

Санкт-Петербургский политехнический университет Петра Великого
Институт прикладной математики и механики
Кафедра прикладной математики

Диссертация допущена к защите
Зав. кафедрой
_____ Фролов М. Е.
«___» _____ 2016 г.

ДИССЕРТАЦИЯ
на соискание степени МАГИСТРА

Тема: «Оценка параметров гауссовского случайного поля по малому набору его реализаций, заданных в конечном множестве точек»

Направление: 01.04.02 – Прикладная математика и информатика
Магистерская программа: 510202 – Математическое моделирование

Выполнил: студент группы 63601/1 _____ Зайцева Н.И.

Руководитель: к.ф.-м.н., доц. _____ Лупуляк С.В.

Консультанты:

по вопросам охраны труда: к.т.н., доц. _____ Монашков В.В.

по вопросам теории вероятностей и
математической статистики: с.н.с. _____ Березин С.В.

Санкт-Петербург
2016

РЕФЕРАТ

Диссертационная работа содержит: страниц — 61, рисунков — 10, приложений — 1, литературных источников — 31.

Оценка параметров гауссовского случайного поля по малому набору его реализаций, заданных в конечном множестве точек

СЛУЧАЙНОЕ ПОЛЕ, МАЛАЯ ВЫБОРКА, ОЦЕНКА ПАРАМЕТРОВ, МОДЕЛИРОВАНИЕ СЛУЧАЙНОГО ПОЛЯ, ЯДЕРНАЯ ОЦЕНКА, L_2 -ПОДХОД

Диссертационная работа посвящена разработке методов оценивания параметров однородного изотропного гауссовского случайного поля по малому набору его реализаций, заданных в некотором конечном множестве точек плоскости. В работе были получены оценки параметров случайного поля, учитывающие малость выборки. В частности, для параметра вероятности были получены оценки, основанные на L_2 -теории ядерного оценивания. Также были рассмотрены разные методы моделирования случайных полей, и один из них был реализован на ЭВМ. Указанные выше оценки были исследованы с помощью вычислительного эксперимента на тестовых реализациях случайных полей. Анализ показал, что для малых выборок эти оценки дают бóльшую точность, чем классические оценки.

Title: Estimation of Gaussian field parameters with a small sample of discrete measurements

RANDOM FIELD, SMALL SAMPLE, PARAMETER ESTIMATION, SIMULATION OF RANDOM FIELD, KERNEL DENSITY ESTIMATION, L_2 -VIEW

The main problem addressed in our study is to develop methods for estimating parameters of a homogeneous isotropic Gaussian random field. We assume that a small sample of the field measurements at a finite set of points is given. In this study new estimators for random field parameters were obtained. Particularly, based on L_2 kernel density estimation theory we derive a probability estimator. Also, various simulation methods of random fields were reviewed, and one of them was implemented on a computer. Extensive computer experiments showed that the estimators obtained give smaller errors than the standard ones.

Содержание

Введение	2
1 Мотивация и постановка задачи	4
1.1 Процесс сборки крыла	4
1.2 Стохастическая модель зазора	5
2 Моделирование случайных полей	8
2.1 Случайное поле	8
2.2 Моделирование случайного поля	10
2.2.1 Метод скользящего среднего	10
2.2.2 Метод параметрического моделирования случайного поля	11
3 Оценивание параметров поля	17
3.1 Параметры случайного поля	17
3.2 Задача статистического оценивания параметров	18
3.2.1 Метод максимального правдоподобия	20
3.2.2 Метод наименьших квадратов для математического ожидания и дисперсии	21
3.2.3 Метод наименьших квадратов для параметра нормированной корреляционной функции	22
3.3 Малая выборка	23
3.4 Оценка вероятности	26
3.4.1 Ядерные оценки	26
3.4.2 Минимаксный подход к оптимизации оценок	29
3.4.3 Подбор оптимального параметра сглаживания	30
3.4.4 Подбор оптимальной формы ядра	35
4 Результаты	39
4.1 Моделирование полей	39
4.2 Исследование полученных оценок	42
5 Охрана труда	46
Заключение	53
Список литературы	54
Приложение 1. Алгоритм расстановки крепежных элементов	57

Введение

Работа посвящена статистической оценке параметров гауссовского случайного поля по малому числу его реализаций, заданных в некотором конечном наборе точек. Такая задача возникла как часть большого проекта по моделированию процесса сборки крыльев. При построении общей математической модели необходимо построить отдельную стохастическую модель зазора между деталями. Такой зазор образуется при промышленно производстве деталей из-за неконтролируемых погрешностей в производственном процессе. В качестве стохастической модели зазора предлагается взять случайное поле. Главной особенностью такой задачи является то, что для получения оценок параметров модели предлагается малое число экспериментальных измерений, поскольку измерения реальных зазоров связаны с большими финансовыми трудностями.

Основная цель данной работы состоит в том, чтобы получить оценки параметров случайного поля по экспериментальным данным. Для этого необходимо использовать специальные методы статистического оценивания, учитывающие малость выборки и взаимную зависимость случайных величин, возникающую при рассмотрении реализаций случайного поля. В этом случае для получения оценок необходимо использовать специальные методы статистики малых выборок. В качестве оцениваемых параметров поля рассматриваются среднее, дисперсия, корреляционная функция и еще один параметр — вероятность нахождения значений поля в заданных пределах.

Практическое применение стохастической модели подразумевает, что есть возможность получить набор конкретных численных реализаций зазора. В связи с этим, в данной работе так же рассматривается задача моделирования случайного поля, то есть получения его численных реализаций. Методы, позволяющие проводить такое моделирование, достаточно хорошо изучены. В данной работе ставилась задача изучить эти методы, решить, какой из них предпочтительнее применять в данном случае, и реализовать его на ЭВМ.

После того, как оценки будут получены, необходимо провести исследование их эффективности для малого объема выборки. В данной работе было решено при исследовании оценок опираться на реализованный метод моделирования случайного поля. С помощью этого метода можно получать тестовые выборки любого объема для поля с любыми заданными параметрами. Для такого тестового набора можно сравнивать оценочные значения параметров с их реальными значениями и делать выводы об эффективности полученных оценок.

Дипломная работа содержит 5 глав. В первой главе приводятся мотивации и постановки задач, решаемых в данной работе. Сначала следует описание процесса сборки крыла и рассказывается о зазоре (раздел 1.1). Затем в разделе 1.2 описывается модель зазора, задающаяся случайным полем, вводятся предположения о его свойствах и приводятся их обоснования; приводится постановка задачи оценивания параметров по малому набору реализаций, а так же постановка и мотивация задачи моделирования случайного поля.

Вторая глава описывает решение задачи моделирования зазора. В разделе 2.1 приводятся основные определения и свойства случайных процессов, которые потом будут использоваться на практике. В разделе 2.2 приведен обзор методов моделирования случайных полей, и подробно описан метод параметрического моделирования, который был реализован в рамках данной дипломной работы.

Третья глава посвящена задаче оценивания параметров случайного поля. В пункте 3.1 приведены те параметры, для которых нужно построить оценки. В пункте 3.2 подробно рассмотрена статистическая задача оценивания параметров, а так же описана используемая нами модификация методов классической статистики для получения оценок математического ожидания, дисперсии и параметра корреляционной функции. В пункте 3.3 приведено определение малой выборки и получена еще одна оценка для дисперсии, основанная на применении методов статистики малых выборок. Наконец, в пункте 3.4, для получения оценки вероятности применяется метод ядерных оценок, для которого были получены некоторые оптимальные значения в условиях малой выборки.

В четвертой главе приводятся результаты и практическое исследование оценок. В разделе 4.1 приведены результаты, полученные с помощью реализованного метода моделирования случайных полей. В разделе 4.2 приводится исследование полученных оценок параметров и графики, иллюстрирующие эти исследования.

Заключительная, пятая глава посвящена вопросам безопасности труда.

В приложении приведен разработанный алгоритм расстановки крепежных элементов, практическое использование которого основано на полученных в данной работе результатах.

Список литературы включает 31 работу российских и зарубежных авторов.

Глава 1

Мотивация и постановка задачи

1.1 Процесс сборки крыла

Предложенная к рассмотрению в диссертационной работе задача возникла в процессе реализации большого проекта по математическому моделированию процесса сборки крыла самолета. Рассматривается один этап промышленной сборки крыла, связанный с соединением внешних панелей крыла и каркаса. Крыло схематично трактуется как каркас и две панели (одна верхняя, другая нижняя), которые прикрепляются крепежами к каркасу. Процесс сборки для верхней и нижней панелей не различается, поэтому рассматривается соединения только для верхней панели. После того, как панель накладывают на каркас, эти две детали прилегают друг к другу неплотно и между ними появляется существенный зазор. Затем панель скрепляют с каркасом с помощью временных крепежей, которые прижимают детали друг к другу с определенной силой, тем самым уменьшая зазор между ними. Целью расстановки этих крепежей является плотное прилегание деталей друг к другу, то есть уменьшение величины зазора до минимально-возможного. При промышленной сборке крыла зазор считается сведенным, если во всех рассматриваемых точках между деталями его значение не превышает заданного минимального значения, определяемого техническими требованиями.

На зазор между деталями влияет множество неконтролируемых факторов, возникающих в процессе изготовления, поэтому его значения варьируются от крыла к крылу. Для учета индивидуальных особенностей каждого крыла необходимо каждый раз перед сборкой измерять зазор для этого крыла, а потом разрабатывать индивидуальную схему расстановки крепежей на основании полученного измерения. Но при промышленном производстве нет возможности быстро и качественно измерять индивидуальный зазор каждого крыла. Поэтому необходимо разработать единую схему расстановки крепежей, которая бы учитывала и общий характер зазора и его случайные вариации от крыла к крылу, однако наиболее качественно сводила зазор для всех крыльев одной серии. Поскольку этот зазор необходимо сводить, предлагается создать его математическую модель, которая бы описывала его в общем случае (для всех изготавливаемых деталей одного вида). На основе этой модели можно разрабатывать схему расстановки крепежей

для всех крыльев серии. Поскольку реальный зазор случайно варьируется от детали к детали, для моделирования такого зазора естественно применять стохастическую модель.

1.2 Стохастическая модель зазора

Опишем модель зазора, которая применяется в данной работе. Схема крыла представлена на Рис. 1.1. Характерные размеры крыла (длина и ширина) по осям X и Y намного больше, чем изгиб крыла по оси Z , поэтому можно считать, что каркас и панель — плоские детали. Каркас крыла считается абсолютно неподвижным телом, на него сверху накладывается панель крыла. Как уже было сказано, при соединении этих двух плоских деталей между ними образуется зазор. Величина этого зазора на несколько порядков меньше, чем характерные размеры деталей. Поэтому, при моделировании считается, что каркас — ровная плоскость, а панель — поверхность, небольшие искривления которой по нормали к этой поверхности (по оси Z) описывают зазор между этими деталями. Соответственно, будем считать, что зазор между двумя конкретными деталями описывается с помощью поверхности $z = f(x, y)$. Однако, для получения общей модели зазора для всех крыльев, необходимо эту модель усложнить.

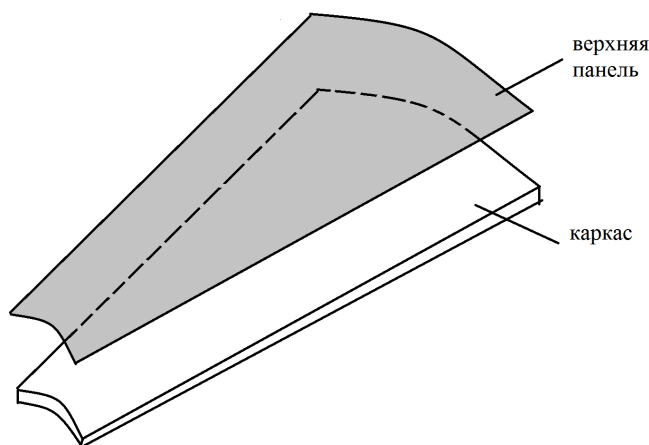


Рис. 1.1: Схематичное строение крыла.

При моделировании зазора было предложено использовать идею из [19]. В этой книге анализируются шероховатости поверхностей деталей, связанные с процессом их обработки. Такая шероховатость поверхностей моделируется с помощью случайного поля. В нашем случае мы рассматриваем по сути такие же изменения поверхностей деталей, только на макроуровне. В нашем случае зазор между деталями формируется за счет более масштабных неровностей, связанных с погрешностью производства деталей. Основываясь на этом, в качестве стохастической модели зазор будем использовать случайное поле. Случайное поле $\xi(\mathbf{x})$ — случайная функция, зависящая нескольких переменных, в данном случае от координат точки \mathbf{x} .

Из физических соображений будем предполагать, что используемое для моделирования случайное поле является достаточно гладким (считается, что на

поверхности деталей нет резких скачков и изломов), однородным и изотропным (считается, что зазор имеет одинаковые характеристики для всех рассматриваемых точек области и вне зависимости от направления). Кроме того, аналогично [19], предполагаем, что это поле гауссово (это предположение естественно использовать, поскольку мы рассматриваем один и тот же процесс изготовления большого количества деталей). Такое случайное поле однозначно задается несколькими параметрами.

При работе с такой моделью зазора часто возникает необходимость определить, как ведут себя значения зазора, например, получить вероятность того, что зазор превысит минимально-допустимое значение. Поэтому, кроме параметров, однозначно задающих такое случайное поле (среднее, дисперсия и корреляционная функция), мы так же введем еще один параметр поля — вероятность того, что значения этого поля попадают в заданное множество.

Значения этих параметров поля мы будем получать приблизительно с помощью оценок из экспериментальных данных, то есть из нескольких измерений зазора для реальных крыльев. Измерение рассматриваемого зазора на реальном крыле возможно проводить только во время работы сборочной линии, для чего процесс сборки приходится прерывать. Это ведет к большим финансовым потерям для производителя. В связи с этим, в качестве экспериментальных данных предоставляется всего несколько измерений реальных зазоров. Более того, измерения производятся только в дискретном множестве доступных точек. По такому набору данных нужно оценить параметры модели. Необходимо так же отметить, что для одной реализации случайного поля значения этого поля в разных точках являются зависимыми случайными величинами. Методы оценки параметров, использующиеся в классической статистике, рассчитаны на большое количество независимых реализаций. В нашем случае при получении оценок эту зависимость и малое количество необходимо учитывать.

Измерение зазора между панелью крыла и каркасом можно провести только тогда, когда они уже соединены в определенных местах несколькими крепежами так, чтобы эти детали не смещались относительно друг друга. Экспериментально было выяснено, что любой крепеж сводит зазор в точке своей установки, а его влияние на зазор в соседних точках ограничивается заданной окрестностью. Поэтому за пределами этой окрестности влияние этого крепежа можно не учитывать. Поэтому, чтобы оправдать предположение о гауссовости поля, моделирующего зазор, из всех измерений исключаются те точки, в заданной окрестности которых уже находится крепеж.

Стохастическая модель естественно описывает реальный зазор, отличающийся от крыла к крылу. Однако при практическом применении этой модели возникают проблемы с тем, что используемые методы численного моделирования процесса сборки крыла, в частности, методы решения контактных задач [25], используют в качестве входного параметра численные значения зазора. Следовательно, для такой стохастической модели в виде случайного поля необходимо иметь возможность получать реализации этого поля, то есть моделировать это случайное поле по заданным параметрам модели.

Таким образом, основными задачами, решаемыми в этой работе, являются оценка параметров случайного поля по набору его реализаций и моделирование случайного поля с заданными параметрами.

Глава 2

Моделирование случайных полей

Данная глава описывает методы моделирования случайных полей, позволяющие генерировать численные реализации однородного изотропного гауссова случайного поля с заданными характеристиками. В частности, здесь подробно рассмотрен метод моделирования, который был реализован нами на практике.

В нашей работе метод моделирование случайных полей так же используется для получения набора реализаций тестового случайного поля, на котором будут исследоваться оценки параметров.

2.1 Случайное поле

Определение и свойства случайного поля приводятся следуя [18]. Случайная функция $\xi(\mathbf{x})$ со значениями из \mathbb{R} от m -мерной переменной $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_m)$ называется скалярным случайным полем. Параметр \mathbf{x} называемый аргументом поля, принимает значения в некоторой области D m -мерного пространства \mathbb{R}^m .

Рассмотрим основные свойства случайных полей. Многомерным законом распределения случайного поля называется совместный закон распределения n значений поля в точках $\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n$, то есть закон распределения случайного вектора $(\xi(\mathbf{x}_1), \dots, \xi(\mathbf{x}_n))$. многомерный закон распределения характеризуется n -мерной плотностью вероятности $f_n(y_1, \dots, y_n; \mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n)$, $y_1 = \xi(\mathbf{x}_1), \dots, y_n = \xi(\mathbf{x}_n)$, которая зависит от значений аргумента $\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n$ как от параметра. Совокупность всех n -мерных законов распределения для всех целых $n = 1, 2, \dots$ и любых значений аргумента $\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n$ задает распределение поля. В силу сложности задания многомерных законов распределения на практике переходят к рассмотрению одномерных законов распределения, математических ожиданий, корреляционных функций и спектральных плотностей.

Математическим ожиданием $\mu(\mathbf{x})$, дисперсией $\sigma^2(\mathbf{x})$, корреляционной функцией $K(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2)$ и нормированной корреляционной функцией называются функции,

определяемые формулами:

$$\mu(\mathbf{x}) = \mathbb{E}[\xi(\mathbf{x})]; \quad \sigma^2(\mathbf{x}) = \mathbb{E}[(\xi(\mathbf{x}) - \mu(\mathbf{x}))^2] \quad (2.1)$$

$$K(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2) = \mathbb{E}[(\xi(\mathbf{x}_1) - \mu(\mathbf{x}_1))(\xi(\mathbf{x}_2) - \mu(\mathbf{x}_2))]; \quad \mathfrak{K}(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2) = \frac{K(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2)}{\sigma(\mathbf{x}_1)\sigma(\mathbf{x}_2)}. \quad (2.2)$$

Корреляционная функция является мерой линейной зависимости сечений случайного поля $\xi(\mathbf{x})$ в точках \mathbf{x}_1 и \mathbf{x}_2 .

Случайное поле называется однородным, если его математическое ожидание постоянно, а корреляционная функция зависит от разности аргументов:

$$\mu(\mathbf{x}) = \mu = \text{const}; \quad K(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2) = K(\mathbf{x}), \mathbf{x} = \mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_1. \quad (2.3)$$

Тогда дисперсия тоже имеет постоянное значение $\sigma^2(\mathbf{x}) = \sigma^2$.

Тогда нормированная корреляционная функция принимает вид:

$$\mathfrak{K}(\mathbf{x}) = \frac{K(\mathbf{x})}{\sigma^2}, \quad (2.4)$$

и равна единице в нуле: $\mathfrak{K}((0, 0)) = 1$.

Поле называется гауссовским, если все его многомерные законы распределения нормальны. Гауссовское случайное поле однозначно определяется двумя характеристиками: математическим ожиданием и корреляционной функцией.

Случайное поле называется непрерывным в точке \mathbf{x}_0 в среднеквадратическом, если

$$\lim_{\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{x}_0} \xi(\mathbf{x}) = \xi(\mathbf{x}_0), \text{ т.е. } \lim_{\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{x}_0} \mathbb{E}[(\xi(\mathbf{x}) - \xi(\mathbf{x}_0))^2] = 0. \quad (2.5)$$

Здесь первый \lim – предел в среднем квадратическом. Для среднеквадратической непрерывности однородного в широком смысле случайного поля необходима и достаточна непрерывность $K(\mathbf{x})$ в нуле и существование первых двух моментов. Для того, чтобы имела место гладкость поля, необходима соответствующая степень гладкости моментов и корреляционной функции в нуле.

Корреляционная функция непрерывного в среднеквадратическом смысле однородного поля может быть представлена в виде многомерного интеграла Фурье от некоторой функции $S_\xi(\mathbf{u})$:

$$K(\mathbf{x}) = \int_{\mathbb{R}^m} e^{i\mathbf{u}^T \mathbf{x}} S_\xi(\mathbf{u}) d\mathbf{u} \quad (2.6)$$

Функция $S_\xi(\mathbf{u})$ называется спектральной плотностью случайного поля. Она зависит от пространственной частоты — вектора $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^m$. Спектральную плотность можно записать через нормированную спектральную плотность $s_\xi(\mathbf{u})$:

$$S_\xi(\mathbf{u}) = \sigma^2 s_\xi(\mathbf{u}). \quad (2.7)$$

Нормированная спектральная плотность обладает следующими свойствами:

$$s_\xi(\mathbf{u}) \geq 0, \quad s_\xi(\mathbf{u}) = s_\xi(-\mathbf{u}), \quad \int_{\mathbb{R}^m} s_\xi(\mathbf{u}) = 1. \quad (2.8)$$

Корреляционная функция и спектральная плотность связаны однозначно через прямое и обратное преобразования Фурье, поэтому задание корреляционной функции для поля равнозначно заданию его спектральной плотности.

Однородное случайное поле называется изотропным, если его корреляционная функция зависит только от расстояния между точками:

$$K(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2) = K(r) = \sigma^2 \mathfrak{K}(r), \quad r = \|\mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_1\| = \left(\sum_{i=1}^m (x_2^{(i)} - x_1^{(i)})^2 \right)^{\frac{1}{2}}, \quad (2.9)$$

то есть вероятностная связь точек поля зависит только от их отдалённости друг от друга, а не от взаимного расположения. Для изотропного поля спектральная плотность так же зависит от модуля вектора $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^m$:

$$S_\xi(\mathbf{u}) = S(|\mathbf{u}|) = \sigma^2 s(|\mathbf{u}|). \quad (2.10)$$

2.2 Моделирование случайного поля

Рассмотрим два распространенных метода моделирования случайных полей, описанных в [20] — метод скользящего среднего и метод параметрического моделирования. Перейдем к их краткому описанию.

2.2.1 Метод скользящего среднего

Метод скользящего суммирования рассматривается как метод для моделирования двумерного случайного поля с заданной корреляционной функцией (или спектральной плотностью). Данный метод позволяет получить реализации случайного поля в дискретном множестве точек. Кратко опишем этот метод для моделирования двумерного гауссовского поля $\xi(\mathbf{x})$, $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2$, с заданной корреляционной функцией $K(\mathbf{x})$ или спектральной плотностью $S_\xi(\mathbf{u})$.

Дискретные значения поля в точке $\mathbf{x} = (m\Delta_1, n\Delta_2)$ моделируются с помощью формулы скользящего суммирования

$$\xi_{mn} = \sum_i \sum_j a_{ij} \varepsilon_{m-i, n-j}, \quad (2.11)$$

где $m, n = 0, 1, \dots$, $\varepsilon_{k,l}$ — последовательность независимых стандартных гауссовских величин $\varepsilon_{k,l} \sim N(0, 1)$; a_{ij} — весовые коэффициенты; Δ_1, Δ_2 — шаги дискретизации по компонентам вектора \mathbf{x} . Суммирование осуществляется по всем целым $i = 0, \pm 1, \dots \pm M_1, j = 0, \pm 1, \dots \pm M_2$.

Для вычисления весовых коэффициентов предлагается несколько стандартных методов, основанных на интегрировании корреляционной функции с некоторыми весами [20].

Достоинством этого метода моделирования является наличие нормальности полученного поля. Этот метод можно применять для моделирования случайного поля со спектральной плотностью произвольного вида. Недостатком этого метода является наличие большой предварительной вычислительной работы, связанной с многократным численным вычислением интегралов при получении весовых коэффициентов. Требуемое время и погрешность вычислений возрастает при уменьшении шага дискретизации. Погрешности вычисления весовых коэффициентов приводят к методическим ошибкам в корреляционных характеристиках получаемых реализаций.

2.2.2 Метод параметрического моделирования случайного поля

Для моделирования однородных случайных полей более удобный, простой и экономичный при реализации на ЭВМ метод основан на параметрических (неканонических) моделях. В данной работе мы опирались на [20] и на [17], где проведено более подробное исследование этого метода.

Начнем с наиболее общей модели. Параметрической моделью скалярного случайного поля будем называть модель $\zeta(\mathbf{x}, \Omega)$, зависящую от аргумента \mathbf{x} и случайного параметра Ω , адекватную моделируемому полю на уровне первых двух моментов — математического ожидания и корреляционной функции. Для моделирования желательно, чтобы модель определялась как можно более простыми аналитическими формулами и максимально соответствовала статистическим характеристикам моделируемого поля, то есть воспроизводила по возможности моментные характеристики и законы распределения высшего порядка.

Моделирование на уровне первых двух моментов

Как было сказано выше, задача моделирования случайного поля по первым двум моментам математически однозначно определена только для гауссова поля. Поскольку, мы предполагаем, что моделируемое нами поле обладает свойствами однородности и гауссовости, то данный метод представляется нам наиболее удобным для использования при решении поставленных задач. Далее приведем подробное описание данного метода в применении к нашей задаче моделирования.

Необходимо получить в области $D \subset \mathbb{R}^m$ реализации однородного изотропного вещественного случайного поля $\xi(\mathbf{x})$ с заданным математическим ожиданием μ , дисперсией σ^2 и корреляционной функцией $K(\mathbf{x}) = \sigma^2 \mathfrak{K}(\mathbf{x})$, где $\mathfrak{K}(\mathbf{x})$ — нормированная корреляционная функция случайного поля, с которой связана нормированная спектральная плотность случайного поля $s_\xi(\mathbf{u})$: $\int_{\mathbb{R}^m} s_\xi(\mathbf{u}) d\mathbf{u} = 1$.

Рассмотрим простую параметрическую модель $\zeta(\mathbf{x}, \Omega)$:

$$\zeta(\mathbf{x}, \Omega) = \mu + \sigma Z \{\cos[\mathbf{V}^T(\mathbf{x}_0 + \mathbf{x})] + \sin[\mathbf{V}^T(\mathbf{x}_0 + \mathbf{x})]\}, \quad (2.12)$$

где: $\mathbf{V} \in \mathbb{R}^m$ – m -мерный случайный вектор с плотностью вероятности $f_{\mathbf{V}}(\mathbf{u}) = s_{\xi}(\mathbf{u})$ (нормированная спектральная плотность по определению обладает теми же свойствами, что и плотность распределения некоторой случайной величины); z – случайная величина, не зависящая от \mathbf{V} , с плотностью вероятности $f_Z(\lambda)$ и $\mathbb{E}[Z] = 0, \mathbb{E}[Z^2] = 1$; \mathbf{x}_0 – детерминированный начальный вектор; \mathbf{x} – аргумент поля; $\mathbf{V}^T(\mathbf{x}_0 + \mathbf{x})$ – скалярное произведение векторов.

Реализации поля $\zeta(\mathbf{x}, \Omega)$ определяются значениями случайного параметра $\Omega = (Z, \mathbf{V})$. Из формулы (2.12) можно так же получить запись $\zeta(\mathbf{x}, \Omega)$ в виде:

$$\zeta(\mathbf{x}, \Omega) = \mu + \sqrt{2}\sigma z \sin[\mathbf{V}^T(\mathbf{x}_0 + \mathbf{x}) + \frac{\pi}{4}]. \quad (2.13)$$

Перечислим некоторые свойства $\zeta(\mathbf{x}, \Omega)$. Математическое ожидание поля $\zeta(\mathbf{x}, \Omega)$ совпадает с математическим ожиданием $\xi(\mathbf{x})$:

$$\mathbb{E}[\zeta(\mathbf{x}, \Omega)] = \mu + \mathbb{E}[z] \cdot \sqrt{2}\mathbb{E}[\sin[\mathbf{V}^T(\mathbf{x}_0 + \mathbf{x}) + \frac{\pi}{4}]] = \mu, \text{ поскольку } \mathbb{E}[Z] = 0. \quad (2.14)$$

Корреляционная функция модели $\zeta(\mathbf{x}, \Omega)$ совпадает с корреляционной функцией $\xi(\mathbf{x})$:

$$\begin{aligned} K_{\zeta}(\mathbf{y} + \mathbf{x}, \mathbf{y}) &= \mathbb{E}[(\zeta(\mathbf{y} + \mathbf{x}, \Omega) - \mu)(\zeta(\mathbf{y}, \Omega) - \mu)] = \\ &= \mathbb{E}[\sigma^2 \cdot Z^2 \cdot \sin[\mathbf{V}^T(\mathbf{x}_0 + \mathbf{y} + \mathbf{x}) + \frac{\pi}{4}] \sin[\mathbf{V}^T(\mathbf{x}_0 + \mathbf{y}) + \frac{\pi}{4}]] = \sigma^2 \mathbb{E}[Z^2] K_{\chi}(\mathbf{y} + \mathbf{x}, \mathbf{y}), \end{aligned} \quad (2.15)$$

где $\mathbb{E}[Z^2] = 1$, $K_{\chi}(\mathbf{y} + \mathbf{x}, \mathbf{y})$ – корреляционная функция случайного поля $\chi(\mathbf{x}) = \sqrt{2} \sin[\mathbf{V}^T(\mathbf{x}_0 + \mathbf{x}) + \frac{\pi}{4}]$.

Корреляционная функция определяется интегралом:

$$K_{\chi}(\mathbf{y} + \mathbf{x}, \mathbf{y}) = 2 \int_{\mathbb{R}^m} \sin[\mathbf{v}^T(\mathbf{x}_0 + \mathbf{y} + \mathbf{x}) + \frac{\pi}{4}] \sin[\mathbf{v}^T(\mathbf{x}_0 + \mathbf{y}) + \frac{\pi}{4}] f_{\mathbf{V}}(\mathbf{v}) d\mathbf{v} \quad (2.16)$$

Учитывая, что $f_{\mathbf{V}}(\mathbf{u}) = S_{\xi}(\mathbf{u})$ и заменяя в подынтегральном выражении произведение синусов по тригонометрическим формулам, получаем:

$$K_{\chi}(\mathbf{y} + \mathbf{x}, \mathbf{y}) = \int_{\mathbb{R}^m} \cos(\mathbf{v}^T \mathbf{x}) S_{\xi}(\mathbf{v}) d\mathbf{V} - \int_{\mathbb{R}^m} \cos\left(\frac{\pi}{2} + \mathbf{v}^T(2\mathbf{x}_0 + 2\mathbf{y} + \mathbf{x})\right) S_{\xi}(\mathbf{v}) d\mathbf{v} \quad (2.17)$$

Второй интеграл равен нулю:

$$\int_{\mathbb{R}^m} \cos\left(\frac{\pi}{2} + z\right) S_{\xi}(\mathbf{v}) d\mathbf{v} = \int_{\mathbb{R}^m} \sin[z] S_{\xi}(\mathbf{v}) d\mathbf{v} = 0 \quad \forall z = \mathbf{v}^T(2\mathbf{x}_0 + 2\mathbf{y} + \mathbf{x}), \text{ т.к. } S_{\xi}(\mathbf{v}) \text{ – четная функция,} \quad (2.18)$$

Поэтому получаем равенство

$$\begin{aligned} K_{\chi}(\mathbf{y} + \mathbf{x}, \mathbf{y}) &= \int_{\mathbb{R}^m} \cos[\mathbf{v}^T \mathbf{x}] S_{\xi}(\mathbf{v}) d\mathbf{v} = \int_{\mathbb{R}^m} (\cos[\mathbf{v}^T \mathbf{x}] + i \sin[\mathbf{v}^T \mathbf{x}]) \cdot S_{\xi}(\mathbf{v}) d\mathbf{v} = \\ &= \int_{\mathbb{R}^m} e^{i\mathbf{v}^T \mathbf{x}} S_{\xi}(\mathbf{v}) d\mathbf{v} = \mathfrak{K}(\mathbf{x}). \end{aligned} \quad (2.19)$$

Таким образом, случайное поле $\zeta(\mathbf{x}, \Omega)$ однородно в широком смысле и адекватно моделирует случайное поле $\xi(\mathbf{x})$ на уровне первых двух моментов.

Моделирование случайной амплитуды и случайной частоты

В [20] показывается, что для того, чтобы одномерное распределение $\zeta(\mathbf{x})$ было близко к нормальному распределению, достаточно выбрать начальный вектор \mathbf{x}_0 равным (по модулю) нескольким (3-5) интервалам корреляции r_k моделируемого поля, а случайная величина Z (случайная амплитуда) должна иметь плотность распределения Релея, симметрично продолженную на отрицательную полуось:

$$f_Z(z) = |z|e^{-z^2}, z \in (-\infty, \infty), \quad (2.20)$$

Метод обращения дает для такой случайной величины Z моделирующий алгоритм

$$Z \sim \varkappa \sqrt{-\ln \gamma} \quad (2.21)$$

где \varkappa, γ независимы, $\gamma \sim U[0, 1]$ — имеет равномерное распределение на отрезке $[0, 1]$, \varkappa принимает равновероятно два значения ± 1 .

Интервал корреляции определяет такое расстояние между точками, начиная с которого значения случайного поля в этих точках можно считать независимыми. Для интервала корреляции будем использовать следующую формулу [2]:

$$r_k = \frac{1}{K(0, 0)} \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} K(\mathbf{x}) d\mathbf{x}. \quad (2.22)$$

Для корреляционной функции в экспоненциальном виде $K(\mathbf{x}) = \sigma^2 e^{-\frac{\alpha^2 \mathbf{x}^2}{2}}$ получаем:

$$r_k = \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} e^{-\frac{\alpha^2 \mathbf{x}^2}{2}} d\mathbf{x} = \left(\int_0^{\infty} e^{-\frac{\alpha^2 t^2}{2}} dt \right)^2 = \frac{\pi}{2\alpha^2}. \quad (2.23)$$

Что дает для вектора $\mathbf{x}_0 \in \mathbb{R}^2$:

$$\mathbf{x}_0 = \left(\frac{3r_k}{\sqrt{2}}, \frac{3r_k}{\sqrt{2}} \right)^T = \left(\frac{3\pi}{2\sqrt{2}\alpha^2}, \frac{3\pi}{2\sqrt{2}\alpha^2} \right)^T. \quad (2.24)$$

Рассмотрим процедуру получения реализации случайной частоты \mathbf{V} , которая является

m -мерный случайным вектором, имеющим плотность распределения $f_V(\mathbf{u})$, равную спектральной плотности $S_\xi(\mathbf{u})$ моделируемого поля $\xi(\mathbf{x})$: $f_v(\mathbf{u}) = S_\xi(\mathbf{u})$.

Поскольку $\xi(\mathbf{x})$ – изотропное случайное поле, его спектральная плотность зависит от модуля $S_\xi(\mathbf{u}) = S(|\mathbf{u}|)$, где $|\mathbf{u}| = \sqrt{\mathbf{u}^T \mathbf{u}} = (\sum_{i=1}^m u_i^2)^{1/2}$. Поэтому $f_v(\mathbf{u}) = f_v(|\mathbf{u}|)$, значит случайный вектор имеет изотропное распределение.

Случайный вектор $\mathbf{U} = (u_1, \dots, u_m)$ является изотропным [8], если его орт $\mathbf{e} = \frac{\mathbf{U}}{|\mathbf{U}|}$ распределен равномерно на поверхности m -мерной сферы и не зависит от распределения модуля вектора $|\mathbf{U}|$:

$$\mathbf{U} = |\mathbf{U}| \cdot \mathbf{e}. \quad (2.25)$$

Моделирование изотропного случайного вектора \mathbf{V} сводится к моделированию его модуля $|\mathbf{V}|$ – случайной величины с плотностью распределения $f_{|\mathbf{V}|}(u) = 2\pi u S(u)$, $u \in \mathbb{R}$ и орта \mathbf{e} , задающего изотропное направление в пространстве частот.

Для двумерных полей изотропное направление соответствует равномерному распределению на окружности:

$$\mathbf{e} = (e_1, e_2) : \quad e_1 = \cos \varphi, \quad e_2 = \sin \varphi, \quad \varphi \sim U[0, 2\pi]. \quad (2.26)$$

Моделирование модуля вектора $|\mathbf{V}|$ – случайный вектор с плотностью распределения $f_{|\mathbf{V}|}(u) = 2\pi u s(u)$, $u \in \mathbb{R}$.

Для моделирования с экспоненциальной корреляционной функцией для нормированной функции имеем $\mathfrak{K}(\mathbf{x}) = \mathfrak{K}(|\mathbf{x}|) = e^{-\frac{\alpha^2 |\mathbf{x}|^2}{2}}$, а спектральная плотность имеет вид:

$$s_\xi(\mathbf{u}) = s(|\mathbf{u}|) = \frac{1}{2\pi\alpha^2} e^{-\frac{|\mathbf{u}|^2}{2\alpha^2}}. \quad (2.27)$$

Получаем плотность распределения

$$f_{|\mathbf{V}|}(u) = 2\pi u s(u) = \frac{u}{\alpha^2} e^{-\frac{u^2}{2\alpha^2}} \quad (2.28)$$

Подзадача состоит в моделировании случайной величины $|v|$ с плотность распределения $f_{|V|}(u) = \frac{u}{\alpha^2} e^{-\frac{u^2}{2\alpha^2}}$.

Такую величину можно смоделировать используя гамма-распределение. Величина θ имеет гамма-распределение $\Gamma(\gamma, \beta)$, $\gamma, \beta > 0$, если его плотность распределения имеет вид:

$$f_\theta(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 0, \\ \frac{\beta^\gamma}{\Gamma(\gamma)} x^{\gamma-1} e^{-\beta x}, & x > 0, \end{cases} \quad (2.29)$$

где $\Gamma(\gamma)$ – гамма-функция Эйлера: $\Gamma(\gamma) = \int_0^\infty t^{\gamma-1} e^{-t} dt$.

Случайная величина θ может быть представлена в виде $\theta = \frac{\bar{\theta}}{\beta}$, где $\bar{\theta} \sim \Gamma(\gamma, 1)$. Для $\bar{\theta}$ с натуральным показателем $\gamma \in \mathbb{N}$ известен алгоритм моделирования:

$$\bar{\theta} = -\ln\left(\prod_{k=1}^{\gamma} \lambda_k\right), \quad \lambda_k \sim U[0, 1], \quad (2.30)$$

где случайные величины λ_k имеют равномерное распределение на отрезке $[0,1]$ и независимы в совокупности.

Случайная величина $\delta = \sqrt{\theta}$ имеет $f_\delta(x) = \frac{2\beta^\gamma}{\Gamma(\gamma)} x^{2\gamma-1} e^{-\beta x^2}$. Тогда случайная величина $|V|$ с плотностью распределения равной $f_{|V|} = \frac{x}{\alpha^2} e^{-\frac{|x|^2}{2\alpha^2}}$ соответствует параметрам $\gamma = 1$ и $\beta = \frac{1}{2\alpha^2}$.

Для получения реализаций $|V|$ проделаем следующие операции. Модуль \mathbf{V} распределен так же, как и корень из θ :

$$|V| = \sqrt{\theta}, \quad \theta \sim \Gamma(1, \frac{1}{2\alpha^2}). \quad (2.31)$$

Приведем распределение θ к стандартному гауусовскому распределению:

$$\theta = \frac{\bar{\theta}}{\beta} = 2\alpha^2 \bar{\theta}, \quad \bar{\theta} \sim \Gamma(1, 1). \quad (2.32)$$

Известно, что такую величину $\bar{\theta}$ можно моделировать как

$$\bar{\theta} = -\ln(\lambda), \quad \lambda \sim U[0, 1]. \quad (2.33)$$

Тогда, возвращаясь обратно к распределению θ , получаем, что $|V|$ можно моделировать по формуле:

$$|V| = \sqrt{2\alpha^2 \bar{\theta}} = \alpha \sqrt{-2\ln(\lambda)}, \quad \lambda \sim U[0, 1]. \quad (2.34)$$

Таким образом, для получения случайной частоты \mathbf{V} моделируем сначала ее модуль $|\mathbf{V}| = \alpha \sqrt{-2\ln(\lambda)}$, $\lambda \sim U[0, 1]$, затем орт $\mathbf{e} = (\cos \varphi; \sin \varphi)$, $\varphi \sim U[0, 2\pi]$, а потом получаем частоту в виде:

$$\mathbf{V} = |\mathbf{V}| \cdot \mathbf{e}. \quad (2.35)$$

Моделирование гауусовского случайного поля

Параметрическая модель $\zeta(\mathbf{x}, \mathbf{\Omega})$, задающаяся формулой (2.12), дает алгоритмически простой метод моделирования однородного случайного поля с одномерным нормальным распределением и имеет первые два момента, совпадающие с аналогичными характеристикам поля $\xi(\mathbf{x})$. Однако, конечномерные распределения случайного поля $\zeta(\mathbf{x}, \mathbf{\Omega})$ отличаются от нормального закона. Не ограничивая общности, можно считать $\mu = 0$ и $\sigma^2 = 1$. Введем случайное поле:

$$\eta_N(\mathbf{x}) = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{j=1}^N \zeta(\mathbf{x}, \mathbf{\Omega}_j), \quad (2.36)$$

где $\mathbf{\Omega}_j$, $j = 1, \dots, N$ — независимые реализации случайного параметра $\mathbf{\Omega}$, равного $\mathbf{\Omega}_j = (Z_j, \mathbf{V}_j)$, N — число реализаций; Z_j вычисляется по формуле (2.21), \mathbf{V}_j по формуле (2.35), \mathbf{x}_0 по формуле (2.24).

Тогда математическое ожидание и корреляционная функция полей $\eta_N(\mathbf{x})$ и $\xi(\mathbf{x})$ равны,

а согласно центральной предельной теореме теории вероятностей все конечномерные распределения $\eta_N(\mathbf{x})$ асимптотически (при $N \rightarrow \infty$) нормальны, поэтому модель (2.36) можно использовать для моделирования гауссовских случайных полей.

В [21] показано, что любой стационарный случайный процесс можно сколь угодно хорошо аппроксимировать линейной комбинацией гармонических колебаний определенного вида. В данной модели мы приближаем $\xi(\mathbf{x})$ случайным полем (2.12), (2.36), которое является суммой N пространственных гармоник:

$$\eta_N(\mathbf{x}) = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{j=1}^N A_j \sin[\mathbf{V}_j^T(\mathbf{x}_0 + \mathbf{x}) + \frac{\pi}{4}] \quad (2.37)$$

со случайными амплитудами $A_j = \sqrt{2}Z_jN^{\frac{1}{2}}$ и пространственными частотами \mathbf{V}_j . Здесь z_j и \mathbf{V}_j — независимые реализации величин Z и \mathbf{V} . Такое представление обеспечивает при моделировании точное воспроизведение первых двух моментов при любом N . Погрешность имитации многомерных законов гауссовского случайного поля определяется значением N . С ростом N эта погрешность уменьшается, но возрастают затраты время счета на ЭВМ.

В [20] подробно исследуется зависимость погрешности такого моделирования случайного поля от числа гармоник N . Для одномерного распределения поля $\eta_N(\mathbf{x})$ приводятся оценки, показывающие, что при числе гармоник $N \geq 10$ такое распределение уже можно считать нормальным. Так же показано, что для гауссовского случайного поля $\xi(\mathbf{x})$ с корреляционной функцией вида $K(\mathbf{x}) = \sigma^2 \exp^{-\frac{\mathbf{x}^2}{\beta^2}}$ погрешность модели (2.36) достигает значения $\varepsilon^* = 5\%$ при $N^* \geq 15$. Более подробный анализ, основанный на этом же методе, приведен в [16] и показывает, что заданная точность достигается для трех- и четырех-мерных законов распределения при $N \sim 10^2$.

Для того чтобы обобщить полученную модель на случай поля с другими значениями математического ожидания μ и дисперсии σ^2 , легко доказать, что модель нужно переписать в виде

$$\eta_N(\mathbf{x}) = \mu + \frac{\sigma}{\sqrt{N}} \sum_{j=1}^N \zeta(\mathbf{x}, \mathbf{\Omega}_j), \quad (2.38)$$

где модель $\zeta(\mathbf{x}, \mathbf{\Omega})$ по-прежнему моделирует поле с нулевым математическим ожиданием и единичной дисперсией.

Глава 3

Оценивание параметров поля

В данной главе мы рассматриваем задачу нахождения оценок параметров случайного поля по исходным данным. Для получения оценок мы будем использовать методы математической статистики. Цель данной главы — ввести используемый математический аппарат и использовать его для получения оценок параметров случайного поля в условиях малого объема исходных данных.

3.1 Параметры случайного поля

Приведем здесь набор параметров случайного поля $\xi(\mathbf{x})$, значения которых будем оценивать в данной работе. Поскольку поле является однородным, изотропным и гауссовым, оно имеет постоянные математическое ожидание μ и дисперсию σ^2 , а его нормированная корреляционная функция зависит только от одного аргумента $\mathfrak{K}(r)$. Введем дополнительное предположение — будем считать, что корреляционная функция известным образом зависит от числового параметра α : $\mathfrak{K}(r) = \mathfrak{K}(r; \alpha)$.

Тогда, поскольку случайное поле гауссово, его распределение полностью определяется заданием μ , σ^2 и α .

Кроме того, по постановке задачи, нам необходимо оценивать еще один параметр поля. Интегральный параметр $p(a, b)$ определяет вероятность того, что ординаты (значения) случайного поля находятся в заданных пределах от a до b :

$$p(a, b) = \int_a^b f(x) dx, \quad (3.1)$$

где $f(x)$ — одномерный закон распределения ординат поля $\xi(\mathbf{x})$, $a, b \in \mathbb{R}$. В качестве предельных значений также могут браться бесконечности: $a = -\infty$, $b = \infty$.

Следовательно, перед ними ставится задача построения оценок для параметров μ , σ^2 , α и $p(a, b)$ по исходным данным.

3.2 Задача статистического оценивания параметров

Начнем с классической постановки задачи статистического оценивания. Пусть нам задана выборка наблюдений X_1, X_2, \dots, X_n некоторой случайной величины X . Все элементы выборки независимы и одинаково распределены:

$$X_1, X_2, \dots, X_n \sim F_\theta(x), \theta \in \Theta \quad (3.2)$$

Требуется вынести заключение о значении неизвестного параметра θ функции распределения $F_\theta(x)$.

В качестве оценок параметра θ можно предложить разные статистики $\hat{\theta}$ (статистика — функция от выборки X_1, \dots, X_n). Но практическую ценность будут иметь только такие статистики, которые принимают значения в каком-то смысле близкие к значениям оцениваемого параметра. Для того чтобы из различных оценок, которые могут быть предложены для одной и той же величины, выбрать наиболее подходящую, необходимо установить некоторые общие свойства оценок. Одними из наиболее важных свойств статистических оценок являются: несмещенность, состоятельность и эффективность.

Несмещенной оценкой $\hat{\theta}$ параметра θ называется такая функция от выборки X_1, \dots, X_n , математическое ожидание которой равно оцениваемой величине:

$$\mathbb{E}[\hat{\theta}(X_1, \dots, X_n)] = \theta. \quad (3.3)$$

Требование несмещенности оценки эквивалентно требованию отсутствия систематической ошибки.

Оценка $\hat{\theta}$ параметра θ называется состоятельной, если при увеличении объема статистического материала (увеличения числа реализаций n) вероятность сколь угодно малых отклонений от оцениваемой величины стремится к нулю:

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \lim_{n \rightarrow \infty} P\{|\hat{\theta}(X_1, \dots, X_n) - \theta| \geq \varepsilon\} = 0. \quad (3.4)$$

Если оценка состоятельна, то, при достаточно большом объеме выборки, мы с практической достоверностью можем быть уверены, что ошибка оценки не превосходит некоторую величину.

Под сравнительной эффективностью двух несмещенных оценок понимают отношение их дисперсий. Очевидно, чем меньше дисперсия такой оценки, тем лучше. Если возможно найти оценку, обладающую наименьшей дисперсией, то ее называют эффективной.

Если оценка обладает всеми, описанными выше свойствами, тогда в классической статистике ее называют оптимальной.

Для такой классической постановки разработаны методы статистических оценок параметров, которые позволяют получить оценки с описанными выше свойствами. Весьма общим методом получения оценок, который в ряде случаев дает наиболее эффективные

оценки, является метод максимального правдоподобия. Метод максимального правдоподобия рекомендует искать оценки параметров распределения из условия максимизации функции правдоподобия (или ее логарифма). Этот метод в настоящее время хорошо теоретически обоснован. Установлено [4], что метод максимального правдоподобия в такой классической ситуации приводит к асимптотически эффективным оценкам параметров распределения.

Другим методом, дающим, как правило, менее эффективные оценки, однако более простым в вычислительном отношении, является метод моментов. Сущность этого способа состоит в том, что теоретические значения моментов случайных величин, зависящие от оцениваемых параметров, приравниваются к выборочным значениям этих моментов. Выбрав достаточное число первых моментов, таким образом можно получить необходимое число уравнений для определения искомого числа параметров закона распределения случайной величины.

Обобщением классической постановки является задача, когда необходимо оценить параметры по выборке, состоящей из зависимых величин. Такая задача возникает при необходимости оценки параметров распределения случайных процессов, поскольку элементы одной реализации процесса являются зависимыми случайными величинами. Перенесение на такой случай метода максимального правдоподобия связано с известными трудностями, вызванными тем, что реализация здесь содержит бесконечное число зависимых наблюдений. При этом, чаще всего, для анализа имеется всего лишь одна реализация. Вопросы обоснования указанного метода для случайных процессов изложены в [5]. Оказывается, что при достаточно общих предположениях метод максимального правдоподобия приводит к оптимальным оценкам, в частности асимптотически эффективным. Если приходится извлекать статистические выводы из всего одной реализации, тогда, для обеспечения оптимальных свойств оценок приходится налагать дополнительные ограничения на процесс, например условие стационарности и эргодичности процесса [18], [7].

Перейдем к постановке задачи оценивания, решаемой в данной работе. Пусть измерено всего N реализаций случайного поля $\xi(\mathbf{x})$. Случайное поле — это функция от аргумента \mathbf{x} . Измерения случайного поля $\xi(\mathbf{x})$ производится в дискретном конечном наборе $\{\mathbf{x}_i\}_{i=1}^n$ из n точек, то есть для одного измерения (одной реализации поля) мы имеем набор из n значений поля — запишем их в виде вектора $\boldsymbol{\xi} = (\xi(\mathbf{x}_1), \xi(\mathbf{x}_2), \dots, \xi(\mathbf{x}_n))^T$.

Тогда выборку, по которой необходимо производить оценивания параметров случайного поля $\xi(\mathbf{x})$, можно представить как набор из N векторов:

$$\boldsymbol{\xi}^{(1)}, \boldsymbol{\xi}^{(2)}, \dots, \boldsymbol{\xi}^{(N)} \quad (3.5)$$

где каждый вектор $\boldsymbol{\xi}^{(k)}$ содержит одну реализацию случайного поля: $\boldsymbol{\xi}^{(k)} = (\xi_1^{(k)}, \xi_2^{(k)}, \dots, \xi_n^{(k)})^T = (\xi^{(k)}(x_1), \xi^{(k)}(x_2), \dots, \xi^{(k)}(x_n))^T$.

Такая выборка имеет три существенные особенности, отличающие ее от классической статистической выборки. Первая особенность связана с тем, что здесь мы работаем не с

реализациями случайной величиной, а с реализациями случайного поля. Для случайного поля $\xi(\mathbf{x})$ элементы одной реализации этого процесса для разных значений аргумента \mathbf{x} не являются независимыми величинами. То есть, для каждого k -ого вектора набор его значений $\xi_1^{(k)}, \dots, \xi_n^{(k)}$ — это набор из зависимых случайных величин. Кроме того, поскольку мы работаем в предположениях однородности поля, все элементы вектора ξ_1, \dots, ξ_n распределены по одному закону. Третья особенность состоит в том, что общее число доступных нам реализация случайного поля N мало.

При статистической обработке такой выборки эти особенности необходимо учитывать, поскольку мы хотим получить качественные оценки. Взаимная зависимость элементов векторов приводит к усложнению классических методов получения оценок, а такой малый объем выборки вынуждает применять специальные методы статистики малой выборки [6]. Они позволяют хотя бы частично компенсировать недостаток информации, снизив погрешность оценивания до уровня, близкого к минимально-возможному.

Таким образом, по постановке задачи нам необходимо построить оценки математического ожидания $\hat{\mu}$, дисперсии $\hat{\sigma}^2$, параметра нормированной корреляционной функции $\hat{\alpha}$ и вероятности $\hat{p}(a, b)$ для случайного поля $\xi(\mathbf{x})$ по выборке, состоящей из векторов $\{\boldsymbol{\xi}^{(k)}\}_{k=1}^N$.

3.2.1 Метод максимального правдоподобия

Стандартным подходом в таких случаях является метод максимального правдоподобия [23]. Покажем, что в данной задаче его применение связано с большими трудностями. Построим функцию правдоподобия по выборке (3.5). Поскольку каждый вектор — это реализация случайного поля $\xi(\mathbf{x})$, эти элементы этих случайных векторов распределены по нормальному закону с корреляционной связью, заданной корреляционной функцией случайного поля:

$$f(\boldsymbol{\xi}^{(k)}) = \frac{1}{(2\pi)^{n/2} \det(K)^{1/2}} e^{-\frac{1}{2}(\boldsymbol{\xi}^{(k)} - \mu)^T K^{-1}(\boldsymbol{\xi}^{(k)} - \mu)}. \quad (3.6)$$

Матрица K определяет взаимную корреляционную связь элементов вектора $\boldsymbol{\xi}^{(k)}$, то есть корреляционную связь значений случайного поля ξ в соответствующих точках сетки:

$$K = \{K_{i,j}\}_{i,j=1}^n, \quad K_{i,j} = K(\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j) = \sigma^2 \mathfrak{K}(\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j). \quad (3.7)$$

Подставляя эти значения в логарифмическую функцию правдоподобия, получаем:

$$\ln L(\boldsymbol{\xi}^{(1)}, \boldsymbol{\xi}^{(2)}, \dots, \boldsymbol{\xi}^{(N)}) = C - \frac{N}{2} \ln(\det(K)) - \frac{1}{2} \sum_{k=1}^N (\boldsymbol{\xi}^{(k)} - \mu)^T K^{-1}(\boldsymbol{\xi}^{(k)} - \mu) \quad (3.8)$$

Перейдем к нормированной корреляционной матрице $\varkappa_{i,j} = \frac{1}{\sigma^2} K_{i,j}$ для получения явной зависимости от σ^2 :

$$\ln L(\boldsymbol{\xi}^{(1)}, \boldsymbol{\xi}^{(2)}, \dots, \boldsymbol{\xi}^{(N)}) = C - \frac{Nn}{2} \ln \sigma^2 + \frac{N}{2} \ln(\det(\mathfrak{K})) - \frac{1}{2\sigma^2} \sum_{k=1}^N (\boldsymbol{\xi}^{(k)} - \boldsymbol{\mu})^T \varkappa^{-1} (\boldsymbol{\xi}^{(k)} - \boldsymbol{\mu}) \quad (3.9)$$

Для получения оптимальных оценок по этому методу нам необходимо максимизировать эту функцию по параметрам μ, σ^2, \varkappa , то есть решать уравнения вида:

$$\frac{\partial \ln L}{\partial \mu} = 0, \quad \frac{\partial \ln L}{\partial \sigma} = 0, \quad \frac{\partial \ln L}{\partial \varkappa} = 0. \quad (3.10)$$

Аналитическое решение таких уравнений для полученной функции (3.9) представляется достаточно трудным, поэтому от применения данного метода в нашей работе приходится отказаться. В статье [30] такой метод оценивания рассматривается, но оценки получены при условии наличия одной реализации стационарного гауссова случайного процесса и при известной корреляционной функции. Тогда показано, что оценки μ и σ , полученные таким методом, являются несмещенными и эффективными. Но, в нашем случае, точного значения \varkappa мы не знаем и в нашей работе необходимо найти другой путь оценивания параметров.

3.2.2 Метод наименьших квадратов для математического ожидания и дисперсии

В условиях большой выборки из независимых реализаций используют выборочные оценки для математического ожидания и дисперсии. Воспользуемся этим фактом для получения оценок для μ и σ^2 .

Поскольку вектора из нашей выборки независимы, рассмотрим случайную величину ξ_l , соответствующую l -й компоненте векторов $\boldsymbol{\xi}^{(1)}, \dots, \boldsymbol{\xi}^{(N)}$. Для такой случайной величины мы имеем выборку из N независимых величин $\xi_1^{(1)}, \dots, \xi_l^{(N)}$.

Тогда, для ξ_l можно вычислить оценки для ее математического ожидания μ_l и дисперсии σ_l^2 по классическим формулам:

$$\hat{\mu}_l = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N \xi_l^{(k)} \quad \hat{\sigma}_l^2 = \frac{1}{N-1} \sum_{k=1}^N (\xi_l^{(k)} - \hat{\mu}_l)^2. \quad (3.11)$$

Таким образом, если проделать это для всех точек поля, мы получим набор значений $\hat{\mu}_l$ и $\hat{\sigma}_l^2$, для $l = 1, \dots, n$. Однако, поскольку эти вектора являются реализациями однородного изотропного случайного поля, μ и σ должны оцениваться одинаково для всех точек поля. Для получения общих оценок применим метод наименьших квадратов, то есть подберем такие значения оценок, чтобы они наилучшим образом приближали все полученные значения

$$\sum_{l=1}^n (\hat{\mu} - \hat{\mu}_l)^2 \xrightarrow{\hat{\mu}} \min, \quad \sum_{l=1}^n (\hat{\sigma}^2 - \hat{\sigma}_l^2)^2 \xrightarrow{\hat{\sigma}^2} \min. \quad (3.12)$$

При минимизации выражений такого вида получаем выражения для оценок $\hat{\mu}$:

$$\hat{\mu} = \frac{1}{nN} \sum_{k=1}^N \sum_{l=1}^n \xi_l^{(k)} \quad (3.13)$$

и для $\hat{\sigma}_l^2$:

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{1}{n(N-1)} \sum_{k=1}^N \sum_{l=1}^n (\xi_l^{(k)} - \hat{\mu}_l)^2. \quad (3.14)$$

Для таких оценок легко показать (основываясь на [4]), что они обладают свойствами состоятельности и асимптотической несмещенности.

3.2.3 Метод наименьших квадратов для параметра нормированной корреляционной функции

В данном пункте приведём некоторые соображения по поводу того, как можно оценить параметр корреляционной функции.

Поскольку по определению корреляционные свойства поля определяются через двумерный закон распределения, было решено действовать через оценки для двумерных случайных величин.

Рассматривается пара точек поля (ξ_l, ξ_p) , $l \neq p$ — пара случайных величин. Для каждой из этих точек имеется выборка из N значений. Поскольку поле гауссово, то совместный закон распределения этих случайных величин имеет вид:

$$f(x, y) = \frac{1}{2\pi\sigma^2(1 - \varkappa_{l,p}^2(\alpha))} e^{-\frac{1}{2\sigma^2(1 - \varkappa_{l,p}^2(\alpha))} \left((x-\mu)^2 + (y-\mu)^2 - 2\varkappa_{l,p}(\alpha)(x-\mu)(y-\mu) \right)}, \quad (3.15)$$

где $\mu_l = \mu_p = \mu$, и $\sigma_l^2 = \sigma_p^2 = \sigma^2$ (поле $\xi(\mathbf{x})$ однородное и изотропное), а $\varkappa_{l,p}^2(\alpha)$ — коэффициент корреляции для точек l и p , который выражается через нормированную корреляционную функцию как $\varkappa_{l,p}^2(\alpha) = \mathfrak{K}(\|\mathbf{x}_p - \mathbf{x}_l\|, \alpha)$.

Для такой выборки для пары точек можно записать логарифмическую функцию правдоподобия:

$$L_{l,p}(\mu, \sigma^2, \varkappa_{l,p}(\alpha)) = C - N \ln \sigma^2 + \frac{N}{2} \ln(1 - \varkappa_{l,p}(\alpha)^2) - \quad (3.16)$$

$$-\frac{1}{2\sigma^2(1 - \varkappa_{l,p}(\alpha)^2)} \sum_{k=1}^N (\xi_l^{(k)} - \mu)^2 + (\xi_p^{(k)} - \mu)^2 - 2\varkappa_{l,p}(\alpha)(\xi_l^{(k)} - \mu)(\xi_p^{(k)} - \mu)$$

Тогда при максимизации $L_{l,p}$ можно найти оценку для параметра α для этой пара точек:

$$\hat{\alpha}_{l,p} = \arg \max_{\alpha} L_{l,p} \quad (3.17)$$

Теперь, аналогично предыдущему пункту, применим метод наименьших квадратов для

всех пар точек $l, p = 1, \dots, n, l \neq p$, для того, чтобы найти оценку, приближающую значения полученных оценок $\hat{\alpha}_{l,p}$:

$$\sum_{\substack{l,p=1 \\ l \neq p}}^n (\hat{\alpha} - \hat{\alpha}_{l,p})^2 \xrightarrow{\hat{\alpha}} \min \quad (3.18)$$

Из этого выражения получаем формулу для оценки α :

$$\hat{\alpha} = \frac{1}{n(n-1)} \sum_{\substack{l,p=1 \\ l \neq p}}^n \hat{\alpha}_{l,p} \quad (3.19)$$

Оценка $\alpha_{l,p}$ является несмещенной и состоятельной [4]. Этот факт позволяет надеяться, что построенная оценка α так же обладает этими свойствами.

3.3 Малая выборка

Поскольку предполагается, что число реализаций N мало, попробуем изменить полученные оценки, опираясь на специальные методы статистики малых выборок.

Приведем некоторое описание этого раздела статистики, то есть подробнее опишем, что подразумевается под понятием *малая выборка*. Обычно задачи работы с такими выборками возникают тогда, когда получение экспериментальных данных (измерений) сопряжено с какими-либо трудностями. Тогда в качестве исходных данных приходится иметь дело с малой выборкой, под которой понимается малое число наблюдений над случайной величиной, описывающей изучаемое явление. Традиционные методы статистического оценивания дают недостаточно эффективные оценки, поэтому возникает необходимость использования специальных статистических методов обработки таких данных. Далее приведем более строго определение малой выборки, а так же описание специальных методов, разработанных для оценки распределения и моментов случайной величины по малой выборке.

Одно из определений малой выборки возьмем из [6], оно основано на информационном подходе. В классических методах статистической обработки выборки случайной величины используется идея группировки данных. При анализе выборок значительного объема с использованием этих методов обычно удается получить удовлетворительный результат, но группировка наблюдений вызывает обычно уменьшение информации, которая извлекается из выборки. Значит, если применение такого метода в конкретной задаче приводит к удовлетворительному результату, то выборка содержит избыточную информацию для заданной точности. Из этого следует, что количество информации в выборке заданного объема связано с возможностью достичь вполне определенную точность, поэтому можно ввести понятие достаточной выборки, которая является границей, разделяющей большие и малые выборки. Если выборка меньше достаточной, то для устранения потерь информации при ее обработке необходимо отказаться от группировки наблюдений и перейти к специальным методам, основанным на использовании каждой отдельной

реализации. Это и положено в основу определения малой выборки при информационном подходе.

Выборку можно считать малой, если при ее обработке методами, основанными на группировке наблюдений, нельзя достичь заданной точности. Из этого определения следует, что выборку можно считать большой, если при ее обработке имеется возможность перейти к группировке наблюдений без ощутимой потери информации. Из этого определения так же следует то, что при обработке малой выборки необходимо использовать индивидуальный подход к каждой отдельной реализации.

В статье [10] приведен другой подход к определению малой выборки, а так же определена количественная мера точности оценки. Пусть для некоторой случайной величины X получена выборка независимых реализаций X_1, \dots, X_N объема N . Будем опираться на то, что, по сути задачи, выборку естественно считать малой, если по ней невозможно оценить искомые вероятностные характеристики параметра X с требуемой точностью.

Пусть a – некоторый параметр распределения X , \hat{a} – оценка этого параметра, $\delta(a, \hat{a})$ – мера точности оценки \hat{a} (причем $\delta(a, \hat{a}) \geq 0, \delta(a, a) = 0$), ε – требуемая точность. Тогда, если для любой оценки $\hat{a} = \varphi(X_1, \dots, X_N)$ оказывается, что $\delta(a, \hat{a}) > \varepsilon$, то выборка называется малой. Если же существует хотя бы одна оценка $\hat{a}^* = \varphi^*(X_1, \dots, X_N)$, для которой $\delta(a, \hat{a}^*) \leq \varepsilon$, то выборка называется большой.

В рассматриваемой статье в качестве меры точности при $a \neq 0$ предлагается использовать относительное среднеквадратическое отклонение (ОСКО) оценки \hat{a} от a :

$$\delta(a, \hat{a}) = \frac{\sqrt{\mathbb{E}[(a - \hat{a})^2]}}{|a|}. \quad (3.20)$$

Такая точность характеризует степень рассеяния оценки относительно оцениваемого параметра. Чем значение $\delta(a, \hat{a})$ меньше, тем точнее оценка \hat{a} приближает значение a .

Пусть теперь $f(x)$ – плотность вероятности, а $\hat{f}(x)$ – ее оценка. В качестве меры точности этой оценки принимается относительное интегральное среднеквадратическое отклонение (ОИСКО) \hat{f} от f :

$$\delta(f, \hat{f}) = \left\{ \frac{\mathbb{E} \int_{-\infty}^{\infty} (f(x) - \hat{f}(x))^2 dx}{\int_{-\infty}^{\infty} f(x)^2 dx} \right\}^{1/2}. \quad (3.21)$$

Определение малой выборки при оценке плотности такое же, как и выше при оценке параметра. Такое определение малой выборки имеет явное преимущество перед информационным подходом, так как применение ОИСКО позволяет упростить вычисление точности полученной оценки.

Классические оценки (3.11) не рассчитаны на получение наивысшей точности при небольших объемах выборки N . Приведем пример из [10], показывающий, что при оценке

параметров по небольшому числу наблюдений, можно получить оценки, более точные, чем классические.

Рассмотрим оценку дисперсии нормального закона в виде:

$$\hat{\sigma}_X^2 = \lambda \sum_{i=1}^N (X_i - \hat{\mu}_X)^2, \quad \mu_X = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^n X_i, \quad (3.22)$$

где $\lambda > 0$ – числовой параметр, а μ_X – оценка для математического ожидания X .

Классической выборочной оценке отвечает $\lambda_{kl} = 1/(N-1)$. Вычисляя значение ОСКО согласно (3.20) с учетом нормальности X , находим

$$\delta^2(\sigma^2, \hat{\sigma}^2) = \lambda^2(N^2 - 1) - 2\lambda(N - 1) + 1. \quad (3.23)$$

Для того, чтобы найти оптимальную оценку с точки зрения минимизации ошибки оценивания, очевидно, необходимо найти такое λ , при котором выражение для меры точности $\delta(\sigma^2, \hat{\sigma}^2)$ достигает своего минимума. Для (3.23) точкой минимума является $\lambda_{opt} = 1/(N+1)$. Обозначая $\hat{\sigma}_X^2$ при $\lambda = \lambda_{kl}$ через $\hat{\sigma}_{kl}^2$, а при $\lambda = \lambda_{opt}$ через $\hat{\sigma}_{opt}^2$, для отношения меры точности классической и оптимальной оценок можно записать:

$$\Delta_N = \frac{\delta^2(\sigma_X^2, \hat{\sigma}_{kl}^2)}{\delta^2(\sigma_X^2, \hat{\sigma}_{opt}^2)} = 1 + \frac{2}{N-1}. \quad (3.24)$$

Получили, что $\Delta_N > 0$ для всех натуральных N тогда $\delta(\sigma^2, \hat{\sigma}_{kl}^2) > \delta(\sigma^2, \hat{\sigma}_{opt}^2)$, то есть оценка $\hat{\sigma}_{opt}^2$ всегда точнее $\hat{\sigma}_{kl}^2$, причем для малых N значения Δ_N больше и отличие между этими оценками заметнее.

Таким образом, при оценке дисперсии для выборки малого объема, состоящей из независимых реализаций, лучше использовать оценку вида:

$$\hat{\sigma}_X^2 = \frac{1}{N+1} \sum_{i=1}^N (X_i - \mu_X)^2. \quad (3.25)$$

Опираясь на этот результат, мы можем модифицировать полученную оценку дисперсии (3.14). Если вместо выборочной оценки дисперсии (3.11) для каждой l -й точки поля брать оценку в виде (3.25), тогда для оценки дисперсии поля получаем формулу:

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{1}{n(N-1)} \sum_{k=1}^N \sum_{l=1}^n (\xi_l^{(k)} - \hat{\mu}_l)^2. \quad (3.26)$$

Эта оценка должна приближать σ^2 лучше, чем оценка (3.26).

3.4 Оценка вероятности

Рассмотрим задачу оценивания параметра $p(a, b)$, определяемого как вероятность того, что случайное значения случайного поля находятся в заданных пределах. По определению такую оценку можно вычислить интегрированием некоторой оценки плотности вероятности поля:

$$\hat{p}(a, b) = \int_a^b \hat{f}(x) dx. \quad (3.27)$$

Соответственно, для получения оценки этого параметра нужно знать оценку плотности вероятности $f(x)$. Для получения такой оценки можно действовать двумя методами.

Первый метод основан на том, что мы уже знаем оценки $\hat{\mu}$ и $\hat{\sigma}^2$, и, учитывая гауссовость поля, для \hat{f} имеем:

$$\hat{f}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\hat{\sigma}}} e^{-\frac{(x-\hat{\mu})^2}{2\hat{\sigma}^2}}. \quad (3.28)$$

Но, если оценки $\hat{\mu}$ и $\hat{\sigma}^2$ получаются не очень точными, тогда и оценка \hat{f} будет так же оценивать f со значительными погрешностями.

Второй метод основан на оценке плотности вероятности f с помощью ядерных оценок. Основываясь на [6] и [11], мы считаем, что такой метод оценки плотности вероятности при малых N являются наиболее эффективным.

После получения оценки \hat{f} , оценку параметра $p(a, b)$ получаем по формуле

$$\hat{p}(a, b) = \int_a^b \hat{f}(x) dx. \quad (3.29)$$

3.4.1 Ядерные оценки

В данном пункте мы введем аппарат ядерных оценок, который используется в данной работе для оценки плотности распределения.

Ядерные оценки являются непараметрическими оценками плотности распределения случайной величины по полученному набору её реализаций. Наиболее стандартным методом построения оценки плотности распределения является гистограмма [4], когда все значения из реализации группируются в нескольких интервалах значений и значение оценки плотности на этом интервале пропорциональна количеству реализаций, попавших в этот интервал. Таким образом, мы получаем оценку для плотности распределения. Недостатками такой оценки являются ее разрывность в граничных точках интервалов и малая точность. Метод ядерного оценивания близок к методу гистограмм, но отличается тем, что при построении оценки каждое значение из выборки реализаций учитывается отдельно, причем вносит вклад в оценку в некоторой окрестности этого значения. Особым образом «размазывая» значения выборки в окрестности этих значений можно получить непрерывные и гладкие оценки плотности распределения.

Приведем формальное определение многомерной ядерной оценки [9]. Пусть дана выборка, состоящая из n независимых реализаций k -мерной случайной величины $X = (x_1, x_2, \dots, x_k)$:

$$X_i = (x_1^{(i)}, x_2^{(i)}, \dots, x_k^{(i)}), \quad i = 1, \dots, n, \quad (3.30)$$

полученная для случайной величины, характеризуемой непрерывной k -мерной плотностью вероятности $f(x_1, x_2, \dots, x_k)$.

Определим оценку $f(x_1, x_2, \dots, x_k)$ как функцию от выборочных значений X_i в виде

$$\hat{f}_n(x_1, x_2, \dots, x_k) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \prod_{l=1}^k \frac{1}{h_l(n)} K_l \left(\frac{x_l - x_l^{(i)}}{h_l(n)} \right), \quad (3.31)$$

где функции $K_l(y)$ называются ядрами, а h_l – параметры сглаживания.

Ядро – это функция, совпадающая с некоторой плотностью вероятности, и дополнительно обладающая следующими свойствами:

$$K_l(y) \geq 0, \quad (3.32)$$

$$K_l(y) = K_l(-y), \quad (3.33)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} K_l(y) dy = 1. \quad (3.34)$$

Вид ядерной функции описывает то, каким образом происходит «размазывание» конкретного значения выборки по некоторой окрестности значений.

Параметры сглаживания ядер h_l зависят в общем случае от объема выборки n и $h_l(n) \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$. Эти параметры контролируют гладкость получаемой оценки.

В работе [9] показано, что такая оценка является состоятельной и асимптотически (при $n \rightarrow \infty$) несмещенной, если дополнительно для параметров сглаживания выполняется условие:

$$n \prod_{l=1}^k h_k(n) \rightarrow \infty \quad \text{при } n \rightarrow \infty. \quad (3.35)$$

Основной задачей в рамках ядерного оценивания является подбор такого ядра и таких параметров сглаживания, чтобы оценка наилучшим образом приближала реальную плотность вероятности.

Для одномерной плотности распределения свойства такой оценки подробно рассмотрены в [24],[26] и в [28].

Примерами наиболее употребительных ядер являются гауссово, прямоугольное и параболическое ядра. Гауссово ядро имеет вид плотности распределения стандартного нормального закона:

$$K(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{y^2}{2}}. \quad (3.36)$$

Прямоугольное ядро (ядро Розенблатта) подробно рассматривается в [Розенблатта] для

случая $k = 1$ и выражается формулой:

$$K(y) = \begin{cases} \frac{1}{2\sqrt{3}}, & \text{при } |y| \leq \frac{1}{2\sqrt{3}}, \\ 0, & \text{при } |y| > \frac{1}{2\sqrt{3}}. \end{cases} \quad (3.37)$$

Параболическое ядро (ядро Епанечникова) имеет вид:

$$K(y) = \begin{cases} \frac{3}{4\sqrt{5}}(1 - \frac{y^2}{5}), & \text{при } |y| \leq \frac{1}{\sqrt{5}}, \\ 0, & \text{при } |y| > \frac{1}{\sqrt{5}}. \end{cases} \quad (3.38)$$

Такая форма ядра (3.38) получена в [9] как оптимальная при минимизации (при $n \rightarrow \infty$) относительной интегральной среднеквадратической ошибки (ОИСКО) $\delta(f, \hat{f}_n)$:

$$\delta^2(f, \hat{f}_n) = \frac{\int_{\mathbb{R}^k} (f(\mathbf{x}) - \hat{f}_n(\mathbf{x}))^2 d\mathbf{x}}{\int_{\mathbb{R}^k} f^2(\mathbf{x}) d\mathbf{x}}. \quad (3.39)$$

Из таких же соображений получена формула для оптимального параметра сглаживания. Если используется ядерная оценка с одним параметром сглаживания, то есть $h_l(n) = h(n) \quad \forall l$, тогда для оптимальности параметр сглаживания при $n \rightarrow \infty$ должен иметь порядок:

$$h(n) \sim n^{-1/(k+4)}. \quad (3.40)$$

Более точную формулу для параметра сглаживания можно получить, если заранее известен вид истинного распределения и вид используемого ядра. Например, если k -мерная случайная величина X имеет истинное распределение в виде многомерного нормального закона: $f(x_1, \dots, x_k) = (2\pi)^{-k/2} \exp\left(-\frac{1}{2} \sum_{p=1}^k x_p^2\right)$, используемое ядро задано в колокольной форме (3.36) и все параметры сглаживания равны $h_l(n) = h(n) \quad \forall l$, тогда для оптимального параметра сглаживания получена формула:

$$h(n) \sim \left[\frac{4}{n(k+2)} \right]^{1/(k+4)}. \quad (3.41)$$

Однако, при неизвестном исходном распределении и малом числе реализаций, подбор параметра сглаживания становится довольно сложной задачей.

Непараметрические оценки хорошо исследованы в литературе. В [13] исследуют асимптотические свойства этих оценок, в частности — дисперсию ядерных оценок. В [1] и [29], наряду с самими оценками, исследуются их производные и показывается, что при малом объеме выборки применение ядерных функций высших порядков приводит к потерям в точности оценок. В [22] и [15] исследуются ОИСКО непараметрических оценок для ядерных функции из разных классов (не только из класса L_2 , но еще из L_1).

3.4.2 Минимаксный подход к оптимизации оценок

При использовании метода ядерных оценок возникает подзадача определения формы ядра и параметра сглаживания, позволяющих оценить плотность наилучшим образом. В [10] описан метод подбора параметра сглаживания, основанный на минимизации ОИСКО. Опишем некоторую модификацию этого метода, основанную на [3].

В указанной статье [3] рассматривается применение одномерной ядерной оценки для вычисления плотности вероятности случайной величины по выборке ограниченного объема. Пусть необходимо по имеющейся выборке X_1, \dots, X_N из независимых одинаково определенных случайных величин определить их плотность распределения $f(x)$. Для этой функции известна некоторая априорная информация $f \in \mathcal{F}$ (класс \mathcal{F} описывает все, что известно заранее про истинную плотность распределения $f(x)$) и оценка ищется из заданного класса: $\hat{f} \in \mathcal{K}$. В рассматриваемой статье оптимизация оценки производится за счет минимизации ОИСКО оценки \hat{f} но не для конкретной функции, а для всех возможных f из класса \mathcal{F} . То есть оптимальная оценка \hat{f} является решением минимаксной задачи вида:

$$\inf_{\hat{f} \in \mathcal{K}} \sup_{f \in \mathcal{F}} \mathbb{E} \int_{\mathbb{R}} (f(x) - \hat{f}(x))^2 dx. \quad (3.42)$$

В качестве класса \mathcal{K} берется класс одномерных ядерных оценок в виде:

$$\hat{f}_N(x) = \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N K(x - X_j), \quad x \in \mathbb{R}, \quad (3.43)$$

где параметр сглаживания внесен в функцию ядра $K(y)$.

В данной статье для решения этой минимаксной задачи используется аппарат характеристических функций случайных величин [14]. По определению, характеристическая функция $c(t)$ случайной величины X_j выражается формулой:

$$c(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{itx} dx, \quad t \in \mathbb{R}. \quad (3.44)$$

Если плотность распределения $f \in L_2(\mathbb{R})$, тогда характеристическая функция $c \equiv \Phi[f] \in L_2(\mathbb{R})$, так же $f \equiv \Phi^{-1}[c]$. Здесь через Φ и Φ^{-1} обозначается прямое и обратное преобразования Фурье:

$$c(t) = \Phi[f](t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{itx} dx, \quad t \in \mathbb{R} \quad (3.45)$$

$$f(x) = \Phi^{-1}[c](x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} c(t) e^{-itx} dt, \quad x \in \mathbb{R}. \quad (3.46)$$

В силу формулы (3.43), естественной статистической оценкой характеристической

функции $c(t)$ является статистика $\hat{c}(t)$:

$$\begin{aligned}\hat{c}(t) &= \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}_N(x) e^{itx} dx = \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N \int_{-\infty}^{\infty} K(x - X_j) e^{itx} dx = \\ &= \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N e^{itX_j} \int_{-\infty}^{\infty} K(x) e^{itx} dx = k(t) \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N e^{itX_j},\end{aligned}\tag{3.47}$$

где $k(t) = \Phi[K](t)$ – преобразование Фурье от ядра.

Из равенства Парсеваля для преобразования Фурье следует:

$$\|f - \hat{f}\|_{L_2}^2 = \frac{1}{2\pi} \|c - \hat{c}\|_{L_2}^2.\tag{3.48}$$

Поэтому можем записать:

$$\inf_{\hat{f} \in \mathcal{K}} \sup_{f \in \mathcal{F}} \mathbb{E} \|f - \hat{f}\|_{L_2} = \frac{1}{2\pi} \inf_{\hat{c} \in \Phi[\mathcal{K}]} \sup_{c \in \Phi[\mathcal{F}]} \mathbb{E} \|c - \hat{c}\|_{L_2}\tag{3.49}$$

Следовательно, отыскание оптимальной оценки плотности распределения $\hat{f} \in \mathcal{K}$ эквивалентно отысканию оптимальной оценки характеристической функции $\hat{c} \in \Phi[\mathcal{K}]$, при этом вид оптимальной \hat{c}^* определяется через функцию $k^*(t)$.

В работе [31] показано, что если множество \mathcal{F} состоит только из одной плотности распределения $\mathcal{F} = \{f\}$, тогда оценка $\hat{c}^*(t)$ является оптимальной, если соответствующая $k^*(t)$ задана в виде:

$$k^*(t) = \frac{|c(t)|^2}{|c(t)|^2 + (1 - |c(t)|^2)/N}.\tag{3.50}$$

Непосредственное применение этой формулы невозможно, так как предполагается, что мы не знаем реальную плотность распределения $f(x)$, и соответственно ее преобразование Фурье $c(t)$.

В статье [3] так же получена аналитическая формула для оптимальной оценки, но в условиях достаточно сложных ограничений на класс \mathcal{F} : предполагается, что известны две специальные неотрицательные функции a_1 и a_2 , такие, что для любой плотности f из класса \mathcal{F} выполняется условие $a_1(t) \leq |c(t)| \leq a_2(t)$ для любого t . Такую оценку тоже довольно сложно применить в нашем случае, поэтому мы возьмем из этих статей только общую идею.

3.4.3 Подбор оптимального параметра сглаживания

Нам необходимо построить качественную ядерную оценку для одномерной плотности вероятности в условиях того, что N мало. Ядерная оценка плотности вероятности $f(x)$

для используемой нами выборки $\{\xi^{(k)}\}_{k=1}^N$ будет иметь вид:

$$\hat{f}(x) = \frac{1}{nNh} \sum_{l=1}^n \sum_{k=1}^N K\left(\frac{x - \xi_l^{(k)}}{h_N}\right), \quad (3.51)$$

причём точность для такой оценки зависит от оптимального подбора параметра сглаживания h_N и ядра $K(x)$.

В данном пункте мы сосредоточимся на подборе оптимального параметра сглаживания, а в качестве ядра $K(x)$ мы для простоты возьмем гауссовское ядро (3.36):

$$K(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}. \quad (3.52)$$

Опираясь на [10], критерием качества оценивания будем считать относительную интегральную среднеквадратическую ошибку (ОИСКО) оценки $\hat{f}(x)$ одномерной плотности распределения $f(x)$, которая в данном случае имеет вид:

$$\delta^2(f, \hat{f}) = \delta^2(\mu, \sigma^2, \mathfrak{R}, h_N) = \frac{\mathbb{E}\|\hat{f} - f\|^2}{\|f\|^2}. \quad (3.53)$$

Для удобства мы используем обозначение $\|\cdot\| := \|\cdot\|_{L_2(\mathbb{R})}$.

Далее мы планируем производить минимизацию (3.53) по параметру $h_N > 0$. Поступим так же, как [3] (перейдем к характеристическим функциям).

Вычислим соответствующие преобразования Фурье для плотности случайной величины $\xi_l^{(k)}$ с нормальным распределением $f(x) = (2\pi)^{-1/2} \sigma^{-1} \exp(-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2})$:

$$\Phi[f](z) = \mathbb{E}e^{iz\xi_l^{(k)}} = e^{iz\mu - \frac{\sigma^2 z^2}{2}}, \quad (3.54)$$

От оценки $\hat{f}(x)$:

$$\begin{aligned} \Phi[\hat{f}](z) &= \frac{1}{nNh_N} \sum_{l=1}^n \sum_{k=1}^N F\left[K\left(\frac{x - \xi_l^{(k)}}{h_N}\right)\right](z) = \\ &= \frac{1}{nN} \sum_{l=1}^n \sum_{k=1}^N \frac{1}{\sqrt{2\pi}h_N} \int_{-\infty}^{\infty} e^{izx - \frac{(x - \xi_l^{(k)})^2}{2h_N^2}} dx = \\ &= \frac{1}{nN} \sum_{l=1}^n \sum_{k=1}^N e^{iz\xi_l^{(k)} - \frac{h_N^2 z^2}{2}}. \end{aligned} \quad (3.55)$$

С учётом последнего равенства, перепишем $\mathbb{E}\|\hat{f} - f\|^2$ в виде

$$\mathbb{E}\|\hat{f} - f\|^2 = \frac{1}{2\pi} \mathbb{E} \int_{-\infty}^{\infty} \left| \frac{1}{nN} \sum_{l=1}^n \sum_{k=1}^N e^{iz\xi_l^{(k)} - \frac{h_N^2 z^2}{2}} - e^{iz\mu - \frac{\sigma^2 z^2}{2}} \right|^2 dz. \quad (3.56)$$

Раскроем скобки под знаком интеграла и воспользуемся теоремой Фубини (поменяем операции интегрирования и взятия математического ожидания местами); тогда будем

иметь

$$\begin{aligned} \mathbb{E}\|\hat{f} - f\|^2 &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{1}{n^2 N^2} \sum_{\substack{l_1=1 \\ l_2=1}}^n \sum_{\substack{k_1=1 \\ k_2=1}}^N \mathbb{E} e^{iz(\xi_{l_1}^{(k_1)} - \xi_{l_2}^{(k_2)}) - h^2 z^2} + e^{-\sigma^2 z^2} - \right. \\ &\quad \left. - \frac{2}{nN} \sum_{l=1}^n \sum_{k=1}^N \mathbb{E} \operatorname{Re} \left(e^{iz(\xi_l^{(k)} - \mu) - \frac{h^2 + \sigma^2}{2} z^2} \right) \right) dz \end{aligned} \quad (3.57)$$

Вычисляя входящие в выражение (3.57) математические ожидания для системы зависимых нормально-распределенных случайных величин:

$$\mathbb{E} e^{iz(\xi_{l_1}^{(k_1)} - \xi_{l_2}^{(k_2)})} = \begin{cases} e^{-\sigma^2(1 - \mathfrak{R}_{l_1, l_2})z^2} & , k_1 = k_2, \\ e^{-\sigma^2 z^2} & , k_1 \neq k_2, \end{cases} \quad (3.58)$$

можем переписать равенство (3.57) в виде

$$\mathbb{E}\|\hat{f} - f\|^2 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{e^{-h^2 z^2}}{n^2 N^2} \sum_{\substack{l_1=1 \\ l_2=1}}^n (N e^{-\sigma^2(1 - \mathfrak{R}_{l_1, l_2})z^2} + N(N-1)e^{-\sigma^2 z^2}) + e^{-\sigma^2 z^2} - 2e^{-\frac{h^2 + 2\sigma^2}{2} z^2} \right) dz. \quad (3.59)$$

Воспользовавшись равенством

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\alpha^2 z^2} dz = \frac{\sqrt{\pi}}{\alpha}, \quad (3.60)$$

получим

$$\mathbb{E}\|\hat{f} - f\|^2 = \frac{1}{2\pi} \left(\frac{\sqrt{\pi}}{\sigma} + \frac{N-1}{N} \frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{\sigma^2 + h_N^2}} - \frac{2\sqrt{2\pi}}{\sqrt{2\sigma^2 + h_N^2}} + \frac{\sqrt{\pi}}{n^2 N} \sum_{\substack{l_1=1 \\ l_2=1}}^n \frac{1}{\sqrt{\sigma^2(1 - \mathfrak{R}_{l_1, l_2}) + h_N^2}} \right) \quad (3.61)$$

Вычислим знаменатель (3.53)

$$\|f\|^2 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left| e^{i\mu z - \frac{\sigma^2 z^2}{2}} \right|^2 dz = \frac{1}{2\sqrt{\pi}\sigma}. \quad (3.62)$$

Окончательно получим

$$\delta^2(\mathfrak{K}, \eta_N) = 1 + \frac{N-1}{N} \frac{1}{\sqrt{1 + \eta_N^2}} - \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{2 + \eta_N^2}} + \frac{1}{n^2 N} \sum_{\substack{l_1=1 \\ l_2=1}}^n \frac{1}{\sqrt{1 - \mathfrak{K}_{l_1, l_2} + \eta_N^2}}, \quad (3.63)$$

где $\eta_N = h_N/\sigma$. Приятно заметить, что σ входит в предыдущее выражение только

посредством η , а также, что

$$\lim_{\substack{N \rightarrow \infty \\ h_N \rightarrow 0 \\ Nh_N \rightarrow \infty}} \delta^2(\sigma^2 \mathfrak{K}, h_N) = 0. \quad (3.64)$$

Следовательно, оценка \hat{f} является асимптотически несмещённой и состоятельной оценкой f . Это показывает, что эта оценка может применяться и в случае больших выборок, но в контексте нашей текущей задачи это не очень интересно.

Поскольку ядро $K(x)$ представляет из себя плотность распределения стандартной нормальной величины, тогда для него выполняется:

$$\int_{-\infty}^{\infty} xK(x)dx = 0; \quad \int_{-\infty}^{\infty} x^2K(x)dx = 1. \quad (3.65)$$

После того, как мы подберём параметр сглаживания h , в качестве оценок для μ и σ^2 соответственно мы будем использовать следующие выражения, которые легко получить из (3.65) :

$$\begin{aligned} \hat{\mu} &= \int_{-\infty}^{\infty} x\hat{f}(x)dx = \frac{1}{nNh_N} \sum_{l=1}^n \sum_{k=1}^N \int_{-\infty}^{\infty} xK\left(\frac{x - \xi_l^{(k)}}{h_N}\right) dx = \\ &= \frac{1}{nN} \sum_{l=1}^n \sum_{k=1}^N \int_{-\infty}^{\infty} (\xi_l^{(k)} + h_N x)K(x)dx = \frac{1}{nN} \sum_{l=1}^n \sum_{k=1}^N \xi_l^{(k)}, \end{aligned} \quad (3.66)$$

$$\begin{aligned} \hat{\sigma}^2 &= \int_{-\infty}^{\infty} x^2\hat{f}(x)dx - \hat{\mu}^2 = \frac{1}{nN} \sum_{l=1}^n \sum_{k=1}^N \int_{-\infty}^{\infty} (\xi_l^{(k)} + h_N x)^2 K(x)dx - \hat{\mu}^2 = \\ &= \frac{1}{nN} \sum_{l=1}^n \sum_{k=1}^N ((\xi_l^{(k)})^2 + h_N^2) - \hat{\mu}^2 = h_N^2 + S^2, \end{aligned} \quad (3.67)$$

где

$$S^2 = \frac{1}{nN} \sum_{l=1}^n \sum_{k=1}^N (\xi_l^{(k)} - \hat{\mu})^2. \quad (3.68)$$

Отметим, что оценка (3.66) совпадает с классическим средним выборочным, а (3.67) отличается от классической выборочной дисперсии только слагаемым h_N^2 .

Запишем теперь минимаксную задачу, аналогично [3], соответствующую нахождению оптимального в смысле минимума ОИСКО параметра сглаживания для случайного поля с любой нормированной корреляционной функцией:

$$\inf_{h_N > 0} \sup_{\mathfrak{K} \in \mathcal{K}} \delta^2(\eta_N, \mathfrak{K}), \quad (3.69)$$

где \mathcal{K} — множество симметричных строго положительно определённых матриц с единичной диагональю, элементы которых по модулю не превосходят единицы (множество нормированных корреляционных матриц).

Вычислим сначала супремум. От матрицы \mathfrak{K} зависит только последнее слагаемое

(3.63). Перепишем его с учетом единичной диагонали матрицы $\mathfrak{K}(l, l) = 1$:

$$\frac{1}{n^2 N} \sum_{\substack{l_1=1 \\ l_2=1}}^n \frac{1}{\sqrt{1 - \mathfrak{K}_{l_1, l_2} + \eta_N^2}} = \frac{1}{n^2 N} \left(\sum_{l_1=1}^n \frac{1}{\eta_N} + \sum_{l_1=1}^n \sum_{\substack{l_2=1 \\ l_2 \neq l_1}}^n \frac{1}{\sqrt{1 - \mathfrak{K}_{l_1, l_2} + \eta_N^2}} \right) \rightarrow \sup_{\mathfrak{K} \in \mathcal{K}}. \quad (3.70)$$

Учитывая что $|\mathfrak{K}_{l_1, l_2}| \leq 1$, очевидно, это выражение достигает супремума при $\mathfrak{K}_{l_1, l_2} = 1$ для всех $l_1, l_2 \in 1, \dots, n$:

$$\sup_{\mathfrak{K} \in \mathcal{K}} \frac{1}{n^2 N} \left(\sum_{l_1=1}^n \frac{1}{\eta_N} + \sum_{l_1=1}^n \sum_{\substack{l_2=1 \\ l_2 \neq l_1}}^n \frac{1}{\sqrt{1 - \mathfrak{K}_{l_1, l_2} + \eta_N^2}} \right) = \frac{1}{n^2 N} \left(n \frac{1}{\eta_N} + n(n-1) \frac{1}{\eta_N} \right) = \frac{1}{N \eta_N}. \quad (3.71)$$

Таким образом, после вычисления супремума выражение (3.63) примет вид

$$\delta^2(\eta_N) = 1 + \frac{N-1}{N} \frac{1}{\sqrt{1 + \eta_N^2}} - \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{2 + \eta_N^2}} + \frac{1}{N \eta_N}. \quad (3.72)$$

Графики функции $\delta^2(\eta_N)$ для разных значений N приведены на Рис. 3.1. Эта функция имеет единственный минимум при $\eta = \eta_{opt}$, где η_{opt} — корень нелинейного уравнения $\partial \delta / \partial \eta_N = 0$. Для того, чтобы найти такое значение η_{opt} будем численно решать задачу минимизации:

$$\eta_{opt} = \arg \min_{\eta_N > 0} \left(1 + \frac{N-1}{N} \frac{1}{\sqrt{1 + \eta_N^2}} - \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{2 + \eta_N^2}} + \frac{1}{N \eta_N} \right) \quad (3.73)$$

Погрешность оценки \hat{f} (ОИСКО) для любых других значений η больше, чем при η_{opt} : $\delta(\eta) \geq \delta(\eta_{opt})$. Таким образом, можно сказать, что получена граница погрешности оценивания, то есть с помощью оценки вида \hat{f} нельзя получить оценку точнее, чем $\delta(\eta_{opt})$.

Полученное оптимальное значение параметра сглаживания равно $h_{opt} = \sigma \eta_{opt}$. Неизвестное значение σ можно заменить его оценкой (3.67), тогда

$$h_{opt} = \sigma \eta_{opt} \approx \hat{\sigma} \eta_{opt} = \eta_{opt} \sqrt{h_{opt}^2 + S^2}, \quad (3.74)$$

Отличие значений h_{opt} при σ и $\hat{\sigma}$ будет не слишком большим, поскольку график функции (3.72) при малых N имеет плоскую вершину вблизи точки минимума.

Выражая из предыдущего выражения значение h_{opt} , получаем:

$$h_{opt} = \frac{S \eta_{opt}}{\sqrt{1 - \eta_{opt}^2}}, \quad (3.75)$$

На этом процесс получения оптимального параметра сглаживания завершен.

Однако необходимо отметить, что после того, как мы вычислили супремум от $\delta^2(\mathfrak{K}, \eta_N)$ по всем $\mathfrak{K} \in \mathcal{K}$, точность получения оптимального параметра h_{opt} уменьшилась. Если для подбора параметра минимизировать функцию $\delta^2(\mathfrak{K}, \eta_N)$ (3.63) с определенным видом

корреляционной функции \mathfrak{K} , то, очевидно, полученный параметр будет подобран лучше, чем тот, который был подобран для всего класса \mathcal{K} .

Кроме того, функция $\delta^2(\mathfrak{K}, \eta_N)$ принимает значение супремума на корреляционной функции, которая соответствует сильной корреляционной зависимости значений поля ($\mathfrak{K}_{l_1, l_2} = 1 \quad \forall l_1, l_2 \in 1, \dots, n$). Поэтому, в случае малой зависимости или вообще независимости значений поля ($\mathfrak{K}_{l_1, l_2} \approx 0 \quad \forall l_1 \neq l_2$) параметр h_N при $\inf \delta^2(\eta_N)$ будет подбираться хуже, чем при $\inf \delta^2(\mathfrak{K}, \eta_N)$.

Сравним эту оценку с похожей оценкой, приведенной в [10]. Если взять одну реализацию $N = 1$ случайного поля с единичной корреляционной матрицей $\mathfrak{K}(l, l) = 1, \quad \mathfrak{K}(l_1, l_2) = 0 \quad \forall l_1 \neq l_2$ (корреляционная связь между значениями поля в разных точках отсутствует), мы получим случай выборки из n независимых нормальных величин. Тогда выражение (3.63) для полученной ОИСКО примет вид:

$$\delta^2(\eta) = 1 - \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{2 + \eta_N^2}} + \frac{1}{n^2} \left(\frac{n}{\eta} + \frac{n(n-1)}{\sqrt{1 - \eta^2}} \right) = 1 + \frac{n-1}{n} \frac{1}{\sqrt{1 - \eta^2}} - \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{2 + \eta_N^2}} + \frac{1}{n\eta}. \quad (3.76)$$

Можно заметить, что эта формула в точности совпадает с формулой (??), полученной в [10] для такого же случая выборки из n независимых нормально-распределенных случайных величин.

3.4.4 Подбор оптимальной формы ядра

В данном пункте приведем другой подход к оптимизации оценки плотности распределения — оптимизации формы ядра. Вывод такой формы основан на идеях, взятых из статей [3] и [31].

Здесь ядерную оценку удобно записать в виде

$$\hat{f}(x) = \frac{1}{nN} \sum_{l=1}^n \sum_{k=1}^N K(x - \xi_l^{(k)}), \quad (3.77)$$

где параметр h_N уже включен в ядре K . Мы будем минимизировать интегральную среднеквадратичную ошибку (особого смысла рассматривать ОИСКО нет, поскольку, от ядра всё равно зависит только числитель)

$$\mathbb{E} \|\hat{f} - f\|^2 = \frac{1}{2\pi} \mathbb{E} \int_{-\infty}^{\infty} \left| \frac{1}{nN} \sum_{l=1}^n \sum_{k=1}^N \Psi(z) e^{iz\xi_l^{(k)}} - E(z) \right|^2 dz, \quad (3.78)$$

где $\Psi(z) = \Phi[K](z)$, а $E(z) = \Phi[f](z) = e^{iz\mu - \frac{\sigma^2 z^2}{2}}$. Раскрывая скобки и внося

математическое ожидание внутри интеграла, будем иметь

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\|\hat{f} - f\|^2 &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} (A|\Psi(z)|^2 + (1 - 2\operatorname{Re}(\Psi(z)))|E(z)|^2) dz = \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left(A \left| \Psi(z) - \frac{|E(z)|^2}{A} \right|^2 + \frac{|E(z)|^2(A^2 - |E(z)|^2)}{A^2} \right) dz,\end{aligned}\tag{3.79}$$

где для A , используя (3.58), имеем:

$$A = \frac{1}{n^2 N^2} \sum_{\substack{l_1=1 \\ l_2=1}}^n \sum_{\substack{k_1=1 \\ k_2=1}}^N \mathbb{E} e^{iz(\xi_{l_1}^{(k_1)} - \xi_{l_2}^{(k_2)})} = \frac{1}{n^2 N} \sum_{\substack{l_1=1 \\ l_2=1}}^n e^{-\sigma^2(1 - \mathfrak{K}_{l_1, l_2})z^2} + \frac{N-1}{N} e^{-\sigma^2 z^2}.\tag{3.80}$$

Легко видеть, что минимум выражения (3.79) по $\Psi_{opt}(z)$ достигается при

$$\left| \Psi_{opt}(z) - \frac{|E(z)|^2}{A} \right| = 0,\tag{3.81}$$

тогда

$$\begin{aligned}\Psi_{opt}(z) &= \frac{|E(z)|^2}{A} = \frac{e^{-\sigma^2 z^2}}{\frac{1}{n^2 N} \sum_{\substack{l_1=1 \\ l_2=1}}^n e^{-\sigma^2(1 - \mathfrak{K}_{l_1, l_2})z^2} + \frac{N-1}{N} e^{-\sigma^2 z^2}} = \\ &= \frac{1}{\frac{1}{n^2 N} \sum_{\substack{l_1=1 \\ l_2=1}}^n e^{\sigma^2 \mathfrak{K}_{l_1, l_2} z^2} + \frac{N-1}{N}}.\end{aligned}\tag{3.82}$$

В данном случае можно так же решить минимаксную задачу, то есть предварительно найти супремум по всем $\mathfrak{K} \in \mathcal{K}$ выражения (3.79) (супремум достигается при $\mathfrak{K}_{l_1, l_2} = 1$ для всех $l_1, l_2 \in 1, \dots, n$), тогда минимизировать нужно выражение вида:

$$\begin{aligned}\sup_{\mathfrak{K} \in \mathcal{K}} \mathbb{E}\|\hat{f} - f\|^2 &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} (A_s |\Psi(z)|^2 + (1 - 2\operatorname{Re}(\Psi(z)))|E(z)|^2) dz = \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left(A_s \left| \Psi(z) - \frac{|E(z)|^2}{A_s} \right|^2 + \frac{|E(z)|^2(A_s^2 - |E(z)|^2)}{A_s^2} \right) dz,\end{aligned}\tag{3.83}$$

где $A_s = \frac{1}{N} + \frac{N-1}{N} e^{-\sigma^2 z^2}$.

Тогда оптимальное ядро имеет вид

$$\Psi_{opt}(z) = \frac{1}{\frac{1}{N} e^{\sigma^2 z^2} + (1 - \frac{1}{N})}.\tag{3.84}$$

Из общих свойств характеристической функции следует, что, вообще говоря, выражения (3.82) и (3.84) не являются преобразованиями Фурье никакой плотности. Однако, $\Psi_{opt}(0) = 1$ и $\Psi_{opt}(z) = \Psi_{opt}(-z) \in \mathbb{R}$, что гарантирует существование такой

вещественной функции $K(x)$ (обратного преобразования Фурье), что $K(x) = K(-x)$ и

$$\int_{-\infty}^{\infty} K(x)dx = 1, \quad (3.85)$$

хотя условие неотрицательности может и не выполняться. Ядра такого рода тоже рассматриваются в статистике (например в [24], [27]), а соответствующие ядерные оценки называют оценками парзенского типа, или типа Розенблатта–Парзена. Поскольку обращение выражений (3.82) и (3.84) представляет некоторые трудности, поэтому удовольствуемся только моментами. Последние легко вычисляются взятием производных в нуле (с соответствующим знаком) функции $\Psi_{opt}(z)$.

Попробуем получить примерное представление о виде такого оптимального ядра. Аналитически получить его вид довольно сложно, поэтому вычислим его значения численно. По определению

$$K_{opt}(x) = \Phi[\Psi](x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-izx} \Psi_{opt}(z) dz. \quad (3.86)$$

Поскольку $\Psi_{opt}(z) = \Psi_{opt}(-z)$, можно записать:

$$K_{opt}(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{izx} \Psi_{opt}(-z) dz. \quad (3.87)$$

Сложим теперь (3.86) и (3.87), получим:

$$\begin{aligned} K_{opt}(x) &= \frac{1}{4\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \Psi_{opt}(z) (e^{izx} + e^{-izx}) dz = \\ &= \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \Psi_{opt}(z) \frac{e^{izx} + e^{-izx}}{2} dz = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \Psi_{opt}(z) \cos(zx) dz \end{aligned} \quad (3.88)$$

На Рис. 3.2 приведены примеры оптимального ядра $K_{opt}(x)$ для $\Psi_{opt}(z)$ (3.84) при $\sigma^2 = 1$ и $N = 1, 5, 10, 50$. По графику видно, что предположение о том, что такое оптимальное ядро $K_{opt}(x)$ имеет не всегда положительные значения, подтверждается численными результатами.

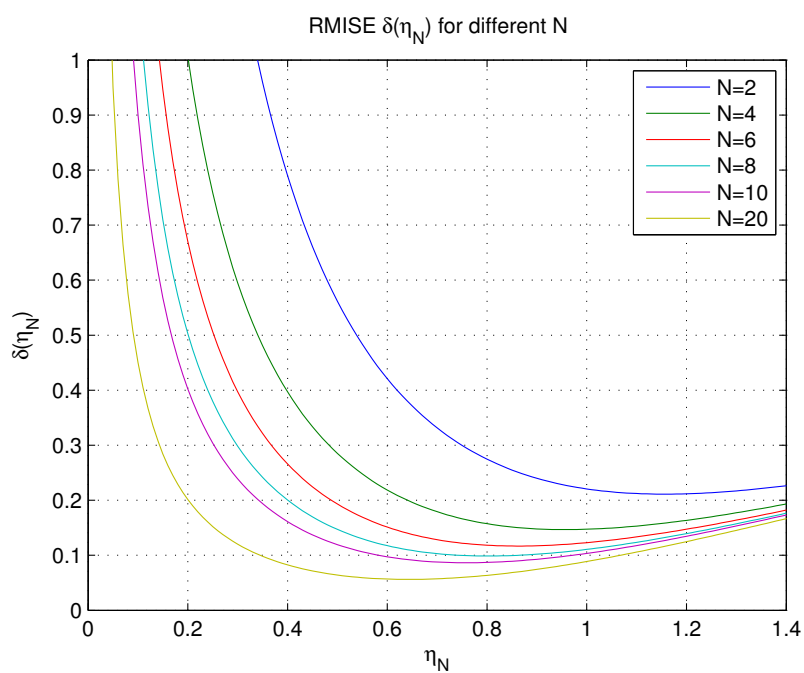


Рис. 3.1: Графики функции $\delta^2(\eta_N)$ для разных значений N .

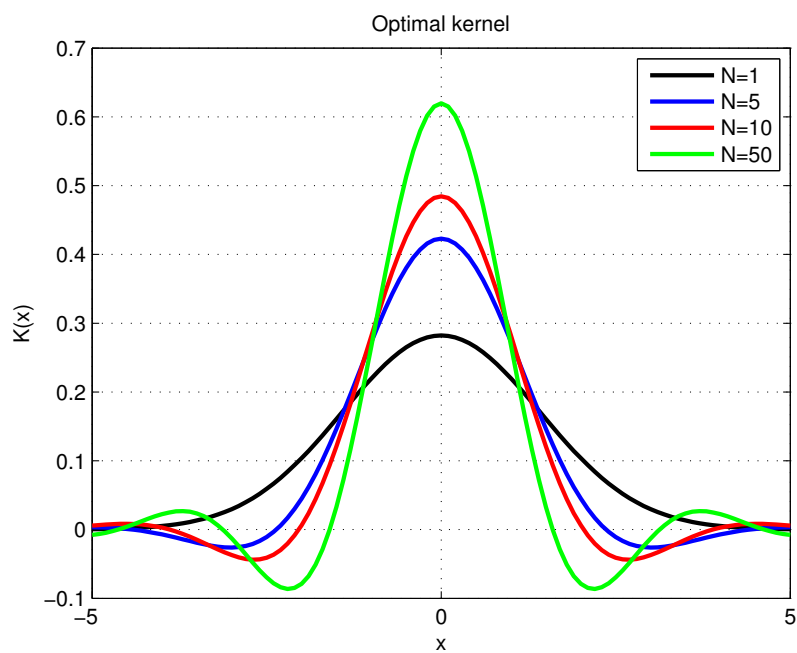


Рис. 3.2: Примеры выведенного оптимального ядра (3.86) для разных $N = 1, 5, 10, 50$

Глава 4

Результаты

В данной главе опишем все практически-значимые результаты, а так же исследования оценок, которые были произведены в данной работе. Сначала приведем результаты моделирования случайных полей, затем экспериментальные исследования выведенных оценок.

4.1 Моделирование полей

Для получения численных реализаций случайного поля нами был реализован описанный в Главе 2 метод параметрического моделирования однородного изотропного гауссова случайного поля $\xi(\mathbf{x})$ с параметрами μ , σ^2 и корреляционной функцией в экспоненциальном виде $K(r) = \sigma^2 \exp\left(-\frac{\alpha^2 r^2}{2}\right)$.

Число гармоник N в сумме (2.38) берется порядка $10^2 - 10^3$ в зависимости от числа узлов сетки и, соответственно, времени машинного времени расчета этой модели.

Поскольку мы работаем с гауссовым полем, параметры μ и σ^2 отвечают за интервал значений поля в каждой точке. Параметр μ (математическое ожидание) отвечает за среднее значение поля, а σ^2 (дисперсия) за среднее отклонение от этого значения. Изменения этих параметров не влияют на общий характер поля, а только изменяют возможный интервал его значений в каждой точке. Интереснее наблюдать за зависимостью от параметра α , который в данном случае описывает корреляционные свойства поля.

На Рис. 4.1 приведены примеры полученных реализаций. Эти реализации генерировались при заданных параметрах $\mu = 0$, $\sigma^2 = 1$, но при разных значениях α . В качестве область определения аргументов поля в данном случае мы используем квадратная область: $D = [0, 100] \times [0, 100]$.

По полученным реализациям легко увидеть, что характер поля довольно сильно меняется при изменении параметра α : чем больше значение этого параметра, тем более изогнутой становится поверхность получаемого поля. Данный факт можно объяснить аналитически, если обратится к спектральной теории случайных процессов. Спектральная плотность $S(\omega)$ стационарного случайного процесса — это

частотная функция, характеризующая спектральный (частотный) состав процесса и представляющая из себя частотную характеристику для средних значений квадратов амплитуд гармоник, на которые может быть разложен случайный процесс. Иными словами, спектральная плотность $S(\omega)$ является величиной, которая пропорциональна средней мощности процесса в окрестности частоты ω . Спектральная плотность рассматриваемого случайного поля зависит от модуля пространственной частоты $|\mathbf{u}|$ и имеет вид $S(|\mathbf{u}|) = \frac{\sigma^2}{2\pi\alpha^2} \exp\left(-\frac{|\mathbf{u}|^2}{2\alpha^2}\right)$. На Рис. 4.2 приведены графики функции $S(\omega) = \frac{1}{2\pi\alpha^2} \exp\left(-\frac{\omega^2}{2\alpha^2}\right)$ при разных значениях параметра α . Этот рисунок иллюстрирует поведение такой спектральной плотности в зависимости от α : чем меньше α , тем более узким становится график функции $S(|\mathbf{u}|)$. С физической точки зрения это означает, что при уменьшении α уменьшается количество частот, представленных в случайном поле, то есть изменение поля от точки к точке становится более плавным. И наоборот, чем шире график спектральной плотности, то есть чем большие частоты дают вклад в поле, тем тоньше структура этого поля и тем быстрее происходят изменения поля в от точки к точке. Таким образом, на Рис. 4.1 мы видим закономерное подтверждение этого аналитического объяснения.

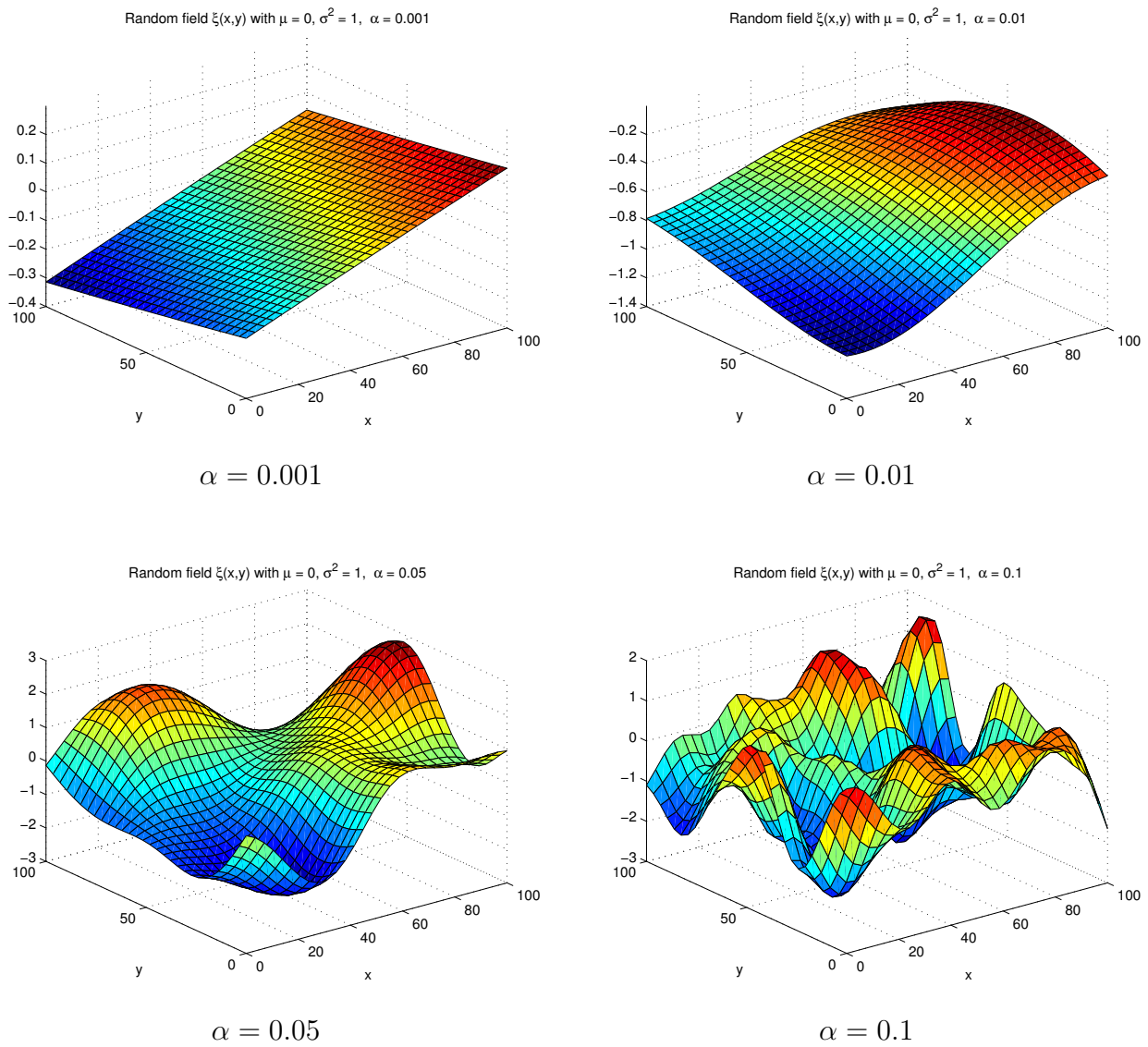


Рис. 4.1: Примеры полученных реализаций случайного поля $\xi(\mathbf{x})$ при $\mu = 0, \sigma^2 = 1$ и разных значениях α .

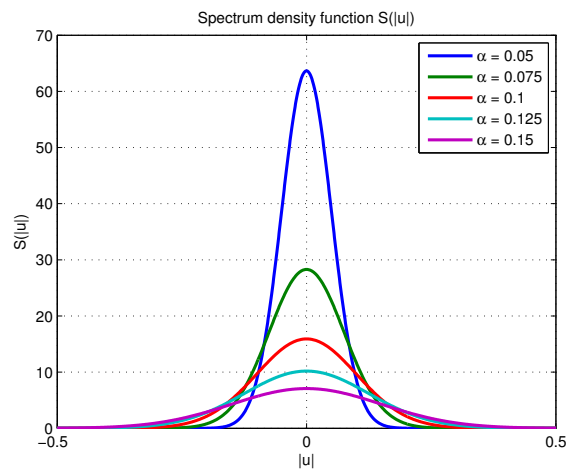


Рис. 4.2: Графики функции $S(\omega) = \frac{\sigma^2}{2\pi\alpha^2} \exp\left(-\frac{\omega^2}{2\alpha^2}\right)$ при разных значениях параметра α .

4.2 Исследование полученных оценок

Основная задача, решаемая в данной работе, состоит в том, чтобы по небольшому набору исходных данных (реализаций случайного поля) качественно оценить параметры этого случайного поля. В Главе 3 нами были аналитически получены оценки для математического ожидания, дисперсии, параметра нормированной корреляционной функции и вероятности.

Эти аналитические оценки теперь необходимо исследовать, то есть проверить, как они будут работать на практике. Для этого будем применять их к набору реализаций какого-либо тестового случайного поля с известными параметрами. Поскольку значения параметров тестового поля известны, вычислить погрешности оценок не составит труда. В том числе и для этого, в нашей работе уже реализован алгоритм, с помощью которого по заданным значениям параметров μ , σ^2 и $\mathfrak{K}(\mathbf{x})$ можно сгенерировать набор реализаций любого объема. Пусть нам нужно оценить параметры случайного поля $\xi(\mathbf{x})$, $\mathbf{x} \in D \subset \mathbb{R}^2$. Точные значения параметров μ , σ^2 и $\mathfrak{K}(\mathbf{x})$ нам известны.

Начинаем с того, что строим в двумерной области D сетку из n узлов $\mathbf{x}_h = \{\mathbf{x}_i, i = 1, \dots, n\} \in D$. Для этой сетки и для заданных параметров поля генерируем выборку — набор из N реализаций поля в точках этой сетки, получаем набор из векторов $\{\boldsymbol{\xi}^{(k)}\}_{k=1}^N$. Число реализаций N можно взять любым, то есть сгенерировать набор и малого и большого объема.

В качестве области изменения аргумента $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2$ случайного поля $\xi(\mathbf{x})$ берется квадратная область с единичной длиной стороны: $\mathbf{x} \in D = [0; 1] \times [0; 1]$ и в этой области строится равномерная сетка.

Не умоляя общности, будем производить тестирование оценок на случайном поле с $\mu = 0$ и $\sigma^2 = 1$. Так как мы работаем с гауссовским полем, то изменение этих параметров приравнивается к простому изменению масштаба.

Наибольший интерес представляет то, как свойства корреляционной функции случайного поля влияют на погрешность полученных оценок. Для этого мы генерируем поле с нормированной корреляционной функцией экспоненциального вида $\mathfrak{K}(\mathbf{x}) = \exp(-\alpha^2 \mathbf{x}^2/2)$, которая явно зависит от числового параметра α . Такая корреляционная функция была протестирована для области D на сетке \mathbf{x}_h . Было выяснено, что, при значениях $\alpha > 1$, корреляционная связь между элементами вектора становится очень слабой, то есть рассматриваемые точки поля становятся независимыми. Так как мы работаем в условиях зависимых элементов вектора, будем проводить тестирования на наборах реализаций полей с $\alpha \leq 1$, а конкретнее для набора значений $\alpha \in \{1, 0.1, 0.01\}$.

Пусть имеется некоторая оценка \hat{a} для параметра a случайного поля $\xi(\mathbf{x})$. Основываясь на уже введенном критерии качества оценки параметра через ОСКО (3.20), будем в

качестве относительной погрешности $\delta(a, \hat{a})$ оценки \hat{a} для параметра a использовать

$$\delta(a, \hat{a}) = \frac{\mathbb{E}|a - \hat{a}|}{|a|}, \quad a \neq 0. \quad (4.1)$$

На практике операцию взятия математического ожидания $\mathbb{E}|a - \hat{a}|$ можно заменить осреднением по большому числу значений $|a - \hat{a}|$. Для этого необходимо сгенерировать L наборов реализаций $R_j = \{\xi^{(k)}\}_{k=1}^N$, $j = 1, \dots, L$. Для каждого набора R_j получаем конкретное значение оценки $\hat{a}_j = \hat{a}(R_j)$, после получаем среднее значение относительной погрешности оценки \hat{a} при заданном N :

$$\delta(a, \hat{a}) = \frac{\frac{1}{L} \sum_{j=1}^L |a - \hat{a}_j|}{|a|}, \quad a \neq 0. \quad (4.2)$$

Для всех рассматриваемых оценок параметров мы вычисляли погрешность по этим формулам.

Далее кратко опишем все получившиеся результаты экспериментального тестирования оценок, определенных в данной работе.

Оценки математического ожидания, дисперсии и параметра нормированной корреляционной функции

Полученные по методу наименьших квадратов оценки математического ожидания (3.13) и дисперсии (3.14) обладают свойствами состоятельности и асимптотической несмещенности. На Рис. 4.3 приведены примеры полученных погрешностей для этих оценок при больших N и разных α . Очевидно, что практические результаты не противоречат теоретическим, поскольку полученные погрешность сходятся к нулю при увеличении числа реализаций N .

Для оценки дисперсии была получена еще одна формула (3.26), которая должна давать меньшую погрешность при оценивании дисперсии для небольших N . С помощью Рис. 4.4 можно визуально сравнить, как различаются погрешность для оценки (3.14) и (3.26). По полученным значениям погрешностей для тестового набора данных, оценка (3.26) действительно лучше оценивает дисперсию при небольших значениях N , чем оценка (3.14). Также по полученным данным прослеживается то, что чем меньше α , тем хуже работают все построенные оценки дисперсии.

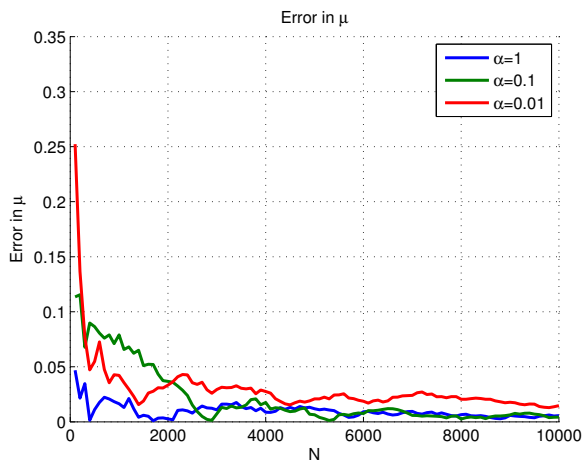
На Рис. 4.6 приведены примеры полученных погрешностей для оценки (3.19) параметра α нормированной корреляционной функции при малых и больших N и разных α . Эти графики иллюстрируют то, что построенная оценка обладает свойствами асимптотической несмещенности и состоятельности.

Оценка вероятности

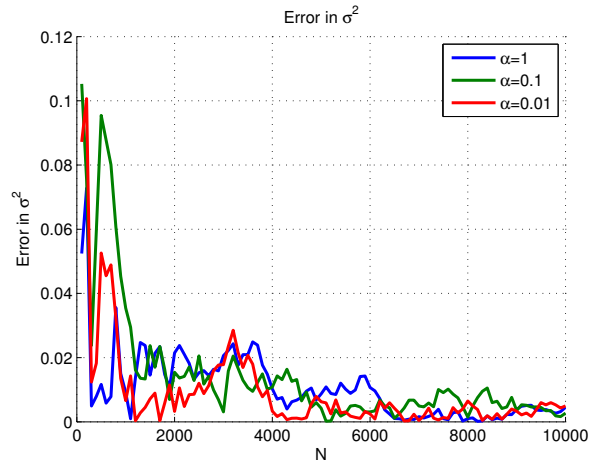
Покажем, как метод оценивания \hat{f} влияет на погрешность оценки параметра $p(a, b)$. Оценка $\hat{p}(a, b)$ находится с помощью численного интегрирования по формуле (3.27), куда

в качестве оценки \hat{f} подставляется параметрическая оценка (3.28), ядерная оценка с оптимальным параметром сглаживания (3.51) и ядерная оценка с оптимальным ядром (3.77).

На Рис. 4.5 приведены два графика получившихся погрешностей $\alpha = 1$ и $\alpha = 0.1$. На этих графиках приведены погрешности для $\hat{p}(a, b)$ при $a = -\infty, b = 1$. По полученным данным видно, что для малого числа реализаций такой интегральный параметр $p(a, b)$ оценивается лучше при использовании ядерных оценок. Причем оценка с оптимальным ядром лучше всего работает при совсем небольших N , но, при увеличении N , лучшую оценку уже дает использование оптимального параметра сглаживания.

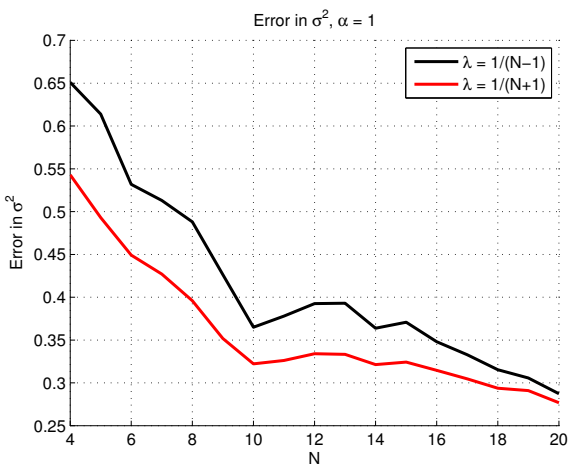


а) Погрешность для оценки математического ожидания $\hat{\mu}$ (3.13)

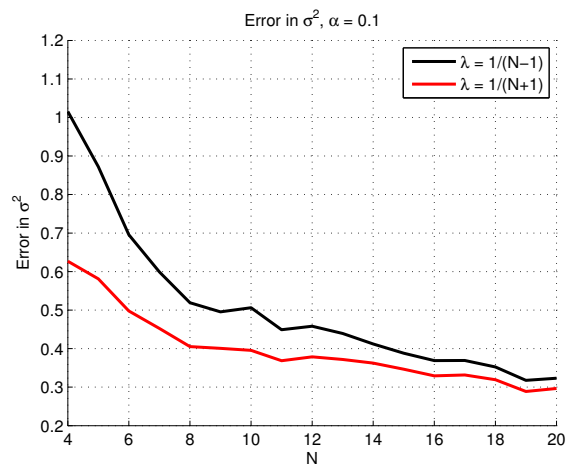


б) Погрешность для оценки дисперсии $\hat{\sigma}^2$ (3.14)

Рис. 4.3: Погрешности оценок математического ожидания и дисперсии для больших N



$\alpha = 1$



$\alpha = 0.1$

Рис. 4.4: Сравнение погрешности оценок дисперсии — классической (3.14) с $\lambda = 1/(N - 1)$ и специальной (3.26) с $\lambda = 1/(N + 1)$ для выборки малого объема

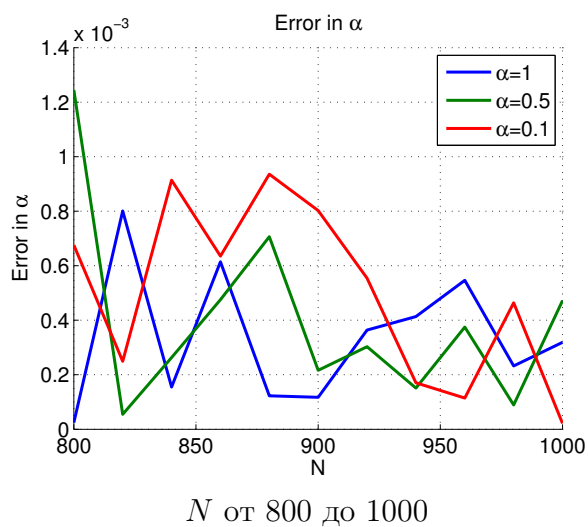
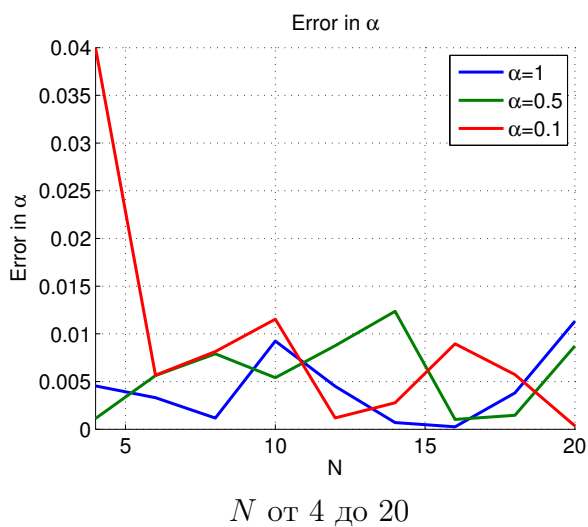


Рис. 4.5: Сравнение погрешности оценки $\hat{\alpha}$ при малых и больших N

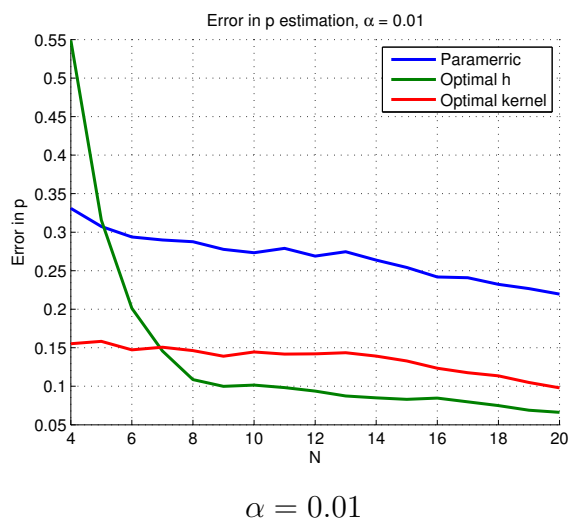
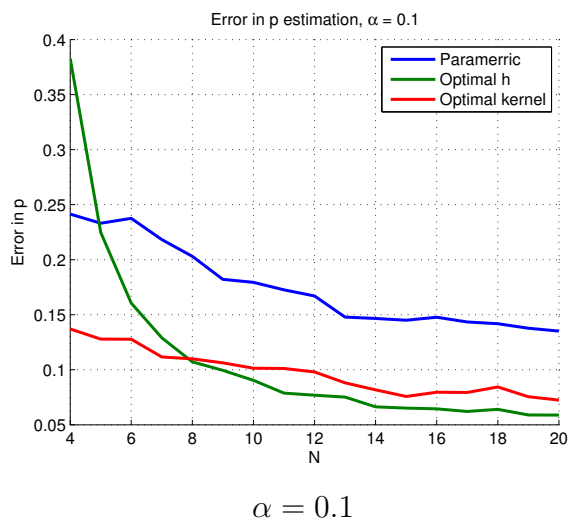


Рис. 4.6: Погрешность параметра $\hat{p}(-\infty, 1)$ через разные оценки \hat{f}

Глава 5

Охрана труда

Данная дипломная работа связана с научными исследованиями и математическими вычислениями. Большинство математических вычислений необходимо проводить на компьютере, в исследованиях необходимо использовать большое число литературных источников, преобладающее количество которых доступно только в электронном виде. Все это приводит к тому, что исследователь большинство рабочего времени проводит у компьютера.

Когда исследователь работает за компьютером, ему необходимо воспринимать изображение на экране и с одновременно различать текст рукописных или печатных материалов, выполнять машинописные графические работы и другие операции, что способствует зрительному утомлению, которое усиливается из-за бликов, мерцаний и других отклонений визуальных параметров экрана и световой среды помещения.

Такая работа характеризуется повышенным уровнем психоэмоционального напряжения, связанного с высокой концентрацией внимания, определенным визуальным дискомфортом, ответственностью за качество выполняемого задания. Переработка большого объема информации, решение сложных задач, нередко в условиях дефицита времени, требуют также повышенных умственных усилий и нервного напряжения. Кроме того, длительная работа в неизменной статической позе приводит к перенапряжению различных групп мышц, а однотипные движения на клавиатуре развивают воспалительные процессы в суставах и мышцах рук.

Указанные факторы приводят к тому, что постоянная работа за компьютером по степени развития утомления занимает второе место среди всех видов деятельности. Для оптимального варианта организации работы необходимо свести к минимуму его неблагоприятное воздействие на здоровье пользователя. Рассмотрим подробнее основные вредные и опасные факторы при работе с компьютером, то есть привести рабочее место в соответствие с требованиями эргономики и охраны труда.

Зрительное напряжение

Повышенная нагрузка на зрение способствует возникновению близорукости, приводит к переутомлению глаз, к мигрени и головной боли, повышает раздражительность,

нервное напряжение, может вызвать стресс. Важным фактором, определяющим степень зрительного утомления, является освещение рабочих мест и помещений, где расположены компьютеры. Согласно документу «Гигиенические требования к видеодисплейным терминалам, персональным электронно-вычислительным машинам и организации работы» (СанПиН 2.2.2.1340-03) существует ряд требований к освещению рабочего места при работе с компьютером.

Помещения для эксплуатации ПК (Персональный Компьютер) должны иметь систему общего освещения (естественное и искусственное освещение). Оконные светопроемы в помещениях, где эксплуатируется вычислительная техника, должны быть преимущественно ориентированы на север и северо-восток и оборудованы регулируемыми устройствами типа: занавесей, жалюзи, внешних козырьков и др.

Рабочие столы следует размещать так, чтобы видеодисплейные терминалы были ориентированы боковой стороной к световым проемам, чтобы естественный свет падал преимущественно слева. Искусственное освещение в помещениях для эксплуатации ПК должно осуществляться системой общего равномерного освещения — 150-200 лк.

Допускается установка светильников местного освещения для подсветки документов. Местное освещение не должно создавать бликов на поверхности экрана и увеличивать освещенность экрана более 300 лк. Освещение рабочих поверхностей осуществляется с помощью люминесцентных ламп ЛБ белого света, которые предназначены для помещений с нормальными условиями труда.

Освещенность поверхности экрана должна быть не более 300 лк. Яркость светильников общего освещения в зоне углов излучения 50-90 градусов с вертикалью в продольной и поперечной плоскостях должна составлять не более 200 кд/м³, защитный угол светильников должен быть не менее 40 градусов. Светильники местного освещения должны иметь не просвечивающий отражатель с защитным углом не менее 40 градусов.

В качестве источников света при искусственном освещении следует применять преимущественно люминесцентные лампы ЛБ (белого света) и ЛТБ (тепло-белого) мощностью 40 Вт или 80 Вт, у которых высокая световая отдача (до 120 Вт и более), продолжительный срок службы (до 10000 ч), малая яркость светящейся поверхности, близкий к естественному спектральный состав излучаемого света, что обеспечивает хорошую светопередачу. Помещение является помещением с нормальными условиями среды, что позволяет использовать в системе освещения светильники ЛСПО 2 (пыле- и водо-незащищенное исполнение) с люминесцентными лампами ЛХБ 40 Вт со световым потоком 2780 ли по ГОСТ 6825-74. В светильниках местного освещения допускается применение ламп накаливания, в том числе галогенных. Применение светильников без рассеивателей и экранирующих решеток не допускается.

Эргономические требования

Рабочее место – зона, оснащенная необходимыми техническими средствами, в которой совершается трудовая деятельность исполнителя. Организацией рабочего места

называется система мероприятий по оснащению рабочего места средствами и предметами труда и их размещению в определенном порядке (СанПиН 2.2.2/2.4.1340-03).

В соответствии с требованиями эргономики, рабочее место должно быть приспособлено для конкретного вида деятельности и для работников определенной квалификации с учетом их физических и психических возможностей и особенностей. Конструкция рабочего места должна обеспечивать быстроту, безопасность и простоту технического обслуживания в нормальных и аварийных условиях; полностью отвечать функциональным требованиям и предполагаемым условиям эксплуатации.

При размещении видеодисплея на рабочем месте учитываются границы полей зрения пользователя, которые определяются положением глаз и головы. Различают зоны зрительного наблюдения в вертикальной плоскости, ограниченные определенными углами, в которых располагают экран видеодисплея (45-60 градусов), попитр (35-45 градусов) и клавиатуру. При постоянной работе экран должен быть расположен в центре поля обзора, документы — слева на столе или специальной подставке. При размещении рабочих мест с ПК расстояние между рабочими столами с видеодисплеями (в направлении тыла поверхности одного видеомонитора и экрана другого видеомонитора), должно быть не менее 2 м, а расстояние между боковыми поверхностями видеомониторов – не менее 1.2 м. Экран видеомонитора должен находиться от глаз пользователя на расстоянии 60-70 см, но не ближе 50 см с учетом размеров алфавитно-цифровых знаков и символов. Рабочий стол должен иметь стабильную конструкцию. Плоскость стола выбирается в зависимости от размера документов. При больших размерах документов она должна быть 160 × 90см. Плоскость стола, а также сидение программиста должны регулироваться по высоте. Высоту плоскости стола необходимо регулировать в диапазоне 65–85см. При этом высота от горизонтальной линии зрения до рабочей поверхности стола при выпрямленной рабочей позе должна быть 40 – 50см.

Тип рабочего кресла выбирается в зависимости от продолжительности работы. При длительной работе кресло должно быть массивным, при кратковременной — легкой конструкции. Сидение должно быть удобным, иметь закругленные края. Его размеры не должны превышать 40 × 40см. Кроме того, сидение должно быть покрыто латексом толщиной около 1 см, сверху которого накладывается влагонепроницаемый материал.

Высота спинки кресла рекомендуется 48 – 50см от поверхности сидения и с регулировкой в переднезаднем направлении. На высоте 10 – 20см от сидения спинка должна быть оборудована поясничным опорным валиком. При постоянной работе подлокотники ограничивают движение, поэтому креслом с подлокотниками пользоваться не рекомендуется.

Электромагнитные поля

Особое внимание при анализе безопасности в процессе работы за компьютером следует уделять воздействию электромагнитных полей мониторов во время их эксплуатации, так как они могут быть причиной возникновения кожных сыпей, помутнения хрусталика

глаза, патологии беременности и других серьезных нарушений здоровья. Мониторы являются источниками широкого спектра электромагнитных излучений, таких как рентгеновское, ультрафиолетовое, видимого спектра, инфракрасное. Кроме того, они создают электростатическое поле.

Уровень шума

На рабочем месте программиста источником шума является вычислительная машина, производящая постоянный небольшой шум. Шум представляет собой сочетание звуков, различных по интенсивности и частоте в частотном диапазоне 16-20кГц, не несущих полезной информации. Шум вредно воздействует не только на органы слуха, но и на весь организм человека в целом через центральную нервную систему. Шум — причина преждевременного утомления, ослабления внимания, памяти. Рассмотрим требования к уровням шума и вибрации на рабочих местах, оборудованных ПК (СанПиН 2.2.2/2.4.1340-03).

Характеристикой постоянного шума на рабочих местах является уровень звукового давления в децибелах в установленных октавных полосах:

$$L = 20 \log \frac{P}{P_0}, \quad (5.1)$$

где P — среднеквадратическое значение звукового давления, $P_0 = 2 \cdot 10^5 \text{Па}$. Характеристикой непостоянного шума является интегральный критерий — эквивалентный уровень звукового давления L , измеряемый по шкале А, имитирующей кривую чувствительности уха человека.

Предельно допустимый эквивалентный уровень звука 65дБ (для помещения в котором осуществляется эксплуатация ПК). Для данного помещения уровень звука не превышает допустимого, поэтому применение специальных звукоизоляционных материалов не требуется. Воздействие вибрации, инфразвука и ультразвука в помещении отсутствует.

Микроклиматические параметры

Рассмотрим требования к микроклимату, содержанию аэроионов и вредных химических веществ в воздухе на рабочих местах, оборудованных ПК, устанавливаемые ГОСТ12.1.005-88 и СанПиН 2.2.2/2.4.1340-03. В производственных помещениях, в которых работа с использованием ПК является основной и связана с нервно-эмоциональным напряжением, должны обеспечиваться оптимальные параметры микроклимата в соответствии с действующими санитарно-эпидемиологическими нормативами.

Нормы температуры 20-25 градуса Цельсия и относительной влажности 60%-40% для теплого периода года, а также 22-24 градуса Цельсия и 60%-40% соответственно для холодного и переходного. Скорости движения воздуха соблюдаются благодаря наличию системы кондиционирования, работающей в режиме автоматического регулирования.

Скорость движения воздуха не превышает допустимого значения (не более 0.1 м/с, как для холодного, так и для теплого периода).

В помещении отсутствуют выделения вредных веществ, поэтому вентиляция служит для удаления насыщенного углекислым газом и пылью воздуха и подачи свежего. Концентрация пыли должна быть не более 0.3 мг/м³ при размере частиц не более 5 мкм. В помещениях, оборудованных ПК, должна проводиться ежедневная влажная уборка и систематическое проветривание после каждого часа работы на ПК.

Уровни положительных и отрицательных аэроионов в воздухе помещений, где расположены ПК, должны соответствовать действующим санитарно-эпидемиологическим нормативам. Содержание вредных химических веществ в производственных помещениях, в которых работа с использованием ПК является основной, не должно превышать предельно допустимых концентраций загрязняющих веществ в атмосферном воздухе населенных мест в соответствии с действующими гигиеническими нормативами.

Требования пожаробезопасности

Согласно ГОСТ 12.1.004-91 существуют следующие опасные факторы: пламя и искры, повышенная температура окружающей среды, токсичные продукты горения и термического разложения, пониженная концентрация кислорода.

Противопожарная защита обеспечивается следующими мерами:

1. Применение средств пожаротушения, установка сигнализации и устройств тушения, ограничивающих распространение пожара, мероприятия по эвакуации людей, наличие средств индивидуальной защиты и средств противодымной защиты.
2. Наличие противопожарных перегородок и отсеков, устройств автоматического отключения систем.
3. Планировка эвакуационных путей и выходов.
4. Оповещение людей.
5. Технические средства для эвакуации и спасения людей.
6. Наличие огнетушащих веществ.

Пожарную опасность в ВЦ представляют носители информации, поэтому помещение должно быть оборудовано несгораемыми стеллажами и шкафами. Хранение перфокарт, лент, дисков должно производиться в металлических кассетах. Не допускается размещение складских помещений, а также пожаровзрывоопасных производств над и под залами ПК, а также смежных с ними помещениях. Система вентиляции ВЦ должна быть оборудована устройством, обеспечивающим автоматическое отключение ее при пожаре, а также огнедымозадерживающими устройствами. Подача воздуха к ПК для охлаждения должна осуществляться по самостоятельному воздуховоду. Присоединение этих воздуховодов к общему коллектору допускается только после огне- и дымозадерживающих клапанов. Система электропитания ПК должна иметь блокировку, отключающую ПК в случае остановки системы кондиционирования и охлаждения. Промывка ячеек и других съемных устройств горючими жидкостями допускается только

в специальных помещениях, оборудованных проточно-вытяжной системой.

В здании ВЦ должна быть предусмотрена автоматическая пожарная сигнализация. В залах ПК, за подвесными потолками, в хранилищах информации, кладовых запасного оборудования необходимо устанавливать извещатели, реагирующие на дым. Во всех других помещениях ВЦ допускается установка типовых пожарных извещателей. Для тушения возможных пожаров ВЦ должны оборудоваться автоматическими установками объемного газового тушения с выводом огнегасительного вещества в кабельные каналы и потоки.

Электробезопасность

Электробезопасность – система организационных и технических мероприятий и средств, обеспечивающих защиту людей от вредного и опасного воздействия электрического тока, электрической дуги, электромагнитного поля и статического электричества. При прохождении через организм, электрический ток оказывает следующие виды воздействий:

1. Термическое действие (выражается в ожогах отдельных участков тела, нагреве кровеносных сосудов, нервов и иных тканей).

2. Электролитическое воздействие (выражается в разложении крови и других органических жидкостей в организме, что вызывает существенное изменение в их физико-химических составах).

3. Биологическое действие (выражается в раздражении и возбуждении живых тканей организма, нарушением внутренних биоэлектрических процессов, протекающих в нормально действующем организме, и тесно связанных с его жизненными функциями).

По степени поражения людей электрическим током помещение относится к категории помещений без повышенной опасности, поскольку является сухим, нежарким, непыльным, с нетокопроводящим полом, возможность случайного одновременного прикосновения к токоведущим частям и заземленным конструкциям присутствует лишь в случае грубейшего нарушения ТБ при техническом обслуживании ПК. В связи с этим требуется соблюдение необходимых мер предосторожности, в том числе использование средств индивидуальной защиты (при техническом обслуживании оборудования), что закреплено в инструкции по ТБ, в соответствии с ГОСТ 12.1.038-82.

Электропитание осуществляется от однофазной сети переменного тока номинальным напряжением и частотой переменного тока с заземленной нейтралью. Предельные отклонения по напряжению и частоте соответствуют ГОСТ 21552-84. Для защиты от поражения электрическим током выполнено заземление корпусов оборудования. Все оборудование имеет предохранители в цепи питания. При прикосновении в ВЦ к любому из элементов ПК могут возникнуть разрядные токи статического электричества. Для снижения возникающих статических зарядов в ВЦ покрытие полов следует выполнять из однослойного поливинилхлоридного линолеума. Не рекомендуется носить одежду из синтетических тканей. К общим мероприятиям защиты от статического электричества в

ВЦ можно отнести общее и местное увлажнение воздуха (до 50%), ионизацию воздуха.

Благоприятные условия труда

Для снижения уровня шума и вибрации оборудование и приборы устанавливаются на специальные амортизирующие прокладки, стены и потолки помещений, где стоят ПК, печатающие и другие периферийные устройства, облицовываются звукопоглощающими материалами (специальные перфорированные плиты и панели). Также можно использовать подвесные акустические потолки (ГОСТ 12.1.003-83 и ГОСТ 12.1.012-90).

Для исключения бликов отражения на экранах применяется специальное антибликовое матовое покрытие экрана монитора. В качестве индивидуального средства защиты от излучения электронно-лучевой трубки дисплея следует использовать защитный фильтр, который предназначен для защиты пользователей ПК от вредных воздействий излучений мониторов в осевом направлении и позволяет снизить их до уровней, безопасных для организма человека.

К техническим средствам, обеспечивающим безопасность работ, относятся: система пожарной сигнализации, системы кондиционирования, система аварийного отключения электропитания.

Уровень освещенности следует проверять не реже одного раза в год в контрольных точках производственного помещения после замены ламп и чистки светильников и. Фактическая освещенность должна быть больше или равна нормируемой освещенности.

Метрологическое обеспечение в области безопасности труда осуществляется на основе положений ГОСТ 12.0.005-84 «Метрологическое обеспечение в области безопасности труда. Основные положения», системы стандартов безопасности труда, санитарных норм и правил Минздрава РФ.

Заключение

Диссертационная работа посвящена разработке методов оценивания параметров однородного изотропного гауссовского случайного поля по малому набору его реализаций, заданных в некотором конечном множестве точек плоскости, а так же моделированию такого случайного поля.

В данной работе рассматривались разные методы моделирования случайного поля, и один из методов был реализован на ЭВМ.

Для построения оценок параметров использовались методы статистики малых выборок, однако при их применении возникла необходимость обобщить соответствующие результаты для малых одномерных выборок на случай малых векторных выборок особого вида, а именно, выборок, возникающих при наблюдении однородного изотропного гауссовского случайного поля в некотором конечном наборе точек. Такое обобщение было произведено, и были построены оценки математического ожидания, дисперсии и параметра нормированной корреляционной функции. Кроме того, эти оценки были экспериментально протестированы.

Для получения эффективной оценки интегрального параметра вероятности применялся аппарат ядерного оценивания, с помощью которого были построены оптимальные оценки плотности распределения поля. Для ядерной оценки с гауссовским ядром был получен оптимальный параметром сглаживания. Кроме этого была решена задача минимизации ОИСКО и найдена оптимальная форма ядерной функции. Оценки для вероятности находились на основе этих ядерных оценок.

Поведение полученных оценок исследовано с помощью численного эксперимента. Было определено, что полученные оценки для параметра вероятности дают большую точность при малом объеме выборки, чем стандартные параметрические оценки.

Список литературы

1. Алексеев В. Г. О непараметрических оценках плотности вероятности и ее производных // Проблемы передачи информации, 1982, т. 15, № 2, р. 22-29.
2. Баскаков С. И. Радиотехнические цепи и сигналы. М.: Высшая школа, 1988.
3. Бенткус Р., Казбарас А. Оптимальные статистические оценки плотности распределения в присутствии априорной информации // Литовский математический сборник. 1981. Т. 22 № 3. с. 29-39.
4. Вероятностные разделы математики / Н. Н. Амосова, Б. А. Куклин, С. Б. Макарова и др. Под общ.ред. Ю. Д. Максимова. СПб.:Иван Федоров, 2001.
5. Витенберг Ю. Р. Система характеристик шероховатости поверхности с помощью корреляционных функций // Вестник машиностроения, 1970, № 11, с. 56-58.
6. Гаскаров Д. В., Шаповалов В. И. Малая выборка. М.:Статистика, 1978.
7. Гренандер У. Случайные процессы и статистические выводы. М.: Издательство иностранной литературы, 1961.
8. Ермаков С. М., Михайлов Г.А. Курс статистического моделирования. М.:Наука, 1982.
9. Епанечников В. А. Непараметрическая оценка многомерной плотности вероятности // Теория вероятностей и ее приложения. 1969. Т. 14. № 1. С. 156-162.
10. Заяц И. О., Череменин В. Г. О применении методов статистики малой выборки к решению задач надежности причальных сооружений // Научно-технические проблемы надежности морских портовых сооружений. М.: Транспорт, 1988, с. 66-75.
11. Заяц И. О., Адамович С. С., Адамович Е.Ю. Сравнительный анализ точности ядерных и классических оценок плотности в условиях малой выборки. Л.:Ленинградский государственный технический университет, 1991.
12. Катковник В. Я., Полетаева Н. Г. Принцип максимума эмпирического правдоподобия для выбора параметра сглаживания в непараметрических оценках плотности вероятности // Вопросы кибернетики. 1982. №89. С. 90-102.

13. Лапко А. В. Анализ дисперсии среднеквадратической ошибки аппроксимации непараметрической оценки плотности вероятности ядерного типа // Статистические системы, 2012, т. 33, № 3, с. 132-139.
14. Лукач Е. Характеристические функции. М.: Наука, 1979.
15. Надарая Э. А. Об интегральной среднеквадратической ошибке некоторых непараметрических оценок плотности вероятности // Теория вероятностей и ее применения, 1974, т. 19, № 1, р. 131-139.
16. Палагин Ю. И., Чернов И. В. Анализ погрешности и выбор параметров моделей при статистическом моделировании случайных полей и процессов // Автоматика и телемеханика, 1988, вып. 8, с. 83-96.
17. Пригарин С. М. Методы численного моделирования случайных процессов и полей. Новосибирск: ИВМиМГ СО РАН, 2005.
18. Свешников А. А. Прикладные методы теории случайных функций. М.: Наука, 1968.
19. Хусу А. П., Витенберг Ю. Р., Пальмов В. А. Шероховатость поверхностей (теоретико-вероятностный подход). М.: Наука, 1975.
20. Шалыгин А. С., Палагин Ю. И. Прикладные методы статистического моделирования. Л.:Машиностроение. Ленингр. отд-ние, 1986.
21. Яглом А. М. Введение в теорию стационарных случайных функций // УМН, 1952, т. 7, вып. 5, с. 3-168.
22. Davis K. B. Mean integrated square error properties of density estimates // Annals of mathematical statistics, 1977, vol. 5, №3, p. 530-535.
23. Mardia K.V., Marshall R.J. Maximum likelihood estimation of models for residual covariance in spatial regression // Biometrika, 1984, vol. 71, № 1, p. 135-46.
24. Parzen E. On estimation of a probability density function and mode // Annals of mathematical statistics, 1962, vol. 33, № 3, p. 1065-1076.
25. Petukhova M., Lupuleac S., Shinder Y., Smirnov A., Yakunin S., Bretagnol B. Numerical approach for airframe assembly simulation // Journal of mathematics in industry, 2014, vol. 4, num. 8.
26. Rosenblatt M. Remarks on some nonparametric estimates of a density function // Annals of mathematical statistics, 1956, vol. 27, no. 3, pp. 832-837.
27. Rosenblatt M. Curve estimations// Annals of mathematical statistics, 1971, vol. 42, no. 6, p. 1815-1842.

28. Silverman B. W. Density estimation for statistics and data analysis. London: Chapman and Hall, 1998.
29. Singh R. S. Mise of kernel estimates of a density and derivatives // Statistics and probability letters, 1987, vol. 5, p. 153-159.
30. Timofeev L. L. Estimation of the parameters of gaussian random field // Lithuanian mathematical journal, 1979 , vol. 3, p. 427-432.
31. Watson G. S., Leadbetter M. R. On estimation of the probability density // Annals of mathematical statistics, 1963, vol. 34, № 2, p. 480-491.

Приложение 1. Алгоритм расстановки крепежных элементов

В этом приложении опишем разработанный алгоритм автоматической расстановки крепежных элементов для качественного скрепления крыла и каркаса. Этот алгоритм основан на результатах, полученных в данной диссертационной работе.

Считается, что зазор между крылом и каркасом это некоторая случайная поверхность — случайное поле $G(x, y)$, заданное на двумерной области $D \subset \mathbb{R}^2$, совпадающей с поверхностью каркаса.

По постановке задачи зазор считается сведенным, если его значение в любой точке не превышает маленького заданного числа ε . Введем критерий качества сведения зазора, заданного случайным полем. Поскольку мы работаем со случайной моделью, введем этот критерий на основе вероятности. Пусть зазор считается сведенным, если вероятность того, что максимальное значение зазора меньше ε , близка к единице:

$$P\left\{ \max_{(x,y) \in D} G(x, y) < \varepsilon \right\} p \approx 1. \quad (2)$$

Чем больше эта вероятность p , тем лучше сводится зазор.

Идея, на которой основан разработанный алгоритм, походит на идею последовательно анализа Вальда, применяемого в статистике для последовательной проверки критериев правдоподобия.

В нашем алгоритме мы последовательно рассматриваем процесс установки крепежей. То есть мы устанавливаем крепежи один за одним и вывод о том, куда лучше установить следующий крепеж, делаем на основе анализа текущего состояния. Текущее состояние задается набором уже установленных крепежей и полученным текущим зазором между деталями. Анализируя этот текущий зазор, мы делаем вывод о том, куда нужно установить следующий крепеж, для того, чтобы текущий зазор изменился наилучшим образом.

Назовем тот зазор, который образуется между деталями в начале процесса скрепления (до постановки первого крепежа) ”начальным” зазором. Мы предположили, что такой зазор $G(x, y)$ можно моделировать однородным изотропным гауссовым случайным полем $\xi(x, y)$. Поскольку мы имеем несколько измерений этого зазора, то считаем что эти измерения — реализации случайного поля, и по этому набору реализаций мы оцениваем параметры случайного поля $\xi(x, y)$ (Глава 3). После получения этих оценок мы считаем,

что поле с этими параметрами качественно моделируем начальный зазор $G(x, y) = \xi(x, y)$. Затем можно применить метод, описанный в Главе 2, для получения большого числа реализаций этого случайного поля. Следовательно, другие характеристики этого начального зазора можно оценивать уже по большому набору его численных реализаций классическими статистическими методами.

Насколько изменился этот начальный зазор $G(x, y)$ после постановки первого крепежа мы узнаем с помощью программного пакета ASRP. Этот пакет решает соответствующую контактную задачу для моделей деталей, набора крепежей и одной конкретной численной реализации зазора. То есть для одной реализации $g_i(x, y)$ начального зазора мы получаем одну реализацию зазора $\bar{g}_i(x, y)$, изменившегося из-за постановки еще одного крепежа. Последовательно решая эту контактную задачу для всех реализаций зазора $G(x, y)$ мы получаем набор реализаций изменившегося зазора $\bar{G}(x, y)$. Очевидно, что можно действовать так и дальше, то есть при добавлении еще одного крепежа решать контактную задачу для набора реализаций зазора и получать на выходе набор реализаций изменившегося зазора.

Таким образом, на каждом этапе перед установкой следующего крепежа мы имеем зазор в виде случайного поля $G(x, y)$, заданного большим набором его реализаций $g_i(x, y)$, $i = 1, \dots, L$, $l \sim 10^3$. Найдем некоторые характеристики этого поля, которые будем использовать впоследствии.

Найдем вероятность того, что этот зазор $G(x, y)$ свелся, то есть вероятность того, что его максимальное значение меньше ε . Поскольку для текущего (не начального) зазора предположения о гауссовости и однородности уже не обязательно выполняются, а набор реализаций большой, мы можем воспользоваться аппаратом ядерных оценок, описанном в п. 3.2. Максимальное значение случайного поля — это случайная величина M . Из каждой реализации поля найдем ее максимальное значение, то есть получим набор реализаций этой случайной величины:

$$m_i = \max_{(x,y) \in D} g_i(x, y) \quad i = 1, \dots, L. \quad (3)$$

Оценку плотности распределения этой случайной величины находим по (3.31) в виде:

$$f_M(x) = \frac{1}{Lh} \sum_{i=1}^L K\left(\frac{x - m_i}{h}\right). \quad (4)$$

Поскольку L большое число, то в качестве ядра $K(x)$ берем оптимальное ядро Епанечникова (3.38), а оптимальный параметр сглаживания подбираем по (3.40) (здесь мы имеем $k = 1$):

$$h \sim L^{-1/5}. \quad (5)$$

Тогда искомая вероятность того, что зазор свелся, вычисляется по формуле:

$$p = P\left\{ \max_{(x,y) \in D} G(x,y) < \varepsilon \right\} = P\{M < \varepsilon\} = \int_{\infty}^{\varepsilon} f_M(x) dx. \quad (6)$$

Теперь найдем ту точку в области D , в которой с наибольшей вероятностью зазор $G(x,y)$ будет иметь максимум. То есть найдем наиболее вероятное положение максимума зазора. Аналогично предыдущим рассуждениям, из реализаций поля получим набор реализаций двумерной случайной величины (X,Y) , соответствующей координатами максимума поля:

$$(x_i, y_i) = \arg \max_{(x,y) \in D} g_i(x,y) \quad i = 1, \dots, L. \quad (7)$$

По этим значениям можно получить оценку для двумерной плотности вероятности величины (X,Y) : Оценку плотности распределения этой случайной величины находим по (3.31) в виде:

$$f_{(X,Y)}(x,y) = \frac{1}{Lh^2} \sum_{i=1}^L K\left(\frac{x-x_i}{h}\right) K\left(\frac{y-y_i}{h}\right). \quad (8)$$

Здесь так же в качестве ядра берем оптимальное ядро Епанечникова, а оптимальный параметр сглаживания подбираем по (3.40) (здесь мы имеем $k = 2$):

$$h \sim L^{-1/6}. \quad (9)$$

Тогда наиболее вероятное положение максимума можно найти как моду распределения с этой плотностью:

$$(\bar{x}, \bar{y}) = \arg \max_{(x,y) \in D} f_{(X,Y)}(x,y). \quad (10)$$

Мы ищем эту точку (\bar{x}, \bar{y}) для того, чтобы затем поставить в этом месте крепеж, то есть прижать детали друг к другу именно в этом месте и за счет этого добиться уменьшения зазора. Однако следует учитывать, что по условиям задачи крепежи можно расставлять только в заранее определенные места H_k (уже просверленные дырки). Поэтому, после того как мы найдем наиболее вероятное положение максимума зазора (\bar{x}, \bar{y}) , крепеж будет устанавливаться в ближайшую к этой точке дырку.

Таким образом, предлагаемый нами алгоритм расстановки фиксирующих элементов состоит в следующем:

- Шаг 1. Известны параметры случайного поля, моделирующего зазор. Генерируется большой набор реализаций этого зазора. Этот набор величин зазора мы берем в качестве текущего зазора $G(x,y)$.
- Шаг 2. Обрабатывается полученный набор реализаций текущего зазора $G(x,y)$. По формуле (6) находится вероятность p того, что зазор сведется. Если эта вероятность имеет удовлетворительную величину (обычно $p \geq 0.9$), тогда алгоритм расстановки крепежей останавливается. Если необходимое значение вероятности еще не достигнуто, тогда по (10) находится наиболее вероятное положение максимума

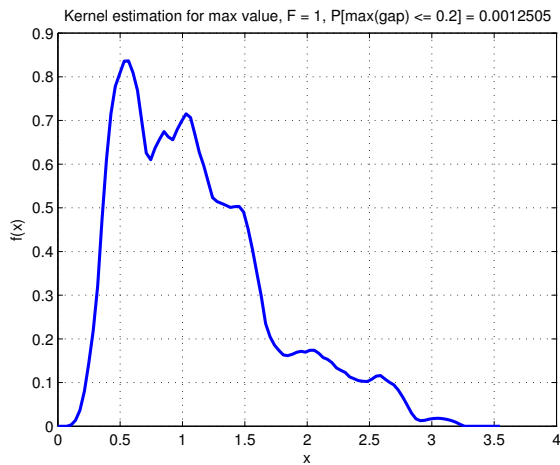
зазора и в ближайшую дырку устанавливается крепеж.

- Шаг 3. Для всего набора реализаций текущего зазора $G(x, y)$ решается контактная задача с учетом всех установленных крепежей. Набор изменившихся зазоров принимается как новый набор реализаций текущего зазора, после чего происходит возврат на Шаг 2.

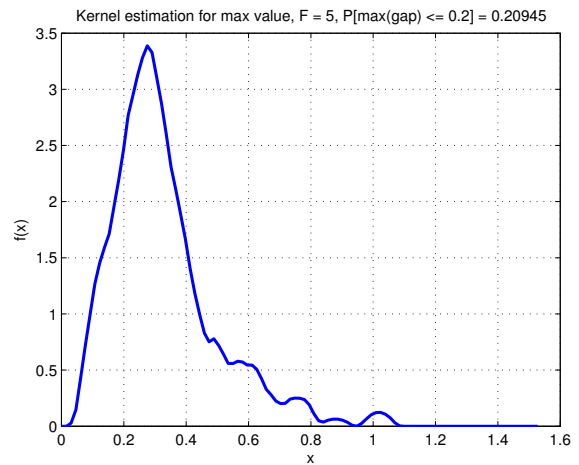
Описанный алгоритм заканчивает свою работу тогда, когда вероятность p того, что максимальная величина зазора меньше определенного заданного значения ε достаточно близка к единице. Это означает, что заданная цель достигнута, расстановка фиксирующих элементов получена. Результатом работы алгоритма является список позиций, в которых установлены фиксирующие элементы.

На Рис. 1 приведен пример, показывающий, как меняется функция плотности распределения значений максимума в зависимости от числа установленных крепежей. По графикам видно как с увеличением числа крепежей плотность распределения сдвигается к нулю, то есть величина максимума уменьшается.

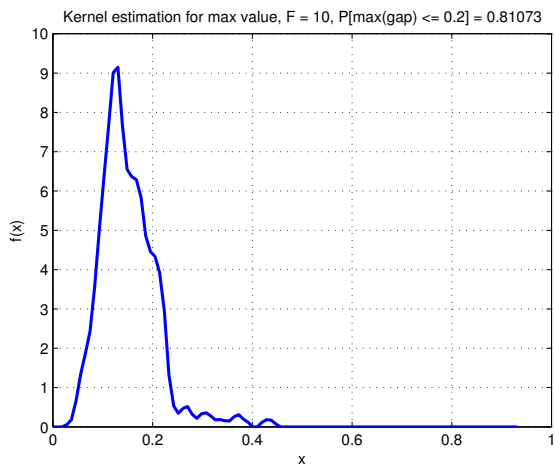
На Рис. 2 приведен пример, иллюстрирующий работу алгоритма. На этом графике нанесены полученные значения p в зависимости от того, сколько крепежей уже установлено. Видно, что алгоритм останавливается, когда вероятность p достигает заданного значения 98%.



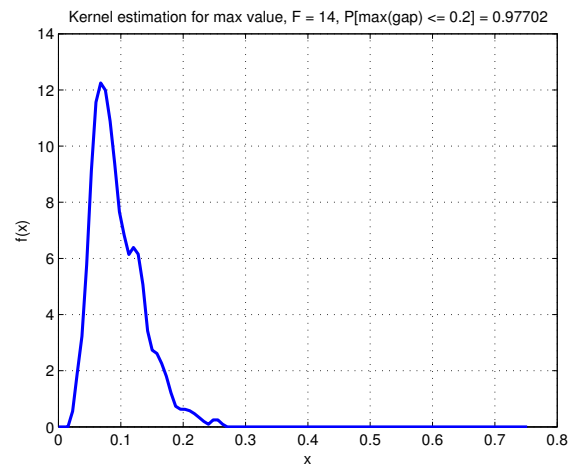
1 крепеж



5 крепежей



10 крепежей



14 крепежей

Рис. 1: Плотность распределения значений максимума в зависимости от числа установленных крепежей

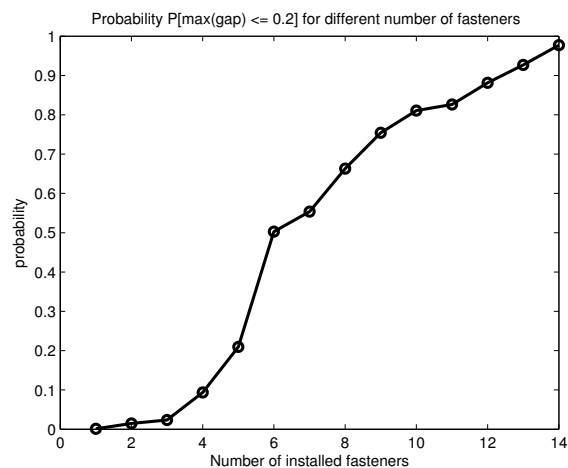


Рис. 2: Пример получаемых в процессе работы алгоритма вероятностей p в зависимости от количества установленных крепежей. Алгоритм остановился, когда эта вероятности достигла 98%