Министерство образования и науки Российской Федерации

САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКИЙ ПОЛИТЕХНИЧЕСКИЙ
УНИВЕРСИТЕТ ПЕТРА ВЕЛИКОГО

Курс лекций
по
Теории Вероятностей

Курс лекций

Санкт-Петербург
2018

УДК519.21(075.8)

Автор:
Щербакова Ольга Евгеньевна

Курс лекций по Теории Вероятностей: курс лекций / О.Е. Щербакова. – СПб., 2018. — 84с.

Курс лекций соответствует образовательному стандарту высшего образования Федерального государственного автономного образовательного учреждения высшего образования «Санкт-Петербургский политехнический университет Петра Великого» и читался бакалаврам ИКНТ и ИФНИТ по дисциплине «Теория Вероятностей».

Представлен классический курс Теории Вероятностей.

В первой главе описана история становления теории вероятностей на примерах раскрытия парадоксов, возникавшихна ее пути.

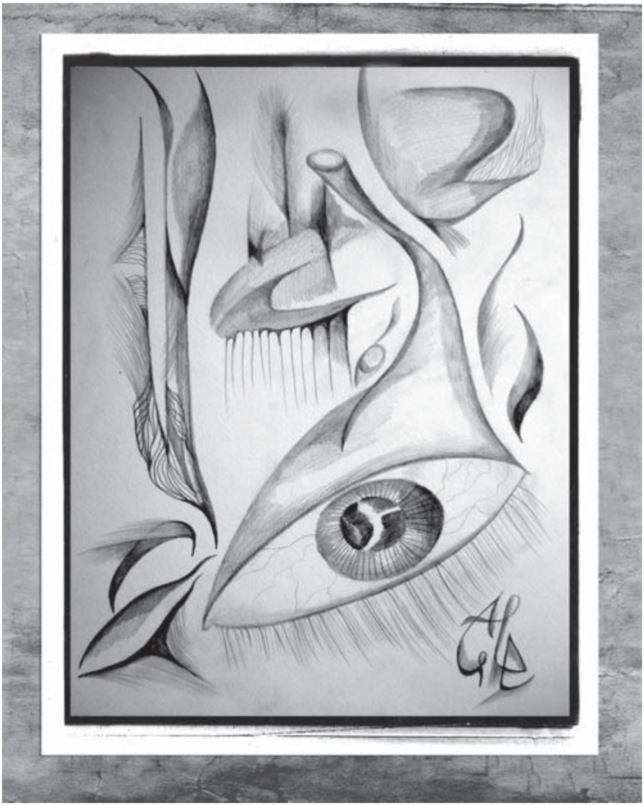
В курсе идет аксиоматическое построение вероятностного пространства и с этой позиции рассматривается классическая и геометрическая вероятность.

Основными объектами в курсе являются случайные величины и их последовательности. Даны определения и свойстваосновных характеристик случайных величин, приведены примеры, сформулированы и доказаны основныепредельныетеоремы, например, такие как Законы Больших Чисел, Усиленные Законы Больших Чисел, Центральные Предельные Теоремы. Особое внимание обращается на метод характеристических функций. В курсе много примеров и иллюстративногоматериала.

Предназначено для студентов, аспирантов, преподавателей математических, физических институтов и институтов компьютерных технологий.

КУРС ЛЕКЦИЙ ПО ТЕОРИИ ВЕРОЯТНОСТЕЙ

О. Е. Щербакова



СОДЕРЖАНИЕ

1. История становления теории вероятностей

1.1. **Предыстория.** История теории вероятностей, а точнее понятий случайности и шансов, уходит в глубь веков. Понятие вероятности рождается из азартных игр. Само слово "азарт"происходит от арабского *"аль зард"* - игральная кость.

الزرد

Археологические сведения говорят о том, что такие кости использовались во времена Первой Династии в Египте (3 500 г.до н.э.), затем в Древней Греции и Риме. По легенде игру в кости предложил Паламедей для развлечения греческих солдат, скучающих в ожидании битвы при Трое. Римские императоры Август (63 г. до н.э. - 14 г. н.э.) и Клавдий (10 г. до н.э. - 54 г. н.э.) были страстными игроками в кости.

Параллельно понятие случайности кристаллизруется в страховании и коммерции в связи с появлением таблиц смертности (римский юрист Юлпиан (220 г. до н.э.)).

В эпоху расцвета городов -республик (Рим, Венеция, Генуя, Пиза, Флоренция) появляется необходимость в простейшей статистике. Первый точно датируемый контракт по страхованию жизни заключен в Генуе в 1347 году.

Первый математический анализ игры в кости предпринял Дж. Кардано (1501-1576) в *"Книге об азартных играх"*, в которой говорилось о том, что число благоприятных комбинаций к числу возможных находятся в согласии с игровой практикой. Книга была издана только через 100 лет после ее написания.

Задачей, поставленной в этой книге Кардано, занялся позже Галилей. С первого взгляда она выглядит как парадокс:

Парадокс 1.1. *"почему ”9” выпадает чаще, когда бросают две кости, а ”10”, когда бросат три?"*

Объяснение парадокса: $9 = 3+6 = 6+3 = 4+5 = 5+4$, $10 = 4+6 = 6+4 = 5+5$, *- таким образом вероятность выпадения при бросаниях двух костей* ”9” - 4/36, *а* ”10” - 3/36. *В случае же трех костей* ”9” *можно выбросить* 25 *способами, а* ”10” - 26.

Несмотря на простоту задачи ее ошибочно решали и Лейбниц, и Даламбер, они забывали учитывать порядок выпадения костей.

1.2. **Перый период (XVII век - начало XVIII века).** Лаплас связывает рождение теории вероятностей с перепиской (1654 г.) между Блезом Паскалем и Пьером Ферма, связанной с задачей кавалера де Мере:

Парадокс 1.2. *при четырех бросаниях одной игральной кости вероятность выпадения хотя бы одной* ”1” *больше* 1/2, *а при* 24 *бросаниях двух костей вероятность выпадения двух* ”1” *одновременно меньше* 1/2.

Объяснение парадокса:

$$1-(\frac{5}{6})^k > \frac{1}{2},\ k \geq 4$$

$$1-(\frac{35}{36})^k > \frac{1}{2},\ k \geq 25$$

Это казалось противоречит "правилу пропорциональности критических значений".

Абрахам де Муавр в книге "Доктрина шансов"(1718) показал, что "правило пропорциональности критических значений" *недалеко от истины, но справедливо лишь асимптотически при малых значениях вероятности* $p \in (0,1)$

$$(1-p)^x = \frac{1}{2}$$

Критическое значение $k = [x]+1$,

$$x = -\frac{\ln 2}{\ln(1-p)} = \ln 2/(p+\frac{p^2}{2}+\ldots)$$

В 1657 году в книге Христиана Гюйгенса *"О расчетах в азартных играх"* представлен первый систематический текст по *"исчислению вероятностей"*, в частности, там даются правила сложения и умножения вероятностей, содержится дискуссия относительно понятия математического ожидания.

Центральной фигурой этого периода считается Яков Бернулли, который дал определение классической вероятности как отношения числа благоприятных к числу всех мыслимых исходов. Главным его результатов явился закон больших чисел, данный в его книге "Искусство предположений"(1713 г.), лежащий в основе всех примений теории вероятности. В его трудах появляются новые *"нефинитные идеи"*, связанные с предельными частотами при повторных испытаниях.

$$\frac{\sum_{k=1}^{n} X_k}{n} \to p \text{ по вероятности, где } \ p = EX_k.$$

Даниил Бернулли (1667-1727) внес вклад в разрешение *"Петербургского парадокса"*

Парадокс 1.3. *Игра состоит в следующем: игрок бросает монету, игра заканчивается на* r*-том шаге, когда выпадает решка, тогда банк выплачивает сумму* 2^r.

Вопрос: Каким должен быть первоначальный взнос, чтобы игра была безобидна для банка?

Суть парадокса: получается, что математическое ожидание выигрыша бесконечно.

$$EX = \frac{2}{2}+\frac{2^2}{2^2}+\ldots+\frac{2^r}{2^r}+\ldots \to \infty.$$

Разрешить парадокс можно либо сделав предположение об ограниченности ресурсов банка либо изменив критерий безобидности.

Если предположить (как Бюффон и Крамер), что ресурсы банка ограничены миллионом, то получим следующее

$$EX = \sum_{r=1}^{19}\frac{2^r}{2^r} + 10^6\sum_{r=20}^{\infty}\frac{1}{2^r} \approx 21.$$

Феллер так предложил определять игру безобидной: пусть суммарный выигрыш N_r, суммарный взнос R_r, тогда

$$P(|\frac{N_r}{R_r} - 1| < \varepsilon) \to 1, \ r \to \infty.$$

Он доказал, что игра становится безобидной при выполнении соотношения $R_r = r\log_2 r$.

1.3. **Второй период (XVIII век - начало XIX века).** Этот период связан с такими именами, как Пьер-Ремон Монмор, Абрахам де Муавр, Томас Байес, Пьер Симон де Лаплас, Карл Фридрих Гаусс, Симон Денис Пуассон.

Муавр в книгах "Доктрина шансов"(1718) и "Аналитические методы, или Аналитическая смесь"(1730) определяет понятия независимых событий, математического ожидания и условной вероятности. Кроме того, обнаружил универсальную закономерность в поведении отклонений от среднего в испытаниях Бернулли, названную как "Центральная предельная теорема".

Гаусс и Лапласу принадлежит идея введения нормального закона в теории ошибок.

В этот период появляется *"неклассическая вероятность"* (нормальная, пуассоновская), хотя она рассматривалась ни как распределение вероятностей, а как аппроксимация.

В том числе, упомянем Ньютона (1665 г.), который ввел в рассмотрение геометрические вероятности. К таким неклассическим вероятностям также относится задача о *"игле Бюффона"* и возникновение неравных вероятностей в формуле Байеса (1763 г.)

1.4. **Третий период (вторая половина XIX века).** Третий период связан с Петербургской школой и такими ее представителями как Л.П.Чебышев, А.А.Марков, А.М.Ляпунов.

Чебышев обобщил теорему Муавра -Лапласа на суммы независимых случайных величин с помощью метода моментов, позже усовершенствованный Марковым. Также обобщил *закон больших чисел*, используя *"неравенства Чебышева-Маркова"*.

Ляпунов методом характеристических функций доказал теорему Муавра - Лапласа для сумм случайных величин, имеющих моменты порядка $2 + \delta$, $\delta > 0$.

Марков ввел в рассмотрение схемы зависимых случайных величин со свойством отсутствия последствия, теперь называемых *"марковскими цепями"*.

В этот период начинает прослеживаться связь между чистой математикой и теорией вероятностей. Связь с теорией чисел можно увидеть в работах Пуанкаре (1896) и Гюльдена (1890). Пуанкаре поставил вопрос о том с какой вероятностью случайно выбранная точка $\omega \in [0, 1]$ будет рациональным числом.

Гульден рассматривал вопрос о том, как себя ведут целые числа в разложении в непрерывную дробь случайного числа $\omega \in (0, 1]$, $w = (a_1, a_2, \ldots)$. Его предположением было $P(a_n(\omega) = k) \asymp 1/k^2$, что оказалось уже позднее асимптотически верно

$$P(a_n(\omega) = k) \to (\log 2)^{-1} \log \frac{1 + 1/k}{1 + \frac{1}{k+1}}.$$

Вероятностные модели стали использоваться в классической статистической физике (распределение Максвелла для молекулярных скоростей, раскрытие феномена броуновского движения (1827) Броун, Эйнштейн, Смолуховский).

Построение теории множеств и теории меры Борелем и Лебегом позволили в дальнейшем обрести теорией вероятностей аксиоматическую стройность.

1.5. **Четвертый период (начало XX века).** В 1900 году на 2-м математическом конгрессе в Париже в числе десяти открытых проблем математики Д. Гильберт поставил вопрос об аксиоматизации теории вероятностей.

Эту проблему пытались решить Лаеммель, Финетти, Мизес, Берштейн и другие.

В 1904 Лаеммель сделал попытку построения аксиоматеческой теории, используя для описания множества исходов теорию множеств, но понятие вероятности оставалось на интуитивном уровне.

Другой автор, У. Брогги, в своей диссертации под руководством Гильберта в 1907 году для определения вероятности обратился к теории меры Бореля, Лебега, но с использованием искусственных предельных процедур.

Система аксиом С.Н. Берштейна (1917) была основана на качественном сравнении событий по степени их правдоподобия.

В 1919 Р. Мизес предложил частотный (эмпирический или статистический) подход к обосованию теории вероятностей. В основе его метода лежит рассмотрение *"коллективов"* - бесконечных упорядоченных последовательностей, обладающих свойством *"случайности"* их образования.

Полное решение этой задачи осуществил Колмогоров (1933) на базе теории множеств и теории меры. Основной теоремой аксиоматического построения Колмогорова было утверждение о существовании процессов с заданными конечномерными распределениями.

2. Для чего нужно изучать теорию вероятностей

(1) `Развитие мышления студентов.`

Помогает понять, как применять приемы логического мышления в тех случаях, когда имеем дело с неопределенностью.

Умаляет магический реализм.

Развивает толерантность.

Развивает смелость, поскольку учит воспринимать неудачу всего лишь как случайность и двигаться дальше к намеченной цели.

(2) `Выводы теории вероятностей находят применение в обыденной жизни, науке и технике.`

В повседневности при постоянном столкновении со случайностью учит действовать рационально с учетом риска принятия отдельных решений.

(3) `Важное значение для математического образования.`

Помагает понять взаимосвязь действительности с математическими моделями.

Демонстрирует великолепный математический аппарат по работе со сложными, нелинейными случайными процессами.

3. Аксиоматическое определение вероятности

Определение 3.1. $\mathfrak{U}$ - *алгебра множеств, если* $\emptyset \in \mathfrak{U}$ *и для любых* $A, B \in \mathfrak{U}$

$$A \cap B \in \mathfrak{U},$$
$$A \cup B \in \mathfrak{U},$$
$$A \setminus B \in \mathfrak{U}.$$

С помощью метода математической индукции можно получить обобщение на конечное число

$$A_1, \dots, A_n \in \mathfrak{U}, \ \bigcap_{k=1}^{n} A_k \in \mathfrak{U}, \ \bigcup_{k=1}^{n} A_k \in \mathfrak{U},$$

а также доказать правила де Моргана:

$$\overline{\bigcap_{k=1}^{n} A_k} = \bigcup_{k=1}^{n} \overline{A_k}, \ \overline{\bigcup_{k=1}^{n} A_k} = \bigcap_{k=1}^{n} \overline{A_k}.$$

Определение 3.2. $\mathfrak{A}$ - σ*-алгебра множеств, если* $\mathfrak{A}$ - *алгебра и для любых*

$$A_1, A_2, \ldots \in \mathfrak{A} \ \bigcap_{k=1}^{\infty} A_k \in \mathfrak{A}, \ \bigcup_{k=1}^{\infty} A_k \in \mathfrak{A}.$$

3.1. **Аксиомы вероятности.**

Вероятностное пространство - это тройка объектов (Ω, F, P), для которых справедливы следующие аксиомы.

A1: Ω - множество элементарных исходов.

A2: F – σ-алгебра событий, построенная на множестве элементарных исходов $\Omega \in F$.

A3: $P : F \to [0, 1]$, $P(\Omega) = 1$ - функция множеств.

A4: Аддитивность

$$P(\bigcup_{k=1}^{n} A_k) = \sum_{k=1}^{n} P(A_k), \text{ если } A_i A_j = \emptyset \text{ при } i \neq j.$$

A5: Счетная аддитивность

$$P(\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k) = \sum_{k=1}^{\infty} P(A_k), \text{ если } A_i A_j = \emptyset \text{ при } i \neq j.$$

3.2. **Свойства вероятности.**

B1: О вероятности обратного события $P(\overline{A}) = 1 - P(A)$

Доказательство.

$$A \cup \overline{A} = \Omega, \ A \cap \overline{A} = \emptyset$$

По аксиоме **A4**-аддитивности получаем

$$P(A \cup \overline{A}) = P(A) + P(\overline{A}) = P(\Omega) = 1.$$

□

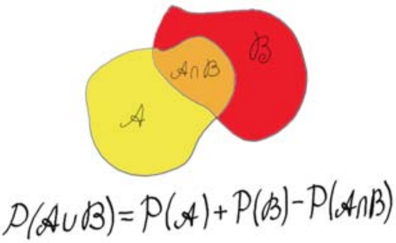
B2: Полуаддитивность

$$P(\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k) \leq \sum_{k=1}^{\infty} P(A_k).$$

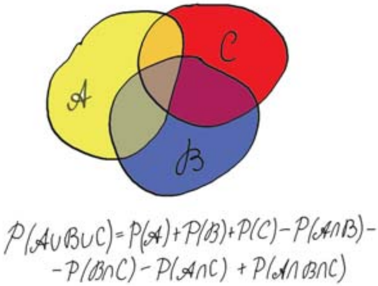
B3: Формула для суммы произвольных событий

$$P(\bigcup_{k=1}^{n} A_k) = \sum_{k=1}^{n} P(A_k) - \sum_{k<i} P(A_k A_i) + \sum_{k<i<j} P(A_k A_i A_j) - (-1)^n P(\bigcap_{k=1}^{n} A_k).$$

Для иллюстрации формулы **B3** рассмотрим задачу о письмах:



$$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)$$



$$P(A\cup B\cup C)=P(A)+P(B)+P(C)-P(A\cap B)-$$
$$-P(B\cap C)-P(A\cap C)+P(A\cap B\cap C)$$

Пример 3.1. *Найти вероятность $P(A)$ того, что из n писем ни одно не попадет своему адресату.*

Существует по крайней мере два решения этой задачи: короткое и длинное. Длинное как раз основано на применении этой формулы.

(1) *Рассмотрим обратное событие: хотя бы кому-то попадет письмо по назначению. Это событие можно представить объединением событий $A_k, k = 1, \ldots, n$, - каким-то k человек пришло письмо по адресу. k человек выбираем C_n^k способами.*

$$\overline{A} = \bigcup_{k=1}^{n} A_k, P(A_k) = \frac{(n-k)!}{n!}.$$

*Но события A_k не дизъюнктны, поэтому нужно применить формулу **B3**:*

$$P(\overline{A}) = P(\bigcup_{k=1}^{n} A_k) = nP(A_1) - C_n^2 P(A_2) + \ldots - (-1)^n P(A_n) =$$

$$1 - 1/2 + 1/3! - \ldots - (-1)^n 1/n! \to 1 - 1/e;$$

$$P(A) \to 1/e, \ n \to \infty.$$

(2) *Каждый не получил свое письмо - произведение n одинаковых множителей. Не получил письмо - обратное событие -получил письмо с вероятностью $P(A_1) = 1/n$.*

$$P(A) = (\overline{P(A_1)})^n = (1 - 1/n)^n \to 1/e, \ n \to \infty.$$

B4: Вероятность P непрерывна как функции множеств.

Определение 3.3. *Функция S множеств непрерывна, если для любой убывающей $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}} \downarrow$, $A_j \subset A_i$, $i < j$ (возрастающей $\{B_n\}_{n\in\mathbb{N}} \uparrow$, $B_i \subset B_j$, $i < j$) последовательности множеств будем иметь*

$$\lim_{n\to\infty} S(A_n) = S(\lim_{n\to\infty} A_n) = S(\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n);$$

$$\lim_{n\to\infty} S(B_n) = S(\lim_{n\to\infty} B_n) = S(\bigcup_{n=1}^{\infty} B_n)$$

Теорема. *Аксиома **A5** счетной аддитивности равносильна свойству **B4** непрерывности вероятности.*

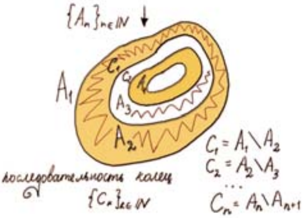
Доказательство. Докажем равносильность этих утверждений. Для доказательства непрерывности достаточно доказать непрерывность в нуле или точнее на пустом множестве.

$\Rightarrow$**:** Возьмем произвольную убывающую последовательность событий $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}} \downarrow$ из σ-алгебры F, такую что $\bigcap_{n=k}^{\infty} A_n = \emptyset$, для любого $k \in \mathbb{N}$ и построим последовательность попарно непересекающихся (несовместных) колец $C_k = A_k \setminus A_{k+1}$.

$$A_1 = \bigcup_{k=1}^{\infty} C_k$$

К последовательности колец можно применить аксиому счетной аддитвности **A5**:

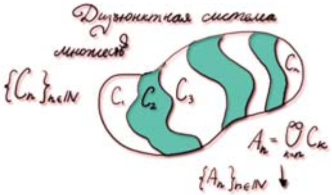
$$1 \geq P(A_1) = \sum_{k=1}^{\infty} P(C_k)$$



Ряд $\sum_{k=1}^{\infty} P(C_k)$ сходится, поскольку вероятность является нормированной мерой. Таким образом, $\sum_{k=n}^{\infty} P(C_k) \to 0$ как остаток сходящегося ряда. Получаем непрерывность вероятности

$$P(A_n) = \sum_{k=n}^{\infty} P(C_k) \to 0 = P(\emptyset) = P(\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n).$$

$\Leftarrow$: Рассмотрим произвольную дизъюнктную систему множеств (попарно непересекающихся) $\{C_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ и построим убывающую последовательность множеств $A_n = \bigcup_{k=n}^{\infty} C_k$. Заметим, что $\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n = \emptyset$.



$$P(\cup_{k=1}^{\infty} C_k) = \sum_{k=1}^{n} P(C_k) + P(\cup_{k=n}^{\infty} C_k) = \sum_{k=1}^{n} P(C_k) + P(A_n);$$

$$P(A_n) \to 0,\ n \to \infty;\ P(\cup_{k=1}^{\infty} C_k) = \sum_{k=1}^{\infty} P(C_k).$$

□

4. Классическое определение вероятности

4.1. Взгляд на классическую вероятность через призму аксиоматического определения. В классической постановке рассматривается вероятностное пространство, состоящее из конечного числа равновероятных исходов. Вероятность определяется как отношение числа благоприятных исходов к числу всех возможных.

$$\Omega = \bigcup_{k=1}^{n} E_k;$$

$$P(\Omega) = 1 = P(\bigcup_{k=1}^{n} E_k) = \sum_{k=1}^{n} P(E_k) = nP(E_1);$$

$$P(E_1) = \frac{1}{n};$$

$$A = \bigcup_{k=1}^{m} E_{i_k},\ P(A) = P(\bigcup_{k=1}^{m} E_{i_k}) = \sum_{k=1}^{m} P(E_{i_k}) = \frac{m}{n}.$$

4.2. Элементы комбинаторики. Рассмотрим различные размещения k частиц по n ячейкам.

	упорядоченные	неупорядоченные
с повторениями	n^k	C_{n+k-1}^k
без повторений	$A_n^k = n!C_n^k$	C_n^k

Вспомним, что $C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}$ - число k-элементных подмножеств из n-элементного множества.

Задачу о неупорядоченном размещении с повторениями можно решать так: поскольку частицы неразличимы, то перестановки можно осуществлять перестановками внутренних границ ячеек. Таким образом, мы либо переставляем $n-1$ палочек (внутренних границ) либо k шариков (частиц), и число перестановок равно C_{n+k-1}^k.

Чтобы бысрее понять эту модель можно рассмотреть такую задачу:

Пример 4.1. *скольким способами можно развесить k разноцветных флагов на n шестов. Решать можно двумя способами.*

(1) *Представим сначала, что флаги одного цвета, тогда это задача о неупорядоченном размещении с повторениями, число способов равно C_{n+k-1}^k. Теперь раскрасим флаги - это можно сделать $k!$ способами. Следовательно, ответ:*

$$k!C_{n+k-1}^k.$$

(2) *Будем рассуждать последовательно: первый флаг можно повесить на n шестов, второй - на n шестов и поменять местами с первым - $n+1$ способов, и так далее, k флаг можем развесить $n+k-1$ способами. Итак, ответ:*

$$n(n+1)\dots(n+k-1) = k!C_{n+k-1}^k.$$

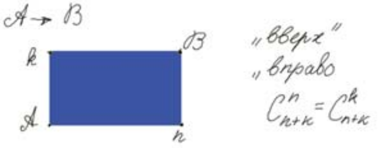
Пример 4.2. *Доказать формулу*

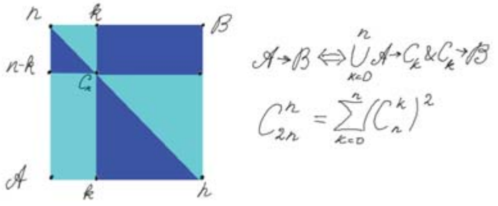
$$\sum_{k=0}^{n}(C_n^k)^2 = C_{2n}^n.$$

Докажем с помощью задачи о числе путей по прямоугольной доске $n \times k$, состоящих из шагов "вверх" или "вправо". Все такие пути будут иметь длину и состоять из последовательности букв "В", "П" - их число равно числу выборов k "В" и n "П" -

$$C_{n+k}^n = C_{n+k}^k.$$

C_{2n}^n *- можно представить как число путей по $n \times n$ квадратной доске. Каждый такой путь в одной из точек (от 0 до n) пересекает диагональ, выходящую из верхнего левого угла. Все пути до и после точки на диагонали $(k, n-k)$ лежат на прямоугольниках $[(o,0),(k,n-k)]$, $[(k,n-k),(n,n)]$. Таким образом, все пути складываются так:*





$$\sum_{k=0}^{n} C_{n-k+k}^k C_{n-k+k}^k = C_{2n}^n.$$

В классической вероятности обычно рассматривают три модели: Максвелла-Больцмана, Бозе-Эйнштейна и Ферми-Дирака.

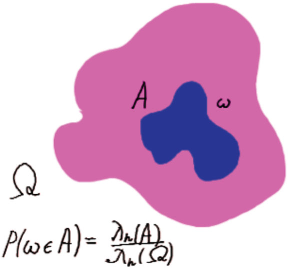
Максвелла-Больцмана	Бозе-Эйнштейна	Ферми-Дирака
все размещения равновозможны и частицы различимы	все размещения равновозможны и частицы неразличимы	не более одной частицы в ячейке
$p = 1/n^k$	$p = 1/C_{k+n-1}^k$	$p = 1/C_n^k$
для сильно разреженных газов	для систем частиц с нулевым или целочисленным спином	для частиц с полуцелым спином

5. Геометрическое определение вероятности

5.1. **Определение.**

Определение 5.1. *Пусть* $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, $n \in \mathbb{N}$, *мы хотим определить вероятность попадания точки в область* $A \subset \Omega$. *Геометрическая вероятность определяется как отношение мер Лебега множества и объемлющего пространства*

$$P(A) = \frac{\lambda_n(A)}{\lambda_n(\Omega)}.$$



Для иллюстрации определния геометрической вероятности рассмотрим несколько задач.

5.2. **Парадокс Бертрана.** Этот парадокс был опубликован в в книге "Исчисление вероятностей"(1889 г.) Жозефом Луи Бертраном.

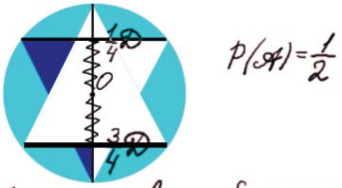
Парадокс 5.1. *Для некоторой окружности случайным образом выбирается хорда. Найти вероятность того, что хорда будет длиннее стороны правильного вписанного треугольника. Суть парадокса в том, что решение задачи неоднозначно: в зависимости от выбора случайной хорды приходим к разным результатам.*

(1) *Случайная хорда выбирается следующим образом: берем произвольный диаметр и рассматриваем все хорды ему перпендикулярные. Подходящие хорды будут пересекать диаметр на отрезке* $[1/4D, 3/4D]$.

Искомая вероятность будет отношением длины этого отрезка к длине диаметра.

$$P(A) = \frac{|[1/4D, 3/4D]|}{D} = 1/2.$$

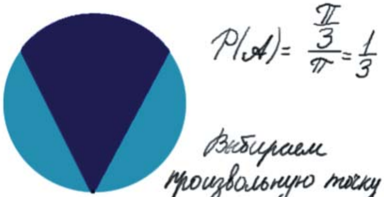
(2) *Выбираем произвольную точку на окружности и рассматриваем все хорды из нее выходящие. Подходящие хорды будут лежать внутри угла от* $\pi/3$ *до* $2/3\pi$. *Искомая вероятность будет отношением меры угла*



берём произвольный диаметр
и рассматриваем все хорды,
ему перпендикулярные

$\pi/3$ *к мере развернутого угла* π.

$$P(A) = \frac{1/3\pi}{\pi} = 1/3.$$

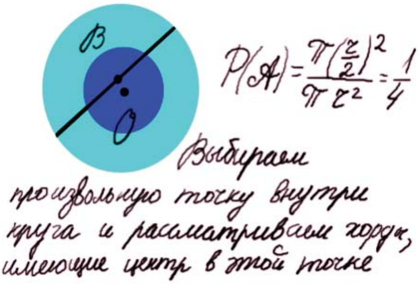


Выбираем
произвольную точку
B на окружности
и рассматриваем все хорды,
из нее выходящие

(3) *Выбираем произвольную точку в круге и рассматриваем хорду, имеющую середину в этой точке. Подходящие хорды будут лежать внутри концентрического круга половинного радиуса. Искомая вероятность находиться как отношение площадей этих кругов.*

$$P(A) = \frac{\pi(r/2)^2}{\pi r^2} = 1/4.$$

Парадокс заключен в фразе "равномерный случайный выбор". *Каждый из трех выборов выглядит по своему* "естественным": *в первом случае равномерно по диаметру (линейный способ), во втором - по окружности (криволинейный способ), третий - в круге (плоскостной способ).*



5.3. **Задача Бюффона.** Жорж Бюффон в работе 1733 года положил новое направление в теории вероятностей, где используется не комбинаторный, а геометрический метод.

Пример 5.1. *Между двух нитей, расположенных на расстоянии $2a$, бросается игла длины $2l$. Какова вероятность того, что игла пересечет одну из нитей?*

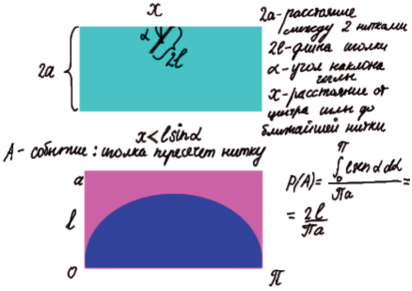
Рассмотрим положение иглы, оно определяется углом наклона по отношению к нити $\alpha \in [0, \pi]$ и расстоянием от центра иглы до нити x. Для того чтобы игла пересекла нить необходимо, чтобы

$$x < l \sin \alpha.$$

Таким образом, получаем

$$P(A) = \frac{\int_0^\pi l \sin \alpha d\alpha}{a\pi} = \frac{2l}{a\pi}.$$

Популярность этой задачи связано с возможностью эксперементального определения величины числа π. Если взять разлинованную бумагу и иглу длины,



равной расстоянию между параллельными прямыми, то число π *может быть оценено как*

$$\frac{2}{\textit{относительная частота пересечений}}.$$

Можно расширить эксперемент и кидать иглу длины l *на клетчатую бумагу с шириной клетки* 1, *тогда число* π *может быть оценено как*

$$\frac{4l}{\textit{относительная частота пересечений клеток}}.$$

6. Условная вероятность. Формула полной вероятности. Формула Байеса. Независимость событий

6.1. **Определение условной вероятности.**

Определение 6.1. *Условной вероятностью события A при условии B называют вероятность равную отношению вероятности одновременного выполнения события A и условия B и вероятности условия B:*

$$P(A|B) = \frac{P(AB)}{P(B)}.$$

Из определения вытекает формула вероятности произведения

$$P(AB) = P(A|B)P(B).$$

6.2. **Формула полной вероятности.**

Определение 6.2. *Совокупность событий $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ (не более чем счетную совокупность) называют полной группой событий, если выполнено следующее:*

$$\Omega = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n;$$
$$A_iA_j = \emptyset,\ i \neq j.$$

Теорема. *Пусть $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ - полная группа событий. Тогда для любого события $B \in F$*

$$P(B) = \sum_{n=1}^{\infty} P(B|A_n)P(A_n)$$

Доказательство. Заметим, что

$$\Omega = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n;\ B = B\Omega = \bigcup_{n=1}^{\infty} BA_n$$

Используя то, что совокупность событий $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ попарно несовместная, а следовательно и $\{BA_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, то по аксиоме счетной аддитивности получим

$$P(B) = \sum_{n=1}^{\infty} P(BA_n)$$

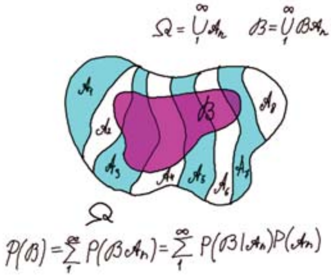
По формуле вероятности произведения получим

$$P(BA_n) = P(B|A_n)P(A_n).$$

Таким образом,

$$P(B) = \sum_{n=1}^{\infty} P(B|A_n)P(A_n)$$

□



6.3. **Формула Байеса.**

Теорема. *Пусть* $\{A_n\}_{n=1,\dots,n}$ *- полная группа событий (гипотез). Тогда вероятность гипотезы* A_k *при условии выполнения события* $B \in F$ *равна*

$$P(A_k|B) = \frac{P(B|A_k)P(A_k)}{\sum_{j=1}^n P(B|A_j)P(A_j)}.$$

Другими словами формула показывает как по априорным вероятностям $P(A_k)$ (до того, как событие B произошло) найти апостериорные вероятности (когда совытие B произошло). Если рассматривать события A_k как причины, то формула Байеса представляет собой теорему о вероятностях причин.

Доказательство. По определению условной вероятности и по формуле вероятности произведения можно написать

$$P(A_k|B) = \frac{P(BA_k)}{P(B)} = \frac{P(B|A_k)P(A_k)}{P(B)}.$$

Применим для вероятности $P(B)$ формулу полной вероятности

$$P(B) = \sum_{j=1}^{n} P(B|A_j)P(A_j).$$

Следовательно,

$$P(A_k|B) = \frac{P(B|A_k)P(A_k)}{\sum_{j=1}^n P(B|A_j)P(A_j)}$$

□

Пример 6.1. *В мешке 3 шарика: 1 белый и 2 черных. В мешок кладем еще 1 шарик и вынимаем 2 шарика. Какова вероятность, что положили белый шарик при условии, что из мешка достали 2 черных?*

$$P(w|bb) = \frac{P(bb|w)P(w)}{P(bb|w)P(w) + P(bb|b)P(b)} = \frac{\frac{1}{2}\frac{1}{2}\frac{1}{3}}{\frac{1}{2}\frac{1}{2}\frac{1}{3} + \frac{3}{4}\frac{2}{3}\frac{1}{2}} = \frac{1}{4}$$

7. Независимость событий

7.1. **Определение.**

Определение 7.1. *События называются независимыми, если выполнено одно из соотношений*

$$P(A|B) = P(A) \ \Leftrightarrow$$
$$P(A|B) = P(A) \ \Leftrightarrow$$
$$P(AB) = P(A)P(B).$$

Пример 7.1. *События достать из колоды 52 карт туза и карту бубновой масти независимы.*

$$P(\textit{туз}) = \frac{1}{13},\ P(\textit{бубновая масть}) = \frac{1}{4},\ P(\textit{бубновый туз}) = \frac{1}{52} = \frac{1}{13}\cdot\frac{1}{4}.$$

7.2. **Определение различных видов независимости для множества событий.**

Определение 7.2. *События* $\{A_k\}_{k=1,\dots,n}$ *называется*

(1) *попарно независимыми, если* A_i, A_j *независимы для любых* $i \neq j$*;*

(2) *независимыми в целом, если*

$$P(\bigcap_{i=1}^{n} A_i) = \prod_{i=1}^{n} P(A_i);$$

(3) *независиммыми в совокупности, если*

$$P(A_iA_j) = P(A_i)P(A_j),\ i \neq j;$$
$$\dots$$
$$P(\bigcap_{i=1}^{n} A_i) = \prod_{i=1}^{n} P(A_i).$$

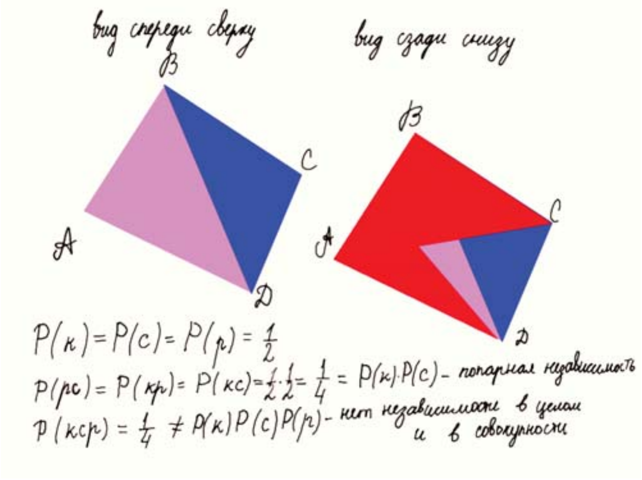
Заметим, что $3 \Rightarrow 1$, $3 \Rightarrow 2$, $1 \not\Leftarrow 2 \not\Rightarrow 3$.

Пример 7.2. *Пример Берштейна. Этот пример показывает, что из попарной независимости не следует независимость в целом и независиммыми в совокупности.*

Пусть у нас есть тетраэдр раскрашеный так: 1 грань - синяя, 2 - красная, 3 - розовая, а 4 - всеми тремя цветами.

Тогда события, что грань - красная, синяя или розовая -попарно независимы, но не независмы в целом и в совокупности.

$$P(Red) = P(Pink) = P(Blue) = \frac{1}{2};$$
$$P(Red\cdot Pink) = P(Blue\cdot Pink) = P(Blue\cdot Red) = \frac{1}{4} = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2};$$
$$P(Red\cdot Pink\cdot Blue) = \frac{1}{4} \neq \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}.$$



Пример 7.3. *Пример из алгебры.*

Пусть $\Omega = \mathbb{N}$, $P(A) = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n}\mathrm{Card}\{A \cap \{1, \ldots, n\}\}$, $A \subset \mathbb{N}$.

Обозначим множество простых чисел $P = \{p_i, i \in \mathbb{N}\}$, $1 = p_1 < p_2 < \ldots < p_i < \ldots$.

По основной теореме арифметики для каждого $m \in \mathbb{N}$ *верно* $m = \prod_{j=1}^{r_m} p_j^{\alpha_{r_m}(m)}$. *Тогда события* $\{\{\alpha_{r_i}(m) = k_i\}\}_{i=1,\ldots,r_m}$ *независимы в совокупности.*

7.3. **Урновая схема Лапласа.** Продемонстрируем в этой схеме использование независимости и формулы Байеса.

Пусть у нас есть $N+1$ урна с k красными шариками и $N-k$ черными.

Наугад выбираем урну.

Какова вероятность $P(A_{r+1}|B_r)$ на $r+1$ раз вытащить красный шарик при условии того, что r раз подряд вытаскивали красный шарик с возвращением.

Рассмотрим гипотезы C_j выбор j-той урны, тогда $P(C_j) = \frac{1}{N+1}$.

Заметим, что $B_j = A_j B_{j-1} = \ldots = \prod_{i=1}^{j} A_i$.

Тогда по определению условной вероятности получим

$$P(A_{r+1}|B_r) = P(A_{r+1}|\prod_{i=1}^{r} A_i) = \frac{P(\prod_{i=1}^{r+1} A_i)}{P(B_r)} = \frac{P(B_{r+1})}{P(B_r)}$$

По формуле полной вероятности

$$P(B_r) = \sum_{i=0}^{N} P(B_r|C_i)P(C_i) = \frac{1}{N+1}\sum_{i=0}^{N} P(B_r|C_i).$$

Поскольку у нас выбор с возвращением, то события $\{A_i\}_{i=1,\dots,r}$ независимы, независимы и события $\{A_i|C_j\}_{i=1,\dots,r}$, $j = 0, \dots, N$. Тогда из независимости получим

$$P(B_r|C_j) = P(\prod_{i=1}^{r} A_i|C_j) = \prod_{i=1}^{r} P(A_i|C_j) = (\frac{j}{N})^r.$$

И, наконец, используя определение интегальных сумм, получим предельное значение вероятности

$$P(A_{r+1}|B_r) = \frac{\sum_{i=0}^{N}(\frac{j}{N})^{r+1}}{\sum_{i=0}^{N}(\frac{j}{N})^{r}} \underset{N\to\infty}{\to} \frac{\int_0^1 x^{r+1}dx}{\int_0^1 x^r dx} = \frac{r+1}{r+2}.$$

8. Случайные элементы и их распределение

Рассмотрим вероятностное пространство (Ω, F, P).

Определение 8.1. *Пусть измеримое пространство* $(\mathfrak{X}, \mathfrak{U})$ *с* σ*-алгеброй* $\mathfrak{U}$ *на* $\mathfrak{X}$. *Случайным элементом, принимающим значения в* $\mathfrak{X}$, *называется измеримое отображение* $\xi : \Omega \to \mathfrak{X}$.

ξ *- измеримо, если* $\forall U \in \mathfrak{U}\ \xi^{-1}(U) \in F$.

Определение 8.2. *Пусть* ξ *- случайный элемент.*

Распределением случайного элемента ξ *называется функция множеств* $\mathcal{P}_\xi(U)$.

$$\mathcal{P}_\xi(U) = P(\omega : \xi(\omega) \in U) = P(\xi^{-1}(U)),\ U \in \mathfrak{U}.$$

Теорема. *Распределением случайного элемента* ξ *есть вероятностная мера на* $(\mathfrak{X}, \mathfrak{U})$. *Верно и обратное: если* $Q : \mathfrak{A}$ *вероятностная мера, то существует* ξ *- есть случайный элемент, такой что* Q *его распределение.*

Доказательство. **⇒:** Докажем сначала, что распределение есть вероятностная мера.

положительная определенность:

$$\mathcal{P}_\xi(U) = P(\xi^{-1}(U)) \geq 0,\ U \in \mathfrak{U};$$

нормируемость:

$$\mathcal{P}_\xi(\mathbb{R}) = P(\omega : \xi(\omega) \in \mathbb{R}) = P(\Omega) = 1;$$

σ-аддитивность:

$$\mathcal{P}_\xi(\bigcup_{n=1}^{\infty} U_n) = P(\omega : \xi(\omega) \in \bigcup_{n=1}^{\infty} U_n) = \sum_{n=1}^{\infty} P(\omega : \xi(\omega) \in U_n) = \sum_{n=1}^{\infty} \mathcal{P}_\xi(U_n),$$
$$U_i U_j = \emptyset,\ i \neq j.$$

⇐: Пусть Q - мера на $\mathfrak{A}$ - σ-алгебре пространства $\mathfrak{X}$. Докажем, что существует $\xi :\ P(\xi \in A) = Q(A)$.

(1) Построим вероятностное пространство.

$$\Omega := \mathfrak{X};\ F := \mathfrak{A};\ P(A) := Q(A).$$

(2) Построим случайный элемент

$$\xi(x) := x,\ x = \omega \in \Omega.$$

Поскольку тождественное преобразование измеримо, то ξ будет случайным элементом.

(3)

$$\mathcal{P}_\xi(A) = P(x : \xi(x) \in A) = Q(x : x \in A) = Q(A), A \in \mathfrak{A}.$$

□

9. Понятие случайной величины

Рассмоирим вероятностное пространство (Ω, F, P).

Определение 9.1. *Определим фунцию $\xi : \Omega \to \mathbb{R}$, которую назовем случайной величиной, если она измерима, то есть прообраз измеримого множества измерим: $\forall B \in \mathfrak{B}\ \xi^{-1}(B) \in F$. Борелевская алгебра $\mathfrak{B}$ порождается σ-пересечением и σ-объединением открытых или замкнутых множеств вещественной оси $\mathbb{R}$.*

Заметим, что для проверки измеримости достаточно проверять на множествах порождающих борелевскую σ-алгебру, то есть достаточно показать, что $\forall x \in \mathbb{R}\ \xi^{-1}((-\infty, x)) \in F$.

Случайная величина порождает $(\mathbb{R}, \mathfrak{B}, \mathcal{P}_\xi)$ - новое вероятностное пространство.

определение:

$$\mathcal{P}_\xi(B) = P(\omega : \xi(\omega) \in B) = P(\xi^{-1}(B)),\ B \in \mathfrak{B};$$

нормируемость:

$$\mathcal{P}_\xi(\mathbb{R}) = P(\omega : \xi(\omega) \in \mathbb{R}) = P(\Omega) = 1;$$

σ-аддитивность:

$$\mathcal{P}_\xi(\bigcup_{n=1}^{\infty} B_n) = P(\omega : \xi(\omega) \in \bigcup_{n=1}^{\infty} B_n) = \sum_{n=1}^{\infty} P(\omega : \xi(\omega) \in B_n) = \sum_{n=1}^{\infty} \mathcal{P}_\xi(B_n),$$
$$B_i B_j = \emptyset,\ i \neq j.$$

Пример 9.1. *Бросание монеты.*

$$\Omega = \{\text{орел}, \text{решка}\}$$
$$\xi(\varpi) = \begin{cases} 0, & \omega = \text{решка;} \\ 1, & \omega = \text{орел.} \end{cases}$$
$$P(\omega : \xi(\omega) = 1) = P(\text{орел}) = p;$$
$$P(\omega : \xi(\omega) = 0) = P(\text{решка}) = 1 - p = q.$$
$$\mathcal{P}_\xi(A) = \begin{cases} p, & 1 \in A; 0 \in \overline{A}; \\ q, & 0 \in A; 1 \in \overline{A}; \\ 0, & 0, 1 \in \overline{A}; \\ 1, & 0, 1 \in A. \end{cases}$$

10. Последовательности независимых испытаний Бернулли

10.1. **Определение независимых испытаний.** Рассмотрим счетное разбиение $\{A_i\}_{i=1}^{\infty}$ пространства Ω.

$$\Omega = \bigoplus_{i=1}^{\infty} A_i, \ P(A_i) = p_i, \ \sum_{i=1}^{\infty} p_i = 1.$$

Назовем испытанием последовательность исходов (событий)

$$\mathfrak{A} = (A_1, A_2, \ldots)$$

и последовательностью испытаний

$$\mathfrak{A}_j = (A_{j_1}, A_{j_2}, \ldots).$$

Последовательность испытаний независимы, если последовательности их исходов независимы.

С независимыми испытаниями можно связать случайные величины:

$$\xi_j(\omega) = \begin{cases} a_1, & \omega \in A_{j_1}; \\ a_2, & \omega \in A_{j_2}; \\ \ldots \end{cases} \qquad A_{j_i} = \{\omega : \xi_j(\omega) = a_i\}.$$

Независимые испытания Бернулли - это последовательность независимых испытаний с двумя исходами

$$\mathfrak{A}_j = (A_{j_1}, A_{j_2}), \ P(A_{j_1}) = p, \ P(A_{j_2}) = 1 - p = q.$$

С независимыми испытаниями Бернулли свяжем следующие случайные величины

$$\xi_j(\omega) = \begin{cases} 0, & \omega = \text{неудача}; \\ 1, & \omega = \text{успех}. \end{cases}$$

Кроме того, нас будет интересовать число успехов из n испытаний

$$\mu_n = \sum_{j=1}^{n} \xi_j.$$

10.2. **Формула Бернулли.**

Теорема. *Вероятность того, что в серии из n независимых испытаний Бернулли число успехов будет равно k вычисляется по следующей формуле*

$$P(\mu_n = k) = C_n^k p^k q^{n-k}$$

Доказательство.

$$P(\mu_n = k) = P(\bigcup_{i_1,\ldots,i_k} \xi_{i_1} = 1, \ldots, \xi_{i_k} = 1, \xi_{i_{k+1}} = 0, \ldots, \xi_{i_n} = 0)$$

$$\underset{\text{независимость}}{=} \sum_{i_1,\ldots,i_k} P(\xi_{i_1} = 1) \ldots P(\xi_{i_k} = 1) P(\xi_{i_{k+1}} = 0) \ldots P(\xi_{i_n} = 0) =$$

$$= \underset{\text{выбор } i_1,\ldots,i_k}{C_n^k} p^k q^{n-k}$$

□

Рассмотрим обобщенные независимые испытания Бернулли

$$\mathfrak{A}_j = (A_{j_1}, \dots, A_{j_k}),\ P(A_{j_i}) = p_i,\ \sum_{i=1}^{k} p_i = 1.$$

Теорема. *Вероятность того, что в серии из $n = n_1 + \ldots + n_k$ независимых обобщенных испытаний Бернулли число выпадений i-того исхода будет равно n_i, вычисляется по следующей формуле*

$$P(\mu_1 = n_1, \dots, \mu_k = n_k) = C_n^{n_1,\dots,n_k} p_1^{n_1} \dots p_k^{n_k} = \frac{n!}{n_1! \dots n_k!} p_1^{n_1} \dots p_k^{n_k}.$$

Пример 10.1. *Пример обощенной схемы Бернулли - случайное симметричное блуждание в* $\mathbb{R}^d$

$\mathbb{R}^1$**:** $p = 1/2$ *- вероятность пойти вправо или влево.*

$\mathbb{R}^2$**:** $p = 1/4$ *- вероятность пойти вправо или влево, вверх или вниз.*

…**:** …

$\mathbb{R}^d$**:** $p = \frac{1}{2d}$ *- вероятность пойти по положительному или отрицательному направлению одной из осей координат.*

Задача: найти вероятность вернуться в положение 0 *за* $2n$ *шагов.*

Для того, чтобы вернуться в первоначальное положение мы должны сделать столько шагов в прямом направлении сколько и в обратном и суммарное число шагов по всем направлениям равнялось $2n = 2n_1 + \ldots + 2n_d$.

$$P(A_{2n}) = \sum_{n_1+\ldots+n_d=n} C_{2n}^{n_1,n_1,\dots,n_d,n_d} (\frac{1}{2d})^{2n} =$$

$$\sum_{n_1+\ldots+n_d=n} \frac{(2n)!}{(n_1!)^2 \dots (n_d!)^2} (\frac{1}{2d})^{2n} = \frac{1}{2^{2n}} C_{2n}^{n} \sum_{n_1+\ldots+n_d=n} (\frac{n!}{(n_1!) \dots (n_d!)} \frac{1}{d^n})^2.$$

Заметим, что

$$\sum_{n_1+\ldots+n_d=n} \frac{n!}{n_1! \dots n_d!} \frac{1}{d^n} = 1, \quad \sum_{n_1+\ldots+n_d=n} (\frac{n!}{n_1! \dots n_d!} \frac{1}{d^n})^2 = O(\frac{n!}{([n/d]!)^d} \frac{1}{d^n}).$$

Используя формулу Стирлига $n! \approx \sqrt{2\pi n} \left(\frac{n}{e}\right)^n$, *получим*

$$\frac{1}{2^{2n}} C_{2n}^{n} = O(1/\sqrt{n});$$

$$O(\frac{\sqrt{2\pi n} \left(\frac{n}{e}\right)^n}{(2\pi n/d)^{d/2} \left(\frac{n}{de}\right)^n} \frac{1}{d^n}) = O(n^{-\frac{d-1}{2}})$$

Таким образом, ряд $\sum_{n=1}^{\infty} P(A_{2n}) = \sum_{n=1}^{\infty} O(n^{-\frac{d}{2}}) < \infty$ *сходится при* $d \geq 3$ *и расходится при* $d = 1$, $d = 2$.

По лемме Бореля-Кантелли 17.1 получаем, что возвращение в начальное положение бесконечное число раз может произойти только в одномерном и двумерном пространстве.

Таким образом, мы доказали теорему Пойя (1921 г.)

Теорема. *В одномерном и двумерном симметричных случайных блужданиях частица с вероятностью 1 рано или поздно возвратится в свое начальное положение. Начиная с размерности 3 это не верно.*

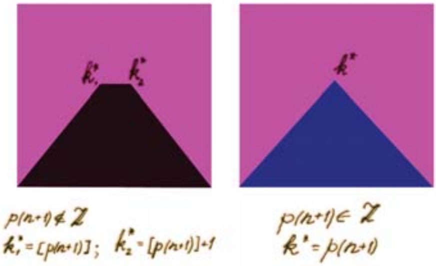
Иными словами, можно сказать, что на плоскости `"все дороги идут в Рим"`.

10.3. О наиболее вероятном числе успехов. Найдем наиболее вероятное число успехов в независимых испытаниях Бернулли. Для этого найдем отношение

$$\frac{P_k}{P_{k+1}} = \frac{P(\mu_n = k)}{P(\mu_n = k+1)} = \frac{C_n^k p^k q^{n-k}}{C_n^{k+1} p^{k+1} q^{n-k-1}} = \frac{q(k+1)}{p(n-k)}.$$

Получаем, что $P_k \uparrow$ при $k < p(n+1)$ и $P_k \downarrow$ при $k > p(n+1)$.

Если $p(n+1) \in \mathbb{Z}$, то существует единственная точка максимума $k^\star = p(n+1)$, если $p(n+1) \subsetneq \mathbb{Z}$, то наибольшее значение вероятности достигается дважды $k_1^\star = p(n+1) - 1$, $k_2^\star = p(n+1)$.



10.4. Локальная теорема Муавра-Лапласа.

Теорема. *Пусть* $\mathfrak{A}_1, \mathfrak{A}_2, \dots$ *независимые испытания Бернулли с вероятностью успеха* p*. Обозначим*

$$x_{n_k} = \frac{k - np}{\sqrt{npq}}.$$

Тогда равномерно по всем k *таким, что* $|x_{n_k}| = O(n^{\frac{1}{6}-\delta})$ *при некотором положительном* $\delta > 0$*, будем иметь*

$$P(\mu_n = k) \underset{n\to\infty}{\sim} \frac{e^{-\frac{x_{n_k}^2}{2}}}{\sqrt{2\pi npq}}.$$

10.5. Интегральная теорема Муавра-Лапласа.

Теорема. *Пусть* $\mathfrak{A}_1, \mathfrak{A}_2, \dots$ *независимые испытания Бернулли с вероятностью успеха* p*.*

Тогда будем иметь

$$\sup_{-\infty \le a \le b \le \infty} |P(a \le \frac{\mu_n - np}{\sqrt{npq}} \le b) - \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_a^b e^{-\frac{x^2}{2}} dx| \underset{n\to\infty}{\to} 0.$$

Если обозначить за $\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{t^2}{2}}dt$ - функцию нормального закона, то можно сказать, что вероятность центрированного и нормированного числа успехов равномерно аппроксимируется нормальным законом.

10.6. Закон больших чисел Бернулли.

Определение 10.1. *Последовательность случайных величин* $\{\xi_n\}_{n=1}^{\infty}$ *сходится к случайной величине* ξ_0 *по вероятности*

$$\xi_n \underset{n\to\infty}{\to} \xi_0 \text{ по вероятности},$$

если для любого $\varepsilon > 0$ *выполнено*

$$P(\omega : |\xi_n - \xi_0| > \varepsilon) \underset{n\to\infty}{\to} 0.$$

Теорема. *Пусть* $\mathfrak{A}_1, \mathfrak{A}_2, \dots$ *независимые испытания Бернулли с вероятностью успеха* p.

Тогда

$$\frac{\mu_n}{n} \underset{n\to\infty}{\to} p \text{ по вероятности.}$$

Доказательство.

$$P(\omega : |\frac{\mu_n}{n} - p| > \varepsilon) \underset{n\to\infty}{\to} 0 \Leftrightarrow$$
$$P(\omega : |\frac{\mu_n}{n} - p| \le \varepsilon) \underset{n\to\infty}{\to} 1 \Leftrightarrow$$
$$P(\omega : |\frac{\mu_n - pn}{\sqrt{npq}}| \le \varepsilon\sqrt{\frac{n}{pq}}) \underset{n\to\infty}{\to} 1 \Leftrightarrow$$

по интегральной теореме Муавра-Лапласа

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\varepsilon\sqrt{\frac{n}{pq}}}^{\varepsilon\sqrt{\frac{n}{pq}}} e^{-\frac{t^2}{2}}dt \underset{n\to\infty}{\to} 1.$$

□

10.7. Теорема Пуассона.

Теорема. *Пусть*

$\mathfrak{A}_{11}$	*с вероятностью успеха* p_1
$\mathfrak{A}_{21},\ \mathfrak{A}_{22}$	*с вероятностью успеха* p_2
$\dots\ \dots\ \dots$	
$\mathfrak{A}_{n1},\ \mathfrak{A}_{n2},\ \dots\ \mathfrak{A}_{nn}$	*с вероятностью успеха* p_n

последовательность серий независимых испытаний Бернулли.

Тогда

$$P(\mu_n = k) \underset{n\to\infty}{\sim} \frac{\lambda_n^k}{k!}e^{-\lambda_n}, \quad \text{где } \lambda_n = np_n.$$

Доказательство. Для начала проведем предварительные преобразования

$$P(\mu_n = k) = C_n^k p_n^k (1-p_n)^{n-k} =$$
$$\frac{n(n-1)\dots(n-k+1)}{k!}(\frac{\lambda_n}{n})^k(1-\frac{\lambda_n}{n})^{n-k} =$$
$$\frac{(1-\frac{1}{n})\dots(1-\frac{k-1}{n})}{k!}(\lambda_n)^k(1-\frac{\lambda_n}{n})^{n-k}.$$

Обозначим

$$\Delta_n = |P(\mu_n = k) - \frac{\lambda_n^k}{k!}e^{-\lambda_n}|$$

Заметим, что

$$\Delta_n = |\frac{(1-\frac{1}{n})\dots(1-\frac{k-1}{n})}{k!}(\lambda_n)^k(1-\frac{\lambda_n}{n})^{n-k} - \frac{\lambda_n^k}{k!}e^{-\lambda_n}| =$$
$$\frac{\lambda_n^k}{k!}|(1-\frac{1}{n})\dots(1-\frac{k-1}{n})(1-\frac{\lambda_n}{n})^{n-k} - e^{-\lambda_n}|$$

Для дальнейших действий воспользуемся фактами из математического анализа:

(1) $1-\lambda \le e^{-\lambda}$;
(2) $(1-\frac{\lambda}{n})^n \underset{n\to\infty}{\to} e^{-\lambda}$ для $|\lambda| < A$;
(3) для любого натурального $k : \lambda^k e^{-\lambda} \underset{\lambda\to\infty}{\to} 0$

Пусть k фиксировано. Выберем произвольное $\varepsilon > 0$, тогда можно выбрать A настолько большим, что при $\lambda > A$ было

$$\frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda/2} < \varepsilon/2.$$

Рассмотрим те n, для которых $\lambda_n > A$: Не умаляя общности, можем взять $k < n/2$, а значит $n-k > n/2$.

Тогда

$$\Delta_n \le \frac{\lambda_n^k}{k!}(1-\frac{1}{n})\dots(1-\frac{k-1}{n})(1-\frac{\lambda_n}{n})^{n/2} + \frac{\lambda_n^k}{k!}e^{-\lambda_n} \le$$
$$\frac{\lambda_n^k}{k!}e^{-\lambda_n/2} + \frac{\lambda_n^k}{k!}e^{-\lambda_n} < \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon.$$

Рассмотрим те n, для которых $\lambda_n < A$: Заметим, что

$$\frac{(1-\frac{1}{n})\dots(1-\frac{k-1}{n})}{(1-\frac{\lambda_n}{n})^k} \to 1,\ n\to\infty.$$

Тогда

$$\Delta_n = \frac{\lambda_n^k}{k!}|\frac{(1-\frac{1}{n})\dots(1-\frac{k-1}{n})}{(1-\frac{\lambda_n}{n})^k}(1-\frac{\lambda_n}{n})^n - e^{-\lambda_n}| < \varepsilon.$$

Таким образом,

$$\Delta_n \underset{n\to\infty}{\to} 0.$$

□

11. Функция распределения случайной величины

11.1. Определение функции распределения случайной величины.

Определение 11.1. *Пусть ξ - случайная величина. Функцией распределения случайной величины ξ назовем F_ξ*

$$F_\xi(x) = P(\omega : \xi(\omega) < x) = \mathcal{P}_\xi((-\infty, x)).$$

11.2. Свойства функции распределения случайной величины.

(1)

$$F_\xi(a) - F_\xi(b) = P(\omega : b \leq \xi(\omega) < a)$$

Доказательство.

$$F_\xi(a) = P(\xi < a) = P(\{\omega : \xi(\omega) < b\} \cup \{\omega : b \leq \xi(\omega) < a\}) = F_\xi(b) + P(b \leq \xi < a).$$

□

(2) F_ξ монотонно не убывает.

Доказательство. Пусть $b \leq a$, тогда

$$F_\xi(a) - F_\xi(b) = P(\omega : b \leq \xi(\omega) < a) \geq 0.$$

□

(3) Функция распределения не имеет разрывов второго рода. Все разрывы являются скачками и их не более, чем счетное число.

(4) Функция распределения непрерывна слева.

Доказательство. Пусть $x_n \uparrow x$, тогда докажем, что $F_\xi(x_n) \to F_\xi(x)$.

Рассмотрим события $A_n = \{\omega : \xi(\omega) < x_n\}$, $A = \{\omega : \xi(\omega) < x\}$, $A_n \subset A_{n+1}$ - возрастающая последовательность множеств и $A = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$.

Тогда по непрерывности вероятности получим

$$F_\xi(x_n) = P(A_n) \underset{x_n \uparrow x}{\to} P(A) = F_\xi(x).$$

□

(5)

$$\exists \lim_{x \to \infty} F_\xi(x) = 1; \quad \exists \lim_{x \to -\infty} F_\xi(x) = 0.$$

Доказательство. Пусть $x_n \uparrow \infty$, $y_n \downarrow -\infty$.

Рассмотрим события

$$A_n = \{\omega : \xi(\omega) < x_n\},\ B_n = \{\omega : \xi(\omega) < y_n\},$$

$A_n \subset A_{n+1}$ - возрастающая последовательность множеств,
$B_n \supset B_{n+1}$ - убывающая последовательность множеств и

$$\{\omega : \xi(\omega) \in \mathbb{R}\} = \Omega = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n,\ \emptyset = \bigcap_{n=1}^{\infty} B_n.$$

Тогда по непрерывности вероятности получим

$$F_\xi(x_n) = P(A_n) \underset{x_n \uparrow \infty}{\to} P(\Omega) = \mathcal{P}_\xi(\mathbb{R}) = 1.$$

$$F_\xi(y_n) = P(B_n) \underset{x_n \downarrow -\infty}{\rightarrow} P(\emptyset) = 0.$$

□

Теорема. *Функции распределения F_ξ и распределение $\mathcal{P}_\xi$ случайной величины взаимно определяют друг друга.*

Доказательство. $\Rightarrow$:

$$F_\xi(x) = \mathcal{P}_\xi((-\infty, x)).$$

$\Leftarrow$: Поскольку мера на Борелевской σ-алгебре определяется на полуоткрытых множествах, достаточно задать

$$\mathcal{P}_\xi([a, b)) = F(b) - F(a).$$

□

Теорема. *Совокупность всех монотонных непрерывных слева функций с такими значениями на бесконечности*

$$\lim_{x\to\infty} F_\xi(x) = 1; \quad \lim_{x\to-\infty} F_\xi(x) = 0$$

совпадает с совокупностью всех функций распределения.

Доказательство. $\Rightarrow$: Следует из свойств функций распределения.

$\Leftarrow$: Для каждой F построим вероятностное пространство (Ω, F, P), чтобы $P(\omega : \xi\omega < x) = F(x)$. Пусть $\Omega = [0, 1]$, рассмотрим случайную величину η, имеющую равномерное распределение на $[0, 1]$, то есть

$$F_\eta(x) = \begin{cases} 0, & x \le 0; \\ x, & x \in (0, 1]; \\ 1, & x > 1. \end{cases}$$

Определим обобщенную обратную функцию

$$F^\star(y) = \sup\{x : F(x) = y\}.$$

Рассмотрим случайную величину

$$\xi(\omega) = F^\star(\eta(\omega)).$$

Тогда

$$P(\omega : \xi(\omega) < x) = P(\omega : F^\star(\eta(\omega)) < x) =$$
$$P(\omega : \eta(\omega) < F(x)) = F_\eta(F(x)) = F(x).$$

□

12. Различные виды случайных величин

Случайные величины можно разделить на два типа `дискретные` и `непрерывные` (если непрерывна функция распределения), а непрерывные на `абсолютно непрерывные` (если существует плотность) и `сингулярные`.

12.1. Дискретные распределения.

Определение 12.1. *Пусть ξ - случайная величина. ξ имеет* `дискретное распределение`, *если существует не более чем счетное множество значений $A \subset \mathbb{R}$, которое принимается с вероятностью 1*

$$P(\omega : \xi(\omega) \in A) = 1.$$

Распределение дискретной случайной величины назовем набор чисел

$$p_k = P(\omega : \xi(\omega) = a_k),\ \ A = \{a_k\}_{k \in \mathbb{N}}.$$

Другими словами, можно сказать так

$$\xi(\omega) = \sum_{k \in \mathbb{N}} a_k I_{A_k}(\omega),\ \ \Omega = \bigoplus_{k \in \mathbb{N}} A_k,\ \ A_k = \{\omega : \xi(\omega) = a_k\},$$

где $I_{A_k}(\omega)$ - характерестическая функция множества, равна 1 на множестве и 0 вне его. Если сумма конечна, то такие случайные величины называются простыми.

Заметим, что для любого $B \in \mathfrak{B}$ будет выполнено

$$\mathcal{P}_\xi(B) = P(\omega : \xi(\omega) \in B) = \sum_{k : a_k \in B} p_k.$$

Функция распределения для дискретной случайной величины выражается так:

$$F_\xi(x) = P(\omega : \xi(\omega) < x) = \sum_{k : a_k < x} p_k.$$

$$p_k = P(\omega : \xi(\omega) = a_k) = F_\xi(a_k + 0) - F_\xi(a_k - 0);$$

$$\sum_k p_k = P(\omega : \xi(\omega) \in A) = 1.$$

Пример 12.1. *Распределение Бернулли $\xi \in B(p)$.*

$$\xi(\omega) = \begin{cases} 1; & \omega = \textit{успех;} \\ 0. & \omega = \textit{неудача.} \end{cases}$$

$$P(\omega : \xi(\omega) = 1) = p,\ \ P(\omega : \xi(\omega) = 0) = 1 - p = q.$$

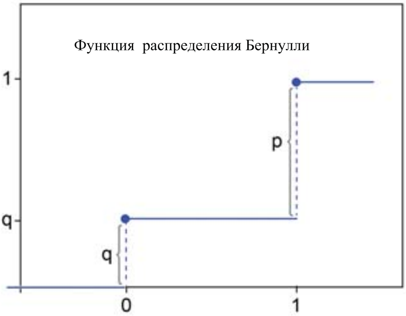
График функции распределения можно увидеть на рисунке 12.1

Пример 12.2. *Биномиальное распределение $\mu_n \in B_n(p)$.*

$$\mu_n = \sum_{i=1}^{n} \xi_i,\ \ \xi_i \in B(p).$$

Ряд распределения вероятностей и функция распределения выглядит так:

$$p_k = P(\omega : \mu_n(\omega) = k) = C_n^k p^k q^{n-k};\ F_{\mu_n}(x) = \sum_{k : k < x} C_n^k p^k q^{n-k}.$$



Пример 12.3. *Геометрическое распределение* $\xi \in G(p)$.

$P(\xi(\omega) \in \{1, 2, \ldots\}) = 1$.

$\xi = k$ *- это означает, что в серии испытаний Бернулли с 1 по* $k-1$ *шаг были неудачи, а на* k *выпала удача.*

Ряд распределения вероятностей и функция распределения выглядит так:

$$p_k = P(\omega :\ \xi(\omega) = k) = q^{k-1}p;\ F_\xi(x) = \sum_{k:k<x} q^{k-1}p.$$

Пример 12.4. *Распределение Пуассона* $\mu \in \Pi(\lambda)$.

$$P(\mu(\omega) \in \{0, 1, 2, \ldots\}) = 1.$$

Ряд распределения вероятностей и функция распределения выглядит так:

$$p_k = P(\omega : \mu(\omega) = k) = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda};\ F_\mu(x) = \sum_{k:k<x} \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}.$$

12.2. Абсолютно непрерывные распределения.

Определение 12.2. *Пусть ξ - случайная величина. ξ имеет* ***абсолютно непрерывное распределение****, если существует измеримая функция p, такая что*

$$\mathcal{P}_\xi(A) = \int_A p(x)dx,\ A \in \mathfrak{B},$$

$$\text{(это означает, что}\ \ p(x) = \frac{d\mathcal{P}_\xi}{d\lambda},\ \text{где } \lambda \text{ - лебеговская мера).}$$

p - назовем плотностью распределения случайной величины ξ.

Свойство 12.1.

$$\int_{\mathbb{R}} p(x)dx = 1$$

Доказательство.

$$1 = \mathcal{P}(\mathbb{R}) = P(\omega : \xi(\omega) \in \mathbb{R}) = \int_{\mathbb{R}} p(x)dx$$

□

Свойство 12.2.

$$p(x) \geq 0 \text{ для почти всех } x.$$

Доказательство. Пусть $A = \{x : p(x) < 0\}$.

Тогда

$$0 \leq P(\omega : \xi(\omega) \in A) = \mathcal{P}_\xi(A) = \int_A p(x)dx \leq 0.$$

Следоваательно, $\lambda(A) = 0$. □

Свойство 12.3. *Пусть $\mathcal{Q}(A) = \int_A p(x)dx$, тогда $\mathcal{Q}$ - вероятностная мера на прямой $Q : \mathfrak{B} \to [0, 1]$.*

Другими словами, существует случайная величина ξ, такая что

$$\mathcal{P}_\xi(A) = \mathcal{Q}(A) = \int_A p(x)dx,\ A \in \mathfrak{B}.$$

То есть дя любой неотрицательной измеримой функции, интеграл от которой по всей оси равен 1, существует случайная величина, имеющая такую плотность.

Свойство 12.4. *Распределение и плотность взаимно определяют друг друга для абсолютно непрерывных распределенных случайных величин.*

Доказательство. **$\Rightarrow$:**

$$\mathcal{P}_\xi(A) = \int_A p(x)dx,\ A \in \mathfrak{B}.$$

$\Leftarrow$: Пусть расределению $\mathcal{P}$ соответствуют две плотности p, q и пусть $A = \{x : p(x) > q(x)\}$, тогда

$$\mathcal{P}_\xi(A) = \int_A p(x)dx = \int_A q(x)dx.$$

Следовательно,

$$0 = \int_A (p(x) - q(x))dx \ \Rightarrow \ p(x) = q(x) \text{ почти всюду.}$$

□

Пример 12.5. *Равномерное распределение* $\xi \in U([a,b])$.

$$p_\xi(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a}; & x \in [a,b]; \\ 0. & x \not\subseteq [a,b]. \end{cases}$$

График плотности можно увидеть на рисунке 12.5

$$F_\xi(x) = \begin{cases} 0; & x < a; \\ \frac{x-a}{b-a}; & x \in [a,b]; \\ 1. & x > b. \end{cases}$$

График функции распределения можно увидеть на рисунке 12.5

Пример 12.6. *Нормальное распределение* $\xi \in N(a,\sigma)$.

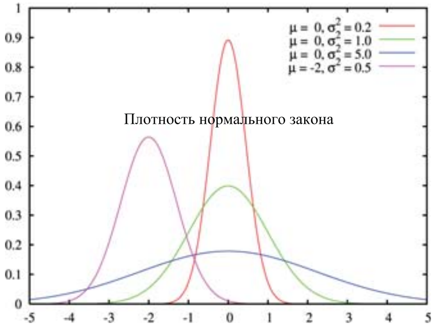
$$p_\xi(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp(-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}), \ a \in \mathbb{R}, \sigma > 0.$$

График плотности можно увидеть на рисунке 12.6

$$F_\xi(t) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{t} \exp(-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}).$$

График функции распределения можно увидеть на рисунке 12.6


Функция равномерного распределения
1.0
0.8
0.6
0.4
0.2
0.0
a
b

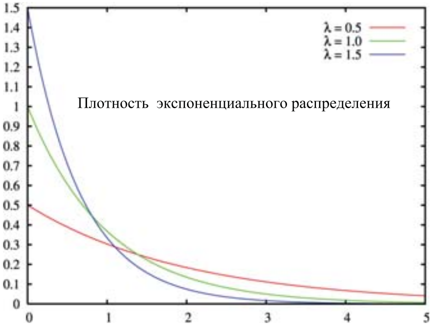

Плотность нормального закона
μ = 0, σ² = 0.2
μ = 0, σ² = 1.0
μ = 0, σ² = 5.0
μ = -2, σ² = 0.5
1
0.9
0.8
0.7
0.6
0.5
0.4
0.3
0.2
0.1
0
-5
-4
-3
-2
-1
0
1
2
3
4
5


Функция распределения нормального закона
μ = 0, σ² = 0.2
μ = 0, σ² = 1.0
μ = 0, σ² = 5.0
μ = -2, σ² = 0.5
1
0.9
0.8
0.7
0.6
0.5
0.4
0.3
0.2
0.1
0
-5
-4
-3
-2
-1
0
1
2
3
4
5

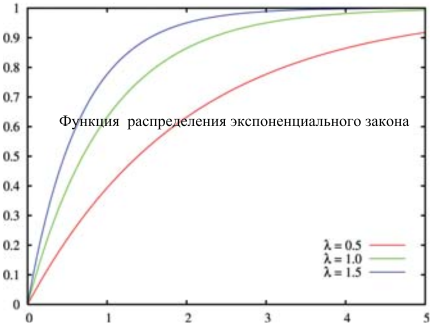
Пример 12.7. *Экспоненциальное распределение* $\xi \in \mathcal{E}(\lambda)$.

$$p_\xi(x) = \begin{cases} 0, & x < 0; \\ \lambda e^{-\lambda x}, & x \geq 0. \end{cases}$$

График плотности можно увидеть на рисунке 12.7



$$F_\xi(t) = \begin{cases} \int_0^t \lambda e^{-\lambda x} dx = 1 - e^{-\lambda x}, & x > 0, \\ 0, & x < 0. \end{cases}.$$



12.3. Сингулярные распределения.

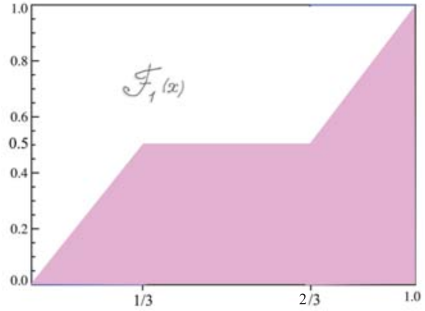
Определение 12.3. ***Точками роста*** *функции* F *называются точки* $x: \ F(x+\varepsilon) - F(x-\varepsilon) > 0$ *для любого* $\varepsilon > 0$.

Определение 12.4. *Распределение, которое имеет непрерывную функцию распределения, но множество точек роста которой имеет нулевую меру Лебега, называтся* ***сингулярным***.

Пример 12.8. *Лестница Кантора. Построим канторову лестницу с помощью последовательного построения функций* $\{F_n\}_{n\in\mathbb{N}}$

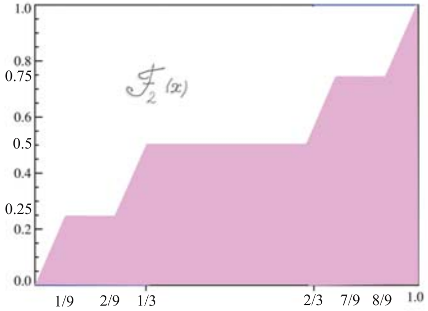
$$F_1 = \begin{cases} 1/2, & x \in [1/3, 2/3]; \\ 0, & x = 0; \\ 1, & x = 1. \end{cases}$$

В остальных точках доопределяем с помощью линейной интерполяции.



$$F_1 = \begin{cases} 1/2, & x \in [1/3, 2/3]; \\ 1/4, & x \in [1/9, 2/9]; \\ 3/4, & x \in [7/9, 4/9]; \\ 0, & x = 0; \\ 1, & x = 1. \end{cases}$$

В остальных точках доопределяем с помощью линейной интерполяции.



$$F_n(x) \to F(x),\ n \to \infty, x \in [0, 1].$$

$F(x)$ - канторова лестница - неубывающая непрерывная функция, точки роста которой образуют множество $\mathcal{N}$ лебеговой меры 0. Действительно, суммарная длина отрезков постоянства равна 1:

$$1/3+2/9+4/27+\ldots=\frac{1}{3}\sum_{n=0}^{\infty}(\frac{2}{3})^n=1.$$

Таким образом, $\lambda(\mathcal{N})=0$, но с другой стороны, если μ - мера, порожденная случайной величиной, соответствующей канторовой функции распределения, то $\mu(\mathcal{N})=1$. В этом случае говорят, что мера μ сингулярна относительно лебеговской меры λ.

Любая функция распределения может быть представлена в следующем виде:

$$F(x)=\alpha F_1(x)+\beta F_2(x)+\gamma F_3(x),\ \alpha,\beta,\gamma\geq 0,\ \alpha+\beta+\gamma=1,$$

где $F_1(x)$ - `дискретная`, $F_2(x)$ - `абсолютно непрерывная` и $F_3(x)$ - `сингулярная`.

13. Случайные векторы и их распределения в $\mathbb{R}^n$

Пусть у нас есть вероятностное пространство (Ω, F, P), рассмотрим случайный вектор - упорядоченный набор случайных величин

$$\overrightarrow{\xi}(\omega) = (\xi_1(\omega), \dots, \xi_n(\omega),\ n \in \mathbb{N}).$$

Иными словами, $\overrightarrow{\xi} : \Omega \to \mathbb{R}^n$ измеримая относительно Борелевской σ-алгебры $\mathfrak{B}^n$ функция.

Распределение случайного вектора будет выглядеть так

$$\mathcal{P}_{\overrightarrow{\xi}}(A) = P(\omega : \overrightarrow{\xi}(\omega) \in A),\ A \in \mathfrak{B}^n,$$

функцией распределения случайного вектора назовем

$$F_{\overrightarrow{\xi}}(x_1, \dots, x_n) = \mathcal{P}_{\overrightarrow{\xi}}((-\infty, x_1), \dots, (-\infty, x_1)) = \mathcal{P}_{\overrightarrow{\xi}}((-\infty, x));$$
$$x = (x_1, \dots, x_n),\ (-\infty, x) = (-\infty, x_1) \times \ldots \times (-\infty, x_n).$$

Свойства функции распределения случайного вектора

Свойство 13.1. *$F_{\overrightarrow{\xi}}$ возрастает по всем аргументам x_i, $i = 1, \dots, n$.*

Свойство 13.2. $F_{\overrightarrow{\xi}}(\infty, \dots, \infty) = 1$

Свойство 13.3. *$F_{\overrightarrow{\xi}}(x_1, \dots, x_n) = 0$, если $\min\limits_{i=1,\dots,n} x_i = -\infty$.*

Свойство 13.4. *Пусть $J = [a, b) = [a_1, b_1) \times \ldots \times [a_n, b_n)$, тогда*

$$P(\overrightarrow{\xi} \in J) = \mathcal{P}_{\overrightarrow{\xi}}(J) =$$
$$F_{\overrightarrow{\xi}}(b_1, \dots, b_n) - \sum_{1 \le i \le n} F_{\overrightarrow{\xi}}(b_1, \dots, a_i, \dots, b_n) +$$
$$+ \sum_{1 \le i \le j \le n} F_{\overrightarrow{\xi}}(b_1, \dots, a_i, \dots, \dots, a_j, \dots, \dots, b_n) -$$
$$- \ldots + (-1)^n F_{\overrightarrow{\xi}}(a_1, \dots, a_n)$$

Определение 13.1. *Пусть $\overrightarrow{\xi}$ - случайный вектор. $\overrightarrow{\xi}$ имеет **дискретное распределение**, если существует не более чем счетное множество значений $A \subset \mathbb{R}^n$, которое он принимает с вероятностью 1*

$$P(\omega : \overrightarrow{\xi}(\omega) \in A) = 1.$$

Распределение дискретного случайного вектора назовем набор чисел

$$p_{k,l} = P(\omega : \xi(\omega)_l = a_{k,l}),\ A = \{a_{k,l}\}_{k \in \mathbb{N}}, l \in \{1, \dots, n\}.$$

Определение 13.2. *Пусть $\overrightarrow{\xi}$ - случайный вектор. $\overrightarrow{\xi}$ имеет **абсолютно непрерывное распределение**, если существует измеримая функция p, такая что*

$$\mathcal{P}_{\overrightarrow{\xi}}(A) = \int_A p(x)dx,\ A \in \mathfrak{B}^n,$$

(это означает, что $p(x) = \dfrac{d\mathcal{P}_\xi}{d\lambda_n}$, *где λ_n - лебеговская мера в $\mathbb{R}^n$).*

p - назовем плотностью распределения случайного вектора $\overrightarrow{\xi}$.

Теорема. *Распределение любого подвектора* $\overrightarrow{\xi}_d = (\xi_{i_1}, \ldots, \xi_{i_d})$ *полностью определяется вектором* $\overrightarrow{\xi}$

Замечание 13.1. *Обратное не верно: случайный вектор не определяется заданием распределений всех его подвекторов.*

Теорема. *Пусть случайный вектор имеет абсолютно непрерывное распределение, тогда все его подвектора будут иметь абсолютно непрерывное распределение.*

Доказательство. Рассмотрим распределение подвектора $\overrightarrow{\xi}_d = (\xi_{i_1}, \ldots, \xi_{i_d})$ Пусть $A \in \mathfrak{B}^n$, тогда

$$P(\omega : (\xi_{i_1}(\omega), \ldots, \xi_{i_d}(\omega) \in A) =$$
$$P(\omega : (\xi_{i_1}(\omega), \ldots, \xi_{i_d}(\omega)) \in A,\ (\xi_{i_{d+1}}(\omega), \ldots, \xi_{i_n}(\omega)) \in \mathbb{R}^{n-d}) =$$
$$\int_{A\times\mathbb{R}^{n-d}} p(x)dx = \int_A [\int_{\mathbb{R}^{n-d}} \ldots] p(x) dx_1 \ldots dx_n =$$
$$\int_A p_{\xi_{i_1},\ldots,\xi_{i_d}}(x_{i_1}, \ldots, x_{i_d}) dx_{i_1} \ldots dx_{i_d}$$

□

14. Независимость случайных величин

Определение 14.1. *Случайные величины $\xi_1, \ldots, \xi_n$ со значениями в измеримых пространствах $(\mathfrak{X}_1, \mathfrak{A}_1), \ldots, (\mathfrak{X}_n, \mathfrak{A}_n)$ $A_1 \in \mathfrak{A}_1, \ldots, A_n \in \mathfrak{A}_n$ называются* ***независимыми****, если выполнено*

$$P(\xi_1 \in A_1, \ldots, \xi_n \in A_n) = \prod_{k=1}^{n} P(\xi_k \in A_k).$$

Дадим еще несколько равносильных определений.

Определение 14.2. *Рассмотрим случайный вектор $\overrightarrow{\xi} = (\xi_1, \ldots, \xi_n)$ со значениями в измеримом пространстве $(\mathfrak{X}_1 \times \ldots \times \mathfrak{X}_n, \mathfrak{A}_1 \times \ldots \times \mathfrak{A}_n)$ $A_1 \in \mathfrak{A}_1, \ldots, A_n \in \mathfrak{A}_n$.*

- *Случайные величины $\xi_1, \ldots, \xi_n$ называются* ***независимыми****, если выполнено*

$$\mathcal{P}_{\overrightarrow{\xi}}(A_1 \times \ldots \times A_n) = \prod_{k=1}^{n} \mathcal{P}_{\xi_k}(A_k).$$

- *Случайные величины $\xi_1, \ldots, \xi_n$ называются* ***независимыми****, если мера $\mathcal{P}_{\overrightarrow{\xi}}$ равна декартову произведению мер*

$$\mathcal{P}_{\overrightarrow{\xi}} = \bigotimes_{k=1}^{n} \mathcal{P}_{\xi_k}.$$

- *Случайные величины $\xi_1, \ldots, \xi_n$ называются* ***независимыми****, если выполнено*

$$F_{\overrightarrow{\xi}}(x_1, \ldots, x_n) = \prod_{k=1}^{n} F_{\xi_k}(x).$$

Теорема. *Если случайные величины* ***независимы*** *и имеют абсолютно непрерывное распределение, то*

$$p_{\overrightarrow{\xi}}(x_1, \ldots, x_n) = \prod_{k=1}^{n} p_{\xi_k}(x). \tag{1}$$

И обратно, если случайный вектор $\overrightarrow{\xi} = (\xi_1, \ldots, \xi_n)$ имеет абсолютно непрерывное распределение и выполнено равенство 1, то случайные величины $\xi_1, \ldots, \xi_n$ ***независимы****.*

15. ИНТЕГРАЛ ЛЕБЕГА, ЛЕБЕГА-СТИЛТЬЕСА, РИМАНА-СТИТЬЕСА. МАТЕМАТИЧЕСКОЕ ОЖИДАНИЕ. ПОНЯТИЕ СВЕРТКИ.

Существуют по крайней мере два подхода к определению интеграла Стилтьеса:

R-S: Римана-Стилтьеса строится на основе близости точек на оси, конечен для не слишком разрывных функций.

L-S: Лебега-Стилтьеса на основе группировки значений интегрируемых функций, сходится для более широкого класса функций.

15.1. Интеграл Лебега, Лебега-Стилтьеса.

Определение 15.1 (L). *Пусть ξ - неотрицательная случайная величина.*

Построим последовательность простых неотрицательных $\{\xi_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ случайных величин

$$\xi_n(\omega) = \sum_{k=1}^{l_n} x_k I_{A_k}(\omega)$$

и определим для них математическое ожидание как

$$E\xi_n = \sum_{k=1}^{l_n} x_k P(A_k)$$

и предположим, что $\xi_n(\omega) \uparrow \xi(\omega)$, $n \to \infty$ для каждого $\omega \in \Omega$. Тогда ***математическим ожиданием*** *неотрицательной случайной величины или* ***интегралом Лебега*** *назовем величину*

$$E\xi = \lim_{n\to\infty} E\xi_n.$$

Для того, чтобы определение было корректно необходимо показать, что значение предела не зависит от выбора аппроксимирующей последовательности.

Заметим, что для неотрицательной случайной величины будет справедливо следующее представление

$$E\xi = \sup_{s\in S: s<\xi} Es,$$

где $S = \{s\}$ - множество простых неотрицательных случайных величин.

Определение 15.2 (L). *Пусть ξ - случайная величина, обозначим*

$$\xi^+ = \max(0,\xi),\ \ \xi^- = -\min(0,\xi).$$

Математическое ожидание *случайной величины ξ или* ***интеграл Лебега*** *от функции по вероятностной мере существует, если по крайней мере одна из величин $E\xi^+$ или $E\xi^-$ конечна:*

$$min(E\xi^+, E\xi^-) < \infty$$

и полагают

$$E\xi = E\xi^+ - E\xi^-.$$

Математическое ожидание конечно, если

$$E|\xi| < \infty.$$

$$(L)\int_\Omega \xi(\omega) dP(\omega) = E\xi.$$

Определение 15.3 (L-S). *Рассмотрим вероятностное пространство*

$$(\Omega, F) = (\mathbb{R}, \mathfrak{B}(\mathbb{R})).$$

Пусть G - обобщенная функция распределения (неубывающая, непрерывная слева функция со значениями в $(-\infty, \infty)$). Тогда ей соответствует некоторая мера Лебега μ.

Итегралом Лебега-Стилтьеса называют

$$(L-S)\int_{\mathbb{R}} \xi(x)dG(x) = \int_{\mathbb{R}} \xi(x)d\mu(x)$$

15.2. **Интеграл Римана-Стилтьеса.**

Определение 15.4 (R-S). *Пусть G - обобщенная функция распределения (неубывающая, непрерывная слева функция со значениями в $(-\infty, \infty)$). Пусть g - ограниченная функция, обращающаяся в нуль вне отрезка $[a, b]$. Рассмотрим разбиение отрезка*

$$\mathfrak{P} = \{x_0, \ldots, x_n\},\ a = x_0 < \ldots < x_n = b$$

и составим верхние

$$\overline{\sum}_{\mathfrak{P}} = \sum_{i=1}^{n} \overline{g}_i (G(x_i) - G(x_{i-1})),\ \overline{g}_i = \sup_{x_{i-1} < y \le x_i} g(y)$$

и нижние суммы

$$\underline{\sum}_{\mathfrak{P}} = \sum_{i=1}^{n} \underline{g}_i (G(x_i) - G(x_{i-1})),\ \underline{g}_i = \inf_{x_{i-1} < y \le x_i} g(y).$$

Определим простые функции $\overline{g}_{\mathfrak{P}}(x) = \overline{g}_i$ $\underline{g}_{\mathfrak{P}}(x) = \underline{g}_i$, $x \in (x_{i-1}, x_i]$, $\overline{g}_{\mathfrak{P}}(a) = \underline{g}_{\mathfrak{P}}(a) = g(a)$.

Тогда можно записать верхние и нижние суммы через интегралы Лебега-Стилтьеса

$$\overline{\sum}_{\mathfrak{P}} = (L-S)\int_a^b \overline{g}_{\mathfrak{P}}(x)dG(x),\ \underline{\sum}_{\mathfrak{P}} = (L-S)\int_a^b \underline{g}_{\mathfrak{P}}(x)dG(x).$$

Рассмотрим теперь $\{\mathfrak{P}_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ - возрастающую последовательность разбиений $\mathfrak{P}_k \subset \mathfrak{P}_{k+1}$, ранг которых стремится к нулю $\max\limits_{0\le i\le n_k} |x_i^k - x_i^k| \to 0$, $k \to \infty$. Тогда

$$\overline{g}_{\mathfrak{P}_1} \ge \overline{g}_{\mathfrak{P}_2} \ge \ldots \ge g \ge \ldots \ge \underline{g}_{\mathfrak{P}_2} \ge \underline{g}_{\mathfrak{P}_1}$$

и из ограниченности функции g получим

$$\lim_{k\to\infty} \overline{\sum}_{\mathfrak{P}_k} = (L-S)\int_a^b \overline{g}(x)dG(x),$$

$$\lim_{k\to\infty} \underline{\sum}_{\mathfrak{P}_k} = (L-S)\int_a^b \underline{g}(x)dG(x),$$

$$\overline{g}(x) = \lim_{k\to\infty} \overline{g}_{\mathfrak{P}_k}(x);\ \underline{g}(x) = \lim_{k\to\infty} \underline{g}_{\mathfrak{P}_k}(x).$$

Если пределы $\lim_{k\to\infty} \overline{\sum}_{\mathfrak{P}_k}$, $\lim_{k\to\infty} \underline{\sum}_{\mathfrak{P}_k}$ конечны, совпадают и их общее значение не зависит от выбора последовательности $\{\mathfrak{P}_k\}$ разбиений, то говорят, *что функция* ***интегрируема по Риману-Стилтьесу*** *и общее значение пределов обознается*

$$(R-S)\int_{\mathbb{R}} g(x)dG(x).$$

Теорема. *Если функция g - непрерывна на отрезке $[a,b]$, то она* ***интегрируема по Риману-Стилтьесу*** *и*

$$(R-S)\int_{\mathbb{R}} g(x)dG(x) = (L-S)\int_{\mathbb{R}} g(x)dG(x).$$

15.3. **Понятие свертки.** Рассмотрим пример функции от многих случайных величин.

Пусть ξ, η - случайные величины с совместным распределением $F_{(\xi,\eta)}(x,y)$, а $\varphi = \varphi(x,y)$ - некоторая измеримая функция, тогда можем рассмотреть функцию распределения новой случайной величины $\zeta = \varphi(\xi,\eta)$

$$F_\eta(z) = \int_{x,y:\varphi(x,y)<z} dF_{(\xi,\eta)}(x,y).$$

Пусть $\varphi(x,y) = x+y$, $\zeta = \xi+\eta$, а ξ и η независимы, тогда $F_{(\xi,\eta)}(x,y) = F_\xi(x)F_\eta(y)$ и, применяя теорему Фубини, получим

$$F_\zeta(z) = \int_{x,y:x+y<z} dF_{(\xi,\eta)}(x,y) = \int_{\mathbb{R}^2} I_{x+y<z}(x,y)dF_\xi(x)dF_\eta(y) =$$
$$\int_{-\infty}^{\infty} dF_\xi(x)\int_{-\infty}^{\infty} I_{x+y<z}(x,y)dF_\eta(y) = \int_{-\infty}^{\infty} F_\eta(z-x)dF_\xi(x)$$

и аналогично

$$F_\zeta(z) = \int_{-\infty}^{\infty} F_\xi(z-y)dF_\eta(y).$$

Свертку принято обозначать так

$$F_{\xi+\eta} = F_\xi * F_\eta.$$

Рассмотрим теперь случай абсолютно непрерывных распределений и покачем, что плотность суммы будет светрткой плотностей.

$$F_\zeta(z) = \int_{-\infty}^{\infty}[\int_{-\infty}^{z-x} f_\eta(y)dy]f_\xi(x)dx =$$
$$\int_{-\infty}^{\infty}[\int_{-\infty}^{z} f_\eta(u-x)du]f_\xi(x)dx = \int_{-\infty}^{z}[\int_{-\infty}^{\infty} f_\eta(u-x)f_\xi(x)dx]du$$
$$f_\zeta(z) = \int_{-\infty}^{\infty} f_\eta(z-x)f_\xi(x)dx,\ f_\eta(z) = \int_{-\infty}^{\infty} f_\xi(z-y)f_\eta(y)dy.$$

Заметим, что для того, чтобы сумма двух случайных величин имела абсолютно непрерывное распределение достаточно, чтобы одна из случайных величин имела плотность. Это видно из равенств:

$$f_\zeta(z) = \int_{-\infty}^{\infty} f_\eta(z-x)dF_\xi(x),\ f_\zeta(z) = \int_{-\infty}^{\infty} f_\xi(z-y)dF_\eta(y).$$

15.4. **Свойства математического ожидания.**

(1) Пусть c - постоянная, $E\xi$ существует. Тогда существует $E(c\xi)$ и

$$E(c\xi) = cE\xi$$

(2) Пусть $\xi \leq \eta$, тогда

$$E\xi \leq E\eta,$$

в частности,

$$-\infty < E\xi \;\Rightarrow\; -\infty < E\eta,\; E\xi \leq E\eta;$$

$$E\eta < \infty \;\Rightarrow\; E\xi < \infty,\; E\xi \leq E\eta.$$

(3) Если $E\xi$ существует, то

$$|E\xi| \leq E|\xi|.$$

(4) Если $E\xi$ существует, то для любого $A \in F$ математическое ожидание $E(\xi I_A)$ также существует, если $E\xi$ конечно, то $E(\xi I_A)$ конечно.

$$E(\xi I_A) \leq E\xi$$

(5) Если случайные величины ξ, η, для которых определены $E\xi$,$E\eta$ и выражение $E\xi + E\eta$ имеет смысл. Тогда

$$E(\xi + \eta) = E\xi + E\eta.$$

(6) Если $\xi = 0$ п.н., то $E\xi = 0$.
(7) Если $\xi = \eta$ п.н. и $E|\xi| < \infty$, то $E|\eta| < \infty$, $E\xi = E\eta$.
(8) Пусть $\xi \geq 0$ и $E\xi = 0$, тогда $\xi = 0$ п.н.

Теорема (теорема Лебега о мажорируемой сходимости). *Рассмотрим случайные величины, такие что* $|\xi_n| \leq \eta$, $E\eta < \infty$,
$\xi_n \to \xi$ *п.н.* $(P(\omega : \xi_n(\omega) \to \xi(\omega)) = 1)$.
Тогда $E|\xi| < \infty$ *и* $E\xi_n \to E\xi$, $E|\xi - \xi_n| \to 0$.

Теорема. *Пусть* ξ, η *независимые случайные величины, такие что* $E|\xi| < \infty$, $E|\eta| < \infty$.
Тогда $E|\xi\eta| < \infty$ *и* $E\xi\eta = E\xi \cdot E\eta$.

Доказательство. Пусть для начала $\xi \geq 0$, $\eta \geq 0$. Построим последовательности ξ_n, η_n следующим образом

$$\xi_n = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{k}{n} I_{[\frac{k}{n},\frac{k+1}{n})}(\xi), \quad \eta_n = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{k}{n} I_{[\frac{k}{n},\frac{k+1}{n})}(\eta).$$

Заметим, что $|\xi - \xi_n| \leq \frac{1}{n}$, $|\eta - \eta_n| \leq \frac{1}{n}$, а кроме того, $E\xi < \infty$, $E\eta < \infty$, тогда по теореме Лебега о мажорируемой сходимости

$$\lim E\xi_n = E\xi, \quad \lim E\eta_n = E\eta.$$

Используя независмость, получим

$$E\xi_n\eta_n = \sum_{k,l\leq 0}\frac{kl}{n^2}EI_{[\frac{k}{n},\frac{k+1}{n})}(\xi)I_{[\frac{l}{n},\frac{l+1}{n})}(\eta) =$$

$$\sum_{k,l\leq 0}\frac{kl}{n^2}EI_{[\frac{k}{n},\frac{k+1}{n})}(\xi)EI_{[\frac{l}{n},\frac{l+1}{n})}(\eta) = E\xi_n E\eta_n.$$

Оценим разность

$$|E\xi\eta - E\xi_n\eta_n| \leq E|\xi\eta - \xi_n\eta_n| \leq E[\xi|\eta-\eta_n|] + E[\eta_n|\xi-\xi_n|] \leq$$

$$\frac{1}{n}E\xi + \frac{1}{n}E(\eta + \frac{1}{n}) \to 0.$$

Следовательно,

$$E\xi\eta = \lim E\xi_n\eta_n = \lim E\xi_n \lim \eta_n = E\xi \cdot E\eta,\ E\xi\eta < \infty$$

К общему случаю переходим, используя представления

$$\xi = \xi^+ - \xi^-, \eta = \eta^+ - \eta^-, \xi\eta = \xi^+\eta^+ - \xi^-\eta^+ - \xi^+\eta^- + \xi^-\eta^-.$$

$\square$

15.5. Неравенства, связанные с математическим ожиданием.

Неравенство Чебышева: Пусть ξ - неотрицательная случайная величина, тогда для любого $\varepsilon > 0$

$$P(\xi \geq \varepsilon) \leq \frac{E\xi}{\varepsilon}$$

Доказательство.

$$E\xi \geq E\xi I_{\{\xi\geq\varepsilon\}} \geq \varepsilon EI_{\{\xi\geq\varepsilon\}} = \varepsilon P(\xi \geq \varepsilon)$$

$\square$

Неравенство Маркова: Пусть ξ - неотрицательная случайная величина, $g : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ - не убывающая функция, тогда для любого $\varepsilon > 0$

$$P(\xi \geq \varepsilon) \leq \frac{Eg(\xi)}{g(\varepsilon)}$$

Доказательство.

$$Eg(\xi) \geq Eg(\xi)I_{\{g(\xi)\geq g(\varepsilon)\}} \geq g(\varepsilon)EI_{\{\xi\geq\varepsilon\}} = g(\varepsilon)P(\xi \geq \varepsilon)$$

$\square$

В качестве $g(x)$ можно брать x^2, $\exp x$ и другие. В частности, получим неравенства

$$P(|\xi - E\xi| \geq \varepsilon) \leq \frac{D(\xi)}{\varepsilon^2},\ P(\xi \geq \varepsilon) \leq \frac{E\exp(\xi)}{\exp(\varepsilon)}$$

Неравенство Йенсена: Пусть ξ - случайная величина, $E|\xi| < \infty$, g - выпуклая вниз измеримая функция, тогда

$$Eg(\xi) \geq g(E\xi)$$

Доказательство. Из выпуклости вниз следует, что для всякого x_0 существует $\lambda(x_0)$, такое что для всех x выполняется неравество

$$g(x) - g(x_0) \geq \lambda(x_0)(x - x_0)$$

Положим $x_0 = E\xi$, $x = \xi$. Рассмотрим теперь математическое ожидание

$$g(\xi) - g(E\xi) \geq \lambda(E\xi)(\xi - E\xi)$$

$$Eg(\xi) - g(E\xi) \geq \lambda(E\xi)E(\xi - E\xi) = 0$$

□

Неравенство Коши-Буняковского: Пусть $E\xi^2 < \infty$, $E\xi^2 < \infty$, тогда

$$E|\xi\eta| \leq (E\xi^2 E\xi^2)^{1/2}$$

Доказательство. Предположим, что $E\xi^2 > 0$, $E\eta^2 > 0$, иначе если $E\xi^2 > 0$, то $\xi = 0$ п.н. и $E\xi\eta = 0$ и неравенство превращается в тривиальное равенство. Пусть

$$\widetilde{\xi} = \frac{\xi}{\sqrt{E\xi^2}},\ \widetilde{\eta} = \frac{\eta}{\sqrt{E\eta^2}}$$

Воспользуемся неравенством $a^2 + b^2 \leq 2|ab|$, которое верно для любых вещественных a, b.

$$\widetilde{\xi}^2 + \widetilde{\eta}^2 \leq 2|\widetilde{\xi}\widetilde{\eta}|;$$

$$2 = E\widetilde{\xi}^2 + E\widetilde{\eta}^2 \leq 2E|(\widetilde{\xi}\widetilde{\eta})| = \frac{E|\xi\eta|}{\sqrt{E\xi^2 E\eta^2}}$$

□

Неравенство Ляпунова: Если $0 < s < t$, то

$$(E\xi^s)^{1/s} \leq (E\xi^t)^{1/t}$$

Доказательство. Положим $r = t/s$, рассмотрим выпуклую вниз функцию $g(x) = x^r$, $(r > 1)$.

Применим неравенство Йенсена

$$E(\xi^t) = E((\xi^s)^r) \geq ((E\xi^s)^{1/s})^r = (E\xi^s)^{t/s}$$

□

Неравенство Гёльдера: Пусть $E|\xi|^s < \infty$, $E|\xi|^t < \infty$, $1/s + 1/t = 1$, $1 < s < \infty$, $1 < t < \infty$, тогда

$$E|\xi\eta| \leq (E\xi^s)^{1/s}(E\xi^t)^{1/t}$$

Доказательство. Аналогично доказательству неравенства Коши-Буняковского, которое является частным случаем доказываемого неравенства, предположим, что $E|\xi| > 0$, $E|\eta| > 0$, иначе неравенство превращается в тривиальное равенство.

Пусть

$$\widetilde{\xi} = \frac{|\xi|}{\sqrt[1/s]{E\xi^s}},\ \widetilde{\eta} = \frac{|\eta|}{\sqrt[1/t]{E\eta^t}}$$

Воспользуемся неравенством $x^a y^b \le ax + by$, которое верно для любых положительных x, y, a, b, $a + b = 1$. Это неравенство вытекает из свойств выпуклости вверх логарифмической функции:

$$a \ln x + b \ln y \le \ln(ax + by).$$

Положим $x = \widetilde{\xi}^s$, $y = \widetilde{\eta}^t$, $a = 1/s, b = 1/t$.

Тогда

$$\widetilde{\xi}\widetilde{\eta} \le \frac{1}{s}\widetilde{\xi}^s + \frac{1}{t}\widetilde{\eta}^t;$$

$$E(\widetilde{\xi}\widetilde{\eta}) \le \frac{1}{s}E\widetilde{\xi}^s + \frac{1}{t}E\widetilde{\eta}^t = 1/s + 1/t = 1.$$

Что и доказывает требуемое неравенство. $\square$

Неравенство Минковского: Пусть $1 \le p < \infty$, $E|\xi|^p < \infty$, $E|\eta|^p < \infty$, тогда

$$(E|\xi + \eta|^p)^{1/p} \le (E|\xi|^p)^{1/p} + (E|\eta|^p)^{1/p}$$

16. Дисперсия. Ковариация. Корреляция.

16.1. **Дисперсия.**

Определение 16.1.

$$D\xi = E(\xi - E\xi)^2 = E\xi^2 - (E\xi)^2$$

Второй центральный момент называется дисперсией. Квадратичное отклонение $\sigma(\xi) = \sqrt{D\xi}$ *показывает размах случайной величины, величину флуктуации.*

Свойства дисперсии

(1)

$$D\xi = 0 \;\Leftrightarrow\; \{\exists\, c \in \mathbb{R}:\; P(\xi = c) = 1\},\; (\xi = c \text{ п.н. })$$

(2)

$$D(\xi + c) = D\xi,\; D(c\xi) = c^2 D\xi,\; c \in \mathbb{R}$$

(3) Если ξ, η - независимые случайные величины, то

$$D(\xi + \eta) = D\xi + D\eta$$

16.2. **Ковариация. Коварицонная матрица.**

Определение 16.2.

$$\operatorname{cov}(\xi, \eta) = E[(\xi - E\xi)(\eta - E\eta)] = E\xi\eta - E\xi E\eta.$$

Второй смешанный ценральный момент называется ковариацией.

Рассмотрим случайный вектор $\overrightarrow{\xi} = (\xi_1, \dots, \xi_n)$. *Его ковариационной матрицей называется матрица*

$$R = (R_{i,j})_{i=1,\dots,n;j=1,\dots,n},\; R_{i,j} = \operatorname{cov}(\xi_i, \xi_j).$$

Теорема. *Следующие утверждения равносильны:*

(1) *R - ковариационная матрица случайного вектора* $\overrightarrow{\xi} = (\xi_1, \dots, \xi_n)$

(2) *существует матрица*

$$A = (A_{i,j})_{i=1,\dots,n;j=1,\dots,n}:\; R = AA^t.$$

(3) *R - симметрична и неотрицательно определена.*

Доказательство. $1 \Rightarrow 3$: Неотрицательно определенность матрицы R следует из неравенств

$$\sum_{ij} R_{ij}\lambda_i\lambda_j = \sum_{ij} \operatorname{cov}(\xi_i, \xi_j)\lambda_i\lambda_j = E(\sum_{i=1}^{n}(\xi_i - E\xi_i)\lambda_i)^2 \geq 0$$

$3 \Rightarrow 2 \Rightarrow 1$: Из неотрицательно определенности матрицы R следует, что существует ортогональная матрица Q ($QQ^t = E$), такая что

$$R = QDQ^t,\; D = E(d_1, \dots, d_n)^t,\; d_i \geq 0, i = 1, \dots, n.$$

Положим матрицу $B : D = B^2$, $B = E(\sqrt{d_1}, \dots, \sqrt{d_n})^t$, тогда возьмем в качестве $A = QB$ и получим $R = AA^t$.

Теперь построим случайный вектор $\overrightarrow{\xi}$ имеющий ковариационную матрицу R. Пусть $\overrightarrow{\eta} = (\eta_1, \dots, \eta_n)$, $\eta_i \in N(0,1)$ случайный вектор, состоящий из независимых нормальных случайных величин, а в качестве $\overrightarrow{\xi}$ возьмем

$$\overrightarrow{\xi} = (\xi_1, \dots, \xi_n), \ \overrightarrow{\xi} = A\overrightarrow{\eta}^t.$$

Заметим, что

$$E\overrightarrow{\eta}\,\overrightarrow{\eta}^t = E.$$

Следовательно,

$$E\overrightarrow{\xi}\,\overrightarrow{\xi}^t = A\overrightarrow{\eta}\,\overrightarrow{\eta}^t A^t = AEA^t = R.$$

□

16.3. **Корреляция.**

Определение 16.3. *Коэффициентом корреляции называется*

$$r(\xi, \eta) = \frac{\mathrm{cov}(\xi, \eta)}{\sqrt{D\xi D\eta}}$$

Свойство 16.1. *Если ξ, η - независимые случайные величины, то*

$$r(\xi, \eta) = 0.$$

Доказательство. Из независимости ξ, η следует, что

$$E\xi\eta = E\xi E\eta, \ \mathrm{cov}(\xi, \eta) = E\xi\eta - E\xi E\eta = 0, \ r(\xi, \eta) = 0.$$

□

Замечание 16.1. *Заметим, что обратное не верно. Приведем пример.*

Пример 16.1.

$$\Omega = [0,1], \ P = \lambda, \ \xi(\omega) = \sin(\pi\omega), \ \eta = \cos(\pi\omega),$$

$$E\eta = \int_0^1 \cos(\pi\omega)d\omega = 0, \ E\xi\eta = \frac{1}{2}\int_0^1 \sin(2\pi\omega)d\omega = 0, \ r(\xi, \eta) = 0.$$

Теорема.

$$|r(\xi, \eta)| = 1 \ \Leftrightarrow \ \xi, \eta - \textit{линейно зависимы.}$$

Доказательство. $\Rightarrow$: Обозначим

$$\widetilde{\xi} = \frac{\xi - E\xi}{\sqrt{D(\xi)}}, \ \widetilde{\eta} = \frac{\eta - E\eta}{\sqrt{D(\eta)}}.$$

Пусть $r(\xi, \eta) = 1$. Рассмотрим

$$D(\widetilde{\xi} - \widetilde{\eta}) = E((\widetilde{\xi} - \widetilde{\eta}))^2 - (E(\widetilde{\xi} - \widetilde{\eta}))^2 = D\widetilde{\xi} + D\widetilde{\eta} - 2E\widetilde{\xi}\widetilde{\eta} = 2 - 2 = 0$$

Таким образом, $\widetilde{\xi} - \widetilde{\eta} = c$, значит ξ, η -линейно зависимы. Если $r(\xi, \eta) = -1$, то аналогично доказываем $D(\widetilde{\xi} + \widetilde{\eta}) = 0$

$\Leftarrow$: Пусть $\xi = a\eta + b$, тогда

$$r(\xi, \eta) = r(a\eta + b, \eta) = \frac{\mathrm{cov}(a\eta + b, \eta)}{|a|D\eta} = \frac{aE\eta^2 + bE\eta - (aE\eta + b)E\eta}{|a|D\eta} = \mathrm{sign}(a).$$

□

17. Различные виды сходимости случайных величин

1. Сходимость п.н. (почти наверное)или с вероятностью 1:

Определение 17.1.

$$\{\xi_n \underset{n\to\infty}{\to} \xi \text{ \textit{п.н.}}\} \ \Leftrightarrow \ \{P(\omega : \xi_n(\omega) \underset{n\to\infty}{\to} \xi(\omega)) = 1\}.$$

2. Сходимость по вероятности:

Определение 17.2.

$$\{\xi_n \overset{P}{\to} \xi,\ n \to \infty\} \ \Leftrightarrow \ \{\forall \varepsilon > 0 \ P(\omega : |\xi_n(\omega) - \xi(\omega)| \geq \varepsilon) \underset{n\to\infty}{\to} 0\}.$$

3. Сходимость по распределению:

Определение 17.3.

$$\{\xi_n \overset{d}{\to} \xi,\ n \to \infty\} \ \Leftrightarrow$$

$$\{ \text{ \textit{для всякой точки} } x \in \mathbb{R} - \text{ \textit{точки непрерывности функции распределения} } F_\xi$$

$$F_{\xi_n}(x) \underset{n\to\infty}{\to} F_\xi(x)\} \ \Leftrightarrow$$

$$\{ \text{ \textit{для всякой непрерывной и ограниченной функции} } f$$

$$Ef(\xi_n) \underset{n\to\infty}{\to} Ef(\xi)\}.$$

4. Сходимость в среднем порядка $p \geq 1$ **:**

Определение 17.4.

$$\{\xi_n \overset{L_p}{\to} \xi,\ n \to \infty\} \ \Leftrightarrow \ \{E|\xi_n(\omega) - \xi(\omega)|^p \underset{n\to\infty}{\to} 0\}.$$

17.1. Критерий сходимости почти наверное.

Теорема.

$$\xi_n \underset{n\to\infty}{\to} \xi \text{ п.н.} \;\Leftrightarrow\; \{\forall\varepsilon>0\; P(\omega : \sup_{k\geq n}|\xi_k(\omega)-\xi(\omega)|\geq\varepsilon) \underset{n\to\infty}{\to} 0\}.$$

Доказательство. Распишем подробно на языке $\varepsilon-\delta$ событие сходимости случайных величин

$$\{\omega : \xi_n(\omega) \underset{n\to\infty}{\to} \xi(\omega)\} = \{\omega : \forall\varepsilon>0\exists N : \forall n\geq N \Rightarrow\; |\xi_n(\omega)-\xi(\omega)|<\varepsilon\}$$

Рассмотрим обратное событие

$$\{\omega : \xi_n(\omega) \underset{n\to\infty}{\nrightarrow} \xi(\omega)\} = \{\omega : \exists\varepsilon>0\forall n : \exists k\geq n \Rightarrow\; |\xi_k(\omega)-\xi(\omega)|\geq\varepsilon\} =$$

$$= \bigcup_{\varepsilon>0}\bigcap_{n=1}^{\infty}\bigcup_{k\geq n}\{\omega : |\xi_k(\omega)-\xi(\omega)|\geq\varepsilon\}$$

Обозначим $A_k^\varepsilon = \{\omega : |\xi_k(\omega)-\xi(\omega)|\geq\varepsilon\}$, $A^\varepsilon = \bigcap_{n=1}^{\infty}\bigcup_{k\geq n}A_k^\varepsilon = \limsup A_k^\varepsilon$.

Тогда событие отсутствия сходимости можно переписать так:

$$\{\omega : \xi_n(\omega) \underset{n\to\infty}{\nrightarrow} \xi(\omega)\} = \bigcup_{\varepsilon>0}A^\varepsilon.$$

Напишем цепочку равносильных утверждений

$$\{P(\omega : \xi_n(\omega) \underset{n\to\infty}{\nrightarrow} \xi(\omega))=0\} \Leftrightarrow \{P(\bigcup_{\varepsilon>0}A^\varepsilon)=0\} \Leftrightarrow$$

$$\{P(\bigcup_{m=1}^{\infty}A^{1/m})=0\} \underset{P(A)\geq 0,\forall A\in F}{\Leftrightarrow} \{P(A^{1/m})=0,\forall m\in\mathbb{N}\} \Leftrightarrow$$

$$\{P(A^\varepsilon)=0,\forall\varepsilon>0\} \Leftrightarrow \{P(\bigcup_{k\geq n}A_k^\varepsilon) \underset{n\to\infty}{\to} 0,\forall\varepsilon>0\} \Leftrightarrow$$

$$\{P(\omega : \sup_{k\geq n}|\xi_k(\omega)-\xi(\omega)|\geq\varepsilon) \underset{n\to\infty}{\to} 0,\forall\varepsilon>0\}$$

□

Следствие 1.

$$\{\sum_{k=1}^{\infty}P(|\xi_k-\xi|\geq\varepsilon)<\infty\} \;\Rightarrow\; \{\xi_n \underset{n\to\infty}{\to} \xi \text{ п.н.}\}$$

Доказательство. Возьмем произвольное $\varepsilon>0$.

$$P(\sup_{k\geq n}|\xi_k-\xi|\geq\varepsilon) = P(\bigcup_{k\geq n}\{|\xi_k-\xi|\geq\varepsilon\}) \leq \sum_{k\geq n}P(|\xi_k-\xi|\geq\varepsilon) \underset{n\to\infty}{\to} 0$$

По критерию сходимости почти наверное получим требуемое. □

Пусть дана $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ последовательность событий.

Расмотрим такое событие $\{\text{б.ч.}A_n\} = \limsup A_n = \bigcap_{n=1}^{\infty}\bigcup_{k\geq n}A_k = \bigcap_{n=1}^{\infty}B_n$ - будет происходить бесконечное число раз. Заметим, что такое событие определено корректно, поскольку $B_n = \bigcup_{k\geq n}A_k$ образуют убывающую последовательность множеств, а их предел - бесконечное пересечение.

Лемма 17.1. *(Бореля-Кантелли)*

(1)

$$\sum_{n=1}^{\infty} P(A_n) < \infty \ \Rightarrow \ P(\textit{б.ч.}A_n) = 0$$

(2) Если события A_n *независимы, то*

$$\sum_{n=1}^{\infty} P(A_n) = \infty \ \Rightarrow \ P(\textit{б.ч.}A_n) = 1$$

Доказательство. (1) Допустим, что ряд из вероятностей сходится.

$$\sum_{n=1}^{\infty} P(A_n) < \infty.$$

$$P(\text{б.ч.}A_n) = P(\bigcap_{n=1}^{\infty} B_n) \leq P(B_n) = P(\bigcup_{k\geq n} A_k)$$

По свойству полуаддитивности вероятности получим

$$P(\bigcup_{k\geq n} A_k) \leq \sum_{k\geq n} P(A_k)$$

$\sum_{k\geq n} P(A_k) \to 0, \ n \to \infty$ как остаток сходящегося ряда.

(2) Предположим теперь, что ряд из вероятностей расходится, а события A_n независимы.

Рассмотрим обратное событие

$$D = \overline{\{\text{б.ч.}A_n\}} = \bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcap_{k\geq n} \overline{A_k} = \bigcup_{n=1}^{\infty} \overline{B_n}$$

Из независимости самих событий, а следовательно из независимости обратных,

$$P(\bigcap_{k\geq n} \overline{A_k}) = \prod_{k\geq n} P(\overline{A_k}) = \prod_{k\geq n} (1 - P(A_k)$$

Используя свойство логарифмической функции $\ln(1-x) \leq -x$, $x \in (0,1]$, получим

$$\ln \prod_{k\geq n} (1 - P(A_k) = \sum_{k\geq n} \ln(1 - P(A_k) \leq -\sum_{k\geq n} P(A_k) = -\infty; \ P(\bigcap_{k\geq n} \overline{A_k}) = 0, \ \forall n \in \mathbb{N}.$$

Поскольку последовательность событий $\{\overline{B_n}\}$ будет возрастающей, то по непрерывности вероятностной меры предел будет равен счетной сумме событий

$$P(D) = P(\bigcup_{n=1}^{\infty} \overline{B_n}) = \lim_{n\to\infty} P(\bigcap_{k\geq n} \overline{A_k}) = 0 \ \Rightarrow \ P(\text{б.ч.}A_n) = 1.$$

□

17.2. Сравнительный анализ различных видов сходимости случайных величин.

Теорема. *(1)* $\{\xi_n \underset{n\to\infty}{\to} \xi \text{ п.н.}\} \Rightarrow \{\xi_n \overset{P}{\to} \xi,\ n\to\infty\}$

(2) $\{\xi_n \overset{L_p}{\to} \xi,\ n\to\infty\} \Rightarrow \{\xi_n \overset{P}{\to} \xi,\ n\to\infty\}$

(3) $\{\xi_n \overset{P}{\to} \xi,\ n\to\infty\} \Rightarrow \{\xi_n \overset{d}{\to} \xi,\ n\to\infty\}$

Доказательство. (1) По критерию сходимости почти наверное имеем

$$\{\xi_n \underset{n\to\infty}{\to} \xi \text{ п.н.}\} \Leftrightarrow \{\forall\varepsilon>0\ P(\omega:\sup_{k\geq n}|\xi_k(\omega)-\xi(\omega)|\geq\varepsilon) \underset{n\to\infty}{\to} 0\}.$$

С другой стороны, мы можем написать неравенство

$$0 \underset{n\to\infty}{\leftarrow} P(\omega:\sup_{k\geq n}|\xi_k(\omega)-\xi(\omega)|\geq\varepsilon) \geq P(\omega:|\xi_n(\omega)-\xi(\omega)|\geq\varepsilon)$$

Таким образом, получаем сходимость по вероятности.

(2) Для доказательства достаточно воспользоваться неравенством Маркова с функцией $g(x)=|x|^p$.

Возьмем произвольное $\varepsilon>0$.

$$P(|\xi_n(\omega)-\xi(\omega)|\geq\varepsilon) \leq \frac{E|\xi_n-\xi|^p}{\varepsilon^p} \underset{n\to\infty}{\to} 0$$

(3) Пусть точка x - точка непрерывности функции распределения F_ξ.

Возьмем произвольное $\varepsilon>0$.

Из непрерывности функции распределения и сходимости по вероятности для любого $\varepsilon>0$ существуют $\delta>0$, $N\in\mathbb{N}$, такие что $|F_\xi(x+\delta)-F_\xi(x)|<\varepsilon$, для всяких натуральных $n\geq N$ $P(|\xi_n-\xi|>\delta)<\varepsilon$.

Рассмотрим

$$|F_{\xi_n}(x)-F_\xi(x)| = |P(\xi_n<x)-P(\xi<x)| =$$
$$|P(\xi_n<x,|\xi_n-\xi|\leq\delta)+P(\xi_n<x,|\xi_n-\xi|>\delta)-P(\xi<x)| \leq$$
$$|P(\xi\leq\delta+x)+P(|\xi_n-\xi|>\delta)-F_\xi(x)| =$$
$$|F_\xi(x+\delta)+P(|\xi_n-\xi|>\delta)-F_\xi(x)| < 2\varepsilon$$

Следовательно,

$$F_{\xi_n}(x) \underset{n\to\infty}{\to} F_\xi(x)$$

□

Приведем примеры, показывающие, что другие логический связки невозможны.

Пример 17.1.

$$\{\xi_n \underset{n\to\infty}{\to} \xi \text{ п.н.}\} \not\Leftarrow \{\xi_n \overset{P,L_p}{\to} \xi,\ n\to\infty\}$$

$$\Omega=[0,1],\ F=\mathfrak{B}[0,1],\ P=\lambda \text{ - мера Лебега},$$

$$A_n^i=[\frac{i-1}{n},\frac{i}{n}],\ \xi_n^i(\omega)=I_{A_n^i}(\omega)$$

$$\begin{array}{l}\xi_1^1 \\ \xi_2^1\ \xi_2^2 \\ \dots \\ \xi_n^1\ \xi_n^2 \dots \xi_n^n\end{array}$$

Последовательность ξ_n^n *сходится в среднем, по вероятности к нулю*

$$E|\xi_n^n|^p = \frac{1}{n} \underset{n\to\infty}{\to} 0,$$

но не сходится ни в одной точке $\omega \in [0,1]$.

Пример 17.2.

$$\{\xi_n \underset{n\to\infty}{\to} \xi \text{ п.н.}\} \ \not\Rightarrow \ \{\xi_n \overset{L_p}{\to} \xi,\ n \to \infty\}$$

$$\xi_n(\omega) = \begin{cases} e^n, & 0 \le \omega \le 1/n; \\ 0, & \omega > 1/n. \end{cases}$$

$$P\{\xi_n \nrightarrow 0\} = 1/n \underset{n\to\infty}{\to} 0;$$

$$E|\xi_n|^p = \frac{e^{pn}}{n} \to \infty.$$

Пример 17.3.

$$\{\xi_n \underset{n\to\infty}{\to} \xi \text{ п.н.}\} \ \not\Leftarrow \ \{\xi_n \overset{L_p}{\to} \xi,\ n \to \infty\}$$

Пусть ξ_n *последовательность независимых испытаний Бернулли и*

$$P(\xi_n = 1) = p_n,\ P(\xi_n = 0) = 1 - p_n.$$

Тогда

$$\{\xi_n \overset{P}{\to} \xi,\ n \to \infty\} \Leftrightarrow \ p_n \to 0;$$

$$\{\xi_n \overset{L_p}{\to} \xi,\ n \to \infty\} \Leftrightarrow \ p_n \to 0;$$

$$\{\xi_n \underset{n\to\infty}{\to} \xi \text{ п.н.}\} \Leftrightarrow \ \sum_{n=1}^{\infty} p_n < \infty.$$

Таким образом, при $p_n = 1/n$ *сходимости почти наверное не будет.*

18. ЗАКОН БОЛЬШИХ ЧИСЕЛ. УСИЛЕННЫЙ ЗАКОН БОЛЬШИХ ЧИСЕЛ

18.1. Закон больших чисел.

Определение 18.1. *Последовательность* $\{\xi_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ *случайных величин с конечным математическим ожиданием* $E\xi_n = a_n$ *удовлетворяет* ***закону больших чисел****, если*

$$\frac{\sum_{i=1}^n(\xi_i - a_i)}{n} \xrightarrow{P} 0,\ n\to\infty.$$

Теорема (Маркова). *Пусть* $\{\xi_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ *последовательность случайных величин такая, что*

$$\frac{D(\sum_{i=1}^n \xi_i)}{n^2} \underset{n\to\infty}{\to} 0.$$

Тогда последовательность случайных величин удовлетворяет ***закону больших чисел.***

Доказательство. Пусть $\varepsilon > 0$.

По неравенству Маркова с функцией $g(x) = x^2$ получим

$$P(\frac{\sum_{i=1}^n |\xi_i - E\xi_i|}{n} \geq \varepsilon) \leq \frac{E(\frac{\sum_{i=1}^n(\xi_i - E\xi_i)}{n})^2}{\varepsilon^2} = \frac{D(\frac{\sum_{i=1}^n \xi_i}{n})}{\varepsilon^2} = \frac{D(\sum_{i=1}^n \xi_i)}{\varepsilon^2 n^2} \underset{n\to\infty}{\to} 0.$$

□

Теорема (Чебышёва). *Пусть* $\{\xi_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ *последовательность независимых случайных величин такая, что дисперсии равномерно ограничены*

$$D\xi_i < c.$$

Тогда последовательность случайных величин удовлетворяет ***закону больших чисел.***

Доказательство. Применим теорему Маркова и получим

$$\frac{D(\sum_{i=1}^n \xi_i)}{n^2} \underset{\text{независимость}}{=} \frac{\sum_{i=1}^n D(\xi_i)}{n^2} \leq \frac{c}{n} \underset{n\to\infty}{\to} 0.$$

□

Теорема (Берштейна, о слабозависмых на бесконечности случайных величинах)**.** *Пусть* $\{\xi_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ *последовательность случайных величин такая, что такая, что дисперсии равномерно ограничены*

$$D\xi_i < c.$$

Предположим, что существует функция $r(n) \underset{n\to\infty}{\to} 0$*, такая что*

$$\operatorname{cov}(\xi_i, \xi_j) \leq r(|i-j|).$$

Тогда последовательность случайных величин удовлетворяет ***закону больших чисел.***

Доказательство. Применим теорему Маркова и получим

$$\frac{D(\sum_{i=1}^{n}\xi_i)}{n^2} = \frac{1}{n^2}\sum_{i,j=1}^{n}\operatorname{cov}(\xi_i,\xi_j) = \frac{1}{n^2}\sum_{k=-n}^{n}\sum_{j-i=k}^{n}\operatorname{cov}(\xi_i,\xi_j) \leq$$

$$\frac{1}{n^2}\sum_{k=-n}^{n}\sum_{j-i=k}^{n} r(|i-j|) = \frac{1}{n^2}\sum_{k=-n}^{n} r(|k|)\sum_{j-i=k}^{n} 1 =$$

$$\frac{1}{n^2}(2nr(0)+2(n-1)r(1)+\ldots+2(n-k)r(k)+\ldots+2r(n-1)) \leq \frac{2}{n}\sum_{k=0}^{n-1} r(k).$$

Заметим, что

$(\{r(n) \underset{n\to\infty}{\rightarrow} 0\} \Leftrightarrow \{\forall\varepsilon>0\ \exists N\in\mathbb{N}: \forall m\geq N \Rightarrow\ |r(m)|<\varepsilon\};$

$\{r(n) \underset{n\to\infty}{\rightarrow} 0\} \Rightarrow \{\exists M>0:\ |r(k)|<M,\ \forall k\in\mathbb{N}\}).$

Таким образом, можем продолжить оценку

$$\frac{2}{n}\sum_{k=0}^{n-1} r(k) \leq \frac{2}{n}(MN+\varepsilon(n-1-N)) \underset{n\to\infty}{\rightarrow} 0.$$

□

Теорема (Хинчина). *Пусть* $\{\xi_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ *последовательность независимых одинаково распределенных случайных величин и*

$$E\xi_i = a.$$

Тогда последовательность случайных величин удовлетворяет ***закону больших чисел.***

Доказательство этой теоремы приведем в параграфе о характерестических функциях.

Теорема (Берштейна). *Пусть* $\{\xi_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ *последовательность случайных величин. Тогда для того, чтобы последовательность случайных величин удовлетворяла* ***закону больших чисел*** *необходимо и достаточно, чтобы*

$$E(\frac{(\sum_{i=1}^{n}(\frac{\xi-E\xi}{n}))^2}{1+(\sum_{i=1}^{n}(\frac{\xi-E\xi}{n}))^2}) \underset{n\to\infty}{\rightarrow} 0.$$

.

18.2. **Усиленный закон больших чисел.**

Определение 18.2. *Последовательность $\{\xi_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ случайных величин с конечным математическим ожиданием $E\xi_n = a_n$ удовлетворяет* ***усиленному закону больших чисел****, если*

$$\frac{\sum_{i=1}^n(\xi_i - a_i)}{n} \underset{п.н.}{\to} 0,\ n \to \infty.$$

Теорема (Кантелли). *Пусть $\{\xi_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ последовательность независимых случайных величин и*

$$\exists M > 0:\ E(\xi_i - E\xi_i)^4 \le M < \infty.$$

Тогда последовательность случайных величин удовлетворяет ***усиленному закону больших чисел.***

Доказательство. Не умаляя общности, положим $E\xi_i = 0$. Докажем для начала, что

$$E\xi_i^4 \le M \ \Rightarrow\ E(\sum_{i=1}^n \xi_i)^4 \le cMn^2.$$

$$E(\sum_{i=1}^n \xi_i)^4 = \sum_{i=1}^n E(\xi_i^4) + \sum_{i\neq j} E(\xi_i^2\xi_j^2) + \sum_{i\neq j\neq k} E(\xi_i^2\xi_j\xi_k) +$$

$$+ \sum_{i\neq j\neq k\neq m} E(\xi_i\xi_k\xi_j\xi_m) \underset{\text{независимость}}{=}$$

$$= \sum_{i=1}^n E(\xi_i)^4 + \sum_{i\neq j} E(\xi_i)^2 E(\xi_j)^2 + \sum_{i\neq j\neq k} E(\xi_i)^2 E\xi_j E\xi_k +$$

$$+ \sum_{i\neq j\neq k\neq m} E\xi_i E\xi_k E\xi_j E\xi_m \underset{E\xi_i=0}{=}$$

$$\sum_{i=1}^n E(\xi_i)^4 + \sum_{i\neq j} E(\xi_i)^2 E(\xi_j)^2 \underset{\text{нер. Ляпунова}}{\le} \sum_{i=1}^n E(\xi_i)^4 + n\sum_{i=1}^n (E(\xi_i)^4)^{1/2} \le$$

$$\le Mn^2(1 + 1/n)$$

Воспользуемся следствием из критерия сходимости почти наверное и неравенством Маркова с функцией $g(x) = x^4$.

$$\sum_{n=1}^\infty P(|\sum_{i=1}^n \xi_i| \ge n\varepsilon) \le \sum_{n=1}^\infty \frac{E(\sum_{i=1}^n \xi_i)^4}{(\varepsilon n)^4} \le \sum_{n=1}^\infty \frac{cMn^2}{(\varepsilon n)^4} < \infty.$$

$\square$

Приведем еще две теоремы Колмогорова об усиленном законе больших чисел без доказательства.

Обозначим $S_n = \sum_{i=1}^n \xi_i$.

Теорема (Колмогорова для одинаково распределенных случайных величин). *Пусть* $\{\xi_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ *последовательность независимых одинаково распределенных случайных величин и*

$$E|\xi_i| < \infty.$$

Тогда последовательность случайных величин удовлетворяет усиленному закону больших чисел

$$\frac{S_n}{n} \underset{\text{п.н.}}{\to} m, \ n \to \infty, \ \text{где } m = E\xi_i.$$

Теорема (Колмогорова для неодинаково распределенных случайных величин). *Пусть* $\{\xi_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ *последовательность независимых случайных величин и пусть* $\{b_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ *последоватнельность, такая что* $b_n > 0$, $b_n \nearrow \infty$. *Тогда верны следующие импликации*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{D\xi_n}{b_n^2} < \infty \ \Rightarrow \frac{S_n - ES_n}{b_n} \underset{\text{п.н.}}{\to} 0;$$

$$\text{в частности, } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{D\xi_n}{n^2} < \infty \ \Rightarrow \frac{S_n - ES_n}{n} \underset{\text{п.н.}}{\to} 0$$

– то есть последовательность случайных величин удовлетворяет усиленному закону больших чисел.

19. ХАРАКТЕРИСТИЧЕСКИЕ ФУНКЦИИ

Рассмотрим комплекснозначные случайные величины $\zeta = \xi + i\eta$, по определению положим $E\zeta = E\xi + iE\eta$.

Будем рассматривать гильбертово пространство комплекснозначных случайных величин с $|\zeta|^2 = \xi^2 + \eta^2$, $E|\zeta|^2 < \infty$ со скалярным произведением $(\zeta_1, \zeta_2) = E\zeta_1\overline{\zeta_2}$.

Определение 19.1. *Пусть* $\overrightarrow{\xi} = (\xi_1, \dots, \xi_n)$ *случайный вектор*

$$\overrightarrow{\xi} : (\Omega, F, P) \to (\mathbb{R}^n, \mathfrak{B}(\mathbb{R}^n)),$$

его характеристической функцией будем называть

$$\varphi_{\overrightarrow{\xi}}(t) = Ee^{i(t, \overrightarrow{\xi})},\ t \in \mathbb{R}^n.$$

В частности, характеристической функцией случайной величины

$$\xi : (\Omega, F, P) \to (\mathbb{R}, \mathfrak{B}(\mathbb{R}))$$

назовем

$$\varphi_\xi(t) = Ee^{it\xi},\ t \in \mathbb{R}.$$

19.1. Свойства характеристической функции случайной величины.

(1) Если $\eta = a\xi + b$, то $\varphi_\eta(t) = Ee^{it(a\xi+b)} = e^{itb}\varphi_\xi(at)$.

(2) Если $\xi_1, \dots, \xi_n$ - независимые случайные величины, $S_n = \sum_{i=1}^n \xi_i$, то $\varphi_{S_n}(t) = \prod_{i=1}^n \varphi_{\xi_i}(t)$.

$$\varphi_{S_n}(t) = E\exp(it(\sum_{i=1}^n \xi_i)) = \prod_{i=1}^n Ee^{it\xi_i}(t) = \prod_{i=1}^n \varphi_{\xi_i}(t).$$

Теорема. *Пусть случайная величина ξ с функцией распределения F_ξ и характерестической функцией $\varphi(t) = Ee^{it\xi}$. Тогда имеют место следующие свойства*

(1) $|\varphi(t)| \le \varphi(0) = 1,\ \forall t \in \mathbb{R}$;

(2) $\varphi(t)$ *равномерно непрерывна по* $t \in \mathbb{R}$;

(3) $\varphi(t) = \overline{\varphi(-t)}$

(4) $\varphi(t)$ *- вещественнозначная функция тогда и только тогда, когда распределение* F_ξ *симметрично* ($\int_B dF_\xi = \int_{-B} dF_\xi,\ B \in \mathfrak{B}(\mathbb{R}),\ -B = \{-x, x \in B\}$);

(5) *Если для некоторого* $n \ge 1$ $E|\xi|^r < \infty$, *то при всех* $r \le n$ *существуют производные* $\varphi^{(r)}(t)$

$$\varphi^{(r)}(t) = \int_{\mathbb{R}} (ix)^r e^{itx} dF_\xi(x),$$

$$E\xi^r = \frac{\varphi^{(r)}(0)}{i^r},$$

$$\varphi(t) = \sum_{r=0}^n \frac{(it)^r}{r!} E\xi^r + \frac{(it)^n}{n!}\varepsilon_n(t),\ |\varepsilon_n(t)| \le 3E|\xi|^n,\ \varepsilon_n(t) \underset{t\to 0}{\to} 0;$$

(6) *Если существует и конечна* $\varphi^{(2n)}(0)$, *то* $E\xi^{2n} < \infty$;

(7) Если для всех $n \geq 1$ $E|\xi|^n < \infty$ *и*

$$\limsup \frac{(E|\xi|^n)^{1/n}}{n} = 1/T < \infty,$$

то при всех $|t| < T$

$$\varphi(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(it)^n}{n!} E\xi^n.$$

19.2. **Примеры характеристических функций.**

(1) Распределение Бернулли

$$\xi \in B(p),\ \varphi_\xi(t) = pe^{it} + q$$

(2) Биномиальное распределение

$$\xi \in B_n(p),\ \xi = \sum_{k=1}^{n} \xi_k,\ \xi_k \in B(p),\ \varphi_\xi(t) = (pe^{it} + q)^n$$

(3) Распределение Пуассона

$$\xi \in \pi(\lambda),\ \varphi_\xi(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\lambda^n e^{-\lambda + int}}{n!} = e^{-\lambda(1-e^{it})}$$

(4) Равномерное распределение

$$\xi \in U_{[a,b]},\ \varphi_\xi(t) = \int_a^b \frac{e^{itx}}{b-a} dx = \frac{e^{itb} - e^{ita}}{it(b-a)}$$

Равномерное симметричное распределение

$$\xi \in U_{[-a,a]},\ \varphi_\xi(t) = \int_{-a}^{a} \frac{e^{itx}}{2a} dx = \frac{e^{ita} - e^{-ita}}{2ita} = \frac{\sin(ta)}{ta}$$

(5) Экспоненциальное распределение

$$\xi \in \mathcal{E}(\lambda),\ \varphi_\xi(t) = \int_0^{\infty} \lambda e^{x(it-\lambda)} dx = \frac{\lambda}{it - \lambda}$$

(6) Нормальное распределение $\xi_0 \in N(0,1)$

$$\varphi_{\xi_0}(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2/2 + itx} dx = \frac{e^{-t^2/2}}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{(x-it)^2}{2}} dx = e^{-t^2/2}$$

$$\xi \in N(a, \sigma^2),\ \xi_0 = \frac{\xi - a}{\sigma},\ \xi = \sigma\xi_0 + a,\ \varphi_\xi(t) = e^{ita - (t\sigma)^2/2}.$$

19.3. **Формула обращения.**

Теорема (Формула обращения). *Пусть случайная величина ξ с функцией распределения F и характерестической функцией $\varphi(t) = Ee^{it\xi}$. Тогда в каждых двух точках a, b, $(a < b)$, где функция распределения F непрерывна, получим*

$$F(b) - F(a) = \lim_{c\to\infty} \frac{1}{2\pi} \int_{-c}^{c} \frac{e^{-ita} - e^{-itb}}{it} \varphi(t)dt. \tag{2}$$

Если

$$\int_{-\infty}^{\infty} |\varphi(t)|dt < \infty,$$

то существовет плотность f распределения и будем иметь такую формулу

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-itx} \varphi(t)dt. \tag{3}$$

Замечание 19.1. *Заметим, что формула 3 есть преобразование Фурье от функции*

$$\varphi(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{itx} f(x)dx.$$

Применяя теорему Фубини, получим

$$F(b) - F(a) = \int_a^b f(x)dx = \frac{1}{2\pi} \int_a^b [\int_{-\infty}^{\infty} e^{-itx} \varphi(t)dt]dx =$$
$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} [\int_a^b e^{-itx} dx] \varphi(t)dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-ita} - e^{-itb}}{it} \varphi(t)dt.$$

Доказательство. Рассмотрим функцию

$$\Phi_c = \frac{1}{2\pi} \int_{-c}^{c} \frac{e^{-ita} - e^{-itb}}{it} \varphi(t)dt$$

Будем иметь

$$\Phi_c = \frac{1}{2\pi} \int_{-c}^{c} \frac{e^{-ita} - e^{-itb}}{it} \int_{-\infty}^{\infty} e^{itx} f(x)dxdt =$$
$$= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-c}^{c} \frac{e^{-ita} - e^{-itb}}{it} e^{itx} dtdF(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \psi_c(x)dF(x),$$
$$\psi_c = \frac{1}{2\pi} \int_{-c}^{c} \frac{e^{-ita} - e^{-itb}}{it} e^{itx} dt.$$

Воспользовались теоремой Фубини, поскольку

$$|\frac{e^{-ita} - e^{-itb}}{it} e^{itx}| = |\frac{e^{-ita} - e^{-itb}}{it}| = |\int_a^b e^{-itx} dx| \leq b - a$$
$$\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-c}^{c} (b - a)dtdF(x) \leq 2c(b - a) < \infty$$

Заметим, что

$$\psi_c = \frac{1}{2\pi}\int_{-c}^{c}\frac{\sin t(x-a)-\sin t(x-b)}{t}dt =$$
$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-c(x-a)}^{c(x-a)}\frac{\sin t}{t}dt - \frac{1}{2\pi}\int_{-c(x-b)}^{c(x-b)}\frac{\sin t}{t}dt$$

Функция

$$g(t,s) = \int_{s}^{t}\frac{\sin x}{x}dx \to \pi,\ t\uparrow\infty,\ s\downarrow -\infty.$$

Тогда

$$\psi_c(t) \to \psi(t),\ c\to\infty,\ \psi(t) = \begin{cases} 0, & x<a \vee x>b; \\ 1/2, & x=a \vee x=b; \\ 1, & a<x<b. \end{cases}$$

Пусть μ мера на $(\mathbb{R}, \mathfrak{B}(\mathbb{R}))$, такая что $\mu[a,b) = F(b) - F(a)$. Таким образом, при $c\to\infty$ получаем

$$\Phi_c = \int_{-\infty}^{\infty}\psi_c(x)dF(x) \underset{c\to\infty}{\rightarrow} \int_{-\infty}^{\infty}\psi(t)dF(t) = \mu(a,b) + \frac{1}{2}\mu\{a\} + \frac{1}{2}\mu\{b\} =$$
$$= F(b) - F(a+0) + \frac{1}{2}(F(a+0) - F(a) + F(b+0) - F(b)) =$$
$$= \frac{F(b+0)-F(b)}{2} - \frac{F(a+0)-F(a)}{2} \underset{\text{непрерывность}}{=} F(b) - F(a).$$

Что и доказывает формулу 2.

Докажем вороую часть теоремы, используя теорему о мажорантной сходимости и теорему Фубини,

$$\int_a^b f(x)dx = \frac{1}{2\pi}\int_a^b[\int_{-\infty}^{\infty}e^{-itx}\varphi(t)dt]dx =$$
$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}[\int_a^b e^{-itx}dx]\varphi(t)dt = \lim_{c\to\infty}\frac{1}{2\pi}\int_{-c}^{c}[\int_a^b e^{-itx}dx]\varphi(t)dt =$$
$$= \lim_{c\to\infty}\frac{1}{2\pi}\int_{-c}^{c}\frac{e^{-ita}-e^{-itb}}{it}\varphi(t)dt = F(b) - F(a).$$

□

Из теоремы о формуле обращения вытекает теорема единственности.

Теорема (Единственности). *Пусть функции распределения F и G имеют одну характерестическую функцию*

$$\varphi(t) = \int_{-\infty}^{\infty}e^{itx}dF(x) = \int_{-\infty}^{\infty}e^{itx}dG(x),\ \forall t\in\mathbb{R}.$$

Тогда $F(t) = G(t),\ \forall t\in\mathbb{R}$.

Теорема. *Компоненты случайного вектора независимы $\Leftrightarrow$ характеристическая функция вектора представляется произведением характеристических функций его компанент.*

Об особенностях семейства характеристических функций говорят следующие теоремы.

Теорема (Бохнера-Хинчина). *Пусть функция* $\varphi(t)$ *непрерывна при всех* $t \in \mathbb{R}$ *и* $\varphi(0) = 1$ *Тогда* $\varphi(t)$ *- характеристическая функция* $\Leftrightarrow$ $\varphi(t)$ *- неотрицательно определенная, то есть для любых вещественных* $t_1, \dots, t_1$ *и любых комплексных* $\lambda_1, \dots, \lambda_1$, $n \geq 1$ *было бы выполнено*

$$\sum_{i,j=1}^{n} \varphi(t_i - t_j)\lambda_i\overline{\lambda_j} \geq 0.$$

Теорема (Марцинкевича). *Если характеристическая функция имеет вид* $\varphi(t) = \exp\{\mathcal{P}(t)\}$, *где* $\mathcal{P}(t)$ *многочлен, то степень многочлена не может быть больше двух* $\deg \mathcal{P}(t) \leq 2$.

Теорема (Пойя). *Пусть функция* $\varphi(t)$ *непрерывна при всех* $t \in \mathbb{R}$, *четна, выпукла вниз* $\varphi(t) \geq 0$, $\varphi(t) \to 0$, $t \to \infty$ *и* $\varphi(0) = 1$. *Тогда* $\varphi(t)$ *- характеристическая функция.*

20. Сходимость рядов из случайных величин

Определение 20.1. *Пусть* $\{\xi_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ *последовательность независимых случайных величин, заданных на вероятностном пространстве* (Ω, F, P), $\mathfrak{F}_n$ *-* σ*-алгебра, порожденная случайными величинами* $\xi_n, \xi_{n+1}, \ldots$.

Тогда σ*-алгебра*

$$\mathfrak{F} = \cap_{n=1}^{\infty}\mathfrak{F}_n$$

называется остаточной σ*-алгеброй относительно* $\{\xi_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ *последовательности независимых случайных величин, а любое событие из этой* σ*-алгебры - остаточным событием.*

Теорема (закон "0"или "1"Колмогорова). *Любое остаточное событие имеет вероятность 0 или 1.*

В частности, из этого закона следует, что ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\xi_n$ из независимых случайных величин либо с вероятностью 1 сходится либо расходится.

Теорема ("о двух рядах"). *Для сходимости с вероятностью 1 ряда* $\sum_{n=1}^{\infty}\xi_n$ *из независимых случайных величин достаточно сходимости двух рядов*

$$\sum_{n=1}^{\infty} E\xi_n, \ \sum_{n=1}^{\infty} D\xi_n.$$

Если дополнительно потребовать, чтобы $\sup_n P(|\xi_n| > c)$ *для некоторого* $c > 0$, *то эти условия станут необходимыми.*

Пусть $c > 0$, ξ - случайная величина, обозначим

$$\xi^c = \begin{cases} \xi, & \text{если } |\xi| \leq c : \\ 0, & \text{если } |\xi| > c. \end{cases}$$

Теорема ("о трех рядах"). *Для сходимости с вероятностью 1 ряда* $\sum_{n=1}^{\infty}\xi_n$ *из независимых случайных величин неоходимо, чтобы сходидилиь три ряда для любого* $c > 0$

$$\sum_{n=1}^{\infty} E\xi_n^c, \ \sum_{n=1}^{\infty} D\xi_n^c, \ \sum_{n=1}^{\infty} P(|\xi_n| \geq c),$$

и достаточно для некоторого $c > 0$.

21. МЕТОД ХАРАКТЕРИСТИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ. ЦЕНТРАЛЬНАЯ ПРЕДЕЛЬНАЯ ТЕОРЕМА (ЦПТ)

Теорема (Хинчина). *Пусть* $\{\xi_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ *последовательность независимых одинаково распределенных случайных величин и*

$$E\xi_i = a.$$

Тогда последовательность случайных величин удовлетворяет ***закону больших чисел.***

Доказательство. Из конечности первого момента следует разложение характеристической функции

$$\varphi_{\xi_i}(t) = \varphi(t) = 1 + ita + o(t),\ t \to 0.$$

Используя независимость, получим

$$\varphi_{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n \xi_i}(t) = (\varphi(\frac{t}{n}))^n = (1 + \frac{ita}{n} + o(\frac{t}{n}))^n \underset{n\to\infty}{\to} e^{ita}.$$

Заметим, что e^{ita} - характеристическая функция $\xi:\ P(\xi = a) = 1$.

$$F_\xi = \begin{cases} 0, & x \le a; \\ 1, & x > a. \end{cases}$$

Следовательно, мы доказали, что есть слабая сходимость $\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n \xi_i \xrightarrow{d} \xi$.

Докажем теперь, что есть и сходимость по вероятности.

Пусть $\varepsilon > 0$, тогда

$$P(|\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n \xi_i - a| < \varepsilon) =$$

$$= F_{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n \xi_i}(a+\varepsilon) - F_{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n \xi_i}(a-\varepsilon) \underset{n\to\infty}{\to} F_\xi(a+\varepsilon) - F_\xi(a-\varepsilon) = 1$$

Поскольку у функции распределения ξ единственная точка разрыва a, то точки $a+\varepsilon$, $a-\varepsilon$ будут точками непрерывности, а в них будет сходимость по распределению. □

Теорема (ЦПТ для н.о.р.с.в.). *Пусть* $\{\xi_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ *последовательность независимых одинаково распределенных случайных величин и*

$$E\xi_i = a, D\xi_i = \sigma^2 < \infty.$$

Тогда справедлива ***центральная предельная теорема***

$$\frac{\sum_{i=1}^n(\xi_i - a)}{\sigma\sqrt{n}} \xrightarrow{d} \xi \in N(0,1),$$

другими словами,

$$P(\frac{\sum_{i=1}^n(\xi_i - a)}{\sigma\sqrt{n}} < x) \to \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^x e^{-t^2/2}dt = \Phi(x).$$

Доказательство. Из конечности дисперсии следует разложение характеристической функции

$$\varphi_{\xi_i - a}(t) = \varphi(t) = 1 - \sigma^2 t^2 + o(t^2),\ t \to 0.$$

Используя независимость, получим

$$\varphi_{\frac{1}{\sigma\sqrt{n}}\sum_{i=1}^n(\xi_i-a)}(t) = (\varphi(\frac{t}{\sigma\sqrt{n}}))^n = (1-\frac{t^2}{n}+o(\frac{t^2}{n}))^n \underset{n\to\infty}{\to} e^{-t^2/2}.$$

Заметим, что $e^{-t^2/2}$ - характеристическая функция нормального закона.

Следовательно, мы доказали, что есть слабая сходимость $\frac{\sum_{i=1}^n(\xi_i-a)}{\sigma\sqrt{n}} \xrightarrow{d} \xi \in N(0,1)$.

□

Интегральную теорему Муавра-Лапласа можно рассматривать как следствие из теоремы 21.

Теорема (Линдеберга). *Пусть* $\{\xi_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ *последовательность независимых случайных величин и*

$$E\xi_i = a_i, D\xi_i = \sigma_i^2 < \infty,\ D_n^2 = \sum_{i=1}^n \sigma_i^2.$$

Предположим, что для любого $\varepsilon > 0$ *дробь Линдеберга*

$$\frac{1}{D_n^2}\sum_{i=1}^n \int_{|x-a_i|>\varepsilon D_n} (x-a_i)^2 dF_i(x) \underset{n\to\infty}{\to} 0.$$

Тогда справедлива центральная предельная теорема

$$\frac{S_n - ES_n}{\sqrt{DS_n}} \xrightarrow{d} \xi \in N(0,1),\ S_n = \sum_{i=1}^n \xi_i,$$

другими словами,

$$P(\frac{\sum_{i=1}^n(\xi_i-a_i)}{D_n} < x) \to \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^x e^{-t^2/2}dt = \Phi(x).$$

риведем еще одну теорему, которая является следствием теоремы Линдеберга.

Следствие 2 (Теорема Ляпунова). *Пусть* $\{\xi_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ *последовательность независимых случайных величин и*

$$E\xi_i = a_i, D\xi_i = \sigma_i^2 < \infty,\ D_n^2 = \sum_{i=1}^n \sigma_i^2.$$

Предположим, что существует $\delta > 0$, *такое что дробь Ляпунова*

$$\frac{1}{D_n^{2+\delta}}\sum_{i=1}^n E|\xi_i - a_i|^{2+\delta} \underset{n\to\infty}{\to} 0.$$

Тогда справедлива центральная предельная теорема

$$\frac{S_n - ES_n}{\sqrt{DS_n}} \xrightarrow{d} \xi \in N(0,1),\ S_n = \sum_{i=1}^n \xi_i.$$

Доказательство. Пусть $\varepsilon > 0$, тогда

$$E|\xi_i - a_i|^{2+\delta} = \int_{-\infty}^{\infty} |x - a_i|^{2+\delta} dF_i(x) \geq$$

$$\geq \int_{|x-a_i|>\varepsilon D_n} |x - a_i|^{2+\delta} dF_i(x) \geq \varepsilon^{\delta} D_n^{\delta} \int_{|x-a_i|>\varepsilon D_n} |x - a_i|^{2} dF_i(x)$$

Следовательно,

$$\frac{1}{D_n^2} \sum_{i=1}^{n} \int_{|x-a_i|>\varepsilon D_n} (x - a_i)^2 dF_i(x) \leq \frac{1}{\varepsilon^{\delta} D_n^{2+\delta}} \sum_{i=1}^{n} E|\xi_i - a_i|^{2+\delta} \underset{n\to\infty}{\to} 0.$$

□

22. Понятие выборки, статистики. Выборочная функция распределения, выборочные моменты. Теорема Гливенко-Кантелли

Выборкой объема n называется множество значений случайного вектора , заданного на вероятностном пространстве $(\xi_1, \ldots, \xi_n) : (\mathcal{X}^n, \mathcal{F}^n, \mathcal{P}_\theta^n)$ - декартовом произведении пространств $(\mathcal{X}, \mathcal{F}, \mathcal{P}_\theta)$ с функцией распределения F_θ, где $\theta \in \Theta$ неизвестный параметр распределения.

Статистикой T называют любуй случайную величину заданную на $\mathcal{X}^n$, $T : \mathcal{X}^n \to \mathbb{R}^k$.

Рассмотрим следущую статистику для выборки $(x_1, \ldots, x_n)$ с функцией распределения F, называемую *выборочной функцией распределения*, которую можно задать так:

$$F_n(t) = \frac{\sum_{i=1}^n I_{\{x_i<t\}}(t)}{n} = \frac{\text{число } x_i < t}{n}$$

Заметим, что

$$EI_{\{x_i<t\}} = 1 \cdot P(x_i < t) + 0 \cdot P(x_i \le t) = F(t).$$

Тогда по З.Б.Ч. Хинчина будем иметь

$$F_n(t) \underset{P}{\longrightarrow} F(t), \forall\ t \in \mathbb{R};$$

и по У.З.Б.Ч. Колмогорова будем иметь

$$F_n(t) \underset{\text{п.н.}}{\longrightarrow} F(t), \forall\ t \in \mathbb{R}.$$

Теорема. *Выборочная функция распределения при бесконечном возрастании объема выборки сходится к функции распределения выборки равномерно по всем* $t \in \mathbb{R}$

$$P(\sup_{-\infty<t<+\infty} |F_n(t) - F(t)| \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0) = 1$$

Доказательство. Рассмотрим для простоты лишь случай непрерывной функции распределения.

Возьмем произвольное $k \in \mathbb{N}$.

Представим дробление интервала $(0,1] = \bigcup_{k-1}^{m=0} (\frac{m}{k}, \frac{m+1}{k}]$ и обозначим t_m прообразы точек дробления $F(t_m) = \frac{m}{k}$, $t_0 = -\infty$, $t_k = +\infty$.

$$\forall t \in \mathbb{R}\ \exists m \in 0, \ldots, k :\ t \in (t_m, t_{m+1}).$$

Рассмотрим разность выборочной и реальной функции распределения, учитывая их возрастание.

$$F_n(t) - F(t) \leq F_n(t_{m+1}) - F(t_m) = F_n(t_{m+1}) - F(t_{m+1}) + F(t_{m+1}) - F(t_m) \leq$$
$$F_n(t_{m+1}) - F(t_{m+1}) + \frac{1}{k};$$
$$F_n(t) - F(t) \geq F_n(t_m) - F(t_{m+1}) = F_n(t_m) - F(t_m) + F(t_m) - F(t_{m+1}) \leq$$
$$F_n(t_m) - F(t_{m+1}) - \frac{1}{k};$$
$$\underset{t\in\mathbb{R}}{sup}|F_n(t) - F(t)| \leq \underset{m=\overline{0,k-1}}{max}|F_n(t_{m+1}) - F(t_{m+1})| + \frac{1}{k}.$$

Обозначим события $A_l = \{F_n(t_l) - F(t_l) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0\}$. Тогда по теореме Колмогорова У.З.Б.Ч. $P(A_l) = 1,\ \forall l \in 0, \ldots, k$, следовательно, $P(\bigcap_{l=0}^{k} A_l) = 1$.

Это значит, что

$$\forall\omega \in A_l,\ \forall l \in 0, \ldots, k\ \exists n(\omega):\ \forall n > n(\omega)\ \Rightarrow\ |F_n(t_l) - F(t_l| \leq \frac{1}{k}.$$

Таким образом,

$$P(\sup_{-\infty<t<+\infty}|F_n(t) - F(t)| \leq \frac{2}{k} \underset{k\to\infty}{\longrightarrow} 0) = 1;$$

□

Пусть $V(F)$ - некоторая характеристика распределения, например, математическое ожидание или дисперсия. Тогда можно рассмотреть статистику $V(F_n) = V(\frac{\sum_{i=1}^{n} I_{\{x_i<t\}}(t)}{n})$ - оценку характеристики $V(F)$.

В частности, если

$$V(F) = Ex_n = \int_{\mathbb{R}} xdF(x),$$

то

$$V(F_n) = \int_{\mathbb{R}} xdF_n(x) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i = \overline{x}$$

- выборочное среднее - оценка для мат ожидания.

Если

$$V(F) = Ex_n^k = \int_{\mathbb{R}} x^k dF(x),$$

то

$$V(F_n) = \int_{\mathbb{R}} x^k dF_n(x) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i^k$$

- *выборочный k-тый момент* - оценка для k-того момента.

Если

$$V(F) = E(x_n - Ex_n)^k = \int_{\mathbb{R}} (x - Ex_n)^k dF(x),$$

то

$$V(F_n) = \int_{\mathbb{R}} (x - \overline{x})^k dF_n(x) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} (x_i - \overline{x})^k$$

- *выборочный k-тый центральный момент* - оценка для k-того центрального момента.

Второрой центральный выборочный момент - *выборочная дисперсия.*

$$s_n^2 = \int_{\mathbb{R}} (x - \overline{x})^2 dF_n(x) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} (x_i - \overline{x})^2$$

23. Типы статистик: несмещенность, состоятельность, нормальность. Теорема о выборочном среднем и выборочной десперсии

Пусть у нас есть выборка $(x_1, \dots, x_n)$, $V(F)$ - некоторая характеристика распределения, ее оценка - статистика T_n. Тогда различают следующие типы статистик:

(1) *Несмещенная статистика* - T_n, если $ET_n = V(F)$. *Асимптотически несмещенная статистика* - T_n, если $ET_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} V(F)$.
(2) *Состоятельная статистика* - T_n, если $T_n \underset{P}{\longrightarrow} V(F)$. *Сильно состоятельная статистика* - T_n, если $T_n \underset{\text{п.н.}}{\longrightarrow} V(F)$.
(3) *Асимптотически нормальная статистика* - T_n, если $\sqrt{n}(T_n - V(F)) \underset{d}{\longrightarrow} N(0, \sigma^2(V(F)))$.

Таким образом выборочная функция распределения - несмещенная и сильно состоятельная статистика для функции распределения.

Сформулируем и докажем теоремы о свойствах среднего и выбоочной дисперсии.

Теорема. *Пусть дана выборка $(x_1, \dots, x_n)$ с функцией распределения F и $E|x_n| < \infty$.*

Тогда справедливы следующие утверждения:

(1) $\overline{x}$ несмещенная оценка для Ex_n
(2) $\overline{x}$ сильно состоятельная для Ex_n
(3) Если $Ex_n^2 < \infty$, то $\overline{x}$ асимптотически-нормальная для Ex_n

Доказательство. (1) Несмещенность: $E\overline{x} = E\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n x_i = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n x_i = Ex_n$.

(2) Поскольку $E|x_n| < \infty$, то по теореме Колмогорова (У.З.Б.Ч.) следует сильная состоятельность

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i \underset{\text{п.н.}}{\longrightarrow} Ex_n.$$

(3) По Ц.П.Т. для н.о.р.с.в получим асимптотическую нормальность:

$$\sqrt{n}(\overline{x} - Ex_n) = \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - Ex_i)}{\sqrt{n}} \underset{d}{\longrightarrow} N(0, \sigma^2)$$

□

Теорема. *Пусть дана выборка $(x_1, \dots, x_n)$ с функцией распределения F и конечной дисперсией $\sigma^2 = Dx_n < \infty$.*

Тогда справедливы следующие утверждения:

(1) s_n^2 асимптотически несмещенная оценка для σ^2
(2) s_n^2 состоятельная для σ^2
(3) Если $Ex_n^4 < \infty$, то s_n^2 асимптотически-нормальная для σ^2

Доказательство. Заметим, что поскольку сдвиг не меняет выборочную дисперсию,

$$s_n^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}((x_i - a) - (\overline{x} - a))^2$$

то можно предположить, что $Ex_n = 0$, $E(x_n^2 - \sigma^2)^2 = D\sigma^2$.

(1) Асимптотическая несмещенность:

$$Es_n^2 = E\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - E\overline{x}^2 = \sigma^2 - \frac{1}{n^2}\sum_{i,j} E(x_i x_j) = \sigma^2 - \frac{1}{n}\sigma^2 = \frac{n-1}{n}\sigma^2.$$

$Es_n^2 \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \sigma^2.$

(2)

$$P(|s_n^2 - \sigma^2| > \epsilon) = P(|\frac{\sum_{i=1}^n (x_i^2 - \sigma^2)}{n} - \overline{x}^2| > \epsilon) \leq$$

$$P(|\frac{\sum_{i=1}^n (x_i^2 - \sigma^2)}{n}| > \epsilon/2) + P(|\overline{x}^2| > \epsilon/2) = p_1 + p_2,\ p_1 \longrightarrow 0,$$

$$p_2 = P(|\overline{x}^2| > \epsilon/2) \leq \frac{2E(\overline{x}^2)}{\epsilon} = \frac{2\sigma^2}{n\epsilon} \to 0.$$

(3)

Лемма 23.1.

$$\xi_n \underset{d}{\longrightarrow} \xi,\ \eta_n \underset{P}{\longrightarrow} 0\ \Rightarrow\ \xi_n + \eta_n \underset{d}{\longrightarrow} \xi$$

Доказательство. Рассмотрим разность соответствующих характеристических функций

$$|f_{\xi_n+\eta_n}(t) - f_\xi(t)| = |f_{\xi_n+\eta_n}(t) - f_{\xi_n}(t)| + |f_{\xi_n}(t) - f_\xi(t)| \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0;$$

$$|f_{\xi_n+\eta_n}(t) - f_{\xi_n}(t)| \leq E|e^{it\xi_n}(e^{it\eta_n} - 1)| \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0,\ |e^{it\xi_n}(e^{it\eta_n} - 1)| \leq 2.$$

□

Асимптотическую нормальность:

$$\sqrt{n}(s_n^2 - \sigma^2) = \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \overline{x})^2 - \sigma^2)}{\sqrt{n}} = \frac{\sum_{i=1}^n (x_i^2 - \sigma^2)}{\sqrt{n}} - \sqrt{n}\overline{x}^2 = \xi_n + \eta_n \underset{d}{\longrightarrow} N(0, D\sigma^2)$$

По Ц.П.Т. для н.о.р.с.в получим

$$\xi_n = \frac{\sum_{i=1}^n (x_i^2 - \sigma^2)}{\sqrt{nD\sigma^2}} \underset{d}{\longrightarrow} N(0,1).$$

$$\eta_n \underset{P}{\longrightarrow} 0:\ P(\sqrt{n}\overline{x}^2 > \epsilon) \leq \frac{E(\sqrt{n}\overline{x}^2)}{\epsilon} = \frac{\sqrt{n}\sum_{i,j} Ex_i x_j}{n^2\epsilon} = \frac{\sigma^2}{\sqrt{n}\epsilon} \to 0.$$

□

24. Порядковые статистики или Вариационный ряд

Пусть дана выборка $(x_1, \dots, x_n)$, упорядочим ее по возрастанию:

$$x_{(1)} = \min\{x_1, \dots, x_n\},$$
$$x_{(2)} = \min(\{x_1, \dots, x_n\} \setminus \{x_{(1)}\}),$$
$$***$$
$$x_{(k)} = \min(\{x_1, \dots, x_n\} \setminus \{x_{(1)}, \dots, x_{(k-1)}\}),$$
$$***$$
$$x_{(n)} = \max\{x_1, \dots, x_n\}.$$

Тогда $(x_{(1)}, \dots, x_{(n)})$ назовем *вариационным рядом* или *порядковыми статистиками.*

Рангом порядковой статистики назовем номер члена вариационного ряда в первоначальной выборке:

$$R_i = k, \text{ если } x_{(i)} = x_k.$$

Средними членами вариационного ряда назовем $x_{(k)}: \ \frac{k}{n} \to p \in (0, 1)$, *крайними* - $x_{(k)}: \ \frac{k}{n} \to 0 \vee 1$.

Найдем функцию распределения и плотность k-той порядковой статискики

$$F_{x_{(k)}}(t) = P(x_{(k)} < t) = P(\text{по крайне мере k из } x_i < t) =$$
$$P(\sum_{i=k}^{n} I_{(x_i<t)}(t) \ge i) = \sum_{i=k}^{n} C_n^i F(t)^i (1 - F(t))^{n-i}$$

$$p_{x_{(k)}}(t) = F_{x_{(k)}}(t)' = \sum_{i=k}^{n} iC_n^i F(t)^{i-1}(1 - F(t))^{n-i} -$$
$$\sum_{i=k}^{n} (n - i)C_n^i F(t)^i (1 - F(t))^{n-i-1} = kC_n^k F(t)^{k-1}(1 - F(t))^{n-k} -$$
$$(n - k)C_n^k F(t)^k (1 - F(t))^{n-k-1} + (k - 1)C_n^{k-1} F(t)^k (1 - F(t))^{n-k-1} - \ldots =$$
$$kC_n^k F(t)^{k-1}(1 - F(t))^{n-k}.$$

Остается только первое слагаемое - остальные сокращаются друг с другом.

Пример 24.1. *Рассмотрим выборку из равномерного распределения* $x_i \in U_{[0,1]}$. *Найдем математическое ожидание* k*-той порядковой статистики из равномерного распределения.*

$$p_{x_{(k)}}(t) = kC_n^k x^{k-1}(1 - x)^{n-k};$$
$$Ex_{(k)} = kC_n^k \int_0^1 x x^{k-1}(1 - x)^{n-k} dx = kC_n^k B(k + 1, n - k + 1) =$$
$$\frac{kC_n^k \Gamma(k + 1)\Gamma(n - k + 1)}{\Gamma(n + 2)} = \frac{n!k!(n - k)!}{(k - 1)!(n - k)!(n + 1)!} = \frac{k}{n + 1}$$

Рассмотрим новую выборку полученную действием функции распределения на первоначальную. При действии функции распределений вариационный ряд превращается в новый вариационный ряд, причем вариационный ряд составленный из выборки равномерного распределения. Покажем это.

$$(x_1,\dots,x_n),\ (F(x_1),\dots,F(x_n))=(Y_1,\dots,Y_n)$$

$$(x_{(1)},\dots,x_{(n)})$$

$$(F(x_{(1)}),\dots,F(x_{(n)}))=(Y_{(1)},\dots,Y_{(n)}).$$

$$F_{Y_k}(t)=P(Y_k<t)=P(F(x_k)<t)=P(x_k<F^{-1}(t))=$$

$$F(F^{-1}(t))=t\ \Rightarrow\ Y_k\in U_{[0,1]}.$$

Тогда

$$EF(x_{(k)})=EY_{(k)}=\frac{k}{n+1}\ \Rightarrow\ x_{(k)}\approx F^{-1}(\frac{k}{n+1}).$$

Пример 24.2. *Рассмотрим выборку из экспоненциального распределения* $x_i\in\mathcal{E}(1),\ F(t)=\begin{cases}0, & t<0;\\ 1-e^{-t}, & t\geq 0.\end{cases}$

$$F_{x_{(n)}}=F(t)^n$$

$$P(x_{(n)}<t+\ln n)=F(t+\ln n)^n=\begin{cases}0, & t+\ln n<0;\\ (1-e^{-t-\ln n})^n\to e^{-e^{-t}}, & t+\ln n\geq 0\end{cases}$$

$$P(x_{(n)}<t+\ln n)\to e^{-e^{-t}}$$

Асимптотика крайнего члена - распределение Вейбулла-Гнеденко.

Теорема. *Предположим, что* $\frac{k}{n}\to p\in(0,1)$ *Пусть квантиль* $x_p:F(x_p)=p$, *плотность распределения* f *выборки. Тогда*

$$\sqrt{\frac{n}{p(1-p)}}f(x_p)(x_{(k)}-x_p)\xrightarrow[d]{}N(0,1).$$

25. Выборка из нормального распределения. χ^2 распределение и распределение Стьюдента. Лемма Фишера

Пусть у нас даны независимые случайные величины $\xi_0, \xi_1, \ldots, \xi_n$, $\xi_i \in N(0,1)$ из стандартного нормального закона.

χ^2 распределением с n степенями свободы назовем распределение соответствующее

$$\chi_n^2 \underset{d}{=} \sum_{i=1}^{n} \xi_i^2$$

Плотность и функция распределения для χ^2 распределения будут такими:

$$k_n(t) = \begin{cases} 0, & x < 0; \\ \frac{t^{\frac{n}{2}-1}e^{-\frac{t^2}{2}}}{2^{\frac{n}{2}}\Gamma(\frac{n}{2})}, & x \le 0. \end{cases}$$

$$\mathcal{K}_n(t) = P(\chi_n^2 < t) = \int_0^t \frac{x^{\frac{n}{2}-1}e^{-\frac{x^2}{2}}}{2^{\frac{n}{2}}\Gamma(\frac{n}{2})}dx, \ t > 0$$

График плотности можно увидеть на рисунке 25

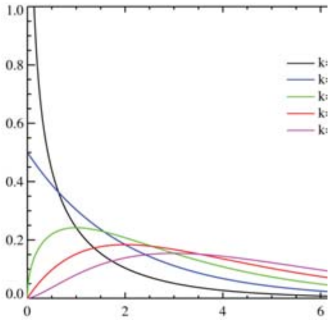


График распределения можно увидеть на рисунке 25

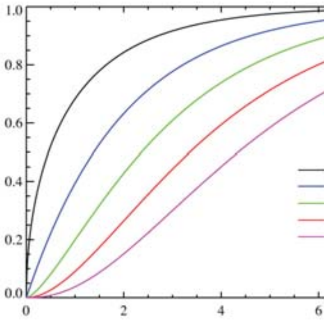
Распределением Стьюдента с n степенями свободы назовем распределение соответствующее

$$t_n = \frac{\xi_0}{\sqrt{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\xi_i^2}} = \frac{\xi_0}{\sqrt{\frac{\chi_n^2}{n}}}$$

Плотность и функция распределения для распределения Стьюдента с n степенями свободы будут такими:

$$s_n(t) = \frac{\Gamma(\frac{n+1}{2})(1+\frac{t^2}{n})^{-\frac{n+1}{2}}}{\sqrt{\pi n}\Gamma(\frac{n}{2})},$$

$$\mathcal{S}_n(t) = P(\chi_n^2 < t) = \int_0^t \frac{\Gamma(\frac{n+1}{2})(1+\frac{x^2}{n})^{-\frac{n+1}{2}}}{\sqrt{\pi n}\Gamma(\frac{n}{2})}dx, \ t > 0$$



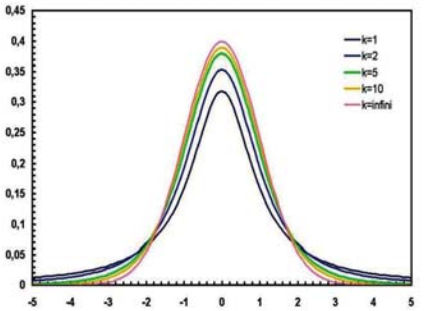


График плотности можно увидеть на рисунке 25

График распределения можно увидеть на рисунке 25

Лемма 25.1 (Фишера). *Пусть у нас есть выборка* $x_1, \ldots, x_n$, $x_i \in N(a, \sigma^2)$ *из нормального закона.*

Тогда

(1) $\sqrt{n}\frac{\overline{x}-a}{\sigma} \in N(0,1)$;

(2) $\overline{x}$, s_n^2 *- независимы;*

(3) $\frac{ns_n^2}{\sigma^2} \in \chi^2_{n-1}$;

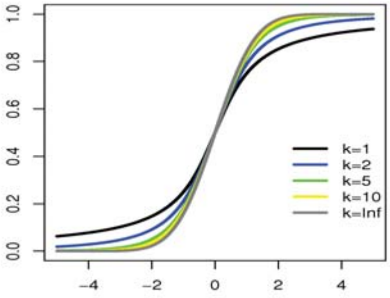
(4) $\sqrt{n-1}\frac{\overline{x}-a}{s_n} \in t_{n-1}$.

Доказательство. (1)

$$\sqrt{n}\frac{\overline{x}-a}{\sigma} = \frac{\sqrt{n}}{\sigma}\frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i-a)}{n} = \frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i-a)}{\sigma\sqrt{n}} \in N(0,1)$$

По Ц.П.Т.

(2) $\overline{x}$, $s_n^2 \underset{d}{=} \sum_{i=2}^{n} \xi_i^2$ - независимы;



(3) Пусть $Ex_n = a = 0$.

$$\frac{ns_n^2}{\sigma^2} = \frac{n}{\sigma^2}(\frac{\sum_{i=1}^n x_i^2}{n} - \overline{x}^2) = \frac{n}{\sigma^2}(\frac{\sum_{i=1}^n x_i^2}{n}) - (\sqrt{n}\overline{x})^2 =$$

$$\frac{\sum_{i=1}^n x_i^2}{\sigma^2} - (\sum_{i=1}^n \frac{x_i}{\sqrt{n}})^2 \underset{d}{=} \sum_{i=1}^n \xi_i^2 - \xi_1^2 \underset{d}{=} \sum_{i=2}^n \xi_i^2 \in \chi_{n-1}^2$$

Лемма 25.2. *Пусть вектор $X \in N(\mathbb{O}, I)$ нормально распределен и матрица C ортагональна ($C \cdot C^T = I$), и $Y = CX$.*

Тогда $Y \in N(\mathbb{O}, I)$

Пусть $\widetilde{X} = (\widetilde{x}_1, \ldots, \widetilde{x}_n)$, $\widetilde{x}_i = \frac{x_i}{\sigma}$.
$Y = C\widetilde{X} = (y_1, \ldots, y_n)^t$, $y_1 = \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{i=1}^n \widetilde{x}_i = \sqrt{n}\overline{\widetilde{x}}$

Тогда $\widetilde{X}, Y$ имеют одинаковое распределение.

(4) $\sqrt{n-1}\frac{\overline{x}-a}{s_n} = \sqrt{n}\frac{\overline{x}-a}{\sigma\sqrt{\frac{ns_n^2}{(n-1)\sigma^2}}} \underset{d}{=} \frac{\xi_0}{\sqrt{\frac{\chi_{n-1}^2}{n-1}}} \in t_{n-1}$.

□

26. Список вопросов по "Теории Вероятностей"

(1) История развития Теории Вероятностей.
(2) Аксиоматическое определение вероятности, понятие σ-алгебры, свойства вероятности. Теорема о равносильности счетной аддитивности и непрерывности вероятности как меры.
(3) Классическое определение вероятности, примеры вероятностных пространств. Различные модели размещений.
(4) Геометрическое определение вероятности. Примеры:
  - задача Бюффона,
  - парадокс Бертрана.
(5) Независимость событий, условная вероятность, формула полной вероятности, формула Байеса. Различные виды независимости событий, примеры. Урновая схема Лапласа.
(6) Определение случайной величины, понятие измеримой функции. Распределение случайной величины.
(7) Независимые испытания Бернулли, теорема Бернулли.
(8) Локальная и интегральная теорема Муавра-Лапласа, лемма о наиболее вероятном числе успехов.
(9) Теорема Пуассона о схеме серий.
(10) Функция распределения случайной величины, определение, свойства.
(11) Непрерывные и дискретные случайные величины, определения, примеры.
(12) Теорема о построении случайной величины по заданной функции распределения.
(13) Распределение случайного вектора в n-мерном вещественном пространстве, определение, свойства. Независимость случайных величин.
(14) Понятие интеграла Стилтьеса. Функция от случайных величин. Понятие свертки.
(15) Определение и свойства математического ожидания. Примеры вычисления для дискретных и непрерывных случайных величин.
(16) Определение и свойства дисперсии. Примеры вычисления для дискретных и непрерывных случайных величин.
(17) Моменты случайных величин. Неравенства, связанные с моментами. Ковариация и коэффициент корреляции. Связь корреляции и независимости, пример.
(18) Различные виды сходимости. Логические связи между определениями, доказательство импликаций. Лемма Бореля-Кантелли.
(19) Закон больших чисел и усиленный закон больших чисел. Неравенство Чебышева и Маркова. ЗБЧ для сумм независимых случайных величин. ЗБЧ для слабозависимых случайных величин. Теоремы Хинчина и Колмогорова.
(20) Характеристические функции. Определение, свойства, Теорема о формуле обращения. Теорема единственности. Теоремы о характеристических фукциях.
(21) Сходимость рядов из случайных величин
(22) Центральная предельная теорема, теоремы Линдеберга, Ляпунова, Леви. Интегральная теорема Муавра-Лапласа как следствие ЦПТ.

(23) Понятие выборки, статистики. Основные характеристики статистик (несмещенность, состоятельность, асимптотическая нормальность).
(24) Теорема Гливенко-Кантелли.
(25) Выборочное среднее, выборочная дисперсия. Теорема о свойствах этих статистик.
(26) Порядковые статистики, определение, свойства, пример порядковых статистик для равномерного распределения.
(27) Свойства выборки из нормального закона, лемма Фишера. Определение распределения и распределения Стьюдента.

27. Список литературы

(1) Боровков А.А. Математическая статистика. Оценка параметров. Проверка гипотез. 1984.М., "Наука".
(2) Боровков А.А. Математическая статистика. 2007. Москва. Физматлит.
(3) Гихман И.И., Скороход А.В. Введение в теорию случайных процессов. 1977. Москва. "Наука".
(4) Гнеденко Б.В. Курс теории вероятностей. 2001. Москва. Издательство "УРСС"
(5) Колмогоров А.Н. Основные понятия теории вероятностей. 1998. Москва. Издательство "Фазис"
(6) Крамер Г. Математические методы статистики. 1975. М., "Мир".
(7) Прохоров А.В., Ушаков В.Г., Ушаков Н.Г. Задачи по теории вероятностей. Основные понятия. Предельные теоремы. Случайные процессы. Учебное пособие. 2009. Москва. Издательство "КДУ"
(8) Секей Г. Парадоксы в теории вероятностей и математической статистике. 1990. Издательство "Мир"
(9) Тихомиров С.Р. Расчетные задания по теории вероятностей. 1999. Санкт-Петербург. "Нестор".
(10) Феллер В. Введение в теорию вероятностей и ее приложения. 1984. М., "Мир". 1,2 том
(11) Ширяев А.Н. Вероятность. 1,2 том, 2004, Москва, Издательство МЦНМО

ИПММ, Санкт–Петербургский Политехнический Университет Петра Великого, Политехническая ул. 29, 195251, Санкт–Петербург, Россия

E-mail address: `gale.inferno@gmail.com`