

Министерство образования и науки Российской Федерации
Федеральное государственное автономное образовательное учреждение
высшего образования
«Санкт-Петербургский политехнический университет Петра Великого»
Институт компьютерных наук и технологий
Кафедра «Системы и технологии управления»

Работа допущена к защите
Заведующий кафедрой СТУ
_____ В.П. Шкодырев
«__» _____ 2016 г.

**ВЫПУСКНАЯ КВАЛИФИКАЦИОННАЯ РАБОТА
БАКАЛАВРА**

**Чувствительность результатов параметрического синтеза системы управления к
искажениям модели**

направление 09.03.01 – Информатика и вычислительная техника
профиль 09.03.01_07 – Интеллектуальные системы обработки информации и
управления

Выполнил
студент гр. 43503/3 < > С.С. Попов

Научный руководитель
доктор технических наук,
профессор < > Ю.М. Смирнов

Санкт-Петербург
2016

Содержание

Список использованных сокращений	3
Введение.....	4
Глава 1. Аналитический обзор публикаций и определение задач	6
1.1 Постановка ЗРТ и решение упрощенной задачи	6
1.2 Свойство робастности результатов оптимизации относительных погрешностей в исходных данных и упрощающих гипотез	9
1.3 Квазиградиентный подход к решению исходной задачи.....	12
1.4 Содержимое экспериментальных исследований	16
Глава 2. Теоретическая оценка влияния погрешности в исходных данных на результаты оптимизации	18
2.1 Модели погрешностей в исходных данных	18
2.2 Связь погрешностей результатов оптимизации с погрешностями в исходных данных	19
2.3 Аналитическая и статистическая оценка математического ожидания и дисперсии ошибок в результатах оптимизации.....	21
Глава 3. Экспериментальное исследование эффективности ПС при использовании упрощающих гипотез или при неточности исходных данных	23
3.1. Исходные данные, основные соотношения и форма представления результатов расчета.....	23
3.2. Результаты вычислительных экспериментов и их анализа	25
3.3. Оценка влияния неточности исходных данных.....	29
Заключение	30
Список литературы	31

Список использованных сокращений

ПКР - проектно-конструкторское решение

РЭК - радиоэлектронный комплекс

ИМ - именные множители

ПС - параметрический синтез

МО - математическое ожидание

ЗРТ - задача распределения требований

ГСВ - генератор случайных величин

Введение

После анализа существующих публикаций под руководством научного руководителя выявлены следующие решенные и нерешенные проблемы в области параметрического синтеза:

- Выполнена постановка исходной задачи и дано решение упрощенной задачи.
- Предложен и обоснован итерационный способ решения исходной задачи на основе квазиградиентного подхода с коррекцией модели.
- Предложен метод распределения требований к элементам технического комплекса при его полной и частичной модернизации.
- Предложен способ целенаправленного перебора альтернативных проектно-конструкторских решений (ПКР) при их ограниченном числе.
- Предложен способ резервирования элементов проектируемого или модернизируемого комплекса.
- Выведено аналитическое выражение для погрешностей результатов параметрического синтеза при неточности в исходных данных.

В предыдущих исследованиях по данной тематике не были решены следующие проблемы:

1. наличие различных критериев для сравнения альтернативных ПКР
2. наличие большого числа альтернативных ПКР
3. чувствительность результатов параметрического синтеза к ошибкам в исходных данных

Целью данного исследования является постановка и решение задачи количественной оценки влияния погрешностей в исходных данных на результаты параметрического синтеза системы управления.

В качестве исходных данных для расчетов были взяты характеристики реально существующего комплекса управления ракетой подводной лодки.

Данные получены в ходе прохождения преддипломной практики на предприятии холдинговой компании «Ленинец».

Были поставлены следующие задачи:

- аналитический обзор существующих подходов
- вывод аналитических выражений для погрешности при конкретных ошибках
- выбор способа статистической обработки результатов вычислительного эксперимента и анализ его результатов
- аналитический расчет математического ожидания и дисперсии погрешностей результатов решения задачи распределения требований квазиградиентным методом с искаженными исходными данными

Глава 1. Аналитический обзор публикаций и определение задач

1.1 Постановка ЗРТ и решение упрощенной задачи

Сложные радиоэлектронные комплексы (РЭК) представляют собой совокупность набора взаимодействующих устройств. Появление новых классов устройств дает возможности изготовления новых РЭК как с улучшенной функциональностью, так и с сохранением исходной функциональности, но с уменьшением затрат.

Общая постановка задачи распределения требований к элементам проектируемых систем формулируется как выбор устройств технического комплекса, характеристики которых (дисперсии погрешности d_i и вероятности отказа q_i) обеспечивали бы минимизацию стоимости F комплекса при ограничении на вероятность G выполняемых функций.

$$\begin{cases} F = \sum_i \gamma_i \left(1 + \frac{\alpha_i}{\gamma_i} \ln \frac{d_i^0}{d_i} \right) \left(1 + \frac{\beta_i}{\gamma_i} \ln \frac{q_i^0}{q_i} \right) \rightarrow \min; \\ G(d_i, q_i) \leq G_0 = 1 - P, \end{cases} \quad (1.1)$$

где P - вероятность выполнения комплексом тактической задачи.

$$\text{Упрощенный вариант} \quad \begin{cases} F = C - \sum_i (\alpha_i \ln d_i + \beta_i \ln q_i) \rightarrow \min \\ G = 1 - e^{-u} (1 - e^{-P/v}) \leq G_0, \end{cases} \quad (1.2)$$

$$\text{где } v = \sum d_i, \quad u = \sum q_i.$$

Решение упрощенной задачи соответствует распределению требований к устройствам комплекса на двух уровнях:

- на первом между однотипными характеристиками элементов
- на втором между суммарными характеристиками

Первый уровень:

Обозначив $\varphi_d \stackrel{\text{def}}{=} \partial G / \partial d$, $\varphi_q \stackrel{\text{def}}{=} \partial G / \partial q$, запишем уравнения Лагранжа для (1.2)

$$-\frac{\alpha_i}{d_i} + \lambda \varphi_d = 0; \quad -\frac{\beta_i}{q_i} + \lambda \varphi_q = 0. \quad (1.3)$$

Обозначив $A = \sum_i \alpha_i$, $B = \sum_i \beta_i$, при неизменных φ_d и φ_q суммированием (1.3) получим $A = \lambda v \varphi_d$, $B = \lambda u \varphi_q$. Тогда из (1.3) находим оптимальное распределение однотипных характеристик

$$d_i^{opt} = \alpha_i \frac{v}{A}, \quad q_i^{opt} = \beta_i \frac{u}{B}, \quad i = \overline{1, n}. \quad (1.4)$$

Второй уровень:

Подставив (1.4) в (1.2) имеем:

$$\begin{cases} F = C - A \ln v - B \ln u \rightarrow \min; \\ G = 1 - e^{-u} (1 - e^{-P/v}) = G_0. \end{cases}$$

Уравнения Лагранжа:

$$-\frac{A}{v} + \lambda \varphi_d = 0, \quad -\frac{B}{u} + \lambda \varphi_q = 0,$$

где

$$\begin{aligned} \varphi_d &= \frac{P}{v^2} e^{-(u+P/v)}, \\ \varphi_q &= (e^{P/v} - 1) e^{-(u+P/v)} \end{aligned}$$

С учетом соотношения $G(v, u) = G_0 = 1 - P$ получаем интегральное уравнение Куна-Таккера:

$$\ln \frac{(z-1)}{Pz} - \frac{B}{A} \frac{\ln z}{(z-1)} = 0, \quad (1.5)$$

$$\text{где } z = e^{P/v}.$$

Решение задачи свелось к решению алгебраического уравнения относительно z , так как

$$v = \frac{P}{\ln z}, \quad u = \ln \frac{z-1}{Pz}.$$

Решение z^* уравнения (1.5) может быть найдено методом Ньютона (рис.1), причем $z^* > 1/G_0$. Тогда имеем следующее распределение суммарных характеристик

$$v^* = \frac{P}{\ln z^*}, \quad u^* = \ln \frac{z^*-1}{Pz^*}.$$

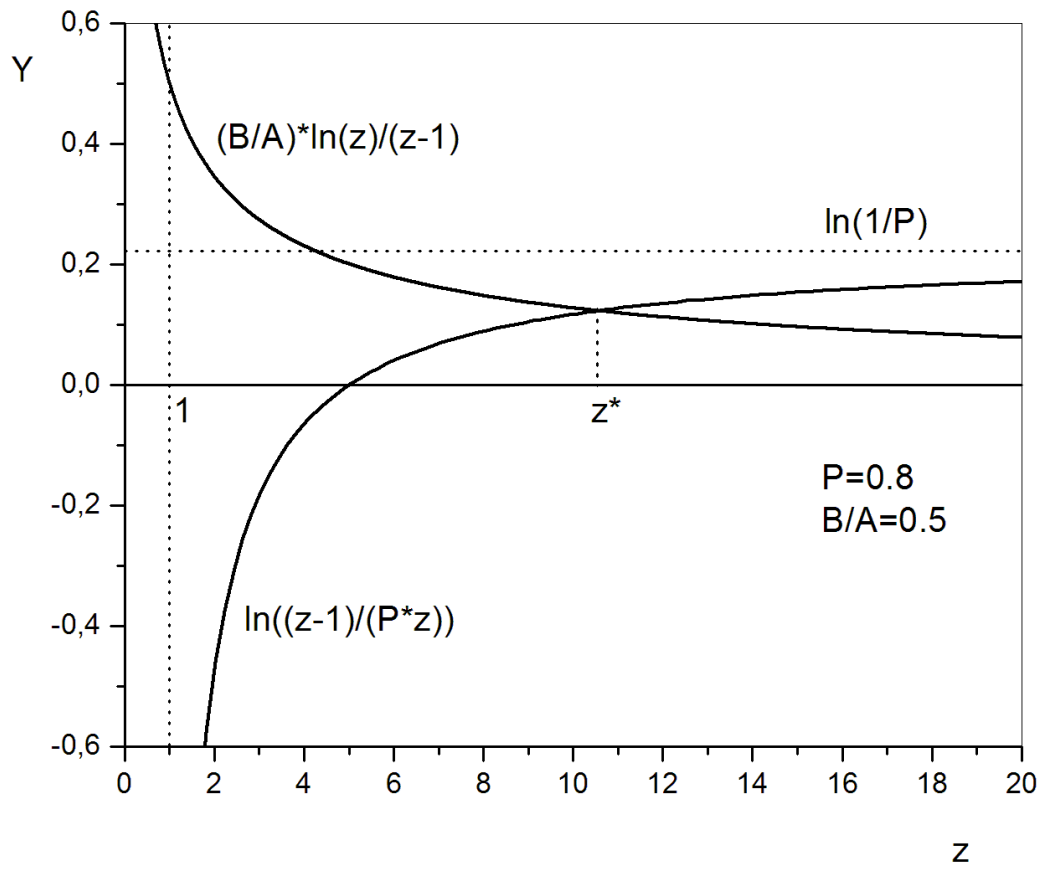


Рис.1 Зависимости u от z .

1.2 Свойство робастности результатов оптимизации относительных погрешностей в исходных данных и упрощающих гипотез

К особенностям параметрического синтеза в системном проектировании относятся дискретность, виртуальность или необратимость изменения переменных, нереализуемость или неэффективность стационарного решения уравнений Куна-Таккера. При выборе и обосновании итерационного метода решения задачи распределения, а также для обоснования линеаризации условий оптимальности или замены исходной задачи последовательностью эквивалентных задач линейного программирования используется свойство робастности (толерантности, нечувствительности) оптимального решения.

При определенных условиях для стационарного решения $x = x^{opt}$ выполняются условия Куна-Таккера (1.5). Из физических соображений ясно, что решение задачи единственное, однако в общем случае предельная точка x^* последовательных приближений не совпадает с точным решением x^{opt} .

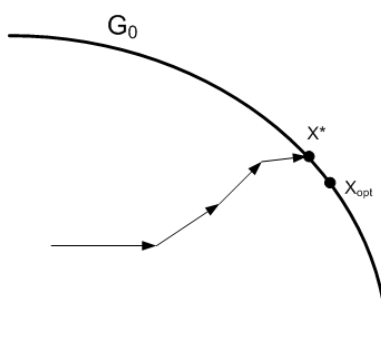


Рис.2 Иллюстрация последовательных приближений поиска решения.

Теорема 1. Между предельной x^* и оптимальной x^{opt} точками решения оптимизационной задачи искажение критериальной функции F составляет величину второго порядка малости относительно искажений её градиента и градиента функции ограничений G

$$F(x^*) - F(x^{opt}) \approx o(\mu^2).$$

Доказательство. Пусть в оптимальной точке x^{opt} выполняются условия Куна-Таккера $f_i + \lambda g_i = 0$, $G = G_0$, а в предельной точке x^*

последовательных приближений известны приближенные выражения для градиентов критериальной функций f^* и функции ограничений g^* . При искажениях модели (вида F, G и параметров α_i, β_i) имеем

$$f^* = f + \mu \Delta f, \quad g^* = g + \mu \Delta g,$$

где μ - малый параметр.

Уравнение Лагранжа в предельной точке $x^* = x^{opt} + \mu \varepsilon$ преобразуется к виду

$$\begin{cases} f^* + \lambda g^* = \mu(\Delta f + \lambda \Delta g) \\ G(x^*) = G_0. \end{cases}$$

В рамках теории малого параметра разложим с учётом величин второго порядка F, G в окрестности оптимума по малому параметру μ

$$\begin{cases} F(x^*) - F(x^{opt}) \approx \mu(f, \varepsilon) + \frac{\mu^2}{2}(\varepsilon, V \varepsilon) \\ G(x^*) - G(x^{opt}) \approx \mu(g, \varepsilon) + \frac{\mu^2}{2}(\varepsilon, W \varepsilon), \end{cases}$$

Из $G(x^*) = G(x^{opt}) = G_0$ следует $\mu(g, \varepsilon) \approx -\frac{\mu^2}{2}(\varepsilon, W \varepsilon)$.

Учитывая $\lambda_i = -\frac{f_i}{g_i} = \lambda$, получим

$$F(x^*) - F(x^{opt}) \approx \frac{\mu^2}{2}[\lambda(\varepsilon, W \varepsilon) + (\varepsilon, V \varepsilon)] = \frac{\mu^2}{2}(\varepsilon, L \varepsilon),$$

где $L = V + \lambda W$ - матрица вторых производных функции Лагранжа.

В силу ограниченности квадратичной формы $(\varepsilon, L \varepsilon)$ следует, что разница критериальной функции в предельной x^* и оптимальной x^{opt} точках составляет величину второго порядка малости относительно искажения компонент градиентов функций G и F :

$$F(x^*) - F(x^{opt}) \approx o(\mu^2).$$

Доказанная теорема отражает слабую чувствительность (робастность) решения к погрешности определения множителей Лагранжа при достижении их равенства в предельной точке.

1.3 Квазиградиентный подход к решению исходной задачи

Вариационный подход к параметрической оптимизации заключается в минимизации функции Лагранжа:

$$L = F + \lambda G, \text{ где } \lambda - \text{ множитель Лагранжа.}$$

Необходимыми условиями экстремума функции Лагранжа являются:

$$\partial L / \partial x_s = 0, \quad \partial L / \partial \lambda = 0, \text{ или}$$

$$\begin{cases} f_s + \lambda \varphi_s = 0, \\ G(x) \leq G_0 \end{cases} \quad s = \overline{1..n}. \quad (1.6)$$

$$\text{где } f_s = \frac{\partial F}{\partial x_s}, \quad g_s = \frac{\partial G}{\partial x_s}.$$

Поиск минимума функции Лагранжа осуществляется градиентным методом, который включает в себя способ определения поправок к ранее найденному значению:

$$d_s^{k+1} = d_s^k - h(f_{d_s}^k + \lambda \varphi_{d_s}^k)$$

$$q_s^{k+1} = q_s^k - h(f_{q_s}^k + \lambda \varphi_{q_s}^k)$$

где d_s^k - это дисперсия погрешности устройств на k -ом шаге

q_s^k - это вероятность отказа устройства на k -ом шаге

$$k = 0, 1, 2, \dots$$

Значение λ должно соответствовать предельным значениям $\{d_s, q_s\}$, при которых $G = G_{зад}$.

Д. Полетаев использует способ, основанный на подборе такого значения; ниже рассматривается способ определения поправок к ранее найденному значению (квазиградиентный метод).

Анализ градиентов F и G

$$G = 1 - \omega_0 p_0 - \sum_{i \neq s} \omega_i p_i - \omega_s p_s$$

$$\text{где } p_0 = e^{-u}, \quad p_i = q_i e^{q_i - u}, \quad p_s = q_s e^{q_s - u}$$

$$\frac{\partial G}{\partial q_s} = \omega_0 e^{-u} + \sum_{i \neq s} \omega_i q_i e^{q_i - u} - \omega_s q_s e^{q_s - u};$$

без учета в п.п. малости относительно q_i, q_s

$$\frac{\partial G}{\partial q_s} = (\omega_0 - \omega_s) e^{-u} = \varphi_u \left(1 - \frac{\omega_s}{\omega_0} \right) \quad (1.7)$$

Замечание: при малой избыточности ($\omega_s = 0$) $\frac{\partial G}{\partial q_s} = \varphi_u$

$$\omega_0 = 1 - e^{-y}, \quad y = \frac{P}{v}$$

$$\omega_s = 1 - e^{-y_s}, \quad y_s = \frac{1 - r_s}{v - d_s} P \quad - \text{не зависит от } d_s$$

$$\frac{\partial G}{\partial d_s} = p_0 e^{-y} \frac{G}{v^2} + \sum_{i \neq s} p_i q_i e^{y_i} \frac{1 - r_i}{(v - d_i)^2} P =$$

$$\frac{y}{v} e^{-u} e^{-y} \left[1 + e^y \sum_{i \neq s} q_i e^{q_i - y_i} (1 - r_i) \left(\frac{v}{v - d_i} \right)^2 \right];$$

без учета в предыдущем пункте малости относительно q_i

$$\frac{\partial G}{\partial d_s} = \frac{y}{v} e^{-u} e^{-y} = \varphi_v; \quad (1.8)$$

Замечание: Из $\omega_0 > \omega_s$ следует $y_s < y$ и должно быть

$$r_s > \frac{d_s}{v} \quad - \text{ранг элемента больше доли } d_s \text{ в суммарной дисперсии } v.$$

Условие выхода на границу допустимой области (сближение с магистралью G)

С учетом выражений (1.7) и (1.8) при $\delta_s = q_s D$

$$\varphi_v \sum_s \varepsilon_s + \varphi_u \sum_s \left(1 - \frac{\omega_s}{\omega_0} \right) \delta_s = g$$

$$v \varphi_v E + u \varphi_u \sum_s (1 - T) D = g$$

или

$$\text{где } E = \frac{va - 1}{y - 1}, \quad D = \frac{vb - 1}{y - 1}, \quad T = \frac{\omega q}{\omega_0 u}$$

$$\omega = \frac{g(y-1) + v\varphi_v + t[1-T]u\varphi_u}{A + t[1-T]B}$$

отсюда

Замечание:

Ассиметрия выражений для групп характеристик $\{d_s\}, v$ и $\{q_s\}, u$

$$\tilde{G} = 1 - e^{-u} \left(1 - e^{-\frac{P}{v}} \right),$$

вытекает из исходной постановки задачи, так как и даже без

$$\frac{\partial G}{\partial d_s} = \varphi_v, \quad \frac{\partial G}{\partial q_s} = \varphi_u \left(1 - \frac{\omega_s}{\omega_0} \right)$$

учета в предыдущем пункте

, но

$$d'_s = \frac{a'_s}{A'} v(1+E), \quad q'_s = \frac{b'_s}{B'} u(1+D)$$

Тогда предельные значения

и в рамках

$$\text{линейной теории } \varphi_v(d'_s - d_s) + \varphi_u(q'_s - q_s) = v\varphi_v E + u\varphi_u = g$$

Целесообразно сочетать два типа процедур:

- минимизация функции Лагранжа по внутренним циклам (k) при фиксированных $g_e; v^e; \varphi_v^e; u^e; \varphi_u^e; E^e; D^e$ с циклическим пересчетом этих величин:

$$0) \text{ решение уравнения } z_0: \ln \frac{(z-1)}{Pz} = \frac{B_0}{A_0} \frac{\ln z}{(z-1)}, \quad \text{где } A^0 = \sum_s \alpha_s; \quad B^0 = \sum_s \beta_s$$

$$\text{расчет } v_0 = \frac{P}{\ln z_0}, \quad u_0 = \ln \frac{z_0 - 1}{Pz_0}, \quad d_s^0 = \frac{\alpha_s}{A_0} v_0, \quad q_s^0 = \frac{\beta_s}{B_0} u_0$$

определение на ИМ или НИ значения G_0 , расчет по формулам (1.5) $E^0; D^0$

$$\text{и } A^0 = \sum_s \alpha_s \left(1 + \frac{\beta_s}{\gamma_s} \ln \frac{d_s^0}{d_s^0} \right); \quad B^0 = \sum_s \beta_s \left(1 + \frac{\alpha_s}{\gamma_s} \ln \frac{d_s^0}{d_s^0} \right)$$

- k) на k -ом шаге определение дисперсии погрешности и вероятности отказа

$$d_s^{k+1} = d_s^k - h \left(\frac{A^k}{v_e(1+E_e)} - \frac{a_s^k}{d_s^k} \right) \quad (1.9)$$

$$q_s^{k+1} = q_s^k - h \left(\frac{B^k}{u_e(1+D_e)} - \frac{b_s^k}{q_s^k} \right), \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

для предельных значений d_s^e, q_s^e , найденных по формулам (1.9), определение на ИМ или НИ $\omega_0^e, \omega_s^e, p_0^e, p_s^e$ и расчет G^e, u^e, v^e, E_e, D_e по формулам (1.5).

Циклы повторяются заданное число раз или до достижения заданной точности.

Замечание: При достаточно большой избыточности, но высокой надежности устройств, когда справедливы выражения (1.7)-(1.8) для градиента G :

- цикл по k осуществляется в соответствии с формулами

$$d_s^{k+1} = d_s^k - h \left(\frac{A^k}{v_e(1+E_e)} - \frac{a_s^k}{d_s^k} \right) \quad (1.10')$$

$$q_s^{k+1} = q_s^k - h \left(\frac{B^k(1-T)}{u_e(1+D_e)} - \frac{b_s^k}{q_s^k} \right), k = 0, 1, 2, \dots$$

- до предельных значений d_s, q_s

- цикл по e осуществляется в соответствии с формулами (1.5).

1.4 Содержимое экспериментальных исследований

Дадим описание двух возможных подходов к численной оценке погрешности результатов параметрического синтеза (ПС):

1. Аналитические расчеты математического ожидания (МО) и дисперсии погрешностей по результатам решения ЗРТ квазиградиентным методом для случайных исходных данных.
2. Аналитический расчет МО и дисперсии погрешностей по известному аналитическому выражению с учетом квадратичных членов в зависимости от случайных отклонений исходных данных.

Описание первого подхода:

В данном подходе используется квазиградиентный метод решения исходной ЗРТ, который подробно описан в параграфе 1.3. Для вычисления значений критериальной функции используется выражение:

$$F_s^l = \gamma_s \left(1 + \frac{\alpha_s}{\gamma_s} \ln \frac{d_s^0}{d_s^l} \right) \left(1 + \frac{\beta_s}{\gamma_s} \ln \frac{q_s^0}{q_s^l} \right),$$

$$F^l = \sum_s F_s^l,$$

где s - номер прототипа, l - номер эксперимента.

Первым этапом необходимо найти оптимальное решение ЗРТ F^{opt} для неискаженных исходных данных $\alpha_s, \beta_s, \gamma_s$.

$$F^{opt} = \sum_s F_s^{opt}$$

Для каждого нового эксперимента вводим случайные отклонения стоимостных коэффициентов относительно исходных α_s, β_s :

$$\alpha'_s = \alpha_s(1 + \varepsilon_s), \beta'_s = \beta_s(1 + \delta_s)$$

Находим новые d_s^l, q_s^l путем решения исходной задачи с учетом искаженных коэффициентов α'_s, β'_s . Вычисляем значение критериальной функции F^l для полученных значений d_s^l, q_s^l и находим ее отклонение относительно оптимального значения.

$$dF^l = F^l - F^{opt}$$

Проводим статистическую обработку полученных отклонений dF^l .

Описание второго подхода

Так как в практической части данной работы будет реализован только второй подход, то его описание будет более подробным. Его отличие состоит в том, что вместо прямого решения ЗРТ на каждой итерации и нахождения его отклонения от оптимального используется аналитическая формула для расчета погрешности ПС:

$$dF^l = \frac{1}{2} \left(\sum_s \alpha_s (\varepsilon_s^l)^2 + \beta_s (\delta_s^l)^2 - \frac{\sum_s (\alpha_s \varepsilon_s^l)^2 + (\beta_s \delta_s^l)^2}{A + B} \right),$$

$$\text{где } A = \sum_s \alpha_s, B = \sum_s \beta_s$$

Данная формула будет подробно рассмотрена во второй главе.

План экспериментальных исследований:

1. Использовать ГСВ (генератор случайных величин) для получения случайных отклонений исходных данных от реальных значений.
2. Привести расчеты погрешностей ПС (параметрической оптимизации) по выражениям для числа экспериментов $l = 200$.
3. Построить гистограмму распределения погрешностей и сравнить ее с релеевским законом распределения для $l = 50, 150, 200$.
4. Использовать рекуррентные соотношения для расчета статистических аналогов математического ожидания и дисперсии и показать их на графиках сходимости.

Приведем вывод рекуррентных выражений для МО и для дисперсии:

Пусть $\tilde{m}_1 = x_1$, тогда для $n > 1$:

$$\tilde{m}_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i = \frac{1}{n} \left(\sum_{i=1}^{n-1} x_i + x_n \right) = \frac{1}{n} ((n-1)\tilde{m}_{n-1} + x_n)$$

$$\tilde{D}_n = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (x_i - \tilde{m}_n)^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n x_i^2 - n\tilde{m}_n^2$$

$$\text{Имеем, } (n-1)\tilde{D}_n = \sum_{i=1}^n x_i^2 - n\tilde{m}_n^2,$$

$$(n-2)\tilde{D}_{n-1} = \sum_{i=1}^{n-1} x_i^2 - (n-1)\tilde{m}_{n-1}^2$$

$$\text{Получим } \tilde{D}_n = \frac{n-2}{n-1} \tilde{D}_{n-1} + \frac{1}{n} (x_n - \tilde{m}_{n-1})^2, \text{ при } \tilde{D}_1 = 0$$

Глава 2. Теоретическая оценка влияния погрешности в исходных данных на результаты оптимизации

2.1 Модели погрешностей в исходных данных

Исходными данными для задачи распределения требований (ЗРТ) являются стоимостные коэффициенты α_s, β_s , входящие в выражение для критериальной функции. Искаженное значение находится из выражения:

$$\alpha'_s = \alpha_s(1 + \varepsilon_s), \beta'_s = \beta_s(1 + \delta_s),$$

где ε_s и δ_s равномерно распределенные случайные числа в интервале $\left[-\frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right]$.

Для задания ε_s и δ_s используется стандартный генератор случайных величин (ГСВ) с равномерным распределением в интервале $[0, 1]$. Полученные значения масштабируются в соответствии с заданным интервалом:

$$\varepsilon_s = \frac{2 * rnd - 1}{3}, \delta_s = \frac{2 * rnd - 1}{3},$$

где rnd - функция, которая возвращает число полученное ГСВ.

Генерация производится на каждом шаге эксперимента для каждого опытного образца.

Также возможно использование других видов распределений: биномиальное, распределение Коши, распределение χ -квадрат, экспоненциальное, нормальное распределение.

ГСВ может быть реализован на аппаратной основе. В таких случаях используется какое-либо физическое явление, имеющее сложный, непредсказуемый характер. Например, различные физические шумы: детекторы событий ионизирующей радиации, дробовой шум в резисторе или космическое излучение.

Однако чаще используются программные средства генерации псевдослучайных чисел. Они более просты в использовании, имеют возможность задания вида распределения, но при этом дают более коррелированные между собой числа по сравнению с аппаратными ГСВ.

2.2 Связь погрешностей результатов оптимизации с погрешностями в исходных данных

Одной из проблем в области ПС является получение выражения для погрешностей в результатах оптимизации, учитывающие вид критериальной функции и функции ограничений. В первой части статьи приводится вывод и обоснование такого выражения для их аддитивного или мультипликативного вида. Далее приведен вывод основных соотношений для оценки.

Пусть критериальная функция F и функция ограничения Φ - аддитивные функции независимых переменных (возможно объединение переменных в группы); для мультипликативных функций можно использовать логарифмирование с учетом свойства монотонности этой операции:

$$F = \sum_s F(x_s, \alpha_s) - \min \text{при } f_s = \frac{\partial F}{\partial x_s} < 0 \text{ и}$$

$$\Phi = \sum_s \Phi(x_s, \beta_s) \leq \Phi_0 \text{ при } \varphi_s = \frac{\partial \Phi}{\partial x_s} > 0.$$

При этих условиях искомое решение $\{x\}$ должно удовлетворять уравнениям Куна-Такера

$$f(x_s, \alpha_s) + \lambda \varphi(x_s, \beta_s) = 0, (s = 1, 2, \dots, m)$$

$$\sum_s \Phi(x_s, \beta_s) = \Phi_0 \quad (2.1)$$

при неточности исходных данных

$$\alpha'_s = \alpha_s(1 + \varepsilon_s), \beta'_s = \beta_s(1 + \delta_s),$$

необходимые условия, т.е. уравнения Лагранжа

$$f(x'_s, \alpha'_s) + (\lambda - \theta)\varphi(x'_s, \beta'_s) = 0,$$

а ограничение, т.е. уравнение границы

$$\sum_s \Phi(x'_s, \beta'_s) = \Phi_0$$

В квадратичном приближении

$$\Phi(x'_s, \beta'_s) = \Phi_s + \varphi_s dx_s + \frac{1}{2} \omega_s (dx_s)^2, \text{ где } \omega_s = \frac{\partial^2 \Phi}{(dx_s)^2};$$

$$dF = F' - F = \sum_s f_s dx_s + \frac{1}{2} \sum_s t_s (dx_s)^2, \text{ где } t_s = \frac{d^2 F}{(dx_s)^2}.$$

При выполнении необходимых условий (2.1)

$$f_s + \lambda \varphi_s = 0, (s = 1, 2, \dots, m)$$

и уравнения границы $\Phi' = \Phi$

$$\sum_s \varphi_s dx_s + \frac{1}{2} \sum_s \omega_s (dx_s)^2 = 0$$

получаем

$$dF = \frac{1}{2} \sum_s \alpha_s (dx_s)^2, \text{ где } \alpha_s = t_s + \lambda \omega_s \text{ и } \lambda \equiv \lambda_s = \frac{-f_s}{\varphi_s} > 0.$$

Замечание: $\alpha_s = \lambda \varphi_s h_s$, где $h_s = \frac{t_s}{-f_s} + \frac{\omega_s}{\varphi_s}$,

И достаточные условия F-min эквивалентны условиям $h_s > 0$ ($s = 1, 2, \dots, m$)

В линейном приближении при $f_s + \lambda \varphi_s = 0$

Для каждого s-уравнения Лагранжа имеем

$$f_s + t_s dx_s + \frac{\partial f_s}{\partial \alpha_s} \alpha_s \varepsilon_s + (\lambda - \theta) \left(\varphi_s + \omega_s dx_s + \frac{\partial \varphi_s}{\partial \beta_s} \beta_s \delta_s \right) = 0$$

или $\alpha_s dx_s - \theta \varphi_s + g_s = 0$, где $\alpha_s = t_s + \lambda \omega_s$, $g_s = \frac{\partial f_s}{\partial \alpha_s} \alpha_s \varepsilon_s + \lambda \frac{\partial \varphi_s}{\partial \beta_s} \beta_s \delta_s$;

отсюда $dx_s = \frac{\theta \varphi_s - g_s}{\alpha_s}$.

В линейном приближении для уравнения границы $\Phi' + \Phi = 0$ имеем

$$\sum_s \varphi_s dx_s = \theta \sum_s \frac{\varphi_s^2}{\alpha_s} - \sum_s \frac{g_s \varphi_s}{\alpha_s} = 0 \text{ и } \theta = \frac{\sum_s \frac{g_s \varphi_s}{\alpha_s}}{\sum_s \frac{\varphi_s^2}{\alpha_s}} \quad (2.2)$$

Получаем из (2.2) с учетом (2.3)

$$2dF = \sum_s \alpha_s \left(\frac{\theta \varphi_s - g_s}{\alpha_s} \right)^2 = \theta^2 \sum_s \frac{\varphi_s^2}{\alpha_s} - 2\theta \sum_s \frac{g_s \varphi_s}{\alpha_s} + \sum_s \frac{g_s^2}{\alpha_s}$$

и с учетом (2.4)

$$2dF = \sum_s \frac{g_s^2}{\alpha_s} - \frac{\left(\sum_s \frac{g_s \varphi_s}{\alpha_s} \right)^2}{\sum_s \frac{\varphi_s^2}{\alpha_s}} \geq 0$$

По неравенству Коши-Буняковского, имеющему вид:

$$(x \cdot x)(y \cdot y) \geq (x \cdot y)^2.$$

Следовательно, $0 \leq dF = F' - F \leq \frac{1}{2} \sum_s \frac{g_s^2}{\alpha_s}$, (2.5)

где $\alpha_s = t_s + \lambda \omega_s$, $g_s = \frac{\partial f_s}{\partial \alpha_s} \alpha_s \varepsilon_s + \lambda \frac{\partial \varphi_s}{\partial \beta_s} \beta_s \delta_s$, при $\lambda = \lambda_s = \frac{-f_s}{\varphi_s}$.

2.3 Аналитическая и статистическая оценка математического ожидания и дисперсии ошибок в результатах оптимизации

Для упрощения ЗРТ

$$F = c - \sum_s (\alpha_s \ln d_s + \beta_s \ln q_s) - \min$$

$$\Phi = 1 - e^{-u}(1 - e^{-y}) = 1 - P,$$

$$\text{где } u = \sum_s q_s; y = \frac{P}{v} \text{ при } v = \sum_s d_s,$$

т.е. Φ зависит от сумм однотипных переменных.

$$\text{Из уравнений Лагранжа следует } d_s = \frac{\alpha_s}{A} v, \quad q_s = \frac{\beta_s}{B} u$$

$$\text{при } \lambda = \frac{A}{v\varphi_v} = \frac{B}{u\varphi_u} \text{ или } u = \frac{B}{A} \cdot \frac{\ln z}{z-1} \text{ при } z = e^y;$$

$$\text{из уравнения границы } u = \ln \frac{z-1}{P_z}.$$

С учетом вида F и Φ :

$$\text{а) для переменных } d_s \text{ имеем } F(d_s, \alpha_s) = -\alpha_s \ln d_s$$

$$f_s = -\frac{\alpha_s}{d_s} \text{ и } \frac{\partial f_s}{\partial \alpha_s} = -\frac{1}{d_s}, t_s = \frac{\alpha_s}{d_s^2} \quad (\text{при } d_s = \frac{\alpha_s}{A} v)$$

$$\varphi_s = \varphi_v \text{ и } \frac{\partial \varphi_s}{\partial \alpha_s} = 0, \quad \omega_s = \frac{y-2}{v} \varphi_v.$$

$$\text{С учетом } \lambda = \frac{A}{v\varphi_v} a_s = \frac{A^2}{\alpha_s v^2} \left(1 + \frac{y-2}{v} d_s\right) = \frac{A^2}{\alpha_s v^2};$$

$$g_s = -\frac{\alpha_s \varepsilon_s}{d_s} = -\frac{A \varepsilon_s}{v} \text{ и } \frac{g_s^2}{a_s} = \alpha_s \varepsilon_s^2.$$

б) аналогично для произвольной q_s имеем:

$$f_s = -\frac{\beta_s}{q_s} \text{ и } \frac{\partial f_s}{\partial \beta_s} = -\frac{1}{q_s}, \quad t_s = \frac{\beta_s}{q_s^2}$$

$$\varphi_s = \varphi_u \text{ и } \frac{\partial \varphi_s}{\partial \beta_s} = 0, \quad \omega_s = -\varphi_u.$$

$$\text{С учетом } \lambda = \frac{B}{u\varphi_u} a_s = \frac{\beta_s}{q_s^2} - \frac{B}{u} \text{ при } q_s = \frac{\beta_s}{B} u,$$

$$\text{т.е. } a_s = \frac{B^2}{\beta_s u^2} (1 - q_s) = \frac{B^2}{\beta_s u^2}; g_s = -\frac{B \delta_s}{u} \text{ и } \frac{g_s^2}{a_s} = \beta_s \delta_s^2$$

Отсюда:

$$dF = \frac{1}{2} \left(\sum_s \alpha_s (\varepsilon_s)^2 + \beta_s (\delta_s)^2 - \frac{\sum_s (\alpha_s \varepsilon_s)^2 + (\beta_s \delta_s)^2}{A + B} \right),$$

$$M(dF) = \left(A + B - \frac{\sum_s (\alpha_s)^2 + (\beta_s)^2}{A + B} \right) \frac{D}{2},$$

где D - дисперсия случайных величин ε_s, δ_s

Замечание: в работе дан вывод выражения для $F' - F$ без этих упрощений; вывод основан на представлении

$$F' - F = - \sum_s \left(\alpha_s \ln \frac{d'_s}{d_s} + \beta_s \ln \frac{q'_s}{q_s} \right),$$

$$\text{где } \ln \frac{d'_s}{d_s} = \ln \frac{(1+\varepsilon_s)}{1+\frac{(\alpha \cdot \varepsilon)}{A}} \left(1 + \frac{dv}{v} \right),$$

и на квадратичном приближении $\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2}$; результаты оценки совпадают.

В экспериментальной части в качестве статистического аналога МО и дисперсии используются следующие выражения:

$$M(dF) = \frac{1}{n} \sum_{l=1}^n dF_l$$

$$D(dF) = \frac{1}{n-1} \sum_{l=1}^n (dF^l)^2 - \frac{n}{n-1} (M(dF))^2$$

В параграфе 1.4 данной работы был приведен вывод рекуррентных соотношений МО и дисперсии:

$$\tilde{m}_n = \frac{1}{n} ((n-1)\tilde{m}_{n-1} + x_n)$$

$$\tilde{D}_n = \frac{n-2}{n-1} \tilde{D}_{n-1} + \frac{1}{n} (x_n - \tilde{m}_{n-1})^2,$$

$$\text{при } \tilde{D}_1 = 0$$

Глава 3. Экспериментальные исследование эффективности ПС при использовании упрощающих гипотез или при неточности исходных данных

3.1. Исходные данные, основные соотношения и форма представления результатов расчета

Для проведения вычислительного эксперимента рассмотрим один из реально существующих комплексов, для которого известны приближённые значения весовых коэффициентов и показателей функционирования. Данный комплекс предназначен для управления ракетой подводной лодки. Его характеристики представлены в таблице 1.

Таблица 1

Исходные данные

№	Название устройств технического комплекса	α	β	γ
1	Инерциальная система навигации	4.5	5.6	1
2	Радиолокационная система	4.1	2.9	1.5
3	Бортовая вычислительная система	2.4	2.6	1.7
4	Датчики угловых координат и скоростей	4.9	2.8	2
5	Рулевые машинки автопилота	5.0	6.9	2.5
6	Система воздушных сигналов	5.8	8.2	3
7	Система управления двигателем	6.9	8.3	4

Основные соотношения, используемые в вычислительном эксперименте:

1. Формула задания относительных погрешностей для α_s, β_s :

$$\varepsilon_s^l = \frac{2 * rnd - 1}{3}, \delta_s^l = \frac{2 * rnd - 1}{3}$$

2. Формула расчета погрешности ПС:

$$dF^l = \frac{1}{2} \left(\sum_s \alpha_s (\varepsilon_s^l)^2 + \beta_s (\delta_s^l)^2 - \frac{\sum_s (\alpha_s \varepsilon_s^l)^2 + (\beta_s \delta_s^l)^2}{A + B} \right),$$

$$A = \sum_s \alpha_s, B = \sum_s \beta_s$$

3. Итерационные формула расчета статистических аналогов МО и дисперсии:

$$\tilde{m}_l = \frac{1}{l} ((l-1)\tilde{m}_{l-1} + dF^l), \tilde{m}_1 = dF^l$$

$$\tilde{D}_l = \frac{l-2}{l-1} \tilde{D}_{l-1} + \frac{1}{l} (dF^l - \tilde{m}_{l-1})^2, \tilde{D}_1 = 0$$

4. Аналитическая формула расчета МО:

$$M(dF) = \left(A + B - \frac{\sum_s (\alpha_s)^2 + (\beta_s)^2}{A + B} \right) \frac{D}{2}$$

5. Выражение для расчета дисперсии относительных ошибок ε_s, δ_s :

$$D = \frac{3}{2} \int_{-\frac{1}{3}}^{\frac{1}{3}} x^2 dx = \frac{1}{27}$$

Результаты расчетов представлены в виде двух графиков сходимости и одной гистограммы. На первом графике изображается зависимость оценки МО \tilde{m}_l в соответствии с итерационной формулой от номера эксперимента.

Аналогично, на втором графике изображается зависимость оценки дисперсии погрешности ПС в зависимости от номера испытания.

Гистограмма отображает распределение полученных значений погрешности ПС dF^l . Также вместе с гистограммой для зрительного сравнения изображается плотность вероятности релеевского распределения:

$$f(x) = \frac{x}{\sigma^2} \exp\left(\frac{-x^2}{2\sigma^2}\right),$$

где σ^2 - масштабируемый коэффициент, равный с дисперсией
распределяемой величины.

Полученное распределение сравнивается с релеевским, так как распределение значений зависящих от двух случайных независимых между собой величин имеет релеевский закон распределения.

3.2. Результаты вычислительных экспериментов и их анализа

Перед проведением эксперимента проводилась нормировка исходных данных в соответствии с условием:

$$\alpha_s + \beta_s < 1$$

Для проведения нормировки рассчитывается коэффициент:

$$k = \max_s \alpha_s + \beta_s$$

Далее, для каждого s :

$$\alpha'_s = \frac{\alpha_s}{k}, \beta'_s = \frac{\beta_s}{k}$$

Таким образом, получены нормированные исходные данные:

$$\alpha := (0.6 \ 0.5 \ 0.4 \ 0.3 \ 0.3 \ 0.25 \ 0.2)^T$$

$$\beta := (0.04 \ 0.05 \ 0.06 \ 0.08 \ 0.085 \ 0.09 \ 0.093)^T$$

В ходе вычислительного эксперимента для количества испытаний $l = 200$ были получены следующие результаты:

1. Математическое ожидание, рассчитанное по аналитической формуле:

$$M(dF) = 0.05$$

2. Графики сходимости

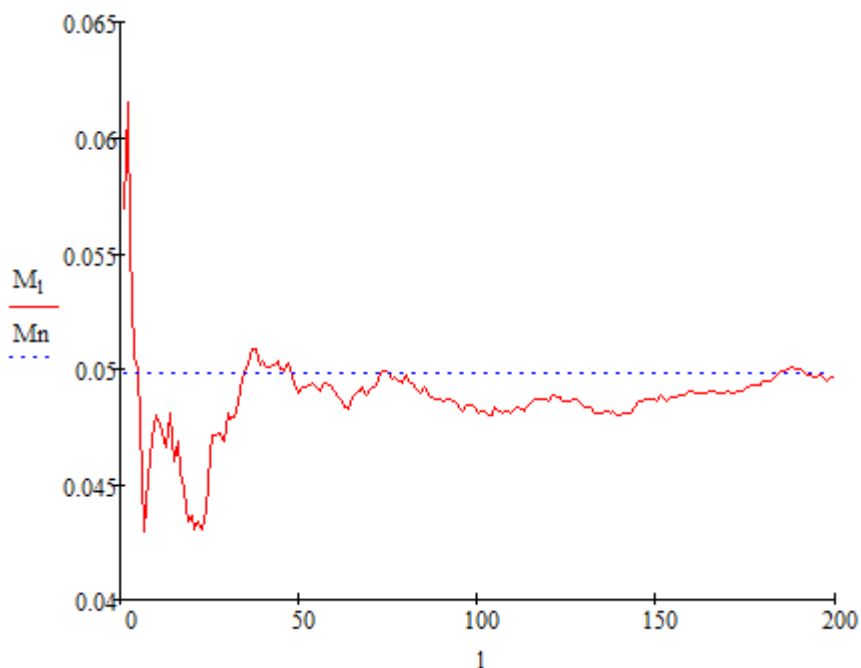


рис. 3 График сходимости МО результатов ПС

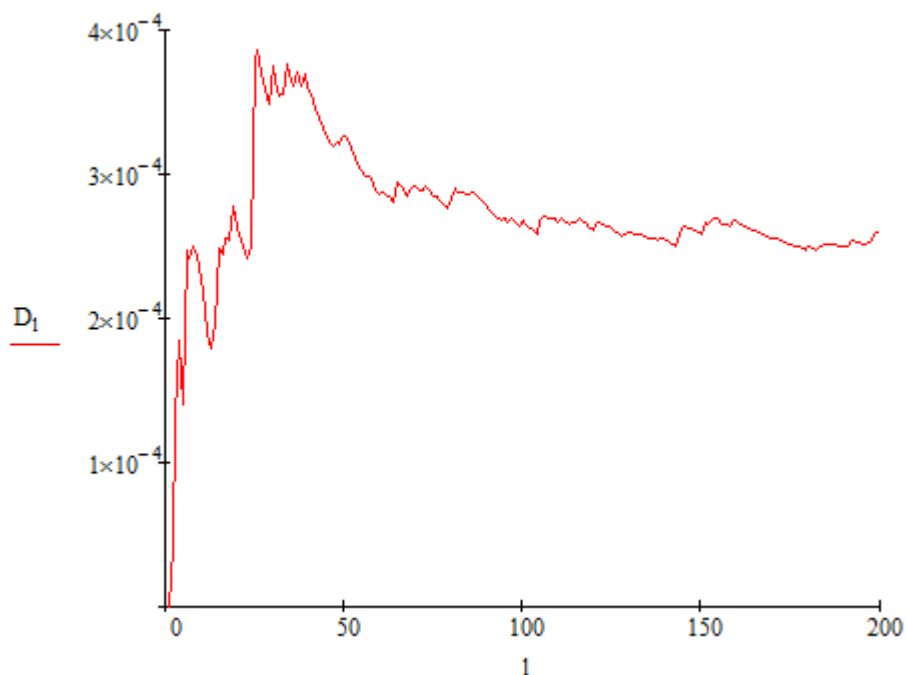


рис. 4 График сходимости дисперсии результатов ПС

Перед получением гистограммы распределения погрешности, рассчитывается необходимый параметр σ^2 для релеевского распределения $f(x)$:

$$m = \int_0^{\infty} f(x) dx,$$

где m - МО распределяемой величины.

Для распределения по релеевскому закону имеем:

$$m = \int_0^{\infty} \frac{x}{\sigma^2} \exp\left(\frac{-x^2}{2\sigma^2}\right) dx$$

После интегрирования по частям получаем:

$$m = \frac{\sigma\sqrt{2\pi}}{2}$$

Отсюда получаем:

$$\sigma = m \sqrt{\frac{2}{\pi}}$$

Таким образом, для сравнения гистограммы распределения погрешностей ПС с релеевским законом распределения необходимо по аналитически рассчитанному МО $M(dF)$ рассчитать σ и построить функцию

$f(x)$. Также необходимо произвести масштабирование функции $f(x)$. На графике итоговое релеевское распределение обозначается как $r(x)$.

3. Гистограмма распределения погрешностей

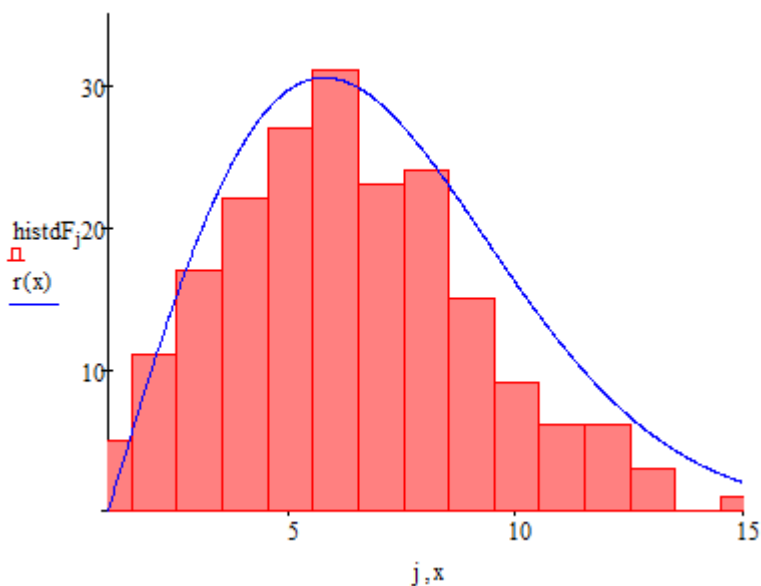


рис. 5 Гистограмма распределения dF^l

4. Для сравнения получены гистограммы для количества испытаний $l = 50$ и $l = 150$ (рис. 5 и рис. 6).

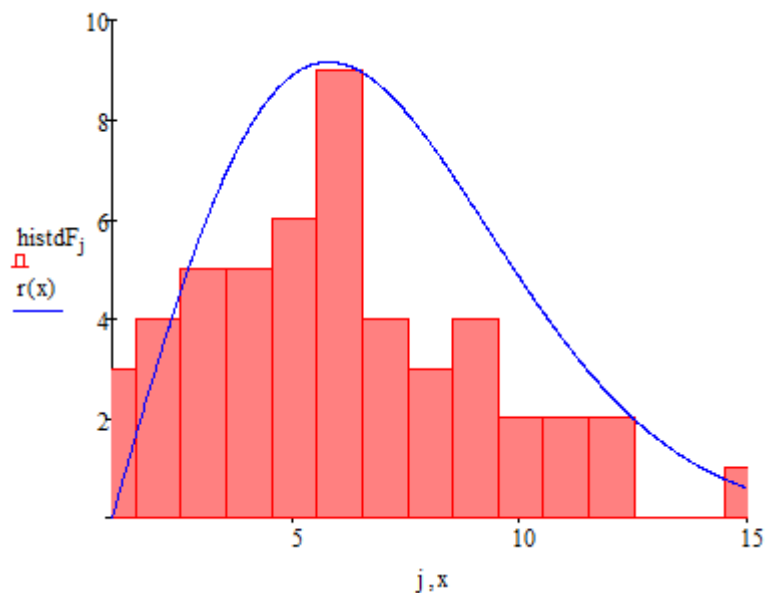


рис. 6 Гистограмма распределения dF^l для 50 испытаний

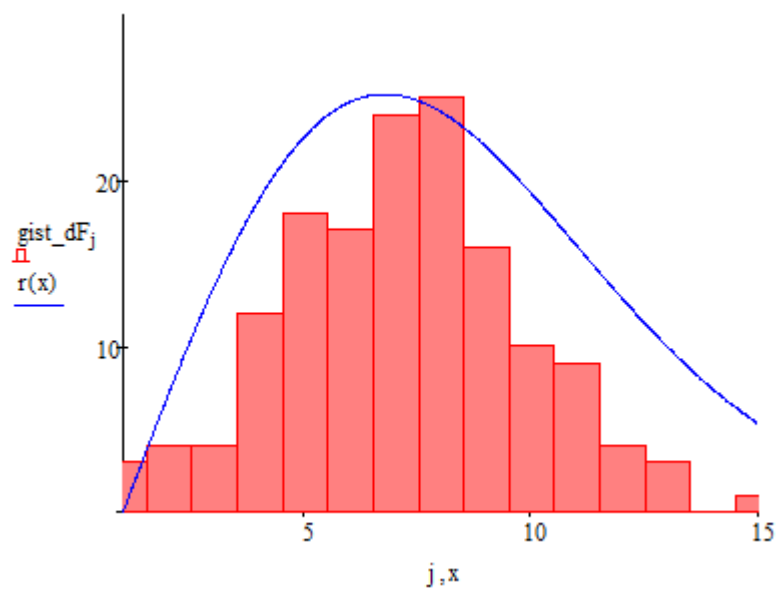


рис. 7 Гистограмма распределения dF^l для 150 испытаний

3.3. Оценка влияния неточности исходных данных

Так как для расчета используются нормированные величины, то полученное значение МО, рассчитанного по аналитической формуле, необходимо сравнивать с 1. В данном случае это 5% относительная погрешность. Из чего можно сделать вывод о робастности решения ЗРТ, так как при относительной погрешности в исходных данных в 30% относительная погрешность полученного решения равна 5%.

На рис.1 показана сходимость статистического аналога МО dF^l к МО, полученному аналитически. Из графика видно, что с увеличением числа испытаний график рекуррентной формулы МО постепенно сближается с аналитически рассчитанным МО.

На рис.2 показан только график сходимости дисперсии, на котором видно, что при увеличении числа испытаний значение дисперсии стремится к определенному значению, равному $2.6 \cdot 10^{-4}$.

На рис. 3 изображена гистограмма распределения dF^l для 15 интервалов и релеевское распределение. Из рисунка видно подобие данных распределений, что в соответствии с теоремами математической статистики говорит о правильности полученных результатов.

Анализ графиков гистограммам для различного количества испытаний показывает, что с увеличением числа испытаний гистограмма распределения погрешностей результатов параметрической оптимизации приближается к виду релеевского закона распределения.

Исходя из близости полученных распределений возможно принять полученную дисперсию σ^2 как дисперсию погрешностей результатов ПС $D(dF)$ в дополнение к его МО.

Таким образом, при условии близости распределения к релеевскому получаем зависимость дисперсии погрешности ПС от ее МО:

$$D(dF) = \frac{2M(dF)^2}{\pi}$$

Заключение

Получены аналитические выражения для погрешности результатов параметрического синтеза в зависимости от ошибок в исходных данных. Выполнен аналитический расчет математического ожидания и дисперсии погрешности результатов ПС. Результаты вычислительных экспериментов по прямому расчету этих характеристик подтверждают теоретические выводы.

В дальнейшем целесообразно результаты экспериментов, полученных в виде гистограмм, аппроксимировать аналитическими выражениями для более широкого класса функций распределения.

Список литературы

1. В.А. Николаева. Оптимальный выбор характеристик устройств, входящих в проектируемый комплекс / Магистерская диссертация (ИМОП), - 2010 - 21с.
2. А.А Салангин. Методология системного анализа проектируемых технических комплексов. Псков. Издательство ППИ. 2009 г. 129 с.
3. Ю.М.Смирнов, А.А. Салангин. Чувствительность результатов параметрического синтеза к искажениям модели// Тезисы Международной научно-практической конференции – XIV Академические чтения МАН ВШ.- Псков: Изд. ППИ,2008.- с. 128-130.
4. А.А. Салангин, Ю.М. Смирнов, В.П. Шкодырев. Современные проблемы автоматизации и управления – СПб: СПбГПУ, 2010- 165 с.
5. Ю.М. Смирнов. Оценка погрешности в решении оптимизационных задач системного программирования. 5с. <https://yadi.sk/d/HQzb9dw4nn7wR>.
6. Поляков Е.Л., Николаева А.А. Выбор требований к характеристикам элементов проектируемого радиоэлектронного комплекса на основе квазиградиентного подхода: Вопросы радиоэлектроники, 2013, Т.2, № 3, с.117-126.
7. В.М. Однобоков. Постановка и методы решения задач распределения при проектировании бортовых РЭК. Дисс. кандидата тех. наук, СПбГПУ, 2003г. – 170с.