Министерство образования и науки Российской Федерации
Федеральное государственное автономное образовательное учреждение
высшего образования
«Санкт-Петербургский политехнический университет Петра Великого»
Институт компьютерных наук и технологий
Кафедра «Системы и технологии управления»

Работа допущена к защите

Заведующий кафедрой СТУ

________В.П. Шкодырев

«___»__________2016 г.

ВЫПУСКНАЯ КВАЛИФИКАЦИОННАЯ РАБОТА БАКАЛАВРА

Планирование неоднородных испытаний в условиях неопределенности

направление 09.03.01 – Информатика и вычислительная техника

профиль 09.03.01_07 – Интеллектуальные системы обработки информации и управления

Выполнил студент гр. 43503/3	<>	Ю.Е.Иванов
Научный руководитель доктор технических наук, профессор	<>	Ю.М. Смирнов

Санкт-Петербург

2016

Оглавление

Введение

Проблема исследования заключается в задаче распределения ограниченных ресурсов при проведении испытаний в условиях неопределенности.

Целью работы является обоснование трехэтапного процесса планирования испытаний и определение характеристик этих этапов.

Задачи исследования:

- Анализ гипотез на начальном этапе и определение его характеристик.
- Анализ способов построения текущих оценок для характеристических параметров.
- Экспериментальное определение характеристик для второго и третьего этапов испытаний

Глава 1. Аналитический обзор публикаций и определение задач исследования

1.1 Вывод исходных соотношений при итерационной процедуре оценки вероятности сложного события

Пусть вероятность сложного события $P = \Phi(p_1, p_2, ...p_k)$,где p_i вероятность элементарных событий; в частности, если решение системной задачи зависит от выполнения последовательности операций, то

$$P = \prod_{i=1}^{k} p_i \qquad (1.1)$$

Например, для корректной работы (ПКР), а, следовательно, и системы управления (СУ), как одной из частей комплекса, в качестве показателя эффективности предлагается использовать вероятность P - вероятность выполнения поставленной цели . выполнение зависит от успешного завершения каждого этапа полета.В формуле (1.1): p_i - вероятность успешного завершения i-го этапа полета из N этапов, каждый из которых может, в свою очередь, быть разделен на разное количество подэтапов. Для оценки P по частотам элементарных событий необходимо провести серию экспериментов ($n_1, n_2, ..., n_k$), результатом которых будет число появлений соответствующих событий ($m_1, m_2, ...m_k$). Тогда относительная ошибка в определении P:

$$\frac{\partial P}{P} = \sum_{i=k}^{k} \frac{1}{\Phi} \cdot \frac{\partial \Phi}{\partial P_i} \cdot dp_i \,, \tag{1.2}$$

а её дисперсия:

$$D = \sum_{i=1}^{k} D_i \,, \tag{1.3}$$

где

$$D_i = \frac{y_i^2}{n_i}, y_i^2 = \left(\frac{1}{\Phi} \cdot \frac{\partial \Phi}{\partial p_i}\right)^2 \cdot p_i \cdot q_i \,. \tag{1.4}$$

При $P = \prod_{i=1}^{k} p_i$ имеем $y_i^2 = \frac{q_i}{p_i}$.

Общая стоимость серии экспериментов:

$$S = \sum_{i=1}^{k} S_i \,, \tag{1.5}$$

где $S_i = x_i^2 \cdot n_i, x_i^2 = \alpha_i, \alpha_i$ -стоимость одного эксперимента i-го типа, а n_i - число экспериментов i-го типа.

Выражения (1.4) и (1.5) позволяют сформулировать задачу минимизации дисперсии D при заданных затратах $S = S_0$, иными словами задачу планирования испытаний:

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^{k} \frac{y_i^2}{n_i} \to \min, \\ \sum_{i=1}^{k} x_i^2 \cdot n_i = S_0 \end{cases} \tag{1.6}$$

Формула (1.6) – это уравнения Лагранжа, которые описывают необходимые условия оптимальности, и решение задачи планирования испытаний должно удовлетворять им.

Формальное решение задачи (в предположении о непрерывном распределении ресурсов) вытекает из уравнения Лагранжа:

$$\frac{\partial}{\partial n_i}\left\{D + \lambda^2 \cdot S\right\} = 0 \text{ (i=1,2,….k),} \tag{1.7}$$

или

$$-\frac{y_i^2}{n_i^2} + \lambda^2 \cdot x_i^2 = 0 \tag{1.8}$$

и даётся формулами:

$$\alpha_i \cdot n_i = \frac{x_i \cdot y_i}{(x \cdot y)} \cdot S_0 \qquad (1.9)$$

При этом:

$$\frac{D_i}{S_i} = \lambda^2, \qquad (1.10)$$

В данном случае множитель Лагранжа – это некоторое число, обозначающее коэффициент пропорциональности между компонентами от производных S и D в оптимальной точке.

$$D_{\min} = \lambda^2 \cdot S_0 = \frac{(x \cdot y)^2}{S_0}. \qquad (1.11)$$

Непосредственно использовать формальное решение нельзя, так как в формуле (1.9) входят оцениваемые величины y_i. Но возможны другие варианты распределения ресурсов, не требующие априорного знания y_i, которые основаны на использовании гипотез.

1.2Учет и компенсация неопределенностей в процессе планирования испытаний

Пусть функционирование системы характеризуется критериальной функцией F в пространстве непрерывного изменения переменных $x_i,\ (i=\overline{1...n})$. Необходимо найти такай вектор переменных x^{opt} , который минимизирует критериальную функцию

$$\begin{cases} F(x) \to min; \\ G(x) \le G_0. \end{cases} \qquad (1.12)$$

в области ограничений G. Построим функцию Лагранжа

$$S(x) = F(x) + \lambda G(x), \qquad (1.13)$$

где λ -множитель Лагранжа. Необходимыми условиями экстремума функции Лагранжа являются: $\partial S/\partial x_i = 0, \quad \partial S/\partial \lambda = 0$, или

$$\begin{cases} f_i + \lambda g_i = 0, \\ G(x) \le G_0 \qquad i=\overline{1...n}. \end{cases} \quad (1.14)$$

Заметим, что из физических соображений обычно:

$$f_i = \frac{\partial F}{\partial x_i} < 0, \quad g_i = \frac{\partial G}{\partial x_i} > 0,$$

тогда $\lambda > 0$ и минимум F достигается на границе допустимости области, т. е. при $G(x) = G_0$.

При выборе и обосновании итерационного метода решения задачи распределения , а также для обоснования линеаризации условий оптимальности или замены исходной задачи последовательностью эквивалентных задач линейного программирования используется свойство робастности (нечувствительности) оптимального решения.

При исследовании того или иного численного метода оптимизации основными являются проблемы определения:

- условий оптимальности и сходимости,
- степени обусловленности и чувствительности,
- полного объема вычислений, зависящего от скорости сходимости, времени одной итерации и схемы прерывания.

С позиций этих проблем проанализируем предлагаемый метод последовательных приближений (1.4) решения задачи (1.1).

При определенных условиях для стационарного решения $x = x^{opt}$ выполняются условия Куна-Таккера (1.3). Из физических соображений ясно, что решение задачи (1.1) единственное, однако в общем случае предельная точка x* последовательных приближений (1.4) не совпадает с точным решением x^{opt} (рис.1).

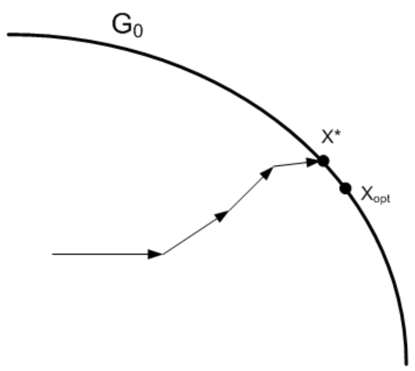

Рис.1

Пусть известны приближенные выражения для градиентов функций цели $f*$ и функции окраничений $g*$ в предельной точке $x*$.Ограничиваясь линейным приближением, имеем

$$x^* = x^{opt} + \mu t\,,\ \ f^* = f + \mu\Delta f\,,\quad g^* = g + \mu\Delta g,$$

где μ - малый параметр.

Уравнение Лагранжа в предельной точке преобразуется к виду

$$\begin{cases} f^* + \lambda^* g^* = \mu(\Delta f + \lambda^*\Delta g) \\ G(x^*) = G_0, \end{cases} \tag{1.15}$$

По теории малого параметра решение ищем разложением по малому параметру. В окрестности оптимума с учётом величин второго порядка получим

$$\begin{cases} F(x^*) - F(x^{opt}) = \mu(f,t) + \dfrac{\mu^2}{2}(t,Vt) \\ G(x^*) - G(x^{opt}) = \mu(g,t) + \dfrac{\mu^2}{2}(t,Wt), \end{cases} \tag{1.16}$$

Из $G(x^*) = G(x^{opt}) = G_0$ следует $\mu(g,t) = -\dfrac{\mu^2}{2}(t,Wt)$.

Учитывая $\lambda = -f/g$, получим

$$F(x^*) - F(x^{opt}) = \frac{\mu^2}{2}[\lambda(t,Wt) + (t,Vt)] = \frac{\mu^2}{2}(t,Ht), \tag{1.17}$$

где $H = V + \lambda W$ - матрица вторых производныхфункции Лагранжа.

Из (1.6) следует, что разница критериальной функции в предельной x^* и оптимальной x^{opt} точках составляет величину второго порядка малости относительно представления компонент градиентов функций G и F : $F(x^*) - F(x^{opt}) = o(\mu^2)$. Это свойство отражает слабую чувствительность (робастность) решения к погрешности определения множителей Лагранжа при достижении их равенства в предельной точке.

1.3 Экспериментальное исследование итерационного процесса проведения испытаний

Задача планирования испытаний сводится к минимизации дисперсии D относительной погрешности статистической оценки показателя функционирования при ограничении ресурсов G на проведение экспериментов.

Пусть вероятность сложного события $P = \Phi(p_1, p_{2,} ..., p_N)$, где p_s – вероятность элементарных событий; в частности, если решение системной задачи зависит от выполнения последовательности операций, то

$$P = \prod_{s=1}^{N} p_s \,. \tag{1.18}$$

Для оценки P по частотам элементарных событий необходимо провести серию экспериментов $(n_1, n_2,..., n_N)$, результатом которых будет число появлений соответствующих событий $(m_1, m_2,..., m_N)$. Вероятность каждого события определяется по формуле $p_s = \dfrac{m_s}{n_s}$ с погрешностью

$$\sigma_s^2 = \frac{p_s(1-p_s)}{n_s} = \frac{p_i q_s}{n_s} \,.$$

Тогда относительная ошибка в определении P:

$$\frac{\partial P}{P} = \sum_{s=1}^{N} \frac{1}{\Phi} \cdot \frac{\partial \Phi}{\partial p_s} dp_s \,, \tag{1.19}$$

а ее дисперсия

$$D = \sum_{s=1}^{N} D_s \,, \tag{1.20}$$

где $D_s = \dfrac{y_s^2}{n_s}, y_s^2 = \left(\dfrac{1}{\Phi}\cdot\dfrac{\partial \Phi}{\partial p_s}\right)^2 \cdot p_s \cdot q_s$.

При $P = \prod_{s=1}^{N} p_s$ имеем $y_s^2 = \dfrac{1-p_s}{p_s} = \dfrac{q_s}{p_s}$.

Общая стоимость серии экспериментов

$$\Phi = \sum_{s=1}^{N} \Phi_s \,, \tag{1.21}$$

где $\Phi_s = x_s^2 n_s$ - затраты на проведение s- го испытания,

$x_s^2 = \alpha_s$ - затраты на проведение одного эксперимента s -го типа,

n_s - число испытаний s -го типа.

Выражения (1.19) и (1.20) позволяют сформулировать задачу минимизации дисперсии D при заданных затратах $\Phi = \Phi_0$:

$$\begin{cases} F = D\left(\dfrac{dP}{P}\right) \approx \sum\limits_{s=1}^{N} \dfrac{y_s^2}{n_s} \rightarrow min \\ \Phi = \sum\limits_{s} \Phi_s \le \Phi_0, \end{cases} \tag{1.22}$$

Так как настоящая задача является задачей отыскания минимума при ограничениях равенствах, то ее решение (в предположении о непрерывном распределении ресурсов) вытекает из уравнений Лагранжа:

$$\frac{\partial}{\partial n_s}(F + \lambda\Phi) = 0, \qquad s = \overline{1, N}.$$

Или

$$-\frac{y_s^2}{n_s^2} + \lambda^2 \cdot x_s^2 = 0\,,$$

и даётся формулами:

$$n_s^{opt} = \frac{\Phi_s^{opt}}{x_s^2}\,, \qquad (1.23)$$

$$F^{opt} = \lambda\Phi_0 = \frac{(x \cdot y)^2}{\Phi_0}, \qquad (1.24)$$

где $(x \cdot y) = \sum_{s=1}^{N} x_s y_s$

$$\gamma_s^{opt} = \frac{x_s y_s}{x \cdot y}\,, \Phi_s^{opt} = \gamma_s^{opt}\Phi_0 \quad \lambda = \frac{(x \cdot y)^2}{\Phi_0^2}.$$

Использовать непосредственно формальное решение системы (1.20) невозможно, так как оно содержит определяемые величины y_s^2. Но возможны другие варианты распределения ресурсов, не требующие априорного знания y_s^2, которые основаны на использовании гипотез (см. разд. 2.4).

1.4 Построение доверительного интервала при малом количестве опытов

Небольшое число экспериментов (а также если вероятность p очень большие или очень малые) доверительного интервала строится на основе приближенного и точного распределения частот. Нетрудно убедиться, что это биномиальное распределение. Действительно, число появлений события a в п опытах, распределенной по закону биномиального вероятность того, что событие a появится ровно M. раз, равное

$$P_{m,\,n} = C_n^m p^m q^{n-m},$$

периодичность P* - это не что иное, как число появлений события делится на число экспериментов.

Исходя из этого распределения, можно построить доверительный интервал Iß на основе нормального закона для больших N.

Предположим сначала, что вероятность p нам известны, и найти интервал частот P1*, P2*, в который с вероятностью β= 1 –попадет частота события P*. Для случая больших N мы использовали нормальное распределение и выберем интервал симметричен относительно математического ожидания. Биномиальное распределение не имеет симметрии. К тому же (из-за того, что частота прерывной случайной величины) интервал, вероятность которого равна p, может не существовать. Поэтому выберем в качестве интервала P1*, P2* наименьший интервал, вероятность слева и справа от которой больше, чем α/2.

Подобно тому, как мы построили в области D по нормальному закону, можно будет для каждого β N от указанной площади строения, внутри которых значение вероятности p, совместимые с наблюдаемыми в опыте значение частоты p*.

На Фиг. 2.1 приведены кривые, ограничивающие такие области для различных N при доверительной вероятности β = 0,9. По оси абсцисс частота задержки P*, по оси Y вероятность p. Каждая пара кривых, соответствующих данному п, определяет доверительный интервал вероятностей, соответствующий заданной частоте. Строго говоря, границы регионов должны быть усилены (за счет частоты разрыва), но для удобства они представлены в виде плавных кривых.

С помощью таких кривых, чтобы найти доверительный интервал Iß, нужно сделать следующую конструкцию (см. фиг. 2.1): x-ось задержки, наблюдаемые в эксперименте, значение частоты p*

через эту точку и параллельна оси Y и отметьте точку пересечения прямой с парой кривых, соответствующих заданным числом экспериментов; проекции этих точек на ось Y и дать границы P1, P2 доверительного интервала Iß.

При заданном N кривых, ограничивающих "доверительная область", определяются уравнениями:

$$\sum_{m=k}^{n} C_n^m p^m (1-p)^{n-m} = \frac{\alpha}{2};$$

$$\sum_{m=0}^{k} C_n^m p^m (1-p)^{n-m} = \frac{\alpha}{2},$$

где k — число появлений события:

$$k = np^{*}.$$

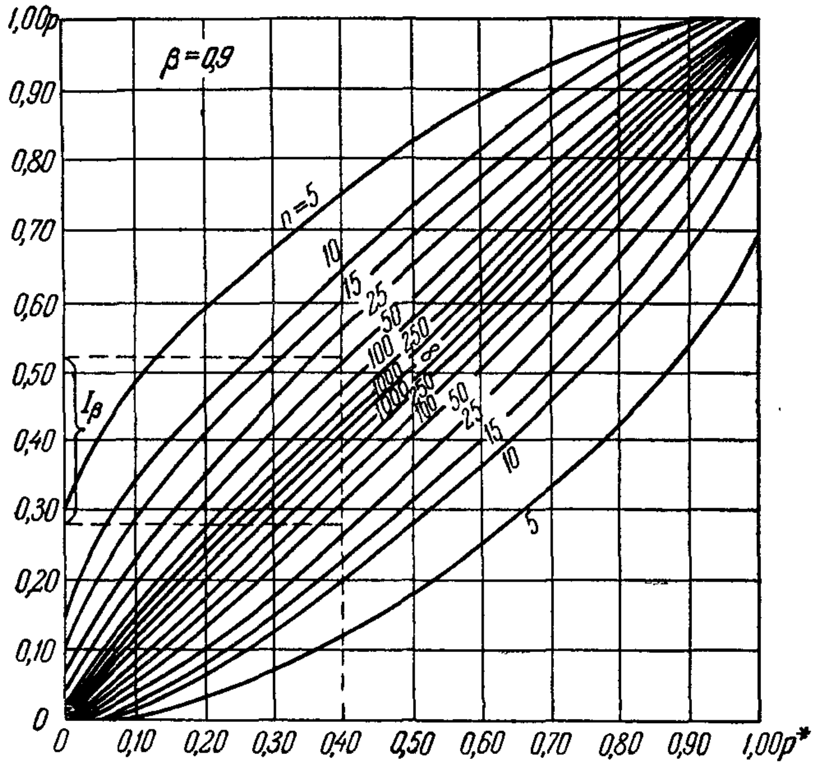

Рис. 2.1. График нахождения доверительной вероятности

Решая Предыдущее уравнение для R, мы можем найти нижняя граница P1 "регион Траст"; аналогично можно найти P2.

Чтобы решить эти уравнения каждый раз, стоит ли заранее затапливать (или графически представлять) решения для нескольких типичных значений доверительной вероятности β. Например, в книге И. в. Дунин-Барковский, Н. в. Смирнов, Теория вероятностей и математическая статистика в технике" есть таблицы П1 и П2 для β = 0,95 и β = 0.99, верно. Из той же книги, заимствованные графике Рис. 2.1.

Следует отметить, что после выполнения необходимого количества экспериментов может потребовать новой проверки достоверности определения вероятности частоты, полученные в общем случае, разные частоты, п* отличается от наблюдаемой в ранее проведенных экспериментах. Хотя может быть, что количество экспериментов пока недостаточно, чтобы обеспечить необходимую точность, а для этого придется немного увеличить. Однако, в первом приближении, полученных по способу, описанному выше, могут служить в качестве руководства для предварительного планирования серии экспериментов с точки зрения требуемого времени, денежных затрат и т. д.

На практике иногда приходится встречаться со своеобразной задача определения доверительного интервала для вероятности события, когда получены из опыта, частота равна нулю. Такая задача обычно ассоциируется с экспериментами, в которых вероятность события очень мала (или очень большие — тогда мала вероятность противоположного события).

Предположим, например, тестирования на функциональность. В результате тестирования аппарат не никогда не откажет. Вы хотите найти оптимальной вероятности отказа.

Ставить эту задачу в общем виде. Производится N независимых опытов, в одной из которых событие а не произошло. Набор доверительной вероятности β; требуется построить доверительный интервал для вероятности р события а, скорее — чтобы найти верхнюю границу Р2, так как нижняя П1 конечно, равна нулю.

Задача является частным случаем общей проблемы доверительного интервала для вероятности, но из-за своей особенности заслуживает особого рассмотрения. Точный метод построения доверительного интервала на основе биномиального распределения в этом случае применима, может быть значительно упрощена.

Мы рассуждаем следующим образом. В результате N экспериментов наблюдаемое событие, не явился ни разу. Вы хотите найти максимальное значение Р = Р2, которая "совместима" с наблюдаемым в опыте событие, если учесть, "несовместимые" с тех значений р, для которых вероятность события меньше, чем $\alpha = 1 - \beta$.

Очевидно, для любой вероятности p события а вероятность события в равна

$$P(B) = (1 - p)^n.$$

Полагая $P(B) = \alpha$, получим уравнение для p_2:

$$(1 - p_2)^n = 1 - \beta,$$

откуда

$$p_2 = 1 - \sqrt[n]{1 - \beta}.$$

Глава 2. Теоретические вопросы построения и использования текущих оценок характеристических параметров

Основной этап может быть реализован различными способами путем итерационного проведения однотипных или разнотипных испытаний .

Проведение однотипных испытаний с выбором оптимального типа

Проведение дополнительных испытаний путем наибольшего сближения характеристических показателей до заданного уровня

При наличии оценок для характеристических параметров, можно использовать формальное решение при итерационном распределении ресурсов.Существуют различные способы реализации итерационных процедур:

Первый возможный способ:

Разбиение основного этапа на отдельные циклы ,связанные с проведением дополнительных испытаний одного типа дающие максимальный эффект.

То естьпроводятся испытания для каждого типа , определенное ненормированное количество раз для каждого цикла .Для каждого типа мы узнаем количество затраченных ресурсов .В результате проведения этих испытаний мы уменьшим критериальную функцию .Уменьшение критериальной функции будет зависеть от типа испытаний.Из этого следует ,что при одинаковых затратах критериальная фунция будет уменьшена в разное количество раз. В следствии чего мы можем утвержать, что на определенном цикле мы будем проводить испытания именно выбранного типа .После чего разбиваем основной этап на циклы и выбираем тот тип испытаний ,при котором меньшие затраты дадут наибольший эффект.

Второй возможный способ:

Реализация основного этапа путем циклического распределения дополнительных ресурсов для сближения наибольших характеристических показателей с заданным уровнем.

Рассмотрим как наилучшим образом распределить выделенные ресурсы на данный цикл чтобы сблизить характеристические показатели .Исходя из того ,что нам известно ,что оптимум достигается тогда ,когда показатели будут равны между собой, мы имеем небольшое количество затрат и знаем ,что на этом цикле они поддаются уменьшению ,действуя на самые большие показатели.В результате проведения начального этапа нам известны значения характеристических показателей .Делим диапазон на несколько равных частей и уменьшим их на 1\10 .Смотрим ,какие показатели выше .Когда мы сблизим их до конца ,после этого можем утверждать о том ,что важнейшая реализация основного этапа будет заключатся в проведении разнотипных испытаний для синхронного уменьшения всех характеристических показателей .

Третий способ :

Градиентный метод уменьшения критериальной фунции.
метод нахождения *локального* экстремума (минимума или максимума) функции с помощью движения вдоль градиента. Для минимизации функции в направлении градиента используются методы одномерной оптимизации, например, метод золотого сечения. Также можно искать не наилучшую точку в направлении градиента, а какую-либо лучше текущей.

Наиболее простой в реализации из всех методов локальной оптимизации. Имеет довольно слабые условия сходимости, но при этом скорость сходимости достаточно мала

В данной дипломной работе будет рассмотрен второй способ путем циклического распределения дополнительных ресурсов для сближения наибольших характеристических показателей с заданным уровнем

2.1 Анализ упрощающих гипотез и параметров начального этапа испытаний.

Формальный способ решения на начальном этапе использовать нельзя ,так как нам неизвестны оценки характеристических параметров ,поэтому известны результаты исследований о различных способах директивного распределения ресурсов на начальном этапе основанных на использовании упрощающих гипотез.

При оценке характеристических показателей, сравнительной оценки и сравнении характеристических показателей на каждой стадии нового этапа ,необходимо знание характеристических параметров. При ограниченном числе испытаний текущие оценки у будут с ошибками.Это вынужнает нас использовать текущие оценки и учитывать целочисленность дополнительных испытаний. В дальнейшем теоретическом анализе и вычислительном эксперименте будем учитывать целочисленность испытаний и пренебрегать погрешностью в оценке характеристических параметров.Целочисленность и необратимость могут возрастать и только дискретно.Пренебрежем погрешностями.

При
$$\phi_0 = a * x^2 \tag{2.1}$$

$$n_s^0 = \left[a * \frac{x}{x_s} \right] \tag{2.2}$$

После реализации этапа расчет малосмещенной для y_s^2 по одной из формул :

$$Z_s^0 = \frac{n_s - \phi_s}{\phi_s + 1} \qquad (2.3)$$

или
$$Z_s^0 = \frac{1 - M}{M + \dfrac{D}{M*(1-M)}} \qquad (2.4)$$

И определение

$$F^0 = \sum_s y_s^2 / n_s^0 \quad , \quad \phi_0 = \sum_s x_s^2 n_s^0 \qquad (2.5)$$

$$\lambda_s^0 = \frac{Z_s^0}{x_s^2 * (n_s^0)^2} \qquad (2.6)$$

При оптимальном планировании директивного распределения для $\phi_0 = \phi^0$

$$F_0 = \frac{(x*y)^2}{\phi_0} \quad , \quad \lambda_s^0 = \lambda_0 = \frac{(x*y)^2}{\phi_0^2}$$

2.2 Оценка параметров основного и заключительного этапов испытаний с использованием оценок вероятностей элементарных событий

Основной этап состоит из нескольких циклов $k = 1, 2, \ldots$ дополнительных испытаний с уточнением текущих оценок характеристических параметров ,в ходе которых обеспечивается сближение ,а затем синхронизация уменьшение характеристических показателей :

- Первый способ однотипных дополнительных испытаний при близких затратах θ с уменьшением наибольших характеристических показателей в каждом цикле

- Второй способ разнотипных дополнительных испытаний для уменьшения характеристических показателей ,у которых текущие оценки λ_s^k больше задаваемого уровня λ_k

Первый способ :

Если провести дополнительные испытания s-го типа ,

то $$-dF_s^k = y_s^2\left(\frac{1}{n_s^{k-1}} - \frac{1}{n_s^k}\right) = y\,\frac{n_s^k - n_s^{k-1}}{n_s^{k-1} * n_s^k} \quad (2.7)$$

$$d\phi_s^k = x_s^2\left(n_s^k - n_s^{k-1}\right) = \theta$$

И эффективность дополнительных затрат на каждом цикле

$$\lambda_s^k = \frac{-dF_s^k}{d\phi_s^k} = \frac{y_s^2}{x_s^2 n_s^{k-1} * n_s^k} \qquad (2.8)$$

Так как до выполнения каждого цикла известны только оценки Z_s^{k-1} для y_s^2 ,

То $\lambda_s^k = \dfrac{Z_s^{k-1}}{n_s^{k-1}(x_s^2\, n_s^{k-1} + \theta)}$;(2.9)

следовательно $n_j^k = n_s^{k-1} + \left[\dfrac{\theta}{x_j^2}\right]$ при $\lambda_j^k = \max_s \lambda_s^k$

(остальные $n_s^k = n_s^{k-1}$ приs=j)

В конце цикла необходим перерасчет $\lambda_j^{k-1} \longrightarrow \lambda_j^k$ по результатам

дополнительных испытаний определенного типа j(в каждом цикле может

различаться) и вычисление $\varepsilon_j^k = \left[\dfrac{\theta}{x_j^2}\right]$,

а затем вычисление $n_j^k = n_j^{k-1} + \varepsilon_j^k$ и $\lambda_j^k = \dfrac{Z_j^k}{x_j^2 n_j^{k-1} n_j^k}$

(для всех s=j $\lambda_s^k = \lambda_s^{k-1}$ и $n_s^k = n_s^{k-1}$)

$$F^k = F^{k-1} - \frac{y_j^2 \varepsilon_j^{k^s}}{n_j^{k-1} n_j^k} \qquad (2.10)$$

Замечание : для однородности вычислений можно

$$\phi^k = \sum_s x_s^2 n_s^k \tag{2.11}$$

При оптимальном планировании испытаний $\phi^k = \phi_k$

$$F_k = \frac{(x*y)^2}{\phi_k} \tag{2.12}$$

и

$$\lambda_s^k = \lambda_s = \frac{(x*y)^2}{\phi_k^2} \tag{2.13}$$

Второй способ

Определяем $a = \min_s \lambda_s^0$ и $b = \max_s \lambda_s^0$

Задаваемый уровень λ_k определять :

- на стадии сближения характеристических показателей по формуле:

$$\lambda_k = \frac{(m-k)*b+k*a}{m} \quad (k = 1, 2, ..., m)$$

- на стадии (почти синхронного) уменьшения характеристических показателей по формуле:

$$\lambda_k = (2 - \frac{k}{m})*a \quad (k = m+1, ..., 2m)$$

В каждом цикле определяем все j, для которых

$$\lambda_j^{k-1} = \frac{Z_j^{k-1}}{x_j^2(\mathrm{n}_j^{k-1})^2} \geq \lambda_k, \qquad (2.14)$$

где n_j^{k-1} - число ранее проведенных испытаний j-го типа,

Z_j^{k-1} - ранее полученные оценки y_j^2

Так как в конце каждого цикла должно быть для любого j

$$\lambda_j = \frac{y_j^2}{x_j^2 n_j^{k-1}(n_j^{k-1} + \varepsilon_j)} = \lambda_k, \qquad (2.15)$$

то без учета погрешностей в оценке y_j^2

$$\frac{\lambda_j^{k-1} n_j^{k-1}}{n_j^{k-1} + \varepsilon_j} = \lambda_k \qquad (2.16)$$

и

$$\varepsilon_j = n_j^{k-1} \frac{\lambda_j^{k-1} \lambda_k}{\lambda_k} \qquad (2.17)$$

С учетом целочисленности дополнительных испытаний определяется

$$n_j^k = n_j^{k-1} + \varepsilon_j^k$$

Где

$$\varepsilon_j^k = \left[n_j^{k-1} \frac{\lambda_j^{k-1} - \lambda_k}{\lambda_k} \right]; \qquad (2.18)$$

для остальных s=j ε_j^k и

$$n_s^k = n_j^{k-1},\ \lambda_s^k = \lambda_s^{k-1} \qquad (2.19)$$

Замечания

1)Вычислительные экперименты по сравнению способов можно проводить без учета погрешностей в оценке характеристических параметров ,то есть без их пересчета ,полагая $Z_s^k = y_s^2$

2)Циклы можно реализовывать путем проведения единичных дополнительных испытаний с расчетом текущих значений характеристических показателей по формулам

$$\lambda_s^k = \frac{Z_s^{k-1}}{x_s^2 n_s^{k-1}(n_s^{k-1}+1)} \qquad (2.20)$$

где

$$Z_s = \frac{n_s - l_s}{l_s + 1} \qquad (2.21)$$

3) Объединение первого и второго способов:

- на каждом (k+1) цикле основного этапа до проведения дополнительных испытаний надо определить

$$\mu^k = \max_s \lambda_s^k$$

где

$$\lambda_s^k = \frac{Z_s^k}{x_s^2 (\mathrm{n}_s^k)^2} \qquad (2.22)$$

и задать условие

$$\lambda^{k+1} = \frac{N-k}{N} \mu^k \;; \qquad (2.23)$$

Если $\lambda_j^k \geq \lambda_j^{k+1}$ то из условия

$$\frac{Z_j^k}{x_s^2 n_j^k n_j^{k+1}} = \lambda_j^{k+1} \qquad (2.24)$$

или

$$\lambda_j^k n_j^k = \lambda_j^{k+1} n_j^{k+1}$$

следует ,что число дополнительных испытаний j-го типа

$$\varepsilon_s = n_j^{k+1} - n_j^k = n_j^k$$

$$\frac{\lambda_j^k - \lambda_j^{k+1}}{\lambda_j^{k+1}}$$

без расчета целочисленности

(для s=j $\varepsilon_s = 0$ и $n_s^{k+1} = n_s^k$) ,

при этом

$$\frac{-dF^k}{d\phi^k} = \lambda_j^{k+1} \qquad (2.25)$$

Действительно F и ϕ

а) $$-dF^k = \sum_s y_j^2\left(\frac{1}{n_j^k} - \frac{1}{n_j^{k+1}}\right) = \sum_j \frac{y_j^2 \varepsilon_j}{n_j^k n_j^{k+1}} \qquad (2.26)$$

где

$$\frac{y_j^2 \varepsilon_j}{n_j^k n_j^{k+1}} = y_j^2 \, \frac{\lambda_j^k - \lambda_j^{k+1}}{\lambda_j^k n_j^k} = \frac{y_j^2}{n_j^k} - \lambda^{k+1} \frac{y_j^2}{Z_j^k} x_j^2 n_j^k = \frac{y_j^2}{Z_j^k}\left(\frac{Z_j^2}{n_j^k} - \lambda_j^{k+1} x_j^2 \, \mathrm{n}_j^k\right)$$

И пренебрегая отличием первого множителя от единицы (то есть $Z_j^k = y_j^2$)

,имеем приближенно

$$-dF^k = a^k - \lambda_j^{k+1} b^k \qquad (2.27)$$

б) $$d\phi^k = \sum_j x_j^2 \varepsilon_j^k \, ,$$

где $$x_j^2 \varepsilon_j^k = x_j^2 n_j^k \, \frac{\lambda^k - \lambda^{k+1}}{\lambda^{k+1}} = \frac{1}{\lambda^{k+1}} * \frac{Z_j^k}{n_j^k} - x_j^2 n_j^k$$

и

$$d\phi^k = \frac{a^k}{\lambda^{k+1}} - b^k$$

Третий способ на основе градиентного метода

$$n_s^{k+1} = n_s^k + h_k(-f_s^k)$$

Или

$$\varepsilon_s^k = h_k(-f_s^k)$$

при

$$\sum_s \varphi_s^k \varepsilon_s^k = \theta \quad ;$$

Имеем

$$h_k = (-\sum_s f_s^k \varphi_s^k) = \theta$$

и

$$h_k = \frac{\theta}{A^k}$$

где

$$a_s = -f_s \varphi_s = \frac{x_s^2 y_s^2}{n_s^2}$$

С учетом целочисленности ε_S и необходимости использования Z_s^k

$$\varepsilon_s^k = \left[\frac{Z_s^k}{(\mathrm{n}_s^k)^2} * \frac{\theta}{A^k} \right]$$

Где

$$a_s^k = \frac{x_s^2 Z_s^k}{(\mathrm{n}_s^k)^2}$$

При реализации способа на каждом (k+1) – цикле ,где $\mathrm{k} = (1, 2, \ldots, n)$ надо определить

$$a_s^k = \frac{x_s^2 Z_s^k}{(\mathrm{n}_s^k)^2}$$

и

$$A^k = \sum_s a_s^k$$

Вычислить число дополнительных испытаний каждого типа

$$\varepsilon_s^k = \left[\frac{Z_s^k \theta}{(\mathrm{n}_s^k)^2 A^k} \right]$$

По результатам дополнительных испытаний уточнить Z_s^{k+1} и вычислить

$$n_s^{k+1} = n_s^k + \varepsilon_s^k$$

Замечание :

Без учета целочисленности n_s и погрешностей в оценке Z_s

$$-dF = \sum_s \frac{y_s^2 \varepsilon_s}{n_s (\mathrm{x}_s^2 \mathrm{n}_s + \varepsilon_s)} - \max$$

При

$$\sum_s \varepsilon_s = \theta$$

Так как $$\frac{d}{d\varepsilon} \frac{y^2 \varepsilon}{n(\mathrm{x}^2 \mathrm{n} + \varepsilon)} = \frac{x^2 y^2}{(x^2 n + \varepsilon)^2}$$

Необходимые условия уравнения Лагранжа

$$\frac{x_s^2 y_s^2}{(\mathrm{x}_s^2 \mathrm{n}_n + \varepsilon_s)^2} = \varphi^2$$

или

$$\frac{x_s y_s}{\mathrm{x}_s^2 \mathrm{n}_n + \varepsilon_s} = \varphi \; ;$$

Из этого следует $(\mathrm{x}, \mathrm{y}) = \varphi(\phi + \theta)$

и

$$\varepsilon_s = \frac{x_s y_s}{(\mathrm{x} * \mathrm{y})} (\phi + \theta) - \mathrm{x}_s^2 \, n_s$$

Что соответствует формальному решению последовательности задач.

2.3 Задача исследований по оценке влияния распределения ресурсов по трем этапам испытаний

Проблема исследования заключается в задаче распределения ограниченных ресурсов при проведении испытаний в условиях неопределенности.

Целью работы является обоснование трехэтапного процесса планирования испытаний и определение характеристик этих этапов.

Рассмотрим как наилучшим образом распределить выделенные ресурсы на заданный цикл чтобы сблизить характеристические показатели .Исходя из того ,что нам известно ,что оптимум достигается тогда ,когда показатели будут равны между собой, мы имеем небольшое количество затрат и знаем ,что на этом цикле они поддаются уменьшению ,действуя на самые большие показатели.В результате проведения начального этапа нам известны значения характеристических показателей .Делим диапазон на несколько равных частей и уменьшим их на 1\10 .Смотрим ,какие показатели выше .Когда мы сблизим их до конца ,после этого можем утверждать о том ,что важнейшая реализация основного этапа будет заключатся в проведении разнотипных испытаний для синхронного уменьшения всех характеристических показателей .

В данном дипломном проекте все вышеперечисленные задачи решаются с помощью трехэтапного планирования испытаний :

- начальный этап директивного распределения ресурсов
- этап сближения характеристических показателей
- этап синхронного уменьшения характеристических показателей.

Начальный этап директивного распределения ресурсов:

$$\left\{ Z_s = \frac{1-p_s}{p_s}, y_s = \sqrt{Z_s}, x_s = \sqrt{a_s} \right\}$$

и

$$x_j (\mathrm{x}^* \, \mathrm{y})^2$$

$$x_s^2 n_s^2 = \frac{x_s}{x} \phi^0;$$

если

$$\phi^0 = 3x^2$$

то

$$n_s^0 = \left[3 \frac{x}{x_s} \right]$$

$$F_0 = \sum_s \frac{Z_s}{n_s^0}, \phi^0 = \sum_s a_s n_s^0, D_0 = \frac{(\mathrm{x}^* \, \mathrm{y})^2}{\phi^0}, \lambda_0 = \frac{(\mathrm{x}^* \, \mathrm{y})^2}{\phi_0^2};$$

Характеристические показатели $\left\{ \lambda_s^0 = \frac{Z_s}{a_s^2 (\mathrm{n}_s^0)^2} \right\}$

Этап сближения характеристических показателей:

Для сближения характеристических показателей используем цикл по

$(\mathrm{k} = 1, 2, \ldots, \mathrm{m})$

Вычисляем

$$\lambda^{k} = \frac{(\mathrm{m-k})\,\mathrm{b+ka}}{m}$$

Где а $a = \min \lambda_s^0, b = \max \lambda_s^0$

Определяем $\lambda_j^{k-1} - \lambda^k \succ 0;$

Отсюда $\frac{n_j^{k-1}}{n_j^k} = \frac{\lambda^k}{\lambda_j^{k-1}} \prec 1$

Поэтому расчет j числа новых испытаний

$$n_j^k = \left[\frac{\lambda_j^{k-1}}{\lambda^k} * n_j^{k-1} \right]$$

Расчет $\lambda_j^k = \frac{Z_j}{a_j * n_j^{k-1 n_j^k}}$

(остальные $n_j^k = n_j^{k-1}$ и $\lambda_j^k = \lambda_j^{k-1}$)

Новый расчет

Этап синхронного уменьшения характеристических показателей (цикл по k

$k = m+1, \ldots, 2\mathrm{m}$)

Вычисляем $\lambda^k = (2 - \frac{k}{m})\,\mathrm{a}$

Повторяем операцию этапа сближения характеристических показателей

Глава 3. Экспериментальное исследование сходимости и эффективности итерационного процесса испытаний

3.1 Исходные данные, основные соотношения и форма представления результатов

За исходные данные была взята таблица испытаний ракеты .

i	Стоимость этапа %	Относительная стоимость α_i^2	Вероятность отказа q_i	β_i^2	α_i	β_i

1	45	1,8	0,15	0,176	1,34	0,42
2	25	1,0	0,10	0,111	1,00	0,33
3	45-20	1,0	0,15	0,176	1,00	0,42
4	60	2,4	0,20	0,250	1,55	0,5

Форма представления результатов исследования в виде двух графиков :

- График сходимости критериальной функции от текущих затрат

- Зависимости характеристических показателей аналитических гипотез

Три этапа планирования испытаний :

1. Начальный этап директивного распределения
2. Этап сближения характеристических показателей
3. Этап синхронного уменьшения характеристических показателей

3.2 Результаты вычислительных экспериментов и их анализа

В ходе проведения испытаний используем значения ,полученные из начального этапа испытаний из формул (2.3),(2.4),(2.5),(2.6).

Впоследствии используем формулы основного этапа испытаний (2.15) и (2.17).

Затем этап сближения характеристических показателей используем циклическое преобразование в программе Mathcadи по полученным показателям строим графики (1),(2).

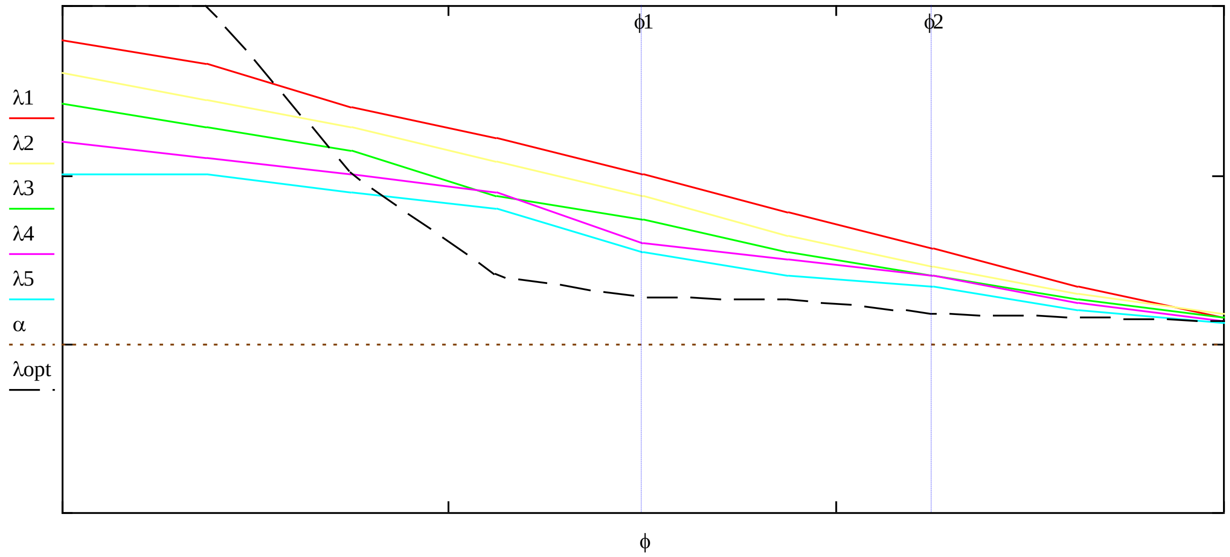

График 1 .Зависимость характеристических показателей аналитических гипотез

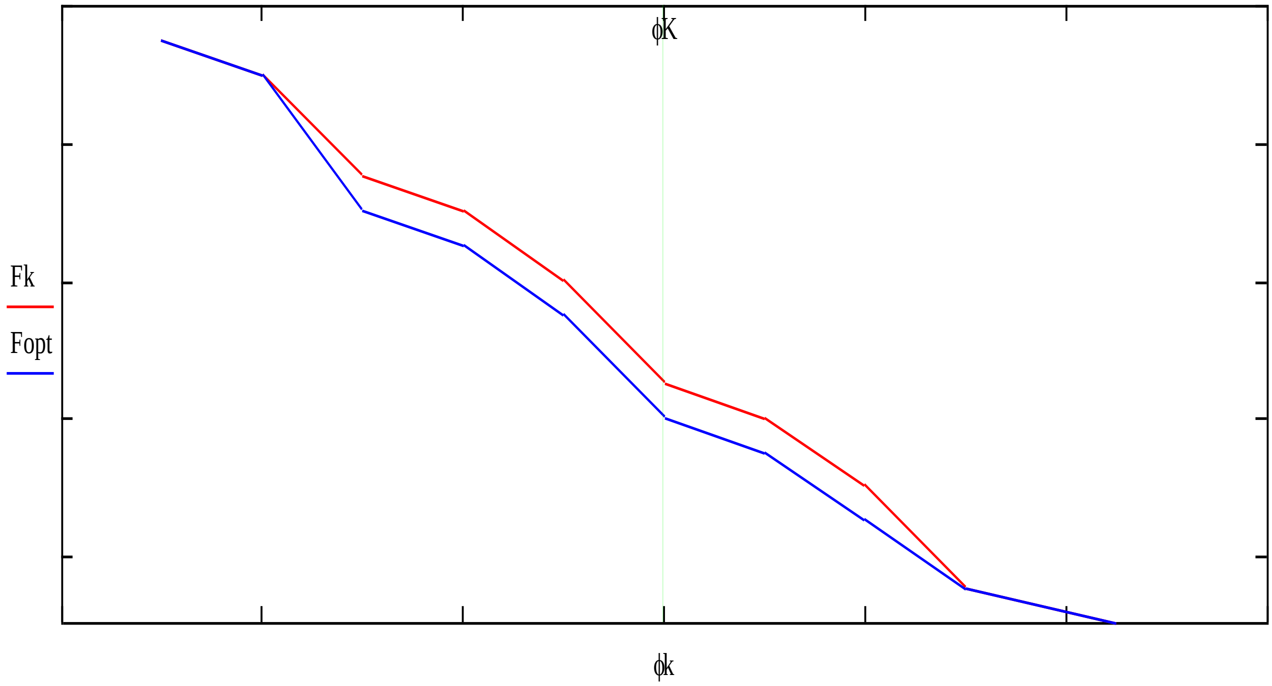

График 2. Зависимость критериальной фунции от текущих затрат

Заключение

В данной выпускной квалификационной работе была решена задача распределения ограниченных ресурсов при проведении испытаний в условиях неопределенности.

Целью работы являлось обоснование трехэтапного процесса планирования испытаний и определение характеристик этих этапов.

В ходе работы был проведен анализ гипотез и определение их характеристик. Рассмотрены анализы способов построения текущих оценок для характеристических параметров и произведено экспериментальное определение характеристик для второго и третьего этапов испытаний

Список литературы

1. В.А. Николаева. Оптимальный выбор характеристик устройств, входящих в проектируемый комплекс / Магистерская диссертация (ИМОП), - 2010 - 21с.

2. А.А Салангин. Методология системного анализа проектируемых технических комплексов. Псков. Издательство ППИ. 2009 г. 129 с.

3. Ю.М.Смирнов, А.А. Салангин. Чувствительность результатов параметрического синтеза к искажениям модели// Тезисы Международной научно-практической конференции – XIV Академические чтения МАН ВШ.- Псков: Изд. ППИ,2008.- с. 128-130.

4. А.А. Салангин, Ю.М. Смирнов, В.П. Шкодырев. Современные проблемы автоматизации и управления – СПб: СПбГПУ, 2010- 165 с.

5. Ю.М. Смирнов. Оценка погрешности в решении оптимизационных задач системного программирования. 5с. https://yadi.sk/d/HQzb9dw4nn7wR.

6. В.М. Однобоков. Постановка и методы решения задач распределения при проектировании бортовых РЭК. Дисс. кандидата тех. наук, СПбГПУ, 2003г. – 170с.

7. Вентцель Е.С. Теория вероятностей. М.: Наука, 1969 – 576с.

8. Гмурман В.Е. Теория вероятностей и математическая статистика – М.: Высш.шк.,2014 – 479с.