_3i_2i_1)}+$$

$$+\frac{1}{\Delta\sqrt{\Delta}}\sum_{i_1,i_2=1}^{m}\left[\sum_{j=1}^{4}\eta_j\mathbf{g}_{i_1}(\mathbf{y}_{p\omega}^{(ji_2)},\tau_p)\left(\hat{I}_{10_{\tau_{p+1},\tau_p}}^{(i_2i_1)}-\hat{I}_{01_{\tau_{p+1},\tau_p}}^{(i_2i_1)}\right)+\right.$$

$$+\sum_{j=1}^{4}\eta_j\mathbf{h}_{i_1}(\mathbf{y}_{p\omega}^{(ji_2)},\tau_p)\left(\hat{I}_{01_{\tau_{p+1},\tau_p}}^{(i_2i_1)}+\Delta\hat{I}_{00_{\tau_{p+1},\tau_p}}^{(i_2i_1)}\right)-$$

$$-\left(\frac{1}{2}\sum_{r=1}^{m}\sum_{j=1}^{3}\mu_j\mathbf{k}_{i_1i_2}(\mathbf{y}_{p\lambda}^{(jr)},\tau_p)+\sum_{j=1}^{2}\zeta_j\mathbf{k}_{i_1i_2}(\mathbf{z}_{p\delta}^{(j)},\Delta_{p\gamma}^{(j)})\right)\hat{I}_{10_{\tau_{p+1},\tau_p}}^{(i_2i_1)}\Bigg]+$$

$$+\frac{1}{\Delta\sqrt{\Delta}}\sum_{i_1,i_2,i_3i_4=1}^{m}\sum_{j=1}^{4}\eta_j\mathbf{c}_{i_1i_2i_3}(\mathbf{y}_{p\omega}^{(ji_4)},\tau_p)\hat{I}_{0000_{\tau_{p+1},\tau_p}}^{(i_4i_3i_2i_1)}. \qquad (7.111)$$

Рассмотрим численный метод, аналогичный (7.111) и основанный на разложении Тейлора–Ито в форме Вагнера и Платена:

$$\mathbf{y}_{p+1}=\mathbf{y}_p+\frac{\Delta}{2}\left[\frac{1}{2}\sum_{r=1}^{m}\sum_{j=1}^{3}\mu_j\mathbf{a}(\mathbf{y}_{p\lambda}^{(jr)},\tau_p)+\sum_{j=1}^{2}\rho_j\mathbf{a}(\mathbf{z}_{p\nu}^{(j)},\Delta_{p\xi}^{(j)})\right]+$$

$$+\sum_{i_1=1}^{m}\Sigma_{i_1}(\mathbf{y}_p,\tau_p)\hat{J}_{(1)\tau_{p+1},\tau_p}^{(i_1)}+\frac{1}{\sqrt{\Delta}}\sum_{i_1,i_2=1}^{m}\sum_{j=1}^{4}\eta_j\Sigma_{i_1}(\mathbf{y}_{p\omega}^{(ji_2)},\tau_p)\hat{J}_{(11)\tau_{p+1},\tau_p}^{(i_2i_1)}+$$

$$+\frac{1}{\Delta}\sum_{i_1=1}^{m}\Bigg[\sum_{j=1}^{2}\pi_j\mathbf{a}(\mathbf{u}_{p\sigma}^{(ji_1)},\tau_p)\hat{J}_{(10)\tau_{p+1},\tau_p}^{(i_1)}+$$

$$+\left(\frac{1}{2}\sum_{r=1}^{m}\sum_{j=1}^{3}\mu_j\Sigma_{i_1}(\mathbf{y}_{p\lambda}^{(jr)},\tau_p)+\sum_{j=1}^{2}\zeta_j\Sigma_{i_1}(\mathbf{z}_{p\delta}^{(j)},\Delta_{p\gamma}^{(j)})\right)\hat{J}_{(01)\tau_{p+1},\tau_p}^{(i_1)}\Bigg]+$$

$$+\frac{1}{\Delta}\sum_{i_1,i_2,i_3=1}^{m}\sum_{j=1}^{4}\eta_j\mathbf{b}_{i_1i_2}(\mathbf{y}_{p\omega}^{(ji_3)},\tau_p)\hat{J}_{(111)\tau_{p+1},\tau_p}^{(i_3i_2i_1)}+$$

$$+\frac{1}{\Delta\sqrt{\Delta}}\sum_{i_1,i_2=1}^{m}\Bigg[\sum_{j=1}^{4}\eta_j\mathbf{g}_{i_1}(\mathbf{y}_{p\omega}^{(ji_2)},\tau_p)\hat{J}_{(101)\tau_{p+1},\tau_p}^{(i_2i_1)}+\sum_{j=1}^{4}\eta_j\mathbf{h}_{i_1}(\mathbf{y}_{p\omega}^{(ji_2)},\tau_p)\hat{J}_{(110)\tau_{p+1},\tau_p}^{(i_2i_1)}$$

$$+\left(\frac{1}{2}\sum_{r=1}^{m}\sum_{j=1}^{3}\mu_j\mathbf{k}_{i_1i_2}(\mathbf{y}_{p\lambda}^{(jr)},\tau_p)+\sum_{j=1}^{2}\zeta_j\mathbf{k}_{i_1i_2}(\mathbf{z}_{p\delta}^{(j)},\Delta_{p\gamma}^{(j)})\right)\hat{J}_{(011)\tau_{p+1},\tau_p}^{(i_2i_1)}\Bigg]+$$

$$+\frac{1}{\Delta\sqrt{\Delta}}\sum_{i_1,i_2,i_3i_4=1}^{m}\sum_{j=1}^{4}\eta_j\mathbf{c}_{i_1i_2i_3}(\mathbf{y}_{p\omega}^{(ji_4)},\tau_p)\hat{J}_{(1111)\tau_{p+1},\tau_p}^{(i_4i_3i_2i_1)}. \qquad (7.112)$$

Численный эксперимент 7.13 (рис. 7.13). *Повторить численный эксперимент* 7.11 *для конечно-разностного сильного численного метода порядка точности* 2.0 *вида* (7.111). *Для моделирования стохастических интегралов Ито* $I_{1_{(p+1)\Delta,p\Delta}}^{(1)}$; $p=0,1,\ldots,N-1$ *использовать формулу* (7.99), *а для моделирования стохастических интегралов* $I_{10_{(p+1)\Delta,p\Delta}}^{(11)}$, $I_{01_{(p+1)\Delta,p\Delta}}^{(11)}$; $p=0,1,\ldots,N-1$ — *аппроксимацию*

$$I_{10_{(p+1)\Delta,p\Delta}}^{(11)q}=-\frac{\Delta^2}{4}\Bigg[\left(\zeta_0^{(1)}\right)^2+\frac{1}{\sqrt{3}}\zeta_1^{(1)}\zeta_0^{(1)}+$$

$$+\sum_{i=0}^{q}\left(\frac{1}{(2i-1)(2i+3)}\left(\zeta_i^{(1)}\right)^2-\frac{1}{(2i+3)\sqrt{(2i+1)(2i+5)}}\zeta_i^{(1)}\zeta_{i+2}^{(1)}\right)-1\Bigg]$$

и соотношение

$$I_{01_{(p+1)\Delta,p\Delta}}^{(11)q}=I_{1_{(p+1)\Delta,p\Delta}}^{(1)}I_{0_{(p+1)\Delta,p\Delta}}^{(1)}-I_{10_{(p+1)\Delta,p\Delta}}^{(11)q}+\frac{\Delta^2}{2}$$

при $q=1$; $\zeta_{j_{(p+1)\Delta,p\Delta}}^{(1)}\stackrel{\text{def}}{=}\zeta_j^{(1)}$; $j=0,1,\ldots,q+2$ — *независимые стандартные гауссовские случайные величины.*

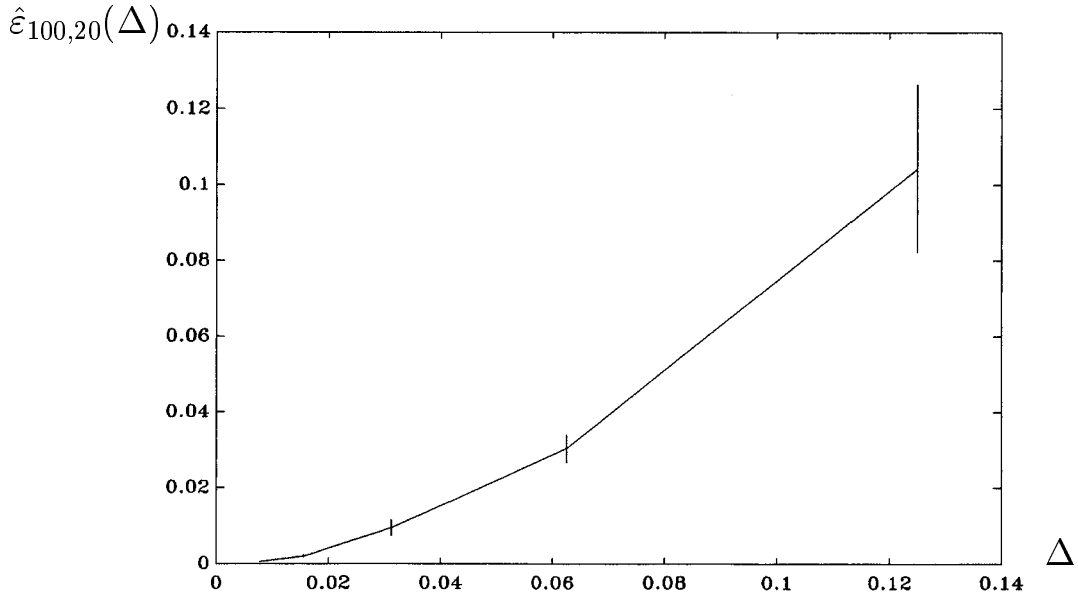

Рис. 7.13. Результат численного эксперимента 7.13.

Представленные в разд. 7.7.4 численные методы аппроксимируют решение стохастического дифференциального уравнения Ито (7.18) с учетом слагаемых второго порядка малости по систематической и случайной составляющим. Поэтому данные методы можно рассматривать как обобщения метода Рунге–Кутта второго порядка на класс стохастических дифференциальных уравнений Ито.

В [86. С. 384] предложен явный одношаговый конечно-разностный сильный численный метод порядка точности 2.0 для случая скалярного ($m=1$) аддитивного шума. Однако ошибка этого численного метода возрастает при уменьшении шага интегрирования Δ, начиная с $\Delta=2^{-3}$ (см. [86. С. 385, рис.11.3.1]). Предложенный нами явный конечно-разностный сильный численный метод порядка точности 2.0 вида (7.111), с одной стороны, является более общим (в (7.111) шум предполагается векторным ($m>1$) и неаддитивным), а, с другой, ошибка численного метода (7.111) уменьшается при уменьшении шага интегрирования Δ, по крайней мере, вплоть до $\Delta=2^{-7}$ (см. рис. 7.13).

7.7.5 Методы порядка точности 2.5

Для построения явных сильных одношаговых конечно-разностных численных методов порядка 2.5 согласно (7.58) и (7.67) необходимо аппроксимировать конечными разностями в точке $(\mathbf{y}_p, \tau_p)$ следующие функции:

$$G_0^{(i_2)}\Sigma_{i_1},\ G_0^{(i_1)}\mathbf{a},\ L\Sigma_{i_1},\ G_0^{(i_3)}G_0^{(i_2)}\Sigma_{i_1}, \tag{7.113}$$

$$\frac{\Delta^2}{2}L\mathbf{a},\ G_0^{(i_2)}L\Sigma_{i_1},\ G_0^{(i_2)}G_0^{(i_1)}\mathbf{a},\ LG_0^{(i_2)}\Sigma_{i_1}, G_0^{(i_4)}G_0^{(i_3)}G_0^{(i_2)}\Sigma_{i_1}, \tag{7.114}$$

$$G_0^{(i_1)}L\mathbf{a},\ L^2\Sigma_{i_1},\ LG_0^{(i_1)}\mathbf{a},\ G_0^{(i_3)}LG_0^{(i_2)}\Sigma_{i_1},\ G_0^{(i_3)}G_0^{(i_2)}L\Sigma_{i_1},$$

$$G_0^{(i_3)}G_0^{(i_2)}G_0^{(i_1)}\mathbf{a},\ LG_0^{(i_3)}G_0^{(i_2)}\Sigma_{i_1},\ G_0^{(i_5)}G_0^{(i_4)}G_0^{(i_3)}G_0^{(i_2)}\Sigma_{i_1}, \frac{\Delta^3}{6}L^2\mathbf{a}. \tag{7.115}$$

Введем обозначения:

$$\mathbf{y}_{pr}^{(ji)} = \mathbf{y}_p + \sqrt{\Delta}r_j\Sigma_i(\mathbf{y}_p, \tau_p),\ \mathbf{z}_{pq}^{(j)} = \mathbf{y}_p + \Delta q_j\mathbf{a}(\mathbf{y}_p, \tau_p),$$

$$\mathbf{u}_{ps}^{(ji)} = \mathbf{y}_p + \Delta s_j\Sigma_i(\mathbf{y}_p, \tau_p),\ \Delta_{ph}^{(j)} = \tau_p + h_j\Delta,$$

где $r_j = \beta_j, \omega_j, \varepsilon_j, \lambda_j, \phi_j;\ q_j = \chi_j, \nu_j, \delta_j;\ s_j = \sigma_j, \beta_j;\ h_j = \gamma_j, \chi_j, \xi_j$.

С помощью тейлоровских аппроксимаций (7.79)–(7.88) имеем следующие аппроксимации функций (7.113) в точке $(\mathbf{y}_p, \tau_p)$:

$$G_0^{(i_2)}\Sigma_{i_1}(\mathbf{y}_p, \tau_p) = \frac{1}{\sqrt{\Delta}}\sum_{j=1}^{4}\theta_j\Sigma_{i_1}(\mathbf{y}_{p\varepsilon}^{(ji_2)}, \tau_p) + O(\Delta^2), \tag{7.116}$$

$$G_0^{(i_1)}\mathbf{a}(\mathbf{y}_p, \tau_p) = \frac{1}{\Delta}\sum_{j=1}^{2}\alpha_j\mathbf{a}(\mathbf{u}_{p\beta}^{(ji_1)}, \tau_p) + O(\Delta^{3/2}), \tag{7.117}$$

$$L\Sigma_{i_1}(\mathbf{y}_p, \tau_p) = \frac{1}{\Delta}\left[\frac{1}{2}\sum_{r=1}^{m}\sum_{j=1}^{5}\psi_j\Sigma_{i_1}(\mathbf{y}_{p\phi}^{(jr)}, \tau_p) + \sum_{j=1}^{3}\varphi_j\Sigma_{i_1}(\mathbf{z}_{p\chi}^{(j)}, \Delta_{p\kappa}^{(j)})\right] + O(\Delta^{3/2}), \tag{7.118}$$

$$G_0^{(i_3)}G_0^{(i_2)}\Sigma_{i_1}(\mathbf{y}_p, \tau_p) = \frac{1}{\Delta}\sum_{j=1}^{4}\theta_j\mathbf{b}_{i_1i_2}(\mathbf{y}_{p\varepsilon}^{(ji_3)}, \tau_p) + O(\Delta^{3/2}), \tag{7.119}$$

$$\mathbf{b}_{i_1i_2}(\mathbf{y}_p, \tau_p) = \sum_{j=1}^{4}\eta_j\Sigma_{i_1}(\mathbf{y}_{p\omega}^{(ji_2)}, \tau_p).$$

Рассмотрим тейлоровские аппроксимации функций (7.114) в точке $(\mathbf{y}_p, \tau_p)$ с помощью соотношений (7.79)–(7.88):

$$\frac{\Delta^2}{2}L\mathbf{a}(\mathbf{y}_p, \tau_p) = \frac{\Delta}{2}\left[\frac{1}{2}\sum_{r=1}^{m}\sum_{j=1}^{5}\psi_j\mathbf{a}(\mathbf{y}_{p\phi}^{(jr)}, \tau_p) + \sum_{j=1}^{3}\varphi_j\mathbf{a}(\mathbf{z}_{p\chi}^{(j)}, \Delta_{p\kappa}^{(j)})\right] + O(\Delta^{\frac{7}{2}}), \tag{7.120}$$

$$G_0^{(i_2)} L\Sigma_{i_1}(\mathbf{y}_p, \tau_p) = \frac{1}{\Delta\sqrt{\Delta}} \sum_{j=1}^{4} \theta_j \mathbf{g}_{i_1}(\mathbf{y}_{p\varepsilon}^{(ji_2)}, \tau_p) + O(\Delta), \tag{7.121}$$

$$\mathbf{g}_{i_1}(\mathbf{y}_p, \tau_p) = \frac{1}{2} \sum_{r=1}^{m} \sum_{j=1}^{3} \mu_j \Sigma_{i_1}(\mathbf{y}_{p\lambda}^{(jr)}, \tau_p) + \sum_{j=1}^{2} \zeta_j \Sigma_{i_1}(\mathbf{z}_{p\delta}^{(j)}, \Delta_{p\gamma}^{(j)}),$$

$$G_0^{(i_2)} G_0^{(i_1)} \mathbf{a}(\mathbf{y}_p, \tau_p) = \frac{1}{\Delta\sqrt{\Delta}} \sum_{j=1}^{4} \theta_j \mathbf{h}_{i_1}(\mathbf{y}_{p\varepsilon}^{(ji_2)}, \tau_p) + O(\Delta), \tag{7.122}$$

$$\mathbf{h}_{i_1}(\mathbf{y}_p, \tau_p) = \sum_{j=1}^{2} \pi_j \mathbf{a}(\mathbf{u}_{p\sigma}^{(ji_1)}, \tau_p),$$

$$LG_0^{(i_2)} \Sigma_{i_1}(\mathbf{y}_p, \tau_p) = \frac{1}{\Delta\sqrt{\Delta}} \left[\frac{1}{2} \sum_{r=1}^{m} \sum_{j=1}^{5} \psi_j \mathbf{k}_{i_1 i_2}(\mathbf{y}_{p\phi}^{(jr)}, \tau_p) + \right.$$

$$\left. + \sum_{j=1}^{3} \varphi_j \mathbf{k}_{i_1 i_2}(\mathbf{z}_{p\chi}^{(j)}, \Delta_{p\kappa}^{(j)}) \right] + O(\Delta), \tag{7.123}$$

$$\mathbf{k}_{i_1 i_2}(\mathbf{y}_p, \tau_p) = \sum_{j=1}^{2} \alpha_j \Sigma_{i_1}(\mathbf{y}_{p\beta}^{(ji_2)}, \tau_p),$$

$$G_0^{(i_4)} G_0^{(i_3)} G_0^{(i_2)} \Sigma_{i_1}(\mathbf{y}_p, \tau_p) = \frac{1}{\Delta\sqrt{\Delta}} \sum_{j=1}^{4} \theta_j \mathbf{c}_{i_1 i_2 i_3}(\mathbf{y}_{p\varepsilon}^{(ji_4)}, \tau_p) + O(\Delta), \tag{7.124}$$

$$\mathbf{c}_{i_1 i_2 i_3}(\mathbf{y}_p, \tau_p) = \sum_{j=1}^{4} \eta_j \mathbf{k}_{i_1 i_2}(\mathbf{y}_{p\omega}^{(ji_3)}, \tau_p).$$

Рассмотрим конечно-разностные аппроксимации функций (7.115) в точке $(\mathbf{y}_p, \tau_p)$ с помощью тейлоровских аппроксимаций (7.79)–(7.88):

$$L^2 \Sigma_{i_1}(\mathbf{y}_p, \tau_p) = \frac{1}{\Delta^2} \left[\frac{1}{2} \sum_{r=1}^{m} \sum_{j=1}^{5} \psi_j \mathbf{g}_{i_1}(\mathbf{y}_{p\phi}^{(jr)}, \tau_p) + \sum_{j=1}^{3} \varphi_j \mathbf{g}_{i_1}(\mathbf{z}_{p\chi}^{(j)}, \Delta_{p\kappa}^{(j)}) \right] + O(\Delta^{\frac{1}{2}}), \tag{7.125}$$

$$LG_0^{(i_1)} \mathbf{a}(\mathbf{y}_p, \tau_p) = \frac{1}{\Delta^2} \left[\frac{1}{2} \sum_{r=1}^{m} \sum_{j=1}^{5} \psi_j \mathbf{h}_{i_1}(\mathbf{y}_{p\phi}^{(jr)}, \tau_p) + \right.$$

$$\left. + \sum_{j=1}^{3} \varphi_j \mathbf{h}_{i_1}(\mathbf{z}_{p\chi}^{(j)}, \Delta_{p\kappa}^{(j)}) \right] + O(\sqrt{\Delta}), \tag{7.126}$$

$$G_0^{(i_1)} L\mathbf{a}(\mathbf{y}_p, \tau_p) = \frac{1}{\Delta^2} \sum_{j=1}^{2} \alpha_j \mathbf{q}(\mathbf{u}_{p\beta}^{(ji_1)}, \tau_p) + O(\sqrt{\Delta}), \tag{7.127}$$

$$\frac{\Delta^3}{6} L^2 \mathbf{a}(\mathbf{y}_p, \tau_p) = \frac{\Delta}{6} \left[\frac{1}{2} \sum_{r=1}^{m} \sum_{j=1}^{5} \psi_j \mathbf{q}(\mathbf{y}_{p\phi}^{(jr)}, \tau_p) + \right.$$

$$+\sum_{j=1}^{3}\varphi_j\mathbf{q}(\mathbf{z}_{p\chi}^{(j)},\Delta_{p\kappa}^{(j)})\Bigg]+O(\Delta^{\frac{7}{2}}), \tag{7.128}$$

$$\mathbf{q}(\mathbf{y}_p,\tau_p)=\frac{1}{2}\sum_{r=1}^{m}\sum_{j=1}^{3}\mu_j\mathbf{a}(\mathbf{y}_{p\lambda}^{(jr)},\tau_p)+\sum_{j=1}^{2}\zeta_j\mathbf{a}(\mathbf{z}_{p\delta}^{(j)},\Delta_{p\gamma}^{(j)}), \tag{7.129}$$

$$G_0^{(i_3)}LG_0^{(i_2)}\Sigma_{i_1}(\mathbf{y}_p,\tau_p)=\frac{1}{\Delta^2}\sum_{j=1}^{4}\theta_j\mathbf{s}_{i_1i_2}(\mathbf{y}_{p\varepsilon}^{(ji_3)},\tau_p)+O(\sqrt{\Delta}), \tag{7.130}$$

$$\mathbf{s}_{i_1i_2}(\mathbf{y}_p,\tau_p)=\frac{1}{2}\sum_{r=1}^{m}\sum_{j=1}^{3}\mu_j\mathbf{k}_{i_1i_2}(\mathbf{y}_{p\lambda}^{(jr)},\tau_p)+\sum_{j=1}^{2}\zeta_j\mathbf{k}_{i_1i_2}(\mathbf{z}_{p\delta}^{(j)},\Delta_{p\gamma}^{(j)}),$$

$$G_0^{(i_5)}G_0^{(i_4)}G_0^{(i_3)}G_0^{(i_2)}\Sigma_{i_1}(\mathbf{y}_p,\tau_p)=\frac{1}{\Delta^2}\sum_{j=1}^{4}\theta_j\mathbf{d}_{i_1i_2i_3i_4}(\mathbf{y}_{p\varepsilon}^{(ji_5)},\tau_p)+O(\sqrt{\Delta}), \tag{7.131}$$

$$\mathbf{d}_{i_1i_2i_3i_4}(\mathbf{y}_p,\tau_p)=\sum_{j=1}^{4}\eta_j\mathbf{o}_{i_1i_2i_3}(\mathbf{y}_{p\omega}^{(ji_4)},\tau_p),\ \ \mathbf{o}_{i_1i_2i_3}(\mathbf{y}_p,\tau_p)=\sum_{j=1}^{2}\alpha_j\mathbf{k}_{i_1i_2}(\mathbf{y}_{p\beta}^{(ji_3)},\tau_p),$$

$$G_0^{(i_3)}G_0^{(i_2)}G_0^{(i_1)}\mathbf{a}(\mathbf{y}_p,\tau_p)=\frac{1}{\Delta^2}\sum_{j=1}^{4}\theta_j\mathbf{v}_{i_1i_2}(\mathbf{y}_{p\varepsilon}^{(ji_3)},\tau_p)+O(\sqrt{\Delta}), \tag{7.132}$$

$$\mathbf{v}_{i_1i_2}(\mathbf{y}_p,\tau_p)=\sum_{j=1}^{4}\eta_j\mathbf{h}_{i_1}(\mathbf{y}_{p\omega}^{(ji_2)},\tau_p),$$

$$G_0^{(i_3)}G_0^{(i_2)}L\Sigma_{i_1}(\mathbf{y}_p,\tau_p)=\frac{1}{\Delta^2}\sum_{j=1}^{4}\theta_j\mathbf{e}_{i_1i_2}(\mathbf{y}_{p\varepsilon}^{(ji_3)},\tau_p)+O(\sqrt{\Delta}), \tag{7.133}$$

$$\mathbf{e}_{i_1i_2}(\mathbf{y}_p,\tau_p)=\sum_{j=1}^{4}\eta_j\mathbf{g}_{i_1}(\mathbf{y}_{p\omega}^{(ji_2)},\tau_p),$$

$$LG_0^{(i_3)}G_0^{(i_2)}\Sigma_{i_1}(\mathbf{y}_p,\tau_p)=\frac{1}{\Delta^2}\Bigg[\frac{1}{2}\sum_{r=1}^{m}\sum_{j=1}^{5}\psi_j\mathbf{r}_{i_1i_2i_3}(\mathbf{y}_{p\phi}^{(jr)},\tau_p)+$$

$$+\sum_{j=1}^{3}\varphi_j\mathbf{r}_{i_1i_2i_3}(\mathbf{z}_{p\chi}^{(j)},\Delta_{p\kappa}^{(j)})\Bigg]+O(\sqrt{\Delta}), \tag{7.134}$$

$$\mathbf{r}_{i_1i_2i_3}(\mathbf{y}_p,\tau_p)=\sum_{j=1}^{2}\alpha_j\mathbf{k}_{i_1i_2}(\mathbf{y}_{p\beta}^{(ji_3)},\tau_p).$$

После подстановки соотношений (7.116)–(7.134) в (7.58) и отбрасывания остаточных членов, получим явный одношаговый сильный конечно-разностный численный метод порядка точности 2.5 вида

$$\mathbf{y}_{p+1}=\mathbf{y}_p+\mathbf{a}(\mathbf{y}_p,\tau_p)\Delta+\frac{\Delta}{2}\Bigg[\frac{1}{2}\sum_{r=1}^{m}\sum_{j=1}^{5}\psi_j\mathbf{a}(\mathbf{y}_{p\phi}^{(jr)},\tau_p)+\sum_{j=1}^{3}\varphi_j\mathbf{a}(\mathbf{z}_{p\chi}^{(j)},\Delta_{p\kappa}^{(j)})\Bigg]+$$

$$+\frac{\Delta}{6}\left[\frac{1}{2}\sum_{r=1}^{m}\sum_{j=1}^{5}\psi_j\mathbf{q}(\mathbf{y}_{p\phi}^{(jr)},\tau_p)+\sum_{j=1}^{3}\varphi_j\mathbf{q}(\mathbf{z}_{p\chi}^{(j)},\Delta_{p\kappa}^{(j)})\right]+$$

$$+\sum_{i_1=1}^{m}\Sigma_{i_1}(\mathbf{y}_p,\tau_p)\hat{I}_{0_{\tau_{p+1},\tau_p}}^{(i_1)}+\frac{1}{\sqrt{\Delta}}\sum_{i_1,i_2=1}^{m}\sum_{j=1}^{4}\theta_j\Sigma_{i_1}(\mathbf{y}_{p\varepsilon}^{(ji_2)},\tau_p)\hat{I}_{00_{\tau_{p+1},\tau_p}}^{(i_2i_1)}+$$

$$+\frac{1}{\Delta}\sum_{i_1=1}^{m}\left[\sum_{j=1}^{2}\alpha_j\mathbf{a}(\mathbf{u}_{p\beta}^{(ji_1)},\tau_p)\left(\Delta\hat{I}_{0_{\tau_{p+1},\tau_p}}^{(i_1)}+\hat{I}_{1_{\tau_{p+1},\tau_p}}^{(i_1)}\right)-\right.$$

$$\left.-\left(\frac{1}{2}\sum_{r=1}^{m}\sum_{j=1}^{5}\psi_j\Sigma_{i_1}(\mathbf{y}_{p\phi}^{(jr)},\tau_p)+\sum_{j=1}^{3}\varphi_j\Sigma_{i_1}(\mathbf{z}_{p\chi}^{(j)},\Delta_{p\kappa}^{(j)})\right)\hat{I}_{1_{\tau_{p+1},\tau_p}}^{(i_1)}\right]+$$

$$+\frac{1}{\Delta}\sum_{i_1,i_2,i_3=1}^{m}\sum_{j=1}^{4}\theta_j\mathbf{b}_{i_1i_2}(\mathbf{y}_{p\varepsilon}^{(ji_3)},\tau_p)\hat{I}_{000_{\tau_{p+1},\tau_p}}^{(i_3i_2i_1)}+$$

$$+\frac{1}{\Delta\sqrt{\Delta}}\sum_{i_1,i_2=1}^{m}\left[\sum_{j=1}^{4}\theta_j\mathbf{g}_{i_1}(\mathbf{y}_{p\varepsilon}^{(ji_2)},\tau_p)\left(\hat{I}_{10_{\tau_{p+1},\tau_p}}^{(i_2i_1)}-\hat{I}_{01_{\tau_{p+1},\tau_p}}^{(i_2i_1)}\right)+\right.$$

$$+\sum_{j=1}^{4}\theta_j\mathbf{h}_{i_1}(\mathbf{y}_{p\varepsilon}^{(ji_2)},\tau_p)\left(\hat{I}_{01_{\tau_{p+1},\tau_p}}^{(i_2i_1)}+\Delta\hat{I}_{00_{\tau_{p+1},\tau_p}}^{(i_2i_1)}\right)-$$

$$\left.-\left(\frac{1}{2}\sum_{r=1}^{m}\sum_{j=1}^{5}\psi_j\mathbf{k}_{i_1i_2}(\mathbf{y}_{p\phi}^{(jr)},\tau_p)+\sum_{j=1}^{3}\varphi_j\mathbf{k}_{i_1i_2}(\mathbf{z}_{p\chi}^{(j)},\Delta_{p\kappa}^{(j)})\right)\hat{I}_{10_{\tau_{p+1},\tau_p}}^{(i_2i_1)}\right]+$$

$$+\frac{1}{\Delta\sqrt{\Delta}}\sum_{i_1,i_2,i_3i_4=1}^{m}\sum_{j=1}^{4}\theta_j\mathbf{c}_{i_1i_2i_3}(\mathbf{y}_{p\varepsilon}^{(ji_4)},\tau_p)\hat{I}_{0000_{\tau_{p+1},\tau_p}}^{(i_4i_3i_2i_1)}+$$

$$+\frac{1}{\Delta^2}\sum_{i_1=1}^{m}\left[\sum_{j=1}^{2}\alpha_j\mathbf{q}(\mathbf{u}_{p\beta}^{(ji_1)},\tau_p)\left(\frac{1}{2}\hat{I}_{2_{\tau_{p+1},\tau_p}}^{(i_1)}+\Delta\hat{I}_{1_{\tau_{p+1},\tau_p}}^{(i_1)}+\frac{\Delta^2}{2}\hat{I}_{0_{\tau_{p+1},\tau_p}}^{(i_1)}\right)+\right.$$

$$+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\sum_{r=1}^{m}\sum_{j=1}^{5}\psi_j\mathbf{g}_{i_1}(\mathbf{y}_{p\phi}^{(jr)},\tau_p)+\sum_{j=1}^{3}\varphi_j\mathbf{g}_{i_1}(\mathbf{z}_{p\chi}^{(j)},\Delta_{p\kappa}^{(j)})\right)\hat{I}_{2_{\tau_{p+1},\tau_p}}^{(i_1)}-$$

$$\left.-\left(\frac{1}{2}\sum_{r=1}^{m}\sum_{j=1}^{5}\psi_j\mathbf{h}_{i_1}(\mathbf{y}_{p\phi}^{(jr)},\tau_p)+\sum_{j=1}^{3}\varphi_j\mathbf{h}_{i_1}(\mathbf{z}_{p\chi}^{(j)},\Delta_{p\kappa}^{(j)})\right)\left(\hat{I}_{2_{\tau_{p+1},\tau_p}}^{(i_1)}+\Delta\hat{I}_{1_{\tau_{p+1},\tau_p}}\right)\right]$$

$$+\frac{1}{\Delta^2}\sum_{i_1,i_2,i_3=1}^{m}\left[\sum_{j=1}^{4}\theta_j\mathbf{s}_{i_1i_2}(\mathbf{y}_{p\varepsilon}^{(ji_3)},\tau_p)\left(\hat{I}_{100_{\tau_{p+1},\tau_p}}^{(i_3i_2i_1)}-\hat{I}_{010_{\tau_{p+1},\tau_p}}^{(i_3i_2i_1)}\right)+\right.$$

$$+\sum_{j=1}^{4}\theta_j\mathbf{e}_{i_1i_2}(\mathbf{y}_{p\varepsilon}^{(ji_3)},\tau_p)\left(\hat{I}_{010_{\tau_{p+1},\tau_p}}^{(i_3i_2i_1)}-\hat{I}_{001_{\tau_{p+1},\tau_p}}^{(i_3i_2i_1)}\right)+$$

$$+\sum_{j=1}^{4}\theta_j\mathbf{v}_{i_1i_2}(\mathbf{y}_{p\varepsilon}^{(ji_3)},\tau_p)\left(\Delta\hat{I}_{000_{\tau_{p+1},\tau_p}}^{(i_3i_2i_1)}+\hat{I}_{001_{\tau_{p+1},\tau_p}}^{(i_3i_2i_1)}\right)-$$

$$-\left(\frac{1}{2}\sum_{r=1}^{m}\sum_{j=1}^{5}\psi_j\mathbf{r}_{i_1i_2i_3}(\mathbf{y}_{p\phi}^{(jr)},\tau_p)+\sum_{j=1}^{3}\varphi_j\mathbf{r}_{i_1i_2i_3}(\mathbf{z}_{p\chi}^{(j)},\Delta_{p\kappa}^{(j)})\right)\hat{I}_{100_{\tau_{p+1},\tau_p}}^{(i_3i_2i_1)}\Bigg]+$$

$$+\frac{1}{\Delta^2}\sum_{i_1,i_2,i_3,i_4,i_5=1}^{m}\sum_{j=1}^{4}\theta_j\mathbf{d}_{i_1i_2i_3i_4}(\mathbf{y}_{p\varepsilon}^{(ji_5)},\tau_p)\hat{I}_{00000_{\tau_{p+1},\tau_p}}^{(i_5i_4i_3i_2i_1)}. \qquad (7.135)$$

Рассмотрим теперь численный метод, аналогичный (7.135) и основанный на разложении Тейлора–Ито в форме Вагнера и Платена:

$$\mathbf{y}_{p+1}=\mathbf{y}_p+\mathbf{a}(\mathbf{y}_p,\tau_p)\Delta+\frac{\Delta}{2}\left[\frac{1}{2}\sum_{r=1}^{m}\sum_{j=1}^{5}\psi_j\mathbf{a}(\mathbf{y}_{p\phi}^{(jr)},\tau_p)+\sum_{j=1}^{3}\varphi_j\mathbf{a}(\mathbf{z}_{p\chi}^{(j)},\Delta_{p\kappa}^{(j)})\right]+$$

$$+\frac{\Delta}{6}\left[\frac{1}{2}\sum_{r=1}^{m}\sum_{j=1}^{5}\psi_j\mathbf{q}(\mathbf{y}_{p\phi}^{(jr)},\tau_p)+\sum_{j=1}^{3}\varphi_j\mathbf{q}(\mathbf{z}_{p\chi}^{(j)},\Delta_{p\kappa}^{(j)})\right]+$$

$$+\sum_{i_1=1}^{m}\Sigma_{i_1}(\mathbf{y}_p,\tau_p)\hat{J}_{(1)\tau_{p+1},\tau_p}^{(i_1)}+\frac{1}{\sqrt{\Delta}}\sum_{i_1,i_2=1}^{m}\sum_{j=1}^{4}\theta_j\Sigma_{i_1}(\mathbf{y}_{p\varepsilon}^{(ji_2)},\tau_p)\hat{J}_{(11)\tau_{p+1},\tau_p}^{(i_2i_1)}+$$

$$+\frac{1}{\Delta}\sum_{i_1=1}^{m}\left[\sum_{j=1}^{2}\alpha_j\mathbf{a}(\mathbf{u}_{p\beta}^{(ji_1)},\tau_p)\hat{J}_{(10)\tau_{p+1},\tau_p}^{(i_1)}+\right.$$

$$\left.+\left(\frac{1}{2}\sum_{r=1}^{m}\sum_{j=1}^{5}\psi_j\Sigma_{i_1}(\mathbf{y}_{p\phi}^{(jr)},\tau_p)+\sum_{j=1}^{3}\varphi_j\Sigma_{i_1}(\mathbf{z}_{p\chi}^{(j)},\Delta_{p\kappa}^{(j)})\right)\hat{J}_{(01)\tau_{p+1},\tau_p}^{(i_1)}\right]+$$

$$+\frac{1}{\Delta}\sum_{i_1,i_2,i_3=1}^{m}\sum_{j=1}^{4}\theta_j\mathbf{b}_{i_1i_2}(\mathbf{y}_{p\varepsilon}^{(ji_3)},\tau_p)\hat{J}_{(111)\tau_{p+1},\tau_p}^{(i_3i_2i_1)}+$$

$$+\frac{1}{\Delta\sqrt{\Delta}}\sum_{i_1,i_2=1}^{m}\left[\sum_{j=1}^{4}\theta_j\mathbf{g}_{i_1}(\mathbf{y}_{p\varepsilon}^{(ji_2)},\tau_p)\hat{J}_{(101)\tau_{p+1},\tau_p}^{(i_2i_1)}+\sum_{j=1}^{4}\theta_j\mathbf{h}_{i_1}(\mathbf{y}_{p\varepsilon}^{(ji_2)},\tau_p)\hat{J}_{(110)\tau_{p+1},\tau_p}^{(i_2i_1)}\right.$$

$$\left.+\left(\frac{1}{2}\sum_{r=1}^{m}\sum_{j=1}^{5}\psi_j\mathbf{k}_{i_1i_2}(\mathbf{y}_{p\phi}^{(jr)},\tau_p)+\sum_{j=1}^{3}\varphi_j\mathbf{k}_{i_1i_2}(\mathbf{z}_{p\chi}^{(j)},\Delta_{p\kappa}^{(j)})\right)\hat{J}_{(011)\tau_{p+1},\tau_p}^{(i_2i_1)}\right]+$$

$$+\frac{1}{\Delta\sqrt{\Delta}}\sum_{i_1,i_2,i_3i_4=1}^{m}\sum_{j=1}^{4}\theta_j\mathbf{c}_{i_1i_2i_3}(\mathbf{y}_{p\varepsilon}^{(ji_4)},\tau_p)\hat{J}_{(1111)\tau_{p+1},\tau_p}^{(i_4i_3i_2i_1)}+$$

$$+\frac{1}{\Delta^2}\sum_{i_1=1}^{m}\left[\sum_{j=1}^{2}\alpha_j\mathbf{q}(\mathbf{u}_{p\beta}^{(ji_1)},\tau_p)\hat{J}_{(100)\tau_{p+1},\tau_p}^{(i_1)}+\right.$$

$$+\left(\frac{1}{2}\sum_{r=1}^{m}\sum_{j=1}^{5}\psi_j\mathbf{g}_{i_1}(\mathbf{y}_{p\phi}^{(jr)},\tau_p)+\sum_{j=1}^{3}\varphi_j\mathbf{g}_{i_1}(\mathbf{z}_{p\chi}^{(j)},\Delta_{p\kappa}^{(j)})\right)\hat{J}_{(001)\tau_{p+1},\tau_p}^{(i_1)}+$$

$$\left.+\left(\frac{1}{2}\sum_{r=1}^{m}\sum_{j=1}^{5}\psi_j\mathbf{h}_{i_1}(\mathbf{y}_{p\phi}^{(jr)},\tau_p)+\sum_{j=1}^{3}\varphi_j\mathbf{h}_{i_1}(\mathbf{z}_{p\chi}^{(j)},\Delta_{p\kappa}^{(j)})\right)\hat{J}_{(010)\tau_{p+1},\tau_p}\right]+$$

$$+\frac{1}{\Delta^2}\sum_{i_1,i_2,i_3=1}^{m}\left[\sum_{j=1}^{4}\theta_j\mathbf{s}_{i_1i_2}(\mathbf{y}_{p\varepsilon}^{(ji_3)},\tau_p)\hat{J}_{(1011)_{\tau_{p+1},\tau_p}}^{(i_3i_2i_1)}+\right.$$

$$+\sum_{j=1}^{4}\theta_j\mathbf{e}_{i_1i_2}(\mathbf{y}_{p\varepsilon}^{(ji_3)},\tau_p)\hat{J}_{(1101)_{\tau_{p+1},\tau_p}}^{(i_3i_2i_1)}+\sum_{j=1}^{4}\theta_j\mathbf{v}_{i_1i_2}(\mathbf{y}_{p\varepsilon}^{(ji_3)},\tau_p)\hat{J}_{(1110)_{\tau_{p+1},\tau_p}}^{(i_3i_2i_1)}+$$

$$\left.+\left(\frac{1}{2}\sum_{r=1}^{m}\sum_{j=1}^{5}\psi_j\mathbf{r}_{i_1i_2i_3}(\mathbf{y}_{p\phi}^{(jr)},\tau_p)+\sum_{j=1}^{3}\varphi_j\mathbf{r}_{i_1i_2i_3}(\mathbf{z}_{p\chi}^{(j)},\Delta_{p\kappa}^{(j)})\right)\hat{J}_{(0111)_{\tau_{p+1},\tau_p}}^{(i_3i_2i_1)}\right]+$$

$$+\frac{1}{\Delta^2}\sum_{i_1,i_2,i_3,i_4,i_5=1}^{m}\sum_{j=1}^{4}\theta_j\mathbf{d}_{i_1i_2i_3i_4}(\mathbf{y}_{p\varepsilon}^{(ji_5)},\tau_p)\hat{J}_{(11111)_{\tau_{p+1},\tau_p}}^{(i_5i_4i_3i_2i_1)}. \qquad (7.136)$$

7.7.6 О сходимости явных сильных одношаговых конечно-разностных численных методов

В заключение разд. 7.7 коснемся сходимости явных сильных одношаговых конечно-разностных численных методов. Для этого запишем общее представление такой численной схемы, основанной на унифицированном разложении Тейлора–Ито, и точное представление решения стохастического дифференциального уравнения Ито (7.18):

$$\mathbf{u}_{\tau_{p+1}}=\mathbf{u}_{\tau_p}+\sum_{q=1}^{r}\sum_{(k,j,l_1,\ldots,l_k)\in\mathcal{D}'_q}\frac{(\Delta_p)^j}{j!}\ {}^{(k)}F_{l_1\ldots l_k,j}\left\{\mathbf{u}_{\tau_p}\right\}\overset{k}{\cdot}\ {}^{(k)}\hat{I}_{l_1\ldots l_k\tau_{p+1},\tau_p}, \qquad (7.137)$$

$$\mathbf{x}_{\tau_{p+1}}=\mathbf{x}_{\tau_p}+\sum_{q=1}^{r}\sum_{(k,j,l_1,\ldots,l_k)\in\mathcal{D}'_q}\frac{(\Delta_p)^j}{j!}\ {}^{(k)}G_{l_1}\ldots G_{l_k}L^j\left\{\mathbf{x}_{\tau_p}\right\}\overset{k}{\cdot}\ {}^{(k)}I_{l_1\ldots l_k\tau_{p+1},\tau_p}+$$

$$+H'_{r+1_{\tau_{p+1},\tau_p}}\ \text{с в.1}, \qquad (7.138)$$

где $\Delta_p\overset{\text{def}}{=}\tau_{p+1}-\tau_p$; ${}^{(k)}F_{l_1\ldots l_k,j}\left\{\mathbf{x}\right\}=\left\|F_{l_1\ldots l_k,j}^{(i_1\ldots i_k)}(\mathbf{x})\right\|_{i_1,\ldots,i_k=1}^{m}$; $F_{l_1\ldots l_k,j}^{(i_1\ldots i_k)}(\mathbf{x})$ — конечно-разностная аппроксимация для $G_{l_1}^{(i_1)}\ldots G_{l_k}^{(i_k)}L^j\mathbf{x}$; остальные обозначения, входящие в (7.137), (7.138), соответствуют обозначениям в формулах (7.21), (7.24).

Положим для всех $t\in[0,T]:z_t\overset{\text{def}}{=}\mathsf{M}\left\{\left|\mathbf{u}_t-\mathbf{x}_t\right|^2\right\}$, где $\mathbf{u}_t$, $t\in[\tau_p,\tau_{p+1}]$, определяется равенством (7.137), в котором необходимо заменить τ_{p+1} на t.

Сформулируем утверждение о сходимости численной схемы (7.137).

Теорема 7.6. *Пусть выполнены условия теоремы* 7.2, *а также следующие условия:*

1. *Случайные величины* $F_{l_1\ldots l_k,j}^{(i_1\ldots i_k)}(\mathbf{u}_{\tau_g})$ $\mathcal{F}_{\tau_g}$*-измеримы.*

2. *При всех* $p = 0,\ 1, \ldots, N-1$; $i_1, \ldots, i_k = 1, \ldots, m$; $(k, j, l_1, \ldots, l_k) \in \bigcup\limits_{q=1}^{r} \mathcal{D}'_q$ *случайные величины* $F_{l_1 \ldots l_k, j}^{(i_1 \ldots i_k)}(\mathbf{u}_{\tau_p})$ *удовлетворяют условию*

$$\mathsf{M}\left\{\max_{0 \le p \le N} \left|F_{l_1 \ldots l_k, j}^{(i_1 \ldots i_k)}(\mathbf{u}_{\tau_p}) - G_{l_1}^{(i_1)} \ldots G_{l_k}^{(i_k)} L^j \mathbf{u}_{\tau_p}\right|^2\right\} \le C \Delta^{r+1-k-2(j+\sum\limits_{i=1}^{k} l_i)+\mathbf{1}_{\{k=0\}}}, \tag{7.139}$$

где $C < \infty$ *— постоянная.*

3. $\mathsf{M}\{|\mathbf{u}_0 - \mathbf{x}_0|^2\} \le C_1 \Delta^r$.

Тогда справедлива оценка $z_T \le C_1 \Delta^r$, *где* $C_1 < \infty$; $\mathbf{x}_t$ *— решение стохастического дифференциального уравнения Ито* (7.18), *т. е. численный метод* (7.137) *является методом с порядком сильной сходимости, равным* $r/2$.

Доказательство. Согласно (7.137), (7.138) имеем

$$\mathbf{u}_s - \mathbf{x}_s = \mathbf{u}_0 - \mathbf{x}_0 + \sum_{q=1}^{r} \sum_{(k,j,l_1,\ldots,l_k) \in \mathcal{D}'_q} \left(\sum_{g=0}^{n_s-1} Q_{j l_1 \ldots l_{k \tau_{g+1}, \tau_g}} + Q_{j l_1 \ldots l_{k_{s, \tau_{n_s}}}}\right) -$$

$$- \sum_{g=0}^{n_s-1} H'_{r+1_{\tau_{g+1}, \tau_g}} - H'_{r+1_{s, \tau_{n_s}}},$$

где $Q_{j l_1 \ldots l_{k \theta, t}} = X_{j l_1 \ldots l_{k \theta, t}} + Y_{j l_1 \ldots l_{k \theta, t}} + Z_{j l_1 \ldots l_{k \theta, t}}$; $n_s \stackrel{\text{def}}{=} \max\limits_{p} \{p : \tau_p \le s\}$;

$$X_{j l_1 \ldots l_{k \theta, t}} \stackrel{\text{def}}{=} \frac{(\theta - t)^j}{j!} \left[{}^{(k)}F_{l_1 \ldots l_k, j}\{\mathbf{u}_t\} - {}^{(k)}G_{l_1} \ldots G_{l_k} L^j \{\mathbf{u}_t\}\right] \stackrel{k}{\cdot} {}^{(k)}\hat{I}_{l_1 \ldots l_{k \theta, t}};$$

$$Y_{j l_1 \ldots l_{k \theta, t}} \stackrel{\text{def}}{=} \frac{(\theta - t)^j}{j!} \left[{}^{(k)}G_{l_1} \ldots G_{l_k} L^j \{\mathbf{u}_t\} - {}^{(k)}G_{l_1} \ldots G_{l_k} L^j \{\mathbf{x}_t\}\right] \stackrel{k}{\cdot} {}^{(k)}\hat{I}_{l_1 \ldots l_{k \theta, t}};$$

$$Z_{j l_1 \ldots l_{k \theta, t}} \stackrel{\text{def}}{=} \frac{(\theta - t)^j}{j!} {}^{(k)}G_{l_1} \ldots G_{l_k} L^j \{\mathbf{x}_t\} \stackrel{k}{\cdot} \left({}^{(k)}\hat{I}_{l_1 \ldots l_{k \theta, t}} - {}^{(k)}I_{l_1 \ldots l_{k \theta, t}}\right);$$

остаточный член $H'_{r+1_{s,t}}$ имеет вид (7.19), а $\mathbf{u}_s$ определяется формулой (7.137) при $\tau_{p+1} = s$.

Далее, несколько модифицируя доказательство теоремы 7.2, в условиях теоремы 7.6 приходим к следующему неравенству:

$$z_T \le C_2 \Delta^r + C_3 \int_0^T z_u du;\ C_2, C_3 < \infty,$$

из которого согласно неравенству Гронуолла получаем: $z_T \le C_1 \Delta^r$. Теорема доказана. □

Отметим, что аналоги теоремы 7.6 могут быть сформулированы для явных одношаговых конечно-разностных численных методов, основанных на разложении Тейлора–Ито в форме Вагнера и Платена и разложении Тейлора–Стратоновича в форме Клоедена и Платена. Эти теоремы можно найти, например, в [86].

Отметим также, что проверка условия (7.139) для каждого конкретного конечно-разностного численного метода не представляет особого труда, если коэффициенты диффузии и сноса стохастического дифференциального уравнения Ито (7.18) являются достаточно гладкими функциями своих аргументов. Необходимая для сходимости численного метода степень гладкости этих функций очевидно определяется структурой конкретных конечно-разностных аппроксимаций $F_{l_1\ldots l_k,j}^{(i_1\ldots i_k)}(\mathbf{x})$.

Следует отметить, что приведенные в разд. 7.7.3–7.7.5 явные сильные одношаговые конечно-разностные численные методы порядка точности 1.5, 2.0 и 2.5 являются новыми, причем численные методы порядка точности 2.0 и 2.5 для векторных стохастических дифференциальных уравнений Ито ($n \geq 1$) с многомерным шумом ($m \geq 1$) не имеют аналогов в литературе.

7.8 Об ослаблении достаточных условий сходимости численных методов

Одним из достаточных условий, обеспечивающих сходимость рассмотренных в данной главе, а также в нескольких последующих главах, численных методов является глобальное условие Липшица на коэффициенты стохастического дифференциального уравнения (теоремы 7.1–7.6, 9.1).

Как отмечается в ряде работ (см., например, [186]) глобальное условие Липшица является слишком жестким и не выполняется в ряде практически важных случаев.

Поскольку метод Эйлера является наиболее простым (напомним, что его изучение применительно к стохастическим дифференциальным уравнениям Ито в работе [134] в середине 50-х годов XX века можно условно считать одной из отправных точек для развития численного интегрирования стохастических дифференциальных уравнений Ито), то для него получено большее число результатов по обоснованию сходимости при более мягких достаточных условиях (см., например, [186] и библиографию к этой книге).

Здесь мы очень кратко отметим некоторые соображения по данному вопросу.

Рассмотрим векторное стохастическое дифференциальное уравнение Ито в автономном случае:

$$d\mathbf{x}_t = \mathbf{a}(\mathbf{x}_t)dt + \Sigma(\mathbf{x}_t)d\mathbf{f}_t,\ \mathbf{x}_0 = \mathbf{x}(0,\omega), \tag{7.140}$$

где $\mathbf{x}_t \in \Re^n$ — случайный процесс, являющийся решением уравнения (7.140); $\mathbf{f}_t \in \Re^m$ — $\mathcal{F}_t$-измеримый при всех $t \in [0,T]$ стандартный винеровский процесс с независимыми компонентами $\mathbf{f}_t^{(i)}$ $(i = 1,\ldots,m)$; $\mathbf{a} : \Re^n \to \Re^n$, $\Sigma : \Re^n \to \Re^{n\times m}$; $\mathbf{x}_0$ — начальное условие, которое стохастически независимо с $\mathbf{f}_t - \mathbf{f}_0$ при $t > 0$.

В [186] (см. также библиографию к этой книге) отмечается, что существует результат о сильной сходимости явного метода Эйлера для уравнения (7.140) при выполнении локального условия Липшица на его коэффициенты, т.е. когда для любого $R > 0$ существует такая постоянная K_R, что при $|\mathbf{x}| \le R$ и $|\mathbf{y}| \le R$ выполняется неравенство

$$|\mathbf{a}(\mathbf{x}) - \mathbf{a}(\mathbf{y})| + \sum_{k=1}^{m} |\Sigma_k(\mathbf{x}) - \Sigma_k(\mathbf{y})| \le K_R|\mathbf{x} - \mathbf{y}|. \tag{7.141}$$

А именно, если условие (7.141) дополнить условием существования для некоторого $q > 2$ такой постоянной C, что

$$X_{N,q} = \mathsf{M}\Big\{\sup_{1\le p\le N} |\mathbf{x}_p|^q\Big\} \le C,\ Y_{N,q} = \mathsf{M}\Big\{\sup_{1\le p\le N} |\mathbf{y}_p|^q\Big\} \le C,$$

где $\mathbf{x}_p$ — точное решение уравнения (7.140) в момент времени $p\Delta$, $\mathbf{y}_p$ — его эйлеровская аппроксимация в тот же момент времени, а Δ — шаг интегрирования, то справедливо следующее неравенство

$$\mathsf{M}\Big\{\sup_{1\le p\le N} |\mathbf{x}_p - \mathbf{y}_p|^2\Big\} \le H\Delta, \tag{7.142}$$

где H — постоянная, которая не зависит от Δ.

В тех же источниках отмечается, что на практике часто коэффициенты стохастического дифференциального уравнения Ито (7.140) удовлетворяют следующим двум условиям:

1. *Глобальное условие Липшица на столбцы матрицы* $\Sigma(\mathbf{x})$;

2. *Существует такая постоянная* K, *что при любых* $\mathbf{x},\ \mathbf{y} \in \Re^n$ *выполняется неравенство* $(\mathbf{x} - \mathbf{y})^{\mathsf{T}}(\mathbf{a}(\mathbf{x}) - \mathbf{a}(\mathbf{y})) \le K\,|\mathbf{x} - \mathbf{y}|^2$ (*так называемое одностороннее условие Липшица на столбец* $\mathbf{a}(\mathbf{x})$).

При этом неравенство $Y_{N,q} \leq C$ может не выполняться и метод Эйлера соответственно может расходиться. В [186] приводится численный пример, показывающий, что приведенные доводы не являются вымыслом, а действительно реализуются на практике.

Там же путем численного эксперимента показано, что при условиях 1 и 2 метод Эйлера не будет расходиться, если численное интегрирование осуществляется с выбираемым специальным образом переменным шагом интегрирования. В [186] также отмечается, что другой способ достижения сходимости метода Эйлера при выполнении условий 1 и 2 заключается в конструировании неявных численных схем на основе метода Эйлера (приводятся неявные модификации метода Эйлера, которые при условиях 1 и 2, а также некотором дополнительном условии являются сходящимися и удовлетворяют неравенству (7.142)).

Проблема ослабления достаточных условий сходимости численных методов для стохастических дифференциальных уравнений выходит за рамки настоящей монографии, хотя несомненно является очень важной и пока малоизученной.

Глава 8

Неявные одношаговые сильные численные методы решения стохастических дифференциальных уравнений Ито

В данной главе рассматриваются неявные сильные одношаговые методы численного решения стохастических дифференциальных уравнений Ито. Отличием неявных численных методов от явных является то, что вычисляемая на k-м шаге интегрирования неизвестная величина входит как в левую, так и в правую части неявной численной схемы. Таким образом, для определения этой величины приходится на каждом шаге интегрирования дополнительно решать алгебраическое уравнение. Это уравнение может быть решено одним из известных стандартных численных методов, например, методом Ньютона–Рафсона. Потребность в неявных численных методах, в частности, методах решения стохастических дифференциальных уравнений, объясняется тем, что эти методы, как правило, обладают большей устойчивостью [70, 86, 94, 147, 149], нежели явные численные методы. Кроме того, как показано в ряде работ (см., например, [93, 99]), неявные численные методы значительно лучше ведут себя по отношению к жестким системам, чем явные.

Неявные одношаговые сильные численные методы решения стохастических дифференциальных уравнений Ито рассматривались в ряде работ. В [70, 142] приведены неявные методы Эйлера и неявный одношаговый сильный численный метод порядка точности 1.0. В [70] предложен неявный одношаговый сильный численный метод порядка точности 1.5 решения стохастического дифференциального уравнения Ито с аддитивным шумом.

Общий вариант данного численного метода, а также неявный одношаговый сильный численный метод порядка точности 2.0 (без необходимых аппроксимаций стохастических интегралов) решения векторного стохастического дифференциального уравнения Ито с многомерным шумом приведены в [86]. В той же работе получены неявные одношаговые сильные конечно-разностные численные методы порядка точности 1.0 и 1.5 решения векторного стохастического дифференциального уравнения Ито с многомерным шумом. Для случая аддитивного скалярного шума в [86] построен неявный одношаговый сильный конечно-разностный численный метод порядка точности 2.0. Неявный одношаговый сильный конечно-разностный численный метод порядка точности 1.5 при аддитивном шуме рассматривается также в [142].

В настоящей главе наряду с известными неявными одношаговыми сильными численными методами приводятся их модификации, основанные на унифицированном разложении Тейлора–Ито. Кроме того, предлагаются новые неявные одношаговые сильные численные методы, в том числе конечно-разностные, порядка точности 2.0 и 2.5.

Следует отметить, что так же, как и в [70, 86], мы будем рассматривать в основном такие неявные численные методы, в которых "неявность", т. е. вычисляемая на k-м шаге интегрирования неизвестная величина, входит только в систематические члены разложения Тейлора–Ито ($\mathbf{a}\Delta$, $\frac{1}{2}L\mathbf{a}\Delta^2$) правой части неявной численной схемы. Это обстоятельство связано с тем, что если "неявность" входит не только в систематические, но и в стохастические члены разложения Тейлора–Ито правой части неявной численной схемы, то для таких численных схем, вообще говоря, перестают существовать моментные характеристики, что делает невозможным применение указанных численных методов. В частности, это показано в [86] на примере тестовых линейных стохастических дифференциальных уравнений с мультипликативным шумом. Исключение составляют сбалансированные неявные методы [93].

8.1 Неявный метод Эйлера

Рассмотрим семейство неявных методов Эйлера [70, 86], являющихся одними из наиболее простых неявных одношаговых сильных численных методов:

$$\mathbf{y}_{p+1}^{(l)} = \mathbf{y}_p^{(l)} + \left\{\tilde{\alpha}_l \mathbf{a}^{(l)}(\mathbf{y}_{p+1}, \tau_{p+1}) + (1-\tilde{\alpha}_l)\mathbf{a}^{(l)}(\mathbf{y}_p, \tau_p)\right\}(\tau_{p+1}-\tau_p) +$$

$$+ \sum_{i=1}^{m} \Sigma^{(li)}(\mathbf{y}_p, \tau_p)(\mathbf{f}_{\tau_{p+1}}^{(i)} - \mathbf{f}_{\tau_p}^{(i)}), \qquad (8.1)$$

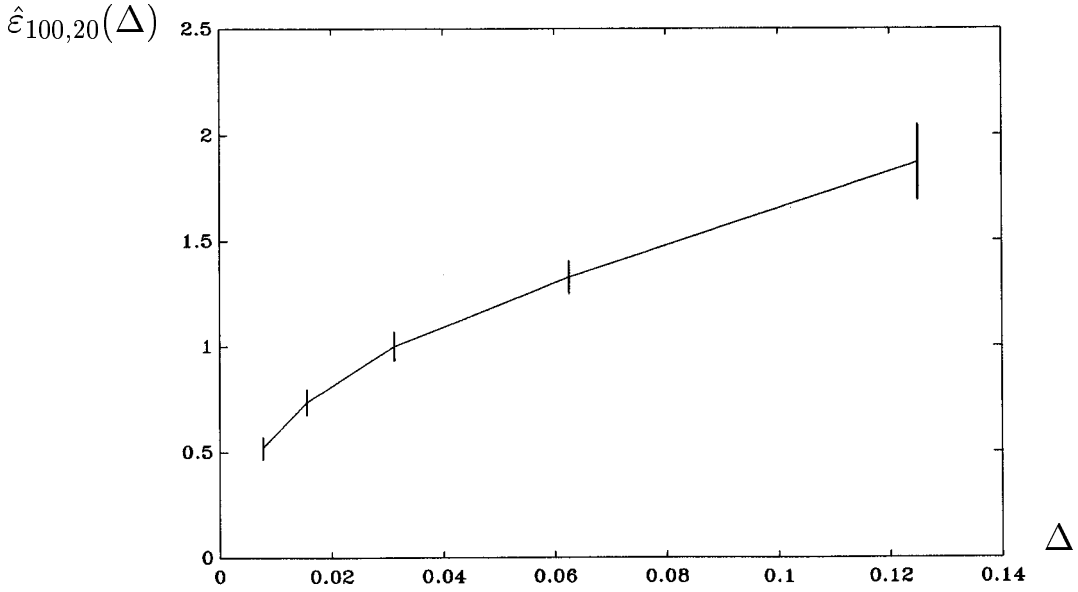

Рис. 8.1. Результат численного эксперимента 8.1 при $\tilde{\alpha}_1 = \frac{1}{2}$.

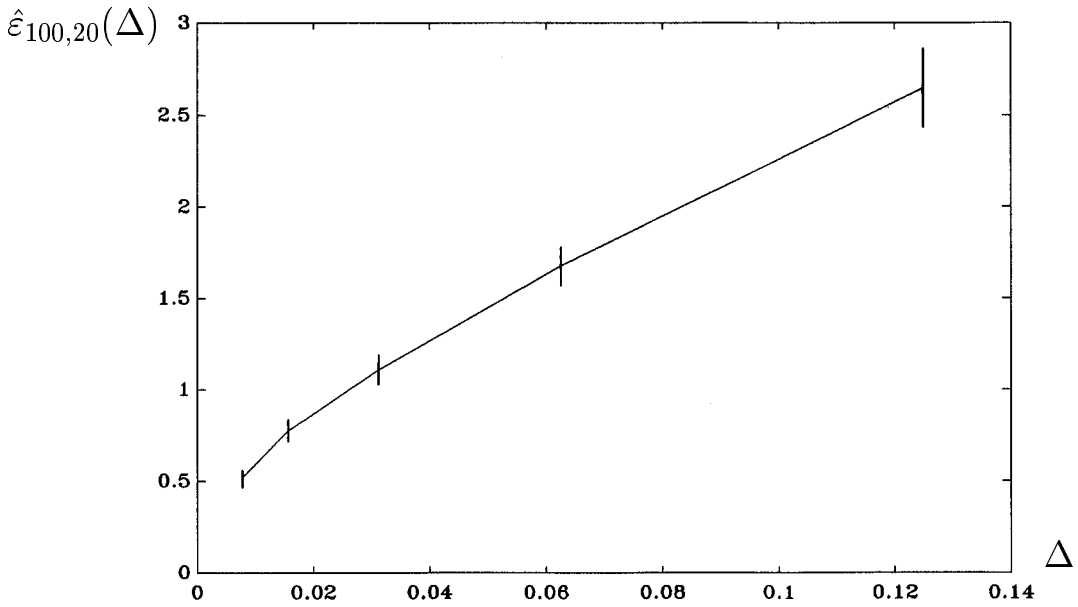

Рис. 8.2. Результат численного эксперимента 8.1 при $\tilde{\alpha}_1 = 1$.

где $\mathbf{y}_{\tau_p} \stackrel{\text{def}}{=} \mathbf{y}_p$; $\{\tau_p\}_{p=0}^{N}$ — разбиение промежутка $[0, T]$ такое, что $0 = \tau_0 < \tau_1 < \ldots < \tau_N = T$, $\Delta_N = \max\limits_{0 \le j \le N-1} |\tau_{j+1} - \tau_j|$; $\tilde{\alpha}_l \in [0, 1]$; $l = 1, \ldots, n$; $\mathbf{f}_t$ — стандартный m-мерный винеровский процесс с независимыми компонентами $\mathbf{f}_t^{(i)}$; $i = 1, \ldots, m$.

Очевидно, что при $\tilde{\alpha}_l = 0$; $l = 1, \ldots, n$ численный метод (8.1) трансформируется в явный метод Эйлера, а при $\tilde{\alpha}_l = \frac{1}{2}$; $l = 1, \ldots, n$ он является обобщением детерминированного метода трапеций.

Численный эксперимент 8.1 (рис. 8.1, 8.2). *Для стохастического дифференциального уравнения Ито*

$$dx_t = ax_t dt + bx_t df_t;\ x_0 = 1;\ t \in [0,T];\ f_t \in \Re^1 \tag{8.2}$$

смоделировать 2000 ($M = 20$ *групп по* $N = 100$ *реализаций*) *независимых реализаций случайной величины* x_T *при* $T = 1$, $a = b = 1.5$ *по формуле*

$$x_T = x_0 \exp\Big((a - 0.5b^2)T + b\sqrt{\Delta}\sum_{i=0}^{N-1}\zeta_i\Big)$$

и с помощью неявного метода Эйлера (8.1) *при* $\tilde{\alpha}_1 = \frac{1}{2}$ *и* 1, *взяв в* (8.1) $\mathbf{f}_{\tau_{i+1}} - \mathbf{f}_{\tau_i} = \sqrt{\Delta}\zeta_i$. *Здесь* $N = T/\Delta$; $\Delta = 2^{-3}$; ζ_i $(i = 0, 1, \ldots, N-1)$ *— независимые стандартные гауссовские случайные величины. Вычислить оценку* $\hat{\varepsilon}_{100,20}$ *ошибки* $\varepsilon = \mathsf{M}\{|x_T - y_T|\}$ *по формуле* (7.3) (y_T *определяется из* (8.1)) *и* 90%*-й доверительный интервал для* ε. *Повторить вычисления при* $\Delta = 2^{-j}$; $j = 4, 5, 6, 7$ *и изобразить графически зависимость* $\hat{\varepsilon}_{100,20}(\Delta)$ *с* 90%*-ми доверительными интервалами для* ε *при указанных значениях* Δ.

Численный эксперимент 8.2 [86] (рис.8.3–8.5). *Для стохастического дифференциального уравнения Ито*

$$d\begin{pmatrix}\mathbf{x}_t^{(1)}\\ \mathbf{x}_t^{(2)}\end{pmatrix} = a\begin{pmatrix}\mathbf{x}_t^{(2)} - \mathbf{x}_t^{(1)}\\ \mathbf{x}_t^{(1)} - \mathbf{x}_t^{(2)}\end{pmatrix}dt + b\begin{pmatrix}\mathbf{x}_t^{(1)}\\ \mathbf{x}_t^{(2)}\end{pmatrix}df_t,\ \begin{pmatrix}\mathbf{x}_0^{(1)}\\ \mathbf{x}_0^{(2)}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\ 0\end{pmatrix},$$

$f_t \in \Re^1$; $t \in [0,T]$ *смоделировать* 2000 ($M = 20$ *групп по* $N = 100$ *реализаций*) *независимых реализаций векторной случайной величины* $\mathbf{x}_T = \begin{pmatrix}\mathbf{x}_T^{(1)} & \mathbf{x}_T^{(2)}\end{pmatrix}^{\mathsf{T}}$ *при* $T = 1$, $a = 5$, $b = 0.01$ *по формуле*

$$\mathbf{x}_T = Q\begin{pmatrix} e^{-\frac{1}{2}b^2T + b\sqrt{\Delta}\sum\limits_{i=0}^{N-1}\zeta_i} & 0\\ 0 & e^{(-2a-\frac{1}{2}b^2)T + b\sqrt{\Delta}\sum\limits_{i=0}^{N-1}\zeta_i}\end{pmatrix}Q^{-1}\mathbf{x}_0$$

и с помощью неявного метода Эйлера (8.1) *при* $\tilde{\alpha}_1 = \tilde{\alpha}_2 = \frac{1}{2}$, *взяв* $\mathbf{f}_{\tau_{i+1}} - \mathbf{f}_{\tau_i} = \sqrt{\Delta}\zeta_i$ *в* (8.1). *Здесь* $Q = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & -1\end{pmatrix} = Q^{-1}$; $N = T/\Delta$; $\Delta = 2^{-2}$; ζ_i $(i = 0, 1, \ldots, N-1)$ *— независимые стандартные гауссовские случайные величины. Вычислить оценку* $\hat{\varepsilon}_{100,20}$ *ошибки* $\varepsilon = \mathsf{M}\{|\mathbf{x}_T - \mathbf{y}_T|\}$ *по формуле* (7.3) ($\mathbf{y}_T$ *определяется из* (8.1)) *и* 90%*-й доверительный интервал для* ε. *Повторить вычисления при* $\Delta = 2^{-j}$; $j = 3, 4, 5, 6$ *и изобразить графически зависимость* $\ln\hat{\varepsilon}_{100,20}(\ln\Delta)$ *с* 90%*-ми доверительными интервалами для* ε *при указанных значениях* Δ. *Повторить*

ычисления при $\tilde{\alpha}_1 = \tilde{\alpha}_2 = 0$ *и* $\tilde{\alpha}_1 = \tilde{\alpha}_2 = 1$.

Нетрудно видеть, что система, описанная в эксперименте 8.2, является жесткой. Сравнивая рис. 8.3–8.5, можно прийти к выводу [86], что явный метод Эйлера (см. рис. 8.3) проявляет себя не достаточно эффективно относительно жестких систем при уменьшении шага интегрирования. В то же время неявные методы Эйлера (см. рис. 8.4, 8.5) показывают достаточно хорошее поведение. Это различие между явными и неявными сильными численными методами проявляется и при использовании более точных численных методов [86]. Численный эксперимент 8.2 проведен независимо от [86]. При этом мы получили численные результаты, которые очень близки к результатам из [86].

Далее в этой главе рассмотрим более точные неявные одношаговые численные методы. Обоснование их сходимости будет дано в конце данной главы. Также будет показано, что при подходящих условиях численный метод (8.1) имеет порядок сильной сходимости 0.5.

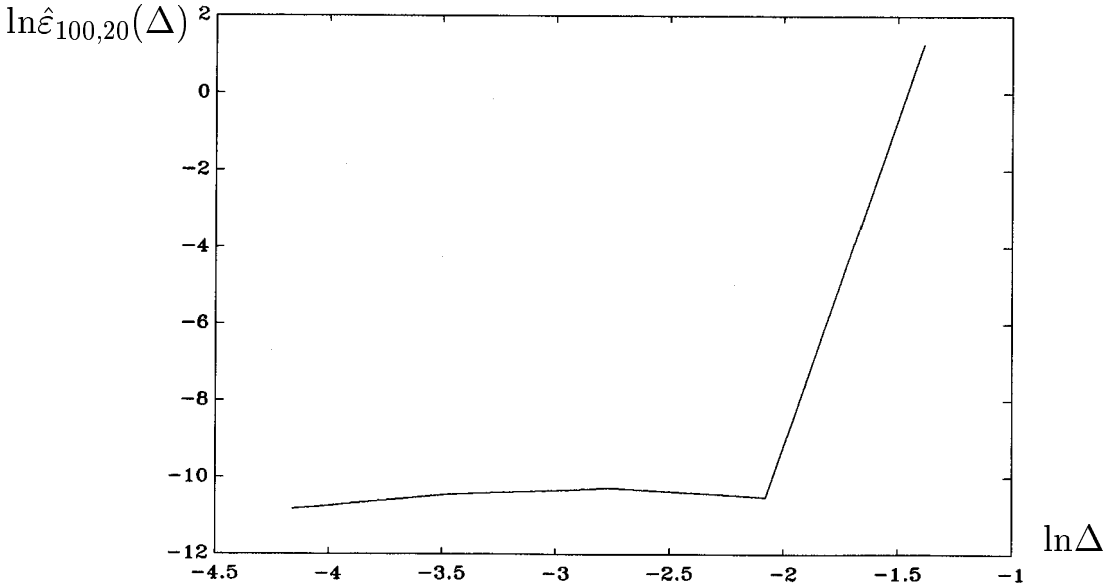

Рис. 8.3. Результат численного эксперимента 8.2 при $\tilde{\alpha}_1 = \tilde{\alpha}_2 = 0$.

8.2 Неявные одношаговые методы, основанные на разложениях Тейлора–Ито

8.2.1 Методы порядка точности 1.0

Рассмотрим однопараметрическое семейство неявных численных методов Г.Н. Мильштейна [70]. При покомпонентной форме записи эти методы имеют вид

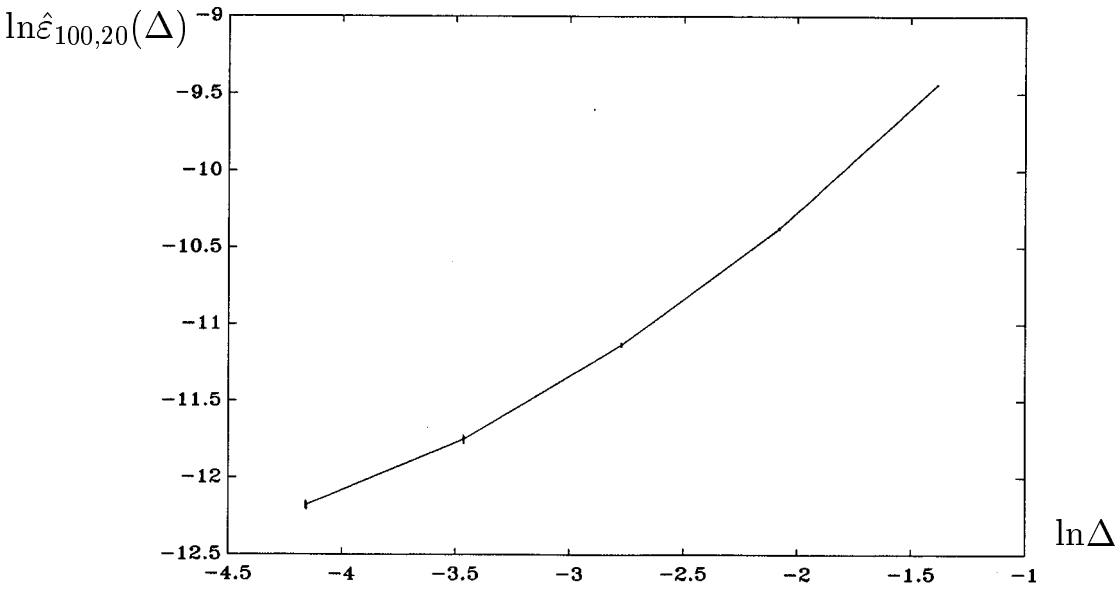

Рис. 8.4. Результат численного эксперимента 8.2 при $\tilde{\alpha}_1 = \tilde{\alpha}_2 = \frac{1}{2}$.

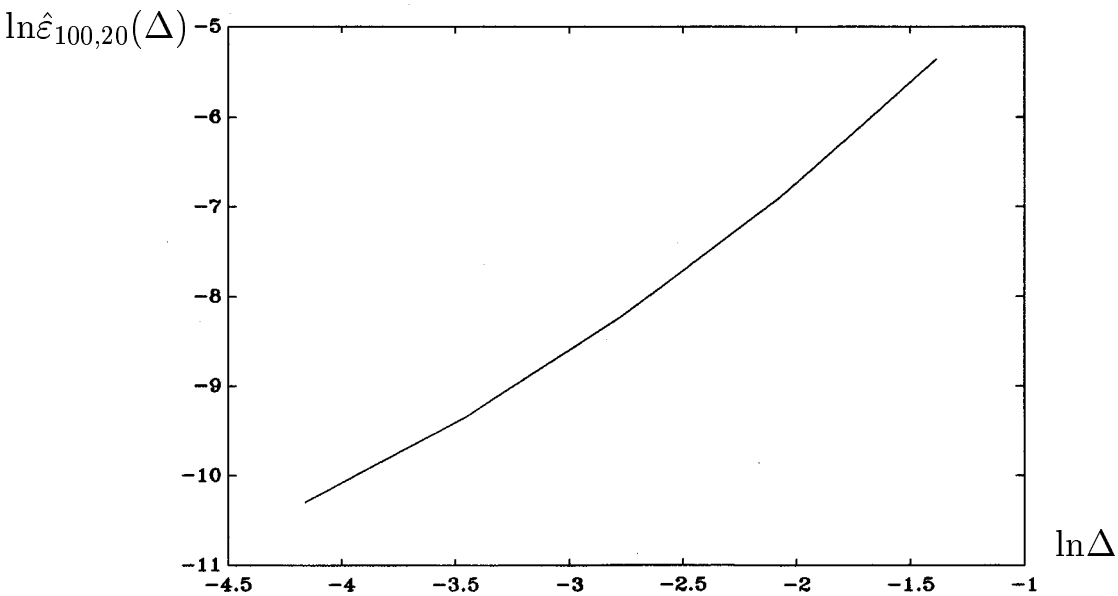

Рис. 8.5. Результат численного эксперимента 8.2 при $\tilde{\alpha}_1 = \tilde{\alpha}_2 = 1$.

$$\mathbf{y}_{p+1}^{(l)} = \mathbf{y}_p^{(l)} + \left\{\tilde{\alpha}_l \mathbf{a}^{(l)}(\mathbf{y}_{p+1}, \tau_{p+1}) + (1-\tilde{\alpha}_l)\mathbf{a}^{(l)}\right\}\Delta +$$
$$+ \sum_{i_1=1}^{m} \Sigma^{(li_1)} \hat{I}_{0_{\tau_{p+1},\tau_p}}^{(i_1)} + \sum_{i_1,i_2=1}^{m} G_0^{(i_2)} \Sigma^{(li_1)} \hat{I}_{00_{\tau_{p+1},\tau_p}}^{(i_2 i_1)}, \qquad (8.3)$$

здесь и далее в этом разделе $\mathbf{a}^{(l)}(\mathbf{y}_p, \tau_p) \stackrel{\text{def}}{=} \mathbf{a}^{(l)}$; $\mathbf{y}_{\tau_p}^{(l)} \stackrel{\text{def}}{=} \mathbf{y}_p^{(l)}$; $\Sigma^{(ik)}(\mathbf{y}_p, \tau_p) \stackrel{\text{def}}{=} \Sigma^{(ik)}$; $p\Delta \stackrel{\text{def}}{=} \tau_p$; $\tilde{\alpha}_l \in [0,1]$, $l = 1, \ldots, n$.

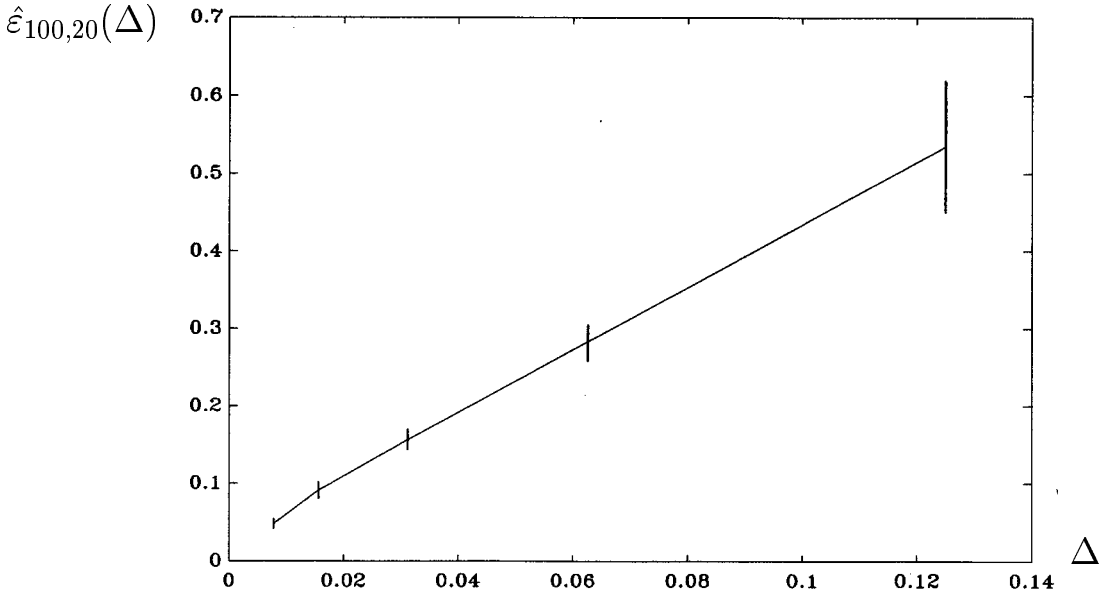

Рис. 8.6. Результат численного эксперимента 8.3 при $\tilde{\alpha}_1 = \frac{1}{2}$.

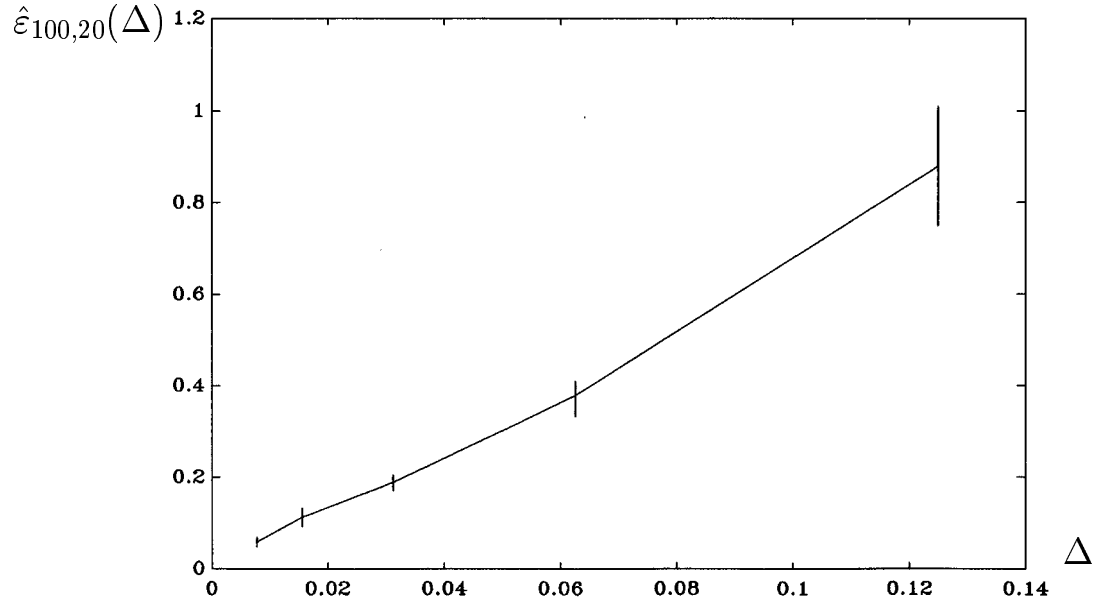

Рис. 8.7. Результат численного эксперимента 8.3 при $\tilde{\alpha}_1 = 1$.

Следует отметить, что при $\tilde{\alpha}_l = 0$ из (8.3) получим явный численный метод Г.Н. Мильштейна (7.35). Если $\tilde{\alpha}_l = \frac{1}{2}$, то (8.3) можно рассматривать как обобщение детерминированного метода трапеций.

Далее будем предполагать, что повторные стохастические интегралы, входящие в численный метод (8.3), и рассматриваемые далее численные методы аппроксимированы одним из приведенных в главе

6 численных методов с точностью, необходимой для выполнения условий (7.22), (7.64) теорем 7.2 и 7.3 о сильной сходимости численных методов при соответствующих значениях r.

Численный эксперимент 8.3 (рис. 8.6, 8.7). *Повторить численный эксперимент* 8.1 *для неявного метода Г.Н. Мильштейна* (8.3) *при* $\tilde{\alpha}_1 = \frac{1}{2}$ *и* $\tilde{\alpha}_1 = 1$.

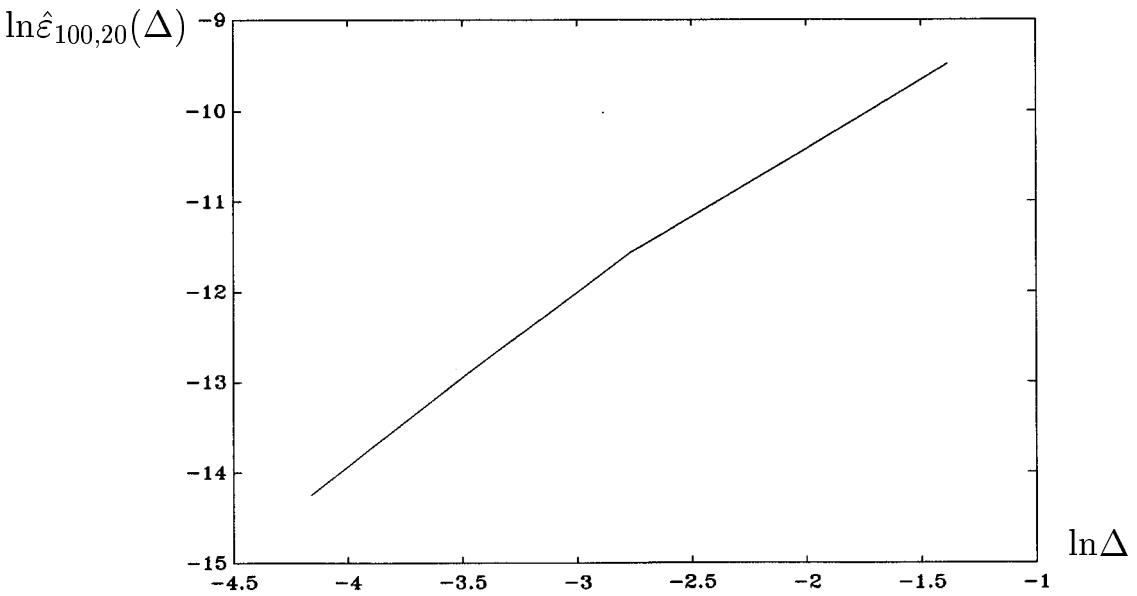

Рис. 8.8. Результат численного эксперимента 8.4 при $\tilde{\alpha}_1 = \tilde{\alpha}_2 = \frac{1}{2}$.

Численный эксперимент 8.4 (рис. 8.8). *Повторить численный эксперимент* 8.2 *для метода Г.Н. Мильштейна* (8.3) *при* $\tilde{\alpha}_1 = \tilde{\alpha}_2 = \frac{1}{2}$.

8.2.2 Методы порядка точности 1.5

Рассмотрим двухпараметрическое семейство неявных одношаговых сильных численных методов порядка точности 1.5 [86]:

$$\begin{gathered}
\mathbf{y}_{p+1}^{(l)} = \mathbf{y}_p^{(l)} + \left\{\tilde{\alpha}_l \mathbf{a}^{(l)}(\mathbf{y}_{p+1}, \tau_{p+1}) + (1-\tilde{\alpha}_l)\mathbf{a}^{(l)}\right\}\Delta + \\
+ (0.5 - \tilde{\alpha}_l)\left\{\tilde{\beta}_l L\mathbf{a}^{(l)}(\mathbf{y}_{p+1}, \tau_{p+1}) + (1-\tilde{\beta}_l)L\mathbf{a}^{(l)}\right\}\Delta^2 + \\
+ \sum_{i_1=1}^{m} \Sigma^{(li_1)} \hat{J}_{(1)\tau_{p+1},\tau_p}^{(i_1)} + \sum_{i_1,i_2=1}^{m} G_0^{(i_2)} \Sigma^{(li_1)} \hat{J}_{(11)\tau_{p+1},\tau_p}^{(i_2 i_1)} + \\
+ \sum_{i_1=1}^{m} \left[G_0^{(i_1)} \mathbf{a}^{(l)} \left(\hat{J}_{(10)\tau_{p+1},\tau_p}^{(i_1)} - \Delta\tilde{\alpha}_l \hat{J}_{(1)\tau_{p+1},\tau_p}^{(i_1)} \right) + L\Sigma^{(li_1)} \hat{J}_{(01)\tau_{p+1},\tau_p}^{(i_1)} \right] + \\
+ \sum_{i_1,i_2,i_3=1}^{m} G_0^{(i_3)} G_0^{(i_2)} \Sigma^{(li_1)} \hat{J}_{(111)\tau_{p+1},\tau_p}^{(i_3 i_2 i_1)}; \ \tilde{\alpha}_l, \tilde{\beta}_l \in [0,1]. \qquad (8.4)
\end{gathered}$$

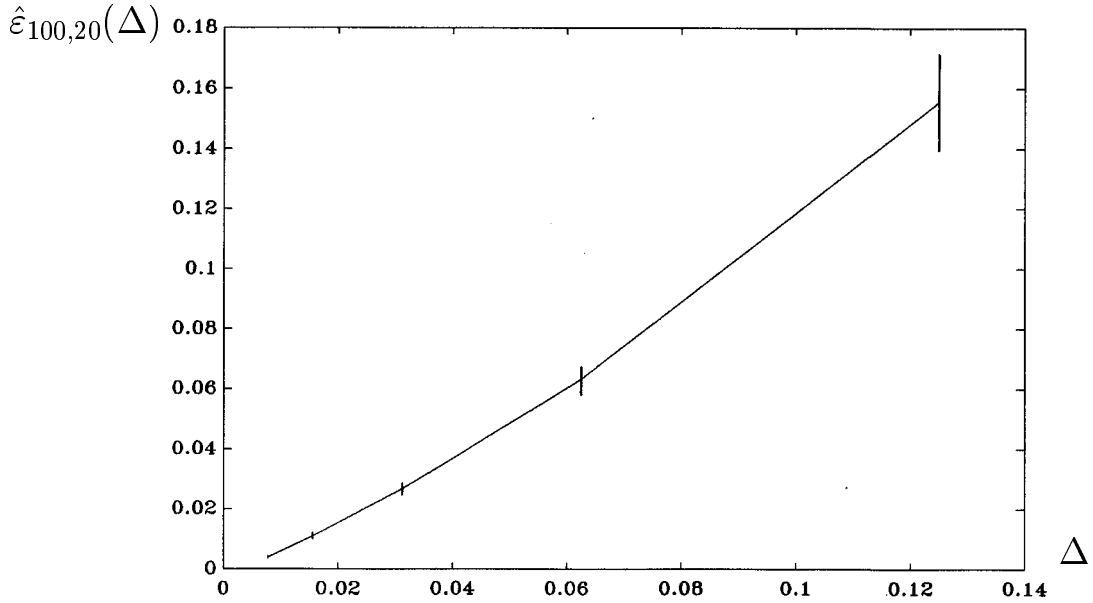

Рис. 8.9. Результат численного эксперимента 8.5 при $\tilde{\alpha}_1 = \frac{1}{2}$.

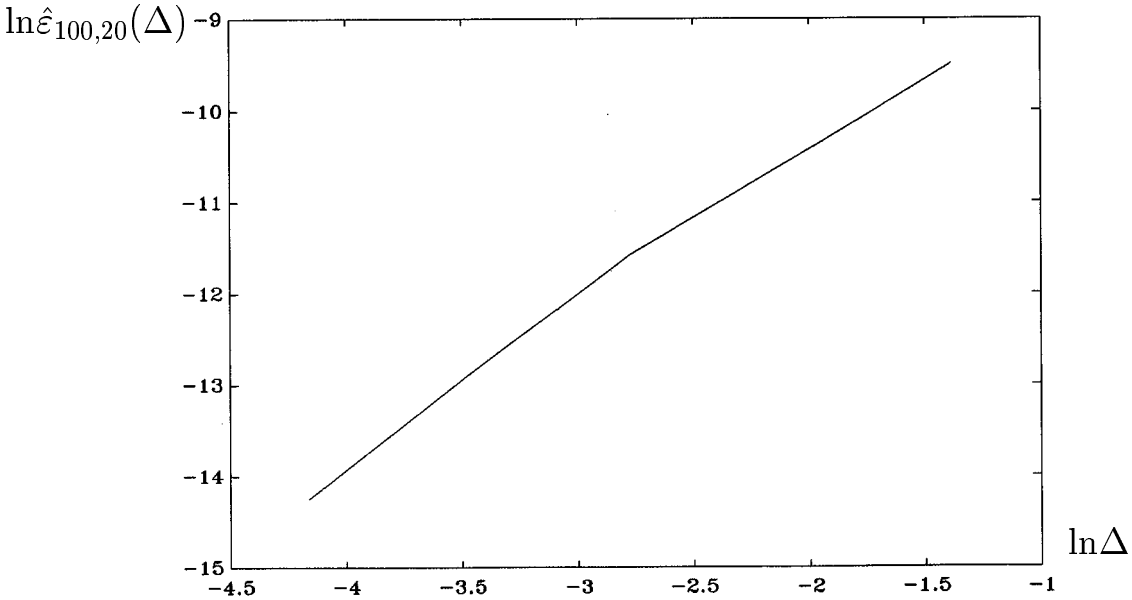

Рис. 8.10. Результат численного эксперимента 8.6 при $\tilde{\alpha}_1 = \tilde{\alpha}_2 = \frac{1}{2}$.

Вариант численного метода (8.4), основанный на унифицированном разложении Тейлора–Ито, имеет следующий вид:

$$\mathbf{y}_{p+1}^{(l)} = \mathbf{y}_p^{(l)} + \left\{\tilde{\alpha}_l \mathbf{a}^{(l)}(\mathbf{y}_{p+1}, \tau_{p+1}) + (1-\tilde{\alpha}_l)\mathbf{a}^{(l)}\right\}\Delta +$$

$$+ (0.5 - \tilde{\alpha}_l)\left\{\tilde{\beta}_l L\mathbf{a}^{(l)}(\mathbf{y}_{p+1}, \tau_{p+1}) + (1-\tilde{\beta}_l)L\mathbf{a}^{(l)}\right\}\Delta^2 +$$

$$+ \sum_{i_1=1}^{m} \Sigma^{(li_1)} \hat{I}^{(i_1)}_{0_{\tau_{p+1},\tau_p}} + \sum_{i_1,i_2=1}^{m} G_0^{(i_2)} \Sigma^{(li_1)} \hat{I}^{(i_2 i_1)}_{00_{\tau_{p+1},\tau_p}} +$$

$$+\sum_{i_1=1}^{m}\left[G_0^{(i_1)}\mathbf{a}^{(l)}\left((1-\tilde{\alpha}_l)\Delta\hat{I}_{0_{\tau_{p+1},\tau_p}}^{(i_1)}+\hat{I}_{1_{\tau_{p+1},\tau_p}}^{(i_1)}\right)-L\Sigma^{(li_1)}\hat{I}_{1_{\tau_{p+1},\tau_p}}^{(i_1)}\right]+$$

$$+\sum_{i_1,i_2,i_3=1}^{m}G_0^{(i_3)}G_0^{(i_2)}\Sigma^{(li_1)}\hat{I}_{000_{\tau_{p+1},\tau_p}}^{(i_3i_2i_1)}. \qquad (8.5)$$

Численный эксперимент 8.5 (рис. 8.9). *Повторить численный эксперимент* 8.1 *для неявного сильного численного метода порядка точности* 1.5 *вида* (8.5) *при* $\tilde{\alpha}_1=\frac{1}{2}$. *При этом не моделировать те повторные стохастические интегралы Ито, коэффициенты перед которыми оказываются равными нулю после применения численного метода* (8.5) *к уравнению* (8.2) *и приведения подобных слагаемых.*

Численный эксперимент 8.6 (рис. 8.10). *Повторить численный эксперимент* 8.2 *для неявного сильного численного метода порядка точности* 1.5 *вида* (8.5) *при* $\tilde{\alpha}_1=\tilde{\alpha}_2=\frac{1}{2}$. *При этом не моделировать повторные стохастические интегралы Ито из условия численного эксперимента* 8.5.

Далее будут рассмотрены более точные неявные одношаговые сильные численные методы.

8.2.3 Методы порядка точности 2.0

Двухпараметрическое семейство неявных сильных одношаговых численных методов порядка точности 2.0 имеет вид [86]

$$\mathbf{y}_{p+1}^{(l)}=\mathbf{y}_p^{(l)}+\left\{\tilde{\alpha}_l\mathbf{a}^{(l)}(\mathbf{y}_{p+1},\tau_{p+1})+(1-\tilde{\alpha}_l)\mathbf{a}^{(l)}\right\}\Delta+$$

$$+(0.5-\tilde{\alpha}_l)\left\{\tilde{\beta}_lL\mathbf{a}^{(l)}(\mathbf{y}_{p+1},\tau_{p+1})+(1-\tilde{\beta}_l)L\mathbf{a}^{(l)}\right\}\Delta^2+$$

$$+\sum_{i_1=1}^{m}\Sigma^{(li_1)}\hat{J}_{(1)\tau_{p+1},\tau_p}^{(i_1)}+\sum_{i_1,i_2=1}^{m}G_0^{(i_2)}\Sigma^{(li_1)}\hat{J}_{(11)\tau_{p+1},\tau_p}^{(i_2i_1)}+$$

$$+\sum_{i_1=1}^{m}\left[G_0^{(i_1)}\mathbf{a}^{(l)}\left(\hat{J}_{(10)\tau_{p+1},\tau_p}^{(i_1)}-\Delta\tilde{\alpha}_l\hat{J}_{(1)\tau_{p+1},\tau_p}^{(i_1)}\right)+L\Sigma^{(li_1)}\hat{J}_{(01)\tau_{p+1},\tau_p}^{(i_1)}\right]+$$

$$+\sum_{i_1,i_2,i_3=1}^{m}G_0^{(i_3)}G_0^{(i_2)}\Sigma^{(li_1)}\hat{J}_{(111)\tau_{p+1},\tau_p}^{(i_3i_2i_1)}+$$

$$+\sum_{i_1,i_2=1}^{m}\left[G_0^{(i_2)}L\Sigma^{(li_1)}\hat{J}_{(101)\tau_{p+1},\tau_p}^{(i_2i_1)}+LG_0^{(i_2)}\Sigma^{(li_1)}\hat{J}_{(011)\tau_{p+1},\tau_p}^{(i_2i_1)}+\right.$$

$$\left.+G_0^{(i_2)}G_0^{(i_1)}\mathbf{a}^{(l)}\left(\hat{J}_{(110)\tau_{p+1},\tau_p}^{(i_2i_1)}-\Delta\tilde{\alpha}_l\hat{J}_{(11)\tau_{p+1},\tau_p}^{(i_2i_1)}\right)\right]+$$

$$+\sum_{i_1,i_2,i_3,i_4=1}^{m} G_0^{(i_4)} G_0^{(i_3)} G_0^{(i_2)} \Sigma^{(li_1)} \hat{J}^{(i_4 i_3 i_2 i_1)}_{(1111)\tau_{p+1},\tau_p};\ \tilde{\alpha}_l, \tilde{\beta}_l \in [0,1]. \qquad (8.6)$$

Рассмотрим вариант численной схемы (8.6), который основан на унифицированном разложении Тейлора–Ито:

$$\mathbf{y}_{p+1}^{(l)} = \mathbf{y}_p^{(l)} + \left\{\tilde{\alpha}_l \mathbf{a}^{(l)}(\mathbf{y}_{p+1}, \tau_{p+1}) + (1-\tilde{\alpha}_l)\mathbf{a}^{(l)}\right\}\Delta +$$

$$+ (0.5 - \tilde{\alpha}_l)\left\{\tilde{\beta}_l L\mathbf{a}^{(l)}(\mathbf{y}_{p+1}, \tau_{p+1}) + (1-\tilde{\beta}_l) L\mathbf{a}^{(l)}\right\}\Delta^2 +$$

$$+ \sum_{i_1=1}^{m} \Sigma^{(li_1)} \hat{I}^{(i_1)}_{0_{\tau_{p+1},\tau_p}} + \sum_{i_1,i_2=1}^{m} G_0^{(i_2)} \Sigma^{(li_1)} \hat{I}^{(i_2 i_1)}_{00_{\tau_{p+1},\tau_p}} +$$

$$+ \sum_{i_1=1}^{m} \left[G_0^{(i_1)} \mathbf{a}^{(l)} \left((1-\tilde{\alpha}_l)\Delta \hat{I}^{(i_1)}_{0_{\tau_{p+1},\tau_p}} + \hat{I}^{(i_1)}_{1_{\tau_{p+1},\tau_p}} \right) - L\Sigma^{(li_1)} \hat{I}^{(i_1)}_{1_{\tau_{p+1},\tau_p}} \right] +$$

$$+ \sum_{i_1,i_2,i_3=1}^{m} G_0^{(i_3)} G_0^{(i_2)} \Sigma^{(li_1)} \hat{I}^{(i_3 i_2 i_1)}_{000_{\tau_{p+1},\tau_p}} +$$

$$+ \sum_{i_1,i_2=1}^{m} \left[G_0^{(i_2)} L\Sigma^{(li_1)} \left(\hat{I}^{(i_2 i_1)}_{10_{\tau_{p+1},\tau_p}} - \hat{I}^{(i_2 i_1)}_{01_{\tau_{p+1},\tau_p}} \right) - LG_0^{(i_2)} \Sigma^{(li_1)} \hat{I}^{(i_2 i_1)}_{10_{\tau_{p+1},\tau_p}} + \right.$$

$$\left. + G_0^{(i_2)} G_0^{(i_1)} \mathbf{a}^{(l)} \left(\hat{I}^{(i_2 i_1)}_{01_{\tau_{p+1},\tau_p}} + \Delta(1-\tilde{\alpha}_l) \hat{I}^{(i_2 i_1)}_{00_{\tau_{p+1},\tau_p}} \right) \right] +$$

$$+ \sum_{i_1,i_2,i_3,i_4=1}^{m} G_0^{(i_4)} G_0^{(i_3)} G_0^{(i_2)} \Sigma^{(li_1)} \hat{I}^{(i_4 i_3 i_2 i_1)}_{0000_{\tau_{p+1},\tau_p}}. \qquad (8.7)$$

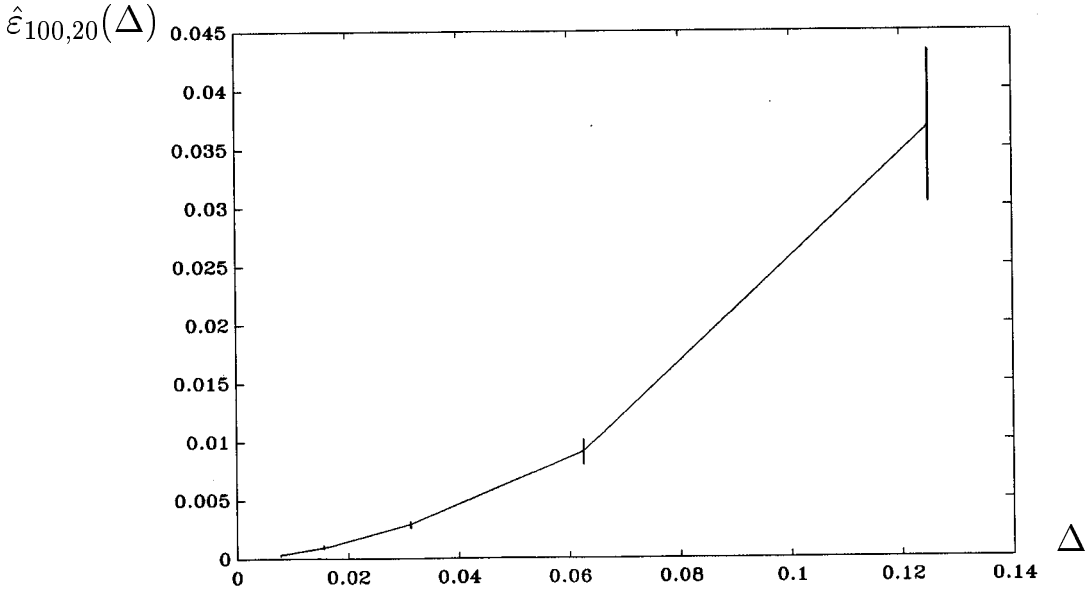

Рис. 8.11. Результат численного эксперимента 8.7.

Численный эксперимент 8.7 (рис. 8.11). *Повторить численный эксперимент* 8.5 *для неявного сильного численного метода порядка точности* 2.0 *вида* (8.7) *при* $\tilde{\alpha}_1 = \frac{1}{2}$.

8.2.4 Методы порядка точности 2.5

Для построения неявных сильных одношаговых численных методов порядка точности 2.5 дополним с учетом неявности правые части (8.7) и (8.6) членами из разложения Тейлора–Ито. Таким образом, неявный сильный одношаговый численный метод порядка точности 2.5, основанный на унифицированном разложении Тейлора–Ито, примет вид

$$\mathbf{y}_{p+1}^{(l)} = \mathbf{y}_p^{(l)} + \left\{\tilde{\alpha}_l \mathbf{a}^{(l)}(\mathbf{y}_{p+1}, \tau_{p+1}) + (1-\tilde{\alpha}_l)\mathbf{a}^{(l)}\right\}\Delta +$$

$$+ (0.5-\tilde{\alpha}_l)\left\{\tilde{\beta}_l L\mathbf{a}^{(l)}(\mathbf{y}_{p+1}, \tau_{p+1}) + (1-\tilde{\beta}_l)L\mathbf{a}^{(l)}\right\}\Delta^2 +$$

$$+ \left(\frac{1}{6} - 0.5(\tilde{\alpha}_l + \tilde{\beta}_l) + \tilde{\alpha}_l\tilde{\beta}_l\right)\Delta^3 L^2\mathbf{a} +$$

$$+ \sum_{i_1=1}^{m} \Sigma^{(li_1)} \hat{I}_{0_{\tau_{p+1},\tau_p}}^{(i_1)} + \sum_{i_1,i_2=1}^{m} G_0^{(i_2)} \Sigma^{(li_1)} \hat{I}_{00_{\tau_{p+1},\tau_p}}^{(i_2 i_1)} +$$

$$+ \sum_{i_1=1}^{m} \left[G_0^{(i_1)}\mathbf{a}^{(l)}\left((1-\tilde{\alpha}_l)\Delta \hat{I}_{0_{\tau_{p+1},\tau_p}}^{(i_1)} + \hat{I}_{1_{\tau_{p+1},\tau_p}}^{(i_1)}\right) - L\Sigma^{(li_1)}\hat{I}_{1_{\tau_{p+1},\tau_p}}^{(i_1)}\right] +$$

$$+ \sum_{i_1,i_2,i_3=1}^{m} G_0^{(i_3)} G_0^{(i_2)} \Sigma^{(li_1)} \hat{I}_{000_{\tau_{p+1},\tau_p}}^{(i_3 i_2 i_1)} +$$

$$+ \sum_{i_1,i_2=1}^{m} \left[G_0^{(i_2)} L\Sigma^{(li_1)}\left(\hat{I}_{10_{\tau_{p+1},\tau_p}}^{(i_2 i_1)} - \hat{I}_{01_{\tau_{p+1},\tau_p}}^{(i_2 i_1)}\right) - LG_0^{(i_2)}\Sigma^{(li_1)}\hat{I}_{10_{\tau_{p+1},\tau_p}}^{(i_2 i_1)} +\right.$$

$$\left. + G_0^{(i_2)} G_0^{(i_1)} \mathbf{a}^{(l)}\left(\hat{I}_{01_{\tau_{p+1},\tau_p}}^{(i_2 i_1)} + \Delta(1-\tilde{\alpha}_l)\hat{I}_{00_{\tau_{p+1},\tau_p}}^{(i_2 i_1)}\right)\right] +$$

$$+ \sum_{i_1,i_2,i_3,i_4=1}^{m} G_0^{(i_4)} G_0^{(i_3)} G_0^{(i_2)} \Sigma^{(li_1)} \hat{I}_{0000_{\tau_{p+1},\tau_p}}^{(i_4 i_3 i_2 i_1)} +$$

$$+ \sum_{i_1=1}^{m} \left[G_0^{(i_1)} L\mathbf{a}^{(l)}\left(\frac{1}{2}\hat{I}_{2_{\tau_{p+1},\tau_p}}^{(i_1)} + \Delta(1-\tilde{\alpha}_l)\hat{I}_{1_{\tau_{p+1},\tau_p}}^{(i_1)} +\right.\right.$$

$$\left. + \Delta^2 (0.5-\tilde{\alpha}_l)\left(1-\tilde{\beta}_l\right)\hat{I}_{0_{\tau_{p+1},\tau_p}}^{(i_1)}\right) +$$

$$\left. + \frac{1}{2} LL\Sigma^{(li_1)}\hat{I}_{2_{\tau_{p+1},\tau_p}}^{(i_1)} - LG_0^{(i_1)}\mathbf{a}^{(l)}\left(\hat{I}_{2_{\tau_{p+1},\tau_p}}^{(i_1)} + \Delta(1-\tilde{\alpha}_l)\hat{I}_{1_{\tau_{p+1},\tau_p}}^{(i_1)}\right)\right] +$$

$$+\sum_{i_1,i_2,i_3=1}^{m}\Bigl[G_0^{(i_3)}LG_0^{(i_2)}\Sigma^{(li_1)}\left(\hat{I}_{100_{\tau_{p+1},\tau_p}}^{(i_3i_2i_1)}-\hat{I}_{010_{\tau_{p+1},\tau_p}}^{(i_3i_2i_1)}\right)+$$

$$+G_0^{(i_3)}G_0^{(i_2)}L\Sigma^{(li_1)}\left(\hat{I}_{010_{\tau_{p+1},\tau_p}}^{(i_3i_2i_1)}-\hat{I}_{001_{\tau_{p+1},\tau_p}}^{(i_3i_2i_1)}\right)+$$

$$+G_0^{(i_3)}G_0^{(i_2)}G_0^{(i_1)}\mathbf{a}^{(l)}\left(\Delta(1-\tilde{\alpha}_l)\hat{I}_{000_{\tau_{p+1},\tau_p}}^{(i_3i_2i_1)}+\hat{I}_{001_{\tau_{p+1},\tau_p}}^{(i_3i_2i_1)}\right)-$$

$$-LG_0^{(i_3)}G_0^{(i_2)}\Sigma^{(li_1)}\hat{I}_{100_{\tau_{p+1},\tau_p}}^{(i_3i_2i_1)}\Bigr]+$$

$$+\sum_{i_1,i_2,i_3,i_4,i_5=1}^{m}G_0^{(i_5)}G_0^{(i_4)}G_0^{(i_3)}G_0^{(i_2)}\Sigma^{(li_1)}\hat{I}_{00000_{\tau_{p+1},\tau_p}}^{(i_5i_4i_3i_2i_1)}. \qquad (8.8)$$

Аналог численной схемы (8.8), который основан на разложении Тейлора–Ито в форме Вагнера и Платена, запишем в следующей форме:

$$\mathbf{y}_{p+1}^{(l)}=\mathbf{y}_p^{(l)}+\left\{\tilde{\alpha}_l\mathbf{a}^{(l)}(\mathbf{y}_{p+1},\tau_{p+1})+(1-\tilde{\alpha}_l)\mathbf{a}^{(l)}\right\}\Delta+$$

$$+(0.5-\tilde{\alpha}_l)\left\{\tilde{\beta}_lL\mathbf{a}^{(l)}(\mathbf{y}_{p+1},\tau_{p+1})+(1-\tilde{\beta}_l)L\mathbf{a}^{(l)}\right\}\Delta^2+$$

$$+\left(\frac{1}{6}-0.5(\tilde{\alpha}_l+\tilde{\beta}_l)+\tilde{\alpha}_l\tilde{\beta}_l\right)\Delta^3L^2\mathbf{a}+$$

$$+\sum_{i_1=1}^{m}\Sigma^{(li_1)}\hat{J}_{(1)_{\tau_{p+1},\tau_p}}^{(i_1)}+\sum_{i_1,i_2=1}^{m}G_0^{(i_2)}\Sigma^{(li_1)}\hat{J}_{(11)_{\tau_{p+1},\tau_p}}^{(i_2i_1)}+$$

$$+\sum_{i_1=1}^{m}\left[G_0^{(i_1)}\mathbf{a}^{(l)}\left(\hat{J}_{(10)_{\tau_{p+1},\tau_p}}^{(i_1)}-\Delta\tilde{\alpha}_l\hat{J}_{(1)_{\tau_{p+1},\tau_p}}^{(i_1)}\right)+L\Sigma^{(li_1)}\hat{J}_{(01)_{\tau_{p+1},\tau_p}}^{(i_1)}\right]+$$

$$+\sum_{i_1,i_2,i_3=1}^{m}G_0^{(i_3)}G_0^{(i_2)}\Sigma^{(li_1)}\hat{J}_{(111)_{\tau_{p+1},\tau_p}}^{(i_3i_2i_1)}+$$

$$+\sum_{i_1,i_2=1}^{m}\Bigl[G_0^{(i_2)}L\Sigma^{(li_1)}\hat{J}_{(101)_{\tau_{p+1},\tau_p}}^{(i_2i_1)}+LG_0^{(i_2)}\Sigma^{(li_1)}\hat{J}_{(011)_{\tau_{p+1},\tau_p}}^{(i_2i_1)}+$$

$$+G_0^{(i_2)}G_0^{(i_1)}\mathbf{a}^{(l)}\left(\hat{J}_{(110)_{\tau_{p+1},\tau_p}}^{(i_2i_1)}-\Delta\tilde{\alpha}_l\hat{J}_{(11)_{\tau_{p+1},\tau_p}}^{(i_2i_1)}\right)\Bigr]+$$

$$+\sum_{i_1,i_2,i_3,i_4=1}^{m}G_0^{(i_4)}G_0^{(i_3)}G_0^{(i_2)}\Sigma^{(li_1)}\hat{J}_{(1111)_{\tau_{p+1},\tau_p}}^{(i_4i_3i_2i_1)}+$$

$$+\sum_{i_1=1}^{m}\Bigl[G_0^{(i_1)}L\mathbf{a}^{(l)}\left(\hat{J}_{(100)_{\tau_{p+1},\tau_p}}^{(i_1)}-\Delta\tilde{\alpha}_l\hat{J}_{(10)_{\tau_{p+1},\tau_p}}^{(i_1)}-\Delta^2\tilde{\beta}_l\left(0.5-\tilde{\alpha}_l\right)\hat{J}_{(1)_{\tau_{p+1},\tau_p}}^{(i_1)}\right)$$

$$+LL\Sigma^{(li_1)}\hat{J}_{(001)_{\tau_{p+1},\tau_p}}^{(i_1)}+LG_0^{(i_1)}\mathbf{a}^{(l)}\left(\hat{J}_{(010)_{\tau_{p+1},\tau_p}}^{(i_1)}-\Delta\tilde{\alpha}_l\hat{J}_{(01)_{\tau_{p+1},\tau_p}}^{(i_1)}\right)\Bigr]+$$

$$+\sum_{i_1,i_2,i_3=1}^{m}\Bigl[G_0^{(i_3)}LG_0^{(i_2)}\Sigma^{(li_1)}\hat{J}_{(1011)_{\tau_{p+1},\tau_p}}+G_0^{(i_3)}G_0^{(i_2)}L\Sigma^{(li_1)}\hat{J}_{(1101)_{\tau_{p+1},\tau_p}}^{(i_3i_2i_1)}+$$

$$+G_0^{(i_3)}G_0^{(i_2)}G_0^{(i_1)}\mathbf{a}^{(l)}\left(-\Delta\tilde{\alpha}_l\hat{J}_{(111)\tau_{p+1},\tau_p}^{(i_3i_2i_1)}+\hat{J}_{(1110)\tau_{p+1},\tau_p}^{(i_3i_2i_1)}\right)+$$

$$+LG_0^{(i_3)}G_0^{(i_2)}\Sigma^{(li_1)}\hat{J}_{(0111)\tau_{p+1},\tau_p}^{(i_3i_2i_1)}\Bigg]+$$

$$+\sum_{i_1,i_2,i_3,i_4,i_5=1}^{m}G_0^{(i_5)}G_0^{(i_4)}G_0^{(i_3)}G_0^{(i_2)}\Sigma^{(li_1)}\hat{J}_{(11111)\tau_{p+1},\tau_p}^{(i_5i_4i_3i_2i_1)}. \qquad (8.9)$$

Для реализации численного метода (8.8) на каждом шаге интегрирования необходимо аппроксимировать 12 различных повторных стохастических интегралов, а для реализации численной схемы (8.9) их требуется уже 17.

Численный эксперимент 8.8 (рис. 8.12). *Повторить численный эксперимент* 8.5 *для неявного сильного численного метода порядка точности* 2.5 *вида* (8.8) *при* $\tilde{\alpha}_1=\frac{1}{2}$.

В заключение данного раздела отметим, что если в (8.3)–(8.9) положить $\tilde{\alpha}_l=\tilde{\beta}_l=0$, то из них вытекают рассматривавшиеся ранее явные сильные одношаговые численные методы.

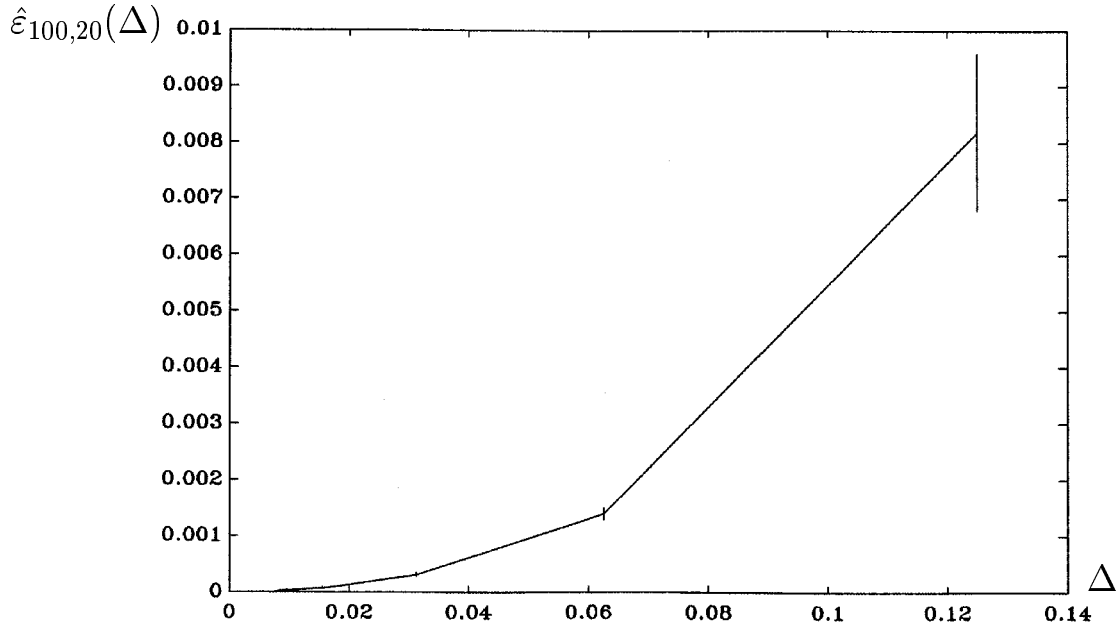

Рис. 8.12. Результат численного эксперимента 8.8.

8.2.5 Метод порядка точности 3.0

В настоящем разделе предлагаем неявную одношаговую сильную численную схему порядка точности 3.0 вида

$$\mathbf{y}_{p+1}=\mathbf{y}_p+\frac{1}{2}\left(\mathbf{a}(\mathbf{y}_{p+1},\tau_{p+1})+\mathbf{a}\right)\Delta-\frac{\Delta^3}{12}L^2\mathbf{a}+$$

$$+\sum_{i_1=1}^{m}\Sigma_{i_1}\hat{I}_{0_{\tau_{p+1},\tau_p}}^{(i_1)}+\Delta\mathbf{a}+\sum_{i_1,i_2=1}^{m}G_0^{(i_2)}\Sigma_{i_1}\hat{I}_{00_{\tau_{p+1},\tau_p}}^{(i_2i_1)}+$$

$$+\sum_{i_1=1}^{m}\left[G_0^{(i_1)}\mathbf{a}\left(0.5\Delta\hat{I}_{0_{\tau_{p+1},\tau_p}}^{(i_1)}+\hat{I}_{1_{\tau_{p+1},\tau_p}}^{(i_1)}\right)-L\Sigma_{i_1}\hat{I}_{1_{\tau_{p+1},\tau_p}}^{(i_1)}\right]+$$

$$+\sum_{i_1,i_2,i_3=1}^{m}G_0^{(i_3)}G_0^{(i_2)}\Sigma_{i_1}\hat{I}_{000_{\tau_{p+1},\tau_p}}^{(i_3i_2i_1)}+$$

$$+\sum_{i_1,i_2=1}^{m}\left[G_0^{(i_2)}L\Sigma_{i_1}\left(\hat{I}_{10_{\tau_{p+1},\tau_p}}^{(i_2i_1)}-\hat{I}_{01_{\tau_{p+1},\tau_p}}^{(i_2i_1)}\right)-LG_0^{(i_2)}\Sigma_{i_1}\hat{I}_{10_{\tau_{p+1},\tau_p}}^{(i_2i_1)}+\right.$$

$$\left.+G_0^{(i_2)}G_0^{(i_1)}\mathbf{a}\left(\hat{I}_{01_{\tau_{p+1},\tau_p}}^{(i_2i_1)}+0.5\Delta\hat{I}_{00_{\tau_{p+1},\tau_p}}^{(i_2i_1)}\right)\right]+$$

$$+\sum_{i_1,\ldots,i_4=1}^{m}G_0^{(i_4)}G_0^{(i_3)}G_0^{(i_2)}\Sigma_{i_1}\hat{I}_{0000_{\tau_{p+1},\tau_p}}^{(i_4i_3i_2i_1)}+$$

$$+\sum_{i_1=1}^{m}\left[G_0^{(i_1)}L\mathbf{a}\left(0.5\hat{I}_{2_{\tau_{p+1},\tau_p}}^{(i_1)}+0.5\Delta\hat{I}_{1_{\tau_{p+1},\tau_p}}^{(i_1)}\right)+\right.$$

$$\left.+0.5L^2\Sigma_{i_1}\hat{I}_{2_{\tau_{p+1},\tau_p}}^{(i_1)}-LG_0^{(i_1)}\mathbf{a}\left(\hat{I}_{2_{\tau_{p+1},\tau_p}}^{(i_1)}+0.5\Delta\hat{I}_{1_{\tau_{p+1},\tau_p}}^{(i_1)}\right)\right]+$$

$$+\sum_{i_1,i_2,i_3=1}^{m}\left[G_0^{(i_3)}LG_0^{(i_2)}\Sigma_{i_1}\left(\hat{I}_{100_{\tau_{p+1},\tau_p}}^{(i_3i_2i_1)}-\hat{I}_{010_{\tau_{p+1},\tau_p}}^{(i_3i_2i_1)}\right)+\right.$$

$$+G_0^{(i_3)}G_0^{(i_2)}L\Sigma_{i_1}\left(\hat{I}_{010_{\tau_{p+1},\tau_p}}^{(i_3i_2i_1)}-\hat{I}_{001_{\tau_{p+1},\tau_p}}^{(i_3i_2i_1)}\right)+$$

$$\left.+G_0^{(i_3)}G_0^{(i_2)}G_0^{(i_1)}\mathbf{a}\left(0.5\Delta\hat{I}_{000_{\tau_{p+1},\tau_p}}^{(i_3i_2i_1)}+\hat{I}_{001_{\tau_{p+1},\tau_p}}^{(i_3i_2i_1)}\right)-LG_0^{(i_3)}G_0^{(i_2)}\Sigma_{i_1}\hat{I}_{100_{\tau_{p+1},\tau_p}}^{(i_3i_2i_1)}\right]$$

$$+\sum_{i_1,\ldots,i_5=1}^{m}G_0^{(i_5)}G_0^{(i_4)}G_0^{(i_3)}G_0^{(i_2)}\Sigma_{i_1}\hat{I}_{00000_{\tau_{p+1},\tau_p}}^{(i_5i_4i_3i_2i_1)}+$$

$$+\sum_{i_1,i_2=1}^{m}\left[G_0^{(i_2)}G_0^{(i_1)}L\mathbf{a}\left(0.5\hat{I}_{02_{\tau_{p+1},\tau_p}}^{(i_2i_1)}+0.5\Delta\hat{I}_{01_{\tau_{p+1},\tau_p}}^{(i_2i_1)}\right)+0.5L^2G_0^{(i_2)}\Sigma_{i_1}\hat{I}_{20_{\tau_{p+1},\tau_p}}^{(i_2i_1)}\right.$$

$$+G_0^{(i_2)}LG_0^{(i_1)}\mathbf{a}\left(\hat{I}_{11_{\tau_{p+1},\tau_p}}^{(i_2i_1)}-\hat{I}_{02_{\tau_{p+1},\tau_p}}^{(i_2i_1)}+0.5\Delta\left(\hat{I}_{10_{\tau_{p+1},\tau_p}}^{(i_2i_1)}-\hat{I}_{01_{\tau_{p+1},\tau_p}}^{(i_2i_1)}\right)\right)+$$

$$+LG_0^{(i_2)}L\Sigma_{i_1}\left(\hat{I}_{11_{\tau_{p+1},\tau_p}}^{(i_2i_1)}-\hat{I}_{20_{\tau_{p+1},\tau_p}}^{(i_2i_1)}\right)+$$

$$+G_0^{(i_2)}L^2\Sigma_{i_1}\left(0.5\hat{I}_{02_{\tau_{p+1},\tau_p}}^{(i_2i_1)}+0.5\hat{I}_{20_{\tau_{p+1},\tau_p}}^{(i_2i_1)}-\hat{I}_{11_{\tau_{p+1},\tau_p}}^{(i_2i_1)}\right)-$$

$$\left.-LG_0^{(i_2)}G_0^{(i_1)}\mathbf{a}\left(0.5\Delta\hat{I}_{10_{\tau_{p+1},\tau_p}}^{(i_2i_1)}+\hat{I}_{11_{\tau_{p+1},\tau_p}}^{(i_2i_1)}\right)\right]+$$

$$+\sum_{i_1,\ldots,i_4=1}^{m}\left[G_0^{(i_4)}G_0^{(i_3)}G_0^{(i_2)}G_0^{(i_1)}\mathbf{a}\left(0.5\Delta\hat{I}_{0000_{\tau_{p+1},\tau_p}}^{(i_4i_3i_2i_1)}+\hat{I}_{0001_{\tau_{p+1},\tau_p}}^{(i_4i_3i_2i_1)}\right)+\right.$$

$$+G_0^{(i_4)}G_0^{(i_3)}LG_0^{(i_2)}\Sigma_{i_1}\left(\hat{I}^{(i_4i_3i_2i_1)}_{0100_{\tau_{p+1},\tau_p}}-\hat{I}^{(i_4i_3i_2i_1)}_{0010_{\tau_{p+1},\tau_p}}\right)-LG_0^{(i_4)}G_0^{(i_3)}G_0^{(i_2)}\Sigma_{i_1}\hat{I}^{(i_4i_3i_2i_1)}_{1000_{\tau_{p+1},\tau_p}}$$

$$+G_0^{(i_4)}LG_0^{(i_3)}G_0^{(i_2)}\Sigma_{i_1}\left(\hat{I}^{(i_4i_3i_2i_1)}_{1000_{\tau_{p+1},\tau_p}}-\hat{I}^{(i_4i_3i_2i_1)}_{0100_{\tau_{p+1},\tau_p}}\right)+$$

$$+G_0^{(i_4)}G_0^{(i_3)}G_0^{(i_2)}L\Sigma_{i_1}\left(\hat{I}^{(i_4i_3i_2i_1)}_{0010_{\tau_{p+1},\tau_p}}-\hat{I}^{(i_4i_3i_2i_1)}_{0001_{\tau_{p+1},\tau_p}}\right)\Bigg]+$$

$$+\sum_{i_1,\ldots,i_6=1}^{m}G_0^{(i_6)}G_0^{(i_5)}G_0^{(i_4)}G_0^{(i_3)}G_0^{(i_2)}\Sigma_{i_1}\hat{I}^{(i_6i_5i_4i_3i_2i_1)}_{000000_{\tau_{p+1},\tau_p}}. \qquad (8.10)$$

Численный эксперимент 8.9 (рис. 8.13). *Повторить численный эксперимент* 8.5 *для неявного сильного численного метода порядка точности* 3.0 *вида* (8.10) *при* $\Delta = 2^{-j}$; $j = 4, 5, 6, 7$.

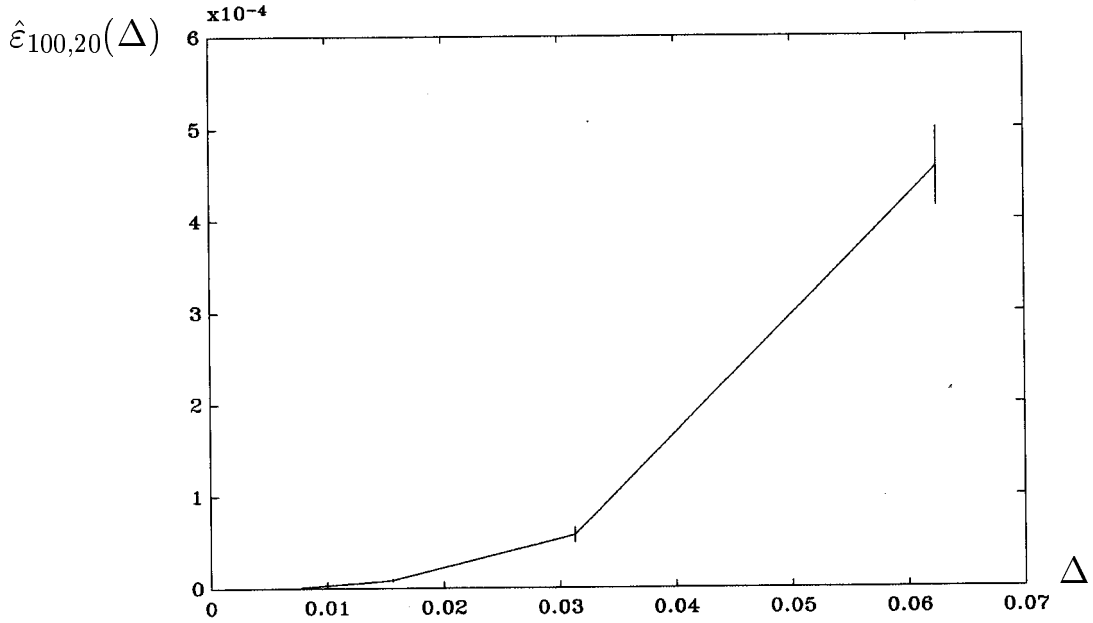

Рис. 8.13. Результат численного эксперимента 8.9.

8.3 Неявные одношаговые конечно-разностные методы, основанные на разложениях Тейлора–Ито

В качестве основы для построения неявных сильных одношаговых конечно-разностных численных методов решения стохастических дифференциальных уравнений Ито возьмем численные методы, построенные в предыдущем разделе, и аппроксимируем конечными разностями частные производные, входящие в их правые части.

8.3.1 Методы порядка точности 1.0

Рассмотрим семейство (8.3) неявных методов Г.Н. Мильштейна и аппроксимируем конечными разностями частные производные, входящие в правую часть (8.3). В результате получим следующее однопараметрическое семейство неявных сильных одношаговых конечно-разностных численных методов порядка точности 1.0:

$$\mathbf{y}_{p+1}^{(l)} = \mathbf{y}_p^{(l)} + \left\{\tilde{\alpha}_l \mathbf{a}^{(l)}(\mathbf{y}_{p+1}, \tau_{p+1}) + (1-\tilde{\alpha}_l)\mathbf{a}^{(l)}\right\}\Delta +$$

$$+ \sum_{i_1=1}^{m} \Sigma^{(li_1)}(\mathbf{y}_p, \tau_p)\hat{I}_{0_{\tau_{p+1},\tau_p}}^{(i_1)} + \frac{1}{\sqrt{\Delta}} \sum_{i_1,i_2=1}^{m} \sum_{j=1}^{2} \pi_j \Sigma^{(li_1)}(\mathbf{y}_{p\sigma}^{(ji_2)}, \tau_p)\hat{I}_{00_{\tau_{p+1},\tau_p}}^{(i_2 i_1)}, \quad (8.11)$$

где сохранен смысл обозначений, входящих в (7.90).

Численный эксперимент 8.10 (рис. 8.14). *Повторить численный эксперимент* 8.2 *для неявного сильного конечно-разностного численного метода порядка точности* 1.0 *вида* (8.11) *при* $\tilde{\alpha}_1 = \tilde{\alpha}_2 = \frac{1}{2}$.

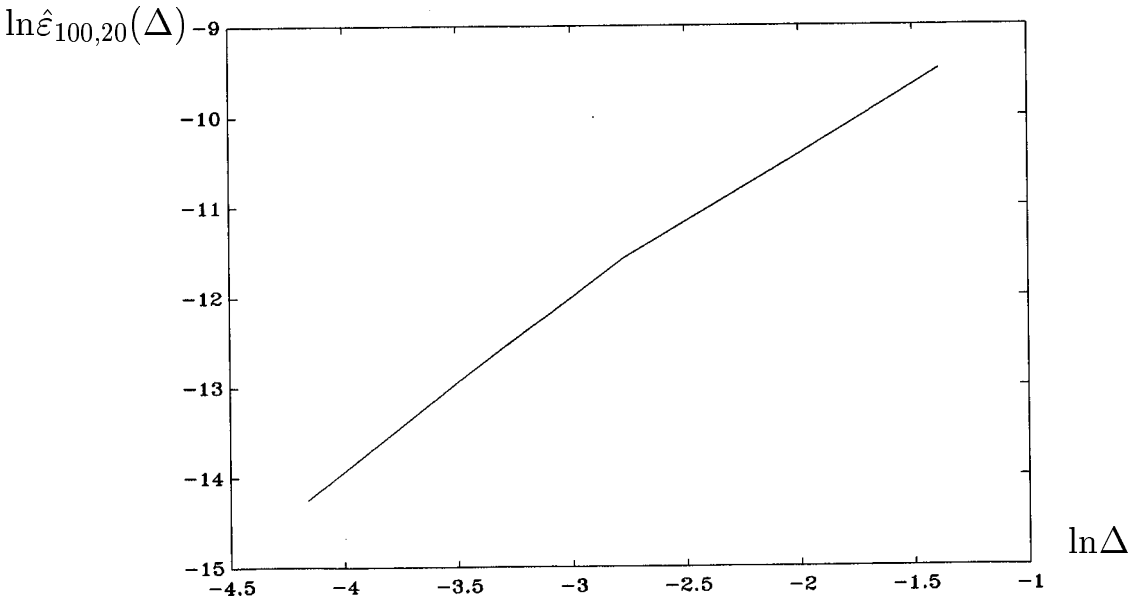

Рис. 8.14. Результат численного эксперимента 8.10.

Численный эксперимент 8.11 (рис. 8.15). *Повторить численный эксперимент* 8.1 *для неявного сильного конечно-разностного численного метода порядка точности* 1.0 *вида* (8.11) *при* $\tilde{\alpha}_1 = \frac{1}{2}$.

8.3.2 Методы порядка точности 1.5

Аппроксимируем конечными разностями частные производные, входящие в правые части (8.4), (8.5). Тогда из (8.4) и (8.5) следуют два семейства неявных сильных одношаговых конечно-разностных численных методов порядка точности 1.5:

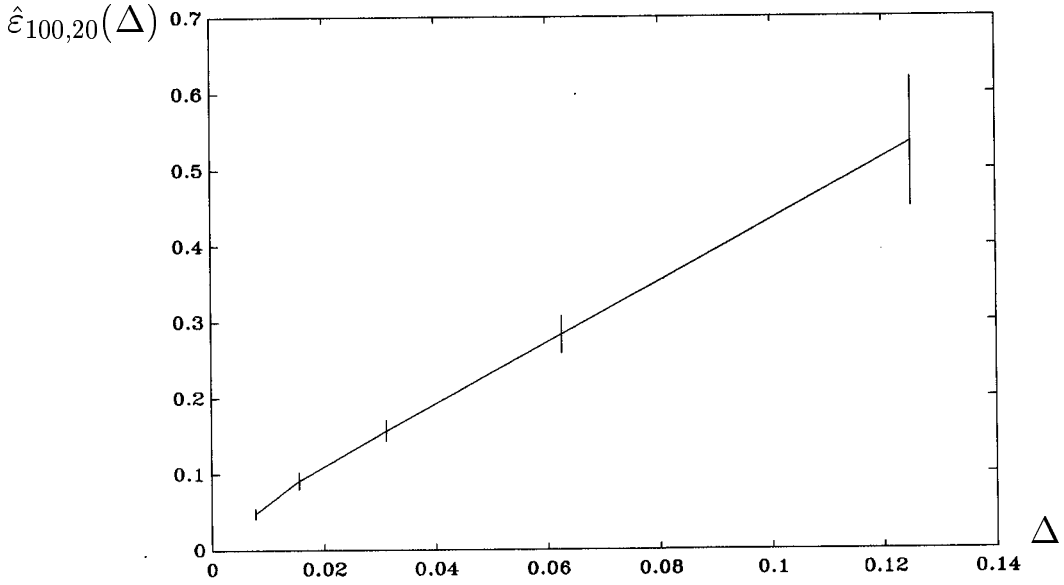

Рис. 8.15. Результат численного эксперимента 8.11.

$$
\begin{gathered}
\mathbf{y}_{p+1}^{(l)} = \mathbf{y}_p^{(l)} + \left\{\tilde{\alpha}_l \mathbf{a}^{(l)}(\mathbf{y}_{p+1}, \tau_{p+1}) + (1-\tilde{\alpha}_l)\mathbf{a}^{(l)}\right\}\Delta + \\
+ (0.5-\tilde{\alpha}_l)\left\{\tilde{\beta}_l L\mathbf{a}^{(l)}(\mathbf{y}_{p+1}, \tau_{p+1}) + (1-\tilde{\beta}_l)L\mathbf{a}^{(l)}\right\}\Delta^2 + \\
+ \sum_{i_1=1}^{m} \Sigma^{(li_1)}(\mathbf{y}_p, \tau_p)\hat{I}^{(i_1)}_{0_{\tau_{p+1},\tau_p}} + \frac{1}{\sqrt{\Delta}} \sum_{i_1,i_2=1}^{m} \sum_{j=1}^{2} \alpha_j \Sigma^{(li_1)}(\mathbf{y}_{p\beta}^{(ji_2)}, \tau_p)\hat{I}^{(i_2 i_1)}_{00_{\tau_{p+1},\tau_p}} + \\
+ \frac{1}{\Delta} \sum_{i_1=1}^{m} \left[\sum_{j=1}^{2} \pi_j \mathbf{a}^{(l)}(\mathbf{u}_{p\sigma}^{(ji_1)}, \tau_p) \left((1-\tilde{\alpha}_l)\Delta \hat{I}^{(i_1)}_{0_{\tau_{p+1},\tau_p}} + \hat{I}^{(i_1)}_{1_{\tau_{p+1},\tau_p}} \right) - \right. \\
\left. - \left(\frac{1}{2} \sum_{r=1}^{m} \sum_{j=1}^{3} \varrho_j \Sigma^{(li_1)}(\mathbf{y}_{p\varpi}^{(jr)}, \tau_p) + \sum_{j=1}^{2} \zeta_j \Sigma^{(li_1)}(\mathbf{z}_{p\delta}^{(j)}, \Delta_{p\gamma}^{(j)}) \right) \hat{I}^{(i_1)}_{1_{\tau_{p+1},\tau_p}} \right] + \\
+ \frac{1}{\Delta} \sum_{i_1,i_2,i_3=1}^{m} \sum_{j=1}^{2} \alpha_j \mathbf{k}_{i_1 i_2}^{(l)}(\mathbf{y}_{p\beta}^{(ji_3)}, \tau_p)\hat{I}^{(i_3 i_2 i_1)}_{000_{\tau_{p+1},\tau_p}},
\end{gathered}
\tag{8.12}
$$

$$
\begin{gathered}
\mathbf{y}_{p+1}^{(l)} = \mathbf{y}_p^{(l)} + \left\{\tilde{\alpha}_l \mathbf{a}^{(l)}(\mathbf{y}_{p+1}, \tau_{p+1}) + (1-\tilde{\alpha}_l)\mathbf{a}^{(l)}\right\}\Delta + \\
+ (0.5-\tilde{\alpha}_l)\left\{\tilde{\beta}_l L\mathbf{a}^{(l)}(\mathbf{y}_{p+1}, \tau_{p+1}) + (1-\tilde{\beta}_l)L\mathbf{a}^{(l)}\right\}\Delta^2 + \\
+ \sum_{i_1=1}^{m} \Sigma^{(li_1)}(\mathbf{y}_p, \tau_p)\hat{J}^{(i_1)}_{(1)\tau_{p+1},\tau_p} + \frac{1}{\sqrt{\Delta}} \sum_{i_1,i_2=1}^{m} \sum_{j=1}^{2} \alpha_j \Sigma^{(li_1)}(\mathbf{y}_{p\beta}^{(ji_2)}, \tau_p)\hat{J}^{(i_2 i_1)}_{(11)\tau_{p+1},\tau_p} + \\
+ \frac{1}{\Delta} \sum_{i_1=1}^{m} \left[\sum_{j=1}^{2} \pi_j \mathbf{a}^{(l)}(\mathbf{u}_{p\sigma}^{(ji_1)}, \tau_p) \left(\hat{J}^{(i_1)}_{(10)\tau_{p+1},\tau_p} - \tilde{\alpha}_l \Delta \hat{J}^{(i_1)}_{(1)\tau_{p+1},\tau_p} \right) + \right.
\end{gathered}
$$

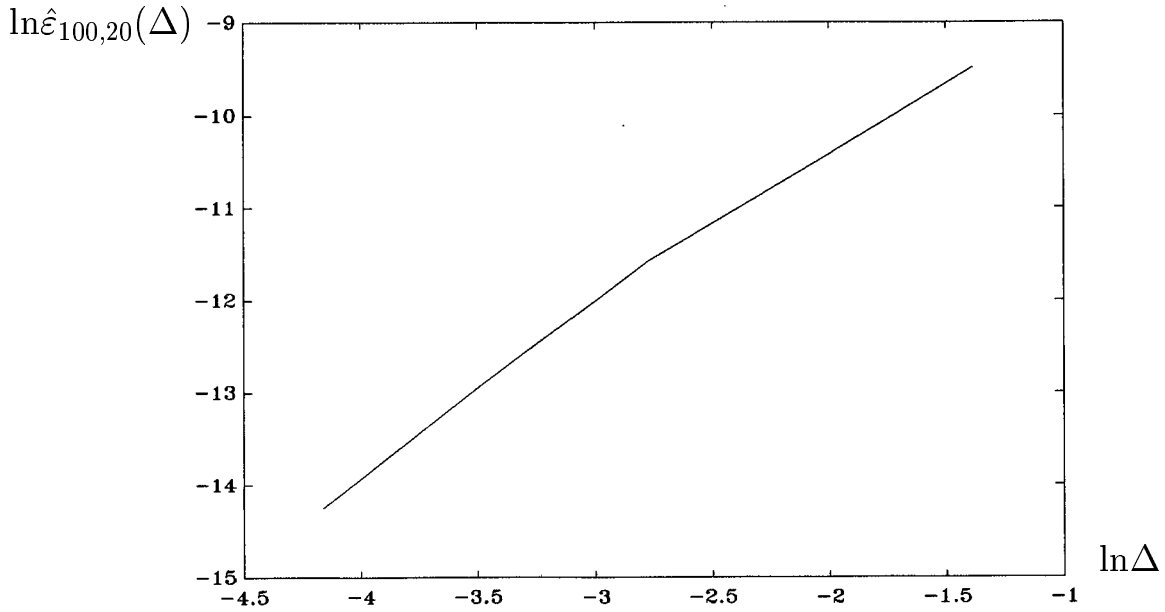

Рис. 8.16. Результат численного эксперимента 8.12.

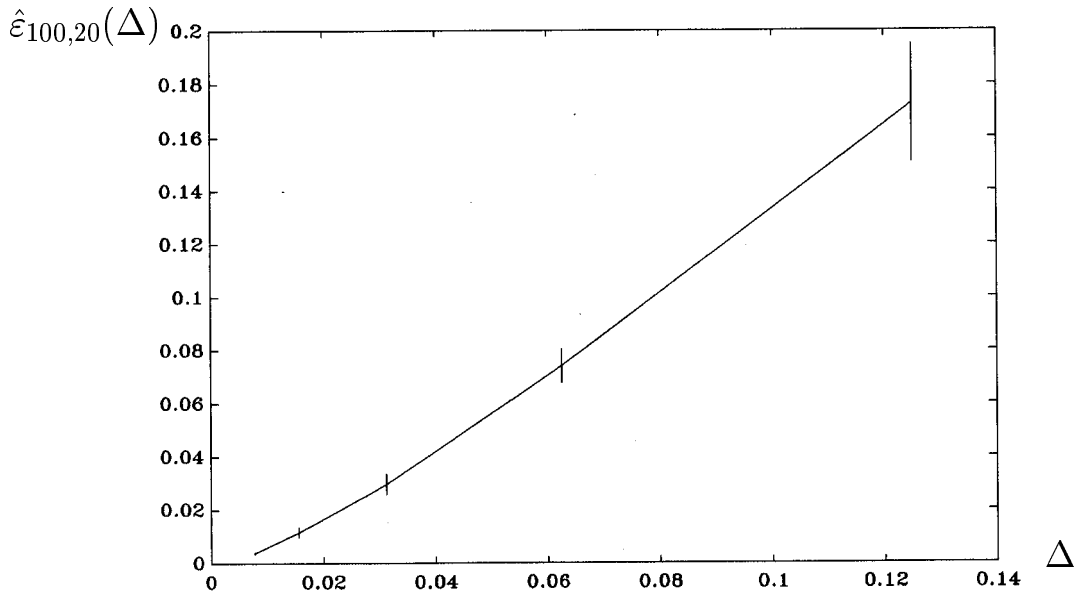

Рис. 8.17. Результат численного эксперимента 8.13.

$$+\left(\frac{1}{2}\sum_{r=1}^{m}\sum_{j=1}^{3}\varrho_j\Sigma^{(li_1)}(\mathbf{y}_{p\varpi}^{(jr)},\tau_p)+\sum_{j=1}^{2}\zeta_j\Sigma^{(li_1)}(\mathbf{z}_{p\delta}^{(j)},\Delta_{p\gamma}^{(j)})\right)\hat{J}_{(01)\tau_{p+1},\tau_p}^{(i_1)}\Bigg]+$$

$$+\frac{1}{\Delta}\sum_{i_1,i_2,i_3=1}^{m}\sum_{j=1}^{2}\alpha_j\mathbf{k}_{i_1i_2}^{(l)}(\mathbf{y}_{p\beta}^{(ji_3)},\tau_p)\hat{J}_{(111)\tau_{p+1},\tau_p}^{(i_3i_2i_1)}. \qquad (8.13)$$

В (8.13), (8.12) сохранен смысл обозначений, введенных в (7.96), (7.97).

Численный эксперимент 8.12 (рис. 8.16). *Повторить численный эксперимент* 8.2 *для неявного конечно-разностного сильного численного метода порядка точности* 1.5 *вида* (8.12) *при* $\tilde{\alpha}_1 = \tilde{\alpha}_2 = \frac{1}{2}$. *Для моделирования стохастических интегралов Ито* $I^{(1)}_{1_{(p+1)\Delta,p\Delta}}$; $p = 0, 1, \ldots, N-1$ *использовать формулу*

$$I^{(1)}_{1_{(p+1)\Delta,p\Delta}} = -\frac{1}{2}\Delta^{\frac{3}{2}}\left(\zeta_0^{(1)} + \frac{1}{\sqrt{3}}\zeta_1^{(1)}\right). \tag{8.14}$$

Здесь $\zeta^{(1)}_{0_{(p+1)\Delta,p\Delta}} \stackrel{\text{def}}{=} \zeta_0^{(1)}$, $\zeta^{(1)}_{1_{(p+1)\Delta,p\Delta}} \stackrel{\text{def}}{=} \zeta_1^{(1)}$ *и* $\zeta^{(1)}_{0_{(p+1)\Delta,p\Delta}}$, $\zeta^{(1)}_{1_{(p+1)\Delta,p\Delta}}$; $p = 0, 1, \ldots, N-1$ — *независимые в совокупности стандартные гауссовские случайные величины.*

Численный эксперимент 8.13 (рис. 8.17). *Повторить численный эксперимент* 8.1 *для неявного конечно-разностного сильного численного метода порядка точности* 1.5 *вида* (8.12) *при* $\tilde{\alpha}_1 = \frac{1}{2}$. *Для моделирования стохастических интегралов Ито* $I^{(1)}_{1_{(p+1)\Delta,p\Delta}}$; $p = 0, 1, \ldots, N-1$ *использовать формулу* (8.14).

8.3.3 Методы порядка точности 2.0

Аппроксимируя конечными разностями частные производные, входящие в правую часть (8.7) и выбирая $\tilde{\alpha}_l = \frac{1}{2}$ в (8.7), получаем

$$\mathbf{y}_{p+1} = \mathbf{y}_p + \frac{\Delta}{2}\left\{\mathbf{a}(\mathbf{y}_{p+1}, \tau_{p+1}) + \mathbf{a}(\mathbf{y}_p, \tau_p)\right\} +$$

$$+ \sum_{i_1=1}^{m} \Sigma_{i_1}(\mathbf{y}_p, \tau_p)\hat{I}^{(i_1)}_{0_{\tau_{p+1},\tau_p}} + \frac{1}{\sqrt{\Delta}} \sum_{i_1,i_2=1}^{m} \sum_{j=1}^{4} \eta_j \Sigma_{i_1}(\mathbf{y}^{(ji_2)}_{p\omega}, \tau_p)\hat{I}^{(i_2 i_1)}_{00_{\tau_{p+1},\tau_p}} +$$

$$+ \frac{1}{\Delta} \sum_{i_1=1}^{m} \left[\sum_{j=1}^{2} \pi_j \mathbf{a}(\mathbf{u}^{(ji_1)}_{p\sigma}, \tau_p)\left(0.5\Delta \hat{I}^{(i_1)}_{0_{\tau_{p+1},\tau_p}} + \hat{I}^{(i_1)}_{1_{\tau_{p+1},\tau_p}}\right) -\right.$$

$$\left. - \left(\frac{1}{2}\sum_{r=1}^{m}\sum_{j=1}^{3} \mu_j \Sigma_{i_1}(\mathbf{y}^{(jr)}_{p\lambda}, \tau_p) + \sum_{j=1}^{2} \zeta_j \Sigma_{i_1}(\mathbf{z}^{(j)}_{p\delta}, \Delta^{(j)}_{p\gamma})\right)\hat{I}^{(i_1)}_{1_{\tau_{p+1},\tau_p}}\right] +$$

$$+ \frac{1}{\Delta} \sum_{i_1,i_2,i_3=1}^{m} \sum_{j=1}^{4} \eta_j \mathbf{b}_{i_1 i_2}(\mathbf{y}^{(ji_3)}_{p\omega}, \tau_p)\hat{I}^{(i_3 i_2 i_1)}_{000_{\tau_{p+1},\tau_p}} +$$

$$+ \frac{1}{\Delta\sqrt{\Delta}} \sum_{i_1,i_2=1}^{m} \left[\sum_{j=1}^{4} \eta_j \mathbf{g}_{i_1}(\mathbf{y}^{(ji_2)}_{p\omega}, \tau_p)\left(\hat{I}^{(i_2 i_1)}_{10_{\tau_{p+1},\tau_p}} - \hat{I}^{(i_2 i_1)}_{01_{\tau_{p+1},\tau_p}}\right) +\right.$$

$$+ \sum_{j=1}^{4} \eta_j \mathbf{h}_{i_1}(\mathbf{y}^{(ji_2)}_{p\omega}, \tau_p)\left(\hat{I}^{(i_2 i_1)}_{01_{\tau_{p+1},\tau_p}} + 0.5\Delta \hat{I}^{(i_2 i_1)}_{00_{\tau_{p+1},\tau_p}}\right) -$$

$$-\left(\frac{1}{2}\sum_{r=1}^{m}\sum_{j=1}^{3}\mu_j\mathbf{k}_{i_1i_2}(\mathbf{y}_{p\lambda}^{(jr)},\tau_p)+\sum_{j=1}^{2}\zeta_j\mathbf{k}_{i_1i_2}(\mathbf{z}_{p\delta}^{(j)},\Delta_{p\gamma}^{(j)})\right)\hat{I}_{10_{\tau_{p+1},\tau_p}}^{(i_2i_1)}\Bigg]+$$

$$+\frac{1}{\Delta\sqrt{\Delta}}\sum_{i_1,i_2,i_3i_4=1}^{m}\sum_{j=1}^{4}\eta_j\mathbf{c}_{i_1i_2i_3}(\mathbf{y}_{p\omega}^{(ji_4)},\tau_p)\hat{I}_{0000_{\tau_{p+1},\tau_p}}^{(i_4i_3i_2i_1)},\qquad(8.15)$$

где сохранен смысл обозначений, входящих в правую часть (7.111). Аналог схемы (8.15), который основан на разложении Тейлора–Ито в форме Вагнера и Платена, имеет вид

$$\mathbf{y}_{p+1}=\mathbf{y}_p+\frac{\Delta}{2}\left\{\mathbf{a}(\mathbf{y}_{p+1},\tau_{p+1})+\mathbf{a}(\mathbf{y}_p,\tau_p)\right\}+$$

$$+\sum_{i_1=1}^{m}\Sigma_{i_1}(\mathbf{y}_p,\tau_p)\hat{J}_{(1)\tau_{p+1},\tau_p}^{(i_1)}+\frac{1}{\sqrt{\Delta}}\sum_{i_1,i_2=1}^{m}\sum_{j=1}^{4}\eta_j\Sigma_{i_1}(\mathbf{y}_{p\omega}^{(ji_2)},\tau_p)\hat{J}_{(11)\tau_{p+1},\tau_p}^{(i_2i_1)}+$$

$$+\frac{1}{\Delta}\sum_{i_1=1}^{m}\Bigg[\sum_{j=1}^{2}\pi_j\mathbf{a}(\mathbf{u}_{p\sigma}^{(ji_1)},\tau_p)\left(\hat{J}_{(10)\tau_{p+1},\tau_p}^{(i_1)}-0.5\Delta\hat{J}_{(1)\tau_{p+1},\tau_p}^{(i_1)}\right)+$$

$$+\left(0.5\sum_{r=1}^{m}\sum_{j=1}^{3}\mu_j\Sigma_{i_1}(\mathbf{y}_{p\lambda}^{(jr)},\tau_p)+\sum_{j=1}^{2}\zeta_j\Sigma_{i_1}(\mathbf{z}_{p\delta}^{(j)},\Delta_{p\gamma}^{(j)})\right)\hat{J}_{(01)\tau_{p+1},\tau_p}^{(i_1)}\Bigg]+$$

$$+\frac{1}{\Delta}\sum_{i_1,i_2,i_3=1}^{m}\sum_{j=1}^{4}\eta_j\mathbf{b}_{i_1i_2}(\mathbf{y}_{p\omega}^{(ji_3)},\tau_p)\hat{J}_{(111)\tau_{p+1},\tau_p}^{(i_3i_2i_1)}+$$

$$+\frac{1}{\Delta\sqrt{\Delta}}\sum_{i_1,i_2=1}^{m}\Bigg[\sum_{j=1}^{4}\eta_j\mathbf{g}_{i_1}(\mathbf{y}_{p\omega}^{(ji_2)},\tau_p)\hat{J}_{(101)\tau_{p+1},\tau_p}^{(i_2i_1)}+$$

$$+\sum_{j=1}^{4}\eta_j\mathbf{h}_{i_1}(\mathbf{y}_{p\omega}^{(ji_2)},\tau_p)\left(\hat{J}_{(110)\tau_{p+1},\tau_p}^{(i_2i_1)}-0.5\Delta\hat{J}_{(11)\tau_{p+1},\tau_p}^{(i_2i_1)}\right)+$$

$$+\left(\frac{1}{2}\sum_{r=1}^{m}\sum_{j=1}^{3}\mu_j\mathbf{k}_{i_1i_2}(\mathbf{y}_{p\lambda}^{(jr)},\tau_p)+\sum_{j=1}^{2}\zeta_j\mathbf{k}_{i_1i_2}(\mathbf{z}_{p\delta}^{(j)},\Delta_{p\gamma}^{(j)})\right)\hat{J}_{(011)\tau_{p+1},\tau_p}^{(i_2i_1)}\Bigg]+$$

$$+\frac{1}{\Delta\sqrt{\Delta}}\sum_{i_1,i_2,i_3i_4=1}^{m}\sum_{j=1}^{4}\eta_j\mathbf{c}_{i_1i_2i_3}(\mathbf{y}_{p\omega}^{(ji_4)},\tau_p)\hat{J}_{(1111)\tau_{p+1},\tau_p}^{(i_4i_3i_2i_1)},$$

где введены такие же обозначения, как и в (7.112).

Численный эксперимент 8.14. (рис. 8.18). *Повторить численный эксперимент* 8.1 *для неявного конечно-разностного сильного численного метода порядка* 2.0 *вида* (8.15). *Для моделирования стохастических интегралов Ито* $I_{1_{(p+1)\Delta,p\Delta}}^{(1)}$; $p=0,1,\ldots,N-1$ *использовать формулу* (8.14), *а для моделирования стохастических интегралов* $I_{10_{(p+1)\Delta,p\Delta}}^{(11)}$, $I_{01_{(p+1)\Delta,p\Delta}}^{(11)}$; $p=0,1,\ldots,N-1$ — *аппроксимацию*

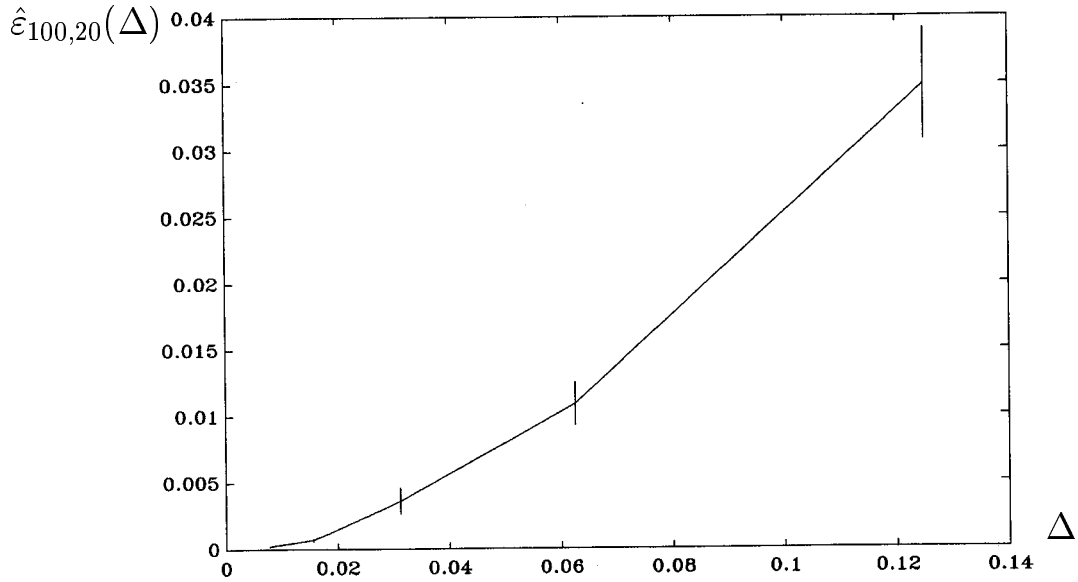

Рис. 8.18. Результат численного эксперимента 8.14.

$$I_{10_{(p+1)\Delta,p\Delta}}^{(11)q} = -\frac{\Delta^2}{4}\Bigl[\Bigl(\zeta_0^{(1)}\Bigr)^2 + \frac{1}{\sqrt{3}}\zeta_1^{(1)}\zeta_0^{(1)} +$$

$$+\sum_{i=0}^{q}\Bigl(\frac{1}{(2i-1)(2i+3)}\Bigl(\zeta_i^{(1)}\Bigr)^2 - \frac{1}{(2i+3)\sqrt{(2i+1)(2i+5)}}\zeta_i^{(1)}\zeta_{i+2}^{(1)}\Bigr) - 1\Bigr]$$

и соотношение $I_{01_{(p+1)\Delta,p\Delta}}^{(11)q} = I_{1_{(p+1)\Delta,p\Delta}}^{(1)} I_{0_{(p+1)\Delta,p\Delta}}^{(1)} - I_{10_{(p+1)\Delta,p\Delta}}^{(11)q} + \frac{\Delta^2}{2}$ *при* $q = 1$; $\zeta_{j_{(p+1)\Delta,p\Delta}}^{(1)} \stackrel{\mathrm{def}}{=} \zeta_j^{(1)}$; $j = 0, 1, \ldots, q+2$ — *независимые стандартные гауссовские случайные величины.*

В [86. С. 411] предложен неявный конечно-разностный сильный численный метод порядка точности 2.0 для случая скалярного аддитивного шума. Предложенный нами неявный конечно-разностный сильный численный метод порядка точности 2.0 вида (8.15) является более общим, поскольку в (8.15) шум предполагается векторным и неаддитивным. Кроме того, ошибка численного метода (8.15) уменьшается при уменьшении шага интегрирования Δ в достаточно широком диапазоне его изменения (см. рис. 8.18).

8.3.4 Методы порядка точности 2.5

Для построения неявных сильных одношаговых конечно-разностных численных методов порядка точности 2.5 используем численные схемы (8.8) и (8.9) при $\tilde{\alpha}_l = \frac{1}{2}$, а также конечно-разностные аппроксимации, полученные в разд. 7.7.1. В результате с помощью (8.8) получим

следующую неявную сильную одношаговую численную схему порядка точности 2.5:

$$\mathbf{y}_{p+1} = \mathbf{y}_p + \frac{\Delta}{2}\left\{\mathbf{a}(\mathbf{y}_{p+1}, \tau_{p+1}) + \mathbf{a}(\mathbf{y}_p, \tau_p)\right\} -$$

$$-\frac{\Delta}{12}\left[\frac{1}{2}\sum_{r=1}^{m}\sum_{j=1}^{5}\psi_j \mathbf{q}(\mathbf{y}_{p\phi}^{(jr)}, \tau_p) + \sum_{j=1}^{3}\varphi_j \mathbf{q}(\mathbf{z}_{p\chi}^{(j)}, \Delta_{p\kappa}^{(j)})\right] + \mathbf{v}_p,$$

где

$$\mathbf{v}_p = \sum_{i_1=1}^{m}\Sigma_{i_1}(\mathbf{y}_p, \tau_p)\hat{I}_{0_{\tau_{p+1},\tau_p}}^{(i_1)} + \frac{1}{\sqrt{\Delta}}\sum_{i_1,i_2=1}^{m}\sum_{j=1}^{4}\theta_j \Sigma_{i_1}(\mathbf{y}_{p\varepsilon}^{(ji_2)}, \tau_p)\hat{I}_{00_{\tau_{p+1},\tau_p}}^{(i_2 i_1)} +$$

$$+\frac{1}{\Delta}\sum_{i_1=1}^{m}\left[\sum_{j=1}^{2}\alpha_j \mathbf{a}(\mathbf{u}_{p\beta}^{(ji_1)}, \tau_p)\left(0.5\Delta\hat{I}_{0_{\tau_{p+1},\tau_p}}^{(i_1)} + \hat{I}_{1_{\tau_{p+1},\tau_p}}^{(i_1)}\right) -\right.$$

$$\left.-\left(\frac{1}{2}\sum_{r=1}^{m}\sum_{j=1}^{5}\psi_j \Sigma_{i_1}(\mathbf{y}_{p\phi}^{(jr)}, \tau_p) + \sum_{j=1}^{3}\varphi_j \Sigma_{i_1}(\mathbf{z}_{p\chi}^{(j)}, \Delta_{p\kappa}^{(j)})\right)\hat{I}_{1_{\tau_{p+1},\tau_p}}^{(i_1)}\right] +$$

$$+\frac{1}{\Delta}\sum_{i_1,i_2,i_3=1}^{m}\sum_{j=1}^{4}\theta_j \mathbf{b}_{i_1 i_2}(\mathbf{y}_{p\varepsilon}^{(ji_3)}, \tau_p)\hat{I}_{000_{\tau_{p+1},\tau_p}}^{(i_3 i_2 i_1)} +$$

$$+\frac{1}{\Delta\sqrt{\Delta}}\sum_{i_1,i_2=1}^{m}\left[\sum_{j=1}^{4}\theta_j \mathbf{g}_{i_1}(\mathbf{y}_{p\varepsilon}^{(ji_2)}, \tau_p)\left(\hat{I}_{10_{\tau_{p+1},\tau_p}}^{(i_2 i_1)} - \hat{I}_{01_{\tau_{p+1},\tau_p}}^{(i_2 i_1)}\right) +\right.$$

$$+\sum_{j=1}^{4}\theta_j \mathbf{h}_{i_1}(\mathbf{y}_{p\varepsilon}^{(ji_2)}, \tau_p)\left(\hat{I}_{01_{\tau_{p+1},\tau_p}}^{(i_2 i_1)} + 0.5\Delta\hat{I}_{00_{\tau_{p+1},\tau_p}}^{(i_2 i_1)}\right) -$$

$$\left.-\left(\frac{1}{2}\sum_{r=1}^{m}\sum_{j=1}^{5}\psi_j \mathbf{k}_{i_1 i_2}(\mathbf{y}_{p\phi}^{(jr)}, \tau_p) + \sum_{j=1}^{3}\varphi_j \mathbf{k}_{i_1 i_2}(\mathbf{z}_{p\chi}^{(j)}, \Delta_{p\kappa}^{(j)})\right)\hat{I}_{10_{\tau_{p+1},\tau_p}}^{(i_2 i_1)}\right] +$$

$$+\frac{1}{\Delta\sqrt{\Delta}}\sum_{i_1,i_2,i_3 i_4=1}^{m}\sum_{j=1}^{4}\theta_j \mathbf{c}_{i_1 i_2 i_3}(\mathbf{y}_{p\varepsilon}^{(ji_4)}, \tau_p)\hat{I}_{0000_{\tau_{p+1},\tau_p}}^{(i_4 i_3 i_2 i_1)} +$$

$$+\frac{1}{\Delta^2}\sum_{i_1=1}^{m}\left[\sum_{j=1}^{2}\alpha_j \mathbf{q}(\mathbf{u}_{p\beta}^{(ji_1)}, \tau_p)\left(0.5\hat{I}_{2_{\tau_{p+1},\tau_p}}^{(i_1)} + 0.5\Delta\hat{I}_{1_{\tau_{p+1},\tau_p}}^{(i_1)}\right) +\right.$$

$$+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\sum_{r=1}^{m}\sum_{j=1}^{5}\psi_j \mathbf{g}_{i_1}(\mathbf{y}_{p\phi}^{(jr)}, \tau_p) + \sum_{j=1}^{3}\varphi_j \mathbf{g}_{i_1}(\mathbf{z}_{p\chi}^{(j)}, \Delta_{p\kappa}^{(j)})\right)\hat{I}_{2_{\tau_{p+1},\tau_p}}^{(i_1)} -$$

$$\left.-\left(\frac{1}{2}\sum_{r=1}^{m}\sum_{j=1}^{5}\psi_j \mathbf{h}_{i_1}(\mathbf{y}_{p\phi}^{(jr)}, \tau_p) + \sum_{j=1}^{3}\varphi_j \mathbf{h}_{i_1}(\mathbf{z}_{p\chi}^{(j)}, \Delta_{p\kappa}^{(j)})\right)\left(\hat{I}_{2_{\tau_{p+1},\tau_p}}^{(i_1)} + 0.5\Delta\hat{I}_{1_{\tau_{p+1},\tau_p}}^{(i_1)}\right)\right]$$

$$+\frac{1}{\Delta^2}\sum_{i_1,i_2,i_3=1}^{m}\left[\sum_{j=1}^{4}\theta_j\mathbf{s}_{i_1i_2}(\mathbf{y}_{p\varepsilon}^{(ji_3)},\tau_p)\left(\hat{I}_{100_{\tau_{p+1},\tau_p}}^{(i_3i_2i_1)}-\hat{I}_{010_{\tau_{p+1},\tau_p}}^{(i_3i_2i_1)}\right)+\right.$$

$$+\sum_{j=1}^{4}\theta_j\mathbf{e}_{i_1i_2}(\mathbf{y}_{p\varepsilon}^{(ji_3)},\tau_p)\left(\hat{I}_{010_{\tau_{p+1},\tau_p}}^{(i_3i_2i_1)}-\hat{I}_{001_{\tau_{p+1},\tau_p}}^{(i_3i_2i_1)}\right)+$$

$$+\sum_{j=1}^{4}\theta_j\mathbf{v}_{i_1i_2}(\mathbf{y}_{p\varepsilon}^{(ji_3)},\tau_p)\left(0.5\Delta\hat{I}_{000_{\tau_{p+1},\tau_p}}^{(i_3i_2i_1)}+\hat{I}_{001_{\tau_{p+1},\tau_p}}^{(i_3i_2i_1)}\right)-$$

$$\left.-\left(\frac{1}{2}\sum_{r=1}^{m}\sum_{j=1}^{5}\psi_j\mathbf{r}_{i_1i_2i_3}(\mathbf{y}_{p\phi}^{(jr)},\tau_p)+\sum_{j=1}^{3}\varphi_j\mathbf{r}_{i_1i_2i_3}(\mathbf{z}_{p\chi}^{(j)},\Delta_{p\kappa}^{(j)})\right)\hat{I}_{100_{\tau_{p+1},\tau_p}}^{(i_3i_2i_1)}\right]+$$

$$+\frac{1}{\Delta^2}\sum_{i_1,i_2,i_3,i_4,i_5=1}^{m}\sum_{j=1}^{4}\theta_j\mathbf{d}_{i_1i_2i_3i_4}(\mathbf{y}_{p\varepsilon}^{(ji_5)},\tau_p)\hat{I}_{00000_{\tau_{p+1},\tau_p}}^{(i_5i_4i_3i_2i_1)}. \qquad (8.16)$$

Здесь сохранен смысл обозначений, входящих в правую часть (7.135).

Если в качестве основы взять численную схему (8.9) при $\tilde{\alpha}_l=\frac{1}{2}$, то получим следующую неявную сильную одношаговую численную схему порядка точности 2.5:

$$\mathbf{y}_{p+1}=\mathbf{y}_p+\frac{\Delta}{2}\left\{\mathbf{a}(\mathbf{y}_{p+1},\tau_{p+1})+\mathbf{a}(\mathbf{y}_p,\tau_p)\right\}-$$

$$-\frac{\Delta}{12}\left[\frac{1}{2}\sum_{r=1}^{m}\sum_{j=1}^{5}\psi_j\mathbf{q}(\mathbf{y}_{p\phi}^{(jr)},\tau_p)+\sum_{j=1}^{3}\varphi_j\mathbf{q}(\mathbf{z}_{p\chi}^{(j)},\Delta_{p\kappa}^{(j)})\right]+\mathbf{v}_p,$$

где

$$\mathbf{v}_p=\sum_{i_1=1}^{m}\Sigma_{i_1}(\mathbf{y}_p,\tau_p)\hat{J}_{(1)\tau_{p+1},\tau_p}^{(i_1)}+\frac{1}{\sqrt{\Delta}}\sum_{i_1,i_2=1}^{m}\sum_{j=1}^{4}\theta_j\Sigma_{i_1}(\mathbf{y}_{p\varepsilon}^{(ji_2)},\tau_p)\hat{J}_{(11)\tau_{p+1},\tau_p}^{(i_2i_1)}+$$

$$+\frac{1}{\Delta}\sum_{i_1=1}^{m}\left[\sum_{j=1}^{2}\alpha_j\mathbf{a}(\mathbf{u}_{p\beta}^{(ji_1)},\tau_p)\left(\hat{J}_{(10)\tau_{p+1},\tau_p}^{(i_1)}-0.5\Delta\hat{J}_{(1)\tau_{p+1},\tau_p}^{(i_1)}\right)+\right.$$

$$\left.+\left(\frac{1}{2}\sum_{r=1}^{m}\sum_{j=1}^{5}\psi_j\Sigma_{i_1}(\mathbf{y}_{p\phi}^{(jr)},\tau_p)+\sum_{j=1}^{3}\varphi_j\Sigma_{i_1}(\mathbf{z}_{p\chi}^{(j)},\Delta_{p\kappa}^{(j)})\right)\hat{J}_{(01)\tau_{p+1},\tau_p}^{(i_1)}\right]+$$

$$+\frac{1}{\Delta}\sum_{i_1,i_2,i_3=1}^{m}\sum_{j=1}^{4}\theta_j\mathbf{b}_{i_1i_2}(\mathbf{y}_{p\varepsilon}^{(ji_3)},\tau_p)\hat{J}_{(111)\tau_{p+1},\tau_p}^{(i_3i_2i_1)}+$$

$$+\frac{1}{\Delta\sqrt{\Delta}}\sum_{i_1,i_2=1}^{m}\left[\sum_{j=1}^{4}\theta_j\mathbf{g}_{i_1}(\mathbf{y}_{p\varepsilon}^{(ji_2)},\tau_p)\hat{J}_{(101)\tau_{p+1},\tau_p}^{(i_2i_1)}+\right.$$

$$+\sum_{j=1}^{4}\theta_j\mathbf{h}_{i_1}(\mathbf{y}_{p\varepsilon}^{(ji_2)},\tau_p)\left(\hat{J}_{(110)\tau_{p+1},\tau_p}^{(i_2i_1)}-0.5\Delta\hat{J}_{(11)\tau_{p+1},\tau_p}^{(i_2i_1)}\right)+$$

$$+\left(\frac{1}{2}\sum_{r=1}^{m}\sum_{j=1}^{5}\psi_j\mathbf{k}_{i_1i_2}(\mathbf{y}_{p\phi}^{(jr)},\tau_p)+\sum_{j=1}^{3}\varphi_j\mathbf{k}_{i_1i_2}(\mathbf{z}_{p\chi}^{(j)},\Delta_{p\kappa}^{(j)})\right)\hat{J}_{(011)_{\tau_{p+1},\tau_p}}^{(i_2i_1)}\Bigg]+$$

$$+\frac{1}{\Delta\sqrt{\Delta}}\sum_{i_1,i_2,i_3i_4=1}^{m}\sum_{j=1}^{4}\theta_j\mathbf{c}_{i_1i_2i_3}(\mathbf{y}_{p\varepsilon}^{(ji_4)},\tau_p)\hat{J}_{(1111)_{\tau_{p+1},\tau_p}}^{(i_4i_3i_2i_1)}+$$

$$+\frac{1}{\Delta^2}\sum_{i_1=1}^{m}\Bigg[\sum_{j=1}^{2}\alpha_j\mathbf{q}(\mathbf{u}_{p\beta}^{(ji_1)},\tau_p)\left(\hat{J}_{(100)_{\tau_{p+1},\tau_p}}^{(i_1)}-0.5\Delta\hat{J}_{(10)_{\tau_{p+1},\tau_p}}^{(i_1)}\right)+$$

$$+\left(\frac{1}{2}\sum_{r=1}^{m}\sum_{j=1}^{5}\psi_j\mathbf{g}_{i_1}(\mathbf{y}_{p\phi}^{(jr)},\tau_p)+\sum_{j=1}^{3}\varphi_j\mathbf{g}_{i_1}(\mathbf{z}_{p\chi}^{(j)},\Delta_{p\kappa}^{(j)})\right)\hat{J}_{(001)_{\tau_{p+1},\tau_p}}^{(i_1)}+$$

$$+\left(\frac{1}{2}\sum_{r=1}^{m}\sum_{j=1}^{5}\psi_j\mathbf{h}_{i_1}(\mathbf{y}_{p\phi}^{(jr)},\tau_p)+\sum_{j=1}^{3}\varphi_j\mathbf{h}_{i_1}(\mathbf{z}_{p\chi}^{(j)},\Delta_{p\kappa}^{(j)})\right)\times$$

$$\times\left(\hat{J}_{(010)_{\tau_{p+1},\tau_p}}^{(i_1)}-0.5\Delta\hat{J}_{(01)_{\tau_{p+1},\tau_p}}^{(i_1)}\right)\Bigg]+$$

$$+\frac{1}{\Delta^2}\sum_{i_1,i_2,i_3=1}^{m}\Bigg[\sum_{j=1}^{4}\theta_j\mathbf{s}_{i_1i_2}(\mathbf{y}_{p\varepsilon}^{(ji_3)},\tau_p)\hat{J}_{(1011)_{\tau_{p+1},\tau_p}}^{(i_3i_2i_1)}+\sum_{j=1}^{4}\theta_j\mathbf{e}_{i_1i_2}(\mathbf{y}_{p\varepsilon}^{(ji_3)},\tau_p)\hat{J}_{(1101)_{\tau_{p+1},\tau_p}}^{(i_3i_2i_1)}$$

$$+\sum_{j=1}^{4}\theta_j\mathbf{v}_{i_1i_2}(\mathbf{y}_{p\varepsilon}^{(ji_3)},\tau_p)\left(\hat{J}_{(1110)_{\tau_{p+1},\tau_p}}^{(i_3i_2i_1)}-0.5\Delta\hat{J}_{(111)_{\tau_{p+1},\tau_p}}^{(i_3i_2i_1)}\right)+$$

$$+\left(\frac{1}{2}\sum_{r=1}^{m}\sum_{j=1}^{5}\psi_j\mathbf{r}_{i_1i_2i_3}(\mathbf{y}_{p\phi}^{(jr)},\tau_p)+\sum_{j=1}^{3}\varphi_j\mathbf{r}_{i_1i_2i_3}(\mathbf{z}_{p\chi}^{(j)},\Delta_{p\kappa}^{(j)})\right)\hat{J}_{(0111)_{\tau_{p+1},\tau_p}}^{(i_3i_2i_1)}\Bigg]+$$

$$+\frac{1}{\Delta^2}\sum_{i_1,i_2,i_3,i_4,i_5=1}^{m}\sum_{j=1}^{4}\theta_j\mathbf{d}_{i_1i_2i_3i_4}(\mathbf{y}_{p\varepsilon}^{(ji_5)},\tau_p)\hat{J}_{(11111)_{\tau_{p+1},\tau_p}}^{(i_5i_4i_3i_2i_1)}. \qquad (8.17)$$

Здесь сохранен смысл обозначений, входящих в правую часть (7.136).

В заключение отметим, что полученные в разд. 8.3.3 и 8.3.4 неявные сильные численные методы представляют интерес, поскольку в них используются конечно-разностные аппроксимации частных производных, отличающиеся от соответствующих аналогов, полученных в [70, 86], унифицированные разложения Тейлора–Ито, а также предлагается применять в построенных численных схемах метод аппроксимации повторных стохастических интегралов, основанный на кратных рядах Фурье.

8.4 О сходимости неявных сильных одношаговых методов

В настоящем разделе на примере численного метода (8.3) покажем,

как может быть обоснована сходимость неявных одношаговых сильных численных методов.

Предполагается, что все частные производные, которые встречаются в данном разделе, существуют.

Перепишем численный метод (8.3):

$$\mathbf{y}_{p+1}^{(l)} = \mathbf{y}_p^{(l)} + \left\{\tilde{\alpha}_l \mathbf{a}^{(l)}(\mathbf{y}_{p+1}, \tau_{p+1}) + (1-\tilde{\alpha}_l)\mathbf{a}^{(l)}(\mathbf{y}_p, \tau_p)\right\}\Delta +$$

$$+ \sum_{i_1=1}^{m} \Sigma^{(li_1)}(\mathbf{y}_p, \tau_p)\hat{I}_{0_{\tau_{p+1},\tau_p}}^{(i_1)} + \sum_{i_1,i_2=1}^{m} G_0^{(i_2)}\Sigma^{(li_1)}(\mathbf{y}_p, \tau_p)\hat{I}_{00_{\tau_{p+1},\tau_p}}^{(i_2 i_1)}, \qquad (8.18)$$

где $\mathbf{y}_{\tau_p}^{(l)} \stackrel{\text{def}}{=} \mathbf{y}_p^{(l)}$; $p\Delta \stackrel{\text{def}}{=} \tau_p$; $\tilde{\alpha}_l \in [0,1]$; $l = 1, \ldots, n$.

С помощью формулы Ито и разложения Тейлора–Ито имеем

$$\mathbf{a}^{(l)}(\mathbf{x}_{\tau_{p+1}}, \tau_{p+1}) = \mathbf{a}^{(l)}(\mathbf{x}_{\tau_p}, \tau_p) + R_{\tau_{p+1},\tau_p}^{(l)} \text{ с в.1}, \qquad (8.19)$$

где

$$R_{\tau_{p+1},\tau_p}^{(l)} = \int_{\tau_p}^{\tau_{p+1}} L\mathbf{a}^{(l)}(\mathbf{x}_s, s)ds + \sum_{i_1=1}^{m} \int_{\tau_p}^{\tau_{p+1}} G_0^{(i_1)}\mathbf{a}^{(l)}(\mathbf{x}_s, s)d\mathbf{f}_s^{(i_1)};$$

$$\mathbf{x}_{\tau_{p+1}}^{(l)} = \mathbf{x}_{\tau_p}^{(l)} + \mathbf{a}^{(l)}(\mathbf{x}_{\tau_p}, \tau_p)\Delta + \sum_{i_1=1}^{m} \Sigma^{(li_1)}(\mathbf{x}_{\tau_p}, \tau_p)I_{0_{\tau_{p+1},\tau_p}}^{(i_1)} +$$

$$+ \sum_{i_1,i_2=1}^{m} G_0^{(i_2)}\Sigma^{(li_1)}(\mathbf{x}_{\tau_p}, \tau_p)I_{00_{\tau_{p+1},\tau_p}}^{(i_2 i_1)} + H_{3_{\tau_{p+1},\tau_p}}^{(l)} \text{ с в.1}; \qquad (8.20)$$

$\mathbf{x}_s$ — решение стохастического дифференциального уравнения (7.18).

Используя (8.19), (8.20), приходим к равенству

$$\mathbf{x}_{\tau_{p+1}}^{(l)} = \mathbf{x}_{\tau_p}^{(l)} + \left\{\tilde{\alpha}_l \mathbf{a}^{(l)}(\mathbf{x}_{\tau_{p+1}}, \tau_{p+1}) + (1-\tilde{\alpha}_l)\mathbf{a}^{(l)}(\mathbf{x}_{\tau_p}, \tau_p)\right\}\Delta +$$

$$+ \sum_{i_1=1}^{m} \Sigma^{(li_1)}(\mathbf{x}_{\tau_p}, \tau_p)I_{0_{\tau_{p+1},\tau_p}}^{(i_1)} + \sum_{i_1,i_2=1}^{m} G_0^{(i_2)}\Sigma^{(li_1)}(\mathbf{x}_{\tau_p}, \tau_p)I_{00_{\tau_{p+1},\tau_p}}^{(i_2 i_1)} +$$

$$+ H_{3_{\tau_{p+1},\tau_p}}^{(l)} - \tilde{\alpha}_l \Delta R_{\tau_{p+1},\tau_p}^{(l)} \text{ с в.1}.$$

Далее имеем

$$\mathbf{x}_s^{(l)} - \mathbf{y}_s^{(l)} = \mathbf{x}_0^{(l)} - \mathbf{y}_0^{(l)} + \sum_{p=0}^{n_s-1}\left(U_{\tau_{p+1},\tau_p}^{(l)} + G_{\tau_{p+1},\tau_p}^{(l)}\right) + U_{s,\tau_{n_s}}^{(l)} + G_{s,\tau_{n_s}}^{(l)} \text{ с в.1}, \qquad (8.21)$$

где $n_s \stackrel{\text{def}}{=} \max\limits_j \{j : \tau_j \le s\}$;

$$\mathbf{y}_s^{(l)} = \mathbf{y}_{\tau_p}^{(l)} + \left\{\tilde{\alpha}_l \mathbf{a}^{(l)}(\mathbf{y}_s, s) + (1-\tilde{\alpha}_l)\mathbf{a}^{(l)}(\mathbf{y}_{\tau_p}, \tau_p)\right\}(s-\tau_p) +$$

$$+\sum_{i_1=1}^{m}\Sigma^{(li_1)}(\mathbf{y}_{\tau_p},\tau_p)\hat{I}_{0_{s,\tau p}}^{(i_1)}+\sum_{i_1,i_2=1}^{m}G_0^{(i_2)}\Sigma^{(li_1)}(\mathbf{y}_{\tau_p},\tau_p)\hat{I}_{00_{s,\tau p}}^{(i_2i_1)};$$

$$U_{s,\tau}^{(l)}=\left\{\tilde{\alpha}_l(\mathbf{a}^{(l)}(\mathbf{x}_s,s)-\mathbf{a}^{(l)}(\mathbf{y}_s,s))+\right.$$

$$\left.+(1-\tilde{\alpha}_l)(\mathbf{a}^{(l)}(\mathbf{x}_\tau,\tau)-\mathbf{a}^{(l)}(\mathbf{y}_\tau,\tau))\right\}(s-\tau)+$$

$$+\sum_{i_1=1}^{m}\left[\left(\Sigma^{(li_1)}(\mathbf{x}_\tau,\tau)-\Sigma^{(li_1)}(\mathbf{y}_\tau,\tau)\right)I_{0_{s,\tau}}^{(i_1)}+\Sigma^{(li_1)}(\mathbf{y}_\tau,\tau)\left(I_{0_{s,\tau}}^{(i_1)}-\hat{I}_{0_{s,\tau}}^{(i_1)}\right)\right]+$$

$$+\sum_{i_1,i_2=1}^{m}\left[\left(G_0^{(i_2)}\Sigma^{(li_1)}(\mathbf{x}_\tau,\tau)-G_0^{(i_2)}\Sigma^{(li_1)}(\mathbf{y}_\tau,\tau)\right)I_{00_{s,\tau}}^{(i_2i_1)}+\right.$$

$$\left.+G_0^{(i_2)}\Sigma^{(li_1)}(\mathbf{y}_\tau,\tau)\left(I_{00_{s,\tau}}^{(i_2i_1)}-\hat{I}_{00_{s,\tau}}^{(i_2i_1)}\right)\right];$$

$$G_{s,\tau}^{(l)}\stackrel{\text{def}}{=}H_{3_{s,\tau}}^{(l)}-R_{s,\tau}^{(l)};$$

$\mathbf{x}_s^{(l)}$ определяется из (8.20) при замене τ_{p+1} на s; $s\in(\tau_p,\tau_{p+1}]$; $p=0,1,\ldots,N-1$.

Если предположить теперь, что выполнены условия теоремы 7.3 при $r=2$, то по аналогии с доказательством теорем 7.2, 7.3, используя (8.21), нетрудно получить следующую оценку:

$$\mathbf{z}_s^{(l)}\le K_1\Delta^2+K_2\int\limits_0^s\mathbf{z}_u^{(l)}du, \tag{8.22}$$

где $s\in[0,T]$; постоянные K_1,K_2 не зависят от Δ; $\mathbf{z}_s^{(l)}\stackrel{\text{def}}{=}\mathsf{M}\{|\mathbf{x}_s^{(l)}-\mathbf{y}_s^{(l)}|^2\}$.

С помощью (8.22) и неравенства Гронуолла имеем $\mathsf{M}\{|\mathbf{x}_T^{(l)}-\mathbf{y}_T^{(l)}|\}\le\sqrt{\mathbf{z}_T^{(l)}}\le K_3\Delta$ или $\mathsf{M}\{|\mathbf{x}_T-\mathbf{y}_T|\}\le K_4\Delta$, где постоянные K_3,K_4 не зависят от Δ. Это означает, что численный метод (8.18) имеет порядок сильной сходимости 1.0.

Нетрудно видеть, что сходимость более точных неявных сильных численных методов может быть доказана по предложенной ранее схеме. Отметим также, что, используя приведенные в данном разделе рассуждения, можно показать, что неявный метод Эйлера (8.1) имеет порядок сильной сходимости 0.5, если выполнены условия теоремы 7.1.

8.5 Сбалансированные неявные сильные численные методы

В начале данной главы (см. также [86. С. 336–337]) уже отмечалось, что введение неявности при построении численных методов не

только в систематические, но и в стохастические члены правой части численной схемы приводит к тому, что для конструируемых численных методов, вообще говоря, перестают существовать моментные характеристики.

Приведенные ранее неявные сильные численные методы, в которых неявность входит только в систематические члены, "хорошо" ведут себя по отношению к жестким системам только с несущественной стохастической динамикой (малая интенсивность шума, аддитивный шум) [93]. В тех случаях, когда стохастическая динамика существенна (мультипликативный шум с большой интенсивностью), явные сильные численные методы, а также неявные сильные численные методы с неявностью в систематических членах дают большую ошибку даже при достаточно малых шагах интегрирования [93]. Использование же малых шагов интегрирования ведет к резкому увеличению машинного времени.

Для преодоления указанных вычислительных трудностей для жестких систем с существенной стохастической динамикой в [93] предложено пользоваться семейством так называемых сбалансированных сильных численных методов. Несмотря на то, что неявность в этих численных методах входит в систематические и стохастические слагаемые в [93] проблему существования моментных характеристик для данных численных методов удалось преодолеть.

Приведем общий вид сбалансированных неявных сильных численных методов [93]:

$$\mathbf{y}_{p+1} = \mathbf{y}_p + \mathbf{a}(\mathbf{y}_p, \tau_p)\Delta + \Sigma(\mathbf{y}_p, \tau_p)(\mathbf{f}_{\tau_{p+1}} - \mathbf{f}_{\tau_p}) + C_p(\mathbf{y}_p - \mathbf{y}_{p+1}), \quad (8.23)$$

где

$$C_p = D_0(\mathbf{y}_p, \tau_p)\Delta + \sum_{i=1}^{m} D_i(\mathbf{y}_p, \tau_p)|\Delta\mathbf{f}_{\tau_p}^{(i)}|; \quad (8.24)$$

$\Delta\mathbf{f}_{\tau_p}^{(i)} = \mathbf{f}_{\tau_{p+1}}^{(i)} - \mathbf{f}_{\tau_p}^{(i)}$; $i = 1, \ldots, m$; $\tau_{p+1} - \tau_p = \Delta$; $\mathbf{y}_{\tau_p} \stackrel{\text{def}}{=} \mathbf{y}_p$ $(p = 0, 1, \ldots, N-1)$; $\mathbf{f}_\tau$ — $\mathcal{F}_\tau$-измеримый при всех $\tau \in [0, T]$ m-мерный стандартный винеровский процесс с независимыми компонентами $\mathbf{f}_\tau^{(i)}$ $(i = 1, \ldots, m)$; $D_0(\mathbf{x}, t)$, $D_1(\mathbf{x}, t), \ldots, D_m(\mathbf{x}, t) : \Re^n \times [0, T] \to \Re^{n\times n}$.

В [93] доказана следующая теорема о сильной сходимости численного метода (8.23), (8.24).

Теорема 8.1 [93]. *Пусть выполнены следующие условия:*

1. *Компоненты матриц* $D_0(\mathbf{x}, t)$, $D_1(\mathbf{x}, t), \ldots, D_m(\mathbf{x}, t)$ *ограничены.*

2. *Для любой последовательности вещественных чисел* $\{\alpha_i\}_{i=0}^m$ *такой, что* $\alpha_0 \in [0, \bar{\alpha}]$, $\alpha_1 \geq 0, \ldots, \alpha_m \geq 0$ $(\bar{\alpha} \geq \Delta)$ *и всех* $(\mathbf{x}, t) \in \Re^n \times [0, T]$

матрица $M(\mathbf{x},t) = I + \alpha_0 D_0(\mathbf{x},t) + \sum\limits_{i=1}^{m} \alpha_i D_i(\mathbf{x},t)$ *имеет обратную, причем* $\det(M^{-1}(\mathbf{x},t)) \le K < \infty$; I *— единичная матрица.*

3. *Справедливы условия* AI–AIII (теорема 1.6).

Тогда для всех $p = 0,1,\ldots,N$ *и* $\Delta = T/N$; $N = 1,2,\ldots$, $\left(\mathsf{M}\{|\mathbf{x}_{\tau_p} - \mathbf{y}_p|^2 | \mathcal{F}_0\}\right)^{\frac{1}{2}} \le K_1(1+|\mathbf{x}_0|^2)\sqrt{\Delta}$, *где постоянная* K_1 *не зависит от* Δ; $\mathbf{x}_t$ *— решение стохастического дифференциального уравнения Ито* (7.18).

Таким образом, в условиях теоремы 8.1 сбалансированный неявный сильный численный метод (8.23), (8.24) имеет порядок сильной сходимости 0.5. Отметим, что условие 2 теоремы 8.1 выполнено, если матрицы $D_0(\mathbf{x},t)$, $D_1(\mathbf{x},t),\ldots,D_m(\mathbf{x},t)$ положительно определены [93].

В работах [93, 99] путем численных экспериментов для стохастических дифференциальных уравнений с мультипликативным шумом показано, что в ряде случаев сбалансированные неявные сильные численные методы более эффективны, чем другие численные методы, в частности, явные численные методы.

8.6 О полностью неявных сильных численных методах

Рассмотренные в предыдущем разделе численные методы содержат неявность как в систематических, так и в стохастических членах. В данном разделе рассмотрим численные методы [186], которые также обладают указанной особенностью, но основаны на другой идее.

Как уже отмечалось, проблема существования моментных характеристик неявных сильных численных методов с неявностью в стохастических членах связана главным образом с тем, что гауссовские случайные величины, входящие в указанные численные методы, являются неограниченными случайными величинами. В [186] предлагается преодолеть данную проблему путем замены гауссовских случайных величин специальными ограниченными случайными величинами. Полученные таким образом в [186] численные методы имеют невысокие порядки сильной сходимости (в общем случае 0.5, а в частных случаях 1.0), однако эти численные методы обладают хорошими свойствами устойчивости.

Рассмотрим скалярное стохастическое дифференциальное уравнение Ито вида

$$dx_t = a(x_t,t)dt + \sigma(x_t,t)df_t,\ \ x_0 = x(0,\omega),$$

где $x_t \in \Re^1$ — случайный процесс, являющийся решением данного уравнения; f_t — стандартный скалярный винеровский процесс; $a, \sigma : \Re^1 \times [0,T] \to \Re^1$ — неслучайные функции; x_0 — начальное условие, которое стохастически не зависит от приращения $f_\tau - f_0$ при $\tau > 0$ и удовлетворяет условию AIII теоремы 1.6.

Теорема 8.2 [186]. *Пусть выполнены следующие условия:*

1. *Функции* $a(x,t)$, $\sigma(x,t)$, $\frac{\partial\sigma}{\partial x}(x,t)$, $\frac{\partial a}{\partial t}(x,t)$, $\frac{\partial\sigma}{\partial t}(x,t)$, $\frac{\partial^2\sigma}{\partial x^2}(x,t)$ *непрерывны при* $t \in [t_0,T]$, $x \in \Re^1$ *и существует такая постоянная* L, *что*

$$|a(x,t) - a(y,t)| \le L|x-y|, \ \left|\frac{\partial\sigma}{\partial x}(x,t)\right| \le L,$$

$$\frac{\partial a}{\partial t}(x,t) \le L(1+|x|), \ \frac{\partial\sigma}{\partial t}(x,t) \le L(1+|x|)$$

при всех $t \in [t_0,T]$, $x, y \in \Re^1$.

2. *Существует такое* $\delta > 0$, *что если* $|x-y| \le \delta(1+|x|)$, *то выполняется неравенство:*

$$\left|\sigma(x,t)\frac{\partial^2\sigma}{\partial x^2}(y,t)\right| \le L, \ t \in [t_0,T].$$

3. *Случайные величины* $\zeta_{p,\Delta}$ *определены следующим образом:*

$$\zeta_{p,\Delta} = \begin{cases} \zeta_p & \text{при } |\zeta_p| \le A_\Delta \\ A_\Delta & \text{при } \zeta_p > A_\Delta \\ -A_\Delta & \text{при } \zeta_p < -A_\Delta \end{cases},$$

где ζ_p — *независимые стандартные гауссовские случайные величины;* $p = 0, \ 1, \ldots, N-1$; $\Delta = (T-t_0)/N$; $A_\Delta = \sqrt{2|\ln\Delta|}$.

Тогда численный метод

$$y_{p+1} = y_p + a(y_{p+1},\tau_p)\Delta - \sigma(y_p,\tau_p)\frac{\partial\sigma}{\partial x}(y_p,\tau_p)\Delta + \sigma(y_{p+1},\tau_p)\zeta_{p,\Delta}\sqrt{\Delta},$$

где $p = 0, \ 1, \ldots, N-1$; $\tau_p = t_0 + p\Delta$; $\tau_N = T$, *имеет порядок сильной сходимости равный* 0.5.

В [186], в частности, отмечается, что если условия теоремы 8.2 дополнить условием Липшица с постоянной L по переменной x для функции

$$\sigma(x,t)\frac{\partial\sigma}{\partial t}(x,t),$$

то численный метод вида

$$y_{p+1} = y_p + a(y_{p+1},\tau_p)\Delta - \sigma(y_{p+1},\tau_p)\frac{\partial\sigma}{\partial x}(y_{p+1},\tau_p)\Delta + \sigma(y_{p+1},\tau_p)\zeta_{p,\Delta}\sqrt{\Delta} \tag{8.25}$$

будет иметь порядок сильной сходимости равный 0.5.

Кратко коснемся многомерного случая.

Рассмотрим стохастическое дифференциальное уравнение Ито вида

$$d\mathbf{x}_t = \mathbf{a}(\mathbf{x}_t, t)dt + \Sigma(\mathbf{x}_t, t)d\mathbf{f}_t, \ \mathbf{x}_0 = \mathbf{x}(0, \omega),$$

где $\mathbf{x}_t \in \Re^n$ — случайный процесс, являющийся решением данного уравнения; $\mathbf{f}_t \in \Re^m$ — стандартный векторный винеровский процесс с независимыми компонентами $\mathbf{f}_t^{(i)} (i = 1, \ldots, m)$; $\mathbf{a} : \ \Re^n \times [0, T] \to \Re^n$, $\Sigma : \ \Re^n \times [0, T] \to \Re^{n \times m}$ — неслучайные функции, удовлетворяющие условиям AI, AII (теорема 1.6); $\mathbf{x}_0$ — начальное условие, которое стохастически не зависит от приращения $\mathbf{f}_\tau - \mathbf{f}_0$ при $\tau > 0$ и удовлетворяет условию AIII теоремы 1.6.

Многомерный вариант численного метода (8.25) имеет вид [186]:

$$\mathbf{y}_{p+1} = \mathbf{y}_p + \mathbf{a}(\mathbf{y}_{p+1}, \tau_p)\Delta - \sum_{j=1}^{m} \sum_{i=1}^{n} \Sigma^{(ij)}(\mathbf{y}_{p+1}, \tau_p) \frac{\partial \Sigma_j}{\partial \mathbf{x}^{(i)}}(\mathbf{y}_{p+1}, \tau_p)\Delta +$$

$$+ \sum_{j=1}^{m} \Sigma_j(\mathbf{y}_{p+1}, \tau_p)\zeta_{p,\Delta}^{(j)} \sqrt{\Delta}, \qquad (8.26)$$

где

$$\zeta_{p,\Delta}^{(j)} = \begin{cases} \zeta_p^{(j)} & \text{при } |\zeta_p^{(j)}| \le A_\Delta \\ A_\Delta & \text{при } \zeta_p^{(j)} > A_\Delta \\ -A_\Delta & \text{при } \zeta_p^{(j)} < -A_\Delta \end{cases},$$

где $\zeta_p^{(j)}$ — независимые стандартные гауссовские случайные величины при различных p или j; Σ_j — $j-$й столбец матрицы Σ.

В [186] отмечается, что при соответствующих условиях гладкости и ограниченности функций $\mathbf{a}(\mathbf{x}, t)$, $\Sigma(\mathbf{x}, t)$ численный метод (8.26) имеет порядок сильной сходимости равный 0.5. Там же рассмотрены и другие полностью неявные сильные численные методы порядка точности 0.5.

Глава 9

Двухшаговые и трехшаговые сильные численные методы решения стохастических дифференциальных уравнений Ито

В настоящей главе на примере двухшаговых и трехшаговых рассматриваются многошаговые сильные методы численного решения стохастических дифференциальных уравнений Ито. С вычислительной точки зрения многошаговые численные методы в ряде случаев являются более эффективными, нежели одношаговые численные методы такого же порядка точности. Это обстоятельство связано с тем, что многошаговые численные методы используют для вычисления решения на k-м шаге интегрирования информацию об этом решении на нескольких предшествующих шагах, в то время как в одношаговых численных методах используется информация о решении только на предыдущем шаге интегрирования. Кроме того, в ряде случаев многошаговые численные методы являются более устойчивыми, чем одношаговые численные методы такого же порядка точности. Отметим, что начальные шаги интегрирования, необходимые для старта многошаговой численной схемы (в случае двухшаговых численных методов требуется один начальный шаг, а в случае трехшаговых — два начальных шага), могут осуществляться, например, с помощью явных одношаговых численных методов такого же порядка точности, как и рассматриваемый многошаговый численный метод.

Двухшаговые сильные численные методы решения стохастических дифференциальных уравнений Ито приводились в ряде работ. Например, в [70] предложен явный двухшаговый сильный численный метод порядка точности 1.5 для стохастического дифференциального уравнения Ито с аддитивным шумом. В [86] получен общий вариант дан-

ного численного метода, а также приведена его конечно-разностная модификация. Там же доказана сильная сходимость явных двухшаговых численных методов общего вида. Неявные сильные двухшаговые численные методы порядка точности 1.0 и 1.5, а также их конечно-разностные модификации получены в [86].

В настоящей главе наряду с известными двухшаговыми сильными численными методами рассматриваются их модификации, основанные на унифицированном разложении Тейлора–Ито. Кроме того, предлагаются новые явные и неявные, в том числе конечно-разностные, сильные двухшаговые численные методы порядка точности 2.0 и 2.5.

В данной главе также рассматриваются пяти и восьми параметрические семейства трехшаговых сильных численных методов порядков точности 1.0 и 1.5 соответственно для стохастических дифференциальных уравнений Ито. Среди этих численных методов представлены также конечно-разностные численные методы.

Отметим, что известные одношаговые и двухшаговые сильные численные методы порядков точности 1.0 и 1.5 для стохастических дифференциальных уравнений Ито получаются при определенном выборе параметров из отмеченных параметрических семейств численных методов.

9.1 Явные двухшаговые методы, основанные на разложениях Тейлора–Ито

9.1.1 Метод порядка точности 1.0

Рассмотрим следующий двухшаговый явный сильный численный метод порядка точности 1.0 [70, 86]:

$$\mathbf{y}_{p+1} = \mathbf{y}_{p-1} + 2\mathbf{a}\Delta + \mathbf{v}_p + \mathbf{v}_{p-1}, \tag{9.1}$$

$$\mathbf{v}_p = \sum_{i_1=1}^{m} \Sigma_{i_1} \hat{J}^{(i_1)}_{(1)\tau_{p+1},\tau_p} + \sum_{i_1,i_2=1}^{m} G_0^{(i_2)} \Sigma_{i_1} \hat{J}^{(i_2 i_1)}_{(11)\tau_{p+1},\tau_p}, \tag{9.2}$$

где сохранен смысл обозначений, введенных в (7.65).

Обоснование сходимости численного метода (9.1), а также более точных двухшаговых сильных численных методов, будет дано далее.

Численный эксперимент 9.1. *Для стохастического дифференциального уравнения Ито*

$$dx_t = ax_t dt + bx_t df_t,\ \ x_0 = 1,\ \ t \in [0, T],\ \ f_t \in \Re^1, \tag{9.3}$$

смоделировать 2000 *(*$M = 20$ *групп по* $N = 100$ *реализаций) независимых реализаций случайной величины* x_T *при* $T = 1$, $a = b = 1.5$ *по формуле*

$$x_T = x_0 e^{\left(a-\frac{1}{2}b^2\right)T+b\sqrt{\Delta}\sum\limits_{i=0}^{N-1}\zeta_i}$$

и с помощью явного двухшагового сильного численного метода порядка точности 1.0 *вида* (9.1). *Здесь* $N = T/\Delta$; $\Delta = 2^{-3}$; ζ_i $(i = 0, 1, \ldots, N-1)$ — *независимые стандартные гауссовские случайные величины. Начальный шаг, необходимый для старта численного метода* (9.1), *осуществлять с помощью явного метода Г.Н. Мильштейна* (7.35).

Вычислить оценку $\hat{\varepsilon}_{100,20}$ *ошибки* $\varepsilon = \mathsf{M}\left\{|x_T - y_T|\right\}$ *по формуле* (7.3) *(*y_T *определяется из* (9.1)) *и* 90%*-й доверительный интервал для* ε. *Повторить вычисления при* $\Delta = 2^{-j}$; $j = 4, 5, 6, 7$ *и изобразить графически зависимость* $\hat{\varepsilon}_{100,20}(\Delta)$ *с* 90%*-ми доверительными интервалами для* ε *при указанных значениях* Δ *(*рис. 9.1*).*

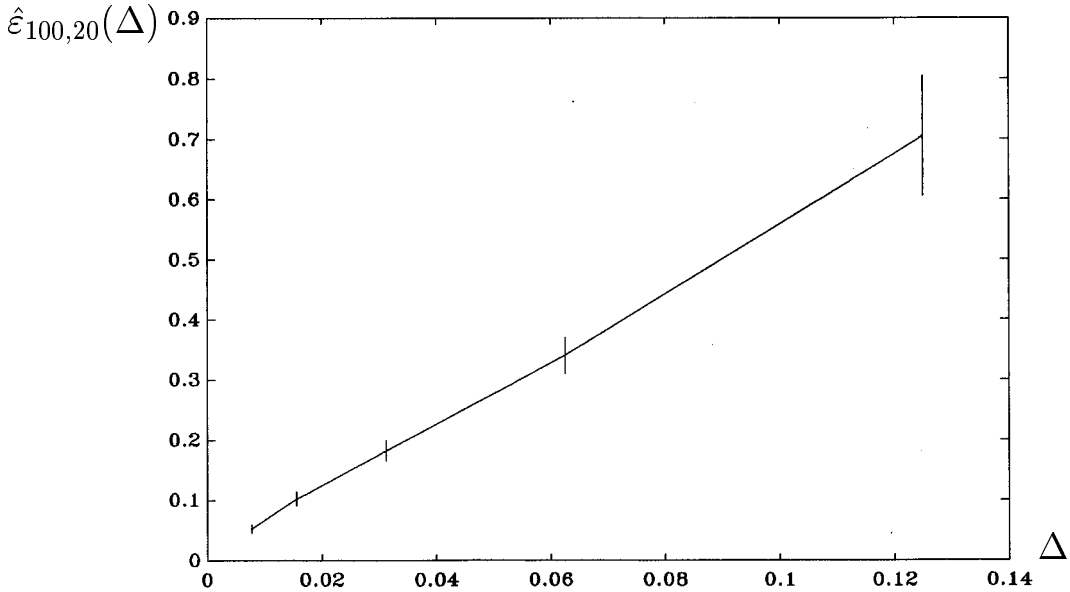

Рис. 9.1. Результат численного эксперимента 9.1.

9.1.2 Методы порядка точности 1.5

Рассмотрим явный двухшаговый сильный численный метод порядка точности 1.5, полученный в [70, 86]:

$$\mathbf{y}_{p+1} = \mathbf{y}_{p-1} + 2\mathbf{a}\Delta - \Delta\sum_{i_1=1}^{m} G_0^{(i_1)}\mathbf{a}(\mathbf{y}_{p-1}, \tau_{p-1})\hat{J}_{(1)\tau_p,\tau_{p-1}}^{(i_1)} + \mathbf{v}_p + \mathbf{v}_{p-1}, \quad (9.4)$$

$$\mathbf{v}_p = \sum_{i_1=1}^{m} \Sigma_{i_1} \hat{J}^{(i_1)}_{(1)\tau_{p+1},\tau_p} + \sum_{i_1,i_2=1}^{m} G_0^{(i_2)} \Sigma_{i_1} \hat{J}^{(i_2 i_1)}_{(11)_{\tau_{p+1},\tau_p}} +$$

$$+ \sum_{i_1=1}^{m} \left[G_0^{(i_1)} \mathbf{a} \hat{J}^{(i_1)}_{(10)\tau_{p+1},\tau_p} + L\Sigma_{i_1} \hat{J}^{(i_1)}_{(01)\tau_{p+1},\tau_p} \right] + \sum_{i_1,i_2,i_3=1}^{m} G_0^{(i_3)} G_0^{(i_2)} \Sigma_{i_1} \hat{J}^{(i_3 i_2 i_1)}_{(111)\tau_{p+1},\tau_p}. \tag{9.5}$$

Аналог численного метода (9.4), который основывается на унифицированном разложении Тейлора–Ито, имеет вид

$$\mathbf{y}_{p+1} = \mathbf{y}_{p-1} + 2\mathbf{a}\Delta - \Delta \sum_{i_1=1}^{m} G_0^{(i_1)} \mathbf{a}(\mathbf{y}_{p-1}, \tau_{p-1}) \hat{I}^{(i_1)}_{0_{\tau_p,\tau_{p-1}}} + \mathbf{v}_p + \mathbf{v}_{p-1}, \tag{9.6}$$

$$\mathbf{v}_p = \sum_{i_1=1}^{m} \Sigma_{i_1} \hat{I}^{(i_1)}_{0_{\tau_{p+1},\tau_p}} + \sum_{i_1,i_2=1}^{m} G_0^{(i_2)} \Sigma_{i_1} \hat{I}^{(i_2 i_1)}_{00_{\tau_{p+1},\tau_p}} + \sum_{i_1,i_2,i_3=1}^{m} G_0^{(i_3)} G_0^{(i_2)} \Sigma_{i_1} \hat{I}^{(i_3 i_2 i_1)}_{000_{\tau_{p+1},\tau_p}}$$

$$+ \sum_{i_1=1}^{m} \left[G_0^{(i_1)} \mathbf{a} \left(\Delta \hat{I}^{(i_1)}_{0_{\tau_{p+1},\tau_p}} + \hat{I}^{(i_1)}_{1_{\tau_{p+1},\tau_p}} \right) - L\Sigma_{i_1} \hat{I}^{(i_1)}_{1_{\tau_{p+1},\tau_p}} \right]. \tag{9.7}$$

Численный эксперимент 9.2 (рис. 9.2). *Повторить численный эксперимент* 9.1 *для явного двухшагового сильного численного метода порядка точности* 1.5 *вида* (9.6).

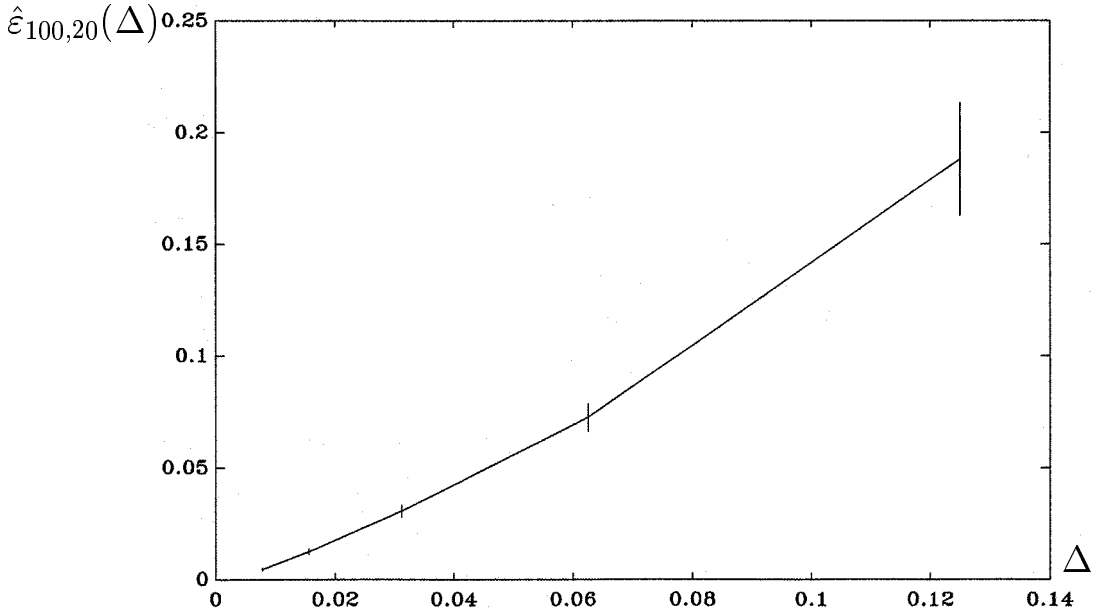

Рис. 9.2. Результат численного эксперимента 9.2.

Начальный шаг, необходимый для старта численного метода (9.6), *осуществлять с помощью явного одношагового сильного численного метода порядка точности* 1.5 *вида* (7.46). *При этом не моделировать*

те повторные стохастические интегралы Ито, коэффициенты перед которыми оказываются равными нулю после применения численного метода (9.6) *к уравнению* (9.3) *и приведения подобных членов* (*это же касается и начального шага*).

9.1.3 Методы порядка точности 2.0

Дополнив величину $\mathbf{v}_p$ вида (9.7) стохастическими слагаемыми порядка $O(\Delta^2)$ из разложения Тейлора–Ито, получим следующую явную двухшаговую численную схему порядка точности 2.0 [86]:

$$\mathbf{y}_{p+1} = \mathbf{y}_{p-1} + 2\mathbf{a}\Delta - \Delta\left[\sum_{i_1=1}^{m} G_0^{(i_1)}\mathbf{a}(\mathbf{y}_{p-1},\tau_{p-1})\hat{J}_{(1)\tau_p,\tau_{p-1}}^{(i_1)} + \right.$$

$$\left. + \sum_{i_1,i_2=1}^{m} G_0^{(i_2)}G_0^{(i_1)}\mathbf{a}(\mathbf{y}_{p-1},\tau_{p-1})\hat{J}_{(11)\tau_p,\tau_{p-1}}^{(i_2 i_1)}\right] + \mathbf{v}_p + \mathbf{v}_{p-1}, \qquad (9.8)$$

$$\mathbf{v}_p = \sum_{i_1=1}^{m}\Sigma_{i_1}\hat{J}_{(1)\tau_{p+1},\tau_p}^{(i_1)} + \sum_{i_1,i_2=1}^{m} G_0^{(i_2)}\Sigma_{i_1}\hat{J}_{(11)\tau_{p+1},\tau_p}^{(i_2 i_1)} +$$

$$+\sum_{i_1=1}^{m}\left[G_0^{(i_1)}\mathbf{a}\hat{J}_{(10)\tau_{p+1},\tau_p}^{(i_1)} + L\Sigma_{i_1}\hat{J}_{(01)\tau_{p+1},\tau_p}^{(i_1)}\right] + \sum_{i_1,i_2,i_3=1}^{m} G_0^{(i_3)}G_0^{(i_2)}\Sigma_{i_1}\hat{J}_{(111)\tau_{p+1},\tau_p}^{(i_3 i_2 i_1)}$$

$$+\sum_{i_1,i_2=1}^{m}\left[G_0^{(i_2)}L\Sigma_{i_1}\hat{J}_{(101)\tau_{p+1},\tau_p}^{(i_2 i_1)} + LG_0^{(i_2)}\Sigma_{i_1}\hat{J}_{(011)\tau_{p+1},\tau_p}^{(i_2 i_1)} + \right.$$

$$\left. + G_0^{(i_2)}G_0^{(i_1)}\mathbf{a}\hat{J}_{(110)\tau_{p+1},\tau_p}^{(i_2 i_1)}\right] + \sum_{i_1,i_2,i_3,i_4=1}^{m} G_0^{(i_4)}G_0^{(i_3)}G_0^{(i_2)}\Sigma_{i_1}\hat{J}_{(1111)\tau_{p+1},\tau_p}^{(i_4 i_3 i_2 i_1)}. \qquad (9.9)$$

Вариант численной схемы (9.8), основанный на унифицированном разложении Тейлора–Ито, запишем в следующем виде:

$$\mathbf{y}_{p+1} = \mathbf{y}_{p-1} + 2\mathbf{a}\Delta - \Delta\left[\sum_{i_1=1}^{m} G_0^{(i_1)}\mathbf{a}(\mathbf{y}_{p-1},\tau_{p-1})\hat{I}_{0_{\tau_p,\tau_{p-1}}}^{(i_1)} + \right.$$

$$\left. + \sum_{i_1,i_2=1}^{m} G_0^{(i_2)}G_0^{(i_1)}\mathbf{a}(\mathbf{y}_{p-1},\tau_{p-1})\hat{I}_{00_{\tau_p,\tau_{p-1}}}^{(i_2 i_1)}\right] + \mathbf{v}_p + \mathbf{v}_{p-1}, \qquad (9.10)$$

$$\mathbf{v}_p = \sum_{i_1=1}^{m}\Sigma_{i_1}\hat{I}_{0_{\tau_{p+1},\tau_p}}^{(i_1)} + \sum_{i_1,i_2=1}^{m} G_0^{(i_2)}\Sigma_{i_1}\hat{I}_{00_{\tau_{p+1},\tau_p}}^{(i_2 i_1)} + \sum_{i_1,i_2,i_3=1}^{m} G_0^{(i_3)}G_0^{(i_2)}\Sigma_{i_1}\hat{I}_{000_{\tau_{p+1},\tau_p}}^{(i_3 i_2 i_1)}$$

$$+\sum_{i_1=1}^{m}\left[G_0^{(i_1)}\mathbf{a}\left(\Delta\hat{I}_{0_{\tau_{p+1},\tau_p}}^{(i_1)} + \hat{I}_{1_{\tau_{p+1},\tau_p}}^{(i_1)}\right) - L\Sigma_{i_1}\hat{I}_{1_{\tau_{p+1},\tau_p}}^{(i_1)}\right] +$$

$$+\sum_{i_1,i_2=1}^{m}\left[G_0^{(i_2)}L\Sigma_{i_1}\left(\hat{I}_{10_{\tau_{p+1},\tau_p}}^{(i_2i_1)}-\hat{I}_{01_{\tau_{p+1},\tau_p}}^{(i_2i_1)}\right)-LG_0^{(i_2)}\Sigma_{i_1}\hat{I}_{10_{\tau_{p+1},\tau_p}}^{(i_2i_1)}+\right.$$

$$\left.+G_0^{(i_2)}G_0^{(i_1)}\mathbf{a}\left(\hat{I}_{01_{\tau_{p+1},\tau_p}}^{(i_2i_1)}+\Delta\hat{I}_{00_{\tau_{p+1},\tau_p}}^{(i_2i_1)}\right)\right]+\sum_{i_1,i_2,i_3,i_4=1}^{m}G_0^{(i_4)}G_0^{(i_3)}G_0^{(i_2)}\Sigma_{i_1}\hat{I}_{0000_{\tau_{p+1},\tau_p}}^{(i_4i_3i_2i_1)}. \tag{9.11}$$

Численный эксперимент 9.3 (рис. 9.3). *Повторить численный эксперимент* 9.2 *для явного двухшагового сильного численного метода порядка точности* 2.0 *вида* (9.10).

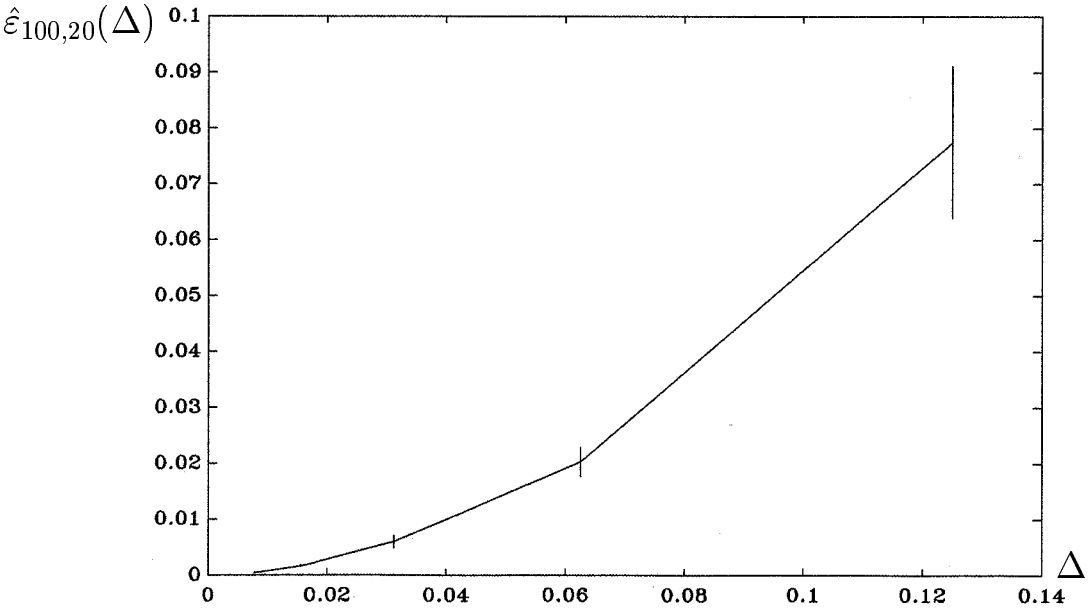

Рис. 9.3. Результат численного эксперимента 9.3.

Начальный шаг, необходимый для старта численного метода (9.10), *осуществлять с помощью явного одношагового сильного численного метода порядка точности* 2.0 *вида* (7.56).

9.2 Неявные двухшаговые методы, основанные на разложениях Тейлора–Ито

9.2.1 Методы порядка точности 1.0 и 1.5

Рассмотрим трехпараметрическое семейство неявных двухшаговых сильных численных методов порядка точности 1.0 [70, 86]:

$$\mathbf{y}_{p+1}^{(l)}=(1-\tilde{\gamma}_l)\mathbf{y}_p^{(l)}+\tilde{\gamma}_l\mathbf{y}_{p-1}^{(l)}+\Delta\left\{\tilde{\alpha}_l^{(2)}\mathbf{a}^{(l)}(\mathbf{y}_{p+1},\tau_{p+1})+\right.$$

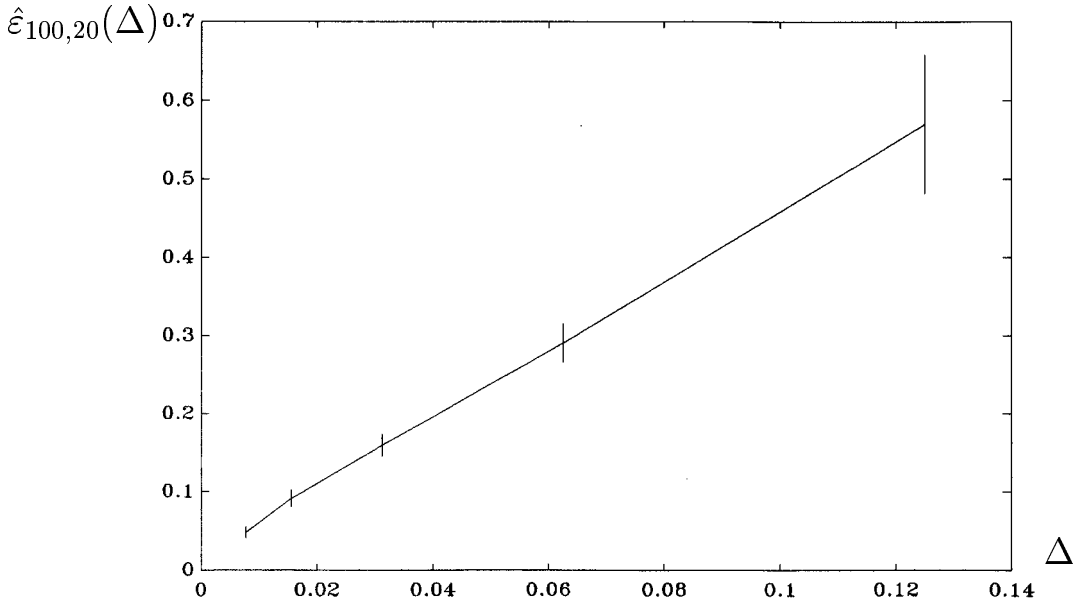

Рис. 9.4. Результат численного эксперимента 9.4.

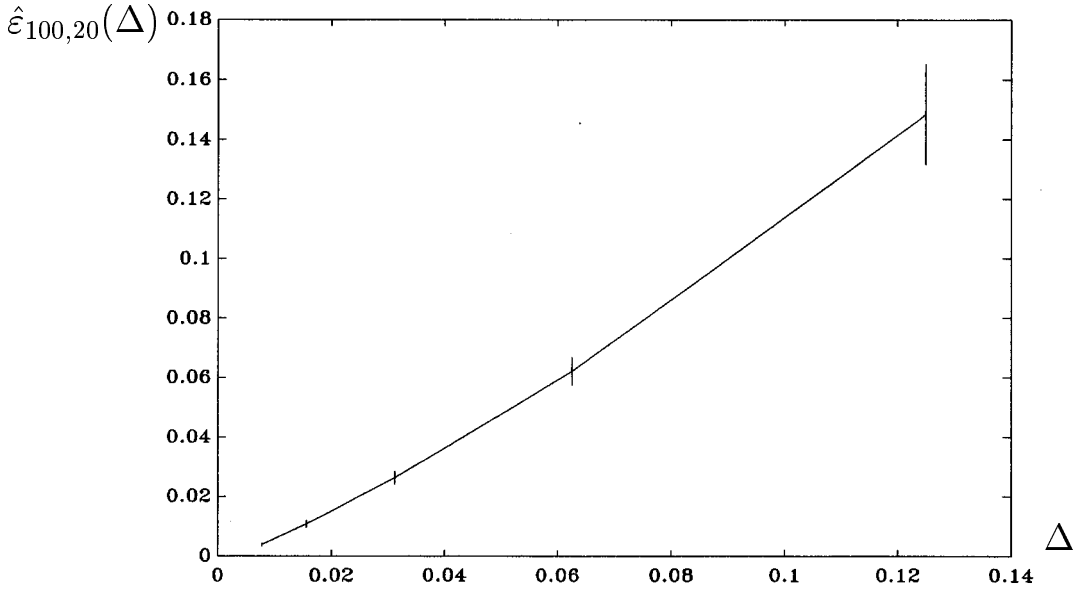

Рис. 9.5. Результат численного эксперимента 9.5.

$$+(1-\tilde{\alpha}_l^{(2)}+\tilde{\gamma}_l\tilde{\alpha}_l^{(1)})\mathbf{a}^{(l)}+(1-\tilde{\alpha}_l^{(1)})\tilde{\gamma}_l\mathbf{a}^{(l)}(\mathbf{y}_{p-1},\tau_{p-1})\Big\}+\mathbf{v}_p^{(l)}+\tilde{\gamma}_l\mathbf{v}_{p-1}^{(l)}, \tag{9.12}$$

где $\tilde{\gamma}_l$, $\tilde{\alpha}_l^{(1)}$, $\tilde{\alpha}_l^{(2)} \in [0,1]$, а $\mathbf{v}_p \in \Re^n$ и имеет вид (9.2).

Нетрудно видеть, что при $\tilde{\gamma}_l = \tilde{\alpha}_l^{(1)} = 1$, $\tilde{\alpha}_l^{(2)} = 0$ численный метод (9.12) принимает вид (9.1), т. е. превращается в явный двухшаговый сильный численный метод порядка точности 1.0. Если в (9.12)

положить $\tilde{\gamma}_l = 0$, $\tilde{\alpha}_l^{(2)} = \frac{1}{2}$, то (9.12) превращается в неявный одношаговый численный метод, который совпадает с численным методом (8.3), если там положить $\tilde{\alpha}_l = \frac{1}{2}$.

Рассмотрим однопараметрическое семейство неявных двухшаговых сильных численных методов порядка точности 1.5, которое приведено в книге [86]:

$$\mathbf{y}_{p+1}^{(l)} = (1-\tilde{\gamma}_l)\mathbf{y}_p^{(l)} + \tilde{\gamma}_l \mathbf{y}_{p-1}^{(l)} + \frac{1}{2}\Delta\left\{\mathbf{a}^{(l)}(\mathbf{y}_{p+1}, \tau_{p+1}) + \right.$$

$$\left. +(1+\tilde{\gamma}_l)\mathbf{a}^{(l)} + \tilde{\gamma}_l \mathbf{a}^{(l)}(\mathbf{y}_{p-1}, \tau_{p-1})\right\} + \tilde{\mathbf{v}}_p^{(l)} + \tilde{\gamma}_l \tilde{\mathbf{v}}_{p-1}^{(l)}, \qquad (9.13)$$

где $\tilde{\gamma}_l \in [0,1]$, а величина $\tilde{\mathbf{v}}_p$ определяется следующим соотношением

$$\tilde{\mathbf{v}}_p = \mathbf{v}_p - \frac{1}{2}\Delta \sum_{i_1=1}^{m} G_0^{(i_1)} \mathbf{a} \hat{J}_{(1)\tau_{p+1},\tau_p}^{(i_1)},$$

где $\mathbf{v}_p$ соответствует (9.5).

Версия численного метода (9.13), основанная на унифицированном разложении Тейлора–Ито, включает в себя величины $\tilde{\mathbf{v}}_p^{(l)}$ и $\tilde{\mathbf{v}}_{p-1}^{(l)}$, которые определяются с помощью следующего равенства

$$\tilde{\mathbf{v}}_p = \mathbf{v}_p - \frac{1}{2}\Delta \sum_{i_1=1}^{m} G_0^{(i_1)} \mathbf{a} \hat{I}_{0_{\tau_{p+1},\tau_p}}^{(i_1)}, \qquad (9.14)$$

где $\mathbf{v}_p$ характеризуется равенством (9.7).

Отметим, что если в (9.13) $\tilde{\gamma}_l = 0$, то (9.13) превратится в неявный одношаговый численный метод, который совпадет с численным методом (8.4) или (8.5), если в (8.4) или (8.5) положить $\tilde{\alpha}_l = \frac{1}{2}$, $\tilde{\beta}_l \in [0,1]$.

Численный эксперимент 9.4 (рис. 9.4). *Повторить численный эксперимент* 9.1 *для неявного двухшагового сильного численного метода порядка точности* 1.0 *вида* (9.12), (9.2) *при* $\tilde{\gamma}_1 = 1$, $\tilde{\alpha}_1^{(2)} = \tilde{\alpha}_1^{(1)} = \frac{1}{2}$. *Начальный шаг, необходимый для старта численного метода* (9.12), (9.2), *осуществлять с помощью явного одношагового сильного численного метода порядка точности* 1.0 *вида* (7.35).

Численный эксперимент 9.5 (рис. 9.5). *Повторить численный эксперимент* 9.2 *для неявного двухшагового сильного численного метода порядка точности* 1.5 *вида* (9.13), (9.14), (9.7) *при* $\tilde{\gamma}_1 = 1$. *Начальный шаг, необходимый для старта численного метода* (9.13), (9.14), (9.7), *осуществлять с помощью явного одношагового сильного численного метода порядка точности* 1.5 *вида* (7.46).

9.2.2 Методы порядка точности 2.0 и 2.5

Рассмотрим следующий неявный двухшаговый сильный численный метод порядка точности 2.0:

$$\mathbf{y}_{p+1}=\mathbf{y}_{p-1}+\frac{1}{2}\Delta\left\{\mathbf{a}(\mathbf{y}_{p+1},\tau_{p+1})+2\mathbf{a}+\mathbf{a}(\mathbf{y}_{p-1},\tau_{p-1})\right\}+\tilde{\mathbf{v}}_p+\tilde{\mathbf{v}}_{p-1}, \quad (9.15)$$

$$\tilde{\mathbf{v}}_p=\mathbf{v}_p-\frac{1}{2}\Delta\left\{\sum_{i_1=1}^{m}G_0^{(i_1)}\mathbf{a}\hat{J}_{(1)\tau_{p+1},\tau_p}^{(i_1)}+\sum_{i_1,i_2=1}^{m}G_0^{(i_2)}G_0^{(i_1)}\mathbf{a}\hat{J}_{(11)\tau_{p+1},\tau_p}^{(i_2i_1)}\right\}, \quad (9.16)$$

а $\mathbf{v}_p$ имеет вид (9.9).

Если при построении численного метода (9.15) используется унифицированное разложение Тейлора–Ито, то $\tilde{\mathbf{v}}_p$ в (9.15) имеет вид (9.16), где $\mathbf{v}_p$ определяется равенством (9.11).

Для построения неявного двухшагового сильного численного метода порядка точности 2.5 можно воспользоваться численной схемой (9.15), но величину $\tilde{\mathbf{v}}_p$ необходимо выбрать в виде

$$\tilde{\mathbf{v}}_p=\mathbf{v}_p-\frac{1}{2}\Delta\left[\sum_{i_1=1}^{m}\left(G_0^{(i_1)}\mathbf{a}\hat{J}_{(1)\tau_{p+1},\tau_p}^{(i_1)}+G_0^{(i_1)}L\mathbf{a}\hat{J}_{(10)\tau_{p+1},\tau_p}^{(i_1)}+\right.\right.$$

$$\left.+LG_0^{(i_1)}\mathbf{a}\hat{J}_{(01)\tau_{p+1},\tau_p}^{(i_1)}\right)+\sum_{i_1,i_2=1}^{m}G_0^{(i_2)}G_0^{(i_1)}\mathbf{a}\hat{J}_{(11)\tau_{p+1},\tau_p}^{(i_2i_1)}+$$

$$\left.+\sum_{i_1,i_2,i_3=1}^{m}G_0^{(i_3)}G_0^{(i_2)}G_0^{(i_1)}\mathbf{a}\hat{J}_{(111)\tau_{p+1},\tau_p}^{(i_3i_2i_1)}\right]-\frac{\Delta^3}{12}L^2\mathbf{a},$$

где

$$\mathbf{v}_p=\sum_{i_1=1}^{m}\Sigma_{i_1}\hat{J}_{(1)\tau_{p+1},\tau_p}^{(i_1)}+\sum_{i_1,i_2=1}^{m}G_0^{(i_2)}\Sigma_{i_1}\hat{J}_{(11)\tau_{p+1},\tau_p}^{(i_2i_1)}+$$

$$+\sum_{i_1=1}^{m}\left[G_0^{(i_1)}\mathbf{a}\hat{J}_{(10)\tau_{p+1},\tau_p}^{(i_1)}+L\Sigma_{i_1}\hat{J}_{(01)\tau_{p+1},\tau_p}^{(i_1)}\right]+\sum_{i_1,i_2,i_3=1}^{m}G_0^{(i_3)}G_0^{(i_2)}\Sigma_{i_1}\hat{J}_{(111)\tau_{p+1},\tau_p}^{(i_3i_2i_1)}$$

$$+\sum_{i_1,i_2=1}^{m}\left[G_0^{(i_2)}L\Sigma_{i_1}\hat{J}_{(101)\tau_{p+1},\tau_p}^{(i_2i_1)}+LG_0^{(i_2)}\Sigma_{i_1}\hat{J}_{(011)\tau_{p+1},\tau_p}^{(i_2i_1)}+\right.$$

$$\left.+G_0^{(i_2)}G_0^{(i_1)}\mathbf{a}\hat{J}_{(110)\tau_{p+1},\tau_p}^{(i_2i_1)}\right]+\sum_{i_1,i_2,i_3,i_4=1}^{m}G_0^{(i_4)}G_0^{(i_3)}G_0^{(i_2)}\Sigma_{i_1}\hat{J}_{(1111)\tau_{p+1},\tau_p}^{(i_4i_3i_2i_1)}$$

$$+\sum_{i_1=1}^{m}\left[G_0^{(i_1)}L\mathbf{a}\hat{J}_{(100)\tau_{p+1},\tau_p}^{(i_1)}+LL\Sigma_{i_1}\hat{J}_{(001)\tau_{p+1},\tau_p}^{(i_1)}+LG_0^{(i_1)}\mathbf{a}\hat{J}_{(010)\tau_{p+1},\tau_p}^{(i_1)}\right]+$$

$$+\sum_{i_1,i_2,i_3=1}^{m}\left[G_0^{(i_3)}LG_0^{(i_2)}\Sigma_{i_1}\hat{J}_{(1011)\tau_{p+1},\tau_p}+G_0^{(i_3)}G_0^{(i_2)}L\Sigma_{i_1}\hat{J}_{(1101)\tau_{p+1},\tau_p}^{(i_3i_2i_1)}+\right.$$

$$+G_0^{(i_3)}G_0^{(i_2)}G_0^{(i_1)}\mathbf{a}\hat{J}^{(i_3i_2i_1)}_{(1110)\tau_{p+1},\tau_p}+LG_0^{(i_3)}G_0^{(i_2)}\Sigma_{i_1}\hat{J}^{(i_3i_2i_1)}_{(0111)\tau_{p+1},\tau_p}\Bigg]$$

$$+\sum_{i_1,i_2,i_3,i_4,i_5=1}^{m}G_0^{(i_5)}G_0^{(i_4)}G_0^{(i_3)}G_0^{(i_2)}\Sigma^{(li_1)}\hat{J}^{(i_5i_4i_3i_2i_1)}_{(11111)\tau_{p+1},\tau_p}.$$

Если для построения неявного двухшагового сильного численного метода порядка точности 2.5 используются (9.15) и унифицированное разложение Тейлора–Ито, то $\tilde{\mathbf{v}}_p$ в (9.15) имеет вид

$$\tilde{\mathbf{v}}_p=\mathbf{v}_p-\frac{1}{2}\Delta\Bigg[\sum_{i_1=1}^{m}\Bigg(G_0^{(i_1)}\mathbf{a}\hat{I}^{(i_1)}_{0_{\tau_{p+1},\tau_p}}+G_0^{(i_1)}L\mathbf{a}\left(\Delta\hat{I}^{(i_1)}_{0_{\tau_{p+1},\tau_p}}+\hat{I}^{(i_1)}_{1_{\tau_{p+1},\tau_p}}\right)-$$

$$-LG_0^{(i_1)}\mathbf{a}\hat{I}^{(i_1)}_{1_{\tau_{p+1},\tau_p}}\Bigg)+\sum_{i_1,i_2=1}^{m}G_0^{(i_2)}G_0^{(i_1)}\mathbf{a}\hat{I}^{(i_2i_1)}_{00_{\tau_{p+1},\tau_p}}+$$

$$+\sum_{i_1,i_2,i_3=1}^{m}G_0^{(i_3)}G_0^{(i_2)}G_0^{(i_1)}\mathbf{a}\hat{I}^{(i_3i_2i_1)}_{000_{\tau_{p+1},\tau_p}}\Bigg]-\frac{\Delta^3}{12}L^2\mathbf{a}, \qquad (9.17)$$

где

$$\mathbf{v}_p=\sum_{i_1=1}^{m}\Sigma_{i_1}\hat{I}^{(i_1)}_{0_{\tau_{p+1},\tau_p}}+\sum_{i_1,i_2=1}^{m}G_0^{(i_2)}\Sigma_{i_1}\hat{I}^{(i_2i_1)}_{00_{\tau_{p+1},\tau_p}}+\sum_{i_1,i_2,i_3=1}^{m}G_0^{(i_3)}G_0^{(i_2)}\Sigma_{i_1}\hat{I}^{(i_3i_2i_1)}_{000_{\tau_{p+1},\tau_p}}$$

$$+\sum_{i_1=1}^{m}\left[G_0^{(i_1)}\mathbf{a}\left(\Delta\hat{I}^{(i_1)}_{0_{\tau_{p+1},\tau_p}}+\hat{I}^{(i_1)}_{1_{\tau_{p+1},\tau_p}}\right)-L\Sigma_{i_1}\hat{I}^{(i_1)}_{1_{\tau_{p+1},\tau_p}}\right]+$$

$$+\sum_{i_1,i_2=1}^{m}\Bigg[G_0^{(i_2)}L\Sigma_{i_1}\left(\hat{I}^{(i_2i_1)}_{10_{\tau_{p+1},\tau_p}}-\hat{I}^{(i_2i_1)}_{01_{\tau_{p+1},\tau_p}}\right)-LG_0^{(i_2)}\Sigma_{i_1}\hat{I}^{(i_2i_1)}_{10_{\tau_{p+1},\tau_p}}+$$

$$+G_0^{(i_2)}G_0^{(i_1)}\mathbf{a}\left(\hat{I}^{(i_2i_1)}_{01_{\tau_{p+1},\tau_p}}+\Delta\hat{I}^{(i_2i_1)}_{00_{\tau_{p+1},\tau_p}}\right)\Bigg]+\sum_{i_1,i_2,i_3,i_4=1}^{m}G_0^{(i_4)}G_0^{(i_3)}G_0^{(i_2)}\Sigma_{i_1}\hat{I}^{(i_4i_3i_2i_1)}_{0000_{\tau_{p+1},\tau_p}}$$

$$+\sum_{i_1=1}^{m}\Bigg[G_0^{(i_1)}L\mathbf{a}\left(\frac{1}{2}\hat{I}^{(i_1)}_{2_{\tau_{p+1},\tau_p}}+\Delta\hat{I}^{(i_1)}_{1_{\tau_{p+1},\tau_p}}+\frac{1}{2}\Delta^2\hat{I}^{(i_1)}_{0_{\tau_{p+1},\tau_p}}\right)+$$

$$+\frac{1}{2}LL\Sigma_{i_1}\hat{I}^{(i_1)}_{2_{\tau_{p+1},\tau_p}}-LG_0^{(i_1)}\mathbf{a}\left(\hat{I}^{(i_1)}_{2_{\tau_{p+1},\tau_p}}+\Delta\hat{I}^{(i_1)}_{1_{\tau_{p+1},\tau_p}}\right)\Bigg]+$$

$$+\sum_{i_1,i_2,i_3=1}^{m}\Bigg[G_0^{(i_3)}LG_0^{(i_2)}\Sigma_{i_1}\left(\hat{I}^{(i_3i_2i_1)}_{100_{\tau_{p+1},\tau_p}}-\hat{I}^{(i_3i_2i_1)}_{010_{\tau_{p+1},\tau_p}}\right)+$$

$$+G_0^{(i_3)}G_0^{(i_2)}L\Sigma_{i_1}\left(\hat{I}^{(i_3i_2i_1)}_{010_{\tau_{p+1},\tau_p}}-\hat{I}^{(i_3i_2i_1)}_{001_{\tau_{p+1},\tau_p}}\right)+$$

$$+G_0^{(i_3)}G_0^{(i_2)}G_0^{(i_1)}\mathbf{a}\left(\Delta\hat{I}^{(i_3i_2i_1)}_{000_{\tau_{p+1},\tau_p}}+\hat{I}^{(i_3i_2i_1)}_{001_{\tau_{p+1},\tau_p}}\right)-LG_0^{(i_3)}G_0^{(i_2)}\Sigma_{i_1}\hat{I}^{(i_3i_2i_1)}_{100_{\tau_{p+1},\tau_p}}\Bigg]$$

$$+\sum_{i_1,i_2,i_3,i_4,i_5=1}^{m} G_0^{(i_5)} G_0^{(i_4)} G_0^{(i_3)} G_0^{(i_2)} \Sigma_{i_1} \hat{I}_{00000_{\tau_{p+1},\tau_p}}^{(i_5 i_4 i_3 i_2 i_1)}. \tag{9.18}$$

Численный эксперимент 9.6 (рис. 9.6). *Повторить численный эксперимент* 9.2 *для неявного двухшагового сильного численного метода порядка точности* 2.0 *вида* (9.15), (9.16), (9.11). *Начальный шаг, необходимый для старта численного метода* (9.15), (9.16), (9.11), *осуществлять с помощью явного одношагового сильного численного метода порядка точности* 2.0 *вида* (7.56).

Численный эксперимент 9.7 (рис. 9.7). *Повторить численный эксперимент* 9.2 *для неявного двухшагового сильного численного метода порядка точности* 2.5 *вида* (9.15), (9.17), (9.18).

Начальный шаг, необходимый для старта численного метода (9.15), (9.17), (9.18), *осуществлять с помощью явного одношагового сильного численного метода порядка точности* 2.5 *вида* (7.58).

9.3 О сходимости неявных сильных двухшаговых методов

В данном разделе на примере численного метода (9.12) покажем, как может быть обоснована сходимость неявных двухшаговых сильных численных методов.

Предполагается, что все частные производные, встречающиеся в данном разделе, существуют.

Перепишем численный метод (9.12) [86]:

$$\mathbf{y}_{\tau_{p+1}}^{(l)} = (1-\tilde{\gamma}_l)\mathbf{y}_{\tau_p}^{(l)} + \tilde{\gamma}_l \mathbf{y}_{\tau_{p-1}}^{(l)} + \Delta\Big\{\tilde{\alpha}_l^{(2)} \mathbf{a}^{(l)}(\mathbf{y}_{\tau_{p+1}}, \tau_{p+1}) +$$
$$+(1-\tilde{\alpha}_l^{(2)} + \tilde{\gamma}_l \tilde{\alpha}_l^{(1)})\mathbf{a}^{(l)}(\mathbf{y}_{\tau_p}, \tau_p) + (1-\tilde{\alpha}_l^{(1)})\tilde{\gamma}_l \mathbf{a}^{(l)}(\mathbf{y}_{\tau_{p-1}}, \tau_{p-1})\Big\} +$$
$$+\mathbf{v}_{\tau_{p+1},\tau_p}^{(l)} + \tilde{\gamma}_l \mathbf{v}_{\tau_p,\tau_{p-1}}^{(l)}, \tag{9.19}$$

где $\tilde{\gamma}_l,\ \tilde{\alpha}_l^{(1)},\ \tilde{\alpha}_l^{(2)} \in [0,1]$, а $\mathbf{v}_{\tau_{p+1},\tau_p}$ имеет вид

$$\mathbf{v}_{\tau_{p+1},\tau_p} = \sum_{i_1=1}^{m} \Sigma_{i_1}(\mathbf{y}_{\tau_p}, \tau_p) \hat{I}_{0_{\tau_{p+1},\tau_p}}^{(i_1)} + \sum_{i_1,i_2=1}^{m} G_0^{(i_2)} \Sigma_{i_1}(\mathbf{y}_{\tau_p}, \tau_p) \hat{I}_{00_{\tau_{p+1},\tau_p}}^{(i_2 i_1)}.$$

Докажем сходимость численного метода (9.19).

Используя формулу Ито и разложение Тейлора–Ито, получаем

$$\mathbf{a}^{(l)}(\mathbf{x}_{\tau_{p+1}}, \tau_{p+1}) = \mathbf{a}^{(l)}(\mathbf{x}_{\tau_p}, \tau_p) + R_{\tau_{p+1},\tau_p}^{(l)} \text{ с в.1}, \tag{9.20}$$

$$\mathbf{x}_{\tau_{p+1}}^{(l)} = \mathbf{x}_{\tau_p}^{(l)} + \Delta \mathbf{a}^{(l)}(\mathbf{x}_{\tau_p}, \tau_p) + \mathbf{d}_{\tau_{p+1},\tau_p}^{(l)} + H_{3_{\tau_{p+1},\tau_p}}^{(l)} \text{ с в.1}, \tag{9.21}$$

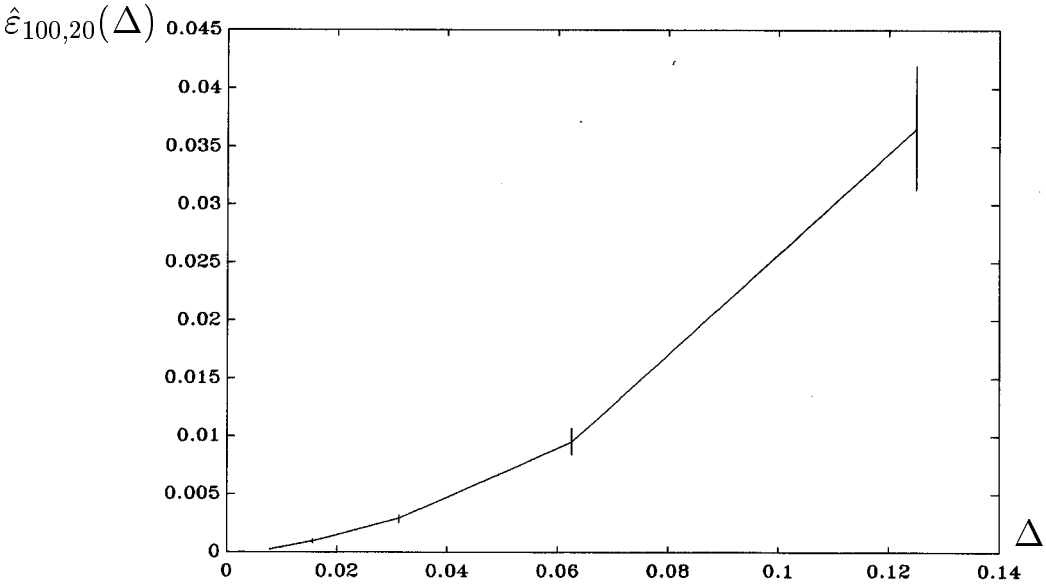

Рис. 9.6. Результат численного эксперимента 9.6.

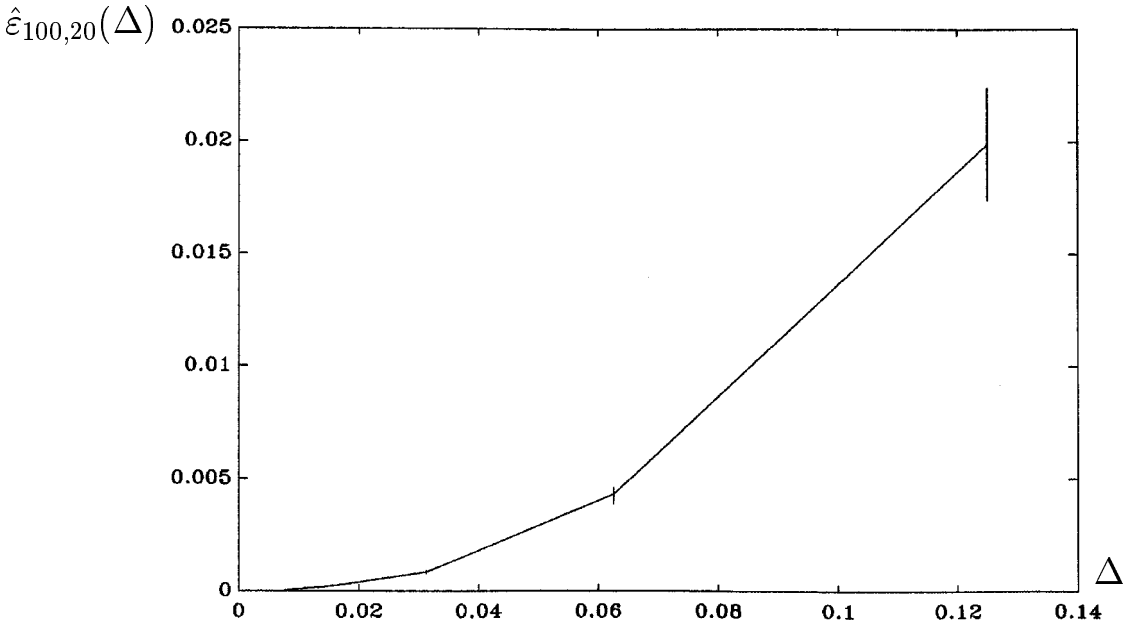

Рис. 9.7. Результат численного эксперимента 9.7.

где

$$R^{(l)}_{\tau_{p+1},\tau_p} = \int\limits_{\tau_p}^{\tau_{p+1}} L\mathbf{a}^{(l)}(\mathbf{x}_s, s)ds + \sum_{i_1=1}^{m} \int\limits_{\tau_p}^{\tau_{p+1}} G_0^{(i_1)}\mathbf{a}^{(l)}(\mathbf{x}_s, s)d\mathbf{f}_s^{(i_1)};$$

$$\mathbf{d}^{(l)}_{\tau_{p+1},\tau_p} = \sum_{i_1=1}^{m} \Sigma^{(li_1)}(\mathbf{x}_{\tau_p}, \tau_p) I^{(i_1)}_{0_{\tau_{p+1},\tau_p}} + \sum_{i_1,i_2=1}^{m} G_0^{(i_2)}\Sigma^{(li_1)}(\mathbf{x}_{\tau_p}, \tau_p) I^{(i_2 i_1)}_{00_{\tau_{p+1},\tau_p}};$$

$H^{(l)}_{3_{\tau_{p+1},\tau_p}}$ — остаточный член разложения Тейлора–Ито, который имеет порядок малости $\frac{3}{2}$ при $\Delta \downarrow 0$; $\mathbf{x}_s$ — решение стохастического дифференциального уравнения Ито (7.18).

С учетом (9.20), (9.21) имеем

$$\mathbf{x}^{(l)}_{\tau_{p+1}} = (1-\tilde{\gamma}_l)\mathbf{x}^{(l)}_{\tau_p} + \tilde{\gamma}_l \mathbf{x}^{(l)}_{\tau_{p-1}} + \Delta\left\{\tilde{\alpha}^{(2)}_l \mathbf{a}^{(l)}(\mathbf{x}_{\tau_{p+1}}, \tau_{p+1}) + \right.$$

$$\left. +(1-\tilde{\alpha}^{(2)}_l + \tilde{\gamma}_l\tilde{\alpha}^{(1)}_l)\mathbf{a}^{(l)}(\mathbf{x}_{\tau_p}, \tau_p) + (1-\tilde{\alpha}^{(1)}_l)\tilde{\gamma}_l \mathbf{a}^{(l)}(\mathbf{x}_{\tau_{p-1}}, \tau_{p-1})\right\} +$$

$$+\mathbf{d}^{(l)}_{\tau_{p+1},\tau_p} + \tilde{\gamma}_l \mathbf{d}^{(l)}_{\tau_p,\tau_{p-1}} + Q^{(l)}_{\tau_{p+1},\tau_p,\tau_{p-1}} \text{ с в.1}, \tag{9.22}$$

где

$$Q^{(l)}_{\tau_{p+1},\tau_p,\tau_{p-1}} \stackrel{\text{def}}{=} H^{(l)}_{3_{\tau_{p+1},\tau_p}} + \tilde{\gamma}_l H^{(l)}_{3_{\tau_p,\tau_{p-1}}} - \Delta\left(\tilde{\alpha}^{(2)}_l R^{(l)}_{\tau_{p+1},\tau_p} + \tilde{\gamma}_l \tilde{\alpha}^{(1)}_l R^{(l)}_{\tau_p,\tau_{p-1}}\right).$$

Положим

$$\mathbf{y}^{(l)}_s = (1-\tilde{\gamma}_l)\mathbf{y}^{(l)}_{\tau_p} + \tilde{\gamma}_l \mathbf{y}^{(l)}_{\tau_{p-1}} + (s-\tau_p)\tilde{\alpha}^{(2)}_l \mathbf{a}^{(l)}(\mathbf{y}_s, s) +$$

$$+\Delta\left\{(1-\tilde{\alpha}^{(2)}_l + \tilde{\gamma}_l\tilde{\alpha}^{(1)}_l)\mathbf{a}^{(l)}(\mathbf{y}_{\tau_p}, \tau_p) + (1-\tilde{\alpha}^{(1)}_l)\tilde{\gamma}_l \mathbf{a}^{(l)}(\mathbf{y}_{\tau_{p-1}}, \tau_{p-1})\right\} +$$

$$+\mathbf{v}^{(l)}_{s,\tau_p} + \tilde{\gamma}_l \mathbf{v}^{(l)}_{\tau_p,\tau_{p-1}}, \tag{9.23}$$

где $s \in (\tau_p, \tau_{p+1}]$; $p = 1, 2, \ldots, N-1$.

Оценим $\mathsf{M}\{|\mathbf{x}_T - \mathbf{y}_T|\}$. Из (9.22) при $\tau_{p+1} = s$ и (9.23) получим

$$\mathbf{x}^{(l)}_s - \mathbf{y}^{(l)}_s = (1-\tilde{\gamma}_l)\left(\mathbf{x}^{(l)}_{\tau_{n_s}} - \mathbf{y}^{(l)}_{\tau_{n_s}}\right) + \tilde{\gamma}_l\left(\mathbf{x}^{(l)}_{\tau_{n_s-1}} - \mathbf{y}^{(l)}_{\tau_{n_s-1}}\right) + U^{(l)}_{s,\tau_{n_s},\tau_{n_s-1}}, \tag{9.24}$$

где

$$U^{(l)}_{s,\tau_p,\tau_{p-1}} \stackrel{\text{def}}{=} (s-\tau_p)\tilde{\alpha}^{(2)}_l\left(\mathbf{a}^{(l)}(\mathbf{x}_s, s) - \mathbf{a}^{(l)}(\mathbf{y}_s, s)\right) +$$

$$+\Delta\left\{(1-\tilde{\alpha}^{(2)}_l + \tilde{\gamma}_l\tilde{\alpha}^{(1)}_l)\left(\mathbf{a}^{(l)}(\mathbf{x}_{\tau_p}, \tau_p) - \mathbf{a}^{(l)}(\mathbf{y}_{\tau_p}, \tau_p)\right) + \right.$$

$$\left. +(1-\tilde{\alpha}^{(1)}_l)\tilde{\gamma}_l\left(\mathbf{a}^{(l)}(\mathbf{x}_{\tau_{p-1}}, \tau_{p-1}) - \mathbf{a}^{(l)}(\mathbf{y}_{\tau_{p-1}}, \tau_{p-1})\right)\right\} +$$

$$+\left(\mathbf{d}_{s,\tau_p} - \mathbf{v}^{(l)}_{s,\tau_p}\right) + \tilde{\gamma}_l\left(\mathbf{d}^{(l)}_{\tau_p,\tau_{p-1}} - \mathbf{v}^{(l)}_{\tau_p,\tau_{p-1}}\right) + Q^{(l)}_{s,\tau_p,\tau_{p-1}};$$

$n_s \stackrel{\text{def}}{=} \max\limits_j \{j : \tau_j \le s\}$; $s \in (\tau_p, \tau_{p+1}]$; $p = 1, 2, \ldots, N-1$.

Итерируя равенство (9.24), приходим к следующему выражению:

$$\mathbf{x}^{(l)}_s - \mathbf{y}^{(l)}_s = \mu_1(\tilde{\gamma}_l)(\mathbf{x}^{(l)}_{\tau_{n_s}} - \mathbf{y}^{(l)}_{\tau_{n_s}}) + \tilde{\gamma}_l(\mathbf{x}^{(l)}_{\tau_{n_s-1}} - \mathbf{y}^{(l)}_{\tau_{n_s-1}}) + U^{(l)}_{s,\tau_{n_s},\tau_{n_s-1}} =$$

$$= \mu_2(\tilde{\gamma}_l)(\mathbf{x}^{(l)}_{\tau_{n_s-1}} - \mathbf{y}^{(l)}_{\tau_{n_s-1}}) + \mu_1(\tilde{\gamma}_l)\tilde{\gamma}_l(\mathbf{x}^{(l)}_{\tau_{n_s-2}} - \mathbf{y}^{(l)}_{\tau_{n_s-2}}) +$$

$$+\mu_1(\tilde{\gamma}_l)U_{\tau_{n_s},\tau_{n_s-1},\tau_{n_s-2}} + U^{(l)}_{s,\tau_{n_s},\tau_{n_s-1}} = \ldots$$

$$\ldots = \mu_{n_s}(\tilde{\gamma}_l)(\mathbf{x}^{(l)}_{\tau_1} - \mathbf{y}^{(l)}_{\tau_1}) + \mu_{n_s-1}(\tilde{\gamma}_l)\tilde{\gamma}_l(\mathbf{x}^{(l)}_0 - \mathbf{y}^{(l)}_0) +$$

$$+ \sum_{p=1}^{n_s-1} \mu_p(\tilde{\gamma}_l)U^{(l)}_{\tau_{n_s-p+1},\tau_{n_s-p},\tau_{n_s-p-1}} + U^{(l)}_{s,\tau_{n_s},\tau_{n_s-1}}, \tag{9.25}$$

где

$$\mu_0(\tilde{\gamma}_l) = 1,\ \mu_1(\tilde{\gamma}_l) = 1 - \tilde{\gamma}_l;$$

$$\mu_{p+1}(\tilde{\gamma}_l) = (1 - \tilde{\gamma}_l)\mu_p(\tilde{\gamma}_l) + \tilde{\gamma}_l\mu_{p-1}(\tilde{\gamma}_l);\ p = 1,\ 2, \ldots \tag{9.26}$$

Покажем, что $\mu_p(\tilde{\gamma}_l) \in [0, 1]$; $p = 0,\ 1, \ldots$, если $\tilde{\gamma}_l \in [0,\ 1]$. С помощью (9.26) получим $\mu_{p+1}(\tilde{\gamma}_l) - \mu_p(\tilde{\gamma}_l) = (-1)(\mu_p(\tilde{\gamma}_l) - \mu_{p-1}(\tilde{\gamma}_l)) = \ldots = (-1)^p(\mu_1(\tilde{\gamma}_l) - \mu_0(\tilde{\gamma}_l)) = (-1)^{p+1}\tilde{\gamma}_l$, т. е. $\mu_{p+1}(\tilde{\gamma}_l) = \mu_p(\tilde{\gamma}_l) + (-1)^{p+1}\tilde{\gamma}_l = 1 + ((-1)^1 + (-1)^2 + \ldots + (-1)^{p+1})\tilde{\gamma}_l = \frac{1}{2}\left(1 - (-1)^{p+2}\right)\tilde{\gamma}_l \in [0, 1]$ при $\tilde{\gamma}_l \in [0,\ 1]$; $p = 1,\ 2, \ldots$.

Далее, предполагая, что $\mathsf{M}\{|\mathbf{x}^{(l)}_{\tau_1} - \mathbf{y}^{(l)}_{\tau_1}|^2\} \le K_1\Delta^2$, $\mathsf{M}\{|\mathbf{x}^{(l)}_0 - \mathbf{y}^{(l)}_0|^2\} \le K_1\Delta^2$; $l = 1, \ldots, n$, где постоянная K_1 не зависит от Δ, и несколько модифицируя доказательство теоремы 7.2 при $r = 2$ (предполагается, что выполнены условия этой теоремы), а также используя (9.25), получаем следующее неравенство:

$$\mathbf{z}^{(l)}_s \le K_2\Delta^2 + K_3\int_0^s \mathbf{z}^{(l)}_u du, \tag{9.27}$$

где постоянные $K_2,\ K_3$ не зависят от Δ; $\mathbf{z}^{(l)}_s \stackrel{\text{def}}{=} \mathsf{M}\{|\mathbf{x}^{(l)}_s - \mathbf{y}^{(l)}_s|^2\}$.

Применяя к (9.27) неравенство Гронуолла и полагая затем $s = T$, приходим к оценке

$$\mathsf{M}\{|\mathbf{x}^{(l)}_T - \mathbf{y}^{(l)}_T|\} \le \sqrt{\mathbf{z}^{(l)}_T} \le K_4\Delta, \tag{9.28}$$

где постоянная K_4 не зависит от Δ.

Наконец, из (9.28) нетрудно получить, что $\mathsf{M}\{|\mathbf{x}_T - \mathbf{y}_T|\} \le K\Delta$, где постоянная K не зависит от Δ, т. е. неявный двухшаговый численный метод (9.19) имеет порядок сильной сходимости 1.0.

Используя предложенную схему, можно обосновать сходимость более точных неявных двухшаговых сильных численных методов. Сходимость явных двухшаговых сильных численных методов может быть получена также с использованием приведенных в данном разделе рассуждений, если положить в них $\tilde{\alpha}^{(2)}_l = 0$; $l = 1, \ldots, n$.

9.4 Двухшаговые конечно-разностные методы, основанные на разложениях Тейлора–Ито

В качестве основы построения двухшаговых сильных конечно-разностных численных методов выберем численные схемы, рассмотренные в данной главе, и аппроксимируем конечными разностями частные производные, входящие в их правые части.

9.4.1 Методы порядка точности 1.0 и 1.5

Приведем явный двухшаговый конечно-разностный сильный численный метод порядка точности 1.0 вида

$$\mathbf{y}_{p+1} = \mathbf{y}_{p-1} + 2\mathbf{a}\Delta + \mathbf{v}_p + \mathbf{v}_{p-1}, \tag{9.29}$$

$$\mathbf{v}_p = \sum_{i_1=1}^{m} \Sigma_{(i_1)} \hat{I}_{0_{\tau_{p+1},\tau_p}}^{(i_1)} + \frac{1}{\sqrt{\Delta}} \sum_{i_1,i_2=1}^{m} \sum_{j=1}^{2} \pi_j \Sigma^{(li_1)}(\mathbf{y}_{p\sigma}^{(ji_2)}, \tau_p) \hat{I}_{00_{\tau_{p+1},\tau_p}}^{(i_2 i_1)}. \tag{9.30}$$

Здесь сохранен смысл обозначений, входящих в (7.90).

В качестве примера неявного двухшагового конечно-разностного сильного численного метода порядка точности 1.0 приведем следующее однопараметрическое семейство численных методов:

$$\mathbf{y}_{p+1}^{(l)} = (1-\tilde{\gamma}_l)\mathbf{y}_p^{(l)} + \tilde{\gamma}_l \mathbf{y}_{p-1}^{(l)} + \frac{1}{2}\Delta \left\{ \mathbf{a}^{(l)}(\mathbf{y}_{p+1}, \tau_{p+1}) + \right.$$

$$\left. +(1+\tilde{\gamma}_l)\mathbf{a}^{(l)} + \tilde{\gamma}_l \mathbf{a}^{(l)}(\mathbf{y}_{p-1}, \tau_{p-1}) \right\} + \mathbf{v}_p^{(l)} + \tilde{\gamma}_l \mathbf{v}_{p-1}^{(l)}, \tag{9.31}$$

где $\tilde{\gamma}_l \in [0,1]$, а $\mathbf{v}_p$ имеет вид (9.30).

Численный эксперимент 9.8 (рис. 9.8). *Повторить численный эксперимент* 9.1 *для явного двухшагового сильного конечно-разностного численного метода порядка точности* 1.0 *вида* (9.29). *Начальный шаг, необходимый для старта численного метода* (9.29), *осуществлять с помощью явного одношагового сильного конечно-разностного численного метода порядка точности* 1.0 *вида* (7.90).

Численный эксперимент 9.9 (рис. 9.9). *Повторить численный эксперимент* 9.1 *для неявного двухшагового сильного конечно-разностного численного метода порядка точности* 1.0 *вида* (9.31) *при* $\tilde{\gamma}_1 = 1$. *Начальный шаг, необходимый для старта численного метода* (9.31), *осуществлять с помощью явного одношагового сильного конечно-разностного численного метода порядка точности* 1.0 *вида* (7.90).

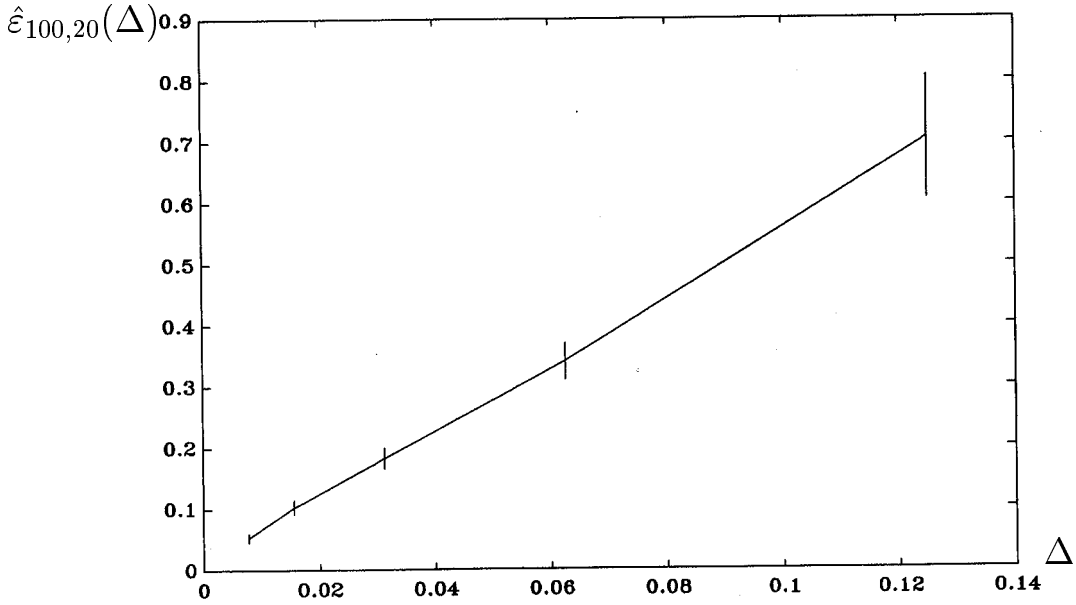

Рис. 9.8. Результат численного эксперимента 9.8.

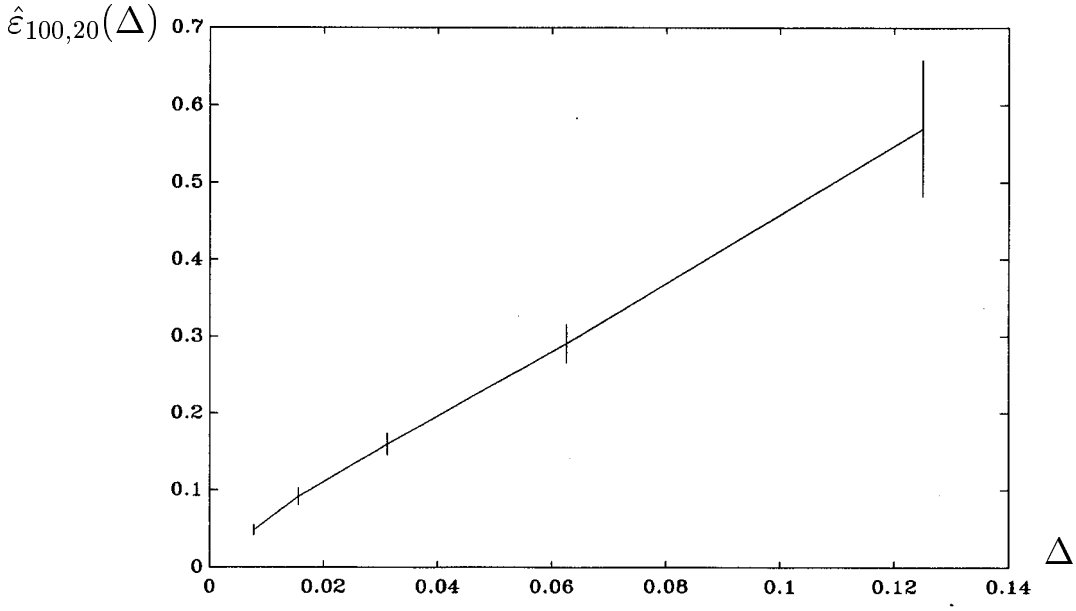

Рис. 9.9. Результат численного эксперимента 9.9.

Перейдем к рассмотрению двухшаговых конечно-разностных численных методов порядка точности 1.5.

Используя численную схему (9.4) и аппроксимируя конечными разностями частные производные, входящие в ее правую часть, получаем следующий явный двухшаговый конечно-разностный сильный численный метод порядка точности 1.5:

$$\mathbf{y}_{p+1} = \mathbf{y}_{p-1} + 2\mathbf{a}\Delta - \sum_{i_1=1}^{m}\sum_{j=1}^{2}\pi_j\mathbf{a}(\mathbf{u}_{p-1,\sigma}^{(ji_1)},\tau_{p-1})\hat{J}_{(1)\tau_p,\tau_{p-1}}^{(i_1)} + \mathbf{v}_p + \mathbf{v}_{p-1},$$

$$\mathbf{v}_p^{(l)} = \sum_{i_1=1}^{m}\Sigma^{(li_1)}\hat{J}_{(1)\tau_{p+1},\tau_p}^{(i_1)} + \frac{1}{\sqrt{\Delta}}\sum_{i_1,i_2=1}^{m}\sum_{j=1}^{2}\alpha_j\Sigma^{(li_1)}(\mathbf{y}_{p\beta}^{(ji_2)},\tau_p)\hat{J}_{(11)\tau_{p+1},\tau_p}^{(i_2i_1)}+$$

$$+\frac{1}{\Delta}\sum_{i_1=1}^{m}\left[\sum_{j=1}^{2}\pi_j\mathbf{a}^{(l)}(\mathbf{u}_{p\sigma}^{(ji_1)},\tau_p)\hat{J}_{(10)\tau_{p+1},\tau_p}^{(i_1)}+\right.$$

$$\left.+\left(\frac{1}{2}\sum_{r=1}^{m}\sum_{j=1}^{3}\varrho_j\Sigma^{(li_1)}(\mathbf{y}_{p\varpi}^{(jr)},\tau_p)+\sum_{j=1}^{2}\zeta_j\Sigma^{(li_1)}(\mathbf{z}_{p\delta}^{(j)},\Delta_{p\gamma}^{(j)})\right)\hat{J}_{(01)\tau_{p+1},\tau_p}^{(i_1)}\right]+$$

$$+\frac{1}{\Delta}\sum_{i_1,i_2,i_3=1}^{m}\sum_{j=1}^{2}\alpha_j\mathbf{k}_{i_1i_2}^{(l)}(\mathbf{y}_{p\beta}^{(ji_3)},\tau_p)\hat{J}_{(111)\tau_{p+1},\tau_p}^{(i_3i_2i_1)},$$

где введены такие же обозначения, как в (7.97).

Рассмотрим на основе численной схемы (9.13) однопараметрическое семейство неявных двухшаговых сильных конечно-разностных численных методов порядка точности 1.5:

$$\mathbf{y}_{p+1}^{(l)} = (1-\tilde{\gamma}_l)\mathbf{y}_p^{(l)} + \tilde{\gamma}_l\mathbf{y}_{p-1}^{(l)} + \frac{1}{2}\Delta\left\{\mathbf{a}^{(l)}(\mathbf{y}_{p+1},\tau_{p+1})+\right.$$

$$\left.+(1+\tilde{\gamma}_l)\mathbf{a}^{(l)} + \tilde{\gamma}_l\mathbf{a}^{(l)}(\mathbf{y}_{p-1},\tau_{p-1})\right\} + \mathbf{v}_p^{(l)} + \gamma_l\mathbf{v}_{p-1}^{(l)}; \qquad (9.32)$$

здесь $\tilde{\gamma}_l \in [0,1]$, а $\mathbf{v}_p$ имеет вид

$$\mathbf{v}_p = \sum_{i_1=1}^{m}\Sigma_{i_1}\hat{I}_{0_{\tau_{p+1},\tau_p}}^{(i_1)} + \frac{1}{\sqrt{\Delta}}\sum_{i_1,i_2=1}^{m}\sum_{j=1}^{2}\alpha_j\Sigma_{i_1}(\mathbf{y}_{p\beta}^{(ji_2)},\tau_p)\hat{I}_{00_{\tau_{p+1},\tau_p}}^{(i_2i_1)}+$$

$$+\frac{1}{\Delta}\sum_{i_1=1}^{m}\left[\sum_{j=1}^{2}\pi_j\mathbf{a}(\mathbf{u}_{p\sigma}^{(ji_1)},\tau_p)\left(\frac{1}{2}\Delta\hat{I}_{0_{\tau_{p+1},\tau_p}}^{(i_1)} + \hat{I}_{1_{\tau_{p+1},\tau_p}}^{(i_1)}\right)-\right.$$

$$\left.-\left(\frac{1}{2}\sum_{r=1}^{m}\sum_{j=1}^{3}\varrho_j\Sigma_{i_1}(\mathbf{y}_{p\varpi}^{(jr)},\tau_p)+\sum_{j=1}^{2}\zeta_j\Sigma_{i_1}(\mathbf{z}_{p\delta}^{(j)},\Delta_{p\gamma}^{(j)})\right)\hat{I}_{1_{\tau_{p+1},\tau_p}}^{(i_1)}\right]+$$

$$+\frac{1}{\Delta}\sum_{i_1,i_2,i_3=1}^{m}\sum_{j=1}^{2}\alpha_j\mathbf{k}_{i_1i_2}(\mathbf{y}_{p\beta}^{(ji_3)},\tau_p)\hat{I}_{000_{\tau_{p+1},\tau_p}}^{(i_3i_2i_1)},$$

где сохранен смысл обозначений, введенных в (7.96).

Численный эксперимент 9.10 (рис. 9.10). *Повторить численный эксперимент* 9.1 *для неявного конечно-разностного сильного численного метода порядка точности* 1.5 *вида* (9.32) *при* $\tilde{\gamma}_1 = 1$. *Начальный шаг, необходимый для старта численного метода* (9.32),

осуществлять с помощью явного одношагового сильного конечно-разностного численного метода порядка точности 1.5 *вида* (7.96). *Для моделирования стохастических интегралов Ито* $I^{(1)}_{1_{(p+1)\Delta,p\Delta}}$; $p = 0, 1, \ldots, N-1$ *использовать формулу*

$$I^{(1)}_{1_{(p+1)\Delta,p\Delta}} = -\frac{1}{2}\Delta^{\frac{3}{2}}\left(\zeta_0^{(1)} + \frac{1}{\sqrt{3}}\zeta_1^{(1)}\right). \tag{9.33}$$

Здесь $\zeta^{(1)}_{0_{(p+1)\Delta,p\Delta}} \stackrel{\text{def}}{=} \zeta_0^{(1)}$, $\zeta^{(1)}_{1_{(p+1)\Delta,p\Delta}} \stackrel{\text{def}}{=} \zeta_1^{(1)}$ *и* $\zeta^{(1)}_{0_{(p+1)\Delta,p\Delta}}$, $\zeta^{(1)}_{1_{(p+1)\Delta,p\Delta}}$; $p = 0, 1, \ldots, N-1$ — *независимые в совокупности стандартные гауссовские случайные величины.*

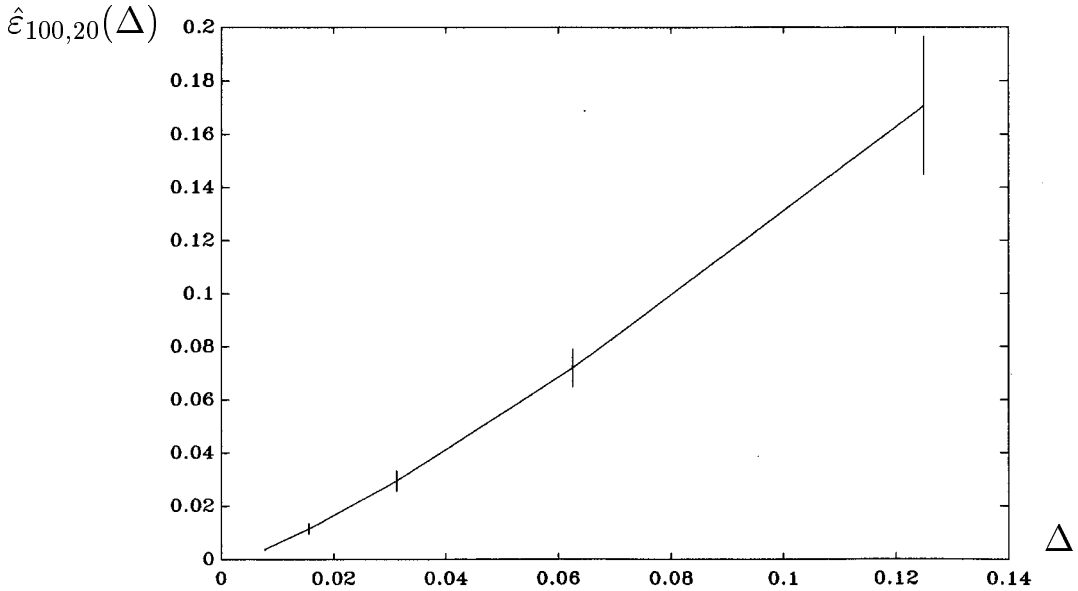

Рис. 9.10. Результат численного эксперимента 9.10.

9.4.2 Метод порядка точности 2.0

Рассмотрим в качестве двухшагового конечно-разностного сильного численного метода порядка точности 2.0 неявный численный метод:

$$\mathbf{y}_{p+1} = \mathbf{y}_{p-1} + \frac{1}{2}\Delta\left\{\mathbf{a}(\mathbf{y}_{p+1}, \tau_{p+1}) + 2\mathbf{a} + \mathbf{a}(\mathbf{y}_{p-1}, \tau_{p-1})\right\} + \mathbf{v}_p + \mathbf{v}_{p-1}, \tag{9.34}$$

где

$$\mathbf{v}_p = \sum_{i_1=1}^{m} \Sigma_{i_1} \hat{I}^{(i_1)}_{0_{\tau_{p+1},\tau_p}} + \frac{1}{\sqrt{\Delta}} \sum_{i_1,i_2=1}^{m} \sum_{j=1}^{4} \eta_j \Sigma_{i_1}(\mathbf{y}^{(ji_2)}_{p\omega}, \tau_p) \hat{I}^{(i_2 i_1)}_{00_{\tau_{p+1},\tau_p}} +$$

$$+\frac{1}{\Delta}\sum_{i_1=1}^{m}\left[\sum_{j=1}^{2}\pi_j\mathbf{a}(\mathbf{u}_{p\sigma}^{(ji_1)},\tau_p)\left(\frac{1}{2}\Delta\hat{I}_{0_{\tau_{p+1},\tau_p}}^{(i_1)}+\hat{I}_{1_{\tau_{p+1},\tau_p}}^{(i_1)}\right)-\right.$$

$$\left.-\left(\frac{1}{2}\sum_{r=1}^{m}\sum_{j=1}^{3}\mu_j\Sigma_{i_1}(\mathbf{y}_{p\lambda}^{(jr)},\tau_p)+\sum_{j=1}^{2}\zeta_j\Sigma_{i_1}(\mathbf{z}_{p\delta}^{(j)},\Delta_{p\gamma}^{(j)})\right)\hat{I}_{1_{\tau_{p+1},\tau_p}}^{(i_1)}\right]+$$

$$+\frac{1}{\Delta}\sum_{i_1,i_2,i_3=1}^{m}\sum_{j=1}^{4}\eta_j\mathbf{b}_{i_1i_2}(\mathbf{y}_{p\omega}^{(ji_3)},\tau_p)\hat{I}_{000_{\tau_{p+1},\tau_p}}^{(i_3i_2i_1)}+$$

$$+\frac{1}{\Delta\sqrt{\Delta}}\sum_{i_1,i_2=1}^{m}\left[\sum_{j=1}^{4}\eta_j\mathbf{g}_{i_1}(\mathbf{y}_{p\omega}^{(ji_2)},\tau_p)\left(\hat{I}_{10_{\tau_{p+1},\tau_p}}^{(i_2i_1)}-\hat{I}_{01_{\tau_{p+1},\tau_p}}^{(i_2i_1)}\right)+\right.$$

$$+\sum_{j=1}^{4}\eta_j\mathbf{h}_{i_1}(\mathbf{y}_{p\omega}^{(ji_2)},\tau_p)\left(\hat{I}_{01_{\tau_{p+1},\tau_p}}^{(i_2i_1)}+\frac{1}{2}\Delta\hat{I}_{00_{\tau_{p+1},\tau_p}}^{(i_2i_1)}\right)-$$

$$\left.-\left(\frac{1}{2}\sum_{r=1}^{m}\sum_{j=1}^{3}\mu_j\mathbf{k}_{i_1i_2}(\mathbf{y}_{p\lambda}^{(jr)},\tau_p)+\sum_{j=1}^{2}\zeta_j\mathbf{k}_{i_1i_2}(\mathbf{z}_{p\delta}^{(j)},\Delta_{p\gamma}^{(j)})\right)\hat{I}_{10_{\tau_{p+1},\tau_p}}^{(i_2i_1)}\right]+$$

$$+\frac{1}{\Delta\sqrt{\Delta}}\sum_{i_1,i_2,i_3i_4=1}^{m}\sum_{j=1}^{4}\eta_j\mathbf{c}_{i_1i_2i_3}(\mathbf{y}_{p\omega}^{(ji_4)},\tau_p)\hat{I}_{0000_{\tau_{p+1},\tau_p}}^{(i_4i_3i_2i_1)},\qquad(9.35)$$

где введены такие же обозначения, как и в (8.15).

Численный эксперимент 9.11 (рис. 9.11). *Повторить численный эксперимент* 9.1 *для конечно-разностного сильного численного метода порядка точности* 2.0 *вида* (9.34), (9.35). *Начальный шаг, необходимый для старта численного метода* (9.34), (9.35), *осуществлять с помощью неявного одношагового сильного конечно-разностного численного метода порядка точности* 2.0 *вида* (8.15). *Для моделирования стохастических интегралов Ито* $I_{1_{(p+1)\Delta,p\Delta}}^{(1)}$; $p=0,1,\ldots,N-1$ *использовать формулу* (9.33), *а для моделирования стохастических интегралов* $I_{10_{(p+1)\Delta,p\Delta}}^{(11)}$, $I_{01_{(p+1)\Delta,p\Delta}}^{(11)}$; $p=0,1,\ldots,N-1$ — *аппроксимацию*

$$I_{10_{(p+1)\Delta,p\Delta}}^{(11)q}=-\frac{\Delta^2}{4}\left[\left(\zeta_0^{(1)}\right)^2+\frac{1}{\sqrt{3}}\zeta_1^{(1)}\zeta_0^{(1)}+\right.$$

$$\left.+\sum_{i=0}^{q}\left(\frac{1}{(2i-1)(2i+3)}\left(\zeta_i^{(1)}\right)^2-\frac{1}{(2i+3)\sqrt{(2i+1)(2i+5)}}\zeta_i^{(1)}\zeta_{i+2}^{(1)}\right)-1\right]$$

и соотношение $I_{01_{(p+1)\Delta,p\Delta}}^{(11)q}=I_{1_{(p+1)\Delta,p\Delta}}^{(1)}I_{0_{(p+1)\Delta,p\Delta}}^{(1)}-I_{10_{(p+1)\Delta,p\Delta}}^{(11)q}+\frac{\Delta^2}{2}$ *при* $q=1$; $\zeta_{j_{(p+1)\Delta,p\Delta}}^{(1)}\stackrel{\mathrm{def}}{=}\zeta_j^{(1)}$; $j=0,1,\ldots,q+2$ — *независимые стандартные гауссовские случайные величины.*

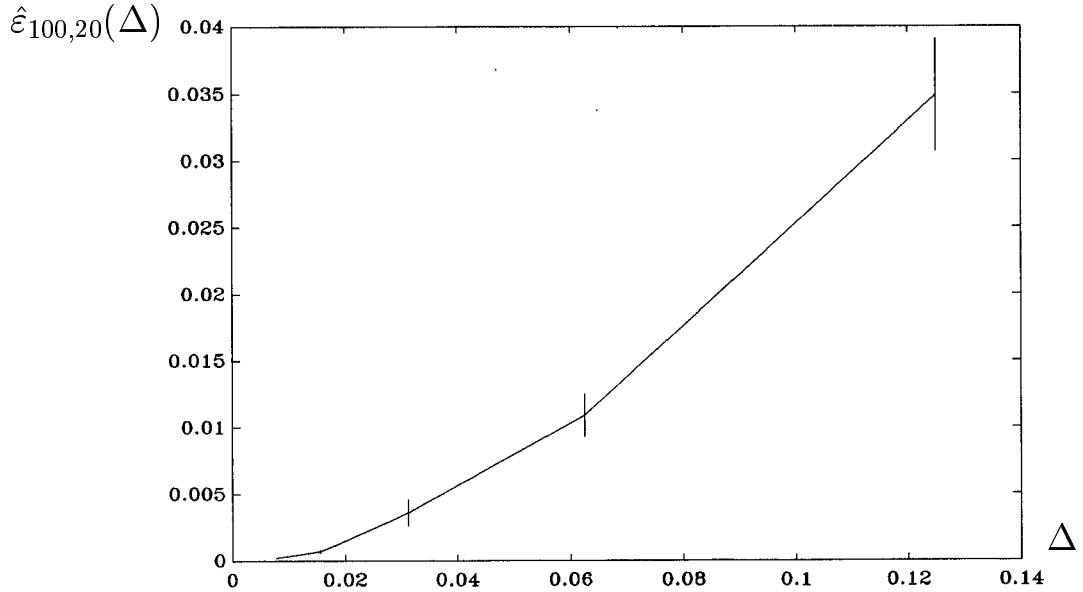

Рис. 9.11. Результат численного эксперимента 9.11.

9.5 Общие представления двухшаговых методов

В данном разделе рассмотрим принцип, по которому можно конструировать многопараметрические семейства двухшаговых сильных численных методов решения стохастических дифференциальных уравнений Ито.

Предположим, что необходимо построить некоторый неявный двухшаговый сильный численный метод порядка точности 1.0. Тогда в его правую часть должна входить некоторая линейная комбинация величин $\mathbf{y}_p$, $\mathbf{y}_{p-1}$, $\Delta\mathbf{a}(\mathbf{y}_{p+1}, \tau_{p+1})$, $\Delta\mathbf{a}(\mathbf{y}_p, \tau_p)$, $\Delta\mathbf{a}(\mathbf{y}_{p-1}, \tau_{p-1})$. Рассмотрим теперь следующее выражение:

$$(1-\tilde{\gamma}_l)\mathbf{x}_{\tau_p}^{(l)} + \tilde{\gamma}_l\mathbf{x}_{\tau_{p-1}}^{(l)} + \Delta\left\{\tilde{\alpha}_l^{(2)}\mathbf{a}^{(l)}(\mathbf{x}_{\tau_{p+1}}, \tau_{p+1}) + \right.$$

$$\left. +(1-\tilde{\alpha}_l^{(2)} + \tilde{\gamma}_l\tilde{\alpha}_l^{(1)})\mathbf{a}^{(l)}(\mathbf{x}_{\tau_p}, \tau_p) + (1-\tilde{\alpha}_l^{(1)})\tilde{\gamma}_l\mathbf{a}^{(l)}(\mathbf{x}_{\tau_{p-1}}, \tau_{p-1})\right\}, \qquad (9.36)$$

где $\tilde{\gamma}_l$, $\tilde{\alpha}_l^{(1)}$, $\tilde{\alpha}_l^{(2)} \in [0,1]$; $l = 1, \ldots, n$; $\mathbf{x}_t$ — решение стохастического дифференциального уравнения Ито (7.18).

Ранее было показано, что с помощью формулы Ито и разложения Тейлора–Ито выражение (9.36) можно привести с вероятностью 1 к выражению вида

$$\mathbf{x}_{\tau_{p+1}}^{(l)} - \mathbf{d}_{\tau_{p+1},\tau_p}^{(l)} - \tilde{\gamma}_l\mathbf{d}_{\tau_p,\tau_{p-1}}^{(l)} + O(\Delta^{3/2}),$$

где

$$\mathbf{d}_{\tau_{p+1},\tau_p} = \sum_{i_1=1}^{m} \Sigma_{i_1} I^{(i_1)}_{0_{\tau_{p+1},\tau_p}} + \sum_{i_1,i_2=1}^{m} G_0^{(i_2)} \Sigma_{i_1} I^{(i_2 i_1)}_{00_{\tau_{p+1},\tau_p}}. \tag{9.37}$$

Таким образом, заменяя в правой части (9.37) повторные стохастические интегралы на их сильные аппроксимации и отбрасывая члены $O(\Delta^{\frac{3}{2}})$, приходим к трехпараметрическому семейству (9.12) неявных двухшаговых сильных численных методов порядка точности 1.0. Это семейство получено в [86]. Варьируя параметры $\tilde{\gamma}_l$, $\tilde{\alpha}_l^{(1)}$ и $\tilde{\alpha}_l^{(2)}$, можно получать различные как явные, так и неявные сильные численные схемы порядка точности 1.0. В частности, при $\tilde{\alpha}_l^{(2)} = 0$, $\tilde{\alpha}_l^{(1)} = \tilde{\gamma}_l = 1$ из (9.12) имеем численный метод (9.2).

В [86] приведено пятипараметрическое разложение, основанное на разложении Тейлора–Стратоновича в форме Клоедена и Платена, которое строится по изложенному принципу и позволяет получать различные явные и неявные одношаговые или двухшаговые сильные численные методы порядка точности 2.0. Приведем аналог этого разложения, основанный на разложении Тейлора–Ито в форме Вагнера и Платена:

$$\mathbf{x}^{(l)}_{\tau_{p+1}} = (1-\tilde{\gamma}_l)\mathbf{x}^{(l)}_{\tau_p} + \tilde{\gamma}_l \mathbf{x}^{(l)}_{\tau_{p-1}} + \Delta \Big\{ \tilde{\alpha}_l^{(2)} \mathbf{a}^{(l)}(\mathbf{x}_{\tau_{p+1}}, \tau_{p+1}) +$$

$$+(1-\tilde{\alpha}_l^{(2)} + \tilde{\gamma}_l \tilde{\alpha}_l^{(1)})\mathbf{a}^{(l)} + (1-\tilde{\alpha}_l^{(1)})\tilde{\gamma}_l \mathbf{a}^{(l)}(\mathbf{x}_{\tau_{p-1}}, \tau_{p-1}) \Big\} +$$

$$+\Delta^2 \Big[\Big(0.5 - \tilde{\alpha}_l^{(2)}\Big) \tilde{\beta}_l^{(2)} L\mathbf{a}^{(l)}(\mathbf{x}_{\tau_{p+1}}, \tau_{p+1}) +$$

$$+ \Big\{ \Big(0.5 - \tilde{\alpha}_l^{(2)}\Big)(1-\tilde{\beta}_l^{(2)}) + \tilde{\gamma}_l \Big(0.5 - \tilde{\alpha}_l^{(1)}\Big) \tilde{\beta}_l^{(1)} \Big\} L\mathbf{a}^{(l)} +$$

$$+\tilde{\gamma}_l \Big(0.5 - \tilde{\alpha}_l^{(1)}\Big)(1-\tilde{\beta}_l^{(1)}) L\mathbf{a}^{(l)}(\mathbf{x}_{\tau_{p-1}}, \tau_{p-1}) \Big] -$$

$$-\Delta \Big(\tilde{\alpha}_l^{(2)} G^{(l)}_{\tau_{p+1},\tau_p} + \tilde{\alpha}_l^{(1)} \tilde{\gamma}_l G^{(l)}_{\tau_p,\tau_{p-1}} \Big) + \mathbf{d}^{(l)}_{\tau_{p+1},\tau_p} + \tilde{\gamma}_l \mathbf{d}^{(l)}_{\tau_p,\tau_{p-1}} + O(\Delta^{\frac{5}{2}}) \text{ с в.1}, \tag{9.38}$$

где

$$G_{\tau_{p+1},\tau_p} = \sum_{i_1=1}^{m} G_0^{(i_1)} \mathbf{a} J^{(i_1)}_{(1)\tau_{p+1},\tau_p} + \sum_{i_1,i_2=1}^{m} G_0^{(i_2)} G_0^{(i_1)} \mathbf{a} J^{(i_2 i_1)}_{(11)\tau_{p+1},\tau_p}; \tag{9.39}$$

$$\mathbf{d}_{\tau_{p+1},\tau_p} = \sum_{i_1=1}^{m} \Sigma_{i_1} J^{(i_1)}_{(1)\tau_{p+1},\tau_p} + \sum_{i_1,i_2=1}^{m} G_0^{(i_2)} \Sigma_{i_1} J^{(i_2 i_1)}_{(11)\tau_{p+1},\tau_p} +$$

$$+ \sum_{i_1=1}^{m} \Big[G_0^{(i_1)} \mathbf{a} J^{(i_1)}_{(10)\tau_{p+1},\tau_p} + L\Sigma_{i_1}(\mathbf{x}_{\tau_p}, \tau_p) J^{(i_1)}_{(01)\tau_{p+1},\tau_p} \Big] +$$

$$+\sum_{i_1,i_2,i_3=1}^{m} G_0^{(i_3)} G_0^{(i_2)} \Sigma_{i_1} J_{(111)\tau_{p+1},\tau_p}^{(i_3 i_2 i_1)} +$$

$$+\sum_{i_1,i_2=1}^{m} \Big[G_0^{(i_2)} L \Sigma_{i_1} J_{(101)\tau_{p+1},\tau_p}^{(i_2 i_1)} + L G_0^{(i_2)} \Sigma_{i_1} J_{(011)\tau_{p+1},\tau_p}^{(i_2 i_1)} +$$

$$+ G_0^{(i_2)} G_0^{(i_1)} \mathbf{a} J_{(110)\tau_{p+1},\tau_p}^{(i_2 i_1)} \Big] + \sum_{i_1,i_2,i_3,i_4=1}^{m} G_0^{(i_4)} G_0^{(i_3)} G_0^{(i_2)} \Sigma_{i_1} J_{(1111)\tau_{p+1},\tau_p}^{(i_4 i_3 i_2 i_1)}; \quad (9.40)$$

$\tilde{\alpha}_l^{(1)}$, $\tilde{\alpha}_l^{(2)}$, $\tilde{\beta}_l^{(1)}$, $\tilde{\beta}_l^{(2)}$, $\tilde{\gamma}_l \in [0,1]$; если в правых частях (9.38)–(9.40) аргументы у некоторых функций опущены, то эти функции вычислены в точке $(\mathbf{x}_{\tau_p}, \tau_p)$.

Если в правой части (9.38) отбросить слагаемые порядка $O(\Delta^{\frac{5}{2}})$ и заменить повторные стохастические интегралы Ито на их сильные аппроксимации, то получим пятипараметрическое семейство неявных двухшаговых сильных численных методов порядка точности 2.0. В частности, при $\tilde{\gamma}_l = 1$, $\tilde{\alpha}_l^{(1)} = \tilde{\alpha}_l^{(2)} = \frac{1}{2}$, $\tilde{\beta}_l^{(1)}$, $\tilde{\beta}_l^{(2)} \in [0,1]$ имеем неявный двухшаговый численный метод (9.15). Если в (9.38) взять $\tilde{\alpha}_l^{(2)} = 0$, $\tilde{\gamma}_l = \tilde{\alpha}_l^{(1)} = 1$, $\tilde{\beta}_l^{(1)} = 1$, $\tilde{\beta}_l^{(2)} = 0$, то из (9.38) находим явный двухшаговый численный метод (9.8).

Построим обобщение разложения (9.38), которое позволяет получать различные явные и неявные одношаговые или двухшаговые сильные численные схемы порядка точности 2.5 и основано на разложении Тейлора–Ито в форме Вагнера и Платена:

$$\mathbf{x}_{\tau_{p+1}}^{(l)} = (1-\tilde{\gamma}_l)\mathbf{x}_{\tau_p}^{(l)} + \tilde{\gamma}_l \mathbf{x}_{\tau_{p-1}}^{(l)} + \Delta \Big\{ \tilde{\alpha}_l^{(2)} \mathbf{a}^{(l)}(\mathbf{x}_{\tau_{p+1}}, \tau_{p+1}) +$$

$$+(1-\tilde{\alpha}_l^{(2)} + \tilde{\gamma}_l \tilde{\alpha}_l^{(1)})\mathbf{a}^{(l)} + (1-\tilde{\alpha}_l^{(1)})\tilde{\gamma}_l \mathbf{a}^{(l)}(\mathbf{x}_{\tau_{p-1}}, \tau_{p-1}) \Big\} +$$

$$+\Delta^2 \Big[\Big(0.5 - \tilde{\alpha}_l^{(2)}\Big) \tilde{\beta}_l^{(2)} L\mathbf{a}^{(l)}(\mathbf{x}_{\tau_{p+1}}, \tau_{p+1}) +$$

$$+ \Big\{ \Big(0.5 - \tilde{\alpha}_l^{(2)}\Big)(1-\tilde{\beta}_l^{(2)}) + \tilde{\gamma}_l \Big(0.5 - \tilde{\alpha}_l^{(1)}\Big) \tilde{\beta}_l^{(1)} \Big\} L\mathbf{a}^{(l)} +$$

$$+\tilde{\gamma}_l \Big(0.5 - \tilde{\alpha}_l^{(1)}\Big)(1-\tilde{\beta}_l^{(1)}) L\mathbf{a}^{(l)}(\mathbf{x}_{\tau_{p-1}}, \tau_{p-1}) \Big] -$$

$$-\Delta^3 \Big[\Big(0.5\tilde{\alpha}_l^{(2)} + \tilde{\beta}_l^{(2)} \Big(\frac{1}{2} - \tilde{\alpha}_l^{(2)} \Big) - \frac{1}{6} \Big) L^2 \mathbf{a}^{(l)} +$$

$$+\tilde{\gamma}_l \Big(0.5\tilde{\alpha}_l^{(1)} + \tilde{\beta}_l^{(1)} \Big(\frac{1}{2} - \tilde{\alpha}_l^{(1)} \Big) - \frac{1}{6} \Big) L^2 \mathbf{a}^{(l)}(\mathbf{x}_{\tau_{p-1}}, \tau_{p-1}) \Big] -$$

$$-\Delta \Big(\tilde{\alpha}_l^{(2)} \tilde{G}_{\tau_{p+1},\tau_p}^{(l)} + \tilde{\alpha}_l^{(1)} \tilde{\gamma}_l \tilde{G}_{\tau_p,\tau_{p-1}}^{(l)} \Big) + \tilde{\mathbf{d}}_{\tau_{p+1},\tau_p}^{(l)} + \tilde{\gamma}_l \tilde{\mathbf{d}}_{\tau_p,\tau_{p-1}}^{(l)} -$$

$$-\Delta^2\left[\left(0.5-\tilde{\alpha}_l^{(2)}\right)\tilde{\beta}_l^{(2)}\tilde{Q}_{\tau_{p+1},\tau_p}^{(l)}+\left(0.5-\tilde{\alpha}_l^{(1)}\right)\tilde{\beta}_l^{(1)}\tilde{\gamma}_l\tilde{Q}_{\tau_p,\tau_{p-1}}^{(l)}\right]+\ldots \text{ с в.1,} \tag{9.41}$$

где

$$\tilde{Q}_{\tau_{p+1},\tau_p}=\sum_{i_1=1}^{m}G_0^{(i_1)}L\mathbf{a}J_{(1)\tau_{p+1},\tau_p}^{(i_1)}; \tag{9.42}$$

$$\tilde{G}_{\tau_{p+1},\tau_p}=G_{\tau_{p+1},\tau_p}+\sum_{i_1=1}^{m}\left[LG_0^{(i_1)}\mathbf{a}J_{(01)\tau_{p+1},\tau_p}^{(i_1)}+G_0^{(i_1)}L\mathbf{a}J_{(10)\tau_{p+1},\tau_p}^{(i_1)}\right]+$$

$$+\sum_{i_1,i_2,i_3=1}^{m}G_0^{(i_3)}G_0^{(i_2)}G_0^{(i_1)}\mathbf{a}J_{(111)\tau_{p+1},\tau_p}^{(i_3i_2i_1)}; \tag{9.43}$$

$$\tilde{\mathbf{d}}_{\tau_{p+1},\tau_p}=\mathbf{d}_{\tau_{p+1},\tau_p}+$$

$$+\sum_{i_1=1}^{m}\left[G_0^{(i_1)}L\mathbf{a}J_{(100)\tau_{p+1},\tau_p}^{(i_1)}+LL\Sigma_{i_1}J_{(001)\tau_{p+1},\tau_p}^{(i_1)}+LG_0^{(i_1)}J_{(010)\tau_{p+1},\tau_p}^{(i_1)}\right]+$$

$$+\sum_{i_1,i_2,i_3=1}^{m}\left[G_0^{(i_3)}LG_0^{(i_2)}\Sigma_{i_1}J_{(1011)\tau_{p+1},\tau_p}+G_0^{(i_3)}G_0^{(i_2)}L\Sigma_{i_1}J_{(1101)\tau_{p+1},\tau_p}^{(i_3i_2i_1)}+\right.$$

$$\left.+G_0^{(i_3)}G_0^{(i_2)}G_0^{(i_1)}\mathbf{a}J_{(1110)\tau_{p+1},\tau_p}^{(i_3i_2i_1)}+LG_0^{(i_3)}G_0^{(i_2)}\Sigma_{i_1}J_{(0111)\tau_{p+1},\tau_p}^{(i_3i_2i_1)}\right]+$$

$$+\sum_{i_1,i_2,i_3,i_4,i_5=1}^{m}G_0^{(i_5)}G_0^{(i_4)}G_0^{(i_3)}G_0^{(i_2)}\Sigma^{(li_1)}J_{(11111)\tau_{p+1},\tau_p}^{(i_5i_4i_3i_2i_1)}; \tag{9.44}$$

G_{τ_{p+1},τ_p} и $\mathbf{d}_{\tau_{p+1},\tau_p}$ определяются соответственно равенствами (9.39), (9.40); $\tilde{\alpha}_l^{(1)}$, $\tilde{\alpha}_l^{(2)}$, $\tilde{\beta}_l^{(1)}$, $\tilde{\beta}_l^{(2)}$, $\tilde{\gamma}_l\in[0,1]$ $(l=1,\ldots,n)$; если в правых частях (9.41)–(9.44) аргументы у некоторых функций опущены, то эти функции вычислены в точке $(\mathbf{x}_{\tau_p},\tau_p)$.

Если в правой части (9.41) отбросить слагаемые, обозначенные тремя точками, и в правых частях (9.41)–(9.44) заменить повторные стохастические интегралы Ито их сильными аппроксимациями, то получим пятипараметрическое семейство неявных двухшаговых сильных численных методов порядка точности 2.5. В частности, при $\tilde{\gamma}_l=1$, $\tilde{\alpha}_l^{(1)}=\tilde{\alpha}_l^{(2)}=\frac{1}{2}$, $\tilde{\beta}_l^{(1)}$, $\tilde{\beta}_l^{(2)}\in[0,1]$ из (9.41) следует неявный двухшаговый численный метод (9.15) с величиной $\tilde{\mathbf{v}}_{\tau_{p+1},\tau_p}$ вида (9.17).

В заключение отметим, что рассмотренный подход получения различных параметрических семейств численных методов решения стохастических дифференциальных уравнений Ито по сути является обобщением аналогичного подхода для обыкновенных дифференциальных уравнений.

Отметим также, что, составляя линейные комбинации систематических членов $\mathbf{x}_{\tau_p},\ldots,\ \mathbf{x}_{\tau_{p-k}}$, $\Delta\mathbf{a}(\mathbf{x}_{\tau_{p+1}},\tau_{p+1})$, $\Delta\mathbf{a}(\mathbf{x}_{\tau_p},\tau_p)$, $\ldots$, $\Delta\mathbf{a}(\mathbf{x}_{\tau_{p-k}},\tau_{p-k})$,

$\Delta^2 L\mathbf{a}(\mathbf{x}_{\tau_{p+1}}, \tau_{p+1})$, $\Delta^2 L\mathbf{a}(\mathbf{x}_{\tau_p}, \tau_p)$, $\ldots$, $\Delta^2 L\mathbf{a}(\mathbf{x}_{\tau_{p-k}}, \tau_{p-k})$, $\ldots$, где $k \ge 1$, выбирая определенным образом коэффициенты перед этими членами и дополняя эти комбинации специально подобранными стохастическими членами из разложения Тейлора–Ито, можно в принципе строить различные многошаговые сильные численные схемы решения стохастических дифференциальных уравнений Ито.

9.6 Явные и неявные, в том числе конечно-разностные, трехшаговые численные методы, основанные на разложениях Тейлора–Ито

9.6.1 Методы порядка точности 1.0.

Рассмотрим стохастическое дифференциальное уравнение Ито вида (1.35) и предположим, что выполнены условия теоремы 1.6.

Предложим следующий трехшаговый сильный численный метод порядка точности 1.0 для стохастического дифференциального уравнения Ито:

$$\mathbf{y}_{\tau_{p+1}}^{(l)} = \alpha_l \mathbf{y}_{\tau_p}^{(l)} + \beta_l \mathbf{y}_{\tau_{p-1}}^{(l)} + (1-\alpha_l-\beta_l)\mathbf{y}_{\tau_{p-2}}^{(l)} +$$
$$+\Delta\left[\delta_l \mathbf{a}^{(l)}(\mathbf{y}_{\tau_{p+1}}, \tau_{p+1}) + \mu_l \mathbf{a}^{(l)}(\mathbf{y}_{\tau_p}, \tau_p) + \nu_l \mathbf{a}^{(l)}(\mathbf{y}_{\tau_{p-1}}, \tau_{p-1}) +\right.$$
$$\left.+(3-2\alpha_l-\beta_l-\delta_l-\mu_l-\nu_l)\mathbf{a}^{(l)}(\mathbf{y}_{\tau_{p-2}}, \tau_{p-2})\right] +$$
$$+(1-\alpha_l)\mathbf{v}_{\tau_p,\tau_{p-1}}^{(l)} + (1-\alpha_l-\beta_l)\mathbf{v}_{\tau_{p-1},\tau_{p-2}}^{(l)} + \mathbf{v}_{\tau_{p+1},\tau_p}^{(l)}, \qquad (9.45)$$

где

$$\mathbf{v}_{\tau_{p+1},\tau_p} = \sum_{i_1=1}^{m} \Sigma_{i_1} \hat{I}_{0_{\tau_{p+1},\tau_p}}^{(i_1)} + \sum_{i_1,i_2=1}^{m} G_0^{(i_2)} \Sigma_{i_1} \hat{I}_{00_{\tau_{p+1},\tau_p}}^{(i_2 i_1)},$$

$\mathbf{a}(\mathbf{y}_p, \tau_p) \stackrel{\text{def}}{=} \mathbf{a}$; $\Sigma_i(\mathbf{y}_p, \tau_p) \stackrel{\text{def}}{=} \Sigma_i$; $\mathbf{y}_{\tau_p} \stackrel{\text{def}}{=} \mathbf{y}_p$; шляпка указывает на то, что соответствующая величина является аппроксимацией повторного стохастического интеграла; $l = 1, 2, \ldots, n$; $p = 2, 3, \ldots, N-1$; $\mathbf{g}^{(l)}$ – l-я компонента вектора $\mathbf{g}$; $\alpha_l, \beta_l \in [0,1]$, $\alpha_l + \beta_l \le 1$, δ_l, μ_l, ν_l – числовые параметры; $\tau_p = p\Delta$; $\Delta \in (0,1)$; $T = N\Delta$.

Для старта численной схемы (9.45) необходимо знать величины $\mathbf{y}_{\tau_1}^{(l)}$, $\mathbf{y}_{\tau_2}^{(l)}$; $l = 1, \ldots, n$. Они могут быть вычислены с помощью явного метода Г.Н. Мильштейна (в частности, он получается из (9.45) при $\alpha_l = \mu_l = 1$, $\beta_l = \delta_l = \nu_l = 0$). Для аппроксимаций повторных стохастических интегралов Ито, входящих в правую часть (9.45), можно, например, воспользоваться формулами из главы 6.

Докажем сходимость численного метода (9.45).

Теорема 9.1. *Пусть* $\mathsf{M}\{|\mathbf{x}_0|^2\} < \infty$ *и для всех* $\mathbf{x}$, $\mathbf{y} \in \Re^n$; $s, t \in [0, T]$, $s > t$; $p = 0, 1, \ldots, N-1$; $i, j, k = 1, \ldots, m$; $l = 1, \ldots, n$ *и некоторых, независящих от* Δ *постоянных* K_1, K_2, K_3, C_1, C_2 *выполнены следующие условия:*

$$\mathsf{M}\{|\mathbf{x}_0 - \mathbf{y}_0|^2\} + \mathsf{M}\{|\mathbf{x}_{\tau_1} - \mathbf{y}_{\tau_1}|^2\} + \mathsf{M}\{|\mathbf{x}_{\tau_2} - \mathbf{y}_{\tau_2}|^2\} \le C_1\Delta^2,$$

$$|\mathbf{a}(\mathbf{x}, t) - \mathbf{a}(\mathbf{y}, t)| + |\Sigma_i(\mathbf{x}, t) - \Sigma_i(\mathbf{y}, t)| + |G_0^{(j)}\Sigma_i(\mathbf{x}, t) - G_0^{(j)}\Sigma_i(\mathbf{y}, t)| \le$$
$$\le K_1|\mathbf{x} - \mathbf{y}|,$$

$$|\mathbf{a}(\mathbf{x}, t)| + |L\mathbf{a}(\mathbf{x}, t)| + |G_0^{(i)}\mathbf{a}(\mathbf{x}, t)| + |\Sigma_i(\mathbf{x}, t)| + |L\Sigma_i(\mathbf{x}, t)| + |G_0^{(j)}\Sigma_i(\mathbf{x}, t)| +$$
$$+ |LG_0^{(j)}\Sigma_i(\mathbf{x}, t)| + |G_0^{(k)}G_0^{(j)}\Sigma_i(\mathbf{x}, t)| \le K_2(1 + |\mathbf{x}|),$$

$\mathbf{a}(\mathbf{x}, t)$, $\Sigma_i(\mathbf{x}, t)$, $G_0^{(j)}\Sigma_i(\mathbf{x}, t) \in \mathcal{L}$ (*определение класса* $\mathcal{L}$ *см. в разд.* 4.1),

$$\mathsf{M}\left\{\left(I^{(i)}_{0_{\tau_{p+1},\tau_p}} - \hat{I}^{(i)}_{0_{\tau_{p+1},\tau_p}}\right)^2\right\} + \mathsf{M}\left\{\left(I^{(ji)}_{00_{\tau_{p+1},\tau_p}} - \hat{I}^{(ji)}_{00_{\tau_{p+1},\tau_p}}\right)^2\right\} \le C_2\Delta^3,$$

$$\alpha_l, \beta_l \in [0, 1];\ \alpha_l + \beta_l \le 1;\ |\delta_l| + |\mu_l| + |\nu_l| < \infty.$$

Тогда справедлива оценка $\mathsf{M}\{|\mathbf{x}_T - \mathbf{y}_T|\} \le C\Delta$, *где* C *– постоянная, которая не зависит от* Δ; $\mathbf{y}_{\tau_1}$, $\mathbf{y}_{\tau_2}$, $\mathbf{y}_T$ *определяются численной схемой* (9.45).

Доказательство. С использованием формулы Ито получаем:

$$\mathbf{x}_{\tau_{p+1}} = \mathbf{x}_{\tau_p} + \Delta\mathbf{a}(\mathbf{x}_{\tau_p}, \tau_p) + \mathbf{d}_{\tau_{p+1},\tau_p} + \mathbf{h}_{\tau_{p+1},\tau_p} \text{ с в. } 1, \tag{9.46}$$

$$\mathbf{a}(\mathbf{x}_{\tau_{p+1}}, \tau_{p+1}) = \mathbf{a}(\mathbf{x}_{\tau_p}, \tau_p) + \mathbf{r}_{\tau_{p+1},\tau_p} \text{ с в. } 1, \tag{9.47}$$

где

$$\mathbf{r}_{\tau_{p+1},\tau_p} = \int\limits_{\tau_p}^{\tau_{p+1}} L\mathbf{a}(\mathbf{x}_s, s)ds + \sum_{i=1}^m \int\limits_{\tau_p}^{\tau_{p+1}} G_0^{(i)}\mathbf{a}(\mathbf{x}_s, s)d\mathbf{w}_s^{(i)},$$

$$\mathbf{d}_{\tau_{p+1},\tau_p} = \sum_{i=1}^m \Sigma_i(\mathbf{x}_{\tau_p}, \tau_p)I^{(i)}_{0_{\tau_{p+1},\tau_p}} + \sum_{i,j=1}^m G_0^{(j)}\Sigma_i(\mathbf{x}_{\tau_p}, \tau_p)I^{(ji)}_{00_{\tau_{p+1},\tau_p}},$$

$$\mathbf{h}_{\tau_{p+1},\tau_p} = \int\limits_{\tau_p}^{\tau_{p+1}} \left(\int\limits_{\tau_p}^{s} L\mathbf{a}(\mathbf{x}_\theta, \theta)d\theta + \sum_{i=1}^m \int\limits_{\tau_p}^{s} G_0^{(i)}\mathbf{a}(\mathbf{x}_\theta, \theta)d\mathbf{w}_\theta^{(i)}\right)ds +$$

$$+ \sum_{i,j=1}^m \int\limits_{\tau_p}^{\tau_{p+1}} \int\limits_{\tau_p}^{s} \left(\int\limits_{\tau_p}^{\theta} LG_0^{(j)}\Sigma_i(\mathbf{x}_u, u)du + \sum_{k=1}^m \int\limits_{\tau_p}^{\theta} G_0^{(k)}G_0^{(j)}\Sigma_i(\mathbf{x}_u, u)d\mathbf{w}_u^{(k)}\right)d\mathbf{w}_\theta^{(j)}d\mathbf{w}_s^{(i)}$$

$$+ \sum_{i=1}^m \int\limits_{\tau_p}^{\tau_{p+1}} \int\limits_{\tau_p}^{s} L\Sigma_i(\mathbf{x}_\theta, \theta)d\theta d\mathbf{w}_s^{(i)}.$$

Применяя формулы (9.46), (9.47) нетрудно прийти к следующему представлению:

$$\mathbf{x}_{\tau_{p+1}}^{(l)} = \alpha_l \mathbf{x}_{\tau_p}^{(l)} + \beta_l \mathbf{x}_{\tau_{p-1}}^{(l)} + (1-\alpha_l-\beta_l)\mathbf{x}_{\tau_{p-2}}^{(l)} +$$
$$+\Delta\left[\delta_l \mathbf{a}^{(l)}(\mathbf{x}_{\tau_{p+1}}, \tau_{p+1}) + \mu_l \mathbf{a}^{(l)}(\mathbf{x}_{\tau_p}, \tau_p) + \nu_l \mathbf{a}^{(l)}(\mathbf{x}_{\tau_{p-1}}, \tau_{p-1}) +\right.$$
$$\left.+(3-2\alpha_l-\beta_l-\delta_l-\mu_l-\nu_l)\mathbf{a}^{(l)}(\mathbf{x}_{\tau_{p-2}}, \tau_{p-2})\right] +$$
$$+(1-\alpha_l)\mathbf{d}_{\tau_p,\tau_{p-1}}^{(l)} + (1-\alpha_l-\beta_l)\mathbf{d}_{\tau_{p-1},\tau_{p-2}}^{(l)} + \mathbf{d}_{\tau_{p+1},\tau_p}^{(l)} + Q_{\tau_{p+1},\tau_p,\tau_{p-1},\tau_{p-2}}^{(l)} \text{ с в. 1,} \tag{9.48}$$

где

$$Q_{\tau_{p+1},\tau_p,\tau_{p-1},\tau_{p-2}}^{(l)} = \mathbf{h}_{\tau_{p+1},\tau_p}^{(l)} + (1-\alpha_l)\mathbf{h}_{\tau_p,\tau_{p-1}}^{(l)} + (1-\alpha_l-\beta_l)\mathbf{h}_{\tau_{p-1},\tau_{p-2}}^{(l)} -$$
$$-\Delta\left[\delta_l \mathbf{r}_{\tau_{p+1},\tau_p}^{(l)} + (\delta_l+\mu_l-1)\mathbf{r}_{\tau_p,\tau_{p-1}}^{(l)} + (\alpha_l+\delta_l+\mu_l+\nu_l-2)\mathbf{r}_{\tau_{p-1},\tau_{p-2}}^{(l)}\right];$$

остальные обозначения, входящие в (9.48), такие же, как в (9.45).

Положим

$$\mathbf{y}_s^{(l)} = \alpha_l \mathbf{y}_{\tau_p}^{(l)} + \beta_l \mathbf{y}_{\tau_{p-1}}^{(l)} + (1-\alpha_l-\beta_l)\mathbf{y}_{\tau_{p-2}}^{(l)} +$$
$$+(s-\tau_p)\delta_l \mathbf{a}^{(l)}(\mathbf{y}_s, s) + \Delta\left[\mu_l \mathbf{a}^{(l)}(\mathbf{y}_{\tau_p}, \tau_p) + \nu_l \mathbf{a}^{(l)}(\mathbf{y}_{\tau_{p-1}}, \tau_{p-1}) +\right.$$
$$\left.+(3-2\alpha_l-\beta_l-\delta_l-\mu_l-\nu_l)\mathbf{a}^{(l)}(\mathbf{y}_{\tau_{p-2}}, \tau_{p-2})\right] +$$
$$+(1-\alpha_l)\mathbf{v}_{\tau_p,\tau_{p-1}}^{(l)} + (1-\alpha_l-\beta_l)\mathbf{v}_{\tau_{p-1},\tau_{p-2}}^{(l)} + \mathbf{v}_{s,\tau_p}^{(l)}, \tag{9.49}$$

где $s \in (\tau_p, \tau_{p+1}]$; $p = 2, 3, \ldots, N-1$, т. е. (9.49) переходит в (9.45) при $s = \tau_{p+1}$.

Вычитая (9.49) из (9.48) при $\tau_{p+1} = s$ получаем:

$$\mathbf{x}_s^{(l)} - \mathbf{y}_s^{(l)} = \alpha_l\left(\mathbf{x}_{\tau_{n_s}}^{(l)} - \mathbf{y}_{\tau_{n_s}}^{(l)}\right) + \beta_l\left(\mathbf{x}_{\tau_{n_s-1}}^{(l)} - \mathbf{y}_{\tau_{n_s-1}}^{(l)}\right) +$$
$$+(1-\alpha_l-\beta_l)\left(\mathbf{x}_{\tau_{n_s-2}}^{(l)} - \mathbf{y}_{\tau_{n_s-2}}^{(l)}\right) + U_{s,\tau_{n_s},\tau_{n_s-1},\tau_{n_s-2}}^{(l)}, \tag{9.50}$$

где

$$U_{s,\tau_{n_s},\tau_{n_s-1},\tau_{n_s-2}}^{(l)} = (s-\tau_p)\delta_l\left(\mathbf{a}^{(l)}(\mathbf{x}_s, s) - \mathbf{a}^{(l)}(\mathbf{y}_s, s)\right) +$$
$$+\Delta\left[\mu_l\left(\mathbf{a}^{(l)}(\mathbf{x}_{\tau_{n_s}}, \tau_{n_s}) - \mathbf{a}^{(l)}(\mathbf{y}_{\tau_{n_s}}, \tau_{n_s})\right) +\right.$$
$$+\nu_l\left(\mathbf{a}^{(l)}(\mathbf{x}_{\tau_{n_s-1}}, \tau_{n_s-1}) - \mathbf{a}^{(l)}(\mathbf{y}_{\tau_{n_s-1}}, \tau_{n_s-1})\right) +$$
$$\left.+\left(3-2\alpha_l-\beta_l-\delta_l-\mu_l-\nu_l\right)\left(\mathbf{a}^{(l)}(\mathbf{x}_{\tau_{n_s-2}}, \tau_{n_s-2}) - \mathbf{a}^{(l)}(\mathbf{y}_{\tau_{n_s-2}}, \tau_{n_s-2})\right)\right] +$$
$$+(1-\alpha_l)\left(\mathbf{d}_{\tau_{n_s},\tau_{n_s-1}}^{(l)} - \mathbf{v}_{\tau_{n_s},\tau_{n_s-1}}^{(l)}\right) + (1-\alpha_l-\beta_l)\left(\mathbf{d}_{\tau_{n_s-1},\tau_{n_s-2}}^{(l)} - \mathbf{v}_{\tau_{n_s-1},\tau_{n_s-2}}^{(l)}\right)$$

$$+\mathbf{d}_{s,\tau_{n_s}}^{(l)} - \mathbf{v}_{s,\tau_{n_s}}^{(l)} + Q_{s,\tau_{n_s},\tau_{n_s-1},\tau_{n_s-2}}^{(l)};$$

$n_s = \max\limits_j\{j:\ \tau_j \le s\}$.

Итерируя равенство (9.50) имеем:

$$\mathbf{x}_s^{(l)} - \mathbf{y}_s^{(l)} = e_{n_s-1}\left(\mathbf{x}_{\tau_2}^{(l)} - \mathbf{y}_{\tau_2}^{(l)}\right) + f_{n_s-1}\left(\mathbf{x}_{\tau_1}^{(l)} - \mathbf{y}_{\tau_1}^{(l)}\right) + g_{n_s-1}\left(\mathbf{x}_0^{(l)} - \mathbf{y}_0^{(l)}\right)$$

$$+\sum_{j=2}^{n_s-1} q_j U_{\tau_{n_s-j+2},\tau_{n_s-j+1},\tau_{n_s-j},\tau_{n_s-j-1}}^{(l)} + q_1 U_{s,\tau_{n_s},\tau_{n_s-1},\tau_{n_s-2}}^{(l)}, \tag{9.51}$$

где

$$e_{k+1} = \alpha_l e_k + f_k,\ e_1 = \alpha_l, \tag{9.52}$$

$$f_{k+1} = \beta_l e_k + g_k,\ f_1 = \beta_l, \tag{9.53}$$

$$g_{k+1} = (1-\alpha_l-\beta_l)e_k,\ g_1 = 1-\alpha_l-\beta_l, \tag{9.54}$$

$$q_{k+1} = e_k,\ q_1 = 1; \tag{9.55}$$

$k = 1, 2, \ldots, n_s - 2$.

Заметим, что если в правой части (9.45) положить $\alpha_l = \mu_l = 1$, $\beta_l = \delta_l = \nu_l = 0$, то численный метод (9.45) превратится в явный одношаговый сильный численный метод порядка точности 1.0 (метод Г.Н. Мильштейна). Сходимость метода Г.Н. Мильштейна доказана в условиях теоремы 9.1 в [70] (см. также теорему 7.2). Единственное существенное отличие, которое может возникнуть при обосновании сходимости численного метода (9.45) с помощью подхода, изложенного в [70], связано с тем, что коэффициенты e_k, f_k, g_k, q_k могут расти с ростом k, в то время как для метода Г.Н. Мильштейна $e_{n_s-1} = f_{n_s-1} = 0$, $g_{n_s-1} = 1$, $q_1 = \ldots = q_{n_s-1} = 1$.

Покажем, что при $\alpha_l, \beta_l \in [0,1]$, $\alpha_l + \beta_l \le 1$ числа e_k, f_k, g_k, q_k принадлежат промежутку $[0,1]$ при всех $k = 1, 2, \ldots, n_s - 1$.

Из (9.52)-(9.54) получаем:

$$e_{k+1} = \alpha_l e_k + \beta_l e_{k-1} + (1-\alpha_l-\beta_l)e_{k-2}. \tag{9.56}$$

Запишем несколько очевидных соотношений: $0 \le e_2 = (\alpha_l)^2 + \beta_l \le \alpha_l + \beta_l \le 1,\ 0 \le f_2 = \beta_l\alpha_l + 1 - \alpha_l - \beta_l \le 1 - \alpha_l \le 1,\ e_2 + f_2 + g_2 = 1,\ 0 \le g_2 \le 1,\ 0 \le e_3 = \alpha_l e_2 + f_2 \le e_2 + f_2 = 1 - g_2 \le 1$.

Таким образом $e_1, e_2, e_3 \in [0,1]$. Согласно этому и (9.56) имеем: $0 \le e_4 \le \alpha_l + \beta_l + 1 - \alpha_l - \beta_l = 1$.

Предположим теперь, что $e_{k-2}, e_{k-1}, e_k \in [0,1]$ при некотором $k > 3$. Тогда из (9.56) снова получаем: $0 \le e_{k+1} \le \alpha_l + \beta_l + 1 - \alpha_l - \beta_l = 1$, т. е. по индукции $e_k \in [0,1]$ при $k = 1, 2, \ldots$.

В силу (9.54), (9.55) $q_k, g_k \in [0,1]$ при $k = 1, 2, \ldots$.

Из (9.53), (9.54) получаем: $0 \le f_{k+1} = \beta_l e_k + (1 - \alpha_l - \beta_l) e_{k-1} \le \beta_l + 1 - \alpha_l - \beta_l = 1 - \alpha_l \le 1$, т. е. $f_k \in [0,1]$ при $k = 1, 2, \ldots$.

Итак мы показали, что при $\alpha_l, \beta_l \in [0,1]$, $\alpha_l + \beta_l \le 1$ числа e_k, f_k, g_k, q_k принадлежат промежутку $[0,1]$ при $k = 1, 2, \ldots$.

Теперь из (9.51) получаем:

$$\mathbf{z}_s^{(l)} \stackrel{\text{def}}{=} \mathsf{M}\{|\mathbf{x}_s^{(l)} - \mathbf{y}_s^{(l)}|^2\} \le L_1 \Bigg(\sum_{k=0}^{2} \mathsf{M}\{|\mathbf{x}_{\tau_k}^{(l)} - \mathbf{y}_{\tau_k}^{(l)}|^2\} +$$

$$+ \mathsf{M}\Bigg\{ \Bigg(\sum_{j=2}^{n_s-1} q_j U^{(l)}_{\tau_{n_s-j+2}, \tau_{n_s-j+1}, \tau_{n_s-j}, \tau_{n_s-j-1}} \Bigg)^2 \Bigg\} + \mathsf{M}\Bigg\{ \Big(U^{(l)}_{s, \tau_{n_s}, \tau_{n_s-1}, \tau_{n_s-2}} \Big)^2 \Bigg\} \Bigg), \quad (9.57)$$

где постоянная L_1 не зависит от Δ.

Дальнейшее доказательство аналогично доказательству теоремы 7.2 при $r = 2$. В результате получаем оценку: $\mathsf{M}\{|\mathbf{x}_T - \mathbf{y}_T|\} \le C\Delta$, где постоянная C не зависит от Δ. Теорема доказана. $\square$

Отметим, что если в (9.45) взять переменный шаг интегрирования, то теорема 9.1 остается в силе. При этом роль Δ в формулировке теоремы 9.1 будет играть величина $\Delta = \max\limits_{1 \le j \le N-1} \Delta_j$, где Δ_j – j-й шаг интегрирования.

Численный эксперимент 9.12 (рис. 9.12). *Смоделировать* 2000 ($M = 20$ *групп по* $L = 100$ *штук в каждой*) *независимых реализаций случайной величины* $\mathbf{x}_T$, *являющейся решением стохастического дифференциального уравнения Ито* (7.4) *при* $t = T$, *по формуле*

$$x_0 e^{(a - \frac{1}{2}b^2)T + b\sqrt{\Delta} \sum\limits_{p=1}^{N} \zeta_p^{(1)}} \quad (9.58)$$

при $x_0 = 1$, $T = 1$, $a = b = 1.5$, $N = T/\Delta$, $\Delta = 2^{-3}$ *и с помощью численного метода* (9.45) *при тех же исходных данных и* $y_0 = 1$, $\alpha_1 = 0$, $\beta_1 = \delta_1 = \mu_1 = \nu_1 = \frac{1}{2}$ (*кривая* 1). *Два начальных шага осуществить с помощью явного метода Г.Н. Мильштейна* (*численный метод* (9.45) *при* $\alpha_1 = \mu_1 = 1$, $\beta_1 = \delta_1 = \nu_1 = 0$). *Для моделирования стохастических интегралов Ито, входящих в* (9.45) *использовать формулы:*

$$\hat{I}^{(1)}_{0_{\tau_{p+1}, \tau_p}} = \sqrt{\Delta}\zeta_p^{(1)}, \ \hat{I}^{(11)}_{00_{\tau_{p+1}, \tau_p}} = \frac{\Delta}{2}\Big(\big(\zeta_p^{(1)}\big)^2 - 1 \Big); \quad (9.59)$$

$\zeta_p^{(1)}$ *в* (9.58), (9.59) – *независимые в совокупности стандартные гауссовские случайные величины. Вычислить* $\hat{\varepsilon}_{100,20}$, *повторить вычисления при* $\Delta = 2^{-j}$; $j = 4, 5, 6, 7$ *и построить засисимость* $\hat{\varepsilon}_{100,20}(\Delta)$;

$\Delta = 2^{-j}$; $j = 3, 4, \ldots, 7$. *Повторить вычисления для* $\alpha_1 = \beta_1 = \frac{1}{3}$, $\delta_1 = \mu_1 = \nu_1 = \frac{1}{2}$ (*кривая* 2) *и* $\alpha_1 = \beta_1 = 0$, $\delta_1 = \mu_1 = \nu_1 = \frac{3}{4}$ (*кривая* 3).

Наличие производных в выражении численного метода является, как известно, его недостатком. Всвязи с этим построим конечно-разностную модификацию численного метода (9.45). Для этого аппроксимируем конечными разностями частные производные, входящие в величины $\mathbf{v}^{(l)}_{\tau_p,\tau_{p-1}}$, $\mathbf{v}^{(l)}_{\tau_{p-1},\tau_{p-2}}$, $\mathbf{v}^{(l)}_{\tau_{p+1},\tau_p}$ в правой части (9.45). Например, в (9.45) вместо $\mathbf{v}_{\tau_{p+1},\tau_p}$ можно использовать

$$\mathbf{v}_{\tau_{p+1},\tau_p} = \sum_{i_1=1}^{m} \Sigma_{i_1}(\mathbf{y}_p, \tau_p)\hat{I}^{(i_1)}_{0_{\tau_{p+1},\tau_p}} + \frac{1}{\sqrt{\Delta}} \sum_{i_1,i_2=1}^{m} \sum_{j=1}^{2} \pi_j \Sigma_{i_1}(\mathbf{y}^{(ji_2)}_{p\sigma}, \tau_p)\hat{I}^{(i_2 i_1)}_{00_{\tau_{p+1},\tau_p}},$$

где сохранен смысл обозначений формулы (7.90).

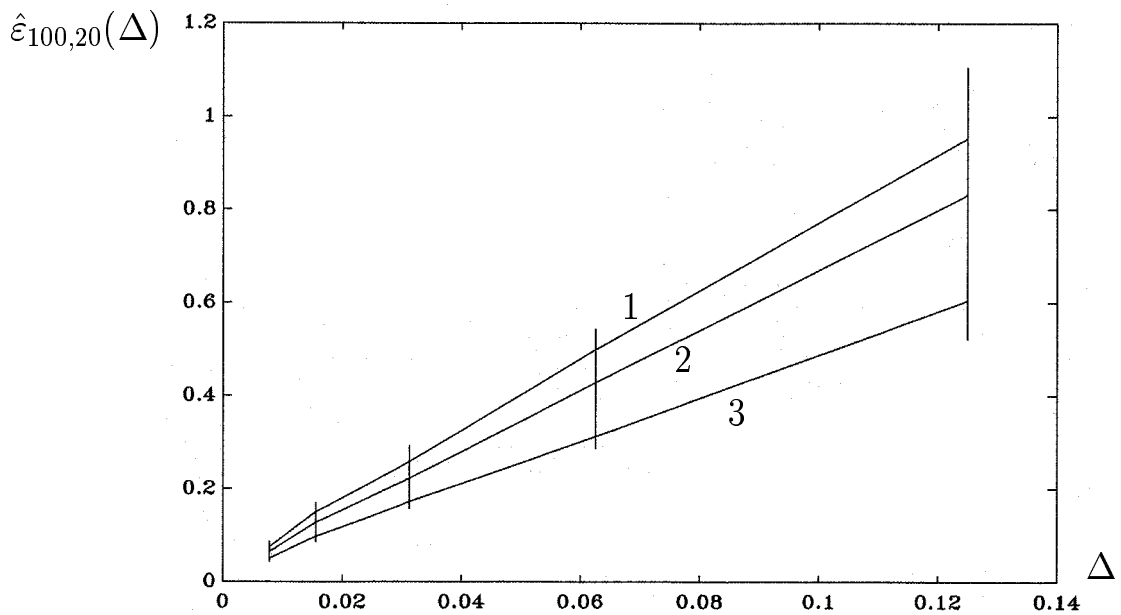

Рис.9.12. Результат численного эксперимента 9.12.

Численный эксперимент 9.13. *Повторить численный эксперимент* 9.12 *для конечно-разностной модификации численного метода* (9.45). *Два начальных шага осуществить с помощью явного одношагового сильного конечно-разностного численного метода порядка точности* 1.0 *вида* (7.90).

Результаты численного эксперимента 9.13 совпадают с точностью до 10^{-4} с результатами численного эксперимента 9.12.

Поясним кратко, как может быть обоснована сходимость построенного конечно-разностного численного метода. С помощью обычной

формулы Тейлора его правая часть приводится к представлению, которое отличается от правой части (9.45) наличием слагаемого, имеющего порядок малости $\frac{3}{2}$ по Δ при $\Delta \downarrow 0$. Далее сходимость рассматриваемого численного метода обосновывается аналогично тому, как это сделано в теореме 7.6.

9.6.2 Методы порядка точности 1.5.

Разовьем подход, изложенный в предыдущем разделе. В результате получим следующий трехшаговый сильный численный метод порядка точности 1.5 (предполагается, что существуют все частные производные и стохастические интегралы данного раздела):

$$\mathbf{y}_{\tau_{p+1}}^{(l)} = \alpha_l \mathbf{y}_{\tau_p}^{(l)} + \beta_l \mathbf{y}_{\tau_{p-1}}^{(l)} + (1-\alpha_l-\beta_l)\mathbf{y}_{\tau_{p-2}}^{(l)} +$$
$$+\Delta\left[\delta_l \mathbf{a}^{(l)}(\mathbf{y}_{\tau_{p+1}},\tau_{p+1}) + \mu_l \mathbf{a}^{(l)}(\mathbf{y}_{\tau_p},\tau_p) + \nu_l \mathbf{a}^{(l)}(\mathbf{y}_{\tau_{p-1}},\tau_{p-1}) + \right.$$
$$\left. +(3-2\alpha_l-\beta_l-\delta_l-\mu_l-\nu_l)\mathbf{a}^{(l)}(\mathbf{y}_{\tau_{p-2}},\tau_{p-2})\right] +$$
$$+\Delta^2\left[\varepsilon_l L\mathbf{a}^{(l)}(\mathbf{y}_{\tau_{p+1}},\tau_{p+1}) + \lambda_l L\mathbf{a}^{(l)}(\mathbf{y}_{\tau_p},\tau_p) + \varphi_l L\mathbf{a}^{(l)}(\mathbf{y}_{\tau_{p-1}},\tau_{p-1}) + \right.$$
$$\left. + \left(\frac{9}{2} - 2\alpha_l - \frac{1}{2}\beta_l - 3\delta_l - 2\mu_l - \nu_l - \varepsilon_l - \lambda_l - \varphi_l\right) L\mathbf{a}^{(l)}(\mathbf{y}_{\tau_{p-2}},\tau_{p-2})\right] -$$
$$-\Delta\sum_{i=1}^{m}\left[\delta_l G_0^{(i)}\mathbf{a}^{(l)}(\mathbf{y}_{\tau_p},\tau_p)\hat{I}_{0_{\tau_{p+1},\tau_p}}^{(i)} + (\delta_l+\mu_l-1)G^{(i)}\mathbf{a}^{(l)}(\mathbf{y}_{\tau_{p-1}},\tau_{p-1})\hat{I}_{0_{\tau_p,\tau_{p-1}}}^{(i)} + \right.$$
$$\left. +(\alpha_l+\delta_l+\mu_l+\nu_l-2)G_0^{(i)}\mathbf{a}^{(l)}(\mathbf{y}_{\tau_{p-2}},\tau_{p-2})\hat{I}_{0_{\tau_{p-1},\tau_{p-2}}}^{(i)}\right] +$$
$$+(1-\alpha_l)\mathbf{v}_{\tau_p,\tau_{p-1}}^{(l)} + (1-\alpha_l-\beta_l)\mathbf{v}_{\tau_{p-1},\tau_{p-2}}^{(l)} + \mathbf{v}_{\tau_{p+1},\tau_p}^{(l)}, \qquad (9.60)$$

где

$$\mathbf{v}_{\tau_{p+1},\tau_p} = \sum_{i_1=1}^{m}\Sigma_{i_1}\hat{I}_{0_{\tau_{p+1},\tau_p}}^{(i_1)} + \sum_{i_1,i_2=1}^{m} G_0^{(i_2)}\Sigma_{i_1}\hat{I}_{00_{\tau_{p+1},\tau_p}}^{(i_2 i_1)} +$$
$$+\sum_{i_1=1}^{m}\left[G_0^{(i_1)}\mathbf{a}\left(\Delta\hat{I}_{0_{\tau_{p+1},\tau_p}}^{(i_1)} + \hat{I}_{1_{\tau_{p+1},\tau_p}}^{(i_1)}\right) - L\Sigma_{i_1}I_1^{(i_1)}\right] +$$
$$+\sum_{i_1,i_2,i_3=1}^{m} G_0^{(i_3)}G_0^{(i_2)}\Sigma_{i_1}\hat{I}_{000_{\tau_{p+1},\tau_p}}^{(i_3 i_2 i_1)}.$$

Отметим, что при $\varepsilon_l = \lambda_l = \varphi_l = 0$, $\frac{9}{2} - 2\alpha_l - \frac{1}{2}\beta_l - 3\delta_l - 2\mu_l - \nu_l - \varepsilon_l - \lambda_l - \varphi_l = 0$ в правую часть (9.60) войдет меньшее число частных производных, чем в явный одношаговый сильный численный метод порядка точности 1.5 (численный метод (9.60) при $\beta_l = 0$, $\alpha_l = 1$,

$\delta_l = 0$, $\mu_l = 1$, $\nu_l = 0$, $\varepsilon_l = 0$, $\lambda_l = \frac{1}{2}$, $\varphi_l = 0$), т. к. в правую часть последнего входит слагаемое $\frac{\Delta^2}{2} L\mathbf{a}$.

Не приводя доказательство сходимости численного метода (9.60) заметим, что оно может быть проведено аналогично доказательству теоремы 9.1 с использованием следующего представления:

$$\mathbf{x}_{\tau_{p+1}}^{(l)} = \alpha_l \mathbf{x}_{\tau_p}^{(l)} + \beta_l \mathbf{y}_{\tau_{p-1}}^{(l)} + (1-\alpha_l-\beta_l)\mathbf{x}_{\tau_{p-2}}^{(l)} +$$

$$+\Delta\left[\delta_l \mathbf{a}^{(l)}(\mathbf{x}_{\tau_{p+1}}, \tau_{p+1}) + \mu_l \mathbf{a}^{(l)}(\mathbf{x}_{\tau_p}, \tau_p) + \nu_l \mathbf{a}^{(l)}(\mathbf{x}_{\tau_{p-1}}, \tau_{p-1}) + \right.$$

$$\left. +(3-2\alpha_l-\beta_l-\delta_l-\mu_l-\nu_l)\mathbf{a}^{(l)}(\mathbf{x}_{\tau_{p-2}}, \tau_{p-2})\right] +$$

$$+\Delta^2\left[\varepsilon_l L\mathbf{a}^{(l)}(\mathbf{x}_{\tau_{p+1}}, \tau_{p+1}) + \lambda_l L\mathbf{a}^{(l)}(\mathbf{x}_{\tau_p}, \tau_p) + \varphi_l L\mathbf{a}^{(l)}(\mathbf{x}_{\tau_{p-1}}, \tau_{p-1}) + \right.$$

$$\left. + \left(\frac{9}{2} - 2\alpha_l - \frac{1}{2}\beta_l - 3\delta_l - 2\mu_l - \nu_l - \varepsilon_l - \lambda_l - \varphi_l\right) L\mathbf{a}^{(l)}(\mathbf{x}_{\tau_{p-2}}, \tau_{p-2})\right] -$$

$$-\Delta\left[\delta_l \mathbf{q}_{\tau_{p+1},\tau_p}^{(l)} + (\delta_l+\mu_l-1)\mathbf{q}_{\tau_p,\tau_{p-1}}^{(l)} + (\alpha_l+\delta_l+\mu_l+\nu_l-2)\mathbf{q}_{\tau_{p-1},\tau_{p-2}}^{(l)}\right] +$$

$$+(1-\alpha_l)\mathbf{g}_{\tau_p,\tau_{p-1}}^{(l)} + (1-\alpha_l-\beta_l)\mathbf{g}_{\tau_{p-1},\tau_{p-2}}^{(l)} + \mathbf{g}_{\tau_{p+1},\tau_p}^{(l)} \text{ с в. 1,} \qquad (9.61)$$

где

$$\mathbf{q}_{\tau_{p+1},\tau_p} = \mathbf{r}_{\tau_{p+1},\tau_p} + \sum_{i=1}^{m} G_0^{(i)} \mathbf{a}^{(l)}(\mathbf{x}_{\tau_p}, \tau_p) I_{0_{\tau_{p+1},\tau_p}}^{(i)},$$

$$\mathbf{g}_{\tau_{p+1},\tau_p} = \mathbf{d}_{\tau_{p+1},\tau_p} + \mathbf{h}_{\tau_{p+1},\tau_p},$$

$$\mathbf{d}_{\tau_{p+1},\tau_p} = \sum_{i=1}^{m} \Sigma_i(\mathbf{x}_{\tau_p}, \tau_p) I_{0_{\tau_{p+1},\tau_p}}^{(i)} + \sum_{i,j=1}^{m} G_0^{(j)} \Sigma_i(\mathbf{x}_{\tau_p}, \tau_p) I_{00_{\tau_{p+1},\tau_p}}^{(ji)} +$$

$$+\sum_{i=1}^{m}\left[G_0^{(i)}\mathbf{a}(\mathbf{x}_{\tau_p}, \tau_p)\left(\Delta I_{0_{\tau_{p+1},\tau_p}}^{(i)} + I_{1_{\tau_{p+1},\tau_p}}^{(i)}\right) - L\Sigma_i(\mathbf{x}_{\tau_p}, \tau_p) I_{1_{\tau_{p+1},\tau_p}}^{(i)}\right]$$

$$+\sum_{i,j,k=1}^{m} G_0^{(k)} G_0^{(j)} \Sigma_i(\mathbf{x}_{\tau_p}, \tau_p) I_{000_{\tau_{p+1},\tau_p}}^{(kji)},$$

$$\mathbf{r}_{\tau_{p+1},\tau_p} = \int_{\tau_p}^{\tau_{p+1}} \left(\int_{\tau_p}^{s} LL\mathbf{a}(\mathbf{x}_\theta, \theta) d\theta + \sum_{i=1}^{m} \int_{\tau_p}^{s} G_0^{(i)} L\mathbf{a}(\mathbf{x}_\theta, \theta) d\mathbf{w}_\theta^{(i)}\right) ds$$

$$+\sum_{i=1}^{m} \int_{\tau_p}^{\tau_{p+1}} \left(\int_{\tau_p}^{s} LG_0^{(i)} \mathbf{a}(\mathbf{x}_\theta, \theta) d\theta + \sum_{j=1}^{m} \int_{\tau_p}^{s} G_0^{(j)} G_0^{(i)} \mathbf{a}(\mathbf{x}_\theta, \theta) d\mathbf{w}_\theta^{(j)}\right) d\mathbf{w}_s^{(i)},$$

$$\mathbf{h}_{\tau_{p+1},\tau_p} = \int_{\tau_p}^{\tau_{p+1}} \int_{\tau_p}^{s} \left(\int_{\tau_p}^{\theta} LL\mathbf{a}(\mathbf{x}_u, u) du + \sum_{i=1}^{m} \int_{\tau_p}^{\theta} G_0^{(i)} L\mathbf{a}(\mathbf{x}_u, u) d\mathbf{w}_u^{(i)}\right) d\theta ds$$

$$+\sum_{i=1}^{m}\int\limits_{\tau_p}^{\tau_{p+1}}\int\limits_{\tau_p}^{s}\Biggl(\int\limits_{\tau_p}^{\theta}LG_0^{(i)}\mathbf{a}(\mathbf{x}_u,u)du+\sum_{j=1}^{m}\int\limits_{\tau_p}^{\theta}G_0^{(j)}G_0^{(i)}\mathbf{a}(\mathbf{x}_u,u)d\mathbf{w}_u^{(j)}\Biggr)d\mathbf{w}_\theta^{(i)}ds$$

$$+\sum_{i=1}^{m}\int\limits_{\tau_p}^{\tau_{p+1}}\int\limits_{\tau_p}^{s}\Biggl(\int\limits_{\tau_p}^{\theta}LL\Sigma_i(\mathbf{x}_u,u)du+\sum_{j=1}^{m}\int\limits_{\tau_p}^{\theta}G_0^{(j)}L\Sigma_i(\mathbf{x}_u,u)d\mathbf{w}_u^{(j)}\Biggr)d\theta d\mathbf{w}_s^{(i)}$$

$$+\sum_{i,j=1}^{m}\int\limits_{\tau_p}^{\tau_{p+1}}\int\limits_{\tau_p}^{s}\Biggl(\int\limits_{\tau_p}^{\theta}LG_0^{(j)}\Sigma_i(\mathbf{x}_u,u)du+\sum_{k=1}^{m}\int\limits_{\tau_p}^{\theta}G_0^{(k)}G_0^{(j)}\Sigma_i(\mathbf{x}_u,u)d\mathbf{w}_u^{(k)}\Biggr)d\mathbf{w}_\theta^{(j)}d\mathbf{w}_s^{(i)};$$

остальные обозначения, входящие в (9.61), такие же как и в (9.60).

Отметим, что представление (9.61) получается с использованием соотношений:

$$\mathbf{x}_{\tau_{p+1}}=\mathbf{x}_{\tau_p}+\Delta\mathbf{a}(\mathbf{x}_{\tau_p},\tau_p)+\frac{\Delta^2}{2}L\mathbf{a}(\mathbf{x}_{\tau_p},\tau_p)+\mathbf{d}_{\tau_{p+1},\tau_p}+\mathbf{h}_{\tau_{p+1},\tau_p}\ \text{с в. 1},$$

$$\mathbf{a}(\mathbf{x}_{\tau_{p+1}},\tau_{p+1})=\mathbf{a}(\mathbf{x}_{\tau_p},\tau_p)+\Delta L\mathbf{a}(\mathbf{x}_{\tau_p},\tau_p)+\sum_{i=1}^{m}G_0^{(i)}\mathbf{a}(\mathbf{x}_{\tau_p},\tau_p)I_{0_{\tau_{p+1},\tau_p}}^{(i)}+$$
$$+\mathbf{r}_{\tau_{p+1},\tau_p}\ \text{с в. 1},$$

которые, в свою очередь, могут быть получены с помощью формулы Ито.

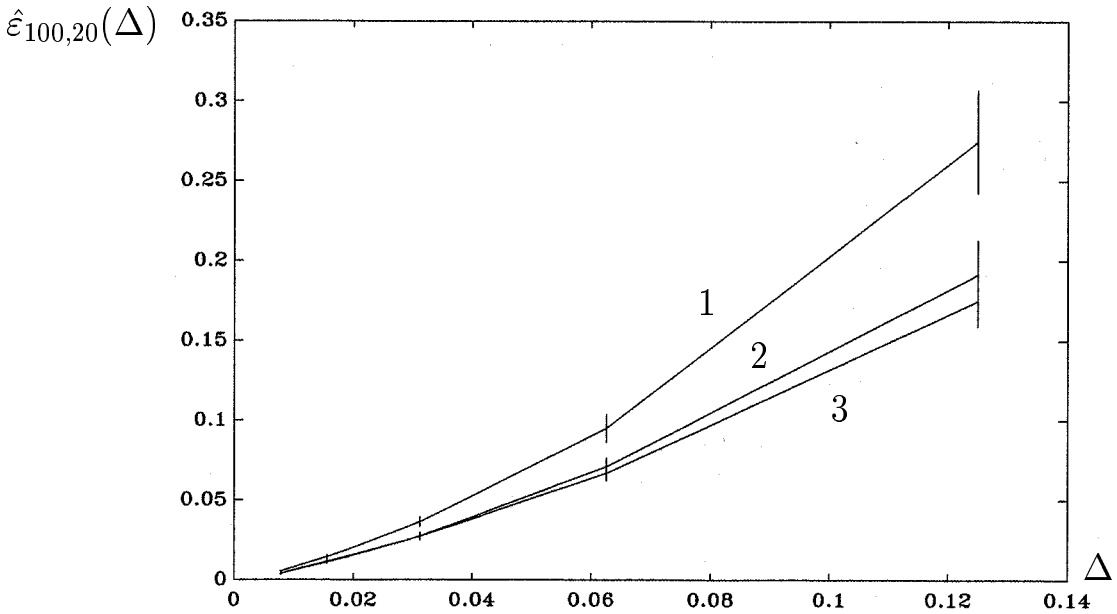

Рис.9.13. Результат численного эксперимента 9.14.

Численный эксперимент 9.14 (рис.9.13). *Повторить численный эксперимент* 9.12 *для численного метода* (9.60) *при следующих способах выбора параметров:*

1. $\alpha_1 = \beta_1 = 0$, $\varepsilon_1 = \varphi_1 = \lambda_1 = 0$, $\mu_1 = \nu_1 = \frac{1}{2}$, $\delta_1 = 1$ (кривая 1);
2. $\alpha_1 = 0$, $\beta_1 = \frac{1}{2}$, $\varepsilon_1 = \varphi_1 = \lambda_1 = 0$, $\mu_1 = \frac{1}{2}$, $\nu_1 = 1$, $\delta_1 = \frac{3}{4}$ (кривая 2);
3. $\alpha_1 = \beta_1 = 0$, $\varepsilon_1 = \varphi_1 = \lambda_1 = 0$, $\mu_1 = \nu_1 = 1$, $\delta_1 = \frac{1}{2}$ (кривая 3).

Для моделирования повторного стохастического интеграла Ито $I^{(111)}_{000_{\tau_{p+1},\tau_p}}$ *использовать формулу:*

$$\hat{I}^{(111)}_{000_{\tau_{p+1},\tau_p}} = \frac{\Delta^{3/2}}{6}\left((\zeta_p^{(1)})^3 - 3\zeta_p^{(1)}\right),$$

где $\zeta_p^{(1)}$ *– такие же случайные величины, как и в численном эксперименте* 9.12. *Не моделировать стохастический интеграл Ито* $I^{(1)}_{1_{\tau_{p+1},\tau_p}}$, *т. к. коэффициент при нем окажется равным нулю в выражении, которое получается после применения численного метода* (9.60) *к уравнению* (7.4).

Построим конечно-разностный вариант численного метода (9.60) Для этого аппроксимируем конечными разностями частные производные, входящие в его правую часть. В результате в (9.60) для $\mathbf{v}_{\tau_{p+1},\tau_p}$ используем выражение

$$\mathbf{v}_{\tau_{p+1},\tau_p} =$$

$$= \sum_{i_1=1}^{m} \Sigma_{i_1}(\mathbf{y}_p, \tau_p)\hat{I}^{(i_1)}_{0_{\tau_{p+1},\tau_p}} + \frac{1}{\sqrt{\Delta}} \sum_{i_1,i_2=1}^{m} \sum_{j=1}^{2} \alpha_j \Sigma_{i_1}(\mathbf{y}^{(ji_2)}_{p\beta}, \tau_p)\hat{I}^{(i_2 i_1)}_{00_{\tau_{p+1},\tau_p}} +$$

$$+\frac{1}{\Delta}\sum_{i_1=1}^{m}\left[\sum_{j=1}^{2}\pi_j \mathbf{a}(\mathbf{u}^{(ji_1)}_{p\sigma}, \tau_p)\left(\Delta\hat{I}^{(i_1)}_{0_{\tau_{p+1},\tau_p}} + \hat{I}^{(i_1)}_{1_{\tau_{p+1},\tau_p}}\right) -\right.$$

$$\left. -\left(\frac{1}{2}\sum_{r=1}^{m}\sum_{j=1}^{3}\varrho_j \Sigma_{i_1}(\mathbf{y}^{(jr)}_{p\varpi}, \tau_p) + \sum_{j=1}^{2}\zeta_j \Sigma_{i_1}(\mathbf{z}^{(j)}_{p\delta}, \Delta^{(j)}_{p\gamma})\right)\hat{I}^{(i_1)}_{1_{\tau_{p+1},\tau_p}}\right] +$$

$$+\frac{1}{\Delta}\sum_{i_1,i_2,i_3=1}^{m}\sum_{j=1}^{2}\alpha_j \mathbf{k}_{i_1 i_2}(\mathbf{y}^{(ji_3)}_{p\beta}, \tau_p)\hat{I}^{(i_3 i_2 i_1)}_{000_{\tau_{p+1},\tau_p}}, \qquad (9.62)$$

где сохранен смысл обозначений формулы (7.96).

Численный эксперимент 9.15 (рис.9.14). *Повторить численный эксперимент* 9.14 *для конечно-разностной модификации численного метода* (9.60). *Для моделирования стохастического интеграла* $I^{(1)}_{1_{\tau_{p+1},\tau_p}}$ *использовать формулу:*

$$\hat{I}^{(1)}_{1_{\tau_{p+1},\tau_p}} = -\frac{\Delta^{3/2}}{2}\left(\zeta_p^{(1)} + \frac{1}{\sqrt{3}}\xi_p^{(1)}\right),$$

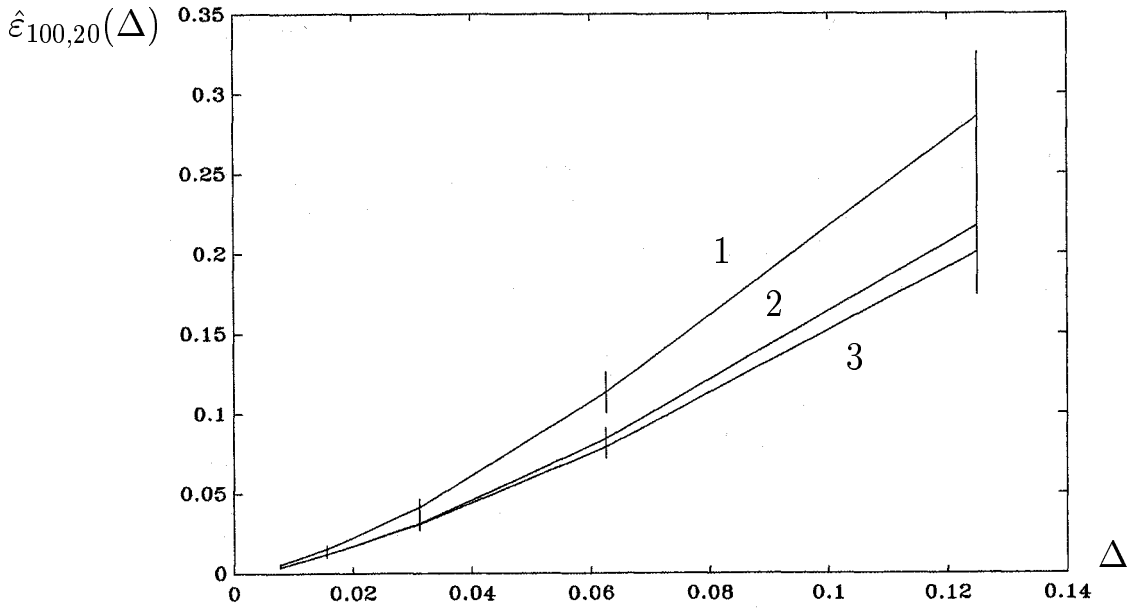

Рис.9.14. Результат численного эксперимента 9.15.

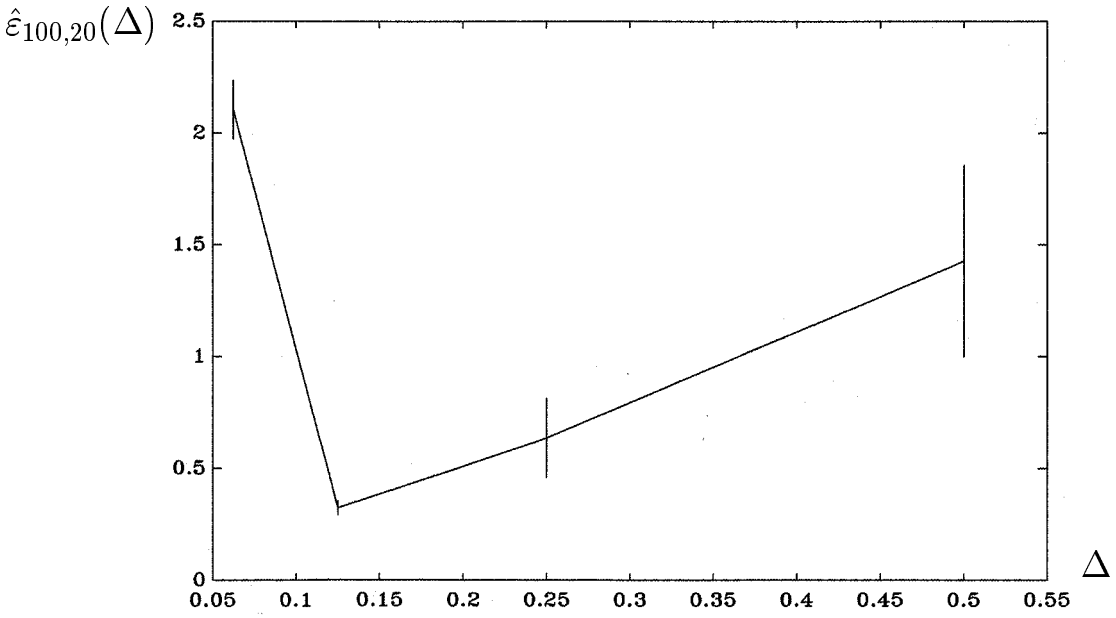

Рис.9.15. Результат численного эксперимента 9.16.

где $\zeta_p^{(1)}, \xi_p^{(1)}$; $p = 0, 1, \ldots, N-1$ *– независимые в совокупности стандартные гауссовские случайные величины, а* $\zeta_p^{(1)}$ *– такие же случайные величины, как в численном эксперименте* 9.12. *Два начальных шага осуществить с помощью явного одношагового сильного конечно-разностного численного метода порядка точности* 1.5 *вида* (7.96).

Сравнивая рис.9.13, 9.14 отметим, что ошибки, даваемые конечно-разностной модификацией численного метода (9.60) как и следовало ожидать, незначительно больше, чем соответствующие ошибки, даваемые численным методом (9.60).

В данной главе показывается, что одним из достаточных условий, обеспечивающих сходимость трехшаговых сильных численных методов для стохастических дифференциальных уравнений Ито является условие: $\alpha_l, \beta_l \in [0,1]$; $\alpha_l + \beta_l \leq 1$. В заключение приведем численный пример, в котором не выполнение данного условия приводит к нарушению сходимости рассматриваемого трехшагового численного метода.

Численный эксперимент 9.16 (рис.9.15). *Повторить численный эксперимент* 9.14 *для численного метода* (9.60) *при* $\alpha_1 = 0$, $\beta_1 = 2$, $\delta_1 = \frac{1}{2}$, $\mu_1 = \frac{1}{2}$, $\nu_1 = 1$, $\varepsilon_1 = \varphi_1 = \lambda_1 = 0$; $\Delta = 2^{-j}$; $j = 1, 2, 3, 4$.

Свойства численных методов, в частности их устойчивость, существенно зависят от выбора входящих в них параметров, шага и промежутка интегрирования. Рассмотрению этого вопроса будет посвящен следующий раздел.

9.7 Об устойчивости численных методов

Известно, что проблема устойчивости численных методов заключается в том, что ошибка численной схемы может накапливаться в процессе вычислений и в результате может превысить допустимые значения. Однако, в ряде случаев удается гарантировать выполнение требуемого ограничения сверху на ошибку численного метода. Как правило, достижение этого происходит благодаря выбору подходящего шага интегрирования, параметров численной схемы и промежутка интегрирования. Существенное влияние на устойчивость численных методов оказывают также особенности конкретных стохастических дифференциальных уравнений, к которым эти методы применяются. Рассмотрим вопросы, связанные с устойчивостью численных методов, более подробно.

Пусть $\mathbf{y}_p$; $p = 0,\ 1, \ldots$ — дискретная аппроксимация решения стохастического дифференциального уравнения Ито (7.18), которая стартует в момент t_0 из точки $\mathbf{y}_0$. Через $\bar{\mathbf{y}}_p$; $p = 0,\ 1, \ldots$ обозначим эту же дискретную аппроксимацию, но стартующую в момент t_0 из точки $\bar{\mathbf{y}}_0$. Выберем некоторый конечный промежуток интегрирования $[t_0, T]$ и покроем его сеткой $\{\tau_j\}_{j=0}^{n_T}$ такой, что $t_0 = \tau_0 < \tau_1 < \ldots < \tau_{n_T} = T$, $\Delta = \max\limits_{0 \leq j < n_T} |\tau_{j+1} - \tau_j|$. Для любого $t \in [t_0, T]$ определим натуральное

число n_t следующим образом: $n_t = \max\limits_j \ \{j : \ \tau_j \le t\}$.

Определение 9.1 [86]. *Будем говорить, что дискретная аппроксимация* $\mathbf{y}_p$; $p = 0, \ 1, \ldots$ *стохастически численно устойчива для данного стохастического дифференциального уравнения, если для любого конечного интервала* $[t_0, T]$ *существует такое постоянное число* $\Delta_0 > 0$, *что* $\forall \varepsilon > 0$ *и* $\forall \Delta \in (0, \Delta_0)$ *выполняется условие* $\lim\limits_{|\mathbf{y}_0 - \bar{\mathbf{y}}_0| \to 0} \ \sup\limits_{t_0 \le t \le T} \ \mathsf{P}\left\{|\mathbf{y}_{n_t} - \bar{\mathbf{y}}_{n_t}| \ge \varepsilon\right\} = 0.$

Определение 9.2 [86]. *Будем говорить, что дискретная аппроксимация* $\mathbf{y}_p$; $p = 0, \ 1, \ldots$ *стохастически численно устойчива, или просто численно устойчива, если она стохастически численно устойчива для такого стохастического дифференциального уравнения, что* $\mathbf{y}_p$; $p = 0, \ 1, \ldots$ *сходится к решению этого уравнения.*

Отметим, что в определение численной устойчивости входит ограничение Δ_0 на шаг интегрирования Δ. Обычно Δ_0 зависит от промежутка интегрирования $[t_0, T]$ и рассматриваемого стохастического дифференциального уравнения. Известно [86], что даже для численно устойчивой схемы при увеличении промежутка интегрирования ошибка численной схемы может возрастать и превышать допустимые пределы, хотя теоретически она остается ограниченной. Эта проблема становится особенно актуальной в тех задачах, где промежуток интегрирования $[t_0, T]$ заранее неизвестен, например, при моделировании момента первого выхода. В связи с этим рассмотрим следующее определение.

Определение 9.3 [86]. *Будем говорить, что дискретная аппроксимация* $\mathbf{y}_p$; $p = 0, \ 1, \ldots$ *асимптотически численно устойчива, если она численно устойчива и для любого конечного интервала* $[t_0, T]$ *существует такое постоянное число* $\Delta_{\mathrm{a}} > 0$, *что* $\forall \varepsilon > 0$ *и* $\forall \Delta \in (0, \Delta_{\mathrm{a}})$ *выполняется условие* $\lim\limits_{|\mathbf{y}_0 - \bar{\mathbf{y}}_0| \to 0} \ \lim\limits_{T \to \infty} \ \mathsf{P}\Big\{\sup\limits_{t_0 \le t \le T} |\mathbf{y}_{n_t} - \bar{\mathbf{y}}_{n_t}| \ge \varepsilon\Big\} = 0.$

Отметим, что представленные в настоящей книге одношаговые численные методы являются численно устойчивыми, если коэффициенты диффузии и сноса стохастических дифференциальных уравнений, к которым применяются эти методы, удовлетворяют определенным условиям гладкости. Покажем это на примере явного метода Г.Н. Мильштейна в скалярном случае, т. е. когда $m = n = 1$. В этой ситуации явный метод Г.Н. Мильштейна решения стохастического дифференциального уравнения Ито вида

$$dx_t = a(x_t, t)dt + b(x_t, t)df_t$$

определяется равенством

$$y_{p+1} = y_p + a(y_p, \tau_p)\Delta + b(y_p, \tau_p)\Delta f_{\tau_p} + c(y_p, \tau_p) J_{00_{\tau_{p+1}, \tau_p}},$$

где $a(x,t),\ b(x,t)\ :\ \Re^1 \times [0,T] \to \Re^1$; $\Delta f_{\tau_p} = f_{\tau_{p+1}} - f_{\tau_p}$; $J_{00_{\tau_{p+1},\tau_p}} = \int\limits_{\tau_p}^{\tau_{p+1}} \int\limits_{\tau_p}^{\tau} df_\theta df_\tau$; $c(x,t) \stackrel{\text{def}}{=} b(x,t)\frac{\partial b}{\partial x}(x,t)$; $f_t \in \Re^1$ — стандартный винеровский процесс. Относительно функций $a(x,t),\ b(x,t),\ c(x,t)$ будем предполагать, что они попарно удовлетворяют условиям AI, AII теоремы 1.6.

Пусть $z_t = \sup\limits_{0 \le s \le t} \mathsf{M}\left\{|\mathbf{y}_{n_s} - \bar{\mathbf{y}}_{n_s}|^2\right\}$. Тогда в силу неравенства $(x_1 + \ldots + x_4)^2 \le 4(x_1^2 + \ldots + x_4^2)$ имеем

$$z_t = \sup_{0 \le s \le t} \mathsf{M}\left\{\left|\mathbf{y}_0 - \bar{\mathbf{y}}_0 + \sum_{j=0}^{n_s-1} (y_{j+1} - y_j - \bar{y}_{j+1} + \bar{y}_j)\right|^2\right\} \le$$

$$\le 4\left\{|\mathbf{y}_0 - \bar{\mathbf{y}}_0|^2 + z_t^{(1)} + z_t^{(2)} + z_t^{(3)}\right\}, \tag{9.63}$$

где

$$z_t^{(1)} = \sup_{0 \le s \le t} \mathsf{M}\left\{\left|\sum_{j=0}^{n_s-1} \left(a(y_j, \tau_j) - a(\bar{y}_j, \tau_j)\right)\Delta\right|^2\right\};$$

$$z_t^{(2)} = \sup_{0 \le s \le t} \mathsf{M}\left\{\left|\sum_{j=0}^{n_s-1} \left(b(y_j, \tau_j) - b(\bar{y}_j, \tau_j)\right)\Delta f_{\tau_p}\right|^2\right\};$$

$$z_t^{(3)} = \sup_{0 \le s \le t} \mathsf{M}\left\{\left|\sum_{j=0}^{n_s-1} \left(c(y_j, \tau_j) - c(\bar{y}_j, \tau_j)\right) J_{00_{\tau_{j+1},\tau_j}}\right|^2\right\}.$$

Используя условие Липшица и неравенство (1.44), при $n = 1$ получаем

$$z_t^{(1)} \le K_1 \sup_{0 \le s \le t} \mathsf{M}\left\{\left|\sum_{j=0}^{n_s-1} |y_j - \bar{y}_j|\,\Delta\right|^2\right\} \le$$

$$\le K_1 \mathsf{M}\left\{\left|\sum_{j=0}^{n_t-1} |y_j - \bar{y}_j|\,\Delta\right|^2\right\} \le K_1 \mathsf{M}\left\{\left|\int_{t_0}^{t} \left|y_s - \bar{y}_s\right| ds\right|^2\right\} \le$$

$$\le K_1(t - t_0) \int_{t_0}^{t} \mathsf{M}\left\{|y_s - \bar{y}_s|^2\right\} ds \le K_1(t - t_0) \int_{t_0}^{t} z_s ds,\ K_1 < \infty. \tag{9.64}$$

С учетом условия Липшица и неравенства (1.43), при $n = 1$ имеем

$$z_t^{(2)} = \sup_{0 \le s \le t} \left\{\sum_{j=0}^{n_s-1} \mathsf{M}\left\{|b(y_j, \tau_j) - b(\bar{y}_j, \tau_j)|^2\right\}\Delta\right\} \le$$

$$\leq K_2 \sum_{j=0}^{n_t-1} \mathsf{M}\left\{|y_j - \bar{y}_j|^2\right\} \Delta \leq K_2 \int_{t_0}^{t} z_s ds, \ K_2 < \infty. \tag{9.65}$$

Аналогично (9.65) получаем

$$z_t^{(3)} \leq K_3 \Delta \int_{t_0}^{t} z_s ds, \ K_3 < \infty. \tag{9.66}$$

Подставляя (9.64)–(9.66) в (9.63), приходим к следующему неравенству:

$$z_t \leq 4\Bigg(|y_0 - \bar{y}_0|^2 + (K_1(t-t_0) + K_2 + K_3\Delta) \int_0^t z_s ds\Bigg). \tag{9.67}$$

Применение неравенства Гронуолла к (9.67) дает

$$z_t \leq 4\,|y_0 - \bar{y}_0|^2 \left\{1 + 4\left(K_1(t-t_0) + K_2 + K_3\Delta\right) \int_{t_0}^{t} e^{4(K_1(t-t_0)+K_2+K_3\Delta)(t-s)} ds\right\}. \tag{9.68}$$

Используя неравенство Чебышева и (9.68), получаем

$$\lim_{|y_0-\bar{y}_0|\to 0} \sup_{0\leq s\leq t} \mathsf{P}\left\{|y_{n_s} - \bar{y}_{n_s}| \geq \varepsilon\right\} \leq \frac{1}{\varepsilon^2} \lim_{|y_0-\bar{y}_0|\to 0} z_t = 0. \tag{9.69}$$

Таким образом, в рамках сделанных предположений явный метод Г.Н. Мильштейна является стохастически численно устойчивым для данного стохастического дифференциального уравнения. Поскольку в условиях теорем 7.2 или 7.3 этот численный метод сходится сильно с порядком точности 1.0 к решению рассматриваемого стохастического дифференциального уравнения Ито, то по (9.69) и определению 9.3 явный метод Г.Н. Мильштейна является численно устойчивым.

Аналогичные рассуждения можно применить для обоснования численной устойчивости явного метода Г.Н. Мильштейна в векторном случае, а также более точных одношаговых численных методов, рассмотренных в настоящей монографии.

Обычно изучение асимптотической численной устойчивости одношаговых детерминированных численных методов проводится на примере определенного класса тестовых уравнений, например, класса линейных дифференциальных уравнений вида

$$\frac{dx}{dt} = \lambda x,$$

где x, λ — комплексные числа. Для изучения асимптотической численной устойчивости одношаговых стохастических методов выберем класс комплекснозначных линейных стохастических дифференциальных уравнений вида [70, 86]

$$d\mathbf{x}_t = \lambda \mathbf{x}_t dt + df_t, \tag{9.70}$$

где $\mathbf{x}_t = \mathbf{x}_t^{(1)} + i\mathbf{x}_t^{(2)}$; $\lambda = \lambda_1 + i\lambda_2$; $f_t \in \Re^1$ — стандартный винеровский процесс; i — мнимая единица.

Применяя некоторую одношаговую дискретную аппроксимацию $\mathbf{y}_p$; $p = 0,\ 1, \ldots$ с постоянным шагом Δ к уравнению (9.70), получаем следующее равенство:

$$\mathbf{y}_{p+1} = G(\lambda\Delta)\mathbf{y}_p + \mathbf{z}_p, \tag{9.71}$$

где G — отображение комплексной плоскости в себя; $\mathbf{z}_p$ — случайные величины, которые не зависят от λ и $\mathbf{y}_p$; $p = 0,\ 1, \ldots$

Определение 9.4 [86]. *Множество комплексных чисел $\lambda\Delta$, для которых $\mathrm{Re}(\lambda) < 0$ и $|G(\lambda\Delta)| < 1$, называется областью абсолютной устойчивости численной схемы.*

Известно, что в детерминированном случае A-устойчивой (абсолютно устойчивой) численной схемой называется такая численная схема, для которой ее область абсолютной устойчивости совпадает с левой полуплоскостью комплексной плоскости. В стохастическом случае также будем называть численную схему A-устойчивой, если ее область абсолютной устойчивости является следующим множеством: $\{\lambda\Delta \in C:\ \mathrm{Re}(\lambda) < 0,\ \Delta > 0\}$, где C — множество комплексных чисел.

Рассмотрим области абсолютной устойчивости некоторых сильных численных методов.

В [86] показано, что для неявных методов Г.Н. Мильштейна (8.3) при $\tilde{\alpha}_1 = \tilde{\alpha}_2 = \alpha \in [0, 1]$ (здесь и далее в этом разделе рассматривается случай $\mathbf{y}_p \in \Re^2$) отображение G имеет вид

$$G(\lambda\Delta) = (1 - \alpha\lambda\Delta)^{-1}(1 + (1 - \alpha)\lambda\Delta).$$

Поэтому неравенство $|G(\lambda\Delta)| < 1$ в данном случае преобразуется в неравенство вида [86]

$$(1 - 2\alpha)(\lambda_1^2 + \lambda_2^2)\Delta^2 + 2\lambda_1\Delta < 0. \tag{9.72}$$

Если $\frac{1}{2} \le \alpha \le 1$ и $\lambda_1 < 0$, то неравенство (9.72) выполнено и рассматриваемые неявные методы Г.Н. Мильштейна являются A-устойчивыми. Если $0 \le \alpha < \frac{1}{2}$, то (9.72) можно записать в виде

$$(\lambda_1\Delta + A)^2 + (\lambda_2\Delta)^2 < A^2,$$

где $A = (1-2\alpha)^{-1}$, т. е. область абсолютной устойчивости — внутренность круга с центром в точке $(-A, 0)$ и с радиусом A.

В [86] показано, что для численных схем (8.4) и (8.6) при $\mathbf{y}_p \in \Re^2$, $\tilde{\alpha}_1 = \tilde{\alpha}_2 = \alpha \in [0,1]$, $\tilde{\beta}_1 = \tilde{\beta}_2 = \beta \in [0,1]$ отображение G имеет вид

$$G(\lambda\Delta) = \Big(1 - \alpha\lambda\Delta - (0.5-\alpha)\beta\lambda^2\Delta^2\Big)^{-1} \times$$

$$\times\Big(1 + (1-\alpha)\lambda\Delta + (0.5-\alpha)(1-\beta)\lambda^2\Delta^2\Big)$$

и область абсолютной устойчивости этих численных методов определяется в полярных координатах следующим неравенством:

$$\big(2 + (1-\alpha-\beta)(1-2\alpha)r^2\big)\cos\theta + 2(1-2\alpha)r\cos^2\theta +$$

$$+\frac{1}{4}(1-2\alpha)^2(1-2\beta)r^3 < 0, \qquad (9.73)$$

где $\theta \in [\pi/2, 3\pi/2]$. Отсюда следует, что численные схемы (8.4) и (8.6) A-устойчивы тогда и только тогда, когда $\alpha = 1/2$, $\beta \in [0,1]$ или $\alpha, \beta \in [1/2,\ 1]$. Нетрудно видеть, что эти выводы справедливы и для версий (8.5), (8.7) численных методов (8.4), (8.6).

Предположим теперь, что параметры неявности, входящие в численные схемы, различны для разных компонент этих схем. В этом случае определение областей абсолютной устойчивости численных схем становится существенно более сложным. Рассмотрим случай $\mathbf{y}_p \in \Re^2$ и тестовое стохастическое дифференциальное уравнение вида [86]

$$d\begin{pmatrix}\mathbf{x}_t^{(1)}\\ \mathbf{x}_t^{(2)}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\lambda_1 & -\lambda_2\\ \lambda_2 & \lambda_1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\mathbf{x}_t^{(1)}\\ \mathbf{x}_t^{(2)}\end{pmatrix}dt + \begin{pmatrix}1\\ 0\end{pmatrix}df_t,$$

где $\mathbf{x}_t = \mathbf{x}_t^{(1)} + i\mathbf{x}_t^{(2)}$; $\lambda = \lambda_1 + i\lambda_2$; f_t — стандартный винеровский процесс. В этом случае уравнение (9.71) примет вид

$$\mathbf{y}_{p+1} = G(\lambda_1\Delta, \lambda_2\Delta)\mathbf{y}_p + \mathbf{z}_p,$$

где $G(\lambda_1\Delta, \lambda_2\Delta) \in \Re^{2\times 2}$; $\mathbf{z}_p \in \Re^2$ и область абсолютной устойчивости одношаговой численной схемы определяется неравенствами [86]

$$\lambda_1 < 0,\ \|G(\lambda_1\Delta, \lambda_2\Delta)\| < 1.$$

Здесь $\|G\| = \sqrt{\sum\limits_{i,j=1}^{2}\big(G^{(ij)}\big)^2}$ — норма матрицы G.

В [86] показано, что для неявной схемы Г.Н. Мильштейна (8.3) матрица G имеет вид

$$G(\lambda_1\Delta,\lambda_2\Delta)=\begin{pmatrix} 1-\tilde{\alpha}_1\lambda_1\Delta & \tilde{\alpha}_1\lambda_2\Delta \\ -\tilde{\alpha}_2\lambda_2\Delta & 1-\tilde{\alpha}_2\lambda_1\Delta \end{pmatrix}^{-1}\times$$

$$\times\begin{pmatrix} 1+(1-\tilde{\alpha}_1)\lambda_1\Delta & -(1-\tilde{\alpha}_1)\lambda_2\Delta \\ (1-\tilde{\alpha}_2)\lambda_2\Delta & 1+(1-\tilde{\alpha}_2)\lambda_1\Delta \end{pmatrix},$$

а область абсолютной устойчивости определяется следующим неравенством:

$$(1-\tilde{\alpha}_1-\tilde{\alpha}_2)\left(\lambda_1^2+\lambda_2^2\right)\Delta^2+2\lambda_1\Delta<0. \tag{9.74}$$

Из (9.74) следует, что неявная схема Г.Н. Мильштейна (8.3) A-устойчива, когда $\tilde{\alpha}_1,\tilde{\alpha}_2\in[0,1]$ и $1\le\tilde{\alpha}_1+\tilde{\alpha}_2\le 2$. Если $0\le\tilde{\alpha}_1+\tilde{\alpha}_2<1$, то область абсолютной устойчивости этого численного метода является внутренностью круга с радиусом $A=(1-\tilde{\alpha}_1-\tilde{\alpha}_2)^{-1}$ и с центром в точке $(-A,0)$.

В [86] также получено выражение для матрицы $G(\lambda_1\Delta,\lambda_2\Delta)$ и исследована абсолютная устойчивость численных методов (8.4) и (8.6) при $\tilde{\alpha}_1\ne\tilde{\alpha}_2$, $\tilde{\beta}_1\ne\tilde{\beta}_2$. Приведем эти соотношения:

$$A^{(11)}=1-\tilde{\alpha}_1\lambda_1\Delta-\frac{1}{2}(1-2\tilde{\alpha}_1)\tilde{\beta}_1\left(\lambda_1^2-\lambda_2^2\right)\Delta^2,$$

$$A^{(12)}=\tilde{\alpha}_1\lambda_2\Delta+(1-2\tilde{\alpha}_1)\tilde{\beta}_1\lambda_1\lambda_2\Delta^2,\ A^{(21)}=-\tilde{\alpha}_2\lambda_2\Delta-(1-2\tilde{\alpha}_2)\tilde{\beta}_2\lambda_1\lambda_2\Delta^2,$$

$$A^{(22)}=1-\tilde{\alpha}_2\lambda_1\Delta-\frac{1}{2}(1-2\tilde{\alpha}_2)\tilde{\beta}_2\left(\lambda_1^2-\lambda_2^2\right)\Delta^2,$$

$$B^{(11)}=1+(1-\tilde{\alpha}_1)\lambda_1\Delta+\frac{1}{2}(1-2\tilde{\alpha}_1)(1-\tilde{\beta}_1)\left(\lambda_1^2-\lambda_2^2\right)\Delta^2,$$

$$B^{(12)}=-(1-\tilde{\alpha}_1)\lambda_2\Delta-(1-2\tilde{\alpha}_1)(1-\tilde{\beta}_1)\lambda_1\lambda_2\Delta^2,$$

$$B^{(21)}=(1-\tilde{\alpha}_2)\lambda_2\Delta-(1-2\tilde{\alpha}_2)(1-\tilde{\beta}_2)\lambda_1\lambda_2\Delta^2,$$

$$B^{(22)}=1+(1-\tilde{\alpha}_2)\lambda_1\Delta+\frac{1}{2}(1-2\tilde{\alpha}_1)(1-\tilde{\beta}_2)\left(\lambda_1^2-\lambda_2^2\right)\Delta^2,$$

где $A^{(ij)}$, $B^{(ij)}$ — компоненты (2×2)–матриц A, B, а $G=A^{-1}B$.

Область абсолютной устойчивости численных методов (8.4), (8.6) в полярных координатах $r\cos\theta=\lambda_1\Delta$, $r\sin\theta=\lambda_2\Delta$ определяется неравенством [86]

$$\frac{1}{8}\left[(1-2\tilde{\alpha}_1)^2(1-2\tilde{\beta}_1)+(1-2\tilde{\alpha}_2)^2(1-2\tilde{\beta}_2)\right]r^3+$$

$$+\left[2+\frac{1}{2}\left\{(1-2\tilde{\alpha}_1)(1-\tilde{\alpha}_1-\tilde{\beta}_1)+(1-2\tilde{\alpha}_2)(1-\tilde{\alpha}_2-\tilde{\beta}_2)\right\}r^2\right]\cos\theta+$$

$$+2(1-\tilde{\alpha}_1-\tilde{\alpha}_2)r\cos^2\theta<0. \qquad (9.75)$$

Если в (9.75) положить $\tilde{\alpha}_1=\tilde{\alpha}_2=\alpha$, $\tilde{\beta}_1=\tilde{\beta}_2=\beta$, то оно преобразуется в неравенство (9.73).

Отметим, что численный метод (8.9) обладает такой же областью абсолютной устойчивости, как и численные методы (8.4), (8.6), поскольку численные методы (8.4), (8.6) и (8.9) имеют одинаковую систематическую часть и различаются только стохастическими членами. Этот вывод справедлив, очевидно, для версий (8.5), (8.7), (8.8) численных методов (8.4), (8.6), (8.9).

Заметим, что описанная концепция устойчивости применима также и к слабым численным методам.

Для тестовых стохастических дифференциальных уравнений с мультипликативным шумом построение концепции устойчивости для сильных численных методов сопряжено с существенными трудностями, которые, однако, могут быть преодолены при использовании слабых численных методов. Круг вопросов, связанных с устойчивостью слабых численных методов решения тестовых стохастических дифференциальных уравнений с мультипликативным шумом, рассмотрен в [94, 95] (см. также главу 10).

Глава 10

Слабые численные методы решения стохастических дифференциальных уравнений Ито

В предыдущих главах книги рассматривались разнообразные сильные численные методы решения стохастических дифференциальных уравнений Ито. Данные численные методы позволяют аппроксимировать, исходя из сильного критерия сходимости, выборочные траектории решения стохастического дифференциального уравнения Ито. При этом основной вычислительной трудностью при реализации сильных численных методов является моделирование повторных стохастических интегралов Ито и Стратоновича. Проблема сильной аппроксимации повторных стохастических интегралов непроста и теоретически, и с вычислительной точки зрения (см. главы 5 и 6). В результате сильные численные методы оказываются достаточно сложными в реализации, что является платой за высокую степень качества аппроксимации ими решения стохастического дифференциального уравнения.

В ряде практически важных случаев (см. главу 2) достаточно аппроксимировать не значение $\mathbf{x}_T$ выборочной траектории решения стохастического дифференциального уравнения Ито в финальный момент времени T, а величину вида $\mathsf{M}\{g(\mathbf{x}_T)\}$ для некоторой функции $g(\mathbf{x})$, что ведет к построению так называемых слабых численных методов (их определение будет дано далее). При этом достаточно с той или иной степенью точности аппроксимировать лишь распределение случайной величины $\mathbf{x}_T$. Очевидно, что в данном случае используется меньше информации о процессе $\mathbf{x}_t$, чем в случае сильной аппроксимации. В результате при построении слабых дискретных аппроксимаций мы располагаем гораздо большим числом степеней свободы, что ведет к получению сравнительно простых численных методов.

Первые результаты по слабой аппроксимации решений стохастиче-

ских дифференциальных уравнений были получены в работах [68–70] (Г.Н. Мильштейн), [144] (D. Talay), [89] (R. Mikulevicius, E. Platen), [139] (E. Platen), [86] (P.E. Kloeden, E. Platen), [151] (Т.А. Аверина, С.С. Артемьев), а также в [97, 145, 146, 150, 152, 153].

В настоящей главе приводятся как известные, так и новые слабые численные методы решения стохастических дифференциальных уравнений Ито. При этом данная глава предназначена, скорее, для практически ориентированного читателя. Тем, кто хотел бы более детально изучить слабые численные методы решения стохастических дифференциальных уравнений, мы рекомендуем обратиться к перечисленным работам.

10.1 Слабая сходимость и тестирование слабых численных методов

Пусть $\mathbf{x}_t,\ t \in [0,T]$ — решение стохастического дифференциального уравнения (7.18). Рассмотрим разбиение $\{\tau_j\}_{j=0}^{N}$ промежутка $[0,T]$, для которого $0 = \tau_0 < \tau_1 < \ldots < \tau_N = T,\ \Delta = \max\limits_{0 \le j \le N-1} |\tau_{j+1} - \tau_j|$.

Через $\mathbf{y}_{\tau_j};\ j = 0,1,\ldots,N$ обозначим дискретную аппроксимацию процесса $\mathbf{x}_t,\ t \in [0,T]$, соответствующую максимальному шагу дискретизации Δ.

Будем говорить, что функция $F(\mathbf{x}) : \Re^n \to \Re^1$ имеет полиномиальный рост, если существуют такие постоянные $C > 0$ и $q \in N$, зависящие от $F(\mathbf{x})$, что для всех $\mathbf{x} \in \Re^n$ выполнено неравенство $|F(\mathbf{x})| \le C(1 + |\mathbf{x}|^{2q})$.

Обозначим через $C^l(\Re^n, \Re^1)$ пространство l раз непрерывно дифференцируемых функций: $g : \Re^n \to \Re^1$, которые вместе со своими частными производными до порядка l включительно возрастают полиномиально.

Дадим определение слабой сходимости дискретной аппроксимации.

Определение 10.1 [86]. *Будем говорить, что дискретная аппроксимация* $\mathbf{y}_{\tau_j};\ j = 0,1,\ldots,N$, *соответствующая максимальному шагу дискретизации* Δ, *сходится слабо при* $\Delta \downarrow 0$ *к процессу* $\mathbf{x}_t,\ t \in [0,T]$ *в момент времени* T *на классе* $\mathcal{C}$ *функций* $g(\mathbf{x}) : \Re^n \to \Re^1$, *если* $\lim\limits_{\Delta \downarrow 0} |\mathsf{M}\{g(\mathbf{x}_T)\} - \mathsf{M}\{g(\mathbf{y}_T)\}| = 0$ *для всех* $g(\mathbf{x}) \in \mathcal{C}$.

Рассмотрим определение, характеризующее скорость слабой сходимости дискретной аппроксимации.

Определение 10.2 [86]. *Будем говорить, что дискретная аппроксимация* $\mathbf{y}_{\tau_j};\ j = 0,1,\ldots,N$ *сходится слабо с порядком* $\gamma > 0$ *к про-*

цессу $\mathbf{x}_t$, $t \in [0,T]$ *в момент времени* T *при* $\Delta \downarrow 0$, *если для любой функции* $g(\mathbf{x}) \in C^{2(\gamma+1)}(\Re^n, \Re^1)$ *существуют положительная постоянная* C, *которая не зависит от* Δ, *и конечное* $\delta > 0$ *такие, что*

$$|\mathsf{M}\{g(\mathbf{x}_T)\} - \mathsf{M}\{g(\mathbf{y}_T)\}| \le C\Delta^\gamma \tag{10.1}$$

для всех $\Delta \in (0,\delta)$.

В данном определении предполагается, что узлы τ_j; $j = 0,1,\ldots,N$ неслучайны. Однако в конце данной главы будет также рассмотрен случай, когда узлы τ_j; $j = 0,1,\ldots,N$ являются случайными величинами, удовлетворяющими определенным условиям.

Настоящая глава посвящена всевозможным слабым численным методам решения стохастических дифференциальных уравнений Ито. Для этих численных методов даны теоретические оценки их скорости сходимости, т. е. приведены оценки типа (10.1).

Так же, как и в случае сильных численных методов, интерес представляет тестирование слабых численных методов. Рассмотрим теоретические основы данного вопроса.

Пусть $\mathbf{y}_T^{(k,j)}$; $k = 1,\ldots,L$; $j = 1,\ldots,M$ — независимые реализации значения дискретной аппроксимации $\mathbf{y}_{\tau_j}$; $j = 0,1,\ldots,N$ в момент времени T. Положим

$$\hat{\mu}_L^{(j)} = \frac{1}{L}\sum_{k=1}^{L} \mathbf{y}_T^{(k,j)} - \mathsf{M}\{\mathbf{x}_T\},\ \hat{\sigma}_\mu^2 = \frac{1}{M-1}\sum_{j=1}^{M}\left(\hat{\mu}_L^{(j)} - \hat{\mu}_{L,M}\right)^2,$$

$$\hat{\mu}_{L,M} = \frac{1}{LM}\sum_{k=1}^{L}\sum_{j=1}^{M} \mathbf{y}_T^{(k,j)} - \mathsf{M}\{\mathbf{x}_T\}, \tag{10.2}$$

где $\hat{\mu}_{L,M}$ и $\hat{\sigma}_\mu^2$ — оценки математического ожидания и дисперсии случайных величин $\hat{\mu}_L^{(j)}$; $j = 1,\ldots,M$ соответственно.

По аналогии с рассуждениями в разд. 7.2 построим приближенно доверительный интервал с уровнем достоверности $1-\alpha$ для $\mu \stackrel{\text{def}}{=} \mathsf{M}\{g(\mathbf{y}_T)\} - \mathsf{M}\{g(\mathbf{x}_T)\}$: $I_{L,M} = \left(\hat{\mu}_{L,M} - \Delta\hat{\mu}_{L,M},\ \hat{\mu}_{L,M} + \Delta\hat{\mu}_{L,M}\right)$, где $\Delta\hat{\mu}_{L,M} = t_{M-1}^{1-\alpha}\sqrt{\hat{\sigma}_\mu^2/M}$, т. е. приближенно (при достаточно больших L) истинное значение μ с вероятностью $1-\alpha$ лежит в интервале $I_{L,M}$; здесь коэффициент $t_{M-1}^{1-\alpha}$ определяется из статистических таблиц для t-распределения Стьюдента с $M-1$ степенью свободы и вероятностью α.

Рассмотренная схема построения доверительного интервала применена к тестированию слабых численных методов решения стохастических дифференциальных уравнений Ито в [86, 87] и будет использоваться нами в дальнейшем.

Отметим, что в данной главе в численных экспериментах так же, как и в [86], в качестве тестовых уравнений выбираем стохастические дифференциальные уравнения (7.4), (7.5) и при этом, как правило, полагаем $N = 100$, $M = 20$, $\alpha = 0.1$.

10.2 Явные слабые численные методы

10.2.1 Явный метод Эйлера

В данном разделе рассмотрим наиболее простой из слабых численных методов — метод Эйлера. Применительно к стохастическому дифференциальному уравнению (7.18) в автономном случае данный численный метод принимает вид

$$\mathbf{y}_{p+1} = \mathbf{y}_p + \mathbf{a}(\mathbf{y}_p)\Delta + \Sigma(\mathbf{y}_p)\left(\mathbf{f}_{\tau_{p+1}} - \mathbf{f}_{\tau_p}\right), \tag{10.3}$$

где введены обозначения: $\mathbf{y}_{\tau_p} \stackrel{\text{def}}{=} \mathbf{y}_p$; $\tau_p = p\Delta$; $p = 0, 1, \ldots, N$; $\Delta = \frac{T}{N}$; $\mathbf{a} : \Re^n \to \Re^1$; $\Sigma : \Re^n \to \Re^m$.

Впервые метод Эйлера (10.3) как слабый численный метод трактовался Г.Н. Мильштейном в [68].

Для слабой сходимости численной схемы (10.3) с порядком $\gamma = 1.0$ достаточно [68, 86] заменить приращение винеровского процесса $\mathbf{f}_{\tau_{p+1}} - \mathbf{f}_{\tau_p}$ случайной величиной $\Delta\tilde{\mathbf{f}}_p = (\Delta\tilde{\mathbf{f}}_p^{(1)}, \ldots, \Delta\tilde{\mathbf{f}}_p^{(m)})^{\mathsf{T}}$, каждая компонента $\Delta\tilde{\mathbf{f}}_p^{(i)}$ которой удовлетворяет следующему моментному условию:

$$\left|\mathsf{M}\left\{\Delta\tilde{\mathbf{f}}_p^{(i)}\right\}\right| + \left|\mathsf{M}\left\{\left(\Delta\tilde{\mathbf{f}}_p^{(i)}\right)^3\right\}\right| + \left|\mathsf{M}\left\{\left(\Delta\tilde{\mathbf{f}}_p^{(i)}\right)^2\right\} - \Delta\right| \le K\Delta^2, \tag{10.4}$$

где $i = 1, \ldots, m$; $K < \infty$ — постоянная, а также потребовать, чтобы $\mathbf{a}^{(i)}(\mathbf{x})$, $\Sigma^{(ik)}(\mathbf{x}) \in C^4(\Re^n, \Re^1)$; $i = 1, \ldots, n$; $k = 1, \ldots, m$, и для всех $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \Re^n$ выполнялись условия

$$|\mathbf{a}(\mathbf{x})| + \sum_{i=1}^{m} |\Sigma_i(\mathbf{x})| \le K_1(1 + |\mathbf{x}|),$$

$$|\mathbf{a}(\mathbf{x}) - \mathbf{a}(\mathbf{y})| + \sum_{i=1}^{m} |\Sigma_i(\mathbf{x}) - \Sigma_i(\mathbf{y})| \le K_1|\mathbf{x} - \mathbf{y}|,$$

где $K_1 < \infty$ — постоянная; $\Sigma_i(\mathbf{x})$ — i-й столбец матрицы $\Sigma(\mathbf{x})$. Здесь $\Delta\tilde{\mathbf{f}}_p^{(i)}$ — независимые при различных i или p и $\mathcal{F}_{\tau_{p+1}}$-измеримые случайные величины, удовлетворяющие условию (10.4).

Простым примером случайной величины $\Delta\tilde{\mathbf{f}}_p^{(i)}$ является [68, 86] дискретная случайная величина, для которой $\mathsf{P}\{\Delta\tilde{\mathbf{f}}_p^{(i)} = \pm\sqrt{\Delta}\} = 1/2$.

Нетрудно видеть, что возможен также следующий вариант выбора случайных величин $\Delta\tilde{\mathbf{f}}_p^{(i)}$: $\Delta\tilde{\mathbf{f}}_p^{(i)} \sim \mathrm{N}(0, \Delta)$.

Таким образом, в рамках сделанных допущений слабый метод Эйлера имеет порядок слабой сходимости $\gamma = 1.0$ и записывается как

$$\mathbf{y}_{p+1} = \mathbf{y}_p + \mathbf{a}(\mathbf{y}_p)\Delta + \Sigma(\mathbf{y}_p)\Delta\tilde{\mathbf{f}}_p. \tag{10.5}$$

В [86] отмечается, что переход к неавтономному случаю, т. е. когда функции $\mathbf{a}$ и Σ зависят не только от $\mathbf{x}$, но и от t, осуществляется путем рассмотрения процесса Ито размерности $n+1$, первой компонентой которого, например, является t, а последующими n компонентами — компоненты процесса $\mathbf{x}_t$. При этом сформулированные требования слабой сходимости метода Эйлера (10.3) могут быть несколько ослаблены по переменной t [86].

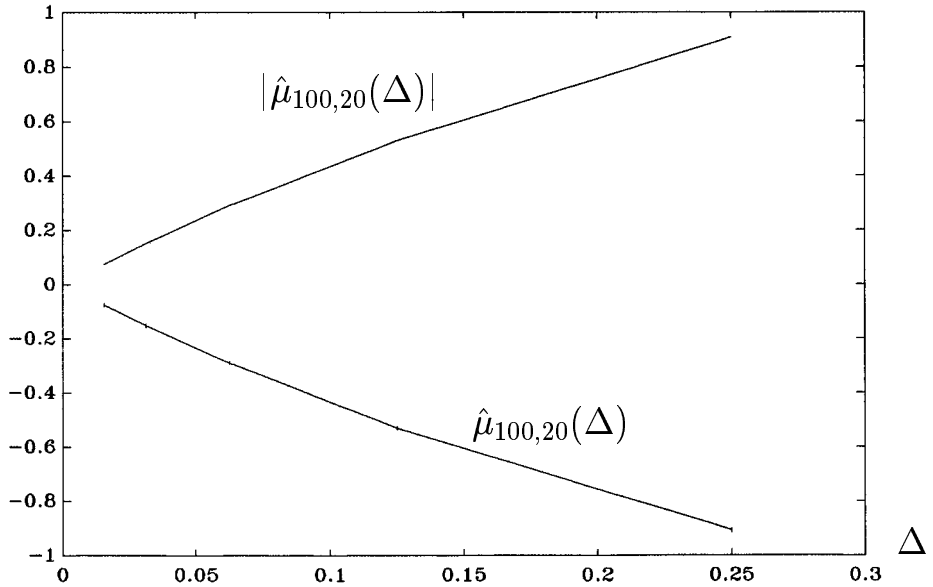

Рис. 10.1. Результат численного эксперимента 10.1.

Численный эксперимент 10.1[2] (рис. 10.1). *Для стохастического дифференциального уравнения Ито*

$$dx_t = ax_t dt + bx_t df_t, \;\; x_0 = 1, \;\; t \in [0, T], \;\; f_t \in \Re^1, \tag{10.6}$$

смоделировать 2000 ($M = 20$ *групп по* $N = 100$ *реализаций*) *независимых реализаций случайной величины* x_T *при* $T = 1$, $a = 1.5$, $b = 0.05$,

[2]Если не оговаривается противное, то для моделирования повторных стохастических интегралов Ито при реализации слабых численных методов главы 10 используются гауссовские случайные величины.

$\Delta = 2^{-2}$ *с помощью явного слабого метода Эйлера* (10.5). *Вычислить оценку* $\hat{\mu}_{100,20}$ *ошибки* $\mu = \mathsf{M}\{y_T\} - \mathsf{M}\{x_T\}$ *по формуле* (10.2), *учитывая, что* $\mathsf{M}\{x_T\} = x_0 e^{aT}$ (y_T *определяется из* (10.5)). *Построить* 90%*-й доверительный интервал для* μ. *Повторить вычисления при* $\Delta = 2^{-j}$; $j = 3, 4, 5, 6$ *и изобразить графически зависимости* $\hat{\mu}_{100,20}(\Delta)$ *и* $|\hat{\mu}_{100,20}(\Delta)|$, *а также* 90%*-е доверительные интервалы для* μ *при указанных значениях* Δ.

В [86, 89] показано, что при несколько более слабых условиях, нежели сформулированные ранее, метод Эйлера сходится слабо с порядком $\gamma \in (0, 1)$. Приведем формулировку соответствующего утверждения [86, 89] в случае скалярного винеровского процесса ($m = 1$) и $\Sigma(\mathbf{x}, t) : \Re^n \times [0, T] \to \Re^n$, $n \geq 1$.

Будем говорить, что функция $h(\mathbf{x}) : \Re^d \to \Re^1$ является гельдеровой с показателем $\alpha \in (0, 1)$, если существует положительная постоянная K такая, что для всех $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \Re^d$ выполнено: $|h(\mathbf{x}) - h(\mathbf{y})| \leq K|\mathbf{x} - \mathbf{y}|^\alpha$.

Введем обозначения [86]:

$$\partial_{\mathbf{x}}^{\eta} \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\partial^{\eta_1}}{\partial(\mathbf{x}^{(1)})^{\eta_1}} \dots \frac{\partial^{\eta_n}}{\partial(\mathbf{x}^{(n)})^{\eta_n}}, \ \eta = \sum_{i=1}^{n} \eta_i \geq 1, \ \partial_t^0 = \partial_{\mathbf{x}}^0 \stackrel{\text{def}}{=} \cdot, \ \partial_t^k \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\partial^k}{\partial t^k},$$

где $\mathbf{x} = (\mathbf{x}^{(1)} \dots \mathbf{x}^{(n)})^{\mathsf{T}}$; $\eta_i = 0, 1, \dots$; $i = 1, \dots, n$; $k = 1, 2, \dots$.

Обозначим через $H_l([0, T])$ пространство функций $h : \Re^n \times [0, T] \to \Re^1$, для которых частные производные $\partial_t^q \partial_{\mathbf{x}}^g h$ являются гельдеровыми с показателями $l - [l]$ по $\mathbf{x}$ и $(l - 2q - g)/2$ по t для таких q и g, что $2q + g \leq l$; здесь $l \in \bigcup\limits_{i=0}^{2} (i, i + 1)$ ($[l]$ — целая часть числа l).

Через H_l будем обозначать пространство всех функций $h \in H_l([0, T])$, которые не зависят от t.

Теорема 10.1 [86, 89]. *Пусть выполнены следующие условия:*

1. *Процесс* $\mathbf{x}_t$, $t \in [0, T]$ *— решение стохастического дифференциального уравнения Ито* (7.18) *при* $m = 1$ ($\Sigma(\mathbf{x}, t) : \Re^n \times [0, T] \to \Re^n$), *для которого* $\mathsf{M}\{|\mathbf{x}_T|^k\} < \infty$; $k = 1, 2, \dots$

2. *Величина* $\big(\Sigma(\mathbf{x}, t)\Sigma^{\mathsf{T}}(\mathbf{x}, t)\mathbf{z}, \mathbf{z}\big) \geq C|\mathbf{z}|^2$ *для всех* $t \in [0, T]$; $\mathbf{x}, \mathbf{z} \in \Re^n$ *и некоторой положительной постоянной* C (*здесь* $(\cdot, \cdot)$ *— скалярное произведение*).

3. *Функции* $\mathbf{a}(\mathbf{x}, t), \Sigma(\mathbf{x}, t) \in H_l([0, T])$ *для некоторого* $l \in \bigcup\limits_{i=0}^{2} (i, i+1)$.

4. $g(\mathbf{x}) : \Re^n \to \Re^1$ *— функция из пространства* H_{l+2}.

5. $\mathbf{y}_t$, $t \in [0, T]$, *— случайный процесс, определенный равенством*

$$\mathbf{y}_t = \mathbf{y}_{\tau_p} + \mathbf{a}(\mathbf{y}_{\tau_p}, \tau_p)(t - \tau_p) + \Sigma(\mathbf{y}_{\tau_p}, \tau_p)(\mathbf{f}_t - \mathbf{f}_{\tau_p}),$$

где $t \in [\tau_p, \tau_{p+1}]$; $p = 0, 1, \ldots, N$; $\tau_p = p\Delta$; $\Delta = T/N$.

Тогда $|\mathsf{M}\{g(\mathbf{x}_T)\} - \mathsf{M}\{g(\mathbf{y}_T)\}| \le K\Delta^{r(l)}$, *где*

$$r(l) = \begin{cases} l/2 & \text{при } l \in (0,1) \\ 1/(3-l) & \text{при } l \in (1,2) \\ 1 & \text{при } l \in (2,3) \end{cases},$$

а $K < \infty$ *— постоянная, которая не зависит от* Δ.

10.2.2 Метод порядка точности 2.0

В этом разделе рассмотрим полученные в [68] (Г.Н. Мильштейн) и [144] (D. Talay) слабые численные методы порядка точности 2.0.

Для построения данных численных методов воспользуемся разложением Тейлора–Ито в форме Вагнера и Платена вида (4.12) при $s = \tau_{p+1}$, $t = \tau_p$, $r = 2$, $R(\mathbf{x}, t) \equiv \mathbf{x}$. После отбрасывания остаточного члена в этом разложении получим

$$\mathbf{y}_{p+1} = \mathbf{y}_p + {}^{(1)}G_0\{\mathbf{y}_p\} \overset{1}{\cdot} {}^{(1)}J_{(1)\tau_{p+1},\tau_p} + L\{\mathbf{y}_p\}\Delta + + {}^{(2)}G_0 G_0\{\mathbf{y}_p\} \overset{2}{\cdot} {}^{(2)}J_{(11)\tau_{p+1},\tau_p}$$

$$+ {}^{(1)}LG_0\{\mathbf{y}_p\} \overset{1}{\cdot} {}^{(1)}J_{(01)\tau_{p+1},\tau_p} + {}^{(1)}G_0 L\{\mathbf{y}_p\} \overset{1}{\cdot} {}^{(1)}J_{(10)\tau_{p+1},\tau_p} + \frac{\Delta^2}{2}L^2\{\mathbf{y}_p\}, \quad (10.7)$$

где $\mathbf{y}_{\tau_p} \overset{\text{def}}{=} \mathbf{y}_p$.

Запишем (10.7) в развернутой форме и заменим повторные стохастические интегралы Ито, входящие в (10.7), на подобранные таким образом аппроксимации (6.194), (6.195), что при определенных условиях (см. теорему 10.2) на функции $\mathbf{a}(\mathbf{x}), \Sigma(\mathbf{x})$ полученная численная схема имела бы порядок слабой сходимости 2.0. В результате придем к следующему численному методу [68, 86, 144]:

$$\mathbf{y}_{p+1} = \mathbf{y}_p + \mathbf{a}\Delta + \sum_{i_1=1}^{m} \Sigma_{i_1}\Delta\tilde{\mathbf{f}}_p^{(i_1)} + \frac{1}{2}\sum_{i_1,i_2=1}^{m} G_0^{(i_2)}\Sigma_{i_1}\left(\Delta\tilde{\mathbf{f}}_p^{(i_1)}\Delta\tilde{\mathbf{f}}_p^{(i_2)} + V_p^{(i_1 i_2)}\right)$$

$$+\frac{1}{2}\Delta\sum_{i_1=1}^{m}\left(L\Sigma_{i_1} + G_0^{(i_1)}\mathbf{a}\right)\Delta\tilde{\mathbf{f}}_p^{(i_1)} + \frac{\Delta^2}{2}L\mathbf{a}, \quad (10.8)$$

где функции $\mathbf{a}, \Sigma_{i_1}$, $G_0^{(i_2)}\Sigma_{i_1}$, $L\Sigma_{i_1}$, $G_0^{(i_1)}\mathbf{a}$ вычислены в точке $(\mathbf{y}_p, \tau_p)$; $\Delta\tilde{\mathbf{f}}_p^{(i)}$ — независимые при различных $p = 0, 1, \ldots, N$ или $i = 1, \ldots, m$ случайные величины, удовлетворяющие условию

$$\left|\mathsf{M}\left\{\Delta\tilde{\mathbf{f}}_p^{(i)}\right\}\right| + \left|\mathsf{M}\left\{\left(\Delta\tilde{\mathbf{f}}_p^{(i)}\right)^3\right\}\right| + \left|\mathsf{M}\left\{\left(\Delta\tilde{\mathbf{f}}_p^{(i)}\right)^5\right\}\right| +$$

$$+\left|\mathsf{M}\left\{\left(\Delta\tilde{\mathbf{f}}_p^{(i)}\right)^2\right\}-\Delta\right|+\left|\mathsf{M}\left\{\left(\Delta\tilde{\mathbf{f}}_p^{(i)}\right)^4\right\}-3\Delta^2\right|\le K\Delta^3, \qquad (10.9)$$

где $i=1,\ldots,m$; $K<\infty$ — постоянная; $V_p^{(i_1i_2)}$ — независимые при различных $i_2=1,\ldots,i_1-1$; $i_1=1,\ldots,m$ или $p=0,1,\ldots,N$ дискретные случайные величины, для которых $\mathsf{P}\{V_p^{(i_1i_2)}=\pm\Delta\}=1/2$, причем $V_p^{(i_1i_1)}=-\Delta$ и $V_p^{(i_1i_2)}=-V_p^{(i_2i_1)}$ при $i_2=i_1+1,\ldots,m$ и $i_1=1,\ldots,m$.

Известно [68, 86, 144], что одним из возможных вариантов выбора случайных величин $\Delta\mathbf{f}_p^{(i)}$, удовлетворяющих условию (10.9), является случайная величина, для которой $\mathsf{P}\{\Delta\tilde{\mathbf{f}}_p^{(i)}=\pm\sqrt{3\Delta}\}=1/6$, $\mathsf{P}\{\Delta\tilde{\mathbf{f}}_p^{(i)}=0\}=2/3$.

Отметим, что гауссовская случайная величина с нулевым математическим ожиданием и дисперсией Δ также удовлетворяет условию (10.9).

Рассмотрим случай $m=1$. Тогда (10.7) перепишем в виде

$$\mathbf{y}_{p+1}=\mathbf{y}_p+\Sigma\Delta f_{\tau_p}+\mathbf{a}\Delta+\frac{1}{2}G_0\Sigma\left(\left(\Delta f_{\tau_p}\right)^2-\Delta\right)+$$

$$+G_0\mathbf{a}J_{(10)\tau_{p+1},\tau_p}+L\Sigma J_{(01)\tau_{p+1},\tau_p}+\frac{\Delta^2}{2}L\mathbf{a}, \qquad (10.10)$$

где $\Sigma:\Re^n\times[0,T]\to\Re^n$; функции $\Sigma,\mathbf{a},G_0\Sigma,G_0\mathbf{a}$, $L\Sigma$, $L\mathbf{a}$ вычислены в точке $(\mathbf{y}_p,\tau_p)$; $\Delta f_{\tau_p}=f_{\tau_{p+1}}-f_{\tau_p}$ — приращение скалярного винеровского процесса f_t;

$$J_{(10)\tau_{p+1},\tau_p}=\int\limits_{\tau_p}^{\tau_{p+1}}\int\limits_{\tau_p}^{s}df_\theta ds,\ \ J_{(01)\tau_{p+1},\tau_p}=\int\limits_{\tau_p}^{\tau_{p+1}}\int\limits_{\tau_p}^{s}d\theta df_s.$$

Численная схема (10.10) была предложена Г.Н. Мильштейном [68].

Рассмотрим различные способы численного моделирования стохастических интегралов, входящих в (10.10). Поскольку

$$J_{(01)\tau_{p+1},\tau_p}=\Delta\cdot\Delta f_{\tau_p}-J_{(10)\tau_{p+1},\tau_p}\ \text{с в.1}, \qquad (10.11)$$

то для численного моделирования стохастических интегралов, входящих в правую часть (10.10), достаточно смоделировать две гауссовские коррелированные случайные величины: Δf_{τ_p}, $J_{(01)\tau_{p+1},\tau_p}$. Это можно сделать, например, по следующим формулам:

$$\Delta f_{\tau_p}=\sqrt{\Delta}\zeta_p^{(1)},\ \ J_{(01)\tau_{p+1},\tau_p}=\frac{1}{2}\Delta^{\frac{3}{2}}\left(\zeta_p^{(1)}+\frac{1}{\sqrt{3}}\zeta_p^{(2)}\right), \qquad (10.12)$$

где $\zeta_p^{(i)}$; $i=1,2$ — независимые при различных p или i стандартные гауссовские случайные величины.

Интересным представляется тот факт, что формулы (10.12) есть не что иное, как результат применения метода аппроксимации повторных стохастических интегралов Ито, основанного на кратных рядах Фурье по полиномам Лежандра, к паре стохастических интегралов Ито

$$\int\limits_{\tau_p}^{\tau_{p+1}} df_s, \quad \int\limits_{\tau_p}^{\tau_{p+1}} (s-\tau_p) df_s$$

(ср. с формулами (6.37), (6.38)).

Возможен также и другой вариант [86] совместного численного моделирования случайных величин Δf_{τ_p}, $J_{(01)\tau_{p+1},\tau_p}$. Вместо Δf_{τ_p} можно взять $\Delta\tilde{f}_p$, а вместо $J_{(01)\tau_{p+1},\tau_p}$ — $\frac{1}{2}\Delta\left(\Delta\tilde{f}_p\right)$, где $\Delta\tilde{f}_p$ — $\mathcal{F}_{\tau_{p+1}}$-измеримая случайная величина, удовлетворяющая условию типа (10.9). Способы выбора данной случайной величины рассмотрены ранее.

Выпишем варианты численной схемы (10.10) для указанных двух способов численного моделирования пары случайных величин Δf_{τ_p}, $J_{(01)\tau_{p+1},\tau_p}$:

$$\mathbf{y}_{p+1} = \mathbf{y}_p + \Sigma\sqrt{\Delta}\zeta_p^{(1)} + \mathbf{a}\Delta + \frac{1}{2}\Delta G_0\Sigma\left(\left(\zeta_p^{(1)}\right)^2 - 1\right) + \frac{1}{2}\Delta^2 L\mathbf{a} +$$

$$+\frac{1}{2}\Delta^{\frac{3}{2}}\left(G_0\mathbf{a}\left(\zeta_p^{(1)} - \frac{1}{\sqrt{3}}\zeta_p^{(2)}\right) + L\Sigma\left(\zeta_p^{(1)} + \frac{1}{\sqrt{3}}\zeta_p^{(2)}\right)\right), \tag{10.13}$$

$$\mathbf{y}_{p+1} = \mathbf{y}_p + \Sigma\Delta\tilde{f}_p + \mathbf{a}\Delta + \frac{1}{2}G_0\Sigma\left(\left(\Delta\tilde{f}_p\right)^2 - \Delta\right) + \frac{1}{2}\Delta^2 L\mathbf{a} +$$

$$+\frac{1}{2}\Delta\left(G_0\mathbf{a} + L\Sigma\right)\Delta\tilde{f}_p. \tag{10.14}$$

В заключение приведем формулировку теоремы о слабой сходимости численной схемы (10.8). Результат такого характера впервые был получен в [144] (D. Talay).

Теорема 10.2 [68, 86, 144]. *Пусть в автономном случае* $\mathbf{y}_0$ *и* $\mathbf{x}_0$ *имеют одинаковое распределение со всеми конечными моментами, т. е.* $\mathsf{M}\{|\mathbf{y}_0|^i\} < \infty$, $\mathsf{M}\{|\mathbf{x}_0|^i\} < \infty$; $i = 1, 2, \ldots$. *Пусть также функции* $\mathbf{a}(\mathbf{x})$, $\Sigma(\mathbf{x})$ *шесть раз непрерывно дифференцируемы, причем все производные ограничены и для всех* $\mathbf{x} \in \Re^n$: $\left|\Sigma^{(kj)}(\mathbf{x})\Sigma^{(lj)}(\mathbf{x})\right| \le K(1+|\mathbf{x}|)$, *где* $k, l = 1, \ldots, n$; $j = 1, \ldots, m$; $K < \infty$ — *постоянная. Тогда численные схемы* (10.8), (10.10), (10.13), (10.14) *являются слабыми численными схемами порядка точности* 2.0.

Переход к неавтономному случаю осуществляется путем увеличения размерности процесса Ито на единицу так, что, например, его

первой компонентой является t, а последующими n компонентами — компоненты процесса $\mathbf{x}_t$.

Численный эксперимент 10.2 (рис. 10.2). *Повторить численный эксперимент* 10.1 *для явного слабого численного метода порядка точности* 2.0 *вида* (10.14) *при* $\Delta = 2^{-j}$; $j = 3, 4, 5, 6$.

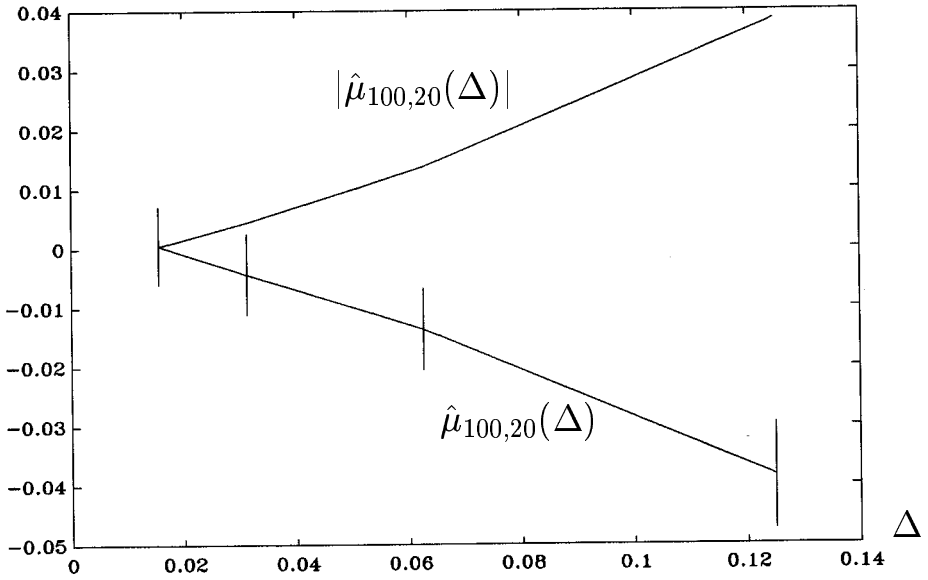

Рис. 10.2. Результат численного эксперимента 10.2.

10.2.3 Методы порядка точности 3.0

В данном разделе рассмотрим варианты слабого численного метода порядка точности 3.0. Слабый численный метод порядка точности 3.0 решения скалярного стохастического дифференциального уравнения Ито ($n = 1$) со скалярным шумом ($m = 1$) получен в [139], а слабый численный метод порядка точности 3.0 решения векторного стохастического дифференциального уравнения ($n > 1$) с векторным ($m > 1$), но аддитивным шумом содержится в [70].

В качестве основы построения слабого численного метода порядка точности 3.0 возьмем разложение Тейлора–Ито в форме Вагнера и Платена вида (4.12) при $s = \tau_{p+1}$, $t = \tau_p$, $r = 3$, $R(\mathbf{x}, t) \equiv \mathbf{x}$. После отбрасывания остаточного члена в этом разложении получим

$$\mathbf{y}_{p+1} = \mathbf{y}_p + {}^{(1)}G_0\{\mathbf{y}_p\} \overset{1}{\cdot} {}^{(1)}J_{(1)\tau_{p+1},\tau_p} + L\{\mathbf{y}_p\}\Delta +$$

$$+ {}^{(2)}G_0 G_0\{\mathbf{y}_p\} \overset{2}{\cdot} {}^{(2)}J_{(11)\tau_{p+1},\tau_p} + {}^{(1)}LG_0\{\mathbf{y}_p\} \overset{1}{\cdot} {}^{(1)}J_{(01)\tau_{p+1},\tau_p} +$$

$$+^{(1)}G_0L\{\mathbf{y}_p\}\overset{1}{\cdot}{}^{(1)}J_{(10)\tau_{p+1},\tau_p}+\frac{\Delta^2}{2}L^2\{\mathbf{y}_p\}+\frac{\Delta^3}{6}L^3\{\mathbf{y}_p\}+$$

$$+^{(3)}G_0G_0G_0\{\mathbf{y}_p\}\overset{3}{\cdot}{}^{(3)}J_{(111)\tau_{p+1},\tau_p}+{}^{(2)}G_0G_0L\{\mathbf{y}_p\}\overset{2}{\cdot}{}^{(2)}J_{(110)\tau_{p+1},\tau_p}+$$

$$+^{(2)}G_0LG_0\{\mathbf{y}_p\}\overset{2}{\cdot}{}^{(2)}J_{(101)\tau_{p+1},\tau_p}+{}^{(2)}LG_0G_0\{\mathbf{y}_p\}\overset{2}{\cdot}{}^{(2)}J_{(011)\tau_{p+1},\tau_p}+$$

$$+^{(1)}L^2G_0\{\mathbf{y}_p\}\overset{1}{\cdot}{}^{(1)}J_{(001)\tau_{p+1},\tau_p}+{}^{(1)}LG_0L\{\mathbf{y}_p\}\overset{1}{\cdot}{}^{(1)}J_{(010)\tau_{p+1},\tau_p}+$$

$$+^{(1)}G_0L^2\{\mathbf{y}_p\}\overset{1}{\cdot}{}^{(1)}J_{(100)\tau_{p+1},\tau_p}, \qquad (10.15)$$

где $\mathbf{y}_{\tau_p}\stackrel{\text{def}}{=}\mathbf{y}_p$.

Рассмотрим формулу (10.15) при $m=n=1$ и заменим в ней повторные стохастические интегралы Ито на специальные слабые аппроксимации (см. разд. 6.14), которые при определенных дополнительных условиях (см. теорему 10.3) обеспечат слабую сходимость порядка 3.0 соответствующей численной схемы. В результате получим следующий численный метод [86, 139]:

$$\mathbf{y}_{p+1}=\mathbf{y}_p+\Sigma\Delta f_{\tau_p}+\mathbf{a}\Delta+\frac{1}{2}G_0\Sigma\left(\left(\Delta f_{\tau_p}\right)^2-\Delta\right)+$$

$$+G_0\mathbf{a}J_{(10)\tau_{p+1},\tau_p}+L\Sigma\left(\Delta\cdot\Delta f_{\tau_p}-J_{(10)\tau_{p+1},\tau_p}\right)+\frac{\Delta^2}{2}L\mathbf{a}+$$

$$+\frac{1}{6}\left(L^2\Sigma+LG_0\mathbf{a}+G_0L\mathbf{a}\right)\Delta^2\cdot\Delta f_{\tau_p}+$$

$$+\frac{1}{6}\left(G_0G_0\mathbf{a}+G_0L\Sigma+LG_0\Sigma\right)\Delta\left(\left(\Delta f_{\tau_p}\right)^2-\Delta\right)+$$

$$+\frac{\Delta^3}{6}L^2\mathbf{a}+\frac{1}{6}G_0G_0\Sigma\left(\left(\Delta f_{\tau_p}\right)^2-3\Delta\right)\Delta f_{\tau_p}, \qquad (10.16)$$

где $\mathbf{a},\Sigma:\Re^1\times[0,T]\to\Re^1$, функции $\mathbf{h}$, $G_0\mathbf{h}$, $L\mathbf{h}$, $G_0G_0\mathbf{h}$, $G_0L\mathbf{h}$, $LG_0\mathbf{h}$, $L^2\mathbf{h}$ ($\mathbf{h}=\mathbf{a}$ или Σ) вычислены в точке $(\mathbf{y}_p,\tau_p)$; Δf_{τ_p} и $J_{(10)\tau_{p+1},\tau_p}$ — коррелированные гауссовские случайные величины вида

$$\Delta f_{\tau_p}=\int\limits_{\tau_p}^{\tau_{p+1}}df_s,\ \ J_{(10)\tau_{p+1},\tau_p}=\int\limits_{\tau_p}^{\tau_{p+1}}\int\limits_{\tau_p}^{s}df_\theta ds,$$

которые могут быть смоделированы численно с помощью формул (10.11), (10.12) или (6.197), (6.198).

Г.Н. Мильштейном [70] рассмотрен вариант слабого численного метода порядка точности 3.0 в случае аддитивного шума при $n,m>1$,

т. е. когда $\Sigma : [0,T] \to \Re^{n\times m}$. Приведем выражение данного численного метода [70]:

$$\mathbf{y}_{p+1} = \mathbf{y}_p + \mathbf{a}\Delta + \sum_{i_1=1}^{m} \Sigma_{i_1} \Delta \mathbf{f}_{\tau_p}^{(i_1)} + \frac{\Delta^2}{2} L\mathbf{a} + \frac{\Delta^3}{6} L^2\mathbf{a} +$$

$$+ \sum_{i_1=1}^{m} \left(L\Sigma_{i_1} \left(\Delta \cdot \Delta \mathbf{f}_{\tau_p}^{(i_1)} - J_{(10)\tau_{p+1},\tau_p}^{(i_1)} \right) + G_0^{(i_1)} \mathbf{a} J_{(10)\tau_{p+1},\tau_p}^{(i_1)} + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{6} \left(L^2 \Sigma_{i_1} + L G_0^{(i_1)} \mathbf{a} + G_0^{(i_1)} L\mathbf{a} \right) \Delta^2 \cdot \Delta \mathbf{f}_{\tau_p}^{(i_1)} \right) +$$

$$+ \frac{1}{6} \sum_{i_1,i_2=1}^{m} G_0^{(i_2)} G_0^{(i_1)} \mathbf{a} \left(\Delta \mathbf{f}_{\tau_p}^{(i_1)} \Delta \mathbf{f}_{\tau_p}^{(i_2)} - \mathbf{1}_{\{i_1=i_2\}} \Delta \right) \Delta, \qquad (10.17)$$

где коррелированные гауссовские случайные величины

$$J_{(1)\tau_{p+1},\tau_p}^{(i)} = \Delta \mathbf{f}_{\tau_p}^{(i)} = \int_{\tau_p}^{\tau_{p+1}} d\mathbf{f}_s^{(i)}, \ J_{(10)\tau_{p+1},\tau_p}^{(i)} = \int_{\tau_p}^{\tau_{p+1}} \int_{\tau_p}^{s} d\mathbf{f}_\theta^{(i)} ds; \ i = 1,\ldots,m$$

могут быть смоделированы численно по формулам

$$\hat{J}_{(1)\tau_{p+1},\tau_p}^{(i)} = \sqrt{\Delta} \zeta_p^{(i)}, \ \hat{J}_{(10)\tau_{p+1},\tau_p}^{(i)} = \frac{1}{2} \Delta^{\frac{3}{2}} \left(\zeta_p^{(i)} - \frac{1}{\sqrt{3}} \eta_p^{(i)} \right), \qquad (10.18)$$

или по формулам

$$\hat{J}_{(1)\tau_{p+1},\tau_p}^{(i)} = \Delta \tilde{\mathbf{f}}_p^{(i)}, \ \hat{J}_{(10)\tau_{p+1},\tau_p}^{(i)} = \Delta \hat{\mathbf{f}}_p^{(i)}, \qquad (10.19)$$

где $\zeta_p^{(i)}, \eta_p^{(i)}$; $i = 1,\ldots,m$; $p = 0,1,\ldots,N$ — независимые в совокупности стандартные гауссовские случайные величины; $\Delta \tilde{\mathbf{f}}_p^{(i)}$; $\Delta \hat{\mathbf{f}}_p^{(i)}$; $i = 1,\ldots,m$; $p = 0,1,\ldots,N$ — попарно независимые при различных i случайные величины, для которых $\Delta \tilde{\mathbf{f}}_p^{(i)} \sim \mathrm{N}(0,\Delta)$, $\Delta \hat{\mathbf{f}}_p^{(i)} \sim \mathrm{N}(0,\frac{1}{3}\Delta^3)$, $\mathsf{M}\{\Delta \tilde{\mathbf{f}}_p^{(i)} \Delta \hat{\mathbf{f}}_p^{(i)}\} = \frac{1}{2}\Delta^2$. Нетрудно видеть, что аппроксимации (10.18) являются частным случаем аппроксимаций (10.19).

Условия, при которых численный метод (10.17) имеет порядок слабой сходимости 3.0, даются теоремой 10.3 ([86, теорема 14.5.2. С. 474]).

Численный эксперимент 10.3 (рис. 10.3). *Повторить численный эксперимент* 10.1 *для явного слабого численного метода порядка точности* 3.0 *вида* (10.16) *при* $\Delta = 2^{-j}$; $j = 1,\ldots,6$. *При этом не моделировать те повторные стохастические интегралы Ито, коэффициенты перед которыми оказываются равными нулю после применения численного метода* (10.16) *к уравнению* (10.6) *и приведения подобных слагаемых.*

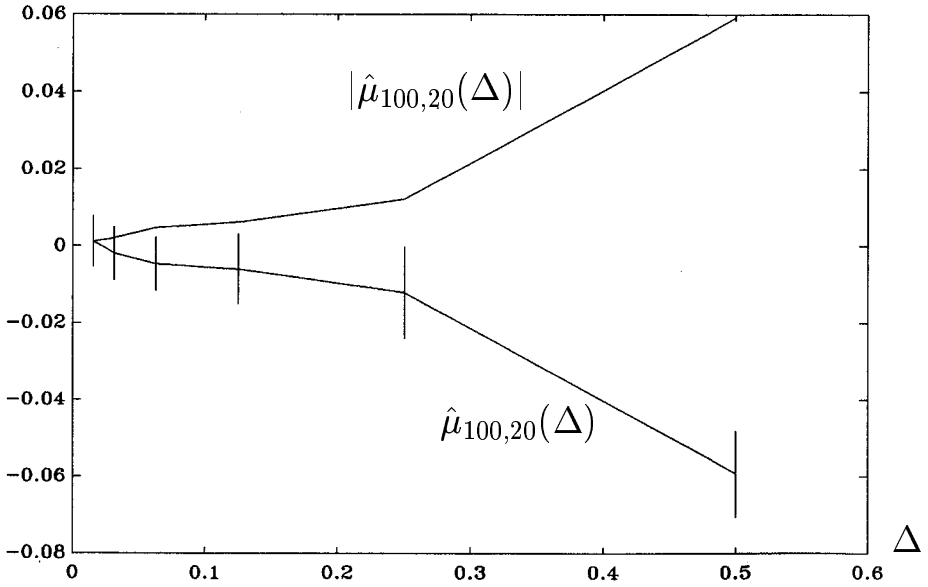

Рис.10. 3. Результат численного эксперимента 10.3.

10.2.4 Методы порядка точности 4.0

Приведем слабый численный метод порядка точности 4.0 для скалярного случая ($n = m = 1$) с аддитивным шумом ($\Sigma : [0, T] \to \Re^1$), который получен в [87]. Этот численный метод имеет следующий вид:

$$\mathbf{y}_{p+1} = \mathbf{y}_p + \mathbf{a}\Delta + \Sigma\Delta f_{\tau_p} + \frac{\Delta^2}{2} L\mathbf{a} + G_0\mathbf{a} J_{(10)\tau_{p+1},\tau_p} + L\Sigma\left(\Delta \cdot \Delta f_{\tau_p} - J_{(10)\tau_{p+1},\tau_p}\right)$$

$$+\frac{1}{6}\left(L^2\Sigma + LG_0\mathbf{a}\right)\Delta^2 \cdot \Delta f_{\tau_p} + G_0 L\mathbf{a}\left(\Delta J_{(10)\tau_{p+1},\tau_p} - \frac{1}{6}\Delta^3 \cdot \Delta f_{\tau_p}\right) +$$

$$+G_0 G_0\mathbf{a}\left(2\Delta f_{\tau_p} J_{(10)\tau_{p+1},\tau_p} - \frac{5}{6}\left(\Delta f_{\tau_p}\right)^2\Delta - \frac{1}{6}\Delta^2\right) + \frac{\Delta^3}{6} L^2\mathbf{a} +$$

$$+\frac{\Delta^4}{24} L^3\mathbf{a} + \frac{1}{24}\left(G_0 L^2\mathbf{a} + LG_0 L\mathbf{a} + L^2 G_0\mathbf{a} + L^3\Sigma\right)\Delta^3 \cdot \Delta f_{\tau_p} +$$

$$+\frac{1}{24}\left(G_0 G_0 L\mathbf{a} + LG_0 G_0\mathbf{a} + G_0 L G_0\mathbf{a}\right)\left(\left(\Delta f_{\tau_p}\right)^2 - \Delta\right)\Delta^2 +$$

$$+\frac{1}{24} G_0 G_0 G_0\mathbf{a}\Delta f_{\tau_p}\left(\left(\Delta f_{\tau_p}\right)^2 - 3\Delta\right)\Delta, \qquad (10.20)$$

где коррелированные гауссовские случайные величины Δf_{τ_p}, $J_{(10)\tau_{p+1},\tau_p}$ такие же, как и в предыдущем разделе.

В [86] рассматривается другой вариант численного метода (10.20).

Сравнительная простота численной схемы (10.20) объясняется тем, что в силу аддитивности стохастического возмущения значительная

часть повторных стохастических интегралов Ито кратностей 2 – 4 из разложения Тейлора–Ито (4.12) при $r = 4$ в правой части (10.20) (коэффициентные функции перед этими стохастическими интегралами равны нулю) отсутствует.

Откажемся теперь от предположения аддитивности шума и будем считать, что $\Sigma = \Sigma(\mathbf{x}, t) : \Re^n \times [0, T] \to \Re^n$; $m = 1, n \geq 1$. Построим слабый численный метод порядка точности 4.0 решения стохастического дифференциального уравнения Ито (7.18) в этом случае.

Согласно теореме 10.3 (см. также теорему 14.5.2, [86. С. 474]) для построения слабого численного метода порядка точности 4.0 решения стохастического дифференциального уравнения Ито (7.18) необходимо использовать разложение Тейлора–Ито в форме Вагнера и Платена (4.12) при $r = 4$, т. е. разложение, включающее в себя подлежащие аппроксимации повторные стохастические интегралы Ито кратностей 1 – 4. Число этих стохастических интегралов Ито равно 26. Если вместо разложения Тейлора–Ито в форме Вагнера и Платена (4.12) при $r = 4$ использовать унифицированное разложение Тейлора–Ито (4.57) при $r = 4$, то число подлежащих аппроксимации повторных стохастических интегралов Ито можно сократить до 15.

Рассмотрим унифицированное разложение Тейлора–Ито (4.57) при $r = 4$, отбросим в нем остаточный член в интегральной форме и заменим входящие в него повторные стохастические интегралы Ито на их аппроксимации. В результате получим численный метод вида [100]

$$\mathbf{y}_{p+1} = \mathbf{y}_p + \Delta\mathbf{a} + \Sigma\hat{I}_{0_{\tau_{p+1},\tau_p}} + \frac{\Delta^2}{2}L\mathbf{a}+$$

$$+G_1\mathbf{y}_p\hat{I}_{1_{\tau_{p+1},\tau_p}} + \Delta G_0\mathbf{a}\hat{I}_{0_{\tau_{p+1},\tau_p}} + G_0\Sigma\hat{I}_{00_{\tau_{p+1},\tau_p}} + G_0G_0\Sigma\hat{I}_{000_{\tau_{p+1},\tau_p}}+$$

$$+\Delta G_1\mathbf{a}\hat{I}_{1_{\tau_{p+1},\tau_p}} + \frac{\Delta^2}{2}G_0L\mathbf{a}\hat{I}_{0_{\tau_{p+1},\tau_p}} + G_2\mathbf{y}_p\hat{I}_{2_{\tau_{p+1},\tau_p}} + G_1\Sigma\hat{I}_{10_{\tau_{p+1},\tau_p}}+$$

$$+G_0G_1\mathbf{y}_p\hat{I}_{01_{\tau_{p+1},\tau_p}} + \Delta G_0G_0\mathbf{a}\hat{I}_{00_{\tau_{p+1},\tau_p}} + \frac{\Delta^3}{6}LL\mathbf{a} + \frac{\Delta^4}{24}LLL\mathbf{a}+$$

$$+\frac{\Delta^3}{6}G_0LL\mathbf{a}\hat{I}_{0_{\tau_{p+1},\tau_p}} + \frac{\Delta^2}{2}G_1L\mathbf{a}\hat{I}_{1_{\tau_{p+1},\tau_p}} + \Delta G_2\mathbf{a}\hat{I}_{2_{\tau_{p+1},\tau_p}}+$$

$$+G_3\mathbf{y}_p\hat{I}_{3_{\tau_{p+1},\tau_p}} + G_1G_1\mathbf{y}_p\hat{I}_{11_{\tau_{p+1},\tau_p}} + G_2\Sigma\hat{I}_{20_{\tau_{p+1},\tau_p}} + G_0G_2\mathbf{y}_p\hat{I}_{02_{\tau_{p+1},\tau_p}}+$$

$$+\Delta G_1G_0\mathbf{a}\hat{I}_{10_{\tau_{p+1},\tau_p}} + \Delta G_0G_1\mathbf{a}\hat{I}_{01_{\tau_{p+1},\tau_p}} + \frac{\Delta^2}{2}G_0G_0L\mathbf{a}\hat{I}_{00_{\tau_{p+1},\tau_p}}+$$

$$+\Delta G_0G_0G_0\mathbf{a}\hat{I}_{000_{\tau_{p+1},\tau_p}} + G_1G_0\Sigma\hat{I}_{100_{\tau_{p+1},\tau_p}} + G_0G_1\Sigma\hat{I}_{010_{\tau_{p+1},\tau_p}}+$$

$$+G_0G_0G_1\mathbf{y}_p\hat{I}_{001_{\tau_{p+1},\tau_p}}+G_0G_0G_0\Sigma\hat{I}_{0000_{\tau_{p+1},\tau_p}}, \qquad (10.21)$$

где

$$G_1=G_0L-LG_0;\ G_2=\frac{1}{2}G_0LL-LG_0L+\frac{1}{2}LLG_0;$$

$$G_3=\frac{1}{6}G_0LLL-\frac{1}{2}LG_0LL+\frac{1}{2}LLG_0L-\frac{1}{6}LLLG_0;$$

$L\mathbf{y}_p=\mathbf{a}(\mathbf{y}_p,\tau_p)$, $G_0\mathbf{y}_p=\Sigma(\mathbf{y}_p,\tau_p)$; функции $\mathbf{a},\Sigma,L\mathbf{a},\ldots,G_0G_0G_0\Sigma$, входящие в (10.21), вычислены в точке $(\mathbf{y}_p,\tau_p)$; $\mathbf{y}_{\tau_p}\stackrel{\text{def}}{=}\mathbf{y}_p$;

$$I_{l_1\ldots l_{k\,s,t}}\stackrel{\text{def}}{=}\int\limits_t^s(t-t_k)^{l_k}\ldots\int\limits_t^{t_2}(t-t_1)^{l_1}df_{t_1}\ldots df_{t_k},\ k\geq 1,$$

— повторный стохастический интеграл Ито; $\hat{I}_{l_1\ldots l_{k\,s,t}}$ — его аппроксимация; $f_t,\ t\in[0,T]$ — скалярный стандартный винеровский процесс; дифференциальные операторы L,G_0 входят в формулу Ито и имеют в данном случае следующий вид:

$$Lf(\mathbf{x},t)=\frac{\partial f}{\partial t}(\mathbf{x},t)+\sum_{i=1}^n\mathbf{a}^{(i)}(\mathbf{x},t)\frac{\partial f}{\partial\mathbf{x}^{(i)}}(\mathbf{x},t)+$$

$$+\frac{1}{2}\sum_{i,k=1}^n\Sigma^{(i)}(\mathbf{x},t)\Sigma^{(k)}(\mathbf{x},t)\frac{\partial^2 f}{\partial\mathbf{x}^{(i)}\partial\mathbf{x}^{(k)}}(\mathbf{x},t), \qquad (10.22)$$

$$G_0f(\mathbf{x},t)=\sum_{i=1}^n\Sigma^{(i)}(\mathbf{x},t)\frac{\partial f}{\partial\mathbf{x}^{(i)}}(\mathbf{x},t); \qquad (10.23)$$

здесь $f:\Re^n\times[0,T]\to\Re^1$ — некоторая функция, для которой существуют правые части (10.22), (10.23).

Для того чтобы численный метод (10.21) был слабым численным методом порядка точности 4.0, необходимо выполнение ряда условий (см. теоремы 10.3, 10.4). Отметим здесь некоторые из них. Так, функции $\mathbf{a}^{(k)}(\mathbf{x},t)$, $\Sigma^{(k)}(\mathbf{x},t)$; $k=1,\ldots,n$, должны удовлетворять условиям AI, AII (теорема 1.6), а, кроме того, следующему условию: $\mathbf{a}^{(k)}(\mathbf{x},t)$, $\Sigma^{(k)}(\mathbf{x},t)\in C^{10}(\Re^n\times[0,T],\Re^1)$.

Выполнение для аппроксимаций $\hat{I}_{l_1\ldots l_{k\,s,t}}$ повторных стохастических интегралов Ито $I_{l_1\ldots l_{k\,s,t}}$ условия

$$\left|\mathsf{M}\left\{\prod_{k=1}^l I_{\alpha_{k\,s,t}}-\prod_{k=1}^l\hat{I}_{\alpha_{k\,s,t}}|\mathcal{F}_t\right\}\right|\leq K(s-t)^5 \qquad (10.24)$$

при всех $s,t \in [0,T]$, всех мультииндексах $\alpha_k \in \mathcal{A}_4$, всех $k=1,\ldots,l$; $l=1,2,\ldots,9$ и некоторой постоянной $K \in (0,\infty)$ обеспечит выполнение условия (10.36) теоремы 10.4 при $r=4$. Здесь $\mathcal{A}_4 = \{0,\ 1,\ 00,\ 000,\ 2,\ 10,\ 01,\ 3,\ 11,\ 20,\ 02,\ 100,\ 010,\ 001,\ 0000\}$.

Таким образом, для завершения построения слабого численного метода порядка точности 4.0 в случае скалярного неаддитивного шума необходимо построить такие слабые аппроксимации повторных стохастических интегралов Ито, входящие в (10.21), которые удовлетворяют условию (10.24) и являются по возможности наиболее простыми. В качестве таких аппроксимаций возьмем аппроксимации, определяемые формулами (6.200)–(6.208):

$$\hat{I}_{0_{\tau_{p+1},\tau_p}} = \sqrt{\Delta}\zeta_0,\ \hat{I}_{00_{\tau_{p+1},\tau_p}} = \frac{1}{2}\Delta\left((\zeta_0)^2-1\right), \tag{10.25}$$

$$\hat{I}_{1_{\tau_{p+1},\tau_p}} = -\frac{\Delta^{\frac{3}{2}}}{2}\left(\zeta_0+\frac{1}{\sqrt{3}}\zeta_1\right),\ \hat{I}_{000_{\tau_{p+1},\tau_p}} = \frac{\Delta^{\frac{3}{2}}}{6}\left((\zeta_0)^3-3\zeta_0\right), \tag{10.26}$$

$$\hat{I}_{0000_{\tau_{p+1},\tau_p}} = \frac{\Delta^2}{24}\left((\zeta_0)^4-6(\zeta_0)^2+3\right), \tag{10.27}$$

$$\hat{I}_{100_{\tau_{p+1},\tau_p}} = -\frac{\Delta^{\frac{5}{2}}}{24}\left((\zeta_0)^3-3\zeta_0\right),\ \hat{I}_{010_{\tau_{p+1},\tau_p}} = -\frac{\Delta^{\frac{5}{2}}}{12}\left((\zeta_0)^3-3\zeta_0\right), \tag{10.28}$$

$$\hat{I}_{001_{\tau_{p+1},\tau_p}} = -\frac{\Delta^{\frac{5}{2}}}{8}\left((\zeta_0)^3-3\zeta_0\right),\ \hat{I}_{11} = \frac{\Delta^3}{8}\left((\zeta_0)^2-1\right), \tag{10.29}$$

$$\hat{I}_{20_{\tau_{p+1},\tau_p}} = \frac{\Delta^3}{12}\left((\zeta_0)^2-1\right),\ \hat{I}_{02_{\tau_{p+1},\tau_p}} = \frac{\Delta^3}{4}\left((\zeta_0)^2-1\right), \tag{10.30}$$

$$\hat{I}_{3_{\tau_{p+1},\tau_p}} = -\frac{\Delta^{\frac{7}{2}}}{4}\zeta_0,\ \hat{I}_{2_{\tau_{p+1},\tau_p}} = \frac{\Delta^{\frac{5}{2}}}{3}\left(\zeta_0+\frac{\sqrt{3}}{2}\zeta_1\right), \tag{10.31}$$

$$\hat{I}_{10_{\tau_{p+1},\tau_p}} = \Delta^2\left(-\frac{1}{6}\left((\zeta_0)^2-1\right)-\frac{1}{4\sqrt{3}}\zeta_0\zeta_1 \pm \frac{1}{12\sqrt{2}}\left((\zeta_1)^2-1\right)\right), \tag{10.32}$$

$$\hat{I}_{01_{\tau_{p+1},\tau_p}} = \Delta^2\left(-\frac{1}{3}\left((\zeta_0)^2-1\right)-\frac{1}{4\sqrt{3}}\zeta_0\zeta_1 \mp \frac{1}{12\sqrt{2}}\left((\zeta_1)^2-1\right)\right), \tag{10.33}$$

где

$$\zeta_0 \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{\sqrt{\Delta}}\int\limits_{\tau_p}^{\tau_{p+1}} df_s;\ \zeta_1 \stackrel{\text{def}}{=} \frac{2\sqrt{3}}{\Delta^{\frac{3}{2}}}\int\limits_{\tau_p}^{\tau_{p+1}}\left(s-\tau_p-\frac{\Delta}{2}\right)df_s.$$

Нетрудно видеть, что случайные величины ζ_0,ζ_1 являются независимыми стандартными гауссовскими случайными величинами.

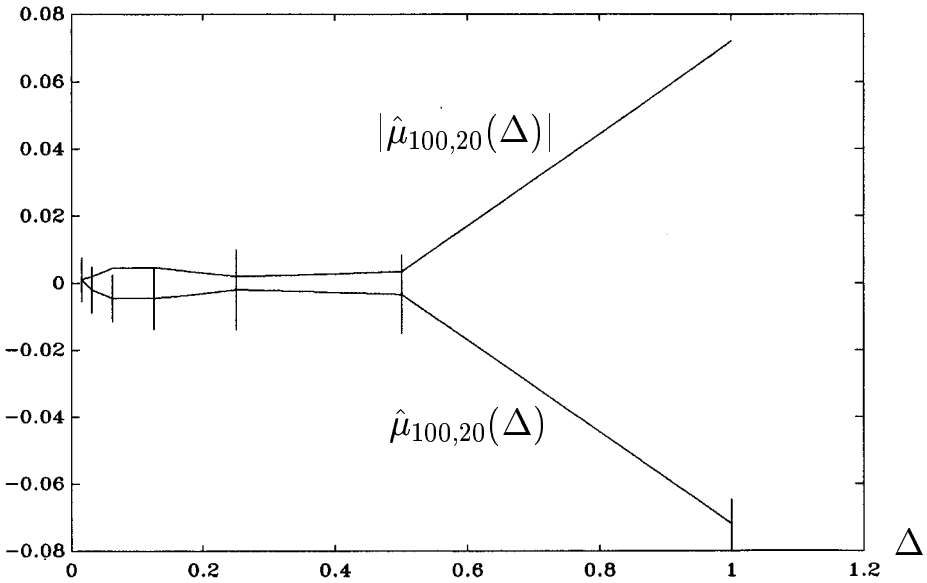

Рис. 10.4. Результат численного эксперимента 10.4 при $b = 0.05$.

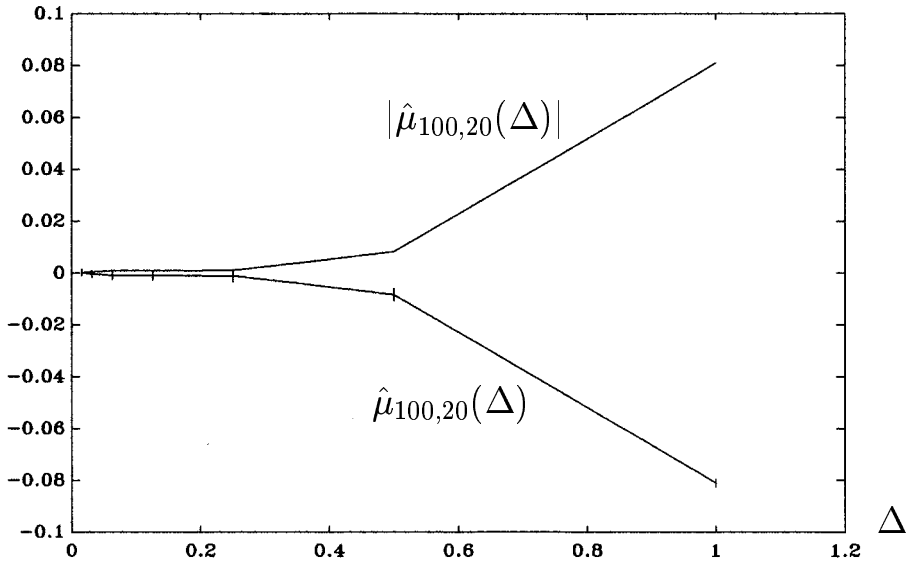

Рис. 10.5. Результат численного эксперимента 10.4 при $b = 0.01$.

Соотношения (10.21), (10.25)–(10.33) определяют явный слабый численный метод порядка точности 4.0 решения векторного стохастического дифференциального уравнения Ито со скалярным неаддитивным шумом.

Численный эксперимент 10.4 (рис. 10.4, 10.5). *Повторить численный эксперимент* 10.1 *для явного слабого численного метода порядка точности* 4.0 *вида* (10.21) *при* $\Delta = 2^{-j}$; $j = 0, 1, \ldots, 6$. *При этом*

не моделировать те повторные стохастические интегралы Ито, коэффициенты перед которыми оказываются равными нулю после применения численного метода (10.21) *к уравнению* (10.6) *и приведения подобных слагаемых. Повторить вычисления при* $b = 0.01$.

10.3 Теорема о сходимости слабых численных методов

В настоящем разделе приведем формулировку теоремы о сходимости слабых численных методов с порядком слабой сходимости 1.0, 2.0, 3.0,..., которая доказана в [139].

Рассмотрим разложение Тейлора–Ито в форме Вагнера и Платена для функции $R(\mathbf{x}, t) \equiv \mathbf{x}$ при $s = \tau_{p+1}$, $t = \tau_p$, которое получено из (4.12) путем отбрасывания остаточного члена $D_{r+1_{\tau_{p+1},\tau_p}}$:

$$\mathbf{y}_{p+1} = \mathbf{y}_p + \sum_{k=1}^{r} \sum_{(\lambda_k,\ldots,\lambda_1)} {}^{(p_k)}Q_{\lambda_k} \ldots Q_{\lambda_1}\{\mathbf{y}_p\} \overset{p_k}{\cdot} {}^{(p_k)}J_{(\lambda_k\ldots\lambda_1)\tau_{p+1},\tau_p}. \qquad (10.34)$$

Здесь сохранен смысл обозначений, введенных в (4.12); $\mathbf{y}_{\tau_p} \stackrel{\text{def}}{=} \mathbf{y}_p$, а $\{\tau_p\}_{p=0}^{N}$ — разбиение промежутка $[0, T]$, удовлетворяющее условию: $0 = \tau_0 < \ldots < \tau_N = T$, $\max\limits_{0\le j\le N-1} |\tau_{j+1} - \tau_j| = \Delta$ с в.1, где τ_{j+1} — $\mathcal{F}_{\tau_j}$-измеримые случайные величины; $j = 0, 1, \ldots, N-1$.

Пусть $\mathbf{u}_p$; $p = 0, 1, \ldots, N$ — дискретная аппроксимация решения $\mathbf{x}_t$, $t \in [0, T]$ стохастического дифференциального уравнения Ито (7.18) в автономном случае. Одним из возможных вариантов такой дискретной аппроксимации может являться, например, численный метод, получаемый из (10.34) путем замены повторных стохастических интегралов Ито, входящих в (10.34), на их слабые аппроксимации:

$$\mathbf{u}_{p+1} = \mathbf{u}_p + \sum_{k=1}^{r} \sum_{(\lambda_k,\ldots,\lambda_1)} {}^{(p_k)}Q_{\lambda_k} \ldots Q_{\lambda_1}\{\mathbf{u}_p\} \overset{p_k}{\cdot} {}^{(p_k)}\hat{J}_{(\lambda_k\ldots\lambda_1)\tau_{p+1},\tau_p},$$

где ${}^{(p_k)}\hat{J}_{(\lambda_k\ldots\lambda_1)\tau_{p+1},\tau_p} = \left\| \hat{J}^{(i_k\ldots i_1)}_{(\lambda_k\ldots\lambda_1)\tau_{p+1},\tau_p} \right\|_{i_1=\lambda_1,\ldots,i_l=\lambda_l}^{m\lambda_1\ \ldots\ m\lambda_l}$; $\hat{J}^{(i_k\ldots i_1)}_{(\lambda_k\ldots\lambda_1)\tau_{p+1},\tau_p}$ — слабая аппроксимация повторного стохастического интеграла $J^{(i_k\ldots i_1)}_{(\lambda_k\ldots\lambda_1)\tau_{p+1},\tau_p}$.

Теорема 10.3 [86, 139]. *Пусть выполнены следующие условия:*

1. $\mathbf{u}_p$; $p = 0, 1, \ldots, N$ — *дискретная аппроксимация решения* $\mathbf{x}_t$ *стохастического дифференциального уравнения Ито* (7.18) *в автономном случае, причем* $\mathsf{M}\{|\mathbf{x}_0|^k\} < \infty$; $k = 1, 2, \ldots$ *и* $\mathbf{u}_0$ *сходится слабо с порядком* r *при* $\Delta \to 0$ *к* $\mathbf{x}_0$ *для фиксированного* $r = 1.0, 2.0, 3.0, \ldots$

2. *Для всех* $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \Re^n$ *существует постоянная* $K < \infty$ *такая, что*

$$|\mathbf{a}(\mathbf{x})|+\sum_{i=1}^{m}|\Sigma_i(\mathbf{x})| \le K(1+|\mathbf{x}|),\ |\mathbf{a}(\mathbf{x})-\mathbf{a}(\mathbf{y})|+\sum_{i=1}^{m}|\Sigma_i(\mathbf{x})-\Sigma_i(\mathbf{y})| \le K|\mathbf{x}-\mathbf{y}|,$$

где $\Sigma_i(\mathbf{x})$ *— i-й столбец матрицы* $\Sigma(\mathbf{x})$.

3. *Для всех* $k = 1,\ldots,n$ *и* $j = 1,\ldots,m$: $\mathbf{a}^{(k)}(\mathbf{x}), \Sigma^{(kj)}(\mathbf{x}) \in C^{2(r+1)}(\Re^n, \Re^1)$.

4. *Для всех* $k \in N$ *существуют постоянные* $K_1 < \infty$ *и* $d \in N$, *которые не зависят от* Δ *и такие, что для всех* $q \in \{1,\ldots,k\}$ *выполнены условия:*

a. $\mathsf{M}\left\{\max\limits_{0\le j\le N}|\mathbf{u}_j|^{2q}|\mathcal{F}_0\right\} \le K_1(1+|\mathbf{u}_0|^{2d})$.

b. $\mathsf{M}\left\{|\mathbf{u}_{j+1}-\mathbf{u}_j|^{2q}|\mathcal{F}_{\tau_j}\right\} \le K_1(1+\max\limits_{0\le i\le j}|\mathbf{u}_i|^{2d})(\tau_{j+1}-\tau_j)^q$ *для всех* $j = 0,1,\ldots,N-1$.

c. Для всех $j = 0,1,\ldots,N-1$ *и* $i_1,\ldots,i_l = 1,\ldots,n$; $l = 1,2,\ldots,2r+1$

$$\Bigg|\mathsf{M}\Bigg\{\prod_{h=1}^{l}\left(\mathbf{u}_{j+1}^{(i_h)}-\mathbf{u}_j^{(i_h)}\right)-$$

$$-\prod_{h=1}^{l}\Bigg(\sum_{k=1}^{r}\sum_{(\lambda_k,\ldots,\lambda_1)}{}^{(p_k)}Q_{\lambda_k}\ldots Q_{\lambda_1}\{\mathbf{u}_j^{(i_h)}\}\overset{p_k}{\cdot}{}^{(p_k)}J_{(\lambda_k\ldots\lambda_1)\tau_{j+1},\tau_j}\Bigg)|\mathcal{F}_{\tau_j}\Bigg\}\Bigg| \le$$

$$\le K_1\left(1+\max_{0\le i\le N}|\mathbf{u}_i|^{2d}\right)\Delta^r(\tau_{j+1}-\tau_j).$$

Тогда дискретная аппроксимация $\mathbf{u}_j$; $j = 0,1,\ldots,N$ *сходится слабо с порядком* r *при* $\Delta \downarrow 0$ *к процессу* $\mathbf{x}_t$ *в момент времени* T.

Доказательство теоремы 10.3 можно найти в [86, 139].

В [86] показано, что в случае неслучайного разбиения $\{\tau_i\}_{i=0}^N$ промежутка $[0,T]$ в условиях теоремы 10.3 для любой функции $g \in C^{2(r+1)}(\Re^n, \Re^1)$ существует такая постоянная $C_g < \infty$, которая не зависит от Δ, что $\max\limits_{0\le i\le N}|\mathsf{M}\{g(\mathbf{x}_{\tau_i})\}-\mathsf{M}\{g(\mathbf{u}_i)\}| \le C_g\Delta^r$.

В заключение приведем аналог теоремы 10.3 для унифицированного разложения Тейлора–Ито.

Рассмотрим унифицированное разложение Тейлора–Ито для функции $R(\mathbf{x},t) \equiv \mathbf{x}$ при $s = \tau_{p+1}$, $t = \tau_p$, которое получено из (4.57) путем отбрасывания остаточного члена $D_{r+1_{\tau_{p+1},\tau_p}}$:

$$\mathbf{y}_{p+1} = \mathbf{y}_p + \sum_{q=1}^{r}\sum_{(k,j,l_1,\ldots,l_k)\in\mathcal{A}_q}\frac{(\tau_{p+1}-\tau_p)^j}{j!}{}^{(k)}G_{l_1}\ldots G_{l_k}L^j\{\mathbf{y}_p\}\overset{k}{\cdot}{}^{(k)}I_{l_1\ldots l_k\tau_{p+1},\tau_p}. \tag{10.35}$$

Здесь сохранен смысл обозначений, введенных в (4.57); $\mathbf{y}_{\tau_p} \stackrel{\text{def}}{=} \mathbf{y}_p$, а $\{\tau_p\}_{p=0}^N$ — разбиение промежутка $[0,T]$ такое же, как в (10.34), но неслучайное.

Пусть, как и раньше, $\mathbf{u}_p$; $p=0,1,\ldots,N$ — дискретная аппроксимация процесса $\mathbf{x}_t$, $t\in[0,T]$. Одним из возможных вариантов такой дискретной аппроксимации, основанной на унифицированном разложении Тейлора–Ито, может являться, например, численный метод, получаемый из (10.35) путем замены повторных стохастических интегралов Ито, входящих в (10.35), их слабыми аппроксимациями:

$$\mathbf{u}_{p+1}=\mathbf{u}_p+\sum_{q=1}^{r}\sum_{(k,j,l_1,\ldots,l_k)\in\mathcal{A}_q}\frac{(\tau_{p+1}-\tau_p)^j}{j!}{}^{(k)}G_{l_1}\ldots G_{l_k}L^j\{\mathbf{u}_p\}\stackrel{k}{\cdot}{}^{(k)}\hat{I}_{l_1\ldots l_k\tau_{p+1},\tau_p},$$

где $\hat{I}_{l_1\ldots l_k\tau_{p+1},\tau_p}=\left\|\hat{I}^{(i_1\ldots i_k)}_{l_1\ldots l_k\tau_{p+1},\tau_p}\right\|^m_{i_1,\ldots,i_k=1}$, а $\hat{I}^{(i_1\ldots i_k)}_{l_1\ldots l_k\tau_{p+1},\tau_p}$ — слабая аппроксимация повторного стохастического интеграла Ито $I^{(i_1\ldots i_k)}_{l_1\ldots l_k\tau_{p+1},\tau_p}$.

Теорема 10.4. *Пусть* $\mathbf{u}_p$; $p=0,1,\ldots,N$ *— дискретная аппроксимация решения* $\mathbf{x}_t$ *стохастического дифференциального уравнения Ито* (7.18) *в автономном случае. Пусть также выполнены все условия теоремы* 10.3*, кроме условия* 4.c*, которое следует заменить следующим условием:*

$$\Biggl|\mathsf{M}\Biggl\{\prod_{h=1}^{l}\left(\mathbf{u}_{p+1}^{(i_h)}-\mathbf{u}_p^{(i_h)}\right)-$$

$$-\prod_{h=1}^{l}\left(\sum_{q=1}^{r}\sum_{(k,j,l_1,\ldots,l_k)\in\mathcal{A}_q}\frac{(\Delta_p)^j}{j!}{}^{(k)}G_{l_1}\ldots G_{l_k}L^j\{\mathbf{u}_p^{(i_h)}\}\stackrel{k}{\cdot}{}^{(k)}I_{l_1\ldots l_k\tau_{p+1},\tau_p}\right)\Bigl|\mathcal{F}_{\tau_p}\Biggr\}\Biggr|\le$$

$$\le K_1\left(1+\max_{0\le i\le N}|\mathbf{u}_i|^{2d}\right)\Delta^r(\tau_{j+1}-\tau_j) \qquad (10.36)$$

для всех $p=0,1,\ldots,N-1$ *и* $i_1,\ldots,i_l\in\{1,\ldots,n\}$*, где* d,K_1 *входят в условия* 4.*a*, 4.*b теоремы* 10.3*;* $\Delta_p=\tau_{p+1}-\tau_p$*. Тогда дискретная аппроксимация* $\mathbf{u}_p$; $p=0,1,\ldots,N$ *сходится слабо с порядком* r *при* $\Delta\downarrow 0$ *к процессу* $\mathbf{x}_t$ *в момент времени* T*.*

Отметим, что переход к неавтономному случаю в теоремах 10.3, 10.4 осуществляется так же, как и раньше, т. е. путем ввода t как дополнительной компоненты процесса Ито.

10.4 Экстраполяционные численные методы

В детерминированном численном анализе известен целый класс численных методов, называемых экстраполяционными, которые обла-

дают достаточно высокими порядками скорости сходимости и основываются на численных методах, имеющих существенно более низкие порядки скорости сходимости. Этот подход допускает обобщение на случай стохастических уравнений при вычислении функционалов вида $\mathsf{M}\{g(\mathbf{x}_T)\}$, где $\mathbf{x}_t,\ t \in [0,T]$ — процесс Ито, являющийся решением стохастического дифференциального уравнения Ито (7.18); $g(\mathbf{x}) : \Re^n \to \Re^1$ — достаточно гладкая функция.

Наиболее простой экстраполяционный численный метод, имеющий порядок слабой сходимости 2.0, получен в [143] и имеет вид

$$F_{g,2}^{\Delta}(T) = 2\mathsf{M}\{g(\mathbf{y}_T^{\Delta,1.0})\} - \mathsf{M}\{g(\mathbf{y}_T^{2\Delta,1.0})\}, \tag{10.37}$$

где $\mathbf{y}_T^{\Delta,1.0}$, $\mathbf{y}_T^{2\Delta,1.0}$ — значения слабых эйлеровских аппроксимаций процесса $\mathbf{x}_t,\ t \in [0,T]$ в момент времени T, которые соответствуют постоянным шагам дискретизации Δ и 2Δ соответственно. В [143] также доказана слабая сходимость порядка 2.0 численной схемы (10.37).

Численный эксперимент 10.5 (рис. 10.6). *Повторить численный эксперимент* 10.1 *для экстраполяционного слабого численного метода порядка точности* 2.0 *вида* (10.37) *при* $a = 1.5$, $b = 0.01$, $\Delta = 2^{-j}$; $j = 3, 4, 5, 6$.

В [86] предложен подход, позволяющий конструировать экстраполяционные численные методы, имеющие порядок слабой сходимости 2β ($\beta = 1.0, 2.0, \ldots$) и основывающиеся на слабых аппроксимациях порядка β ($\beta = 1.0, 2.0, \ldots$), вычисленных при различных шагах дискретизации. Согласно данному подходу [86] слабая аппроксимация порядка 2β, вычисленная в момент времени T, определяется равенством

$$F_{g,2\beta}^{\Delta}(T) = \sum_{l=1}^{\beta+1} a_l \mathsf{M}\{g(\mathbf{y}_T^{\Delta_l,\beta})\}, \tag{10.38}$$

где $\Delta_l = d_l\Delta;\ 0 < d_1 < \ldots < d_{\beta+1} < \infty;\ l = 1, 2, \ldots, \beta+1$,

$$\begin{cases} \sum\limits_{l=1}^{\beta+1} a_l = 1 \\ \sum\limits_{l=1}^{\beta+1} a_l (d_l)^{\gamma} = 0 \end{cases}, \ \gamma = \beta, \beta+1, \ldots, 2\beta-1.$$

В (10.38) $\mathbf{y}_T^{\Delta_l,\beta}$; $l = 1, 2, \ldots, \beta+1$ — значения слабых аппроксимаций порядка β процесса $\mathbf{x}_t$, $t \in [0,T]$ в момент времени T, которые соответствуют постоянным шагам дискретизации Δ_l; $l = 1, 2, \ldots, \beta+1$.

В [86, 148] доказана слабая сходимость порядка 2β численного метода (10.38) и приведен ряд экстраполяционных численных методов,

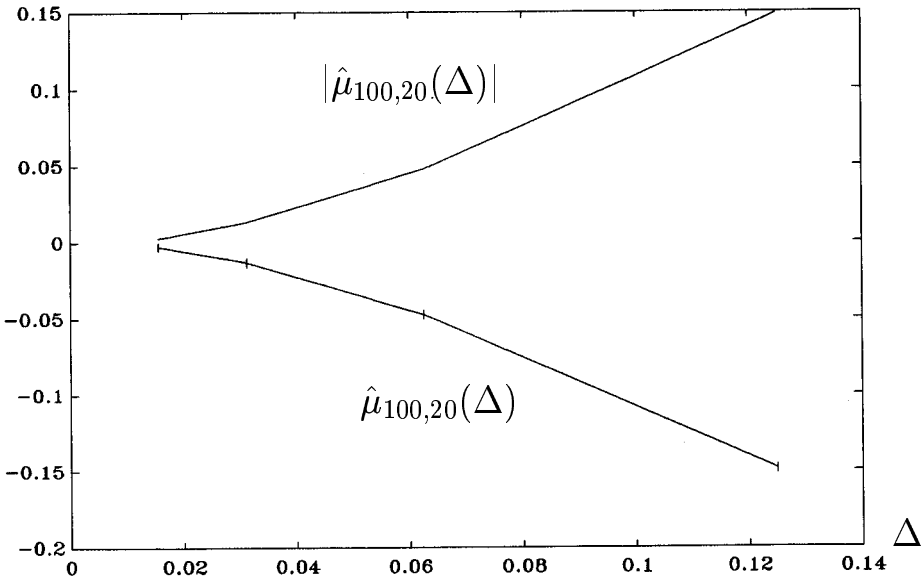

Рис. 10.6. Результат численного эксперимента 10.5.

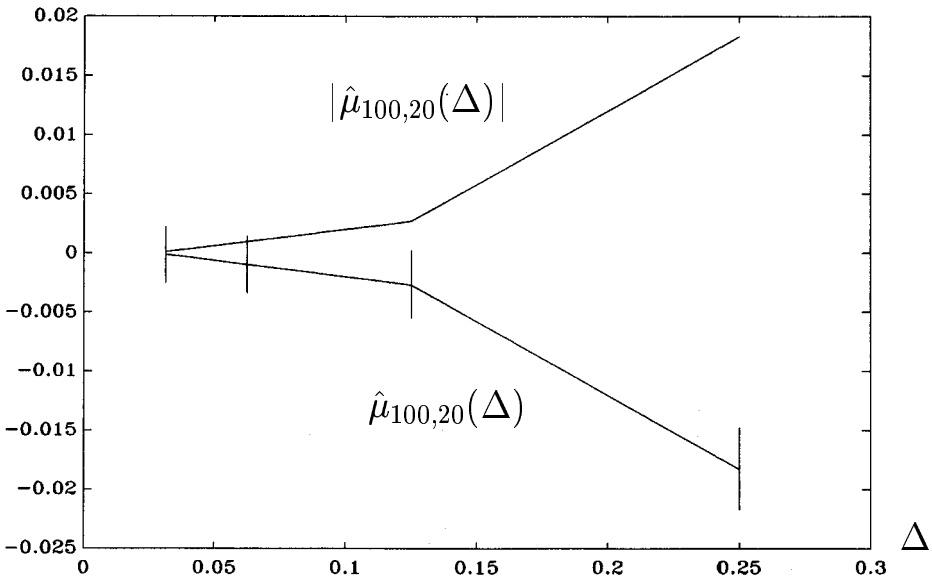

Рис. 10.7. Результат численного эксперимента 10.6.

основанных на формуле (10.38):

$$F_{g,4}^{\Delta}(T) = \frac{1}{21}\left[32\mathsf{M}\{g(\mathbf{y}_T^{\Delta,2.0})\} - 12\mathsf{M}\{g(\mathbf{y}_T^{2\Delta,2.0})\} + \mathsf{M}\{g(\mathbf{y}_T^{4\Delta,2.0})\}\right], \tag{10.39}$$

$$F_{g,4}^{\Delta}(T) = \frac{1}{11}\left[18\mathsf{M}\{g(\mathbf{y}_T^{\Delta,2.0})\} - 9\mathsf{M}\{g(\mathbf{y}_T^{2\Delta,2.0})\} + 2\mathsf{M}\{g(\mathbf{y}_T^{3\Delta,2.0})\}\right],$$

$$F_{g,6}^{\Delta}(T) = \frac{1}{2905}\Big[4032\mathsf{M}\{g(\mathbf{y}_T^{\Delta,3.0})\} - 1512\mathsf{M}\{g(\mathbf{y}_T^{2\Delta,3.0})\}+$$

$$+448\mathsf{M}\{g(\mathbf{y}_T^{3\Delta,3.0})\} - 63\mathsf{M}\{g(\mathbf{y}_T^{4\Delta,3.0})\}\Bigg].$$

Здесь и далее $\mathbf{y}_T^{\Delta,\beta}$ — значение слабой аппроксимации порядка β в момент времени T, соответствующей постоянному шагу дискретизации Δ.

Численный эксперимент 10.6 (рис. 10.7). *Повторить численный эксперимент* 10.1 *для экстраполяционного слабого численного метода порядка точности* 4.0 *вида* (10.39) *при* $a = 1.5$, $b = 0.01$, $\Delta = 2^{-j}$; $j = 2, 3, 4, 5$. *В качестве слабого численного метода порядка точности* 2.0, *используемого в формуле* (10.39), *взять численный метод* (10.14).

Предложим следующие экстраполяционные численные методы со слабым порядком сходимости 8.0, которые основаны на слабых аппроксимациях порядка точности 4.0 вида (10.21) или (10.20) и вытекают из формулы (10.38):

$$F_{g,8}^{\Delta}(T) = \frac{1080000}{874853}\Bigg[\mathsf{M}\{g(\mathbf{y}_T^{\Delta,4.0})\} - \frac{1}{4}\mathsf{M}\{g(\mathbf{y}_T^{2\Delta,4.0})\} + \frac{2}{27}\mathsf{M}\{g(\mathbf{y}_T^{3\Delta,4.0})\} -$$

$$-\frac{1}{64}\mathsf{M}\{g(\mathbf{y}_T^{4\Delta,4.0})\} + \frac{1}{625}\mathsf{M}\{g(\mathbf{y}_T^{5\Delta,4.0})\}\Bigg],$$

$$F_{g,8}^{\Delta}(T) = \frac{1}{248031}\Bigg[\frac{4194304}{15}\mathsf{M}\{g(\mathbf{y}_T^{\Delta,4.0})\} - 32768\mathsf{M}\{g(\mathbf{y}_T^{2\Delta,4.0})\} +$$

$$+\frac{3584}{3}\mathsf{M}\{g(\mathbf{y}_T^{4\Delta,4.0})\} - 16\mathsf{M}\{g(\mathbf{y}_T^{8\Delta,4.0})\} + \frac{1}{15}\mathsf{M}\{g(\mathbf{y}_T^{16\Delta,4.0})\}\Bigg].$$

В [87] предложен другой подход к построению экстраполяционных численных методов, который позволяет получать слабые численные методы порядка точности β ($\beta = 2.0, 3.0, \ldots$) на основе слабых аппроксимаций фиксированного порядка точности $\gamma \in \{1.0, 2.0, \ldots, \beta-1\}$, соответствующих различным шагам дискретизации. Согласно данному подходу [87]

$$F_{g,\alpha,\beta}^{\Delta}(T) = \frac{1}{2^{\beta-1}-1}\left(2^{\beta-1}F_{g,\alpha,\beta-1}^{\Delta}(T) - F_{g,\alpha,\beta-1}^{2\Delta}(T)\right), \qquad (10.40)$$

где $\alpha \in \{1.0, 2.0, \ldots, \beta-1\}$, а величину $F_{g,\alpha,\alpha}^{\Delta}(T)$ следует понимать как $\mathsf{M}\{g(\mathbf{y}_T^{\Delta,\alpha})\}$.

На основе формулы (10.40) в [87] построен ряд экстраполяционных численных методов. Приведем некоторые из них [87]:

$$F_{g,1,3}^{\Delta}(T) = \frac{1}{3}\left[8\mathsf{M}\{g(\mathbf{y}_T^{\Delta,1.0})\} - 6\mathsf{M}\{g(\mathbf{y}_T^{2\Delta,1.0})\} + \mathsf{M}\{g(\mathbf{y}_T^{4\Delta,1.0})\}\right], \quad (10.41)$$

$$F_{g,1,4}^{\Delta}(T)=\frac{1}{21}\Bigg[64\mathsf{M}\{g(\mathbf{y}_T^{\Delta,1.0})\}-56\mathsf{M}\{g(\mathbf{y}_T^{2\Delta,1.0})\}+14\mathsf{M}\{g(\mathbf{y}_T^{4\Delta,1.0})\}-$$

$$-\mathsf{M}\{g(\mathbf{y}_T^{8\Delta,1.0})\}\Bigg], \qquad (10.42)$$

$$F_{g,4,5}^{\Delta}(T)=\frac{1}{15}\left[16\mathsf{M}\{g(\mathbf{y}_T^{\Delta,4.0})\}-\mathsf{M}\{g(\mathbf{y}_T^{2\Delta,4.0})\}\right],$$

$$F_{g,1,5}^{\Delta}(T)=\frac{1}{315}\Bigg[1024\mathsf{M}\{g(\mathbf{y}_T^{\Delta,1.0})\}-960\mathsf{M}\{g(\mathbf{y}_T^{2\Delta,1.0})\}+280\mathsf{M}\{g(\mathbf{y}_T^{4\Delta,1.0})\}-$$

$$-30\mathsf{M}\{g(\mathbf{y}_T^{8\Delta,1.0})\}+\mathsf{M}\{g(\mathbf{y}_T^{16\Delta,1.0})\}\Bigg]. \qquad (10.43)$$

Отметим, что, с одной стороны, соотношение (10.40) позволяет строить экстраполяционные формулы, в правых частях которых находятся слабые аппроксимации, вычисленные в момент времени T и соответствующие шагам дискретизации Δ, 2Δ, 4Δ, 8Δ, ..., т. е. последовательность шагов дискретизации фиксируется достаточно жестко (формула (10.38) предоставляет больше свободы в выборе последовательности шагов дискретизации: $\Delta_l = d_l\Delta$; $0 < d_1 < \ldots < d_{\beta+1} < \infty$; $l = 1, 2, \ldots, \beta+1$). С другой стороны, формула (10.40) позволяет строить экстраполяционные численные методы достаточно высокого порядка точности $(3.0, 4.0, 5.0, \ldots)$, используя только слабые аппроксимации существенно более низкого порядка, например, порядка точности 1.0 (см. (10.41)–(10.43)).

Следует отметить, что при реализации экстраполяционных численных методов приходится решать стохастическое дифференциальное уравнение Ито несколько раз независимо с различными шагами интегрирования.

10.5 Явные слабые конечно-разностные численные методы

Как и в случае сильных численных методов, интерес представляет построение конечно-разностных слабых численных методов. В [70, 139, 144] представлены различные явные слабые конечно-разностные численные методы порядка точности 2.0. Среди данных численных методов отметим метод, полученный в [139] для автономного случая:

$$\mathbf{y}_{p+1}=\mathbf{y}_p+\frac{1}{2}\left(\mathbf{a}+\mathbf{a}(\bar{Y}_p)\right)\Delta+\frac{1}{4}\sum_{j=1}^{m}\Bigg\{\left(\Sigma_j(R_p^{(j)+})+\Sigma_j(R_p^{(j)-})+2\Sigma_j\right)\Delta\tilde{\mathbf{f}}_p^{(j)}$$

$$+\sum_{\substack{r=1\\r\neq j}}^{m}\left(\Sigma_j(U_p^{(r)+})+\Sigma_j(U_p^{(r)-})-2\Sigma_j\right)\Delta\tilde{\mathbf{f}}_p^{(j)}\Bigg\}+$$

$$+\frac{1}{4\sqrt{\Delta}}\sum_{j=1}^{m}\Bigg\{\left(\Sigma_j(R_p^{(j)+})-\Sigma_j(R_p^{(j)-})\right)\left(\left(\Delta\tilde{\mathbf{f}}_p^{(j)}\right)^2-\Delta\right)+$$

$$+\sum_{\substack{r=1\\r\neq j}}^{m}\left(\Sigma_j(U_p^{(r)+})-\Sigma_j(U_p^{(r)-})\right)\left(\Delta\tilde{\mathbf{f}}_p^{(j)}\Delta\tilde{\mathbf{f}}_p^{(r)}+V_p^{(rj)}\right)\Bigg\}, \qquad (10.44)$$

где $\mathbf{y}_{\tau_p}\stackrel{\text{def}}{=}\mathbf{y}_p$; $\Delta\tilde{\mathbf{f}}_{\tau_p}^{(j)}\stackrel{\text{def}}{=}\Delta\tilde{\mathbf{f}}_p^{(j)}$; $\tau_p=p\Delta$; $p=0,1,\ldots,N$; $T=N\Delta$;

$$\bar{Y}_p=\mathbf{y}_p+\mathbf{a}\Delta+\sum_{j=1}^{m}\Sigma_j\Delta\tilde{\mathbf{f}}_p^{(j)};\ R_p^{(j)\pm}=\mathbf{y}_p+\mathbf{a}\Delta\pm\sqrt{\Delta}\Sigma_j;\ U_p^{(j)\pm}=\mathbf{y}_p\pm\sqrt{\Delta}\Sigma_j;$$

Σ_j — j-й столбец матрицы Σ; случайные величины $\Delta\tilde{\mathbf{f}}_p^{(j)}$, $V_p^{(rj)}$ такие же, как в (10.8). В (10.44) и далее, как обычно, аргумент $\mathbf{y}_p$ опускается, т. е. вместо $\mathbf{a}(\mathbf{y}_p)$, $\Sigma_j(\mathbf{y}_p)$ и т. д. пишем $\mathbf{a}$, Σ_j и т. д.

Рассмотрим слабый конечно-разностный численный метод порядка точности 2.0 для случая скалярного шума ($m=1$) [139]:

$$\mathbf{y}_{p+1}=\mathbf{y}_p+\frac{1}{2}\left(\mathbf{a}+\mathbf{a}(\bar{Y}_p)\right)\Delta+\frac{1}{4}\left(\Sigma(Y_p^+)+\Sigma(Y_p^-)+2\Sigma\right)\Delta\tilde{\mathbf{f}}_p+$$

$$+\frac{1}{4\sqrt{\Delta}}\left(\Sigma(Y_p^+)-\Sigma(Y_p^-)\right)\left(\left(\Delta\tilde{\mathbf{f}}_p\right)^2-\Delta\right), \qquad (10.45)$$

где $\Sigma:\Re^n\to\Re^1$; $\bar{Y}_p=\mathbf{y}_p+\mathbf{a}\Delta+\Sigma\Delta\tilde{\mathbf{f}}_p$; $Y_p^{\pm}=\mathbf{y}_p+\mathbf{a}\Delta\pm\sqrt{\Delta}\Sigma$; остальные обозначения такие же, как в (10.44).

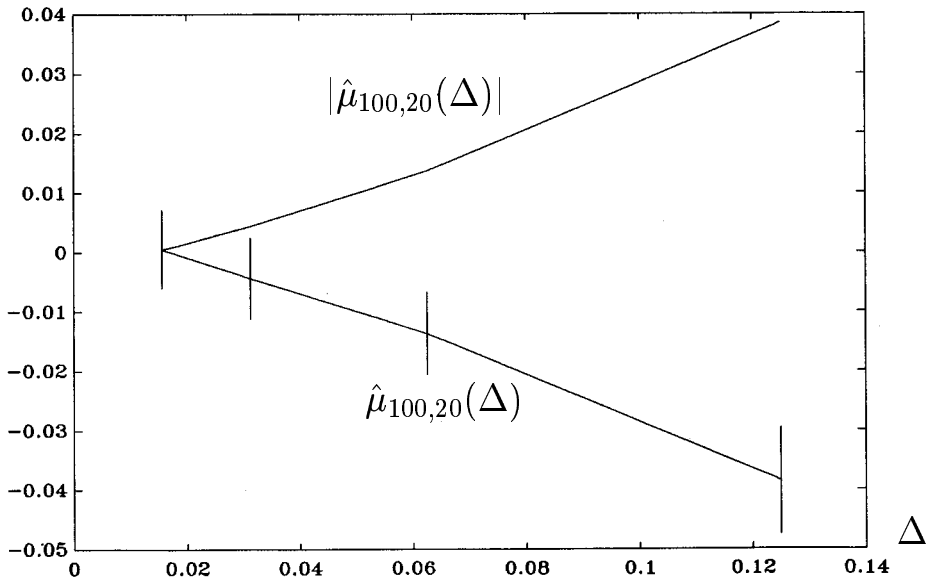

Рис. 10.8. Результат численного эксперимента 10.7.

Численный эксперимент 10.7 (рис. 10.8). *Повторить численный эксперимент* 10.1 *для явного слабого конечно-разностного численного метода порядка точности* 2.0 *вида* (10.45) *при* $\Delta = 2^{-j}$; $j = 3, 4, 5, 6$.

Предложим следующий явный слабый конечно-разностный численный метод порядка точности 2.0 для автономного случая:

$$\mathbf{y}_{p+1} = \mathbf{y}_p + \frac{1}{2}\left(\mathbf{a} + \mathbf{a}(Z_p)\right)\Delta + \frac{1}{4}\Delta\sum_{i=1}^{m}\left(\mathbf{a}(Y_p^{(i)+}) + \mathbf{a}(Y_p^{(i)-}) - 2\mathbf{a}\right) +$$

$$+\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{m}\left\{\Sigma_i(Z_p) + \Sigma_i + \frac{1}{2}\sum_{r=1}^{m}\left(\Sigma_i(Y_p^{(r)+}) + \Sigma_i(Y_p^{(r)-}) - 2\Sigma_i\right)\right\}\Delta\tilde{\mathbf{f}}_p^{(i)} +$$

$$+\frac{\sqrt{\Delta}}{4}\sum_{i=1}^{m}\left(\mathbf{a}(Y_p^{(i)+}) - \mathbf{a}(Y_p^{(i)-})\right)\Delta\tilde{\mathbf{f}}_p^{(i)} +$$

$$+\frac{1}{4\sqrt{\Delta}}\sum_{i,j=1}^{m}\left(\Sigma_i(Y_p^{(j)+}) - \Sigma_i(Y_p^{(j)-})\right)\left(\Delta\tilde{\mathbf{f}}_p^{(i)}\Delta\tilde{\mathbf{f}}_p^{(j)} + V_p^{(ji)}\right), \qquad (10.46)$$

где $Y_p^{(j)\pm} = \mathbf{y}_p \pm \sqrt{\Delta}\Sigma_j$; $Z_p = \mathbf{y}_p + \mathbf{a}\Delta$; остальные обозначения такие же, как в (10.44).

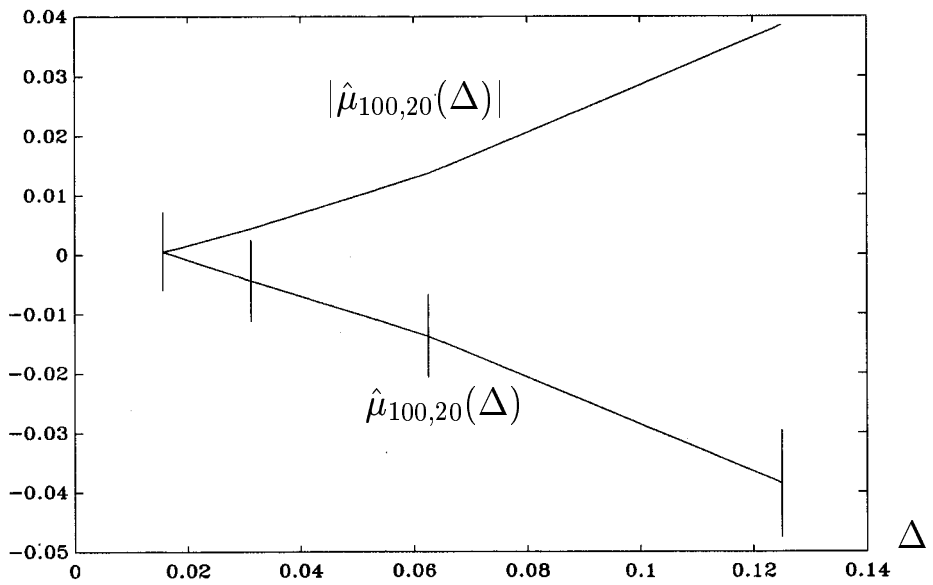

Рис. 10.9. Результат численного эксперимента 10.8.

Вариант численной схемы (10.46) в случае ($m = 1$) имеет вид

$$\mathbf{y}_{p+1} = \mathbf{y}_p + \frac{1}{2}\left(\mathbf{a} + \mathbf{a}(Z_p)\right)\Delta + \frac{1}{4}\Delta\tilde{\mathbf{f}}_p\sqrt{\Delta}\left(\mathbf{a}(Y_p^+) - \mathbf{a}(Y_p^-)\right) +$$

$$+\frac{\Delta\tilde{\mathbf{f}}_p}{4}\left(\Sigma(Y_p^+) + \Sigma(Y_p^-) + 2\Sigma(Z_p)\right) + \frac{1}{4}\Delta\left(\mathbf{a}(Y_p^+) + \mathbf{a}(Y_p^-) - 2\mathbf{a}\right) +$$

$$+\frac{1}{4\sqrt{\Delta}}\left(\Sigma(Y_p^+)-\Sigma(Y_p^-)\right)\left(\left(\Delta\tilde{\mathbf{f}}_p\right)^2-\Delta\right), \qquad (10.47)$$

где $\Sigma:\Re^n\to\Re^1$; $Y_p^{\pm}=\mathbf{y}_p\pm\sqrt{\Delta}\Sigma$; $Z_p=\mathbf{y}_p+\mathbf{a}\Delta$; остальные обозначения такие же, как в (10.46).

Численный эксперимент 10.8 (рис. 10.9). *Повторить численный эксперимент* 10.1 *для явного слабого конечно-разностного численного метода порядка точности* 2.0 *вида* (10.47) *при* $\Delta=2^{-j}$; $j=3,4,5,6$.

Сходимость приведенных и рассматриваемых далее численных методов будет обоснована в конце данной главы.

10.6 Неявные слабые численные методы

10.6.1 Неявные методы Эйлера

В предыдущих главах отмечалось, что неявные сильные численные методы обладают лучшей устойчивостью, чем явные сильные численные методы. Аналогичный вывод справедлив и для слабых численных методов [94, 95], что мотивирует необходимость построения неявных слабых численных схем.

Рассмотрим следующее, предложенное в [86], семейство неявных методов Эйлера:

$$\mathbf{y}_{p+1}=\mathbf{y}_p+\left\{k\bar{\mathbf{a}}_\eta(\mathbf{y}_{p+1},\tau_{p+1})+(1-k)\bar{\mathbf{a}}_\eta(\mathbf{y}_p,\tau_p)\right\}\Delta+$$
$$+\left\{\eta\Sigma(\mathbf{y}_{p+1},\tau_{p+1})+(1-\eta)\Sigma(\mathbf{y}_p,\tau_p)\right\}\Delta\tilde{\mathbf{f}}_p, \qquad (10.48)$$

где $\mathbf{y}_{\tau_p}\stackrel{\text{def}}{=}\mathbf{y}_p$; $p=0,1,\ldots,N$; $\tau_p=p\Delta$; $N=T/\Delta$; k,η — вещественные параметры; $\Delta\tilde{\mathbf{f}}_p$ — m-мерный случайный столбец с независимыми компонентами $\Delta\tilde{\mathbf{f}}_p^{(i)}$; $i=1,\ldots,m$, которые являются дискретными случайными величинами, для которых $\mathsf{P}\{\Delta\tilde{\mathbf{f}}_p^{(i)}=\pm\sqrt{\Delta}\}=1/2$;

$$\bar{\mathbf{a}}_\eta(\mathbf{x},t)=\mathbf{a}(\mathbf{x},t)-\eta\sum_{i=1}^{m}\sum_{l=1}^{n}\Sigma^{(li)}(\mathbf{x},t)\frac{\partial\Sigma_i}{\partial\mathbf{x}^{(l)}}(\mathbf{x},t).$$

Рассмотрим некоторые частные случаи формулы (10.48):

1. Явный метод Эйлера ($k=\eta=0$) :

$$\mathbf{y}_{p+1}=\mathbf{y}_p+\mathbf{a}(\mathbf{y}_p,\tau_p)\Delta+\Sigma(\mathbf{y}_p,\tau_p)\Delta\tilde{\mathbf{f}}_p. \qquad (10.49)$$

2. Полунеявный метод Эйлера ($k=1,\eta=0$) :

$$\mathbf{y}_{p+1}=\mathbf{y}_p+\mathbf{a}(\mathbf{y}_{p+1},\tau_{p+1})\Delta+\Sigma(\mathbf{y}_p,\tau_p)\Delta\tilde{\mathbf{f}}_p.$$

3. Полностью неявный метод Эйлера ($k = \eta = 1$) :

$$\mathbf{y}_{p+1} = \mathbf{y}_p + \bar{\mathbf{a}}_1(\mathbf{y}_{p+1}, \tau_{p+1})\Delta + \Sigma(\mathbf{y}_{p+1}, \tau_{p+1})\Delta\tilde{\mathbf{f}}_p.$$

4. Симметричные методы Эйлера ($k = \eta = 0.5$ и $k = 0.5$, $\eta = 0$):

$$\mathbf{y}_{p+1} = \mathbf{y}_p + 0.5\left(\bar{\mathbf{a}}_{\frac{1}{2}}(\mathbf{y}_{p+1}, \tau_{p+1}) + \bar{\mathbf{a}}_{\frac{1}{2}}(\mathbf{y}_p, \tau_p)\right)\Delta +$$

$$+0.5\left(\Sigma(\mathbf{y}_{p+1}, \tau_{p+1}) + \Sigma(\mathbf{y}_p, \tau_p)\right)\Delta\tilde{\mathbf{f}}_p,$$

$$\mathbf{y}_{p+1} = \mathbf{y}_p + 0.5\left(\mathbf{a}(\mathbf{y}_{p+1}, \tau_{p+1}) + \mathbf{a}(\mathbf{y}_p, \tau_p)\right)\Delta + \Sigma(\mathbf{y}_p, \tau_p)\Delta\tilde{\mathbf{f}}_p.$$

Численный метод (10.48) называется [94] супернеявным методом Эйлера, если k или η не принадлежат отрезку $[0, 1]$.

Далее будет показано (см. [94, 95]), что неявные слабые методы Эйлера, и особенно супернеявные методы Эйлера, обладают лучшей устойчивостью по сравнению с явным методом Эйлера. Заметим также, что при подходящих условиях [86] численный метод (10.48) имеет порядок слабой сходимости $\gamma = 1.0$. Кроме того, в тех случаях, когда в (10.48) $\eta \neq 0$, т. е. неявность входит не только в систематическое, но и в стохастическое слагаемое, вообще говоря, не следует брать в качестве $\Delta\tilde{\mathbf{f}}_p^{(i)}$; $i = 1, \ldots, m$, гауссовские случайные величины [86], так как в этом случае для процесса $\mathbf{y}_p$; $p = 0, 1, \ldots$, определяемого равенством (10.48), перестают существовать моментные характеристики. Это нетрудно проверить на примере тестового линейного стохастического дифференциального уравнения с мультипликативным шумом (см. [86. С. 336–337]).

Численный эксперимент 10.9 (рис. 10.10–10.12). *Для стохастического дифференциального уравнения Ито*

$$d\begin{pmatrix}\mathbf{x}_t^{(1)}\\ \mathbf{x}_t^{(2)}\end{pmatrix} = a\begin{pmatrix}\mathbf{x}_t^{(2)} - \mathbf{x}_t^{(1)}\\ \mathbf{x}_t^{(1)} - \mathbf{x}_t^{(2)}\end{pmatrix}dt + b\begin{pmatrix}\mathbf{x}_t^{(1)}\\ \mathbf{x}_t^{(2)}\end{pmatrix}df_t, \quad \begin{pmatrix}\mathbf{x}_0^{(1)}\\ \mathbf{x}_0^{(2)}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\ 0\end{pmatrix},$$

где $f_t \in \Re^1$; $t \in [0, T]$, *смоделировать* 2000 ($M = 20$ *групп по* $N = 100$ *реализаций*) *независимых реализаций векторной случайной величины* $\mathbf{x}_T = (\mathbf{x}_T^{(1)} \quad \mathbf{x}_T^{(2)})^{\mathsf{T}}$ *при* $T = 1$, $a = 1.5$, $b = 0.01$, $\Delta = 2^{-3}$, $\eta = 0$, $k = 0$ *с помощью метода Эйлера* (10.48). *Вычислить оценку* $\hat{\mu}_{100,20} = (\hat{\mu}_{100,20}^{(1)} \quad \hat{\mu}_{100,20}^{(2)})^{\mathsf{T}}$ *ошибки* $\mu = \left(\mu^{(1)} \quad \mu^{(2)}\right)^{\mathsf{T}}$, $\mu^{(i)} = \mathsf{M}\{\mathbf{y}_T^{(i)}\} - \mathsf{M}\{\mathbf{x}_T^{(i)}\}$; $i = 1, 2$ *с помощью формулы* (10.2), *учитывая, что*

$$\mathsf{M}\{\mathbf{x}_T\} = e^{AT}\mathbf{x}_0 = \begin{pmatrix}0.5(1 + e^{-2aT})\\ 0.5(1 - e^{-2aT})\end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix}-a & a\\ a & -a\end{pmatrix}$$

($\mathbf{y}_T$ *определяется численным методом* (10.48)). *Построить* 90%-*е до-*

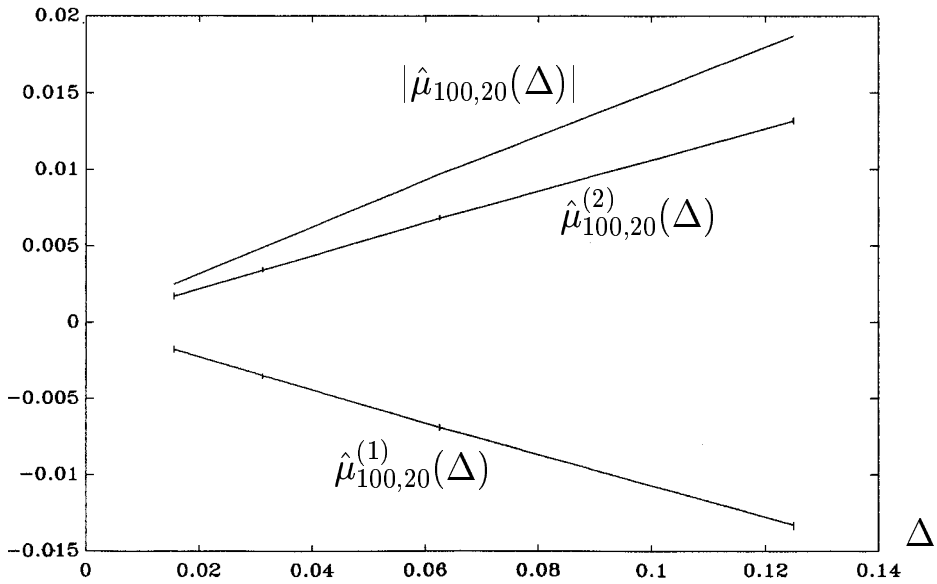

Рис. 10.10. Результат численного эксперимента 10.9 при $\eta = k = 0$.

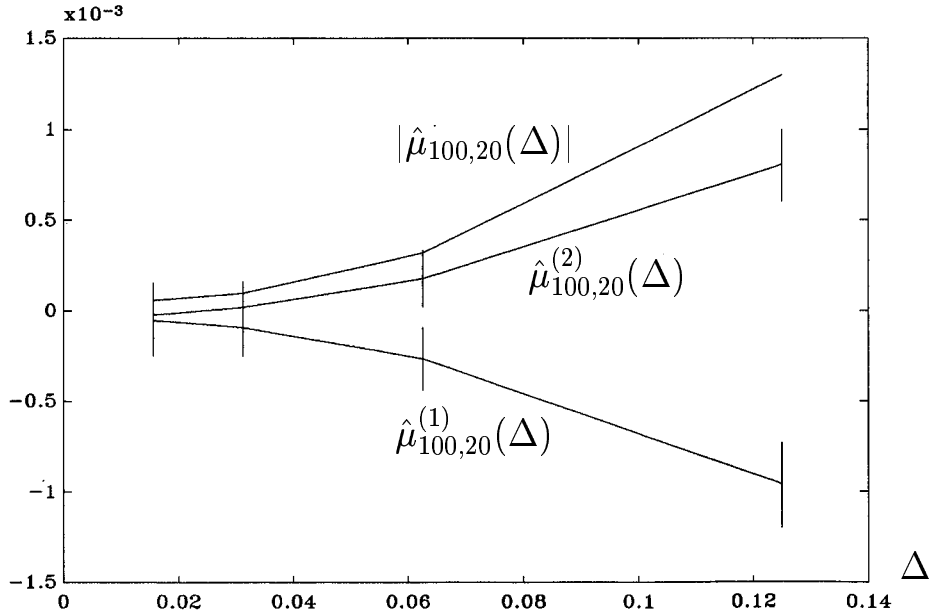

Рис. 10.11. Результат численного эксперимента 10.9 при $\eta = 0$, $k = \frac{1}{2}$.

верительные интервалы для $\mu^{(1)}$ *и* $\mu^{(2)}$. *Повторить вычисления при* $\Delta = 2^{-j}$; $j = 4, 5, 6$ *и изобразить графически зависимости* $\hat{\mu}^{(1)}_{100,20}(\Delta)$, $\hat{\mu}^{(2)}_{100,20}(\Delta)$, $|\hat{\mu}_{100,20}(\Delta)|$, *а также* 90%*-е доверительные интервалы для* $\mu^{(1)}$ *и* $\mu^{(2)}$ *при указанных значениях* Δ. *Повторить вычисления при* $\eta = 0$, $k = \frac{1}{2}$ *и* $\eta = 0$, $k = 1$. *Для моделирования приращений винеровского процесса использовать независимые случайные величины* $\Delta\tilde{f}_p$; $p = 0, 1, \ldots, N-1$; $N = T/\Delta$, *для которых* $\mathsf{P}\{\Delta\tilde{f}_p = \pm\sqrt{\Delta}\} = 1/2$.

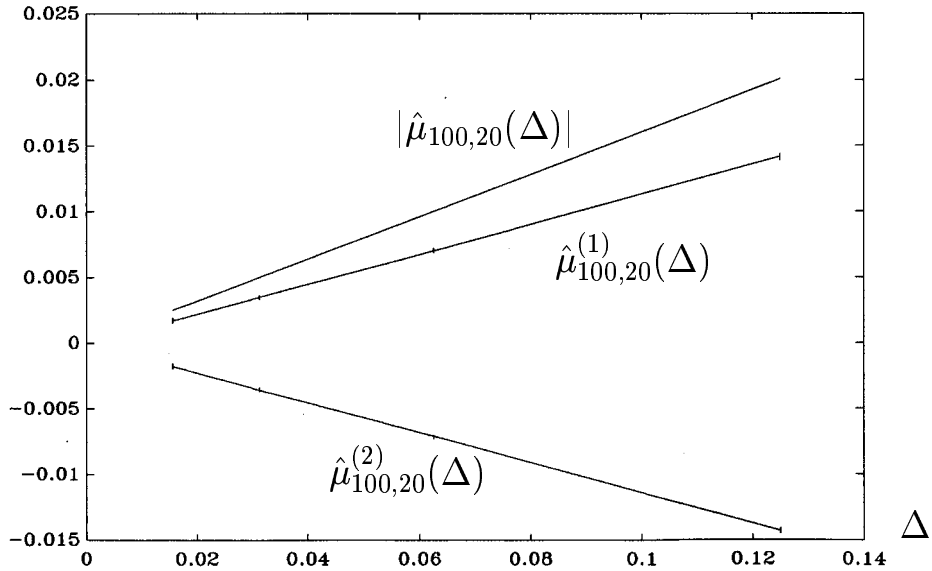

Рис. 10.12. Результат численного эксперимента 10.9 при $\eta = 0$, $k = 1$.

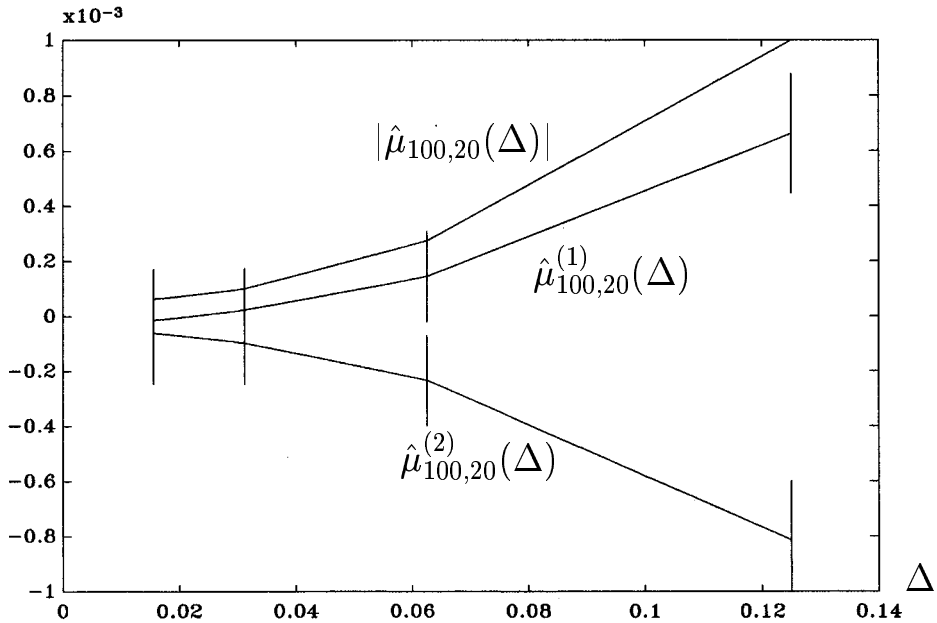

Рис. 10.13. Результат численного эксперимента 10.10.

Численный эксперимент 10.10 (рис. 10.13). *Повторить численный эксперимент* 10.9 *для метода Эйлера* (10.48) *при* $\eta = k = 1$, $a = 5$, $b = 0.01$ (*остальные параметры и указания такие же, как в численном эксперименте* 10.9).

10.6.2 Методы порядка точности 2.0

Г.Н. Мильштейном в [70] предложено двухпараметрическое семейство неявных слабых численных методов порядка точности 2.0 вида:

$$\mathbf{y}_{p+1} = \mathbf{y}_p + \{\tilde{\alpha}\mathbf{a}(\mathbf{y}_{p+1}, \tau_{p+1}) + (1-\tilde{\alpha})\mathbf{a}\}\,\Delta +$$
$$+\frac{1}{2}\sum_{i_1,i_2=1}^{m} G_0^{(i_1)}\Sigma_{i_2}\left(\Delta\tilde{\mathbf{f}}_p^{(i_1)}\Delta\tilde{\mathbf{f}}_p^{(i_2)} + V_p^{(i_1 i_2)}\right) +$$
$$+\sum_{i_1=1}^{m}\left(\Sigma_{i_1} + \frac{1}{2}\left(L\Sigma_{i_1} + (1-2\tilde{\alpha})G_0^{(i_1)}\mathbf{a}\right)\Delta\right)\Delta\tilde{\mathbf{f}}_p^{(i_1)} +$$
$$+\frac{1}{2}(1-2\tilde{\alpha})\left\{\tilde{\beta}L\mathbf{a} + (1-\tilde{\beta})L\mathbf{a}(\mathbf{y}_{p+1}, \tau_{p+1})\right\}\Delta^2, \qquad (10.50)$$

где $\tilde{\alpha}, \tilde{\beta} \in [0,1]$; случайные величины $\Delta\tilde{\mathbf{f}}_p^{(i)}$, $V_p^{(ij)}$ такие же, как в (10.8).

В [86] показано, что численная схема (10.50) при $\tilde{\alpha} = \frac{1}{2}$ является A-устойчивой на классе тестовых стохастических дифференциальных уравнений Ито с аддитивным шумом.

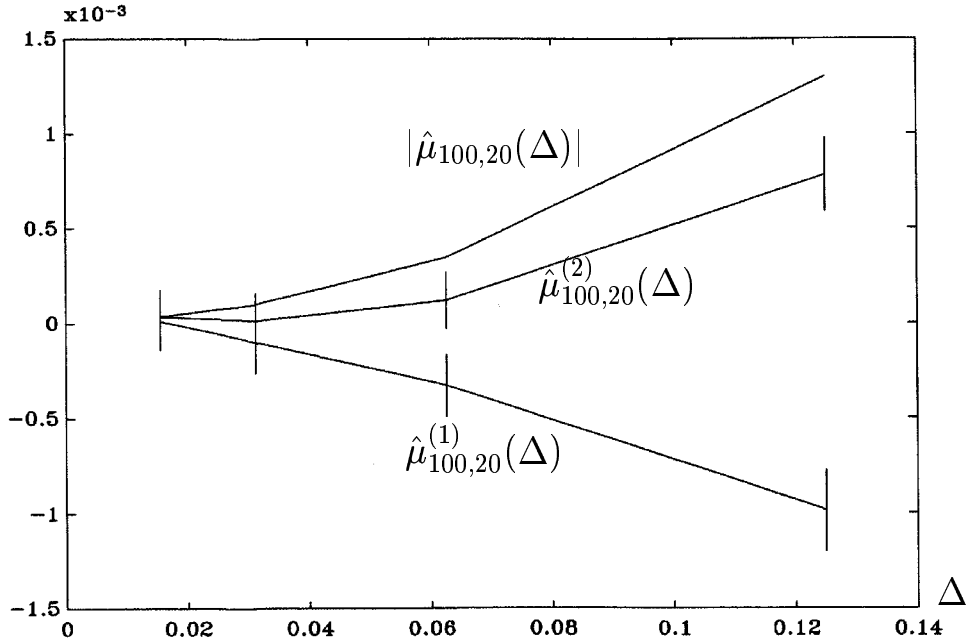

Рис. 10.14. Результат численного эксперимента 10.11.

Численный эксперимент 10.11 (рис. 10.14). *Повторить численный эксперимент* 10.9 *для неявного слабого численного метода* (10.50) *при* $\tilde{\alpha} = \frac{1}{2}$. *Для моделирования повторных стохастических интегралов Ито, входящих в* (10.50), *использовать независимые случайные величины* $\Delta\tilde{f}_p$; $p = 0, 1, \ldots, N-1$; $N = T/\Delta$, *для которых* $\mathsf{P}\{\Delta\tilde{f}_p = \pm\sqrt{\Delta}\} = \frac{1}{2}$.

10.6.3 Конечно-разностные методы порядка точности 2.0

Приведем неявный слабый конечно-разностный численный метод

порядка точности 2.0 для автономного случая, который получен в [86]:

$$\mathbf{y}_{p+1} = \mathbf{y}_p + \frac{1}{2}\left(\mathbf{a} + \mathbf{a}(\mathbf{y}_{p+1})\right)\Delta + \frac{1}{4}\sum_{j=1}^{m}\Biggl\{\Sigma_j(R_p^{(j)+}) + \Sigma_j(R_p^{(j)-}) + 2\Sigma_j$$

$$+\sum_{\substack{r=1\\r\neq j}}^{m}\left(\Sigma_j(U_p^{(r)+}) + \Sigma_j(U_p^{(r)-}) - 2\Sigma_j\right)\frac{1}{\sqrt{\Delta}}\Biggr\}\Delta\tilde{\mathbf{f}}_p^{(j)} +$$

$$+\frac{1}{4\sqrt{\Delta}}\sum_{j=1}^{m}\Biggl\{\left(\Sigma_j(R_p^{(j)+}) - \Sigma_j(R_p^{(j)-})\right)\left(\left(\Delta\tilde{\mathbf{f}}_p^{(j)}\right)^2 - \Delta\right) +$$

$$+\sum_{\substack{r=1\\r\neq j}}^{m}\left(\Sigma_j(U_p^{(r)+}) - \Sigma_j(U_p^{(r)-})\right)\left(\Delta\tilde{\mathbf{f}}_p^{(j)}\Delta\tilde{\mathbf{f}}_p^{(r)} + V_p^{(rj)}\right)\Biggr\}, \qquad (10.51)$$

где сохранен смысл обозначений, входящих в (10.44).

В [86] также представлен неявный слабый конечно-разностный численный метод порядка точности 2.0 для случая скалярного шума ($m = 1$):

$$\mathbf{y}_{p+1} = \mathbf{y}_p + \frac{1}{2}\left(\mathbf{a} + \mathbf{a}(\mathbf{y}_{p+1})\right)\Delta + \frac{1}{4}\left(\Sigma(Y_p^+) + \Sigma(Y_p^-) + 2\Sigma\right)\Delta\tilde{\mathbf{f}}_p$$

$$+\frac{1}{4\sqrt{\Delta}}\left(\Sigma(Y_p^+) - \Sigma(Y_p^-)\right)\left(\left(\Delta\tilde{\mathbf{f}}_p\right)^2 - \Delta\right), \qquad (10.52)$$

где сохранен смысл обозначений, входящих в (10.45).

Предложим неявный слабый конечно-разностный численный метод порядка точности 2.0 вида

$$\mathbf{y}_{p+1} = \mathbf{y}_p + \frac{1}{2}\left(\mathbf{a} + \mathbf{a}(\mathbf{y}_{p+1})\right)\Delta +$$

$$+\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{m}\left\{\Sigma_i(Z_p) + \Sigma_i + \frac{1}{2}\sum_{r=1}^{m}\left(\Sigma_i(Y_p^{(r)+}) + \Sigma_i(Y_p^{(r)-}) - 2\Sigma_i\right)\right\}\Delta\tilde{\mathbf{f}}_p^{(i)} +$$

$$+\frac{1}{4\sqrt{\Delta}}\sum_{i,j=1}^{m}\left(\Sigma_i(Y_p^{(j)+}) - \Sigma_i(Y_p^{(j)-})\right)\left(\Delta\tilde{\mathbf{f}}_p^{(i)}\Delta\tilde{\mathbf{f}}_p^{(j)} + V_p^{(ji)}\right), \qquad (10.53)$$

где введены такие же обозначения, как в (10.46).

Вариант численной схемы (10.53) для случая скалярного шума ($m = 1$) имеет вид

$$\mathbf{y}_{p+1} = \mathbf{y}_p + \frac{1}{2}\left(\mathbf{a} + \mathbf{a}(\mathbf{y}_{p+1})\right)\Delta + \frac{\Delta\tilde{\mathbf{f}}_p}{4}\left(\Sigma(Y_p^+) + \Sigma(Y_p^-) + 2\Sigma(Z_p)\right)$$

$$+\frac{1}{4\sqrt{\Delta}}\left(\Sigma(Y_p^+) - \Sigma(Y_p^-)\right)\left(\left(\Delta\tilde{\mathbf{f}}_p\right)^2 - \Delta\right), \qquad (10.54)$$

где сохранен смысл обозначений, введенных в (10.47).

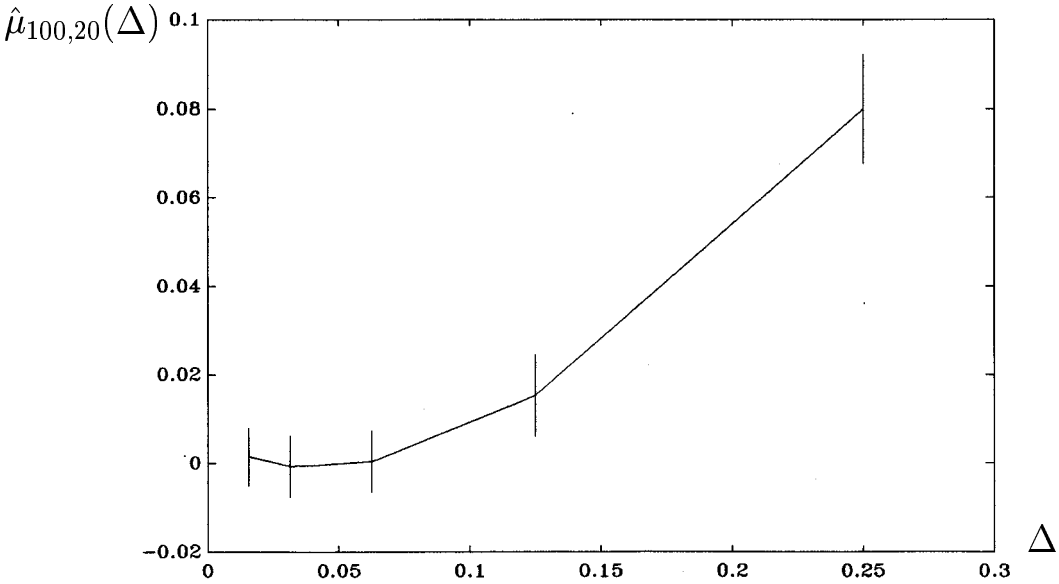

Рис. 10.15. Результат численного эксперимента 10.12.

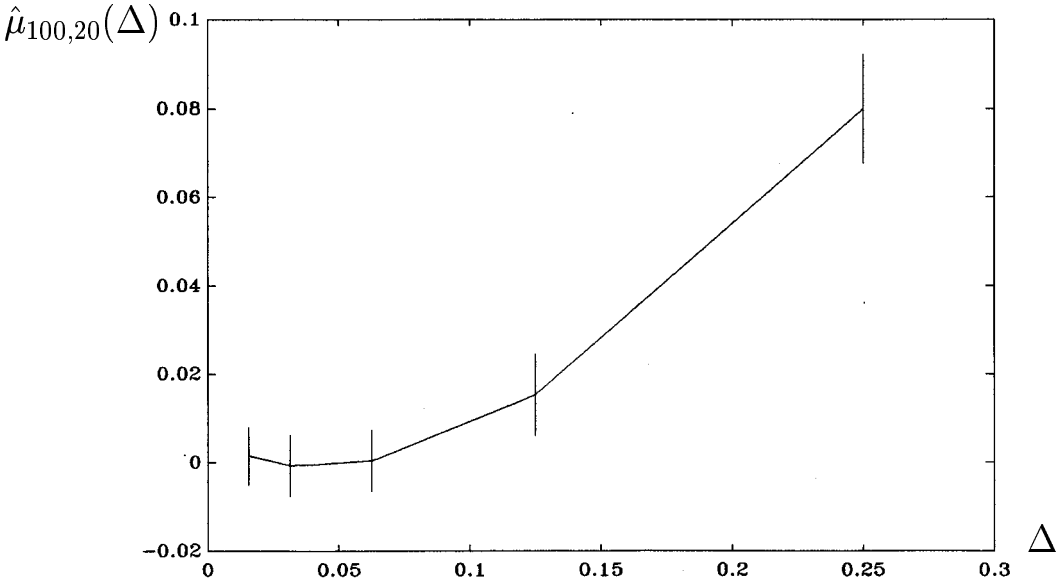

Рис. 10.16. Результат численного эксперимента 10.13.

Отметим, что численные схемы (10.51)–(10.54) являются A-устойчивыми на классе тестовых стохастических дифференциальных уравнений Ито с аддитивным шумом.

Численный эксперимент 10.12 (рис. 10.15). *Повторить численный эксперимент* 10.1 *для неявного слабого конечно-разностного численного метода порядка точности* 2.0 *вида* (10.52) (*не строить зависимость* $|\hat{\mu}_{100,20}(\Delta)|$).

Численный эксперимент 10.13 (рис. 10.16). *Повторить численный эксперимент* 10.1 *для неявного слабого конечно-разностного численного метода порядка точности* 2.0 *вида* (10.54) (*не строить зависимость* $|\hat{\mu}_{100,20}(\Delta)|$).

10.7 Численные методы типа "предсказатель–корректор"

В [96] предложено семейство специфических слабых численных методов, называемых численными методами типа "предсказатель–корректор". В качестве предсказателя выступает случайная величина $\bar{\mathbf{y}}_{p+1}$, вычисленная на фиксированном p-м шаге интегрирования с помощью явной слабой численной схемы некоторого порядка точности γ. Роль корректора играет неявная слабая численная схема того же порядка точности γ, в которой неявность $\mathbf{y}_{p+1}$ в правой части заменяется на величину $\bar{\mathbf{y}}_{p+1}$. Например, семейство слабых численных методов типа "предсказатель–корректор" порядка точности 1.0 имеет вид [86]

$$\mathbf{y}_{p+1} = \mathbf{y}_p + \{k\bar{\mathbf{a}}_\eta(\bar{\mathbf{y}}_{p+1}, \tau_{p+1}) + (1-k)\bar{\mathbf{a}}_\eta(\mathbf{y}_p, \tau_p)\}\,\Delta$$
$$+ \sum_{j=1}^{m} \{\eta\Sigma_j(\bar{\mathbf{y}}_{p+1}, \tau_{p+1}) + (1-\eta)\Sigma(\mathbf{y}_p, \tau_p)\}\,\Delta\tilde{\mathbf{f}}_p^{(j)}, \qquad (10.55)$$

где $k, \eta \in [0,1]$; $\bar{\mathbf{y}}_{p+1}$ определяется правой частью (10.49);

$$\bar{\mathbf{a}}_\eta(\mathbf{x}, t) = \mathbf{a}(\mathbf{x}, t) - \eta \sum_{i=1}^{m}\sum_{l=1}^{n} \Sigma^{(li)}(\mathbf{x}, t)\frac{\partial \Sigma_i}{\partial \mathbf{x}^{(l)}}(\mathbf{x}, t);$$

остальные обозначения, входящие в (10.55), такие же, как в (10.44).

В [96] получен следующий слабый численный метод типа "предсказатель–корректор" порядка точности 2.0:

$$\mathbf{y}_{p+1} = \mathbf{y}_p + \frac{1}{2}\left(\mathbf{a} + \mathbf{a}(\bar{\mathbf{y}}_{p+1}, \tau_{p+1})\right)\Delta + U_p,$$

$$U_p = \sum_{j=1}^{m}\left(\Sigma_j + \frac{1}{2}\Delta L\Sigma_j\right)\Delta\tilde{\mathbf{f}}_p^{(j)} + \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{m} G_0^{(i)}\Sigma_j\left(\Delta\tilde{\mathbf{f}}_p^{(i)}\Delta\tilde{\mathbf{f}}_p^{(j)} + V_p^{(ij)}\right);$$

$$\bar{\mathbf{y}}_{p+1} = \mathbf{y}_p + \mathbf{a}\Delta + U_p + \frac{1}{2}L\mathbf{a}\Delta^2 + \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{m} G_0^{(j)}\mathbf{a}\Delta\cdot\Delta\tilde{\mathbf{f}}_p^{(j)};$$

остальные обозначения такие же, как в (10.44).

Предложим следующий слабый конечно-разностный численный метод типа "предсказатель–корректор" порядка точности 2.0:

$$\mathbf{y}_{p+1} = \mathbf{y}_p + \frac{1}{2}\left(\mathbf{a} + \mathbf{a}(\bar{\mathbf{y}}_{p+1})\right)\Delta + U_p, \tag{10.56}$$

$$U_p = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{m}\left\{\Sigma_i(Z_p) + \Sigma_i + \frac{1}{2}\sum_{r=1}^{m}\left(\Sigma_i(Y_p^{(r)+}) + \Sigma_i(Y_p^{(r)-}) - 2\Sigma_i\right)\right\}\Delta\tilde{\mathbf{f}}_p^{(i)}$$
$$+\frac{1}{4\sqrt{\Delta}}\sum_{i,j=1}^{m}\left(\Sigma_i(Y_p^{(j)+}) - \Sigma_i(Y_p^{(j)-})\right)\left(\Delta\tilde{\mathbf{f}}_p^{(i)}\Delta\tilde{\mathbf{f}}_p^{(j)} + V_p^{(ji)}\right);$$

$$\bar{\mathbf{y}}_{p+1} = \mathbf{y}_p + \frac{1}{2}\left(\mathbf{a} + \mathbf{a}(Z_p)\right)\Delta + U_p + \frac{1}{4}\sqrt{\Delta}\sum_{i=1}^{m}\left(\mathbf{a}(Y_p^{(i)+}) - \mathbf{a}(Y_p^{(i)-})\right)\Delta\tilde{\mathbf{f}}_p^{(i)}$$
$$+\frac{1}{4}\Delta\sum_{i=1}^{m}\left(\mathbf{a}(Y_p^{(i)+}) + \mathbf{a}(Y_p^{(i)-}) - 2\mathbf{a}\right);$$

$Y_p^{(j)\pm} = \mathbf{y}_p \pm \sqrt{\Delta}\Sigma_j$; $Z_p = \mathbf{y}_p + \mathbf{a}\Delta$; остальные обозначения такие же, как в (10.46).

В [86] на примере численных экспериментов показано, что слабые численные методы типа "предсказатель–корректор" обладают хорошей численной устойчивостью, хотя и являются явными численными методами.

Численный эксперимент 10.14 (рис. 10.17). *Повторить численный эксперимент* 10.1 *для слабого численного метода порядка точности* 1.0 *типа "предсказатель–корректор" вида* (10.55) *при* $\eta = 0$, $k = \frac{1}{2}$, $a = 1$, $b = 0.01$, $\Delta = 2^{-j}$; $j = 3, 4, 5, 6$. *В качестве* $\bar{\mathbf{y}}_{p+1}$ *в* (10.55) *взять правую часть численного метода* (10.49). *Для моделирования приращений винеровского процесса использовать независимые случайные величины* $\Delta\tilde{f}_p$; $p = 0, 1, \ldots, N-1$; $N = T/\Delta$, *для которых* $\mathsf{P}\{\Delta\tilde{f}_p = \pm\sqrt{\Delta}\} = \frac{1}{2}$.

Численный эксперимент 10.15 (рис. 10.18). *Повторить численный эксперимент* 10.14 *для слабого численного метода порядка точности* 2.0 *типа "предсказатель–корректор" вида* (10.56) (*не строить зависимость* $|\hat{\mu}_{100,20}(\Delta)|$). *Для моделирования повторных стохастических интегралов Ито, входящих в* (10.56), *использовать те же случайные величины, что и в численном эксперименте* 10.14.

10.8 О сходимости слабых численных методов

Сходимость слабых численных методов рассмотрим на примере численных методов порядка точности 2.0.

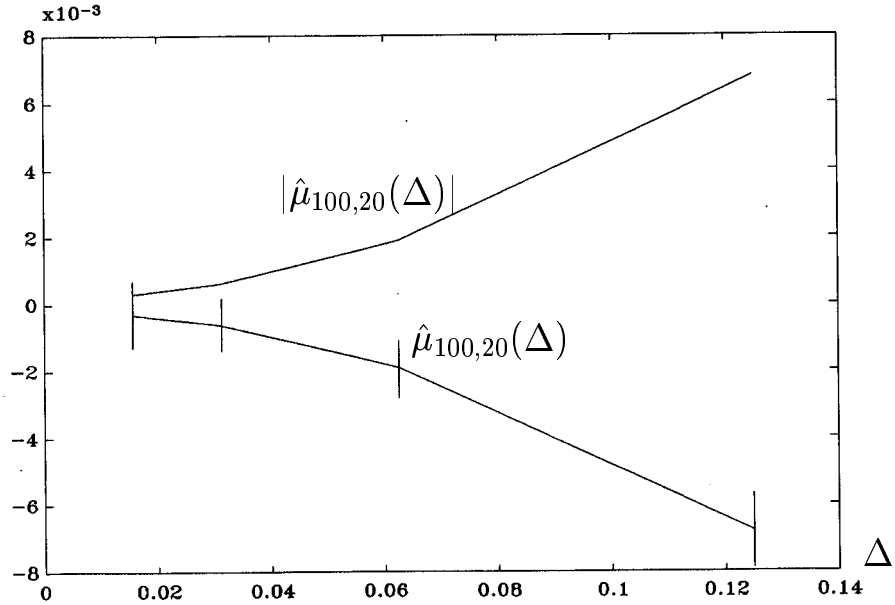

Рис. 10.17. Результат численного эксперимента 10.14.

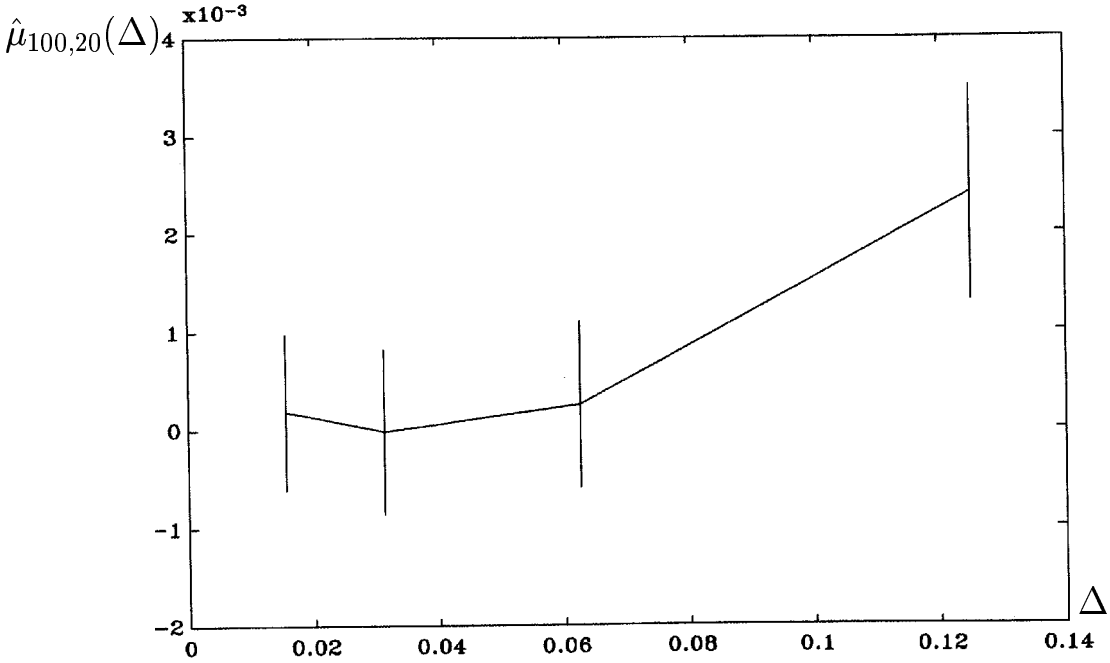

Рис. 10.18. Результат численного эксперимента 10.15.

Приведем выражения условных математических ожиданий

$$\mathsf{M}\left\{\prod_{g=1}^{k}\left(\mathbf{y}_{\tau_{p+1}}^{(i_g)}-\mathbf{y}_{\tau_p}^{(i_g)}\right)|\mathcal{F}_{\tau_p}\right\};\ k=1,2,\ldots,5;\ i_1,\ldots,i_5=1,\ldots,m,$$

где $\mathbf{y}_{\tau_p};\ p=0,1,\ldots,N$ определяется из (10.7). Имеем

$$\mathsf{M}\left\{\mathbf{y}_{\tau_{p+1}}^{(i_1)}-\mathbf{y}_{\tau_p}^{(i_1)}|\mathcal{F}_{\tau_p}\right\}=\mathbf{a}^{(i_1)}\Delta+\frac{1}{2}L\mathbf{a}^{(i_1)}\Delta^2+O(\Delta^3), \qquad (10.57)$$

$$\mathsf{M}\left\{\prod_{g=1}^{2}\left(\mathbf{y}_{\tau_{p+1}}^{(i_g)}-\mathbf{y}_{\tau_p}^{(i_g)}\right)|\mathcal{F}_{\tau_p}\right\}=\Delta\sum_{j=1}^{m}\Sigma^{(i_2j)}\Sigma^{(i_1j)}+$$

$$+\frac{\Delta^2}{2}\left\{2\mathbf{a}^{(i_1)}\mathbf{a}^{(i_2)}+\sum_{j=1}^{m}\left(\Sigma^{(i_1j)}L\Sigma^{(i_2j)}+\Sigma^{(i_1j)}G_0^{(j)}\mathbf{a}^{(i_2)}+L\Sigma^{(i_1j)}\Sigma^{(i_2j)}\right.\right.$$

$$\left.\left.+G_0^{(j)}\mathbf{a}^{(i_1)}\Sigma^{(i_2j)}\right)+\sum_{i,j=1}^{m}G_0^{(i)}\Sigma^{(i_1j)}G_0^{(i)}\Sigma^{(i_2j)}\right\}+O(\Delta^3), \qquad (10.58)$$

$$\mathsf{M}\left\{\prod_{g=1}^{3}\left(\mathbf{y}_{\tau_{p+1}}^{(i_g)}-\mathbf{y}_{\tau_p}^{(i_g)}\right)|\mathcal{F}_{\tau_p}\right\}=\Delta^2\sum_{j=1}^{m}\left(\mathbf{a}^{(i_1)}\Sigma^{(i_2j)}\Sigma^{(i_3j)}+\mathbf{a}^{(i_2)}\Sigma^{(i_1j)}\Sigma^{(i_3j)}\right.$$

$$\left.+\mathbf{a}^{(i_3)}\Sigma^{(i_1j)}\Sigma^{(i_2j)}\right)+\sum_{i,j,k,l=1}^{m}\left(\Sigma^{(i_1i)}\Sigma^{(i_2j)}G_0^{(k)}\Sigma^{(i_3l)}+\Sigma^{(i_1i)}\Sigma^{(i_3j)}G_0^{(k)}\Sigma^{(i_2l)}+\right.$$

$$\left.+\Sigma^{(i_2i)}\Sigma^{(i_3j)}G_0^{(k)}\Sigma^{(i_1l)}\right)G^{(ijkl)}(\Delta)+O(\Delta^3), \qquad (10.59)$$

$$\mathsf{M}\left\{\prod_{g=1}^{4}\left(\mathbf{y}_{\tau_{p+1}}^{(i_g)}-\mathbf{y}_{\tau_p}^{(i_g)}\right)|\mathcal{F}_{\tau_p}\right\}=\Delta^2\sum_{k,q=1}^{m}\left(\Sigma^{(i_1k)}\Sigma^{(i_2k)}\Sigma^{(i_3q)}\Sigma^{(i_4q)}+\right.$$

$$\left.+\Sigma^{(i_1k)}\Sigma^{(i_2q)}\Sigma^{(i_3k)}\Sigma^{(i_4q)}+\Sigma^{(i_1k)}\Sigma^{(i_2q)}\Sigma^{(i_3q)}\Sigma^{(i_4k)}\right)+$$

$$+\sum_{i,j,k,l=1}^{m}\Sigma^{(i_1i)}\Sigma^{(i_2j)}\Sigma^{(i_3k)}\Sigma^{(i_4l)}Q^{(ijkl)}(\Delta)+O(\Delta^3), \qquad (10.60)$$

$$\mathsf{M}\left\{\prod_{g=1}^{5}\left(\mathbf{y}_{\tau_{p+1}}^{(i_g)}-\mathbf{y}_{\tau_p}^{(i_g)}\right)|\mathcal{F}_{\tau_p}\right\}=O(\Delta^3), \qquad (10.61)$$

где

$$G^{(ijkl)}(\Delta)=\begin{cases}\Delta^2 & \text{при } i=j=k=l\\ \frac{1}{2}\Delta^2 & \text{при } k\neq l, i=k, j=l \text{ или } k\neq l, i=l, j=k\\ 0 & \text{иначе}\end{cases},$$

$$Q^{(ijkl)}(\Delta)=\begin{cases}3\Delta^2 & \text{при } i=j=k=l\\ \Delta^2 & \text{среди } i,j,k,l \text{ две пары равных чисел}\\ 0 & \text{иначе}\end{cases};$$

$i_1,\ldots,i_5=1,\ldots,m$; все функции в правых частях (10.57)–(10.61) вычислены в точке $\mathbf{y}_{\tau_p}$.

Нетрудно проверить, что для численной схемы (10.8) получаем такие же по виду выражения для условных моментов

$$\mathsf{M}\left\{\prod_{g=1}^{k}\left(\mathbf{y}_{\tau_{p+1}}^{(i_g)}-\mathbf{y}_{\tau_p}^{(i_g)}\right)|\mathcal{F}_{\tau_p}\right\};\ k=1,2,\ldots,5;\ i_1,\ldots,i_5=1,\ldots,m,$$

как и (10.57)–(10.61). Далее, используя теорему 10.3, можно показать, что численный метод (10.8) имеет порядок слабой сходимости 2.0.

Если мы рассматриваем явные конечно-разностные слабые численные методы (10.44), (10.46), то с помощью обычного разложения Тейлора правые части данных численных методов могут быть приведены к выражениям, с помощью которых нетрудно получить равенства вида (10.57)–(10.61) для численных методов (10.44), (10.46). Далее слабая сходимость численных методов (10.44), (10.46) порядка точности 2.0 проверяется аналогично тому, как это делается для численного метода (10.8) [86]. По рассмотренной схеме можно также обосновать сходимость слабых численных методов типа "предсказатель–корректор".

Поясним теперь, как обосновывается сходимость неявных слабых численных методов на примере слабых численных методов порядка точности 2.0.

Используя разложение Тейлора–Ито и слабые аппроксимации повторных стохастических интегралов Ито, можно получить следующее приближенное представление [70, 86, 96]:

$$\begin{gathered}\mathbf{x}_{\tau_{p+1}}-\mathbf{x}_{\tau_p}\approx\left\{\tilde{\alpha}\mathbf{a}(\mathbf{x}_{\tau_{p+1}},\tau_{p+1})+(1-\tilde{\alpha})\mathbf{a}(\mathbf{x}_{\tau_p},\tau_p)\right\}\Delta+\\ +\frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{m}G_0^{(i)}\Sigma_j(\mathbf{x}_{\tau_p},\tau_p)\left(\Delta\tilde{\mathbf{f}}_p^{(i)}\Delta\tilde{\mathbf{f}}_p^{(j)}+V_p^{(ij)}\right)+\\ +\sum_{j=1}^{m}\left(\Sigma_j(\mathbf{x}_{\tau_p},\tau_p)+\frac{\Delta}{2}\left(L\Sigma_j(\mathbf{x}_{\tau_p},\tau_p)+(1-2\tilde{\alpha})G_0^{(j)}\mathbf{a}(\mathbf{x}_{\tau_p},\tau_p)\right)\right)\Delta\tilde{\mathbf{f}}_p^{(j)}\\ +\frac{1}{2}(1-2\tilde{\alpha})\left\{\tilde{\beta}L\mathbf{a}(\mathbf{x}_{\tau_p},\tau_p)+(1-\tilde{\beta})L\mathbf{a}(\mathbf{x}_{\tau_{p+1}},\tau_{p+1})\right\}\Delta^2,\end{gathered}\tag{10.62}$$

где $\tilde{\alpha},\tilde{\beta}\in[0,1]$; знак " $\approx$ " означает, что левая и правая части (10.62) имеют одинаковые условные моменты, необходимые для обеспечения слабой сходимости порядка 2.0 численной схемы (10.50) (см. теорему 10.3); случайные величины $\Delta\tilde{\mathbf{f}}_p^{(i)}$, $V_p^{(ij)}$ такие же, как в (10.8). С помощью представления (10.62) и теоремы 10.3 можно доказать слабую сходимость порядка 2.0 семейства неявных численных методов (10.50), а с помощью обычного разложения Тейлора и тех же аргументов можно доказать слабую сходимость порядка 2.0 неявных конечно-разностных

численных схем (10.51)–(10.54). Более подробно сходимость слабых численных методов рассмотрена в [70, 86, 96].

10.9 Устойчивость слабых численных методов в случае мультипликативного шума

При решении прикладных задач стохастические дифференциальные уравнения с мультипликативным шумом встречаются отнюдь не реже стохастических дифференциальных уравнений с аддитивным шумом. В связи с этим возникает необходимость построения концепции устойчивости численных методов решения стохастических дифференциальных уравнений с мультипликативным шумом.

В частности, в [94, 95] предлагается рассматривать устойчивость численных методов в случае мультипликативного шума на следующем классе тестовых стохастических дифференциальных уравнений Стратоновича:

$$dx_t = (1-\alpha)\lambda x_t dt + \sqrt{\alpha}\gamma x_t d^* f_t, \tag{10.63}$$

где $\lambda = \lambda_1 + i\lambda_2$; $\gamma = \gamma_1 + i\gamma_2$; f_t — скалярный стандартный винеровский процесс; $\alpha \in [0,2]$; i — мнимая единица. Параметр α регулирует вес сносового и диффузионного слагаемых в правой части (10.63).

Выберем следующие значения γ_1, γ_2 [94, 95]: $\gamma_1 = -\sqrt{0.5(|\lambda| + \lambda_1)}$, $\gamma_2 = -\lambda_2/(2\gamma_1)$, т. е. $\gamma^2 = \lambda$.

Концепция слабых численных методов позволяет изучать устойчивость численных методов с неявностью не только в систематических, но и в стохастических членах относительно класса (10.63) тестовых уравнений. Именно такие слабые численные методы, как будет видно далее, обладают [94, 95] наилучшей устойчивостью. Возможность применения слабых численных методов с неявностью в стохастических членах к стохастическому дифференциальному уравнению (10.63) объясняется возможностью выбора ограниченных случайных величин, входящих в рассматриваемые численные методы и играющих роль слабых аппроксимаций стохастических интегралов Ито. Более детально этот вопрос рассмотрен в [86. С. 336–337].

Предположим, что применение некоторой численной схемы с постоянным шагом интегрирования Δ к тестовому уравнению (10.63) дает следующий результат [94, 95]:

$$\mathbf{y}_{\tau_{p+1}} = G(\lambda\Delta, \alpha)\mathbf{y}_{\tau_p}, \tag{10.64}$$

где G — случайная комплекснозначная функция, которая независима с $\mathbf{y}_{\tau_0}, \mathbf{y}_{\tau_1}, \ldots, \mathbf{y}_{\tau_{p+1}}$; $\tau_p = p\Delta$; $p = 0, 1, \ldots, N-1$.

В [94, 95] вводится область сильной устойчивости Γ_α численной схемы, которая является подмножеством комплексной плоскости C и определяется равенством

$$\Gamma_\alpha = \{\lambda\Delta \in C : \mathrm{Re}(\lambda) < 0, \mathrm{ess}_\omega\sup|G(\lambda\Delta,\alpha)|^2 < 1\}, \tag{10.65}$$

где $\mathrm{ess}_\omega\sup$ — essential supremum по всем $\omega \in \Omega$.

Если для данной численной схемы область Γ_α при некотором $\alpha \in [0,2]$ содержит всю левую полуплоскость комплексной плоскости C, то соответствующую численную схему будем называть сильно A-устойчивой [94, 95] при данном $\alpha \in [0,2]$.

Главное различие при исследовании устойчивости численных методов решения стохастических дифференциальных уравнений с аддитивными и мультипликативными шумами заключается в том, что в случае мультипликативного шума в выражение функции G из (10.64) входят случайные величины, а в случае аддитивного шума функция G из (9.71) является неслучайной.

Отметим, что, очевидно, класс тестовых стохастических дифференциальных уравнений, относительно которого исследуется устойчивость численных методов, сам по себе должен обладать хорошей устойчивостью решений. Кроме того, устойчивость решений тестовых уравнений должна наблюдаться при $\mathrm{Re}(\lambda) < 0$ (см. (10.65)) и в достаточно широком диапазоне изменения α. В связи с этим поясним, почему выбор класса (10.63) [94, 95] тестовых уравнений оправдан.

Поскольку точное решение уравнения (10.63) имеет вид [94]

$$x_t = e^{(1-\alpha)\lambda t + \sqrt{\alpha}\gamma f_t} x_0,$$

то [94, 95]

$$(x_t)^\nu = (x_0)^\nu + \int\limits_0^t \nu(1-\alpha)\lambda(x_s)^\nu ds + \int\limits_0^t \nu\sqrt{\alpha}\gamma(x_s)^\nu d^* f_s =$$

$$= (x_0)^\nu + \int\limits_0^t \left(\nu(1-\alpha)\lambda + 0.5\nu^2\alpha\gamma^2\right)(x_s)^\nu ds + \int\limits_0^t \nu\sqrt{\alpha}\gamma(x_s)^\nu df_s \text{ с в.1, } \nu \geq 0. \tag{10.66}$$

С помощью (10.66) получаем

$$|\mathsf{M}\{(x_t)^\nu\}| = |\mathsf{M}\{(x_0)^\nu\}| e^{\lambda_1 t\nu(1+\alpha(\frac{\nu}{2}-1))}. \tag{10.67}$$

Это означает, что условие $\lambda_1 = \mathrm{Re}(\lambda) \leq 0$ при $\nu \geq 0$, $\alpha \in [0,1]$ обеспечивает выполнение оценки [94, 95]: $|\mathsf{M}\{(x_t)^\nu\}| \leq |\mathsf{M}\{(x_0)^\nu\}|$, которая

означает устойчивость всех моментов решения тестового уравнения (10.63). Если $\alpha \in [1,2]$, то согласно (10.67) имеем устойчивость моментов x_t порядка $\nu \geq 2(1-1/\alpha)$ [94, 95].

В [94, 95] найдены точные выражения функции $H_\alpha(\lambda_1\Delta, \lambda_2\Delta) \stackrel{\text{def}}{=} \text{ess}_\omega\sup|G(\lambda\Delta,\alpha)|^2$ для явного, полунеявного, полностью неявного, симметричных и супернеявных слабых методов Эйлера. Кроме того, в [94, 95] визуализированы в координатах $\lambda_1\Delta$, $\lambda_2\Delta$, α семейства областей Γ_α сильной устойчивости для указанных численных методов.

Для явного слабого метода Эйлера

$$y_{\tau_{p+1}} = y_{\tau_p} + a(y_{\tau_p}, \tau_p)\Delta + \sigma(y_{\tau_p}, \tau_p)\sqrt{\Delta}\zeta_p. \tag{10.68}$$

Здесь и далее $\tau_p = p\Delta$; $p = 0, 1, \ldots, N-1$; $a, \sigma : \Re^1 \times [0,T] \to \Re^1$; ζ_p — независимые случайные величины, для которых $\mathsf{P}\{\zeta_p = \pm 1\} = 1/2$, функция $H_\alpha(\lambda_1\Delta, \lambda_2\Delta)$ имеет вид [94, 95]

$$H_\alpha(\lambda_1\Delta, \lambda_2\Delta) = (1 + (1-\alpha/2)\,\lambda_1\Delta)^2 + (1-\alpha/2)^2\,(\lambda_2\Delta)^2 +$$

$$+\alpha|\lambda|\Delta + \sqrt{2\alpha\Delta(|\lambda| + \lambda_1)}\,(1 + (1-\alpha/2)\,|\lambda|\Delta)\,;\ \alpha \in [0,2]. \tag{10.69}$$

Из (10.69) следует, что при $\alpha = 0$ (детерминированный случай) область Γ_α — внутренность круга с центром в точке $(-1,0)$ и с радиусом 1. Для фиксированного $\alpha \in (0,1)$ область Γ_α — внутренность соответствующего эллипса, симметричного вдоль оси $\lambda_1\Delta$. При $\alpha \geq 1$ численный метод (10.68) неустойчив по определению (10.65).

Для полунеявного слабого метода Эйлера

$$y_{\tau_{p+1}} = y_{\tau_p} + a(y_{\tau_{p+1}}, \tau_{p+1})\Delta + \sigma(y_{\tau_p}, \tau_p)\sqrt{\Delta}\zeta_p \tag{10.70}$$

функция $H_\alpha(\lambda_1\Delta, \lambda_2\Delta)$; $\alpha \in [0,2]$ имеет вид [94, 95]

$$H_\alpha(\lambda_1\Delta, \lambda_2\Delta) = \frac{1 + \sqrt{2\alpha\Delta(|\lambda| + \lambda_1)} + \alpha|\lambda|\Delta}{(1 - (1-\alpha/2)\,\lambda_1\Delta)^2 + (1-\alpha/2)^2\,(\lambda_2\Delta)^2}. \tag{10.71}$$

Согласно (10.71) при $\alpha = 0$ область Γ_α — внешность круга с центром в точке $(1,0)$ и с радиусом 1. При изменении α на отрезке $[0,1]$ семейство областей Γ_α в координатах $\lambda_1\Delta$, $\lambda_2\Delta$, α представляет собой внешность соответствующей поверхности [94, 95], расширяющейся с ростом α. Отметим [95], что при $\alpha \in [0, 0.2]$ численный метод (10.70) сильно A-устойчив. При росте α, когда $\alpha > 0.2$, область, в которой численный метод (10.70) не является сильно устойчивым, увеличивается и распространяется в левую полуплоскость комплексной плоскости C [95].

Приведенные результаты показывают, что при достаточно больших α и достаточно малых Δ численные методы (10.68), (10.70) оказываются неустойчивыми по критерию (10.65), однако численный метод (10.70) все же несколько более устойчив, чем численный метод (10.68).

Рассмотрим два симметричных слабых метода Эйлера [95]:

$$y_{\tau_{p+1}} = y_{\tau_p} + 0.5\left\{a(y_{\tau_p}, \tau_p) + a(y_{\tau_{p+1}}, \tau_{p+1})\right\}\Delta + \sigma(y_{\tau_p}, \tau_p)\sqrt{\Delta}\zeta_p, \quad (10.72)$$

$$y_{\tau_{p+1}} = y_{\tau_p} + 0.5\left\{\bar{a}(y_{\tau_p}, \tau_p) + \bar{a}(y_{\tau_{p+1}}, \tau_{p+1})\right\}\Delta +$$
$$+0.5\left\{\sigma(y_{\tau_p}, \tau_p) + \sigma(y_{\tau_{p+1}}, \tau_{p+1})\right\}\sqrt{\Delta}\zeta_p, \quad (10.73)$$

где $\bar{a}(x,t) \stackrel{\text{def}}{=} a(x,t) - \frac{1}{2}\sigma(x,t)\frac{\partial\sigma}{\partial x}(x,t)$.

При $\alpha = 0$ численные методы (10.72), (10.73) являются сильно A-устойчивыми. Однако при росте α вплоть до единицы области Γ_α сильной устойчивости этих численных методов уменьшаются, причем численный метод (10.73) всюду в C сильно неустойчив при $\alpha \geq 1$ [95].

Рассмотрим семейство слабых методов Эйлера [86, 94] вида

$$y_{\tau_{p+1}} = y_{\tau_p} + \left\{k\bar{a}_\eta(y_{\tau_{p+1}}, \tau_{p+1}) + (1-k)\bar{a}_\eta(y_{\tau_p}, \tau_p)\right\}\Delta +$$
$$+\left\{\eta\sigma(y_{\tau_{p+1}}, \tau_{p+1}) + (1-\eta)\sigma(y_{\tau_p}, \tau_p)\right\}\sqrt{\Delta}\zeta_p, \quad (10.74)$$

где $\bar{a}_\eta(x,t) \stackrel{\text{def}}{=} a(x,t) - \eta\sigma(x,t)\frac{\partial\sigma}{\partial x}(x,t)$; k, η — вещественные параметры, которые могут быть отрицательными и превышающими по модулю единицу. Напомним, что если k или η не принадлежат отрезку $[0,1]$, то численный метод (10.74) называется [94] супернеявным методом Эйлера.

Если $k = \eta = 1$ в (10.74), то такой численный метод назывался ранее полностью неявным слабым методом Эйлера. Для этого численного метода имеем [94]

$$H_\alpha(\lambda_1\Delta, \lambda_2\Delta) = \Big|(1-(1-3/(2\alpha))\lambda_1\Delta)^2 + (1-3/(2\alpha))^2(\lambda_2\Delta)^2 + \alpha|\lambda|\Delta$$
$$-\sqrt{2\alpha\Delta(|\lambda| + \lambda_1)}\,|1-(1-3/(2\alpha))|\lambda|\Delta|\Big|^{-1}. \quad (10.75)$$

Согласно (10.75) [94] при увеличении α от нуля до $\alpha \approx 0.3$ полностью неявный слабый метод Эйлера сильно A-устойчив. При дальнейшем увеличении α до единицы рассматриваемый численный метод постепенно теряет сильную устойчивость (область Γ_α уменьшается), однако при $\alpha > 1$ сильная устойчивость его все более возрастает (область Γ_α

увеличивается). При достаточно больших α ($\alpha \approx 2$) полностью неявный слабый метод Эйлера почти сильно A-устойчив [94]. Поскольку $\alpha = 2$ соответствует тестовому стохастическому дифференциальному уравнению Ито без сноса, то полностью неявный слабый метод Эйлера целесообразно применять к такого типа уравнениям, так как он при $\alpha = 2$ обладает высокой степенью сильной устойчивости [94].

В [94] показано, что супернеявные слабые методы Эйлера при $k = 1$, $\eta = -2$ и $k = 1$, $\eta = -5$ обладают существенно лучшей сильной устойчивостью (они почти сильно A-устойчивы для всех $\alpha \in [0, 1]$), чем полностью неявный слабый метод Эйлера ($k = \eta = 1$) и тем более явный слабый метод Эйлера.

Таким образом, супернеявные слабые методы Эйлера, в частности, соответствующие $k = 1$, $\eta = -2$ и $k = 1$, $\eta = -5$, оказываются более предпочтительными по устойчивости, чем другие, рассмотренные ранее модификации метода Эйлера.

10.10 Численное моделирование стохастических дифференциальных уравнений с использованием метода Монте–Карло и уменьшение дисперсии

Рассмотрим функционал вида $\mathsf{M}\{g(\mathbf{x}_T)\}$, где $\mathbf{x}_t$, $t \in [0, T]$ — решение стохастического дифференциального уравнения Ито (7.18), а $g(\mathbf{x}) : \Re^n \to \Re^1$ — некоторая заданная функция.

Пусть $\mathbf{y}_{\tau_p}$; $p = 0, 1, \ldots, N$ — слабая дискретная аппроксимация процесса $\mathbf{x}_t$, $t \in [0, T]$, которая соответствует разбиению $\{\tau_p\}_{p=0}^{N}$ промежутка $[0, T]$ с рангом дробления Δ_N, причем $0 = \tau_0 < \tau_1 < \ldots < \tau_N = T$. Согласно методу Монте–Карло оценка для величины $\mathsf{M}\{g(\mathbf{y}_T)\}$ имеет вид

$$\zeta_M = \frac{1}{M} \sum_{j=1}^{M} g(\mathbf{y}_T(\omega_j)),$$

где $\mathbf{y}_T(\omega_j)$; $j = 1, \ldots, M$ — независимые реализации случайной величины $\mathbf{y}_T$.

Введем ошибку ε, соответствующую разнице между истинным значением функционала $\mathsf{M}\{g(\mathbf{x}_T)\}$ и его оценкой ζ_M [70, 86]: $\varepsilon \stackrel{\text{def}}{=} \zeta_M - \mathsf{M}\{g(\mathbf{x}_T)\} = \varepsilon_{\text{syst}} + \varepsilon_{\text{stat}}$, где $\varepsilon_{\text{syst}} = \mathsf{M}\{g(\mathbf{y}_T)\} - \mathsf{M}\{g(\mathbf{x}_T)\}$; $\varepsilon_{\text{stat}} = \varepsilon - \varepsilon_{\text{syst}} = \zeta_M - \mathsf{M}\{g(\mathbf{y}_T)\}$.

Систематическая ошибка $\varepsilon_{\text{syst}}$ определяется используемой слабой

численной схемой и удовлетворяет оценке $|\varepsilon_{\text{syst}}| \le C(\Delta_N)^\gamma$, где $C < \infty$ — постоянная, которая не зависит от Δ_N, а $\gamma > 0$ — порядок соответствующего слабого численного метода.

Статистическая ошибка $\varepsilon_{\text{stat}}$ при $M \to \infty$ очевидно является асимптотически нормальной с нулевым математическим ожиданием и дисперсией вида $\mathsf{D}\{\varepsilon_{\text{stat}}\} = M^{-1}\mathsf{D}\{g(\mathbf{y}_T)\}$.

Отметим, что длина доверительного интервала убывает с ростом числа N независимых реализаций достаточно медленно — со скоростью $\sqrt{M}$. Таким образом, для получения достаточно малого доверительного интервала необходимо, чтобы дисперсия $\mathsf{D}\{g(\mathbf{y}_T)\}$ была небольшой, поскольку длина доверительного интервала пропорциональна $\sqrt{\mathsf{D}\{g(\mathbf{y}_T)\}}$. В [70, 86] отмечается, что при использовании для моделирования процесса $\mathbf{x}_t,\ t \in [0,T]$ слабых численных методов дисперсия $\mathsf{D}\{g(\mathbf{y}_T)\}$ оказывается достаточно близкой к дисперсии $\mathsf{D}\{g(\mathbf{x}_T)\}$, которая, в свою очередь, зависит от функции g и конкретного стохастического дифференциального уравнения и в ряде случаев может быть достаточно большой. В связи с этим возникает вопрос, возможно ли уменьшение дисперсии $\mathsf{D}\{g(\mathbf{x}_T)\}$?

В литературе [70, 86] известно несколько подходов к уменьшению такой дисперсии. Один из них был предложен Г.Н. Мильштейном в [70] (см. также [86]). Он основан на преобразовании Гирсанова исходной вероятностной меры P и переходе от процесса Ито $\mathbf{x}_t$ к новому процессу Ито $\hat{\mathbf{x}}_t$ и специальному корректирующему скалярному процессу z_t так, что $\mathsf{M}\{g(\hat{\mathbf{x}}_T)z_T\} = \mathsf{M}\{g(\mathbf{x}_T)\}$. При этом дисперсия $\mathsf{D}\{g(\hat{\mathbf{x}}_T)z_T\}$ может быть уменьшена путем специального выбора $\hat{\mathbf{x}}_T$ [70, 86]. Рассмотрим данный подход подробнее, руководствуясь работами [70, 86].

Пусть заданы вероятностное пространство $(\Omega, \mathcal{F}, \mathsf{P})$ и поток σ-алгебр $\{\mathcal{F}_\tau, \tau \in [0,T]\}$. Пусть также $\mathbf{x}_t^{s,\mathbf{x}} \in \Re^n$; $s \le t \le T$ — процесс Ито, являющийся решением следующего стохастического дифференциального уравнения Ито:

$$\mathbf{x}_t^{s,\mathbf{x}} = \mathbf{x} + \int\limits_s^t \mathbf{a}(\mathbf{x}_\tau^{s,\mathbf{x}}, \tau)d\tau + \int\limits_s^t \Sigma(\mathbf{x}_\tau^{s,\mathbf{x}}, \tau)d\mathbf{f}_\tau,$$

где неслучайные функции $\mathbf{a}(\mathbf{x},t) : \Re^n \times [0,T] \to \Re^n$, $\Sigma(\mathbf{x},t) : \Re^n \times [0,T] \to \Re^{n\times m}$ удовлетворяют условиям теоремы 1.6; $\mathbf{f}_\tau,\ \tau \in [0,T]$ — m-мерный и $\mathcal{F}_\tau$-измеримый при каждом $\tau \in [0,T]$ стандартный винеровский процесс с независимыми компонентами; $\mathbf{x} \in \Re^n$.

Рассмотрим функционал вида

$$u(\mathbf{x}, s) = \mathsf{M}\{g(\mathbf{x}_T^{s,\mathbf{x}})\}, \tag{10.76}$$

где $g(\mathbf{x}) : \Re^n \to \Re^1$ — заданная функция. В соответствии с (10.76) нашей целью является аппроксимация $u(\mathbf{x}, 0)$.

Предположим, что функции $g(\mathbf{x})$, $\mathbf{a}(\mathbf{x}, t)$, $\Sigma(\mathbf{x}, t)$ удовлетворяют условиям теоремы 2.6. Тогда функция $u(\mathbf{x}, s)$ является решением задачи

$$Lu(\mathbf{x}, s) = 0, \ u(\mathbf{y}, T) = g(\mathbf{y}), \tag{10.77}$$

для всех $(\mathbf{x}, s) \in (0, T) \times \Re^n$, $\mathbf{y} \in \Re^n$,

$$Lu(\mathbf{x}, s) = \frac{\partial u}{\partial s}(\mathbf{x}, s) + \sum_{i=1}^{n} \mathbf{a}^{(i)}(\mathbf{x}, s) \frac{\partial u}{\partial \mathbf{x}^{(i)}}(\mathbf{x}, s) +$$

$$+ \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^{n} \sum_{l=1}^{m} \Sigma^{(il)}(\mathbf{x}, s) \Sigma^{(jl)}(\mathbf{x}, s) \frac{\partial^2 u}{\partial \mathbf{x}^{(i)} \partial \mathbf{x}^{(j)}}(\mathbf{x}, s).$$

В [70] предлагается использовать преобразование Гирсанова (1.29) для преобразования исходной вероятностной меры P так, что процесс $\hat{\mathbf{f}}_t$ с компонентами $\hat{\mathbf{f}}_t^{(i)} = \mathbf{f}_t^{(i)} - \int\limits_0^t \mathbf{c}^{(i)}(\hat{\mathbf{x}}_\tau^{0,\mathbf{x}}, \tau) d\tau$; $i = 1, \ldots, m$ оказывается винеровским относительно вероятностной меры $\hat{\mathsf{P}}$, т. е. на новом вероятностном пространстве $(\Omega, \mathcal{F}, \hat{\mathsf{P}})$, мера $\hat{\mathsf{P}}$ абсолютно непрерывна относительно меры P и имеет производную Радона–Никодима вида

$$\frac{d\hat{\mathsf{P}}}{d\mathsf{P}} = \frac{z_t}{z_0}, \tag{10.78}$$

процессы Ито $\hat{\mathbf{x}}_t^{0,\mathbf{x}}$ и z_t удовлетворяют следующим стохастическим дифференциальным уравнениям Ито:

$$\hat{\mathbf{x}}_t^{0,\mathbf{x}} = \mathbf{x} + \int\limits_s^t \mathbf{a}(\hat{\mathbf{x}}_\tau^{0,\mathbf{x}}, \tau) d\tau + \int\limits_s^t \Sigma(\hat{\mathbf{x}}_\tau^{0,\mathbf{x}}, \tau) d\hat{\mathbf{f}}_\tau, \tag{10.79}$$

$$z_t = z_0 + \sum_{j=1}^{m} \int\limits_0^t z_\tau \mathbf{c}^{(j)}(\hat{\mathbf{x}}_\tau^{0,\mathbf{x}}, \tau) d\mathbf{f}_\tau^{(j)}; \tag{10.80}$$

$z_0 \neq 0$; $\mathbf{c}^{(j)}(\mathbf{x}, t) : \Re^n \times [0, T] \to \Re^1$ — заданная функция.

Используя (10.78)–(10.80), нетрудно получить [70, 86], что

$$\mathsf{M}\{g(\mathbf{x}_T^{0,\mathbf{x}})\} = \mathsf{M}\left\{g(\hat{\mathbf{x}}_T^{0,\mathbf{x}}) \frac{z_T}{z_0}\right\}. \tag{10.81}$$

Если предположить, что существуют решения уравнений (10.79) и (10.80), $u(\mathbf{x}, s) > 0$ при всех $(\mathbf{x}, s) \in \Re^n \times [0, T]$, и положить [70, 86]

$$\mathbf{c}^{(i)}(\mathbf{x}, s) = -\frac{1}{u(\mathbf{x}, s)} \sum_{j=1}^{n} \Sigma^{(ji)}(\mathbf{x}, s) \frac{\partial u}{\partial \mathbf{x}^{(j)}}(\mathbf{x}, s) \tag{10.82}$$

для всех $(\mathbf{x}, s) \in \Re^n \times [0, T]$; $i = 1, \ldots, m$, то с помощью (10.77), (10.79), (10.80), (10.82) и формулы Ито можно установить [70], [86], что

$$u(\hat{\mathbf{x}}_t^{0,\mathbf{x}}, t) z_t = u(\mathbf{x}, 0) z_0 \tag{10.83}$$

для всех $t \in [0, T]$. Теперь из (10.77) и (10.83) получаем

$$u(\mathbf{x}, 0) = g(\hat{\mathbf{x}}_T^{0,\mathbf{x}}) \frac{z_T}{z_0}, \tag{10.84}$$

т. е. величина $g(\hat{\mathbf{x}}_T^{0,\mathbf{x}}) \frac{z_T}{z_0}$ неслучайна и, следовательно, имеет нулевую дисперсию.

Казалось бы, величину $\mathsf{M}\left\{g(\hat{\mathbf{x}}_T^{0,\mathbf{x}}) \frac{z_T}{z_0}\right\}$ можно численно смоделировать с помощью слабых численных методов решения системы уравнений (10.79) и (10.80). Однако при получении (10.84) мы использовали представление (10.82), в которое входит неизвестная функция $u(\mathbf{x}, s)$ вида (10.76), являющаяся решением задачи (10.77), и аппроксимация значения которой при $s = 0$ является нашей исходной целью. Тем не менее если по каким-либо соображениям подобрана функция $\hat{u}(\mathbf{x}, s)$, которая достаточно близка к функции $u(\mathbf{x}, s)$, то можно надеяться, что $g(\hat{\mathbf{x}}_T^{0,\mathbf{x}}) \frac{z_T}{z_0}$ окажется случайной величиной с достаточно малой дисперсией при следующем выборе функции $\mathbf{c}(\mathbf{x}, t)$:

$$\mathbf{c}^{(i)}(\mathbf{x}, s) = -\frac{1}{\hat{u}(\mathbf{x}, s)} \sum_{j=1}^{n} \Sigma^{(ji)}(\mathbf{x}, s) \frac{\partial \hat{u}}{\partial \mathbf{x}^{(j)}}(\mathbf{x}, s); \ i = 1, \ldots, m.$$

Теперь, при таком выборе функции $\mathbf{c}(\mathbf{x}, s)$ с помощью слабых численных схем можно аппроксимировать величину $\mathsf{M}\left\{g(\hat{\mathbf{x}}_T^{0,\mathbf{x}}) \frac{z_T}{z_0}\right\}$ и тем самым аппроксимировать согласно (10.81) функционал $\mathsf{M}\{g(\mathbf{x}_T^{0,\mathbf{x}})\}$.

Мы предполагали ранее, что функция u является строго положительной. Это условие очевидно выполнено, если, в свою очередь, функция g строго положительна, что далеко не всегда выполнимо. В [70, 86] описан способ снятия условия $g > 0$.

Так, если функция g ограничена и не является строго положительной, то можно подобрать такую постоянную $K \in (0, +\infty)$, что функция $g + K$ будет строго положительной. Если же функция g не ограничена, то ее можно представить в виде разности двух неотрицательных функций g_+ и g_-. Далее для некоторой постоянной $K_1 \in (0, +\infty)$ функции $g_+ + K_1$ и $g_- + K_1$ будут строго положительными и при этом $g = (g_+ + K_1) - (g_- + K_1)$. Теперь видно, что описанный метод можно применять для строго положительных функций $g + K$, $g_+ + K_1$, $g_- + K_1$.

Глава 11

Численное моделирование решений стационарных систем линейных стохастических дифференциальных уравнений

Линейные стохастические системы занимают особое место как в теории стохастических систем, так и в их приложениях в механике, электротехнике и других областях. Прикладная значимость линейных систем определяется тем, что они являются универсальным средством математического описания малых отклонений поведения реальных систем от номинальных режимов их функционирования. Теория стационарных систем линейных стохастических дифференциальных уравнений основывается на точных интегральных представлениях их решений и допускает применение специальных, особенно эффективных методов численно-статистического моделирования. Настоящая глава посвящена специальным методам численного моделирования стационарных систем линейных стохастических дифференциальных уравнений и их практической реализации.

11.1 Системы линейных стохастических дифференциальных уравнений: расчетные формулы и вспомогательные результаты

Рассмотрим систему линейных стохастических дифференциальных уравнений общего вида (СЛСДУОВ):

$$d\mathbf{x}_t = (A(t)\mathbf{x}_t + \mathbf{g}(t))\,dt + \sum_{j=1}^{m} B_j(t)\mathbf{x}_t d\mathbf{f}_t^{(j)} + \Sigma(t)d\mathbf{f}_t,\ \mathbf{x}_0 = \mathbf{x}(0,\omega),\ (11.1)$$

где $t \in [0,T]$; $\mathbf{x}_t$ — n-мерный случайный процесс, являющийся решением СЛСДУОВ (11.1) с начальным условием $\mathbf{x}_0$; $\mathbf{f}_t$ — m-мерный стандартный винеровский случайный процесс с независимыми компонентами $\mathbf{f}_t^{(i)}$ $(i = 1, \ldots, m)$; начальное условие $\mathbf{x}_0$ и матричные функции $A(t)$, $B_1(t), \ldots, B_m(t) : [0,T] \to \Re^{n\times n}$, $\mathbf{g}(t) : [0,T] \to \Re^n$, $\Sigma(t) : [0,T] \to \Re^{n\times m}$ удовлетворяют условиям AI–AIII (теорема 1.6) существования и единственности решений стохастических дифференциальных уравнений Ито.

Если все матричные функции $B_1(t), \ldots, B_m(t)$ в (11.1) равны нулевой матрице, то система (11.1) принимает вид

$$d\mathbf{x}_t = (A(t)\mathbf{x}_t + \mathbf{g}(t))\, dt + \Sigma(t) d\mathbf{f}_t, \quad \mathbf{x}_0 = \mathbf{x}(0,\omega), \tag{11.2}$$

и в дальнейшем называется системой линейных стохастических дифференциальных уравнений (СЛСДУ).

Если матричные функции $\mathbf{g}(t)$ и $\Sigma(t)$ в (11.1) равны нулевым матрицам соответствующих размеров, то СЛСДУОВ (11.1) преобразуется в следующую однородную систему линейных стохастических дифференциальных уравнений (ОСЛСДУ):

$$d\mathbf{x}_t = A(t)\mathbf{x}_t dt + \sum_{j=1}^{m} B_j(t)\mathbf{x}_t d\mathbf{f}_t^{(j)}, \ \mathbf{x}_0 = \mathbf{x}(0,\omega). \tag{11.3}$$

Систему (11.2) можно трактовать как систему стохастических дифференциальных уравнений Ито, Стратоновича или в другом смысле, поскольку эта система по своей структуре имеет одно и то же решение, как бы она не рассматривалась (имеется в виду способ определения стохастического интеграла $\int\limits_0^t \Sigma(\tau) d\mathbf{f}_\tau$ в соответствии с определениями 1.8, 1.12 или 1.13 при интегральной форме записи уравнения (11.2)). В связи с этим часто применяемая в технической литературе форма описания системы (11.2) в виде

$$\frac{d\mathbf{x}_t}{dt} = A(t)\mathbf{x}_t + \mathbf{g}(t) + \Sigma(t)\mathbf{f}_t^{\cdot}, \quad \mathbf{x}_0 = \mathbf{x}(0,\omega)$$

с белым шумом $\mathbf{f}_t^{\cdot}$ в правой части не приводит к неоднозначности математического определения решений системы (11.2).

Линейные стохастические дифференциальные уравнения (ЛСДУ) исследовались в ряде работ. Так, в [4, 8, 86, 154–157] рассматривались скалярные ЛСДУ. В этих работах получено интегральное представление решения скалярного ЛСДУ через фундаментальное решение,

а также изучены свойства решений скалярных ЛСДУ. Точные решения некоторых скалярных ЛСДУ можно найти в [86, 140, 154, 158, 159]. В работах [4, 8, 86, 159–161] выведены интегральные представления решений СЛСДУ и СЛСДУОВ через фундаментальную матрицу решений. В книге М. Арато [31] дано интегральное представление решений СЛСДУ с постоянными коэффициентами через матричную экспоненту и исследованы основные свойства этих систем. Кроме того, в [31] изучены дискретные линейные стохастические системы с постоянными коэффициентами, для которых построен алгоритм численного моделирования. Вопросы, связанные с численным моделированием СЛСДУ, рассматривались также в работах [162, 163].

Настоящая глава посвящена построению численных методов решения стационарных СЛСДУ (их определение будет дано далее), основанных на точном интегральном представлении решений таких систем. При этом рассматривается ряд вопросов, связанных с особенностями численной реализации построенных численных методов.

11.1.1 Интегральные представления решений СЛСДУ

Рассмотрим хорошо известные результаты (см., например, [4, 8, 86, 159–161]) по интегральному представлению решений СЛСДУОВ.

Сначала обратимся к скалярному случаю:

$$dx_t = (a(t)x_t + g(t))dt + (b(t)x_t + \sigma(t))df_t, \tag{11.4}$$

где $a(t)$, $b(t)$, $g(t)$, $\sigma(t) : [0,T] \to \Re^1$; $x_t, f_t \in \Re^1$. Пусть $X_{t,t_0} \in \Re^1$; $0 \le t_0 \le t \le T$ — фундаментальное решение однородного уравнения

$$dx_t = a(t)x_t dt + b(t)x_t df_t, \tag{11.5}$$

которое удовлетворяет условию $X_{t_0,t_0} = 1$. Тогда

$$dX_{t,t_0} = a(t)X_{t,t_0}dt + b(t)X_{t,t_0}df_t. \tag{11.6}$$

Рассмотрим случайный процесс $\ln(X_{t,t_0})$ и найдем с помощью формулы Ито и соотношения (11.6) его стохастический дифференциал:

$$d\ln(X_{t,t_0}) = \left(a(t) - \frac{1}{2}b^2(t)\right)dt + b(t)df_t. \tag{11.7}$$

Правая часть (11.7) содержит только известные функции, и потому X_{t,t_0} может быть найдено из (11.7):

$$X_{t,t_0} = e^{\int\limits_{t_0}^{t}\left(a(s)-\frac{1}{2}b^2(s)\right)ds+\int\limits_{t_0}^{t} b(s)df_s}. \tag{11.8}$$

Воспользовавшись фундаментальным решением X_{t,t_0} однородного уравнения (11.5), найдем интегральное представление решения линейного стохастического дифференциального уравнения (11.4). С этой целью рассмотрим случайный процесс $X_{t,t_0}^{-1}x_t$, где x_t — решение линейного стохастического дифференциального уравнения (11.4), и найдем с помощью формулы Ито его стохастический дифференциал. Поскольку из формулы Ито и (11.6) следует равенство

$$dX_{t,t_0}^{-1} = \left(-a(t) + b^2(t)\right) X_{t,t_0}^{-1}dt - b(t)X_{t,t_0}^{-1}df_t, \tag{11.9}$$

то по формуле Ито и (11.4), (11.9) получаем

$$d\left(X_{t,t_0}^{-1}x_t\right) = \left(g(t) - b(t)\sigma(t)\right) X_{t,t_0}^{-1}dt + \sigma(t)X_{t,t_0}^{-1}df_t.$$

Из последнего равенства с учетом того, что $X_{t_0,t_0} = 1$, имеем следующее интегральное представление решения линейного стохастического дифференциального уравнения (11.4):

$$x_t = X_{t,t_0}\Bigg(x_{t_0} + \int\limits_{t_0}^{t}(g(s) - b(s)\sigma(s))X_{s,t_0}^{-1}ds + \int\limits_{t_0}^{t}\sigma(s)X_{s,t_0}^{-1}df_s\Bigg), \tag{11.10}$$

где

$$X_{t,t_0} = e^{\int\limits_{t_0}^{t}\left(a(s)-\frac{1}{2}b^2(s)\right)ds+\int\limits_{t_0}^{t}b(s)df_s}.$$

Перейдем к рассмотрению СЛСДУОВ (11.1). Обобщив (11.10) на случай СЛСДУОВ (11.1), получим

$$\mathbf{x}_t = X_{t,t_0}\Bigg(\mathbf{x}_{t_0}+\int\limits_{t_0}^{t}X_{s,t_0}^{-1}\Bigg(\mathbf{g}(s)-\sum_{j=1}^{m}B_j(s)\Sigma_j(s)\Bigg)ds+\int\limits_{t_0}^{t}X_{s,t_0}^{-1}\Sigma(s)d\mathbf{f}_s\Bigg), \tag{11.11}$$

где $0 \le t_0 \le t \le T$; $\mathbf{x}_t \in \Re^n$ — решение СЛСДУОВ (11.1); $X_{t,t_0} \in \Re^{n\times n}$ — фундаментальная матрица решений ОСЛСДУ (11.3); $\Sigma_j(t)$ — j-й столбец матрицы $\Sigma(t)$; $\mathbf{f}_s$ — m-мерный стандартный винеровский процесс с независимыми компонентами $\mathbf{f}_s^{(i)}$ $(i = 1, \ldots, m)$; остальные обозначения, входящие в (11.11), такие же, как в (11.1).

Таким образом, проблема отыскания решения СЛСДУОВ (11.1) свелась к отысканию фундаментальной матрицы решений ОСЛСДУ (11.3). Известно (см., например, [86]), что фундаментальная матрица решений ОСЛСДУ (11.3) может быть найдена в том случае, когда матрицы $A(t), B_j(t)$; $j = 1, \ldots, m$ постоянны и попарно коммутируют, т. е.

$AB_j = B_jA,\ B_iB_j = B_jB_i;\ i,j = 1,\ldots,m$. В этом случае фундаментальная матрица решений ОСЛСДУ (11.3) имеет вид

$$X_{t,t_0} = e^{\left(A-\frac{1}{2}\sum\limits_{j=1}^{m} B_j^2\right)(t-t_0)+\sum\limits_{j=1}^{m} B_j\left(\mathbf{f}_t^{(j)}-\mathbf{f}_{t_0}^{(j)}\right)}, \tag{11.12}$$

где e^C — матричная экспонента [17]: $e^C \stackrel{\text{def}}{=} \sum\limits_{k=0}^{\infty} C^k/k!$, C — квадратная матрица; $C^0 \stackrel{\text{def}}{=} I$ — единичная матрица.

Если матрицы $B_j(t);\ j = 1,\ldots,m$ нулевые, то из (11.12) получаем $X_{t,t_0} = e^{A(t-t_0)}$.

Стационарной СЛСДУ называем систему (11.2), если $A(t) \equiv A$, $\Sigma(t) \equiv \Sigma$:

$$d\mathbf{x}_t = (A\mathbf{x}_t + \mathbf{g}(t))\,dt + \Sigma d\mathbf{f}_t, \quad \mathbf{x}_0 = \mathbf{x}(0,\omega). \tag{11.13}$$

В этом случае фундаментальная матрица решений X_{t,t_0} представляет собой матричную экспоненту: $X_{t,t_0} = e^{A(t-t_0)} = \sum\limits_{k=0}^{\infty}(A^k(t-t_0)^k)/k!$.

Формулу (11.11) запишем при этом в виде

$$\mathbf{x}_t = e^{A(t-t_0)}\mathbf{x}_{t_0} + \int\limits_{t_0}^{t} e^{A(t-s)}\mathbf{g}(s)ds + \int\limits_{t_0}^{t} e^{A(t-s)}\Sigma d\mathbf{f}_s,\ 0 \le t_0 \le t \le T. \tag{11.14}$$

Формулу (11.14) в дальнейшем иногда будем называть формулой Коши в силу ее некоторого внешнего сходства с формулой Коши решения обыкновенных линейных дифференциальных уравнений.

Таким образом, если в случае стационарной СЛСДУ (11.13) взять эквидистантную временную сетку $\{\tau_k\}_{k=0}^{K}$ такую, что $\tau_k = k\Delta;\ K\Delta = T;\ k = 0,1,\ldots,K$, где Δ — шаг сетки, и ввести обозначения $\tilde{A}(\Delta) = e^{A\Delta}$, $\tilde{\mathbf{g}}(k,\Delta) \stackrel{\text{def}}{=} \int\limits_0^{\Delta} e^{A(\Delta-s)}\mathbf{g}(k\Delta+s)ds$, $\tilde{\mathbf{f}}_{k+1}(\Delta) \stackrel{\text{def}}{=} \int\limits_0^{\Delta} e^{A(\Delta-s)}\Sigma d\mathbf{f}_{k\Delta+s}$, то решение системы (11.13) в дискретные моменты времени τ_k может быть найдено с помощью рекуррентной формулы

$$\mathbf{x}_{k+1} = \tilde{A}(\Delta)\mathbf{x}_k + \tilde{\mathbf{g}}(k,\Delta) + \tilde{\mathbf{f}}_{k+1}(\Delta),\ \mathbf{x}_0 = \mathbf{x}(0,\omega), \tag{11.15}$$

где $\mathbf{x}_{\tau_k} \stackrel{\text{def}}{=} \mathbf{x}_k$; $\tilde{\mathbf{f}}_k(\Delta)$ — векторный гауссовский дискретный случайный процесс такой, что $\mathsf{M}\{\tilde{\mathbf{f}}_k(\Delta)\} = 0$, $\mathsf{M}\{\tilde{\mathbf{f}}_k(\Delta)\tilde{\mathbf{f}}_l^{\mathsf{T}}(\Delta)\} = \mathbf{1}_{\{k=l\}}D_f(\Delta)$, с дисперсионной матрицей

$$D_f(\Delta) \stackrel{\text{def}}{=} \mathsf{M}\left\{\tilde{\mathbf{f}}_k(\Delta)\tilde{\mathbf{f}}_k^{\mathsf{T}}(\Delta)\right\} = \int\limits_0^{\Delta} e^{A(\Delta-s)}\Sigma\Sigma^{\mathsf{T}}e^{A^{\mathsf{T}}(\Delta-s)}ds, \tag{11.16}$$

равной при $t = \Delta$ решению уравнения вида

$$\frac{dD_f}{dt}(t) = AD_f(t) + D_f(t)A^{\mathsf{T}} + \Sigma\Sigma^{\mathsf{T}},\ D_f(0) = O_{n\times n}, \tag{11.17}$$

которое может быть получено с использованием формулы Ито; здесь $O_{n\times n}$ — нулевая $(n \times n)$-матрица.

Если все собственные числа матрицы A лежат в левой полуплоскости: $\mathrm{Re}(\lambda_i(A)) < 0$, где $\lambda_i(A)$ — собственные числа матрицы A, то уравнение (11.17) имеет стационарное решение $D(\infty)$, удовлетворяющее следующей системе линейных алгебраических уравнений: $AD(\infty) + D(\infty)A^{\mathsf{T}} + \Sigma\Sigma^{\mathsf{T}} = 0$.

11.1.2 Моментные характеристики решений СЛСДУ

Приведем известные в литературе (см., например, [4, 8, 86, 159–161]) уравнения, которым удовлетворяют моментные характеристики решений СЛСДУ.

Введем обозначения $\mathsf{M}\{\mathbf{x}_t\} \stackrel{\text{def}}{=} \mathbf{m}_x(t)$, $\mathbf{x}_t - \mathbf{m}_x(t) \stackrel{\text{def}}{=} \overset{\circ}{\mathbf{x}}_t$, $\mathsf{M}\{\mathbf{x}_t\mathbf{x}_t^{\mathsf{T}}\} \stackrel{\text{def}}{=} Q_x(t)$, $\mathsf{M}\{\overset{\circ}{\mathbf{x}}_t\overset{\circ}{\mathbf{x}}_\tau^{\mathsf{T}}\} \stackrel{\text{def}}{=} R_x(t,\tau)$, $R_x(t,t) \stackrel{\text{def}}{=} D_x(t)$.

В случае СЛСДУОВ из (11.1) получим:

1. Для $\mathbf{m}_x(t)$ при $t \geq 0$

$$\frac{d\mathbf{m}_x}{dt}(t) = A(t)\mathbf{m}_x(t) + \mathbf{g}(t),\ \mathbf{m}_x(0) = \mathsf{M}\{\mathbf{x}_0\}.$$

2. Для $Q_x(t)$ при $t \geq 0$

$$\frac{dQ_x}{dt}(t) = A(t)Q_x(t) + Q_x(t)A^{\mathsf{T}}(t) + \sum_{i=1}^{m} B_i(t)Q_x(t)B_i^{\mathsf{T}}(t) + \mathbf{g}(t)\mathbf{m}_x^{\mathsf{T}}(t) +$$

$$+\mathbf{m}_x(t)\mathbf{g}^{\mathsf{T}}(t) + \sum_{i=1}^{m}\left(B_i(t)\mathbf{m}_x(t)\Sigma_i^{\mathsf{T}}(t) + \Sigma_i(t)\mathbf{m}_x^{\mathsf{T}}(t)B_i(t) + \Sigma_i(t)\Sigma_i^{\mathsf{T}}(t)\right), \tag{11.18}$$

где $Q_x(0) = \mathsf{M}\{\mathbf{x}_0\mathbf{x}_0^{\mathsf{T}}\}$; $\mathbf{m}_x(0) = \mathsf{M}\{\mathbf{x}_0\}$. Отметим, что уравнение (11.18) может быть получено с использованием формулы Ито.

Рассмотрим СЛСДУ (11.2). В этом случае имеем:

1. Для $\mathbf{m}_x(t)$ при $t \geq 0$

$$\frac{d\mathbf{m}_x}{dt}(t) = A(t)\mathbf{m}_x(t) + \mathbf{g}(t),\ \mathbf{m}_x(0) = \mathsf{M}\{\mathbf{x}_0\}.$$

2. Для $D_x(t)$ при $t \geq 0$

$$\frac{dD_x}{dt}(t) = A(t)D_x(t) + D_x(t)A(t)^{\mathsf{T}} + \Sigma(t)\Sigma^{\mathsf{T}}(t),\ D_x(0) = \mathsf{M}\{\overset{\circ}{\mathbf{x}}_0\overset{\circ}{\mathbf{x}}_0^{\mathsf{T}}\}.$$

3. Для $R_x(t,\tau)$ при $t,\tau \geq 0$

$$\frac{\partial R_x}{\partial t}(t,\tau) = A(t)R_x(t,\tau) \text{ при } t \geq \tau,\ R(t,\tau) = R^{\mathsf{T}}(\tau,t) \text{ при } t \leq \tau.$$

В случае стационарной СЛСДУ (11.13)

$$\frac{d\mathbf{m}_x}{dt}(t) = A\mathbf{m}_x(t) + \mathbf{g}(t),\ \mathbf{m}_x(0) = \mathsf{M}\left\{\mathbf{x}_0\right\},$$

или в интегральной форме,

$$\mathbf{m}_x(t) = e^{At}\mathbf{m}_x(0) + \int\limits_0^t e^{A(t-\tau)}\mathbf{g}(\tau)d\tau,$$

$$\frac{dD_x}{dt}(t) = AD_x(t) + D_x(t)A^{\mathsf{T}} + \Sigma\Sigma^{\mathsf{T}},\ D_x(0) = \mathsf{M}\{\overset{\circ}{\mathbf{x}}_0\overset{\circ}{\mathbf{x}}_0^{\mathsf{T}}\}, \tag{11.19}$$

$$\frac{\partial R_x}{\partial t}(t,\tau) = AR_x(t,\tau) \text{ при } t \geq \tau,\ R(t,\tau) = R^{\mathsf{T}}(\tau,t) \text{ при } t \leq \tau.$$

Нетрудно видеть, что в данном случае

$$R_x(t,\tau) = \begin{cases} e^{A(t-\tau)}D_x(\tau) & \text{при } t \geq \tau \\ D_x(t)e^{A^{\mathsf{T}}(\tau-t)} & \text{при } \tau \geq t \end{cases}.$$

Для гурвицевой матрицы A матричное уравнение (11.19) имеет стационарное решение, удовлетворяющее системе линейных алгебраических уравнений вида: $AD_x(\infty) + D_x(\infty)A^{\mathsf{T}} + \Sigma\Sigma^{\mathsf{T}} = 0$.

Если $D_x(0) = D_x(\infty)$, то $D_x(t) = D_x(\infty)$ — постоянная. Тогда

$$R_x(t,\tau) \equiv R_x(t-\tau) = \begin{cases} e^{A(t-\tau)}D_x(\infty) & \text{при } t \geq \tau \\ D_x(\infty)e^{A^{\mathsf{T}}(\tau-t)} & \text{при } \tau \geq t \end{cases}. \tag{11.20}$$

Если $D_x(0) \neq D_x(\infty)$, то в силу гурвицевости матрицы $A : D_x(t) \to D_x(\infty)$ при $t \to \infty$, и формула (11.20) оказывается справедливой асимптотически при $t,\tau \to \infty$, $|t-\tau| < \infty$, т. е. $\lim R_x(t,\tau) = R_x(t-\tau)$ при $t,\tau \to \infty$, $|t-\tau| < \infty$, где $R_x(t-\tau)$ определяется правой частью формулы (11.20).

Таким образом, центрированная составляющая решения системы (11.13) $\overset{\circ}{\mathbf{x}}_t = \mathbf{x}_t - \mathbf{m}_x(t)$ в случае гурвицевой матрицы A является либо

стационарным процессом при $D_x(0) = D_x(\infty)$, либо асимптотически стационарным при $D_x(0) \neq D_x(\infty)$.

Пусть выходными переменными стационарной СЛСДУ (11.13) являются линейные комбинации компонент вектора состояния $\mathbf{x}_t$: $\mathbf{y}_t = H^{\mathsf{T}}\mathbf{x}_t \in \Re^l$, где $H \in \Re^{n\times l}$ — числовая матрица.

Тогда моментные характеристики процесса $\mathbf{y}_t$ определяются по формулам

$$\mathsf{M}\{\mathbf{y}_t\} \stackrel{\text{def}}{=} \mathbf{m}_y(t) = H^{\mathsf{T}}\mathbf{m}_x(t),$$

$$\mathsf{M}\{\overset{\circ}{\mathbf{y}}_t\overset{\circ}{\mathbf{y}}{}_\tau^{\mathsf{T}}\} \stackrel{\text{def}}{=} R_y(t,\tau) = H^{\mathsf{T}}R_x(t,\tau)H,\ R_y(t,t) \stackrel{\text{def}}{=} D_y(t) = H^{\mathsf{T}}D_x(t)H. \tag{11.21}$$

В установившемся режиме для гурвицевой матрицы A формулы (11.21) при $\tau, t \to \infty$, $|t-\tau| < \infty$ принимают вид

$$D_y(\infty) = H^{\mathsf{T}}D_x(\infty)H,\ \lim R_y(t,\tau) = R_y(t-\tau) = H^{\mathsf{T}}R_x(t-\tau)H,$$

где $R_x(t-\tau)$ определяется правой частью формулы (11.20).

Спектральная плотность центрированной составляющей стационарного выходного процесса $\mathbf{y}_t$ представима в виде

$$S_{\overset{\circ}{y}}(\omega) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} R_y(t)e^{-i\omega t}dt = H^{\mathsf{T}}(i\omega I - A)^{-1}\Sigma\Sigma^{\mathsf{T}}(-i\omega I - A^{\mathsf{T}})^{-1}H =$$

$$= G(i\omega)G^{\mathsf{T}}(-i\omega),$$

где I — единичная матрица; i — мнимая единица; $G(p) = H^{\mathsf{T}}(pI - A)^{-1}\Sigma$ — матричная передаточная функция системы от входа $\mathbf{f}_t^{\cdot}$ к выходу $\mathbf{y}_t$.

11.1.3 Свойства дискретных систем линейных стохастических уравнений в стационарном случае

Рассмотрим дискретную линейную стохастическую систему (11.15) и положим в ней $\tilde{A}(\Delta) = \tilde{A}$, $\tilde{\mathbf{g}}(k,\Delta) = \tilde{B}\mathbf{u}(k)$, $\tilde{\mathbf{f}}_k(\Delta) = \tilde{\Sigma}\mathbf{v}_k$, $\mathbf{y}_k = H^{\mathsf{T}}\mathbf{x}_k$. Здесь $\mathbf{u}(k) \in \Re^r$ — детерминированное векторное возмущение; $\mathbf{v}_k \in \Re^m$ — белошумный векторный гауссовский дискретный случайный процесс с нулевым средним и дисперсионной матрицей, равной единичной матрице: $\mathsf{M}\{\mathbf{v}_k\} \equiv 0$, $\mathsf{M}\left\{\mathbf{v}_k\mathbf{v}_k^{\mathsf{T}}\right\} = I$; $\mathbf{y}_k \in \Re^l$ — выход системы; $\tilde{B} \in \Re^{n\times r}$, $\tilde{\Sigma} \in \Re^{n\times m}$, $H \in \Re^{n\times l}$ — числовые матрицы.

С учетом принятых обозначений систему (11.15) запишем в виде

$$\mathbf{x}_{k+1} = \tilde{A}\mathbf{x}_k + \tilde{B}\mathbf{u}(k) + \tilde{\Sigma}\mathbf{v}_{k+1},\ \mathbf{y}_k = H^{\mathsf{T}}\mathbf{x}_k,\ \mathbf{x}_0 = \mathbf{x}(0,\omega). \tag{11.22}$$

Введем обозначения $\mathsf{M}\{\mathbf{x}_k\} \stackrel{\text{def}}{=} \mathbf{m}_x(k)$, $\mathbf{x}_k - \mathbf{m}_x(k) \stackrel{\text{def}}{=} \mathring{\mathbf{x}}_k$, $\mathsf{M}\{\mathring{\mathbf{x}}_k \mathring{\mathbf{x}}_r^{\mathsf{T}}\} \stackrel{\text{def}}{=} R_x(k,r)$, $R_x(k,k) \stackrel{\text{def}}{=} D_x(k)$.

Рассмотрим моментные характеристики решения системы (11.22) (см., например, [159]).

1. Для $\mathbf{m}_x(k)$ и $\mathbf{m}_y(k)$

$$\mathbf{m}_x(k+1) = \tilde{A}\mathbf{m}_x(k) + \tilde{B}\mathbf{u}(k),\ \mathbf{m}_y(k) = H^{\mathsf{T}}\mathbf{m}_x(k),\ \mathbf{m}_x(0) = \mathsf{M}\{\mathbf{x}_0\}$$

или

$$\mathbf{m}_x(k+1) = \tilde{A}^{k+1}\mathbf{m}_x(0) + \sum_{i=0}^{k-1} \tilde{A}^{k-i}\tilde{B}\mathbf{u}(i),$$

$$\mathbf{m}_y(k+1) = H^{\mathsf{T}}\tilde{A}^{k+1}\mathbf{m}_x(0) + \sum_{i=0}^{k-1} H^{\mathsf{T}}\tilde{A}^{k-i}\tilde{B}\mathbf{u}(i).$$

2. Для $D_x(k)$ и $D_y(k)$

$$D_x(k+1) = \tilde{A}D_x(k)\tilde{A}^{\mathsf{T}} + \tilde{\Sigma}^2,\ D_y(k) = H^{\mathsf{T}}D_x(k)H,\ D_x(0) = \mathsf{M}\{\mathring{\mathbf{x}}_0\mathring{\mathbf{x}}_0^{\mathsf{T}}\}. \tag{11.23}$$

3. Для $R_x(k,r)$ и $R_y(k,r)$

$$R_x(k,r) = \begin{cases} e^{A(k-r)}D_x(r) & \text{при } k \geq r \\ D_x(k)e^{A^{\mathsf{T}}(r-k)} & \text{при } r \geq k \end{cases},\ R_y(k,r) = H^{\mathsf{T}}R_x(k,r)H.$$

Предположим, что все собственные числа матрицы $\tilde{A}$ в (11.22) лежат внутри единичного круга. Тогда уравнение (11.23) имеет асимптотически устойчивое решение, удовлетворяющее следующей системе линейных алгебраических уравнений: $D_x(\infty) = \tilde{A}D_x(\infty)\tilde{A}^{\mathsf{T}} + \tilde{\Sigma}^2$, причем $D_y(\infty) = H^{\mathsf{T}}D_x(\infty)H$.

Если $D_x(0) = D_x(\infty)$, то $D_x(k) = D_x(\infty)$ — постоянная. Тогда

$$R_x(k,r) \equiv R_x(k-r) = \begin{cases} e^{A(k-r)}D_x(\infty) & \text{при } k \geq r \\ D_x(\infty)e^{A^{\mathsf{T}}(r-k)} & \text{при } r \geq k \end{cases}. \tag{11.24}$$

Если $D_x(0) \neq D_x(\infty)$, то в силу предположения о собственных числах матрицы $\tilde{A}$: $D_x(k) \to D_x(\infty)$ при $k \to \infty$, и формула (11.24) оказывается справедливой асимптотически при $k, r \to \infty$, $|k-r| < \infty$, т. е. $\lim R_x(k,r) = R_x(k-r)$ при $k, r \to \infty$, $|k-r| < \infty$.

Таким образом, в случае когда все собственные числа матрицы $\tilde{A}$ лежат внутри единичного круга центрированная составляющая решения системы (11.22) $\mathring{\mathbf{x}}_k = \mathbf{x}_k - \mathbf{m}_x(k)$ является либо стационарным дискретным процессом при $D_x(0) = D_x(\infty)$, либо асимптотически стационарным при $D_x(0) \neq D_x(\infty)$.

11.2 Метод численного моделирования стационарных СЛСДУ, основанный на разложении Тейлора–Ито и полиномах Лежандра

В предыдущих главах рассматривалась общая теория численного решения нелинейных стохастических дифференциальных уравнений Ито, основанная на разложениях Тейлора–Ито и Тейлора–Стратоновича, а также на специальных методах численного моделирования повторных стохастических интегралов, входящих в эти разложения. Естественно, что данная общая теория численного решения стохастических дифференциальных уравнений Ито применима и к стационарным СЛСДУ.

В данном разделе, в качестве отправной точки, мы рассмотрим применение указанной общей теории (в сильном смысле) к изучемому вопросу.

Однако, сразу оговоримся, что структура стационарных СЛСДУ допускает построение специальных методов численного интегрирования, основанных на точном интегральном представлении их решений и которые оказываются существенно проще в сравнении с численными методами решения этих систем, построенными согласно общей теории численного интегрирования стохастических дифференциальных уравнений Ито.

Унифицированное разложение Тейлора–Ито для решения системы (11.13) при $\mathbf{g}(t) \equiv B\mathbf{u}(t)$ (здесь B — числовая матрица, а $\mathbf{u}(t)$ — векторная функция соответствующих размерностей) и $t > t_0$ имеет следующий вид:

$$\mathbf{x}_t = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{j!}\Bigl((t-t_0)^j A^j \mathbf{x}_{t_0} + \int\limits_{t_0}^{t} (t-s)^j A^j B\mathbf{u}(s)ds + \int\limits_{t_0}^{t} (t-s)^j A^j \Sigma d\mathbf{f}_s\Bigr), \quad (11.25)$$

где ряд сходится с вероятностью 1 для всех $t \in (t_0, T] \subset [0, T]$.

Отметим, что формула (11.25) может быть получена путем подстановки матричных экспонент в виде рядов в интегральное представление решения системы (11.13).

Положим в (11.25) $t = \tau_{k+1},\ t_0 = \tau_k,\ \tau_k = k\Delta,\ \Delta > 0;\ k = 0,\ 1, \ldots,$ и заменим в ряд конечной суммой. В результате получим рекуррентное представление аппроксимации $\tilde{\mathbf{x}}_k$ процесса $\mathbf{x}_k$:

$$\tilde{\mathbf{x}}_{k+1} = \sum_{j=0}^{J} \frac{1}{j!}\Bigl(\Delta^j A^j \tilde{\mathbf{x}}_k + \int\limits_{\tau_k}^{\tau_{k+1}} (\tau_{k+1}-s)^j A^j B\mathbf{u}(s)ds + \int\limits_{\tau_k}^{\tau_{k+1}} (\tau_{k+1}-s)^j A^j \Sigma d\mathbf{f}_s\Bigr), \quad (11.26)$$

где $\tilde{\mathbf{x}}_{k\Delta} \stackrel{\text{def}}{=} \tilde{\mathbf{x}}_k$, $\mathbf{x}_{k\Delta} \stackrel{\text{def}}{=} \mathbf{x}_k$; $k = 0,\ 1, \ldots$ Далее на каждом шаге интегрирования необходимо моделировать совокупности стохастических интегралов Ито вида $\int\limits_{\tau_k}^{\tau_{k+1}} (\tau_{k+1} - s)^j d\mathbf{f}_s^{(i)}$; $j = 0,\ 1, \ldots, J < \infty$; $i = 1, \ldots, m$, входящих в правую часть (11.26).

В главе 6 рассмотрен метод аппроксимации повторных стохастических интегралов Ито, основанный на обобщенных кратных рядах Фурье и, в частности, на рядах Фурье–Лежандра. Согласно этому методу (см. главу 6) с в. 1 при $j = 0,\ 1,\ 2,\ 3$ имеем

$$\int\limits_{\tau_k}^{\tau_{k+1}} d\mathbf{f}_s^{(i)} = \sqrt{\Delta}\zeta_0^{(i)}, \quad \int\limits_{\tau_k}^{\tau_{k+1}} (\tau_{k+1} - s) d\mathbf{f}_s^{(i)} = \frac{\Delta^{\frac{3}{2}}}{2}\left(\zeta_0^{(i)} - \frac{1}{\sqrt{3}}\zeta_1^{(i)}\right), \tag{11.27}$$

$$\int\limits_{\tau_k}^{\tau_{k+1}} (\tau_{k+1} - s)^2 d\mathbf{f}_s^{(i)} = \frac{\Delta^{\frac{5}{2}}}{3}\left(\zeta_0^{(i)} - \frac{\sqrt{3}}{2}\zeta_1^{(i)} + \frac{1}{2\sqrt{5}}\zeta_2^{(i)}\right), \tag{11.28}$$

$$\int\limits_{\tau_k}^{\tau_{k+1}} (\tau_{k+1} - s)^3 d\mathbf{f}_s^{(i)} = \frac{\Delta^{\frac{7}{2}}}{4}\left(\zeta_0^{(i)} - \frac{3\sqrt{3}}{5}\zeta_1^{(i)} + \frac{1}{\sqrt{5}}\zeta_2^{(i)} - \frac{1}{5\sqrt{7}}\zeta_3^{(i)}\right), \tag{11.29}$$

где $\zeta_j^{(i)} = \int\limits_{\tau_k}^{\tau_{k+1}} \phi_j(s) d\mathbf{f}_s^{(i)}$, а $\{\phi_j(s)\}_{j=0}^{\infty}$ — полная ортонормированная в пространстве $L_2([\tau_k, \tau_{k+1}])$ система полиномов Лежандра.

Аналогично действует и при $j > 3$:

$$\int\limits_{\tau_k}^{\tau_{k+1}} (\tau_{k+1} - s)^j d\mathbf{f}_s^{(i)} = \sum_{l=0}^{j} C_l \zeta_l^{(i)};\ j = 4,\ 5, \ldots, \tag{11.30}$$

где $C_l = \int\limits_{\tau_k}^{\tau_{k+1}} (\tau_{k+1} - s)^j \phi_l(s) ds$, а остальные обозначения такие же, как в (11.27) – (11.30).

Несмотря на простоту, разложения типа (11.27) – (11.30) все же неудобны, поскольку для получения приемлемой точности при численном решении стационарной СЛСДУ (11.13) необходимо выбирать число J в (11.26) по возможности большим, что ведет к существенному усложнению вычислительной схемы.

Отметим, что сильная сходимость численного метода (11.26) может быть рассмотрена с помощью теоремы 7.2.

В следующем разделе рассматривается гораздо более рациональный численный метод.

11.3 Метод численного моделирования стационарных СЛСДУ, основанный на формуле Коши и спектральном разложении

В данном разделе изучается метод численного решения стационарных СЛСДУ, основанный на представлении их решений по формуле Коши и спектральном разложении дисперсионной матрицы случайной составляющей решения стационарной СЛСДУ.

11.3.1 Общий подход к моделированию. Структурирование проблемы

Рассмотрим СЛСДУ вида (11.2) в предположениях:

$$A(t) \equiv A,\ \mathbf{g}(t) \equiv B\mathbf{u}(t),\ \Sigma(t) \equiv \Sigma. \tag{11.31}$$

Выходом системы будем считать линейную комбинацию компонент вектора состояния системы. С учетом (11.31) система уравнений (11.2) может быть переписана в виде

$$d\mathbf{x}_t = (A\mathbf{x}_t + B\mathbf{u}(t))\,dt + \Sigma d\mathbf{f}_t,\ \mathbf{y}_t = H^{\mathsf{T}}\mathbf{x}_t,\ \mathbf{x}_0 = \mathbf{x}(0,\omega). \tag{11.32}$$

Здесь $\mathbf{x}_t \in \Re^n$ — решение стационарной СЛСДУ (11.32); $\mathbf{u}(t) : [0,T] \to \Re^k$ — детерминированное внешнее возмущение; $\mathbf{y}_t \in \Re^l$ — процесс на выходе, численная реализация которого является целью численного моделирования; $H \in \Re^{n\times l},\ A \in \Re^{n\times n},\ \Sigma \in \Re^{n\times m},\ B \in \Re^{n\times k}$ — числовые матрицы; $\mathbf{f}_t \in \Re^m$ — стандартный винеровский случайный процесс с независимыми компонентами $\mathbf{f}_t^{(i)};\ i = 1,\ldots,m$.

Рассмотрим временную сетку $\{\tau_k\}_{k=0}^K$ с постоянным шагом $\Delta > 0$, т. е. такую, что $\tau_k = k\Delta,\ K\Delta = T;\ k = 0,1,\ldots,K$.

Интегральное представление решения системы (11.32) на этой временной сетке с постоянным шагом Δ запишем в форме Коши в виде

$$\mathbf{x}_{k+1} = e^{A\Delta}\mathbf{x}_k + \int\limits_0^\Delta e^{A(\Delta-\tau)}B\mathbf{u}(\tau + k\Delta)d\tau + \int\limits_0^\Delta e^{A(\Delta-\tau)}\Sigma d\mathbf{f}_{\tau+k\Delta}, \tag{11.33}$$

где $\mathbf{x}_{k\Delta} \stackrel{\text{def}}{=} \mathbf{x}_k;\ k = 0,\ 1,\ldots,K;\ K\Delta = T$.

Исходя из смысла слагаемых, входящих в правую часть (11.33), будем называть первое слагаемое *переходной*, или *динамической*, составляющей, второе — *систематической* составляющей, а третье — *случайной* составляющей векторного случайного процесса $\mathbf{x}_k;\ k = 0,1,\ldots,K$. Рассмотрим особенности численного моделирования каждой из этих составляющих.

11.3.2 Алгоритм численного моделирования динамической составляющей решения

Вычисление динамической составляющей процесса $\mathbf{x}_k$; $k = 0, 1, \ldots, K$, на каждом шаге численного моделирования требует знания матрицы $e^{A\Delta}$. По определению матричная экспонента задается в виде ряда [17]:

$$e^{A\Delta} = \sum_{i=0}^{\infty} (A^i \Delta^i)/i!, \tag{11.34}$$

где $A^0 \stackrel{\text{def}}{=} I$ — единичная матрица. Однако использование формулы (11.34) непосредственно для вычисления $e^{A\Delta}$ не рационально, так как достижение приемлемой точности вычисления матричной экспоненты требует в этом случае выполнения большого числа операций матричного умножения и сложения. Для эффективного вычисления матричной экспоненты в [165] рекомендуется использовать специальный алгоритм "быстрого" вычисления, основанный на формуле

$$e^{A\Delta} = \left(e^{A\frac{\Delta}{2^M}}\right)^{2^M} \approx \left(\sum_{i=0}^{N} \frac{A^i}{i!} \left(\frac{\Delta}{2^M}\right)^i\right)^{2^M}, \tag{11.35}$$

где $N \geq 1,\ M \geq 0$ — некоторые целые числа.

Отметим, что если $M = 0,\ N = \infty$, то правая часть формулы (11.35) совпадает с правой частью формулы (11.34). При $M = 2,\ 3, \ldots$ величина $\frac{\Delta}{2^M}$ значительно меньше Δ, и, следовательно, для аппроксимации с достаточной точностью матричной экспоненты $e^{A\Delta}$ число $N+1$ членов суммы в (11.35) может быть взято значительно меньшим, чем при $M = 0$. При этом указанное различие тем значительнее, чем больше значение M.

При вычислениях по формуле (11.35) необходимо выполнить $M+N$ умножений квадратных $(n \times n)$-матриц и, кроме того, произвести N сложений $(n \times n)$-матриц и N умножений $(n \times n)$-матрицы на число. Отсюда следует, что при достаточно большом n общее число арифметических операций, затрачиваемых на вычисление по формуле (11.35), можно считать пропорциональным $N + M$.

В работе [169] (см. также [170]) показано, что для вычисления матричной экспоненты $e^{A\Delta}$ по формуле (11.35) с точностью не хуже ε : $\|e^{A\Delta} - e_*^{A\Delta}\| \leq \varepsilon$, достаточно выбрать такие целые $N \geq 1$ и $M \geq 0$, при которых выполняется условие

$$e^{\|A\|\Delta} \left(\|A\|\Delta\right)^{N+1} / \left(2^{MN}(N+1)!\right) \leq \varepsilon, \tag{11.36}$$

поскольку [169]: $\|e^{A\Delta} - e_*^{A\Delta}\| \le (e^{\|A\|\Delta}(\|A\|\Delta)^{N+1})/(2^{MN}(N+1)!)$ при условии, что

$$(\|A\|\Delta 2^{-M})^{N+1}/\ (N+1)! \le 1; \tag{11.37}$$

здесь и далее $\|A\| = \max\limits_{1\le i\le n} \sum\limits_{j=1}^{n} |A^{(ij)}|$, $A^{(ij)}$ — компонента матрицы A; $e_*^{A\Delta}$ — приближенное значение $e^{A\Delta}$.

В [169] поставлены и решены задачи об определении оптимальной пары (M, N), используемой в формуле (11.35). Оказалось [169], что соотношения, связывающие оптимальные M и N в задаче об определении минимума числа арифметических операций при заданном уровне погрешности ε вычисления матричной экспоненты и в задаче минимизации оценки погрешности вычисления матричной экспоненты при ограничении сверху на число арифметических операций, эквивалентны и имеют вид

$$M = \begin{cases} [z]+1 & \text{при} \quad \|A\|\Delta > v, \\ 0 & \text{при} \quad \|A\|\Delta \le v, \end{cases} \tag{11.38}$$

где $[x]$ — целая часть x, $z = \ln^{-1}2(\ln(\|A\|\Delta/(N+1)) - 0.5/(N+1)) + N$, $v = 2^{-N}(N+1)\exp(0.5/(N+1))$.

В [169] даны также практические рекомендации по выбору M и N. Так, например, перебор натуральных N следует начинать с 4–5 при $\|A\|\Delta \le 1.3$ и с 2–3 при $\|A\|\Delta \ge 1.3$. После фиксации конкретного N определяется M, удовлетворяющее (11.36) и (11.38).

Следует отметить, что соотношение (11.38) в [169] получено без учета условия (11.37). В работе [167] продолжается изучение задач оптимизации вычисления матричной экспоненты с учетом условия (11.37).

Положим $F(M,N) \stackrel{\text{def}}{=} (e^{\|A\|\Delta}(\|A\|\Delta)^{N+1})/(2^{MN}(N+1)!)$, $G(M,N) \stackrel{\text{def}}{=} (2^{-M}\|A\|\Delta)^{N+1}/(N+1)!$.

Рассмотрим следующие задачи оптимизации:

$$\min_{M,N} \left\{M+N:\ F(M,N) \le \varepsilon, G(M,N) \le 1; M = 0,1,\ldots; N = 1,2,\ldots\right\}, \tag{11.39}$$

$$\min_{M,N} \left\{F(M,N):\ M+N \le L, G(M,N) \le 1; M = 0,1,\ldots; N = 1,2,\ldots\right\}, \tag{11.40}$$

где L — заданная постоянная. Задача (11.39) является задачей минимизации числа арифметических операций при заданном уровне погрешности ε вычисления матричной экспоненты с учетом условия (11.37). Задача (11.40) представляет собой задачу о минимизации

оценки погрешности вычисления матричной экспоненты при ограничении L на число арифметических операций с учетом того же условия.

В [167] решены обе задачи — (11.39), (11.40). Приведем их решения.

Рассмотрим задачу (11.40). Область возможных значений $\|A\|\Delta$ (положительная полуось) разбивается на интервалы $(0, C_1]$, (C_1, C_2), $[C_2, C_3]$, $(C_3, +\infty)$: $C_1 = 2^{-L}e^{\psi(L+2)}$, $C_2 = 2^{L-2}e^{\frac{3}{2}-\mathbf{C}}$, $C_3 = 2^{L-\frac{1}{2}}$, где $\psi(z) = \Gamma'(z)/\Gamma(z)$ ($\Gamma(z)$ — гамма-функция; штрих соответствует производной по z); $\mathbf{C} = 0.5772156\ldots$ — постоянная Эйлера.

Если $\|A\|\Delta \in (0, C_1]$, то оптимальными параметрами являются $N = L$, $M = 0$, а наиболее точной формулой для вычисления матричной экспоненты — формула $e^{A\Delta} \approx \sum\limits_{k=0}^{L}(A^k\Delta^k)/k!$.

В том случае, когда $\|A\|\Delta \in (C_1, C_2)$, оптимальным N является одно из двух целых чисел, между которыми находится единственный корень $\bar{N} \in [1, L]$ уравнения

$$2N\ln 2 - \psi(N+2) = L\ln 2 - \ln(\|A\|\Delta). \tag{11.41}$$

При этом оптимальное N равно $[\bar{N}]$, если $Q([\bar{N}]) < Q([\bar{N}]+1)$ или $P([\bar{N}]+1) > 0$, и равно $[\bar{N}]+1$ в противном случае; здесь

$$Q(N) \stackrel{\text{def}}{=} \ln\left\{\frac{e^{\|A\|\Delta}(\|A\|\Delta)^{N+1}}{2^{(L-N)N}\Gamma(N+2)}\right\},\ P(N) \stackrel{\text{def}}{=} \ln\{(\|A\|\Delta 2^{N-L})^{N+1}/\Gamma(N+2)\},$$

$[x]$ — целая часть числа x,

После определения оптимального N оптимальное M находим по формуле $M = L - N$.

Единственный корень уравнения (11.41) может быть вычислен, например, с помощью метода Ньютона, старт которого осуществляется из точки $N = L$ [167].

Если $\|A\|\Delta \in [C_2, C_3]$, то оптимальными параметрами являются $N = 1$, $M = L - 1$, а наиболее точной формулой для вычисления матричной экспоненты — следующая формула: $e^{\|A\|\Delta} \approx (I + (A\Delta)/2^{L-1})^{2^{L-1}}$.

Наконец, если $\|A\|\Delta \in (C_2, +\infty)$, то решения задачи (11.40) не существует.

Отметим, что в [168] приводится несколько иной способ решения задачи (11.40).

Рассмотрим теперь задачу (11.39). В [167] показано, что задача (11.39) эквивалентна задаче одномерной целочисленной оптимизации

$$\min_{N\geq 1}\ \{N + M(N)\}, \tag{11.42}$$

$$M(N) = \max\{M_1(N),\ M_2(N)\}; \tag{11.43}$$

$$M_1(N) = \max\left\{0,\ \left[\frac{1}{N\ln 2}\ln\left\{\frac{e^{\|A\|\Delta}(\|A\|\Delta)^{N+1}}{(N+1)!\varepsilon}\right\}\right] + 1\right\};$$

$$M_2(N) = \max\left\{0,\ \left[\frac{1}{(N+1)\ln 2}\ln\left\{\frac{(\|A\|\Delta)^{N+1}}{(N+1)!}\right\}\right] + 1\right\};$$

$[x]$ — целая часть числа x, а ε — то же, что и в формуле (11.36).

В [167] предлагается решать задачу (11.42) следующим образом. Пусть $\hat{N} = \min\limits_{N\geq 1}\{N : M(N) = 0\}$. Если $N > \hat{N}$, то очевидно, что задача (11.42) переходит в задачу: $\min\{\hat{N},\ \min\limits_{1\leq N\leq \hat{N}}\{N + M(N)\}\}$, которая решается одномерным целочисленным перебором по N от 1 до $\hat{N}$. При этом перебор можно прекратить как только текущее значение N достигнет текущего минимального значения $M + N$. После того как определено оптимальное N, оптимальное M находим как $M(N)$ по формуле (11.43).

Приведем алгоритм вычисления матричной экспоненты.

Алгоритм 11.1. *Вычисление матричной экспоненты $e^{A\Delta}$ с точностью ε.*

1. Вычисление $\|A\|\Delta$.
2. По заданному $\varepsilon > 0$ выбирают оптимальные значения M и N как решение задачи (11.39).
3. $i := 0$.
4. $G := \sum\limits_{j=0}^{N} \frac{A^j}{j!}\left(\frac{\Delta}{2^M}\right)^j$.
5. $i := i + 1$.
6. $G := G^2$.
7. Если $i < M$, то выполняется переход к шагу 5.
8. $e_*^{A\Delta} := G$.
9. Конец работы алгоритма 11.1.

11.3.3 Алгоритм численного моделирования систематической составляющей решения

Проблема численного моделирования систематической составляющей решения стационарной СЛСДУ (11.32) согласно (11.33) сводится к вычислению интеграла

$$J_\Delta = \int\limits_0^\Delta e^{A(\Delta-\tau)}B\mathbf{u}(\tau + k\Delta)d\tau;\ k = 0,\ 1, \ldots, K-1. \tag{11.44}$$

Рассмотрим различные способы приближенного вычисления интеграла J_Δ. Будем считать, что векторная функция $\mathbf{u}(k\Delta+\tau)$ при всех $k=0,\ 1,\ldots,K-1$ и $\tau\in[0,\Delta]$ представима в виде

$$\mathbf{u}(k\Delta+\tau)=\sum_{j=0}^{l}\mathbf{v}_j(k)\tau^j+\mathbf{r}_{l+1}(k,\tau), \tag{11.45}$$

причем

$$\|\mathbf{r}_{l+1}(k,\tau)\|\le C_l\tau^{l+1}, \tag{11.46}$$

где $C_l<\infty$; $k=0,\ 1,\ldots,K-1$; $\tau\in[0,\Delta]$; $\|\mathbf{x}\|=\max\limits_{1\le i\le n}|\mathbf{x}^{(i)}|$ — норма вектора $\mathbf{x}\in\Re^n$; векторные коэффициенты $\mathbf{v}_j(k)$ $(j=0,\ 1,\ldots,l)$ могут быть выбраны разными способами (далее будут рассмотрены некоторые из них).

Достаточным условием, обеспечивающим возможность представления (11.45), является $(l+1)$-кратная непрерывная дифференцируемость функции $\mathbf{u}(t)$ на промежутке $[0,T]$. Однако возможны и другие, менее ограничительные условия.

Подставим (11.45) в (11.44). В результате получим следующее выражение:

$$J_\Delta=\sum_{j=0}^{l}J_{\Delta,j}B\mathbf{v}_j(k)+R_{\Delta,l+1}, \tag{11.47}$$

где

$$J_{t,j}=\int\limits_0^\Delta\tau^je^{A(t-\tau)}d\tau,\ R_{\Delta,l+1}=\int\limits_0^\Delta e^{A(\Delta-\tau)}B\mathbf{r}_{l+1}(k,\tau)d\tau;$$

причем согласно (11.46)

$$\|R_{\Delta,l+1}\|\le H_{l+1}\Delta^{l+2},\ H_{l+1}<\infty. \tag{11.48}$$

Остановимся подробнее на вычислении интегралов $J_{\Delta,j};\ j=0,\ 1,\ldots,l$. Нетрудно видеть, что

$$J_{\Delta,0}=A^{-1}\left(e^{A\Delta}-I\right), \tag{11.49}$$

$$J_{\Delta,j}=-A^{-1}\left(\Delta^jI-jJ_{\Delta,j-1}\right);\ j=1,\ 2,\ldots,l. \tag{11.50}$$

Итерируя формулу (11.50), приходим к следующему выражению:

$$J_{\Delta,j}=A^{-(j+1)}j!\left[AJ_{\Delta,0}-\sum_{i=1}^{j}\frac{\Delta^iA^i}{i!}\right],\ j\ge1. \tag{11.51}$$

Подставляя (11.49) в (11.51), получаем окончательное выражение для интеграла $J_{\Delta,j}$, $j \geq 0$:

$$J_{\Delta,j} = A^{-(j+1)} j! \left[e^{A\Delta} - \sum_{i=0}^{j} \frac{\Delta^i A^i}{i!} \right], \ j \geq 0, \tag{11.52}$$

где $A^0 \stackrel{\text{def}}{=} I$ — единичная матрица.

Подставляя (11.52) в (11.47) и отбрасывая остаточный член $R_{\Delta,l+1}$, приходим к следующему приближенному представлению:

$$J_\Delta \approx \sum_{j=0}^{l} A^{-(j+1)} j! \left[e^{A\Delta} - \sum_{i=0}^{j} \frac{\Delta^i A^i}{i!} \right] B\mathbf{v}_j(k). \tag{11.53}$$

Рассмотрим некоторые способы выбора коэффициентов $\mathbf{v}_j(k)$; $j = 0, 1, \ldots, l$ по формуле (11.45) и соответствующие этим способам приближенные представления для интеграла J_Δ. При этом положим $\mathbf{u}((k + \frac{p}{q})\Delta) \stackrel{\text{def}}{=} \mathbf{u}_{k+\frac{p}{q}}$; $p = 0, 1, 2, \ldots$; $k, q = 1, 2, \ldots$

1. Аппроксимация с помощью формулы Тейлора:

$$\mathbf{v}_j(k) = \frac{1}{j!} \frac{d^j \mathbf{u}}{dt^j}(k\Delta), \ \mathbf{r}_{l+1}(k,\tau) = \frac{\tau^{l+1}}{(l+1)!} \frac{d^{l+1}\mathbf{u}}{dt^{l+1}}(k\Delta + \theta\tau), \ \theta \in (0,1),$$

$$J_\Delta \approx \sum_{j=0}^{l} A^{-(j+1)} \left[e^{A\Delta} - \sum_{i=0}^{j} \frac{\Delta^i A^i}{i!} \right] B \frac{d^j \mathbf{u}}{dt^j}(k\Delta).$$

2. Кусочно-постоянная аппроксимация ($l = 0$):

$$\mathbf{v}_0(k) = \mathbf{u}_k, \ J_\Delta \approx A^{-1} \left(e^{A\Delta} - I \right) B\mathbf{u}_k.$$

3. Линейная интерполяция ($l = 1$):

$$\mathbf{v}_0(k) = \mathbf{u}_k, \ \mathbf{v}_1(k) = \frac{1}{\Delta} \left(\mathbf{u}_{k+1} - \mathbf{u}_k \right),$$

$$J_\Delta \approx A^{-1} \left(e^{A\Delta} - I \right) B\mathbf{u}_k + \frac{A^{-2}}{\Delta} \left[e^{A\Delta} - I - \Delta A \right] B \left(\mathbf{u}_{k+1} - \mathbf{u}_k \right).$$

4. Квадратичная интерполяция ($l = 2$):

$$\mathbf{v}_0(k) = \mathbf{u}_k, \ \mathbf{v}_1(k) = \frac{1}{\Delta} \left(4\mathbf{u}_{k+\frac{1}{2}} - 3\mathbf{u}_k - \mathbf{u}_{k+1} \right),$$

$$\mathbf{v}_2(k) = \frac{2}{\Delta^2} \left(\mathbf{u}_{k+1} + \mathbf{u}_k - 2\mathbf{u}_{k+\frac{1}{2}} \right),$$

$$J_\Delta \approx A^{-1}\left(e^{A\Delta}-I\right)B\mathbf{u}_k+\frac{A^{-2}}{\Delta}\left[e^{A\Delta}-I-\Delta A\right]B\left(4\mathbf{u}_{k+\frac{1}{2}}-3\mathbf{u}_k-\mathbf{u}_{k+1}\right)$$
$$+\frac{4A^{-3}}{\Delta^2}\left[e^{A\Delta}-I-\sum_{q=1}^{2}\frac{(\Delta A)^q}{q!}\right]B\left(\mathbf{u}_{k+1}+\mathbf{u}_k-2\mathbf{u}_{k+\frac{1}{2}}\right).$$

5. Кубическая интерполяция ($l=3$):

$$\mathbf{v}_0(k)=\mathbf{u}_k,\ \mathbf{v}_1(k)=\frac{1}{2\Delta}\left(2\mathbf{u}_{k+1}+18\mathbf{u}_{k+\frac{1}{3}}-9\mathbf{u}_{k+\frac{2}{3}}-11\mathbf{u}_k\right),$$
$$\mathbf{v}_2(k)=\frac{9}{2\Delta^2}\left(-\mathbf{u}_{k+1}-5\mathbf{u}_{k+\frac{1}{3}}+4\mathbf{u}_{k+\frac{2}{3}}+2\mathbf{u}_k\right),$$
$$\mathbf{v}_3(k)=\frac{9}{2\Delta^3}\left(\mathbf{u}_{k+1}+3\mathbf{u}_{k+\frac{1}{3}}-3\mathbf{u}_{k+\frac{2}{3}}-\mathbf{u}_k\right),$$

$$J_\Delta \approx A^{-1}\left(e^{A\Delta}-I\right)B\mathbf{u}_k+$$
$$+\frac{A^{-2}}{2\Delta}\left[e^{A\Delta}-I-\Delta A\right]B\left(2\mathbf{u}_{k+1}+18\mathbf{u}_{k+\frac{1}{3}}-9\mathbf{u}_{k+\frac{2}{3}}-11\mathbf{u}_k\right)+$$
$$+\frac{9A^{-3}}{\Delta^2}\left[e^{A\Delta}-I-\sum_{q=1}^{2}\frac{(\Delta A)^q}{q!}\right]B\left(2\mathbf{u}_k-\mathbf{u}_{k+1}-5\mathbf{u}_{k+\frac{1}{3}}+4\mathbf{u}_{k+\frac{2}{3}}\right)$$
$$+\frac{27A^{-4}}{\Delta^3}\left[e^{A\Delta}-I-\sum_{q=1}^{3}\frac{(\Delta A)^q}{q!}\right]B\left(\mathbf{u}_{k+1}+3\mathbf{u}_{k+\frac{1}{3}}-3\mathbf{u}_{k+\frac{2}{3}}-\mathbf{u}_k\right).$$

Из (11.53) следует, что численное моделирование систематической составляющей решения стационарной СЛСДУ (11.32) сводится практически к вычислению матриц $B_j(\Delta)$ вида

$$B_j(\Delta)=A^{-(j+1)}j!\left[e^{A\Delta}-\sum_{i=0}^{j}\frac{\Delta^i A^i}{i!}\right]B;\ j=0,\ 1,\ldots,l. \tag{11.54}$$

Если матрица A невырожденная, то матрицы $B_j(\Delta)$ могут быть вычислены непосредственно по формуле (11.54) с использованием алгоритма 11.1 вычисления матричной экспоненты $e^{A\Delta}$. Однако матрицы $B_j(\Delta)$ могут быть вычислены и в случае вырожденной матрицы A, поскольку $B_j(\Delta)$ согласно (11.54) представимы в виде

$$B_j(\Delta)=j!A^{-(j+1)}\sum_{i=j+1}^{\infty}\frac{\Delta^i}{i!}A^iB;\ j=0,\ 1,\ldots,l. \tag{11.55}$$

Из последнего равенства следует существование конечного предела правой части (11.55) при $\det(A)\to 0$.

Для вычисления матриц $B_j(\Delta)$ в случае вырожденной матрицы A используем следующий подход.

Рассмотрим систему обыкновенных дифференциальных уравнений вида

$$\frac{d\hat{\mathbf{x}}}{dt}(t) = A\hat{\mathbf{x}}(t) + B\sum_{j=0}^{l} t^j \mathbf{v}_j(k),\ \hat{\mathbf{x}}(0) = O_{n,1}, \tag{11.56}$$

где $\hat{\mathbf{x}}(t) \in \Re^n$; $O_{n,1}$ — нулевой столбец длины n.

Нетрудно видеть, что решение системы (11.56) имеет вид [164]: $\hat{\mathbf{x}}(t) = e^{At}\hat{\mathbf{x}}(0) + \sum\limits_{j=0}^{l} J_{t,j}B\mathbf{v}_j(k)$, откуда $\hat{\mathbf{x}}(\Delta) = e^{A\Delta}\hat{\mathbf{x}}(0) + \sum\limits_{j=0}^{l} B_j(\Delta)\mathbf{v}_j(k)$. Введем в рассмотрение расширенную векторную функцию $\hat{\mathbf{y}}^{\mathsf{T}}(t) = \left(\hat{\mathbf{x}}^{\mathsf{T}}(t)\ \mathbf{x}_{n+1}^{\mathsf{T}}(t)\ \ldots\ \mathbf{x}_{n+l+1}^{\mathsf{T}}(t)\ \mathbf{x}_{n+l+2}^{\mathsf{T}}(t)\right)$, которая является решением однородной системы обыкновенных дифференциальных уравнений вида

$$\frac{d\hat{\mathbf{y}}}{dt}(t) = A_1\hat{\mathbf{y}}(t),\ \hat{\mathbf{y}}^{\mathsf{T}}(0) = \left(O_{1,n}\ \mathbf{v}_0^{\mathsf{T}}(k)\ \mathbf{v}_1^{\mathsf{T}}(k)\ 2!\mathbf{v}_2^{\mathsf{T}}(k)\ \ldots\ l!\mathbf{v}_l^{\mathsf{T}}(k)\right), \tag{11.57}$$

где

$$\mathbf{x}_{n+1}(t) = \sum_{j=0}^{l} t^j \mathbf{v}_j(k),\ \frac{d\mathbf{x}_{n+p+1}}{dt}(t) = \mathbf{x}_{n+p+2}(t),\ \frac{d\mathbf{x}_{n+l+2}}{dt}(t) = O_{k,1},$$

$$A_1 = \begin{pmatrix} A & B & O_{n,k} & O_{n,k} & \ldots & O_{n,k} & O_{n,k} \\ O_{k,n} & O_k & I_k & O_k & \ldots & O_k & O_k \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ O_{k,n} & O_k & O_k & O_k & \ldots & I_k & O_k \\ O_{k,n} & O_k & O_k & O_k & \ldots & O_k & I_k \\ O_{k,n} & O_k & O_k & O_k & \ldots & O_k & O_k \end{pmatrix},$$

$p = 0,\ 1, \ldots, l$, O_k — нулевая $(k \times k)$-матрица; I_k — единичная $(k \times k)$-матрица; $O_{n,k}$ — нулевая $(n \times k)$-матрица.

Решением системы (11.57) является матричная функция вида

$$\hat{\mathbf{y}}(t) = e^{A_1 t}\hat{\mathbf{y}}(0) = \begin{pmatrix} e^{At} & J_{t,0}B & J_{t,1}B & \ldots & \frac{1}{l!}J_{t,l}B \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \end{pmatrix}\hat{\mathbf{y}}(0).$$

Таким образом, вычислив матричную экспоненту $e^{A_1\Delta}$, можно получить сразу как матрицу $e^{A\Delta}$, так и матрицы $B_j(\Delta)$; $j = 0,\ 1, \ldots, l$.

Сформулируем полученный результат в виде следующего специального алгоритма.

Алгоритм 11.2. *Вычисление матриц* $e^{A\Delta}$ *и* $B_j(\Delta)$; $j = 0,\ 1, \ldots, l$.

1. Из матриц A и B системы (11.32) формируется матрица A_1 системы (11.57).

2. К матрице $A_1\Delta$ применяется алгоритм 11.1 вычисления матричной экспоненты, результатом которого с точностью ε оказывается матрица

$$\tilde{A}_1(\Delta) = \begin{pmatrix} e^{A\Delta} & J_{\Delta,0}B & J_{\Delta,1}B & \ldots & \frac{1}{l!}J_{\Delta,l}B \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \end{pmatrix}.$$

3. Левый верхний блок (размера $n \times n$) матрицы $\tilde{A}_1(\Delta)$ является с точностью ε матрицей $e^{A\Delta}$.

4. $j := 1$.

5. $(j+1)$-й левый верхний блок (размера $n \times k$) матрицы $\tilde{A}_1(\Delta)$ является с точностью ε матрицей $\hat{B}_j(\Delta) = \frac{1}{j!}J_{\Delta,j}B$.

6. $B_j(\Delta) := j!\hat{B}_j(\Delta)$.

7. Если $j < l+1$, то $j := j+1$ и выполняется переход к шагу 5.

8. Конец работы алгоритма 11.2.

11.3.4 Алгоритм численного моделирования стохастической составляющей решения

Сначала рассмотрим основные идеи, которые будут использованы при построении алгоритма численного моделирования случайной составляющей решения стационарной СЛСДУ, а затем приведем сам алгоритм.

Найдем такое представление случайного столбца $\tilde{\mathbf{f}}_{k+1}(\Delta)$ вида

$$\tilde{\mathbf{f}}_{k+1}(\Delta) = \int\limits_0^{\Delta} e^{A(\Delta-s)}\Sigma d\mathbf{f}_{k\Delta+s},$$

которое было бы удобно для численного моделирования. Для этого рассмотрим дисперсионную матрицу случайного столбца $\tilde{\mathbf{f}}_{k+1}(\Delta)$: $\mathsf{M}\left\{\tilde{\mathbf{f}}_{k+1}(\Delta)\tilde{\mathbf{f}}_{k+1}^{\mathsf{T}}(\Delta)\right\} \stackrel{\text{def}}{=} D_f(\Delta)$.

Спектральное разложение дисперсионной матрицы $D_f(\Delta)$ имеет вид

$$D_f(\Delta) = S_D(\Delta)\Lambda_D^2(\Delta)S_D^{-1}(\Delta), \tag{11.58}$$

где $S_D(\Delta)$ — матрица ортонормированных собственных векторов матрицы $D_f(\Delta)$, а $\Lambda_D(\Delta)$ — диагональная матрица, на главной диагонали которой стоят собственные числа матрицы $D_f(\Delta)$. Отметим, что

$D_f(\Delta)$ — симметричная, неотрицательно определенная матрица, поэтому ее собственные числа неотрицательны, а матрица собственных векторов ортогональная.

Представим случайный столбец $\tilde{\mathbf{f}}_{k+1}(\Delta)$ в виде

$$\tilde{\mathbf{f}}_{k+1}(\Delta) = S_D(\Delta)\Lambda_D(\Delta)\bar{\mathbf{f}}_{k+1}, \tag{11.59}$$

где $\bar{\mathbf{f}}_{k+1}$ — такой случайный столбец, что его компоненты $\bar{\mathbf{f}}_{k+1}^{(i)}$; $i = 1,\ldots,n$ являются независимыми стандартными гауссовскими случайными величинами, причем столбцы $\bar{\mathbf{f}}_{k+1}$ и $\bar{\mathbf{f}}_{l+1}$ независимы при $k \neq l$.

Таким образом, при представлении (11.59) справедливо соотношение (11.58). Для численного моделирования случайного столбца $\tilde{\mathbf{f}}_{k+1}(\Delta)$ по формуле (11.59) необходимо найти матрицу $D_f(\Delta)$, ее собственные числа и собственные векторы, а также численно смоделировать n независимых стандартных гауссовских случайных величин, которые являются компонентами случайного столбца $\bar{\mathbf{f}}_{k+1}$. Выражение для матрицы $D_f(\Delta)$ и дифференциальное уравнение для ее определения даны соотношениями (11.16) и (11.17) соответственно. Отметим, что так как матрица $D_f(\Delta)$ симметричная, то полезную информацию несут $\frac{n^2+n}{2}$ ее элементов, расположенных над(под) главной диагональю $D_f(\Delta)$, включая главную диагональ.

Для нахождения матрицы $D_f(\Delta)$ надо решить уравнение (11.17). С этой целью данное уравнение приводим к уравнению вида

$$\frac{d\mathbf{d}_f}{dt}(t) = \hat{A}\mathbf{d}_f(t) + \mathbf{b}, \tag{11.60}$$

где столбцы $\mathbf{d}_f(t),\ \mathbf{b} \in \Re^{\frac{n^2+n}{2}}$ и имеют вид

$$\mathbf{d}_f^{\mathsf{T}}(t) = \left(\mathbf{d}_{f_1}^{\mathsf{T}}(t)\ \ldots \mathbf{d}_{f_n}^{\mathsf{T}}(t)\right),\ \mathbf{b}^{\mathsf{T}} = \left(\mathbf{b}_1^{\mathsf{T}}\ \ldots \mathbf{b}_n^{\mathsf{T}}\right), \tag{11.61}$$

$$\mathbf{d}_{f_j}^{\mathsf{T}}(t) = \left(D_f^{(1j)}(t)\ \ldots D_f^{(n-j+1\ n)}(t)\right),\ \mathbf{b}_j^{\mathsf{T}} = \left(S^{(1j)} \ldots S^{(n-j+1\ n)}\right);$$

$j = 1,\ldots,n$; $S \stackrel{\text{def}}{=} \Sigma\Sigma^{\mathsf{T}}$.

Матрицу $\hat{A}$ размера $\frac{n^2+n}{2} \times \frac{n^2+n}{2}$, входящую в (11.60), строим следующим образом. Сначала строим матрицы Q_{ip}, $p = 0,\ldots,n-1$; $i = 1,\ldots,n-p$ размера $n \times n$ с элементами $Q_{ip}^{(kl)}$ вида

$$Q_{ip}^{(kl)} = \begin{cases} 1 & \text{при } \ k = i,\ l = i+p \text{ или } k = i+p,\ l = i \\ 0 & \text{в противном случае} \end{cases}.$$

Затем рассматриваем матрицы R_{ip}; $p = 0,\ldots,n-1$; $i = 1,\ldots,n-p$ вида $R_{ip} = Q_{ip}A^{\mathsf{T}} + AQ_{ip}$.

Далее нетрудно заметить, что первые n столбцов матрицы $\hat{A}$ строятся из матриц R_{i0}; $i = 1, \ldots, n$ подобно тому, как строится столбец $\mathbf{d}_f(t)$ из матрицы $D_f(t)$ по правилу (11.61). После этого из матриц R_{i1}; $i = 1, \ldots, n-1$ получаем следующие $n-1$ столбец матрицы $\hat{A}$ по тому же правилу, и т.д. Теперь, когда определены $\mathbf{d}_f(t)$, $\mathbf{b}$ и $\hat{A}$, можно найти решение уравнения (11.60): $\mathbf{d}_f(t) = \hat{A}^{-1}(e^{\hat{A}t} - I)\mathbf{b}$ и вычислить $\mathbf{d}_f(\Delta)$.

Следует отметить, что при переходе от (11.17) к (11.60) резко возрастает размерность задачи, что является недостатком рассматриваемого метода.

Далее после перехода от $\mathbf{d}_f(\Delta)$ к $D_f(\Delta)$ можно вычислить матрицы $S_D(\Delta)$ и $\Lambda_D(\Delta)$. После этого можно приступить к моделированию случайной составляющей решения стационарной СЛСДУ по формуле (11.59).

Сформулируем изложенные идеи в виде алгоритмов.

Алгоритм 11.3. *Преобразование симметричной* $(n \times n)$*-матрицы* A *в столбец* $\mathbf{b}$ *размера* $\frac{n^2+n}{2}$.

1. $i := 0$.
2. $j := 1$.
3. $q := 1$.
4. $\mathbf{b}^{(q+i)} := A^{(q\ q+j-1)}$.
5. Если $q < n - j + 1$, то $q := q + 1$ и требуется выполнить переход к шагу 4.
6. $i := i + n - j + 1$.
7. Если $j < n$, то $j := j + 1$ и требуется выполнить переход к шагу 3.
8. Конец работы алгоритма 11.3.

Алгоритм 11.4. *Преобразование столбца* $\mathbf{b}$ *размера* $\frac{n^2+n}{2}$ *в симметричную* $(n \times n)$*-матрицу* A.

1. $i := 0$.
2. $j := 1$.
3. $q := 1$.
4. $A^{(q\ q+j-1)} := \mathbf{b}^{(q+i)}$.
5. $A^{(q+j-1\ q)} := \mathbf{b}^{(q+i)}$.
6. Если $q < n - j + 1$, то $q := q + 1$ и требуется выполнить переход к шагу 4.
7. $i := i + n - j + 1$.
8. Если $j < n$, то $j := j + 1$ и требуется выполнить переход к шагу 3.

9. Конец работы алгоритма 11.4.

Алгоритм 11.5. *Преобразование симметричной* $(n \times n)$*-матрицы* A *в матрицу* $\hat{A}$ *размера* $\frac{n^2+n}{2} \times \frac{n^2+n}{2}$.

1. $Q := O_n$ (нулевая матрица размера $n \times n$).
2. $r := 1$.
3. $j := 1$.
4. $q := 1$.
5. $i := q + j - 1$.
6. $Q^{(qi)} := 1$.
7. $Q^{(iq)} := 1$.
8. $R := QA^{\mathsf{T}} + AQ$.
9. $m := 0$.
10. $s := 1$.
11. $l := 1$.
12. $\hat{A}^{(l+m\ r)} := R^{(l\ l+s-1)}$.
13. Если $l < n - s + 1$, то $l := l + 1$ и требуется выполнить переход к шагу 12.
14. $m := m + n - s + 1$.
15. Если $s < n$, то $s := s + 1$ и требуется выполнить переход к шагу 11.
16. $Q := O_n$.
17. $r := r + 1$.
18. Если $q < n - j + 1$, то $q := q + 1$ и требуется выполнить переход к шагу 5.
19. Если $j < n$, то $j := j + 1$ и требуется выполнить переход к шагу 4.
20. Конец работы алгоритма 11.5.

Алгоритм 11.6. *Численное моделирование случайной составляющей решения стационарной СЛСДУ.*

1. Формирование столбца $\mathbf{b}$ из матрицы $\Sigma\Sigma^{\mathsf{T}}$ по алгоритму 11.3.
2. Формирование матрицы $\hat{A}$ из матрицы A по алгоритму 11.5.
3. Определение столбца $\mathbf{d}_f(\Delta) = \hat{A}^{-1}\left(e^{\hat{A}\Delta} - I\right)\mathbf{b}$ по алгоритму 11.2.
4. Формирование матрицы $D_f(\Delta)$ из столбца $\mathbf{d}_f(\Delta)$ по алгоритму 11.4.
5. Выполнение спектрального разложения матрицы $D_f(\Delta)$ и определение матриц $S_D(\Delta)$, $\Lambda_D^2(\Delta)$.
6. Определение матрицы $\Lambda_D(\Delta)$.
7. $i := 1$.
8. Моделирование случайной величины $\bar{\mathbf{f}}_{k+1}^{(i)}$.
9. Если $i < n$, то $i := i + 1$ и требуется выполнить переход к шагу 7.

10. $\tilde{\mathbf{f}}_{k+1}(\Delta) := S_D(\Delta)\Lambda_D(\Delta)\bar{\mathbf{f}}_{k+1}$.
11. Конец работы алгоритма 11.6.

11.3.5 Алгоритм численного моделирования решений стационарных СЛСДУ и оценка скорости его сходимости

Приведем алгоритм численного моделирования решения стационарной СЛСДУ.

Алгоритм 11.7. *Численное моделирование решения стационарной СЛСДУ.*

1. Вычисление матриц $e^{A\Delta}$ и $B_j(\Delta) = \int\limits_0^{\Delta} e^{A(\Delta-\tau)}\tau^j d\tau B$; $j = 0,\ 1, \ldots, l$, с точностью ε по алгоритму 11.2.
2. $\mathbf{x}_1 := \mathbf{x}(0)$.
3. $k := 1$.
4. Моделирование случайного столбца $\tilde{\mathbf{f}}_{k+1}(\Delta)$ по алгоритму 11.6.
5. $\mathbf{x}_{k+1} := e^{A\Delta}\mathbf{x}_k + \sum\limits_{j=0}^{l} B_j(\Delta)\mathbf{v}_j(k) + \tilde{\mathbf{f}}_{k+1}(\Delta)$.
6. $\mathbf{y}_k := H^{\mathsf{T}}\mathbf{x}_k$.
7. Если $k < N$, то $k := k + 1$ и требуется выполнить переход к шагу 4.
8. Конец работы алгоритма 11.7.

Таким образом, воспользовавшись приведенными рассуждениями, запишем следующие точное и приближенное представления решения стационарной СЛСДУ:

$$\mathbf{x}_{k+1} = e^{A\Delta}\mathbf{x}_k + \sum_{j=0}^{l-1} B_j(\Delta)\mathbf{v}_j(k) + R_{\Delta,l} + S_D(\Delta)\Lambda_D(\Delta)\bar{\mathbf{f}}_{k+1}, \qquad (11.62)$$

$$\tilde{\mathbf{x}}_{k+1} = e_*^{A\Delta}\tilde{\mathbf{x}}_k + \sum_{j=0}^{l-1} B_j^*(\Delta)\mathbf{v}_j(k) + S_D^*(\Delta)\Lambda_D^*(\Delta)\bar{\mathbf{f}}_{k+1},\ \tilde{\mathbf{x}}_0 = \mathbf{x}_0, \qquad (11.63)$$

где $\mathbf{x}_{k\Delta} \stackrel{\text{def}}{=} \mathbf{x}_k$, $\tilde{\mathbf{x}}_{k\Delta} \stackrel{\text{def}}{=} \tilde{\mathbf{x}}_k$ — точное решение стационарной СЛСДУ (11.13) и его аппроксимация соответственно в моменты времени $k\Delta$, $k = 0,\ 1, \ldots, K$; $e_*^{A\Delta}$, $B_j^*(\Delta)$, $S_D^*(\Delta)$, $\Lambda_D^*(\Delta)$ — вычисленные приближенные значения матриц $e^{A\Delta}$, $B_j(\Delta)$, $S_D(\Delta)$, $\Lambda_D(\Delta)$. При этом $e_*^{A\Delta}$, $B_j^*(\Delta)$ вычисляются с помощью изложенных в предыдущих разделах алгоритмов, а $S_D(\Delta)$, $\Lambda_D(\Delta)$ — стандартными численными методами [165].

Оценим скорость сходимости алгоритма (11.63).

Лемма 11.1. *Пусть для всех* $j = 0, 1, \ldots, l$ *существует такая постоянная* $L < \infty$, *что* $\mathsf{M}\{\|\mathbf{e}_0\|\} \le L\Delta^l$; $\|S_D(\Delta) - S_D^*(\Delta)\|$, $\|\Lambda_D(\Delta) - \Lambda_D^*(\Delta)\|$, $\|B_j(\Delta) - B_j^*(\Delta)\|$, $\|R_{\Delta,l}\| \le L\Delta^{l+1}$; $\|B_j^*(\Delta)\|$, $\|\mathbf{v}_j(k)\|$, $\|\Lambda_D^*(\Delta)\|$, $\|S_D^*(\Delta)\| \le L$; $\|e^{A\Delta} - e_*^{A\Delta}\| \le L\Delta^{l+2}$, *а* $\|e^{A\Delta}\|$ *и* $\|e_*^{A\Delta}\| \le 1$. *Тогда* $\mathsf{M}\{\|\mathbf{e}_K\|\} \le C\Delta^l$, *где* C *— постоянная, которая не зависит от* Δ; $\tilde{\mathbf{x}}_k - \mathbf{x}_k \stackrel{\text{def}}{=} \mathbf{e}_k$; $T = K\Delta$; l *— натуральное; норма вектора и матрицы понимаются в том же смысле, что и раньше.*

Доказательство. Из (11.62), (11.63) и условий леммы 11.1 получаем

$$\|\mathbf{e}_{k+1}\| \le \|e_*^{A\Delta} - e^{A\Delta}\|\|\tilde{\mathbf{x}}_k\| + \|e^{A\Delta}\|\|\mathbf{e}_k\| +$$

$$+ \sum_{j=0}^{l-1} \|B_j^*(\Delta) - B_j(\Delta)\|\|\mathbf{v}_j(k)\| + \|R_{\Delta,l}\|$$

$$+ \left(\|S_D^*(\Delta) - S_D(\Delta)\|\|\Lambda_D^*(\Delta)\| + \|S_D(\Delta)\|\|\Lambda_D^*(\Delta) - \Lambda_D(\Delta)\|\right)\|\bar{\mathbf{f}}_{k+1}\|$$

с в. 1, а также $\mathsf{M}\{\|\tilde{\mathbf{x}}_k\|\} \le C_0 k$, где C_0 — постоянная, которая не зависит от Δ.

В силу неравенства Ляпунова имеем: $\mathsf{M}\{\|\bar{\mathbf{f}}_{k+1}\|\} \le \sqrt{\mathsf{M}\{\|\bar{\mathbf{f}}_{k+1}\|^2\}} = 1$ (норма определена как максимальный элемент вектора; $\mathsf{M}\{\|\bar{\mathbf{f}}_{k+1}\|\}$ будет оцениваться величиной $\sqrt{n}$ если норма понимается как евклидова). Далее, в силу предположений леммы 11.1 имеем $\mathsf{M}\{\|\mathbf{e}_{k+1}\|\} \le \mathsf{M}\{\|\mathbf{e}_k\|\} + C_1\Delta^{l+1}$, где постоянная C_1 не зависит от Δ. Итерируя это неравенство и учитывая, что $\mathsf{M}\{\|\mathbf{e}_0\|\} \le L\Delta^l$, получаем $\mathsf{M}\{\|\mathbf{e}_K\|\} \le (C_1 K\Delta + L)\Delta^l \le C\Delta^l$. Лемма доказана. □

11.4 Метод численного моделирования стационарных СЛСДУ, основанный на кусочно-постоянных случайных процессах

Рассмотренный в предыдущем разделе метод численного решения стационарных СЛСДУ позволяет на алгоритмическом уровне точно представлять случайную составляющую решения этой системы и, в свете сильного критерия сходимости численных методов (см. главу 7), может трактоваться как сильный численный метод (см. лемму 11.1). С другой стороны этот метод аппроксимирует моментные характеристики 1 и 2 порядка для решения стационарной СЛСДУ, и в силу слабого критерия сходимости численных методов (см. главу 10), а также в силу гауссовости исходной системы, может трактоваться и как слабый численный метод.

В настоящем разделе будет представлен другой метод численного решения стационарных СЛСДУ, который аппроксимирует не само решение указанной системы, а его моментные характеристики 1 и 2 порядка.

Идея указанного метода заключается в том, что стохастический интеграл в (11.33) аппроксимируется с помощью кусочно-постоянных случайных процессов $\mathbf{w}_t$.

Выберем на промежутке интегрирования $[0,T]$ шаг Δ такой, что $\Delta = T/M$. Покроем промежуток $[0,T]$ более густой сеткой с шагом $\delta = T/(NM)$, $N \geq 1$. Сначала рассмотрим постоянный на интервалах времени $[r\delta,\ (r+1)\delta)$; $r = 0,\ 1,\ldots,MN$ гауссовский случайный векторный процесс $\mathbf{w}_t \in \Re^m$ с независимыми значениями на этих интервалах, а именно: $\mathbf{w}_t = \mathbf{w}_{r\delta}$ при $t \in [r\delta,(r+1)\delta)$ $(r = 0,\ 1,\ldots,MN)$; $\mathsf{M}\{\mathbf{w}_{r\delta}\} \equiv 0$; $\mathsf{M}\left\{\mathbf{w}_{r\delta}\mathbf{w}_{q\delta}^{\mathsf{T}}\right\} = \frac{1}{\delta}I\mathbf{1}_{\{r=q\}}$ (I — единичная матрица).

Отметим, что результаты данного раздела останутся в силе, если случайные величины $\mathbf{w}_{r\delta}$ покомпонентно имеют специальное дискретное распределение и ограничены (см. конец разд. 11.4.2).

11.4.1 Алгоритм численного моделирования решений стационарных СЛСДУ

Рассмотрим стационарную СЛСДУ (11.32) и запишем рекуррентное соотношение для ее решения на сетке с постоянным шагом $\Delta > 0$:

$$\mathbf{x}_{k+1} = e^{A\Delta}\mathbf{x}_k + \int\limits_0^{\Delta} e^{A(\Delta-\tau)}B\mathbf{u}(\tau+k\Delta)d\tau + \int\limits_0^{\Delta} e^{A(\Delta-\tau)}\Sigma d\mathbf{f}_{\tau+k\Delta}, \qquad (11.64)$$

где $\mathbf{x}_{k\Delta} \stackrel{\text{def}}{=} \mathbf{x}_k$; $k = 0,\ 1,\ldots,M$; $M\Delta = T$.

Введем приближенное представление $\tilde{\mathbf{x}}_k$ процесса $\mathbf{x}_k$, заменив стохастический интеграл в правой части (11.64) в соответствии с рассуждениями предыдущего раздела

$$\tilde{\mathbf{x}}_{k+1} = e^{A\Delta}\tilde{\mathbf{x}}_k + \int\limits_0^{\Delta} e^{A(\Delta-\tau)}B\mathbf{u}(\tau+k\Delta)d\tau + \int\limits_0^{\Delta} e^{A(\Delta-\tau)}\Sigma\mathbf{w}_{\tau+k\Delta}d\tau, \qquad (11.65)$$

где $\tilde{\mathbf{x}}_{k\Delta} \stackrel{\text{def}}{=} \tilde{\mathbf{x}}_k$. Нетрудно видеть, что

$$\int\limits_0^{\Delta} e^{A(\Delta-\tau)}\Sigma\mathbf{w}_{\tau+k\Delta}d\tau = \sum_{j=1}^{N}\int\limits_{(j-1)\delta}^{j\delta} e^{A(\Delta-\tau)}d\tau\Sigma\mathbf{w}_{(kN+j-1)\delta} =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{\delta}} A^{-1} \left[e^{A\delta} - I \right] \sum_{j=1}^{N} e^{A(\Delta - j\delta)} \Sigma \mathbf{z}_{k,j}, \tag{11.66}$$

где $\mathbf{z}_{k,j} \stackrel{\text{def}}{=} \sqrt{\delta} \mathbf{w}_{(kN+j-1)\delta} \in \Re^m$ — столбец независимых стандартных гауссовских случайных величин. Кроме того, столбцы $\mathbf{z}_{k,j}$ и $\mathbf{z}_{k',j'}$ независимы при $k \neq k'$ или $j \neq j'$.

Воспользовавшись результатами из разд. 11.3 и формулой (11.65), запишем следующую рекуррентную формулу для процесса $\tilde{\mathbf{x}}_k$:

$$\tilde{\mathbf{x}}_{k+1} = e^{A\Delta} \tilde{\mathbf{x}}_k + \sum_{j=0}^{l} B_j(\Delta) \mathbf{v}_j(k) + R_{\Delta,l+1} + \frac{1}{\sqrt{\delta}} \bar{A}(\delta) \sum_{j=1}^{N} e^{A(\Delta - j\delta)} \Sigma \mathbf{z}_{k,j}, \tag{11.67}$$

где $\bar{A}(\delta) = A^{-1} \left[e^{A\delta} - I \right]$; $B_j(\Delta) = A^{-(j+1)} j! \left[e^{A\Delta} - \sum\limits_{i=0}^{j} \frac{\Delta^i A^i}{i!} \right] B$; $\| R_{\Delta,l+1} \| \leq H_{l+1} \Delta^{l+2}$; $\tilde{\mathbf{y}}_k = H^{\mathsf{T}} \tilde{\mathbf{x}}_k$ — выход системы; $\mathbf{v}_j(k) \in \Re^n$ — векторные коэффициенты, входящие в формулу (11.45); $H_{l+1} < \infty$ — постоянная.

С учетом рекуррентного соотношения (11.67) построим алгоритм численного моделирования решений стационарных СЛСДУ.

Алгоритм 11.8. *Численное моделирование решений стационарных СЛСДУ.*

1. Вычисление с точностью ε матрицы $e^{A\delta}$ по алгоритму 11.1.
2. Вычисление матриц $e^{A\Delta}$, $B_j(\Delta)$; $j = 0, 1, \ldots, l$ с точностью ε по алгоритму 11.2.
3. $\bar{A}(\delta) := A^{-1} \left[e^{A\delta} - I \right]$.
4. $\tilde{\mathbf{x}}_1 := \mathbf{x}(0)$.
5. k:=1.
6. i:=1.
7. l:=1.
8. Численное моделирование случайной величины $\mathbf{z}_{k,i}^{(l)}$ — компоненты вектора $\mathbf{z}_{k,i}$.
9. Если $l < n$, то $l := l + 1$, и требуется перейти к шагу 8.
10. Вычисление с точностью ε матрицы $e^{A(\Delta - i\delta)}$ по алгоритму 11.1.
11. Если $i < N$, то $i := i + 1$, и требуется перейти к шагу 7.
12. $\tilde{\mathbf{x}}_{k+1} := e^{A\Delta} \tilde{\mathbf{x}}_k + \sum\limits_{j=0}^{l} B_j(\Delta) \mathbf{v}_j(k) + \frac{1}{\sqrt{\delta}} \bar{A}(\delta) \sum\limits_{j=1}^{N} e^{A(\Delta - j\delta)} \Sigma \mathbf{z}_{k,j}$.
13. $\tilde{\mathbf{y}}_k = H^{\mathsf{T}} \tilde{\mathbf{x}}_k$.
14. Если $k < M$, то $k := k + 1$, и требуется перейти к шагу 6.
15. Конец работы алгоритма 11.8.

11.4.2 Оценка скорости сходимости алгоритма

Сравним моментные характеристики случайных процессов $\mathbf{x}_k$ и $\tilde{\mathbf{x}}_k$, определяемых соотношениями (11.64) и (11.67) соответственно.

Введем обозначения $\mathsf{M}\{\overset{\circ}{\mathbf{x}}_k\overset{\circ}{\mathbf{x}}_k^{\mathsf{T}}\} \overset{\text{def}}{=} D_x(k)$, $\mathsf{M}\{\overset{\circ}{\tilde{\mathbf{x}}}_k\overset{\circ}{\tilde{\mathbf{x}}}_k^{\mathsf{T}}\} \overset{\text{def}}{=} D_{\tilde{x}}(k)$, $E_D(k) \overset{\text{def}}{=} D_x(k) - D_{\tilde{x}}(k)$, $\|G\|$ — норма матрицы G, понимаемая как максимальное по модулю ее собственное число.

Заметим, что, если $\mathsf{M}\{\tilde{\mathbf{x}}_0\} = \mathsf{M}\{\mathbf{x}_0\}$, то согласно соотношениям (11.64), (11.65) имеем $\mathsf{M}\{\tilde{\mathbf{x}}_k\} = \mathsf{M}\{\mathbf{x}_k\}$; $k = 1, 2, \ldots, M$. Здесь мы считаем, что систематическая составляющая в приближенном представлении (11.65) вычислена точно.

Лемма 11.2. *Пусть $E_D(0) = O_{n\times n}$ и $N \geq 1$. Тогда, если $\left\|e^{A\Delta}\right\| \leq 1$, то*

$$\max_{1\leq k\leq M} \|E_D(k)\| \leq M\left(\frac{1}{12}\delta^3\|A\|^2\left\|\tilde{\Sigma}\right\| + O(\delta^4)\right)\frac{e^{2\|A\|\Delta}-1}{e^{2\|A\|\delta}-1}. \qquad (11.68)$$

Если же матрица A — гурвицева, то существует $\lim\limits_{k\to\infty}\|E_D(k)\|$ и

$$\lim_{k\to\infty}\|E_D(k)\| \leq \frac{\frac{1}{12}\delta^3\|A\|^2\left\|\tilde{\Sigma}\right\| + O(\delta^4)}{1-\left\|e^{A\Delta}\right\|^2}\cdot\frac{e^{2\|A\|\Delta}-1}{e^{2\|A\|\delta}-1}. \qquad (11.69)$$

Здесь $O_{n\times n}$ — нулевая $(n\times n)$-матрица, $\tilde{\Sigma} \overset{\text{def}}{=} \Sigma\Sigma^{\mathsf{T}}$.

Доказательство. Рассмотрим рекуррентное соотношение для дисперсионной матричной функции $D_x(k)$. Согласно (11.64) имеем

$$D_x(k+1) = e^{A\Delta}D_x(k)e^{A^{\mathsf{T}}\Delta} + \int\limits_0^{\Delta} e^{A(\Delta-\tau)}\tilde{\Sigma}e^{A^{\mathsf{T}}(\Delta-\tau)}d\tau =$$

$$= e^{A\Delta}D_x(k)e^{A^{\mathsf{T}}\Delta} + \sum_{i=1}^{N}\int\limits_{(i-1)\delta}^{i\delta} e^{A(\Delta-\tau)}\tilde{\Sigma}e^{A^{\mathsf{T}}(\Delta-\tau)}d\tau =$$

$$= e^{A\Delta}D_x(k)e^{A^{\mathsf{T}}\Delta} + \sum_{i=1}^{N} e^{A(\Delta-i\delta)}\int\limits_0^{\delta} e^{A(\delta-\tau)}\tilde{\Sigma}e^{A^{\mathsf{T}}(\delta-\tau)}d\tau e^{A^{\mathsf{T}}(\Delta-i\delta)}. \qquad (11.70)$$

Запишем рекуррентное соотношение для центрированной составляющей процесса $\tilde{\mathbf{x}}_k$; $k = 0, 1, \ldots, M$:

$$\overset{\circ}{\tilde{\mathbf{x}}}_{k+1} = e^{A\Delta}\overset{\circ}{\tilde{\mathbf{x}}}_k + \int\limits_0^{\Delta} e^{A(\Delta-\tau)}\Sigma\mathbf{w}_{\tau+k\Delta}d\tau =$$

$$= e^{A\Delta}\overset{\circ}{\tilde{\mathbf{x}}}_k + \sum_{i=1}^{N}\int\limits_{(i-1)\delta}^{i\delta} e^{A(\Delta-\tau)}\Sigma d\tau \mathbf{w}_{(i-1)\delta+k\Delta} =$$

$$= e^{A\Delta}\overset{\circ}{\tilde{\mathbf{x}}}_k + A^{-1}\sum_{i=1}^{N} e^{A(\Delta-i\delta)}\left(e^{A\delta}-I\right)\Sigma\mathbf{w}_{(i-1+kN)\delta}. \qquad (11.71)$$

С помощью (11.71) нетрудно получить следующее рекуррентное соотношение для дисперсионной матричной функции $D_{\tilde{x}}(k)$:

$$D_{\tilde{x}}(k+1) = e^{A\Delta}D_{\tilde{x}}(k)e^{A^{\mathsf{T}}\Delta}+$$

$$+\frac{1}{\delta}A^{-1}\sum_{i=1}^{N} e^{A(\Delta-i\delta)}\left(e^{A\delta}-I\right)\tilde{\Sigma}\left(e^{A^{\mathsf{T}}\delta}-I\right)e^{A^{\mathsf{T}}(\Delta-i\delta)}(A^{-1})^{\mathsf{T}}. \qquad (11.72)$$

Вычитая (11.72) из (11.70) и учитывая: $A^{-1}C_i(\delta,\Delta) = C_i(\delta,\Delta)A^{-1}$, $(A^{-1})^{\mathsf{T}}(C_i(\delta,\Delta))^{\mathsf{T}} = (C_i(\delta,\Delta))^{\mathsf{T}}(A^{-1})^{\mathsf{T}}$, где $e^{A(\Delta-i\delta)}\left(e^{A\delta}-I\right) \overset{\text{def}}{=} C_i(\delta,\Delta)$, получаем следующее рекуррентное соотношение для ошибки $E_D(k)$:

$$E_D(k+1) = e^{A\Delta}E_D(k)e^{A^{\mathsf{T}}\Delta} + \sum_{i=1}^{N} Q_i(\delta,\Delta), \qquad (11.73)$$

$$Q_i(\delta,\Delta) = e^{A(\Delta-i\delta)}\Bigg[\int\limits_0^{\delta} e^{A(\delta-\tau)}\tilde{\Sigma}e^{A^{\mathsf{T}}(\delta-\tau)}d\tau-$$

$$-\frac{1}{\delta}\left(e^{A\delta}-I\right)A^{-1}\tilde{\Sigma}(A^{-1})^{\mathsf{T}}\left(e^{A^{\mathsf{T}}\delta}-I\right)\Bigg]e^{A^{\mathsf{T}}(\Delta-i\delta)}. \qquad (11.74)$$

С помощью стандартной формулы Тейлора имеем

$$\int\limits_0^{\delta} e^{A(\delta-\tau)}\tilde{\Sigma}e^{A^{\mathsf{T}}(\delta-\tau)}d\tau = \int\limits_0^{\delta} e^{Au}\tilde{\Sigma}e^{A^{\mathsf{T}}u}du =$$

$$= \int\limits_0^{\delta}\left[I + Au + \frac{A^2u^2}{2} + O(u^3)\right]\tilde{\Sigma}\left[I + A^{\mathsf{T}}u + \frac{(A^{\mathsf{T}})^2u^2}{2} + O(u^3)\right]du =$$

$$= \tilde{\Sigma}\delta + \left(A\tilde{\Sigma}\right)^s\delta^2 + \frac{1}{3}\left[A\tilde{\Sigma}A^{\mathsf{T}} + \left(A^2\tilde{\Sigma}\right)^s\right]\delta^3 + O(\delta^4), \qquad (11.75)$$

$$\frac{1}{\delta}\left(e^{A\delta}-I\right)A^{-1}\tilde{\Sigma}(A^{-1})^{\mathsf{T}}\left(e^{A^{\mathsf{T}}\delta}-I\right) =$$

$$= \frac{1}{\delta}\left[A\delta + \frac{A^2\delta^2}{2} + \frac{A^3\delta^3}{6} + O(\delta^4)\right]A^{-1}\tilde{\Sigma}(A^{-1})^{\mathsf{T}}\times$$

$$\times\left[A^{\mathsf{T}}\delta+\frac{(A^{\mathsf{T}})^2\delta^2}{2}+\frac{(A^{\mathsf{T}})^3\delta^3}{6}+O(\delta^4)\right]=$$

$$=\tilde{\Sigma}\delta+\left(A\tilde{\Sigma}\right)^s\delta^2+\left[\frac{1}{4}A\tilde{\Sigma}A^{\mathsf{T}}+\frac{1}{3}\left(A^2\tilde{\Sigma}\right)^s\right]\delta^3+O(\delta^4), \tag{11.76}$$

где $B^s \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{2}\left(B+B^{\mathsf{T}}\right)$ — симметричная часть матрицы B.

Подставляя (11.75) и (11.76) в (11.74), а затем (11.74) — в (11.73), получаем

$$E_D(k+1)=e^{A\Delta}E_D(k)e^{A^{\mathsf{T}}\Delta}+\sum_{i=1}^{N}e^{A(\Delta-i\delta)}\left(\frac{\delta^3}{12}A\tilde{\Sigma}A^{\mathsf{T}}+O(\delta^4)\right)e^{A^{\mathsf{T}}(\Delta-i\delta)}. \tag{11.77}$$

Оценим норму $\|E_D(k+1)\|$:

$$\|E_D(k+1)\|\le\left\|e^{A\Delta}\right\|^2\|E_D(k)\|+\left(\frac{\delta^3}{12}\|A\|^2\left\|\tilde{\Sigma}\right\|+O(\delta^4)\right)\sum_{i=1}^{N}e^{2\|A\|(\Delta-i\delta)}. \tag{11.78}$$

Поскольку $\sum\limits_{i=1}^{N}e^{2\|A\|(\Delta-i\delta)}=\frac{e^{2\|A\|\Delta}-1}{e^{2\|A\|\delta}-1}$, то из (11.78) имеем

$$\|E_D(k+1)\|\le\left\|e^{A\Delta}\right\|^2\|E_D(k)\|+\left(\frac{1}{12}\delta^3\|A\|^2\left\|\tilde{\Sigma}\right\|+O(\delta^4)\right)\frac{e^{2\|A\|\Delta}-1}{e^{2\|A\|\delta}-1}. \tag{11.79}$$

Если $\left\|e^{A\Delta}\right\|\le 1$ и $\|E_D(0)\|=0$, то используя эти условия и итерируя неравенство (11.79), получаем (11.68).

Если же матрица A гурвицева, то все собственные числа матрицы $e^{A\Delta}$ лежат внутри единичного круга, и, следовательно, $\left\|e^{A\Delta}\right\|<1$.

В этих условиях известно [31], что существуют и единственны пределы $\lim\limits_{k\to\infty}D_x(k)$, $\lim\limits_{k\to\infty}D_{\tilde{x}}(k)$, где $D_x(k)$ и $D_{\tilde{x}}(k)$ определяются уравнениями (11.70) и (11.72) соответственно. Тогда существует и единственен предел $\lim\limits_{k\to\infty}E_D(k)=\lim\limits_{k\to\infty}(D_x(k)-D_{\tilde{x}}(k))$.

Переходя к пределу при $k\to\infty$ в (11.79), получаем (11.69). Лемма доказана. □

При $N=1(\Delta=\delta)$ из (11.68) и (11.69) соответственно получаем

$$\max_{1\le k\le M}\|E_D(k)\|\le T\left(\frac{1}{12}\Delta^2\|A\|^2\left\|\tilde{\Sigma}\right\|+O(\Delta^3)\right), \tag{11.80}$$

$$\lim_{k\to\infty}\|E_D(k)\|\le\frac{\frac{1}{12}\Delta^3\|A\|^2\left\|\tilde{\Sigma}\right\|+O(\Delta^4)}{1-\left\|e^{A\Delta}\right\|^2}. \tag{11.81}$$

Рассмотрим несколько иной способ. Заменим стохастический интеграл Ито в правой части (11.64) интегральной итовской суммой вида

$$\sum_{j=1}^{N} e^{A(\Delta-j\delta)} e^{A\delta} \Sigma(\mathbf{f}_{k\Delta+j\delta} - \mathbf{f}_{k\Delta+(j-1)\delta}). \tag{11.82}$$

Повторяя выкладки из доказательства леммы 11.2 для этого случая получаем

$$Q_i(\delta,\Delta) = e^{A(\Delta-i\delta)}\Big[\int\limits_0^{\delta} e^{A(\delta-\tau)}\tilde{\Sigma}e^{A^{\mathsf{T}}(\delta-\tau)}d\tau - \delta e^{A\delta}\tilde{\Sigma}e^{A^{\mathsf{T}}\delta}\Big]e^{A^{\mathsf{T}}(\Delta-i\delta)} =$$

$$= e^{A(\Delta-i\delta)}\Big[-\left(A\tilde{\Sigma}\right)^s\delta^2 + O(\delta^3)\Big]e^{A^{\mathsf{T}}(\Delta-i\delta)}.$$

В результате приходим к оценкам

$$\max_{1\le k\le M}\|E_D(k)\| \le M\Big(\delta^2\|A\|\,\|\tilde{\Sigma}\| + O(\delta^3)\Big)\frac{e^{2\|A\|\Delta}-1}{e^{2\|A\|\delta}-1}, \tag{11.83}$$

$$\lim_{k\to\infty}\|E_D(k)\| \le \frac{\delta^2\|A\|\,\|\tilde{\Sigma}\| + O(\delta^3)}{1-\|e^{A\Delta}\|^2}\cdot\frac{e^{2\|A\|\Delta}-1}{e^{2\|A\|\delta}-1}, \tag{11.84}$$

которые при $N = 1(\Delta = \delta)$ переходят в неравенства

$$\max_{1\le k\le M}\|E_D(k)\| \le T\Big(\Delta\|A\|\,\|\tilde{\Sigma}\| + O(\Delta^2)\Big), \tag{11.85}$$

$$\lim_{k\to\infty}\|E_D(k)\| \le \frac{\Delta^2\|A\|\,\|\tilde{\Sigma}\| + O(\Delta^3)}{1-\|e^{A\Delta}\|^2}. \tag{11.86}$$

Очевидно, что оценки (11.85), (11.86) на порядок хуже оценок (11.68), (11.69).

Нетрудно видеть, что оценки (11.68), (11.69) останутся в силе, если взять в (11.71) случайные столбцы $\mathbf{w}_{r\delta}$ с распределением $\mathsf{P}\{\mathbf{w}_{r\delta} = \pm\mathbf{e}/\sqrt{\delta}\} = 1/2$, независимыми при различных r и с независимыми компонентами $\mathbf{w}_{r\delta}^{(i)}$; $i = 1,\ldots,m$. Здесь $\mathbf{e}$ — столбец длины m, состоящий из единиц.

Оценки (11.85), (11.86) также останутся в силе, если взять в (11.82) случайные столбцы $\mathbf{w}_{r\delta}$ с распределением $\mathsf{P}\{\mathbf{w}_{r\delta} = \pm\mathbf{e}\sqrt{\delta}\} = 1/2$, независимыми при различных r и с независимыми компонентами $\mathbf{w}_{r\delta}^{(i)}$; $i = 1,\ldots,m$. Здесь также $\mathbf{e}$ — столбец длины m, состоящий из единиц.

Глава 12

Численное интегрирование стохастических дифференциальных уравнений со скачкообразной компонентой

В настоящей главе рассматриваются методы численного интегрирования стохастических дифференциальных уравнений со скачкообразной компонентой. При построении таких численных методов используется специальная, адаптированная к скачкам процесса Пуассона, временная дискретизация, которая позволяет раздельно моделировать численно диффузионную и скачкообразную составляющие решения стохастического дифференциального уравнения со скачкообразной компонентой. Представленные численные методы отличаются от известных в литературе способом численного моделирования диффузионной составляющей решения стохастического дифференциального уравнения со скачкообразной компонентой. Различия связаны с применением унифицированных разложений Тейлора–Ито и Тейлора–Стратоновича, а также новых методов численного моделирования повторных стохастических интегралов Ито и Стратоновича.

Наряду со стохастическими дифференциальными уравнениями Ито на практике интерес представляют также более общие стохастические уравнения — стохастические дифференциальные уравнения со скачкообразной компонентой. Данные стохастические уравнения, в частности, применяются в качестве математических моделей в стохастической финансовой математике [18–23] (см. также главу 2) и адекватно отражают скачкообразные изменения в динамике процентных, форвардных процентных ставок и цен облигаций.

Одна из первых попыток построения численных методов решения стохастических дифференциальных уравнений со скачкообразной

компонентой и их численной реализации была предпринята в работе [137] (D.J. Wright, 1980). В указанной работе рассматривалось скалярное стохастическое дифференциальное уравнение со скачкообразной компонентой без диффузионного и сносового членов. В данном уравнении вместо пуассоновской меры выбирался также обычный процесс Пуассона. Для таких частных стохастических дифференциальных уравнений со скачкообразной компонентой в [137] построены численные методы, причем правая часть стохастического уравнения выбиралась специальным образом. В [73] (З.А. Дзагнидзе, Р.Я. Читашвили, 1975) рассмотрено скалярное стохастическое дифференциальное уравнение со скачкообразной компонентой и построены численные методы решения данного уравнения. В [5] (И.И. Гихман, А.В. Скороход, 1975) рассмотрен метод Эйлера решения стохастических дифференциальных уравнений со скачкообразной компонентой и доказана его среднеквадратическая сходимость.

Дальнейшее развитие теория численного интегрирования стохастических дифференциальных уравнений со скачкообразной компонентой получила в работах [83] (E. Platen, 1982), [77] (Y. Maghsoodi, C.J. Harris, 1987), [78] (Y. Maghsoodi, 1994), [88] (R. Mikulevicius, E. Platen, 1988). В [83] построен аналог разложения Тейлора–Ито для решения стохастического дифференциального уравнения со скачкообразной компонентой и предложен подход к численному интегрированию, основанный на применении данного разложения, который позволяет "раздельно" моделировать численно диффузионную и скачкообразную компоненты решения стохастического дифференциального уравнения со скачкообразной компонентой на каждом шаге интегрирования. В [83] представлен ряд сильных, а в [88] — слабых численных методов решения стохастических дифференциальных уравнений со скачкообразной компонентой, которые основаны на данном подходе, а также доказана сходимость этих численных методов. Таким образом, благодаря работам [83, 88] можно численно решать стохастические дифференциальные уравнения со скачкообразной компонентой так, что на каждом шаге интегрирования диффузионная и скачкообразная компоненты решения моделируются "раздельно". Это означает, что для численного моделирования диффузионной компоненты решения можно использовать численные методы решения стохастических дифференциальных уравнений Ито, которым посвящено большое число работ (см. библиографию к данной работе), а также некоторые главы настоящей монографии.

В данной главе приводятся основные результаты по численному ин-

тегрированию стохастических дифференциальных уравнений со скачкообразной компонентой, полученные в [83, 88]. Кроме того, предлагаются модификации численных методов, построенных в [83, 88], которые отличаются от своих аналогов способом моделирования диффузионной составляющей решения стохастического дифференциального уравнения со скачкообразной компонентой. При этом различия связаны с использованием унифицированных разложений Тейлора–Ито и Тейлора–Стратоновича, а также новых методов численного моделирования повторных стохастических интегралов Ито и Стратоновича.

12.1 Разложение Тейлора–Ито для решений стохастических дифференциальных уравнений со скачкообразной компонентой

Пусть $(\Omega, \mathcal{F}, \mathsf{P})$ — фиксированное вероятностное пространство, а $\{\mathcal{F}_t,\ t \in [0,T]\}$ — неубывающее, непрерывное справа семейство σ-подалгебр $\mathcal{F}$. Рассмотрим следующую систему стохастических дифференциальных уравнений со скачкообразной компонентой:

$$\mathbf{x}_t = \mathbf{x}_0 + \int\limits_0^t \mathbf{a}(\mathbf{x}_s, s)ds + \int\limits_0^t \Sigma(\mathbf{x}_s, s)d\mathbf{f}_s + \int\limits_0^t \int\limits_X \mathbf{c}(\mathbf{x}_s, s, \mathbf{y})\tilde{\nu}(ds, d\mathbf{y}), \quad (12.1)$$

где $\mathbf{x}_s \in \Re^n$ — решение системы (12.1); $\mathbf{f}_s$ — $\mathcal{F}_s$-измеримый при всех $s \in [0,T]$ m-мерный стандартный винеровский процесс с независимыми компонентами $\mathbf{f}_s^{(i)}$ $(i = 1, \ldots, m)$; $\Re^d \backslash \{0\} \stackrel{\text{def}}{=} X$; $\nu(ds, d\mathbf{y})$ — пуассоновская мера, заданная в $[0,T] \times X$ и независимая с винеровским процессом $\mathbf{f}_s$; $\tilde{\nu}(ds, d\mathbf{y}) = \nu(ds, d\mathbf{y}) - \Pi(d\mathbf{y})ds$ — мартингальная пуассоновская мера; $\mathsf{M}\{\nu(ds, d\mathbf{y})\} = \Pi(d\mathbf{y})ds$; $\Pi(d\mathbf{y})ds$ — мера интенсивности; $\Pi(X) < \infty$; $\mathbf{a}(\mathbf{x}, s) : \Re^n \times [0,T] \to \Re^n$, $\Sigma(\mathbf{x}, s) : \Re^n \times [0,T] \to \Re^{n \times m}$, $\mathbf{c}(\mathbf{x}, s, \mathbf{y}) : \Re^n \times [0,T] \times X \to \Re^n$ — матричные функции, удовлетворяющие условиям теоремы 1.12 о существовании и единственности решения уравнения (12.1); $\mathbf{x}_0 \in \Re^n$ — $\mathcal{F}_0$-измеримая случайная величина. Второй интеграл в правой части (12.1) понимается как стохастический интеграл Ито, а третий — как стохастический интеграл по мартингальной пуассоновской мере (см. главу 1).

Далее в настоящем разделе будем использовать компактные обозначения, принятые в [83].

Пусть $\mathcal{M} \stackrel{\text{def}}{=} \{(i_1, \ldots, i_k) : k \in N, i_l = 0, 1, \ldots, m+1; l = 1, \ldots, k\}$, $\alpha \stackrel{\text{def}}{=} (i_1, \ldots, i_k)$, $l(\alpha) \stackrel{\text{def}}{=} k \geq 1$, $-\alpha \stackrel{\text{def}}{=} (i_2, \ldots, i_k)$, $\alpha- \stackrel{\text{def}}{=} (i_1, \ldots, i_{k-1})$.

Через $\mathcal{G}_k([0,T])$; $k=0,1,\ldots$ обозначим класс $\mathcal{F}_t$-измеримых функций $G(t,\mathbf{y}_1,\ldots,\mathbf{y}_k,\omega):[0,T]\times X^k\times\Omega\to\Re^n$, для которых

$$\mathsf{M}\left\{\int\limits_0^T\int\limits_X\ldots\int\limits_X|G(t,\mathbf{y}_1,\ldots,\mathbf{y}_k,\omega)|^2\Pi(d\mathbf{y}_1)\ldots\Pi(d\mathbf{y}_k)dt\right\}<\infty,$$

где повторный интеграл понимается как предел последовательности ступенчатых функций $G_p(t,\mathbf{y}_1,\ldots,\mathbf{y}_k,\omega)$, которые непрерывны слева, $\mathcal{F}_t$-измеримы и для которых величина:

$$\mathsf{M}\left\{\int\limits_0^T\int\limits_X\ldots\int\limits_X|G(t,\mathbf{y}_1,\ldots,\mathbf{y}_k,\omega)-G_p(t,\mathbf{y}_1,\ldots,\mathbf{y}_k,\omega)|^2\Pi(d\mathbf{y}_1)\ldots\Pi(d\mathbf{y}_k)dt\right\}$$

стремится к нулю при $p\to\infty$.

Положим

$$I_\alpha[G(\cdot)]_{\tau,t}\stackrel{\text{def}}{=}\begin{cases}\int\limits_t^\tau I_{\alpha-}[G(\cdot)]_{s,t}ds & \text{при } i_{l(\alpha)}=0\\ \int\limits_t^\tau I_{\alpha-}[G(\cdot)]_{s,t}d\mathbf{f}_s^{(i_{l(\alpha)})} & \text{при } i_{l(\alpha)}=1,\ldots,m\,,\\ \int\limits_t^\tau\int\limits_X I_{\alpha-}[G(\cdot)]_{s,t}\tilde{\nu}(ds,d\mathbf{y}_{z(\alpha)}) & \text{при } i_{l(\alpha)}=m+1\end{cases}$$

где $G(\cdot,\mathbf{y}_1,\ldots,\mathbf{y}_{z(\alpha)})\stackrel{\text{def}}{=}G(\cdot)$; $z(\alpha)$ — число компонент мультииндекса α, которые равны $m+1$; $G(\cdot)\in\mathcal{G}_{z(\alpha)}([0,T])$; t,τ — моменты остановки, для которых $0\le t\le\tau\le T$ с вероятностью 1.

Пусть $D_n([0,T])$ — множество непрерывных справа функций $\xi(t,\omega)\stackrel{\text{def}}{=}\xi_t:[0,T]\times\Omega\to\Re^n$, имеющих пределы слева.

Введем в рассмотрение множества $\mathcal{L}_i$; $i=0,1,\ldots,m+1$ функций $g(\mathbf{x},t):\Re^n\times[0,T]\to\Re^n$ следующим образом: $\mathcal{L}_0$ — множество функций $g(\mathbf{x},t)$, для которых существуют частные производные $\frac{\partial g}{\partial t}(\mathbf{x},t)$, $\frac{\partial g}{\partial\mathbf{x}^{(i)}}(\mathbf{x},t)$, $\frac{\partial^2 g}{\partial\mathbf{x}^{(i)}\mathbf{x}^{(j)}}(\mathbf{x},t)$; $i,j=1,\ldots,n$ и при всех $t\in[0,T]$, $\mathbf{x}\in\Re^n$ функция

$$g(\mathbf{x}+\mathbf{c}(\mathbf{x},t,\mathbf{y}),t)-g(\mathbf{x},t)-\sum_{k=1}^n\mathbf{c}^{(k)}(\mathbf{x},t,\mathbf{y})\frac{\partial g}{\partial\mathbf{x}^{(k)}}(\mathbf{x},t)$$

является $\Pi(d\mathbf{y})$-интегрируемой; $\mathcal{L}_i$ $(i=1,\ldots,m)$ — множества функций $g(\mathbf{x},t)$, для которых существуют частные производные $\frac{\partial g}{\partial\mathbf{x}^{(i)}}(\mathbf{x},t)$; $i=1,\ldots,n$ а $\mathcal{L}_{m+1}$ — множество функций $g(\mathbf{x},t)$, для которых функция $\left(g(\mathbf{x}+\mathbf{c}(\mathbf{x},t,\mathbf{y}),t)-g(\mathbf{x},t)\right)^2$ является $\Pi(d\mathbf{y})$-интегрируемой при всех $t\in[0,T]$, $\mathbf{x}\in\Re^n$.

Определим операторы L_i; $i=0,1,\ldots,m+1$ на множествах $\mathcal{L}_i$; $i=0,1,\ldots,m+1$ соотношениями

$$L_0g(\xi_t,t)=\frac{\partial g}{\partial t}(\xi_t,t)+\sum_{k=1}^n\mathbf{a}^{(k)}(\xi_t,t)\frac{\partial g}{\partial\mathbf{x}^{(k)}}(\xi_t,t)+$$

$$+\frac{1}{2}\sum_{j,k=1}^{n}\frac{\partial^2 g}{\partial \mathbf{x}^{(j)}\mathbf{x}^{(k)}}(\xi_t,t)\sum_{i=1}^{m}\Sigma^{(ki)}(\xi_t,t)\Sigma^{(ji)}(\xi_t,t)+$$

$$+\int\limits_X\Big(g(\xi_t+\mathbf{c}(\xi_t,t,\mathbf{y}),t)-g(\xi_t,t)-\sum_{k=1}^{n}\mathbf{c}^{(k)}(\xi_t,t,\mathbf{y})\frac{\partial g}{\partial \mathbf{x}^{(k)}}(\xi_t,t)\Big)\Pi(d\mathbf{y}),$$

$$L_i g(\xi_t,t)=\sum_{k=1}^{n}\Sigma^{(ki)}(\xi_t,t)\frac{\partial g}{\partial \mathbf{x}^{(k)}}(\xi_t,t),\ i=1,\ldots,m,$$

$$L_{m+1}g(\xi_t,t)=g(\xi_{t-}+\mathbf{c}(\xi_t,t,\mathbf{y}),t)-g(\xi_{t-},t),$$

где $t\in[0,T]$; $\xi_t\in D_n([0,T])$.

Для всех $\alpha=(i_1,\ldots,i_{l(\alpha)})$ определим функции $F_\alpha:\Re^n\times[0,T]\times X^{z(\alpha)}\to\Re^n$ следующим образом:

$$F_\alpha(\xi_t,t)=\begin{cases}\mathbf{a}(\xi_t,t) & \text{при } l(\alpha)=1, i_1=0\\ \Sigma_{i_1}(\xi_t,t) & \text{при } l(\alpha)=1, i_1=1,\ldots,m\\ \mathbf{c}(\xi_t,t,\mathbf{y}_1) & \text{при } l(\alpha)=1, i_1=m+1\\ L_{i_1}F_{-\alpha}(\xi_t,t) & \text{при } l(\alpha)\geq 2, i_1=0,1,\ldots,m+1\end{cases},$$

где $F_\alpha(\xi_t,t,\mathbf{y}_1,\ldots,\mathbf{y}_{z(\alpha)})\stackrel{\text{def}}{=}F_\alpha(\xi_t,t)$; $t\in[0,T]$; $\xi_t\in D_n([0,T])$; $\Sigma_i(\mathbf{x},t)$ — i-й столбец матрицы $\Sigma(\mathbf{x},t)$.

Приведем формулировку доказанной в [83] теоремы об аналоге разложения Тейлора–Ито для решения стохастического дифференциального уравнения (12.1).

Теорема 12.1 [83]. *Пусть для $A\subset\mathcal{M}$, $A\neq\emptyset$ выполнены условия:*

1. $\sup\limits_{\alpha\in A} l(\alpha)<\infty$.
2. $-\alpha\in A$ *для всех* $\alpha\in A$.
3. $F_{-\alpha}\in\bigcap\limits_{i=0}^{m+1}\mathcal{L}_i$ *для всех* $\alpha\in A\cup B(A)$; $B(A)\stackrel{\text{def}}{=}\{\alpha\in\mathcal{M}\backslash A:-\alpha\in A\}$.
4. $F_\alpha(\mathbf{x}_s,s,\mathbf{y}_1,\ldots,\mathbf{y}_{z(\alpha)})\in\mathcal{G}_{z(\alpha)}([0,T])$ *для всех* $\alpha\in A$ *и всех моментов остановки* $s\in[0,T]$.
5. $F_\alpha(\mathbf{x}_t,t,\mathbf{y}_1,\ldots,\mathbf{y}_{z(\alpha)})\in\mathcal{G}_{z(\alpha)}([0,T])$ *для всех* $\alpha\in B(A)$.

Тогда для любых двух моментов остановки s,τ таких, что $\mathsf{P}\{0\leq\tau\leq s\leq T\}=1$, *с вероятностью* 1 *справедливо разложение*

$$\mathbf{x}_s=\mathbf{x}_\tau+\sum_{\alpha\in A}I_\alpha[F_\alpha(\mathbf{x}_\tau,\tau)]_{s,\tau}+\sum_{\alpha\in B(A)}I_\alpha[F_\alpha(\mathbf{x}_\cdot,\cdot)]_{s,\tau},\tag{12.2}$$

где $F_\alpha(\mathbf{x}_t,t,\mathbf{y}_1,\ldots,\mathbf{y}_{z(\alpha)})\stackrel{\text{def}}{=}F_\alpha(\mathbf{x}_t,t)$, *а* $\mathbf{x}_t$ — *решение стохастического дифференциального уравнения* (12.1).

12.2 Сильные численные методы решения стохастических дифференциальных уравнений со скачкообразной компонентой

Нетрудно видеть, что разложение (12.2) может быть использовано для построения численных методов решения стохастических дифференциальных уравнений со скачкообразной компонентой подобно тому, как разложения Тейлора–Ито и Тейлора–Стратоновича использовались для построения численных методов решения стохастических дифференциальных уравнений Ито. Формула (12.2) включает в себя повторные стохастические интегралы не только по винеровскому процессу, но и по мартингальной пуассоновской мере. Во избежание проблем, связанных с аппроксимацией повторных стохастических интегралов по мартингальной пуассоновской мере, при построении численных методов решения стохастического дифференциального уравнения (12.1) можно выбрать специальное, адаптированное к скачкам процесса $\mathbf{x}_t$, $t \in [0,T]$ разбиение промежутка $[0,T]$ [83, 88]. При этом удается добиться того, что на каждом шаге интегрирования диффузионная и скачкообразная компоненты решения моделируются "раздельно".

Рассмотрим указанный подход подробнее, опираясь на работы [83, 88]. В данном разделе вернемся к принятым в настоящей книге ранее обозначениям.

Процесс Пуассона $\nu([0,t),X)$, $t \in [0,T]$ с интенсивностью $\Pi(X) < \infty$ генерирует последовательность моментов своих скачков, которые очевидно являются моментами скачков и процесса $\mathbf{x}_t$, $t \in [0,T]$, являющегося решением уравнения (12.1).

Введем в рассмотрение последовательность $\{\tau_j\}_{j=0}^{\infty}$ моментов остановки, для которой $0 = \tau_0 < \tau_1 < \ldots < \tau_{n_T+1} = T$, $n_T < \infty$ с в.1, $\max\limits_{1\le i\le n_T+1} |\tau_i - \tau_{i-1}| \le \Delta$ с в.1, где $n_t = \max\{i : \tau_i < t\}$ для всех $t \in [0,T]$. Предполагается также, что среди $\tau_0, \tau_1, \ldots, \tau_{n_T+1}$ встречаются все моменты скачков процесса $\nu([0,t),X)$, $t \in [0,T]$ не превосходящие T, и если τ_{i+1} не является моментом скачка процесса $\nu([0,t),X)$, $t \in [0,T]$, то он $\mathcal{F}_{\tau_i}$-измерим.

Нетрудно видеть, что

$$\mathbf{x}_t = \mathbf{x}_{\tau_i} + \int\limits_{\tau_i}^{t} \tilde{\mathbf{a}}(\mathbf{x}_s, s)ds + \int\limits_{\tau_i}^{t} \Sigma(\mathbf{x}_s, s)d\mathbf{f}_s \text{ с в.1} \tag{12.3}$$

при $t \in [\tau_i, \tau_{i+1})$, где $\tilde{\mathbf{a}}(\mathbf{x}, s) = \mathbf{a}(\mathbf{x}, s) - \int\limits_X \mathbf{c}(\mathbf{x}, s, \mathbf{y})\Pi(d\mathbf{y})$; $i = 0, 1, \ldots, n_T$.

В то же время

$$\mathbf{x}_{\tau_i} = \mathbf{x}_{\tau_i-} + \int\limits_{\tau_i-}^{\tau_{i+1}-} \int\limits_X \mathbf{c}(\mathbf{x}_{\tau_i-}, \tau_i, \mathbf{y})\nu(ds, d\mathbf{y});\ i = 1, 2, \ldots, n_T + 1. \qquad (12.4)$$

Из (12.3), (12.4) получаем

$$\begin{cases} \mathbf{x}_{\tau_{i+1}-} = \mathbf{x}_{\tau_i} + \int\limits_{\tau_i}^{\tau_{i+1}-} \tilde{\mathbf{a}}(\mathbf{x}_s, s)ds + \int\limits_{\tau_i}^{\tau_{i+1}-} \Sigma(\mathbf{x}_s, s)d\mathbf{f}_s \\ \mathbf{x}_{\tau_{i+1}} = \mathbf{x}_{\tau_{i+1}-} + \int\limits_X \mathbf{c}(\mathbf{x}_{\tau_{i+1}-}, \tau_{i+1}, \mathbf{y})\nu(\{\tau_{i+1}\}, d\mathbf{y}) \end{cases} \qquad (12.5)$$

с вероятностью 1, где $i = 0, 1, \ldots, n_T$. Если момент τ_{i+1} в (12.5) является моментом скачка процесса Пуассона, то в [73, 88] предлагается численно моделировать стохастический интеграл во втором соотношении (12.5) по формуле

$$\int\limits_X \mathbf{c}(\mathbf{x}_{\tau_{i+1}-}, \tau_{i+1}, \mathbf{y})\nu(\{\tau_{i+1}\}, d\mathbf{y}) = \mathbf{c}(\mathbf{x}_{\tau_{i+1}-}, \tau_{i+1}, \xi_{i+1}),$$

где ξ_i; $i = 1, \ldots, n_T+1$ — независимые, $\Pi(d\mathbf{y})/\Pi(X)$ — распределенные случайные величины. При этом, как известно, временные интервалы между последовательными скачками процесса Пуассона являются независимыми и экспоненциально распределенными с параметром $\Pi(X)$ случайными величинами, т. е. $\mathsf{P}\{\theta_{i+1} - \theta_i > t\} = e^{-\Pi(X)t}$, где θ_i, θ_{i+1} — последовательные моменты скачков процесса Пуассона.

Согласно (12.3) между моментами скачков процесса $\nu([0, t), X)$, $t \in [0, T]$ процесс Ито $\mathbf{x}_t$, $t \in [0, T]$ описывается стохастическим дифференциальным уравнением Ито, численным методам интегрирования которых было посвящено несколько предыдущих глав книги.

Пусть $\mathcal{L}$ — множество функций $R(\mathbf{x}, t) : \Re^n \times [0, T] \to \Re^n$, для которых при всех $\mathbf{x} \in \Re^n$, $t \in [0, T]$, существуют и непрерывны частные производные $\frac{\partial R}{\partial t}(\mathbf{x}, t)$, $\frac{\partial R}{\partial \mathbf{x}^{(i)}}(\mathbf{x}, t)$, $\frac{\partial^2 R}{\partial \mathbf{x}^{(i)}\mathbf{x}^{(j)}}(\mathbf{x}, t)$; $i, j = 1, \ldots, n$.

Формулы (12.5) позволяют конструировать численные методы решения стохастического дифференциального уравнения (12.1). Так, в [83] предложено семейство явных сильных численных методов, основанных на разложении Тейлора–Ито в форме Вагнера и Платена

$$\begin{cases} \mathbf{y}_{\tau_{p+1}-} = \mathbf{y}_{\tau_p} + \sum\limits_{q,k=1}^{r} \sum\limits_{(\lambda_k,\ldots,\lambda_1)\in\mathcal{E}'_{qk}} {}^{(p_k)}\tilde{Q}_{\lambda_k} \ldots \tilde{Q}_{\lambda_1}\{\mathbf{y}_{\tau_p}\} \overset{p_k}{\cdot} {}^{(p_k)}\hat{J}_{(\lambda_k\ldots\lambda_1)\tau_{p+1},\tau_p} \\ \mathbf{y}_{\tau_{p+1}} = \mathbf{y}_{\tau_{p+1}-} + \int\limits_X \mathbf{c}(\mathbf{y}_{\tau_{p+1}-}, \tau_{p+1}, \mathbf{y})\nu(\{\tau_{p+1}\}, d\mathbf{y}) \end{cases}, \qquad (12.6)$$

где $p = 0, 1, \ldots, n_T$;

$$^{(p_k)}\hat{J}_{(\lambda_k \ldots \lambda_1)\tau_{p+1},\tau_p} = \left\| \hat{J}^{(i_k \ldots i_1)}_{(\lambda_k \ldots \lambda_1)\tau_{p+1},\tau_p} \right\|_{i_1=\lambda_1,\ldots,i_k=\lambda_k}^{m\lambda_1 \ \ldots \ m\lambda_k};$$

$\hat{J}^{(i_k \ldots i_1)}_{(\lambda_k \ldots \lambda_1)\tau_{p+1},\tau_p}$ — аппроксимация повторного стохастического интеграла Ито

$$J^{(i_k \ldots i_1)}_{(\lambda_k \ldots \lambda_1)\tau_{p+1},\tau_p} = \int\limits_{\tau_p}^{\tau_{p+1}} \ldots \int\limits_{\tau_p}^{t_2} d\mathbf{w}_{t_1}^{(i_k)} \ldots d\mathbf{w}_{t_k}^{(i_1)};$$

$\mathbf{w}_t^{(i)} = \mathbf{f}_t^{(i)}$ при $i = 1, \ldots, m$ и $\mathbf{w}_t^{(0)} = \tau$; $\mathbf{f}_t^{(i)}$ — независимые стандартные винеровские процессы; $\lambda_l = 1$ или $\lambda_l = 0$; $p_l = \sum\limits_{j=1}^{l} \lambda_j$; $\tilde{Q}_{\lambda_l}^{(i_l)} = \tilde{L}$ и $i_l = 0$ при $\lambda_l = 0$; $\tilde{Q}_{\lambda_l}^{(i_l)} = G_0^{(i_l)}$ и $i_l = 1, \ldots, m$ при $\lambda_l = 1$; $l = 1, \ldots, k$;

$$\mathcal{E}'_{qk} = \mathcal{E}_{qk} \bigcup \{(\lambda_k, \ldots, \lambda_1) : \lambda_1 = \ldots = \lambda_k = 0 \text{ и } 2k = q + 1\};$$

операторы $\tilde{L}$ и $G_0^{(i)}$, $i = 1, \ldots, m$, имеют вид

$$\tilde{L}R(\mathbf{x}, t) = \frac{\partial R}{\partial t}(\mathbf{x}, t) + \sum_{k=1}^{n} \tilde{\mathbf{a}}^{(k)}(\mathbf{x}, t) \frac{\partial R}{\partial \mathbf{x}^{(k)}}(\mathbf{x}, t) +$$

$$+ \frac{1}{2} \sum_{j,k=1}^{n} \sum_{i=1}^{m} \Sigma^{(ki)}(\mathbf{x}, t) \Sigma^{(ji)}(\mathbf{x}, t) \frac{\partial^2 R}{\partial \mathbf{x}^{(j)} \mathbf{x}^{(k)}}(\mathbf{x}, t);$$

$$G_0^{(i)} R(\mathbf{x}, t) = \sum_{j=1}^{n} \Sigma^{(ji)}(\mathbf{x}, t) \frac{\partial R}{\partial \mathbf{x}^{(j)}}(\mathbf{x}, t); \ i = 1, \ldots, m.$$

Здесь $R(\mathbf{x}, t) \in \mathcal{L}$; $\tilde{\mathbf{a}}(\mathbf{x}, t) = \mathbf{a}(\mathbf{x}, t) - \int\limits_X \mathbf{c}(\mathbf{x}, t, \mathbf{y}) \Pi(d\mathbf{y})$.

Через $\bar{\mathbf{y}}_{\tau_p}$; $p = 0, 1, \ldots, n_T + 1$ будем обозначать дискретную аппроксимацию, которая отличается от дискретной аппроксимации $\mathbf{y}_{\tau_p}$; $p = 0, 1, \ldots, n_T + 1$ вида (12.6) тем, что в $\bar{\mathbf{y}}_{\tau_p}$ производится замена $^{(p_k)}\hat{J}_{(\lambda_k \ldots \lambda_1)\tau_p,\tau_{p-1}}$ на $^{(p_k)}J_{(\lambda_k \ldots \lambda_1)\tau_p,\tau_{p-1}}$.

В [83] сформулировано и доказано следующее утверждение.

Теорема 12.2 [83]. *Пусть для данных* $r \in N$, $\Delta > 0$ *выполнены следующие условия:*

1. *Для всех* $(\lambda_k, \ldots, \lambda_1) \in \bigcup\limits_{q,k=1}^{r} \mathcal{E}'_{qk}$, $t \in [0, T]$ *и* $\mathbf{x}, \mathbf{z} \in \Re^n$

$$\left| \tilde{Q}_{\lambda_k}^{(i_k)} \ldots \tilde{Q}_{\lambda_1}^{(i_1)} \mathbf{x} - \tilde{Q}_{\lambda_k}^{(i_k)} \ldots \tilde{Q}_{\lambda_1}^{(i_1)} \mathbf{z} \right| \le K_1 |\mathbf{x} - \mathbf{z}|, \ K_1 < \infty,$$

$$|\mathbf{c}(\mathbf{x}, t, \mathbf{y}) - \mathbf{c}(\mathbf{z}, t, \mathbf{y})| \le C_1(\mathbf{y}) |\mathbf{x} - \mathbf{z}|,$$

где $(C_1(\mathbf{y}))^2$ — $\Pi(d\mathbf{y})$*-интегрируемая функция.*

2. *Для всех* $p \in \{0, 1, \ldots, n_T\}$: τ_{p+1} — $\mathcal{F}_{\tau_p}$*-измеримая случайная величина, если* τ_{p+1} *не является моментом скачка процесса Пуассона* $\nu([0,t), X)$, $t \in [0,T]$ *и* $\mathsf{P}\{\tau_{p+1} - \tau_p \le \Delta\} = 1$.

3. *Для всех* $(\lambda_k, \ldots, \lambda_1) \in \bigcup\limits_{q=1}^{r} \mathcal{M}_q : \tilde{Q}_{\lambda_k}^{(i_k)} \ldots \tilde{Q}_{\lambda_1}^{(i_1)} \mathbf{x} \in \mathcal{L}$, $\tilde{Q}_{\lambda_k}^{(i_k)} \ldots \tilde{Q}_{\lambda_1}^{(i_1)} \mathbf{x}_{\tau_p} \in \mathcal{G}_0([0,T])$; $p \in \{0, 1, \ldots, n_T + 1\}$ *и для всех* $(\lambda_k, \ldots, \lambda_1) \in \mathcal{M}_{r+1}$: $\tilde{Q}_{\lambda_k}^{(i_k)} \ldots \tilde{Q}_{\lambda_1}^{(i_1)} \mathbf{x}_s \in \mathcal{G}_0([0,T])$.

4. *Для всех* $(\lambda_k, \ldots, \lambda_1) \in \bigcup\limits_{q=1}^{r+1} \mathcal{M}_q$, $t \in [0,T]$, $\mathbf{x} \in \Re^n$ *и* $\mathbf{y} \in X$

$$\left|\tilde{Q}_{\lambda_k}^{(i_k)} \ldots \tilde{Q}_{\lambda_1}^{(i_1)} \mathbf{x}\right| \le K_2(1 + |\mathbf{x}|), K_2 < \infty,$$

$$|\mathbf{c}(\mathbf{x}, t, \mathbf{y})| \le C_2(\mathbf{y})(1 + |\mathbf{x}|),$$

где $(C_2(\mathbf{y}))^2$ — $\Pi(d\mathbf{y})$*-интегрируемая функция; здесь* $\mathcal{M}_q = \{(\lambda_q, \ldots, \lambda_1) : \lambda_l \in \{0,\ 1\};\ l = 1, \ldots, q\}$.

5. *Для всех* $s, t \in [0,T]$, $\mathbf{x} \in \Re^n$, $\mathbf{y} \in X$ *и* $i = 1, \ldots, m$

$$|\mathbf{a}(\mathbf{x}, s) - \mathbf{a}(\mathbf{x}, t)| \le K_3(1 + |\mathbf{x}|)|s - t|^{\frac{1}{2}},\ \ K_3 < \infty,$$

$$|\Sigma_i(\mathbf{x}, s) - \Sigma_i(\mathbf{x}, t)| \le K_4(1 + |\mathbf{x}|)|s - t|^{\frac{1}{2}},\ \ K_4 < \infty,$$

$$|\mathbf{c}(\mathbf{x}, s, \mathbf{y}) - \mathbf{c}(\mathbf{x}, t, \mathbf{y})| \le C_3(\mathbf{y})(1 + |\mathbf{x}|)|s - t|^{\frac{1}{2}},$$

где $(C_3(\mathbf{y}))^2$ — $\Pi(d\mathbf{y})$*-интегрируемая функция;* $\Sigma_i(\mathbf{x}, t)$ — i*-й столбец матрицы* $\Sigma(\mathbf{x}, t)$.

Тогда

$$\mathsf{M}\left\{\sup_{0 \le t \le T} |\mathbf{x}_t - \bar{\mathbf{y}}_t|^2 | \mathcal{F}_0\right\} \le K_5(1 + |\mathbf{x}_0|^2)\Delta^r + K_6|\mathbf{x}_0 - \bar{\mathbf{y}}_0|^2, \tag{12.7}$$

где постоянные K_5, K_6 *не зависят от* Δ, *и*

$$\bar{\mathbf{y}}_t = \bar{\mathbf{y}}_0 + \sum_{q,k=1}^{r} \sum_{(\lambda_k, \ldots, \lambda_1) \in \mathcal{E}'_{qk}} \Bigg[\sum_{p=0}^{n_t - 1} {}^{(p_k)}\tilde{Q}_{\lambda_k} \ldots \tilde{Q}_{\lambda_1}\{\bar{\mathbf{y}}_{\tau_p}\} \overset{p_k}{\cdot} {}^{(p_k)}J_{(\lambda_k \ldots \lambda_1)\tau_{p+1}, \tau_p} +$$

$$+ {}^{(p_k)}\tilde{Q}_{\lambda_k} \ldots \tilde{Q}_{\lambda_1}\{\bar{\mathbf{y}}_{\tau_{n_t}}\} \overset{p_k}{\cdot} {}^{(p_k)}J_{(\lambda_k \ldots \lambda_1)t, \tau_{n_t}}\Bigg] + \int_0^t \int_X \mathbf{c}(\bar{\mathbf{y}}_{\tau_{n_s}}, \tau_{n_s}, \mathbf{y})\nu(ds, d\mathbf{y}); \tag{12.8}$$

$t \in [0,T]$; $\bar{\mathbf{y}}_0, \mathbf{x}_0$ — $\mathcal{F}_0$*-измеримые случайные величины.*

Если предположить, что дополнительно к условиям теоремы 12.2 выполнены условия

$$\mathsf{M}\{|\mathbf{x}_0|^2\} < \infty, \tag{12.9}$$

$$\mathsf{M}\{|\mathbf{x}_0-\bar{\mathbf{y}}_0|^2\}\le K_7\Delta^r,\ K_7<\infty, \tag{12.10}$$

то из (12.7) получаем следующую оценку [83]: $\mathsf{M}\left\{\sup\limits_{0\le t\le T}|\mathbf{x}_t-\bar{\mathbf{y}}_t|^2\right\}\le K_8\Delta^r$, где постоянная K_8 не зависит от Δ.

Следует отметить, что теорема 12.2 фактически обобщает результат среднеквадратической сходимости метода Эйлера для стохастического дифференциального уравнения (12.1), полученный в [5].

Предположим, что кроме условий теоремы 12.2 и условий (12.9), (12.10) выполнены условия

$$\mathsf{M}\{|\mathbf{x}_0-\mathbf{y}_0|^2\}\le C_0\Delta^r,$$

$$\mathsf{M}\left\{\left(J^{(i_k\ldots i_1)}_{(\lambda_k\ldots\lambda_1)\tau_{p+1},\tau_p}-\hat{J}^{(i_k\ldots i_1)}_{(\lambda_k\ldots\lambda_1)\tau_{p+1},\tau_p}\right)^2\right\}\le C\Delta^{r+1},$$

$$\mathsf{M}\left\{\left(J^{(i_k\ldots i_1)}_{(\lambda_k\ldots\lambda_1)t,\tau_{n_t}}-\hat{J}^{(i_k\ldots i_1)}_{(\lambda_k\ldots\lambda_1)t,\tau_{n_t}}\right)^2\right\}\le C\Delta^{r+1}$$

для всех $p\in\{0,1,\ldots,n_t-1\}$ и $(\lambda_k,\ldots,\lambda_1)\in\bigcup\limits_{q,k=1}^{r}\mathcal{E}_{qk}$, $\sum\limits_{q=1}^{k}i_q^2>0$, где $C_0,C<\infty$ — постоянные, а $\mathbf{y}_0$ — $\mathcal{F}_0$-измеримая случайная величина. Тогда нетрудно получить следующую оценку:

$$\mathsf{M}\left\{|\mathbf{x}_T-\mathbf{y}_T|^2\right\}\le C_1\Delta^r,$$

где постоянная C_1 не зависит от Δ, а процесс $\mathbf{y}_t,\ t\in[0,T]$ получаем из процесса $\bar{\mathbf{y}}_t,\ t\in[0,T]$ вида (12.8) путем замены в (12.8) ${}^{(p_k)}J_{(\lambda_k\ldots\lambda_1)\tau_{p+1},\tau_p}$; $p=0,1,\ldots,n_t-1$ и ${}^{(p_k)}J_{(\lambda_k\ldots\lambda_1)t,\tau_{n_t}}$ на ${}^{(p_k)}\hat{J}_{(\lambda_k\ldots\lambda_1)\tau_{p+1},\tau_p}$; $p=0,1,\ldots,n_t-1$ и ${}^{(p_k)}\hat{J}_{(\lambda_k\ldots\lambda_1)t,\tau_{n_t}}$ соответственно.

Для аппроксимации величины $\mathbf{x}_{\tau_{i+1}-}$ из (12.5) можно использовать разложение Тейлора–Стратоновича в форме Клоедена и Платена. Тогда вместо (12.6) при четном r получаем, в частности, следующую численную схему:

$$\begin{cases}\mathbf{y}_{\tau_{p+1}-}=\mathbf{y}_{\tau_p}+\sum\limits_{q,k=1}^{r}\sum\limits_{(\lambda_k,\ldots,\lambda_1)\in\mathcal{E}_{qk}}{}^{(p_k)}\tilde{D}_{\lambda_k}\ldots\tilde{D}_{\lambda_1}\{\mathbf{y}_{\tau_p}\}\overset{p_k}{\cdot}{}^{(p_k)}\hat{J}^*_{(\lambda_k\ldots\lambda_1)\tau_{p+1},\tau_p}\\ \mathbf{y}_{\tau_{p+1}}=\mathbf{y}_{\tau_{p+1}-}+\int\limits_X\mathbf{c}(\mathbf{y}_{\tau_{p+1}-},\tau_{p+1},\mathbf{y})\nu(\{\tau_{p+1}\},d\mathbf{y})\end{cases}, \tag{12.11}$$

где $p=0,1,\ldots,n_T$;

$${}^{(p_k)}\hat{J}^*_{(\lambda_k\ldots\lambda_1)\tau_{p+1},\tau_p}=\left\|\hat{J}^{*(i_k\ldots i_1)}_{(\lambda_k\ldots\lambda_1)\tau_{p+1},\tau_p}\right\|^{m\lambda_1\ \ldots\ m\lambda_k}_{i_1=\lambda_1,\ldots,i_k=\lambda_k};$$

$\hat{J}^{*(i_k\ldots i_1)}_{(\lambda_k\ldots\lambda_1)\tau_{p+1},\tau_p}$ — аппроксимация повторного стохастического интеграла Стратоновича

$$J^{*(i_k\ldots i_1)}_{(\lambda_k\ldots\lambda_1)\tau_{p+1},\tau_p}=\int\limits^{*\tau_{p+1}}_{\tau_p}\ldots\int\limits^{*t_2}_{\tau_p}d\mathbf{w}^{(i_k)}_{t_1}\ldots d\mathbf{w}^{(i_1)}_{t_k};$$

$\mathbf{w}^{(i)}_{\tau}=\mathbf{f}^{(i)}_{\tau}$ при $i=1,\ldots,m$ и $\mathbf{w}^{(0)}_{\tau}=\tau$; $\mathbf{f}^{(i)}_{\tau}$ $(i=1,\ldots,m)$ — независимые стандартные винеровские процессы; $\lambda_l=1$ или $\lambda_l=0$; $p_l=\sum\limits_{j=1}^{l}\lambda_j$; $\tilde{D}^{(i_l)}_{\lambda_l}=\tilde{L}-\frac{1}{2}\sum\limits_{j=1}^{m}G^{(j)}_0G^{(j)}_0$ и $i_l=0$ при $\lambda_l=0$; $\tilde{D}^{(i_l)}_{\lambda_l}=G^{(i_l)}_0$ и $i_l=1,\ldots,m$ при $\lambda_l=1$; $l=1,\ldots,k$;

$$\mathcal{E}_{qk}=\{(\lambda_k,\ldots,\lambda_1):\ \lambda_l\in\{0,\ 1\};\ 2k-\lambda_1-\ldots-\lambda_k=q;\ l=1,\ldots,k\};$$

операторы $\tilde{L}$ и $G^{(i)}_0$; $i=1,\ldots,m$ такие же, как в (12.6).

Отметим, что разложение Тейлора–Ито в форме Вагнера и Платена и разложение Тейлора–Стратоновича в форме Клоедена и Платена были получены для моментов остановки, в то время как унифицированные разложения Тейлора–Ито и Тейлора–Стратоновича — для постоянных моментов времени (см. главу 4). Это означает, что формально нельзя заменить правые части (12.6) и (12.11) на аналогичные выражения, полученные с помощью унифицированных разложений Тейлора–Ито и Тейлора–Стратоновича. Однако если все узлы разбиения $\{\tau_p\}_{p=0}^{n_T+1}$ вычислены до старта численного метода или вычислен заранее хотя бы последующий по отношению к текущему шагу интегрирования узел, то очевидно (12.6) или (12.11) можно заменять аналогичными выражениями, полученными с помощью унифицированных разложений Тейлора–Ито и Тейлора–Стратоновича.

Рассмотрим разбиения $\{\tau_p\}_{p=0}^{n_T+1}$, для которых выполняются указанные требования. Ранее отмечалось, что процесс Пуассона $\nu([0,t),X)$, $t\in[0,T]$ с интенсивностью $\Pi(X)<\infty$ генерирует последовательность моментов своих скачков, которые являются одновременно моментами скачков и процесса $\mathbf{x}_t$, $t\in[0,T]$. Поскольку последовательность моментов скачков процесса Пуассона может быть численно смоделирована заранее, то последовательность моментов скачков процесса $\mathbf{x}_t$, $t\in[0,T]$ не умаляя общности, можно считать известной и фиксированной. Одним из разбиений $\{\tau_p\}_{p=0}^{n_T+1}$ может являться разбиение, представляющее собой суперпозицию некоторого детерминированного разбиения с рангом дробления Δ и последовательности моментов скачков процесса $\mathbf{x}_t$, $t\in[0,T]$ [83]. В данном случае способ вычисления узлов разбиения $\{\tau_p\}_{p=0}^{n_T+1}$ очевиден.

Рассмотрим другой способ построения разбиения $\{\tau_p\}_{p=0}^{n_T+1}$ [83]. В момент времени τ_0 вычисляется $\mathcal{F}_{\tau_0}$-измеримый случайный момент $\tilde{\tau}_1$, для которого $\tilde{\tau}_1 - \tau_0 \le \Delta$ с вероятностью 1. Если между τ_0 и $\tilde{\tau}_1$ скачки процесса $\nu([0,t),X)$, $t \in [0,T]$ отсутствуют, то полагаем $\tilde{\tau}_1 \stackrel{\text{def}}{=} \tau_1$. В противном случае за τ_1 принимается первый после τ_0 скачок процесса $\nu([0,t),X)$, $t \in [0,T]$. Аналогичным образом определяем момент τ_2, и т. д.

Очевидно, что описанные способы вычисления узлов разбиения $\{\tau_j\}_{j=0}^{n_T+1}$ допускают использование унифицированных разложений Тейлора–Ито и Тейлора–Стратоновича для построения численных методов решения стохастических дифференциальных уравнений со скачкообразной компонентой, так как a priori позволяют получать численные значения случайных величин $\tau_0, \tau_1, \ldots, \tau_{n_T+1}$ перед стартом (или в процессе) реализации численного метода.

При использовании для аппроксимации величины $\mathbf{x}_{\tau_{i+1}-}$ из (12.5) унифицированных разложений Тейлора–Ито получаем следующие численные схемы для уравнения (12.1):

$$\begin{cases} \mathbf{y}_{\tau_{p+1}-} = \mathbf{y}_{\tau_p} + \\ \quad + \sum\limits_{q=1}^{r} \sum\limits_{(k,j,l_1,\ldots,l_k)\in\mathcal{D}'_q} \frac{(\Delta_p)^j}{j!} \, {}^{(k)}\tilde{G}_{l_1} \ldots \tilde{G}_{l_k} \tilde{L}^j \left\{\mathbf{y}_{\tau_p}\right\}^k \cdot {}^{(k)}\hat{I}_{l_1\ldots l_k \tau_{p+1},\tau_p}, \\ \quad \mathbf{y}_{\tau_{p+1}} = \mathbf{y}_{\tau_{p+1}-} + \int\limits_X \mathbf{c}(\mathbf{y}_{\tau_{p+1}-}, \tau_{p+1}, \mathbf{y}) \nu(\{\tau_{p+1}\}, d\mathbf{y}) \end{cases} \tag{12.12}$$

$$\begin{cases} \mathbf{y}_{\tau_{p+1}-} = \mathbf{y}_{\tau_p} + \\ \quad + \sum\limits_{q=1}^{r} \sum\limits_{(k,j,l_1,\ldots,l_k)\in\mathcal{D}'_q} \frac{(\Delta_p)^j}{j!} \, {}^{(k)}\tilde{L}^j \tilde{G}_{l_1} \ldots \tilde{G}_{l_k} \left\{\mathbf{y}_{\tau_p}\right\}^k \cdot {}^{(k)}\hat{J}_{l_1\ldots l_k \tau_{p+1},\tau_p}, \\ \quad \mathbf{y}_{\tau_{p+1}} = \mathbf{y}_{\tau_{p+1}-} + \int\limits_X \mathbf{c}(\mathbf{y}_{\tau_{p+1}-}, \tau_{p+1}, \mathbf{y}) \nu(\{\tau_{p+1}\}, d\mathbf{y}) \end{cases} \tag{12.13}$$

где $p = 0, 1, \ldots, n_T$; $\tau_{p+1} - \tau_p \stackrel{\text{def}}{=} \Delta_p$;

$${}^{(k)}\hat{I}_{l_1\ldots l_k \tau_{p+1},\tau_p} = \left\| \hat{I}^{(i_1\ldots i_k)}_{l_1\ldots l_k \tau_{p+1},\tau_p} \right\|_{i_1,\ldots,i_k=1}^{m}; \quad {}^{(k)}\hat{J}_{l_1\ldots l_k \tau_{p+1},\tau_p} = \left\| \hat{J}^{(i_1\ldots i_k)}_{l_1\ldots l_k \tau_{p+1},\tau_p} \right\|_{i_1,\ldots,i_k=1}^{m};$$

$\hat{I}^{(i_1\ldots i_k)}_{l_1\ldots l_k \tau_{p+1},\tau_p}$, $\hat{J}^{(i_1\ldots i_k)}_{l_1\ldots l_k \tau_{p+1},\tau_p}$ — аппроксимации повторных стохастических интегралов Ито вида

$$I^{(i_1\ldots i_k)}_{l_1\ldots l_k \tau_{p+1},\tau_p} = \begin{cases} \int\limits_{\tau_p}^{\tau_{p+1}} (\tau_p - t_k)^{l_k} \ldots \int\limits_{\tau_p}^{t_2} (\tau_p - t_1)^{l_1} d\mathbf{f}^{(i_1)}_{\tau_1} \ldots d\mathbf{f}^{(i_k)}_{\tau_k} & \text{при } k \ge 1 \\ 1 & \text{при } k = 0 \end{cases};$$

$$J^{(i_1\ldots i_k)}_{l_1\ldots l_k \tau_{p+1},\tau_p} =$$

$$=\begin{cases}\int\limits_{\tau_p}^{\tau_{p+1}}(\tau_{p+1}-t_k)^{l_k}\ldots\int\limits_{\tau_p}^{t_2}(\tau_{p+1}-t_1)^{l_1}d\mathbf{f}_{\tau_1}^{(i_1)}\ldots d\mathbf{f}_{\tau_k}^{(i_k)} & \text{при } k\ge 1\\ 1 & \text{при } k=0\end{cases};$$

$\mathbf{f}_{\tau}^{(i)}$ $(i=1,\ldots,m)$ — независимые стандартные винеровские процессы;

$$\mathcal{D}_q'=\mathcal{D}_q\bigcup\{(k,j,l_1,\ldots,l_k):k=l_1=\ldots=l_k=0 \text{ и } 2j=q+1\};$$

$$\tilde{G}_p^{(i)}=\frac{1}{p}\left(\tilde{G}_{p-1}^{(i)}\tilde{L}-\tilde{L}\tilde{G}_{p-1}^{(i)}\right);\ p=1,\ 2,\ldots;\ i=1,\ldots,m;$$

операторы $\tilde{L}$ и $\tilde{G}_0^{(i)}\stackrel{\text{def}}{=}G_0^{(i)}$; $i=1,\ldots,m$ такие же, как в (12.6).

Если для аппроксимации величины $\mathbf{x}_{\tau_{i+1}-}$ из (12.5) используются унифицированные разложения Тейлора–Стратоновича, то при четном r получаем, в частности, следующие численные схемы для уравнения (12.1):

$$\begin{cases}\mathbf{y}_{\tau_{p+1}-}=\mathbf{y}_{\tau_p}+\\ \qquad+\sum\limits_{q=1}^{r}\sum\limits_{(k,j,l_1,\ldots,l_k)\in\mathcal{D}_q}\frac{(\Delta_p)^j}{j!}\,{}^{(k)}\hat{G}_{l_1}\ldots\hat{G}_{l_k}\hat{L}^j\left\{\mathbf{y}_{\tau_p}\right\}\overset{k}{\cdot}\,{}^{(k)}\hat{I}^*_{l_1\ldots l_k\tau_{p+1},\tau_p},\\ \qquad\mathbf{y}_{\tau_{p+1}}=\mathbf{y}_{\tau_{p+1}-}+\int\limits_X\mathbf{c}(\mathbf{y}_{\tau_{p+1}-},\tau_{p+1},\mathbf{y})\nu(\{\tau_{p+1}\},d\mathbf{y})\end{cases}\tag{12.14}$$

$$\begin{cases}\mathbf{y}_{\tau_{p+1}-}=\mathbf{y}_{\tau_p}+\\ \qquad+\sum\limits_{q=1}^{r}\sum\limits_{(k,j,l_1,\ldots,l_k)\in\mathcal{D}_q}\frac{(\Delta_p)^j}{j!}\,{}^{(k)}\hat{L}^j\hat{G}_{l_1}\ldots\hat{G}_{l_k}\left\{\mathbf{y}_{\tau_p}\right\}\overset{k}{\cdot}\,{}^{(k)}\hat{J}^*_{l_1\ldots l_k\tau_{p+1},\tau_p},\\ \qquad\mathbf{y}_{\tau_{p+1}}=\mathbf{y}_{\tau_{p+1}-}+\int\limits_X\mathbf{c}(\mathbf{y}_{\tau_{p+1}-},\tau_{p+1},\mathbf{y})\nu(\{\tau_{p+1}\},d\mathbf{y})\end{cases}\tag{12.15}$$

где $p=0,1,\ldots,n_T$; $\tau_{p+1}-\tau_p\stackrel{\text{def}}{=}\Delta_p$;

$${}^{(k)}\hat{I}^*_{l_1\ldots l_k\tau_{p+1},\tau_p}=\left\|\hat{I}^{*(i_1\ldots i_k)}_{l_1\ldots l_k\tau_{p+1},\tau_p}\right\|_{i_1,\ldots,i_k=1}^{m};\ {}^{(k)}\hat{J}^*_{l_1\ldots l_k\tau_{p+1},\tau_p}=\left\|\hat{J}^{*(i_1\ldots i_k)}_{l_1\ldots l_k\tau_{p+1},\tau_p}\right\|_{i_1,\ldots,i_k=1}^{m};$$

$\hat{I}^{*(i_1\ldots i_k)}_{l_1\ldots l_k\tau_{p+1},\tau_p}$, $\hat{J}^{*(i_1\ldots i_k)}_{l_k\ldots l_k\tau_{p+1},\tau_p}$ — аппроксимации повторных стохастических интегралов Стратоновича

$$I^{*(i_1\ldots i_k)}_{l_1\ldots l_k\tau_{p+1},\tau_p}=\begin{cases}\overset{*}{\int\limits_{\tau_p}^{\tau_{p+1}}}(\tau_p-t_k)^{l_k}\ldots\overset{*}{\int\limits_{\tau_p}^{t_2}}(\tau_p-t_1)^{l_1}d\mathbf{f}_{t_1}^{(i_1)}\ldots d\mathbf{f}_{t_k}^{(i_k)} & \text{при } k\ge 1\\ 1 & \text{при } k=1\end{cases};$$

$$J^{*(i_1\ldots i_k)}_{l_1\ldots l_k\tau_{p+1},\tau_p}=$$

$$=\begin{cases}\overset{*}{\int\limits_{\tau_p}^{\tau_{p+1}}}(\tau_{p+1}-t_k)^{l_k}\ldots\overset{*}{\int\limits_{\tau_p}^{t_2}}(\tau_{p+1}-t_1)^{l_1}d\mathbf{f}_{t_1}^{(i_1)}\ldots d\mathbf{f}_{t_k}^{(i_k)} & \text{при } k\ge 1\\ 1 & \text{при } k=1\end{cases};$$

$\mathbf{f}_{\tau}^{(i)}$ $(i=1,\ldots,m)$ — независимые стандартные винеровские процессы;

$$\hat{G}_p^{(i)}=\frac{1}{p}\left(\hat{G}_{p-1}^{(i)}\hat{L}-\hat{L}\hat{G}_{p-1}^{(i)}\right);\ p=1,\ 2,\ldots;\ i=1,\ldots,m;$$

$\hat{L}\stackrel{\text{def}}{=}\tilde{L}-\frac{1}{2}\sum\limits_{j=1}^{m}G_0^{(j)}G_0^{(j)}$; $\hat{G}_0^{(i)}\stackrel{\text{def}}{=}G_0^{(i)}$; $i=1,\ldots,m$; остальные обозначения такие же, как в (12.6), (12.12), (12.13).

Отметим, что нетрудно переформулировать теорему 12.2 для численных схем (12.11)–(12.15).

12.3 Слабые численные методы решения стохастических дифференциальных уравнений со скачкообразной компонентой

В настоящем разделе рассмотрим слабые численные методы решения стохастического дифференциального уравнения (12.1) в автономном случае, т. е. когда $\mathbf{a}(\mathbf{x},t)\equiv\mathbf{a}(\mathbf{x})$, $\Sigma(\mathbf{x},t)\equiv\Sigma(\mathbf{x})$, $\mathbf{c}(\mathbf{x},t,\mathbf{y})\equiv\mathbf{c}(\mathbf{x},\mathbf{y})$.

Для построения слабых численных методов решения стохастического дифференциального уравнения (12.1) в автономном случае в [88] используются соотношения (12.5) в автономном случае и разложение Тейлора–Ито в форме Вагнера и Платена:

$$\begin{cases}\mathbf{y}_{\tau_{p+1}-}=\mathbf{y}_{\tau_p}+\sum\limits_{k=1}^{r}\sum\limits_{(\lambda_k,\ldots,\lambda_1)\in\mathcal{M}_k}{}^{(p_k)}\check{Q}_{\lambda_k}\ldots\check{Q}_{\lambda_1}\{\mathbf{y}_{\tau_p}\}\overset{p_k}{\cdot}{}^{(p_k)}\hat{J}_{(\lambda_k\ldots\lambda_1)\tau_{p+1},\tau_p}\\ \mathbf{y}_{\tau_{p+1}}=\mathbf{y}_{\tau_{p+1}-}+\int\limits_X\mathbf{c}(\mathbf{y}_{\tau_{p+1}-},\mathbf{y})\nu(\{\tau_{p+1}\},d\mathbf{y})\end{cases},\tag{12.16}$$

где $p=0,1,\ldots,n_T$;

$$\mathcal{M}_k=\{(\lambda_k,\ldots,\lambda_1):\lambda_l\in\{0,\ 1\};\ l=1,\ldots,k\};$$

$\check{Q}_{\lambda_l}^{(i_l)}=\check{L}$ и $i_l=0$ при $\lambda_l=0$; $\check{Q}_{\lambda_l}^{(i_l)}=\check{G}_0^{(i_l)}$ и $i_l=1,\ldots,m$ при $\lambda_l=1$; $l=1,\ldots,k$; операторы $\check{L}$ и $\check{G}_0^{(i)}$; $i=1,\ldots,m$ имеют вид

$$\check{L}R(\mathbf{x},t)=\frac{\partial R}{\partial t}(\mathbf{x},t)+\sum_{k=1}^{n}\tilde{\mathbf{a}}^{(k)}(\mathbf{x})\frac{\partial R}{\partial\mathbf{x}^{(k)}}(\mathbf{x},t)+$$

$$+\frac{1}{2}\sum_{j,k=1}^{n}\sum_{i=1}^{m}\Sigma^{(ki)}(\mathbf{x})\Sigma^{(ji)}(\mathbf{x})\frac{\partial^2R}{\partial\mathbf{x}^{(j)}\mathbf{x}^{(k)}}(\mathbf{x},t);$$

$$\check{G}_0^{(i)}R(\mathbf{x},t)=\sum_{j=1}^{n}\Sigma^{(ji)}(\mathbf{x})\frac{\partial R}{\partial\mathbf{x}^{(j)}}(\mathbf{x},t);\ i=1,\ldots,m.$$

Здесь $R(\mathbf{x},t) \in \mathcal{L}$; $\tilde{\mathbf{a}}(\mathbf{x}) = \mathbf{a}(\mathbf{x}) - \int\limits_X \mathbf{c}(\mathbf{x},\mathbf{y})\Pi(d\mathbf{y})$; остальные обозначения, входящие в (12.16), такие же, как в (12.6).

Через $\bar{\mathbf{y}}_{\tau_p}$; $p = 0,1,\ldots,n_T+1$ будем обозначать дискретную аппроксимацию, которая отличается от дискретной аппроксимации $\mathbf{y}_{\tau_p}$; $p = 0,1,\ldots,n_T+1$ вида (12.16) тем, что в $\bar{\mathbf{y}}_{\tau_p}$; $p = 0,1,\ldots,n_T+1$ производится замена ${}^{(p_k)}\hat{J}_{(\lambda_k\ldots\lambda_1)\tau_p,\tau_{p-1}}$ на ${}^{(p_k)}J_{(\lambda_k\ldots\lambda_1)\tau_p,\tau_{p-1}}$.

В [88] сформулировано и доказано следующее утверждение.

Теорема 12.3 [88]. *Пусть для фиксированного $r \in N$ выполнены условия:*

1. *Функция $g(\mathbf{x}) : \Re^n \to \Re^1$ принадлежит классу $C^{2(r+1)}(\Re^n, \Re^1)$ (см. главу 10).*

2. *Функции $\mathbf{a}(\mathbf{x})$, $\Sigma(\mathbf{x})$, $\mathbf{c}(\mathbf{x},\mathbf{y})$ $2(r+1)$ раз непрерывно дифференцируемы, и их производные ограничены.*

3. *Для всех $(\lambda_k,\ldots,\lambda_1) \in \bigcup\limits_{q=1}^{r} \mathcal{M}_q$ и $\mathbf{x} \in \Re^n$*

$$\left|\check{Q}_{\lambda_k}^{(i_k)} \ldots \check{Q}_{\lambda_1}^{(i_1)}\mathbf{x}\right| \le K(1+|\mathbf{x}|),\ K < \infty.$$

Тогда

$$|\mathsf{M}\{g(\mathbf{x}_T)\} - \mathsf{M}\{g(\bar{\mathbf{y}}_T)\}| \le C\Delta^r,$$

где постоянная $C < \infty$ не зависит от Δ.

Предположим, что аппроксимации повторных стохастических интегралов, входящие в (12.16), удовлетворяют условию

$$\left|\mathsf{M}\left\{\prod_{g=1}^{l} J_{(\lambda_{k_g}^{(g)}\ldots\ \lambda_1^{(g)})\tau_{p+1},\tau_p}^{(i_{k_g}^{(g)}\ldots\ i_1^{(g)})} - \prod_{g=1}^{l} \hat{J}_{(\lambda_{k_g}^{(g)}\ldots\ \lambda_1^{(g)})\tau_{p+1},\tau_p}^{(i_{k_g}^{(g)}\ldots\ i_1^{(g)})} \Big|\mathcal{F}_{\tau_p}\right\}\right| \le K_1\Delta^{r+1} \qquad (12.17)$$

при всех $p = 0,1,\ldots,n_T$; $(\lambda_{k_g}^{(g)},\ldots,\lambda_1^{(g)}) \in \mathcal{M}_{k_g}$; $i_1^{(g)},\ldots,i_{k_g}^{(g)} = 0,1,\ldots,m$; $k_g \le r$; $g = 1,\ldots,l$; $l = 1,2,\ldots,2r+1$, где $K_1 < \infty$ — постоянная.

Нетрудно показать, что если выполнены условия теоремы 12.3 и условие (12.17), то справедлива оценка

$$|\mathsf{M}\{g(\mathbf{x}_T)\} - \mathsf{M}\{g(\mathbf{y}_T)\}| \le C_1\Delta^r, \qquad (12.18)$$

где постоянная $C_1 < \infty$ не зависит от Δ, а $\mathbf{y}_T$ определяется равенствами (12.16) при $p = n_T$.

Если предположить, что узлы разбиения $\{\tau_p\}_{p=0}^{n_T+1}$ вычислены до старта численной схемы или на каждом p-м шаге интегрирования вычислен заранее узел τ_{p+1}, то правую часть (12.16) можно заменить аналогичными выражениями, полученными с помощью унифицированных

разложений Тейлора–Ито. Соответствующие численные схемы имеют вид

$$\begin{cases} \mathbf{y}_{\tau_{p+1}-} = \mathbf{y}_{\tau_p} + \\ \qquad + \sum\limits_{q=1}^{r} \sum\limits_{(k,j,l_1,\ldots,l_k)\in\mathcal{A}_q} \frac{(\Delta_p)^j}{j!} \ {}^{(k)}\check{G}_{l_1}\ldots\check{G}_{l_k}\check{L}^j\left\{\mathbf{y}_{\tau_p}\right\} \overset{k}{\cdot} \ {}^{(k)}\hat{I}_{l_1\ldots l_k\tau_{p+1},\tau_p}, \\ \qquad \mathbf{y}_{\tau_{p+1}} = \mathbf{y}_{\tau_{p+1}-} + \int\limits_X \mathbf{c}(\mathbf{y}_{\tau_{p+1}-},\tau_{p+1},\mathbf{y})\nu(\{\tau_{p+1}\},d\mathbf{y}) \end{cases} \tag{12.19}$$

$$\begin{cases} \mathbf{y}_{\tau_{p+1}-} = \mathbf{y}_{\tau_p} + \\ \qquad + \sum\limits_{q=1}^{r} \sum\limits_{(k,j,l_1,\ldots,l_k)\in\mathcal{A}_q} \frac{(\Delta_p)^j}{j!} \ {}^{(k)}\check{L}^j\check{G}_{l_1}\ldots\check{G}_{l_k}\left\{\mathbf{y}_{\tau_p}\right\} \overset{k}{\cdot} \ {}^{(k)}\hat{J}_{l_1\ldots l_k\tau_{p+1},\tau_p}, \\ \qquad \mathbf{y}_{\tau_{p+1}} = \mathbf{y}_{\tau_{p+1}-} + \int\limits_X \mathbf{c}(\mathbf{y}_{\tau_{p+1}-},\tau_{p+1},\mathbf{y})\nu(\{\tau_{p+1}\},d\mathbf{y}) \end{cases} \tag{12.20}$$

где $p = 0, 1, \ldots, n_T$; $\tau_{p+1} - \tau_p \stackrel{\text{def}}{=} \Delta_p$;

$$\mathcal{A}_q = \left\{(k,j,l_1,\ldots,l_k):\ k+j+\sum_{p=1}^{k} l_p = q,\ k,j,l_1,\ldots,l_k = 0,\ 1,\ldots\right\};$$

$$\check{G}_p^{(i)} = \frac{1}{p}\left(\check{G}_{p-1}^{(i)}\check{L} - \check{L}\check{G}_{p-1}^{(i)}\right);\ p = 1,\ 2,\ldots;\ i = 1,\ldots,m;$$

операторы $\check{L}$ и $\check{G}_0^{(i)}$; $i = 1,\ldots,m$ такие же, как в (12.16); остальные обозначения, введенные в (12.19), (12.20), такие же, как в (12.12), (12.13).

Для того чтобы для численной схемы (12.19) выполнялась оценка (12.18), достаточно потребовать выполнения условий 1, 2 теоремы 12.3, а также следующих условий:

(I) *Для всех* $(k,j,l_1,\ldots,l_k) \in \bigcup\limits_{q=1}^{r} \mathcal{A}_q$ *и* $\mathbf{x} \in \Re^n$

$$|\check{G}_{l_1}^{(i_1)}\ldots\check{G}_{l_k}^{(i_k)}\check{L}^j\{\mathbf{x}\}| \le K(1+|\mathbf{x}|),\ K < \infty,$$

где $i_1,\ldots,i_k = 1,\ldots,m$.

(II) *Для всех* $(k_g, j_g, l_1^{(g)},\ldots,\ l_{k_g}^{(g)}) \in \mathcal{A}_{q_g}$; $i_1^{(g)},\ldots,i_{k_g}^{(g)} = 1,\ldots,m$; $q_g \le r$; $g = 1,\ldots,l$; $l = 1,2,\ldots,2r+1$; $p = 0,1,\ldots,n_T$

$$\left|\mathsf{M}\left\{\prod_{g=1}^{l}\frac{\Delta^{j_g}}{j_g!}I_{l_1^{(g)}\ldots\ l_{k_g}^{(g)}\ \tau_{p+1},\tau_p}^{(i_1^{(g)}\ldots\ i_{k_g}^{(g)})} - \prod_{g=1}^{l}\frac{\Delta^{j_g}}{j_g!}\hat{I}_{l_1^{(g)}\ldots\ l_{k_g}^{(g)}\ \tau_{p+1},\tau_p}^{(i_1^{(g)}\ldots\ i_{k_g}^{(g)})}\ |\mathcal{F}_{\tau_p}\right\}\right| \le K_1\Delta^{r+1},$$

где $K_1 < \infty$ *— постоянная.*

Нетрудно также сформулировать аналоги условий (I) и (II) для численной схемы (12.20).

Часть IV

Численное моделирование: алгоритмы, программы, результаты

Глава 13

Компьютерная программа в системе MATLAB 7.0 для численного моделирования решений стационарных систем линейных стохастических дифференциальных уравнений

В настоящей главе рассматривается программа в системе MATLAB 7.0, позволяющая численно моделировать решения стационарных систем линейных стохастических дифференциальных уравнений.

13.1 Введение

Стационарные системы линейных стохастических дифференциальных уравнений (ССЛСДУ) весьма часто встречаются в качестве математических моедлей динамических систем находящихся под воздействием случайных возмущений, а также широко используются при решении математических задач, таких как задача линейной стационарной фильтрации Калмана–Бьюси, задача о стохастическом оптимальном управлении, задача о тестировании процедур оценивания параметров и т.д. (см. главу 2, а также [86]).

Помимо своей важности для приложений ССЛСДУ, как мы видели в главе 11, допускают построение специальных и особенно эффективных численных методов своего решения, которые не используют численного моделирования повторных стохастических интегралов, что является сложной во многих отношениях проблемой (см. главы 5 и 6). Кроме того, указанные методы весьма "спокойно" реагируют на

повышение размерности системы стохастических дифференциальных уравнений.

Несмотря на все сказанное какого-либо программного обеспечения (не считая процедур численного решения частных ССЛСДУ низких порядков), позволяющего численно решать ССЛСДУ довольно общего вида на момент выхода данной монографии не существует.

По-видимому это обстоятельство объясняется тем, что с теоретической точки зрения численное интегрирование ССЛСДУ не является серьезной проблемой и, вследствие этого, этот вопрос не попадает в поле зрения даже специалистов по проблеме численного интегрирования стохастических дифференциальных уравнений [70, 86, 87]. Однако, когда дело доходит до практической реализации все оказывается не так просто (см. данную главу и главу 11).

Данная глава является попыткой заполнения указанного пробела. Приводится текст программы в системе MATLAB 7.0, которая позволяет численно моделировать решения ССЛСДУ общего вида, при этом допускается выбор размерности вектора состояния (решения) ССЛСДУ, векторного винеровского процесса и матриц правой части ССЛСДУ.

Указанная программа написана на основе библиотеки MATLAB-функций для версии 3 системы MATLAB [166].[3]

13.2 Математическая модель объекта моделирования

Предлагаемая ниже программа в системе MATLAB 7.0 позволяет моделировать численно на временной сетке с постоянным шагом $\Delta > 0 : t_k = k\Delta;\ k = 0,\ 1, \ldots$ решения стационарных СЛСДУ вида

$$d\mathbf{x}_t = (A\mathbf{x}_t + B\mathbf{u}(t))\,dt + Fd\mathbf{f}_t,\ \mathbf{y}_t = H\mathbf{x}_t,\ \mathbf{x}_0 = \mathbf{x}(0),$$

где $\mathbf{x}_t \in \Re^n$ — решение стационарной СЛСДУ; $\mathbf{u}(t) : [0, T] \to \Re^k$ — детерминированное внешнее возмущение, которое может интерпретироваться как управляющее воздействие; $\mathbf{y}_t \in \Re^1$ — процесс на выходе, численная реализация которого является целью моделирования; $H^{\mathsf{T}} \in \Re^n,\ A \in \Re^{n\times n},\ F \in \Re^{n\times m},\ B \in \Re^{n\times k}$ — числовые матрицы; $\mathbf{f}_t \in \Re^m$ — стандартный винеровский случайный процесс с независимыми компонентами $\mathbf{f}_t^{(i)};\ i = 1, \ldots, m;\ n,\ m,\ k \geq 1$.

[3]Исходным материалом для написания настоящей главы послужили глава 2 и Приложение 5 диссертации [101], а также работа [125]. При этом использовалось руководство [185] по системе MATLAB 7.0.

В зависимости от вида числовой матрицы-строки H на выходе системы можно получать любую из компонент решения $\mathbf{x}_t$, а также различные линейные комбинации компонент этого решения.

Шаг интегрирования Δ предполагается настолько малым, что детерминированное воздействие $\mathbf{u}(t)$ с достаточной степенью точности может быть аппроксимировано кусочно-постоянной функцией $\mathbf{u}(t) = \mathbf{u}_k$ при $t \in [k\Delta, (k+1)\Delta)$; $k = 0, 1, \ldots$, где $\mathbf{u}(k\Delta) \stackrel{\text{def}}{=} \mathbf{u}_k$.

Такое предположение вводится для того, чтобы сосредоточить основное внимание на особенностях численного моделирования стохастического интеграла, входящего в интегральное представление решения стационарной СЛСДУ (см. главу 11).

При этом предположении с помощью формулы Коши может быть получено (см. главу 11) следующее рекуррентное соотношение для решения стационарной СЛСДУ:

$$\mathbf{x}_{k+1} = e^{A\Delta}\mathbf{x}_k + A^{-1}\left(e^{A\Delta} - I\right)B\mathbf{u}_k + \tilde{\mathbf{f}}_{k+1}(\Delta),\ \mathbf{x}_0 = \mathbf{x}(0), \qquad (13.1)$$

где $\mathbf{x}_{k\Delta} \stackrel{\text{def}}{=} \mathbf{x}_k$; $\mathbf{y}_{k\Delta} \stackrel{\text{def}}{=} \mathbf{y}_k$; $\tilde{\mathbf{f}}_{k+1}(\Delta) \in \Re^n$ — случайный столбец, который вычисляется по формуле

$$\tilde{\mathbf{f}}_{k+1}(\Delta) = S_D(\Delta)\Lambda_D(\Delta)\bar{\mathbf{f}}_{k+1};$$

$\bar{\mathbf{f}}_k \in \Re^n$ — столбец из независимых стандартных гауссовских случайных величин, причем $\mathsf{M}\left\{\bar{\mathbf{f}}_k\bar{\mathbf{f}}_r^{\mathsf{T}}\right\} = O_{n\times n}$ при $k \neq r$, где $O_{n\times n}$ — нулевая $(n \times n)$-матрица; $S_D(\Delta)$ — матрица ортонормированных собственных векторов матрицы $D_f(\Delta)$ вида

$$D_f(\Delta) = \mathsf{M}\left\{\tilde{\mathbf{f}}_{k+1}(\Delta)\tilde{\mathbf{f}}_{k+1}^{\mathsf{T}}(\Delta)\right\} = \int\limits_0^{\Delta} e^{A(\Delta-\tau)}FF^{\mathsf{T}}e^{A^{\mathsf{T}}(\Delta-\tau)}d\tau,$$

которую получают как решение $D_f(t)$ при $t = \Delta$ матричного дифференциального уравнения вида

$$\frac{dD_f}{dt}(t) = AD_f(t) + D_f(t)A^{\mathsf{T}} + FF^{\mathsf{T}},\ D_f(0) = O_{n\times n};$$

$\Lambda_D(\Delta)$ — диагональная матрица, на главной диагонали которой стоят собственные числа матрицы $D_f(\Delta)$.

Выходом системы (13.1) считаем $\mathbf{y}_k = H\mathbf{x}_k$.

В главе 11 отмечалось, что первое слагаемое, входящее в правую часть (13.1), называется *переходной*, или *динамической*, составляющей, второе — *систематической* составляющей, а третье — *случайной* составляющей решения стационарной СЛСДУ. В дальнейшем будем придерживаться этой терминологии.

13.3 Задачи, решаемые программой

Рекуррентное соотношение (13.1) положено в основу приводимого далее текста программы в системе MATLAB 7.0 для численного моделирования решений стационарных СЛСДУ.

Программа позволяет решать следующие задачи:

1. Вводить в диалоговом режиме необходимые для моделирования исходные параметры задачи, причем следует обратить внимание, что параметры n, m, k можно вводить в зависимости от потребностей пользователя, т.е. размерность вектора состояния, винеровского процесса и детерминированного управляющего воздействия может задаваться в процессе работы с программой.

2. Вычислять матричные функции динамической и систематической составляющих решения стационарной СЛСДУ.

3. Вычислять матричные функции, необходимые для генерирования случайной составляющей моделируемого процесса.

4. Вычислять моментные характеристики решения и выхода стационарной СЛСДУ.

5. Выбирать и вычислять детерминированное управляющее воздействие на систему.

6. Моделировать решение стационарной СЛСДУ.

7. Представлять графически смоделированное решение и его дисперсию.

Структурная блок-схема программы приведена на рис. 13.1.

13.4 Текст программы

Приведем текст программы в системе MATLAB 7.0 для численного моделирования решений стационарных систем линейных стохастических дифференциальных уравнений.

```
%NUMERICAL SOLUTION OF LINEAR
%STATIONARY SYSTEM OF STOCHASTIC
%DIFFERENTIAL EQUATIONS
%
% dX = AX dt + BU dt + F df,  X(0) = X0
% Y = HX
%
% X - size n x 1, Y - size 1 x 1, U - size k x 1,
% f - size m x 1, A - size n x n, B - size n x k,
% F - size n x m, H - size 1 x n
%
% n, k, m >= 1
```

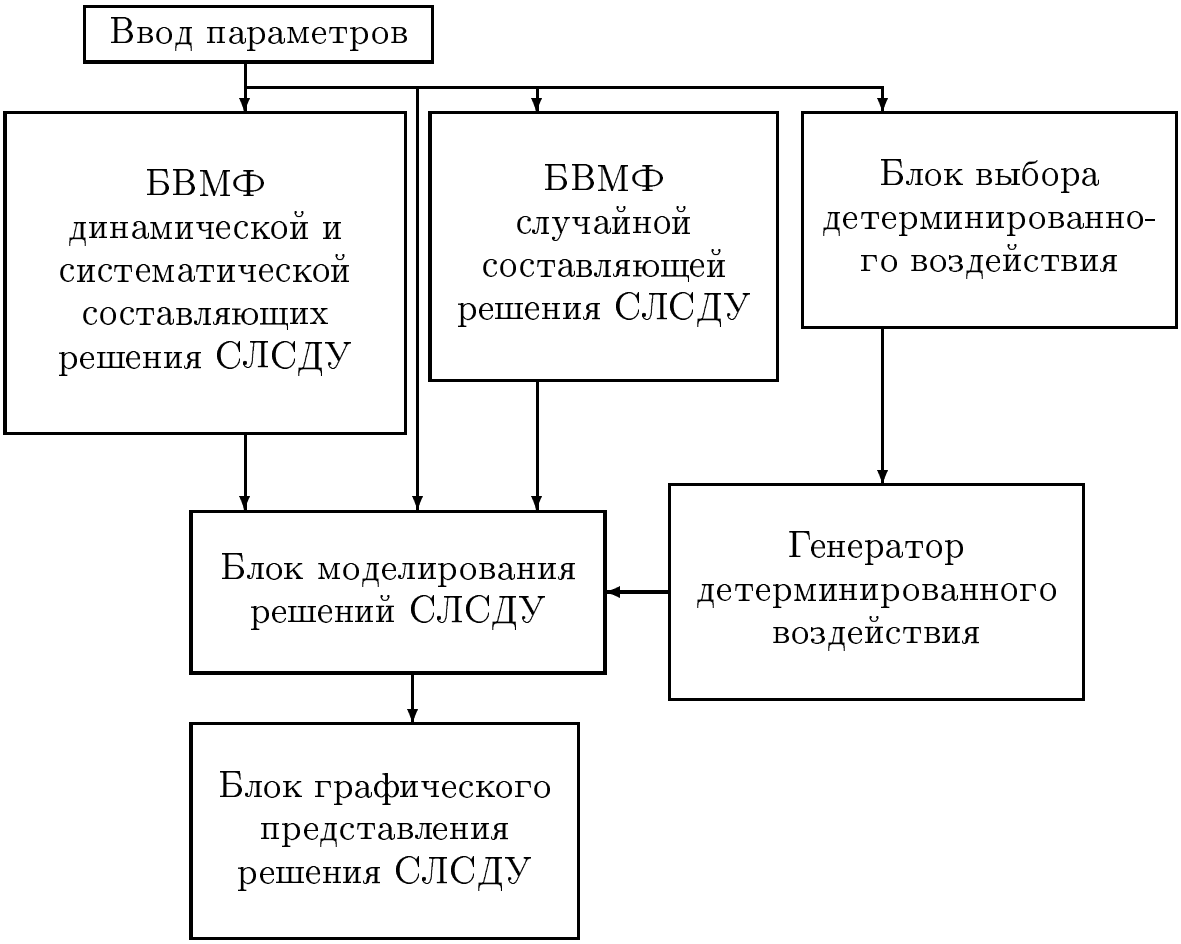

Рис. 13.1. Блок-схема структуры программы численного моделирования решений ССЛСДУ; БВМФ — блок вычисления матричных функций.

```
     clear;
     randn('state', 0);
     type title.doc        %TITLE
                                   %INPUT DATA
n = input('n = ? (n >= 1) ');              %INPUT SIZE n
   while n < 1,
      n=input('INPUT NEW n (n >= 1) ');
   end;  %while;
k = input('k = ? (k >= 1) ');              %INPUT SIZE k
   while k < 1,
      k = input('INPUT NEW k (k >= 1) ');
   end;  %while
m = input('m = ? (m >= 1) ');              %INPUT SIZE m
   while m < 1,
      m = input('INPUT NEW  m (m >= 1) ');
   end;  %while
A = input('A = ? - n x n ');         %INPUT MATRIX A
```

```
B = input('B = ? - n x k ');         %INPUT MATRIX B
F = input('F = ? - n x m ');         %INPUT MATRIX F
H = input('H = ? - 1 x n ');         %INPUT MATRIX H
x0 = input('x0 = ? - n x 1 ');   %INPUT START VALUE X(0)
dt = input('dt = ? (dt > 0) ');  %INPUT STEP OF INTEGRATION
t0 = input('t0 = ? ');           %INPUT START POINT
tk = input('tk = ? (tk > t0 + dt) ');   %INPUT FINAL POINT
   while dt <= 0 | t0 > tk - dt
      dt = input('INPUT NEW dt (dt > 0) ');
      t0 = input('t0= ? ');
      tk = input('tk = ? (tk > t0 + dt) ');
   end; % while
  type uprav.doc;       %TITLE
                              %CHOOSE OF CONTROL
key = input('key = ? [c,p,h,o,z] ','s');
   if key == 'c',              %CONSTANT CONTROL
       disp('U = u0 - k x 1 ');
       u0 = input('u0 = ? - k x 1 ');
       un = 1;
   elseif key == 'p',          %POLYNOMIAL CONTROL
disp('U = U(1) + U(2) * t + ... + U(p+1) * t^p - k x 1 ');
       p = input('degree of polynomial p = ? ');
  for i = 1:p+1,
      disp('i = '); disp(i);
      U(:,i) = input(' U(i) = ? - k x 1 ');
  end; % for
un = 2;
   elseif key == 'h',           %HARMONIC CONTROL
       disp('U = D * sin(w * t + fi) - k x 1 ');
   D = input('D = ? - k x 1 ');
   w = input('w = ? - k x 1 ');
   fi = input('fi = ? - k x 1 ');
un = 3;
   elseif key == 'o',           %ZERO CONTROL
un = 4;
   elseif key == 'z' ,          %COMBINE CONTROL
       for i = 1:k,
        type upr.doc;      %TITLE
          disp('i = '); disp(i);
  key=input('key = ? [c,p,h]  ','s');
     if key == 'c',
         u00 = input('u00 = ? ');
                 ua(i) = 1;
                    key = 0;
              elseif key == 'p',
                 u01 = input('u01 = ? ');
                 u02 = input('u02 = ? ');
                 u03 = input('u03 = ? ');
                 ua(i) = 2;
                    key = 0;
```

```
              elseif key == 'h',
                 D0 = input('D0 = ? ');
                 w0 = input('w0 = ? ');
                 fi0 = input('fi0 = ? ');
                 ua(i) = 3;
                    key = 0;
              else
              end; %if
           end; % for
           un = 5;
           else
           end; % if key == 'z'
               %CALCULATION OF MATRIXES OF DYNAMICAL
               %PART OF SOLUTION - Ad AND DETERMINISTIC
               %PART OF SOLUTION -Bd (ALGORITHM 11.2)
        [Ad,Bd] = dindet(n,k,A,B,dt);
yn = input('SEE Ad, Bd [y/n] ','s');
if yn == 'y',
   disp('Ad = ');     %SEE MATRIX Ad
   disp(Ad);
   disp('Bd = ');     %SEE MATRIX Bd
   disp(Bd);
           type press.doc
           pause;
end;  %if
                  %CALCULATION OF MATRIX OF STOCHASTIC
                  %PART OF SOLUTION - Fd (ALGORITHM 11.6)
[Fd]=stoch(n, A, F, dt);
   yn = input('SEE Fd [y/n] ','s');
 if yn == 'y',
   disp('Fd = ');      %SEE MATRIX Fd
   disp(Fd);
   type press.doc
           pause;
 end;  %if
t1 = t0;   %SECONDARY VARIABES t1, tk1, x1 FOR SAVING
tk1 = tk;  %OF START DATA t0, tk, x0
x1 = x0;
           an = input('CONTINUE? [y/n]','s');
if an == 'y',
   t0 = t1; tk = tk1;
   x0 = x1; mx0 = x0;
           Dx0 = zeros(n,n);
   yn=input('MODELLING? [y/n]','s');
     while  yn == 'y',
       kk = 1;
       yt(kk) = H*x0; my(kk) = H*mx0;
       Dy(kk) = H*Dx0*H'; kt(kk) = t0;
       tk2 = tk; t2 = tk - t0;
       nn = t2 / dt + 1;
```

```
                for kk = 2:nn,
          t=t0 + (kk - 1) * dt;
                    %CALCULATING OF CONTROL
    if un == 1,         %CONSTANT CONTROL
       ut = u0;
    elseif un == 2,     %POLYNOMIAL CONTROL
       ut = zeros(k,1);
          for i = 1:p+1;
             ut = ut + U(:,i) * (t^(i-1));
        end; % for
    elseif un == 3,     %HARMONIC CONTROL
              ut=zeros(k,1);
                for i = 1:k ,
    ut(i,1) = ut(i,1) + D(i,1) * sin(w(i,1) * t + fi(i,1));
                end; %for
            elseif un == 4,      %ZERO CONTROL
                ut = zeros(k,1);
            elseif un == 5,       %COMBINE CONTROL
               for j = 1:k,
                  if ua(j) == 1,
                     ut(j,1) = u00;
                  elseif ua(j) == 2,
               ut(j,1) = u01 + u02 * t + u03 * (t^2);
                  elseif ua(j) == 3,
               ut(j,1) = D0 * sin (w0 * t + fi0);
                  else
                  end; % if
             end; % for
            else
            end; % if
                   %MODELLING OF SOLUTION OF SDE
  ft = randn(n,1);
  xt = Ad * x0 + Bd * ut + Fd * ft;  %SOLUTION OF SDE
          mx = Ad * mx0 + Bd * ut;        %EXPECTATION OF
                                          %SOLUTION OF SDE
          Dx = Ad * Dx0 * Ad'+ Fd * Fd';  %DISPERTION OF
                                          %SOLUTION OF SDE
     rx = expm(A * (tk - t)) * Dx;   %COVARIANCE MATRIX OF
                                     %SOLUTION OF SDE
yt(kk) = H * xt;      %EXIT PROCESS OF STOCHASTIC SYSTEM
my(kk) = H * mx ;     %EXPECTATION OF EXIT PROCESS
Dy(kk) = H * Dx * H'; %DISPERSION OF EXIT PROCESS
ry(kk) = H * rx * H'; %COVARIANCE MATRIX OF EXIT PROCESS
          kt(kk) = t; x0 = xt;
          mx0 = mx; Dx0 = Dx;
        end; % for
     tk = tk2 + t2; t0 = tk2;
plot(kt,yt,'b',kt,my,'r'),
ylabel('blue - SDE, red - ODE'),
        xlabel('time'),
```

```
 type press.doc
         pause;
      plot(kt,Dy,'b'),
              ylabel('dispertion of Y'),
              xlabel('time'),
              type press.doc
              pause;
     yn=input('MODELLING ON NEXT INTERVAL? [y/n]','s');
         end; % bn == 'y'
        end; % an == 'y'
```

Данная программа использует две функции: `dindet.m` для вычисления матриц динамической и детерминированной составляющих решения ССЛСДУ и `stoch.m` для вычисления стохастической составляющей решения ССЛСДУ. Приведем тексты указанных функций.

```
   function [Ad,Bd] = dindet(n,k,A,B,dt);
            type dindet.doc;      %TITLE
        Okn = zeros(k,n);         %CALCULATION OF
        Okk = zeros(k,k);         %MATRIXES OF DYNAMICAL PART
        Idt = eye(n+k)*dt;        %OF SOLUTION - Ad AND
        AA=[A B;Okn Okk];         %DETERMINISTIC PART
        ex_aah = expm(AA*Idt);    %OF SOLUTION - Bd
        Ad = ex_aah(1:n,1:n);     %(ALGORITHM 11.2)
        nb1 = n + 1; nbk = n + k;
        Bd = ex_aah(1:n,nb1:nbk);

   function [Fd] = stoch (n,A,F,dt);
type stoch.doc;  %TITLE
                 %CALCULATION OF MATRIX OF STOCHASTIC
                 %PART OF SOLUTION -Fd (ALGORITHM 11.6)
  one1 = zeros(n,n);      %ALGORITHM 11.5
  rr1 = 1;
  for jj1 = 1:n,
     nb1 = n -jj1 + 1;
       for kk1 = 1:nb1,
                 ii1 = kk1+jj1 - 1;
                 one1(kk1,ii1) = 1;
                 one1(ii1,kk1) = 1;
                 oneA = one1*(A') + A*one1;
                 oo1 = 0;
                   for ss1 = 1:n,
                     ll11 = n - ss1 + 1;
           for ll1 = 1:ll11,
              Ac(ll1+oo1,rr1) = oneA(ll1,ll1+ss1-1);
           end;  %ll1
                     oo1 = oo1 + n - ss1 + 1;
            end;  %ss1
         one1 = zeros(n,n);
```

```
        rr1 = rr1 + 1;
     end;  %kk1
 end;  %jj1
G = F * (F');
         ii1 = 0;                    %ALGORITHM 11.3
   for jj1 = 1:n,
      nb1 = n - jj1 + 1;
         for kk1 = 1:nb1,
             Vec(kk1+ii1,1) = G(kk1,kk1+jj1-1);
         end;  %kk1
       ii1 = ii1 + n - jj1 + 1;
    end;  %jj1
gv = Vec;
                   nn2 = n * (n+1) / 2;
   [Dd,Dv] = dindet(nn2,1,Ac,gv,dt); %ALGORITHM 11.2
        ii1 = 0;                     %ALGORITHM 11.4
for jj1 = 1:n,
    nb1 = n - jj1 + 1;
    for kk1 = 1:nb1,
        D1(kk1,kk1+jj1-1) = Dv(kk1+ii1,1);
        D1(kk1+jj1-1,kk1) = Dv(kk1+ii1,1);
    end;  %kk1
    ii1 = ii1 + n - jj1 + 1;
end;  %jj1
 [S,L2] = eig(D1);          %FINISH OF MATRIX Fd
 [L] = sqrt(L2);            %CALCULATING
 Fd = S*L;
```

13.5 Работа с программой

Для использования программы на PC пользователя должна быть установлена система MATLAB 7.0, подробное руководство по которой содержится в [185].

Работа начинается с запуска системы MATLAB 7.0, после чего в верхней строке меню следует выбрать с помощью закладок file → open → OK файл, содержащий текст программы, приведенной в предыдущем разделе (файлы `dindet.m` и `stoch.m`, также файлы заставок `title.doc`, `upr.doc`, `uprav.doc`, `dindet.doc`, `stoch.doc`, `press.doc`, о которых будет сказано ниже, должны находиться в одной директории с указанным файлом). После этого в окне встроенного в MATLAB 7.0 редактора должен появиться текст программы.

Далее в верхней строке меню следует выбрать debug → run. Программа будет запущена после применения команды run, которая к этому моменту уже становится активной.

Сначала на экране Вашего компьютера должна появиться заставка

title.doc следующего содержания:

```
NUMERICAL SOLUTION OF LINEAR
STATIONARY SYSTEM OF STOCHASTIC
DIFFERENTIAL EQUATIONS

dX = AX dt + BU dt + F df, X(0)=X0
Y = HX,

X - n x 1, Y - 1 x 1, U - k x 1,
f - m x 1, A - n x n, B - n x k,
F - n x m, H - 1 x n

n, m, k >= 1

INPUT DATA
```

Ниже сразу же должна появиться строка:

```
n = ? (n >= 1)
```

Далее следует ввести с клавиатуры необходимое значение `n`, например, `4` и нажать клавишу `enter`.

Затем, подобным образом должны вводиться остальные исходные данные. Например, после ввода конкретных исходных данных на экране PC может появиться следующее:

```
n = ? (n >= 1) 4
k = ? (k >= 1) 3
m = ? (m >= 1) 5
A = ? - n x n [-1  0  0  0; 0 -2  0  0;
                0  0 -1  0; 0  0  0 -3]
B = ? - n x k [1 1 1; 1 1 1; 1 1 1; 1 1 1]
F = ? - n x m [0.2 0.1 0.1 0.1 0.1; 0.1 0.2 0.1 0.1 0.1;
               0.1 0.1 0.2 0.1 0.1; 0.1 0.1 0.1 0.2 0.1]
H = ? - 1 x n [0 0 1 0]
x0 = ? - n x 1 [2; 2; 2; 2]
dt = ? (dt > 0) 0.001
t0 = ? 0
tk = ? (tk > t0 + dt) 10
```

Здесь $[\mathtt{t0}, \mathtt{tk}]$ — промежуток интегрирования, `dt` — шаг интегрирования, `x0` — столбец начальных условий.

Нажав в очередной раз на клавишу `enter`, после набора числа `10` (см. выше), Вы должны увидеть меню uprav.doc, которое выглядит следующим образом:

```
CHOOSE OF CONTROL

CONSTANT     u = u0                                        [c]
POLYNOMIAL   u = U(1) + U(2) * t + ... + U(p+1) * t^p      [p]
HARMONIC     u = D * sin(w * t + fi)                       [h]
ZERO         u = 0                                         [o]
COMBINE                                                    [z]
```

Следом за ним сразу же должна появиться строка:

```
key = ? [c,p,h,o,z]
```

Сначала поговорим о содержании меню. Оно предлагает выбрать одно из нескольких внешних детерминированных управляющих воздействий: постоянное, полиномиальное, гармоническое, нулевое и комбинированное.

При выборе c Вам будет предложено ввести вектор-столбец длины k, компонентами которого являются вещественные числа. Выглядеть это будет следующим образом

```
key = ? [c,p,h,o,z] c
U = u0 - k x 1
u0 = ? - k x 1 [-0.01; -0.02; -0.03]
```

При вводе p Вам поступит предложение ввести сначала степень полиномиального управляющего воздействия p, а после этого векторы-столбцы $\mathtt{U}(1), ..., \mathtt{U}(\mathtt{p}+1)$ длины k, являющиеся коэффициентами полиномиального управляющего воздействия.

Выглядеть это будет так:

```
key = ? [c,p,h,o,z] p
U = U(1) + U(2) * t + ... + U(p+1) * t^p - k x 1
degree of polynomial p = ? 2
i=
   1
U(i) = ? - k x 1 [-0.01; -0.02; -0.03]
i=
   2
U(i) = ? - k x 1 [0.01; 0.02; 0.03]
i=
   3
U(i) = ? - k x 1 [-0.01; 0.02; -0.03]
```

Если Вы введете h, то Вам предложат ввести числовые вектор-столбцы $\mathtt{D}, \mathtt{w}, \mathtt{fi}$ длины k, которые сформируют гармоническое управляющее воздействие с компонентами вида: $\mathtt{u}(\mathtt{i}) = \mathtt{D}(\mathtt{i}) * \mathtt{sin}(\mathtt{w}(\mathtt{i}) * \mathtt{t} + \mathtt{fi}(\mathtt{i}))$, где $\mathtt{i} = 1, ..., \mathtt{k}$.

Выглядеть это будет, например, следующим образом:

```
key = ? [c,p,h,o,z] h
U = D * sin(w * t + fi) - k x 1
D = ? - k x 1 [0.01; 0.02; 0.03]
w = ? - k x 1 [1; 2; 3]
fi = ? - k x 1 [0.1; 0.2; 0.3]
```

При выборе `o` ничего вводить не потребуется, поскольку управляющее воздействие автоматически будет положено программой нулевым вектор-столбцом длины `k`.

Выбор `z` соответствует комбинированному управляющему воздействию. Выбрав `z` и нажав на клавишу `enter` Вы должны будете увидеть меню `upr.doc`, которое выглядит следующим образом:

```
CHOOSE OF COMBINE CONTROL
U - size k x 1
COMPONENTS OF U

CONSTANT COMPONENT    u(i) = u00                        [c]
POLYNOMIAL COMPONENT  u(i) = u01 + u02 * t + u03 * t^2  [p]
HARMONIC COMPONENT    u(i) = D0 * sin(wt0 + fi0)        [h]
```

Кроме того сразу же должна появиться строка:

```
i=
   1
key = ? [c,p,h]
```

У нас, как Вы помните, $\mathtt{k} = 3$, и если мы захотим, чтобы каждая компонента управляющео воздействия определялась свой зависимостью, например, первая компонента — постоянная, вторая — квадратичная, а третья — гармоническая, то это будет соответствовать следующему:

```
i=
   1
key = ? [c,p,h] c
u00 = ? -0.01
i=
   2
key = ? [c,p,h] p
u01 = ? -0.01
u02 = ? -0.02
u03 = ? -0.03
i=
   3
key = ? [c,p,h] h
D0 = ? 0.01
w0 = ? 0.02
fi0 = ? 0.03
```

На этом завершается ввод исходных данных.

Далее появится (никаких клавиш для этого нажимать не нужно) заставка `dindet.doc` вида:

```
CALCULATING OF MATRIXES
Ad - MATRIX OF DYNAMICAL PART OF SOLUTION
Bd - MATRIX OF DETERMINISTIC PART OF SOLUTION
```

Она извещает о том, что программа готова к вычислениям матриц `Ad` и `Bd` динамической и систематической составляющих решения ССЛСДУ. Сразу же за заставкой `dindet.doc` на экране Вашего PC должна будет появиться строка следующего содержания:

```
SEE Ad, Bd [y/n]
```

Это означает, что Вам предлагается просмотреть результаты расчета `Ad` и `Bd`. Это предложение можно принять, введя `y`, или отказаться от него, введя `n`.

После этого аналогичные действия будут сопровождать вычисление матрицы `Fd` случайной составляющей решения стационарной СЛСДУ, а именно:

```
SEE Fd [y/n]
```

Затем, после нажатия клавиши `enter` (кстати, это нужно делать по необходимости при работе с програмой) поступит предложение:

```
CONTINUE? [y/n]
```

Отказ повлечет за собой окончание работы программы и выход в меню системы MATLAB. При согласии мы должны будем получить следующее:

```
MODELLING? [y/n]
```

Отказ, опять таки приведет к завершению работы программы, а согласие — к началу процесса численного моделирования решения (точнее выборочной траектории решения) ССЛСДУ.

Через некоторое время Вы должны будете увидеть на экране PC график выборочной траектории решения ССЛСДУ и решения системы линейных обыкновенных дифференциальных уравнений, которая соответствует нулевой матрице `F`, а кроме того, просьбу следующего содержания

```
PLEASE, PRESS "ENTER"
```

Данное сообщение генерируется файлом `press.doc` и должно к этому моменту уже быть знакомо пользователю PC, так как уже появлялось несколько раз ранее.

Выполнив эту просьбу Вы должны будете заметить, что график сменится другим, на котором будет изображена дисперсия (как функция времени) решения ССЛСДУ, а кроме того появится повторная просьба

```
PLEASE, PRESS "ENTER"
```

Если график дисперсии не появится непосредственно на экране PC, то ссылка на него окажется на панели задач.

Выполнив повторно предложение нажать на клавишу `enter` Вы должны будете увидеть следующее сообщение

```
MODELLING ON NEXT INTERVAL? [y/n]
```

Отказ, как обычно, должен будет привести к завершению работы программы и к выходу в меню системы MATLAB, а согласие же должно будет, в свою очередь, привести к продолжению вычислений на временном интервале $[\mathtt{tk}, \mathtt{tk} + (\mathtt{tk} - \mathtt{t0})]$, причем начальное условие будет выбираться по результатам численного интегрирования на временном интервале $[\mathtt{t0}, \mathtt{tk}]$.

Затем можно будет посмотреть графики решения и его дисперсии и т.д.

Еще раз отметим, что увеличение параметров `m`, `n`, `k` (в разумных пределах) практически не ощутимо по временным затратам на численное моделирование решений ССЛСДУ на достаточно мощном PC, скажем на PC Pentium 4 с тактовой частотой 2.8 GHz. Такие компьютеры сейчас стали доступны достаточно широкому кругу пользователей.

Рассмотренная программа численного решения ССЛСДУ очевидно является лишь попыткой создания программного продукта, решающего поставленную задачу.

Программа, в частности, может быть усовершенствана в своей диалоговой части, в части ассортимента внешних детерминированных управляющих воздействий, а также по ряду других направлений.

13.6 Примеры численного моделирования решений стационарных СЛСДУ

В данном разделе будут рассмотрены задачи о численном моделировании чандлеровских колебаний, солнечной активности и лагранжевой

динамики частицы жидкости.[4]

13.6.1 Численное моделирование чандлеровских колебаний

Запишем математическую модель в виде СЛСДУ [31], которая описывает чандлеровские колебания:

$$d\begin{bmatrix}\mathbf{x}_t^{(1)}\\ \mathbf{x}_t^{(2)}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-\lambda & -\omega\\ \omega & -\lambda\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\mathbf{x}_t^{(1)}\\ \mathbf{x}_t^{(2)}\end{bmatrix}dt+\begin{bmatrix}a & 0\\ 0 & a\end{bmatrix}d\begin{bmatrix}\mathbf{f}_t^{(1)}\\ \mathbf{f}_t^{(2)}\end{bmatrix}, \tag{13.2}$$

где $\mathbf{x}_t^{(1)}, \mathbf{x}_t^{(2)} \in \Re^1$ — случайные процессы, определяющие положение Северного полюса Земли; $\mathbf{f}_t^{(1)}, \mathbf{f}_t^{(2)} \in \Re^1$ — независимые стандартные винеровские процессы; $\frac{\omega}{2\pi}$ — частота (циклов в год); $\frac{1}{\lambda}$ — релаксация (лет), a — интенсивность случайных возмущений.

Согласно оценкам, полученным в работах [31, 33], параметры λ, a, ω таковы: $\lambda = 0.06\,(1/\text{год})$, $a = 0.035''$, $\omega = 5.274$.

Выберем исходные (на начало 1968 г.) данные, зарегистрированные Международной Службой Широты: $\mathbf{x}_0^{(1)} = -0.03''$, $\mathbf{x}_0^{(2)} = -0.27''$.

Смоделируем численно решение СЛСДУ (13.2) на временном интервале 35 лет с шагом 0.01 года с помощью точного интегрального представления решения этой системы и алгоритмов 11.1–11.7, полученных в главе 11.

На рис.13.2, 13.3 показано поведение процессов $\mathbf{x}_t^{(1)}$ и $\mathbf{x}_t^{(2)}$ во времени, а на рис. 13.4 приведены фазовые траектории системы (13.2). Если положить $a = 0.00''$, то фазовые траектории системы (13.2) принимают вид, изображенный на рис. 13.5.

13.6.2 Численное моделирование солнечной активности

Рассмотрим СЛСДУ [31], которая описывает солнечную активность без учета ее среднего значения:

$$d\begin{bmatrix}x_t\\ y_t\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & 1\\ -a_2 & -a_1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_t\\ y_t\end{bmatrix}dt+\begin{bmatrix}0\\ c\end{bmatrix}df_t, \tag{13.3}$$

где x_t — число пятен на Солнце; $f_t \in \Re^1$ — стандартный винеровский процесс; a_1, a_2, c — постоянные.

По данным Е.Е. Слуцкого [43], период T_0 колебаний солнечной ак-

[4]Эти и другие задачи численного моделирования, рассмотренные в главах 14 — 16, решены с помощью версии 5.2 системы MATLAB (лицензионный номер 90291 от 3 мая 1998 года) в сотрудничестве с работниками группы по теории кодирования и теории информации Санкт-Петербургской академии аэрокосмического приборостроения.

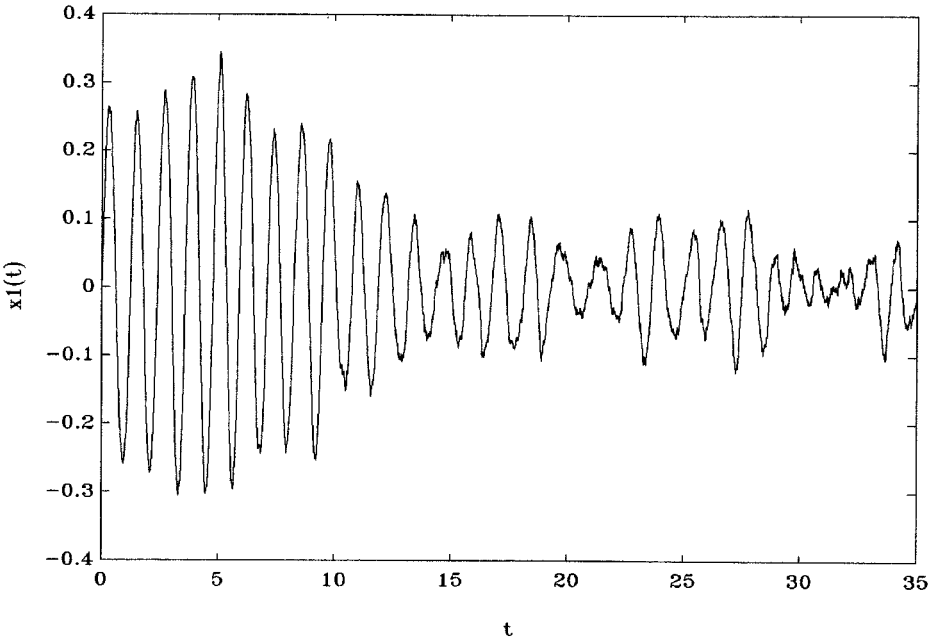

Рис.13.2. Моделирование чандлеровских колебаний при $\lambda = 0.06,\ a = 0.035,\ \omega = 5.274.$

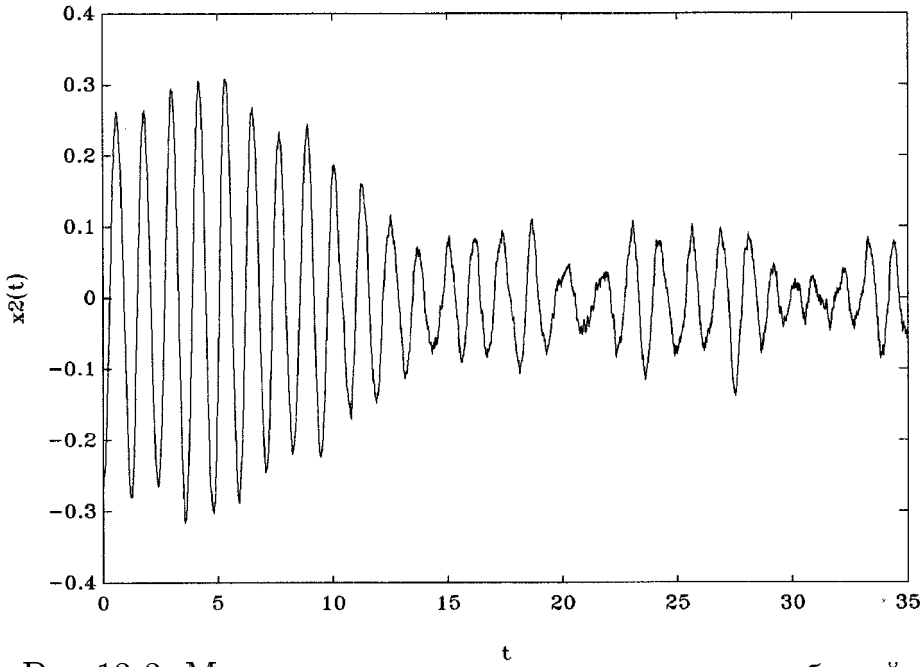

Рис.13.3. Моделирование чандлеровских колебаний при $\lambda = 0.06,\ a = 0.035,\ \omega = 5.274.$

тивности равен 11.103 года, $\sqrt{a_2} = \frac{2\pi}{T_0} = 0.5661$, $\lambda = \frac{a_1}{2} = 0.07$. Параметр c определен в [31] и равен 5.08. Согласно числам Вольфера (см. рис. 2.9, [31]), на начало 1821 г. приходилось приблизительно семь солнечных пятен ($x_0 = 7$). Примем также $y_0 = -0.25$ (см. рис. 2.9).

Смоделируем численно решение уравнения (13.3) на временном интервале 1821–1921 гг. с шагом 0.1 года при указанных исходных дан-

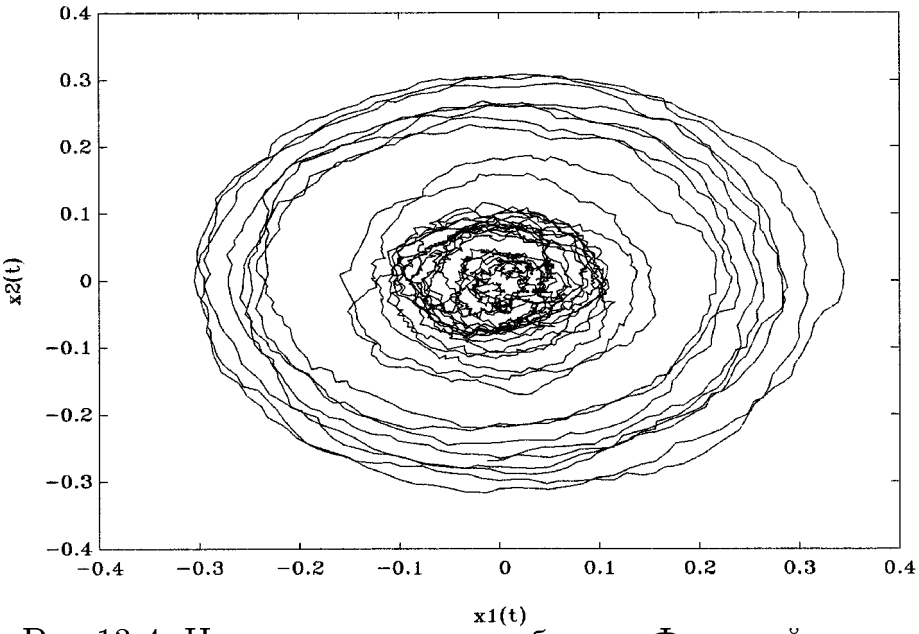

Рис.13.4. Чандлеровские колебания. Фазовый портрет при $\lambda = 0.06$, $a = 0.035$, $\omega = 5.274$.

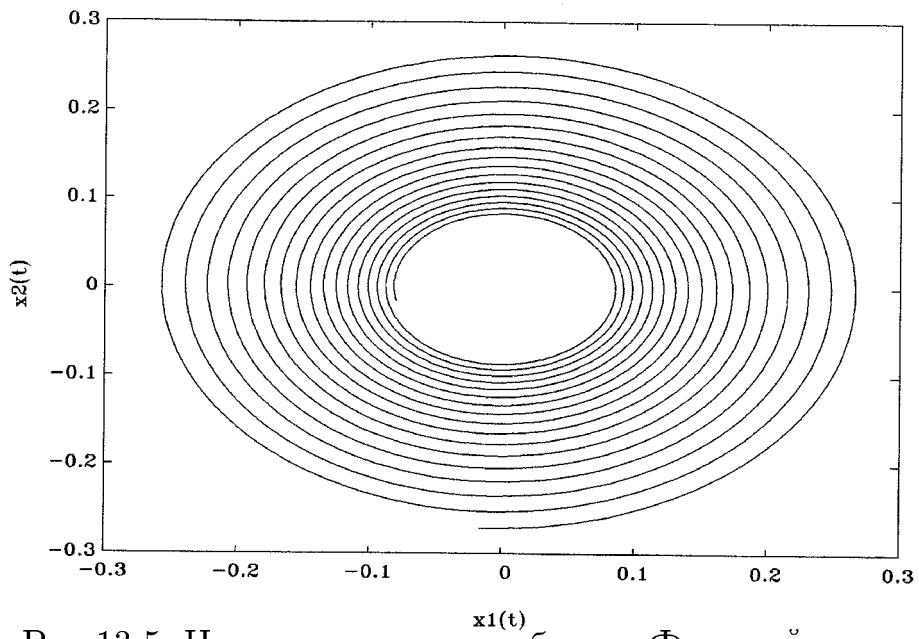

Рис.13.5. Чандлеровские колебания. Фазовый портрет при $\lambda = 0.06$, $a = 0.0$, $\omega = 5.274$.

ных с помощью алгоритмов 11.1–11.7 из главы 11. Результат численного моделирования представлен на рис. 13.6, 13.7. На рис. 13.6 показана зависимость числа солнечных пятен без учета среднего значения от времени. На этом рисунке прослеживается периодичность колебаний, равная приблизительно 11 годам, что соответствует экспериментальным данным.

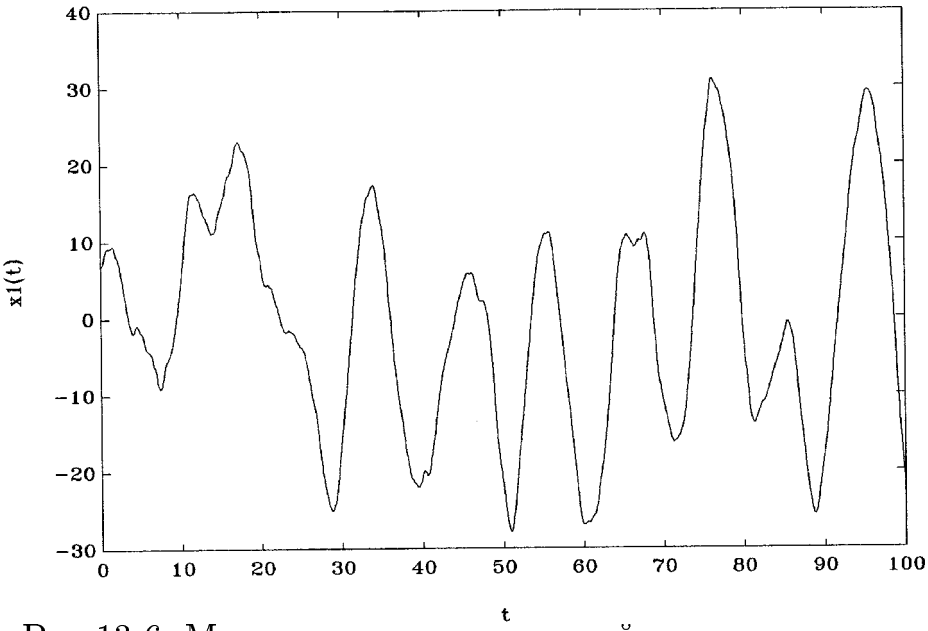

Рис.13.6. Моделирование солнечной активности при $\lambda = 0.07$, $\sqrt{a_2} = 0.5661$, $c = 5.08$

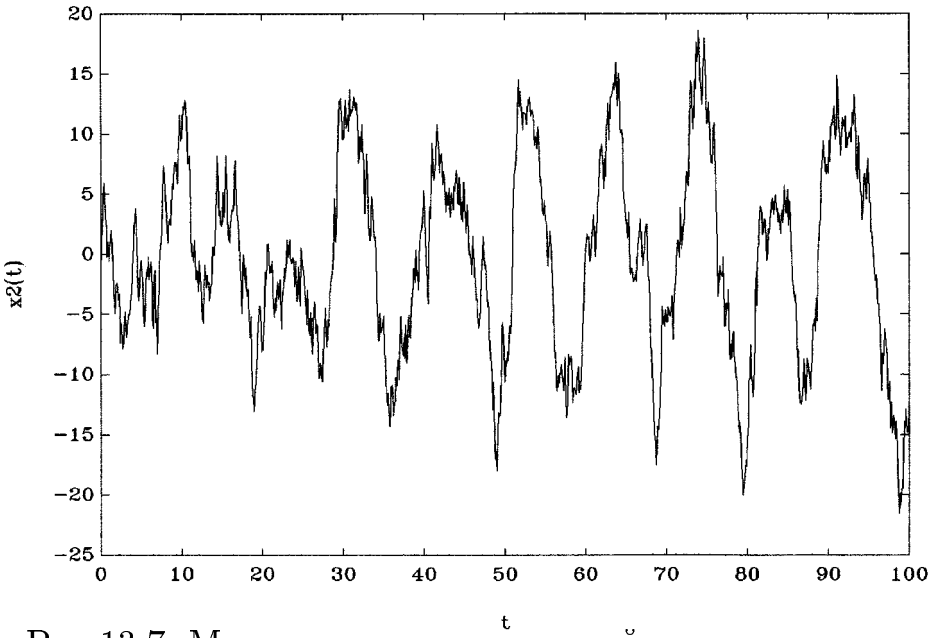

Рис.13.7. Моделирование солнечной активности при $\lambda = 0.07$, $\sqrt{a_2} = 0.5661$, $c = 5.08$.

13.6.3 Численное моделирование лагранжевой динамики частицы жидкости

Перепишем систему уравнений (2.26), (2.27) в виде:

$$dX_t = AX_t dt + \Sigma d\mathbf{f}_t; \tag{13.4}$$

$$A = \begin{pmatrix} O_{3\times3} & I_{3\times3} \\ O_{3\times3} & -T^{-1}I_{3\times3} \end{pmatrix}; \ \Sigma = \begin{pmatrix} O_{3\times3} \\ \sigma I_{3\times3} \end{pmatrix}; \ X_t = \begin{pmatrix} \mathbf{x}_t \\ \mathbf{v}_t \end{pmatrix};$$

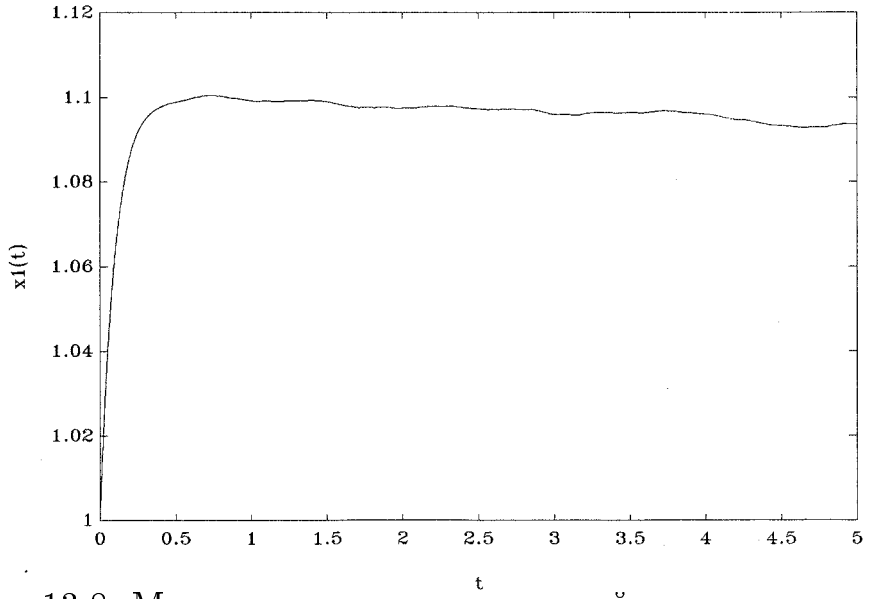

Рис.13.8. Моделирование лагранжевой динамики частицы жидкости при $T = 0.1,\ \sigma = 0.02,\ \Delta = 0.002$.

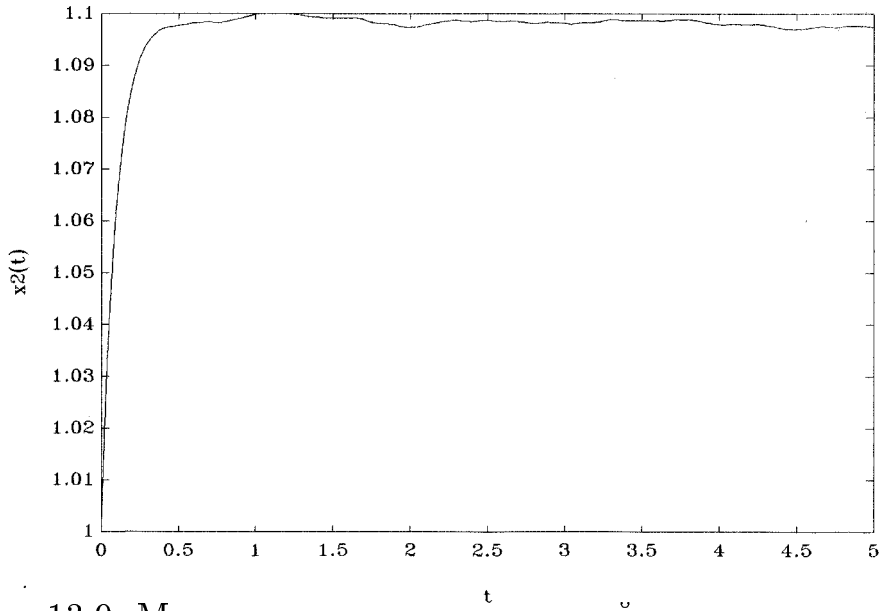

Рис.13.9. Моделирование лагранжевой динамики частицы жидкости при $T = 0.1,\ \sigma = 0.02,\ \Delta = 0.002$.

$$\mathbf{x}_t = \begin{pmatrix} \mathbf{x}_t^{(1)} \\ \mathbf{x}_t^{(2)} \\ \mathbf{x}_t^{(3)} \end{pmatrix};\ \mathbf{v}_t = \begin{pmatrix} \mathbf{v}_t^{(1)} \\ \mathbf{v}_t^{(2)} \\ \mathbf{v}_t^{(3)} \end{pmatrix};\ \mathbf{f}_t = \begin{pmatrix} \mathbf{f}_t^{(1)} \\ \mathbf{f}_t^{(2)} \\ \mathbf{f}_t^{(3)} \end{pmatrix};\ X_0 = \begin{pmatrix} \mathbf{x}_0 \\ \mathbf{v}_0 \end{pmatrix};$$

$O_{3\times3}, I_{3\times3}$ — нулевая и единичная (3×3)-матрицы.

Смоделируем численно систему (13.4) при $T = 0.1$, $\sigma = 0.02$, $\mathbf{x}_0^{\mathsf{T}} = (1\ 1\ 1)$, $\mathbf{v}_0^{\mathsf{T}} = (1\ 1\ 1)$ на промежутке $[0,\ 5]$ с постоянным шагом интегрирования $\Delta = 0.002$, пользуясь алгоритмами 11.1–11.7. Резуль-

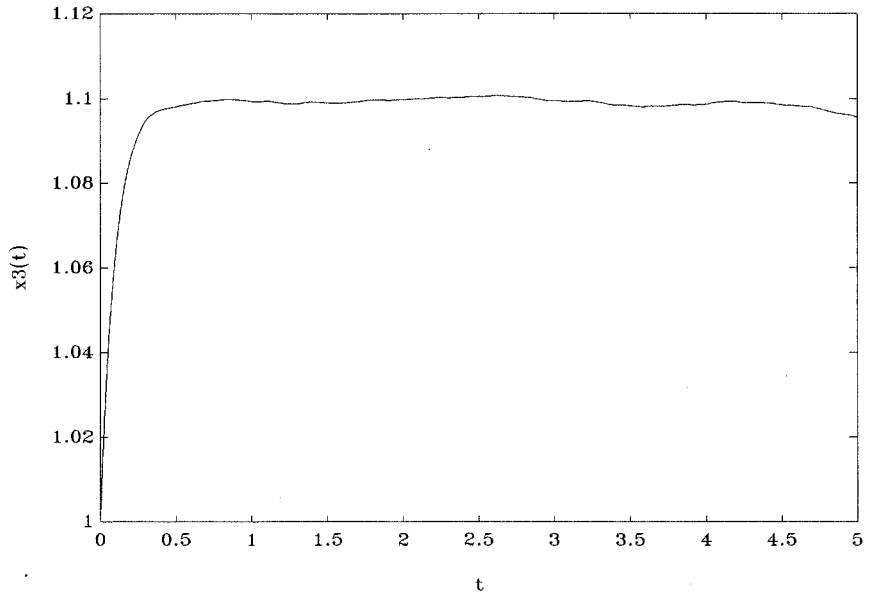

Рис.13.10. Моделирование лагранжевой динамики частицы жидкости при $T = 0.1,\ \sigma = 0.02,\ \Delta = 0.002$.

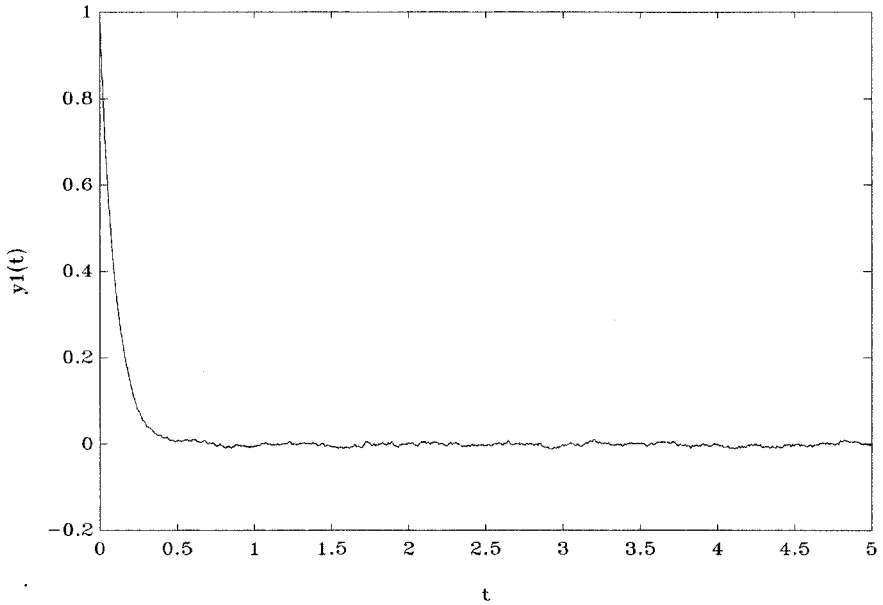

Рис.13.11. Моделирование лагранжевой динамики частицы жидкости при $T = 0.1,\ \sigma = 0.02,\ \Delta = 0.002$.

тат численного моделирования представлен на рис. 13.8–13.13.

Физически при достаточно большой силе сопротивления, действующей на частицу жидкости, частица быстро теряет начальную скорость и начинает хаотично двигаться вблизи некоторого фиксированного положения при наличии сил, действующих на нее со стороны окружающих частиц жидкости. Описанная качественная картина движения частицы жидкости нашла отражение на рис. 13.8–13.13.

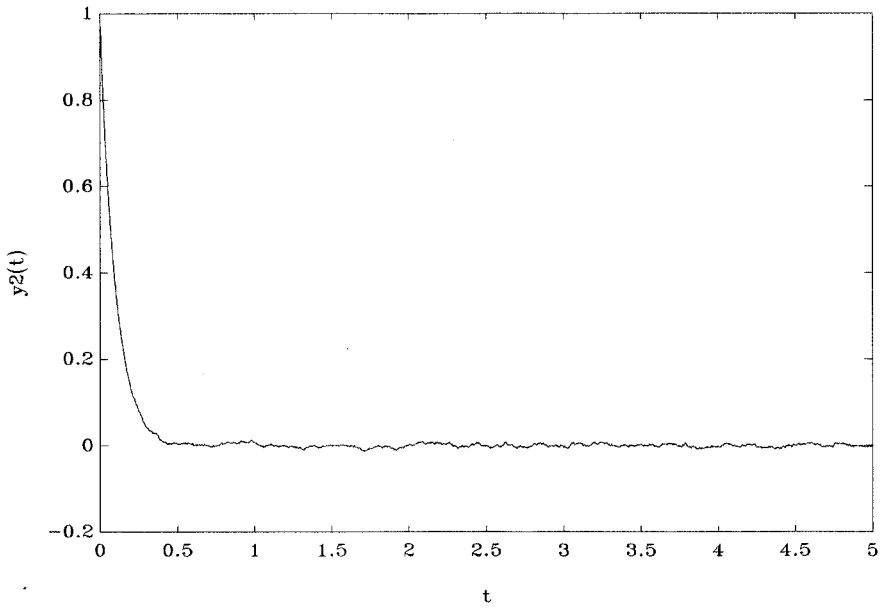

Рис.13.12. Моделирование лагранжевой динамики частицы жидкости при $T = 0.1,\ \sigma = 0.02,\ \Delta = 0.002$.

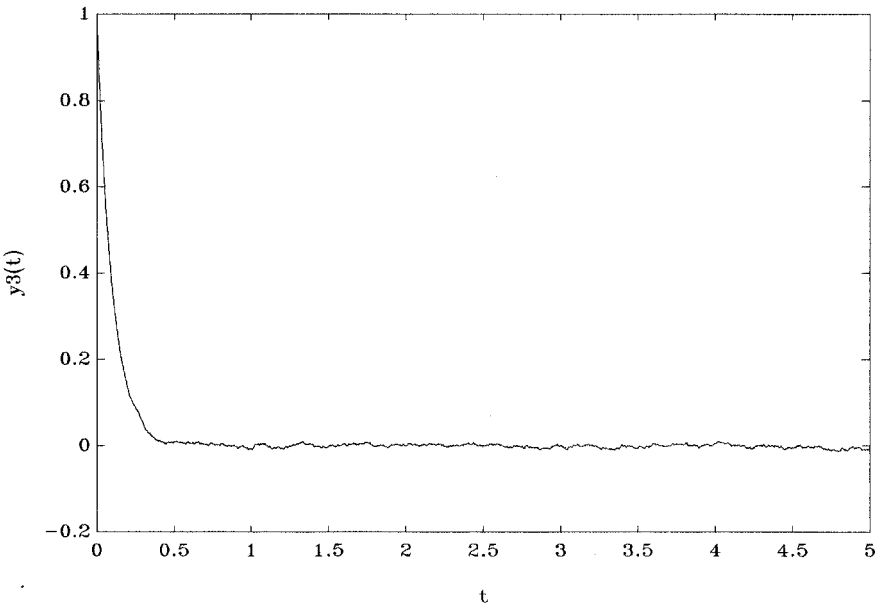

Рис.13.13. Моделирование лагранжевой динамики частицы жидкости при $T = 0.1,\ \sigma = 0.02,\ \Delta = 0.002$.

Глава 14

Моделирование выборочных траекторий решений стохастических дифференциальных уравнений Ито

В настоящей главе приводятся примеры численного моделирования выборочных траекторий решений стохастических дифференциальных уравнений Ито с помощью сильных численных методов. Рассматриваются преимущественно нелинейные системы стохастических дифференциальных уравнений Ито второго и третьего порядка. Для численного моделирования повторных стохастических интегралов, входящих в применяемые сильные численные схемы, используется метод, основанный на кратных рядах Фурье по полиномам Лежандра.

14.1 Численное интегрирование модели Блэка–Шоулза

Рассмотрим математическую модель динамики цены акции S_t в виде стохастического дифференциального уравнения Ито (модель Блэка–Шоулза):

$$dS_t = \mu S_t dt + \lambda S_t df_t, \tag{14.1}$$

где $t \in [0, T]$; $f_t \in \Re^1$ — стандартный винеровский процесс; μ, λ — параметры.

Точное решение уравнения (14.1) имеет вид

$$S_t = S_0 e^{\left(\mu - \frac{1}{2}\lambda^2\right)t + \lambda f_t},\ t \in [0, T].$$

Введем в рассмотрение разбиение $\{\tau_j\}_{j=0}^{N}$ промежутка $[0, T]$ такое, что $\tau_j = j\Delta$, $N\Delta = T$. Очевидно, что решение уравнения (14.1) может

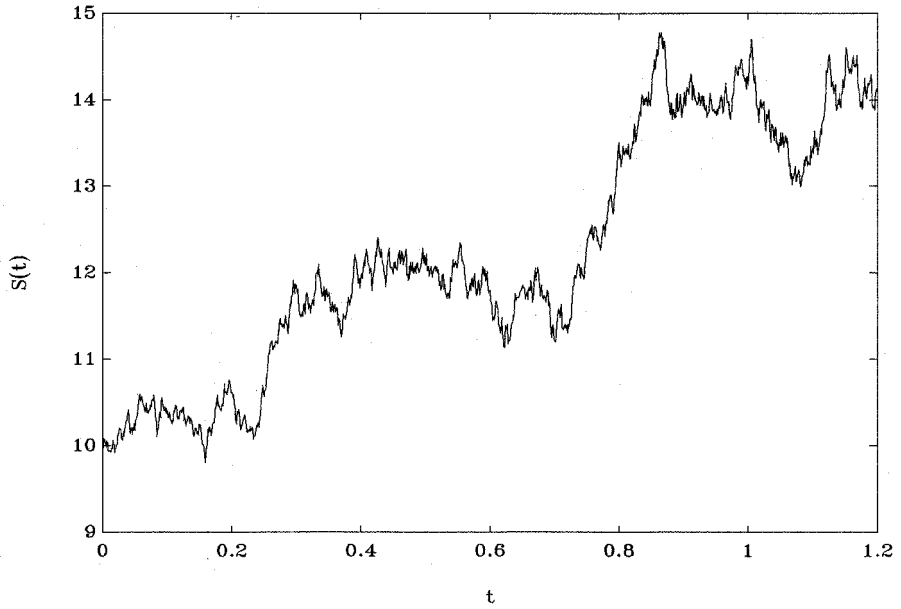

Рис.14.1. Модель Блэка–Шоулза при $\mu = 0.15,\ \lambda = 0.2$.

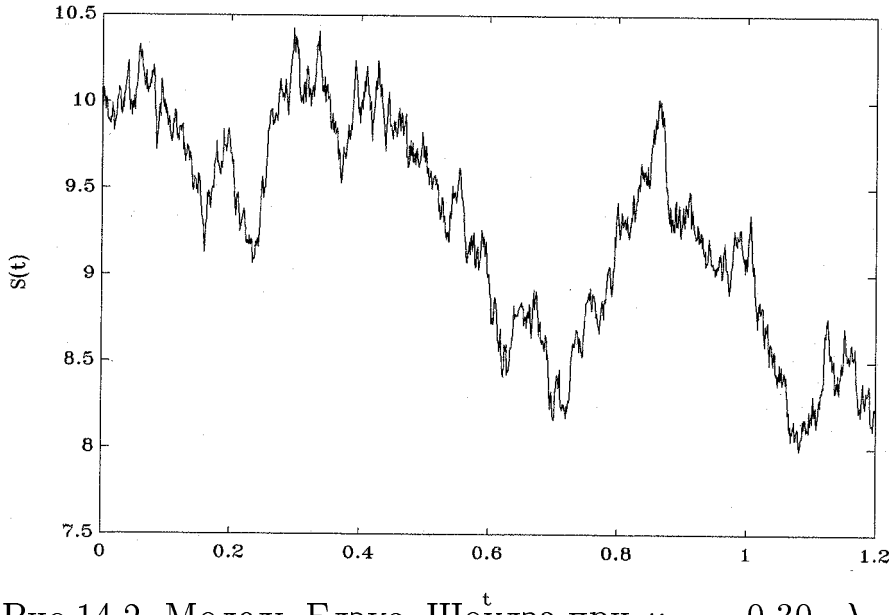

Рис.14.2. Модель Блэка–Шоулза при $\mu = -0.30,\ \lambda = 0.2$.

быть записано в дискретные моменты времени t_j следующим образом:

$$S_{k+1} = S_0 e^{\left(\mu - \frac{1}{2}\lambda^2\right)k\Delta + \lambda\sqrt{\Delta}\sum\limits_{i=0}^{k-1}\zeta_i}, \tag{14.2}$$

где $S_{\tau_k} \stackrel{\text{def}}{=} S_k$; $\frac{1}{\sqrt{\Delta}}\left(f_{\tau_{k+1}} - f_{\tau_k}\right) \stackrel{\text{def}}{=} \zeta_k$; $k = 0, 1, \ldots, N$ — независимые стандартные гауссовские случайные величины.

Смоделируем решение уравнения (14.1) с помощью представления (14.2) при $\mu = 0.15$, $\lambda = 0.2$, $\Delta = 2^{-10}$, $T = 1.2$, $S_0 = 10$. Результат численного моделирования приведен на рис. 14.1. По нему можно

проследить тенденцию возрастания стоимости S_t, что соответствует выбору коэффициентов μ и λ. Примем $\mu = -0.3$, $\lambda = 0.2$. Результат численного моделирования решения уравнения (14.1) с новыми параметрами, но на той же реализации последовательности случайных величин ζ_k; $k = 0, 1, \ldots, N$, что и в предыдущем случае, представлен на рис. 14.2. На нем видна тенденция убывания стоимости S_t.

14.2 Численное исследование влияния стохастического возмущения на трехмерную дискретную модель конвективной турбулентности Лоренца

В связи с проблемой турбулентности жидкостей, газов и плазмы возник значительный интерес к трехмерной дискретной модели конвективной турбулентности Лоренца, описываемой следующей системой обыкновенных дифференциальных уравнений:

$$\begin{aligned} d\mathbf{x}^{(1)}(t) &= \left(-a\mathbf{x}^{(1)}(t) + a\mathbf{x}^{(2)}(t)\right) dt, \\ d\mathbf{x}^{(2)}(t) &= \left(r\mathbf{x}^{(1)}(t) - \mathbf{x}^{(2)}(t) - \mathbf{x}^{(1)}(t)\mathbf{x}^{(3)}(t)\right) dt, \\ d\mathbf{x}^{(3)}(t) &= \left(-b\mathbf{x}^{(3)}(t) + \mathbf{x}^{(1)}(t)\mathbf{x}^{(2)}(t)\right) dt. \end{aligned} \tag{14.3}$$

Известно, что в системе (14.3) при определенном сочетании параметров a, r, b могут возникать хаотические движения вокруг двух состояний равновесия. Эти движения можно трактовать как переход из одного состояния равновесия в другое в результате нарастания колебаний возле каждого из них. Такие колебания могут происходить не только от одного неустойчивого состояния равновесия к другому, но и от одного неустойчивого периодического движения к другому.

Одно из таких хаотических движений возникает в системе (14.3) при возрастании параметра r и переходе его через значение 24.06 при $b = 8/3$, $a = 10.00$. Это движение носит название странного аттрактора Лоренца.

Выполним численное моделирование системы (14.3) с помощью метода третьего порядка точности (имеется в виду метод, основанный на стандартной формуле Тейлора) при следующих исходных данных: $t \in [0, 100.00]$, $\Delta = 5 \cdot 10^{-3}$, $b = 8/3$, $a = 10.00$. Эволюция фазовых траекторий системы (14.3) на фазовой плоскости $(\mathbf{x}^{(1)}(t), \mathbf{x}^{(2)}(t))$ при $r = 19.8$, 24.00, 24.10, 24.30 представлена на рис. 14.3–14.6 соответственно. При этом на графиках выводилась каждая пятая точка, ко-

торая соединялась с предыдущей и последующей точками ломаной линией.

Интересным представляется поведение системы (14.3) при воздействии на нее стохастического возмущения. Рассмотрим такую возмущенную систему, понимаемую как систему стохастических дифференциальных уравнений Ито:

$$d\begin{bmatrix}\mathbf{x}_t^{(1)}\\ \mathbf{x}_t^{(2)}\\ \mathbf{x}_t^{(3)}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-a\mathbf{x}_t^{(1)}+a\mathbf{x}_t^{(2)}\\ r\mathbf{x}_t^{(1)}-\mathbf{x}_t^{(2)}-\mathbf{x}_t^{(1)}\mathbf{x}_t^{(3)}\\ -b\mathbf{x}_t^{(3)}+\mathbf{x}_t^{(1)}\mathbf{x}_t^{(2)}\end{bmatrix}dt+\begin{bmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&c\end{bmatrix}d\begin{bmatrix}\mathbf{f}_t^{(1)}\\ \mathbf{f}_t^{(2)}\\ \mathbf{f}_t^{(3)}\end{bmatrix}, \qquad (14.4)$$

где $\mathbf{x}_t^{(1)}$, $\mathbf{x}_t^{(2)}$, $\mathbf{x}_t^{(3)}$ — компоненты решения $\mathbf{x}_t\in\Re^3$ уравнения (14.4); $\mathbf{f}_t^{(i)}$ $(i=1,2,3)$ — независимые стандартные винеровские процессы; a, r, b, c — постоянные.

Представляется естественным, что стохастическое возмущение усиливает случайным образом колебания вокруг двух положений равновесия, в результате чего движение, внешне напоминающее странный аттрактор Лоренца, возникает, вообще говоря, при $r<24.06$. Среднее пороговое значение параметра r, при котором рождается стохастический аналог аттрактора Лоренца, очевидно зависит как от интенсивности стохастического возмущения, т. е. от значения параметра c, так и от времени наблюдения за системой.

В качестве численного метода решения системы (14.4) возьмем соотношения (4.105)–(4.107) (без остаточных членов) на разбиении $\{\tau_j\}_{j=0}^N$ промежутка $[0,T]$ с шагом Δ: $\tau_j=j\Delta$; $j=0,1,\ldots,N$; $N\Delta=T$, а также формулы (6.37)–(6.39) для моделирования стохастических интегралов. В результате получаем следующую явную численную схему:

$$\begin{gathered}\mathbf{y}_{k+1}^{(1)}=\mathbf{y}_k^{(1)}+a\Delta\left(-\mathbf{y}_k^{(1)}+\mathbf{y}_k^{(2)}\right)+\\ +a\frac{\Delta^2}{2}\left[-a\left(-\mathbf{y}_k^{(1)}+\mathbf{y}_k^{(2)}\right)+r\mathbf{y}_k^{(1)}-\mathbf{y}_k^{(2)}-\mathbf{y}_k^{(1)}\mathbf{y}_k^{(3)}\right]-\\ -ac\mathbf{y}_k^{(1)}\Delta^{\frac{5}{2}}\left[\frac{1}{6}\zeta_{0_{k+1,k}}^{(3)}-\frac{1}{4\sqrt{3}}\zeta_{1_{k+1,k}}^{(3)}+\frac{1}{6\sqrt{20}}\zeta_{2_{k+1,k}}^{(3)}\right]+\\ +a\frac{\Delta^3}{6}\left[a\left(-\mathbf{y}_k^{(1)}+\mathbf{y}_k^{(2)}\right)\left(a+r-\mathbf{y}_k^{(3)}\right)-(a+1)\times\right.\\ \left.\times\left(r\mathbf{y}_k^{(1)}-\mathbf{y}_k^{(2)}-\mathbf{y}_k^{(1)}\mathbf{y}_k^{(3)}\right)-\mathbf{y}_k^{(1)}\left(-b\mathbf{y}_k^{(3)}+\mathbf{y}_k^{(1)}\mathbf{y}_k^{(2)}\right)\right], \qquad (14.5)\end{gathered}$$

$$\mathbf{y}_{k+1}^{(2)}=\mathbf{y}_k^{(2)}+\Delta\left(r\mathbf{y}_k^{(1)}-\mathbf{y}_k^{(2)}-\mathbf{y}_k^{(1)}\mathbf{y}_k^{(3)}\right)-c\mathbf{y}_k^{(1)}\Delta^{\frac{3}{2}}\left[\frac{1}{2\sqrt{3}}\zeta_{1_{k+1,k}}^{(3)}-\frac{1}{2}\zeta_{0_{k+1,k}}^{(3)}\right]$$

$$+\frac{\Delta^2}{2}\left[a\left(-\mathbf{y}_k^{(1)}+\mathbf{y}_k^{(2)}\right)\left(r-\mathbf{y}_k^{(3)}\right)-r\mathbf{y}_k^{(1)}+\mathbf{y}_k^{(2)}+\right.$$
$$\left.+\mathbf{y}_k^{(1)}\mathbf{y}_k^{(3)}-\mathbf{y}_k^{(1)}\left(-b\mathbf{y}_k^{(3)}+\mathbf{y}_k^{(1)}\mathbf{y}_k^{(2)}\right)\right]+\left(a\left(\mathbf{y}_k^{(1)}-\mathbf{y}_k^{(2)}\right)+\right.$$
$$\left.+(1+b)\mathbf{y}_k^{(1)}\right)c\Delta^{\frac{5}{2}}\left[\frac{1}{6}\zeta_{0_{k+1,k}}^{(3)}-\frac{1}{4\sqrt{3}}\zeta_{1_{k+1,k}}^{(3)}+\frac{1}{6\sqrt{20}}\zeta_{2_{k+1,k}}^{(3)}\right]+$$
$$+ac\Delta^{\frac{3}{2}}\left(-\mathbf{y}_k^{(1)}+\mathbf{y}_k^{(2)}\right)\left[-\frac{1}{6}\zeta_{0_{k+1,k}}^{(3)}+\frac{1}{3\sqrt{20}}\zeta_{2_{k+1,k}}^{(3)}\right]+$$
$$+\frac{\Delta^3}{6}\left[a\left(-\mathbf{y}_k^{(1)}+\mathbf{y}_k^{(2)}\right)\left(-(a+1)\left(r-\mathbf{y}_k^{(3)}\right)+b\mathbf{y}_k^{(3)}-2\mathbf{y}_k^{(1)}\mathbf{y}_k^{(2)}\right)+\right.$$
$$+\left(r\mathbf{y}_k^{(1)}-\mathbf{y}_k^{(2)}-\mathbf{y}_k^{(1)}\mathbf{y}_k^{(3)}\right)\left(\left(r-\mathbf{y}_k^{(3)}\right)a+1-\left(\mathbf{y}_k^{(1)}\right)^2\right)+$$
$$\left.+\left(-b\mathbf{y}_k^{(3)}+\mathbf{y}_k^{(1)}\mathbf{y}_k^{(2)}\right)\left(a\left(\mathbf{y}_k^{(1)}-\mathbf{y}_k^{(2)}\right)+\mathbf{y}_k^{(1)}(1+b)\right)\right], \qquad (14.6)$$

$$\mathbf{y}_{k+1}^{(3)}=\mathbf{y}_k^{(3)}+cI_{0_{s,t}}^{(3)}+\Delta\left(-b\mathbf{y}_k^{(3)}+\mathbf{y}_k^{(1)}\mathbf{y}_k^{(2)}\right)-bc\Delta^{\frac{3}{2}}\left[\frac{1}{2\sqrt{3}}\zeta_{1_{k+1,k}}^{(3)}-\frac{1}{2}\zeta_{0_{k+1,k}}^{(3)}\right]$$
$$+\frac{\Delta^2}{2}\left[a\left(-\mathbf{y}_k^{(1)}+\mathbf{y}_k^{(2)}\right)\mathbf{y}_k^{(2)}+\left(r\mathbf{y}_k^{(1)}-\mathbf{y}_k^{(2)}-\mathbf{y}_k^{(1)}\mathbf{y}_k^{(3)}\right)\mathbf{y}_k^{(1)}-b\left(\mathbf{y}_k^{(1)}\mathbf{y}_k^{(2)}-\right.\right.$$
$$\left.\left.-b\mathbf{y}_k^{(3)}\right)\right]+c\left(b^2-\left(\mathbf{y}_k^{(1)}\right)^2\right)\Delta^{\frac{5}{2}}\left[\frac{1}{6}\zeta_{0_{k+1,k}}^{(3)}-\frac{1}{4\sqrt{3}}\zeta_{1_{k+1,k}}^{(3)}+\frac{1}{6\sqrt{20}}\zeta_{2_{k+1,k}}^{(3)}\right]+$$
$$+\frac{\Delta^3}{6}\left[a\left(-\mathbf{y}_k^{(1)}+\mathbf{y}_k^{(2)}\right)\left(-a\mathbf{y}_k^{(2)}+r\mathbf{y}_k^{(1)}-\mathbf{y}_k^{(2)}-\right.\right.$$
$$\left.-\mathbf{y}_k^{(1)}\mathbf{y}_k^{(3)}+\mathbf{y}_k^{(1)}\left(r-\mathbf{y}_k^{(3)}\right)-b\mathbf{y}_k^{(2)}\right)+$$
$$+\left(r\mathbf{y}_k^{(1)}-\mathbf{y}_k^{(2)}-\mathbf{y}_k^{(1)}\mathbf{y}_k^{(3)}\right)\left(-a\mathbf{y}_k^{(1)}+2a\mathbf{y}_k^{(2)}-(1+b)\mathbf{y}_k^{(1)}\right)+$$
$$\left.+\left(-b\mathbf{y}_k^{(3)}+\mathbf{y}_k^{(1)}\mathbf{y}_k^{(2)}\right)\left(b^2-\left(\mathbf{y}_k^{(1)}\right)^2\right)\right], \qquad (14.7)$$

где $\mathbf{y}_{k\Delta}^{(j)}\stackrel{\text{def}}{=}\mathbf{y}_k^{(j)}$; $j=1,2,3$; $\zeta_{i_{k+1,k}}^{(3)}$; $i=0,1,2$; $k=0,1,\ldots,N-1$ — независимые в совокупности стандартные гауссовские случайные величины.

Смоделируем численно решение системы (14.4) с помощью метода (14.5)–(14.7) при следующих исходных данных: $t\in[0,100.00]$, $\Delta=5\cdot 10^{-3}$, $b=8/3$, $a=10.00$, $c=2.00$, $\mathbf{x}_0^{(1)}=\mathbf{x}_0^{(2)}=\mathbf{x}_0^{(3)}=0.25$. Эволюция фазовых траекторий системы (14.4) на фазовой плоскости $(\mathbf{x}_t^{(1)},\ \mathbf{x}_t^{(2)})$,

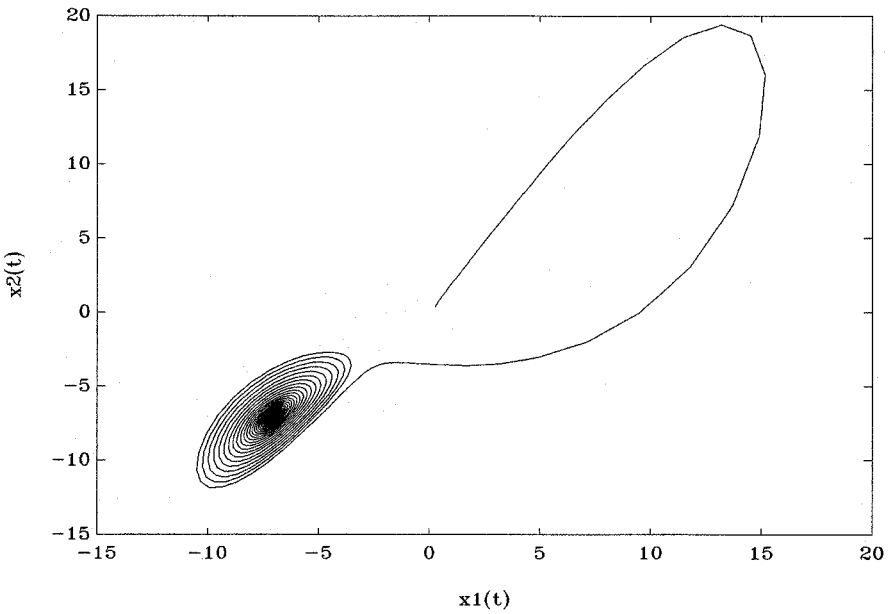

Рис.14.3. Фазовый портрет системы уравнений Лоренца при $b = 8/3,\ a = 10,\ r = 19.8$.

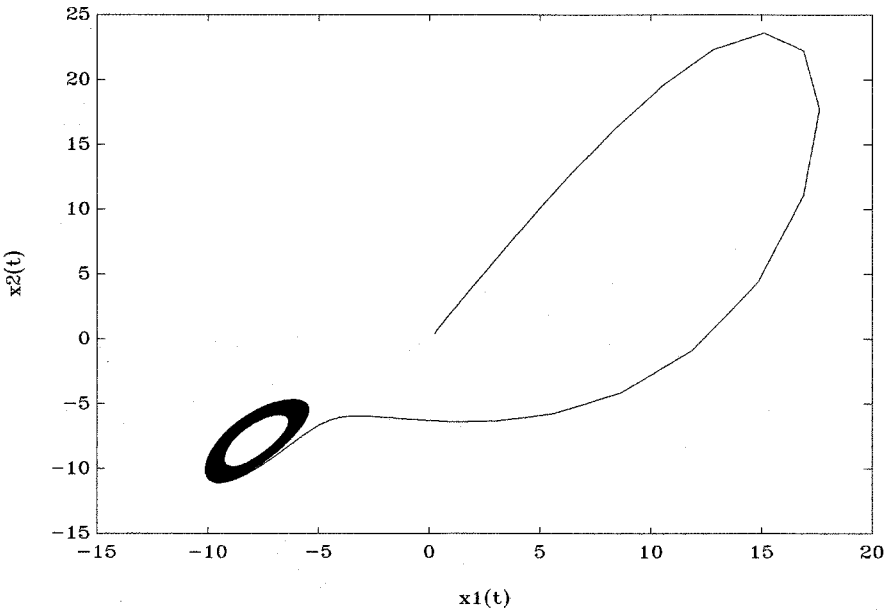

Рис.14.4. Фазовый портрет системы уравнений Лоренца при $b = 8/3,\ a = 10,\ r = 24.0$.

полученная на одной и той же реализации последовательности случайных величин, входящих в (14.5)–(14.7), при $r = 20.00,\ 21.00,\ 23.00$ и 24.30 изображена на рис.14.7–14.10. На этих рисунках видно, что движения вокруг двух положений равновесия, внешне напоминающие странный аттрактор Лоренца, возникают при $r < 24.06$. Кроме того, фазовые траектории становятся менее регулярными, чем в детерми-

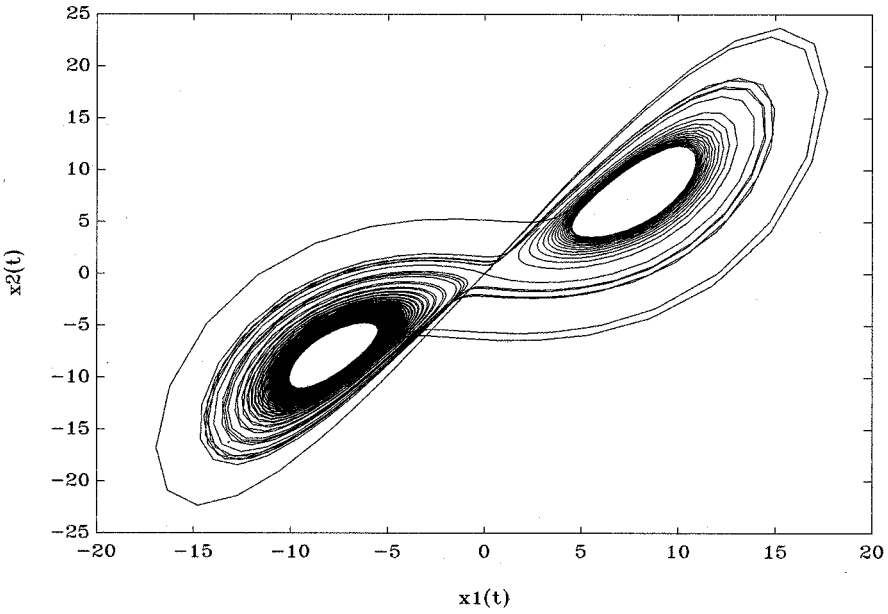

Рис.14.5. Фазовый портрет системы уравнений Лоренца при $b = 8/3,\ a = 10,\ r = 24.1$.

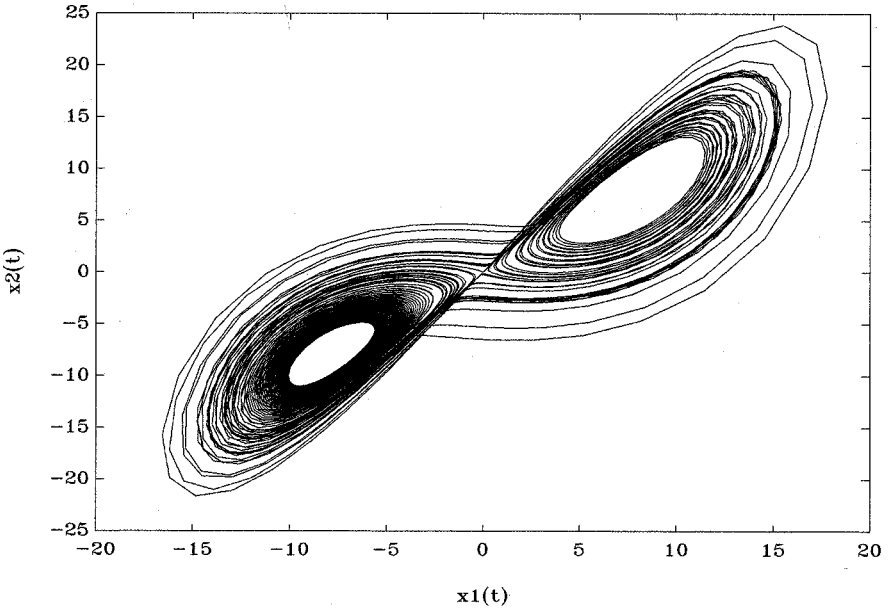

Рис.14.6. Фазовый портрет системы уравнений Лоренца при $b = 8/3,\ a = 10,\ r = 24.3$.

нированном случае, вследствие воздействия на систему (14.4) случайного возмущения.

Повторим численное моделирование решения системы (14.4) с помощью численного метода (14.5)–(14.7) при тех же исходных данных, что и в предыдущем случае, за исключением параметра c, который увеличим до 4.00. В этом случае эволюция фазовых траекторий систе-

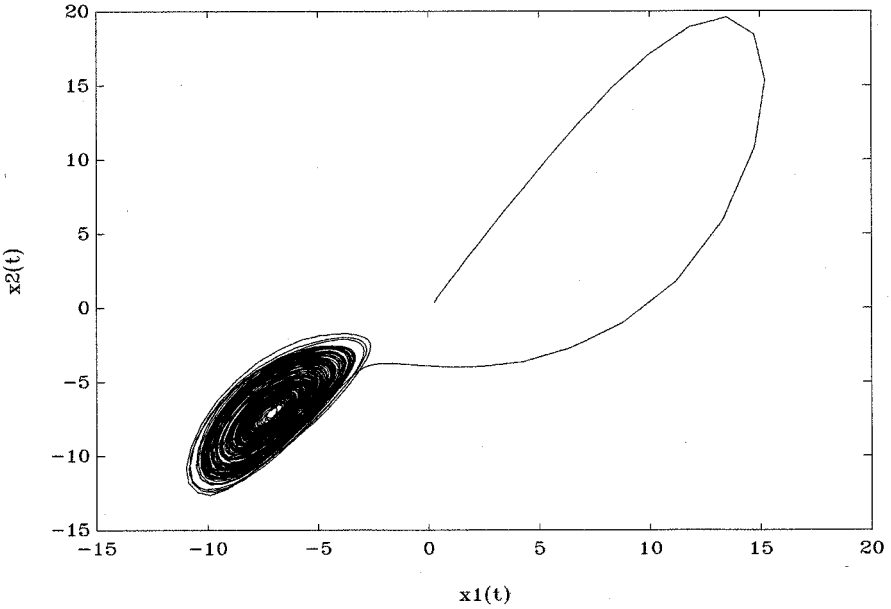

Рис.14.7. Фазовый портрет системы уравнений Лоренца со стохастическим возмущением при $b = 8/3$, $a = 10$, $r = 20.0$, $c = 2.0$.

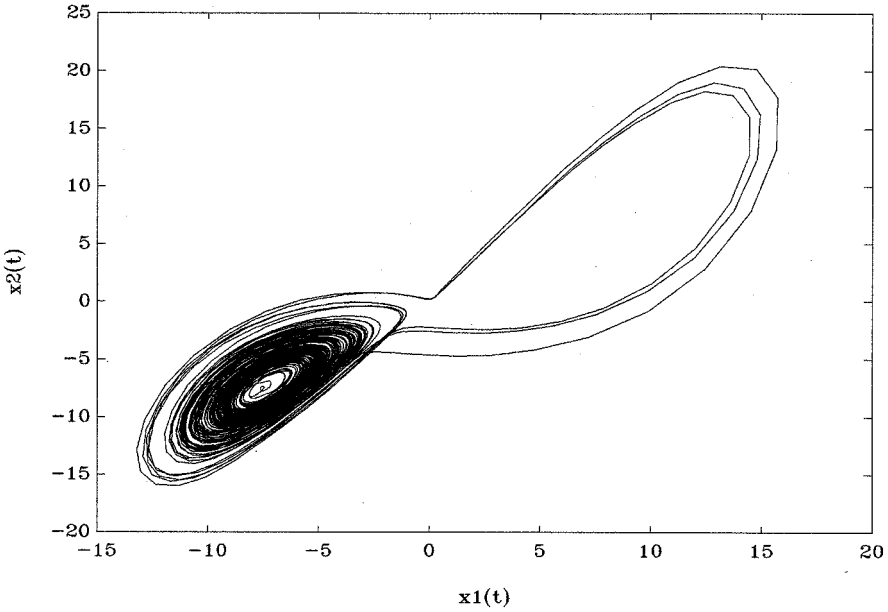

Рис.14.8. Фазовый портрет системы уравнений Лоренца со стохастическим возмущением при $b = 8/3$, $a = 10$, $r = 21.0$, $c = 2.0$.

мы (14.4) на фазовой плоскости $(\mathbf{x}_t^{(1)},\ \mathbf{x}_t^{(2)})$, полученная на одной (той же, что и в случае $c = 2.00$) реализации последовательности случайных величин, входящих в (14.5)–(14.7), при $r = 11.00,\ 13.00,\ 20.00$ и 24.30, изображена на рис.14.11–14.14.

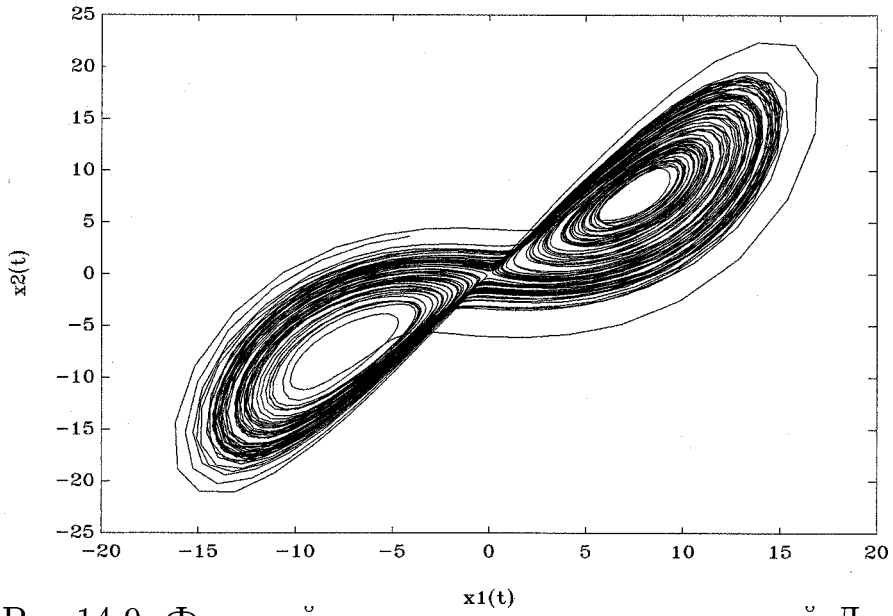

Рис.14.9. Фазовый портрет системы уравнений Лоренца со стохастическим возмущением при $b = 8/3$, $a = 10$, $r = 23.0$, $c = 2.0$.

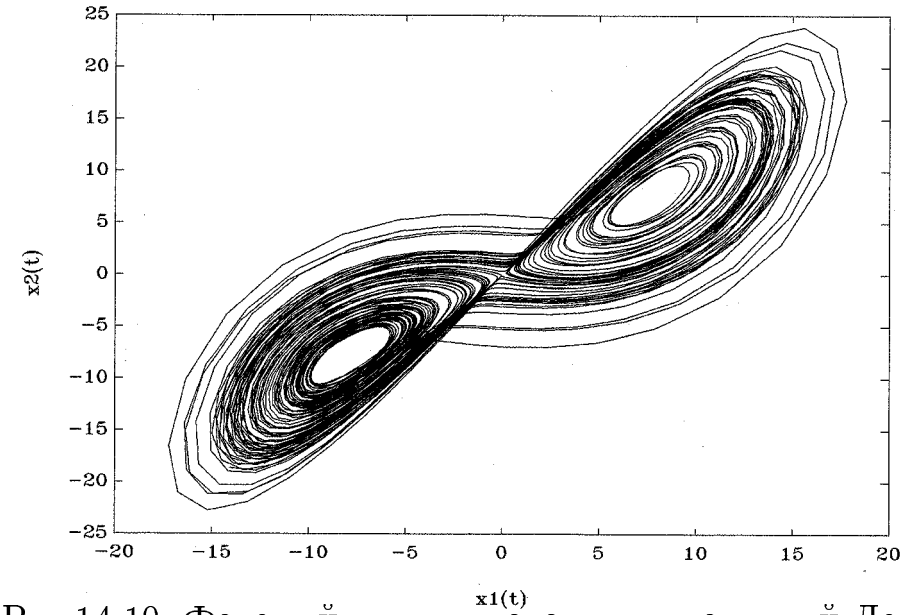

Рис.14.10. Фазовый портрет системы уравнений Лоренца со стохастическим возмущением при $b = 8/3$, $a = 10$, $r = 24.3$, $c = 2.0$.

На этих рисунках видно, что движения вокруг двух положений равновесия, внешне напоминающие странный аттрактор Лоренца, возникают при значениях r, существенно меньших, чем в случае $c = 2.00$. При этом нерегулярность траекторий становится еще более заметной.

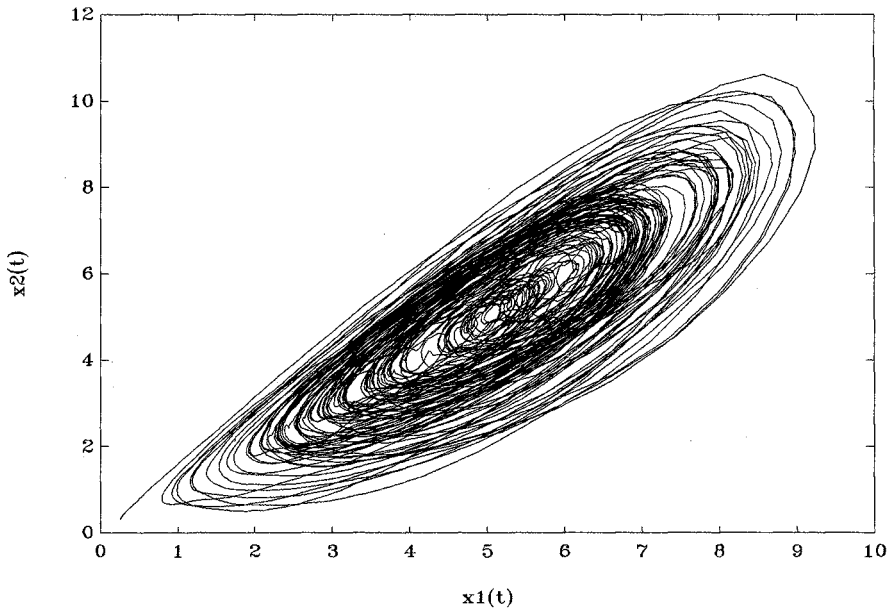

Рис.14.11. Фазовый портрет системы уравнений Лоренца со стохастическим возмущением при $b = 8/3$, $a = 10$, $r = 11.0$, $c = 4.0$.

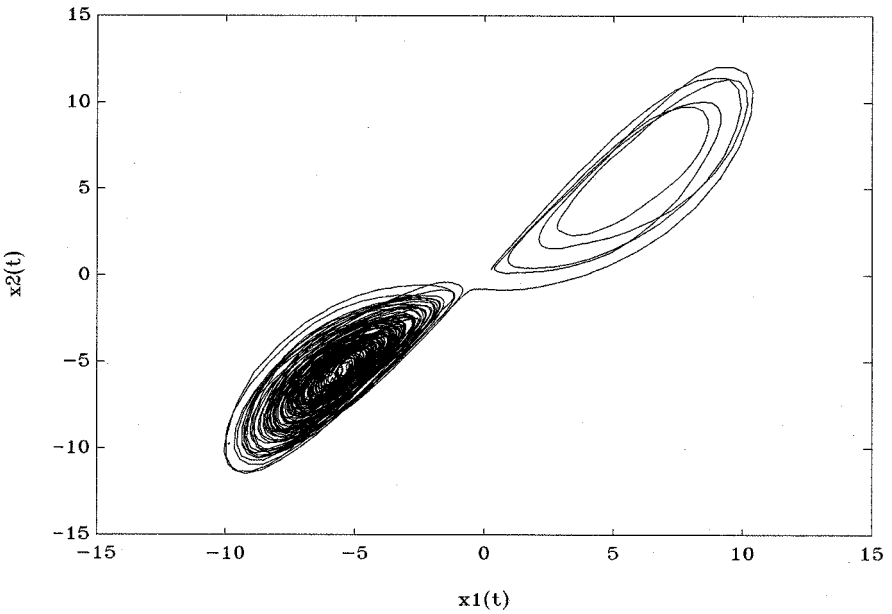

Рис.14.12. Фазовый портрет системы уравнений Лоренца со стохастическим возмущением при $b = 8/3$, $a = 10$, $r = 13.0$, $c = 4.0$.

Увеличим теперь значение параметра c до 8.00 и повторим численное моделирование решения системы (14.4) с помощью численного метода (14.5)–(14.7) при тех же значениях остальных параметров и на той же реализации последовательности случайных величин, входящих

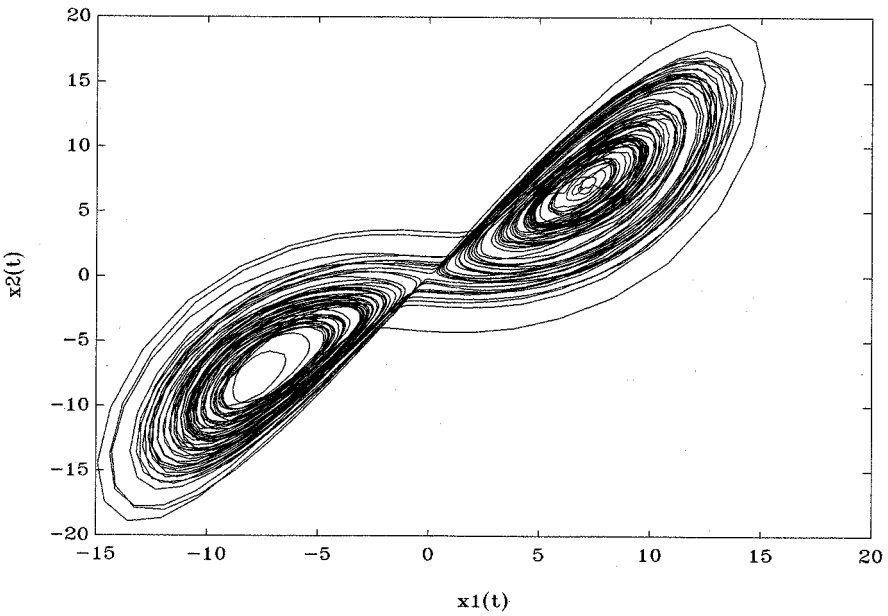

Рис.14.13. Фазовый портрет системы уравнений Лоренца со стохастическим возмущением при $b = 8/3$, $a = 10$, $r = 20.0$, $c = 4.0$.

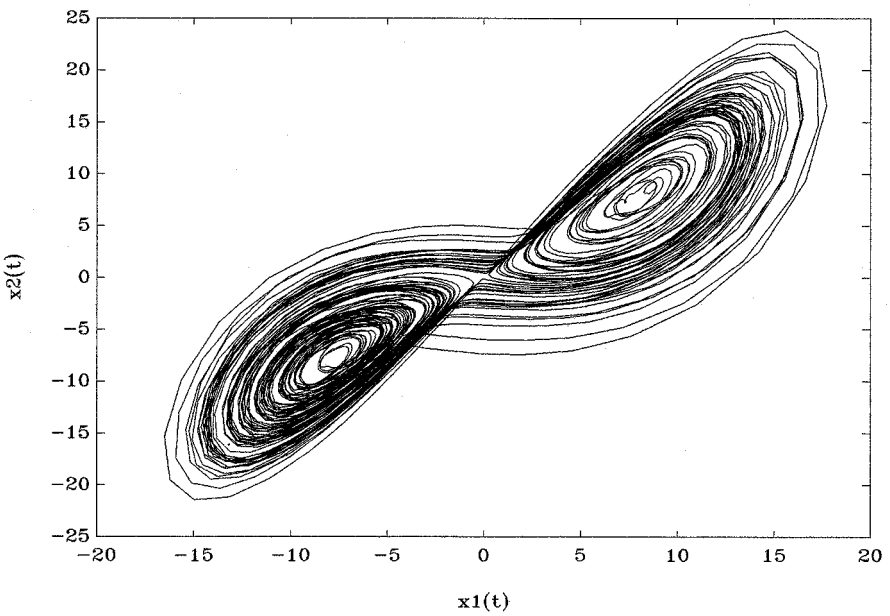

Рис.14.14. Фазовый портрет системы уравнений Лоренца со стохастическим возмущением при $b = 8/3$, $a = 10$, $r = 24.3$, $c = 4.0$.

в (14.5)–(14.7), что и в предыдущих случаях. Результат численного моделирования при $r = 1.50$, 5.00, 20.00 и 24.30 представлен на рис.14.15–14.18. На этих рисунках в еще большей степени, чем при $c = 2.00$ и $c = 4.00$, проявляется нерегулярность фазовых траекторий.

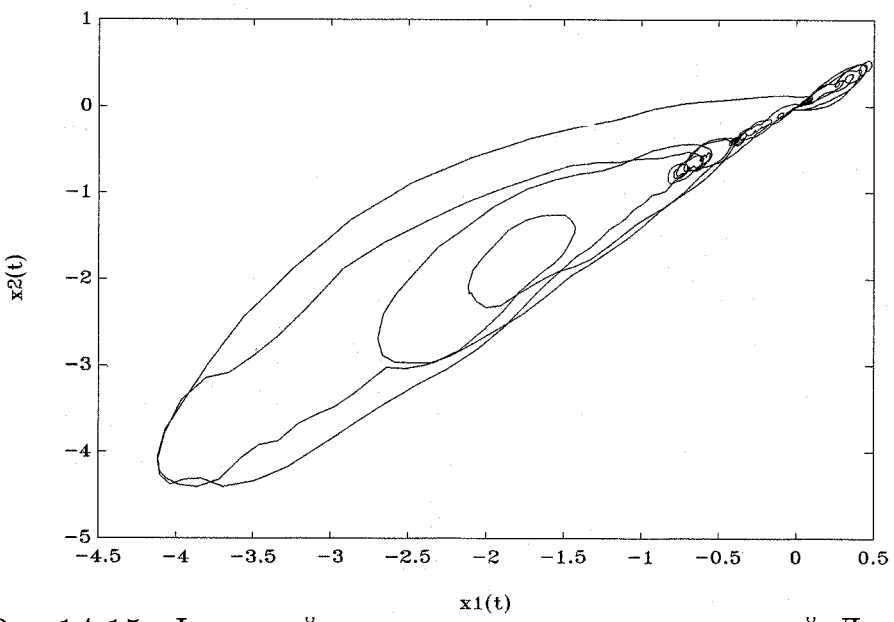

Рис.14.15. Фазовый портрет системы уравнений Лоренца со стохастическим возмущением при $b = 8/3$, $a = 10$, $r = 1.5$, $c = 8.0$.

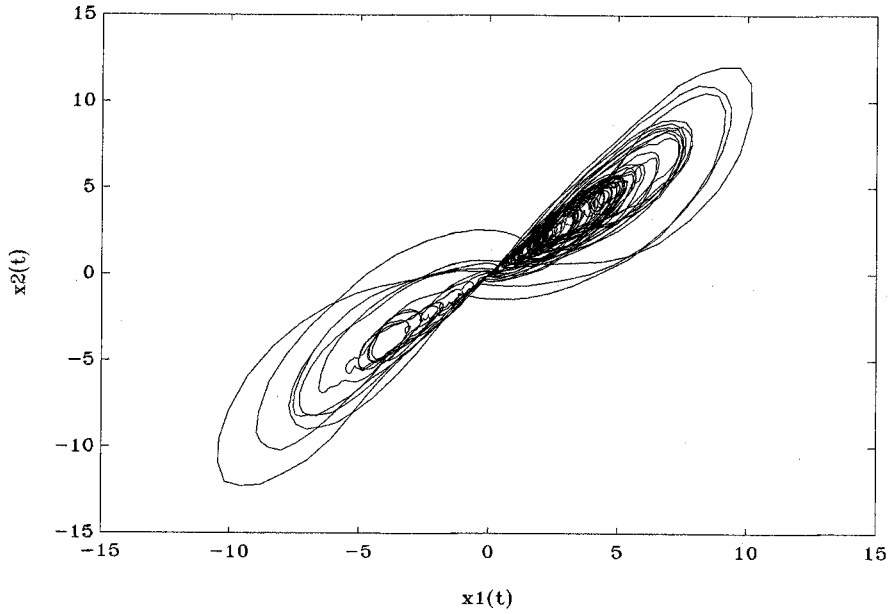

Рис.14.16. Фазовый портрет системы уравнений Лоренца со стохастическим возмущением при $b = 8/3$, $a = 10$, $r = 5.0$, $c = 8.0$.

Кроме того, фазовые траектории, внешне отдаленно напоминающие странный аттрактор Лоренца, наблюдаются даже при $r = 5.00$ (рис. 14.16).

В заключение раздела отметим, что полиномы Лежандра выбраны в данной книге в качестве основной системы функций для численного

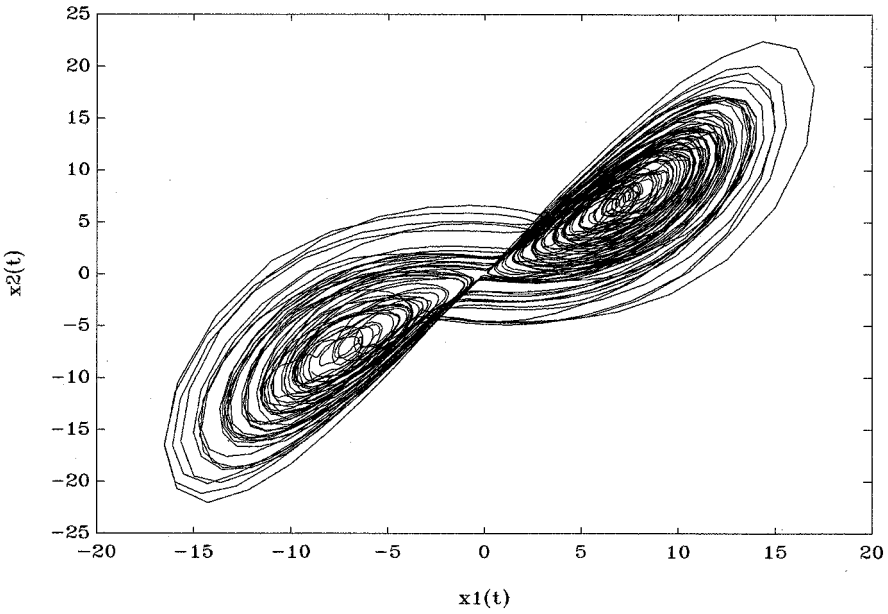

Рис.14.17. Фазовый портрет системы уравнений Лоренца со стохастическим возмущением при $b = 8/3$, $a = 10$, $r = 20.0$, $c = 8.0$.

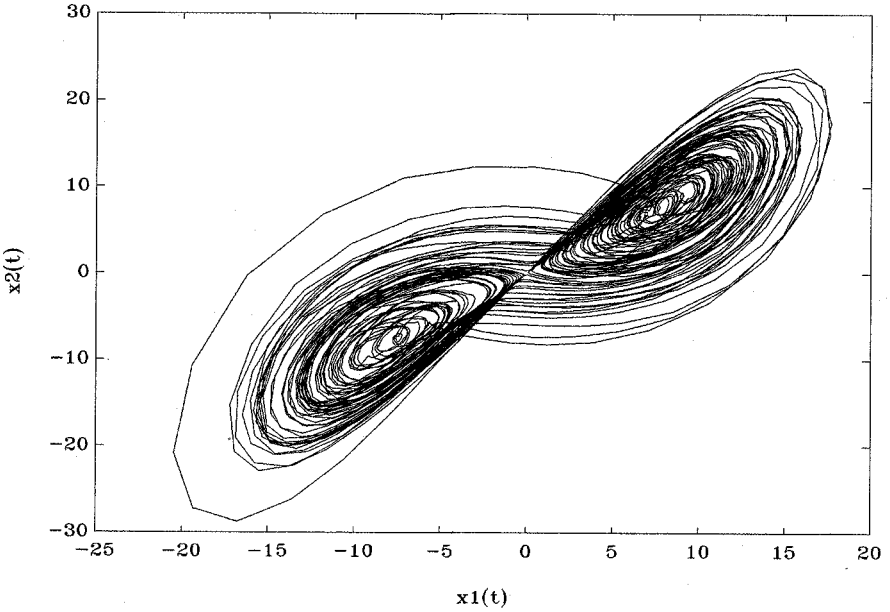

Рис.14.18. Фазовый портрет системы уравнений Лоренца со стохастическим возмущением при $b = 8/3$, $a = 10$, $r = 24.3$, $c = 8.0$.

моделирования повторных стохастических интегралов Ито с помощью теоремы 5.1. Формулы для аппроксимаций указанных интегралов, входящие в (14.5)–(14.7), могут быть получены напрямую с помощью теоремы 5.1 или несложным приемом ортогонализации, который известен

некоторым авторам [70, 86, 186]. В более сложных случаях (см. разд. 14.4, 14.5, 15.2) теорема 5.1 и ряды Фурье–Лежандра используются гораздо в большем объеме.

14.3 Численное интегрирование стохастической модели Лотки–Вольтерра второго порядка

Рассмотрим стохастический вариант модели Лотки–Вольтерра динамики численности двух конкурирующих видов животных или динамики концентраций двух реагентов:

$$d\begin{bmatrix}\mathbf{x}_t^{(1)}\\ \mathbf{x}_t^{(2)}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\left(k_1+a_1\mathbf{x}_t^{(2)}\right)\mathbf{x}_t^{(1)}\\ \left(k_2+a_2\mathbf{x}_t^{(1)}\right)\mathbf{x}_t^{(2)}\end{bmatrix}dt+\begin{bmatrix}\sigma_1\mathbf{x}_t^{(1)} & 0\\ 0 & \sigma_2\mathbf{x}_t^{(2)}\end{bmatrix}d\begin{bmatrix}\mathbf{f}_t^{(1)}\\ \mathbf{f}_t^{(2)}\end{bmatrix}, \qquad (14.8)$$

где $\mathbf{x}_t^{(1)}$, $\mathbf{x}_t^{(2)}$ — численность двух конкурирующих видов животных (концентрация двух реагирующих веществ); k_1, k_2 — коэффициенты роста численности этих видов (концентрации веществ); a_1, a_2 — коэффициенты смертности конкурирующих видов животных (коэффициенты снижения уровня концентрации реагирующих веществ); σ_1, σ_2 — коэффициенты, характеризующие степень влияния случайных факторов на систему; $\mathbf{f}_t^{(1)}$, $\mathbf{f}_t^{(2)}$ — независимые стандартные винеровские процессы.

Запишем явную сильную одношаговую численную схему порядка точности 1.0 для системы (14.8), используя разложения стохастических интегралов $I_{0_{s,t}}^{(i)}$, $I_{1_{s,t}}^{(i)}$; $i=1,\ 2$ с помощью полиномов Лежандра (см. главу 6) и разложения повторных стохастических интегралов $I_{00_{s,t}}^{(ii)}$, $I_{000_{s,t}}^{(iii)}$; $i=1,\ 2$ с помощью полиномов Эрмита (см. также главу 6):

$$\mathbf{y}_{k+1}^{(1)}=\mathbf{y}_k^{(1)}\Biggl[1+\left(k_1+a_1\mathbf{y}_k^{(2)}\right)\Delta-\frac{\sigma_1\Delta^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{3}}\left(k_1+a_1\mathbf{y}_k^{(2)}\right)\zeta_1^{(1)}+\sigma_1\sqrt{\Delta}\zeta_0^{(1)}$$

$$+a_1\sigma_2\mathbf{y}_k^{(2)}\frac{\Delta^{\frac{3}{2}}}{2}\left(\zeta_0^{(2)}-\frac{1}{\sqrt{3}}\zeta_1^{(2)}\right)+\frac{\sigma_1^2\Delta}{2}\left(\left(\zeta_0^{(1)}\right)^2-1\right)+\frac{\sigma_1^3\Delta^{\frac{3}{2}}}{6}\left(\left(\zeta_0^{(1)}\right)^3-3\zeta_0^{(1)}\right)\Biggr],$$

$$\mathbf{y}_{k+1}^{(2)}=\mathbf{y}_k^{(2)}\Biggl[1+\left(k_2+a_2\mathbf{y}_k^{(1)}\right)\Delta-\frac{\sigma_2\Delta^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{3}}\left(k_2+a_2\mathbf{y}_k^{(1)}\right)\zeta_1^{(2)}+\sigma_2\sqrt{\Delta}\zeta_0^{(2)}$$

$$+a_2\sigma_1\mathbf{y}_k^{(1)}\frac{\Delta^{\frac{3}{2}}}{2}\left(\zeta_0^{(1)}-\frac{1}{\sqrt{3}}\zeta_1^{(1)}\right)+\frac{\sigma_2^2\Delta}{2}\left(\left(\zeta_0^{(2)}\right)^2-1\right)+\frac{\sigma_2^3\Delta^{\frac{3}{2}}}{6}\left(\left(\zeta_0^{(2)}\right)^3-3\zeta_0^{(2)}\right)\Biggr],$$

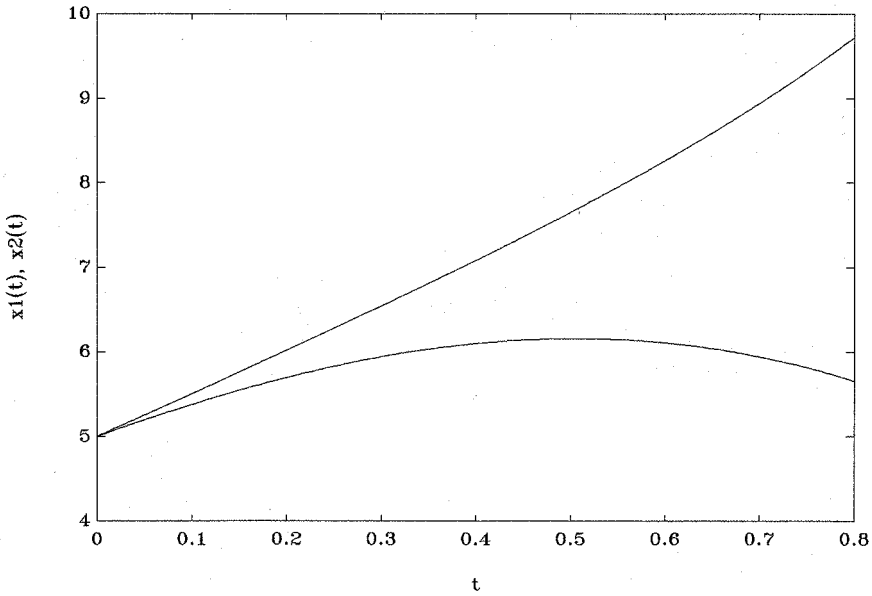

Рис.14.19. Модель Лотки–Вольтерра второго порядка при $k_1 = 2.0,\ k_2 = 2.3,\ a_1 = -0.2,\ a_2 = -0.3,$ $\sigma_1 = \sigma_2 = 0.0.$

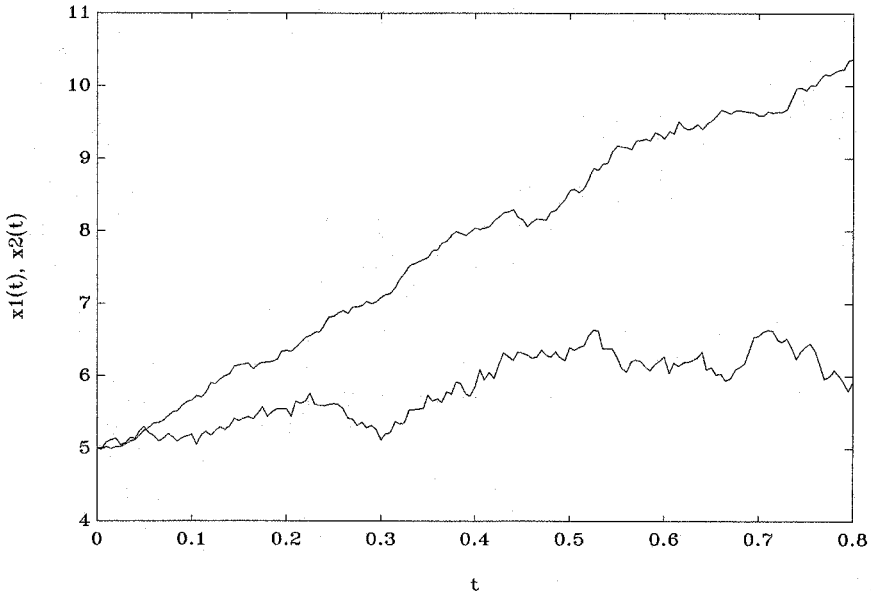

Рис.14.20. Модель Лотки–Вольтерра второго порядка при $k_1 = 2.0,\ k_2 = 2.3,\ a_1 = -0.2,\ a_2 = -0.3,$ $\sigma_1 = 0.1,\ \sigma_2 = 0.2.$

где так же, как и в предыдущем разделе, $\mathbf{y}_{k\Delta}^{(i)} \stackrel{\text{def}}{=} \mathbf{y}_k^{(i)};\ i = 1,\ 2;\ \Delta$ — шаг интегрирования; $\zeta_0^{(i)},\ \zeta_1^{(i)};\ i = 1,\ 2$ — независимые в совокупности стандартные гауссовские случайные величины, которые независимы с аналогичными случайными величинами, генерируемыми на всех предыдущих шагах интегрирования относительно текущего шага.

Смоделируем решение системы (14.8) при следующих исходных данных: $k_1 = 2.0,\ k_2 = 2.3,\ a_1 = -0.2, a_2 = -0.3,\ \mathbf{x}_0^{(1)} = \mathbf{x}_0^{(2)} = 5,\ \sigma_1 = 0.0,$ $\sigma_2 = 0.0,\ \Delta = 5 \cdot 10^{-3},\ t \in [0, 0.8]$. Результат численного моделирования представлен на рис.14.19.

Введем стохастическое возмущение, т. е. положим $\sigma_1 = 0.1,\ \sigma_2 = 0.2$ и повторим моделирование системы (14.8), сохранив исходные данные прежними. На рис.14.20 показано поведение обеих компонент решения системы (14.8) во времени.

14.4 Численное моделирование динамики доходности портфеля ценных бумаг

В финансовой математике наряду с многочисленными математическими моделями встречается модель динамики доходности портфеля ценных бумаг, которую можно представить в виде системы стохастических дифференциальных уравнений Ито:

$$d\begin{bmatrix} \mathbf{x}_t^{(1)} \\ \vdots \\ \mathbf{x}_t^{(n)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{m}^{(1)} \\ \vdots \\ \mathbf{m}^{(n)} \end{bmatrix} dt + e^{\frac{\gamma}{n}\sum\limits_{i=1}^{n} \mathbf{x}_t^{(i)}} \begin{bmatrix} B^{(11)} & \dots & B^{(1m)} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ B^{(n1)} & \dots & B^{(nm)} \end{bmatrix} d\begin{bmatrix} \mathbf{f}_t^{(1)} \\ \vdots \\ \mathbf{f}_t^{(m)} \end{bmatrix}, \qquad (14.9)$$

где $\mathbf{x}_t^{(i)}$ — доходность i-й ценной бумаги; $\mathbf{m}^{(i)}$ — средняя доходность i-й ценной бумаги; γ — эмпирический коэффициент; $\frac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n} \mathbf{x}_t^{(i)}$ — средняя доходность по множеству ценных бумаг; $\left\| B^{(ij)} \right\|_{i,j=1}^{n,m}$ — числовая матрица, характеризующая перемешивание; $\mathbf{f}_t^{(i)}$ $(i = 1, \dots, m)$ — независимые стандартные винеровские процессы.

Рассмотрим модель вида (14.9) при $n = 2$:

$$d\begin{bmatrix} \mathbf{x}_t^{(1)} \\ \mathbf{x}_t^{(2)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{m}^{(1)} \\ \mathbf{m}^{(2)} \end{bmatrix} dt + e^{\frac{\gamma}{2}\left(\mathbf{x}_t^{(1)} + \mathbf{x}_t^{(2)}\right)} \begin{bmatrix} B^{(11)} & B^{(12)} \\ B^{(21)} & B^{(22)} \end{bmatrix} d\begin{bmatrix} \mathbf{f}_t^{(1)} \\ \mathbf{f}_t^{(2)} \end{bmatrix}. \qquad (14.10)$$

Пример 14.1. *Метод Г.Н. Мильштейна для системы* (14.10) *при постоянном шаге интегрирования* Δ *имеет вид*

$$\mathbf{y}_{k+1}^{(1)} = \mathbf{y}_k^{(1)} + \mathbf{m}^{(1)}\Delta + e^{\frac{\gamma}{2}\left(\mathbf{y}_k^{(1)} + \mathbf{y}_k^{(2)}\right)} \left(B^{(11)} I_{0_{\tau_{k+1},\tau_k}}^{(1)} + B^{(12)} I_{0_{\tau_{k+1},\tau_k}}^{(2)} \right) +$$

$$+ \frac{\gamma}{2} e^{\gamma\left(\mathbf{y}_k^{(1)} + \mathbf{y}_k^{(2)}\right)} \Bigg[B^{(11)} \left(B^{(11)} + B^{(21)} \right) \frac{1}{2} \left(\left(I_{0_{\tau_{k+1},\tau_k}}^{(1)} \right)^2 - \Delta \right) +$$

$$+ B^{(11)} \left(B^{(12)} + B^{(22)} \right) I_{00_{\tau_{k+1},\tau_k}}^{(21)q} + B^{(12)} \left(B^{(11)} + B^{(21)} \right) I_{00_{\tau_{k+1},\tau_k}}^{(12)q} +$$

$$+B^{(12)}\left(B^{(12)}+B^{(22)}\right)\frac{1}{2}\left(\left(I^{(2)}_{0_{\tau_{k+1},\tau_k}}\right)^2-\Delta\right)\Bigg], \qquad (14.11)$$

$$\mathbf{y}^{(2)}_{k+1}=\mathbf{y}^{(2)}_k+\mathbf{m}^{(2)}\Delta+e^{\frac{\gamma}{2}\left(\mathbf{y}^{(1)}_k+\mathbf{y}^{(2)}_k\right)}\left(B^{(21)}I^{(1)}_{0_{\tau_{k+1},\tau_k}}+B^{(22)}I^{(2)}_{0_{\tau_{k+1},\tau_k}}\right)+$$
$$+\frac{\gamma}{2}e^{\gamma\left(\mathbf{y}^{(1)}_k+\mathbf{y}^{(2)}_k\right)}\Bigg[B^{(21)}\left(B^{(11)}+B^{(21)}\right)\frac{1}{2}\left(\left(I^{(1)}_{0_{\tau_{k+1},\tau_k}}\right)^2-\Delta\right)+$$
$$+B^{(21)}\left(B^{(12)}+B^{(22)}\right)I^{(21)q}_{00_{\tau_{k+1},\tau_k}}+B^{(22)}\left(B^{(11)}+B^{(21)}\right)I^{(12)q}_{00_{\tau_{k+1},\tau_k}}+$$
$$+B^{(22)}\left(B^{(12)}+B^{(22)}\right)\frac{1}{2}\left(\left(I^{(2)}_{0_{\tau_{k+1},\tau_k}}\right)^2-\Delta\right)\Bigg], \qquad (14.12)$$

где сохранен смысл введенных ранее обозначений.

В формулах (14.11), (14.12) аппроксимации повторных стохастических интегралов Ито выражаются соотношениями (см. главу 6)

$$I^{(1)}_{0_{\tau_{k+1},\tau_k}}=\sqrt{\Delta}\zeta^{(1)}_0,\ \ I^{(2)}_{0_{\tau_{k+1},\tau_k}}=\sqrt{\Delta}\zeta^{(2)}_0, \qquad (14.13)$$

$$I^{(21)q}_{00_{\tau_{k+1},\tau_k}}=\frac{1}{2}\Delta\left[\zeta^{(1)}_0\zeta^{(2)}_0+\sum_{r=1}^{q}\frac{1}{\sqrt{4r^2-1}}\left(\zeta^{(2)}_{r-1}\zeta^{(1)}_r-\zeta^{(2)}_r\zeta^{(1)}_{r-1}\right)\right], \qquad (14.14)$$

$$I^{(12)q}_{00_{\tau_{k+1},\tau_k}}=\frac{1}{2}\Delta\left[\zeta^{(2)}_0\zeta^{(1)}_0+\sum_{r=1}^{q}\frac{1}{\sqrt{4r^2-1}}\left(\zeta^{(1)}_{r-1}\zeta^{(2)}_r-\zeta^{(1)}_r\zeta^{(2)}_{r-1}\right)\right], \qquad (14.15)$$

где $\zeta^{(i)}_j$; $j=0,\ 1,\ldots,q$; $i=1,\ 2$ — независимые в совокупности стандартные гауссовские случайные величины.

Число q в (14.14), (14.15), необходимо выбирать из условия (см. главу 6)

$$\frac{\Delta^2}{2}\left(\frac{1}{2}-\sum_{r=1}^{q}\frac{1}{4r^2-1}\right)\le C\Delta^3, \qquad (14.16)$$

где постоянная C входит в условие (7.22) при $r=2$ теоремы 7.2.

Следует отметить, что на k-м шаге интегрирования система случайных величин $\zeta^{(i)}_j$; $j=0,\ 1,\ldots,q$; $i=1,\ 2$ в (14.14), (14.15) должна генерироваться независимой относительно аналогичных систем случайных величин, генерируемых на всех предшествующих шагах интегрирования с номерами $1,\ 2,\ldots,k-1$.

Выполним численное моделирование решения системы (14.10) с помощью метода Г.Н. Мильштейна (14.11), (14.12) и соотношений (14.13), (14.14), (14.15) при следующих исходных данных: $B^{(11)}=0.5$, $B^{(22)}=1.2$, $B^{(12)}=B^{(21)}=0$, $q=10$, $\mathbf{m}^{(1)}=-1$, $\mathbf{m}^{(2)}=-15$, $\mathbf{x}^{(1)}_0=3$, $\mathbf{x}^{(2)}_0=5$, $\gamma=0.3$ (здесь и далее в настоящем разделе $\Delta=2^{-10}$, число итераций

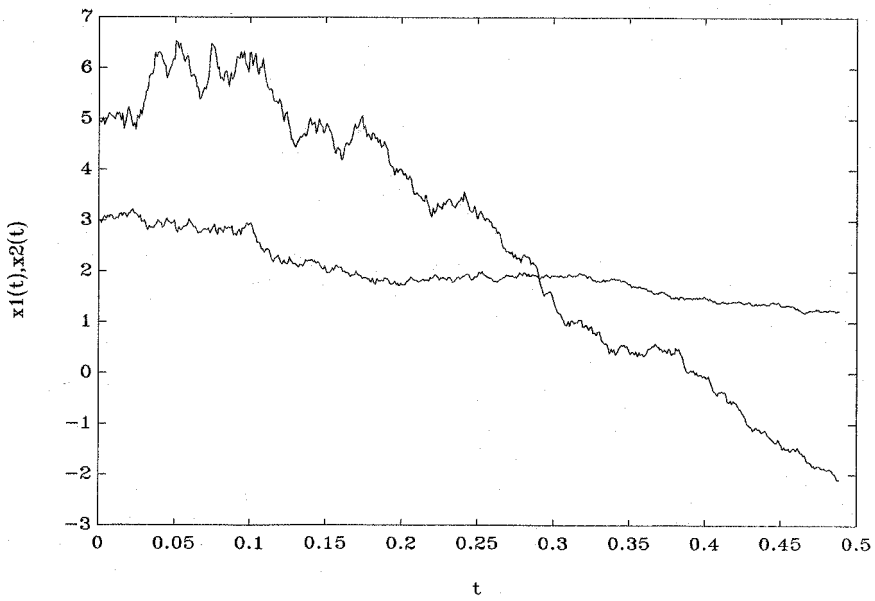

Рис.14.21. Моделирование решения системы (14.10) при $B^{(11)} = 0.5$, $B^{(22)} = 1.2$, $B^{(12)} = B^{(21)} = 0$, $q = 10$, $\mathbf{m}^{(1)} = -1$, $\mathbf{m}^{(2)} = -15$, $\mathbf{x}_0^{(1)} = 3$, $\mathbf{x}_0^{(2)} = 5$, $\gamma = 0.3$.

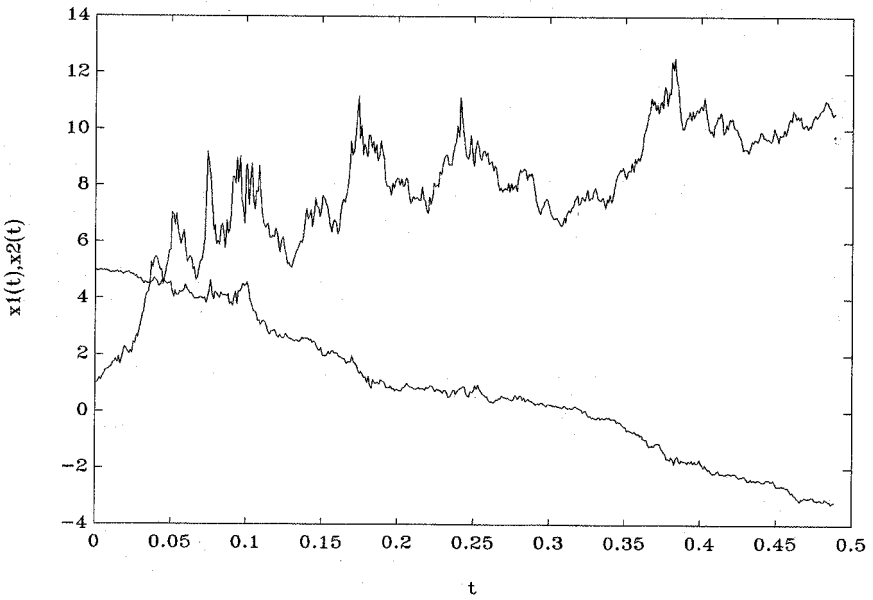

Рис.14.22. Моделирование решения системы (14.10) при $B^{(11)} = 0.1$, $B^{(22)} = 0.4$, $B^{(12)} = B^{(21)} = 0$, $q = 10$, $\mathbf{m}^{(1)} = -10$, $\mathbf{m}^{(2)} = 40$, $\mathbf{x}_0^{(1)} = 5$, $\mathbf{x}_0^{(2)} = 1$, $\gamma = 0.7$.

$N = 500$). Результат численного моделирования представлен на рис. 14.21. На этом рисунке видна тенденция к уменьшению доходности ценных бумаг. Повторим численное моделирование системы уравнений (14.10) при $B^{(11)} = 0.1$, $B^{(22)} = 0.4$, $B^{(12)} = B^{(21)} = 0$,

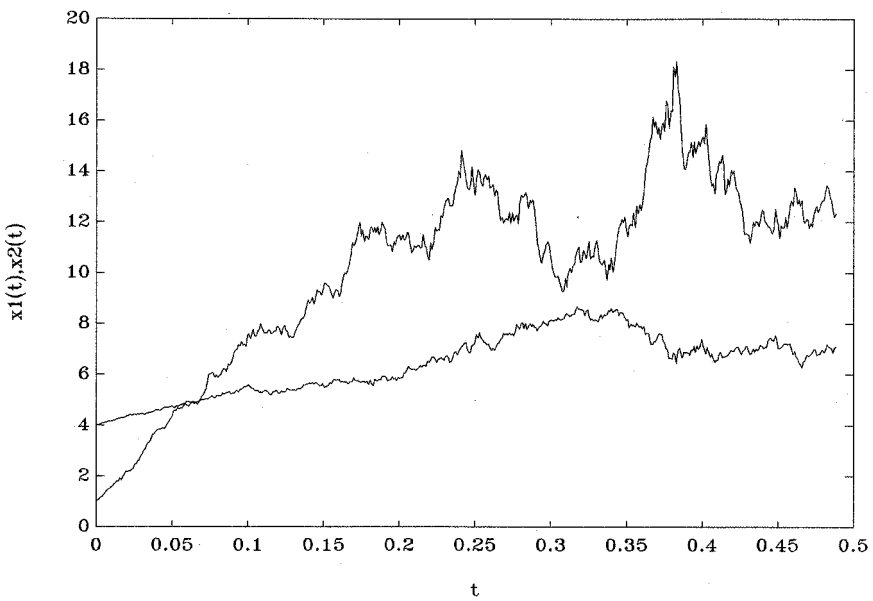

Рис.14.23. Моделирование решения системы (14.10) при $B^{(11)} = 0.2$, $B^{(22)} = 0.6$, $B^{(12)} = B^{(21)} = 0$, $q = 10$, $\mathbf{m}^{(1)} = 15$, $\mathbf{m}^{(2)} = 50$, $\mathbf{x}_0^{(1)} = 4$, $\mathbf{x}_0^{(2)} = 1$, $\gamma = 0.3$.

$q = 10$, $\mathbf{m}^{(1)} = -10$, $\mathbf{m}^{(2)} = 40$, $\mathbf{x}_0^{(1)} = 5$, $\mathbf{x}_0^{(2)} = 1$, $\gamma = 0.7$. На рис.14.22 отражена динамика системы (14.10) при этих начальных данных.

Положим теперь $B^{(11)} = 0.2$, $B^{(22)} = 0.6$, $B^{(12)} = B^{(21)} = 0$, $q = 10$, $\mathbf{m}^{(1)} = 15$, $\mathbf{m}^{(2)} = 50$, $\mathbf{x}_0^{(1)} = 4$, $\mathbf{x}_0^{(2)} = 1$, $\gamma = 0.3$. Результат численного моделирования системы (14.10) при этих условиях приведен на рис. 14.23. По нему можно проследить тенденцию к росту доходности ценных бумаг.

Во всех трех рассмотренных случаях численного моделирования решения системы (14.10) выбиралась одна и та же реализация последовательности случайных величин $\zeta_j^{(i)}$; $j = 0, 1, \ldots, q; i = 1, 2$.

14.5 Численное исследование влияния стохастического возмущения на систему уравнений Рёсслера

Рассмотрим систему уравнений Рёсслера со стохастическим возмущением в виде следующей системы стохастических дифференциальных уравнений Ито:

$$d\begin{bmatrix} \mathbf{x}_t^{(1)} \\ \mathbf{x}_t^{(2)} \\ \mathbf{x}_t^{(3)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\mathbf{x}_t^{(2)} - \mathbf{x}_t^{(3)} \\ \mathbf{x}_t^{(1)} + e\mathbf{x}_t^{(2)} \\ f + \mathbf{x}_t^{(1)}\mathbf{x}_t^{(3)} - \mu\mathbf{x}_t^{(3)} \end{bmatrix} dt + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -c\mathbf{x}_t^{(3)} \end{bmatrix} d\mathbf{f}_t^{(1)}, \qquad (14.17)$$

где $\mathbf{x}_t^{(1)}$, $\mathbf{x}_t^{(2)}$, $\mathbf{x}_t^{(3)} \in \Re^1$ — компоненты решения $\mathbf{x}_t \in \Re^3$ системы (14.17); $\mathbf{f}_t^{(1)} \in \Re^1$ — стандартный винеровский процесс; e, f, μ, c — параметры.

В главе 4 были приведены унифицированные разложения Тейлора–Ито (4.109)–(4.111) для компонент решения $\mathbf{x}_t$ системы (14.17) до малых $O\left((s-t)^{5/2}\right)$. Положим в этих разложениях $s = (k+1)\Delta$, $t = k\Delta$; $k = 0,\ 1, \ldots$. Отбросим в них остаточные члены и аппроксимируем повторные стохастические интегралы Ито, входящие в эти разложения, с помощью методов, изложенных в главе 6. В результате получим следующие выражения для численного метода, основанного на представлениях (4.109)–(4.111):

$$\mathbf{y}_{k+1}^{(1)} = \mathbf{y}_k^{(1)} + \Delta\left(-\mathbf{y}_k^{(2)} - \mathbf{y}_k^{(3)}\right) + c\mathbf{y}_k^{(3)}\left[\Delta I_{0_{\tau_{k+1},\tau_k}}^{(1)} + I_{1_{\tau_{k+1},\tau_k}}^{(1)}\right] +$$
$$+\frac{\Delta^2}{2}\left[\mu\mathbf{y}_k^{(3)} - \mathbf{y}_k^{(1)} - e\mathbf{y}_k^{(2)} - f - \mathbf{y}_k^{(1)}\mathbf{y}_k^{(3)}\right] - c^2\mathbf{y}_k^{(3)}\left[I_{01_{\tau_{k+1},\tau_k}}^{(11)q} + \Delta I_{00_{\tau_{k+1},\tau_k}}^{(11)}\right], \tag{14.18}$$

$$\mathbf{y}_{k+1}^{(2)} = \mathbf{y}_k^{(2)} + \Delta\left(\mathbf{y}_k^{(1)} + e\mathbf{y}_k^{(2)}\right) + \frac{\Delta^2}{2}\left[-\mathbf{y}_k^{(2)} - \mathbf{y}_k^{(3)} + e\left(\mathbf{y}_k^{(1)} + e\mathbf{y}_k^{(2)}\right)\right], \tag{14.19}$$

$$\mathbf{y}_{k+1}^{(3)} = \mathbf{y}_k^{(3)} - c\mathbf{y}_k^{(3)} I_{0_{\tau_{k+1},\tau_k}}^{(1)} + \Delta\left(f + \mathbf{y}_k^{(1)}\mathbf{y}_k^{(3)} - \mu\mathbf{y}_k^{(3)}\right) +$$
$$+c^2\mathbf{y}_k^{(3)} I_{00_{\tau_{k+1},\tau_k}}^{(11)} + c\mathbf{y}_k^{(3)}\left(\mu - \mathbf{y}_k^{(1)}\right)\left[\Delta I_{0_{\tau_{k+1},\tau_k}}^{(1)} + I_{1_{\tau_{k+1},\tau_k}}^{(1)}\right] +$$
$$+c\left(f + \mathbf{y}_k^{(1)}\mathbf{y}_k^{(3)} - \mu\mathbf{y}_k^{(3)}\right) I_{1_{\tau_{k+1},\tau_k}}^{(1)} - c^3\mathbf{y}_k^{(3)} I_{000_{\tau_{k+1},\tau_k}}^{(111)} +$$
$$+\frac{\Delta^2}{2}\left[\left(-\mathbf{y}_k^{(2)} - \mathbf{y}_k^{(3)}\right)\mathbf{y}_k^{(3)} + \left(f + \mathbf{y}_k^{(1)}\mathbf{y}_k^{(3)} - \mu\mathbf{y}_k^{(3)}\right)\left(\mathbf{y}_k^{(1)} - \mu\right)\right] +$$
$$+c^2\mathbf{y}_k^{(3)}\left(\mathbf{y}_k^{(1)} - \mu\right)\left[I_{10_{\tau_{k+1},\tau_k}}^{(11)q} - I_{01_{\tau_{k+1},\tau_k}}^{(11)q}\right] - c^2\left(f + \mathbf{y}_k^{(1)}\mathbf{y}_k^{(3)} - \mu\mathbf{y}_k^{(3)}\right) I_{10_{\tau_{k+1},\tau_k}}^{(11)q}$$
$$-c^2\mathbf{y}_k^{(3)}\left(\mu - \mathbf{y}_k^{(1)}\right)\left[I_{01_{\tau_{k+1},\tau_k}}^{(11)q} + \Delta I_{00_{\tau_{k+1},\tau_k}}^{(11)}\right] + c^4\mathbf{y}_k^{(3)} I_{0000_{\tau_{k+1},\tau_k}}^{(1111)}, \tag{14.20}$$

где

$$I_{0_{\tau_{k+1},\tau_k}}^{(1)} = \sqrt{\Delta}\zeta_0;\ I_{00_{\tau_{k+1},\tau_k}}^{(11)} = \frac{1}{2}\Delta\left[(\zeta_0)^2 - 1\right];$$

$$I_{1_{\tau_{k+1},\tau_k}}^{(1)} = -\frac{\Delta^{\frac{3}{2}}}{2}\left[\zeta_0 + \frac{1}{\sqrt{3}}\zeta_1\right];\ I_{000_{\tau_{k+1},\tau_k}}^{(111)} = \frac{\Delta^{\frac{3}{2}}}{6}\left[(\zeta_0)^3 - 3\zeta_0\right];$$

$$I_{0000_{\tau_{k+1},\tau_k}}^{(1111)} = \frac{\Delta^2}{24}\left[(\zeta_0)^4 - 6(\zeta_0)^2 + 3\right];$$

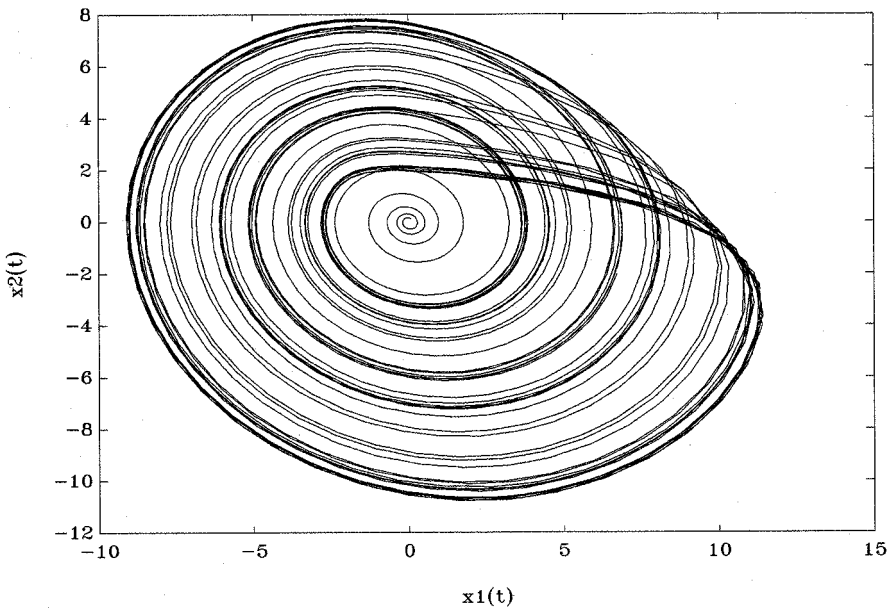

Рис.14.30. Фазовый портрет системы уравнений Рёсслера при $c = 0.0,\ e = f = 0.2,\ \mu = 5.7$.

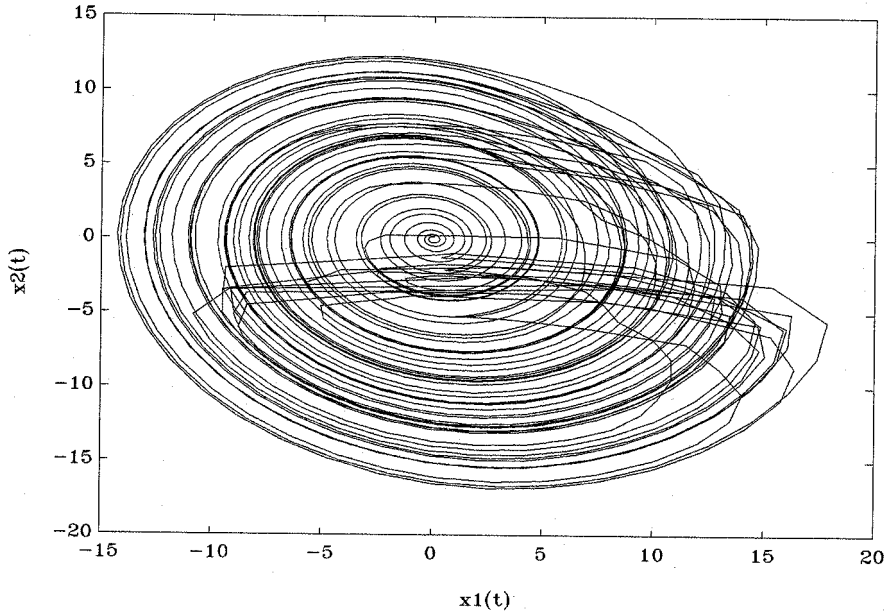

Рис.14.31. Фазовый портрет системы уравнений Рёсслера со стохастическим возмущением при $c = 2.0$, $e = f = 0.2,\ \mu = 5.7$.

$$I^{(11)q}_{01_{\tau_{k+1},\tau_k}} = -\frac{\Delta^2}{4}\Bigg[(\zeta_0)^2 + \frac{1}{\sqrt{3}}\zeta_0\zeta_1 +$$

$$+\sum_{i=0}^{q}\Bigg\{\frac{1}{\sqrt{(2i+1)(2i+5)}(2i+3)}\zeta_i\zeta_{i+2} - \frac{1}{(2i-1)(2i+3)}(\zeta_i)^2\Bigg\} - 2\Bigg];$$

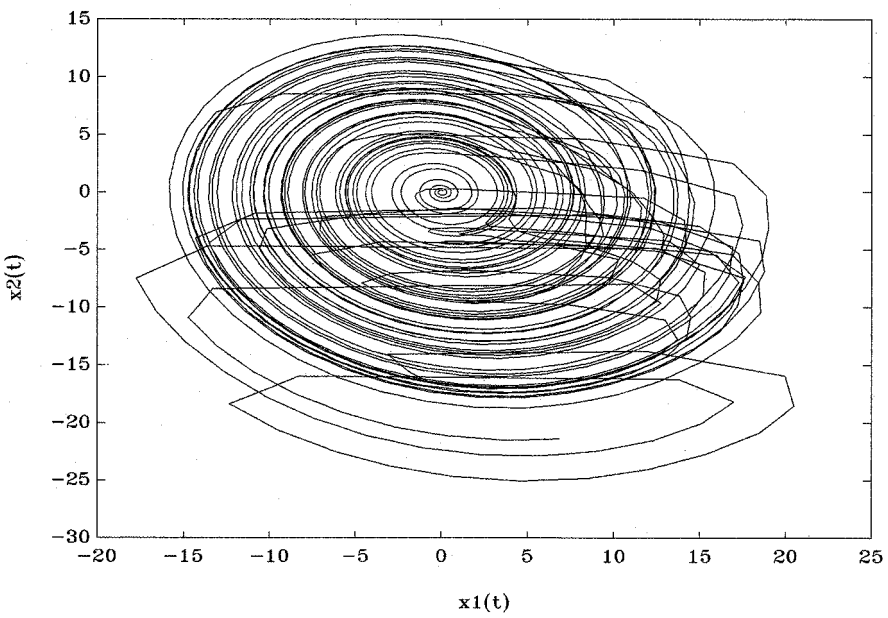

Рис.14.32. Фазовый портрет системы уравнений Рёсслера со стохастическим возмущением при $c = 2.5$, $e = f = 0.2$, $\mu = 5.7$.

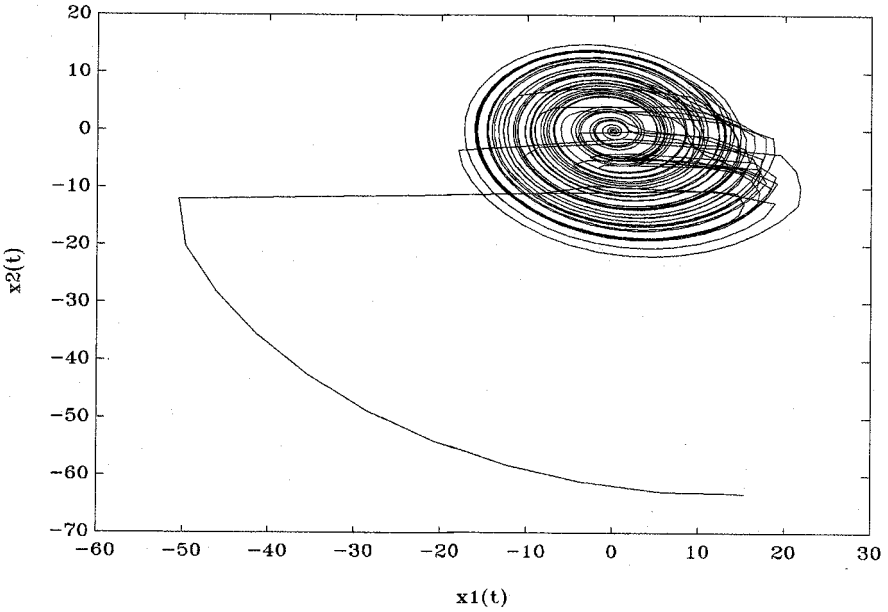

Рис.14.33. Фазовый портрет системы уравнений Рёсслера со стохастическим возмущением при $c = 2.9$, $e = f = 0.2$, $\mu = 5.7$.

$$I_{10_{\tau_{k+1},\tau_k}}^{(11)q} = -\frac{\Delta^2}{2}\zeta_0\left(\zeta_0 + \frac{1}{\sqrt{3}}\zeta_1\right) + \frac{\Delta^2}{2} - I_{01_{\tau_{k+1},\tau_k}}^{(11)q}; \qquad (14.21)$$

$\tau_k = k\Delta$; $\mathbf{y}_{\tau_k}^{(i)} \stackrel{\text{def}}{=} \mathbf{y}_k^{(i)}$ $(i = 1,\ 2,\ 3)$; ζ_j; $i = 0,\ 1, \ldots, q+2$ — система неза-

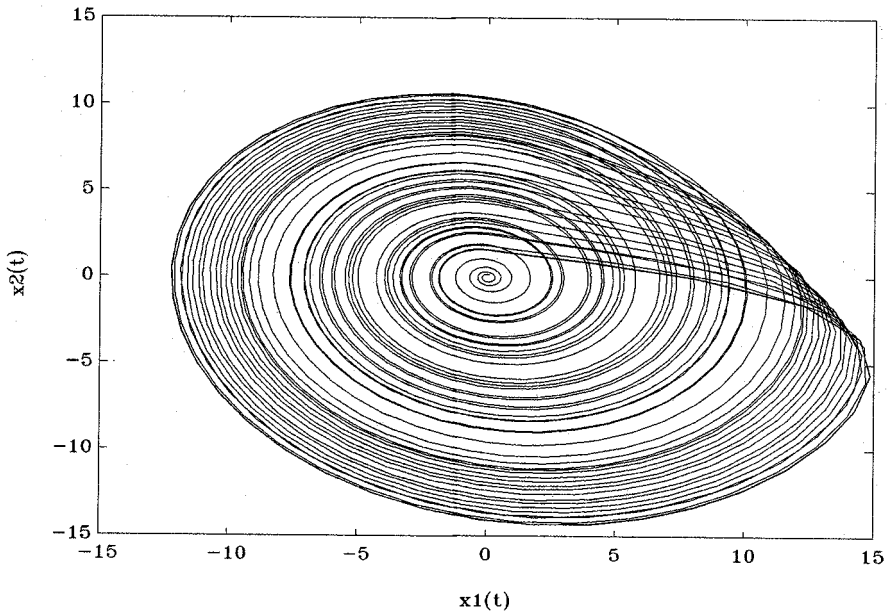

Рис.14.34. Фазовый портрет системы уравнений Рёсслера при $c = 0.0$, $e = 0.19$, $f = 0.4$, $\mu = 8.5$.

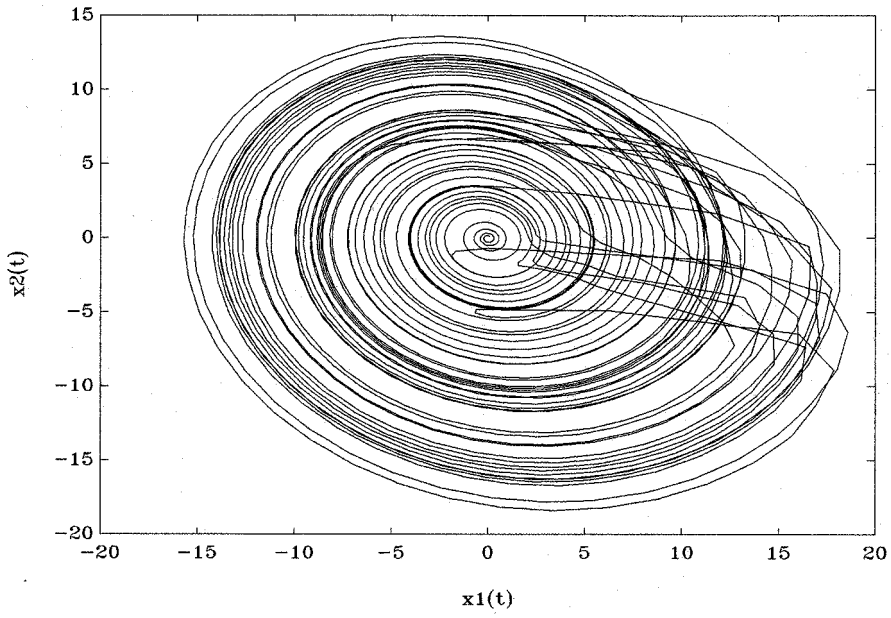

Рис.14.35. Фазовый портрет системы уравнений Рёсслера со стохастическим возмущением при $c = 2.0$, $e = 0.19$, $f = 0.4$, $\mu = 8.5$.

висимых стандартных гауссовских случайных величин, которая генерируется на k-м шаге интегрирования и является независимой с аналогичными системами случайных величин, которые генерируются на всех предшествующих шагах интегрирования; число q выбирается (см.главу 6) из условия

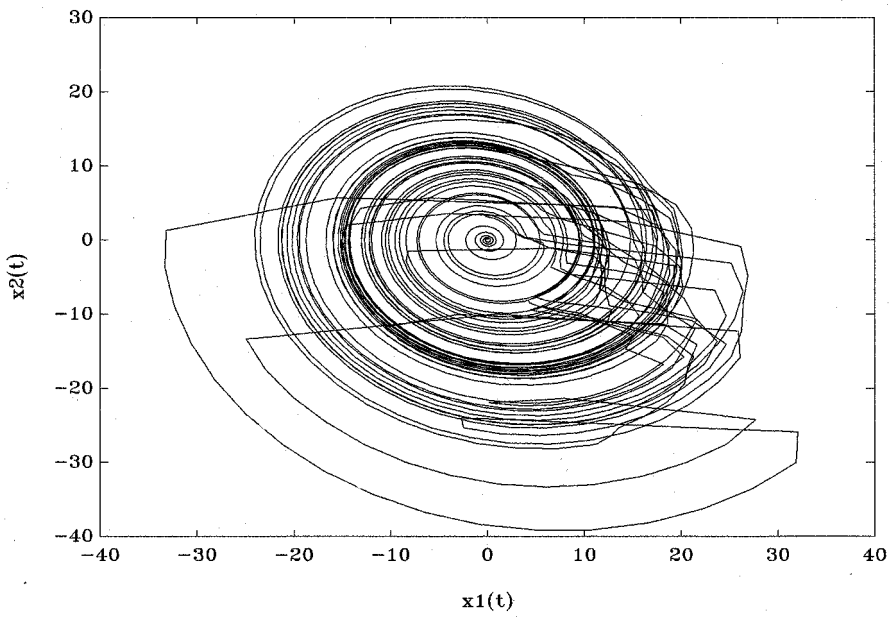

Рис.14.36. Фазовый портрет системы уравнений Рёсслера со стохастическим возмущением при $c = 3.77$, $e = 0.19$, $f = 0.4$, $\mu = 8.5$.

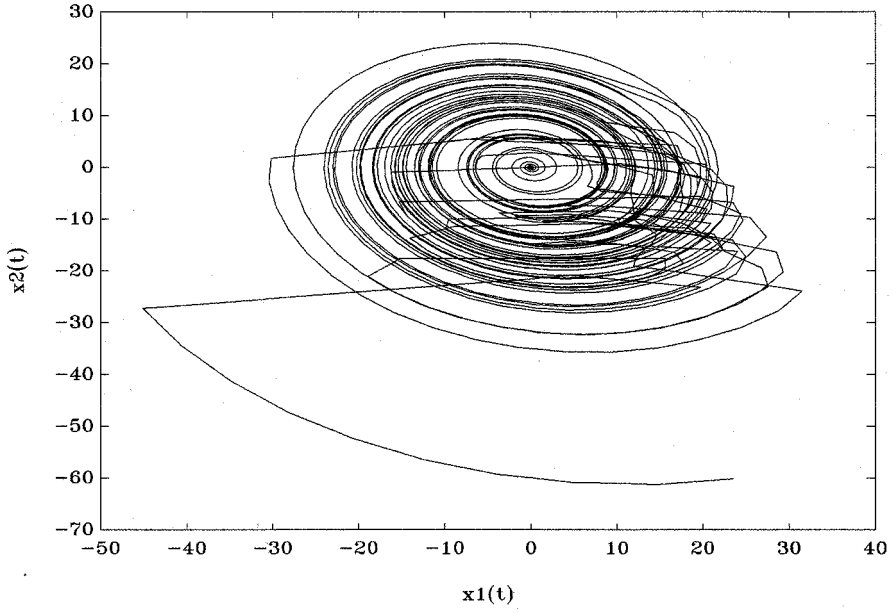

Рис.14.37. Фазовый портрет системы уравнений Рёсслера со стохастическим возмущением при $c = 3.775$, $e = 0.19$, $f = 0.4$, $\mu = 8.5$.

$$\frac{\Delta^4}{16}\left(\frac{1}{9} - \sum_{i=0}^{q} \frac{1}{(2i+1)(2i+5)(2i+3)^2} - 2\sum_{i=1}^{q} \frac{1}{(2i-1)^2(2i+3)^2}\right) \le C\Delta^5,$$

где постоянная C входит в условие (7.22) теоремы 7.2 при $r = 5$.

Следует отметить, что соотношение (14.21) вытекает из равенства

$$I^{(11)}_{10_{\tau_{k+1},\tau_k}} + I^{(11)}_{01_{\tau_{k+1},\tau_k}} - \frac{\Delta^2}{2} = I^{(1)}_{0_{\tau_{k+1},\tau_k}} I^{(1)}_{1_{\tau_{k+1},\tau_k}} \text{ с в.1},$$

которое может быть получено, например, с помощью теоремы о замене порядка интегрирования (см. главу 3) или по формуле Ито.

Положим $c = 0.0$, $e = f = 0.2$, $\mu = 5.7$, $\mathbf{x}_0^{(1)} = \mathbf{x}_0^{(2)} = \mathbf{x}_0^{(3)} = 0.1$. Результат численного моделирования системы (14.17) в этом случае на промежутке $t \in [0, 300]$ с шагом интегрирования $\Delta = 0.03$ приведен на фазовой плоскости $\left(\mathbf{x}^{(1)}(t), \mathbf{x}^{(2)}(t)\right)$ (рис.14.30).

На рис.14.30 представлен аттрактор Рёсслера, названный им "слоистым". Как известно [34], этот аттрактор возникает в результате последовательности бифуркаций периода, которая начинается при $\mu = 3.50$ [34] и при $\mu = 4.20$ [34] приводит к появлению аттрактора.

Увеличим параметр c и выполним численное моделирование системы (14.17) с помощью соотношений (14.18)–(14.20) при $q = 2$ и $c = 2.0,\ 2.5,\ 2.9$, сохранив при этом значения остальных параметров. На рис.14.31–14.33 представлены соответствующие фазовые траектории системы (14.17) на фазовой плоскости $\left(\mathbf{x}_t^{(1)}, \mathbf{x}_t^{(2)}\right)$. На этих рисунках с ростом c прослеживается тенденция к уходу фазовых траекторий из области притяжения аттрактора, которая заканчивается этим уходом при достижении c значения 2.9.

При изменении значений $e,\ f,\ \mu$ внешний вид аттрактора меняется. Так, при $e = 0.19,\ f = 0.4,\ \mu = 8.5,\ c = 0.0$ проекция аттрактора на плоскость $\left(\mathbf{x}^{(1)}(t), \mathbf{x}^{(2)}(t)\right)$ изображена на рис.14.34. На рис.14.35–14.37 показаны фазовые траектории системы (14.17) при тех же значениях параметров $e,\ f,\ \mu$ и $c = 2.0,\ 3.77,\ 3.775$ соответственно. На этих рисунках с ростом c также заметна тенденция к уходу фазовых траекторий из области притяжения аттрактора, которая завершается им при достижении c значения 3.775.

Отметим, что при построении рис.14.31–14.33, 14.35–14.37 бралась одна и та же реализация последовательности гауссовских случайных величин ζ_j; $j = 0, 1, \ldots, q$.

Глава 15

Примеры применения сильных численных методов решения стохастических дифференциальных уравнений к численному решению математических задач

В данной главе приведены примеры численного решения математических задач с помощью численных методов из глав 7–9.

15.1 Тестирование процедур оценивания параметров

Отметим, что существует ряд работ (см., например, [92]), в которых исследовалась проблема оценки параметров в коэффициенте сноса диффузионных процессов, которые наблюдаются непрерывно. При этом получены явные выражения для функции правдоподобия. На практике часто диффузионный процесс наблюдается только в дискретные моменты времени. Явные представления для функции правдоподобия известны в этой ситуации только в достаточно редких случаях.

Простой способ получения процедур оценивания параметров при дискретном наблюдении заключается в аппроксимации, на основе дискретизации по времени, известных процедур оценивания параметров при непрерывном наблюдении (см., например, [86, 87, 92]).

15.1.1 Двухмерная линейная модель

В настоящем разделе проиллюстрируем приложение сильных численных методов к тестированию процедур оценивания параметров на примере двухмерного процесса Ито, описываемого следующим стохастическим дифференциальным уравнением Ито:

$$d\begin{bmatrix}\mathbf{x}_t^{(1)}\\ \mathbf{x}_t^{(2)}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & 1\\ -\theta_2 & -\theta_1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\mathbf{x}_t^{(1)}\\ \mathbf{x}_t^{(2)}\end{bmatrix}dt+\begin{bmatrix}0\\ c\end{bmatrix}df_t,\ \mathsf{M}\{\mathbf{x}_t^{(1)}\}=\mathsf{M}\{\mathbf{x}_t^{(2)}\}=0, \tag{15.1}$$

где $\theta_1, \theta_2; c>0$; $f_t\in\Re^1$ — стандартный винеровский процесс, который независим с $\mathbf{x}_0=(\mathbf{x}_0^{(1)}\ \mathbf{x}_0^{(2)})^{\mathsf{T}}$, $t\in[0,T]$; θ_1, θ_2 — неизвестные параметры, подлежащие определению на основе наблюдений за процессом $\mathbf{x}_t=(\mathbf{x}_t^{(1)}\ \mathbf{x}_t^{(2)})^{\mathsf{T}}$ на промежутке $[0,T]$.

Приближенные решения уравнения правдоподобия для θ_1, θ_2 из (15.1) имеют вид [31]

$$\hat{\theta}_{1,T}=-\int\limits_0^T\mathbf{x}_t^{(2)}d\mathbf{x}_t^{(2)}\Big/\int\limits_0^T\left(\mathbf{x}_t^{(2)}\right)^2dt, \tag{15.2}$$

$$\hat{\theta}_{2,T}=\int\limits_0^T\left(\mathbf{x}_t^{(2)}\right)^2dt\Big/\int\limits_0^T\left(\mathbf{x}_t^{(1)}\right)^2dt. \tag{15.3}$$

По формуле Ито

$$\int\limits_0^T\mathbf{x}_t^{(2)}d\mathbf{x}_t^{(2)}=\frac{1}{2}\left(\left(\mathbf{x}_T^{(2)}\right)^2-\left(\mathbf{x}_0^{(2)}\right)^2-c^2T\right)\ \text{с в.1.} \tag{15.4}$$

Подставляя (15.4) в (15.2), получаем

$$\hat{\theta}_{1,T}=-\frac{1}{2}\left(\left(\mathbf{x}_T^{(2)}\right)^2-\left(\mathbf{x}_0^{(2)}\right)^2-c^2T\right)\Big/\int\limits_0^T\left(\mathbf{x}_t^{(2)}\right)^2dt. \tag{15.5}$$

Заменяя стохастические интегралы в правых частях (15.3), (15.5) интегральными суммами имеем следующие процедуры оценивания параметров θ_1, θ_2:

$$\hat{\theta}_{1,T}^{\Delta}=-\left(\left(\mathbf{x}_T^{(2)}\right)^2-\left(\mathbf{x}_0^{(2)}\right)^2-c^2T\right)\Big/\sum_{k=0}^{N_T-1}\left(\left(\mathbf{x}_{k\Delta}^{(2)}\right)^2+\left(\mathbf{x}_{(k+1)\Delta}^{(2)}\right)^2\right)\Delta. \tag{15.6}$$

$$\hat{\theta}_{2,T}^{\Delta}=\sum_{k=0}^{N_T-1}\left(\left(\mathbf{x}_{k\Delta}^{(2)}\right)^2+\left(\mathbf{x}_{(k+1)\Delta}^{(2)}\right)^2\right)\Delta\Big/\sum_{k=0}^{N_T-1}\left(\left(\mathbf{x}_{k\Delta}^{(1)}\right)^2+\left(\mathbf{x}_{(k+1)\Delta}^{(1)}\right)^2\right)\Delta, \tag{15.7}$$

где $T=N_T\Delta$.

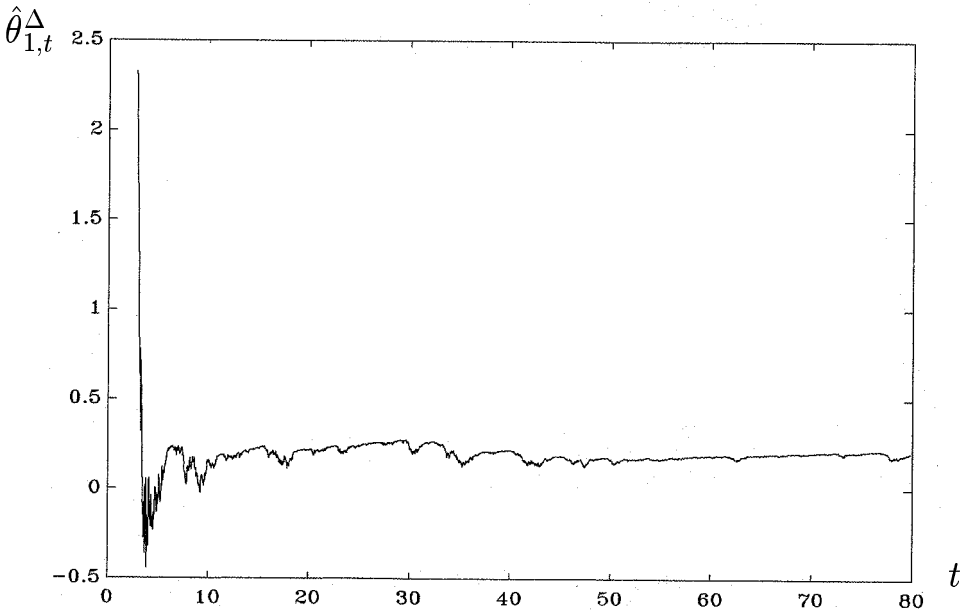

Рис.15.1. Результат численного эксперимента 15.1.

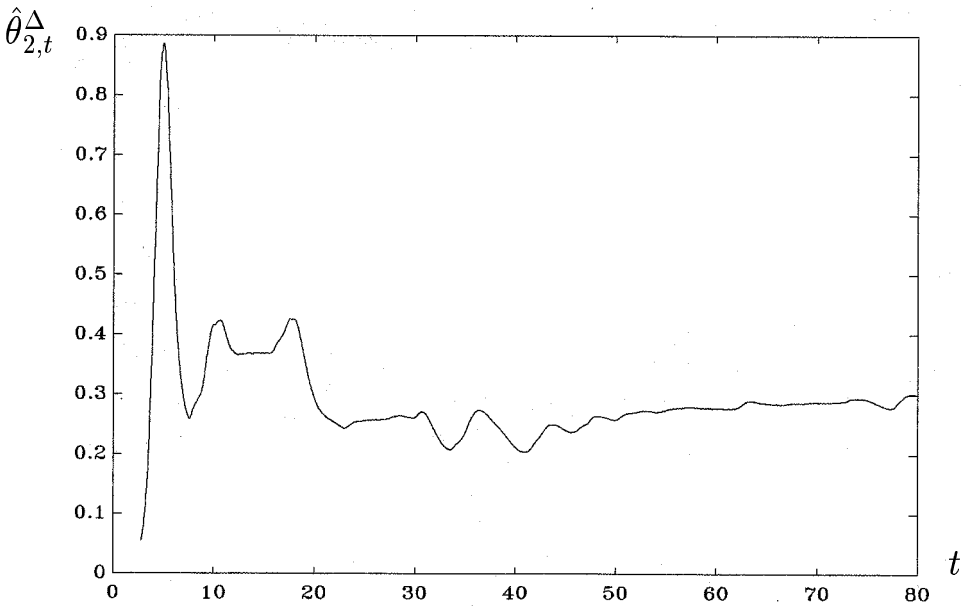

Рис.15.2. Результат численного эксперимента 15.1.

Численный эксперимент 15.1. *Смоделировать решение системы* (15.1) *при* $\theta_1 = 0.14$, $\theta_2 = 0.5661^2 \approx 0.3205$, $c = 5.08$, $\mathbf{x}_0^{(1)} = 7$, $\mathbf{x}_0^{(2)} = -0.25$ *на промежутке времени* $[0, T]$, $T = 80$, *с шагом* $\Delta = 4 \cdot 10^{-3}$, *пользуясь явным сильным методом Эйлера. Смоделировать процессы* $\hat{\theta}^{\Delta}_{1,k\Delta}$, $\hat{\theta}^{\Delta}_{2,k\Delta}$ $(k = 0, 1, \ldots, N_T)$, $N_T = 20000$, $\Delta = 4 \cdot 10^{-3}$, $\hat{\theta}^{\Delta}_{1,0} = 0$, $\hat{\theta}^{\Delta}_{2,0} = 0$, *с помощью формул* (15.6) *и* (15.7), *в которых* T *заменяется*

на $k\Delta$. Результат численного моделирования представить графически (рис. 15.1,15.2). *При этом следует выводить на графики каждую пятую точку, начиная с* 700*-й.*

Отметим, что тестирование процедур оценивания параметров случайных процессов, описываемых линейными стохастическими дифференциальными уравнениями Ито, рассматривалось в ряде работ (см., например, [86, 87, 92]). Однако формулы (15.6) и (15.7) не могут быть получены с помощью подхода, описанного в [87, 92], так как в этих работах предполагается, что матрица $D = \Sigma\Sigma^{\mathsf{T}}$ невырожденна (здесь Σ, как обычно, матрица, умножаемая на дифференциал винеровского процесса, в правой части стохастического дифференциального уравнения Ито).

15.1.2 Нелинейная одномерная модель

В [92] рассмотрена следующая математическая модель популяционной динамики:

$$dx_t = (\theta_1 x_t + \theta_2 x_t^2)dt + \sigma\sqrt{x_t}df_t, \tag{15.8}$$

где $\theta_1 = \alpha K$, $\theta_2 = -\alpha$; σ, α, K — параметры; f_t — стандартный винеровский процесс; параметр σ предполагается известным.

В [92] получены выражения для оценок $\hat{\theta}_{1,T}$, $\hat{\theta}_{2,T}$ максимального правдоподобия параметров θ_1, θ_2 :

$$\hat{\theta}_{1,T} = \Bigl((x_T - x_0)\int\limits_0^T x_t^3 dt - \int\limits_0^T x_t dx_t \int\limits_0^T x_t^2 dt\Bigr)/N_T =$$

$$= \Bigl((x_T - x_0)\int\limits_0^T x_t^3 dt - \frac{1}{2}\Bigl(x_T^2 - x_0^2 - \sigma^2\int\limits_0^T x_t dt\Bigr)\int\limits_0^T x_t^2 dt\Bigr)/N_T; \tag{15.9}$$

$$\hat{\theta}_{2,T} = \Bigl(\int\limits_0^T x_t dx_t \int\limits_0^T x_t dt - (x_T - x_0)\int\limits_0^T x_t^2 dt\Bigr)/N_T =$$

$$= \Bigl(\frac{1}{2}\Bigl(x_T^2 - x_0^2 - \sigma^2\int\limits_0^T x_t dt\Bigr)\int\limits_0^T x_t dt - (x_T - x_0)\int\limits_0^T x_t^2 dt\Bigr)/N_T, \tag{15.10}$$

где $N_T = \int\limits_0^T x_t dt \int\limits_0^T x_t^3 dt - \Bigl(\int\limits_0^T x_t^2 dt\Bigr)^2$.

Заменяя интегралы $\int\limits_0^T x_t^j dt$; $j = 1, 2, 3$ в формулах (15.9), (15.10) интегральными суммами $\frac{1}{2}\sum\limits_{k=0}^{N_T-1}\left((x_{k\Delta})^j + (x_{(k+1)\Delta})^j\right)\Delta \stackrel{\text{def}}{=} S_{j,T}^{\Delta}$; $j = 1, 2, 3$

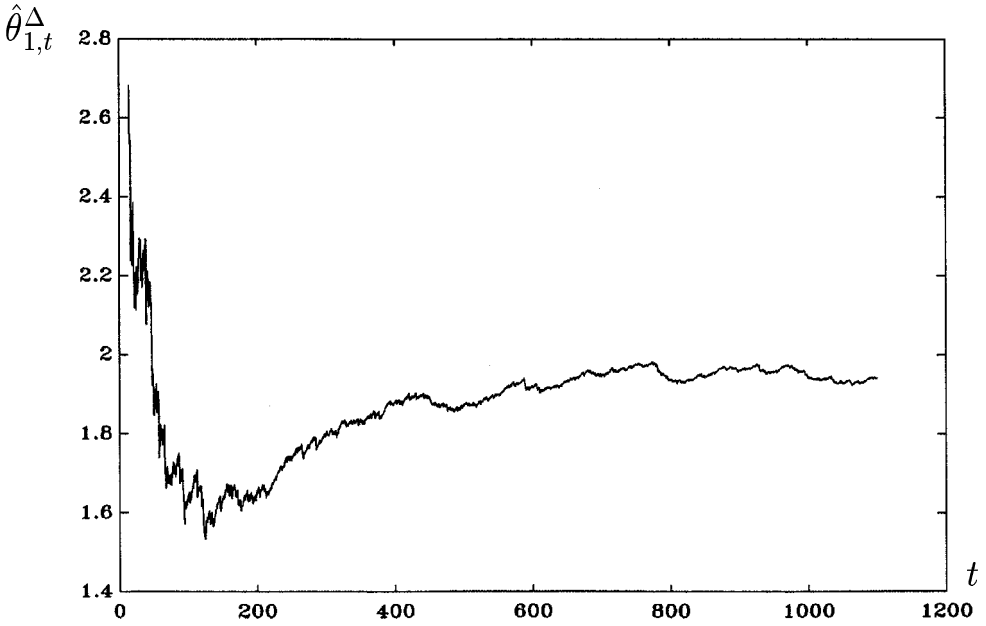

Рис.15.3. Результат численного эксперимента 15.2.

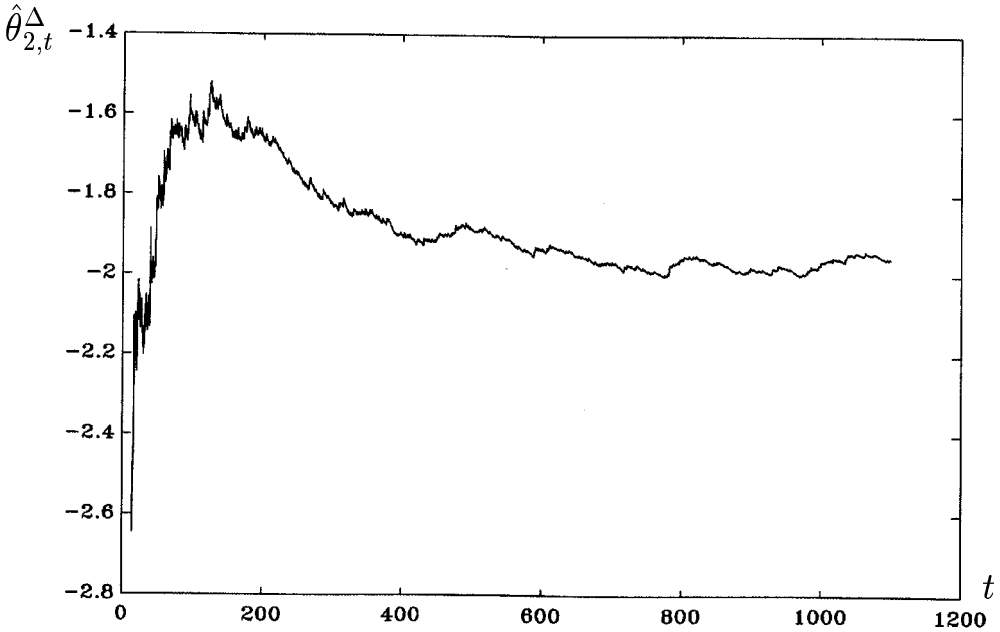

Рис.15.4. Результат численного эксперимента 15.2.

соответственно, получим [92] следующие процедуры оценивания параметров θ_1, θ_2 на основе дискретных данных $x_{k\Delta}$; $k = 0, 1, \ldots, N_T$; $T = N_T\Delta$:

$$\hat{\theta}^{\Delta}_{1,T} = \Big((x_T - x_0)S^{\Delta}_{3,T} - \frac{1}{2}(x_T^2 - x_0^2 - \sigma^2 S^{\Delta}_{1,T})S^{\Delta}_{2,T}\Big)/N^{\Delta}_T; \qquad (15.11)$$

$$\hat{\theta}_{2,T}^{\Delta} = \Big(\frac{1}{2}(x_T^2 - x_0^2 - \sigma^2 S_{1,T}^{\Delta})S_{1,T}^{\Delta} - (x_T - x_0)S_{2,T}^{\Delta}\Big)/N_T^{\Delta}, \qquad (15.12)$$

где $N_T^{\Delta} = S_{1,T}^{\Delta} S_{3,T}^{\Delta} - (S_{2,T}^{\Delta})^2$.

В [92] исследованы статистические свойства процедур (15.11), (15.12) оценивания параметров с использованием численного интегрирования стохастического дифференциального уравнения Ито (15.8) явным сильным численным методом типа Рунге–Кутта порядка точности 1.0. Повторим численный эксперимент из [92], используя метод (7.90), принадлежащий к этому же классу численных методов.

Численный эксперимент 15.2. *Смоделировать решение стохастического дифференциального уравнения Ито* (15.8) *при* $\theta_1 = 2$, $\theta_2 = -2$, $\sigma = 0.5$, $x_0 = 0.5$ *на промежутке времени* $[0, T]$, $T = 1100$, *с шагом* $\Delta = 2 \cdot 10^{-2}$, *пользуясь явным сильным конечно-разностным численным методом* (7.90), *по формуле:*

$$y_{p+1} = y_p + (\theta_1 y_p + \theta_2 y_p^2)\Delta + \sigma\sqrt{y_p^+}\sqrt{\Delta}\zeta_p +$$

$$+\frac{\sigma\sqrt{\Delta}}{4}(\zeta_p^2 - 1)\Big(\sqrt{\Big(y_p + 2\sqrt{\Delta}\sigma\sqrt{y_p^+}\Big)^+} - \sqrt{y_p^+}\Big), \qquad (15.13)$$

где $y_{p\Delta} \stackrel{\text{def}}{=} y_p$; $x^+ = x$ *при* $x \geq 0$ *и* $x^+ = 0$ *при* $x < 0$; ζ_p $(p = 0, 1, \ldots, N_T - 1)$ — *независимые стандартные гауссовские случайные величины. Смоделировать процессы* $\hat{\theta}_{1,k\Delta}^{\Delta}$, $\hat{\theta}_{2,k\Delta}^{\Delta}$ $(k = 0, 1, \ldots, N_T)$, $N_T = 55000$, $\Delta = 2 \cdot 10^{-2}$, $\hat{\theta}_{1,0}^{\Delta} = 0$, $\hat{\theta}_{2,0}^{\Delta} = 0$, *с помощью формул* (15.11), (15.12), *в которых* T *заменяется на* $k\Delta$. *Результат численного моделирования представить графически* (рис.15.3, 15.4). *При этом выводить на графики каждую пятнадцатую точку, начиная с* 700-*й.*

Отметим, что выбор конечно-разностного метода типа Рунге–Кутта для численного решения стохастического дифференциального уравнения Ито (15.8) обусловлен тем, что производная $\sqrt{x}$ при малых x принимает большие значения, что ведет к численной неустойчивости (правая часть (15.13) не содержит производных).

Результаты, приведенные на рис.15.3, 15.4, близки к соответствующим численным результатам работы [92].

15.2 Фильтрация марковской цепи с конечным числом состояний

Цель настоящего раздела — приложение сильных численных методов решения стохастических дифференциальных уравнений Ито к

фильтрации марковских цепей с конечным числом состояний. При изложении мы основываемся на монографиях [86, 87].

Пусть заданы вероятностное пространство $(\Omega, \mathcal{F}, \mathsf{P})$ с потоком σ-алгебр $\mathcal{F}_t$, $t \in [0,T]$, процесс состояния η_t, $t \in [0,T]$, который является однородной марковской цепью с непрерывным временем и пространством состояний $Y = \{y_1, \ldots, y_n\}$, $n < \infty$; столбец вероятностей $p(t)$ с компонентами $p^{(i)}(t) = \mathsf{P}\{\eta_t = y_i\}$; $i = 1, \ldots, n$, удовлетворяющий уравнению

$$dp/dt = Ap$$

(здесь $A \in \Re^{n \times n}$ — матрица интенсивности).

Предположим, что наблюдаемый m-мерный процесс $\mathbf{w}_t$, $t \in [0,T]$ определяется равенством

$$\mathbf{w}_t = \int\limits_0^t \mathbf{a}(\eta_\tau) d\tau + \mathbf{f}_t, \tag{15.14}$$

где $\mathbf{f}_t$, $t \in [0,T]$ $(\mathbf{f}_0 = 0)$ — $\mathcal{F}_t$-измеримый при всех $t \in [0,T]$ m-мерный стандартный винеровский процесс с независимыми компонентами относительно вероятностной меры P, в свою очередь независимый с процессом η_t, $t \in [0,T]$, при этом $\mathbf{a}(\mathbf{x}) : Y \to \Re^m$. Далее через $\mathcal{F}_t^{\mathbf{w}}$ будем обозначать σ-алгебру, порожденную процессом $\mathbf{w}_\tau$, $\tau \in [0,t]$.

Задача состоит в фильтрации процесса η_t, $t \in [0,T]$ на основе наблюдаемого процесса $\mathbf{w}_t$, $t \in [0,T]$ вида (15.14).

Для удобства с помощью преобразования Гирсанова (см. главу 1) введем новую вероятностную меру $\tilde{\mathsf{P}}$:

$$\frac{d\tilde{\mathsf{P}}}{d\mathsf{P}} = (Q_T)^{-1}, \; Q_T = e^{-\frac{1}{2}\int\limits_0^T |\mathbf{a}(\xi_\tau)|^2 d\tau + \int\limits_0^T \mathbf{a}(\xi_\tau)^1 d\mathbf{w}_\tau}.$$

При этом процесс $\mathbf{w}_t$, $t \in [0,T]$ является винеровским относительно вероятностной меры $\tilde{\mathsf{P}}$.

Согласно формуле Каллианпура–Стрибел имеем

$$\mathsf{P}\{\eta_t = y_i | \mathcal{F}_t^{\mathbf{w}}\} = \mathsf{M}_{\mathsf{P}}\{\mathbf{1}_{\{\eta_t = y_i\}} | \mathcal{F}_t^{\mathbf{w}}\} = \mathbf{x}_t^{(i)} / \sum_{i=1}^n \mathbf{x}_t^{(i)}$$

для всех $y_i \in Y$; $t \in [0,T]$, где $\mathbf{x}_t = (\mathbf{x}_t^{(1)} \ldots \mathbf{x}_t^{(n)})^{\mathsf{T}}$ — столбец с компонентами $\mathbf{x}_t^{(i)} = \mathsf{M}_{\tilde{\mathsf{P}}}\{\mathbf{1}_{\{\eta_t = y_i\}} Q_t | \mathcal{F}_t^{\mathbf{w}}\}$, который удовлетворяет стохастическому дифференциальному уравнению Ито вида

$$d\mathbf{x}_t = A\mathbf{x}_t dt + \sum_{i=1}^m G_i \mathbf{x}_t d\mathbf{w}_t^{(i)}, \; \mathbf{x}_0 = p(0), \; t \in [0,T], \tag{15.15}$$

где $G_i = \mathrm{diag}\{\mathbf{a}^{(i)}(y_j)\}_{j=1}^n$; $i = 1, \ldots, m$, называемому уравнением Закаи. Здесь $\mathsf{M}_{\mathsf{P}}\{\cdot|\mathcal{F}_t^{\mathbf{w}}\}$, $\mathsf{M}_{\tilde{\mathsf{P}}}\{\cdot|\mathcal{F}_t^{\mathbf{w}}\}$ — условные математические ожидания относительно вероятностных мер P и $\tilde{\mathsf{P}}$ соответственно.

Оптимальная оценка для $g(\eta_t)$ ($g : Y \to \Re^1$, $\mathsf{M}_{\mathsf{P}}\{|g(\eta_t)|^2\} < \infty$ при всех $t \in [0, T]$) по методу наименьших квадратов, полученная на основе наблюдаемого процесса $\mathbf{w}_s$, $s \in [0, t]$ определяется равенством

$$F_{t,g} = \mathsf{M}_{\mathsf{P}}\{g(\eta_t)|\mathcal{F}_t^{\mathbf{w}}\} = \sum_{i=1}^n g(y_i)\mathbf{x}_t^{(i)} / \sum_{i=1}^n \mathbf{x}_t^{(i)}. \tag{15.16}$$

Оценка $F_{t,g}$ вида (15.16) называется оптимальным фильтром марковской цепи.

Очевидно, что для реализации фильтра (15.16) необходимо численно интегрировать уравнение Закаи (15.15). Это можно сделать, например, с помощью численных методов, обсуждаемых в данной книге.

Отметим, что на практике, как правило, возможно наблюдать реализацию не всего процесса $\mathbf{w}_t$, $t \in [0, T]$, а лишь его некоторых интегральных характеристик, полученных по результатам наблюдений на небольших временных интервалах. Эти интегральные характеристики можно интерпретировать как повторные стохастические интегралы Ито относительно вероятностной меры $\tilde{\mathsf{P}}$. В частности, в наиболее простом случае это могут быть приращения вида $\int\limits_{\tau_{i-1}}^{\tau_i} d\mathbf{w}_s^{(j)}$; $i = 1, 2, \ldots$; $\tau_i = i\Delta$; $j = 1, \ldots, m$.

Используя полученную по результатам наблюдений информацию о процессе $\mathbf{w}_t$, $t \in [0, T]$ можно конструировать приближенные фильтры

$$\hat{F}_{\tau_p,g}^{\Delta} = \sum_{i=1}^n g(y_i)\mathbf{y}_{\tau_p}^{(i)} / \sum_{i=1}^n \mathbf{y}_{\tau_p}^{(i)};\ p = 0, 1, \ldots, N, \tag{15.17}$$

где $\mathbf{y}_{\tau_p}$; $p = 0, 1, \ldots, N$ — дискретная аппроксимация решения $\mathbf{x}_t$, $t \in [0, T]$ уравнения (15.15), которая соответствует максимальному шагу дискретизации Δ.

Определение 15.1 [86]. *Приближенный фильтр* $\hat{F}_{\tau_p,g}^{\Delta}$; $p = 0, 1, \ldots, N$, *соответствующий максимальному шагу дискретизации* Δ, *называется сходящимся на временном интервале* $[0, T]$ *с порядком* $\gamma > 0$ *к оптимальному фильтру* $F_{t,g}$, $t \in [0, T]$ *для заданной функции* g, *если существуют постоянная* $C < \infty$, *которая не зависит от* Δ, *и число* $\Delta_0 \in (0, 1)$ *такие, что* $\mathsf{M}_{\mathsf{P}}\left\{\left|F_{\tau_p,g} - \hat{F}_{\tau_p,g}^{\Delta}\right|\right\} \le C\Delta^{\gamma}$ *для всех* $\Delta \in (0, \Delta_0)$ *и* $\tau_p \in [0, T]$.

В [86] отмечается, что можно показать сходимость приближенного фильтра $\hat{F}_{\tau_p,g}^{\Delta}$; $p = 0, 1, \ldots, N$ на временном интервале $[0, T]$ с порядком

$\gamma > 0$ к оптимальному фильтру $F_{t,g}$, $t \in [0,T]$ для заданной ограниченной функции g, если дискретная аппроксимация $\mathbf{y}_{\tau_p}$; $p = 0, 1, \ldots, N$ сходится сильно с тем же порядком $\gamma > 0$ к решению $\mathbf{x}_t$, $t \in [0,T]$ уравнения Закаи (15.15). В частности, при $\gamma = 0.5$ и $\gamma = 1.0$ этот результат получен в [171–173].

В работах [86, 87, 171–173] рассмотрен ряд явных и неявных приближенных фильтров порядка точности 0.5, 1.0, 1.5 и 2.0 для случаев $m = 1$ и $m > 1$.

Далее приводим лишь небольшую часть упомянутых приближенных фильтров для случая $m > 1$. При этом будем использовать сильные численные схемы решения уравнения Закаи (15.15), основанные на разложении Тейлора–Стратоновича.

Явные сильные методы Эйлера и Г.Н. Мильштейна, основанные на разложении Тейлора–Стратоновича и примененные к уравнению Закаи (15.15), имеют соответственно следующий вид [87]:

$$\mathbf{y}_{\tau_{p+1}} = (I + A\Delta + S_p)\,\mathbf{y}_{\tau_p}, \tag{15.18}$$

$$\mathbf{y}_{\tau_{p+1}} = \left(I + \bar{A}\Delta + S_p\left(I + \frac{1}{2}S_p\right)\right)\mathbf{y}_{\tau_p}, \tag{15.19}$$

где $\mathbf{y}_0 = \mathbf{x}_0$; $I \in \Re^{n\times n}$ — единичная матрица;

$$S_p = \sum_{i=1}^{m} G_i \int\limits_{\tau_p}^{\tau_{p+1}} d\mathbf{w}_s^{(i)},\ \ \bar{A} = A - \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{m}(G_i)^2.$$

Отметим, что в силу специальной мультипликативной структуры уравнения Закаи (15.15) для реализации численных схем (15.18), (15.19) достаточно информации о процессе $\mathbf{w}_t$, $t \in [0,T]$ которая содержится в σ-алгебре $\hat{\mathcal{F}}_N^{1.0}$, порожденной приращениями $\int\limits_{\tau_{p-1}}^{\tau_p} d\mathbf{w}_s^{(i)}$; $p = 1, 2, \ldots, N$; $i = 1, \ldots, m$.

Обозначим через $\hat{\mathcal{F}}_N^{1.5}$ σ-алгебру, состоящую из σ-алгебры $\hat{\mathcal{F}}_N^{1.0}$ и σ-алгебры, порожденной интегральными наблюдениями:

$$J_{(10)\tau_p,\tau_{p-1}}^{(i)} = \int\limits_{\tau_{p-1}}^{\tau_p}\int\limits_{\tau_{p-1}}^{s} d\mathbf{w}_\tau^{(i)} ds;\ p = 1, 2, \ldots, N;\ i = 1, \ldots, m.$$

Информации, содержащейся в σ-алгебре $\hat{\mathcal{F}}_N^{1.5}$, достаточно для реализации численного метода [87]

$$\mathbf{y}_{\tau_{p+1}} = \Bigg(I + \bar{A}\Delta + S_p + \frac{\Delta^2}{2}A^2 + AR_p - R_pA +$$

$$+S_p\bar{A}\Delta+\frac{1}{2}(S_p)^2+\frac{1}{6}(S_p)^3\Bigg)\mathbf{y}_{\tau_p};\ \ R_p=\sum_{i=1}^{m}G_iJ^{(i)}_{(10)\tau_{p+1},\tau_p}, \tag{15.20}$$

являющегося результатом применения явной сильной одношаговой численной схемы порядка точности 1.5 к уравнению Закаи (15.15); в (15.20) сохранен смысл обозначений, введенных в (15.18), (15.19).

Для реализации явной сильной одношаговой численной схемы порядка точности 2.0, примененной к уравнению Закаи (15.15), достаточно информации о процессе $\mathbf{w}_t$, $t\in[0,T]$, содержащейся в σ-алгебре $\hat{\mathcal{F}}_N^{2.0}$, состоящей из σ-алгебры $\hat{\mathcal{F}}_N^{1.5}$ и σ-алгебры, порожденной следующими повторными стохастическими интегралами Стратоновича:

$$J^{*(i_1i_2)}_{(110)\tau_{p+1},\tau_p}=\int\limits_{\tau_p}^{*\tau_{p+1}}\int\limits_{\tau_p}^{*s}\int\limits_{\tau_p}^{*\theta}d\mathbf{w}_u^{(i_1)}d\mathbf{w}_\theta^{(i_2)}ds,$$

$$J^{*(i_1i_2)}_{(101)\tau_{p+1},\tau_p}=\int\limits_{\tau_p}^{*\tau_{p+1}}\int\limits_{\tau_p}^{*s}\int\limits_{\tau_p}^{*\theta}d\mathbf{w}_u^{(i_1)}d\theta d\mathbf{w}_s^{(i_2)};$$

$p=0,1,\ldots,N-1$; $i_1,i_2=1,\ldots,m$. Соответствующая численная схема имеет вид [87]

$$\mathbf{y}_{\tau_{p+1}}=\Bigg(I+\bar{A}\Delta\left(I+\frac{1}{2}\bar{A}\Delta\right)-R_p\bar{A}+\bar{A}R_p+$$

$$+S_p\left(I+\bar{A}\Delta+\frac{1}{2}S_p\left(I+\frac{1}{3}S_p\left(I+\frac{1}{4}S_p\right)\right)\right)+$$

$$+\sum_{i_1,i_2=1}^{m}\Bigg(\bar{A}G_{i_2}G_{i_1}J^{*(i_1i_2)}_{(110)\tau_{p+1},\tau_p}+G_{i_2}\bar{A}G_{i_1}J^{*(i_1i_2)}_{(101)\tau_{p+1},\tau_p}+$$

$$+G_{i_2}G_{i_1}\bar{A}\left(\Delta J^{*(i_1i_2)}_{(11)\tau_{p+1},\tau_p}-J^{*(i_1i_2)}_{(110)\tau_{p+1},\tau_p}-J^{*(i_1i_2)}_{(101)\tau_{p+1},\tau_p}\right)\Bigg)\mathbf{y}_{\tau_p}, \tag{15.21}$$

где сохранен смысл обозначений, введенных в (15.18)–(15.20),

$$J^{*(i_1i_2)}_{(11)\tau_{p+1},\tau_p}=\int\limits_{\tau_p}^{*\tau_{p+1}}\int\limits_{\tau_p}^{*s}d\mathbf{w}_\theta^{(i_1)}d\mathbf{w}_s^{(i_2)}.$$

Приведем иной вариант формулы (15.21), воспользовавшись повторными стохастическими интегралами Стратоновича $I^{*(i_1\ldots i_k)}_{l_1\ldots l_k\tau_{p+1},\tau_p}$:

$$\mathbf{y}_{\tau_{p+1}}=\Bigg(I+\bar{A}\Delta\left(I+\frac{1}{2}\bar{A}\Delta\right)-R_p\bar{A}+\bar{A}R_p+$$

$$+S_p\left(I+\bar{A}\Delta+\frac{1}{2}S_p\left(I+\frac{1}{3}S_p\left(I+\frac{1}{4}S_p\right)\right)\right)+$$
$$+\sum_{i_1,i_2=1}^{m}\left(\bar{A}G_{i_2}G_{i_1}\left(\Delta I^{*(i_1i_2)}_{00_{\tau_{p+1},\tau_p}}+I^{*(i_1i_2)}_{01_{\tau_{p+1},\tau_p}}\right)+\right.$$
$$\left.+G_{i_2}\bar{A}G_{i_1}\left(I^{*(i_1i_2)}_{10_{\tau_{p+1},\tau_p}}-I^{*(i_1i_2)}_{01_{\tau_{p+1},\tau_p}}\right)-G_{i_2}G_{i_1}\bar{A}I^{*(i_1i_2)}_{10_{\tau_{p+1},\tau_p}}\right)\right)\mathbf{y}_{\tau_p}, \qquad (15.22)$$

где

$$I^{*(i_1\ldots i_k)}_{l_1\ldots l_k\tau_{p+1},\tau_p}=\int\limits_{\tau_p}^{*\tau_{p+1}}(\tau_p-t_k)^{l_k}\ldots\int\limits_{\tau_p}^{*t_2}(\tau_p-t_1)^{l_1}d\mathbf{w}^{(i_1)}_{t_1}\ldots d\mathbf{w}^{(i_k)}_{t_k};$$

$$R_p=\sum_{i=1}^{m}G_i\left(\Delta I^{*(i)}_{0_{\tau_{p+1},\tau_p}}+I^{*(i)}_{1_{\tau_{p+1},\tau_p}}\right),\ S_p=\sum_{i=1}^{m}G_iI^{*(i)}_{0_{\tau_{p+1},\tau_p}}.$$

В [87] приведены также так называемые неявные приближенные фильтры, основанные на неявных сильных численных схемах. Там же отмечается, что эти фильтры ведут себя "лучше", чем фильтры, основанные на явных сильных численных методах, если интенсивность шумов в наблюдениях достаточно высока.

В заключение рассмотрим численные эксперименты, которые аналогичны соответствующим численным экспериментам из [86, 87] и иллюстрируют описанный подход.

Пусть $\eta_t,\ t\in[0,2]$ — так называемый телеграфный процесс, являющийся марковской цепью с непрерывным временем, пространством состояний $Y=\{-1,\ 1\}$ и матрицей интенсивности

$$A=\begin{pmatrix}-0.5 & 0.5\\ 0.5 & -0.5\end{pmatrix}.$$

Рассмотрим одну из возможных реализаций процесса η_t, $t\in[0,2]$ вида

$$\eta_t=\begin{cases}1 & \text{при } t\in[0,1),\\ -1 & \text{при } t\in[1,2].\end{cases} \qquad (15.23)$$

Пусть также

$$\mathbf{a}(\eta_t)=\begin{cases}10 & \text{при } \eta_t=1\\ 2 & \text{при } \eta_t=-1\end{cases},\quad g(x)\equiv x. \qquad (15.24)$$

В рамках сделанных предположений (15.17) имеет вид

$$\hat{F}^{\Delta}_{\tau_p,g}=\left(\mathbf{y}^{(2)}_{\tau_p}-\mathbf{y}^{(1)}_{\tau_p}\right)/\left(\mathbf{y}^{(2)}_{\tau_p}+\mathbf{y}^{(1)}_{\tau_p}\right);\ p=0,1,\ldots,N. \qquad (15.25)$$

Нетрудно видеть, что если существует $j\in\{0,1,\ldots,N\}$ такое, что

$\tau_j = 1$, то с учетом (15.24) с вероятностью 1 получаем

$$I^{*(1)}_{0_{\tau_{p+1},\tau_p}} = \mathbf{a}(\eta_{\tau_p})\Delta + \bar{I}^{*(1)}_{0_{\tau_{p+1},\tau_p}}, \tag{15.26}$$

$$I^{*(1)}_{1_{\tau_{p+1},\tau_p}} = -\mathbf{a}(\eta_{\tau_p})\frac{\Delta^2}{2} + \bar{I}^{*(1)}_{1_{\tau_{p+1},\tau_p}}, \tag{15.27}$$

$$I^{*(11)}_{01_{\tau_{p+1},\tau_p}} = \bar{I}^{*(11)}_{01_{\tau_{p+1},\tau_p}} - \mathbf{a}(\eta_{\tau_p})\left(\frac{\Delta^2}{2}\bar{I}^{*(1)}_{0_{\tau_{p+1},\tau_p}} + \frac{1}{2}\bar{I}^{*(1)}_{2_{\tau_{p+1},\tau_p}}\right) - \mathbf{a}^2(\eta_{\tau_p})\frac{\Delta^3}{3}, \tag{15.28}$$

где $\tau_p = p\Delta;\ p = 0, 1, \ldots, N$;

$$\bar{I}^{*(i_1\ldots i_k)}_{l_1\ldots l_k\tau_{p+1},\tau_p} = \int\limits_{\tau_p}^{*\tau_{p+1}} (\tau_p - t_k)^{l_k} \ldots \int\limits_{\tau_p}^{*t_2} (\tau_p - t_1)^{l_1} d\mathbf{f}^{(i_1)}_{t_1} \ldots d\mathbf{f}^{(i_k)}_{t_k}.$$

Кроме того, с вероятностью 1

$$I^{*(11)}_{00_{\tau_{p+1},\tau_p}} = \frac{1}{2}\left(I^{*(1)}_{0_{\tau_{p+1},\tau_p}}\right)^2,\ I^{*(11)}_{10_{\tau_{p+1},\tau_p}} = I^{*(1)}_{0_{\tau_{p+1},\tau_p}} I^{*(1)}_{1_{\tau_{p+1},\tau_p}} - I^{*(11)}_{01_{\tau_{p+1},\tau_p}}. \tag{15.29}$$

Для аппроксимации повторных стохастических интегралов $\bar{I}^{*(1)}_{0_{\tau_{p+1},\tau_p}}$, $\bar{I}^{*(1)}_{1_{\tau_{p+1},\tau_p}}$, $\bar{I}^{*(1)}_{2_{\tau_{p+1},\tau_p}}$, $\bar{I}^{*(11)}_{01_{\tau_{p+1},\tau_p}}$ воспользуемся формулами, полученными в главе 6:

$$\bar{I}^{*(1)}_{0_{\tau_{p+1},\tau_p}} = \sqrt{\Delta}\zeta_0,\ \bar{I}^{*(1)}_{1_{\tau_{p+1},\tau_p}} = -\frac{\Delta^{3/2}}{2}\left(\zeta_0 + \frac{1}{\sqrt{3}}\zeta_1\right), \tag{15.30}$$

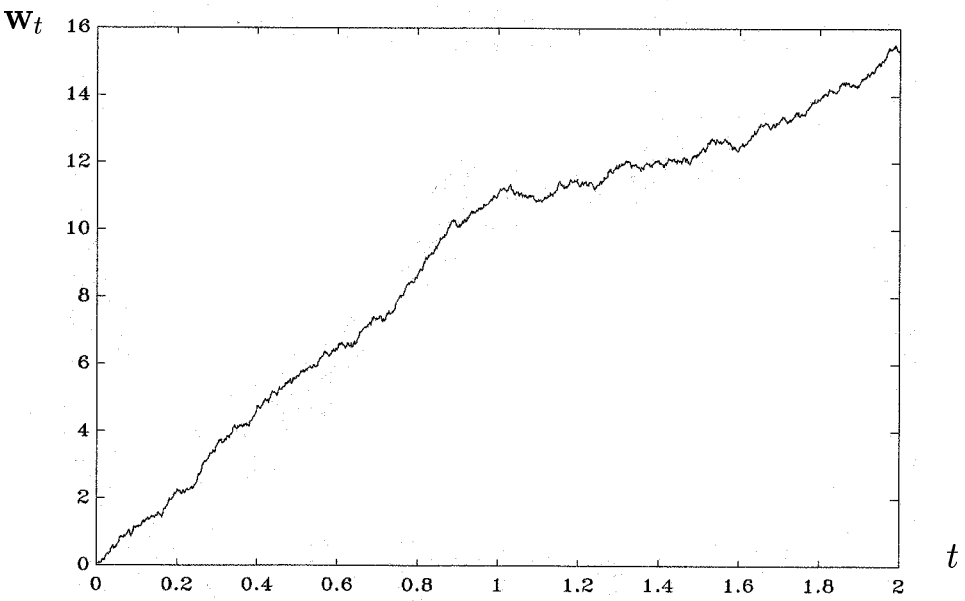

Рис.15.5. Результат численного эксперимента 15.3.

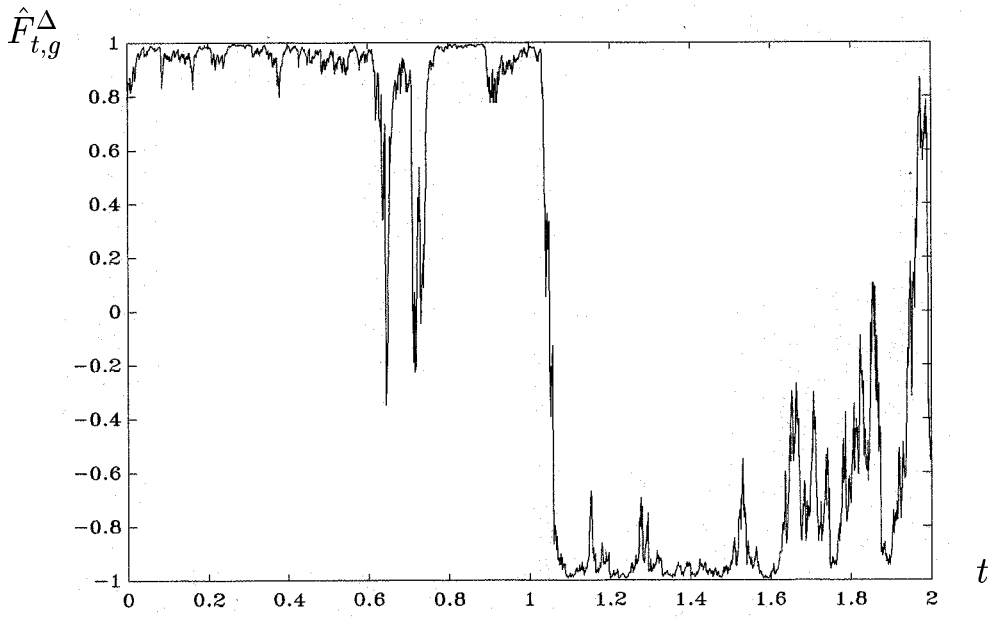

Рис.15.6. Результат численного эксперимента 15.4 (метод Эйлера).

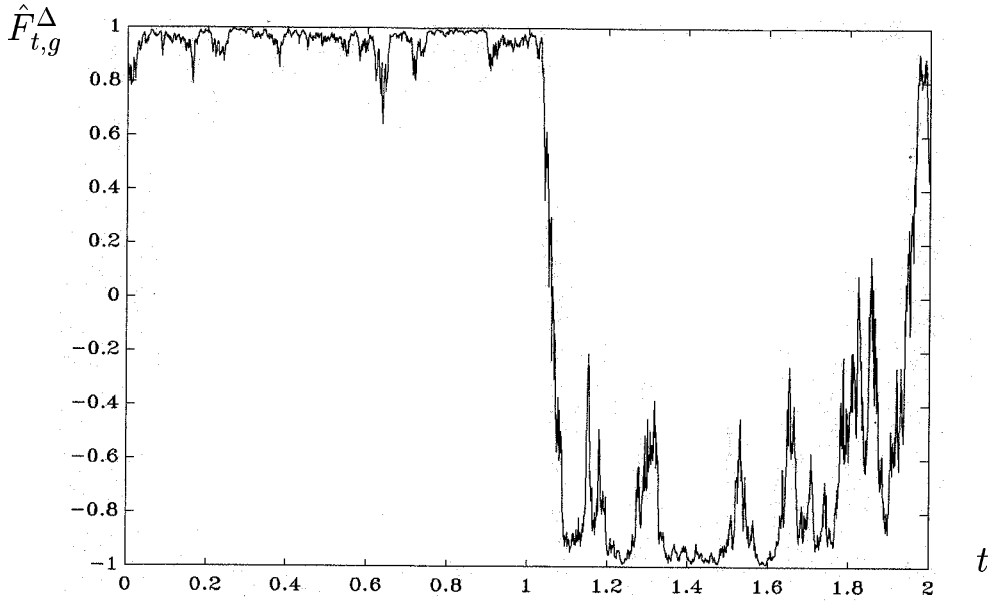

Рис.15.7. Результат численного эксперимента 15.4 (метод Г.Н. Мильштейна).

$$\bar{I}^{*(1)}_{2_{\tau_{p+1},\tau_p}} = \frac{\Delta^{5/2}}{3}\Big(\zeta_0 + \frac{\sqrt{3}}{2}\zeta_1 + \frac{1}{2\sqrt{5}}\zeta_2\Big), \tag{15.31}$$

$$\bar{I}^{*(11)q}_{01_{\tau_{p+1},\tau_p}} = -\frac{\Delta^2}{4}\Big((\zeta_0)^2 + \frac{1}{\sqrt{3}}\zeta_0\zeta_1 +$$

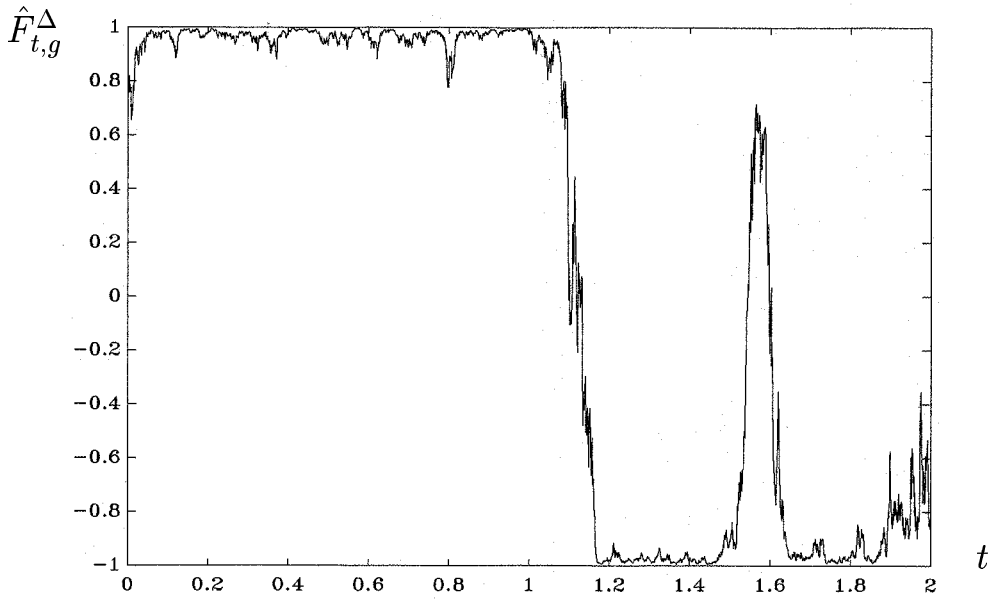

Рис.15.8. Результат численного эксперимента 15.4 (метод порядка точности 1.5).

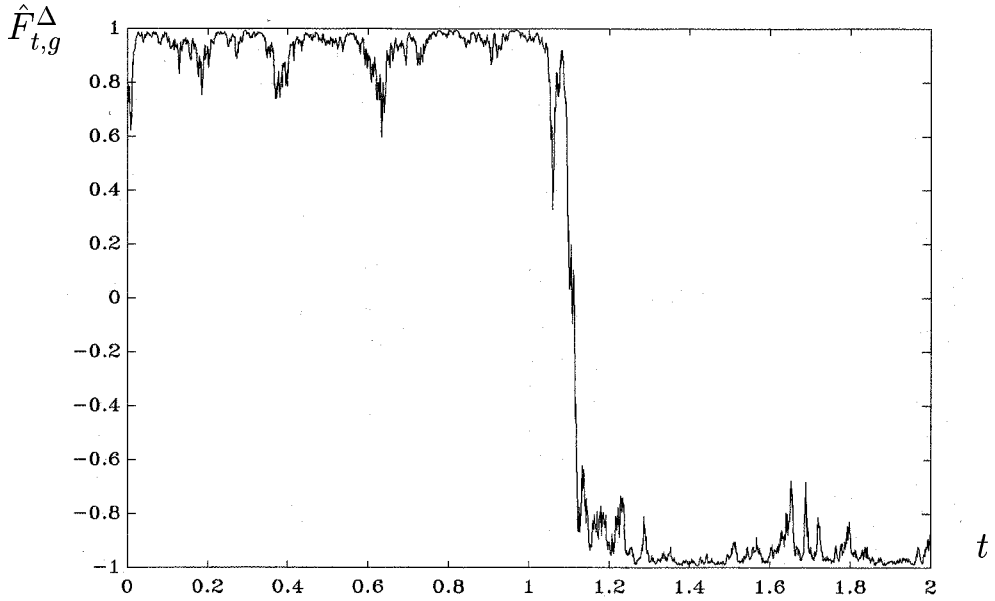

Рис.15.9. Результат численного эксперимента 15.5 (метод порядка точности 2.0), $q = 60$.

$$+\sum_{i=0}^{q}\left(\frac{\zeta_i\zeta_{i+2}}{\sqrt{(2i+1)(2i+5)}(2i+3)}-\frac{(\zeta_i)^2}{(2i-1)(2i+3)}\right)\Bigg), \qquad (15.32)$$

где $\zeta_{j,p} \stackrel{\text{def}}{=} \zeta_j$; $j = 0, 1, \ldots, q+2$; $p = 0, 1, \ldots, N$ — независимые в совокупности стандартные гауссовские случайные величины.

Численный эксперимент 15.3. *Смоделировать реализацию наблюдаемого процесса* $\mathbf{w}_t$, $t \in [0, 2]$ *вида* (15.14) *с учетом* (15.23), (15.24) *по формуле* $\mathbf{w}_{\tau_{p+1}} = \mathbf{w}_{\tau_p} + \mathbf{a}(\eta_{\tau_p})\Delta + \sqrt{\Delta}\zeta_0$; $\mathbf{w}_0 = 0$, *где* $\tau_p = p\Delta$; $p = 0, 1, \ldots, 2000$; $\Delta = 10^{-3}$; $\zeta_{0,p} \stackrel{\text{def}}{=} \zeta_0$ — *независимые стандартные гауссовские случайные величины. Изобразить графически результат численного моделирования* (рис. 15.5).

Численный эксперимент 15.4. *Смоделировать приближенный фильтр* (15.25) *с учетом* (15.23), (15.24) *при* $\tau_p = p\Delta$; $p = 0, 1, \ldots, 2000$; $\Delta = 10^{-3}$, $p(0) = (0.2\ \ 0.8)^{\mathsf{T}}$, *применяя формулу* (15.26) *и численные методы* (15.18)–(15.20). *Во всех трех случаях использовать ту же реализацию последовательности случайных величин* $\zeta_{0,p}$; $p = 0, 1, \ldots, 2000$, *что и в численном эксперименте* 15.3. *Изобразить графически результат численного моделирования* (рис. 15.6–15.8).

Численный эксперимент 15.5. *Повторить численный эксперимент* 15.4 *численным методом* (15.22). *При моделировании стохастических интегралов следует использовать формулы* (15.26)–(15.32).

Последовательность случайных величин $\zeta_{0,p}$; $p = 0, 1, \ldots, 2000$ *выбирать ту же, что и в численном эксперименте* 15.3. *В* (15.32) *положить* $q = 60$. *Результат численного моделирования изобразить графически* (рис. 15.9).

15.3 Линейная фильтрация Калмана–Бьюси

Рассмотрим задачу фильтрации в постановке разд. 2.4.1 и будем предполагать, что $k, l, m, n = 2$,

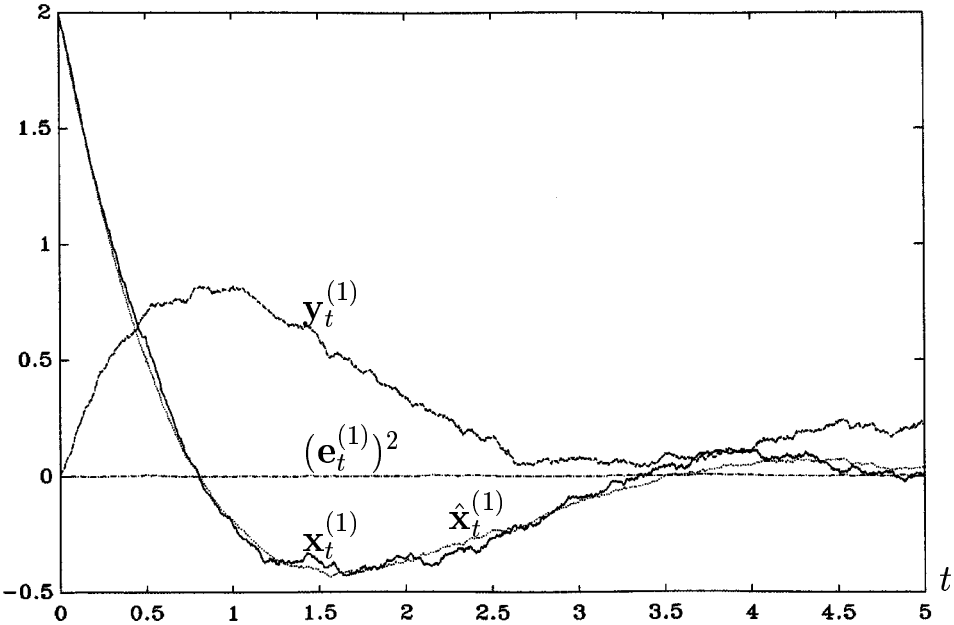

Рис.15.10. Результат численного эксперимента 15.6.

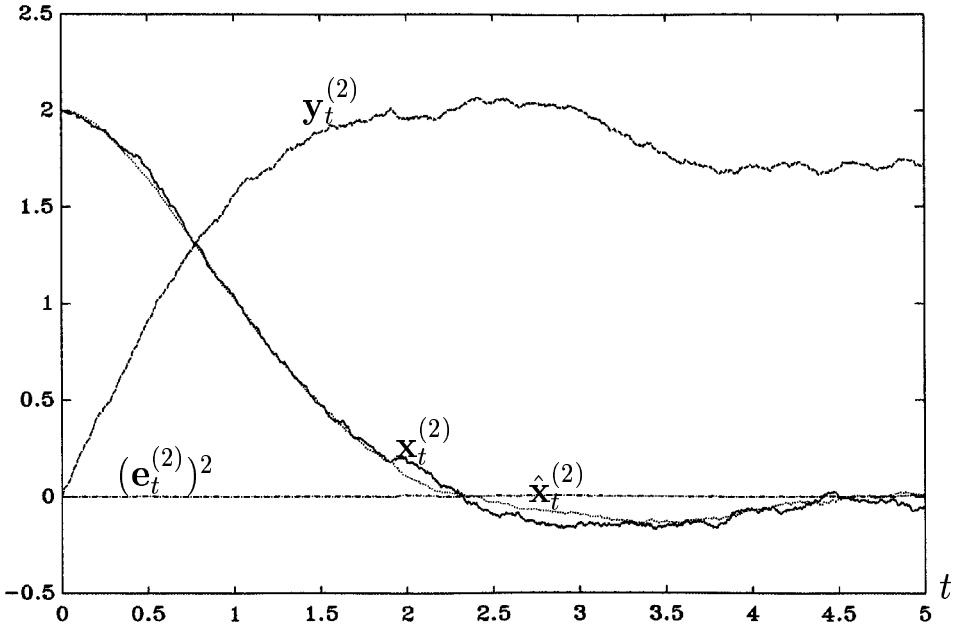

Рис.15.11. Результат численного эксперимента 15.6.

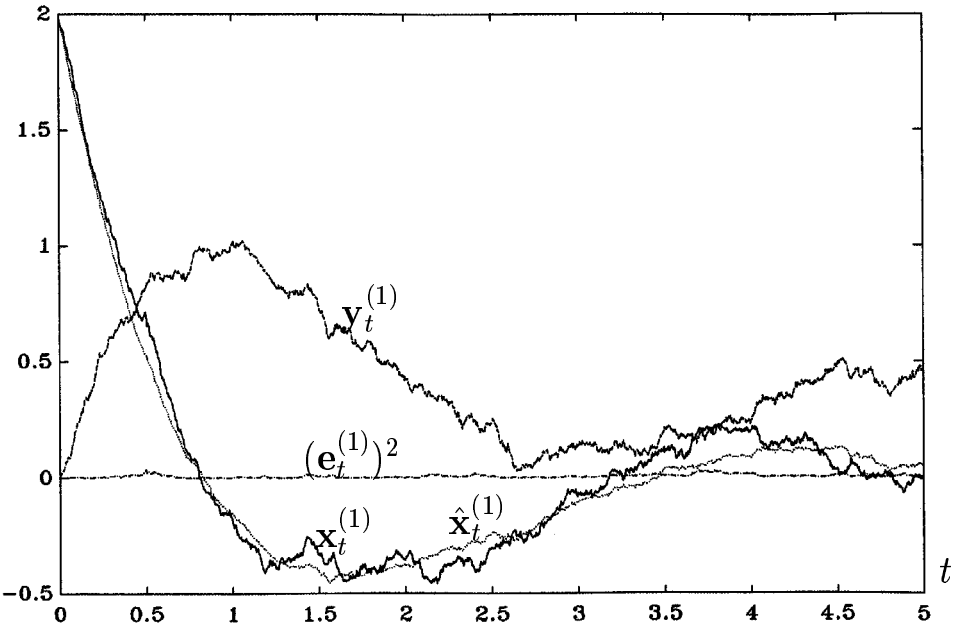

Рис.15.12. Результат численного эксперимента 15.6.

$$A = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}, \ B = bI_2, \ H = I_2, \ \Sigma = \sigma I_2, \tag{15.33}$$

где I_2 — единичная (2×2)–матрица.

Численная реализация оптимальной в среднеквадратическом смысле оценки $\hat{\mathbf{x}}_t$ процесса $\mathbf{x}_t$ на основе наблюдений $\mathbf{y}_s$, $0 \le s \le t$, полученной по методу Калмана-Бьюси, может осуществляться с помощью численного интегрирования стохастического дифференциального уравнения Ито сильными численными методами.

Численный эксперимент 15.6. *Смоделировать решение стохастического дифференциального уравнения Ито вида*

$$d\begin{bmatrix}\mathbf{e}_t\\ \hat{\mathbf{x}}_t\\ \mathbf{x}_t\\ \mathbf{y}_t\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}A-R(t)H^{\mathsf{T}}\left(\Sigma\Sigma^{\mathsf{T}}\right)^{-1}H & O_2 & O_2 & O_2\\ R(t)H^{\mathsf{T}}\left(\Sigma\Sigma^{\mathsf{T}}\right)^{-1}H & A & O_2 & O_2\\ O_2 & O_2 & A & O_2\\ O_2 & O_2 & H & O_2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\mathbf{e}_t\\ \hat{\mathbf{x}}_t\\ \mathbf{x}_t\\ \mathbf{y}_t\end{bmatrix}dt+$$

$$+\begin{bmatrix}B & -R(t)H^{\mathsf{T}}\left(\Sigma\Sigma^{\mathsf{T}}\right)^{-1}\Sigma\\ O_2 & R(t)H^{\mathsf{T}}\left(\Sigma\Sigma^{\mathsf{T}}\right)^{-1}\Sigma\\ B & O_2\\ O_2 & \Sigma\end{bmatrix}d\begin{bmatrix}\mathbf{w}_t\\ \mathbf{f}_t\end{bmatrix},$$

где $R(t)$ *определяется из уравнения Риккати* (2.38), *на промежутке времени* $[0,5]$ *с шагом* $\Delta=10^{-3}$ *с помощью явного сильного численного метода Г.Н. Мильштейна при исходных данных* (15.33) *и* $R(0)=O_2$, $\mathbf{e}_0=\mathbf{y}_0=(0\ 0)^{\mathsf{T}}$, $\mathbf{x}_0=\hat{\mathbf{x}}_0=(2\ 2)^{\mathsf{T}}$, $\sigma=b=0.07$. *Здесь* O_2 — *нулевая* (2×2)*–матрица. Значения* $R(k\Delta)$; $k=1,\ldots,5000$ *получить с помощью решения уравнения* (2.38) *явным численным методом порядка* 2.0 (*численный метод, основанный на формуле Тейлора*). *Результат численного моделирования изобразить графически* (рис.15.10, 15.11). *Повторить вычисления при* $\sigma=b=0.14$ (рис.15.12, 15.13).

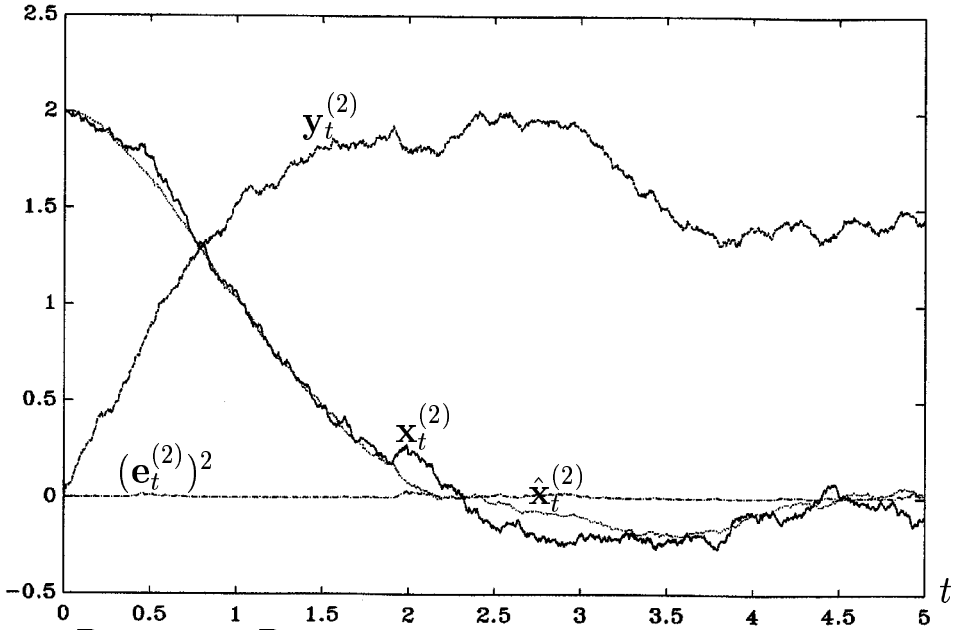

Рис.15.13. Результат численного эксперимента 15.6.

15.4 Нелинейная оптимальная фильтрация

В монографии [8] рассмотрена задача оптимальной нелинейной

фильтрации частично наблюдаемых диффузионных процессов, описываемых нелинейными системами стохастических дифференциальных уравнений Ито. Рассмотрим частный случай данной задачи.

Пусть двухмерный случайный процесс (x_t, y_t); $t \in [0, T]$ описывается системой стохастических дифференциальных уравнений Ито вида:

$$dx_t = -x_t dt + \sigma_1 \sin(y_t) d\mathbf{f}_t^{(1)} + \sigma_2 \cos(y_t) d\mathbf{f}_t^{(2)}, \tag{15.34}$$

$$dy_t = x_t dt + c d\mathbf{f}_t^{(2)}, \tag{15.35}$$

где σ_1, σ_2, c — постоянные; $\mathbf{f}_t^{(1)}$, $\mathbf{f}_t^{(2)}$ — независимые стандартные винеровские процессы; y_t — наблюдаемый, а x_t — ненаблюдаемый процесс, который подлежит оцениванию на основании наблюдения y_s, $0 \le s \le t$.

Для системы (15.34), (15.35) выполнены все условия теоремы ([8], С. 474). Тогда, согласно данной теореме оптимальная в среднеквадратическом смысле оценка $\hat{x}_t = \mathsf{M}\{x_t | \mathcal{F}_t^y\}$ процесса x_t по y_s, $0 \le s \le t$ и процесс $\gamma_t = \mathsf{M}\{(x_t - \hat{x}_t)^2 | \mathcal{F}_t^y\}$ являются единственным непрерывным с вероятностью 1 и $\mathcal{F}_t^y$-измеримым при каждом t решением системы стохастических дифференциальных уравнений Ито вида:

$$d\hat{x}_t = \left(-\hat{x}_t + \frac{c\sigma_2 \cos(y_t) + \gamma_t}{c^2}(x_t - \hat{x}_t)\right) dt + \frac{c\sigma_2 \cos(y_t) + \gamma_t}{c} d\mathbf{f}_t^{(2)}, \tag{15.36}$$

$$d\gamma_t = \left(-2\gamma_t + \sigma_1^2 \sin^2(y_t) + \sigma_2^2 \cos^2(y_t) - \frac{(c\sigma_2 \cos(y_t) + \gamma_t)^2}{c^2}\right) dt \tag{15.37}$$

с начальными условиями $\hat{x}_0 = \mathsf{M}\{x_0 | y_0\}$, $\gamma_0 = \mathsf{M}\{(x_0 - \hat{x}_0)^2 | y_0\}$. Здесь $\mathcal{F}_t^y$ — σ-алгебра, порожденная y_s, $0 \le s \le t$.

Численная реализация оценки $\hat{x}_t$ может быть осуществлена с помощью численного интегрирования системы (15.34)–(15.37) сильными численными методами для стохастических дифференциальных уравнений Ито.

Численный эксперимент 15.7. *Смоделировать решение системы* (15.34)–(15.37) *при* $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma$ *с помощью явного сильного численного метода Г.Н. Мильштейна по формулам:*

$$\mathbf{y}_{p+1}^{(1)} = (1 - \Delta)\mathbf{y}_p^{(1)} + \sigma \sin(\mathbf{y}_p^{(2)}) \hat{I}_{0_{\tau_{p+1}, \tau_p}}^{(1)} + \sigma \cos(\mathbf{y}_p^{(2)}) \hat{I}_{0_{\tau_{p+1}, \tau_p}}^{(2)} -$$

$$-c\sigma \sin(\mathbf{y}_p^{(2)}) \hat{I}_{00_{\tau_{p+1}, \tau_p}}^{(22)} + c\sigma \cos(\mathbf{y}_p^{(2)}) \hat{I}_{00_{\tau_{p+1}, \tau_p}}^{(21)},$$

$$\mathbf{y}_{p+1}^{(2)} = \mathbf{y}_p^{(2)} + \mathbf{y}_p^{(1)} \Delta + c \hat{I}_{0_{\tau_{p+1}, \tau_p}}^{(2)},$$

$$\mathbf{y}_{p+1}^{(3)} = \mathbf{y}_p^{(3)} + \left(-\mathbf{y}_p^{(3)} + \left(\frac{\sigma}{c} \cos(\mathbf{y}_p^{(2)}) + \frac{\mathbf{y}_p^{(4)}}{c^2}\right)\left(\mathbf{y}_p^{(1)} - \mathbf{y}_p^{(3)}\right)\right)\Delta +$$

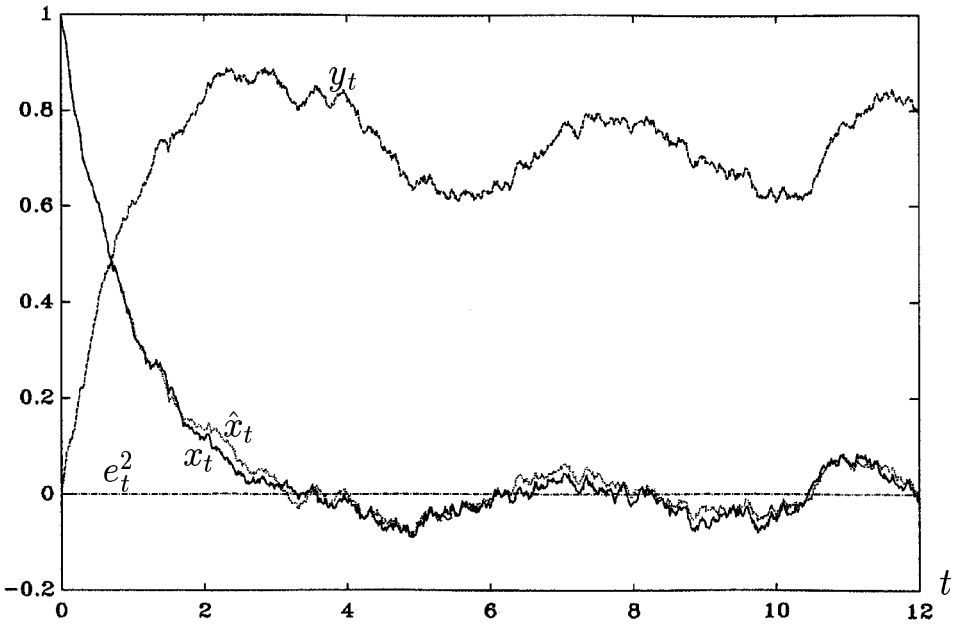

Рис.15.14. Результат численного эксперимента 15.7.

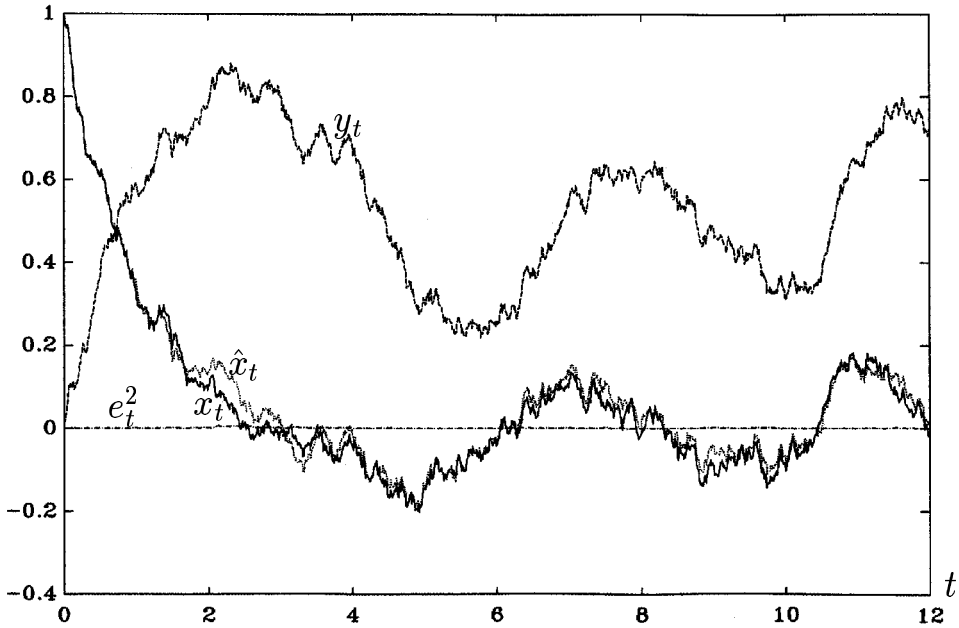

Рис.15.15. Результат численного эксперимента 15.17.

$$+\left(\sigma\cos(\mathbf{y}_p^{(2)}) + \frac{\mathbf{y}_p^{(4)}}{c}\right)\hat{I}^{(2)}_{0_{\tau_{p+1},\tau_p}} - c\sigma\sin(\mathbf{y}_p^{(2)})\hat{I}^{(22)}_{00_{\tau_{p+1},\tau_p}},$$

$$\mathbf{y}_{p+1}^{(4)} = \mathbf{y}_p^{(4)} + \left(-2\mathbf{y}_p^{(4)} + \sigma^2 - \frac{(c\sigma\cos(\mathbf{y}_p^{(2)}) + \mathbf{y}_p^{(4)})^2}{c^2}\right)\Delta$$

при $\Delta = 5\cdot 10^{-3}$; $p = 0, 1, \ldots, 2400$; $\sigma = c = 0.05$; $\mathbf{y}_0^{(1)} = \mathbf{y}_0^{(3)} = 1$; $\mathbf{y}_0^{(2)} = \mathbf{y}_0^{(4)} = 0$. *Здесь* $\mathbf{y}_p^{(1)}$, $\mathbf{y}_p^{(2)}$, $\mathbf{y}_p^{(3)}$, $\mathbf{y}_p^{(4)}$ — *приближенные значения*

x_{τ_p}, y_{τ_p}, $\hat{x}_{\tau_p}$, γ_{τ_p} соответственно; $\tau_p = p\Delta$. Для моделирования стохастических интегралов Ито использовать формулы:

$$\hat{I}^{(1)}_{0_{\tau_{p+1},\tau_p}} = \sqrt{\Delta}\zeta_0^{(1)},\ \hat{I}^{(2)}_{0_{\tau_{p+1},\tau_p}} = \sqrt{\Delta}\zeta_0^{(2)},\ \hat{I}^{(22)}_{00_{\tau_{p+1},\tau_p}} = \frac{\Delta}{2}\left(\left(\zeta_0^{(1)}\right)^2 - 1\right),$$

$$\hat{I}^{(21)}_{00_{\tau_{p+1},\tau_p}} = \frac{\Delta}{2}\left[\zeta_0^{(1)}\zeta_0^{(2)} + \sum_{r=1}^{20}\frac{1}{\sqrt{4r^2-1}}\left(\zeta_{r-1}^{(2)}\zeta_r^{(1)} - \zeta_r^{(2)}\zeta_{r-1}^{(1)}\right)\right],$$

где $\zeta_{j,p}^{(i)} \stackrel{\text{def}}{=} \zeta_j^{(i)}$; $j = 0, 1, \ldots, 20$; $i = 1, 2$; $p = 0, 1, \ldots, 2399$ — независимые в совокупности стандартные гауссовские случайные величины. Изобразить результат графически (рис.15.14). *Повторить численный эксперимент при $\sigma = c = 0.1$* (рис.15.15).

15.5 Оптимальное стохастическое управление по неполным данным

Рассмотрим задачу оптимального стохастического управления частично наблюдаемым диффузионным процессом (см.разд. 2.4.2, а также [8]), описываемым линейной системой стохастических дифференциальных уравнений Ито. Рассмотрим частный случай данной задачи.

Пусть функционал потерь имеет вид:

$$V(\mathbf{u}, T) = \mathsf{M}\left\{\mathbf{x}_T^{\mathsf{T}}\bar{H}\mathbf{x}_T + \int_0^T \left(\mathbf{x}_t^{\mathsf{T}}Q\mathbf{x}_t + \mathbf{u}_t^{\mathsf{T}}\bar{R}\mathbf{u}_t\right)dt\right\}, \tag{15.38}$$

где $\mathbf{x}_t \in \Re^2$ — недоступный наблюдению процесс, описываемый уравнением вида:

$$d\mathbf{x}_t = (A\mathbf{x}_t + \mathbf{u}_t)\,dt + Bd\mathbf{w}_t; \tag{15.39}$$

$\mathbf{u}_t \in \Re^2$ — управляющее воздействие; $A, B, Q, \bar{H}, \bar{R}$ — числовые (2×2)-матрицы; $\mathbf{w}_t$-двухмерный стандартный винеровский процесс с независимыми компонентами; $\mathbf{x}_0 \in \Re^2$ — неслучайный вектор-столбец начальных условий.

Предположим, что наблюдению доступен процесс $\mathbf{y}_t \in \Re^2$, задаваемый в виде:

$$d\mathbf{y}_t = H\mathbf{x}_t dt + \Sigma d\mathbf{f}_t, \tag{15.40}$$

где H, Σ — числовые (2×2)-матрицы, $\mathbf{f}_t$ — двухмерный стандартный винеровский процесс с независимыми компонентами, независимый с $\mathbf{w}_t$. Предполагается также, что матрица $\Sigma\Sigma^{\mathsf{T}}$ невырождена, а измери-

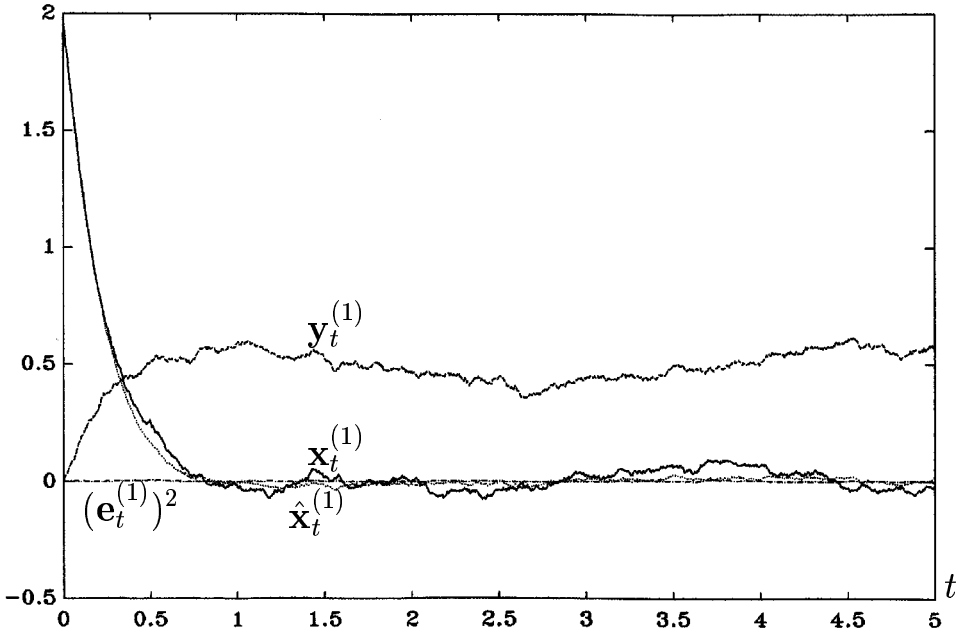

Рис.15.16. Результат численного эксперимента 15.8

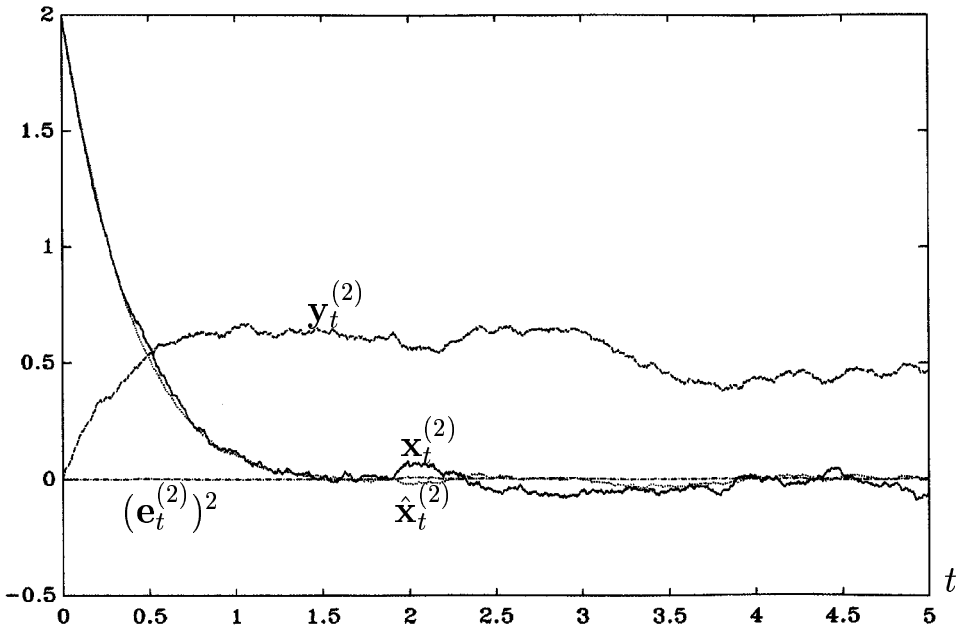

Рис.15.17. Результат численного эксперимента 15.8

мый процесс $\mathbf{u}_t = \mathbf{u}(\mathbf{y}_t, t)$ — $\mathcal{F}_t^y$-измерим, причем:

$$\mathsf{M}\left\{\int_0^T \sum_{i=1}^{2} \left(\mathbf{u}^{(i)}(\mathbf{y}_t, t)\right)^4 dt\right\} < \infty; \tag{15.41}$$

$\mathcal{F}_t^y$ — σ-алгебра, порожденная $\mathbf{y}_s$, $0 \le s \le t$.

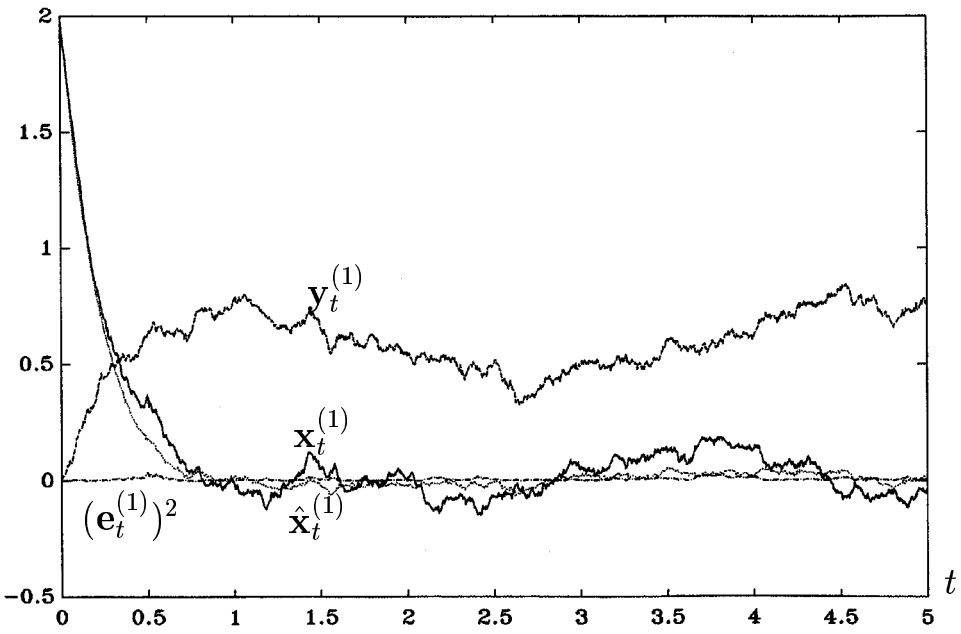

Рис.15.18. Результат численного эксперимента 15.8.

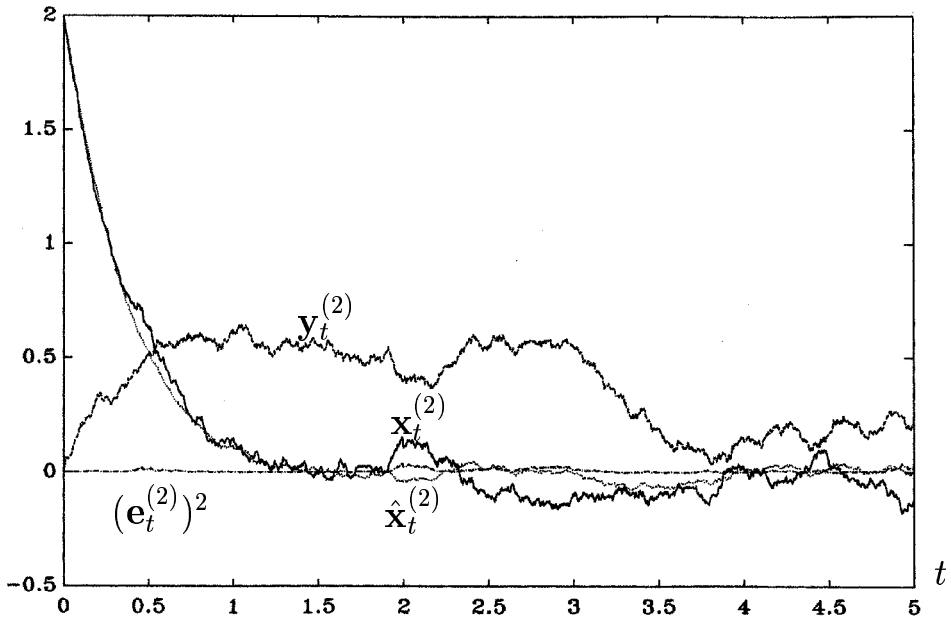

Рис.15.19. Результат численного эксперимента 15.8.

Согласно теореме ([8], С. 609) оптимальное стохастическое управление $\tilde{\mathbf{u}}_t$, доставляющее инфимум функционалу $V(\mathbf{u}, T)$ по всем управлениям, для которых система (15.39), (15.40) имеет единственное сильное решение и выполнено условие (15.41), имеет вид:

$$\tilde{\mathbf{u}}_t = -\bar{R}^{-1}P(t)\hat{\mathbf{x}}_t, \tag{15.42}$$

причем

$$d\hat{\mathbf{x}}_t = (A\hat{\mathbf{x}}_t + \tilde{\mathbf{u}}_t)dt + R(t)H^{\mathsf{T}}(\Sigma\Sigma^{\mathsf{T}})^{-1}H\mathbf{e}_t dt + R(t)H^{\mathsf{T}}(\Sigma\Sigma^{\mathsf{T}})^{-1}\Sigma d\mathbf{f}_t, \quad (15.43)$$

$$d\mathbf{e}_t = \Big(A - R(t)H^{\mathsf{T}}(\Sigma\Sigma^{\mathsf{T}})^{-1}H\Big)\mathbf{e}_t dt + Bd\mathbf{w}_t - R(t)H^{\mathsf{T}}(\Sigma\Sigma^{\mathsf{T}})^{-1}\Sigma d\mathbf{f}_t, \quad (15.44)$$

$$R'(t) = AR(t) + R(t)A^{\mathsf{T}} + BB^{\mathsf{T}} - R(t)H^{\mathsf{T}}(\Sigma\Sigma^{\mathsf{T}})^{-1}HR(t), \quad (15.45)$$

$$-P'(t) = A^{\mathsf{T}}P(t) + P(t)A + Q - P(t)\bar{R}^{-1}P(t); \quad (15.46)$$

$R(0) = \mathsf{M}\{\mathbf{e}_0\mathbf{e}_0^{\mathsf{T}}\}$, $P(T) = \bar{H}$, $\hat{\mathbf{x}}_0 = \mathsf{M}\{\mathbf{x}_0\} = \mathbf{x}_0$, $\mathbf{e}_t = \mathbf{x}_t - \hat{\mathbf{x}}_t$, штрих $'$ означает производную по t.

Для численной реализации закона управления (15.42) и оценки $\hat{\mathbf{x}}_t$ можно воспользоваться сильными численными методами для системы стохастических дифференциальных уравнений Ито (15.39), (15.40), (15.43), (15.44).

Численный эксперимент 15.8. *Смоделировать численно решение системы стохастических дифференциальных уравнений Ито* (15.39), (15.40), (15.43), (15.44) (*в* (15.39) *положить* $\mathbf{u}_t = \tilde{\mathbf{u}}_t$) *с помощью явного сильного численного метода Г.Н. Мильштейна на промежутке времени* $[0, 5]$ *с шагом* $\Delta = 10^{-3}$ *при условии* (15.33) *и* $\sigma = b = 0.07$, $\bar{R} = I_2$, $\bar{H} = 10I_2$, $Q = 10I_2$, $R(0) = O_2$, $\mathbf{x}_0 = \hat{\mathbf{x}}_0 = (2\ 2)^{\mathsf{T}}$, $\mathbf{e}_0 = \mathbf{y}_0 = (0\ 0)^{\mathsf{T}}$. *Здесь* I_2, O_2 *— единичная и нулевая* (2×2)*-матрицы. Значения* $R(k\Delta)$, $P(k\Delta)$; $k = 0, 1, \ldots, 5000$ *получить с помощью решения уравнений Риккати* (15.45), (15.46) *явным численным методом порядка точности* 2.0 (*численный метод, основанный на формуле Тейлора*). *Для вычисления* $\tilde{\mathbf{u}}_{k\Delta}$ *использовать формулу* (15.42). *Результат численного моделирования изобразить графически* (рис.15.16, 15.17). *При этом на графики выводить каждую вторую точку. Повторить вычисления при* $\sigma = b = 0.14$ (рис.15.18, 15.19).

Сравнивая рис.15.10–15.13 и рис.15.16–15.19 можно увидеть, что оптимальное стохастическое управление "прижимает" процесс $\mathbf{x}_t$ к горизонтальной оси так, чтобы минимизировался функционал потерь (15.38) (рис.15.16–15.19). Рис.15.10–15.13 соответствуют случаю отсутствия управления ($\tilde{\mathbf{u}}_t = 0$).

15.6 Стохастическое оптимальное управление механической системой

Рассмотрим механическую систему, изображенную на рис.15.20. Система дифференциальных уравнений, описывающая динамику дан-

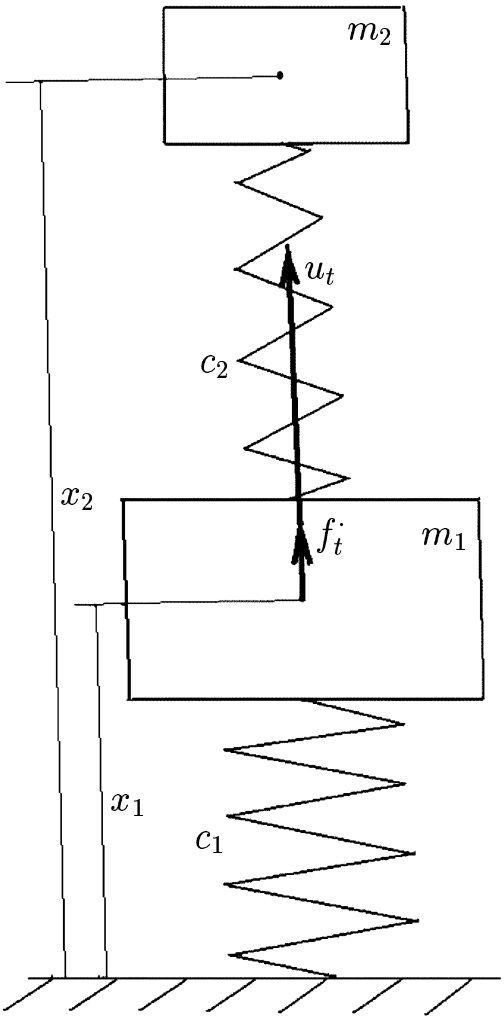

Рис.15.20. Механическая система.

ной механической системы имеет вид:

$$\begin{array}{c} m_1\ \ddot{x}_1 = -c_1 x_1 + c_2(x_2 - x_1) + f_t^{\cdot} + u_t \\ m_2\ \ddot{x}_2 = -c_2(x_2 - x_1) \end{array}, \tag{15.47}$$

где $f_t^{\cdot}$ — силовое воздействие на массу m_1, являющееся белым гауссовским шумом, а u_t — управляющее воздействие также действующее на массу m_1; $\ddot{x}_1$, $\ddot{x}_2$ — ускорения масс m_1 и m_2 соответственно.

Запишем систему (15.47) в форме стохастического дифференциального уравнения Ито вида:

$$d\mathbf{x}_t = (A\mathbf{x}_t + Mu_t)\,dt + Bdf_t, \tag{15.48}$$

где f_t — стандартный винеровский процесс; $\mathbf{x}_t^{(1)} \stackrel{\text{def}}{=} x_1$, $\mathbf{x}_t^{(2)} \stackrel{\text{def}}{=} \dot{x}_1$, $\mathbf{x}_t^{(3)} \stackrel{\text{def}}{=} x_2$, $\mathbf{x}_t^{(4)} \stackrel{\text{def}}{=} \dot{x}_2$; здесь $\dot{x}_1$, $\dot{x}_2$ — скорости масс m_1, m_2;

$$\mathbf{x}_t = \begin{pmatrix} \mathbf{x}_t^{(1)} \\ \mathbf{x}_t^{(2)} \\ \mathbf{x}_t^{(3)} \\ \mathbf{x}_t^{(4)} \end{pmatrix}, \ A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\frac{c_1+c_2}{m_1} & 0 & \frac{c_2}{m_1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ \frac{c_2}{m_2} & 0 & -\frac{c_2}{m_2} & 0 \end{pmatrix}, \ M = B = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{m_1} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Стохастическое управление u_t, входящее в (15.48), выбирается так, чтобы доставить инфимум функционалу потерь вида:

$$V(u, T, \bar{\mathbf{x}}) = \mathsf{M}\Big\{\mathbf{x}_T^{\mathsf{T}} R \mathbf{x}_T + \int\limits_0^T \left(\mathbf{x}_t^{\mathsf{T}} C \mathbf{x}_t + u_t G u_t\right) dt | \mathbf{x}_0 = \bar{\mathbf{x}}\Big\}, \tag{15.49}$$

где

$$R = \begin{pmatrix} \alpha & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \ C = \begin{pmatrix} \beta & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \ G = \gamma, \ \alpha, \ \beta, \ \gamma \in \Re^1, \ \gamma \neq 0.$$

Нетрудно видеть, что функционал (15.49) может быть записан в виде:

$$V(u, T, \bar{\mathbf{x}}) = \mathsf{M}\Big\{\alpha \left(\mathbf{x}_T^{(1)}\right)^2 + \int\limits_0^T \Big(\beta \left(\mathbf{x}_t^{(1)}\right)^2 + \gamma u_t^2\Big) dt | \mathbf{x}_0 = \bar{\mathbf{x}}\Big\}. \tag{15.50}$$

Известно [8], что оптимальное стохастическое управление u_t, доставляющее инфимум функционалу (15.50), имеет вид:

$$u_t = -\gamma^{-1} M^{\mathsf{T}} S(t) \mathbf{x}_t, \tag{15.51}$$

где $S(t) : [0, T] \to \Re^{4\times 4}$ — матричная функция, являющаяся решением следующей задачи

$$\frac{dS}{dt}(t) = -A^{\mathsf{T}} S(t) - S(t) A + \frac{1}{\gamma} S(t) M M^{\mathsf{T}} S(t) - C, \ S(T) = R. \tag{15.52}$$

Функционал (15.50) [8] представим в виде:

$$V(u, T, \bar{\mathbf{x}}) = \bar{\mathbf{x}}^{\mathsf{T}} S(0) \bar{\mathbf{x}} + \int\limits_0^T \mathsf{tr}\left(B B^{\mathsf{T}} S(t)\right) dt = \bar{\mathbf{x}}^{\mathsf{T}} S(0) \bar{\mathbf{x}} + \frac{1}{m_1^2} \int\limits_0^T S^{(22)}(t) dt, \tag{15.53}$$

где tr — след (сумма диагональных элементов) матрицы.

Если положить $u_t = 0$, $B = (0\ 0\ 0\ 0)^{\mathsf{T}}$ в (15.48) (случай отсутствия шума и управления), то точное решение данной системы уравнений имеет вид:

$$\mathbf{x}_t^{(1)} = -\frac{c_2}{\sqrt{k_1}(k_1m_1 - c_1 - c_2)}\Big((A_1 - A_2)\cos\sqrt{k_1}t + (A_1 + A_2)\sin\sqrt{k_1}t\Big) -$$
$$-\frac{c_2}{\sqrt{k_2}(k_2m_1 - c_1 - c_2)}\Big((A_3 - A_4)\cos\sqrt{k_2}t + (A_3 + A_4)\sin\sqrt{k_2}t\Big),$$

$$\mathbf{x}_t^{(2)} = -\frac{c_2}{(k_1m_1 - c_1 - c_2)}\Big((A_1 + A_2)\cos\sqrt{k_1}t + (A_2 - A_1)\sin\sqrt{k_1}t\Big) -$$
$$-\frac{c_2}{(k_2m_1 - c_1 - c_2)}\Big((A_3 + A_4)\cos\sqrt{k_2}t + (A_4 - A_3)\sin\sqrt{k_2}t\Big),$$

$$\mathbf{x}_t^{(3)} = \frac{1}{\sqrt{k_1}}\Big((A_1 + A_2)\sin\sqrt{k_1}t + (A_1 - A_2)\cos\sqrt{k_1}t\Big) +$$
$$+\frac{1}{\sqrt{k_2}}\Big((A_3 + A_4)\sin\sqrt{k_2}t + (A_3 - A_4)\cos\sqrt{k_2}t\Big),$$

$$\mathbf{x}_t^{(4)} = (A_1 + A_2)\cos\sqrt{k_1}t + (A_2 - A_1)\sin\sqrt{k_1}t +$$
$$+ (A_3 + A_4)\cos\sqrt{k_2}t + (A_4 - A_3)\sin\sqrt{k_2}t,$$

где

$$k_{1,2} = \frac{1}{2}\left(\frac{c_2}{m_2} + \frac{c_1 + c_2}{m_1} \pm \sqrt{\left(\frac{c_2}{m_2} + \frac{c_1 + c_2}{m_1}\right)^2 - \frac{4c_1c_2}{m_1m_2}}\right),\ k_1 > k_2;$$

A_1, A_2, A_3, A_4 — произвольные постоянные; $(c_2/m_2 + (c_1 + c_2)/m_1)^2 > (4c_1c_2)/(m_1m_2)$.

Взяв $\mathbf{x}_0^{(1)} = \mathbf{x}_0^{(3)} = a$, $\mathbf{x}_0^{(2)} = \mathbf{x}_0^{(4)} = 0$, получаем

$$\mathbf{x}_t^{(1)} = \frac{a}{m_1(k_1 - k_2)}\Big(-(k_2m_1 - c_1)\cos\sqrt{k_1}t + (k_1m_1 - c_1)\cos\sqrt{k_2}t\Big). \tag{15.54}$$

Нетрудно видеть, что при $m_1 = 4m_2$, $c_2 = \frac{3+\sqrt{5}}{10}c_1$ выполняется соотношение $k_1 = 4k_2$ и (15.54) запишется в виде:

$$\mathbf{x}_t^{(1)} = \frac{a}{12m_2k_2}\Big(-(4k_2m_2 - c_1)\cos 2\sqrt{k_2}t + (16k_2m_2 - c_1)\cos\sqrt{k_2}t\Big),$$

т.е. $\mathbf{x}_t^{(1)}$ является в данном случае $2\pi/\sqrt{k_2}$ периодической функцией.

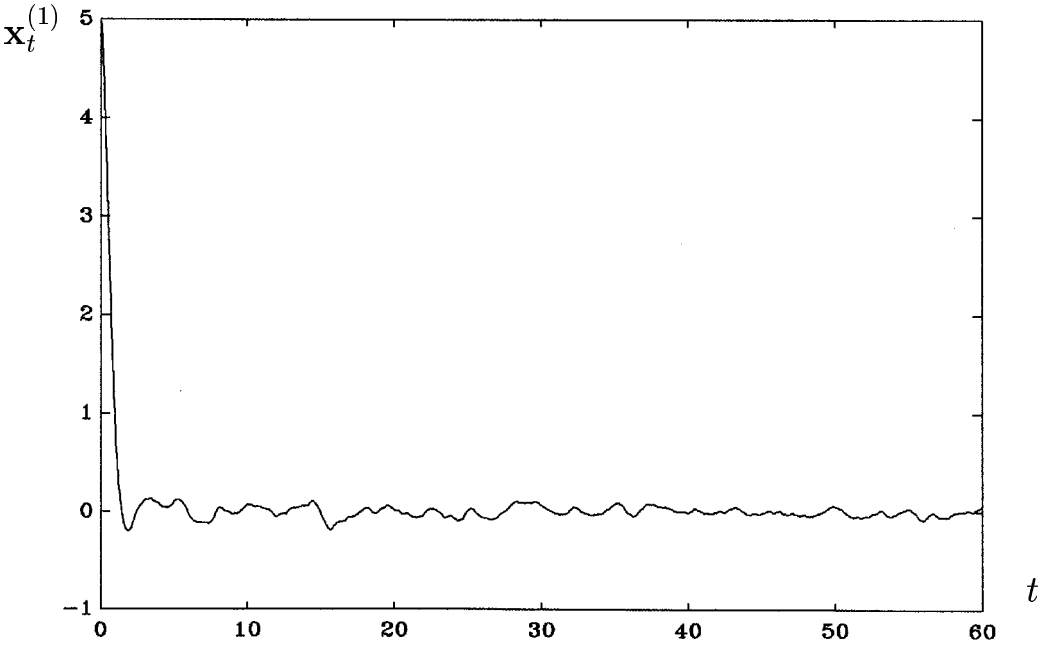

Рис.15.21. Результат численного эксперимента 15.9.

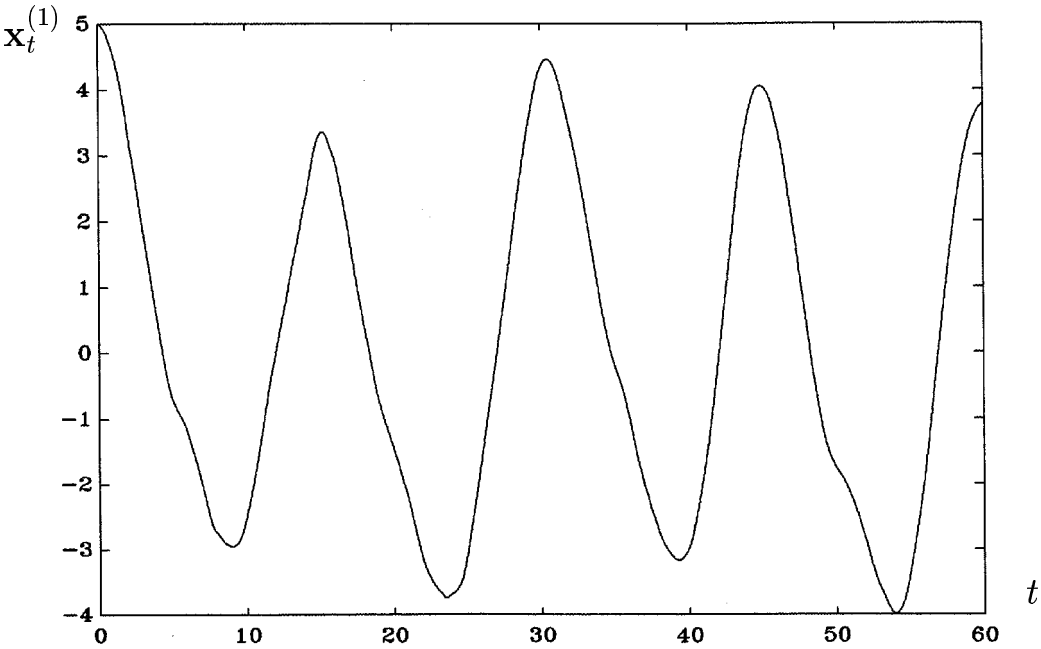

Рис.15.22. Результат численного эксперимента 15.9.

Представим $\mathbf{x}_t^{(1)}$ вида (15.54) следующим образом:

$$\mathbf{x}_t^{(1)} = \frac{a(k_2 m_1 - c_1)}{m_1(k_1 - k_2)}\left(\left(\frac{k_1 m_1 - c_1}{k_2 m_1 - c_1} - \cos\left(\sqrt{k_1} - \sqrt{k_2}\right) t\right)\cos\sqrt{k_2}t + \right.$$

$$\left. + \sin\left(\sqrt{k_1} - \sqrt{k_2}\right) t \, \sin\sqrt{k_2}t\right). \qquad (15.55)$$

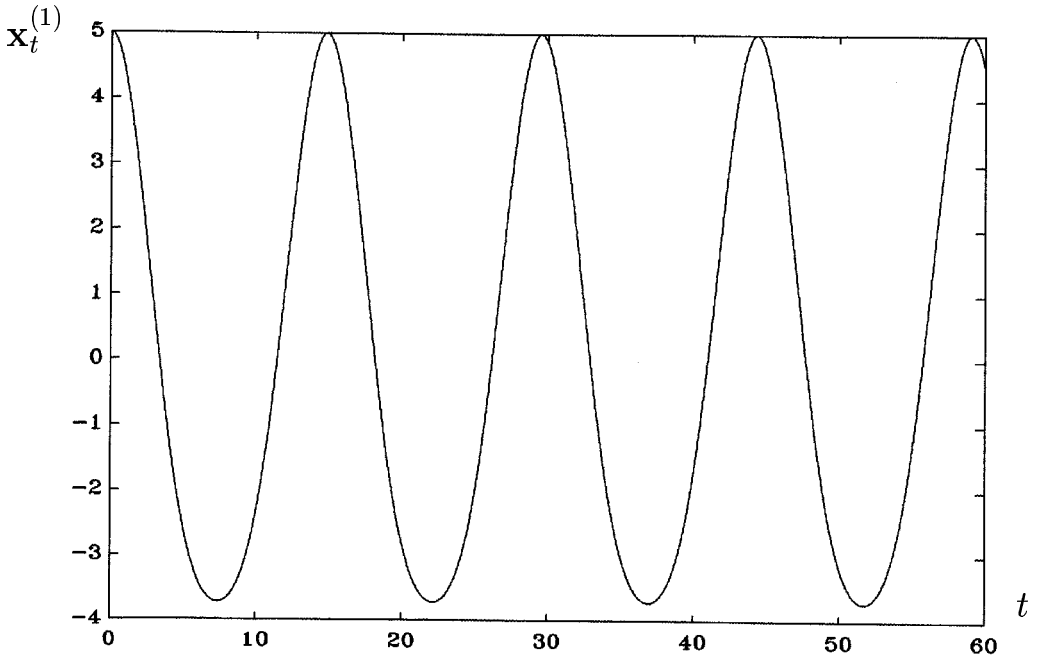

Рис.15.23. Результат численного эксперимента 15.9.

При достаточно близких k_1, k_2 правая часть (15.55) представляет собой высокочастотные колебания с медленно меняющейся, по колебательному закону, амплитудой.

Численный эксперимент 15.9. *Смоделировать решение системы стохастических дифференциальных уравнений Ито* (15.48), (15.51) *при* $m_1 = 4$, $m_2 = 1$, $c_2 = \frac{3+\sqrt{5}}{10}c_1$, $c_1 = 1$, $\mathbf{x}_0^{(1)} = \mathbf{x}_0^{(3)} = 5$, $\mathbf{x}_0^{(2)} = \mathbf{x}_0^{(4)} = 0$, $\gamma = 0.02$, $\alpha = \beta = 10$ *с помощью явного сильного численного метода порядка точности* 1.5*:*

$$\mathbf{y}_{p+1} = \mathbf{y}_p + B\hat{I}_{0_{\tau_{p+1},\tau_p}} + \left(A - MM^{\mathsf{T}}S(\tau_p)\gamma^{-1}\right)\mathbf{y}_p\Delta +$$
$$+\left(\left(A - MM^{\mathsf{T}}S(\tau_p)\gamma^{-1}\right)^2 - MM^{\mathsf{T}}\frac{dS}{dt}(\tau_p)\gamma^{-1}\right)\mathbf{y}_p\frac{\Delta^2}{2} +$$
$$+\left(A - MM^{\mathsf{T}}S(\tau_p)\gamma^{-1}\right)B\left(\Delta\hat{I}_{0_{\tau_{p+1},\tau_p}} + \hat{I}_{1_{\tau_{p+1},\tau_p}}\right), \qquad (15.56)$$

где $\mathbf{y}_{\tau_p} \stackrel{\text{def}}{=} \mathbf{y}_p$; $\tau_p = p\Delta$; $\Delta = 0.005$; $p = 0, 1, \ldots, 11999$;

$$\hat{I}_{0_{\tau_{p+1},\tau_p}} = \zeta_{0,p}\sqrt{\Delta},\ \ \hat{I}_{1_{\tau_{p+1},\tau_p}} = -\frac{\Delta^{3/2}}{2}\left(\zeta_{0,p} + \frac{1}{\sqrt{3}}\zeta_{1,p}\right);$$

$\zeta_{0,p}, \zeta_{1,p}$; $p = 0, 1, \ldots, 11999$ — *независимые в совокупности стандартные гауссовские случайные величины. Значения* $S(\tau_p)$ *получить путем численного решения матричного уравнения* (15.52) *с помощью явного численного метода второго порядка точности* (*численный метод,*

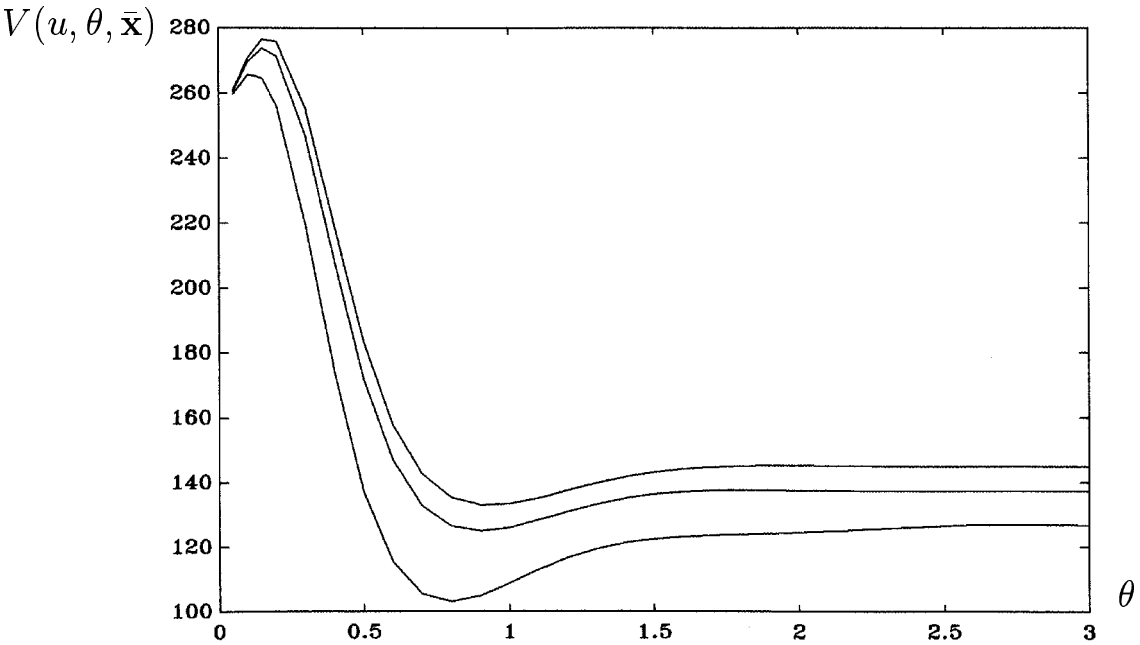

Рис.15.24. Результат численного эксперимента 15.10.

основанный на формуле Тейлора), а значения $\frac{dS}{dt}(\tau_p)$ *получить из* (15.52) *при* $t = \tau_p$ *по найденным значениям* $S(\tau_p)$. *Изобразить графически процесс* $\mathbf{x}_t^{(1)}$ (рис.15.21), *используя здесь и далее значения, полученные из* (15.56). *Повторить вычисления при* $M = (0\ 0\ 0\ 0)^{\mathsf{T}}$ (*случай отсутствия управления*) *и при* $M = B = (0\ 0\ 0\ 0)^{\mathsf{T}}$ (*случай отсутствия управления и шума*). *Изобразить графически процесс* $\mathbf{x}_t^{(1)}$ *в этих случаях* (рис.15.22, 15.23).

Численный эксперимент 15.10. *Построить графически зависимость* $V(u,\theta,\bar{\mathbf{x}})$; $\theta = 0.05, 0.10, 0.15, 0.2, 0.3, \ldots, 2.9, 3.0$ *при* $\bar{\mathbf{x}} = (5\ 0\ 5\ 0)^{\mathsf{T}}$, *используя формулу* (15.53) *и приближенно вычисляя интеграл в* (15.53) *по формуле трапеций:*

$$V(u,\theta,\bar{\mathbf{x}}) \approx \bar{\mathbf{x}}^{\mathsf{T}} S(0)\bar{\mathbf{x}} + \frac{1}{2m_1^2}\sum_{i=0}^{p-1}\left(S^{(22)}(\tau_i) + S^{(22)}(\tau_{i+1})\right)\Delta,$$

где $\tau_i = i\Delta$, $\tau_p = \theta$. *Значения остальных исходных данных и способ получения* $S(0)$, $S^{(22)}(\tau_i)$ *такие же как в численном эксперименте* 15.9 ($M = B = (0\ m_1^{-1}\ 0\ 0)^{\mathsf{T}}$). *Повторить вычисления при* $c_1 = 3$ *и* $c_1 = 10$. *Изобразить графически зависимости* $V(u,\theta,\bar{\mathbf{x}})$; $\theta = 0.05, 0.10, 0.15, 0.2, 0.3, \ldots, 2.9, 3.0$ *при* $c_1 = 1, 3, 10$ (рис.15.24; $c_1 = 1$ *соответствует верхней кривой,* $c_1 = 3$ *— средней кривой, а* $c_1 = 10$ *— нижней кривой*).

Рассмотрим другой динамический режим в системе (15.48).

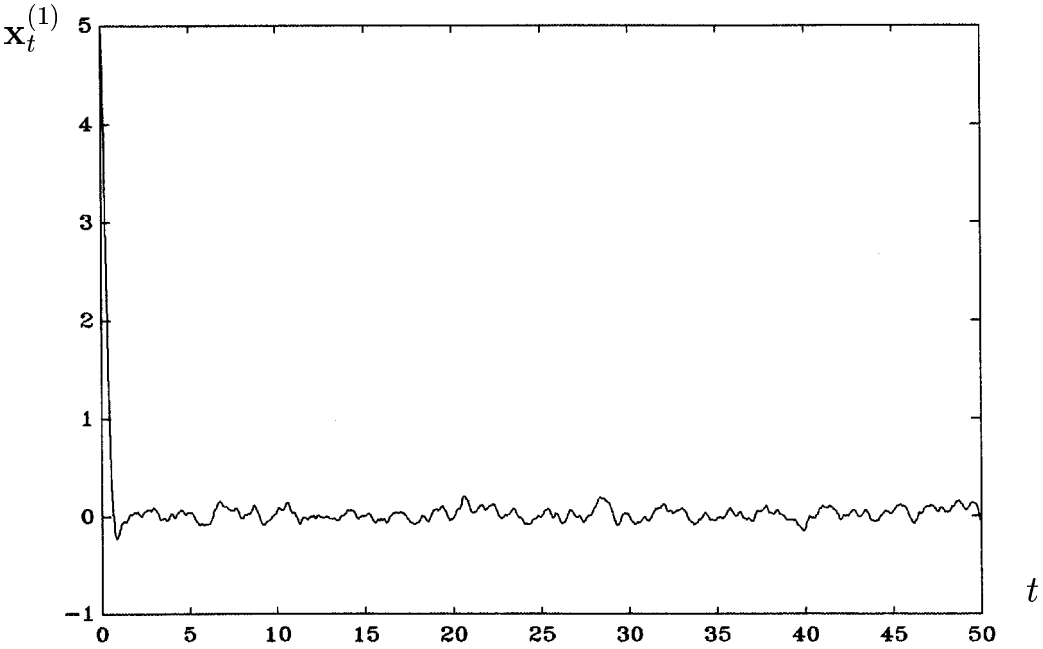

Рис.15.25. Результат численного эксперимента 15.11.

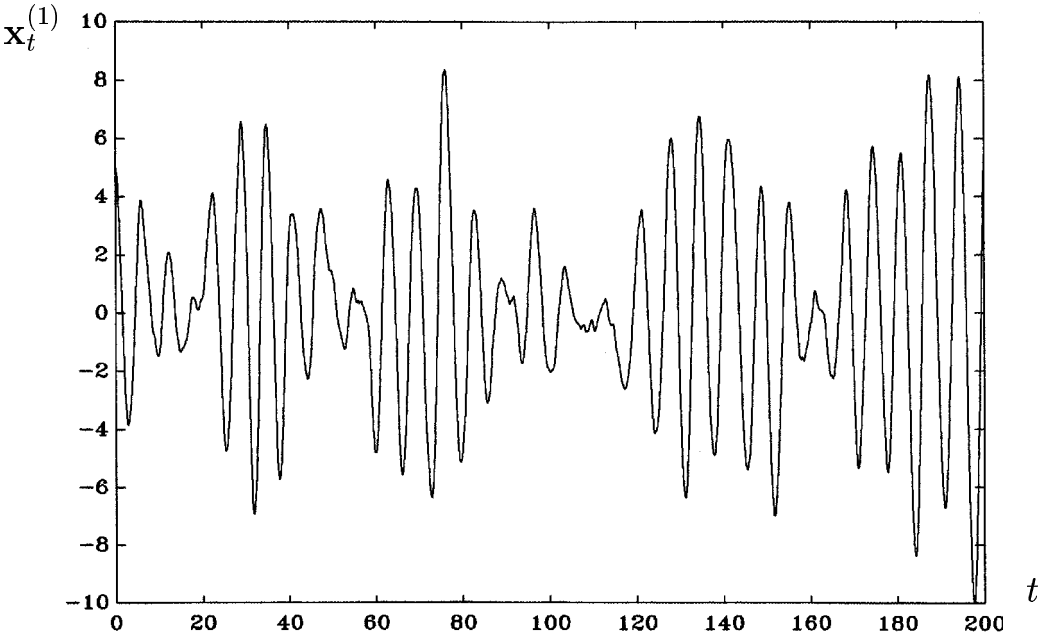

Рис.15.26. Результат численного эксперимента 15.11.

Численный эксперимент 15.11. *Повторить численный эксперимент* 15.8 *при* $c_2 = 0.01c_1$, $m_1 = 100m_2$, $c_1 = 1$, $m_2 = 0.01$, $\Delta = 0.05$ (*остальные исходные данные теже*). *Изобразить графически процесс* $\mathbf{x}_t^{(1)}$ *для случаев наличия шума и управления* ($p = 0, 1, \ldots, 999$; рис.15.25), *наличия шума и отсутствия управления* ($p = 0, 1, \ldots, 3999$; рис.15.26), *отсутствия шума и управления* ($p = 0, 1, \ldots, 3999$; рис.15.27).

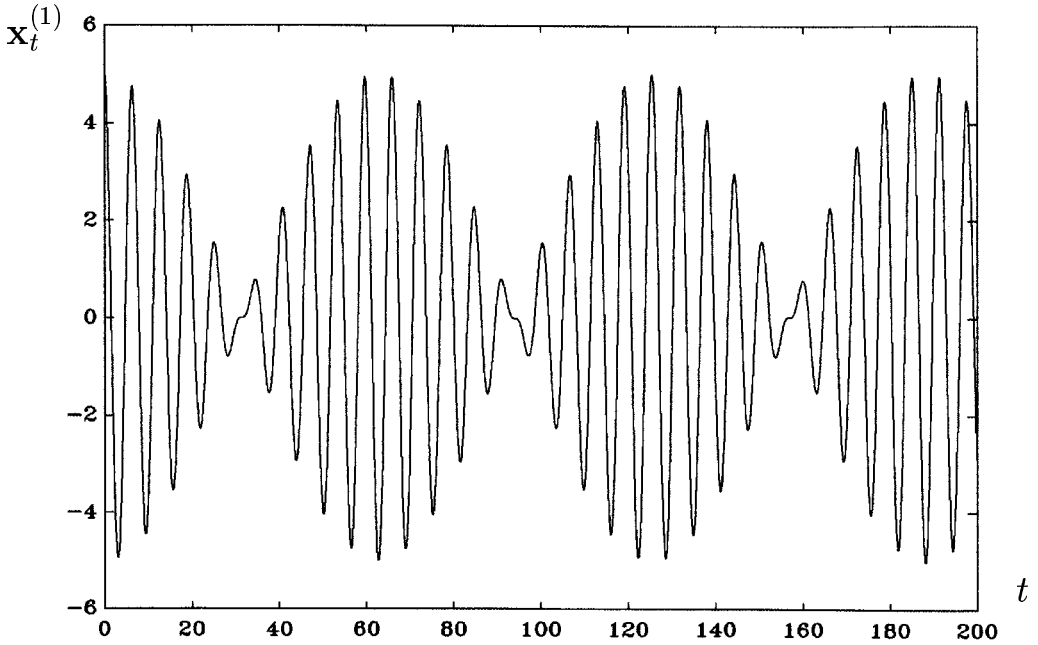

Рис.15.27. Результат численного эксперимента 15.11.

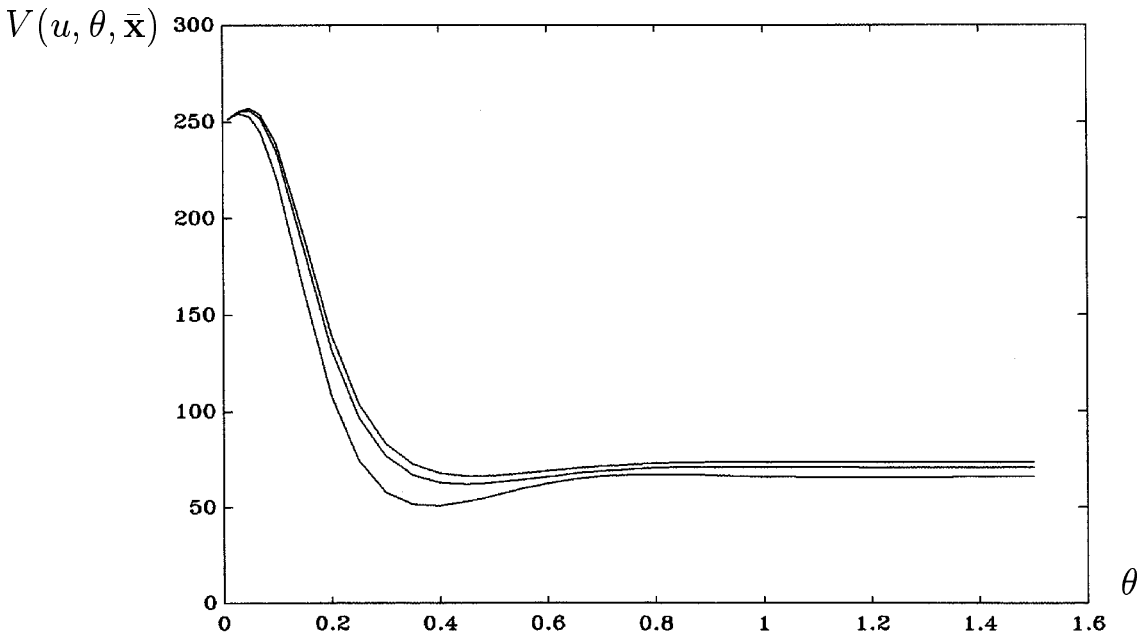

Рис.15.28. Результат численного эксперимента 15.12.

Численный эксперимент 15.12. *Повторить численный эксперимент* 15.9 *при* $\theta = 0.01, 0.02, 0.03, 0.05, 0.07, 0.10, 0.15, 0.20, \ldots, 0.95$, 1.00, $1.1, 1.2, 1.3, 1.4, 1.5$ *и* $c_1 = 1, 3, 10$. *Изобразить графически результат данного численного эксперимента* (рис.15.28); $c_1 = 1$ *соответствует верхней кривой,* $c_1 = 3$ *— средней кривой, а* $c_1 = 10$ *— нижней кривой.*

Глава 16

Примеры применения слабых численных методов решения стохастических дифференциальных уравнений к численному решению математических задач

Настоящая глава иллюстрирует применение численных методов из главы 10 к численному решению математических задач.

16.1 Вычисление наибольшего стохастического ляпуновского показателя

Рассмотрим стохастическое дифференциальное уравнение вида:

$$\frac{d^2x_t}{dt^2} + 2\delta\frac{dx_t}{dt} + (\mu + cf_t^{\cdot})x_t = 0, \tag{16.1}$$

где δ, μ, c — числовые параметры; $f_t^{\cdot}$ — гауссовский белый шум.

Нетрудно видеть, что записи стохастического дифференциального уравнения (16.1) в форме Ито и Стратоновича оказываются эквивалентными. Например, запись в форме стохастического дифференциального уравнения Ито имеет вид:

$$d\begin{bmatrix} \mathbf{x}_t^{(1)} \\ \mathbf{x}_t^{(2)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\mu & -2\delta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{x}_t^{(1)} \\ \mathbf{x}_t^{(2)} \end{bmatrix} dt + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -c & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{x}_t^{(1)} \\ \mathbf{x}_t^{(2)} \end{bmatrix} df_t, \tag{16.2}$$

где f_t — стандартный винеровский процесс.

Известно, что асимптотическая стохастическая устойчивость нулевого решения стохастического дифференциального уравнения (1.35), в частности, стохастического дифференциального уравнения (16.2), наступает тогда и только тогда, когда наибольший стохастический ляпуновский показатель $\lambda_1 = \limsup\limits_{t\to\infty} \ln|\mathbf{x}_t^{\mathbf{x}_0,0}|/t$ отрицателен ($\mathbf{x}_t^{\mathbf{x}_0,0}$ – означает, что для процесса $\mathbf{x}_t$ выполняется начальное условие $\mathbf{x}_0 = 0$).

Для вычисления λ_1 можно воспользоваться формулой [86]:

$$\lambda_{1,T}^{\Delta} = (N_T\Delta)^{-1} \sum_{k=1}^{N_T} \ln\left(|\mathbf{y}_k|/|\mathbf{y}_{k-1}|\right); \ \mathbf{y}_0^{(1)} = 1, \ \mathbf{y}_0^{(2)} = 0, \tag{16.3}$$

где $\mathbf{y}_k$ – приближенное значение $\mathbf{x}_{k\Delta} = (\mathbf{x}_{k\Delta}^{(1)} \ \mathbf{x}_{k\Delta}^{(2)})^{\mathsf{T}}$, полученное с помощью некоторой численной схемы для стохастического дифференциального уравнения (16.2) с постоянным шагом Δ; $k = 0, 1, \ldots, N_T$; $N_T = T/\Delta$; $|\mathbf{a}|$ — евклидова норма вектора $\mathbf{a}$.

Для вычисления λ_1 по формуле (16.3) удобнее воспользоваться слабыми численными методами для стохастического дифференциального уравнения [86].

Действительно, поскольку λ_1 неслучайна, то при достаточно большом N_T : $\lambda_{1,T}^{\Delta} \approx \mathsf{M}\{\lambda_{1,T}^{\Delta}\}$, где $\lambda_{1,T}^{\Delta}$ имеет вид (16.3). Если для вычисления $\lambda_{1,T}^{\Delta}$ используется слабый численный метод порядка точности γ, то при достаточно большом T: $|\lambda_{1,T}^{*\Delta} - \lambda_{1,T}^{\Delta}| \approx |\mathsf{M}\{\lambda_{1,T}^{*\Delta}\} - \mathsf{M}\{\lambda_{1,T}^{\Delta}\}| \le C\Delta^{\gamma}$, где C — постоянная, которая не зависит от Δ, а $\lambda_{1,T}^{*\Delta}$ отличается от $\lambda_{1,T}^{\Delta}$ заменой $\mathbf{y}_k$, $\mathbf{y}_{k-1}$ на $\mathbf{x}_{k\Delta}$, $\mathbf{x}_{(k-1)\Delta}$ соответственно.

Если же для вычисления $\lambda_{1,T}^{\Delta}$ используется сильный численный метод порядка точности γ, то из выполнения неравенства $\mathsf{M}\{|\mathbf{x}_T - \mathbf{y}_{N_T}|\} \le C\Delta^{\gamma}$ не следует выполнение неравенства $\mathsf{M}\{|\lambda_{1,T}^{\Delta} - \lambda_{1,T}^{*\Delta}|\} \le C_1\Delta^{\gamma}$, где постоянные C, C_1 не зависят от Δ и $N_T\Delta = T$.

Численный эксперимент 16.1. *Вычислить* $\lambda_{1,200}^{0.005}(c)$ *по формуле* (16.3) *при* $c = 0, 0.625, 1.25, 1.875, 2.5j$; $j = 1, 2, \ldots, 10$, *где* $\mathbf{y}_k = (\mathbf{y}_k^{(1)} \ \mathbf{y}_k^{(2)})^{\mathsf{T}}$ *получается с помощью применения неявного слабого численного метода порядка точности* 2.0 *вида* (10.50) *при* $\tilde{\alpha} = \frac{1}{2}$ *к стохастическому дифференциальному уравнению* (16.2):

$$\mathbf{y}_{k+1}^{(1)} = \mathbf{y}_k^{(1)} + 0.5\Delta\mathbf{y}_k^{(2)} + 0.5\Delta\mathbf{y}_{k+1}^{(2)},$$

$$\mathbf{y}_{k+1}^{(2)} = \mathbf{y}_k^{(2)} + 0.5\Delta\left(-\mu\mathbf{y}_k^{(1)} - 2\delta\mathbf{y}_k^{(2)}\right) +$$
$$+0.5\Delta\left(-\mu\mathbf{y}_{k+1}^{(1)} - 2\delta\mathbf{y}_{k+1}^{(2)}\right) + 0.5\sqrt{\Delta}\zeta_{0,k}\left(-2c\mathbf{y}_k^{(1)} - c\Delta\mathbf{y}_k^{(2)}\right)$$

или

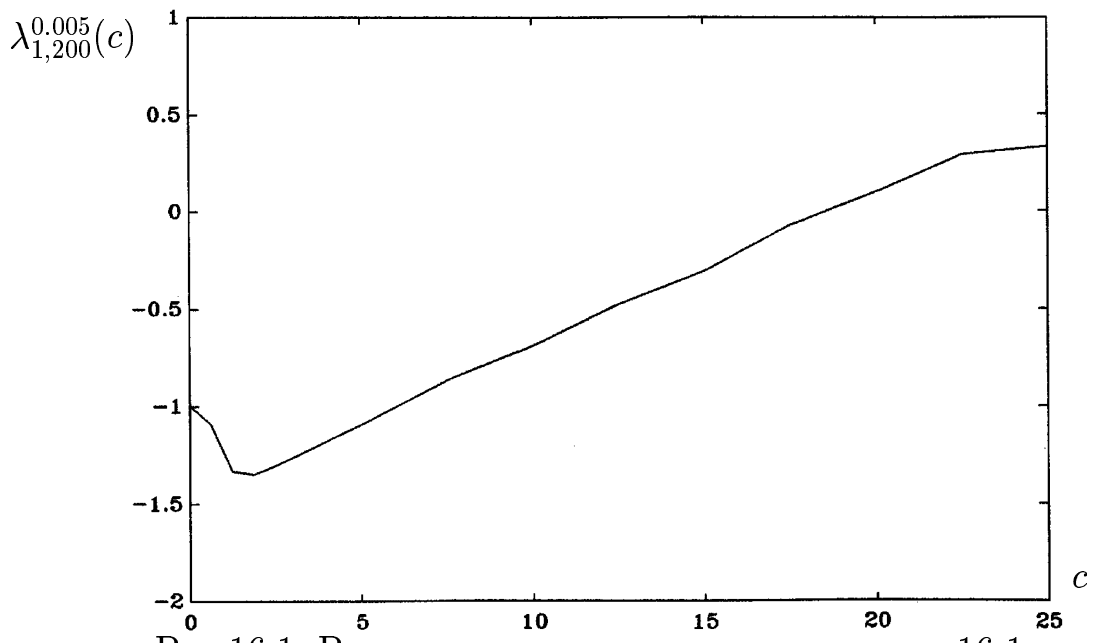

Рис.16.1. Результат численного эксперимента 16.1.

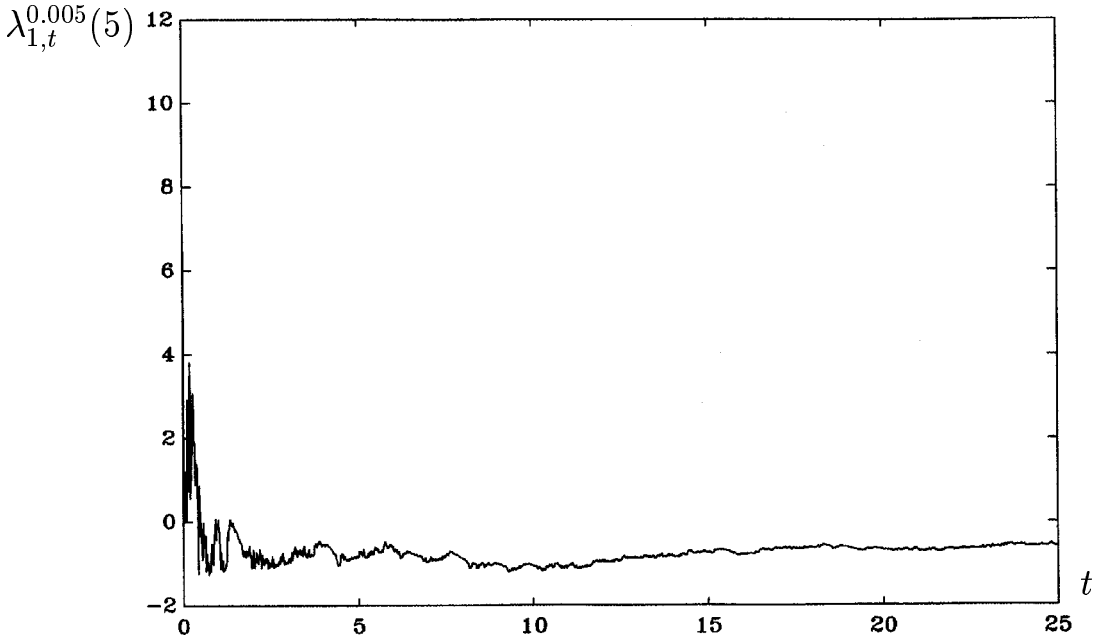

Рис.16.2. Результат численного эксперимента 16.1.

$$\mathbf{y}_{k+1}^{(1)} = \mathbf{y}_k^{(1)} + 0.5\Delta\mathbf{y}_k^{(2)} + 0.5\Delta\mathbf{y}_{k+1}^{(2)},$$

$$\mathbf{y}_{k+1}^{(2)} = \frac{1}{1 + 0.25\Delta^2\mu + \delta\Delta}\Big(\mathbf{y}_k^{(2)} - 0.5\Delta\left(\mu\mathbf{y}_k^{(1)} + 2\delta\mathbf{y}_k^{(2)}\right) -$$

$$-0.5\mu\Delta\left(\mathbf{y}_k^{(1)} + 0.5\Delta\mathbf{y}_k^{(2)}\right) - c\mathbf{y}_k^{(1)}\sqrt{\Delta}\zeta_{0,k} - 0.5\Delta^{3/2}c\zeta_{0,k}\mathbf{y}_k^{(2)}\Big);$$

здесь $\zeta_{0,k}(k = 0, 1, \ldots, N_T - 1)$ *— независимые стандартные гауссовские случайные величины;* $\delta = 2$; $\mu = 3$. *Построить графически зависимость* $\lambda_{1,200}^{0.005}(c)$; $c = 0, 0.625, 1.25, 1.875, 2.5j$; $j = 1, 2, \ldots, 10$ (рис.16.1) *и реализацию процесса* $\lambda_{1,25}^{0.005}(5)$ (рис.16.2).

Отметим, что при $c = 0$ система (16.2) при $\delta = 2$, $\mu = 3$ имеет $\lambda_1 = -1$ ($\lambda_{1,200}^{0.005}(0) \approx -0.9962$).

На рис.16.1 видно, что нулевое решение системы (16.2) теряет асимптотическую стохастическую устойчивость при $c \approx 18.9$. При этом при возрастании c от нуля стохастическое возмущение сначала стабилизирует систему (16.2), а затем при дальнейшем увеличении c снижает степень асимптотической стохастической устойчивости нулевого решения вплоть до ее потери при $c \approx 18.9$.

В [86] отмечается, что асимптотическая стохастическая устойчивость невозмущенного решения нелинейного стохастического дифференциального уравнения (1.35) в ряде случаев следует из стохастической асимптотической устойчивости нулевого решения соответствующего линеаризованного стохастического дифференциального уравнения.

Отметим, что подход к изучению стохастической устойчивости, основанный на стохастических функциях Ляпунова, требует нахождения соответствующих функций Ляпунова, что не всегда просто, а также дает, в отличие от подхода стохастических ляпуновских показателей, только достаточные условия асимптотической стохастической устойчивости.

16.2 Детерминированные численные методы интегрирования задачи Коши для уравнений параболического типа, основанные на вероятностном представлении решения

Рассмотрим задачу Коши для уравнения параболического типа

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \sum_{i=1}^{n} \mathbf{a}^{(i)}(\mathbf{x}, t, u) \frac{\partial u}{\partial \mathbf{x}^{(i)}} + \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^{n} B^{(ij)}(\mathbf{x}, t, u) \frac{\partial^2 u}{\partial \mathbf{x}^{(i)} \partial \mathbf{x}^{(j)}} +$$

$$+ g(\mathbf{x}, t, u) = 0, \ t_0 \le t < T, \ \mathbf{x} \in \Re^n, \tag{16.4}$$

$$u(\mathbf{x}, T) = \varphi(\mathbf{x}), \tag{16.5}$$

где $\mathbf{a}(\mathbf{x}, t) : \Re^n \times [0, T] \to \Re^n$; $B(\mathbf{x}, t) : \Re^n \times [0, T] \to \Re^{n \times n}$; $g(\mathbf{x}, t, u) : \Re^n \times [0, T] \times \Re^1 \to \Re^1$; $\varphi(\mathbf{x}) : \Re^n \to \Re^1$ — заданные функции, $u(\mathbf{x}, t) : \Re^n \times [0, T] \to \Re^1$ — решение задачи (16.4), (16.5).

Г.Н. Мильштейном [72] предложено семейство детерминированных численных методов решения задачи (16.4), (16.5), основанных на вероятностном представлении решения данной задачи и слабых численных методах решения стохастических дифференциальных уравнений Ито. Далее коснемся некоторых из предложенных в [72] численных методов для случая $n = 1$.

Известно [72], что решение задачи (16.4), (16.5) допускает вероятностное представление

$$u(\mathbf{x}, t) = \mathsf{M}\left\{\varphi(\mathbf{x}_T^{t,\mathbf{x}}) + z_T^{t,\mathbf{x},0}\right\}, \tag{16.6}$$

где $\left(\mathbf{x}_s^{t,\mathbf{x}}\ z_s^{t,\mathbf{x},0}\right)^{\mathsf{T}}$; $s \in [t, T]$ — решение следующей системы стохастических дифференциальных уравнений Ито:

$$d\begin{bmatrix}\mathbf{x}_s\\ z_s\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\mathbf{a}(\mathbf{x}_s, s, u(\mathbf{x}_s, s))\\ g(\mathbf{x}_s, s, u(\mathbf{x}_s, s))\end{bmatrix} ds + \begin{bmatrix}\Sigma(\mathbf{x}_s, s, u(\mathbf{x}_s, s))\\ O_{1\times n}\end{bmatrix} d\mathbf{f}_s,\ \begin{bmatrix}\mathbf{x}_t\\ z_t\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\mathbf{x}\\ 0\end{bmatrix}; \tag{16.7}$$

$\mathbf{f}_s$ — n-мерный стандартный винеровский процесс с независимыми компонентами; $B = \Sigma\Sigma^{\mathsf{T}}$; $O_{1\times n}$ — нулевая строка длины n.

Пусть $n = 1$. Рассмотрим разбиение промежутка $[t_0, T]$ узлами $\tau_p = t_0 + p\Delta$, $\Delta = (T - t_0)/N$; $p = 0, 1, \ldots, N$.

Воспользовавшись (16.6), получим

$$u(\mathbf{x}, \tau_k) = \mathsf{M}\left\{u(\mathbf{x}_{\tau_{k+1}}^{\tau_k,\mathbf{x}}, \tau_{k+1}) + z_{\tau_{k+1}}^{\tau_k,\mathbf{x},0}\right\}, \tag{16.8}$$

где $\left(\mathbf{x}_s^{\tau_k,\mathbf{x}}\ z_s^{\tau_k,\mathbf{x},0}\right)^{\mathsf{T}}$; $s \in [\tau_k, \tau_{k+1}]$ — решение системы (16.7) с начальным условием

$$(\mathbf{x}_{\tau_k}\ z_{\tau_k})^{\mathsf{T}} = (\mathbf{x}\ 0)^{\mathsf{T}}. \tag{16.9}$$

Запишем явный слабый метод Эйлера для системы (16.7), (16.9):

$$\bar{\mathbf{x}}_{\tau_{k+1}}^{\tau_k,\mathbf{x}} = \mathbf{x} + \mathbf{a}(\mathbf{x}, \tau_k, u(\mathbf{x}, \tau_k))\Delta + \Sigma(\mathbf{x}, \tau_k, u(\mathbf{x}, \tau_k))\sqrt{\Delta}\zeta_k, \tag{16.10}$$

$$\bar{z}_{\tau_{k+1}}^{\tau_k,\mathbf{x},0} = g(\mathbf{x}, \tau_k, u(\mathbf{x}, \tau_k))\Delta, \tag{16.11}$$

где ζ_k; $k = 0, 1, \ldots, N-1$ — независимые случайные величины, для которых $\mathsf{P}\{\zeta_k = \pm 1\} = 0.5$.

Далее, воспользовавшись (16.8), (16.10), (16.11), найдем

$$u(\mathbf{x}, \tau_k) \approx \mathsf{M}\left\{u(\bar{\mathbf{x}}_{\tau_{k+1}}^{\tau_k,\mathbf{x}}, \tau_{k+1}) + \bar{z}_{\tau_{k+1}}^{\tau_k,\mathbf{x},0}\right\} =$$

$$= 0.5u(\mathbf{x} + \mathbf{a}(\mathbf{x}, \tau_k, u(\mathbf{x}, \tau_k))\Delta + \Sigma(\mathbf{x}, \tau_k, u(\mathbf{x}, \tau_k))\sqrt{\Delta}, \tau_{k+1}) +$$

$$+0.5u(\mathbf{x} + \mathbf{a}(\mathbf{x}, \tau_k, u(\mathbf{x}, \tau_k))\Delta - \Sigma(\mathbf{x}, \tau_k, u(\mathbf{x}, \tau_k))\sqrt{\Delta}, \tau_{k+1}) +$$

$$+g(\mathbf{x}, \tau_k, u(\mathbf{x}, \tau_k))\Delta.$$

С помощью последнего равенства запишем соотношения [72]:

$$\bar{u}(\mathbf{x}, \tau_k) = 0.5\bar{u}(\mathbf{x} + \mathbf{a}(\mathbf{x}, \tau_k, \bar{u}(\mathbf{x}, \tau_k))\Delta + \Sigma(\mathbf{x}, \tau_k, \bar{u}(\mathbf{x}, \tau_k))\sqrt{\Delta}, \tau_{k+1}) +$$

$$+0.5\bar{u}(\mathbf{x} + \mathbf{a}(\mathbf{x}, \tau_k, \bar{u}(\mathbf{x}, \tau_k))\Delta - \Sigma(\mathbf{x}, \tau_k, \bar{u}(\mathbf{x}, \tau_k))\sqrt{\Delta}, \tau_{k+1}) +$$

$$+g(\mathbf{x}, \tau_k, \bar{u}(\mathbf{x}, \tau_k))\Delta, \tag{16.12}$$

$$\bar{u}(\mathbf{x}, \tau_N) = \varphi(\mathbf{x}); \ k = N-1, N-2, \ldots, 1, 0, \tag{16.13}$$

где $\bar{u}(\mathbf{x}, \tau_k)$ — аппроксимация $u(\mathbf{x}, \tau_k)$.

Алгоритм (16.12), (16.13) решения задачи (16.4), (16.5) является очевидно неявным. Для нахождения величины $\bar{u}(\mathbf{x}, \tau_k)$ при фиксированном k необходимо решить неявное уравнение (16.12). Эта процедура может быть осуществлена, например, с помощью метода простой итерации. Однако если в качестве начальной итерации взять $\bar{u}(\mathbf{x}, \tau_{k+1})$ [72], то на основе (16.12), (16.13) получим явный алгоритм решения задачи (16.4), (16.5)

$$\bar{u}(\mathbf{x}, \tau_k) = 0.5\bar{u}(\mathbf{x} + \mathbf{a}(\mathbf{x}, \tau_k, \bar{u}(\mathbf{x}, \tau_{k+1}))\Delta + \Sigma(\mathbf{x}, \tau_k, \bar{u}(\mathbf{x}, \tau_{k+1}))\sqrt{\Delta}, \tau_{k+1}) +$$

$$+0.5\bar{u}(\mathbf{x} + \mathbf{a}(\mathbf{x}, \tau_k, \bar{u}(\mathbf{x}, \tau_{k+1}))\Delta - \Sigma(\mathbf{x}, \tau_k, \bar{u}(\mathbf{x}, \tau_{k+1}))\sqrt{\Delta}, \tau_{k+1}) +$$

$$+g(\mathbf{x}, \tau_k, \bar{u}(\mathbf{x}, \tau_{k+1}))\Delta, \tag{16.14}$$

$$\bar{u}(\mathbf{x}, \tau_N) = \varphi(\mathbf{x}); \ k = N-1, N-2, \ldots, 1, 0. \tag{16.15}$$

В [72] приведены различные модификации алгоритма (16.14), (16.15), а также алгоритмы решения задачи (16.4), (16.5) при $n = 1$, основанные на более точных слабых численных методах решения стохастических дифференциальных уравнений Ито. Кроме того, в [72] построены алгоритмы решения задачи (16.4), (16.5) при $n = 2$, основанные на описанном ранее подходе.

Оценка скорости сходимости алгоритма (16.14), (16.15) дается следующей теоремой.

Теорема 16.1 [72]. *Пусть выполнены следующие условия:*

1. *Для всех* $t \in [t_0, T]$, $x \in \Re^1$, $u \in [U_1, U_2]$, $-\infty \le U_1 < U_2 \le +\infty$; U_1, U_2 *— постоянные, справедливо*

$$|\mathbf{a}(x, t, u)| + |\Sigma(x, t, u)| + |g(x, t, u)| \le K.$$

2. *Для всех* $t \in [t_0, T]$, $x_1, x_2 \in \Re^1$, $u_1, u_2 \in [U_1, U_2]$ *имеет место*

$$|\mathbf{a}(x_2, t, u_2) - \mathbf{a}(x_1, t, u_1)| + |\Sigma(x_2, t, u_2) - \Sigma(x_1, t, u_1)| +$$

$$+|g(x_2,t,u_2)-g(x_1,t,u_1)| \le K(|x_2-x_1|+|u_2-u_1|).$$

3. *Существует только ограниченное решение* $u(x,t)$ *задачи* (16.4), (16.5)*:* $u(x,t)\in[u^*,u^{**}]$, $U_1<u^*$, $u^{**}<U_2$, *для всех* $t\in[t_0,T]$, $x\in\Re^1$.

4. *Для всех* $t\in[t_0,T]$, $x\in\Re^1$: $\left|\frac{\partial^m u}{\partial t^i \partial x^l}\right| \le K$, *где* $i=0, l=1,2,3,4$; $i=1, l=0,1,2$; $i=2, l=0$ (*предполагается, что указанные частные производные существуют*).

Тогда

$$|\bar u(x,\tau_k)-u(x,\tau_k)| \le K_1\Delta, \tag{16.16}$$

где постоянные K, K_1 *не зависят от* Δ, x, k.

Введем дискретизацию переменной x (далее скаляр $\mathbf{x}$ обозначаем через x): $x_j = x_0 + j\alpha\Delta$; $j=0,\pm1,\pm2,\ldots$; $x_0\in\Re^1$, $\alpha>0$. Тогда из (16.14), (16.15), воспользовавшись линейной интерполяцией, получим следующий численный метод [72]:

$$\bar u(x_j,\tau_k) = 0.5\bar u(x_j+\mathbf{a}(x_j,\tau_k,\bar u(x_j,\tau_{k+1}))\Delta+\Sigma(x_j,\tau_k,\bar u(x_j,\tau_{k+1}))\sqrt{\Delta},\tau_{k+1})$$

$$+0.5\bar u(x_j+\mathbf{a}(x_j,\tau_k,\bar u(x_j,\tau_{k+1}))\Delta-\Sigma(x_j,\tau_k,\bar u(x_j,\tau_{k+1}))\sqrt{\Delta},\tau_{k+1})$$

$$+g(x_j,\tau_k,\bar u(x_j,\tau_{k+1}))\Delta, \tag{16.17}$$

$$\bar u(x,\tau_N)=\varphi(\mathbf{x}), \tag{16.18}$$

$$\bar u(x,\tau_k) = \frac{x_{j+1}-x_j}{\alpha\Delta}\bar u(x_j,\tau_k)+\frac{x-x_j}{\alpha\Delta}\bar u(x_{j+1},\tau_k);\ x_j<x<x_{j+1}; \tag{16.19}$$

$k=N-1,N-2,\ldots,1,0$; $j=0,\pm1,\pm2,\ldots$.

В [72] показано, что в условиях теоремы 16.1 для функции $\bar u(x,\tau_k)$ вида (16.19) справедлива оценка (16.16).

Отметим, что в описанных численных методах вычисления проводятся для "отрицательного" направления времени, т. е. для k от $N-1$ до нуля. Это неудобство может быть преодолено, если коэффициенты уравнения (16.4) и функция g явно не зависят от t. В частности, в таком случае для уравнения (16.4) с начальным условием $u(x,0)=\varphi(x)$ при $n=1$, $t>0$ на основе численного метода (16.17)–(16.19) нетрудно получить следующий алгоритм с "положительным" направлением времени [72]:

$$\bar u(x_j,\tau_{k+1}) = 0.5\bar u(x_j+\mathbf{a}(x_j,\bar u(x_j,\tau_k))\Delta+\Sigma(x_j,\bar u(x_j,\tau_k))\sqrt{\Delta},\tau_k)+$$

$$+0.5\bar u(x_j+\mathbf{a}(x_j,\bar u(x_j,\tau_k))\Delta-\Sigma(x_j,\bar u(x_j,\tau_k))\sqrt{\Delta},\tau_k)+g(x_j,\bar u(x_j,\tau_k))\Delta, \tag{16.20}$$

$$\bar u(x,0)=\varphi(\mathbf{x}), \tag{16.21}$$

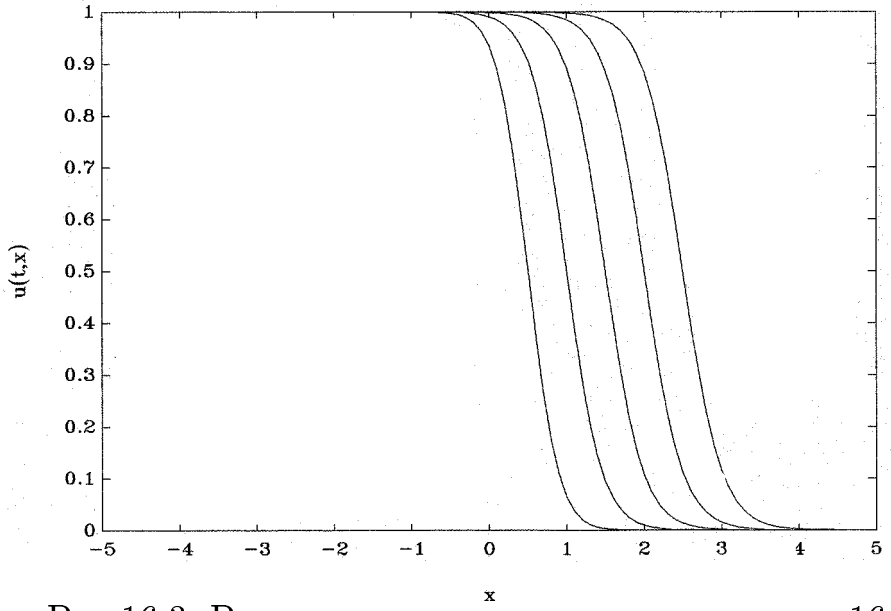

Рис.16.3. Результат численного эксперимента 16.2.

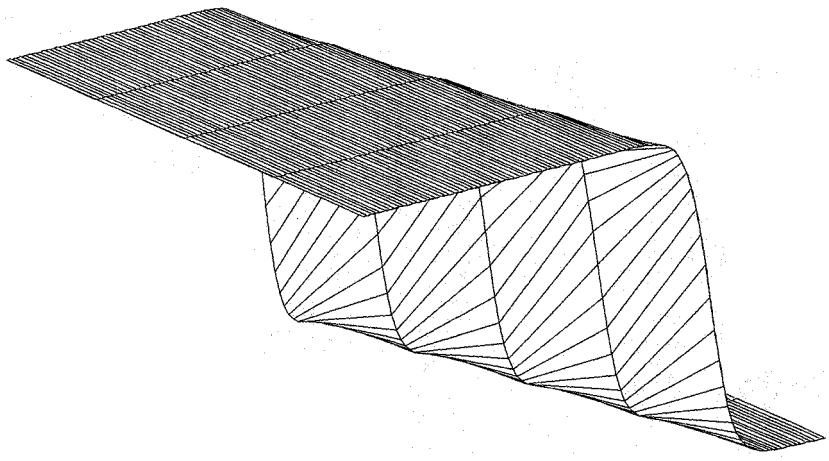

Рис.16.4. Результат численного эксперимента 16.2.

$$\bar{u}(x,\tau_k) = \frac{x_{j+1}-x_j}{\alpha\Delta}\bar{u}(x_j,\tau_k) + \frac{x-x_j}{\alpha\Delta}\bar{u}(x_{j+1},\tau_k);\ x_j < x < x_{j+1}; \quad (16.22)$$

$\tau_k = k\Delta$; $k = 0, 1, \ldots, N-1$; $j = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$.

В заключение приведем численный пример [72], иллюстрирующий применение численного метода (16.20)–(16.22).

Рассмотрим следующую задачу Коши для уравнения Бюргерса [72]:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{1}{2}\sigma^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - u\frac{\partial u}{\partial x},\ t > 0, x \in \Re^1, \quad (16.23)$$

$$u(x,0) = \begin{cases} 1 & \text{при } x < 0 \\ 0 & \text{при } x \geq 0 \end{cases}. \quad (16.24)$$

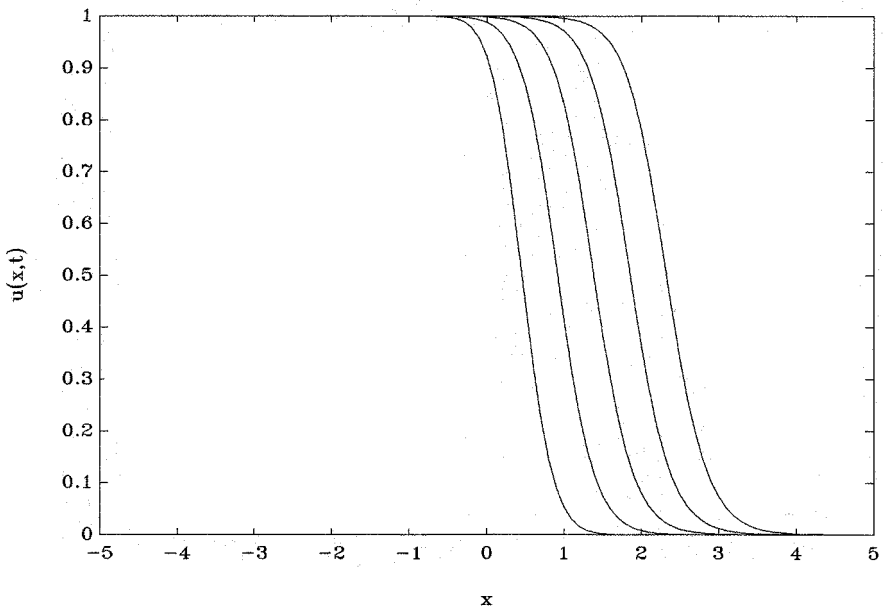

Рис.16.5. Результат численного эксперимента 16.3.

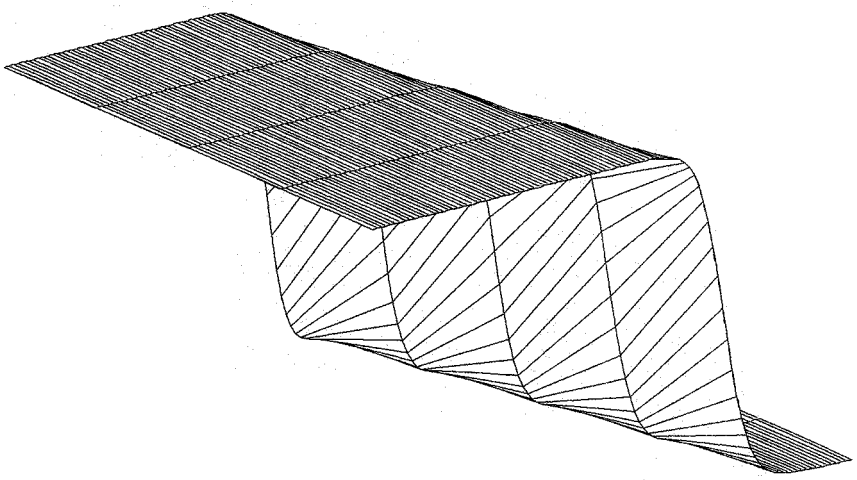

Рис.16.6. Результат численного эксперимента 16.3.

Известно [72], что точное решение задачи (16.23), (16.24) имеет вид

$$u(x,t) = 1 - \frac{G(-x/\sqrt{2\sigma^2 t})}{G(-x/\sqrt{2\sigma^2 t}) + \exp((t-2x)/(2\sigma^2))\left(2 - G((t-x)/\sqrt{2\sigma^2 t})\right)}, \tag{16.25}$$

$$G(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int\limits_x^{+\infty} e^{-z^2} dz. \tag{16.26}$$

Численный эксперимент 16.2. *Смоделировать решение задачи* (16.23), (16.24) *по формулам* (16.25), (16.26) *при* $t = 1, 2, 3, 4, 5$; $x =$

$j\Delta$; $j = 0, \pm 1, \ldots, \pm 50$; $\Delta = 0.1$. *Изобразить графически зависимости* $u(x,t)$; $t = 1, 2, 3, 4, 5$, *а также трехмерную поверхность* $v = u(x,t)$ (рис. 16.3, 16.4).

Численный эксперимент 16.3. *Повторить численный эксперимент* 16.2, *используя алгоритм* (16.20)–(16.22) (рис. 16.5, 16.6).

Численные эксперименты, аналогичные 16.2, 16.3 рассмотрены в [72]. Численное моделирование проводилось здесь независимо и дало хорошее совпадение с результатами работы [72] (см. рис.16.3–16.6).

Отметим, что детерминированным численным методам интегрирования задач Коши, Дирихле и Неймана, основанным на вероятностном представлении решений этих задач посвящены несколько глав монографии [186].

16.3 Численное интегрирование задачи Коши для уравнений параболического типа, основанное на прямом статистическом моделировании

Рассмотрим менее общую задачу Коши, чем задача (16.4), (16.5), для уравнений параболического типа:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2 u}{\partial \mathbf{x}^{(i)} \partial \mathbf{x}^{(i)}} + c(\mathbf{x}, t)u = 0, \tag{16.27}$$

$$u(\mathbf{x}, T) = \varphi(\mathbf{x}, T), \tag{16.28}$$

где $t_0 \le t < T$; $\mathbf{x} \in \Re^n$; $c(\mathbf{x}, t) : \Re^n \times [0, T] \to \Re^1$.

Вероятностное представление задачи (16.27), (16.28) имеет вид

$$u(\mathbf{x}, t) = \mathsf{M}\left\{\varphi(\mathbf{f}_T^{t,\mathbf{x}}, T)\exp\left(\int_t^T c(\mathbf{f}_s^{t,\mathbf{x}}, s)ds\right)\right\}, \tag{16.29}$$

где $\mathbf{f}_s^{t,\mathbf{x}}; s \ge t$ — n-мерный стандартный винеровский процесс с независимыми компонентами, стартующий из точки $\mathbf{x} \in \Re^n$ в момент времени t.

Рассмотрим $(n+1)$-мерный процесс Ито, описываемый стохастическим дифференциальным уравнением Ито вида

$$d\begin{bmatrix} \mathbf{x}_s \\ y_s \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} O_{n\times 1} \\ c(\mathbf{x}_s, s) \end{bmatrix} ds + \begin{bmatrix} I_{n\times n} \\ O_{1\times n} \end{bmatrix} d\mathbf{f}_s, \ \begin{bmatrix} \mathbf{x}_t \\ y_t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{x} \\ 0 \end{bmatrix}, \tag{16.30}$$

где $\mathbf{f}_s$, $s \geq t$ имеет тот же смысл, что и $\mathbf{f}_s^{t,\mathbf{x}}$; $s \geq t$ в (16.29); $y \in \Re^1$; $I_{n\times n}$, $O_{1\times n}$, $O_{n\times 1}$ — единичная $(n \times n)$-матрица, нулевая строка и нулевой столбец длины n соответственно.

Нетрудно заметить, что правая часть (16.29) может быть переписана в форме $\mathsf{M}\{g(\mathbf{z}_T)\}$, где

$$\mathbf{z}_s = [\mathbf{x}_s \ y_s]^{\mathsf{T}}; \ g(\mathbf{h}) = \varphi(\mathbf{h}^{(1)}, \ldots, \mathbf{h}^{(n)}, T)e^{\mathbf{h}^{(n+1)}};$$

$\mathbf{h} = (\mathbf{h}^{(1)}, \ldots, \mathbf{h}^{(n+1)})$; $[\mathbf{x}_s \ y_s]^{\mathsf{T}}$ — решение системы (16.30).

Из сказанного следует, что для численной реализации формулы (16.29) можно воспользоваться слабыми численными методами решения стохастического дифференциального уравнения (16.30). Отметим, что описанный подход к численному интегрированию задачи (16.27), (16.28) представлен, в частности, в данной трактовке в [70, 86, 87].

В [86] рассмотрено численное моделирование правой части (16.29), основанное на слабом явном методе Эйлера, слабом экстраполяционном методе порядка точности 2.0, неявном слабом конечно-разностном методе порядка точности 2.0, а также на слабых экстраполяционных численных методах порядка точности 4.0 для системы (16.30).

В [174] (см. также [86]) построен слабый численный метод порядка точности 4.0 специально для системы стохастических дифференциальных уравнений Ито вида

$$d\begin{bmatrix}\mathbf{x}_s\\ y_s\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}O_{n\times 1}\\ c(\mathbf{x}_s, s)y_s\end{bmatrix} ds + \begin{bmatrix}I_{n\times n}\\ O_{1\times n}\end{bmatrix} d\mathbf{f}_s, \ \begin{bmatrix}\mathbf{x}_t\\ y_t\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\mathbf{x}\\ 1\end{bmatrix}, \ s \geq t. \qquad (16.31)$$

Здесь сохранен смысл обозначений, введенных в (16.30).

Нетрудно видеть, что правая часть (16.29) при $\varphi \equiv 1$ может быть представлена в виде $\mathsf{M}\{y_T\}$, где y_T определяется из системы (16.31).

Отметим, что слабый метод Эйлера записывается для системы (16.30) и постоянного шага Δ в виде

$$\bar{\mathbf{x}}_{(p+1)\Delta}^{(l)} = \bar{\mathbf{x}}_{p\Delta}^{(l)} + \Delta\tilde{\mathbf{f}}_p^{(l)}; \ l = 1, \ldots, n, \qquad (16.32)$$

$$\bar{y}_{(p+1)\Delta} = \bar{y}_{p\Delta} + c(\hat{\mathbf{x}}_{p\Delta}, p\Delta)\Delta, \qquad (16.33)$$

где $\hat{\mathbf{x}}_0 = \mathbf{x}$; $\bar{y}_0 = 0$; $\hat{\mathbf{x}}_{p\Delta} = (\bar{\mathbf{x}}_{p\Delta}^{(1)} \ldots \bar{\mathbf{x}}_{p\Delta}^{(n)})^{\mathsf{T}}$; $p = 0, 1, \ldots, N_T - 1$; $T = N_T\Delta$. При этом случайные величины $\Delta\tilde{\mathbf{f}}_p^{(l)}$; $l = 1, \ldots, n$; $p = 0, 1, \ldots, N_T - 1$ независимы и распределены по закону $\mathrm{N}(0, \Delta)$ или по закону

$$\mathsf{P}\{\Delta\tilde{\mathbf{f}}_p^{(l)} = \pm\sqrt{\Delta}\} = 0.5. \qquad (16.34)$$

В терминах решения системы (16.30) усредняемое в правой части (16.29) выражение можно записать следующим образом:

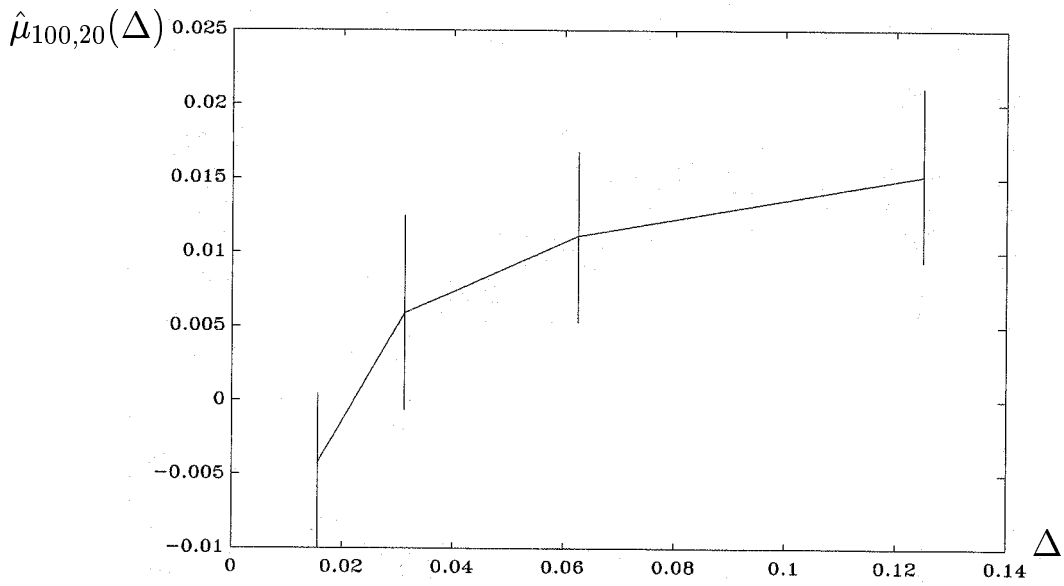

Рис.16.7. Результат численного эксперимента 16.4.

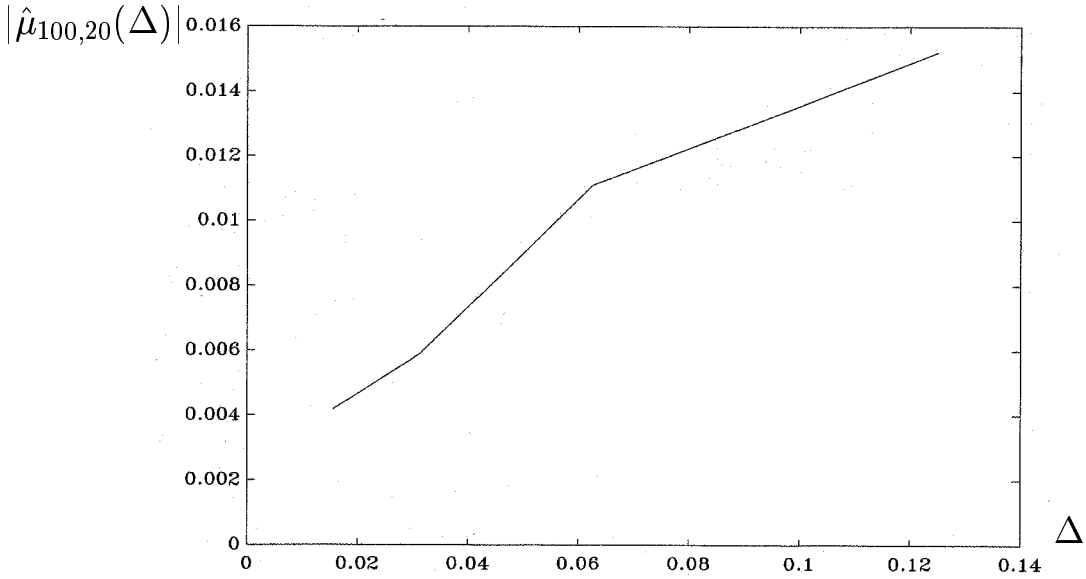

Рис.16.8. Результат численного эксперимента 16.4.

$$F_{t,\mathbf{x}}(T) = \varphi(\mathbf{x}_T, T)e^{y_T}. \tag{16.35}$$

В [86], в частности, приведена формула для численного моделирования $F_{t,\mathbf{x}}(T)$ вида (16.35), основанная на численной схеме (16.32), (16.33):

$$\hat{F}^{\Delta}_{t,\mathbf{x}}(T) = \varphi(\bar{\mathbf{x}}_{N_T\Delta}, N_T\Delta)\exp\Big(\Delta \sum_{p=0}^{N_T-1} c(\hat{\mathbf{x}}_{p\Delta}, p\Delta)\Big), \tag{16.36}$$

где $T = N_T\Delta$. При этом согласно тому, что метод Эйлера имеет порядок слабой сходимости $\gamma = 1.0$, имеем $\left|\mathsf{M}\{F_{t,\mathbf{x}}(T)\} - \mathsf{M}\{\hat{F}^{\Delta}_{t,\mathbf{x}}(T)\}\right| \le K\Delta$, где постоянная K не зависит от $\Delta, t, \mathbf{x}$.

В заключение рассмотрим численный пример [70, 86], иллюстрирующий описанный подход.

Положим

$$n = 1,\ \varphi(x,t) \equiv 1,\ c(x,t) = -x^2/2,\ \mathbf{x}^{(1)} \stackrel{\text{def}}{=} x \in \Re^1. \tag{16.37}$$

Известно [70] (см. также [86]), что функция

$$u(x,t) = \exp\left(0.5(T - t - x^2 \mathrm{th}(T-t)\right)\sqrt{2/(1+e^{2(T-t)})}, \tag{16.38}$$

где $\mathrm{th} y \stackrel{\text{def}}{=} (e^y - e^{-y})(e^y + e^{-y})$; $t \in [0,T]$; $x \in \Re^1$, является решением задачи (16.27), (16.28) в условиях (16.37). Из (16.38) следует, что $u(0,0) = \sqrt{2e^T/(1+e^{2T})} \stackrel{\text{def}}{=} U$.

Численный эксперимент 16.4 [86]. *Смоделировать* 2000 *независимых реализаций* ($M = 20$ *групп по* $N = 100$ *реализаций*) *случайной величины* $\hat{F}^{\Delta}_{t,\mathbf{x}}(T)$ *вида* (16.36) *при* $x = t = 0$, $\Delta = 2^{-3}$, $T = 1$ *с помощью численной схемы* (16.32)–(16.34) *и вычислить оценку* $\hat{\mu}_{100,20}$ *ошибки* $\mu = \mathsf{M}\{\hat{F}^{\Delta}_{0,0}(1)\} - U$ *по формуле* (10.2). *Построить* 90%*-й доверительный интервал для* μ. *Повторить вычисления для* $\Delta = 2^{-j}$; $j = 4, 5, 6$. *Изобразить графически зависимость* $\hat{\mu}_{100,20}(\Delta)$ *с соответствующими доверительными интервалами, а также зависимость* $|\hat{\mu}_{100,20}(\Delta)|$.

Результат выполнения численного эксперимента 16.4 изображен на рис.16.7, 16.8. Вычисления проводились здесь независимо, и результаты дали достаточно хорошее совпадение с результатами, полученными в [86].

16.4 Численное решение задачи Коши для уравнений параболического типа с помощью слабых численных методов и метода Монте-Карло

Рассмотрим нелинейную задачу теплопроводности:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x}\left((2 - \mathrm{th} x)\frac{\partial u}{\partial x}\right), \tag{16.39}$$

$$u(x,0) = 1/(1 + (x-1)^8),\ x \in \Re^1,\ t > 0. \tag{16.40}$$

Эта задача моделирует "растекание" начального распределения температуры (16.40) вблизи стыка двух материалов с существенно различными коэффициентами теплопроводности.

Запишем вероятностное представление решения задачи (16.39), (16.40):

$$u(x,t) = \mathsf{M}\{1/(1 + (\xi_t^{0,x} - 1)^8)\}, \tag{16.41}$$

где $\xi_s^{0,x} \stackrel{\text{def}}{=} \xi_s$; $0 < s < t$; $t > 0$ — решение стохастического дифференциального уравнения Ито вида

$$d\xi_s = -\mathrm{ch}^{-2}\xi_s ds + \sqrt{2(2 - \mathrm{th}\xi_s)}dw_s;\ \xi_0 = x,$$

w_s — скалярный стандартный винеровский процесс.

Для численного решения данной задачи применим, построенный автором слабый численный метод четвертого порядка (10.21), (10.25)–(10.33).

Численный эксперимент 16.5 (рис.16.9). *Реализовать численно соотношение* (16.41) *с помощью метода Монте–Карло и слабого численного метода* 4 *порядка* (10.21), (10.25)–(10.33) *по формуле:*

$$u(x,t) \approx \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}(1 + (y_{t,i}^{0,x} - 1)^8)^{-1}$$

при $N = 1000$, $t = 1$; $y_t^{0,x}$ *— приближенное значение случайной величины* $\xi_t^{0,x}$, *полученное с помощью численного метода* (10.21), (10.25)–(10.33) *при постоянном шаге интегрирования* $\Delta = 2^{-5}$; $y_{t,i}^{0,x}$ $(i = 1,\ldots,N)$ *— независимые реализации случайной величины* $y_t^{0,x}$. *Изобразить график решения* $u(x,1)$ *кружками. Повторить вычисление* $u(x,1)$ *с помощью метода конечных элементов и изобразить график* $u(x,1)$ *сплошной линией.*

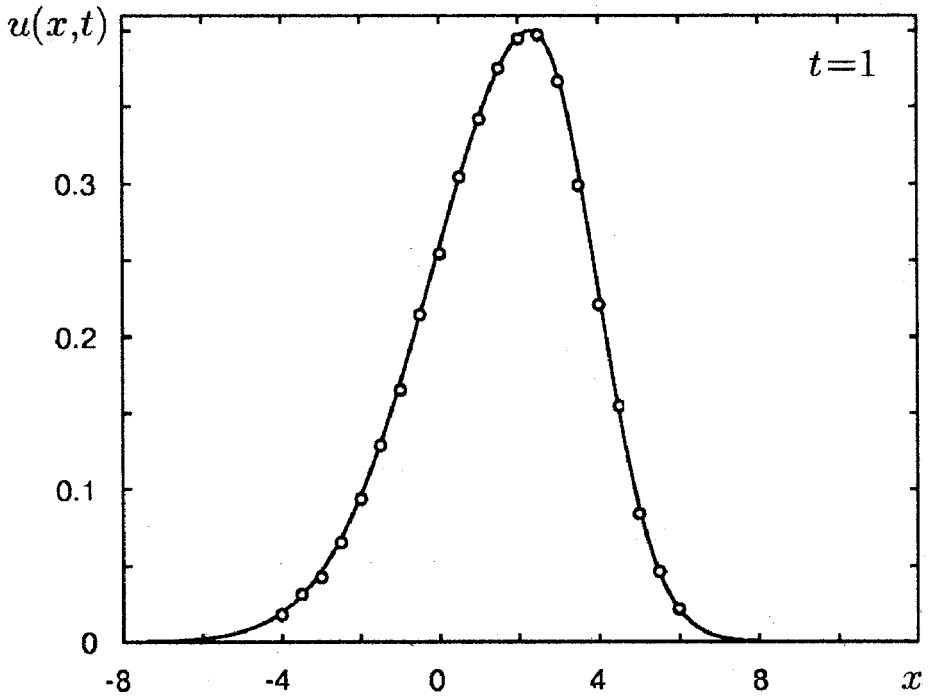

Рис.16.9. Результат численного эксперимента 16.5.

Глава 17

MATLAB 7.0-программы для некоторых численных экспериментов по тексту книги

17.1 Введение

Приведенные в данной главе, а также в главе 13 тексты программ в системе MATLAB 7.0 являются по большей части переработанными программами, написанными автором в период с 1992 по 2002 годы во время его работы над кандидатской и докторской диссертациями (исходные тексты программ были написаны на MATLAB 3.5 и 5.2 и переведены на MATLAB 7.0 специально для данного издания). При этом автор использовал руководство [185]. Программы снабжены достаточно подробными комментариями, что облегчает их чтение.

По оценкам автора время работы каждой из приведенных в данной книге компьютерных программ должно колебаться в пределах от долей секунды до 30 секунд (за исключением некоторых программ для численных экспериментов из главы 10, для которых ряд параметров в текстах программ специально был существенно увеличен с целью получения более качественных результатов статистических расчетов, что соответственно увеличило время работы программ до 1 – 3 минут) при использовании на PC Intel Pentium 4 2.8 GHz.

Данная глава, также как и глава 13, будет в первую очередь интересна лицам, интересующимся вычислительной математикой и компьютерными методами для PC, но не являющимися специалистами в области численного интегрирования стохастических дифференциальных уравнений. Она позволит им освоить азы новой для себя области посредством практики на PC, а также получить представление о современном состоянии данной научной проблемы. Указанный материал представит также интерес для специалистов в области програм-

мирования, создающих пакеты компьютерных программ, поскольку алгоритмы и программы из данной монографии могут быть отправной точкой для создания серьезного программного обеспечения для численного решения систем линейных и нелинейных стохастических дифференциальных уравнений, а также для численного решения математических задач, связанных со стохастическими дифференциальными уравнениями.

Несомненно, что стохастические дифференциальные уравнения в противоположность обыкновенным дифференциальным уравнениям являются гораздо более новым и сложным для исследования математическим объектом. Необходимость их изучения, в том числе с помощью компьютерных методов, вызвана большим числом и важностью их приложений (см. главу 2 данной книги, а также [86, 87, 186]).

Современные тенденции в вычислительной математике позволяют предположить, что в ближайшие десятилетия будет создано серьезное и, в то же время, доступное широкому кругу пользователей программное обеспечение для численного интегрирования стохастических дифференциальных уравнений. Автор надеется, что настоящая монография внесет свой вклад в течение этого процесса.

Прежде чем перейти непосредственно к текстам программ, напомним, что в системе MATLAB 7.0 генерация случайной величины с распределением $\mathrm{N}(0,1)$ осуществляется [185] с помощью функции `randn`.

Если требуется сгенерировать матрицу A размера $m \times n$, элементы которой независимы и имеют распределене $\mathrm{N}(0,1)$, то это делается следующим образом [185]: `A=randn(m,n)`.

Команды `randn('state',0)`, `randn('state',j)` сбрасывают генератор в начальное состояние и в j-е состояние соответственно (для целых j) [185].

В дальнейшем, в приводимых текстах программ в системе MATLAB 7.0, указанные команды будут встречаться очень часто.

17.2 MATLAB 7.0-программы к главе 6

17.2.1 Программа для моделирования стохастического интеграла (6.40) при $i_1 \neq i_2$ с выбором числа q из условия (6.52)

```
clear;
dt=0.1;       %LENGTH OF INTERVAL OF INTEGRATION
eps=0.00001;   %MEAN-SQUARE ACCURACY
```

```
ee=(dt^2)/4;   %SECONDARY VARIABLE
pause;
s=0; i=1;
    while ee >= eps,  %CHOOSING OF MIN q
       s=s+1/(4*i*i-1);
       ee=((dt^2)/2)*(1/2-s)
       i=i+1
       pause;
    end;
q=i;
u=randn(1,q+1);        %MODELLING OF
v=randn(1,q+1);        %MULTIPLE STOCHASTIC
s=u(1,1)*v(1,1);       %INTEGRAL
    for i=1:q,
        d(i)=1/(sqrt(4*i*i-1));
s=s+d(i)*(v(1,i)*u(1,i+1)-v(1,i+1)*u(1,i));
    end;
      ui00=s*dt*0.5   %MULTIPLE STOCHASTIC INTEGRAL
pause;
```

17.2.2 Программа для моделирования стохастического интеграла (6.41) при $i_1 \neq i_2$ с выбором числа q из условия (6.53)

```
clear;
dt=0.1;      %LENGTH OF INTERVAL OF INTEGRATION
eps=0.0000001   %MEAN-SQUARE ACCURACY
ee=(dt^2)/4;
pause;
s1=0; s2=0; i=1;
    while ee >= eps,  %CHOOSING OF MIN q
       s1=s1+1/(((2*i-1)^2)*((2*i+3)^2))+...
          2/(4*i*i-1);
       s2=s2+((i+2)^2+(i+1)^2)/((2*i+1)*...
          (2*i+5)*((2*i+3)^2));
       ee=((dt^4)/16)*(10/9-s1-s2)
       i=i+1
       pause;
   end;
q=i;
u=rand(1,q+3);    %MODELLING OF MULTIPLE
v=rand(1,q+3);    %STOCHASTIC INTEGRAL
s=u(1,1)*v(1,1)+(1/(sqrt(3)))*v(1,1)*u(1,2);
    for i=1:q,
        d(i)=1/(sqrt(4*i*i-1));
        f(i)=1/((2*i-1)*(2*i+3));
        h(i)=(2*i+3)*sqrt((2*i+1)*(2*i+5));
        q(i)=(i+2)/h(i);
        r(i)=(i+1)/h(i);
```

```
s=s+d(i)*(v(1,i)*u(1,i+1)-v(1,i+1)*u(1,i))+...
  q(i)*v(1,i+1)*u(1,i+3)-r(i)*u(1,i+1)*v(1,i+3)-...
  f(i)*v(1,i+1)*u(1,i+1);
    end;
ui01=-s*(dt^2)*0.25   %MULTIPLE STOCHASTIC INTEGRAL
pause;
```

17.2.3 Программа для проверки условия (6.53)

```
clear;
s1=0; s2=0; s3=0;
jj=10000;
  for i=1:jj,
    s1=s1+2/(4*(i^2)-1);
    s2=s2+1/(((2*i-1)^2)*((2*i+3)^2));
    s3=s3+((i+2)^2+(i+1)^2)/((2*i+1)*...
       (2*i+5)*((2*i+3)^2));
  end;
s=10/9-s1-s2-s3
pause;
```

17.2.4 Программа для проверки формулы (6.87)

```
   clear;
   s1=0; s2=0; s3=0;
   jj=10000;
   for i=1:jj,
     s1=s1+1/(i^2);
     s2=s2+1/(i^4);
   end;
      for i=1:jj,
         for j=1:jj,
             if j-i<0,
   s3=s3+(5*(i^4)+...
      4*(j^4)-3*(i^2)*(j^2))/(((j*i)^2)*((i^2-j^2)^2));
                  elseif j-i>0,
   s3=s3+(5*(i^4)+...
      4*(j^4)-3*(i^2)*(j^2))/(((j*i)^2)*((i^2-j^2)^2));
                  else
               k=10;
             end;
         end;
     end;
   s=4/45-(1/(4*pi*pi))*s1-...
     (55/(32*(pi^4)))*s2-(1/(4*(pi^4)))*s3
   pause;
```

17.2.5 Программа для совместного численного моделирования стохастических интегралов $I_{0_{T,t}}^{(1)}$, $I_{1_{T,t}}^{(1)}$, $I_{00_{T,t}}^{(21)}$, $I_{000_{T,t}}^{(321)}$ по формулам (6.37), (6.38), (6.40), (6.44)

Числа q, q_1 выбираются из условий (6.146), (6.147) при $T - t = 0.05020$ и равны соответственно 51 и 2.

```
clear;
dt=0.05020;  %LENGTH OF INTERVAL OF INTEGRATION
             %OF MULTIPLE STOCHASTIC INTEGRALS
randn('state', 0);
u=randn(1,52); %STANDARD GAUSSIAN
v=randn(1,52); %RANDOM VARIABLES
w=randn(1,3);
               %STOCHASTIC INTEGRALS OF 1-ST MULTIPLICITY
   ui0=sqrt(dt)*u(1,1)
   ui1=(dt^(3/2))*(u(1,1)+(1/sqrt(3))*u(1,2))
               %STOCHASTIC INTEGRAL OF 2-ND MULTIPLICITY
s=u(1,1)*v(1,1);
   for i=1:51,
       d(i)=1/(sqrt(4*i*i-1));
       s=s+d(i)*(v(1,i)*u(1,i+1)-v(1,i+1)*u(1,i));
   end;
ui00=s*dt*0.5
               %STOCHASTIC INTEGRAL OF 3-RD MULTIPLICITY
c000=1/6; c100=-(1/(4*sqrt(3)));
c200=1/(12*sqrt(5)); c110=1/20;
c210=-(1/(4*sqrt(15))); c020=-(1/(6*sqrt(5)));
c120=(1/(4*sqrt(15))); c220=1/84;
c001=1/(4*sqrt(3)); c101=-1/10;
c011=1/20; c211=-(1/(14*sqrt(5)));
c021=-(1/(4*sqrt(15))); c121=(1/(7*sqrt(5)));
c002=(1/(12*sqrt(5))); c202=-(1/42);
c012=(1/(4*sqrt(15))); c112=-(1/(14*sqrt(5))); c022=1/84;
t1=(c000*u(1,1)+c100*u(1,2)+c200*u(1,3))*v(1,1);
t2=(c110*u(1,2)+c210*u(1,3))*v(1,2);
t3=(c020*u(1,1)+c120*u(1,2)+c220*u(1,3))*v(1,3);
tt1=(t1+t2+t3)*w(1,1);
t4=(c001*u(1,1)+c101*u(1,2))*v(1,1);
t5=(c011*u(1,1)+c211*u(1,3))*v(1,2);
t6=(c021*u(1,1)+c121*u(1,2))*v(1,3);
tt2=(t4+t5+t6)*w(1,2);
t7=(c002*u(1,1)+c202*u(1,3))*v(1,1);
t8=(c012*u(1,1)+c112*u(1,2))*v(1,2);
t9=(c022*u(1,1))*v(1,3);
tt3=(t7+t8+t9)*w(1,3);
ui000=(dt^(3/2))*(tt1+tt2+tt3)
  pause;
```

17.3 MATLAB 7.0-программы к главе 7

17.3.1 Программа для численного эксперимента 7.1

```
clear;
t0=0; tk=1; %INTERVAL OF INTEGRATION
a=1.5; b=1.5; %COEFFICIENTS OF SDE
st=1.73;      %COEFFICIENT FOR 90% CONFIDENCE INTERVAL
  for jj=3:7,
     dt=1/(2^jj);  %STEP OF INTEGRATION ON jj-TH ITERATION
     randn('state', 0);
     t=t0:dt:tk;
     l=max(size(t))-1;
     he=0;
        for i=1:20*100,
           x(1)=1; y(1)=1; sw=0;
              for p=1:l,
                 u=randn; sw=sw+u;
            %EXACT SOLUTION AND STRONG EULER METHOD
  x(p+1)=x(1)*expm((a-0.5*(b^2))*p*dt+b*sqrt(dt)*sw);
  y(p+1)=(1+a*dt+b*sqrt(dt)*u)*y(p);
              end; % for p
%CALCULATING OF 90% CONFIDENCE INTERVAL ON jj-TH ITERATION
            e(i)=abs(x(l+1)-y(l+1));
            he=he+e(i);
        end; % for i
           he=he/(20*100);
        for j=1:20,
          ee=0;
             for k=(j-1)*100+1:j*100,
                ee=ee+e(k);
             end; % for k
          hh(j)=ee/100;
        end; % for j
     s=0;
        for j=1:20,
          s=s+(hh(j)-he)^2;
        end; % for j
     s=s/19; hee(jj-2)=he;
     he1(jj-2)=he-st*sqrt(s/20);
     he2(jj-2)=he+st*sqrt(s/20);
     ttt(jj-2)=1/(2^jj);
   end; % for jj
e1=[he1(1) he2(1)]; e2=[he1(2) he2(2)];
e3=[he1(3) he2(3)]; e4=[he1(4) he2(4)];
e5=[he1(5) he2(5)];
tt1=[1/(2^3) 1/(2^3)]; tt2=[1/(2^4) 1/(2^4)];
tt3=[1/(2^5) 1/(2^5)]; tt4=[1/(2^6) 1/(2^6)];
tt5=[1/(2^7) 1/(2^7)];
plot(tt1,e1,tt2,e2,tt3,e3,tt4,e4,tt5,e5,ttt,hee);
```

```
pause;
```

17.3.2 Программа для численного эксперимента 7.2

```
clear;
t0=0; tk=1;    %INTERVAL OF INTEGRATION
a=1.5; b=1.5;  %COEFFICIENTS OF SDE
st=1.73;       %COEFFICIENT FOR 90% CONFIDENCE INTERVAL
   for jj=3:7,
      randn('state', 0);
         dt=1/(2^jj);  %STEP OF INTEGRATION ON jj-TH ITERATION
         t=t0:dt:tk;
         l=max(size(t))-1;
         he=0;
            for i=1:20*100,
               x(1)=1; y(1)=1;
               sw=0;
                   for p=1:l,
                      u=randn;
                      sw=sw+u;
             %MULTIPLE STOCHASTIC INTEGRAL
                      v=0.5*dt*(u^2-1);
            %EXACT SOLUTION AND MILSTEIN METHOD
  x(p+1)=x(1)*expm((a-0.5*(b^2))*p*dt+b*sqrt(dt)*sw);
  y(p+1)=(1+a*dt+b*sqrt(dt)*u+(b^2)*v)*y(p);
                   end; %for p
%CALCULATING OF 90% CONFIDENCE INTERVAL ON jj-TH ITERATION
             e(i)=abs(x(l+1)-y(l+1));
             he=he+e(i);
           end; % for i
        he=he/(20*100);
           for j=1:20,
              ee=0;
                for k=(j-1)*100+1:j*100,
                   ee=ee+e(k);
                end; %for k
              hh(j)=ee/100;
          end; % for j
       s=0;
          for j=1:20,
             s=s+(hh(j)-he)^2;
          end; % for j
       s=s/19;
       hee(jj-2)=he;
       he1(jj-2)=he-st*sqrt(s/20);
       he2(jj-2)=he+st*sqrt(s/20);
       ttt(jj-2)=1/(2^jj);
   end; % for jj
e1=[he1(1) he2(1)]; e2=[he1(2) he2(2)];
e3=[he1(3) he2(3)]; e4=[he1(4) he2(4)]; e5=[he1(5) he2(5)];
```

```
tt1=[1/(2^3) 1/(2^3)]; tt2=[1/(2^4) 1/(2^4)];
tt3=[1/(2^5) 1/(2^5)]; tt4=[1/(2^6) 1/(2^6)];
tt5=[1/(2^7) 1/(2^7)];
plot(tt1,e1,tt2,e2,tt3,e3,tt4,e4,tt5,e5,ttt,hee);
pause;
```

17.3.3 Программа для численного эксперимента 7.9

```
clear;
t0=0; tk=1;    %INTERVAL OF INTEGRATION
a=1.5; b=1.5;  %COEFFICIENTS OF SDE
st=1.73;       %COEFFICIENT FOR 90% CONFIDENCE INTERVAL
  for jj=4:8,
    dt=1/(2^jj);
    t=t0:dt:tk;
    l=max(size(t))-1;
    he=0;
      for i=1:20*100,
         x(1)=1; y(1)=1;
         sw=0;
            for p=1:l,
               u=randn;
               sw=sw+u;
            %MULTIPLE STOCHASTIC INTEGRALS
   v1=0.5*dt*(u^2-1);
   v2=(dt^(3/2))*(1/6)*(u^3-3*u);
   v3=(dt^2)*(1/24)*(u^4-6*u^2+3);
   v4=(dt^(5/2))*(1/120)*(u^5-10*(u^3)+15*u);
   v5=(dt^3)*(1/720)*(u^6-15*(u^4)+45*(u^2)-15);
                  %EXACT SOLUTION
x(p+1)=x(1)*expm((a-0.5*(b^2))*p*dt+b*sqrt(dt)*sw);
        %EXPLICIT 1 STEP STRONG METHOD OF ORDER 3.0
y(p+1)=(1+a*dt+b*sqrt(dt)*(1+a*dt+0.5*(a*dt)^2)*u+b^2*...
       (1+a*dt)*v1+(b^3)*(1+a*dt)*v2+0.5*(a*dt)^2+..
       (b^4)*v3+(b^5)*v4+(1/6)*((a*dt)^3)+((a*b)^2)*...
       0.5*(dt^2)*v1+(b^4)*a*dt*v3+(b^6)*v5)*y(p);
            end; % for p
              %CALCULATING OF 90% CONFIDENCE INTERVAL
         e(i)=abs(x(l+1)-y(l+1));
         he=he+e(i);
      end; % for i
   he=he/(20*100);
      for j=1:20,
         ee=0;
            for k=(j-1)*100+1:j*100,
               ee=ee+e(k);
            end; % for k
         hh(j)=ee/100;
      end; % for j
   s=0;
```

```
      for j=1:20,
         s=s+(hh(j)-he)^2;
      end; % for j
   s=s/19;
   hee(jj-3)=he;
   he1(jj-3)=he-st*sqrt(s/20);
   he2(jj-3)=he+st*sqrt(s/20);
   ttt(jj-3)=1/(2^jj);
 end; % for jj
e1=[he1(1) he2(1)]; e2=[he1(2) he2(2)];
e3=[he1(3) he2(3)]; e4=[he1(4) he2(4)]; e5=[he1(5) he2(5)];
tt1=[1/(2^4) 1/(2^4)]; tt2=[1/(2^5) 1/(2^5)];
tt3=[1/(2^6) 1/(2^6)]; tt4=[1/(2^7) 1/(2^7)];
tt5=[1/(2^8) 1/(2^8)];
plot(tt1,e1,tt2,e2,tt3,e3,tt4,e4,tt5,e5,ttt,hee);
   pause;
```

17.3.4 Программа для численного эксперимента 7.13

```
clear;
t0=0; tk=1;    %INTERVAL OF INTEGRATION
a=1.5; b=1.5;  %COEFFICIENTS OF SDE
st=1.73;       %COEFFICIENT FOR 90% CONFIDENCE INTERVAL
nn=1;
  for jj=3:7,
    randn('state', 0);
    dt=1/(2^jj);   %STEP OF INTEGRATION ON jj-TH ITERATION
    t=t0:dt:tk;
    l=max(size(t))-1;
    he=0;
      for=1:20*100,
        x(1)=1; y(1)=1; sw=0;
           for p=1:l,
              ksi=randn(1,nn+2); sw=sw+ksi(1,1);
                   %EXACT SOLUTION
x(p+1)=x(1)*expm((a-0.5*(b^2))*p*dt+b*sqrt(dt)*sw);
                   %MULTIPLE STOCHASTIC INTEGRALS
ui0=sqrt(dt)*ksi(1,1);
ui1=-0.5*(dt^(3/2))*(ksi(1,1)+(1/sqrt(3))*ksi(1,2));
ui00=0.5*dt*((ksi(1,1))^2-1);
ui000=(1/6)*(dt^(3/2))*((ksi(1,1))^3-3*ksi(1,1));
ui0000=(1/24)*(dt^2)*((ksi(1,1))^4-6*((ksi(1,1))^2)+3);
bbb=(2/3)*((ksi(1,1))^2)+(1/sqrt(3))*ksi(1,1)*ksi(1,2)-...
    (1/(3*sqrt(5)))*ksi(1,3)*ksi(1,1)-1;
                   %MULTIPLE STOCHASTIC INTEGRALS
      for ij=1:nn,
bbb=bbb+((ksi(1,ij))^2)/((2*ij-1)*(2*ij+3))-(ksi(1,ij)*...
    ksi(1,ij+2))/((2*ij+3)*sqrt((2*ij+1)*(2*ij+5)));
      end;
ui10=-(1/4)*(dt^2)*bbb; ui01=0.5*(dt^2)+ui1*ui0-ui10;
```

```
                    %CALCULATING OF FINITE DIFFERENCES
z=y(p)+sqrt(dt)*b*y(p);     u=y(p)-sqrt(dt)*b*y(p);
v=y(p)-3*sqrt(dt)*b*y(p);   w=y(p)+3*sqrt(dt)*b*y(p);
r=y(p)+dt*a*y(p);           f=y(p)+2*dt*b*y(p);
g=y(p)+0.5*dt*a*y(p);       q=y(p)-0.5*dt*a*y(p);
zz=0.5*dt*(0.5*(a*z+a*u-2*a*y(p))+a*y(p)+a*r);
uu=b*y(p)*ui0+(1/sqrt(dt))*((1/48)*b*v-(1/48)*b*w+...
   (27/48)*b*z-(27/48)*b*u)*ui00;
vv=(1/dt)*((0.5*a*f-0.5*a*y(p))*(dt*ui0+ui1)-...
    (0.5*(b*z+b*u-2*b*y(p))+b*g-b*q)*ui1);
                    %CALCULATING OF FINITE DIFFERENCES
z11=b*(v+0.5*sqrt(dt)*b*v)-b*(v-0.5*sqrt(dt)*b*v);
z12=b*(w+0.5*sqrt(dt)*b*w)-b*(w-0.5*sqrt(dt)*b*w);
z21=b*(z+0.5*sqrt(dt)*b*z)-b*(z-0.5*sqrt(dt)*b*z);
z22=b*(u+0.5*sqrt(dt)*b*u)-b*(u-0.5*sqrt(dt)*b*u);
zzz=(1/dt)*((1/48)*z11-(1/48)*z12+(27/48)*z21-(27/48)*...
    z22)*ui000;
u11=0.5*(b*v+b*(v+2*sqrt(dt)*b*v)-2*b*(v+sqrt(dt)*b*v))+...
    b*(v+0.5*dt*a*v)-b*(v-0.5*dt*a*v);
u12=0.5*(b*w+b*(w+2*sqrt(dt)*b*w)-2*b*(w+sqrt(dt)*b*w))+...
    b*(w+0.5*dt*a*w)-b*(w-0.5*dt*a*w);
u21=0.5*(b*z+b*(z+2*sqrt(dt)*b*z)-2*b*(z+sqrt(dt)*b*z))+...
    b*(z+0.5*dt*a*z)-b*(z-0.5*dt*a*z);
u22=0.5*(b*u+b*(u+2*sqrt(dt)*b*u)-2*b*(u+sqrt(dt)*b*u))+...
    b*(u+0.5*dt*a*u)-b*(u-0.5*dt*a*u);
uuu=((1/48)*u11-(1/48)*u12+(27/48)*u21-(27/48)*u22)*...
    (ui10-ui01);
                    %CALCULATING OF FINITE DIFFERENCES
h11=0.5*a*(v+2*dt*b*v)-0.5*a*v;
h12=0.5*a*(w+2*dt*b*w)-0.5*a*w;
h21=0.5*a*(z+2*dt*b*z)-0.5*a*z;
h22=0.5*a*(u+2*dt*b*u)-0.5*a*u;
www=((1/48)*h11-(1/48)*h12+(27/48)*h21-(27/48)*h22)*...
    (ui01+dt*ui00);
uk11=0.5*b*(z+2*sqrt(dt)*b*z)-0.5*b*z;
uk12=0.5*b*(u+2*sqrt(dt)*b*u)-0.5*b*u;
uk21=0.5*b*(y(p)+2*sqrt(dt)*b*y(p))-0.5*b*y(p);
uk22=0.5*b*(g+2*sqrt(dt)*b*g)-0.5*b*g;
uk23=0.5*b*(q+2*sqrt(dt)*b*q)-0.5*b*q;
sss=-(0.5*(uk11+uk12-2*uk21)+uk22-uk23)*ui10;
                    %CALCULATING OF FINITE DIFFERENCES
r11=v+0.5*sqrt(dt)*b*v;  r12=v-0.5*sqrt(dt)*b*v;
f11=w+0.5*sqrt(dt)*b*w;  f12=w-0.5*sqrt(dt)*b*w;
g11=z+0.5*sqrt(dt)*b*z;  g12=z-0.5*sqrt(dt)*b*z;
q11=u+0.5*sqrt(dt)*b*u;  q12=u-0.5*sqrt(dt)*b*u;
c11=0.5*b*(r11+2*sqrt(dt)*b*r11)-0.5*b*r11-...
    0.5*b*(r12+2*sqrt(dt)*b*r12)+0.5*b*r12;
c12=0.5*b*(f11+2*sqrt(dt)*b*f11)-0.5*b*f11-...
    0.5*b*(f12+2*sqrt(dt)*b*f12)+0.5*b*f12;
c21=0.5*b*(g11+2*sqrt(dt)*b*g11)-0.5*b*g11-...
```

```
    0.5*b*(g12+2*sqrt(dt)*b*g12)+0.5*b*g12;
c22=0.5*b*(q11+2*sqrt(dt)*b*q11)-0.5*b*q11-...
    0.5*b*(q12+2*sqrt(dt)*b*q12)+0.5*b*q12;
ccc=((1/48)*c11-(1/48)*c12+(27/48)*c21-(27/48)*c22)*ui0000;
%EXPLICIT 1 STEP FINITE-DIFFERENCE STRONG METHOD OF ORDER 2.0
y(p+1)=y(p)+zz+uu+vv+zzz+(uuu+www+sss+ccc)*...
       (1/(dt^(3/2)));
     end; % for p
             %CALCULATING OF 90% CONFIDENCE INTERVAL
       e(i)=abs(x(l+1)-y(l+1));
       he=he+e(i);
   end; % for i
       he=he/(20*100);
          for j=1:20,
             ee=0;
                for k=(j-1)*100+1:j*100,
                   ee=ee+e(k);
                end; % for k
             hh(j)=ee/100;
          end; % for j
             s=0;
                for j=1:20,
                   s=s+(hh(j)-he)^2;
                end; % for j
            s=s/19; hee(jj-2)=he;
      he1(jj-2)=he-st*sqrt(s/20);
      he2(jj-2)=he+st*sqrt(s/20);
      ttt(jj-2)=1/(2^jj);
   end;  % for jj
e1=[he1(1) he2(1)]; e2=[he1(2) he2(2)];
e3=[he1(3) he2(3)]; e4=[he1(4) he2(4)];
e5=[he1(5) he2(5)];
tt1=[1/(2^3) 1/(2^3)]; tt2=[1/(2^4) 1/(2^4)];
tt3=[1/(2^5) 1/(2^5)]; tt4=[1/(2^6) 1/(2^6)];
tt5=[1/(2^7) 1/(2^7)];
plot(tt1,e1,tt2,e2,tt3,e3,tt4,e4,tt5,e5,ttt,hee);
    pause;
```

17.4 MATLAB 7.0-программы к главе 8

17.4.1 Программа для численного эксперимента 8.1 при $\tilde{\alpha}_1 = 0.5$

```
clear;
t0=0; tk=1;    %INTERVAL OF INTEGRATION
a=1.5; b=1.5;  %COEFFICIENTS OF SDE
alpha=0.5;     %COEFFICIENT OF IMPLICIT EULER METHOD
  for jj=3:7,
    randn('state', 0);
```

```
      dt=1/(2^jj);  %STEP OF INTEGRATION ON jj-TH ITERATION
      st=1.73;  %COEFFICIENT FOR 90% CONFIDENCE INTERVAL
      t=t0:dt:tk;
      l=max(size(t))-1;
      he=0;
        for i=1:20*100,
          x(1)=1; y(1)=1;
          sw=0;
            for p=1:l,
              u=randn;
              sw=sw+u;
                 %EXACT SOLUTION
  x(p+1)=x(1)*expm((a-0.5*(b^2))*p*dt+b*sqrt(dt)*sw);
                 %IMPLICIT EULER METHOD
  y(p+1)=(1/(1-alpha*a*dt))*(1+(1-alpha)*a*dt+b*...
         sqrt(dt)*u)*y(p);
            end; % for p
              %CALCULATING OF 90% CONFIDENCE INTERVAL
         e(i)=abs(x(l+1)-y(l+1));
         he=he+e(i);
       end; % for i
         he=he/(20*100);
           for j=1:20,
             ee=0;
                for k=(j-1)*100+1:j*100,
                   ee=ee+e(k);
                end; % for k
              hh(j)=ee/100;
           end; % for j
         s=0;
           for j=1:20,
             s=s+(hh(j)-he)^2;
           end; % for j
    s=s/19;
    hee(jj-2)=he; he1(jj-2)=he-st*sqrt(s/20);
    he2(jj-2)=he+st*sqrt(s/20); ttt(jj-2)=1/(2^jj);
  end; % for jj
e1=[he1(1) he2(1)]; e2=[he1(2) he2(2)];
e3=[he1(3) he2(3)]; e4=[he1(4) he2(4)]; e5=[he1(5) he2(5)];
tt1=[1/(2^3) 1/(2^3)]; tt2=[1/(2^4) 1/(2^4)];
tt3=[1/(2^5) 1/(2^5)]; tt4=[1/(2^6) 1/(2^6)];
tt5=[1/(2^7) 1/(2^7)];
plot(tt1,e1,tt2,e2,tt3,e3,tt4,e4,tt5,e5,ttt,hee);
    pause;
```

17.4.2 Программа для численного эксперимента 8.2 при $\tilde{\alpha}_1 = \tilde{\alpha}_2 = 1$

```
clear;
```

```
t0=0; tk=1;   %INTERVAL OF INTEGRATION
a=5; b=0.01;  %COEFFICIENTS OF SYSTEM OF SDE
st=1.73;      %COEFFICIENT FOR 90% CONFIDENCE INTERVAL
  for jj=2:6,
     randn('state', 0);
     dt=1/(2^jj);  %STEP OF INTEGRATION ON jj-TH ITERATION
     t=t0:dt:tk;
     l=max(size(t))-1;
     he=0;
     al1=1; al2=1;  %COEFFICIENTS OF IMPLICIT EULER METHOD
        for i=1:20*100,
                    %START DATA
           x1(1)=1; x2(1)=0; H0=[x1(1); x2(1)];
           y1(1)=1; y2(1)=0;
     a1=1/(1+al1*a*dt);    a2=1/(1+al2*a*dt);
     a3=al1*al2*(a*dt)^2;  a4=(1/(1-a3*a1*a2))*a1;
           sw=0;
              for p=1:l,
                 u=randn; sw=sw+u;
                    %EXACT SOLUTION
   xx1=expm((-0.5*(b^2))*p*dt+b*sqrt(dt)*sw);
   xx2=expm((-2*a-0.5*(b^2))*p*dt+b*sqrt(dt)*sw);
   F=[xx1 0; 0 xx2]; D=[1 1; 1 -1]; H=0.5*D*F*D*H0;
   x1(p+1)=H(1,1); x2(p+1)=H(2,1);
                 %IMPLICIT EULER METHOD
y1(p+1)=a4*(y1(p)+((al1*a*a2)*(y2(p)+(1-al2)*...
        a*(y1(p)-y2(p))*dt+b*y2(p)*sqrt(dt)*u)+...
        (1-al1)*a*(y2(p)-y1(p)))*dt+b*y1(p)*sqrt(dt)*u);
y2(p+1)=a2*(y2(p)+(al2*a*y1(p+1)+(1-al2)*...
        a*(y1(p)-y2(p)))*dt+b*y2(p)*sqrt(dt)*u);
        end; % for p
              %CALCULATING OF 90% CONFIDENCE INTERVAL
e(i)=sqrt((x1(l+1)-y1(l+1))^2+(x2(l+1)-y2(l+1))^2);
           he=he+e(i);
        end; % for i
           he=he/(20*100);
             for j=1:20,
                 ee=0;
                    for k=(j-1)*100+1:j*100,
                       ee=ee+e(k);
                    end; % for k
                 hh(j)=ee/100;
             end; % for j
           s=0;
             for j=1:20,
                s=s+(hh(j)-he)^2;
             end; % for j
   s=s/19; hee(jj-1)=log(he);
   he1(jj-1)=log(he)-st*sqrt(s/20);
   he2(jj-1)=log(he)+st*sqrt(s/20);
```

```
   ttt(jj-1)=log(1/(2^jj));
end; % for jj
e1=[he1(1) he2(1)]; e2=[he1(2) he2(2)];
e3=[he1(3) he2(3)]; e4=[he1(4) he2(4)]; e5=[he1(5) he2(5)];
tt1=[log(1/(2^2)) log(1/(2^2))];
tt2=[log(1/(2^3)) log(1/(2^3))];
tt3=[log(1/(2^4)) log(1/(2^4))];
tt4=[log(1/(2^5)) log(1/(2^5))];
tt5=[log(1/(2^6)) log(1/(2^6))];
plot(tt1,e1,tt2,e2,tt3,e3,tt4,e4,tt5,e5,ttt,hee);
  pause;
```

17.4.3 Программа для численного эксперимента 8.9

```
clear;
t0=0; tk=1;    %INTERVAL OF INTEGRATION
a=1.5; b=1.5;  %COEFFICIENTS OF SDE
st=1.73;       %COEFFICIENT FOR 90% CONFIDENCE INTERVAL
  for jj=4:8,
     randn('state', 0);
     dt=1/(2^jj);  %STEP OF INTEGRATION ON jj-TH ITERATION
     t=t0:dt:tk;
     l=max(size(t))-1;
     he=0;
        for i=1:20*100,
           x(1)=1; y(1)=1;
           sw=0;
              for p=1:l,
                %MULTIPLE STOCHASTIC INTEGRALS
u=randn;
ui0=sqrt(dt)*u;
ui00=0.5*dt*(u^2-1);
ui000=(dt^(3/2))*(1/6)*(u^3-3*u);
ui0000=(dt^2)*(1/24)*(u^4-6*(u^2)+3);
ui00000=(dt^(5/2))*(1/120)*(u^5-10*(u^3)+15*u);
ui000000=(dt^3)*(1/720)*(u^6-15*(u^4)+45*(u^2)-15);
sw=sw+u;
          %IMPLICIT 1 STEP STRONG METHOD OF ORDER 3.0
y(p+1)=(1/(1-0.5*a*dt))*(y(p)+0.5*a*dt*y(p)+b*ui0*y(p)+...
       (b^2)*y(p)*ui00+0.5*a*b*y(p)*dt*ui0+(b^3)*y(p)*...
       ui000+0.5*a*(b^2)*y(p)*dt*ui00+(b^4)*y(p)*ui0000+...
       0.5*(b^3)*a*y(p)*dt*ui000+(b^5)*y(p)*ui00000-...
       (1/12)*((dt*a)^3)*y(p)+(b^4)*a*0.5*dt*ui0000*y(p)+...
       (b^6)*y(p)*ui000000);
             end; % for p
                     %EXACT SOLUTION
x(l+1)=x(1)*expm((a-0.5*(b^2))*l*dt+b*sqrt(dt)*sw);
               %CALCULATING OF 90% CONFIDENCE INTERVAL
        e(i)=abs(x(l+1)-y(l+1));
        he=he+e(i);
```

```
      end; % for i
        he=he/(20*100);
          for j=1:20,
             ee=0;
                for k=(j-1)*100+1:j*100,
                   ee=ee+e(k);
                end; % for k
             hh(j)=ee/100;
          end; % for j
        s=0;
          for j=1:20,
             s=s+(hh(j)-he)^2;
          end; % for j
        s=s/19;
        hee(jj-3)=he;
        he1(jj-3)=he-st*sqrt(s/20);
        he2(jj-3)=he+st*sqrt(s/20);
        ttt(jj-3)=1/(2^jj);
    end; % for jj
e1=[he1(1) he2(1)]; e2=[he1(2) he2(2)];
e3=[he1(3) he2(3)]; e4=[he1(4) he2(4)]; e5=[he1(5) he2(5)];
tt1=[1/(2^4) 1/(2^4)]; tt2=[1/(2^5) 1/(2^5)];
tt3=[1/(2^6) 1/(2^6)]; tt4=[1/(2^7) 1/(2^7)];
tt5=[1/(2^8) 1/(2^8)];
plot(tt1,e1,tt2,e2,tt3,e3,tt4,e4,tt5,e5,ttt,hee);
pause;
```

17.4.4 Программа для численного эксперимента 8.14

```
clear;
t0=0; tk=1;   %INTERVAL OF INTEGRATION
a=1.5; b=1.5; %COEFFICIENTS OF SDE
st=1.73;      %COEFFICIENT FOR 90% CONFIDENCE INTERVAL
nn=1;
   for jj=3:7,
      randn('state', 0);
      dt=1/(2^jj);  %STEP OF INTEGRATION ON jj-TH ITERATION
      t=t0:dt:tk;
      randn('state', 0);
      l=max(size(t))-1;
      he=0;
         for i=1:20*100,
            x(1)=1; y(1)=1;
            sw=0;
                for p=1:l,
                   ksi=randn(1,nn+2);
                   sw=sw+ksi(1,1);
                            %EXACT SOLUTION
  x(p+1)=x(1)*expm((a-0.5*(b^2))*p*dt+b*sqrt(dt)*sw);
                         %MULTIPLE STOCHASTIC INTEGRALS
```

```
ui0=sqrt(dt)*ksi(1,1);
ui1=-0.5*(dt^(3/2))*(ksi(1,1)+(1/sqrt(3))*ksi(1,2));
ui00=0.5*dt*((ksi(1,1))^2-1);
ui000=(1/6)*(dt^(3/2))*((ksi(1,1))^3-3*ksi(1,1));
ui0000=(1/24)*(dt^2)*((ksi(1,1))^4-6*((ksi(1,1))^2)+3);
bbb=(2/3)*((ksi(1,1))^2)+(1/sqrt(3))*ksi(1,1)*ksi(1,2)-...
    (1/(3*sqrt(5)))*ksi(1,3)*ksi(1,1)-1;
                          %MULTIPLE STOCHASTIC INTEGRALS
for ij=1:nn,
   bbb=bbb+((ksi(1,ij))^2)/((2*ij-1)*(2*ij+3))-(ksi(1,ij)*...
       ksi(1,ij+2))/((2*ij+3)*sqrt((2*ij+1)*(2*ij+5)));
end;  % for ij
   ui10=-(1/4)*(dt^2)*bbb;
   ui01=0.5*(dt^2)+ui1*ui0-ui10;
                   %CALCULATING OF FINITE DIFFERENCES
z=y(p)+sqrt(dt)*b*y(p);     u=y(p)-sqrt(dt)*b*y(p);
v=y(p)-3*sqrt(dt)*b*y(p);   w=y(p)+3*sqrt(dt)*b*y(p);
r=y(p)+dt*a*y(p);           f=y(p)+2*dt*b*y(p);
g=y(p)+0.5*dt*a*y(p);       q=y(p)-0.5*dt*a*y(p);
uu=b*y(p)*ui0+(1/sqrt(dt))*((1/48)*b*v-(1/48)*b*w+...
   (27/48)*b*z-(27/48)*b*u)*ui00;
vv=(1/dt)*((0.5*a*f-0.5*a*y(p))*(0.5*dt*ui0+ui1)-...
   (0.5*(b*z+b*u-2*b*y(p))+b*g-b*q)*ui1);
                  %CALCULATING OF FINITE DIFFERENCES
z11=b*(v+0.5*sqrt(dt)*b*v)-b*(v-0.5*sqrt(dt)*b*v);
z12=b*(w+0.5*sqrt(dt)*b*w)-b*(w-0.5*sqrt(dt)*b*w);
z21=b*(z+0.5*sqrt(dt)*b*z)-b*(z-0.5*sqrt(dt)*b*z);
z22=b*(u+0.5*sqrt(dt)*b*u)-b*(u-0.5*sqrt(dt)*b*u);
zzz=(1/dt)*((1/48)*z11-(1/48)*z12+(27/48)*z21-...
    (27/48)*z22)*ui000;
u11=0.5*(b*v+b*(v+2*sqrt(dt)*b*v)-2*b*(v+sqrt(dt)*b*v))+...
    b*(v+0.5*dt*a*v)-b*(v-0.5*dt*a*v);
u12=0.5*(b*w+b*(w+2*sqrt(dt)*b*w)-2*b*(w+sqrt(dt)*b*w))+...
    b*(w+0.5*dt*a*w)-b*(w-0.5*dt*a*w);
u21=0.5*(b*z+b*(z+2*sqrt(dt)*b*z)-2*b*(z+sqrt(dt)*b*z))+...
    b*(z+0.5*dt*a*z)-b*(z-0.5*dt*a*z);
u22=0.5*(b*u+b*(u+2*sqrt(dt)*b*u)-2*b*(u+sqrt(dt)*b*u))+...
    b*(u+0.5*dt*a*u)-b*(u-0.5*dt*a*u);
uuu=((1/48)*u11-(1/48)*u12+(27/48)*u21-(27/48)*u22)*...
    (ui10-ui01);
                 %CALCULATING OF FINITE DIFFERENCES
      h11=0.5*a*(v+2*dt*b*v)-0.5*a*v;
      h12=0.5*a*(w+2*dt*b*w)-0.5*a*w;
      h21=0.5*a*(z+2*dt*b*z)-0.5*a*z;
      h22=0.5*a*(u+2*dt*b*u)-0.5*a*u;
www=((1/48)*h11-(1/48)*h12+(27/48)*h21-(27/48)*h22)*...
    (ui01+0.5*dt*ui00);
uk11=0.5*b*(z+2*sqrt(dt)*b*z)-0.5*b*z;
uk12=0.5*b*(u+2*sqrt(dt)*b*u)-0.5*b*u;
uk21=0.5*b*(y(p)+2*sqrt(dt)*b*y(p))-0.5*b*y(p);
```

```
uk22=0.5*b*(g+2*sqrt(dt)*b*g)-0.5*b*g;
uk23=0.5*b*(q+2*sqrt(dt)*b*q)-0.5*b*q;
sss=-(0.5*(uk11+uk12-2*uk21)+uk22-uk23)*ui10;
              %CALCULATING OF FINITE DIFFERENCES
r11=v+0.5*sqrt(dt)*b*v;   r12=v-0.5*sqrt(dt)*b*v;
f11=w+0.5*sqrt(dt)*b*w;   f12=w-0.5*sqrt(dt)*b*w;
g11=z+0.5*sqrt(dt)*b*z;   g12=z-0.5*sqrt(dt)*b*z;
q11=u+0.5*sqrt(dt)*b*u;   q12=u-0.5*sqrt(dt)*b*u;
c11=0.5*b*(r11+2*sqrt(dt)*b*r11)-0.5*b*r11-...
    0.5*b*(r12+2*sqrt(dt)*b*r12)+0.5*b*r12;
c12=0.5*b*(f11+2*sqrt(dt)*b*f11)-0.5*b*f11-...
    0.5*b*(f12+2*sqrt(dt)*b*f12)+0.5*b*f12;
c21=0.5*b*(g11+2*sqrt(dt)*b*g11)-0.5*b*g11-...
    0.5*b*(g12+2*sqrt(dt)*b*g12)+0.5*b*g12;
c22=0.5*b*(q11+2*sqrt(dt)*b*q11)-0.5*b*q11-...
    0.5*b*(q12+2*sqrt(dt)*b*q12)+0.5*b*q12;
ccc=((1/48)*c11-(1/48)*c12+(27/48)*c21-(27/48)*c22)*ui0000;
               %IMPLISIT 1 STEP FINITE-DIFFERENCE
               %STRONG NUMERICAL METHOD OF ORDER 2.0
    y(p+1)=(1/(1-0.5*a*dt))*(y(p)+0.5*a*y(p)*dt+uu+vv+zzz+...
            (uuu+www+sss+ccc)*(1/(dt^(3/2))));
  end; % for p
               %CALCULATING OF 90% CONFIDENCE INTERVAL
    e(i)=abs(x(l+1)-y(l+1));
    he=he+e(i);
end; % for i
    he=he/(20*100);
       for j=1:20,
          ee=0;
             for k=(j-1)*100+1:j*100,
                ee=ee+e(k);
             end; % for k
          hh(j)=ee/100;
       end;  % for j
         s=0;
            for j=1:20,
               s=s+(hh(j)-he)^2;
            end; % for j
         s=s/19;
         hee(jj-2)=he;
         he1(jj-2)=he-st*sqrt(s/20);
         he2(jj-2)=he+st*sqrt(s/20);
         ttt(jj-2)=dt;
   end;  % for jj
e1=[he1(1) he2(1)]; e2=[he1(2) he2(2)];
e3=[he1(3) he2(3)]; e4=[he1(4) he2(4)];
e5=[he1(5) he2(5)];
tt1=[1/(2^3) 1/(2^3)]; tt2=[1/(2^4) 1/(2^4)];
tt3=[1/(2^5) 1/(2^5)]; tt4=[1/(2^6) 1/(2^6)];
tt5=[1/(2^7) 1/(2^7)];
```

```
plot(tt1,e1,tt2,e2,tt3,e3,tt4,e4,...
                 tt5,e5,ttt,hee);
   pause;
```

17.5 MATLAB 7.0-программы к главе 9

17.5.1 Программа для численного эксперимента 9.3

```
clear;
t0=0; tk=1;     %INTERVAL OF INTEGRATION
a=1.5; b=1.5;   %COEFFICIENTS OF SDE
st=1.73;        %COEFFICIENT FOR 90% CONFIDENCE INTERVAL
  for jj=3:7,
    randn('state', 0);
    dt=1/(2^jj);  %STEP OF INTEGRATION ON jj-TH ITERATION
    t=t0:dt:tk;
    l=max(size(t))-1;
    he=0;
      for i=1:20*100,
         x(1)=1; y(1)=1;
%1-ST STEP OF EXPLICIT 2 STEP STRONG METHOD OF ORDER 2.0
                %MULTIPLE STOCHASTIC INTEGRALS
        w=randn;
        ui0=sqrt(dt)*w;
        ui00=0.5*dt*(w^2-1);
        ui000=(1/6)*(dt^(3/2))*(w^3-3*w);
        vv1(1)=a*b*ui0;
v1(1)=b*ui0+(b^2)*ui00+a*b*dt*ui0+(b^3)*ui000;
y(2)=y(1)+a*y(1)*dt+0.5*(a^2)*(dt^2)*y(1)+v1(1)*y(1);
        sw=w;
  for p=2:l,
            %MULTIPLE STOCHASTIC INTEGRALS ON p-TH STEP
    w1=randn;
    ui0=sqrt(dt)*w1;
    ui00=0.5*dt*(w1^2-1);
    ui000=(1/6)*(dt^(3/2))*(w1^3-3*w1);
    ui0000=(1/24)*(dt^2)*(w1^4-6*(w1^2)+3);
    v1(p)=b*ui0+(b^2)*ui00+a*b*dt*ui0+(b^3)*ui000+...
          a*(b^2)*dt*ui00+(b^4)*ui0000;
    vv1(p)=a*b*ui0+a*b*b*ui00;
    sw=sw+w1;
  end; % for p
    for p=2:l,
 %p-ST STEP OF EXPLICIT 2 STEP STRONG METHOD OF ORDER 2.0
       y(p+1)=y(p-1)+2*dt*a*y(p)-dt*vv1(p-1)*y(p-1)+...
              v1(p)*y(p)+v1(p-1)*y(p-1);
    end; % for p
               %EXACT SOLUTION
   x(l+1)=x(1)*expm((a-0.5*(b^2))*l*dt+b*sqrt(dt)*sw);
```

```
              %CALCULATING OF 90% CONFIDENCE INTERVAL
   e(i)=abs(x(l+1)-y(l+1));
   he=he+e(i);
       end; % for i
         he=he/(20*100);
           for j=1:20,
              ee=0;
                 for k=(j-1)*100+1:j*100,
                    ee=ee+e(k);
                 end; % for k
              hh(j)=ee/100;
           end; % for j
         s=0;
           for j=1:20,
             s=s+(hh(j)-he)^2;
           end; % for j
    s=s/19;
    hee(jj-2)=he;
    he1(jj-2)=he-st*sqrt(s/20);
    he2(jj-2)=he+st*sqrt(s/20);
    ttt(jj-2)=1/(2^jj);
  end; % for jj
e1=[he1(1) he2(1)]; e2=[he1(2) he2(2)];
e3=[he1(3) he2(3)]; e4=[he1(4) he2(4)]; e5=[he1(5) he2(5)];
tt1=[1/(2^3) 1/(2^3)]; tt2=[1/(2^4) 1/(2^4)];
tt3=[1/(2^5) 1/(2^5)]; tt4=[1/(2^6) 1/(2^6)];
tt5=[1/(2^7) 1/(2^7)];
plot(tt1,e1,tt2,e2,tt3,e3,tt4,e4,tt5,e5,ttt,hee);
   pause;
```

17.5.2 Программа для численного эксперимента 9.11

```
clear;
t0=0; tk=1;     %INTERVAL OF INTEGRATION
a=1.5; b=1.5;   %COEFFICIENTS OF SDE
st=1.73;        %COEFFICIENT FOR 90% CONFIDENCE INTERVAL
nn=1;
  for jj=3:7,
    randn('state', 0);
    dt=1/(2^jj);  %STEP OF INTEGRATION ON jj-TH ITERATION
    t=t0:dt:tk;
    l=max(size(t))-1;
    he=0;
      for i=1:20*100,
         x(1)=1; y(1)=1; yy0=y(1);
    %MULTIPLE STOCHASTIC INTEGRALS ON 1-ST STEP
ksi=randn(1,nn+2);
sw=ksi(1,1);
ui0=sqrt(dt)*ksi(1,1);
ui1=-0.5*(dt^(3/2))*(ksi(1,1)+(1/sqrt(3))*ksi(1,2));
```

```
ui00=0.5*dt*((ksi(1,1))^2-1);
ui000=(1/6)*(dt^(3/2))*((ksi(1,1))^3-3*ksi(1,1));
ui0000=(1/24)*(dt^2)*((ksi(1,1))^4-6*((ksi(1,1))^2)+3);
bbb=(2/3)*((ksi(1,1))^2)+(1/sqrt(3))*ksi(1,1)*ksi(1,2)-...
    (1/(3*sqrt(5)))*ksi(1,3)*ksi(1,1)-1;
    %MULTIPLE STOCHASTIC INTEGRALS ON 1-ST STEP
       for ij=1:nn,
bbb=bbb+((ksi(1,ij))^2)/((2*ij-1)*(2*ij+3))-(ksi(1,ij)*...
    ksi(1,ij+2))/((2*ij+3)*sqrt((2*ij+1)*(2*ij+5)));
       end; % for ij
ui10=-(1/4)*(dt^2)*bbb;
ui01=0.5*(dt^2)+ui1*ui0-ui10;
   %CALCULATING OF FINITE DIFFERENCES ON 1-ST STEP
z=yy0+sqrt(dt)*b*yy0;     u=yy0-sqrt(dt)*b*yy0;
v=yy0-3*sqrt(dt)*b*yy0;   w=yy0+3*sqrt(dt)*b*yy0;
r=yy0+dt*a*yy0;           f=yy0+2*dt*b*yy0;
g=yy0+0.5*dt*a*yy0;       q=yy0-0.5*dt*a*yy0;
uu=b*yy0*ui0+(1/sqrt(dt))*((1/48)*b*v-(1/48)*b*w+...
   (27/48)*b*z-(27/48)*b*u)*ui00;
vv=(1/dt)*((0.5*a*f-0.5*a*yy0)*(0.5*dt*ui0+ui1)-...
   (0.5*(b*z+b*u-2*b*yy0)+b*g-b*q)*ui1);
z11=b*(v+0.5*sqrt(dt)*b*v)-b*(v-0.5*sqrt(dt)*b*v);
z12=b*(w+0.5*sqrt(dt)*b*w)-b*(w-0.5*sqrt(dt)*b*w);
z21=b*(z+0.5*sqrt(dt)*b*z)-b*(z-0.5*sqrt(dt)*b*z);
z22=b*(u+0.5*sqrt(dt)*b*u)-b*(u-0.5*sqrt(dt)*b*u);
zzz=(1/dt)*((1/48)*z11-(1/48)*z12+(27/48)*z21-(27/48)*...
     z22)*ui000;
   %CALCULATING OF FINITE DIFFERENCES ON 1-ST STEP
u11=0.5*(b*v+b*(v+2*sqrt(dt)*b*v)-2*b*(v+sqrt(dt)*b*v))+...
    b*(v+0.5*dt*a*v)-b*(v-0.5*dt*a*v);
u12=0.5*(b*w+b*(w+2*sqrt(dt)*b*w)-2*b*(w+sqrt(dt)*b*w))+...
    b*(w+0.5*dt*a*w)-b*(w-0.5*dt*a*w);
u21=0.5*(b*z+b*(z+2*sqrt(dt)*b*z)-2*b*(z+sqrt(dt)*b*z))+...
    b*(z+0.5*dt*a*z)-b*(z-0.5*dt*a*z);
u22=0.5*(b*u+b*(u+2*sqrt(dt)*b*u)-2*b*(u+sqrt(dt)*b*u))+...
    b*(u+0.5*dt*a*u)-b*(u-0.5*dt*a*u);
uuu=((1/48)*u11-(1/48)*u12+(27/48)*u21-(27/48)*u22)*...
    (ui10-ui01);
h11=0.5*a*(v+2*dt*b*v)-0.5*a*v;
h12=0.5*a*(w+2*dt*b*w)-0.5*a*w;
h21=0.5*a*(z+2*dt*b*z)-0.5*a*z;
h22=0.5*a*(u+2*dt*b*u)-0.5*a*u;
www=((1/48)*h11-(1/48)*h12+(27/48)*h21-(27/48)*h22)*...
    (ui01+0.5*dt*ui00);
   %CALCULATING OF FINITE DIFFERENCES ON 1-ST STEP
uk11=0.5*b*(z+2*sqrt(dt)*b*z)-0.5*b*z;
uk12=0.5*b*(u+2*sqrt(dt)*b*u)-0.5*b*u;
uk21=0.5*b*(yy0+2*sqrt(dt)*b*yy0)-0.5*b*yy0;
uk22=0.5*b*(g+2*sqrt(dt)*b*g)-0.5*b*g;
uk23=0.5*b*(q+2*sqrt(dt)*b*q)-0.5*b*q;
```

```
sss=-(0.5*(uk11+uk12-2*uk21)+uk22-uk23)*ui10;
r11=v+0.5*sqrt(dt)*b*v; r12=v-0.5*sqrt(dt)*b*v;
f11=w+0.5*sqrt(dt)*b*w; f12=w-0.5*sqrt(dt)*b*w;
g11=z+0.5*sqrt(dt)*b*z; g12=z-0.5*sqrt(dt)*b*z;
q11=u+0.5*sqrt(dt)*b*u; q12=u-0.5*sqrt(dt)*b*u;
c11=0.5*b*(r11+2*sqrt(dt)*b*r11)-0.5*b*r11-...
    0.5*b*(r12+2*sqrt(dt)*b*r12)+0.5*b*r12;
c12=0.5*b*(f11+2*sqrt(dt)*b*f11)-0.5*b*f11-...
    0.5*b*(f12+2*sqrt(dt)*b*f12)+0.5*b*f12;
c21=0.5*b*(g11+2*sqrt(dt)*b*g11)-0.5*b*g11-...
    0.5*b*(g12+2*sqrt(dt)*b*g12)+0.5*b*g12;
c22=0.5*b*(q11+2*sqrt(dt)*b*q11)-0.5*b*q11-...
    0.5*b*(q12+2*sqrt(dt)*b*q12)+0.5*b*q12;
ccc=((1/48)*c11-(1/48)*c12+(27/48)*c21-(27/48)*...
    c22)*ui0000;
vvv0=uu+vv+zzz+(uuu+www+sss+ccc)*(1/(dt^(3/2)));
             %1-ST STEP OF IMPLICIT 2 STEP FINITE-
             %DIFFERENCES STRONG METHOD OF ORDER 2.0
yy1=(1/(1-0.5*a*dt))*(yy0+0.5*a*yy0*dt+vvv0);
     for p=2:l,
          %MULTIPLE STOCHASTIC INTEGRALS ON p-TH STEP
ksi=randn(1,nn+2);
sw=sw+ksi(1,1);
ui0=sqrt(dt)*ksi(1,1);
ui1=-0.5*(dt^(3/2))*(ksi(1,1)+(1/sqrt(3))*ksi(1,2));
ui00=0.5*dt*((ksi(1,1))^2-1);
ui000=(1/6)*(dt^(3/2))*((ksi(1,1))^3-3*ksi(1,1));
ui0000=(1/24)*(dt^2)*((ksi(1,1))^4-6*((ksi(1,1))^2)+3);
bbb=(2/3)*((ksi(1,1))^2)+(1/sqrt(3))*ksi(1,1)*ksi(1,2)-...
    (1/(3*sqrt(5)))*ksi(1,3)*ksi(1,1)-1;
          %MULTIPLE STOCHASTIC INTEGRALS ON p-TH STEP
for ij=1:nn,
  bbb=bbb+((ksi(1,ij))^2)/((2*ij-1)*(2*ij+3))-(ksi(1,ij)*...
      ksi(1,ij+2))/((2*ij+3)*sqrt((2*ij+1)*(2*ij+5)));
end; % for ij
ui10=-(1/4)*(dt^2)*bbb;
ui01=0.5*(dt^2)+ui1*ui0-ui10;
    %CALCULATING OF FINITE DIFFERENCES ON p-TH STEP
z=yy1+sqrt(dt)*b*yy1;    u=yy1-sqrt(dt)*b*yy1;
v=yy1-3*sqrt(dt)*b*yy1;  w=yy1+3*sqrt(dt)*b*yy1;
r=yy1+dt*a*yy1;          f=yy1+2*dt*b*yy1;
g=yy1+0.5*dt*a*yy1;      q=yy1-0.5*dt*a*yy1;
uu=b*yy1*ui0+(1/sqrt(dt))*((1/48)*b*v-(1/48)*b*w+...
   (27/48)*b*z-(27/48)*b*u)*ui00;
vv=(1/dt)*((0.5*a*f-0.5*a*yy1)*(0.5*dt*ui0+ui1)-...
   (0.5*(b*z+b*u-2*b*yy1)+b*g-b*q)*ui1);
z11=b*(v+0.5*sqrt(dt)*b*v)-b*(v-0.5*sqrt(dt)*b*v);
z12=b*(w+0.5*sqrt(dt)*b*w)-b*(w-0.5*sqrt(dt)*b*w);
z21=b*(z+0.5*sqrt(dt)*b*z)-b*(z-0.5*sqrt(dt)*b*z);
z22=b*(u+0.5*sqrt(dt)*b*u)-b*(u-0.5*sqrt(dt)*b*u);
```

```
zzz=(1/dt)*((1/48)*z11-(1/48)*z12+(27/48)*z21-...
    (27/48)*z22)*ui000;
    %CALCULATING OF FINITE DIFFERENCES ON p-TH STEP
u11=0.5*(b*v+b*(v+2*sqrt(dt)*b*v)-2*b*(v+sqrt(dt)*b*v))+...
    b*(v+0.5*dt*a*v)-b*(v-0.5*dt*a*v);
u12=0.5*(b*w+b*(w+2*sqrt(dt)*b*w)-2*b*(w+sqrt(dt)*b*w))+...
    b*(w+0.5*dt*a*w)-b*(w-0.5*dt*a*w);
u21=0.5*(b*z+b*(z+2*sqrt(dt)*b*z)-2*b*(z+sqrt(dt)*b*z))+...
    b*(z+0.5*dt*a*z)-b*(z-0.5*dt*a*z);
u22=0.5*(b*u+b*(u+2*sqrt(dt)*b*u)-2*b*(u+sqrt(dt)*b*u))+...
    b*(u+0.5*dt*a*u)-b*(u-0.5*dt*a*u);
uuu=((1/48)*u11-(1/48)*u12+(27/48)*u21-(27/48)*u22)*...
    (ui10-ui01);
h11=0.5*a*(v+2*dt*b*v)-0.5*a*v;
h12=0.5*a*(w+2*dt*b*w)-0.5*a*w;
h21=0.5*a*(z+2*dt*b*z)-0.5*a*z;
h22=0.5*a*(u+2*dt*b*u)-0.5*a*u;
www=((1/48)*h11-(1/48)*h12+(27/48)*h21-(27/48)*h22)*...
    (ui01+0.5*dt*ui00);
    %CALCULATING OF FINITE DIFFERENCES ON p-TH STEP
uk11=0.5*b*(z+2*sqrt(dt)*b*z)-0.5*b*z;
uk12=0.5*b*(u+2*sqrt(dt)*b*u)-0.5*b*u;
uk21=0.5*b*(yy1+2*sqrt(dt)*b*yy1)-0.5*b*yy1;
uk22=0.5*b*(g+2*sqrt(dt)*b*g)-0.5*b*g;
uk23=0.5*b*(q+2*sqrt(dt)*b*q)-0.5*b*q;
sss=-(0.5*(uk11+uk12-2*uk21)+uk22-uk23)*ui10;
r11=v+0.5*sqrt(dt)*b*v; r12=v-0.5*sqrt(dt)*b*v;
f11=w+0.5*sqrt(dt)*b*w; f12=w-0.5*sqrt(dt)*b*w;
g11=z+0.5*sqrt(dt)*b*z; g12=z-0.5*sqrt(dt)*b*z;
q11=u+0.5*sqrt(dt)*b*u; q12=u-0.5*sqrt(dt)*b*u;
c11=0.5*b*(r11+2*sqrt(dt)*b*r11)-0.5*b*r11-0.5*b*...
    (r12+2*sqrt(dt)*b*r12)+0.5*b*r12;
c12=0.5*b*(f11+2*sqrt(dt)*b*f11)-0.5*b*f11-0.5*b*...
    (f12+2*sqrt(dt)*b*f12)+0.5*b*f12;
c21=0.5*b*(g11+2*sqrt(dt)*b*g11)-0.5*b*g11-0.5*b*...
    (g12+2*sqrt(dt)*b*g12)+0.5*b*g12;
c22=0.5*b*(q11+2*sqrt(dt)*b*q11)-0.5*b*q11-0.5*b*...
    (q12+2*sqrt(dt)*b*q12)+0.5*b*q12;
ccc=((1/48)*c11-(1/48)*c12+(27/48)*c21-(27/48)*c22)*...
    ui0000;
vvv1=uu+vv+zzz+(uuu+www+sss+ccc)*(1/(dt^(3/2)));
               %p-ST STEP OF IMPLICIT 2 STEP FINITE-
               %DIFFERENCES STRONG METHOD OF ORDER 2.0
yy2=(1/(1-0.5*a*dt))*(yy0+0.5*dt*(2*a*yy1+a*yy0)+...
    vvv0+vvv1);
    yy0=yy1; vvv0=vvv1; yy1=yy2;
end; % for p
    y(l+1)=yy2;
                         %EXACT SOLUTION
x(p+1)=x(1)*expm((a-0.5*(b^2))*l*dt+b*sqrt(dt)*sw);
```

```
                %CALCULATING OF 90% CONFIDENCE INTERVAL
    e(i)=abs(x(l+1)-y(l+1));
    he=he+e(i);
 end; % for i
   he=he/(20*100);
     for j=1:20,
        ee=0;
          for k=(j-1)*100+1:j*100,
            ee=ee+e(k);
          end; % for k
        hh(j)=ee/100;
     end; % for j
      s=0;
        for j=1:20,
          s=s+(hh(j)-he)^2;
        end; % for j
    s=s/19;
    hee(jj-2)=he;
    he1(jj-2)=he-st*sqrt(s/20);
    he2(jj-2)=he+st*sqrt(s/20);
    ttt(jj-2)=1/(2^jj);
  end; % for jj
e1=[he1(1) he2(1)]; e2=[he1(2) he2(2)];
e3=[he1(3) he2(3)]; e4=[he1(4) he2(4)]; e5=[he1(5) he2(5)];
tt1=[1/(2^3) 1/(2^3)]; tt2=[1/(2^4) 1/(2^4)];
tt3=[1/(2^5) 1/(2^5)]; tt4=[1/(2^6) 1/(2^6)];
tt5=[1/(2^7) 1/(2^7)];
plot(tt1,e1,tt2,e2,tt3,e3,tt4,e4,tt5,e5,ttt,hee);
pause;
```

17.5.3 Программа для численного эксперимента 9.12 (кривая 3)

```
clear;
t0=0; tk=1;    %INTERVAL OF INTEGRATION
a=1.5; b=1.5;  %COEFFICIENTS OF SDE
st=1.73;       %COEFFICIENT FOR 90% CONFIDENCE INTERVAL
   for jj=3:7,
     randn('state', 0);
     dt=1/(2^jj); %STEP OF INTEGRATION ON jj-TH ITERATION
     t=t0:dt:tk;
     l=max(size(t))-1;
     he=0;
       for i=1:20*100,
          x(1)=1; y(1)=1;
              %1-ST STEP OF 3 STEP METHOD
              %MULTIPLE STOCHASTIC INTEGRALS
   w=randn;
   ui0=sqrt(dt)*w;
```

```
   ui00=0.5*dt*(w^2-1);
   v1(1)=b*ui0+(b^2)*ui00;
   y(2)=y(1)+a*y(1)*dt+v1(1)*y(1);
              %2-ND STEP OF 3 STEP METHOD
              %MULTIPLE STOCHASTIC INTEGRALS
   w22=randn;
   ui0=sqrt(dt)*w22;
   ui00=0.5*dt*((w22)^2-1);
   v1(2)=b*ui0+(b^2)*ui00;
   y(3)=y(2)+a*y(2)*dt+v1(2)*y(2);

   sw=w+w22;
     for p=3:l,
             %SECONDARY CALCULATING
             %MULTIPLE STOCHASTIC INTEGRALS
       w1=randn;
       ui0=sqrt(dt)*w1;
       ui00=0.5*dt*(w1^2-1);
       v1(p)=b*ui0+(b^2)*ui00;
       sw=sw+w1;
    end; % for p
      for p=3:l,
             %p-TH STEP OF 3 STEP STRONG METHOD
y(p+1)=(1/(1-(3/4)*dt*a))*(y(p-2)+dt*a*(3/4)*(y(p)+...
        y(p-1)+y(p-2))+v1(p-1)*y(p-1)+v1(p-2)*y(p-2)...
        +v1(p)*y(p));
      end; % for p
                      %EXACT SOLUTION
  x(l+1)=x(1)*expm((a-0.5*(b^2))*l*dt+b*sqrt(dt)*sw);
               %CALCULATING OF 90% CONFIDENCE INTERVAL
      e(i)=abs(x(l+1)-y(l+1));
      he=he+e(i);
    end; % for i
      he=he/(20*100);
        for j=1:20,
          ee=0;
            for k=(j-1)*100+1:j*100,
              ee=ee+e(k);
            end; % for k
          hh(j)=ee/100;
        end; % for j
          s=0;
            for j=1:20,
              s=s+(hh(j)-he)^2;
            end; % for j
    s=s/19;
    hee(jj-2)=he;
    he1(jj-2)=he-st*sqrt(s/20);
    he2(jj-2)=he+st*sqrt(s/20);
    ttt(jj-2)=1/(2^jj);
```

```
  end; %for jj
e1=[he1(1) he2(1)]; e2=[he1(2) he2(2)];
e3=[he1(3) he2(3)]; e4=[he1(4) he2(4)]; e5=[he1(5) he2(5)];
tt1=[1/(2^3) 1/(2^3)]; tt2=[1/(2^4) 1/(2^4)];
tt3=[1/(2^5) 1/(2^5)]; tt4=[1/(2^6) 1/(2^6)];
tt5=[1/(2^7) 1/(2^7)];
plot(tt1,e1,tt2,e2,tt3,e3,tt4,e4,tt5,e5,ttt,hee);
   pause;
```

17.5.4 Программа для построения кривой 1 на рис.9.14

```
clear;
t0=0; tk=1;    %INTERVAL OF INTEGRATION
a=1.5; b=1.5;  %COEFFICIENTS OF SDE
st=1.73;       %COEFFICIENT FOR 90% CONFIDENCE INTERVAL
   for jj=3:7,
     randn('state',0);
       dt=1/(2^jj); %STEP OF INTEGRATION ON jj-TH ITERATION
       t=t0:dt:tk;
       l=max(size(t))-1;
               %CALCULATING OF FINITE-DIFFERENCES
z1=1+0.5*sqrt(dt)*b;    z2=1-0.5*sqrt(dt)*b;
z3=1+2*sqrt(dt)*b;    z4=1+sqrt(dt)*b;
z5=1+0.5*dt*a;    z6=1-0.5*dt*a;       z7=1+2*dt*b;
    he=0;
      for i=1:20*100,
         x(1)=1; y(1)=1;
                 %FIRST STEP OF 3 STEP METHOD
            %MULTIPLE STOCHASTIC INTEGRALS
    w=randn;
    w10=randn;
    ui0=sqrt(dt)*w;
    ui00=0.5*dt*(w^2-1);
    ui000=(1/6)*(dt^(3/2))*(w^3-3*w);
    ui1=-0.5*(dt^(3/2))*(w+(1/sqrt(3))*w10);
    vv1(1)=(1/dt)*(0.5*a*z7-0.5*a)*ui0;
 v1(1)=b*ui0+(dt^(-0.5))*(b*z1-b*z2)*ui00+(1/dt)*...
       ((0.5*a*z7-0.5*a)*(dt*ui0+ui1)-(0.5*(b+b*z3-...
       2*b*z4)+b*z5-b*z6)*ui1)+(1/dt)*(0.5*b*(z1+2*...
       sqrt(dt)*b*z1)-0.5*b*z1-0.5*b*(z2+2*sqrt(dt)*...
       b*z2)+0.5*b*z2)*ui000;
    y(2)=y(1)+a*y(1)*dt+0.5*(0.5*a+0.5*a*z3-a*z4+...
         a*z5-a*z6)*(dt)*y(1)+v1(1)*y(1);
                %SECOND STEP OF 3 STEP METHOD
           %MULTIPLE STOCHASTIC INTEGRALS
    w22=randn;
    w2210=randn;
    ui0=sqrt(dt)*w22;
    ui00=0.5*dt*((w22)^2-1);
    ui000=(1/6)*(dt^(3/2))*((w22)^3-3*w22);
```

```
    ui1=-0.5*(dt^(3/2))*(w22+(1/sqrt(3))*w2210);
    vv1(2)=(1/dt)*(0.5*a*z7-0.5*a)*ui0;
  v1(2)=b*ui0+(dt^(-0.5))*(b*z1-b*z2)*ui00+(1/dt)*...
        ((0.5*a*z7-0.5*a)*(dt*ui0+ui1)-(0.5*(b+b*z3-...
        2*b*z4)+b*z5-b*z6)*ui1)+(1/dt)*(0.5*b*(z1+2*...
        sqrt(dt)*b*z1)-0.5*b*z1-0.5*b*(z2+2*sqrt(dt)*...
        b*z2)+0.5*b*z2)*ui000;
    y(3)=y(2)+a*y(2)*dt+0.5*(0.5*a+0.5*a*z3-a*z4+a*...
         z5-a*z6)*(dt)*y(2)+v1(2)*y(2);
     sw=w+w22;
      for p=3:l,
%SECONDARY CALCULATIONS FOR p-TH STEP OF 3 STEP METHOD
           %MULTIPLE STOCHASTIC INTEGRALS
    w1=randn;
    w2=randn;
    ui0=sqrt(dt)*w1;
    ui00=0.5*dt*(w1^2-1);
    ui000=(1/6)*(dt^(3/2))*(w1^3-3*w1);
    ui1=-0.5*(dt^(3/2))*(w1+(1/sqrt(3))*w2);
    vv1(p)=(1/dt)*(0.5*a*z7-0.5*a)*ui0;
  v1(p)=b*ui0+(dt^(-0.5))*(b*z1-b*z2)*ui00+(1/dt)*...
        ((0.5*a*z7-0.5*a)*(dt*ui0+ui1)-(0.5*(b+b*z3-...
        2*b*z4)+b*z5-b*z6)*ui1)+(1/dt)*(0.5*b*(z1+2*...
        sqrt(dt)*b*z1)-0.5*b*z1-0.5*b*(z2+2*sqrt(dt)*...
        b*z2)+0.5*b*z2)*ui000;
          sw=sw+w1;
      end; % for p
        for p=3:l,
                      %p-TH STEP OF 3 STEP METHOD
  y(p+1)=(1/(1-dt*a))*(y(p-2)+dt*a*(0.5*y(p)+0.5*y(p-1)+...
          y(p-2))+v1(p-2)*y(p-2)+v1(p-1)*y(p-1)+v1(p)*...
          y(p)-dt*(vv1(p)*y(p)+(1/2)*vv1(p-1)*y(p-1)));
        end; % for p
                          %EXACT SOLUTION
    x(l+1)=x(1)*expm((a-0.5*(b^2))*l*dt+b*sqrt(dt)*sw);
             %CALCULATING OF 90% CONFIDENCE INTERVAL
        e(i)=abs(x(l+1)-y(l+1));
        he=he+e(i);
      end; % for i
        he=he/(20*100);
          for j=1:20,
            ee=0;
              for k=(j-1)*100+1:j*100,
                ee=ee+e(k);
              end; % for k
            hh(j)=ee/100;
          end; % for j
        s=0;
          for j=1:20,
            s=s+(hh(j)-he)^2;
```

```
          end; % for j
     s=s/19;
     hee(jj-2)=he;
     he1(jj-2)=he-st*sqrt(s/20);
     he2(jj-2)=he+st*sqrt(s/20);
     ttt(jj-2)=1/(2^jj);
   end; % for jj
e1=[he1(1) he2(1)]; e2=[he1(2) he2(2)];
e3=[he1(3) he2(3)]; e4=[he1(4) he2(4)]; e5=[he1(5) he2(5)];
tt1=[1/(2^3) 1/(2^3)]; tt2=[1/(2^4) 1/(2^4)];
tt3=[1/(2^5) 1/(2^5)]; tt4=[1/(2^6) 1/(2^6)];
tt5=[1/(2^7) 1/(2^7)];
plot(tt1,e1,tt2,e2,tt3,e3,tt4,e4,tt5,e5,ttt,hee);
    pause;
```

17.6 MATLAB 7.0-программы к главе 10

17.6.1 Программа для численного эксперимента 10.1 при $N = 500$, $M = 100$

```
clear;
t0=0; tk=1;      %INTERVAL OF INTEGRATION
a=1.5; b=0.05;   %COEFFICIENTS OF SDE
st=1.73;
  for jj=2:6,
     randn('state', 0);
     dt=1/(2^jj);   %STEP OF INTEGRATION ON jj-TH ITERATION
     t=t0:dt:tk;
     l=max(size(t))-1;
     x(1)=1;
               %EXPECTATION OF SOLUTION OF SDE
     xxx=x(1)*expm(a*tk);
     he=0;
        for i=1:100*500,
          y(1)=1;
            for p=1:l,
              u=randn;
                       %WEAK EULER METHOD
        y(p+1)=(1+a*dt+b*sqrt(dt)*u)*y(p);
            end; % for p
                %CALCULATING OF 90% CONFIDENCE INTERVAL
          e(i)=y(l+1);
          he=he+e(i);
        end; % for i
      he=he/(100*500)-xxx;
        for j=1:100,
          ee=0;
            for k=(j-1)*500+1:j*500,
              ee=ee+e(k);
```

```
            end;
          hh(j)=ee/500-xxx;
        end; % for j
          s=0;
            for j=1:100,
              s=s+(hh(j)-he)^2;
            end; %for j
    s=s/99;
    hee(jj-1)=he;
    heee(jj-1)=abs(he);
    he1(jj-1)=he-st*sqrt(s/100);
    he2(jj-1)=he+st*sqrt(s/100);
    ttt(jj-1)=1/(2^jj);
  end; % for jj
e1=[he1(1) he2(1)]; e2=[he1(2) he2(2)];
e3=[he1(3) he2(3)]; e4=[he1(4) he2(4)]; e5=[he1(5) he2(5)];
tt1=[1/(2^2) 1/(2^2)]; tt2=[1/(2^3) 1/(2^3)];
tt3=[1/(2^4) 1/(2^4)]; tt4=[1/(2^5) 1/(2^5)];
tt5=[1/(2^6) 1/(2^6)];
plot(ttt,heee,ttt,hee,tt1,e1,tt2,e2,tt3,e3,tt4,e4,tt5,e5);
  pause;
```

17.6.2 Программа для численного эксперимента 10.2 при $N = 500$, $M = 200$

```
clear;
t0=0; tk=1;     %INTERVAL OF INTEGRATION
a=1.5; b=0.05;  %COEFFICIENTS OF SDE
st=1.73;
  for jj=3:6,
    randn('state', 0);
      dt=1/(2^jj);  %STEP OF INTEGRATION ON jj-TH ITERATION
      t=t0:dt:tk;
      l=max(size(t))-1;
      x(1)=1;
      xxx=x(1)*expm(a*tk); %EXPECTATION OF SOLUTION OF SDE
      he=0;
        for i=1:200*500,
          y(1)=1;
            for p=1:l,
              u=randn;
                %EXPLICIT WEAK METHOD OF ORDER 2.0
      y(p+1)=(1+a*dt+0.5*((a*dt)^2)+b*sqrt(dt)*u+0.5*(b^2)*...
             dt*(u^2-1)+a*b*(dt^(3/2))*u)*y(p);
            end;
                 %CALCULATING OF 90% CONFIDENCE INTERVAL
          e(i)=y(l+1); he=he+e(i);
        end; % for i
          he=he/(200*500)-xxx;
```

```
            for j=1:200,
              ee=0;
                for k=(j-1)*500+1:j*500,
                  ee=ee+e(k);
                end; % for k
              hh(j)=ee/500-xxx;
            end; % for j
          s=0;
        for j=1:200,
          s=s+(hh(j)-he)^2;
        end; % for j
    s=s/199; hee(jj-2)=he;
    heee(jj-2)=abs(he);
    he1(jj-2)=he-st*sqrt(s/200);
    he2(jj-2)=he+st*sqrt(s/200);
    ttt(jj-2)=1/(2^jj);
  end; % for jj
e1=[he1(1) he2(1)]; e2=[he1(2) he2(2)];
e3=[he1(3) he2(3)]; e4=[he1(4) he2(4)];
tt1=[1/(2^3) 1/(2^3)]; tt2=[1/(2^4) 1/(2^4)];
tt3=[1/(2^5) 1/(2^5)]; tt4=[1/(2^6) 1/(2^6)];
plot(ttt,heee,ttt,hee,tt1,e1,tt2,e2,tt3,e3,tt4,e4);
   pause;
```

17.6.3 Программа для численного эксперимента 10.4 при $N = 500$, $M = 100$, $b = 0.01$

```
clear;
t0=0; tk=1;     %INTERVAL OF INTEGRATION
a=1.5; b=0.01;  %COEFFICIENTS OF SDE
st=1.73;
  for jj=1:7,
    randn('state', 0);
      dt=1/(2^(jj-1)); %STEP OF INTEGRATION ON jj-TH ITERATION
      t=t0:dt:tk;
      l=max(size(t))-1;
      x(1)=1;
              %EXPECTATION OF SOLUTION OF SDE
      xxx=x(1)*expm(a*tk);
      he=0;
        for i=1:100*500,
          y(1)=1;
            for p=1:l,
                  %MODELLING OF MULTIPLE STOCHASTIC INTEGRALS
    u=randn;
    ui0=sqrt(dt)*u;
    ui00=0.5*dt*(u^2-1);
    ui000=(1/6)*(dt^(3/2))*(u^3-3*u);
    ui0000=(1/24)*(dt^2)*(u^4-6*(u^2)+3);
```

```
                %EXPLICIT WEAK METHOD OF ORDER 4.0
    zz1=1+a*dt+0.5*((a*dt)^2)+(1/6)*((a*dt)^3)+...
        b*ui0+(b^2)*ui00+a*b*dt*ui0+(b^3)*ui000+...
        0.5*(a^2)*b*(dt^2)*ui0+(b^2)*a*dt*ui00;
    zz2=(1/24)*((a*dt)^4)+(1/6)*(dt^3)*(a^3)*b*...
        ui0+0.5*((dt*b*a)^2)*ui00+dt*(b^3)*a*...
        ui000+(b^4)*ui0000;
    y(p+1)=(zz1+zz2)*y(p);
  end;
             %CALCULATING OF 90% CONFIDENCE INTERVAL
      e(i)=y(l+1);
      he=he+e(i);
        end;
           he=he/(100*500)-xxx;
             for j=1:100,
                ee=0;
                  for k=(j-1)*500+1:j*500,
                     ee=ee+e(k);
                  end;
                hh(j)=ee/500-xxx;
              end;
            s=0;
          for j=1:100,
            s=s+(hh(j)-he)^2;
          end;
    s=s/99;
    hee(jj)=abs(he);
    heee(jj)=he;
    he1(jj)=he-st*sqrt(s/100);
    he2(jj)=he+st*sqrt(s/100);
    ttt(jj)=1/(2^(jj-1));
  end;
e1=[he1(1) he2(1)]; e2=[he1(2) he2(2)];
e3=[he1(3) he2(3)]; e4=[he1(4) he2(4)];
e5=[he1(5) he2(5)]; e6=[he1(6) he2(6)];
          e7=[he1(7) he2(7)];
tt1=[1/(2^0) 1/(2^0)]; tt2=[1/(2^1) 1/(2^1)];
tt3=[1/(2^2) 1/(2^2)]; tt4=[1/(2^3) 1/(2^3)];
tt5=[1/(2^4) 1/(2^4)]; tt6=[1/(2^5) 1/(2^5)];
           tt7=[1/(2^6) 1/(2^6)];
plot(ttt,hee,ttt,heee,tt1,e1,tt2,e2,tt3,...
     e3,tt4,e4,tt5,e5,tt6,e6,tt7,e7);
  pause;
```

17.6.4 Программа для численного эксперимента 10.7 при $N = 500$, $M = 200$

```
clear;
t0=0; tk=1;     %INTERVAL OF INTEGRATION
```

```
a=1.5; b=0.05;  %COEFFICIENTS OF SDE
st=1.73;
  for jj=3:6,
    randn('state', 0);
    dt=1/(2^jj);  %STEP OF INTEGRATION ON jj-TH ITERATION
    t=t0:dt:tk;
    l=max(size(t))-1;
    x(1)=1;
              %EXPECTATION OF SOLUTION OF SDE
    xxx=x(1)*expm(a*tk);
    he=0;
      for i=1:200*500,
        y(1)=1;
          for p=1:l,
     u=randn;
               %CALCULATING OF FINITE DIFFERENCES
   yy=y(p)+a*y(p)*dt;
   yy1=y(p)+b*y(p)*sqrt(dt); yy2=y(p)-b*y(p)*sqrt(dt);
 %EXPLICIT WEAK FINITE-DIFFERENCES METHOD OF ORDER 2.0
   y(p+1)=y(p)+0.5*(a*y(p)+a*yy)*dt+0.25*dt*u*...
          (a*yy1-a*yy2)+0.25*(b*yy1+b*yy2+2*b*...
          yy)*sqrt(dt)*u+0.25*dt*(a*yy1+a*yy2-...
          2*a*y(p))+(1/(4*sqrt(dt)))*(b*yy1-b*...
          yy2)*dt*(u^2-1);
        end; % for p
             %CALCULATING OF 90% CONFIDENCE INTERVAL
     e(i)=y(l+1);
     he=he+e(i);
   end; % for i
     he=he/(200*500)-xxx;
       for j=1:200,
         ee=0;
           for k=(j-1)*500+1:j*500,
             ee=ee+e(k);
           end; % for k
         hh(j)=ee/500-xxx;
       end; % for j
         s=0;
           for j=1:200,
             s=s+(hh(j)-he)^2;
           end; % for j
    s=s/199;
    hee(jj-2)=he;
    heee(jj-2)=abs(he);
    he1(jj-2)=he-st*sqrt(s/200);
    he2(jj-2)=he+st*sqrt(s/200);
    ttt(jj-2)=1/(2^jj);
  end; % for jj
e1=[he1(1) he2(1)]; e2=[he1(2) he2(2)];
e3=[he1(3) he2(3)]; e4=[he1(4) he2(4)];
```

```
tt1=[1/(2^3) 1/(2^3)]; tt2=[1/(2^4) 1/(2^4)];
tt3=[1/(2^5) 1/(2^5)]; tt4=[1/(2^6) 1/(2^6)];
plot(ttt,heee,ttt,hee,tt1,e1,tt2,e2,tt3,e3,tt4,e4);
  pause;
```

17.6.5 Программа для численного эксперимента 10.9 при $N = 500$, $M = 200$

```
clear;
t0=0; tk=1;    %INTERVAL OF INTEGRATION
a=5; b=0.01;   %COEFFICIENTS OF SDE
st=1.73;
  for jj=3:6,
    randn('state', 0);
      dt=1/(2^jj);  %STEP OF INTEGRATION ON jj-TH ITERATION
      t=t0:dt:tk;
      l=max(size(t))-1;
      he1=0; he2=0;
   %EXPECTATIONS OF COMPONENTS OF EXACT SOLUTION OF SDE
      xxx1=0.5*(1+expm(-2*a)); xxx2=0.5*(1-expm(-2*a));
      y1(1)=1; y2(1)=0;
        for i=1:200*500,
          for p=1:l,
            u=randn;     %DISCRETE
            if u>0,      %RANDOM
            ksi=1;       %VARIABLE
            elseif u<0,  %WITH
            ksi=-1;      %DISTRIBUTION:
            else         %P(ksi=-1)=0.5,
            ksi=0;       %P(ksi=1)=0.5
          end;
    a1=1/(1+(a+b^2)*dt-b*ksi*sqrt(dt));
                %IMPLICIT WEAK EULER METHOD
    y2(p+1)=(1/(1-(a*dt*a1)^2))*a1*(y2(p)+a*dt*a1*y1(p));
    y1(p+1)=a1*(y1(p)+a*dt*y2(p+1));
      end;
            %CALCULATING OF 90% CONFIDENCE INTERVAL
     e1(i)=y1(l+1); e2(i)=y2(l+1);
     he1=he1+e1(i); he2=he2+e2(i);
   end;
     he1=he1/(200*500)-xxx1; he2=he2/(200*500)-xxx2;
     hhh=sqrt(he1^2+he2^2);
       for j=1:200,
         ee11=0; ee22=0;
           for k=(j-1)*500+1:j*500,
             ee11=ee11+e1(k); ee22=ee22+e2(k);
           end;
        hh1(j)=ee11/500-xxx1; hh2(j)=ee22/500-xxx2;
      end;
```

```
        s1=0; s2=0;
          for j=1:200,
            s1=s1+(hh1(j)-he1)^2; s2=s2+(hh2(j)-he2)^2;
          end;
    s1=s1/199; s2=s2/199;
    hee1(jj-2)=he1;
    he100(jj-2)=he1-st*sqrt(s1/200);
    he101(jj-2)=he1+st*sqrt(s1/200);
    hee2(jj-2)=he2;
    he200(jj-2)=he2-st*sqrt(s2/200);
    he201(jj-2)=he2+st*sqrt(s2/200);
    ttt(jj-2)=1/(2^jj); hhh1(jj-2)=hhh;
  end;
e1=[he100(1) he101(1)]; e2=[he100(2) he101(2)];
e3=[he100(3) he101(3)]; e4=[he100(4) he101(4)];
v1=[he200(1) he201(1)]; v2=[he200(2) he201(2)];
v3=[he200(3) he201(3)]; v4=[he200(4) he201(4)];
t1=[1/(2^3) 1/(2^3)]; t2=[1/(2^4) 1/(2^4)];
t3=[1/(2^5) 1/(2^5)]; t4=[1/(2^6) 1/(2^6)];
plot(ttt,hhh1,ttt,hee1,ttt,hee2);
  pause;
plot(ttt,hee1,t1,e1,t2,e2,t3,e3,t4,e4);
  pause;
plot(ttt,hee2,t1,v1,t2,v2,t3,v3,t4,v4);
  pause;
```

17.6.6 Программа для численного эксперимента 10.11 при $N = 500$, $M = 200$

```
clear;
t0=0; tk=1;     %INTERVAL OF INTEGRATION
a=1.5; b=0.05;  %COEFFICIENTS OF SDE
st=1.73;
  for jj=2:6,
    randn('state', 0);
      dt=1/(2^jj);   %STEP OF INTEGRATION ON jj-TH ITERATION
      t=t0:dt:tk;
      l=max(size(t))-1;
      x(1)=1;
                %EXPECTATION OF SOLUTION OF SDE
      xxx=x(1)*expm(a*tk);
      he=0;
        for i=1:200*500,
          y(1)=1;
            for p=1:l,
              u=randn;
             %CALCULATING OF FINITE DIFFERENCES
     yy=y(p)+a*y(p)*dt;
     yy1=y(p)+b*y(p)*sqrt(dt);
```

```
     yy2=y(p)-b*y(p)*sqrt(dt);
  %IMPLICIT WEAR FINITE-DIFFERENCE METHOD OF ORDER 2.0
     y(p+1)=(1/(1-0.5*a*dt))*(y(p)+0.5*a*y(p)*dt+...
            0.25*(b*yy1+b*yy2+2*b*yy)*sqrt(dt)*u+...
            (1/(4*sqrt(dt)))*(b*yy1-b*yy2)*dt*...
            (u^2-1));
           end; % for p
  %CALCULATING OF 90% CONFIDENCE INTERVAL
         e(i)=y(l+1);
         he=he+e(i);
       end; % for i
         he=he/(200*500)-xxx;
           for j=1:200,
             ee=0;
             for k=(j-1)*500+1:j*500,
               ee=ee+e(k);
              end; % for k
             hh(j)=ee/500-xxx;
           end; % for j
         s=0;
           for j=1:200,
             s=s+(hh(j)-he)^2;
           end; % for j
    s=s/199;
    hee(jj-1)=he;
    he1(jj-1)=he-st*sqrt(s/200);
    he2(jj-1)=he+st*sqrt(s/200);
    ttt(jj-1)=1/(2^jj);
  end; % for jj
e1=[he1(1) he2(1)]; e2=[he1(2) he2(2)];
e3=[he1(3) he2(3)]; e4=[he1(4) he2(4)]; e5=[he1(5) he2(5)];
tt1=[1/(2^2) 1/(2^2)]; tt2=[1/(2^3) 1/(2^3)];
tt3=[1/(2^4) 1/(2^4)]; tt4=[1/(2^5) 1/(2^5)];
tt5=[1/(2^6) 1/(2^6)];
plot(ttt,hee,tt1,e1,tt2,e2,tt3,e3,tt4,e4,tt5,e5);
   pause;
```

17.6.7 Программа для численного эксперимента 10.12 при $N = 500$, $M = 200$

```
clear;
t0=0; tk=1;     %INTERVAL OF INTEGRATION
a=1; b=0.01;    %COEFFICIENTS OF SDE
st=1.73;
  for jj=3:6,
    randn('state', 0);
    dt=1/(2^jj);  %STEP OF INTEGRATION ON jj-TH ITERATION
    t=t0:dt:tk;
    l=max(size(t))-1;
```

```
    x(1)=1;
              %EXPECTATION OF SOLUTION OF SDE
    xxx=x(1)*expm(a*tk);
    he=0;
      for i=1:200*500,
        y(1)=1;
          for p=1:l,
            u=randn;        %DISCRETE
              if u>0,       %RANDOM
                ksi=1;      %VARIABLE
              elseif u<0,   %WITH
                ksi=-1;     %DISTRIBUTION:
              else          %P(ksi=-1)=0.5,
                ksi=0;      %P(ksi=1)=0.5
              end;
              %CALCULATING OF FINITE DIFFERENCES
    yy1=y(p)+sqrt(dt)*b*y(p);
    yy2=y(p)-sqrt(dt)*b*y(p);
    zz=y(p)+a*y(p)*dt;
              %FINITE-DIFFERENCE WEAK PREDICTOR-
              %CORRECTOR METHOD OF ORDER 2.0
uu=0.5*(b*zz+b*y(p)+0.5*(b*yy1+b*yy2-2*b*y(p)))*sqrt(dt)*...
   ksi+(1/(4*sqrt(dt)))*(b*yy1-b*yy2)*dt*(ksi^2-1);
yyy=y(p)+0.5*(a*y(p)+a*zz)*dt+uu+(sqrt(dt)/4)*(a*yy1-a*...
    yy2)*sqrt(dt)*ksi+(dt/4)*(a*yy1+a*yy2-2*a*y(p));
y(p+1)=y(p)+0.5*(a*y(p)+a*yyy)*dt+uu;
       end;
            %CALCULATING OF 90% CONFIDENCE INTERVAL
         e(i)=y(l+1);
         he=he+e(i);
           end;
         he=he/(200*500)-xxx;
           for j=1:200,
              ee=0;
                for k=(j-1)*500+1:j*500,
                   ee=ee+e(k);
                end;
              hh(j)=ee/500-xxx;
           end;
         s=0;
       for j=1:200,
          s=s+(hh(j)-he)^2;
       end;
    s=s/99;
    hee(jj-2)=abs(he);
    he1(jj-2)=abs(he)-st*sqrt(s/200);
    he2(jj-2)=abs(he)+st*sqrt(s/200);
    ttt(jj-2)=1/(2^jj);
  end;
e1=[he1(1) he2(1)]; e2=[he1(2) he2(2)];
```

```
e3=[he1(3) he2(3)]; e4=[he1(4) he2(4)];
tt1=[1/(2^3) 1/(2^3)]; tt2=[1/(2^4) 1/(2^4)];
tt3=[1/(2^5) 1/(2^5)]; tt4=[1/(2^6) 1/(2^6)];
plot(ttt,hee,tt1,e1,tt2,e2,tt3,e3,tt4,e4);
   pause;
```

17.7 MATLAB 7.0-программы к главе 14

17.7.1 Программа для численного эксперимента 14.1

```
clear;
t0=0; tk=1.2;   %INTERVAL OF INTEGRATION
dt=1/(2^10);    %STEP OF INTEGRATION
    S(1)=10; umu=0.5; ula=0.2; %START DATA
randn('state',0); %SET OF START POINT OF GAUSSIAN
                  %RANDOM NUMBER GENERATOR
    t=t0:dt:tk;
    l=max(size(t))-1;
    r(1)=0; sw=0;
        for j=1:l,
            w=randn; sw=sw+w;
      %MODELLING OF STOCHASTIC PROCESS ON j+1-TH STEP
S(j+1)=S(1)*exp((umu-0.5*(ula^2))*dt*j+ula*(dt^(0.5))*sw);
          r(j+1)=j*dt;
        end; % for
    plot(r,S);
    xlabel('t')
    ylabel('S(t)')
    pause;
```

17.7.2 Программа, реализующая численную схему из раздела 14.2

```
   clear;
   t0=0; tk=100;   %INTERVAL OF INTEGRATION
   s=10.0; r=24.30;  %PARAMETERS OF SYSTEM
   b=8/3;            %OF LORENZ EQUATIONS
   dt=0.005;    %STEP OF INTEGRATION
   sf=2;           %STOCHASTIC INTENSITY
      t=t0:dt:tk;
        x(1)=0.25; y(1)=0.25; z(1)=0.25; %START DATA
      l=max(size(t))-1;
         for j=1:l,
                %SECONDARY VARIABLES e, g, f
            e=-s*x(j)+s*y(j);
            g=r*x(j)-y(j)-x(j)*z(j);
            f=-b*z(j)+x(j)*y(j);
                %SECONDARY VARIABLES e1, g1, f1
e1=e*(s^2+s*(r-z(j)))-(s^2+s)*g-s*x(j)*f;
```

```
g1=e*((-s-1)*(r-z(j))+b*z(j)-2*x(j)*y(j))+g*...
   ((r-z(j))*s+1-x(j)^2)+f*(-e+x(j)*(b+1));
f1=e*(2*x(j)*(r-z(j))-(b+1+s)*y(j))+g*(-x(j)*...
   (b+1+s)+2*s*y(j))+f*(b^2-x(j)^2);
          w1=randn; w2=randn; w3=randn;
            %MODELLING OF STOCHASTIC INTEGRALS
   v1=(1/6)*w1-(1/(4*sqrt(3)))*w2+(1/(6*sqrt(20)))*w3;
   v2=-(1/2)*w1+(1/(2*sqrt(3)))*w2;
   v3=-(1/6)*w1+(1/(3*sqrt(20)))*w3;
            %MODELLING OF SOLUTION OF SYSTEM OF
            %LORENZ EQUATIONS WITH STOCHASTICS
x(j+1)=x(j)+dt*e+((dt^2)/2)*(-s*e+s*g)+((dt^3)/6)*...
       e1-(dt^(5/2))*s*x(j)*sf*v1;
y(j+1)=y(j)+dt*g+((dt^2)/2)*((r-z(j))*e-g-x(j)*f)+...
       ((dt^3)/6)*g1-(dt^(3/2))*sf*x(j)*v2+(dt^(5/2))*...
       (-e+(1+b)*x(j))*sf*v1+(dt^(5/2))*e*sf*v3;
z(j+1)=z(j)+dt*f+((dt^2)/2)*(e*y(j)+g*x(j)-b*f)+...
       ((dt^3)/6)*f1+(dt^(1/2))*sf*w1-(dt^(3/2))*b*...
       sf*v2+(dt^(5/2))*sf*(b^2-x(j)^2)*v1;
      end; %for
      plot(x,y);         %PHASE PORTRAIT
      xlabel('x1(t)')
      ylabel('x2(t)')
      pause;
```

17.7.3 Программа, реализующая численную схему из раздела 14.3

```
clear;
t0=0; tk=0.8;      %INTERVAL OF INTEGRATION
dt=0.005;          %STEP OF INTEGRATION
   x(1)=5; y(1)=5;     %START DATA
   s1=0.1; s2=0.1;
   uk1=2.0; uk2=2.3;
   a1=-0.2; a2=-0.3;
       t=t0:dt:tk;
       l=max(size(t))-1;
       r(1)=0;
       randn('state', 0);
          for j=1:l,
            w1=randn; w2=randn; %STANDARD GAUSSIAN
            v1=randn; v2=randn; %RANDOM VARIABLES
        %MODELLING OF STOCHASTIC INTEGRALS
     wi1=-((dt^(1.5))/(sqrt(3)))*w1;
     wi2=0.5*(dt^(1.5))*(w1-(1/(3^(0.5)))*w2);
     wi3=(dt^(0.5))*w1;
     wi4=(dt/2)*(w1^2-1);
     wi5=((dt^(1.5))/6)*(w1^3-3*w1);
     vi1=-((dt^(1.5))/(sqrt(3)))*v1;
```

```
     vi2=0.5*(dt^(1.5))*(v1-(1/(sqrt(3)))*v2);
     vi3=(dt^(0.5))*v1;
     vi4=(dt/2)*(v1^2-1);
     vi5=((dt^(1.5))/6)*(v1^3-3*v1);
            %EXPLICIT 1 STEP METHOD OF ORDER 1.0 FOR
            %SYSTEM OF STOCHASTIC DIFFERENTIAL EQUATIONS
x(j+1)=x(j)*(1+(uk1+a1*y(j))*dt+s1*(uk1+a1*y(j))*wi1+...
       a1*s2*y(j)*vi2+s1*wi3+(s1^2)*wi4+(s1^3)*wi5);
y(j+1)=y(j)*(1+(uk2+a2*x(j))*dt-s2*vi1*(uk2+a2*x(j))+...
       a2*s1*x(j)*wi2+s2*vi3+(s2^2)*vi4+(s2^3)*vi5);
        r(j+1)=j*dt;
    end; % for
        plot(r,x,r,y);
        xlabel('t')
        ylabel('x1(t), x2(t)')
       pause;
```

17.7.4 Программа, реализующая численную схему из раздела 14.4

```
clear;
n=100;        %NUMBER OF ITERATIONS
dt=2^(-10);        %STEP OF INTEGRATION
x1(1)=3; x2(1)=5;     %START DATA
tk(1)=0;
q=10;
b11=0.5; b12=0; b21=0; b22=1.2;
um1=-1; um2=-15; gam=0.3;
            %SECONDARY VARIABLES
  b1=b11*(b11+b21); r1=b11*(b12+b22);
  g1=b12*(b11+b21); a1=b12*(b12+b22);
  b2=b21*(b11+b21); r2=b21*(b12+b22);
  g2=b22*(b11+b21); a2=b22*(b12+b22);
     %MODELLING OF MULTIPLE STOCHASTIC INTEGRALS
     randn('state',0);
         for i=1:n,
            w=randn(1,q+1); v=randn(1,q+1);
            s=w(1,1)*v(1,1); s1=w(1,1)*v(1,1);
                for j=1:q,
s=s+(1/(sqrt(4*j*j-1)))*(w(1,j)*v(1,j+1)-w(1,j+1)*v(1,j));
s1=s1+(1/(sqrt(4*j*j-1)))*(v(1,j)*w(1,j+1)-v(1,j+1)*w(1,j));
           end; % for
                      %MULTIPLE STOCHASTIC INTEGRALS
uj0021=0.5*dt*s; uj0012=0.5*dt*s1;
uj01=(sqrt(dt))*v(1,1); uj02=(sqrt(dt))*w(1,1);
uj0011=0.5*(uj01^2-dt); uj0022=0.5*(uj02^2-dt);
     f1=exp(gam*(x1(i)+x2(i)));
     f=exp(0.5*gam*(x1(i)+x2(i)));
        EXPLICIT 1 STEP METHOD OF ORDER 1.0
```

```
x1(i+1)=x1(i)+um1*dt+f*(b11*uj01+b12*uj02)+...
        0.5*gam*f1*(b1*uj0011+r1*uj0021+g1*...
        uj0012+a1*uj0022);
x2(i+1)=x2(i)+um2*dt+f*(b21*uj01+b22*uj02)+...
        0.5*gam*f1*(b2*uj0011+r2*uj0021+g2*...
        uj0012+a2*uj0022);
     tk(i+1)=tk(i)+dt;
  end; % for
plot(tk,x1,tk,x2)
xlabel('t')
ylabel('x1(t),x2(t)')
  pause;
```

17.7.5 Программа, реализующая численный метод из раздела 14.5

```
clear;
t0=0; tk=300;      %INTERVAL OF INTEGRATION
dt=0.03;           %STEP OF INTEGRATION
c=2.0; e=0.19; f=0.4; um=8.5; %START DATA
x1(1)=0.1; x2(1)=0.1; x3(1)=0.1;
   randn('state', 0);
   t=t0:dt:tk;
      l=max(size(t))-1;
         for i=1:l,
            z0=randn; z1=randn;
            z2=randn; z3=randn; z4=randn;
         %MODELLING OF MULTIPLE STOCHASTIC INTEGRALS
         %(q=2 FOR STOCHASTIC INTEGRALS w01 AND w10)
w01=-((dt^2)/4)*((4/3)*(z0^2)+(1/(sqrt(3)))*z0*z1+...
    (1/(3*sqrt(5)))*z0*z2+(1/(5*sqrt(21)))*z1*z3-...
    (1/5)*z1*z1+(1/(7*sqrt(45)))*z2*z4-(1/21)*z2*z2-2);
w0=(sqrt(dt))*z0;
w00=0.5*dt*(z0*z0-1);
w1=-0.5*(dt^(3/2))*(z0+(1/(sqrt(3)))*z1);
w000=(1/6)*(dt^(3/2))*(z0^3-3*z0);
w0000=(1/24)*(dt^2)*(z0^4-6*z0*z0+3);
w10=w1*w0+(dt^2)/2-w01;
                     %MODELLING OF SOLUTION OF SDE
    g01=f+x1(i)*x3(i)-um*x3(i);
              %1-ST AND 2-ND COMPONENTS OF SOLUTION
x1(i+1)=x1(i)+dt*(-x2(i)-x3(i))+0.5*...
        (dt^2)*(-x1(i)-e*x2(i)-g01)+c*x3(i)*...
        (dt*w0+w1)-(c^2)*x3(i)*(w01+dt*w00);
x2(i+1)=x2(i)+dt*(x1(i)+e*x2(i))+0.5*...
        (dt^2)*(-x2(i)-x3(i)+e*(x1(i)+e*x2(i)));
                     %SECONDARY VARIABLES
g10=dt*g01+0.5*(dt^2)*((-x2(i)-x3(i))*x3(i)+g01*...
    (x1(i)-um));
```

```
g11=-c*x3(i)*w0+c*c*x3(i)*w00+c*x3(i)*(um-x1(i))*...
    (dt*w0+w1)+c*g01*w1-(c^3)*x3(i)*w000;
g12=c*c*x3(i)*(x1(i)-um)*(w10-w01)-c*c*g01*w10-c*c*...
    x3(i)*(um-x1(i))*(w01+dt*w00)+(c^4)*x3(i)*w0000;
             %3-RD COMPONENT OF SOLUTION
x3(i+1)=x3(i)+g10+g11+g12;
     end; % for
plot(x1,x2);
xlabel('x1(t)')
ylabel('x2(t)')
  pause;
```

17.8 MATLAB 7.0-программы к главе 15

17.8.1 Программа для численного эксперимента 15.1

```
clear;
t0=0; tk=80;  %INTERVAL OF INTEGRATION
dt=0.004;     %STEP OF INTEGRATION
sig=5.08;     %START DATA
x1(1)=7; x2(1)=-0.25;
theta1=0.14; theta2=(0.5661)^2;
   t=t0:dt:tk;
   nn=max(size(t))-1;
   randn('state', 0);  %START POINT OF GAUSSIAN
                       %RANDOM NUMBER GENERATOR
       for k=1:nn,
          www=randn;
                        %EULER METHOD
          x1(k+1)=x1(k)+x2(k)*dt;
 x2(k+1)=x2(k)+(-theta2*x1(k)-theta1*x2(k))*dt+...
         sig*sqrt(dt)*www;
       end; % for
    ss1=0; ss2=0; the1(1)=0; the2(1)=0;
      t(1)=t0;
for i=2:nn+1,
            %CALCULATING OF ESTIMATES
ss1=ss1+0.5*dt*((x1(i-1))^2+(x1(i))^2);
ss2=ss2+0.5*dt*((x2(i-1))^2+(x2(i))^2);
uu3=0.5*((x2(i))^2-(x2(1))^2-(sig^2)*(t0+(i-1)*dt-t0));
       t(i)=t0+(i-1)*dt;
   the1(i)=-uu3/ss2; the2(i)=ss2/ss1;
end; % for
      for i=700:tk/dt,
         tthe1(i-699)=the1(i); tthe2(i-699)=the2(i);
         tt(i-699)=t(i);
      end; % for
plot(tt,tthe1);
  pause;
```

```
plot(tt,tthe2);
  pause;
```

17.8.2 Программа для численного эксперимента 15.2 при $T = 800$

```
clear;
t0=0; tk=800;  %INTERVAL OF INTEGRATION
dt=0.02;       %STEP OF INTEGRATION
sig=0.5;           %START DATA
x(1)=0.5; theta1=2; theta2=-2;
    t=t0:dt:tk;
        nn=max(size(t))-1;
        t(1)=t0; ss1=0; ss2=0; ss3=0; the1(1)=0; the2(1)=0;
        randn('state', 0); %START POINT OF GAUSSIAN
                           %RANDOM NUMBER GENERATOR
   for k=1:nn,
       ww=randn;
           %EXPLICIT 1 STEP RUNGE-KUTTA METHOD OF ORDER 1.0
x(k+1)=x(k)+(theta1*x(k)+theta2*((x(k))^2))*dt+sqrt(dt)*...
       ww*sig*real(sqrt(x(k)))+0.25*sig*sqrt(dt)*...
       (ww^2-1)*(real(sqrt(x(k)+2*sqrt(dt)*sig*...
       real(sqrt(x(k)))))-real(sqrt(x(k))));
               %CALCULATING OF ESTIMATES ON k-TH STEP
ss1=ss1+dt*(x(k)+x(k+1)); ss2=ss2+dt*((x(k))^2+(x(k+1))^2);
ss3=ss3+dt*((x(k))^3+(x(k+1))^3);
       gg1=(x(k+1)-x(1))*ss3-0.5*((x(k+1))^2-(x(1))^2-...
           0.5*(sig^2)*ss1)*ss2;
       gg2=0.5*((x(k+1))^2-(x(1))^2-0.5*(sig^2)*ss1)*ss1-...
           (x(k+1)-x(1))*ss2;
       uu1=0.25*ss1*ss3-(0.5*ss2)^2;
       t(k+1)=t0+k*dt;
       the1(k+1)=gg1/(2*uu1); %ESTIMATE PROCESSES
       the2(k+1)=gg2/(2*uu1); %ON k-TH STEP
   end; % for
         for i=1:2620,
            tthe1(i)=the1(15*(i-1)+700);
            tthe2(i)=the2(15*(i-1)+700);
            tt(i)=t(15*(i-1)+700);
         end; %for
     plot(tt,tthe1);
       pause;
     plot(tt,tthe2);
       pause;
```

17.8.3 Программа для численного эксперимента 15.5

```
clear;
t0=0; tk=2; %INTERVAL OF INTEGRATION
```

```
dt=0.001;   %STEP OF INTEGRATION
               %START DATA
A=[-0.5 0.5; 0.5 -0.5];
AA=[-2.5 0.5; 0.5 -50.5];
H=[2 0; 0 10]; G=[1 0; 0 1];
nn=60;
  %START POINT OF GAUSSIAN RANDOM NUMBER GENERATOR
randn('state', 0);
          %PROCESS FOR FILTERING
   for p=1:1000,
      sig(p)=1;
      sig(p+1000)=-1;
   end; % for
     for p=1:2000,
        ttt(p)=(p-1)*dt;
     end; % for
plot(ttt,sig);
pause;
          %FILTER ON 1-ST STEP
   z(1)=0.2; v(1)=0.8;
   yy(1)=(v(1)-z(1))/(z(1)+v(1));
   tt(1)=0;
      for i=1:1999,
        if sig(i)==1,
           hh(i)=10;
        else
           hh(i)=2;
      end; % for
              %MODELLING OF MULTILPE
              %STOCHASTIC INTEGRALS
     ksi=randn(1,nn+2);
ui1f=-0.5*(dt^(3/2))*(ksi(1,1)+(1/sqrt(3))*ksi(1,2));
ui2f=(1/3)*(dt^(5/2))*(ksi(1,1)+((sqrt(3))/2)*ksi(1,2)+...
     (1/(2*sqrt(5)))*ksi(1,3));
     ui0f=sqrt(dt)*ksi(1,1);
     ui0=hh(i)*dt+ui0f;
     ui1=-0.5*(dt^2)*hh(i)+ui1f;
     ui00=0.5*(ui0^2);
bbb=(4/3)*((ksi(1,1))^2)+(1/sqrt(3))*ksi(1,1)*ksi(1,2)+...
    (1/(3*sqrt(5)))*ksi(1,3)*ksi(1,1);
        for ij=1:nn,
bbb=bbb-((ksi(1,ij))^2)/((2*ij-1)*(2*ij+3))+(ksi(1,ij)*...
    ksi(1,ij+2))/((2*ij+3)*sqrt((2*ij+1)*(2*ij+5)));
        end; % for
     ui01f=-(1/4)*(dt^2)*bbb;
     ui01=ui01f-hh(i)*(0.5*(dt^2)*ui0f+0.5*ui2f)-...
          ((hh(i))^2)*(1/3)*(dt^3);
     ui10=ui1*ui0-ui01;
                                   %FILTER OF ORDER 2.0
     S=(G+AA*dt*(G+0.5*AA*dt)+(-H*AA+AA*H)*...
```

```
       (dt*ui0+ui1)+H*ui0*(G+AA*dt+0.5*H*ui0*...
       (G+(1/3)*H*ui0*(G+0.25*H*ui0)))+AA*H*H*...
       (dt*ui00+ui01)+H*AA*H*(ui10-ui01)-H*H*AA*ui10);
       z(i+1)=S(1,1)*z(i)+S(1,2)*v(i);
       v(i+1)=S(2,1)*z(i)+S(2,2)*v(i);
       yy(i+1)=(v(i+1)-z(i+1))/(z(i+1)+v(i+1));
     tt(i+1)=t0+i*dt;
   end; % for
plot(tt,yy);
  pause;
```

17.8.4 Программа для построения рис. 15.10, 15.11

```
clear;
t0=0; tk=5;  %INTERVAL OF INTEGRATION
dt=0.001;    %STEP OF INTEGRATION
t=t0:dt:tk;
l=max(size(t))-1;
randn('state', 0); %START POINT OF GAUSSIAN
                   %RANDOM NUMBER GENERATOR
x1(1)=2; x2(1)=2; xx1(1)=2; xx2(1)=2; %START DATA
e1(1)=0; e2(1)=0; y1(1)=0; y2(1)=0;
ee1(1)=(e1(1))^2; ee2(1)=(e2(1))^2;
tt(1)=t0; sig=0.07; b=0.07;
    A=[-1 -1; 1 -1]; B=[b 0; 0 b];
    H=[1 0; 0 1]; S=[sig 0; 0 sig];
    R=zeros(2,2); O=zeros(2,2);
             %DERIVATIVE OF MATRIX R ON 1-ST STEP
R1=A*R+R*(A')+B*(B')-R*(H')*(inv(S*(S')))*H*R;
  %VECTOR Z OF OBJECT OF FILTERING, ESTIMATE OF FILTERING,
  %OBSERVING AND MEAN-SQUARE ERROR OF FILTERING ON 1-ST STEP
Z=[e1(1);e2(1);xx1(1);xx2(1);x1(1);x2(1);y1(1);y2(1)];
tt(1)=t0;
for k=1:l,
W=randn(4,1); V=randn(4,1);
A1=[A-R*(H')*(inv(S*(S')))*H O O O;
    R*(H')*(inv(S*(S')))*H   A O O;
    O                        O A O;
    O                        O H O];
B1=[B    -R*(H')*(inv(S*(S')))*S;
    O     R*(H')*(inv(S*(S')))*S;
    B     O;
    O     S];
A2=[-R1*(H')*(inv(S*(S')))*H O O O;
    R1*(H')*(inv(S*(S')))*H  O O O;
    O                        O O O;
    O                        O O O];
B2=[O    -R1*(H')*(inv(S*(S')))*S;
    O     R1*(H')*(inv(S*(S')))*S;
    O     O;
```

```
    0     0];
          %EXPLICIT 1 STEP STRONG METHOD OF ORDER 1.5 FOR
          %SYSTEM OF STOCHASTIC DIFFERENTIAL EQUATIONS
          %(VECTOR Z ON k-TH STEP)
   Z=Z+B1*sqrt(dt)*W+dt*A1*Z+A1*B1*(dt^(3/2))*...
     0.5*(W-(1/sqrt(3))*V)+B2*0.5*(dt^(3/2))*...
     (W+(1/sqrt(3))*V)+0.5*(dt^2)*(A2*Z+A1*A1*Z);
          %DERIVATIVES OF 1-ST AND 2-ND ORDER
          %OF MATRIX R ON k-TH STEP
   R1=A*R+R*(A')+B*(B')-R*(H')*(inv(S*(S')))*H*R;
   R2=A*R1+R1*(A')-R1*(H')*(inv(S*(S')))*H*R-...
      R*(H')*(inv(S*(S')))*H*R1;
          %EXPLICIT 1 STEP METHOD OF 2-ND ORDER
          %FOR RICCATI EQUATION
   R=R+dt*R1+0.5*(dt^2)*R2;
tt(k+1)=t0+k*dt;
e1(k+1)=Z(1,1); e2(k+1)=Z(2,1);
xx1(k+1)=Z(3,1); xx2(k+1)=Z(4,1);
x1(k+1)=Z(5,1); x2(k+1)=Z(6,1);
y1(k+1)=Z(7,1); y2(k+1)=Z(8,1);
ee1(k+1)=(e1(k+1))^2; ee2(k+1)=(e2(k+1))^2;
  end; % for
plot(tt,x1,tt,y1,tt,xx1,tt,ee1);
 pause;
plot(tt,x2,tt,y2,tt,xx2,tt,ee2);
 pause;
```

17.8.5 Программа для численного эксперимента 15.7 при $\sigma = c = 0.05$

```
clear;
t0=0; tk=12; %INTERVAL OF INTEGRATION
dt=0.005;    %STEP OF INTEGRATION
q=20;        %NUMBER FOR APPROXIMATION
             %OF MULTIPLE STOCHASTIC INTEGRAL
      %START DATA
x1(1)=1; x2(1)=0; x3(1)=1; x4(1)=0; x5(1)=0;
c=0.05; sig=0.05; tt(1)=t0;
  randn('state',0);
    t=t0:dt:tk;
l=max(size(t))-1;
   %MODELLING OF MULTIPLE STOCHASTIC INTEGRALS
    for p=1:l,
       zeta1=randn(1,q+1); zeta2=randn(1,q+1);
       s2=zeta1(1,1)*zeta2(1,1);
          for j=1:q,
             s2=s2+(1/(sqrt(4*j*j-1)))*(zeta2(1,j+1)*...
                zeta1(1,j)-zeta2(1,j)*zeta1(1,j+1));
           end; % for
```

```
        ui21=(dt/2)*s2;
        ui22=(dt/2)*((zeta2(1,1))^2-1);
        ui1=sqrt(dt)*zeta1(1,1);
        ui2=sqrt(dt)*zeta2(1,1);
                 %MILSTEIN SCHEME
x1(p+1)=x1(p)-x1(p)*dt+sig*sin(x2(p))*ui1+sig*cos(x2(p))*...
        ui2-c*sig*sin(x2(p))*ui22+c*sig*cos(x2(p))*ui21;
x2(p+1)=x2(p)+x1(p)*dt+c*ui2;
x3(p+1)=x3(p)+(-x3(p)+((sig/c)*cos(x2(p))+(x4(p))/(c^2))*...
        (x1(p)-x3(p)))*dt+(sig*cos(x2(p))+(x4(p))/c)*ui2-...
        c*sig*sin(x2(p))*ui22;
x4(p+1)=x4(p)+(-2*x4(p)+sig^2-((c*sig*cos(x2(p))+x4(p))^2)...
        /(c^2))*dt;
x5(p+1)=(x1(p+1)-x3(p+1))^2;
        tt(p+1)=t0+p*dt;
     end; % for
 plot(tt,x1,tt,x2,tt,x3,tt,x5);
   pause;
```

17.8.6 Программа для численного эксперимента 15.8 при $\sigma = b = 0.07$

```
clear;
t0=0; tk=5;   %INTERVAL OF INTEGRATION
dt=0.001;     %STEP OF INTEGRATION
   t=t0:dt:tk;
   l=max(size(t))-1;
                 %START DATA
x1(1)=2; x2(1)=2;
xx1(1)=2; xx2(1)=2;
e1(1)=0; e2(1)=0;
y1(1)=0; y2(1)=0;
ee1(1)=(e1(1))^2;
ee2(1)=(e2(1))^2;
   b=0.07; sig=0.07; h=10; q=10; r=1;
   tt(1)=t0;
        A=[-1 -1; 1 -1]; B=[b 0; 0 b];
        H=[1 0; 0 1]; S=[sig 0; 0 sig];
        O=zeros(2,2); Q1=[q 0;0 q];
        R=zeros(2,2); UP=[h 0;0 h];
Z=[e1(1);e2(1);xx1(1);xx2(1);x1(1);x2(1);y1(1);y2(1)];
tt(1)=t0;
R1=A*R+R*(A')+B*(B')-R*(H')*(inv(S*(S')))*H*R;
UP1=-(A')*UP-UP*A-Q1+UP*UP;
   for k=1:l-1,
               %SAVING OF MATRIXES UP AND R (SOLUTIONS
               %OF RICCATI EQUATIONS) AND ITS
               %DERIVATIVES UP1, R1 ON l-k+1-TH STEP
up11(l-k+1)=UP(1,1); up12(l-k+1)=UP(1,2);
```

```
up22(l-k+1)=UP(2,2);
uup11(l-k+1)=UP1(1,1); uup12(l-k+1)=UP1(1,2);
uup22(l-k+1)=UP1(2,2);
r11(k)=R(1,1); r12(k)=R(1,2); r22(k)=R(2,2);
rr11(k)=R1(1,1); rr12(k)=R1(1,2); rr22(k)=R1(2,2);
R1=A*R+R*(A')+B*(B')-R*(H')*(inv(S*(S')))*H*R;
R2=A*R1+R1*(A')-R1*(H')*(inv(S*(S')))*H*R+...
   R*(H')*(inv(S*(S')))*H*R1;
UP1=-(A')*UP-UP*A-Q1+UP*UP;
UP2=-(A')*UP1-UP1*A+UP1*UP+UP*UP1;
            %EXPLICIT ONE STEP METHOD OF ORDER 2.0
            %FOR SOLVING OF RICCATI EQUATIONS
R=R+dt*R1+0.5*(dt^2)*R2;
UP=UP-dt*UP1+0.5*(dt^2)*UP2;
tt(k+1)=t0+k*dt;
  end; % for
          %STOCHASTIC CONTROL ON 1-ST STEP
u1(1)=-(1/r)*(up11(1)*xx1(1)+up12(1)*xx2(1));
u2(1)=-(1/r)*(up12(1)*xx1(1)+up22(1)*xx2(1));
randn('state', 0);
   for k=1:l-1,
%PROCEDURE OF STOCHASTIC CONTROL WITH KALMAN FILTERING
R=[r11(k) r12(k); r12(k) r22(k)];
W=randn(4,1);
UU=[0; 0; u1(k); u2(k); u1(k); u2(k); 0; 0];
A1=[A-R*(H')*(inv(S*(S')))*H 0 0 0;
    R*(H')*(inv(S*(S')))*H   A 0 0;
    0                        0 A 0;
    0                        0 H 0];
B1=[B    -R*(H')*(inv(S*(S')))*S;
    0     R*(H')*(inv(S*(S')))*S;
    B     0;
    0     S];
              %MILSTEIN METHOD FOR SYSTEM OF
              %STOCHASTIC DIFFERENTIAL EQUATIONS
Z=Z+B1*sqrt(dt)*W+dt*(A1*Z+UU);
  %SAVING OF COMPONENTS OF VECTOR Z ON k+1-TH STEP
e1(k+1)=Z(1,1); e2(k+1)=Z(2,1);
xx1(k+1)=Z(3,1); xx2(k+1)=Z(4,1);
x1(k+1)=Z(5,1); x2(k+1)=Z(6,1);
y1(k+1)=Z(7,1); y2(k+1)=Z(8,1);
ee1(k+1)=(e1(k+1))^2; ee2(k+1)=(e2(k+1))^2;
               %STOCHASTIC CONTROL ON k+1-TH STEP
   u1(k+1)=-(1/r)*(up11(k+1)*xx1(k+1)+up12(k+1)*xx2(k+1));
   u2(k+1)=-(1/r)*(up12(k+1)*xx1(k+1)+up22(k+1)*xx2(k+1));
  end; % for
plot(tt, x1, tt, y1, tt, xx1, tt, ee1);
 pause;
plot(tt, x2, tt, y2, tt, xx2, tt, ee2);
 pause;
```

17.8.7 Программа для численных экспериментов 15.9 и 15.11

```
clear;
t0=0; tk=60;      %START DATA FOR
dt=0.005;         %NUMERICAL EXPERIMENT 15.9
um1=4; um2=1;
c1=1; c2=((3+sqrt(5))/10)*c1;
%t0=0; tk=200;    %START DATA FOR
%dt=0.05;         %NUMERICAL EXPERIMENT 15.11
%um2=0.01;
%um1=100*um2;
%c1=1; c2=0.01*c1;
    t=t0:dt:tk;
    l=max(size(t))-1;
%GENERAL START DATA FOR NUMERICAL EXPERIMENTS 15.9 AND 15.11
x1(1)=5; x2(1)=0;
x3(1)=5; x4(1)=0;
gam=0.02;
alfa=10; beta=10;
A=[      0       1       0      0;
   -(c1+c2)/um1  0   c2/um1    0;
         0       0       0      1;
      c2/um2     0  -(c2/um2)  0];
%UM=[0; 1/um1; 0; 0];  %CASE WITH CONTROL
 UM=[0; 0; 0; 0];      %CASE WITHOUT CONTROL
%B=[0; 1/um1; 0; 0];   %CASE WITH STOCHASTICS
 B=[0; 0; 0; 0];       %CASE WITHOUT STOCHASTICS
                     %SECONDARY START
UC=[beta 0 0 0;      %CALCULATION
     0   0 0 0;
     0   0 0 0;
     0   0 0 0];
Z=[x1(1); x2(1); x3(1); x4(1)];
tt(1)=t0;
US=[alfa 0 0 0;
     0   0 0 0;
     0   0 0 0;
     0   0 0 0];
US1=-(A')*US-US*A-UC+(1/gam)*US*UM*(UM')*US;
   for k=1:l-1,
          %SAVING OF SOLUTION OF RICCATI EQUATION AND
          %ITS 1-ST DERIVATIVE ON K-L+1-TH STEP
uu11(l-k+1)=US(1,1); uu12(l-k+1)=US(1,2);
uu13(l-k+1)=US(1,3); uu14(l-k+1)=US(1,4);
uu22(l-k+1)=US(2,2); uu23(l-k+1)=US(2,3);
uu24(l-k+1)=US(2,4); uu33(l-k+1)=US(3,3);
uu34(l-k+1)=US(3,4); uu44(l-k+1)=US(4,4);
uuu11(l-k+1)=US1(1,1); uuu12(l-k+1)=US1(1,2);
uuu13(l-k+1)=US1(1,3); uuu14(l-k+1)=US1(1,4);
uuu22(l-k+1)=US1(2,2); uuu23(l-k+1)=US1(2,3);
```

```
uuu24(l-k+1)=US1(2,4); uuu33(l-k+1)=US1(3,3);
uuu34(l-k+1)=US1(3,4); uuu44(l-k+1)=US1(4,4);
           %CALCULATING OF 1-ST AND 2-ND DERIVATIVES
           %OF SOLUTION OF RICCATI EQUATION
US1=-(A')*US-US*A-UC+(1/gam)*US*UM*(UM')*US;
US2=-(A')*US1-US1*A+(1/gam)*(US1*UM*(UM')*...
    US+US*UM*(UM')*US1);
               %EXPLICIT 1 STEP METHOD OF ORDER 2.0
               %FOR SOLVING OF RICCATI EQUATION
US=US-dt*US1+0.5*(dt^2)*US2;
   tt(k+1)=t0+k*dt;
         end; % for
for k=1:l-1,
               %SOLUTION OF RICCATI EQUATION AND
               %ITS 1-ST DERIVATIVE ON K-TH STEP
US=[uu11(k) uu12(k) uu13(k) uu14(k);
    uu12(k) uu22(k) uu23(k) uu24(k);
    uu13(k) uu23(k) uu33(k) uu34(k);
    uu14(k) uu24(k) uu34(k) uu44(k)];
US1=[uuu11(k) uuu12(k) uuu13(k) uuu14(k);
     uuu12(k) uuu22(k) uuu23(k) uuu24(k);
     uuu13(k) uuu23(k) uuu33(k) uuu34(k);
     uuu14(k) uuu24(k) uuu34(k) uuu44(k)];
W=randn(1,2);                %MODELLING OF MULTIPLE
ui0=sqrt(dt)*W(1,1);         %STOCHASTIC INTEGRALS
ui1=-0.5*(dt^(3/2))*(W(1,1)+(1/sqrt(3))*W(1,2));
AA=A-UM*(UM')*US*(1/gam);
         %EXPLICIT 1 STEP STRONG METHOD OF ORDER 1.5
         %FOR SOLVING OF SYSTEM OF STOCHASTIC
         %DIFFERENTIAL EQUATIONS
      Z=Z+B*ui0+AA*Z*dt+(AA^2-UM*(UM')*US1*...
        (1/gam))*Z*0.5*(dt^2)+AA*B*(ui0*dt+ui1);
   x1(k+1)=Z(1,1);
       end; % for
plot(tt, x1);
 pause;
```

17.9 MATLAB 7.0-программы к главе 16

17.9.1 Программа, строящая реализацию процесса $\lambda_{1,25}^{0.005}(5)$ из численного эксперимента 16.1

```
clear;
t0=0; tk=25;   %INTERVAL OF INTEGRATION
dt=0.005;      %STEP OF INTEGRATION
   t=t0:dt:tk;
   l=max(size(t))-1;
y1(1)=1; y2(1)=0;   %START DATA
c=5; uu(1)=1;
```

```
del=2; umu=3;
   randn('state', 0);
   w=randn; ui0=sqrt(dt)*w;
         %1-ST STEP OF IMPLICIT WEAK METHOD OF ORDER 2.0
   y2(2)=(1/(1+0.25*umu*(dt^2)+del*dt))*(y2(1)-...
         0.5*dt*(umu*y1(1)+2*del*y2(1))-0.5*dt*...
         umu*(y1(1)+0.5*dt*y2(1))-c*y1(1)*ui0-...
         0.5*c*y2(1)*dt*ui0);
   y1(2)=y1(1)+0.5*dt*y2(1)+0.5*dt*y2(2);
      uu(2)=sqrt((y1(2))^2+(y2(2))^2);
      ss=log(uu(2)/uu(1));
      ss1(1)=(1/dt)*ss;
      tt(1)=t0;
         for i=2:l,
             w=randn; ui0=sqrt(dt)*w;
          %i-TH STEP OF IMPLICIT WEAK METHOD OF ORDER 2.0
   y2(i+1)=(1/(1+0.25*umu*(dt^2)+del*dt))*(y2(i)-...
           0.5*dt*(umu*y1(i)+2*del*y2(i))-0.5*dt*...
           umu*(y1(i)+0.5*dt*y2(i))-c*y1(i)*ui0-...
           0.5*c*y2(i)*dt*ui0);
   y1(i+1)=y1(i)+0.5*dt*y2(i)+0.5*dt*y2(i+1);
     uu(i+1)=sqrt((y1(i+1))^2+(y2(i+1))^2);
     ss=ss+log(uu(i+1)/uu(i));
     ss1(i)=(1/(i*dt))*ss;
     tt(i)=t0+(i-1)*dt;
         end;
plot(tt, ss1);
   pause;
```

17.9.2 Программа для численного эксперимента 16.2

```
clear;
dx=0.1; sig=0.5;    %START DATA
dt=1;
[x]=setka1(50,50,dx);  %NET FOR VARIABLE x
  for i=1:5,
     for j=1:101,
            %SECONDARY VARIABLES
        e1=-(x(j))/(sqrt(2*(sig^2)*i*dt));
        e2=(i*dt-2*x(j))/(2*(sig^2));
        e3=(i*dt-x(j))/(sqrt(2*(sig^2)*i*dt));
           %EXACT SOLUTION OF BURGERS EQUATION
        u(i,j)=1-(erfc(e1))/(erfc(e1)+...
               (exp(e2))*(2-erfc(e3)));
      end; % for
   end; % for
t=1:5; x=-5:0.1:5;
   mesh(x,t,u);  %3-D SURFACE u(x,t)
   pause;
plot(x,u);  %2-D DEPENDENCES u(x,t) FOR t=1, 2, 3, 4, 5
```

```
xlabel('x')
ylabel('u(x,t)')
pause;
```

Приведенная MATLAB 7.0-программа использует следующую функцию построения "сетки" по переменной x:

```
function[x]=setka1(a1,a2,dx);
  for j=1:a1,
    x(j)=(-1)*(a1-j+1)*dx;
  end; % for
    for j=a1+2:a1+a2+1,
      x(j)=(j-a1-1)*dx;
    end; % for
   x(a1+1)=0;
```

17.9.3 Программа для численного эксперимента 16.3

```
 clear;
 mm=5;
  for jj=1:mm,
    t0=0; tk=jj; dt=0.1;  %START DATA
    d1=3; d2=2; n=50; xmin=(-dt)*n; xmax=dt*n;
       t=t0:dt:tk;
       l=max(size(t))-1;
    dx=0.1; sig=0.5;
    a1=(l-1)*d1+n; a2=(l-1)*d2+n;
       [x]=setka1(a1,a2,dx); %NET FOR VARIABLE x
       [u]=nach1(x,a1,a2);   %START FUNCTION u(x,0)
                             %METHOD (16.22) - (16.24)
   [y1,y2,y3]=vectors1(x,1,a1+a2+1,u,dt,sig);
       [u]=step1(x,y1,y2,y3,a1+a2+1);
           for ii=1:l-1,
               c1=ii*d1+1; c2=a1+a2+1-ii*d2;
       [y1,y2,y3]=vectors1(x,c1,c2,u,dt,sig);
       [u]=convert1(x,c1-d1,c2+d2,y1,y2,y3,u,c1,c2,dx);
               for j=a1-n+1:a1+1+n,
                  y(j-a1+n)=x(j);
                  v(ii+2,j-a1+n)=u(j);
               end; % for
            end; % for
               for i=a1-n+1:a1+1+n,
                  y(i-a1+n)=x(i);
                  w(jj,i-a1+n)=v(l+1,i-a1+n);
               end; % for
           end; % for
  t=1:mm; x=xmin:dt:xmax;  %3-D SURFACE u(x,t)
  mesh(x,t,w);
   pause;
  plot(y,w); %2-D DEPENDENCES u(x,t) FOR t=1, 2, 3, 4, 5
```

```
  xlabel('x')
  ylabel('u(x,t)')
   pause;
```

Приведенная MATLAB 7.0-программа использует несколько функций: `setka1` (построение "сетки" по переменной x); `nach1` (построение начального условия $u(x,0)$); `vectors1`, `step1`, `convert1` (функции реализации алгоритма (16.20) – (16.22)).

Приведем текст MATLAB 7.0-программ указанных функций.

```
function[u]=nach1(x,m1,m2);
  for j=1:m1,
    u(j)=1;
  end; % for
     for j=m1+1:m1+m2+1,
       u(j)=0;
     end; % for

function[y1,y2,y3]=vectors1(x,m1,m2,z,dt,sig);
  for i=m1:m2,
    y1(i)=x(i)-z(i)*dt+sig*sqrt(dt);
    y2(i)=x(i)-z(i)*dt-sig*sqrt(dt);
    y3(i)=0;
  end; % for

function[u]=step1(x,y1,y2,y3,m);
  for j=1:m,
    if y1(j)<0,
       z1(j)=1;
     else
       z1(j)=0;
    end; % if
         if y2(j)<0,
            z2(j)=1;
         else
            z2(j)=0;
         end; % if
   end; % for
      for j=1:m,
         u(j)=0.5*(z1(j)+z2(j))+y3(j);
      end; % for

function[v]=convert1(x,m1,m2,g1,g2,g3,u,n1,n2,dx);
   for p=n1:n2,
      l1=m1-1;
         for i=m1:m2-1,
            if x(i)<g1(p),
               l1=l1+1;
            else
               l1=l1;
```

```
            end; % if
         end; % for
      l3=m1-1;
         for i=m1:m2-1,
            if x(i)<g2(p),
               l3=l3+1;
            else
               l3=l3;
            end; % if
         end; % for
zz1(p)=((x(l1+1)-g1(p))/dx)*u(l1)+((g1(p)-x(l1))/dx)*u(l1+1);
zz2(p)=((x(l3+1)-g2(p))/dx)*u(l3)+((g2(p)-x(l3))/dx)*u(l3+1);
  end; % for
     for i=n1:n2,
       v(i)=0.5*(zz1(i)+zz2(i))+g3(i);
     end; % for
```

17.9.4 Программа, реализующая построение зависимостей $\log_2(\mu)$ от $\log_2(\Delta)$ и $|\mu|$ от Δ при $N = 500$, $M = 100$ в численном эксперименте 16.4

```
clear;
t0=0; tk=1;  %INTERVAL OF INTEGRATION
  for jj=3:6,
    dt=1/(2^jj); %STEP OF INTEGRATION
    st=1.73; %COEFFICIENT FOR 90% CONFIDENCE INTERVAL FOR mu
    t=t0:dt:tk;
    randn('state', 0);
    l=max(size(t))-1;
                 %EXACT VALUE OF mu
    xxx=sqrt((2*exp(1))/(1+exp(1)*exp(1)));
    he=0;
      for i=1:100*500,
          y(1)=0; ss1=0;
              for p=1:l,
                  u=randn;    %DISCRETE
                  if u>0,     %RANDOM
                  ksi=1;      %VARIABLE
                  elseif u<0, %WITH
                  ksi=-1;     %DISTRIBUTION:
                  else        %P(ksi=-1)=0.5,
                  ksi=0;      %P(ksi=1)=0.5
                  end;
                  y(p+1)=y(p)+sqrt(dt)*ksi;
                  ss1=ss1+(y(p))^2;
              end;
          e(i)=exp(-0.5*dt*ss1);
          he=he+e(i);
      end;
```

```
                    %APPROXIMATE VALUE OF mu
   he=he/(100*500)-xxx;
          %CALCULATING OF 90% CONFIDENCE INTERVAL FOR mu
     for j=1:100,
         ee=0;
            for k=(j-1)*500+1:j*500,
               ee=ee+e(k);
            end;
         hh(j)=ee/500-xxx;
      end;
         s=0;
      for j=1:100,
         s=s+(hh(j)-he)^2;
      end;
         s=s/99;
                    %90% CONFIDENCE INTERVAL FOR mu
   he1=he-st*sqrt(s/100); he2=he+st*sqrt(s/100);
   zz(jj-2)=log2(abs(he)); zzz(jj-2)=abs(he);
   tt(jj-2)=-jj; ttt(jj-2)=1/(2^jj);
end;
   plot(tt,zz);
     pause;
   plot(ttt,zzz);
     pause;
```

17.9.5 Упрощенная программа для численного эксперимента 16.5

Ограничимся здесь текстом MATLAB 7.0-программы, которая строит кривую $u(x,1)$ с использованием явного слабого численного метода (10.13) порядка точности 2.0.

```
clear;
t0=0; tk=1;   %INTERVAL OF INTEGRATION
dt=1/(2^5);   %STEP OF INTEGRATION
 t=t0:dt:tk;
 l=max(size(t))-1;
 x=-8:0.5:8;
   for ll=1:33,
     randn('state', 0);
     ss=0;
          %CALCULATING OF INDEPENDENT REALIZATIONS
       for i=1:1000,
                %CALCULATING OF p-TH REALIZATION
          for p=1:l,
            y(1)=x(ll);
                %MULTIPLE STOCHASTIC INTEGRALS
     u=randn; v=randn;
     u0=sqrt(dt)*u;
     u00=0.5*dt*(u^2-1);
```

```
     u01=0.5*(dt^(3/2))*(u+(1/sqrt(3))*v);
     uu1=0.5*(dt^(3/2))*(u-(1/sqrt(3))*v);
               %CALCULATING OF DERIVATIVES
  chy=0.5*(exp(y(p))+exp(-y(p)));
  shy=0.5*(exp(y(p))-exp(-y(p)));
  thy=shy/chy; a=-chy^(-2);
  s=sqrt(2)*(2-thy)^(1/2);
  g0s=a; g0a=2*s*shy*(chy^(-3));
  ula=-2*shy*chy*(a^2)-(s^2)*(a+3*(shy^2)*(a^2));
  uls=0.5*((a^2)/s)-a*s*thy;
            %EXPLICIT WEAK METHOD OF ORDER 2.0
 y(p+1)=y(p)+s*u0+a*dt+g0s*u00+0.5*(dt^2)*ula+...
        g0a*uu1+uls*u01;
          end;
        ss=ss+1/(1+(y(l+1)-1)^8);
       end;
            %APPROXIMATION OF EXPECTATION
     uu(ll)=ss/1000;
   end;
plot(x,uu);
  pause;
```

Библиография

[1] *Boyce W. E.* Approximate solution of random ordinary differential equations // Adv. in Appl. Probab. 1978. N 10. P. 172–184.

[2] *Кушнер Г. Дж.* Вероятностные методы аппроксимации в стохастических задачах управления и теории эллиптических уравнений. М.: Наука, 1985. 222 с.

[3] *Гихман И.И., Скороход А.В.* Введение в теорию случайных процессов. М.: Наука, 1977. 660 с.

[4] *Гихман И.И., Скороход А.В.* Стохастические дифференциальные уравнения. Киев: Наукова думка, 1968. 354 с.

[5] *Гихман И.И., Скороход А.В.* Теория случайных процессов. Т.3. М.: Наука, 1975. 469 с.

[6] *Гихман И.И., Скороход А.В.* Стохастические дифференциальные уравнения и их приложения. Киев.: Наукова думка, 1982. 612 с.

[7] *Ширяев А.Н.* Вероятность. М.: Наука, 1989. 640 с.

[8] *Липцер Р.Ш., Ширяев А.Н.* Статистика случайных процессов: Нелинейная фильтрация и смежные вопросы. М.: Наука, 1974. 696 с.

[9] *Розанов Ю.А.* Стационарные случайные процессы. М.: Физматгиз, 1963. 284 с.

[10] *Стратонович Р.Л.* Условные марковские процессы и их применение к теории оптимального управления. М: Изд-во МГУ, 1966. 320 с.

[11] *Ермаков С.М., Михайлов Г.А.* Курс статистического моделирования. М.: Наука, 1976. 320 с.

[12] *Фридман А.* Уравнения в частных производных параболического типа. М.: Мир, 1968. 427 с.

[13] *Smoluhovski M.V.* Drei Vorträge über Diffusion Brownsche Bewegung und Koagulation von Kolloidteilchen // Phys. Z. 1906. Bd 17. S. 557–585.

[14] *Ладыженская О.А., Солонников В.А., Уральцева Н.Н.* Линейные и квазилинейные уравнения параболического типа. М.: Наука, 1967. 736 с.

[15] *Тихонов А.Н., Самарский А.А.* Уравнения математической физики. 5-е изд. М.: Наука, 1977. 735 с.

[16] *Арсенин В.Я.* Методы математической физики и специальные функции. М.: Наука, 1974. 431 с.

[17] *Гантмахер Ф.Р.* Теория матриц. М: Наука, 1988. 552 с.

[18] *Ширяев А.Н.* Основы стохастической финансовой математики: В 2-х т. М.: Фазис, 1998. Т. 1. 512 с. Т. 2. 544 с.

[19] *Björk T., Kabanov Yu., RunggalDier W.* Bond market structure in the presence of marked point processes // Math. Finance. 1997. Vol. 7. N 2. P. 211–239.

[20] *Hull J., White A.* The pricing of options as assets with stochastic volatilities // J. Finance. 1987. Vol. 42. P. 281–300.

[21] *Merton R.C.* Option pricing when underlying stock returns and discontinuous // J. Financial Economics. 1976. N 3. P. 125–144.

[22] *Merton R.C.* Continuous-time finance. Oxford; N.Y.: Blackwell, 1990. 453 p.

[23] *Hull J.* Options, futures and other derivatives securities. N. Y.: J.Willey and Sons, 1993. 368 p.

[24] *Bachelier L.* Théorie de la spéculation // Ann. Sci. Ecol. Norm. Sup. Ser.3. 1900. Vol. 17. P. 21–86.

[25] *Einstein A.* Investigations on the theory of the Brownien movement. N. Y.: Dover, 1956. 122 p.
[26] *Pontrjagin L.S., Andronov A.A., Witt A.A.* Statistische Auffassung dynamischer Systeme // Phys. Z. 1934. Bd 6. S. 1–24.
[27] *Ван-дер-Зил А.* Флуктуации в радиотехнике и физике. М.; Л.: Госэнергоиздат, 1958. 320 с.
[28] *Стратонович Р.Л., Полякова М.С.* Элементы молекулярной физики, термодинамики и статистической физики. М.: Изд-во МГУ, 1981. 176 с.
[29] *Nyquist H.* Thermal agittation of electric charge in conductors // Phys. Rev. 1928. Vol. 32. P. 110.
[30] *Стратонович Р. Л.* Избранные вопросы теории флуктуаций в радиотехнике. М: Советское радио, 1961. 556 с.
[31] *Arato M.* Linear stochastic systems with constant coefficients. A statistical approach. Berlin; Heidelberg; N. Y.: Springer-Verlag, 1982. 289 p.
[32] *Орлов А.* Служба Широты. М: Изд-во АН СССР, 1958. 126 с.
[33] *Арато М., Колмогоров А.Н., Синай Я.Г.* Об оценках параметров комплексного стационарного гауссовского марковского процесса // Докл. АН СССР. 1962. Т. 146. N 4, С. 747–750.
[34] *Неймарк Ю.И., Ланда П.С.* Стохастические и хаотические колебания. М: Наука, 1987. 424 с.
[35] *Lotka A.J.* Undamped oscillations derived from the law of mass action // J. Amer. Chem. Soc. 1920. Vol. 42. N 8. P. 1595–1599.
[36] *Вольтерра В.* Математическая теория борьбы за существование. М: Наука, 1976. 286 с.
[37] *Белоусов Б.П.* Периодически действующая реакция и ее механизм // Сб. рефератов по радиационной медицине. М: Медгиз, 1959. С. 145–148.
[38] *Жаботинский А.М.* Концентрационные автоколебания. М: Наука, 1974. 178 с.
[39] *Романовский Ю.М., Степанова Н.В., Чернавский Д.С.* Математическая биофизика. М: Наука, 1984. 304 с.
[40] *Obuhov A.M.* Description of turbulence in Lagrangian variables // Adv. Geophis. 1959. N 3. P. 113–115.
[41] *Первозванский А.А.* Рынок: Расчет и риск. М.: ИНФРА, 1994. 210 с.
[42] *Wolf J.R.* Neue Untersuchungen über die Periode der Sonnenflecken und ihre Bedeutung // Mit. Naturforsch. Ges. Bern. 1852. Bd 255. S. 249–270.
[43] *Слуцкий Е.Е.* О 11-летней периодичности солнечных пятен // Докл. АН СССР. 1935. Т. 4. N 9. Вып.1–2. С. 35–38.
[44] *Henrici P.* Discrete variable methods in ordinary differential equations. N. Y.: Wiley, 1962. 407 p.
[45] *Rössler O.E.* An equation for continuous chaos // Phys. Lett. 1976. Vol. 57A. N 5. P. 397–398.
[46] *Хасьминский Р.З.* Устойчивость систем дифференциальных уравнений при случайных возмущениях их параметров. М.: Наука, 1969. 365 с.
[47] *Кушнер Г.Дж.* Стохастическая устойчивость и управление. М.: Мир, 1969. 200 с.
[48] *Баркин А.И., Зеленцовский А.Л., Пакшин П.В.* Абсолютная устойчивость детерминированных и стохастических систем управления. М.: Изд-во МАИ, 1992. 303 с.
[49] *Козин Ф.* Введение в устойчивость стохастических систем // Автоматика. 1969. N 5. С. 95–112.
[50] *Arnold L., Kloeden P.E.* Explicit formulae for the Lyapunov exponents and rotation number of two-dimensional systems with telegraphic noise // SIAM J. Appl. Math. 1989. Vol. 49. P. 1242–1274.

[51] *Auslender E.I., Milstein G.N.* Asymptotic expansion of the Lyapunov index for linear stochastic systems with small noise // Prikl. Mat. Mekh. 1982. Vol. 46. P. 358–365.
[52] *Самарский А.А., Галактионов В.А., Курдюмов С.П., Михайлов А.П.* Режимы с обострением в задачах для квазилинейных параболических уравнений. М.: Наука, 1987. 476 с.
[53] *Самарский А.А.* Теория разностных схем: 3-е изд. М.: Наука, 1989. 614 с.
[54] *Kac M.* On distribution of certain Wiener functionals // Trans. Amer. Math. Soc. 1949. Vol. 65. P. 1–13.
[55] *Kac M.* On some connections between probability theory and differential and integral equations // Proc. Second Berkley Symp. Math. Stat. Probab. 1951. Vol. 1. P. 189–215.
[56] *Philips H.B., Wiener N.* Nets and Dirichlet problem // J. Math. Phys. 1923. Vol. 2. P. 105–124.
[57] *Petrovski I.G.* Über das Irrfahrtproblem // Math. Ann. 1934. Bd 109. S. 425–444.
[58] *Doob J.L.* Semimartingales and subharmonic functions // Trans. Amer. Math. Soc. 1954. Vol. 77. P. 86–121.
[59] *Ueno T.* The diffusion satisfying Wentzell's boundary conditions and the Markov processes on the boundary // Proc. Japan Akad. 1960. Vol. 36. P. 533–538.
[60] *Maruyama G.* Continuous Markov processes and stochastic equations // Rend. Circ. Math. Palermo. 1955. N 4. P. 1–43.
[61] *Blumenthal R.M., Getoor R.K., McKean H.P.* Markov processes with identical hitting distributions // Illinois J. Math. 1962. Vol. 6. P. 402–421.
[62] *Hunt G.A.* Markov processes and potentials // Illinois J. Math. 1957. Vol. 1. P. 44–93, 316–369, 1958. Vol. 2. P. 151–213.
[63] *Ито К.* Вероятностные процессы. Вып.2. М.: ИЛ, 1963. 135 с.
[64] *Ватанабэ С., Икэда Н.* Стохастические дифференциальные уравнения и диффузионные процессы. М.: Наука, 1986. 445 с.
[65] *Королюк В.С., Портенко Н.И., Скороход А.В., Турбин А.Ф.* Справочник по теории вероятностей и математической статистике. М.: Наука, 1985. 640 с.
[66] *Гирсанов И.В.* О преобразовании одного класса случайных процессов с помощью абсолютно непрерывной замены меры // Теория вероятн. и ее прим. 1960. Т. 5. Вып. 3. С. 314–330.
[67] *Мильштейн Г.Н.* Приближенное интегрирование стохастических дифференциальных уравнений // Теория вероятн. и ее прим. 1974. Т.19. С. 557–562.
[68] *Мильштейн Г.Н.* Метод второго порядка точности интегрирования стохастических дифференциальных уравнений // Теория вероятн. и ее прим. 1978. Т. 23. С. 396–401.
[69] *Мильштейн Г.Н.* Слабая аппроксимация решений систем стохастических дифференциальных уравнений // Теория вероятн. и ее прим. 1985. Т. 30. С. 750–766.
[70] *Мильштейн Г.Н.* Численное интегрирование стохастических дифференциальных уравнений. Свердловск: Изд-во Уральск. ун-та, 1988. 225 с.
[71] *Мильштейн Г.Н.* Решение первой краевой задачи для уравнений параболического типа с помощью интегрирования стохастических дифференциальных уравнений // Теория вероятн. и ее прим. 1995. Т. 40. С. 657–665.
[72] *Milstein G.N.* The probability approach to numerical solution of nonlinear parabolic equations. 1997. Preprint N 380, WIAS. 29 p.
[73] *Дзагнидзе З.А., Читашвили Р.Я.* Приближенное интегрирование стохастических дифференциальных уравнений // Труды IV. Тбил. гос. ун-т. Ин-т прикл. мат. 1975. С. 267–279.
[74] *Аталла М.А.* Конечно-разностные аппроксимации для стохастических дифференциальных уравнений // Вероятностные методы исследования систем с бесконечным числом степеней свободы. Киев. 1986. С. 11–16.

[75] *Никитин Н.Н., Разевиг В.Д.* Методы цифрового моделирования стохастических дифференциальных уравнений и оценка их погрешностей // Журн. вычисл. мат. и мат. физики. 1978. Т. 18. N 1. С. 106–117.
[76] *Разевиг В.Д.* Цифровое моделирование многомерных динамических систем при случайных воздействиях // Автоматика и телемеханика. 1980. N 4. С. 177–186.
[77] *Maghsoodi Y., Harris C.J.* In-probubility approximation and simulation of nonlinear jump-diffusion SDE // IMA J. Math. Control Inform. 1987. N 4 P. 65–92.
[78] *Maghsoodi Y.* Mean-square efficient numerical solution of jump-diffusion SDE. 1994. Preprint OR72. Univ. of Southampton. UK. 26 p.
[79] *Wagner W., Platen E.* Approximation of Ito integral equations. 1978. Preprint ZIMM Akad. Wiss. DDR. Berlin. 1978. 27 p.
[80] *Platen E.* A Taylor–Ito formula for semimartingales solving a stochastic differential equation // Springer Lecture Notes in Control and Inform. Sci. 1981. Vol. 36. P. 157–164.
[81] *Platen E., Wagner W.* On a Taylor formula for a class of Ito processes // Probab. Math. Statist. 1982. N 3. P. 37–51.
[82] *Platen E.* A generalized Taylor formula for solutions of stochastic differential equations // Sankhya. Vol. 44A. 1982. P. 163–172.
[83] *Platen E.* An approximation method for a class of Ito processes with jump component // Lietuvos Mat. Rink. 1982. N 22. P. 124–136.
[84] *Kloeden P.E., Platen E.* The Stratonovich and Ito–Taylor expansions // Math. Nachr. 1991. Bd 151. S. 33–50.
[85] *Pettersson R.* The Stratonovich–Taylor expansion and numerical methods // Stoch. Anal. Appl. 1992. Vol.10. N 5. P. 603–612.
[86] *Kloeden P.E., Platen E.* Numerical solution of stochastic differential equations. Berlin: Springer-Verlag, 1992. 632 p.
[87] *Kloeden P.E., Platen E., Schurz H.* Numerical solution of SDE through computer experiments. Berlin: Springer-Verlag, 1994. 292 p.
[88] *Mikulevicius R., Platen E.* Time discrete Taylor approximations for Ito processes with jump component // Math. Nachr. 1988. Bd 138. S. 93–104.
[89] *Mikulevicius R., Platen E.* Rate of convergence of the Euler approximation for diffusion processes // Math. Nachr. 1991. Bd 151. S. 233–239.
[90] *Mikulevicius R.* On some properties of solutions of stochastic differential equations // Lietuvos Mat. Rink. 1983. N 4. P. 18–31.
[91] *Platen E.* An introduction to numerical methods for stochastic differential equations // Acta Numerica. 1999. N 8. P. 195–244.
[92] *Kloeden P.E., Platen E., Schurz H., Sorensen M.* On effects of discretization on estimators of drift parameters for diffusion processes // J. Appl. Probab. 1996. Vol. 33. P. 1061–1076.
[93] *Milstein G.N., Platen E., Schurz H.* Balanced implicit methods for stiff stochastic systems // SIAM J. Numer. Anal. 1998. Vol. 35. N 3. P. 1010–1019.
[94] *Hofmann N., Platen E.* Stability of superimplisit numerical methods for stochastic differential equations // Fields Inst. Communications. 1996. Vol. 9. P. 93–104.
[95] *Hofmann N., Platen E.* Stability of weak numerical schemes for stochastic differential equations // Comput. Math. Appl. 1994. Vol. 28, N 10–12. P. 45–57.
[96] *Platen E.* On weak implicit and predictor–corrector methods // Math. Comput. Simulation. 1995. Vol. 38. P. 69–76.
[97] *Platen E.* Higher-order weak approximation of Ito diffusions by Markov chains // Probab. Eng. Inform. Sci. 1992. N 6. P. 391–408.
[98] *Kloeden P.E., Platen E., Wright I.W.* The approximation of multiple stochastic integrals // Stoch. Anal. Appl. 1992. Vol. 10. N 4. P. 431–441.

[99] *Schurz H.* Asymptotical mean square stability of an equilibrium point of some linear numerical solutions with multiplicative noise // Stoch. Anal. Appl. 1996. Vol. 14. P. 313–354.

[100] *Кузнецов Д.Ф.* Слабый численный метод четвертого порядка для стохастических дифференциальных уравнений Ито // Вестн. молодых ученых. Сер. прикл. мат. и мех. 2000. N 4. С. 47–52.

[101] *Кузнецов Д.Ф.* Методы численного моделирования решений систем стохастических дифференциальных уравнений Ито в задачах механики. Автореф. дис. канд. физ.-мат. наук. СПб: ИПЦ СПбГТУ. 1996. С. 1–19.

[102] *Кузнецов Д.Ф.* Конечно-разностная аппроксимация разложения Тейлора–Ито и конечно-разностные методы численного интегрирования стохастических дифференциальных уравнений Ито. 1996. 24 с. Деп. в ВИНИТИ. 3509-В96.

[103] *Кузнецов Д.Ф.* Конечно-разностный метод численного интегрирования стохастических дифференциальных уравнений Ито с локальной среднеквадратической погрешностью третьего порядка малости. 1996. 27 с. Деп. в ВИНИТИ. 3510-В96.

[104] *Кузнецов Д.Ф.* Теоремы о замене порядка интегрирования в повторных стохастических интегралах. 1997. 31 с. Деп. в ВИНИТИ. 3607-В97. 10.12.97.

[105] *Кульчицкий О.Ю., Кузнецов Д.Ф.* Унифицированное разложение Тейлора–Ито // Зап. науч. сем. ПОМИ им. В. А. Стеклова. 1997. Т. 244. С. 186–204.

[106] *Кузнецов Д.Ф.* Метод разложения и аппроксимации повторных стохастических интегралов Стратоновича, основанный на кратных рядах Фурье по полным ортонормированным системам функций и его применение к численному решению стохастических дифференциальных уравнений // Труды конф. "Средства мат. моделир." СПб: Изд-во СПбГТУ. 1998. С. 135–160.

[107] *Kuznetsov D.F.* Method of expansion and approximation of repeated stochastic Stratonovich integrals, which is based on multiple Fourier series on full orthonormal systems // Abstracts of the international conference "Asymptotic methods in probability and mathematical statistics". St.-Petersburg. 24–28 June 1998. P. 146–149.

[108] *Кузнецов Д.Ф.* Использование различных полных ортонормированных систем функций для численного решения стохастических дифференциальных уравнений Ито // Вторая междунар. конф. "Дифференц. уравнения и их прим." 15-20 июня 1998: Тезисы докладов. СПб: Изд-во СПбГТУ. 1998. С. 128–129.

[109] *Кузнецов Д.Ф.* Некоторые вопросы теории численного решения стохастических дифференциальных уравнений Ито. СПб.: Изд-во СПбГТУ. 1998. 203 с.

[110] *Кузнецов Д.Ф.* Применение методов аппроксимации повторных стохастических интегралов Стратоновича и Ито к численному моделированию управляемых стохастических систем // Проблемы управления и информатики. 1999. N 4. С. 91–108.

[111] *Кузнецов Д.Ф.* Разложение повторных стохастических интегралов Стратоновича, основанное на кратных рядах Фурье // Зап. науч. сем. ПОМИ им. В. А. Стеклова. 1999. Т. 260. С. 164–185.

[112] *Кузнецов Д.Ф.* К проблеме численного моделирования стохастических систем // Вестн. молодых ученых. Сер. прикл. мат. и мех. 1999. N 1. С. 20–32.

[113] *Кузнецов Д.Ф.* Симметризованные повторные стохастические интегралы по пуассоновским мерам и их аппроксимация, основанная на кратных рядах Фурье. СПб.: Изд–во СПбГТУ. 1999. 23 с.

[114] *Кузнецов Д.Ф.* Два новых представления разложения Тейлора–Стратоновича. СПб.: Изд–во СПбГТУ. 1999. 18 с.

[115] *Кузнецов Д.Ф.* Повторные симметризованные стохастические интегралы по мартингалам и их разложение, основанное на кратных рядах Фурье. СПб.: Изд–во СПбГТУ. 1999. 18 с.

[116] *Кузнецов Д.Ф.* Замена порядка интегрирования в повторных стохастических интегралах по мартингалу. СПб.: Изд–во СПбГТУ. 1999. 11 с.
[117] *Кузнецов Д.Ф.* Применение полиномов Лежандра к среднеквадратической аппроксимации решений стохастических дифференциальных уравнений // Проблемы управления и информатики. 2000. N 5. С. 84–104.
[118] *Кузнецов Д.Ф.* Численное моделирование стохастических дифференциальных уравнений и стохастических интегралов. СПб.: Наука, 1999. 459 с.
[119] *Кульчицкий О.Ю., Кузнецов Д.Ф.* Разложение процессов Ито в ряд Тейлора–Ито в окрестности фиксированного момента времени. 1993. 26 с. Деп. в ВИНИТИ. 2637-В93. 26.10.93.
[120] *Кульчицкий О.Ю., Кузнецов Д.Ф.* О проблеме корректного моделирования решений систем стохастических дифференциальных уравнений Ито // Механика и процессы управления. 1995. N 458. С. 162–168.
[121] *Kulchitski O.Yu., Kuznetsov D.F.* The Taylor–Ito expansion of Ito processes, which are generated by solution of stochastic differential Ito equation // Abstracts of the 1st International scientific and practical conference "Differential equations and applications", St.Petersburg, 3–5 December 1996. P. 137–138.
[122] *Kulchitski O.Yu., Kuznetsov D.F.* Numerical simulation of stochastic control sistems // Proceedings of the International Conference on Informatics and Control, St.Petersburg, 9–13 June 1997. Vol. 1. P. 368–376.
[123] *Кульчицкий О.Ю., Кузнецов Д.Ф.* Численное моделирование стохастических систем управления, описываемых системами дифференциальных уравнений Ито // 3-я Українська конференція з автоматичного керування "Автоматика 96". Севастополь, 21–24 сентября 1996: Тезисы докладов. Т.1. С. 162–163.
[124] *Kulchitski O.Yu., Kuznetsov D.F.* Numerical simulation of nonlinear oscillatory systems under stochastic perturbations // Proceedings of the 1st international conference "Control of oscillations and chaos". St.Petersburg. 27–29 August 1997. Vol. 2. P. 242–245.
[125] *Кульчицкий О.Ю., Кузнецов Д.Ф.* Библиотека программ стохастического моделирования линейных управляемых систем в среде MatLAB // Рабочая встреча "Средства математического моделирования". Санкт-Петербург, 3-6 декабря 1997: Тезисы докладов. С. 97–98.
[126] *Кульчицкий О.Ю., Кузнецов Д.Ф.* Численные методы моделирования систем управления, описываемых стохастическими дифференциальными уравнениями // Проблемы управления и информатики. 1998. N 2. С. 57–72.
[127] *Скороход А.В.* Случайные процессы с независимыми приращениями. М.: Наука, 1964. 280 с.
[128] *Харди Г.Х., Рогозинский В.В.* Ряды Фурье. М.: Гос. изд-во физ.-мат. лит., 1963. 156 с.
[129] *Гобсон Е.В.* Теория сферических и эллипсоидальных функций. М.: ИЛ, 1952. 476 с.
[130] *Chung K.L., Williams R.J.* Introduction to stochastic integration. Progress in probubility and stochastics. Vol. 4 / Ed. P. Huber, M. Rosenblatt. Boston; Basel; Stuttgart: Birkhäuser. 1983. 152 p.
[131] *Рыжик И.М., Градштейн И.С.* Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. 3-е изд. М.; Л.: Гос. изд-во техн.-теор. лит., 1951. 464 с.
[132] *Дынкин Е.Б.* Марковские процессы. М.: Наука, 1963. 860 с.
[133] *Kamke E.* Differential Gleichungen Lösungsmethoden und Lösungen. Vol.1. Gewöhnliche differential Gleichungen. Leipzig: Verbesserte Auflage, 1959. 576 S.
[134] *Maruyama G.* Continuous Markov processes and stochastic equations // Rend. Circ. Math. Palermo. 1955. N 4. P. 48–90.
[135] *Clements D.J., Anderson B.D.O.* Well behaved Ito equations with simulations that always misbehave // IEEE Trans. Automat. Control. 1973. AC–18. P. 676–677.

[136] *Wright D.J.* The digital simulation of stochastic differential equations // IEEE Trans. Automat. Control. 1974. AC-19. P. 75–76.
[137] *Wright D.J.* Digital simulation of Poisson stochastic differential equations // Internat. J. Systems Sci. 1980. Vol. 11. N 6. P. 781–785.
[138] *Rumelin W.* Numerical treatment of stochastic differential equations // SIAM J. Numer. Anal. 1982. Vol.19. P. 604–613.
[139] *Platen E.* Zur zeitdiskreten Approximation von Itoprozessen. Diss. B., I Math., Akad. Wiss. DDR. 1984. Berlin.
[140] *Gard T.C.* Introduction to stochastic differential equations. N. Y.: Marcel Dekker, 1988. 324 p.
[141] *Chang C.C.* Numerical solution of stochastic differential equations with constant diffusion coefficients // Math. Comput. 1987. Vol. 49. P. 523–542.
[142] *Talay D.* Convergence pour chaque trajectoire d'un schéme d'approximation des EDS // Computes Rendus Acad. Sci. Paris. Sér. I. Math. 1982. Vol. 295. P. 249–252.
[143] *Talay D., Tubaro L.* Expansion of the global error for numerical schemes solving stochastic differential equations // Stoch. Anal. Appl. 1990. Vol. 8. N 4. P. 483–509.
[144] *Talay D.* Efficient numerical schemes for the approximation of expectations of functionals of the solution of an SDE and applications // Springer Lecture Notes in Control and Inform. Sci. 1984. Vol. 61. P. 294–313.
[145] *Greenside H.S., Helfand E.* Numerical integration of stochastic differential equations. II // Bell System Tech. J. 1981. Vol. 60. P. 1927–1940.
[146] *Klauder J.R., Petersen W.P.* Numerical integration of multiplicative- noise stochastic differential equations // SIAM J. Numer. Anal. 1985. Vol. 22. P. 1153–1166.
[147] *Kloeden P.E., Platen E.* Higher-order implicit strong numerical schemes for stochastic differential equations // J. Statist. Phisics. 1992. Vol. 66. P. 283–314.
[148] *Kloeden P.E., Platen E., Hofmann N.* Extrapolation methods for the weak approximation of Ito diffusions // SIAM J. Numer. Anal. 1995. Vol. 32. P. 1519–1534.
[149] *Hernandez D.B., Spigler R.* Convergence and stability of implicit Runge–Kutta methods for systems with multiplicative noise // BIT. 1993. Vol. 33. P. 654–669.
[150] *Haworth D.C., Pope S.B.* A second-order Monte–Carlo method for the solution of the Ito stochastic differential equation // Stoch. Anal. Appl. 1986. N 4. P. 151–186.
[151] *Аверина Т.А., Артемьев С.С.* Новое семейство численных методов для решения стохастических дифференциальных уравнений // Докл. АН СССР. 1986. Т. 288. N 4. С. 777–780.
[152] *Wagner W.* Unbiased Monte–Carlo evaluation of certain functional integrals // J. Comput. Phys. 1987. Vol. 71. P. 21–33.
[153] *Wagner W.* Monte–Carlo evaluation of functionals of solutions of stochastic differential equations. Variance reduction and numerical examples // Stoch. Anal. Appl. 1988. N 6. P. 447–468.
[154] *Arnold L.* Stochastic differential equations: Theory and applications. N. Y.: Wiley, 1974. 228 p.
[155] *Richardson J.M.* The application of truncated hierarchy techniques in the solution of a stochastic linear differential equation. In Stochastic Processes in Mathematical Phisics and Engineering // Proc. Symp. Appl. Math. Vol. 16. 1964 / Ed. R. Bellman. Amer. Math. Soc. Providence RI. P. 290–302.
[156] *McKenna J., Morrison J.A.* Moments and correlation functions of a stochastic differential equation // J. Math. Phys. 1970. Vol. 11. P. 2348–2360.
[157] *McKenna J., Morrison J.A.* Moments of solutions of a class of stochastic differential equations // J. Math. Phys. 1971. Vol. 12. P. 2126–2136.
[158] *Klauder J.R., Petersen W.P.* Spectrum of certain non-self-adjoint operators and solutions of Langevin equations with complex drift // J. Statist. Phys. 1985. Vol. 39. P. 53–72.

[159] *Пугачев В.С., Синицын И.Н.* Стохастические дифференциальные системы: Анализ и фильтрация. М.: Наука, 1985. 559 с.
[160] *Mikulevicius R.* On some properties of solutions of stochastic differential equations // Lietuvos Mat. Rink. 1983. N 4. P. 18–31.
[161] *Strook D.W., Varadhan S.R.S.* Multidimensional diffusion processes. Berlin: Springer, 1979. 338 p.
[162] *Артемьев С.С., Шкурко И.О.* Численное решение линейных систем стохастических дифференциальных уравнений // VII Всесоюз. совещание "Методы Монте–Карло в вычислительной математике и математической физике", 9–11 октября 1985 г. Новосибирск: Тезисы докладов С. 144–146.
[163] *Shkurko I.O.* Numerical solution of linear systems of stochastic differential equations // Numer. Methods Statist. Modeling. Collected Scientific Works. Novosibirsk, 1987. P. 101–109.
[164] *Понтрягин Л.С.* Обыкновенные дифференциальные уравнения. Изд. 5-е. М.: Наука, 1982. 331 с.
[165] *Бахвалов Н.С.* Численные методы. М.: Физматгиз, 1973. 631 с.
[166] *Дьяконов В.П.* Справочник по применению системы PC MatLab. М.: Наука, 1993. 111 с.
[167] *Кореневский М.Л.* Об оптимизации одного метода приближенного вычисления матричной экспоненты // Труды междунар. конф. "Средства математического моделирования". СПб.: Изд–во СПб ГТУ, 1997. С. 125–134.
[168] *Арсеньев Д.Г., Иванов В.М., Кульчицкий О.Ю.* Численное моделирование линейных стохастических систем дифференциальных уравнений. СПб.: Наука, 1999. 132 с.
[169] *Арсеньев Д.Г., Кульчицкий О.Ю.* Оптимизация алгоритмов численного интегрирования жестких линейных систем дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами. 1986. 32 с. Деп. в ВИНИТИ. 732-В86. 31.01.86.
[170] *Арсеньев Д.Г., Иванов В.М., Кульчицкий О.Ю.* Адаптивные методы вычислительной математики и механики. Стохастический вариант. СПб: Наука, 1996. 366 с.
[171] *Newton N.J.* An asymptotically efficient difference formula for solving stochastic differential equations // Stochastics. 1986. Vol. 19. P. 175–206.
[172] *Newton N.J.* Asymptotically optimal discrete approximations for stochastic differential equations. In theory and applications of nonlinear control systems / Ed. C. Byrnes, A. Lindquist. Amsterdam: North-Holland, 1986. P. 555–567.
[173] *Newton N.J.* Asymptotically efficient Runge–Kutta methods for a class of Ito and Stratonovich equations // SIAM J. Appl. Math. 1991. Vol. 51. P. 542–567.
[174] *Гладышев С.А., Мильштейн Г.Н.* Метод Рунге–Кутта для вычисления винеровских интегралов экспоненциального типа // Журн. вычисл. мат. и мат. физики. 1985. Т. 24 С. 1136–1149.
[175] *Толстов Г.П.* Ряды Фурье. М.; Л.: Гос. изд–во техн.-теор. лит., 1951. 396 с.
[176] *Кульчицкий О.Ю., Кузнецов Д.Ф.* Аппроксимация кратных стохастических интегралов Ито. 1994. Деп. в ВИНИТИ. 1678-В94.
[177] *Кузнецов Д.Ф.* Численное интегрирование стохастических дифференциальных уравнений. СПб.: Издательство С. - Петербургского государственного университета, 2001. 712 с.
[178] *Кузнецов Д.Ф.* Новые представления явных одношаговых численных методов для стохастических дифференциальных уравнений со скачкообразной компонентой // Журнал вычислительной математики и математической физики. Т.41. N6. 2001. С.922–937.
[179] *Кузнецов Д.Ф.* Новые представления разложения Тейлора-Стратоновича // Зап. науч. сем. ПОМИ им. В. А. Стеклова. 2001. Т. 278. С. 141–158.

[180] *Кузнецов Д.Ф.* Конечно-разностные сильные численные методы порядков точности 1.5 и 2.0 для стохастических дифференциальных уравнений Ито с неаддитивным многомерным шумом // Проблемы управления и информатики. 2001. N 4. С. 59–73.
[181] *Кузнецов Д.Ф.* Численное интегрирование стохастических дифференциальных уравнений. Автореф. дис. докт. физ.-мат. наук. СПб: Издательство СПбГПУ. 2002. 33 с.
[182] *Кузнецов Д.Ф.* Комбинированный метод сильной аппроксимации повторных стохастических интегралов // Проблемы управления и информатики. 2002. N 4. С. 141–147.
[183] *Кузнецов Д.Ф.* Трехшаговые сильные численные методы для стохастических дифференциальных уравнений Ито // Проблемы управления и информатики. 2002. N 6. С. 104–119.
[184] *Кузнецов Д.Ф.* Численное интегрирование стохастических дифференциальных уравнений. 2. СПб.: Издательство Политехнического университета, 2006. 764 с.
[185] *Дьяконов В.П.* MATLAB 6.5 SP1/7.0 + Simulink 5/6. Основы применения. М.: СОЛОН-пресс, 2005. 800 с.
[186] *Milstein G.N., Tretyakov M.V.* Stochastic numerics for mathematical physics. Berlin: Springer-Verlag, 2004. 596 p.
[187] *Кузнецов Д.Ф.* Стохастические дифференциальные уравнения: теория и практика численного решения. СПб.: Издательство Политехнического университета, 2007. 777 с. (первое издание).
[188] *Ильин В.А., Позняк Э.Г.* Основы математического анализа. Часть II. М.: Наука, 1973. 448 с.
[189] *Кузнецов Д.Ф.* Стохастические дифференциальные уравнения: теория и практика численного решения. СПб.: Издательство Политехнического университета, 2007. 800 с. (второе издание).
[190] *Кузнецов Д.Ф.* Стохастические дифференциальные уравнения: теория и практика численного решения. СПб.: Издательство Политехнического университета, 2009. 800 с. (третье издание).
[191] *Артемьев С.С., Якунин М.А.* Математическое и статистическое моделирование в финансах. Новосибирск: Издательство ИВМиМГ СО РАН, 2008. 174 с.

Об авторе

Дмитрий Феликсович Кузнецов родился в 1970г. в г.Ленинграде. В 1987г. окончил ленинградскую ср. шк. N 470 с углубленным изучением математики. К. ф.-м. н. (1996г.), д. ф.-м. н. (2003г.), автор около 40 научных публикаций по проблеме численного интегрирования стохастических дифференциальных уравнений (СДУ).

Интерес к указанной проблеме автор настоящей книги проявил в 20-летнем возрасте, будучи студентом 3 курса С.-Петербургского гос. политехн. ун-та. С 1990 по 1995 годы он работал совместно с проф. Кульчицким О.Ю., которого считает своим учителем и сожалеет, что уход из жизни этого человека и ряд научных разногласий с ним неожиданно прервали совместную научную деятельность.

К 1992г. уже вышли две монографии ([70, 86]) по проблеме численного интегрирования СДУ Ито. Эти книги собрали и обобщили основные результаты по данной проблеме на тот период, однако о существовании указанных монографий автор настоящей книги узнал только в 1995г. Этим объясняется необычность подходов, изложенных в настоящей монографии, по сравнению с [70, 86]. В особенности это касается глав 3–6, результаты которых существенно повлияли и на последующие главы книги.

Обозначения

$\in$, $\bigcup$, $\bigcap$, $\setminus$, $\times$ — принадлежит множеству, объединение множеств, пересечение множеств, разность множеств и декартово произведение множеств соответственно

$\equiv$, $\ll$, $:=$, $\stackrel{\text{def}}{=}$, $\approx$ — тождественно равно, много меньше, присвоить, равно по определению и приближенно равно соответственно

$\Re^n$, $n!$, $n!!, C_n^m$, $(\cdot,\cdot)$ — n-мерное евклидово пространство, факториал, двойной фактриал, биномиальный коэффициент и скалярное произведение соответственно

N, Z, $\emptyset$, ∞ — множество натуральных чисел, множество целых чисел, пустое множество и бесконечность соответственно

$[x]$, $|x|$, $\forall x$ — целая часть x, модуль x и "для всех x" соответственно

$\mathbf{1}_{\mathcal{A}}$, $\mathbf{1}_{\mathcal{A}}(x)$, $F:\ G_1 \to G_2$ — индикатор и индикаторная функция множества $\mathcal{A}$, а также функция F из G_1 в G_2

$\mathbf{x} = (\mathbf{x}^{(1)}, \ldots, \mathbf{x}^{(n)})^{\mathsf{T}}$ — вектор $\mathbf{x} \in \Re^n$ с компонентами $\mathbf{x}^{(i)}$, $i = 1, \ldots, n$

$|\mathbf{x}|$, $\|\cdot\|$ — евклидова норма вектора $\mathbf{x}$ и норма вектора или матрицы

$\partial F/\partial \mathbf{x}^{(i)}$, $\partial^2 F/\partial \mathbf{x}^{(i)} \partial \mathbf{x}^{(j)}$ — частная производная функции $F:\ \Re^n \to \Re^1$ по переменной $\mathbf{x}^{(i)}$ и ее смешанная частная производная по переменным $\mathbf{x}^{(j)}$ и $\mathbf{x}^{(i)}$

$A = \left\| A^{(ij)} \right\|_{i,j=1}^{n,m}$ — матрица A размера $n \times m$ с элементами $A^{(ij)}$

$|A|$, $\det(A)$ — определитель матрицы A

$\{a_n\}_{n=0}^{N}$ — последовательность a_n, $n = 1,\ 2, \ldots, N$; $N \le \infty$

$\sup\limits_{x \in \mathcal{X}}$, $\max\limits_{x \in \mathcal{X}}$, $\min\limits_{x \in \mathcal{X}}$ — супремум, максимум и минимум по всем x из множества $\mathcal{X}$

$\mathrm{N}(m, \sigma)$ — нормальное распределение с параметрами m и σ

$A > 0$, A^{T} — положительно определенная и транспонированная матрица A

$\sum\limits_{i=1}^{n} x_i$, $\prod\limits_{i=1}^{n} x_i$ — $x_1 + \ldots + x_n$ и $x_1 \cdot \ldots \cdot x_n$ соответственно

$\sum\limits_{x \in \mathcal{X}}$, $\sum\limits_{i_1,\ldots,i_k=1}^{n}$, $\sum\limits_{(\lambda_k,\ldots,\lambda_1)}$, $\stackrel{k}{\cdot}$ — сумма по всем x из множества $\mathcal{X}$, $\sum\limits_{i_1=1}^{n} \ldots \sum\limits_{i_k=1}^{n}$, сумма по всем возможным перестановкам $(\lambda_k, \ldots, \lambda_1)$ и свертка матриц соответственно

ω, M, D, P, $\mathsf{M}\{\cdot|\cdot\}$ — элементарное событие, математическое ожидание, дисперсия, вероятность и условное математическое ожидание соответственно

l.i.m., x_t, $O(x^p)$ — предел в среднем квадратическом, случайный процесс $x(t, \omega)$ и величина того же порядка малости, что и x^p соответственно

f_t, $f(t, \omega)$ — скалярный винеровский процесс

$\int \ldots df_t$, $\stackrel{*}{\int} \ldots df_t$ — стохастические интегралы Ито и Стратоновича соответственно

w_t — f_t или t в компактных обозначениях

$\mathbf{f}_t$ — векторный винеровский процесс с компонентами $\mathbf{f}_t^{(i)}$; $i = 1, \ldots, m$

$\mathbf{w}_t$ — вектор длины $m+1$ с компонентами $\mathbf{w}_t^{(i)} = \mathbf{f}_t^{(i)}$ при $i = 1, \ldots, m$ и $\mathbf{w}_t^{(0)} = t$

L, $G_0^{(i)}$, $i = 1, \ldots, m$, — операторы сноса и диффузии в формуле Ито

$\zeta_{(j)T,t}^{(i)}$, $\zeta_j^{(i)}$ — независимые стандартные гауссовские случайные величины

$J_{l_1 \ldots l_{k_{s,t}}}^{(i_1 \ldots i_k)}$, $I_{l_1 \ldots l_{k_{s,t}}}^{(i_1 \ldots i_k)}$, $J_{(\lambda_k \ldots \lambda_1)s,t}^{(i_k \ldots i_1)}$, $J[\psi^{(k)}]_{T,t}$, $J_{(\lambda_k \ldots \lambda_1)s,t}^{*(i_k \ldots i_1)}$, $J^*[\psi^{(k)}]_{T,t}$, $J_{l_1 \ldots l_{k_{s,t}}}^{*(i_1 \ldots i_k)}$, $I_{l_1 \ldots l_{k_{s,t}}}^{*(i_1 \ldots i_k)}$ — повторные стохастические интегралы

$\hat{I}_{l_1 \ldots l_{k_{s,t}}}^{(i_1 \ldots i_k)}$, $\hat{J}_{(\lambda_k \ldots \lambda_1)s,t}^{(i_k \ldots i_1)}$ $I_{l_1 \ldots l_{k_{s,t}}}^{(i_1 \ldots i_k)q}$, $J_{(\lambda_k \ldots \lambda_1)s,t}^{(i_k \ldots i_1)q}$ $J[\psi^{(k)}]_{T,t}^{q_1,\ldots,q_k}$, $J[\psi^{(k)}]_{T,t}^{q}$, $\hat{J}_{(\lambda_k \ldots \lambda_1)s,t}^{*(i_k \ldots i_1)}$, $I_{l_1 \ldots l_{k_{s,t}}}^{*(i_1 \ldots i_k)q}$ — аппроксимации повторных стохастических интегралов

Индекс

Абсолютная устойчивость (А-устойчивость), 526
Аддитивное разделение переменных, 137
Аддитивный шум, 446, 542
Алгоритм, 26, 588, 591, 596, 598 – 600, 603
Аппроксимация
– кусочно-постоянная, 593
– тейлоровская, 46, 436, 437
– повторных стохастических интегралов Ито, 277 – 385
– повторных стохастических интегралов Стратоновича, 312 – 313, 332 – 340, 344 – 351
Аттрактор
– Лоренца, 649
– Ресслера, 671
Базис, 17
– стохастический, 198
Броуновское движение, 65, 74
Броуновский мост, 21, 345
Вектор
– сноса, 15, 33, 34
– состояния, 626
Винеровский процесс, 20
Вероятность перехода, 10
Гиперкуб, 205
Дифференцируемость
– по Ито, 145
– – многократная, 148
– по Стратоновичу, 170
– – многократная, 172
D-мартингал, 52, 126, 270
Доверительный интервал, 390, 391, 532
Задача
– Дирихле, 98 – 100
– Коши, 101 – 104
– краевая, 274
– о колебаниях круглой мембраны
– общий случай, 274
– радиальных, 275
– оценки параметров, 96, 97, 672 – 677
– стохастической устойчивости, 91 – 96, 703 – 706
– стохастического оптимального управления, 89, 694
– – по неполным данным, 691
– тестирования процедур оценивания параметров, 672
– фильтрации
– – Калмана-Бьюси, 87, 686
– – нелинейной оптимальной, 688
– – марковской цепи, 677
Закон
– повторного логарифма, 21
– распределения вероятностей
– – гауссовский, 7
– – пуассоновский, 23, 26
– – Стьюдента, 370, 532
Замена порядка интегрирования в повторных стохастических интегралах
– Ито, 110, 124
– по D-мартингалу, 126
Интеграл
– Римана, 112
– стохастический
– – Ито, 30
– – по D-мартингалу, 53
– – по пуассоновской мартингальной случайной мере, 56
– – смешанный, 113
– – Стратоновича, 44
– повторный стохастический
– – Ито, 111, 152 – 154, 204
– – по D-мартингалу, 270
– – по пуассоновской мартингальной случайной мере, 54
– – Стратоновича, 178, 182, 185, 204
Интерполяция
– линейная, 593
– квадратичная, 594
– кубическая, 594
Класс Гельдера, 237
Коэффициент
– биномиальный, 155, 200, 201
– диффузии, 33, 34
– сноса, 33, 34
– Фурье, 206

– Фурье–Лежандра, 315, 324, 325
Критерий
– Коши, 3
– сходимости сильный, 389
– сходимости слабый, 531, 532
Мартингал, 9
– дискретный, 10, 402, 403
Матрица
– гурвицева, 582
– диффузии, 15
– k-го ранга, 147
– невырожденная, 98
– неотрицательно определенная, 15
Матричная экспонента, 580
Математическая модель
– Башелье, 82
– Блэка–Шоулза, 82
– лагранжевой динамики частицы жидкости, 83, 86
– Лотки-Вольтерра, 81, 82
– солнечной активности, 83
– трехмерная конвективной турбулентности Лоренца, 649
– чандлеровских колебаний, 80, 640
Метод
– Г.Н. Мильштейна, 344, 404
– комбинированный, 368
– Монте-Карло, 715
– неявный двухшаговый сильный
– – порядка 1.0, 493
– – порядка 1.5, 495
– – порядка 2.0, 496
– – порядка 2.5, 496, 497, 510
– неявный двухшаговый сильный конечно-разностный
– – порядка 1.0, 502
– – порядка 1.5, 504
– – порядка 2.0, 505, 506
– неявный одношаговый сильный
– – порядка 1.0, 462
– – порядка 1.5, 465, 466
– – порядка 2.0, 466, 467
– – порядка 2.5, 468, 469
– – порядка 3.0, 470 – 472
– – конечно-разностный порядка 1.0, 462
– – конечно-разностный порядка 1.5, 464, 465
– – конечно-разностный порядка 2.0, 476, 477
– – конечно-разностный порядка 2.5, 479, 480
– неявный слабый порядка 2.0, 560
– неявный слабый конечно-разностный порядка 2.0, 561
– неявный трехшаговый сильный
– – порядка 1.0, 511
– – порядка 1.5, 517
– неявный трехшаговый конечно-разностный сильный
– – порядка 1.0, 516
– – порядка 1.5, 520
– основанный на кратных рядах Фурье, 281
– полностью неявный сильный, 486, 487
– сбалансированный, 484
– типа "предсказатель-корректор", 563, 564
– Эйлера
– – неявный сильный, 458
– – неявный слабый, 556
– – полностью неявный, 557
– – супернеявный, 557
– – явный сильный, 393
– – явный слабый, 533
– экстраполяционный, 550, 552
– явный двухшаговый сильный
– – порядка 1.0, 489
– – порядка 1.5, 490
– – порядка 2.0, 492
– явный двухшаговый сильный конечно-разностный
– – порядка 1.0, 502
– – порядка 1.5, 504
– явный одношаговый сильный
– – порядка 1.0, 404
– – порядка 1.5, 407, 424, 429, 432, 439
– – порядка 2.0, 411, 425, 430, 433, 441
– – порядка 2.5, 414, 425, 430, 433, 449 – 452
– – порядка 3.0, 417, 434
– – порядка $r/2$, 399, 412, 422, 427, 431
– – конечно-разностный порядка 1.0, 438
– – конечно-разностный порядка 1.5, 439
– – конечно-разностный порядка 2.0, 441
– – конечно-разностный порядка 2.5, 447
– явный слабый
– – порядка 2.0, 536

– – порядка 3.0, 539
– – порядка 4.0, 542
– – конечно-разностный порядка 2.0, 553
– явный трехшаговый сильный
– – порядка 1.0, 511
– – порядка 1.5, 517
– явный трехшаговый конечно-разностный сильный
– – порядка 1.0, 516
– – порядка 1.5, 520
Множество
– замкнутое ограниченное, 121
– пустое, 234, 287
– элементарных событий Ω, 2
Модуль непрерывности, 237
Момент
– марковский, остановки, 12, 145, 148, 151, 611, 612
– первого выхода, 13
Мультипликативное разделение переменных, 141
Независимые стандартные гауссовские случайные величины, 206, 334
Неравенство
– Гельдера, 5
– Гронуолла, 5
– Дуба, 9, 31
– Иенсена, 5
– Коши-Буняковского, 5
– Ляпунова, 5
– Минковского, 5
– Чебышева, 5
Непрерывность
– в среднем квадратическом, 9
– в среднем степени p, 9
– по вероятности, 9
– по распределению, 9
– равномерная, 117, 209, 230
– с вероятностью единица, 9
– справа, 229
Норма
– вектора, 592
– евклидова, 601
– матрицы, 589
– функции, 13
– в пространстве $L_2([t,T]^k)$, 205
– на классе, 28, 53
Область
– замкнутая, 207
– открытая, 210
Оператор
– дифференциальный, 43, 135
– – матричный, 148, 149
Оценка
– максимального правдоподобия, 97
– моментов стохастических интегралов, 45 – 46
– параметров, 96
Предел
– в среднем квадратическом, 3
– по вероятности, 3
– по распределению, 3
– с вероятностью единица, 3
Погрешность среднеквадратической аппроксимации, 284
Полином
– Лежандра, 309
– производящий, 351
– Эрмита, 351
Полная ортонормированная в пространстве $L_2([t,T])$ система
– полиномов Лежандра, 234, 309
– тригонометрических функций, 234, 331
– функций Радемахера-Уолша, 233
– функций Хаара, 233
Полная ортонормированная с весом в пространстве $L_2([t,T])$ система
– собственных функций, 274
– функций Бесселя, 275, 276
Преобразование Гирсанова, 35
Пространство
– вероятностное, 2
– $L_2([t,T])$, 205
– $L_2([t,T]^k)$, 205
Разложение
– Каркунена-Лоэва, 21, 22
– повторных стохастических интегралов
– – Ито, 204 – 229, 309 – 328, 332 – 340, 344 – 350
– – по мартингалам, 270, 271
– – по мартингальным пуассоновским мерам, 266, 267
– Тейлора, 46, 187
– Тейлора-Ито
– – 1 унифицированное, 156, 157, 169, 195
– – 2 унифицированное, 166, 167, 169, 196
– – в форме Вагнера и Платена, 151, 152
– Тейлора-Стратоновича
– – 1 унифицированное, 177, 196
– – 2 унифицированное, 182, 196

– – в форме Клоедена и Платена, 174, 175
Ранг стохастического базиса, 198 – 201
Ряд
– числовой, 344
– Дирихле, 344
– Фурье-Лежандра, 235
– – кратный, 205, 206
– Фурье-Хаара, 240
Система уравнений
– алгебраическая, 581, 582
– Лоренца, 192, 649, 650
– Лотки-Вольтерра, 194, 660
– Ресслера, 193, 665
– стохастических дифференциальных Ито, 39
– – линейных, 576, 577
– – линейных стационарных, 580
Случайный процесс
– броуновского моста, 21, 345
– винеровский, 20
– гауссовский, 7
– гильбертов, 283
– дифференцируемый, 9
– диффузионный, 16
– Ито, 33
– марковский, 10, 11
– – строго, 13
– наблюдаемый, 87, 678
– непрерывный, 9
– Орнштейна-Уленбека, 67
– с независимыми приращениями, 19, 20
– стационарный, 7
– Пуассона, 24
– эргодический, 43
Спектральная плотность, 8
Субмартингал, 9
Суммируемость рядов по Принсгейму, 237
Супермартингал, 9
Сходимость
– в среднем квадратическом, 3
– в среднем степени p, 2
– по вероятности, 2
– по распределению, 2
– рядов Фурье равномерная, 237, 238
– рядов Фурье среднеквадратическая, 205
– с вероятностью единица, 2
– сильная численной схемы, 389
– слабая численной схемы, 531
Теорема
– Ито, 38, 39
– о разложении повторных стохастических интегралов
– – Ито, 205
– – по мартингалам, 271, 272
– – по мартингальным пуассоновским мерам, 266, 267
– о сходимости
– – сильных численных методов, 393, 400, 423, 428, 452, 486
– – слабых численных методов, 535, 547, 548
– – трехшаговых численных методов, 512
– центральная предельная, 27, 97, 391
Уравнение
– алгебраическое матричное, 581, 582
– Бюргерса, 710
– в частных производных 2 порядка, 100, 101, 103, 706, 712, 715
– Гамильтона-Якоби-Беллмана, 89, 90
– Колмогорова-Фоккера-Планка, 18
– обыкновенное дифференциальное, 84
– Риккати, 87, 88, 90
– стохастическое дифференциальное
– – линейное, 576, 577
– – линейное стационарное, 580
– – Ито, 37, 39
– – со скачкообразной компонентой, 60, 610
– – Стратоновича, 49, 50
– Чепмена-Колмогорова, 10, 11
– Закаи, 678, 679
Устойчивость
– стохастическая, 91
– – асимптотическая, 91
– – асимптотическая в среднем степени p, 92
– – асимптотическая в целом, 91, 92
– – в среднем степени p, 92
– – экспоненциальная, 92
– численной схемы, 522, 523
Формула
– замены порядка интегрирования, 112, 114, 123 – 125, 127
– Ито, 36, 37
– Коши, 580
– Каллианпура-Стрибел, 678
Условие
– Гельдера, 15, 535
– Липшица
– – глобальное, 39
– – локальное, 39, 40, 455
– – одностороннее, 455

Функция
– абсолютно интегрируемая, 8
– Бесселя 1 рода, 275
– Дирака, 23, 69, 78
– корреляционная, 7
– Ляпунова стохастическая, 93
– непрерывная, 114, 204
– ограниченная, 102
– полиномиальная, 234, 309
– – равномерно, 44
– Радемахера-Уолша, 233
– собственная, 274, 275
– спектральная, 8
– тригонометрическая, 234, 331
– Хаара, 233
Цепь Маркова, 18, 19
Число собственное
– матрицы, 581, 584
– ковариации случайного процесса, 283
Шум
– аддитивный, 542
– белый, 23, 68, 70
– векторный, 68
– мультипликативный, 392
– скалярный, 446
– цветной, 66, 67, 71
Экспонента
– матричная, 588
– ляпуновская стохастическая, 95, 704
Элементарное событие ω, 2

Научное издание

Кузнецов Дмитрий Феликсович

СТОХАСТИЧЕСКИЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ:
ТЕОРИЯ И ПРАКТИКА ЧИСЛЕННОГО РЕШЕНИЯ

Лицензия ЛР N 020593 от 07.08.97
Налоговая льгота – Общероссийский классификатор продукции
ОК 005-93, т.2; 95 3004 – научная и производственная литература

Подписано в печать 07.12.2009. Формат 70×100/16. Печать офсетная.
Усл. печ. л. 65,75. Уч. - изд. л. 65,75. Тираж 100. Заказ 597.

Отпечатано с готового оригинал-макета,
предоставленного автором, в типографии Издательства
Политехнического университета.
195251, Санкт-Петербург, Политехническая ул., 29.