ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ
И
ПРОЦЕССЫ УПРАВЛЕНИЯ
№ 3, 2010
Электронный журнал,
рег. Эл № ФС77-39410 от 15.04.2010
ISSN 1817-2172

http://www.math.spbu.ru/user/diffjournal
http://www.neva.ru/journal
e-mail: jodiff@mail.ru

ПОВТОРНЫЕ СТОХАСТИЧЕСКИЕ ИНТЕГРАЛЫ ИТО И СТРАТОНОВИЧА И КРАТНЫЕ РЯДЫ ФУРЬЕ

Д.Ф.КУЗНЕЦОВ

Россия, 195251, Санкт-Петербург, ул. Политехническая, д.29
Санкт-Петербургский государственный политехнический университет
кафедра "Высшая математика"
e-mail: sde_kuznetsov@inbox.ru

Предисловие

Настоящая книга является первой монографией, в которой систематически решается проблема сильной (среднеквадратической) аппроксимации систем повторных стохастических интегралов Ито и Стратоновича в контексте численного интегрирования стохастических дифференциальных уравнений Ито.

В монографии впервые успешно применен аппарат кратных и повторных обобщенных рядов Фурье, сходящихся как в пространстве L_2, так и поточечно к сильной аппроксимации повторных стохастических интегралов. Ранее указанные средства в данной научной области не применялись.

Получен общий результат о разложении повторных стохастических интегралов Ито произвольной фиксированной кратности k, основанном на обобщенных кратных рядах Фурье, сходящихся в пространстве $L_2([t,T]^k)$. Данный результат адаптирован для повторных стохастических интегралов Стратоновича 1 – 3 кратности для случаев системы полиномов Лежандра и системы тригонометрических функций, а также для других типов повторных стохастических интегралов. Доказана теорема о разложении повторных стохастических интегралов Стратоновича произвольной фиксированной кратности k, основанном на обобщенных повторных рядах Фурье, сходящихся поточечно на отрезке $[t,T]$.

Получены точные выражения для среднеквадратических погрешностей аппроксимаций повторных стохастических интегралов Ито 1 – 4 кратностей.

Приведен большой практический материал о разложениях и аппроксимациях конкретных повторных стохастических интегралов Ито и Стратоновича 1 – 5 кратностей с применением системы полиномов Лежандра и системы тригонометрических функций.

Произведено сравнение разработанных в настоящей книге методов с существующими методами сильной аппроксимации повторных стохастических интегралов.

Монография отличается высокой степенью новизны представленного материала и открывает новое направление в изучении повторных стохастических интегралов Ито и Стратоновича.

Книга окажется интересной специалистам по теории случайных процессов, прикладной и вычислительной математике, студентам старших курсов и аспирантам технических вузов и университетов, программистам.

Основу данной книги составляют существенно дополненные и переработанные главы 5 и 6 монографии: *Кузнецов Д.Ф.* Стохастические дифференциальные уравнения: теория и практика численного решения. СПб.: Издательство Политехнического университета. 2010, 816 с. 4 издание.

Хорошо известно, что стохастические дифференциальные уравнения Ито являются адекватными математическими моделями динамических систем различной физической природы, находящихся под воздействием случайных возмущений. Математические модели на основе стохастических дифференциальных уравнений Ито или систем таких уравнений встречаются в финансах, медицине, геофизике, электротехнике, сейсмологии, химической кинетике и других областях [7] – [21].

Этим обстоятельством обуславливается важность проблемы численного решения стохастических дифференциальных уравнений Ито.

Хорошо известно, что одним из эффективных и перспективных подходов к численному интегрированию стохастических дифференциальных уравнений Ито, является подход, основанный на стохастических аналогах формулы Тейлора для решений данных уравнений [24], [25], [48]. Этот подход использует конечную дискретизацию временно́й переменной и осуществляет численное моделирование решения стохастического дифференциального уравнения Ито в дискретные моменты времени с помощью стохастических аналогов формулы Тейлора.

Важнейшей отличительной особенностью стохастических аналогов формулы Тейлора для решений стохастических дифференциальных уравнений Ито является присутствие в них, так называемых, повторных стохастических интегралов в форме Ито или Стратоновича, которые являются функционалами сложной структуры относительно компонент векторного винеровского процесса. Именно эти повторные стохастические интегралы составляют предмет исследования в настоящей книге.

В одной из наиболее общих форм записи в данной монографии указанные повторные стохастические интегралы в Ито и Стратоновича соответственно определяются следующими формулами:

$$J[\psi^{(k)}]_{T,t} = \int\limits_t^T \psi_k(t_k) \ldots \int\limits_t^{t_2} \psi_1(t_1) d\mathbf{w}_{t_1}^{(i_1)} \ldots d\mathbf{w}_{t_k}^{(i_k)} \ \text{(интегралы Ито)},$$

$$J^*[\psi^{(k)}]_{T,t} = \int\limits_t^{*T} \psi_k(t_k) \ldots \int\limits_t^{*t_2} \psi_1(t_1) d\mathbf{w}_{t_1}^{(i_1)} \ldots d\mathbf{w}_{t_k}^{(i_k)} \text{ (интегралы Стратоновича)},$$

где $\psi_l(\tau);\ l = 1, \ldots, k$ — непрерывные на промежутке $[t, T]$ функции (как правило в приложениях они тождественно равны 1 или имеют полиномиальный вид; $\mathbf{w}_\tau$ — случайный вектор с $m+1$ компонентой: $\mathbf{w}_\tau^{(i)} = \mathbf{f}_\tau^{(i)}$ при $i = 1, \ldots, m$ и $\mathbf{w}_\tau^{(0)} = \tau$; величины $i_1, \ldots, i_k$ принимают значения $0,\ 1, \ldots, m$; $\mathbf{f}_\tau^{(i)};\ i = 1, \ldots, m$ — независимые стандартные винеровские процессы.

Приведенные повторные стохастические интегралы являются довольно специфическими объектами теории случайных процессов. С одной стороны, неслучайность весовых функций $\psi_l(\tau);\ l = 1, \ldots, k$ является упрощающим их структуру фактором. С другой стороны, векторность винеровского процесса $\mathbf{f}_\tau$ с независимыми компонентами $\mathbf{f}_\tau^{(i)};\ i = 1, \ldots, m$, а также то, что функции $\psi_l(\tau);\ l = 1, \ldots, k$, вообще говоря, различны при различных $l;\ l = 1, \ldots, k$, являются существенными усложняющими структуру повторных стохастических интегралов факторами.

Ввиду сказанного выше, системы повторных стохастических интегралов Ито и Стратоновича играют исключительно важную и, пожалуй, ключевую роль при решении проблемы численного интегрирования стохастических дифференциальных уравнений Ито.

Кратко отметим, что существуют два основных критерия сходимости численных методов для стохастических дифференциальных уравнений Ито: сильный или среднеквадратический критерий и слабый критерий, в котором аппроксимируется не само решение стохастического дифференциального уравнения Ито, упрощенно говоря, распределение решения стохастического дифференциального уравнения Ито.

Оба упомянутых критерия являются самостоятельными, т.е. в общем случае нельзя утверждать, что из выполнения сильного критерия следует выполнение слабого критерия и наоборот.

Каждый из двух критериев сходимости ориентирован на решение специфических классов математических задач, связанных со стохастическими дифференциальными уравнениями.

С помощью сильных численных методов можно качественно численно строить выборочные траектории решения стохастического дифференциального уравнения Ито. Эти методы требуют совместной среднеквадратической аппроксимации совокупностей повторных стохастических интегралов Ито и Стратоновича. Эффективное решение данной задачи и составляет предмет настоящей монографии.

Сильные численные методы применяются при построении новых математических моделей на основе стохастических дифференциальных уравнений Ито, численном решении задачи фильтрации сигнала на фоне случайной помехи в различных постановках, задачи стохастического оптимального управления, задачи тестирования процедур оценивания параметров стохастических систем и ряда других задач.

Проблема эффективного совместного численного моделирования (исходя из среднеквадратического критерия сходимости) совокупностей повторных стохастических интегралов Ито и Стратоновича помимо своей важности является и исключительно сложной как с теоретической, так и с вычислительной точки зрения.

Казалось бы, повторные стохастические интегралы можно аппроксимировать повторными интегральными суммами. Однако, этот подход подразумевает дробление промежутка интегрирования повторных стохастических интегралов (он и без того является достаточно малой величиной, поскольку играет роль шага интегрирования в численных методах для стохастических дифференциальных уравнений), что ведет, как показывают численные эксперименты, к неприемлемо большим вычислительным затратам. Задача снижения указанных затрат в разы (а то и на порядки) оказалась весьма непростой и требующей новых нетривиальных исследований (исключение составляет лишь узкий частный случай, когда $i_1 = \ldots = i_k \neq 0$ и $\psi_1(s), \ldots, \psi_k(s) \equiv \psi(s)$. Изучение этого случая возможно с помощью формулы Ито.

В более общем случае, когда не все числа $i_1, \ldots, i_k$ совпадают между собой, отмеченная задача оказалась гораздо сложнее (она не может быть решена с помощью формулы Ито и требует более глубокого и сложного исследования). Заметим, что даже в случае упомянутого совпадения ($i_1 = \ldots = i_k \neq 0$), но при различных $\psi_1(s), \ldots, \psi_k(s)$ указанные трудности сохраняются и относительно несложные совокупности повторных стохастических интегралов Ито, которые часто встречаются в приложениях, не могут быть эффективно выражены в конечной форме (при среднеквадратической аппроксимации) через систему стандартных гауссовских случайных величин. Формула Ито также не "спасает" в этом случае, в результате приходится прибегать к сложным, но эффективным разложениям.

Почему же проблема эффективной совместной среднеквадратической аппроксимации совокупностей повторных стохастических интегралов Ито и Стратоновича столь сложна?

Во-первых, указанные стохастические интегралы при фиксированных пределах интегрирования являются случайными величинами, плотности распределения которых, в общем случае неизвестны. Даже знание этих плотностей распределения вряд ли принесло бы пользу для среднеквадратической аппроксимации повторных стохастических интегралов.

Во-вторых, требуется аппроксимировать не один стохастический интеграл, а совместно несколько различных стохастических интегралов, которые зависимы, в вероятностном смысле, сложным образом.

Довольно часто проблема совместной среднеквадратической аппроксимации совокупностей повторных стохастических интегралов Ито и Стратоновича возникает даже тогда, когда известно точное решение стохастического дифференциального уравнения. Это значит, что даже зная точно решение стохастического дифференциального уравнения далеко не всегда его можно смоделировать численно без привлечения совместного численного моделирования повторных стохастических интегралов.

Отметим, что для ряда специальных типов стохастических дифференциальных уравнений Ито проблема аппроксимации повторных стохастических интегралов несколько упрощается, но не решается. К таким типам уравнений относятся уравнения с аддитивным векторным шумом, скалярным неаддитивным шумом, скалярным аддитивным шумом, уравнения с малым параметром [26]. Для перечисленных типов уравнений упрощения связаны с тем, что либо некоторые коэффициентные функции из стохастических аналогов формулы Тейлора тождественно равны нулю, либо существенно влияет скалярность шума, либо за счет присутствия малого параметра можно пренебречь некоторыми членами из стохастических аналогов формулы Тейлора, которые содержат сложные для аппроксимации повторные стохастические интегралы.

Проблема совместного численного моделирования (исходя из среднеквадратического критерия сходимости) свокупностей повторных стохастических интегралов Ито и Стратоновича является, кроме всего прочего, весьма новой.

Одним из главных и неожиданных достижений данной книги является успешное применение методов функционального анализа (кратных и повторных рядов Фурье (сходящихся как в $L_2([t,T])$, так и поточечно) по различным системам базисных функций) в данной научной области.

Проблема совместного численного моделирования (исходя из среднеквадратического критерия сходимости) систем повторных стохастических интегралов Ито и Стратоновича изучалась, в контексте проблемы численного интегрирования стохастических дифференциальных уравнений Ито, в следующих монографиях:

[I] *Milstein G.N.* Numerical integration of stochastic differential equations. Kluwer, 1995, 228 p. (перевод с издания на русском языке, 1988);

[II] *Kloeden P.E., Platen E.* Numerical solution of stochastic differential equations. Berlin: Springer-Verlag, 1992. 632 p. (2nd edition 1995, 3rd edition 1999);

[III] *Milstein G.N., Tretyakov M.V.* Stochastic numerics for mathematical physics. Berlin: Springer-Verlag, 2004. 596 p.;

[IV] *Кузнецов Д.Ф.* Стохастические дифференциальные уравнения: теория и практика численного решения. СПб.: Издательство Политехнического университета, 2007. 777 с. (2 издание 2007, 3 издание 2009, 4 издание 2010).

В книгах [I] и [III] разобран вопрос о среднеквадратической аппроксимации только двух простейших повторных стохастических интегралов Ито первой и второй кратностей ($k = 1$ и 2; $\psi_1(s)$ и $\psi_2(s) \equiv 1$) для многомерного случая: $i_1,\ i_2 = 0,\ 1, \ldots, m$. При этом, основная идея основана на разложении, так называемого, процесса броуновского моста в ряд Фурье. Данный метод назван в [I] и [III] методом Фурье.

В [II] методом Фурье предпринята попытка среднеквадратической аппроксимации простейших повторных стохастических интегралов 1 – 3 ($k = 1, \ldots, 3$; $\psi_1(s), \ldots, \psi_3(s) \equiv 1$) для многомерного случая: $i_1, \ldots, i_3 = 0,\ 1, \ldots, m$. Однако, как мы увидим в главе 6, результаты из монографии [II], касающиеся среднеквадратической аппроксимации повторного стохастического интеграла 3 кратности, вызывают ряд критических замечаний.

Основной целью данной монографии является отыскание, обоснование и адаптация для приложений новых и более эффективных, чем в книгах [I] – [III], методов совместной среднеквадратической аппроксимации систем повторных стохастических интегралов Ито и Стратоновича.

Если говорить более подробно об истории решения проблемы совместной среднеквадратической аппроксимации совокупностей повторных стохастических интегралов, то оказалась полезной идея отыскания базисов случайных величин, с помощью которых можно представлять интересующие нас совокупности повторных стохастических интегралов. Эта идея претерпевала с течением времени ряд трансформаций.

Пожалуй до середины 80-х годов XX века осуществлялись попытки аппроксимировать повторные стохастические интегралы с помощью разного рода интегральных сумм, т.е. промежуток интегрирования стохастического интеграла разбивался на n частей и повторный стохастический интеграл приближенно представлялся повторной интегральной суммой, в которую входила система независимых стандартных гауссовских случайных величин, численное моделирование которой не является проблемой.

Однако, как уже отмечалось ранее, бросается в глаза то обстоятельство, что промежуток интегрирования повторных стохастических интегралов есть не что иное, как шаг интегрирования численного метода для стохастического дифференциального уравнения Ито, который и без дополнительного дробления уже является достаточно малой величиной. Численные эксперименты показывают, что такой подход ведет к резкому увеличению вычислительных затрат при росте кратности стохастических интегралов (начиная уже со 2 и 3 кратности), что необходимо для построения более точных численных методов для стохастических дифференциальных уравнений Ито или при уменьшении шага интегрирования численного метода и, в силу этих причин, не выдерживает критики.

Новый шаг в направлении решения проблемы совместной среднеквадратической аппроксимации повторных стохастических интегралов был сделан Г.Н.Мильштейном в монографии [I] ([24], 1988), который предложил использовать сходящиеся в среднеквадратическом смысле тригонометрические разложения Фурье для винеровских процессов, по которым вычисляется повторный стохастический интеграл. В [24] данным методом получены разложения в ряды из стандартных гауссовских случайных величин двух простейших стохастических интегралов 1 и 2 кратности и доказана их сходимость в среднеквадратическом смысле.

Как уже отмечалось, попытка развития этой идеи была предпринята в монографии [II] ([25], 1992), где были получены разложения простейших повторных стохастических интегралов 1–3 кратности. Однако, в силу ряда ограничений и технических трудностей, присущих методу [24], в [25] и последующих публикациях, рассматриваемая проблема дальнейшего решения не получила. Кроме того, у автора вызывает обоснованное сомнение трактовка в [II] способа суммирования рядов, относящихся к интегралам 3 кратности (см. разд. 6.1.4).

Важно отметить, что метод [24] в разы, а то и на порядки, превзошел метод интегральных сумм по вычислительным затратам в смысле их уменьшения.

Несмотря на позитивные черты метода [24], наметился и ряд его ограничений: отсутствие явной формулы для вычисления коэффициентов разложения повторного стохастического интеграла; практическая невозможность точного вычисления среднеквадратической погрешности аппроксимации стохастических интегралов, за исключением простейших интегралов 1 и 2 кратности (в результате приходится учитывать избыточные члены разложения, что ведет к росту вычислительных затрат и усложнению численных методов для стохастических дифференциальных уравнений Ито); существует жесткое ограничение на систему базисных функций при аппроксимации — это могут быть только тригонометрические функции; имеются некоторые проблемы технического характера при использовании данного метода применительно к стохастическим интегралам кратности выше второй (см. разд. 6.1.4).

Следует отметить, что рассматриваемый метод является определенным шагом в данной научной области.

Прорывом, на взгляд автора, на пути решения проблемы совместной среднеквадратической аппроксимации повторных стохастических интегралов является предложенный им в главе 1 метод (далее метод, основанный на кратных рядах Фурье).

Идея данного метода состоит в следующем: повторный стохастический интеграл Ито произвольной фиксированной кратности k представляется в виде кратного стохастического интеграла от определенной неслучайной разрывной функции k переменных, определенной на гиперкубе $[t,T]^k$, где $[t,T]$ — промежуток интегрирования повторного стохастического интеграла Ито. Далее указанная неслучайная функция разлагается в гиперкубе в обобщенный кратный ряд Фурье, сходящийся в среднем в пространстве $L_2([t,T]^k)$. После ряда весьма нетривиальных преобразований приходим (теорема 1) к сходящемуся в среднеквадратическом смысле разложению повторного стохастического интеграла Ито в кратный ряд из произведений стандартных гауссовских случайных величин. Коэффициентами данного ряда являются коэффициенты обобщенного кратного ряда Фурье для указанной неслучайной функции нескольких переменных, которые вычисляются по явной формуле независимо от кратности k повторного стохастического интеграла Ито.

В результате мы получаем следующие новые возможности и преимущества по сравнению с методом Фурье из [24]:

1. Имеется явная формула для вычисления коэффициентов разложения повторного стохастического интеграла Ито произвольной кратности k. Иными словами мы можем вычислить (без какой-либо подготовительной и дополнительной работы) коэффициент разложения с любым фиксированным номером в разложении повторного стохастического интеграла Ито заданной фиксированной кратности. При этом нам не потребуется знаний о коэффициентах с другими номерами или о других повторных стохастических интегралах Ито, входящих в рассматриваемую совокупность.

2. Открываются новые возможности для точного вычисления среднеквадратической погрешности аппроксимации повторных стохастических интегралов. Эти возможности реализуются точными формулами (см. главу 4) для среднеквадратических погрешностей аппроксимаций повторных стохастических интегралов Ито. В результате не потребуется учитывать избыточные члены разложения, что усложнило бы аппроксимации повторных стохастических интегралов.

3. Поскольку используемый кратный ряд Фурье является обобщенным в том смысле, что он строится с использованием различных полных ортонормированных систем функций в пространстве $L_2([t,T])$, то появляются новые возможности для аппроксимации — можно использовать не только тригонометрические функции, как в [24], но и полиномы Лежандра, а также системы функций Хаара и Радемахера–Уолша (см. главы 2 и 5).

4. Как оказалось (см. главу 5), работать при построении аппроксимаций повторных стохастических интегралов, удобнее с полиномами Лежандра — достаточно просто вычислять коэффициенты кратного ряда Фурье, да и сами аппроксимации оказываются гораздо проще, чем для случая системы тригонометрических функций. Для систем функций Хаара и Радемахера–Уолша разложения повторных стохастических интегралов получаются пожалуй чересчур сложными и неэффективными для практики (см. главу 2).

5. Вопрос о том, какая же система функций полиномиальная или тригонометрическая удобнее с точки зрения вычислительных затрат на аппроксимацию повторных стохастических интегралов оказался нетривиальным, поскольку требуется сравнивать аппроксимации не одного стохастического интеграла, а нескольких стохастических интегралов одновременно.

При этом может случиться так, что для одних интегралов вычислительные затраты окажутся меньше для системы полиномов Лежандра, а для других — для системы тригонометрических функций.

Автор (см. нижние строки таблиц 6.2 и 6.3) считает, что вычислительные затраты в 3 раза меньше для системы полиномов Лежандра по крайней мере при аппроксимации специальной совокупности повторных стохастических интегралов 1–3 кратности. Кроме того, автор полагает, что данный эффект будет еще более выразительным при рассмотрении более сложных совокупностей повторных стохастических интегралов, что объясняется тем, что полиномиальная система функций имеет существенное преимущество перед тригонометрической системой функций при аппроксимации повторных стохастических интегралов, у которых не все весовые функции тождественно равны 1 (ср. формулы (5.3), (5.4), (5.6), (5.7) с формулами (5.42), (5.47), (5.46), (5.45) соответственно).

6. Метод Г.Н. Мильштейна приводит к повторным рядам (в противоположность кратным рядам из теоремы 1 в данной книге) начиная по меньшей мере с третьей кратности повторного стохастического интеграла (здесь имеется ввиду не менее чем трехкратное интегрирование по винеровским процессам). Кратные ряды гораздо более предпочтительны с точки зрения аппроксимации, чем повторные, поскольку, частичные суммы кратных рядов сходятся при любом способе одновременного стремления к бесконечности их верхних пределов суммирования (обозначим их $p_1, \ldots, p_k$). В частности, в наиболее простом и удобном для практики случае при $p_1 = \ldots = p_k = p \to \infty$. Для повторных рядов это очевидно не так. Однако, в [II] авторы, тем не менее, не вполне обоснованно используют в рамках метода Г.Н. Мильштейна именно условие $p_1 = p_2 = p_3 = p \to \infty$.

7. Доказана сходимость (см. главы 1 и 5) в среднем степени $2n$, $n \in N$ аппроксимаций из теоремы 1 и с вероятностью 1 для некоторых из этих аппроксимаций.

Коснемся содержания настоящей монографии по главам.

В главе 1 рассматриваются разложения повторных стохастических интегралов Ито. Сформулирован и доказан (теоремы 1 и 2) новый метод разложения повторных стохастических интегралов Ито, основанный на обобщенных кратных рядах Фурье и сходящийся в среднеквадратическом смысле. Данный метод обобщен для случая разрывных полных ортонормированных систем функций в пространстве $L_2([t, T])$. На примере повторных стохастических интегралов Ито 2 и 3 кратности показано, что разложения из теорем 1 и 2 совпадают для частного случая: $\psi_1(s) = \psi_2(s) = \psi_3(s)$; $i_1 = i_2 = i_3 = 1, \ldots, m$ с известными представлениями повторных стохастических интегралов, основанных на многочленах Эрмита. Доказана сходимость в среднем степени $2n$, $n \in N$ разложений из теорем 1 и 2.

Глава 2 посвящена разложениям повторных стохастических интегралов Стратоновича. В первой части данной главы результаты теорем 1 и 2 адаптируются для разложений повторных стохастических интегралов Стратоновича. Доказана теорема (теорема 3) о разложении повторных стохастических интегралов Стратоновича 2 кратности для случая непрерывно дифференцируемых функций $\psi_1(s)$ и $\psi_2(s)$ $(i_1, i_2 = 1, \ldots, m)$. Получены аналогичные разложения для повторных стохастических интегралов Стратоновича 3 кратности для случаев системы полиномов Лежандра и системы тригонометрических функций при $\psi_1(s), \psi_2(s), \psi_3(s) \equiv 1$ $(i_1, i_2, i_3 = 1, \ldots, m)$. Даны обобщения этих результатов (теорема 4) для системы полиномов Лежандра и биномиальных функций $\psi_j(s) \equiv (t-s)^{l_j}$ $(j = 1,\ 2,\ 3)$ в следующих случаях:

1. $i_1 \neq i_2,\ i_2 \neq i_3,\ i_1 \neq i_3$ и $l_1,\ l_2,\ l_3 = 0,\ 1,\ 2, \ldots$;
2. $i_1 = i_2 \neq i_3$; $l_1 = l_2 \neq l_3$ и $l_1,\ l_2,\ l_3 = 0,\ 1,\ 2, \ldots$;
3. $i_1 \neq i_2 = i_3$; $l_1 \neq l_2 = l_3$ и $l_1,\ l_2,\ l_3 = 0,\ 1,\ 2, \ldots$;
4. $i_1, i_2, i_3 = 1, \ldots, m$; $l_1 = l_2 = l_3 = l$ и $l = 0,\ 1,\ 2, \ldots$.

Во второй части главы 2 рассматривается другой подход к разложению повторных стохастических интегралов Стратоновича произвольной кратности k, основанный на обобщенных повторных рядах Фурье, сходящихся поточечно. Подробно рассмотрены случаи $k = 1,\ 2,\ 3$ и дано обобщение на случай произвольного k (теорема 5).

В 3 главе рассматриваются версии теоремы 1 для других типов повторных стохастических интегралов. Сформулированы и доказаны аналоги теоремы 1 для повторных стохастических интегралов по мартингальным пуассоновским мерам (теорема 7) и для повторных стохастических интегралов по мартингалам (теорема 8).

Глава 4 посвящена получению точных выражений для среднеквадратических погрешностей аппроксимаций повторных стохастических интегралов Ито, полученных с помощью теоремы 1. Изучен случай произвольного k и попарно различных $i_1, \ldots, i_k = 1, \ldots, m$, а также случаи $k = 1,\ 2,\ 3,\ 4$ и произвольных $i_1, \ldots, i_k = 1, \ldots, m$. Здесь k — кратность повторного стохастического интеграла Ито.

В главе 5 приводится большой практический материал, основанный на результатах глав 1, 2. Получены аппроксимации конкретных повторных стохастических интегралов Ито и Стратоновича кратностей 1 – 5 с помощью теорем 1 – 4 и системы полиномов Лежандра. Для случая тригонометрической системы функций с помощью теоремы 1 и результатов главы 2 получены аппроксимации конкретных повторных стохастических интегралов Ито и Стратоновича кратностей 1 – 3. Выведено большое количество точных выражений для среднеквадратических погрешностей построенных аппроксимаций.

Глава 6 посвящена обзору других методов среднеквадратической аппроксимации повторных стохастических интегралов Ито и Стратоновича. Рассмотрен метод Г.Н.Мильштейна и дано его сравнение с методом, основанным на теореме 1. Рассмотрены комбинированный метод и метод интегральных сумм среднеквадратической апроксимации повторных стохастических интегралов. Приведены представления повторных стохастических интегралов Ито, основанные на многочленах Эрмита и их аналоги для повторных стохастических интегралов Стратоновича.

В главе 7 собран справочный материал, который поможет при чтении книги. Даны понятия стохастических интегралов Ито и Стратоновича, формулы Ито, стохастического дифференциального уравнения Ито, стохастических интегралов по пуассоновским случайным мерам и по мартингалам, различных вариантов разложений Тейлора-Ито и Тейлора-Стратоновича для решения стохастического дифференциального уравнения Ито.

Оглавление

Глава 1

Разложения повторных стохастических интегралов Ито, основанные на обобщенных кратных рядах Фурье, сходящихся в среднем

1.1 Введение

Результаты данной главы во многом являются основополагающими для последующих глав настоящей монографии и, пожалуй, для книги в целом. Впервые применен мощный аппарат обобщенных кратных рядов Фурье, сходящихся в среднем, к получению разложений стохастических интегралов.

Идея представления повторных стохастических интегралов Ито и Стратоновича в виде кратных стохастических интегралов от определенных неслучайных функций нескольких переменных и последующего разложения данных функций с помощью рядов Фурье с целью получения эффективных среднеквадратических аппроксимаций указанных стохастических интегралов нашла свое отражение в ряде работ автора. В частности, впервые данный подход появился в [50] (1994). В данной работе отмеченная идея формулируется скорее на уровне догадки (без удовлетворительного обоснования) и как следствие работа [50] содержит весьма размытые формулировки и ряд неверных выводов. Тем не менее уже в [50] можно найти, например, формулы (4.3), (4.21), (4.22). Отметим, что в [50] использовались кратные ряды Фурье по тригонометрической системе функций, сходящиеся в среднем. Следует также заметить, что результаты работы [50] верны для достаточно узкого частного случая, когда числа $i_1, \ldots, i_k$ попарно различны; $i_1, \ldots, i_k = 1, \ldots, m$ (см. формулу (1.1)).

Применение рядов Фурье по системе полиномов Лежандра к аппроксимации повторных стохастических интегралов впервые осуществлено в [33] (1998), [35], [36], [38] (1999), а также в [37] (2000). В частности, в этих работах можно найти формулы (5.2) – (5.7), (5.17).

Отметим, что подход из работы [50] в окончательном варианте был сформулирован, обоснован и обобщен автором в [43] (2006) (теорема 1 в настоящей книге).

Весьма интересным и непростым оказался вопрос о том, какие же стохастические интегралы (Ито или Стратоновича) являются более подходящими для разложений в рамках отмеченного направления исследований.

С одной стороны теорема 1 убедительно демонстрирует, что структура повторных стохастических интегралов Ито является, независимо от кратности стохастического интеграла, достаточно удобной для разложений в кратные ряды по системе стандартных гауссовских случайных величин.

С другой стороны результаты главы 2 убедительно свидетельствуют о том, что существует несомненная взаимосвязь множителя $\frac{1}{2}$, присущего стохастическому интегралу Стратоновича и входящего в слагаемое, связывающее стохастические интегралы Стратоновича и Ито, и того факта, что в точке конечного разрыва кусочно-гладкой функции $f(x)$ ее ряд Фурье сходится к величине $\frac{1}{2}(f(x-0)+f(x+0))$. Более того, как показано в главе 2, окончательные формулы для разложений повторных стохастических интегралов Стратоновича (второй кратности в общем случае и третьей кратности в ряде частных случаев) оказываются более компактными, чем их аналоги для стохастических интегралов Ито. Интересным также представляется разложение повторных стохастических интегралов Стратоновича произвольной кратности, основанное на повторных рядах Фурье и полученное в главе 2 [36].

И все же, оценивая в целом результаты глав 1 и 2 данной монографии, автор придерживается суждения о том, что структура повторных стохастических интегралов Ито является более подходящей для разложения в кратные ряды по системе стандартных гауссовских случайных величин.

Действительно, при доказательстве теоремы 1 для случая произвольной кратности стохастического интеграла Ито использовались кратные ряды Фурье, сходящиеся в среднем. Доказательство же теорем 3 и 4 для повторных стохастических интегралов Стратоновича 2 и 3 кратности помимо непосредственно результатов теоремы 1 потребовало дополнительного использования теории кратных и повторных рядов Фурье, сходящихся поточечно, что повлекло за собой гораздо более сложные, чем при доказательстве теоремы 1, исследования, которые тем не менее не привели к общим результатам (изучены случаи повторных стохастических интегралов Стратоновича 2 и 3 кратности, причем результаты, относящиеся к интегралам 3 кратности носят частный характер, хотя и имеют существенное значение для практики).

Разложения повторных стохастических интегралов Стратоновича произвольной кратности, полученное в конце главы 2, является интересным, однако включает в себя повторные ряды, аппроксимация которых существенно менее удобна, чем аппроксимация кратных рядов.

1.2 Теорема о разложении повторных стохастических интегралов Ито произвольной кратности k

В данном разделе получим разложение повторных стохастических интегралов Ито произвольной кратности, основанное на сходящихся в среднем обобщенных кратных рядах Фурье.

Введем в рассмотрение следующие повторные стохастические интегралы Ито и Стратоновича:

$$J[\psi^{(k)}]_{T,t} = \int\limits_t^T \psi_k(t_k) \ldots \int\limits_t^{t_2} \psi_1(t_1) d\mathbf{w}_{t_1}^{(i_1)} \ldots d\mathbf{w}_{t_k}^{(i_k)}, \tag{1.1}$$

$$J^*[\psi^{(k)}]_{T,t} = \int\limits_t^{*T} \psi_k(t_k) \ldots \int\limits_t^{*t_2} \psi_1(t_1) d\mathbf{w}_{t_1}^{(i_1)} \ldots d\mathbf{w}_{t_k}^{(i_k)}, \tag{1.2}$$

где $\psi_l(\tau);\ l = 1, \ldots, k$ — непрерывные на промежутке $[t, T]$ функции; $\mathbf{w}_t^{(i)} = \mathbf{f}_t^{(i)}$ при $i = 1, \ldots, m$; $\mathbf{w}_t^{(0)} = t$; $i_1, \ldots, i_k = 0,\ 1, \ldots, m$; $\mathbf{f}_\tau^{(i)}$ $(i = 1, \ldots, m)$ — независимые стандартные винеровские процессы.

Проблема совместного численного моделирования (исходя из среднеквадратического критерия сходимости) совокупностей повторных стохастических интегралов Ито, как уже отмечалось, помимо своей важности является и исключительно сложной как с теоретической, так и с вычислительной точки зрения. Исключение составляет лишь узкий частный случай, когда $i_1 = \ldots = i_k \neq 0$ и $\psi_1(s), \ldots, \psi_k(s) \equiv \psi(s)$ (см. данную главу и главу 6). Изучение этого случая возможно с помощью формулы Ито.

Данная проблема, как мы увидим в настоящей главе, не может быть решена с помощью формулы Ито и требует более глубокого и сложного исследования для случая, когда не все числа $i_1, \ldots, i_k$ совпадают между собой. Напомним, что даже в случае такого совпадения $(i_1 = \ldots = i_k \neq 0)$, но при различных $\psi_1(s), \ldots, \psi_k(s)$ указанная проблема сохраняется и относительно несложные совокупности повторных стохастических интегралов Ито, которые часто встречаются в приложениях, не могут быть эффективно выражены в конечной форме (при среднеквадратической аппроксимации) через систему стандартных гауссовских случайных величин. Формула Ито оказывается бесполезной в этом случае, в результате приходится прибегать к сложным, но эффективным разложениям.

Пусть $\{\phi_j(x)\}_{j=0}^{\infty}$ — полная ортонормированная система функций в пространстве $L_2([t,T])$, а $\psi_1(\tau), \ldots, \psi_k(\tau)$ — непрерывные на промежутке $[t,T]$ функции.

Введем в рассмотрение следующую функцию

$$K(t_1, \ldots, t_k) = \begin{cases} \psi_1(t_1) \ldots \psi_k(t_k), \ t_1 < \ldots < t_k \\ 0, \ \text{иначе} \end{cases}; \ t_1, \ldots, t_k \in [t,T].$$

Функция $K(t_1, \ldots, t_k)$ кусочно-непрерывна в гиперкубе $[t,T]^k$, т.е. гиперкуб можно разрезать на конечное число частей с помощью кусочно гладких поверхностей так, что на каждой части функция $K(t_1, \ldots, t_k)$ непрерывна и имеет пределы на границе части, а вдоль разрезов она может иметь разрывы.

В этой ситуации известно, что кратный ряд Фурье функции $K(t_1, \ldots, t_k) \in L_2([t,T]^k)$ в гиперкубе сходится в смысле среднего квадратического, т.е.:

$$\lim_{p_1, \ldots, p_k \to \infty} \left\| K(t_1, \ldots, t_k) - \sum_{j_1=0}^{p_1} \ldots \sum_{j_k=0}^{p_k} C_{j_k \ldots j_1} \prod_{l=1}^{k} \phi_{j_l}(t_l) \right\| = 0, \qquad (1.3)$$

где $\|f\| = \left(\int\limits_{[t,T]^k} f^2(t_1, \ldots, t_k) dt_1 \ldots dt_k \right)^{\frac{1}{2}}$ и имеет место равенство Парсеваля:

$$\int\limits_{[t,T]^k} K^2(t_1, \ldots, t_k) dt_1 \ldots dt_k = \lim_{p_1, \ldots, p_k \to \infty} \sum_{j_1=0}^{p_1} \ldots \sum_{j_k=0}^{p_k} C_{j_k \ldots j_1}^2. \qquad (1.4)$$

Сформулируем основную теорему.

Теорема 1. *Пусть выполнены следующие условия:*

1. $\psi_i(\tau);\ i = 1,\ 2, \ldots, k$ — *непрерывные на промежутке* $[t,T]$ *функции.*

2. $\{\phi_j(x)\}_{j=0}^{\infty}$ *— полная ортонормированная система непрерывных функций в пространстве* $L_2([t,T])$.

Тогда повторный стохастический интеграл Ито $J[\psi^{(k)}]_{T,t}$ *разлагается в сходящийся в среднеквадратическом смысле кратный ряд*

$$J[\psi^{(k)}]_{T,t} = \underset{p_1,\ldots,p_k\to\infty}{\text{l.i.m.}} \sum_{j_1=0}^{p_1}\ldots\sum_{j_k=0}^{p_k} C_{j_k\ldots j_1}\Biggl(\prod_{l=1}^{k}\zeta_{j_l}^{(i_l)} -$$

$$-\underset{N\to\infty}{\text{l.i.m.}} \sum_{(l_1,\ldots,l_k)\in\mathcal{G}_k} \phi_{j_{l_1}}(\tau_{l_1})\Delta\mathbf{w}_{\tau_{l_1}}^{(i_1)}\ldots\phi_{j_{l_k}}(\tau_{l_k})\Delta\mathbf{w}_{\tau_{l_k}}^{(i_k)}\Biggr), \qquad (1.5)$$

где $\mathcal{G}_k = \mathcal{H}_k\backslash\mathcal{L}_k$; $\mathcal{H}_k = \{(l_1,\ldots,l_k):\ l_1,\ldots,l_k = 0,\ 1,\ldots,N-1\}$,

$$\mathcal{L}_k = \Bigl\{(l_1,\ldots,l_k):\ l_1,\ldots,l_k = 0,\ 1,\ldots,N-1;$$
$$l_g\neq l_r (g\neq r);\ g,r = 1,\ldots,k\Bigr\};$$

$\zeta_{(j_l)T,t}^{(i_l)} = \int\limits_t^T \phi_{j_l}(s)d\mathbf{w}_s^{(i_l)}$ *— независимые стандартные гауссовские случайные величины при различных* i_l *или* j_l *(если* $i_l\neq 0$*)*;

$$C_{j_k\ldots j_1} = \int\limits_{[t,T]^k} K(t_1,\ldots,t_k)\prod_{l=1}^{k}\phi_{j_l}(t_l)dt_1\ldots dt_k; \qquad (1.6)$$

$$K(t_1,\ldots,t_k) = \begin{cases}\psi_1(t_1)\ldots\psi_k(t_k),\ t_1<\ldots<t_k\\ 0,\ \text{иначе}\end{cases};\ t_1,\ldots,t_k\in[t,T].$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. В начале докажем вспомогательные леммы.

Рассмотрим разбиение $\{\tau_j\}_{j=0}^{N}$ промежутка $[t,T]$ такое, что

$$t=\tau_0<\ldots<\tau_N=T,\ \Delta_N = \max_{0\le j\le N-1}\Delta\tau_j\to 0 \text{ при } N\to\infty, \qquad (1.7)$$

где $\Delta\tau_j = \tau_{j+1}-\tau_j$.

Лемма 1. *Пусть выполнено условие* 1 *теоремы* 1. *Тогда*

$$J[\psi^{(k)}]_{T,t} = \underset{N\to\infty}{\text{l.i.m.}}\sum_{j_k=0}^{N-1}\ldots\sum_{j_1=0}^{j_2-1}\prod_{l=1}^{k}\psi_l(\tau_{j_l})\Delta\mathbf{w}_{\tau_{j_l}}^{(i_l)}\ \textit{с. в. } 1, \qquad (1.8)$$

где $\Delta\mathbf{w}_{\tau_{j_l}}^{(i_l)} = \mathbf{w}_{\tau_{j_l+1}}^{(i_l)} - \mathbf{w}_{\tau_{j_l}}^{(i_l)}$; $i_l = 0,\ 1,\ldots,m$; $\{\tau_{j_l}\}_{j_l=0}^{N-1}$ *— разбиение промежутка* $[t,T]$, *удовлетворяющее условию* (1.7); *здесь и далее "с в. 1" означает "с вероятностью 1".*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Нетрудно заметить, что используя свойство аддитивности стохастических интегралов, можно записать:

$$J[\psi^{(k)}]_{T,t}=\sum_{j_k=0}^{N-1}\ldots\sum_{j_1=0}^{j_2-1}\prod_{l=1}^{k}J[\psi_l]_{\tau_{j_l+1},\tau_{j_l}}+\varepsilon_N \text{ с в.1}, \tag{1.9}$$

где

$$\varepsilon_N=\sum_{j_k=0}^{N-1}\int\limits_{\tau_{j_k}}^{\tau_{j_k+1}}\psi_k(s)\int\limits_{\tau_{j_k}}^{s}\psi_{k-1}(\tau)J[\psi^{(k-2)}]_{\tau,t}d\mathbf{w}_\tau^{(i_{k-1})}d\mathbf{w}_s^{(i_k)}+$$

$$+\sum_{r=1}^{k-3}G[\psi_{k-r+1}^{(k)}]_N\times$$

$$\times\sum_{j_{k-r}=0}^{j_{k-r+1}-1}\int\limits_{\tau_{j_{k-r}}}^{\tau_{j_{k-r}+1}}\psi_{k-r}(s)\int\limits_{\tau_{j_{k-r}}}^{s}\psi_{k-r-1}(\tau)J[\psi^{(k-r-2)}]_{\tau,t}d\mathbf{w}_\tau^{(i_{k-r-1})}d\mathbf{w}_s^{(i_{k-r})}+$$

$$+G[\psi_3^{(k)}]_N\sum_{j_2=0}^{j_3-1}J[\psi^{(2)}]_{\tau_{j_2+1},\tau_{j_2}},$$

$$J[\psi_l]_{s,\theta}=\int\limits_{\theta}^{s}\psi_l(\tau)d\mathbf{w}_\tau^{(i_l)},$$

$$G[\psi_m^{(k)}]_N=\sum_{j_k=0}^{N-1}\sum_{j_{k-1}=0}^{j_k-1}\ldots\sum_{j_m=0}^{j_{m+1}-1}\prod_{l=m}^{k}J[\psi_l]_{\tau_{j_l+1},\tau_{j_l}},$$

$\psi_m^{(k)}\stackrel{\rm def}{=}(\psi_m,\psi_{m+1},\ldots,\psi_k)$; $\psi_1^{(k)}\stackrel{\rm def}{=}\psi^{(k)}=(\psi_1,\ldots,\psi_k)$.

Используя стандартные оценки (7.3) и (7.4) для моментов стохастических интегралов, получим

$$\underset{N\to\infty}{\text{l.i.m.}}\ \varepsilon_N=0. \tag{1.10}$$

Сравнивая (1.9) и (1.10) получаем

$$J[\psi^{(k)}]_{T,t}=\sum_{j_k=0}^{N-1}\ldots\sum_{j_1=0}^{j_2-1}\prod_{l=1}^{k}J[\psi_l]_{\tau_{j_l+1},\tau_{j_l}}\ \text{ с в.1}. \tag{1.11}$$

Перепишем $J[\psi_l]_{\tau_{j_l+1},\tau_{j_l}}$ в виде

$$J[\psi_l]_{\tau_{j_l+1},\tau_{j_l}}=\psi_l(\tau_{j_l})\Delta\mathbf{w}_{\tau_{j_l}}^{(i_l)}+\int\limits_{\tau_{j_l}}^{\tau_{j_l+1}}(\psi_l(\tau)-\psi_l(\tau_{j_l}))d\mathbf{w}_\tau^{(i_l)}$$

и подставим в (1.11). После этого нетрудно увидеть, что допредельное выражение в правой части (1.11) есть сумма допредельного выражения в правой части (1.8) и величины, которая стремится к нулю в среднеквадратическом смысле при $N \to \infty$.

Лемма доказана. $\square$

З а м е ч а н и е 1. *Результат леммы 1 может быть обобщен, т.е. функция $\psi_1(s)$ в (1.8) может быть заменена на случайный процесс ϕ_s из класса* $\mathrm{M}_2([0,T])$ (*см. разд.* 7.1)

З а м е ч а н и е 2. *Нетрудно видеть, что если $\Delta\mathbf{w}_{\tau_{j_l}}^{(i_l)}$ в (1.8) при некотором $l \in \{1,\ldots,k\}$ заменить на $\left(\Delta\mathbf{w}_{\tau_{j_l}}^{(i_l)}\right)^p$, $i_l \ne 0$, то в интеграле $J[\psi^{(k)}]_{T,t}$ дифференциал $d\mathbf{w}_{t_l}^{(i_l)}$ при $p = 2$ заменится на dt_l. Если же $p = 3,\ 4,\ldots,$ то правая часть (1.8) с вероятностью 1 обратится в ноль. Если $\Delta\mathbf{w}_{\tau_{j_l}}^{(i_l)}$ в (1.8) при некотором $l \in \{1,\ldots,k\}$ заменить на $(\Delta\tau_{j_l})^p$, $p = 2,\ 3,\ldots,$ то правая часть (1.8) с вероятностью 1 также обратится в ноль.*

Определим следующий стохастический интеграл:

$$\underset{N\to\infty}{\text{l.i.m.}} \sum_{j_1,\ldots,j_k=0}^{N-1} \Phi\left(\tau_{j_1},\ldots,\tau_{j_k}\right) \prod_{l=1}^{k} \Delta\mathbf{w}_{\tau_{j_l}}^{(i_l)} \stackrel{\text{def}}{=} J[\Phi]_{T,t}^{(k)}. \tag{1.12}$$

Пусть $D_k = \{(t_1,\ldots,t_k):\ \ t \le t_1 < \ldots < t_k \le T\}$. Будем писать $\Phi(t_1,\ldots,t_k) \in C(D_k)$, если $\Phi(t_1,\ldots,t_k)$ непрерывная в замкнутой области D_k неслучайная функция k переменных.

Рассмотрим повторный стохастический интеграл Ито вида

$$I[\Phi]_{T,t}^{(k)} \stackrel{\text{def}}{=} \int\limits_t^T \ldots \int\limits_t^{t_2} \Phi(t_1,\ldots,t_k) d\mathbf{w}_{t_1}^{(i_1)} \ldots d\mathbf{w}_{t_k}^{(i_k)},$$

где $\Phi(t_1,\ldots,t_k)$ — неслучайная функция k переменных.

Нетрудно проверить, что данный стохастический интеграл существует в среднеквадратическом смысле, если выполнено условие:

$$\int\limits_t^T \ldots \int\limits_t^{t_2} \Phi^2(t_1,\ldots,t_k) dt_1 \ldots dt_k < \infty.$$

Используя рассуждения, близкие к рассуждениям доказательства леммы 1, нетрудно показать, что при $\Phi(t_1,\ldots,t_k) \in C(D_k)$ выполняется равенство:

$$I[\Phi]_{T,t}^{(k)} \stackrel{\text{def}}{=} \int\limits_t^T \ldots \int\limits_t^{t_2} \Phi(t_1,\ldots,t_k) d\mathbf{w}_{t_1}^{(i_1)} \ldots d\mathbf{w}_{t_k}^{(i_k)} =$$

$$= \underset{N\to\infty}{\text{l.i.m.}} \sum_{j_k=0}^{N-1} \ldots \sum_{j_1=0}^{j_2-1} \Phi(\tau_{j_1}, \ldots, \tau_{j_k}) \prod_{l=1}^{k} \Delta \mathbf{w}_{\tau_{j_l}}^{(i_l)} \text{ с в.1.} \tag{1.13}$$

В качестве пояснения проверим справедливость равенства (1.13) при $k = 3$. Для определенности будем считать, что $i_1, i_2, i_3 = 1, \ldots, m$. Имеем

$$I[\Phi]_{T,t}^{(3)} \stackrel{\text{def}}{=} \int_t^T \int_t^{t_3} \int_t^{t_2} \Phi(t_1, t_2, t_3) d\mathbf{w}_{t_1}^{(i_1)} d\mathbf{w}_{t_2}^{(i_2)} d\mathbf{w}_{t_3}^{(i_3)} =$$

$$= \underset{N\to\infty}{\text{l.i.m.}} \sum_{j_3=0}^{N-1} \int_t^{\tau_{j_3}} \int_t^{t_2} \Phi(t_1, t_2, \tau_{j_3}) d\mathbf{w}_{t_1}^{(i_1)} d\mathbf{w}_{t_2}^{(i_2)} \Delta \mathbf{w}_{\tau_{j_3}}^{(i_3)} =$$

$$= \underset{N\to\infty}{\text{l.i.m.}} \sum_{j_3=0}^{N-1} \sum_{j_2=0}^{j_3-1} \int_{\tau_{j_2}}^{\tau_{j_2+1}} \int_t^{t_2} \Phi(t_1, t_2, \tau_{j_3}) d\mathbf{w}_{t_1}^{(i_1)} d\mathbf{w}_{t_2}^{(i_2)} \Delta \mathbf{w}_{\tau_{j_3}}^{(i_3)} =$$

$$= \underset{N\to\infty}{\text{l.i.m.}} \sum_{j_3=0}^{N-1} \sum_{j_2=0}^{j_3-1} \int_{\tau_{j_2}}^{\tau_{j_2+1}} \left(\int_t^{\tau_{j_2}} + \int_{\tau_{j_2}}^{t_2} \right) \Phi(t_1, t_2, \tau_{j_3}) d\mathbf{w}_{t_1}^{(i_1)} d\mathbf{w}_{t_2}^{(i_2)} \Delta \mathbf{w}_{\tau_{j_3}}^{(i_3)} =$$

$$= \underset{N\to\infty}{\text{l.i.m.}} \sum_{j_3=0}^{N-1} \sum_{j_2=0}^{j_3-1} \sum_{j_1=0}^{j_2-1} \int_{\tau_{j_2}}^{\tau_{j_2+1}} \int_{\tau_{j_1}}^{\tau_{j_1+1}} \Phi(t_1, t_2, \tau_{j_3}) d\mathbf{w}_{t_1}^{(i_1)} d\mathbf{w}_{t_2}^{(i_2)} \Delta \mathbf{w}_{\tau_{j_3}}^{(i_3)} +$$

$$+ \underset{N\to\infty}{\text{l.i.m.}} \sum_{j_3=0}^{N-1} \sum_{j_2=0}^{j_3-1} \int_{\tau_{j_2}}^{\tau_{j_2+1}} \int_{\tau_{j_2}}^{t_2} \Phi(t_1, t_2, \tau_{j_3}) d\mathbf{w}_{t_1}^{(i_1)} d\mathbf{w}_{t_2}^{(i_2)} \Delta \mathbf{w}_{\tau_{j_3}}^{(i_3)}. \tag{1.14}$$

Покажем, что второй предел в правой части (1.14) равен нулю. Действительно, второй момент его допредельного выражения равен

$$\sum_{j_3=0}^{N-1} \sum_{j_2=0}^{j_3-1} \int_{\tau_{j_2}}^{\tau_{j_2+1}} \int_{\tau_{j_2}}^{t_2} \Phi^2(t_1, t_2, \tau_{j_3}) dt_1 dt_2 \Delta\tau_{j_3} \le M^2 \sum_{j_3=0}^{N-1} \sum_{j_2=0}^{j_3-1} \frac{1}{2} \left(\Delta\tau_{j_2}\right)^2 \Delta\tau_{j_3} \to 0$$

при $N \to \infty$. Здесь M — постоянная, которая ограничивает модуль функции $\Phi(t_1, t_2, t_3)$ в силу ее непрерывности, а $\Delta\tau_j = \tau_{j+1} - \tau_j$.

С учетом полученных выводов имеем

$$I[\Phi]_{T,t}^{(3)} \stackrel{\text{def}}{=} \int_t^T \int_t^{t_3} \int_t^{t_2} \Phi(t_1, t_2, t_3) d\mathbf{w}_{t_1}^{(i_1)} d\mathbf{w}_{t_2}^{(i_2)} d\mathbf{w}_{t_3}^{(i_3)} =$$

$$= \underset{N\to\infty}{\text{l.i.m.}} \sum_{j_3=0}^{N-1} \sum_{j_2=0}^{j_3-1} \sum_{j_1=0}^{j_2-1} \int_{\tau_{j_2}}^{\tau_{j_2+1}} \int_{\tau_{j_1}}^{\tau_{j_1+1}} \Phi(t_1, t_2, \tau_{j_3}) d\mathbf{w}_{t_1}^{(i_1)} d\mathbf{w}_{t_2}^{(i_2)} \Delta \mathbf{w}_{\tau_{j_3}}^{(i_3)} =$$

$$= \underset{N\to\infty}{\text{l.i.m.}} \sum_{j_3=0}^{N-1} \sum_{j_2=0}^{j_3-1} \sum_{j_1=0}^{j_2-1} \int_{\tau_{j_2}}^{\tau_{j_2+1}} \int_{\tau_{j_1}}^{\tau_{j_1+1}} \left(\Phi(t_1, t_2, \tau_{j_3}) - \Phi(t_1, \tau_{j_2}, \tau_{j_3}) \right) \times$$

$$
\times d\mathbf{w}_{t_1}^{(i_1)} d\mathbf{w}_{t_2}^{(i_2)} \Delta\mathbf{w}_{\tau_{j_3}}^{(i_3)}
$$

$$
+\underset{N\to\infty}{\text{l.i.m.}} \sum_{j_3=0}^{N-1}\sum_{j_2=0}^{j_3-1}\sum_{j_1=0}^{j_2-1} \int\limits_{\tau_{j_2}}^{\tau_{j_2+1}} \int\limits_{\tau_{j_1}}^{\tau_{j_1+1}} \left(\Phi(t_1,\tau_{j_2},\tau_{j_3}) - \Phi(\tau_{j_1},\tau_{j_2},\tau_{j_3})\right) \times
$$

$$
\times d\mathbf{w}_{t_1}^{(i_1)} d\mathbf{w}_{t_2}^{(i_2)} \Delta\mathbf{w}_{\tau_{j_3}}^{(i_3)}
$$

$$
+\underset{N\to\infty}{\text{l.i.m.}} \sum_{j_3=0}^{N-1}\sum_{j_2=0}^{j_3-1}\sum_{j_1=0}^{j_2-1} \Phi(\tau_{j_1},\tau_{j_2},\tau_{j_3}) \Delta\mathbf{w}_{\tau_{j_1}}^{(i_1)} \Delta\mathbf{w}_{\tau_{j_2}}^{(i_2)} \Delta\mathbf{w}_{\tau_{j_3}}^{(i_3)}. \qquad (1.15)
$$

Для получения желаемого результата остается показать, что первые два предела в правой части (1.15) равны нулю. Докажем, что равен нулю первый из них (для второго предела доказательство аналогичное).

Второй момент допредельного выражения первого предела в правой части (1.15) равен следующему выражению:

$$
\sum_{j_3=0}^{N-1}\sum_{j_2=0}^{j_3-1}\sum_{j_1=0}^{j_2-1} \int\limits_{\tau_{j_2}}^{\tau_{j_2+1}} \int\limits_{\tau_{j_1}}^{\tau_{j_1+1}} \left(\Phi(t_1,t_2,\tau_{j_3}) - \Phi(t_1,\tau_{j_2},\tau_{j_3})\right)^2 dt_1 dt_2 \Delta\tau_{j_3}. \qquad (1.16)
$$

Поскольку функция $\Phi(t_1,t_2,t_3)$ непрерывна в замкнутой ограниченной области D_3, то она и равномерно непрерывна в этой области. Поэтому, если расстояние между двумя точками области D_3 меньше δ ($\delta > 0$ и найдено по любому $\varepsilon > 0$ и не зависит от указанных точек), то соответствующее колебание функции $\Phi(t_1,t_2,t_3)$ для этих двух точек области D_3 меньше ε.

Если предположить, что $\Delta\tau_j < \delta$ $(j = 0,\ 1,\ldots,N-1)$, то расстояние между точками (t_1,t_2,τ_{j_3}), $(t_1,\tau_{j_2},\tau_{j_3})$ очевидно меньше δ. Тогда $|\Phi(t_1,t_2,\tau_{j_3}) - \Phi(t_1,\tau_{j_2},\tau_{j_3})| < \varepsilon$.

Таким образом при $\Delta\tau_j < \delta$ $(j = 0,\ 1,\ldots,N-1)$ выражение (1.16) оценивается сверху величиной

$$
\varepsilon^2 \sum_{j_3=0}^{N-1}\sum_{j_2=0}^{j_3-1}\sum_{j_1=0}^{j_2-1} \Delta\tau_{j_1}\Delta\tau_{j_2}\Delta\tau_{j_3} < \varepsilon^2\frac{(T-t)^3}{6}.
$$

Поэтому первый предел в правой части (1.15) равен нулю. Аналогично доказывается равенство нулю и второго предела в правой части (1.15). Таким образом равенство (1.13) при $k=3$ доказано. Случаи $k=2$ и $k>3$ рассматриваются абсолютно аналогично.

Следует отметить, что нетрудно доказать справедливость формулы (1.13), когда функция $\Phi(t_1,\ldots,t_k)$ непрерывна в открытой области D_k и ограничена на ее границе.

Положим

$$\underset{N\to\infty}{\text{l.i.m.}} \sum_{\substack{j_1,\ldots,j_k=0\\ j_q\ne j_r;\ q\ne r;\ q,r=1,\ldots,k}}^{N-1} \Phi\left(\tau_{j_1},\ldots,\tau_{j_k}\right)\prod_{l=1}^{k}\Delta\mathbf{w}_{\tau_{j_l}}^{(i_l)} \stackrel{\text{def}}{=} J'[\Phi]_{T,t}^{(k)}.$$

Тогда согласно (1.13) получим

$$J'[\Phi]_{T,t}^{(k)}=\int\limits_t^T\ldots\int\limits_t^{t_2}\sum_{(t_1,\ldots,t_k)}\left(\Phi(t_1,\ldots,t_k)d\mathbf{w}_{t_1}^{(i_1)}\ldots d\mathbf{w}_{t_k}^{(i_k)}\right), \tag{1.17}$$

где суммирование по перестановкам $(t_1,\ldots,t_k)$ осуществляется только в выражении, которое взято в скобки, а функция $\Phi(t_1,\ldots,t_k)$ предполагается непрерывной в соответствующих областях интегрирования.

Лемма 2. *Пусть выполнено условие* $\int\limits_t^T\ldots\int\limits_t^{t_2}\Phi^2(t_1,\ldots,t_k)dt_1\ldots dt_k<\infty$, *где* $\Phi(t_1,\ldots,t_k)$ *— неслучайная функция. Тогда*

$$\mathsf{M}\left\{\left|I[\Phi]_{T,t}^{(k)}\right|^2\right\}\le C_k\int\limits_t^T\ldots\int\limits_t^{t_2}\Phi^2(t_1,\ldots,t_k)dt_1\ldots dt_k,\ C_k<\infty.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Используя стандартные свойства и оценки стохастических интегралов (см. разд. 7.1), при $\xi_\tau\in\mathrm{M}_2([t_0,t])$ (см. также разд. 7.1) имеем

$$\mathsf{M}\left\{\left|\int\limits_{t_0}^t\xi_\tau df_\tau\right|^2\right\}=\int\limits_{t_0}^t\mathsf{M}\left\{|\xi_\tau|^2\right\}d\tau,\ \mathsf{M}\left\{\left|\int\limits_{t_0}^t\xi_\tau d\tau\right|^2\right\}\le(t-t_0)\int\limits_{t_0}^t\mathsf{M}\left\{|\xi_\tau|^2\right\}d\tau. \tag{1.18}$$

Пусть $\xi[\Phi]_{t_{l+1},\ldots,t_k,t}^{(l)}=\int\limits_t^{t_{l+1}}\ldots\int\limits_t^{t_2}\Phi(t_1,\ldots,t_k)d\mathbf{w}_{t_1}^{(i_1)}\ldots d\mathbf{w}_{t_l}^{(i_l)}$ при $l=1,\ldots,\ k-1$ и $\xi[\Phi]_{t_1,\ldots,t_k,t}^{(0)}\stackrel{\text{def}}{=}\Phi(t_1,\ldots,t_k)$.

По индукции нетрудно показать, что $\xi[\Phi]_{t_{l+1},\ldots,t_k,t}^{(l)}\in\mathrm{M}_2([t,T])$ по переменной t_{l+1}. Тогда, применяя многократно оценки (1.18), приходим к утверждению леммы. □

Лемма 3. *Пусть* $\varphi_i(s);\ i=1,\ldots,k$ *— непрерывные на промежутке* $[t,T]$ *функции. Тогда*

$$\prod_{l=1}^k J[\varphi_l]_{T,t}=J[\Phi]_{T,t}^{(k)}\ \text{с в.1}, \tag{1.19}$$

где $J[\varphi_l]_{T,t}=\int\limits_t^T\varphi_l(s)d\mathbf{w}_s^{(i_l)};\ \Phi(t_1,\ldots,t_k)=\prod\limits_{l=1}^k\varphi_l(t_l)$, *а интеграл* $J[\Phi]_{T,t}^{(k)}$ *определен равенством* (1.12).

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть сначала $i_l \neq 0,\ l = 1, \ldots, k$. Обозначим $J[\varphi_l]_N \stackrel{\rm def}{=} \sum\limits_{j=0}^{N-1} \varphi_l(\tau_j)\Delta \mathbf{w}_{\tau_j}^{(i_l)}$.

Поскольку

$$\prod_{l=1}^{k} J[\varphi_l]_N - \prod_{l=1}^{k} J[\varphi_l]_{T,t} = \sum_{l=1}^{k}\left(\prod_{g=1}^{l-1} J[\varphi_g]_{T,t}\right)\left(J[\varphi_l]_N - J[\varphi_l]_{T,t}\right)\left(\prod_{g=l+1}^{k} J[\varphi_g]_N\right),$$

то в силу неравенств Минковского и Коши–Буняковского

$$\left(\mathsf{M}\left\{\left|\prod_{l=1}^{k} J[\varphi_l]_N - \prod_{l=1}^{k} J[\varphi_l]_{T,t}\right|^2\right\}\right)^{\frac{1}{2}} \le C_k \sum_{l=1}^{k}\left(\mathsf{M}\left\{\left|J[\varphi_l]_N - J[\varphi_l]_{T,t}\right|^4\right\}\right)^{\frac{1}{4}}, \quad (1.20)$$

где $C_k < \infty$.

Заметим, что $J[\varphi_l]_N - J[\varphi_l]_{T,t} = \sum\limits_{g=0}^{N-1} J[\Delta\varphi_l]_{\tau_{g+1},\tau_g}$, где $J[\Delta\varphi_l]_{\tau_{g+1},\tau_g} = \int\limits_{\tau_g}^{\tau_{g+1}} (\varphi_l(\tau_g) - \varphi_l(s))\, d\mathbf{w}_s^{(i_l)}$. Поскольку $J[\Delta\varphi_l]_{\tau_{g+1},\tau_g}$ независимы при различных g, то [28]

$$\mathsf{M}\left\{\left|\sum_{j=0}^{N-1} J[\Delta\varphi_l]_{\tau_{j+1},\tau_j}\right|^4\right\} = \sum_{j=0}^{N-1} \mathsf{M}\left\{\left|J[\Delta\varphi_l]_{\tau_{j+1},\tau_j}\right|^4\right\} +$$
$$+6\sum_{j=0}^{N-1} \mathsf{M}\left\{\left|J[\Delta\varphi_l]_{\tau_{j+1},\tau_j}\right|^2\right\}\sum_{q=0}^{j-1} \mathsf{M}\left\{\left|J[\Delta\varphi_l]_{\tau_{q+1},\tau_q}\right|^2\right\}. \quad (1.21)$$

В силу гауссовости $J[\Delta\varphi_l]_{\tau_{j+1},\tau_j}$ имеем

$$\mathsf{M}\left\{\left|J[\Delta\varphi_l]_{\tau_{j+1},\tau_j}\right|^2\right\} = \int\limits_{\tau_j}^{\tau_{j+1}} (\varphi_l(\tau_j) - \varphi_l(s))^2 ds,$$

$$\mathsf{M}\left\{\left|J[\Delta\varphi_l]_{\tau_{j+1},\tau_j}\right|^4\right\} = 3\left(\int\limits_{\tau_j}^{\tau_{j+1}} (\varphi_l(\tau_j) - \varphi_l(s))^2 ds\right)^2.$$

Используя эти соотношения и непрерывность, а как следствие равномерную непрерывность, функций $\varphi_i(s)$, получаем, что правая часть (1.21) стремится к нулю при $N \to \infty$. Учитывая этот факт, а также (1.20), приходим к (1.19). Если при некоторых $l \in \{1, \ldots, k\} : \mathbf{w}_{t_l}^{(i_l)} = t_l$, то доказательство леммы очевидно несколько упрощается и проводится аналогично. $\square$

Согласно лемме 1 имеем

$$J[\psi^{(k)}]_{T,t} = \underset{N\to\infty}{\text{l.i.m.}} \sum_{l_k=0}^{N-1} \ldots \sum_{l_1=0}^{l_2-1} \psi_1(\tau_{l_1}) \ldots \psi_k(\tau_{l_k}) \Delta\mathbf{w}_{\tau_{l_1}}^{(i_1)} \ldots \Delta\mathbf{w}_{\tau_{l_k}}^{(i_k)} =$$

$$= \underset{N\to\infty}{\text{l.i.m.}} \sum_{l_k=0}^{N-1} \ldots \sum_{l_1=0}^{l_2-1} K(\tau_{l_1},\ldots,\tau_{l_k})\Delta\mathbf{w}_{\tau_{l_1}}^{(i_1)}\ldots\Delta\mathbf{w}_{\tau_{l_k}}^{(i_k)} =$$

$$= \underset{N\to\infty}{\text{l.i.m.}} \sum_{l_k=0}^{N-1} \ldots \sum_{l_1=0}^{N-1} K(\tau_{l_1},\ldots,\tau_{l_k})\Delta\mathbf{w}_{\tau_{l_1}}^{(i_1)}\ldots\Delta\mathbf{w}_{\tau_{l_k}}^{(i_k)} =$$

$$= \underset{N\to\infty}{\text{l.i.m.}} \sum_{\substack{l_1,\ldots,l_k=0\\ l_q\ne l_r;\ q\ne r;\ q,r=1,\ldots,k}}^{N-1} K(\tau_{l_1},\ldots,\tau_{l_k})\Delta\mathbf{w}_{\tau_{l_1}}^{(i_1)}\ldots\Delta\mathbf{w}_{\tau_{l_k}}^{(i_k)} =$$

$$= \int\limits_t^T \ldots \int\limits_t^{t_2} \sum_{(t_1,\ldots,t_k)} \left(K(t_1,\ldots,t_k)d\mathbf{w}_{t_1}^{(i_1)}\ldots d\mathbf{w}_{t_k}^{(i_k)}\right), \qquad (1.22)$$

где перестановки $(t_1,\ldots,t_k)$ осуществляются при суммировании только в выражении, взятом в скобки.

Нетрудно видеть, что (1.22) может быть переписано в виде:

$$J[\psi^{(k)}]_{T,t} = \sum_{(t_1,\ldots,t_k)} \int\limits_t^T \ldots \int\limits_t^{t_2} K(t_1,\ldots,t_k)d\mathbf{w}_{t_1}^{(i_1)}\ldots d\mathbf{w}_{t_k}^{(i_k)},$$

где перестановки $(t_1,\ldots,t_k)$ осуществляются при суммировании только в величинах $d\mathbf{w}_{t_1}^{(i_1)}\ldots d\mathbf{w}_{t_k}^{(i_k)}$, при этом соответствующим образом меняются индексы у верхних пределов интегрирования в повторных стохастических интегралах и, если t_r поменялось местами с t_q в перестановке $(t_1,\ldots,t_k)$, то и i_r поменяется местами с i_q в перестановке $(i_1,\ldots,i_k)$.

Отметим также, что поскольку для интегралов Римана интегрирование ограниченной функции по множеству нулевой меры дает нулевой результат, то для этих интегралов справедлива формула:

$$\int\limits_{[t,T]^k} G(t_1,\ldots,t_k)dt_1\ldots dt_k = \sum_{(t_1,\ldots,t_k)} \int\limits_t^T \ldots \int\limits_t^{t_2} G(t_1,\ldots,t_k)dt_1\ldots dt_k,$$

где перестановки $(t_1,\ldots,t_k)$ осуществляются при суммировании только в величинах $dt_1,\ldots,dt_k$, при этом соответствующим образом меняются индексы у верхних пределов интегрирования в повторных интегралах и функция $G(t_1,\ldots,t_k)$ предполагается интегрируемой на $[t,T]^k$.

Согласно леммам 1–3 и (1.17), (1.22) с в. 1 получаем следующее представление

$$J[\psi^{(k)}]_{T,t} =$$

$$= \sum_{j_1=0}^{p_1} \ldots \sum_{j_k=0}^{p_k} C_{j_k\ldots j_1} \int\limits_t^T \ldots \int\limits_t^{t_2} \sum_{(t_1,\ldots,t_k)} \left(\phi_{j_1}(t_1)\ldots\phi_{j_k}(t_k)d\mathbf{w}_{t_1}^{(i_1)}\ldots d\mathbf{w}_{t_k}^{(i_k)}\right) +$$

$$+R_{T,t}^{p_1,\ldots,p_k} = \sum_{j_1=0}^{p_1} \ldots \sum_{j_k=0}^{p_k} C_{j_k\ldots j_1} \times$$

$$\times \underset{N\to\infty}{\text{l.i.m.}} \sum_{\substack{l_1,\ldots,l_k=0\\ l_q\ne l_r;\ q\ne r;\ q,r=1,\ldots,k}}^{N-1} \phi_{j_1}(\tau_{l_1})\ldots\phi_{j_k}(\tau_{l_k})\Delta\mathbf{w}_{\tau_{l_1}}^{(i_1)}\ldots\Delta\mathbf{w}_{\tau_{l_k}}^{(i_k)}+$$

$$+R_{T,t}^{p_1,\ldots,p_k} =$$

$$= \sum_{j_1=0}^{p_1} \ldots \sum_{j_k=0}^{p_k} C_{j_k\ldots j_1}\Biggl(\underset{N\to\infty}{\text{l.i.m.}} \sum_{l_1,\ldots,l_k=0}^{N-1} \phi_{j_1}(\tau_{l_1})\ldots\phi_{j_k}(\tau_{l_k})\Delta\mathbf{w}_{\tau_{l_1}}^{(i_1)}\ldots\Delta\mathbf{w}_{\tau_{l_k}}^{(i_k)}-$$

$$-\underset{N\to\infty}{\text{l.i.m.}} \sum_{(l_1,\ldots,l_k)\in\mathcal{G}_k} \phi_{j_{l_1}}(\tau_{l_1})\Delta\mathbf{w}_{\tau_{l_1}}^{(i_1)}\ldots\phi_{j_{l_k}}(\tau_{l_k})\Delta\mathbf{w}_{\tau_{l_k}}^{(i_k)}\Biggr) + R_{T,t}^{p_1,\ldots,p_k} =$$

$$= \sum_{j_1=0}^{p_1} \ldots \sum_{j_k=0}^{p_k} C_{j_k\ldots j_1}\Biggl(\prod_{l=1}^{k}\zeta_{j_l}^{(i_l)}-$$

$$-\underset{N\to\infty}{\text{l.i.m.}} \sum_{(l_1,\ldots,l_k)\in\mathcal{G}_k} \phi_{j_{l_1}}(\tau_{l_1})\Delta\mathbf{w}_{\tau_{l_1}}^{(i_1)}\ldots\phi_{j_{l_k}}(\tau_{l_k})\Delta\mathbf{w}_{\tau_{l_k}}^{(i_k)}\Biggr) + R_{T,t}^{p_1,\ldots,p_k},$$

где

$$R_{T,t}^{p_1,\ldots,p_k} = \sum_{(t_1,\ldots,t_k)} \int_t^T \ldots \int_t^{t_2} \Biggl(K(t_1,\ldots,t_k)-$$

$$-\sum_{j_1=0}^{p_1} \ldots \sum_{j_k=0}^{p_k} C_{j_k\ldots j_1} \prod_{l=1}^{k}\phi_{j_l}(t_l)\Biggr) d\mathbf{w}_{t_1}^{(i_1)}\ldots d\mathbf{w}_{t_k}^{(i_k)}, \qquad (1.23)$$

где перестановки $(t_1,\ldots,t_k)$ осуществляются при суммировании только в величинах $d\mathbf{w}_{t_1}^{(i_1)}\ldots d\mathbf{w}_{t_k}^{(i_k)}$, при этом соответствующим образом меняются индексы у верхних пределов интегрирования в повторных стохастических интегралах и, если t_r поменялось местами с t_q в перестановке $(t_1,\ldots,t_k)$, то и i_r поменяется местами с i_q в перестановке $(i_1,\ldots,i_k)$.

Оценим остаток ряда $R_{T,t}^{p_1,\ldots,p_k}$.

Согласно лемме 2 имеем

$$\mathsf{M}\left\{\left(R_{T,t}^{p_1,\ldots,p_k}\right)^2\right\} \le C_k \sum_{(t_1,\ldots,t_k)} \int_t^T \ldots \int_t^{t_2} \Biggl(K(t_1,\ldots,t_k)-$$

$$-\sum_{j_1=0}^{p_1} \ldots \sum_{j_k=0}^{p_k} C_{j_k\ldots j_1} \prod_{l=1}^{k}\phi_{j_l}(t_l)\Biggr)^2 dt_1\ldots dt_k =$$

$$= C_k \int_{[t,T]^k} \Biggl(K(t_1,\ldots,t_k) - \sum_{j_1=0}^{p_1} \ldots \sum_{j_k=0}^{p_k} C_{j_k\ldots j_1} \prod_{l=1}^{k}\phi_{j_l}(t_l)\Biggr)^2 dt_1\ldots dt_k \to 0$$

при $p_1,\ldots,p_k\to\infty$, где постоянная C_k зависит только от кратности повторного стохастического интеграла Ито. Теорема доказана. $\square$

1.3 Разложения повторных стохастических интегралов Ито кратностей 1 – 7

Для того, чтобы оценить значение для практики теоремы 1 приведем в несколько преобразованной форме ее частные случаи для $k = 1, \ldots, 7$:

$$\int\limits_t^T \psi_1(t_1)d\mathbf{w}_{t_1}^{(i_1)} = \sum_{j_1=0}^{\infty} C_{j_1}\zeta_{j_1}^{(i_1)}, \tag{1.24}$$

$$\int\limits_t^T \psi_2(t_2)\int\limits_t^{t_2} \psi_1(t_1)d\mathbf{w}_{t_1}^{(i_1)}d\mathbf{w}_{t_2}^{(i_2)} = \sum_{j_1,j_2=0}^{\infty} C_{j_2j_1}\left(\zeta_{j_1}^{(i_1)}\zeta_{j_2}^{(i_2)} - \mathbf{1}_{\{i_1=i_2\neq 0\}}\mathbf{1}_{\{j_1=j_2\}}\right), \tag{1.25}$$

$$J[\psi^{(3)}]_{T,t} = \sum_{j_1,j_2,j_3=0}^{\infty} C_{j_3j_2j_1}\Biggl(\zeta_{j_1}^{(i_1)}\zeta_{j_2}^{(i_2)}\zeta_{j_3}^{(i_3)} - \mathbf{1}_{\{i_1=i_2\neq 0\}}\mathbf{1}_{\{j_1=j_2\}}\zeta_{j_3}^{(i_3)} -$$

$$-\mathbf{1}_{\{i_2=i_3\neq 0\}}\mathbf{1}_{\{j_2=j_3\}}\zeta_{j_1}^{(i_1)} - \mathbf{1}_{\{i_1=i_3\neq 0\}}\mathbf{1}_{\{j_1=j_3\}}\zeta_{j_2}^{(i_2)}\Biggr), \tag{1.26}$$

$$J[\psi^{(4)}]_{T,t} = \sum_{j_1,\ldots,j_4=0}^{\infty} C_{j_4\ldots j_1}\Biggl(\prod_{l=1}^{4}\zeta_{j_l}^{(i_l)} -$$

$$-\mathbf{1}_{\{i_1=i_2\neq 0\}}\mathbf{1}_{\{j_1=j_2\}}\zeta_{j_3}^{(i_3)}\zeta_{j_4}^{(i_4)} - \mathbf{1}_{\{i_1=i_3\neq 0\}}\mathbf{1}_{\{j_1=j_3\}}\zeta_{j_2}^{(i_2)}\zeta_{j_4}^{(i_4)} -$$

$$-\mathbf{1}_{\{i_1=i_4\neq 0\}}\mathbf{1}_{\{j_1=j_4\}}\zeta_{j_2}^{(i_2)}\zeta_{j_3}^{(i_3)} - \mathbf{1}_{\{i_2=i_3\neq 0\}}\mathbf{1}_{\{j_2=j_3\}}\zeta_{j_1}^{(i_1)}\zeta_{j_4}^{(i_4)} -$$

$$-\mathbf{1}_{\{i_2=i_4\neq 0\}}\mathbf{1}_{\{j_2=j_4\}}\zeta_{j_1}^{(i_1)}\zeta_{j_3}^{(i_3)} - \mathbf{1}_{\{i_3=i_4\neq 0\}}\mathbf{1}_{\{j_3=j_4\}}\zeta_{j_1}^{(i_1)}\zeta_{j_2}^{(i_2)} +$$

$$+\mathbf{1}_{\{i_1=i_2\neq 0\}}\mathbf{1}_{\{j_1=j_2\}}\mathbf{1}_{\{i_3=i_4\neq 0\}}\mathbf{1}_{\{j_3=j_4\}} +$$

$$+\mathbf{1}_{\{i_1=i_3\neq 0\}}\mathbf{1}_{\{j_1=j_3\}}\mathbf{1}_{\{i_2=i_4\neq 0\}}\mathbf{1}_{\{j_2=j_4\}} +$$

$$+\mathbf{1}_{\{i_1=i_4\neq 0\}}\mathbf{1}_{\{j_1=j_4\}}\mathbf{1}_{\{i_2=i_3\neq 0\}}\mathbf{1}_{\{j_2=j_3\}}\Biggr), \tag{1.27}$$

$$J[\psi^{(5)}]_{T,t} = \sum_{j_1,\ldots,j_5=0}^{\infty} C_{j_5\ldots j_1}\Biggl(\prod_{l=1}^{5}\zeta_{j_l}^{(i_l)} -$$

$$-\mathbf{1}_{\{i_1=i_2\neq 0\}}\mathbf{1}_{\{j_1=j_2\}}\zeta_{j_3}^{(i_3)}\zeta_{j_4}^{(i_4)}\zeta_{j_5}^{(i_5)} - \mathbf{1}_{\{i_1=i_3\neq 0\}}\mathbf{1}_{\{j_1=j_3\}}\zeta_{j_2}^{(i_2)}\zeta_{j_4}^{(i_4)}\zeta_{j_5}^{(i_5)} -$$

$$-\mathbf{1}_{\{i_1=i_4\neq 0\}}\mathbf{1}_{\{j_1=j_4\}}\zeta_{j_2}^{(i_2)}\zeta_{j_3}^{(i_3)}\zeta_{j_5}^{(i_5)} - \mathbf{1}_{\{i_1=i_5\neq 0\}}\mathbf{1}_{\{j_1=j_5\}}\zeta_{j_2}^{(i_2)}\zeta_{j_3}^{(i_3)}\zeta_{j_4}^{(i_4)} -$$

$$-\mathbf{1}_{\{i_2=i_3\neq 0\}}\mathbf{1}_{\{j_2=j_3\}}\zeta_{j_1}^{(i_1)}\zeta_{j_4}^{(i_4)}\zeta_{j_5}^{(i_5)} - \mathbf{1}_{\{i_2=i_4\neq 0\}}\mathbf{1}_{\{j_2=j_4\}}\zeta_{j_1}^{(i_1)}\zeta_{j_3}^{(i_3)}\zeta_{j_5}^{(i_5)} -$$

$$-\mathbf{1}_{\{i_2=i_5\neq 0\}}\mathbf{1}_{\{j_2=j_5\}}\zeta_{j_1}^{(i_1)}\zeta_{j_3}^{(i_3)}\zeta_{j_4}^{(i_4)} - \mathbf{1}_{\{i_3=i_4\neq 0\}}\mathbf{1}_{\{j_3=j_4\}}\zeta_{j_1}^{(i_1)}\zeta_{j_2}^{(i_2)}\zeta_{j_5}^{(i_5)} -$$

$$-\mathbf{1}_{\{i_3=i_5\ne 0\}}\mathbf{1}_{\{j_3=j_5\}}\zeta_{j_1}^{(i_1)}\zeta_{j_2}^{(i_2)}\zeta_{j_4}^{(i_4)}-\mathbf{1}_{\{i_4=i_5\ne 0\}}\mathbf{1}_{\{j_4=j_5\}}\zeta_{j_1}^{(i_1)}\zeta_{j_2}^{(i_2)}\zeta_{j_3}^{(i_3)}+$$

$$+\mathbf{1}_{\{i_1=i_2\ne 0\}}\mathbf{1}_{\{j_1=j_2\}}\mathbf{1}_{\{i_3=i_4\ne 0\}}\mathbf{1}_{\{j_3=j_4\}}\zeta_{j_5}^{(i_5)}+$$

$$+\mathbf{1}_{\{i_1=i_2\ne 0\}}\mathbf{1}_{\{j_1=j_2\}}\mathbf{1}_{\{i_3=i_5\ne 0\}}\mathbf{1}_{\{j_3=j_5\}}\zeta_{j_4}^{(i_4)}+$$

$$+\mathbf{1}_{\{i_1=i_2\ne 0\}}\mathbf{1}_{\{j_1=j_2\}}\mathbf{1}_{\{i_4=i_5\ne 0\}}\mathbf{1}_{\{j_4=j_5\}}\zeta_{j_3}^{(i_3)}+$$

$$+\mathbf{1}_{\{i_1=i_3\ne 0\}}\mathbf{1}_{\{j_1=j_3\}}\mathbf{1}_{\{i_2=i_4\ne 0\}}\mathbf{1}_{\{j_2=j_4\}}\zeta_{j_5}^{(i_5)}+$$

$$+\mathbf{1}_{\{i_1=i_3\ne 0\}}\mathbf{1}_{\{j_1=j_3\}}\mathbf{1}_{\{i_2=i_5\ne 0\}}\mathbf{1}_{\{j_2=j_5\}}\zeta_{j_4}^{(i_4)}+$$

$$+\mathbf{1}_{\{i_1=i_3\ne 0\}}\mathbf{1}_{\{j_1=j_3\}}\mathbf{1}_{\{i_4=i_5\ne 0\}}\mathbf{1}_{\{j_4=j_5\}}\zeta_{j_2}^{(i_2)}+$$

$$+\mathbf{1}_{\{i_1=i_4\ne 0\}}\mathbf{1}_{\{j_1=j_4\}}\mathbf{1}_{\{i_2=i_3\ne 0\}}\mathbf{1}_{\{j_2=j_3\}}\zeta_{j_5}^{(i_5)}+$$

$$+\mathbf{1}_{\{i_1=i_4\ne 0\}}\mathbf{1}_{\{j_1=j_4\}}\mathbf{1}_{\{i_2=i_5\ne 0\}}\mathbf{1}_{\{j_2=j_5\}}\zeta_{j_3}^{(i_3)}+$$

$$+\mathbf{1}_{\{i_1=i_4\ne 0\}}\mathbf{1}_{\{j_1=j_4\}}\mathbf{1}_{\{i_3=i_5\ne 0\}}\mathbf{1}_{\{j_3=j_5\}}\zeta_{j_2}^{(i_2)}+$$

$$+\mathbf{1}_{\{i_1=i_5\ne 0\}}\mathbf{1}_{\{j_1=j_5\}}\mathbf{1}_{\{i_2=i_3\ne 0\}}\mathbf{1}_{\{j_2=j_3\}}\zeta_{j_4}^{(i_4)}+$$

$$+\mathbf{1}_{\{i_1=i_5\ne 0\}}\mathbf{1}_{\{j_1=j_5\}}\mathbf{1}_{\{i_2=i_4\ne 0\}}\mathbf{1}_{\{j_2=j_4\}}\zeta_{j_3}^{(i_3)}+$$

$$+\mathbf{1}_{\{i_1=i_5\ne 0\}}\mathbf{1}_{\{j_1=j_5\}}\mathbf{1}_{\{i_3=i_4\ne 0\}}\mathbf{1}_{\{j_3=j_4\}}\zeta_{j_2}^{(i_2)}+$$

$$+\mathbf{1}_{\{i_2=i_3\ne 0\}}\mathbf{1}_{\{j_2=j_3\}}\mathbf{1}_{\{i_4=i_5\ne 0\}}\mathbf{1}_{\{j_4=j_5\}}\zeta_{j_1}^{(i_1)}+$$

$$+\mathbf{1}_{\{i_2=i_4\ne 0\}}\mathbf{1}_{\{j_2=j_4\}}\mathbf{1}_{\{i_3=i_5\ne 0\}}\mathbf{1}_{\{j_3=j_5\}}\zeta_{j_1}^{(i_1)}+$$

$$+\mathbf{1}_{\{i_2=i_5\ne 0\}}\mathbf{1}_{\{j_2=j_5\}}\mathbf{1}_{\{i_3=i_4\ne 0\}}\mathbf{1}_{\{j_3=j_4\}}\zeta_{j_1}^{(i_1)}\Biggr), \qquad (1.28)$$

$$J[\psi^{(6)}]_{T,t}=\sum_{j_1,\ldots,j_6=0}^{\infty}C_{j_6\ldots j_1}\Biggl(\prod_{l=1}^{6}\zeta_{j_l}^{(i_l)}-$$

$$-\mathbf{1}_{\{i_1=i_6\ne 0\}}\mathbf{1}_{\{j_1=j_6\}}\zeta_{j_2}^{(i_2)}\zeta_{j_3}^{(i_3)}\zeta_{j_4}^{(i_4)}\zeta_{j_5}^{(i_5)}-\mathbf{1}_{\{i_2=i_6\ne 0\}}\mathbf{1}_{\{j_2=j_6\}}\zeta_{j_1}^{(i_1)}\zeta_{j_3}^{(i_3)}\zeta_{j_4}^{(i_4)}\zeta_{j_5}^{(i_5)}$$

$$-\mathbf{1}_{\{i_3=i_6\ne 0\}}\mathbf{1}_{\{j_3=j_6\}}\zeta_{j_1}^{(i_1)}\zeta_{j_2}^{(i_2)}\zeta_{j_4}^{(i_4)}\zeta_{j_5}^{(i_5)}-\mathbf{1}_{\{i_4=i_6\ne 0\}}\mathbf{1}_{\{j_4=j_6\}}\zeta_{j_1}^{(i_1)}\zeta_{j_2}^{(i_2)}\zeta_{j_3}^{(i_3)}\zeta_{j_5}^{(i_5)}$$

$$-\mathbf{1}_{\{i_5=i_6\ne 0\}}\mathbf{1}_{\{j_5=j_6\}}\zeta_{j_1}^{(i_1)}\zeta_{j_2}^{(i_2)}\zeta_{j_3}^{(i_3)}\zeta_{j_4}^{(i_4)}-\mathbf{1}_{\{i_1=i_2\ne 0\}}\mathbf{1}_{\{j_1=j_2\}}\zeta_{j_3}^{(i_3)}\zeta_{j_4}^{(i_4)}\zeta_{j_5}^{(i_5)}\zeta_{j_6}^{(i_6)}$$

$$-\mathbf{1}_{\{i_1=i_3\ne 0\}}\mathbf{1}_{\{j_1=j_3\}}\zeta_{j_2}^{(i_2)}\zeta_{j_4}^{(i_4)}\zeta_{j_5}^{(i_5)}\zeta_{j_6}^{(i_6)}-\mathbf{1}_{\{i_1=i_4\ne 0\}}\mathbf{1}_{\{j_1=j_4\}}\zeta_{j_2}^{(i_2)}\zeta_{j_3}^{(i_3)}\zeta_{j_5}^{(i_5)}\zeta_{j_6}^{(i_6)}$$

$$-\mathbf{1}_{\{i_1=i_5\ne 0\}}\mathbf{1}_{\{j_1=j_5\}}\zeta_{j_2}^{(i_2)}\zeta_{j_3}^{(i_3)}\zeta_{j_4}^{(i_4)}\zeta_{j_6}^{(i_6)}-\mathbf{1}_{\{i_2=i_3\ne 0\}}\mathbf{1}_{\{j_2=j_3\}}\zeta_{j_1}^{(i_1)}\zeta_{j_4}^{(i_4)}\zeta_{j_5}^{(i_5)}\zeta_{j_6}^{(i_6)}$$

$$-\mathbf{1}_{\{i_2=i_4\ne 0\}}\mathbf{1}_{\{j_2=j_4\}}\zeta_{j_1}^{(i_1)}\zeta_{j_3}^{(i_3)}\zeta_{j_5}^{(i_5)}\zeta_{j_6}^{(i_6)}-\mathbf{1}_{\{i_2=i_5\ne 0\}}\mathbf{1}_{\{j_2=j_5\}}\zeta_{j_1}^{(i_1)}\zeta_{j_3}^{(i_3)}\zeta_{j_4}^{(i_4)}\zeta_{j_6}^{(i_6)}$$

$$-\mathbf{1}_{\{i_3=i_4\ne 0\}}\mathbf{1}_{\{j_3=j_4\}}\zeta_{j_1}^{(i_1)}\zeta_{j_2}^{(i_2)}\zeta_{j_5}^{(i_5)}\zeta_{j_6}^{(i_6)}-\mathbf{1}_{\{i_3=i_5\ne 0\}}\mathbf{1}_{\{j_3=j_5\}}\zeta_{j_1}^{(i_1)}\zeta_{j_2}^{(i_2)}\zeta_{j_4}^{(i_4)}\zeta_{j_6}^{(i_6)}$$

$$
\begin{aligned}
&-\mathbf{1}_{\{i_4=i_5\neq 0\}}\mathbf{1}_{\{j_4=j_5\}}\zeta_{j_1}^{(i_1)}\zeta_{j_2}^{(i_2)}\zeta_{j_3}^{(i_3)}\zeta_{j_6}^{(i_6)}\\
&+\mathbf{1}_{\{i_1=i_2\neq 0\}}\mathbf{1}_{\{j_1=j_2\}}\mathbf{1}_{\{i_3=i_4\neq 0\}}\mathbf{1}_{\{j_3=j_4\}}\zeta_{j_5}^{(i_5)}\zeta_{j_6}^{(i_6)}\\
&+\mathbf{1}_{\{i_1=i_2\neq 0\}}\mathbf{1}_{\{j_1=j_2\}}\mathbf{1}_{\{i_3=i_5\neq 0\}}\mathbf{1}_{\{j_3=j_5\}}\zeta_{j_4}^{(i_4)}\zeta_{j_6}^{(i_6)}\\
&+\mathbf{1}_{\{i_1=i_2\neq 0\}}\mathbf{1}_{\{j_1=j_2\}}\mathbf{1}_{\{i_4=i_5\neq 0\}}\mathbf{1}_{\{j_4=j_5\}}\zeta_{j_3}^{(i_3)}\zeta_{j_6}^{(i_6)}\\
&+\mathbf{1}_{\{i_1=i_3\neq 0\}}\mathbf{1}_{\{j_1=j_3\}}\mathbf{1}_{\{i_2=i_4\neq 0\}}\mathbf{1}_{\{j_2=j_4\}}\zeta_{j_5}^{(i_5)}\zeta_{j_6}^{(i_6)}\\
&+\mathbf{1}_{\{i_1=i_3\neq 0\}}\mathbf{1}_{\{j_1=j_3\}}\mathbf{1}_{\{i_2=i_5\neq 0\}}\mathbf{1}_{\{j_2=j_5\}}\zeta_{j_4}^{(i_4)}\zeta_{j_6}^{(i_6)}\\
&+\mathbf{1}_{\{i_1=i_3\neq 0\}}\mathbf{1}_{\{j_1=j_3\}}\mathbf{1}_{\{i_4=i_5\neq 0\}}\mathbf{1}_{\{j_4=j_5\}}\zeta_{j_2}^{(i_2)}\zeta_{j_6}^{(i_6)}\\
&+\mathbf{1}_{\{i_1=i_4\neq 0\}}\mathbf{1}_{\{j_1=j_4\}}\mathbf{1}_{\{i_2=i_3\neq 0\}}\mathbf{1}_{\{j_2=j_3\}}\zeta_{j_5}^{(i_5)}\zeta_{j_6}^{(i_6)}\\
&+\mathbf{1}_{\{i_1=i_4\neq 0\}}\mathbf{1}_{\{j_1=j_4\}}\mathbf{1}_{\{i_2=i_5\neq 0\}}\mathbf{1}_{\{j_2=j_5\}}\zeta_{j_3}^{(i_3)}\zeta_{j_6}^{(i_6)}\\
&+\mathbf{1}_{\{i_1=i_4\neq 0\}}\mathbf{1}_{\{j_1=j_4\}}\mathbf{1}_{\{i_3=i_5\neq 0\}}\mathbf{1}_{\{j_3=j_5\}}\zeta_{j_2}^{(i_2)}\zeta_{j_6}^{(i_6)}\\
&+\mathbf{1}_{\{i_1=i_5\neq 0\}}\mathbf{1}_{\{j_1=j_5\}}\mathbf{1}_{\{i_2=i_3\neq 0\}}\mathbf{1}_{\{j_2=j_3\}}\zeta_{j_4}^{(i_4)}\zeta_{j_6}^{(i_6)}\\
&+\mathbf{1}_{\{i_1=i_5\neq 0\}}\mathbf{1}_{\{j_1=j_5\}}\mathbf{1}_{\{i_2=i_4\neq 0\}}\mathbf{1}_{\{j_2=j_4\}}\zeta_{j_3}^{(i_3)}\zeta_{j_6}^{(i_6)}\\
&+\mathbf{1}_{\{i_1=i_5\neq 0\}}\mathbf{1}_{\{j_1=j_5\}}\mathbf{1}_{\{i_3=i_4\neq 0\}}\mathbf{1}_{\{j_3=j_4\}}\zeta_{j_2}^{(i_2)}\zeta_{j_6}^{(i_6)}\\
&+\mathbf{1}_{\{i_2=i_3\neq 0\}}\mathbf{1}_{\{j_2=j_3\}}\mathbf{1}_{\{i_4=i_5\neq 0\}}\mathbf{1}_{\{j_4=j_5\}}\zeta_{j_1}^{(i_1)}\zeta_{j_6}^{(i_6)}\\
&+\mathbf{1}_{\{i_2=i_4\neq 0\}}\mathbf{1}_{\{j_2=j_4\}}\mathbf{1}_{\{i_3=i_5\neq 0\}}\mathbf{1}_{\{j_3=j_5\}}\zeta_{j_1}^{(i_1)}\zeta_{j_6}^{(i_6)}\\
&+\mathbf{1}_{\{i_2=i_5\neq 0\}}\mathbf{1}_{\{j_2=j_5\}}\mathbf{1}_{\{i_3=i_4\neq 0\}}\mathbf{1}_{\{j_3=j_4\}}\zeta_{j_1}^{(i_1)}\zeta_{j_6}^{(i_6)}\\
&+\mathbf{1}_{\{i_6=i_1\neq 0\}}\mathbf{1}_{\{j_6=j_1\}}\mathbf{1}_{\{i_3=i_4\neq 0\}}\mathbf{1}_{\{j_3=j_4\}}\zeta_{j_2}^{(i_2)}\zeta_{j_5}^{(i_5)}\\
&+\mathbf{1}_{\{i_6=i_1\neq 0\}}\mathbf{1}_{\{j_6=j_1\}}\mathbf{1}_{\{i_3=i_5\neq 0\}}\mathbf{1}_{\{j_3=j_5\}}\zeta_{j_2}^{(i_2)}\zeta_{j_4}^{(i_4)}\\
&+\mathbf{1}_{\{i_6=i_1\neq 0\}}\mathbf{1}_{\{j_6=j_1\}}\mathbf{1}_{\{i_2=i_5\neq 0\}}\mathbf{1}_{\{j_2=j_5\}}\zeta_{j_3}^{(i_3)}\zeta_{j_4}^{(i_4)}\\
&+\mathbf{1}_{\{i_6=i_1\neq 0\}}\mathbf{1}_{\{j_6=j_1\}}\mathbf{1}_{\{i_2=i_4\neq 0\}}\mathbf{1}_{\{j_2=j_4\}}\zeta_{j_3}^{(i_3)}\zeta_{j_5}^{(i_5)}\\
&+\mathbf{1}_{\{i_6=i_1\neq 0\}}\mathbf{1}_{\{j_6=j_1\}}\mathbf{1}_{\{i_4=i_5\neq 0\}}\mathbf{1}_{\{j_4=j_5\}}\zeta_{j_2}^{(i_2)}\zeta_{j_3}^{(i_3)}\\
&+\mathbf{1}_{\{i_6=i_1\neq 0\}}\mathbf{1}_{\{j_6=j_1\}}\mathbf{1}_{\{i_2=i_3\neq 0\}}\mathbf{1}_{\{j_2=j_3\}}\zeta_{j_4}^{(i_4)}\zeta_{j_5}^{(i_5)}\\
&+\mathbf{1}_{\{i_6=i_2\neq 0\}}\mathbf{1}_{\{j_6=j_2\}}\mathbf{1}_{\{i_3=i_5\neq 0\}}\mathbf{1}_{\{j_3=j_5\}}\zeta_{j_1}^{(i_1)}\zeta_{j_4}^{(i_4)}\\
&+\mathbf{1}_{\{i_6=i_2\neq 0\}}\mathbf{1}_{\{j_6=j_2\}}\mathbf{1}_{\{i_4=i_5\neq 0\}}\mathbf{1}_{\{j_4=j_5\}}\zeta_{j_1}^{(i_1)}\zeta_{j_3}^{(i_3)}\\
&+\mathbf{1}_{\{i_6=i_2\neq 0\}}\mathbf{1}_{\{j_6=j_2\}}\mathbf{1}_{\{i_3=i_4\neq 0\}}\mathbf{1}_{\{j_3=j_4\}}\zeta_{j_1}^{(i_1)}\zeta_{j_5}^{(i_5)}
\end{aligned}
$$

$$+\mathbf{1}_{\{i_6=i_2\neq 0\}}\mathbf{1}_{\{j_6=j_2\}}\mathbf{1}_{\{i_1=i_5\neq 0\}}\mathbf{1}_{\{j_1=j_5\}}\zeta_{j_3}^{(i_3)}\zeta_{j_4}^{(i_4)}$$
$$+\mathbf{1}_{\{i_6=i_2\neq 0\}}\mathbf{1}_{\{j_6=j_2\}}\mathbf{1}_{\{i_1=i_4\neq 0\}}\mathbf{1}_{\{j_1=j_4\}}\zeta_{j_3}^{(i_3)}\zeta_{j_5}^{(i_5)}$$
$$+\mathbf{1}_{\{i_6=i_2\neq 0\}}\mathbf{1}_{\{j_6=j_2\}}\mathbf{1}_{\{i_1=i_3\neq 0\}}\mathbf{1}_{\{j_1=j_3\}}\zeta_{j_4}^{(i_4)}\zeta_{j_5}^{(i_5)}$$
$$+\mathbf{1}_{\{i_6=i_3\neq 0\}}\mathbf{1}_{\{j_6=j_3\}}\mathbf{1}_{\{i_2=i_5\neq 0\}}\mathbf{1}_{\{j_2=j_5\}}\zeta_{j_1}^{(i_1)}\zeta_{j_4}^{(i_4)}$$
$$+\mathbf{1}_{\{i_6=i_3\neq 0\}}\mathbf{1}_{\{j_6=j_3\}}\mathbf{1}_{\{i_4=i_5\neq 0\}}\mathbf{1}_{\{j_4=j_5\}}\zeta_{j_1}^{(i_1)}\zeta_{j_2}^{(i_2)}$$
$$+\mathbf{1}_{\{i_6=i_3\neq 0\}}\mathbf{1}_{\{j_6=j_3\}}\mathbf{1}_{\{i_2=i_4\neq 0\}}\mathbf{1}_{\{j_2=j_4\}}\zeta_{j_1}^{(i_1)}\zeta_{j_5}^{(i_5)}$$
$$+\mathbf{1}_{\{i_6=i_3\neq 0\}}\mathbf{1}_{\{j_6=j_3\}}\mathbf{1}_{\{i_1=i_5\neq 0\}}\mathbf{1}_{\{j_1=j_5\}}\zeta_{j_2}^{(i_2)}\zeta_{j_4}^{(i_4)}$$
$$+\mathbf{1}_{\{i_6=i_3\neq 0\}}\mathbf{1}_{\{j_6=j_3\}}\mathbf{1}_{\{i_1=i_4\neq 0\}}\mathbf{1}_{\{j_1=j_4\}}\zeta_{j_2}^{(i_2)}\zeta_{j_5}^{(i_5)}$$
$$+\mathbf{1}_{\{i_6=i_3\neq 0\}}\mathbf{1}_{\{j_6=j_3\}}\mathbf{1}_{\{i_1=i_2\neq 0\}}\mathbf{1}_{\{j_1=j_2\}}\zeta_{j_4}^{(i_4)}\zeta_{j_5}^{(i_5)}$$
$$+\mathbf{1}_{\{i_6=i_4\neq 0\}}\mathbf{1}_{\{j_6=j_4\}}\mathbf{1}_{\{i_3=i_5\neq 0\}}\mathbf{1}_{\{j_3=j_5\}}\zeta_{j_1}^{(i_1)}\zeta_{j_2}^{(i_2)}$$
$$+\mathbf{1}_{\{i_6=i_4\neq 0\}}\mathbf{1}_{\{j_6=j_4\}}\mathbf{1}_{\{i_2=i_5\neq 0\}}\mathbf{1}_{\{j_2=j_5\}}\zeta_{j_1}^{(i_1)}\zeta_{j_3}^{(i_3)}$$
$$+\mathbf{1}_{\{i_6=i_4\neq 0\}}\mathbf{1}_{\{j_6=j_4\}}\mathbf{1}_{\{i_2=i_3\neq 0\}}\mathbf{1}_{\{j_2=j_3\}}\zeta_{j_1}^{(i_1)}\zeta_{j_5}^{(i_5)}$$
$$+\mathbf{1}_{\{i_6=i_4\neq 0\}}\mathbf{1}_{\{j_6=j_4\}}\mathbf{1}_{\{i_1=i_5\neq 0\}}\mathbf{1}_{\{j_1=j_5\}}\zeta_{j_2}^{(i_2)}\zeta_{j_3}^{(i_3)}$$
$$+\mathbf{1}_{\{i_6=i_4\neq 0\}}\mathbf{1}_{\{j_6=j_4\}}\mathbf{1}_{\{i_1=i_3\neq 0\}}\mathbf{1}_{\{j_1=j_3\}}\zeta_{j_2}^{(i_2)}\zeta_{j_5}^{(i_5)}$$
$$+\mathbf{1}_{\{i_6=i_4\neq 0\}}\mathbf{1}_{\{j_6=j_4\}}\mathbf{1}_{\{i_1=i_2\neq 0\}}\mathbf{1}_{\{j_1=j_2\}}\zeta_{j_3}^{(i_3)}\zeta_{j_5}^{(i_5)}$$
$$+\mathbf{1}_{\{i_6=i_5\neq 0\}}\mathbf{1}_{\{j_6=j_5\}}\mathbf{1}_{\{i_3=i_4\neq 0\}}\mathbf{1}_{\{j_3=j_4\}}\zeta_{j_1}^{(i_1)}\zeta_{j_2}^{(i_2)}$$
$$+\mathbf{1}_{\{i_6=i_5\neq 0\}}\mathbf{1}_{\{j_6=j_5\}}\mathbf{1}_{\{i_2=i_4\neq 0\}}\mathbf{1}_{\{j_2=j_4\}}\zeta_{j_1}^{(i_1)}\zeta_{j_3}^{(i_3)}$$
$$+\mathbf{1}_{\{i_6=i_5\neq 0\}}\mathbf{1}_{\{j_6=j_5\}}\mathbf{1}_{\{i_2=i_3\neq 0\}}\mathbf{1}_{\{j_2=j_3\}}\zeta_{j_1}^{(i_1)}\zeta_{j_4}^{(i_4)}$$
$$+\mathbf{1}_{\{i_6=i_5\neq 0\}}\mathbf{1}_{\{j_6=j_5\}}\mathbf{1}_{\{i_1=i_4\neq 0\}}\mathbf{1}_{\{j_1=j_4\}}\zeta_{j_2}^{(i_2)}\zeta_{j_3}^{(i_3)}$$
$$+\mathbf{1}_{\{i_6=i_5\neq 0\}}\mathbf{1}_{\{j_6=j_5\}}\mathbf{1}_{\{i_1=i_3\neq 0\}}\mathbf{1}_{\{j_1=j_3\}}\zeta_{j_2}^{(i_2)}\zeta_{j_4}^{(i_4)}$$
$$+\mathbf{1}_{\{i_6=i_5\neq 0\}}\mathbf{1}_{\{j_6=j_5\}}\mathbf{1}_{\{i_1=i_2\neq 0\}}\mathbf{1}_{\{j_1=j_2\}}\zeta_{j_3}^{(i_3)}\zeta_{j_4}^{(i_4)}$$
$$-\mathbf{1}_{\{i_6=i_1\neq 0\}}\mathbf{1}_{\{j_6=j_1\}}\mathbf{1}_{\{i_2=i_5\neq 0\}}\mathbf{1}_{\{j_2=j_5\}}\mathbf{1}_{\{i_3=i_4\neq 0\}}\mathbf{1}_{\{j_3=j_4\}}$$
$$-\mathbf{1}_{\{i_6=i_1\neq 0\}}\mathbf{1}_{\{j_6=j_1\}}\mathbf{1}_{\{i_2=i_4\neq 0\}}\mathbf{1}_{\{j_2=j_4\}}\mathbf{1}_{\{i_3=i_5\neq 0\}}\mathbf{1}_{\{j_3=j_5\}}$$
$$-\mathbf{1}_{\{i_6=i_1\neq 0\}}\mathbf{1}_{\{j_6=j_1\}}\mathbf{1}_{\{i_2=i_3\neq 0\}}\mathbf{1}_{\{j_2=j_3\}}\mathbf{1}_{\{i_4=i_5\neq 0\}}\mathbf{1}_{\{j_4=j_5\}}$$
$$-\mathbf{1}_{\{i_6=i_2\neq 0\}}\mathbf{1}_{\{j_6=j_2\}}\mathbf{1}_{\{i_1=i_5\neq 0\}}\mathbf{1}_{\{j_1=j_5\}}\mathbf{1}_{\{i_3=i_4\neq 0\}}\mathbf{1}_{\{j_3=j_4\}}$$
$$-\mathbf{1}_{\{i_6=i_2\neq 0\}}\mathbf{1}_{\{j_6=j_2\}}\mathbf{1}_{\{i_1=i_4\neq 0\}}\mathbf{1}_{\{j_1=j_4\}}\mathbf{1}_{\{i_3=i_5\neq 0\}}\mathbf{1}_{\{j_3=j_5\}}$$

$$
\begin{aligned}
&-\mathbf{1}_{\{i_6=i_2\neq 0\}}\mathbf{1}_{\{j_6=j_2\}}\mathbf{1}_{\{i_1=i_3\neq 0\}}\mathbf{1}_{\{j_1=j_3\}}\mathbf{1}_{\{i_4=i_5\neq 0\}}\mathbf{1}_{\{j_4=j_5\}}\\
&-\mathbf{1}_{\{i_6=i_3\neq 0\}}\mathbf{1}_{\{j_6=j_3\}}\mathbf{1}_{\{i_1=i_5\neq 0\}}\mathbf{1}_{\{j_1=j_5\}}\mathbf{1}_{\{i_2=i_4\neq 0\}}\mathbf{1}_{\{j_2=j_4\}}\\
&-\mathbf{1}_{\{i_6=i_3\neq 0\}}\mathbf{1}_{\{j_6=j_3\}}\mathbf{1}_{\{i_1=i_4\neq 0\}}\mathbf{1}_{\{j_1=j_4\}}\mathbf{1}_{\{i_2=i_5\neq 0\}}\mathbf{1}_{\{j_2=j_5\}}\\
&-\mathbf{1}_{\{i_3=i_6\neq 0\}}\mathbf{1}_{\{j_3=j_6\}}\mathbf{1}_{\{i_1=i_2\neq 0\}}\mathbf{1}_{\{j_1=j_2\}}\mathbf{1}_{\{i_4=i_5\neq 0\}}\mathbf{1}_{\{j_4=j_5\}}\\
&-\mathbf{1}_{\{i_6=i_4\neq 0\}}\mathbf{1}_{\{j_6=j_4\}}\mathbf{1}_{\{i_1=i_5\neq 0\}}\mathbf{1}_{\{j_1=j_5\}}\mathbf{1}_{\{i_2=i_3\neq 0\}}\mathbf{1}_{\{j_2=j_3\}}\\
&-\mathbf{1}_{\{i_6=i_4\neq 0\}}\mathbf{1}_{\{j_6=j_4\}}\mathbf{1}_{\{i_1=i_3\neq 0\}}\mathbf{1}_{\{j_1=j_3\}}\mathbf{1}_{\{i_2=i_5\neq 0\}}\mathbf{1}_{\{j_2=j_5\}}\\
&-\mathbf{1}_{\{i_6=i_4\neq 0\}}\mathbf{1}_{\{j_6=j_4\}}\mathbf{1}_{\{i_1=i_2\neq 0\}}\mathbf{1}_{\{j_1=j_2\}}\mathbf{1}_{\{i_3=i_5\neq 0\}}\mathbf{1}_{\{j_3=j_5\}}\\
&-\mathbf{1}_{\{i_6=i_5\neq 0\}}\mathbf{1}_{\{j_6=j_5\}}\mathbf{1}_{\{i_1=i_4\neq 0\}}\mathbf{1}_{\{j_1=j_4\}}\mathbf{1}_{\{i_2=i_3\neq 0\}}\mathbf{1}_{\{j_2=j_3\}}\\
&-\mathbf{1}_{\{i_6=i_5\neq 0\}}\mathbf{1}_{\{j_6=j_5\}}\mathbf{1}_{\{i_1=i_2\neq 0\}}\mathbf{1}_{\{j_1=j_2\}}\mathbf{1}_{\{i_3=i_4\neq 0\}}\mathbf{1}_{\{j_3=j_4\}}\\
&-\mathbf{1}_{\{i_6=i_5\neq 0\}}\mathbf{1}_{\{j_6=j_5\}}\mathbf{1}_{\{i_1=i_3\neq 0\}}\mathbf{1}_{\{j_1=j_3\}}\mathbf{1}_{\{i_2=i_4\neq 0\}}\mathbf{1}_{\{j_2=j_4\}}\Biggr),
\end{aligned}
\qquad (1.29)
$$

$$
J[\psi^{(7)}]_{T,t}=\sum_{j_1,\ldots,j_7=0}^{\infty}C_{j_7\ldots j_1}\Biggl(\prod_{l=1}^{7}\zeta_{j_l}^{(i_l)}-
$$

$$
\begin{aligned}
&-\mathbf{1}_{\{i_1=i_6\neq 0,j_1=j_6\}}\prod_{\substack{l=1\\ l\neq 1,6}}^{7}\zeta_{j_l}^{(i_l)}-\mathbf{1}_{\{i_2=i_6\neq 0,j_2=j_6\}}\prod_{\substack{l=1\\ l\neq 2,6}}^{7}\zeta_{j_l}^{(i_l)}-\mathbf{1}_{\{i_3=i_6\neq 0,j_3=j_6\}}\prod_{\substack{l=1\\ l\neq 3,6}}^{7}\zeta_{j_l}^{(i_l)}\\
&-\mathbf{1}_{\{i_4=i_6\neq 0,j_4=j_6\}}\prod_{\substack{l=1\\ l\neq 4,6}}^{7}\zeta_{j_l}^{(i_l)}-\mathbf{1}_{\{i_5=i_6\neq 0,j_5=j_6\}}\prod_{\substack{l=1\\ l\neq 5,6}}^{7}\zeta_{j_l}^{(i_l)}-\mathbf{1}_{\{i_1=i_2\neq 0,j_1=j_2\}}\prod_{\substack{l=1\\ l\neq 1,2}}^{7}\zeta_{j_l}^{(i_l)}\\
&-\mathbf{1}_{\{i_1=i_3\neq 0,j_1=j_3\}}\prod_{\substack{l=1\\ l\neq 1,3}}^{7}\zeta_{j_l}^{(i_l)}-\mathbf{1}_{\{i_1=i_4\neq 0,j_1=j_4\}}\prod_{\substack{l=1\\ l\neq 1,4}}^{7}\zeta_{j_l}^{(i_l)}-\mathbf{1}_{\{i_1=i_5\neq 0,j_1=j_5\}}\prod_{\substack{l=1\\ l\neq 1,5}}^{7}\zeta_{j_l}^{(i_l)}\\
&-\mathbf{1}_{\{i_2=i_3\neq 0,j_2=j_3\}}\prod_{\substack{l=1\\ l\neq 2,3}}^{7}\zeta_{j_l}^{(i_l)}-\mathbf{1}_{\{i_2=i_4\neq 0,j_2=j_4\}}\prod_{\substack{l=1\\ l\neq 2,4}}^{7}\zeta_{j_l}^{(i_l)}-\mathbf{1}_{\{i_2=i_5\neq 0,j_2=j_5\}}\prod_{\substack{l=1\\ l\neq 2,5}}^{7}\zeta_{j_l}^{(i_l)}\\
&-\mathbf{1}_{\{i_3=i_4\neq 0,j_3=j_4\}}\prod_{\substack{l=1\\ l\neq 3,4}}^{7}\zeta_{j_l}^{(i_l)}-\mathbf{1}_{\{i_3=i_5\neq 0,j_3=j_5\}}\prod_{\substack{l=1\\ l\neq 3,5}}^{7}\zeta_{j_l}^{(i_l)}-\mathbf{1}_{\{i_4=i_5\neq 0,j_4=j_5\}}\prod_{\substack{l=1\\ l\neq 4,5}}^{7}\zeta_{j_l}^{(i_l)}\\
&-\mathbf{1}_{\{i_7=i_1\neq 0,j_7=j_1\}}\prod_{\substack{l=1\\ l\neq 1,7}}^{7}\zeta_{j_l}^{(i_l)}-\mathbf{1}_{\{i_7=i_2\neq 0,j_7=j_2\}}\prod_{\substack{l=1\\ l\neq 2,7}}^{7}\zeta_{j_l}^{(i_l)}-\mathbf{1}_{\{i_7=i_3\neq 0,j_7=j_3\}}\prod_{\substack{l=1\\ l\neq 3,7}}^{7}\zeta_{j_l}^{(i_l)}\\
&-\mathbf{1}_{\{i_7=i_4\neq 0,j_7=j_4\}}\prod_{\substack{l=1\\ l\neq 4,7}}^{7}\zeta_{j_l}^{(i_l)}-\mathbf{1}_{\{i_7=i_5\neq 0,j_7=j_5\}}\prod_{\substack{l=1\\ l\neq 7,5}}^{7}\zeta_{j_l}^{(i_l)}-\mathbf{1}_{\{i_7=i_6\neq 0,j_7=j_6\}}\prod_{\substack{l=1\\ l\neq 7,6}}^{7}\zeta_{j_l}^{(i_l)}
\end{aligned}
$$

$$+\mathbf{1}_{\{i_1=i_2\ne 0,j_1=j_2,i_3=i_4\ne 0,j_3=j_4\}}\prod_{l=5,6,7}\zeta_{j_l}^{(i_l)}+\mathbf{1}_{\{i_1=i_2\ne 0,j_1=j_2,i_3=i_5\ne 0,j_3=j_5\}}\prod_{l=4,6,7}\zeta_{j_l}^{(i_l)}$$

$$+\mathbf{1}_{\{i_1=i_2\ne 0,j_1=j_2,i_4=i_5\ne 0,j_4=j_5\}}\prod_{l=3,6,7}\zeta_{j_l}^{(i_l)}+\mathbf{1}_{\{i_1=i_3\ne 0,j_1=j_3,i_2=i_4\ne 0,j_2=j_4\}}\prod_{l=5,6,7}\zeta_{j_l}^{(i_l)}$$

$$+\mathbf{1}_{\{i_1=i_3\ne 0,j_1=j_3,i_2=i_5\ne 0,j_2=j_5\}}\prod_{l=4,6,7}\zeta_{j_l}^{(i_l)}+\mathbf{1}_{\{i_1=i_3\ne 0,j_1=j_3,i_4=i_5\ne 0,j_4=j_5\}}\prod_{l=2,6,7}\zeta_{j_l}^{(i_l)}$$

$$+\mathbf{1}_{\{i_1=i_4\ne 0,j_1=j_4,i_2=i_3\ne 0,j_2=j_3\}}\prod_{l=5,6,7}\zeta_{j_l}^{(i_l)}+\mathbf{1}_{\{i_1=i_4\ne 0,j_1=j_4,i_2=i_5\ne 0,j_2=j_5\}}\prod_{l=3,6,7}\zeta_{j_l}^{(i_l)}$$

$$+\mathbf{1}_{\{i_1=i_4\ne 0,j_1=j_4,i_3=i_5\ne 0,j_3=j_5\}}\prod_{l=2,6,7}\zeta_{j_l}^{(i_l)}+\mathbf{1}_{\{i_1=i_5\ne 0,j_1=j_5,i_2=i_3\ne 0,j_2=j_3\}}\prod_{l=4,6,7}\zeta_{j_l}^{(i_l)}$$

$$+\mathbf{1}_{\{i_1=i_5\ne 0,j_1=j_5,i_2=i_4\ne 0,j_2=j_4\}}\prod_{l=3,6,7}\zeta_{j_l}^{(i_l)}+\mathbf{1}_{\{i_1=i_5\ne 0,j_1=j_5,i_3=i_4\ne 0,j_3=j_4\}}\prod_{l=2,6,7}\zeta_{j_l}^{(i_l)}$$

$$+\mathbf{1}_{\{i_2=i_3\ne 0,j_2=j_3,i_4=i_5\ne 0,j_4=j_5\}}\prod_{l=1,6,7}\zeta_{j_l}^{(i_l)}+\mathbf{1}_{\{i_2=i_4\ne 0,j_2=j_4,i_3=i_5\ne 0,j_3=j_5\}}\prod_{l=1,6,7}\zeta_{j_l}^{(i_l)}$$

$$+\mathbf{1}_{\{i_2=i_5\ne 0,j_2=j_5,i_3=i_4\ne 0,j_3=j_4\}}\prod_{l=1,6,7}\zeta_{j_l}^{(i_l)}+\mathbf{1}_{\{i_6=i_1\ne 0,j_6=j_1,i_3=i_4\ne 0,j_3=j_4\}}\prod_{l=2,5,7}\zeta_{j_l}^{(i_l)}$$

$$+\mathbf{1}_{\{i_6=i_1\ne 0,j_6=j_1,i_3=i_5\ne 0,j_3=j_5\}}\prod_{l=2,4,7}\zeta_{j_l}^{(i_l)}+\mathbf{1}_{\{i_6=i_1\ne 0,j_6=j_1,i_2=i_5\ne 0,j_2=j_5\}}\prod_{l=3,4,7}\zeta_{j_l}^{(i_l)}$$

$$+\mathbf{1}_{\{i_6=i_1\ne 0,j_6=j_1,i_2=i_4\ne 0,j_2=j_4\}}\prod_{l=3,5,7}\zeta_{j_l}^{(i_l)}+\mathbf{1}_{\{i_6=i_1\ne 0,j_6=j_1,i_4=i_5\ne 0,j_4=j_5\}}\prod_{l=2,3,7}\zeta_{j_l}^{(i_l)}$$

$$+\mathbf{1}_{\{i_6=i_1\ne 0,j_6=j_1,i_2=i_3\ne 0,j_2=j_3\}}\prod_{l=4,5,7}\zeta_{j_l}^{(i_l)}+\mathbf{1}_{\{i_6=i_2\ne 0,j_6=j_2,i_3=i_5\ne 0,j_3=j_5\}}\prod_{l=1,4,7}\zeta_{j_l}^{(i_l)}$$

$$+\mathbf{1}_{\{i_6=i_2\ne 0,j_6=j_2,i_4=i_5\ne 0,j_4=j_5\}}\prod_{l=1,3,7}\zeta_{j_l}^{(i_l)}+\mathbf{1}_{\{i_6=i_2\ne 0,j_6=j_2,i_3=i_4\ne 0,j_3=j_4\}}\prod_{l=1,5,7}\zeta_{j_l}^{(i_l)}$$

$$+\mathbf{1}_{\{i_6=i_2\ne 0,j_6=j_2,i_1=i_5\ne 0,j_1=j_5\}}\prod_{l=3,4,7}\zeta_{j_l}^{(i_l)}+\mathbf{1}_{\{i_6=i_2\ne 0,j_6=j_2,i_1=i_4\ne 0,j_1=j_4\}}\prod_{l=3,5,7}\zeta_{j_l}^{(i_l)}$$

$$+\mathbf{1}_{\{i_6=i_2\ne 0,j_6=j_2,i_1=i_3\ne 0,j_1=j_3\}}\prod_{l=4,5,7}\zeta_{j_l}^{(i_l)}+\mathbf{1}_{\{i_6=i_3\ne 0,j_6=j_3,i_2=i_5\ne 0,j_2=j_5\}}\prod_{l=1,4,7}\zeta_{j_l}^{(i_l)}$$

$$+\mathbf{1}_{\{i_6=i_3\ne 0,j_6=j_3,i_4=i_5\ne 0,j_4=j_5\}}\prod_{l=1,2,7}\zeta_{j_l}^{(i_l)}+\mathbf{1}_{\{i_6=i_3\ne 0,j_6=j_3,i_2=i_4\ne 0,j_2=j_4\}}\prod_{l=1,5,7}\zeta_{j_l}^{(i_l)}$$

$$+\mathbf{1}_{\{i_6=i_3\ne 0,j_6=j_3,i_1=i_5\ne 0,j_1=j_5\}}\prod_{l=2,4,7}\zeta_{j_l}^{(i_l)}+\mathbf{1}_{\{i_6=i_3\ne 0,j_6=j_3,i_1=i_4\ne 0,j_1=j_4\}}\prod_{l=2,5,7}\zeta_{j_l}^{(i_l)}$$

$$+\mathbf{1}_{\{i_6=i_3\ne 0,j_6=j_3,i_1=i_2\ne 0,j_1=j_2\}}\prod_{l=4,5,7}\zeta_{j_l}^{(i_l)}+\mathbf{1}_{\{i_6=i_4\ne 0,j_6=j_4,i_3=i_5\ne 0,j_3=j_5\}}\prod_{l=1,2,7}\zeta_{j_l}^{(i_l)}$$

$$+\mathbf{1}_{\{i_6=i_4\ne 0, j_6=j_4, i_2=i_5\ne 0, j_2=j_5\}} \prod_{l=1,3,7} \zeta_{j_l}^{(i_l)} + \mathbf{1}_{\{i_6=i_4\ne 0, j_6=j_4, i_2=i_3\ne 0, j_2=j_3\}} \prod_{l=1,5,7} \zeta_{j_l}^{(i_l)}$$

$$+\mathbf{1}_{\{i_6=i_4\ne 0, j_6=j_4, i_1=i_5\ne 0, j_1=j_5\}} \prod_{l=2,3,7} \zeta_{j_l}^{(i_l)} + \mathbf{1}_{\{i_6=i_4\ne 0, j_6=j_4, i_1=i_3\ne 0, j_1=j_3\}} \prod_{l=2,5,7} \zeta_{j_l}^{(i_l)}$$

$$+\mathbf{1}_{\{i_6=i_4\ne 0, j_6=j_4, i_1=i_2\ne 0, j_1=j_2\}} \prod_{l=3,5,7} \zeta_{j_l}^{(i_l)} + \mathbf{1}_{\{i_6=i_5\ne 0, j_6=j_5, i_3=i_4\ne 0, j_3=j_4\}} \prod_{l=1,2,7} \zeta_{j_l}^{(i_l)}$$

$$+\mathbf{1}_{\{i_6=i_5\ne 0, j_6=j_5, i_2=i_4\ne 0, j_2=j_4\}} \prod_{l=1,3,7} \zeta_{j_l}^{(i_l)} + \mathbf{1}_{\{i_6=i_5\ne 0, j_6=j_5, i_2=i_3\ne 0, j_2=j_3\}} \prod_{l=1,4,7} \zeta_{j_l}^{(i_l)}$$

$$+\mathbf{1}_{\{i_6=i_5\ne 0, j_6=j_5, i_1=i_4\ne 0, j_1=j_4\}} \prod_{l=2,3,7} \zeta_{j_l}^{(i_l)} + \mathbf{1}_{\{i_6=i_5\ne 0, j_6=j_5, i_1=i_3\ne 0, j_1=j_3\}} \prod_{l=2,4,7} \zeta_{j_l}^{(i_l)}$$

$$+\mathbf{1}_{\{i_6=i_5\ne 0, j_6=j_5, i_1=i_2\ne 0, j_1=j_2\}} \prod_{l=3,4,7} \zeta_{j_l}^{(i_l)} + \mathbf{1}_{\{i_7=i_1\ne 0, j_7=j_1, i_2=i_3\ne 0, j_2=j_3\}} \prod_{l=4,5,6} \zeta_{j_l}^{(i_l)}$$

$$+\mathbf{1}_{\{i_7=i_1\ne 0, j_7=j_1, i_2=i_4\ne 0, j_2=j_4\}} \prod_{l=3,5,6} \zeta_{j_l}^{(i_l)} + \mathbf{1}_{\{i_7=i_1\ne 0, j_7=j_1, i_2=i_5\ne 0, j_2=j_5\}} \prod_{l=3,4,6} \zeta_{j_l}^{(i_l)}$$

$$+\mathbf{1}_{\{i_7=i_1\ne 0, j_7=j_1, i_2=i_6\ne 0, j_2=j_6\}} \prod_{l=3,4,5} \zeta_{j_l}^{(i_l)} + \mathbf{1}_{\{i_7=i_1\ne 0, j_7=j_1, i_3=i_4\ne 0, j_3=j_4\}} \prod_{l=2,5,6} \zeta_{j_l}^{(i_l)}$$

$$+\mathbf{1}_{\{i_7=i_1\ne 0, j_7=j_1, i_3=i_5\ne 0, j_3=j_5\}} \prod_{l=2,4,6} \zeta_{j_l}^{(i_l)} + \mathbf{1}_{\{i_7=i_1\ne 0, j_7=j_1, i_3=i_6\ne 0, j_3=j_6\}} \prod_{l=2,4,5} \zeta_{j_l}^{(i_l)}$$

$$+\mathbf{1}_{\{i_7=i_1\ne 0, j_7=j_1, i_4=i_5\ne 0, j_4=j_5\}} \prod_{l=2,3,6} \zeta_{j_l}^{(i_l)} + \mathbf{1}_{\{i_7=i_1\ne 0, j_7=j_1, i_4=i_6\ne 0, j_4=j_6\}} \prod_{l=2,3,5} \zeta_{j_l}^{(i_l)}$$

$$+\mathbf{1}_{\{i_1=i_2\ne 0, j_7=j_1, i_7=i_1\ne 0, j_5=j_6\}} \prod_{l=2,3,4} \zeta_{j_l}^{(i_l)} + \mathbf{1}_{\{i_7=i_2\ne 0, j_7=j_2, i_1=i_3\ne 0, j_1=j_3\}} \prod_{l=4,5,6} \zeta_{j_l}^{(i_l)}$$

$$+\mathbf{1}_{\{i_7=i_2\ne 0, j_7=j_2, i_1=i_4\ne 0, j_1=j_4\}} \prod_{l=3,5,6} \zeta_{j_l}^{(i_l)} + \mathbf{1}_{\{i_7=i_2\ne 0, j_7=j_2, i_1=i_5\ne 0, j_1=j_5\}} \prod_{l=3,4,6} \zeta_{j_l}^{(i_l)}$$

$$+\mathbf{1}_{\{i_7=i_2\ne 0, j_7=j_2, i_1=i_6\ne 0, j_1=j_6\}} \prod_{l=3,4,5} \zeta_{j_l}^{(i_l)} + \mathbf{1}_{\{i_7=i_2\ne 0, j_7=j_2, i_3=i_4\ne 0, j_3=j_4\}} \prod_{l=1,5,6} \zeta_{j_l}^{(i_l)}$$

$$+\mathbf{1}_{\{i_7=i_2\ne 0, j_7=j_2, i_3=i_5\ne 0, j_3=j_5\}} \prod_{l=1,4,6} \zeta_{j_l}^{(i_l)} + \mathbf{1}_{\{i_7=i_2\ne 0, j_7=j_2, i_3=i_6\ne 0, j_3=j_6\}} \prod_{l=1,4,5} \zeta_{j_l}^{(i_l)}$$

$$+\mathbf{1}_{\{i_7=i_2\ne 0, j_7=j_2, i_4=i_5\ne 0, j_4=j_5\}} \prod_{l=1,3,6} \zeta_{j_l}^{(i_l)} + \mathbf{1}_{\{i_7=i_2\ne 0, j_7=j_2, i_4=i_6\ne 0, j_4=j_6\}} \prod_{l=1,3,5} \zeta_{j_l}^{(i_l)}$$

$$+\mathbf{1}_{\{i_7=i_2\ne 0, j_7=j_2, i_5=i_6\ne 0, j_5=j_6\}} \prod_{l=1,3,4} \zeta_{j_l}^{(i_l)} + \mathbf{1}_{\{i_7=i_3\ne 0, j_7=j_3, i_1=i_2\ne 0, j_1=j_2\}} \prod_{l=4,5,6} \zeta_{j_l}^{(i_l)}$$

$$+\mathbf{1}_{\{i_7=i_3\ne 0, j_7=j_3, i_1=i_4\ne 0, j_1=j_4\}} \prod_{l=2,3,5} \zeta_{j_l}^{(i_l)} + \mathbf{1}_{\{i_7=i_3\ne 0, j_7=j_3, i_1=i_5\ne 0, j_1=j_5\}} \prod_{l=2,4,6} \zeta_{j_l}^{(i_l)}$$

$$+\mathbf{1}_{\{i_7=i_3\ne 0, j_7=j_3, i_1=i_6\ne 0, j_1=j_6\}} \prod_{l=4,2,5} \zeta_{j_l}^{(i_l)} + \mathbf{1}_{\{i_7=i_3\ne 0, j_7=j_3, i_2=i_4\ne 0, j_2=j_4\}} \prod_{l=3,5,6} \zeta_{j_l}^{(i_l)}$$

$$+\mathbf{1}_{\{i_7=i_3\ne 0, j_7=j_3, i_2=i_5\ne 0, j_2=j_5\}}\prod_{l=1,4,6}\zeta_{j_l}^{(i_l)}+\mathbf{1}_{\{i_7=i_3\ne 0, j_7=j_3, i_2=i_6\ne 0, j_2=j_6\}}\prod_{l=1,4,5}\zeta_{j_l}^{(i_l)}$$

$$+\mathbf{1}_{\{i_7=i_3\ne 0, j_7=j_3, i_4=i_5\ne 0, j_4=j_5\}}\prod_{l=1,2,6}\zeta_{j_l}^{(i_l)}+\mathbf{1}_{\{i_7=i_3\ne 0, j_7=j_3, i_4=i_6\ne 0, j_4=j_6\}}\prod_{l=1,2,5}\zeta_{j_l}^{(i_l)}$$

$$+\mathbf{1}_{\{i_7=i_3\ne 0, j_7=j_3, i_5=i_6\ne 0, j_5=j_6\}}\prod_{l=1,2,4}\zeta_{j_l}^{(i_l)}+\mathbf{1}_{\{i_7=i_4\ne 0, j_7=j_4, i_1=i_2\ne 0, j_1=j_2\}}\prod_{l=3,5,6}\zeta_{j_l}^{(i_l)}$$

$$+\mathbf{1}_{\{i_7=i_4\ne 0, j_7=j_4, i_1=i_3\ne 0, j_1=j_3\}}\prod_{l=2,5,6}\zeta_{j_l}^{(i_l)}+\mathbf{1}_{\{i_7=i_4\ne 0, j_7=j_4, i_1=i_5\ne 0, j_1=j_5\}}\prod_{l=2,3,6}\zeta_{j_l}^{(i_l)}$$

$$+\mathbf{1}_{\{i_7=i_4\ne 0, j_7=j_4, i_1=i_6\ne 0, j_1=j_6\}}\prod_{l=2,3,5}\zeta_{j_l}^{(i_l)}+\mathbf{1}_{\{i_7=i_4\ne 0, j_7=j_4, i_2=i_3\ne 0, j_2=j_3\}}\prod_{l=1,5,6}\zeta_{j_l}^{(i_l)}$$

$$+\mathbf{1}_{\{i_7=i_4\ne 0, j_7=j_4, i_2=i_5\ne 0, j_2=j_5\}}\prod_{l=1,3,6}\zeta_{j_l}^{(i_l)}+\mathbf{1}_{\{i_7=i_4\ne 0, j_7=j_4, i_2=i_6\ne 0, j_2=j_6\}}\prod_{l=1,3,5}\zeta_{j_l}^{(i_l)}$$

$$+\mathbf{1}_{\{i_7=i_4\ne 0, j_7=j_4, i_3=i_5\ne 0, j_3=j_5\}}\prod_{l=1,2,6}\zeta_{j_l}^{(i_l)}+\mathbf{1}_{\{i_7=i_4\ne 0, j_7=j_4, i_3=i_6\ne 0, j_3=j_6\}}\prod_{l=1,2,5}\zeta_{j_l}^{(i_l)}$$

$$+\mathbf{1}_{\{i_7=i_4\ne 0, j_7=j_4, i_5=i_6\ne 0, j_5=j_6\}}\prod_{l=1,2,3}\zeta_{j_l}^{(i_l)}+\mathbf{1}_{\{i_7=i_5\ne 0, j_7=j_5, i_1=i_2\ne 0, j_1=j_2\}}\prod_{l=3,4,6}\zeta_{j_l}^{(i_l)}$$

$$+\mathbf{1}_{\{i_7=i_5\ne 0, j_7=j_5, i_1=i_3\ne 0, j_1=j_3\}}\prod_{l=2,4,6}\zeta_{j_l}^{(i_l)}+\mathbf{1}_{\{i_7=i_5\ne 0, j_7=j_5, i_1=i_4\ne 0, j_1=j_4\}}\prod_{l=2,3,6}\zeta_{j_l}^{(i_l)}$$

$$+\mathbf{1}_{\{i_7=i_5\ne 0, j_7=j_5, i_1=i_6\ne 0, j_1=j_6\}}\prod_{l=2,3,4}\zeta_{j_l}^{(i_l)}+\mathbf{1}_{\{i_7=i_5\ne 0, j_7=j_5, i_2=i_3\ne 0, j_2=j_3\}}\prod_{l=1,4,6}\zeta_{j_l}^{(i_l)}$$

$$+\mathbf{1}_{\{i_7=i_5\ne 0, j_7=j_5, i_2=i_4\ne 0, j_2=j_4\}}\prod_{l=1,3,6}\zeta_{j_l}^{(i_l)}+\mathbf{1}_{\{i_7=i_5\ne 0, j_7=j_5, i_2=i_6\ne 0, j_2=j_6\}}\prod_{l=1,3,5}\zeta_{j_l}^{(i_l)}$$

$$+\mathbf{1}_{\{i_7=i_5\ne 0, j_7=j_5, i_3=i_4\ne 0, j_3=j_4\}}\prod_{l=1,2,6}\zeta_{j_l}^{(i_l)}+\mathbf{1}_{\{i_7=i_5\ne 0, j_7=j_5, i_3=i_6\ne 0, j_3=j_6\}}\prod_{l=1,2,4}\zeta_{j_l}^{(i_l)}$$

$$+\mathbf{1}_{\{i_7=i_5\ne 0, j_7=j_5, i_4=i_6\ne 0, j_4=j_6\}}\prod_{l=1,2,3}\zeta_{j_l}^{(i_l)}+\mathbf{1}_{\{i_7=i_6\ne 0, j_7=j_6, i_1=i_2\ne 0, j_1=j_2\}}\prod_{l=3,4,5}\zeta_{j_l}^{(i_l)}$$

$$+\mathbf{1}_{\{i_7=i_6\ne 0, j_7=j_6, i_1=i_3\ne 0, j_1=j_3\}}\prod_{l=2,4,5}\zeta_{j_l}^{(i_l)}+\mathbf{1}_{\{i_7=i_6\ne 0, j_7=j_6, i_1=i_4\ne 0, j_1=j_4\}}\prod_{l=2,3,5}\zeta_{j_l}^{(i_l)}$$

$$+\mathbf{1}_{\{i_7=i_6\ne 0, j_7=j_6, i_1=i_5\ne 0, j_1=j_5\}}\prod_{l=2,3,4}\zeta_{j_l}^{(i_l)}+\mathbf{1}_{\{i_7=i_6\ne 0, j_7=j_6, i_2=i_3\ne 0, j_2=j_3\}}\prod_{l=1,4,5}\zeta_{j_l}^{(i_l)}$$

$$+\mathbf{1}_{\{i_7=i_6\ne 0, j_7=j_6, i_2=i_4\ne 0, j_2=j_4\}}\prod_{l=1,3,5}\zeta_{j_l}^{(i_l)}+\mathbf{1}_{\{i_7=i_6\ne 0, j_7=j_6, i_2=i_5\ne 0, j_2=j_5\}}\prod_{l=1,3,4}\zeta_{j_l}^{(i_l)}$$

$$+\mathbf{1}_{\{i_7=i_6\ne 0, j_7=j_6, i_3=i_5\ne 0, j_3=j_5\}}\prod_{l=1,2,4}\zeta_{j_l}^{(i_l)}+\mathbf{1}_{\{i_7=i_6\ne 0, j_7=j_6, i_4=i_5\ne 0, j_4=j_5\}}\prod_{l=1,2,3}\zeta_{j_l}^{(i_l)}$$

$$+\mathbf{1}_{\{i_7=i_6\ne 0, j_7=j_6, i_3=i_4\ne 0, j_3=j_4\}}\prod_{l=1,2,5}\zeta_{j_l}^{(i_l)}-$$

$$\Bigl(\mathbf{1}_{\{i_2=i_3\ne 0,j_2=j_3,i_4=i_5\ne 0,j_4=j_5,i_6=i_7\ne 0,j_6=j_7\}}+\mathbf{1}_{\{i_2=i_3\ne 0,j_2=j_3,i_4=i_6\ne 0,j_4=j_6,i_5=i_7\ne 0,j_5=j_7\}}$$
$$+\mathbf{1}_{\{i_2=i_3\ne 0,j_2=j_3,i_4=i_7\ne 0,j_4=j_7,i_5=i_6\ne 0,j_5=j_6\}}+\mathbf{1}_{\{i_2=i_4\ne 0,j_2=j_4,i_3=i_5\ne 0,j_3=j_5,i_6=i_7\ne 0,j_6=j_7\}}$$
$$+\mathbf{1}_{\{i_2=i_4\ne 0,j_2=j_4,i_3=i_6\ne 0,j_3=j_6,i_5=i_7\ne 0,j_5=j_7\}}+\mathbf{1}_{\{i_2=i_4\ne 0,j_2=j_4,i_3=i_7\ne 0,j_3=j_7,i_5=i_6\ne 0,j_5=j_6\}}$$
$$+\mathbf{1}_{\{i_2=i_5\ne 0,j_2=j_5,i_3=i_4\ne 0,j_3=j_4,i_6=i_7\ne 0,j_6=j_7\}}+\mathbf{1}_{\{i_2=i_5\ne 0,j_2=j_5,i_3=i_6\ne 0,j_3=j_6,i_4=i_7\ne 0,j_4=j_7\}}$$
$$+\mathbf{1}_{\{i_2=i_5\ne 0,j_2=j_5,i_3=i_7\ne 0,j_3=j_7,i_4=i_6\ne 0,j_4=j_6\}}+\mathbf{1}_{\{i_2=i_6\ne 0,j_2=j_6,i_3=i_4\ne 0,j_3=j_4,i_5=i_7\ne 0,j_5=j_7\}}$$
$$+\mathbf{1}_{\{i_2=i_6\ne 0,j_2=j_6,i_3=i_5\ne 0,j_3=j_5,i_4=i_7\ne 0,j_4=j_7\}}+\mathbf{1}_{\{i_2=i_6\ne 0,j_2=j_6,i_3=i_7\ne 0,j_3=j_7,i_4=i_5\ne 0,j_4=j_5\}}$$
$$+\mathbf{1}_{\{i_2=i_7\ne 0,j_2=j_7,i_3=i_4\ne 0,j_3=j_4,i_5=i_6\ne 0,j_5=j_6\}}+\mathbf{1}_{\{i_2=i_7\ne 0,j_2=j_7,i_3=i_5\ne 0,j_3=j_5,i_4=i_6\ne 0,j_4=j_6\}}$$
$$+\mathbf{1}_{\{i_2=i_7\ne 0,j_2=j_7,i_3=i_6\ne 0,j_3=j_6,i_4=i_5\ne 0,j_4=j_5\}}\Bigr)\zeta_{j_1}^{(i_1)}-$$

$$\Bigl(\mathbf{1}_{\{i_1=i_3\ne 0,j_1=j_3,i_4=i_7\ne 0,j_4=j_7,i_5=i_6\ne 0,j_5=j_6\}}+\mathbf{1}_{\{i_1=i_3\ne 0,j_1=j_3,i_4=i_5\ne 0,j_4=j_5,i_6=i_7\ne 0,j_6=j_7\}}$$
$$+\mathbf{1}_{\{i_1=i_3\ne 0,j_1=j_3,i_4=i_6\ne 0,j_4=j_6,i_5=i_7\ne 0,j_5=j_7\}}+\mathbf{1}_{\{i_1=i_4\ne 0,j_1=j_4,i_3=i_5\ne 0,j_3=j_5,i_6=i_7\ne 0,j_6=j_7\}}$$
$$+\mathbf{1}_{\{i_1=i_4\ne 0,j_1=j_4,i_3=i_6\ne 0,j_3=j_6,i_5=i_7\ne 0,j_5=j_7\}}+\mathbf{1}_{\{i_1=i_4\ne 0,j_1=j_4,i_3=i_7\ne 0,j_3=j_7,i_5=i_6\ne 0,j_5=j_6\}}$$
$$+\mathbf{1}_{\{i_1=i_5\ne 0,j_1=j_5,i_3=i_4\ne 0,j_3=j_4,i_6=i_7\ne 0,j_6=j_7\}}+\mathbf{1}_{\{i_1=i_5\ne 0,j_1=j_5,i_3=i_6\ne 0,j_3=j_6,i_4=i_7\ne 0,j_4=j_7\}}$$
$$+\mathbf{1}_{\{i_1=i_5\ne 0,j_1=j_5,i_3=i_7\ne 0,j_3=j_7,i_4=i_6\ne 0,j_4=j_6\}}+\mathbf{1}_{\{i_1=i_6\ne 0,j_1=j_6,i_3=i_4\ne 0,j_3=j_4,i_5=i_7\ne 0,j_5=j_7\}}$$
$$+\mathbf{1}_{\{i_6=i_1\ne 0,j_6=j_1,i_3=i_5\ne 0,j_3=j_5,i_4=i_7\ne 0,j_4=j_7\}}+\mathbf{1}_{\{i_6=i_1\ne 0,j_6=j_1,i_3=i_7\ne 0,j_3=j_7,i_4=i_5\ne 0,j_4=j_5\}}$$
$$+\mathbf{1}_{\{i_1=i_7\ne 0,j_1=j_7,i_3=i_4\ne 0,j_3=j_4,i_5=i_6\ne 0,j_5=j_6\}}+\mathbf{1}_{\{i_1=i_7\ne 0,j_1=j_7,i_3=i_5\ne 0,j_3=j_5,i_4=i_6\ne 0,j_4=j_6\}}$$
$$+\mathbf{1}_{\{i_1=i_7\ne 0,j_1=j_7,i_3=i_6\ne 0,j_3=j_6,i_4=i_5\ne 0,j_4=j_5\}}\Bigr)\zeta_{j_2}^{(i_2)}-$$

$$\Bigl(\mathbf{1}_{\{i_1=i_2\ne 0,j_1=j_2,i_4=i_5\ne 0,j_4=j_5,i_6=i_7\ne 0,j_6=j_7\}}+\mathbf{1}_{\{i_1=i_2\ne 0,j_1=j_2,i_4=i_6\ne 0,j_4=j_6,i_5=i_7\ne 0,j_5=j_7\}}$$
$$+\mathbf{1}_{\{i_1=i_2\ne 0,j_1=j_2,i_4=i_7\ne 0,j_4=j_7,i_5=i_6\ne 0,j_5=j_6\}}+\mathbf{1}_{\{i_1=i_4\ne 0,j_1=j_4,i_2=i_5\ne 0,j_2=j_5,i_6=i_7\ne 0,j_6=j_7\}}$$
$$+\mathbf{1}_{\{i_1=i_4\ne 0,j_1=j_4,i_2=i_6\ne 0,j_2=j_6,i_5=i_7\ne 0,j_5=j_7\}}+\mathbf{1}_{\{i_1=i_4\ne 0,j_1=j_4,i_2=i_7\ne 0,j_2=j_7,i_5=i_6\ne 0,j_5=j_6\}}$$
$$+\mathbf{1}_{\{i_1=i_5\ne 0,j_1=j_5,i_2=i_4\ne 0,j_2=j_4,i_6=i_7\ne 0,j_6=j_7\}}+\mathbf{1}_{\{i_1=i_5\ne 0,j_1=j_5,i_2=i_6\ne 0,j_2=j_6,i_4=i_7\ne 0,j_4=j_7\}}$$
$$+\mathbf{1}_{\{i_1=i_5\ne 0,j_1=j_5,i_2=i_7\ne 0,j_2=j_7,i_4=i_6\ne 0,j_4=j_6\}}+\mathbf{1}_{\{i_6=i_1\ne 0,j_6=j_1,i_2=i_4\ne 0,j_2=j_4,i_5=i_7\ne 0,j_5=j_7\}}$$
$$+\mathbf{1}_{\{i_6=i_1\ne 0,j_6=j_1,i_2=i_5\ne 0,j_2=j_5,i_4=i_7\ne 0,j_4=j_7\}}+\mathbf{1}_{\{i_6=i_1\ne 0,j_6=j_1,i_2=i_7\ne 0,j_2=j_7,i_4=i_5\ne 0,j_4=j_5\}}$$
$$+\mathbf{1}_{\{i_1=i_7\ne 0,j_1=j_7,i_2=i_4\ne 0,j_2=j_4,i_5=i_6\ne 0,j_5=j_6\}}+\mathbf{1}_{\{i_1=i_7\ne 0,j_1=j_7,i_2=i_5\ne 0,j_2=j_5,i_4=i_6\ne 0,j_4=j_6\}}$$
$$+\mathbf{1}_{\{i_1=i_7\ne 0,j_1=j_7,i_2=i_6\ne 0,j_2=j_6,i_4=i_5\ne 0,j_4=j_5\}}\Bigr)\zeta_{j_3}^{(i_3)}-$$

$$\Bigl(\mathbf{1}_{\{i_1=i_2\ne 0,j_1=j_2,i_3=i_5\ne 0,j_3=j_5,i_6=i_7\ne 0,j_6=j_7\}}+\mathbf{1}_{\{i_1=i_2\ne 0,j_1=j_2,i_3=i_6\ne 0,j_3=j_6,i_5=i_7\ne 0,j_5=j_7\}}$$
$$+\mathbf{1}_{\{i_1=i_2\ne 0,j_1=j_2,i_3=i_7\ne 0,j_3=j_7,i_5=i_6\ne 0,j_5=j_6\}}+\mathbf{1}_{\{i_1=i_3\ne 0,j_1=j_3,i_2=i_5\ne 0,j_2=j_5,i_6=i_7\ne 0,j_6=j_7\}}$$
$$+\mathbf{1}_{\{i_1=i_3\ne 0,j_1=j_3,i_2=i_6\ne 0,j_2=j_6,i_5=i_7\ne 0,j_5=j_7\}}+\mathbf{1}_{\{i_1=i_3\ne 0,j_1=j_3,i_2=i_7\ne 0,j_2=j_7,i_5=i_6\ne 0,j_5=j_6\}}$$
$$+\mathbf{1}_{\{i_1=i_5\ne 0,j_1=j_5,i_2=i_3\ne 0,j_2=j_3,i_6=i_7\ne 0,j_6=j_7\}}+\mathbf{1}_{\{i_1=i_5\ne 0,j_1=j_5,i_2=i_6\ne 0,j_2=j_6,i_3=i_7\ne 0,j_3=j_7\}}$$

$$
\begin{aligned}
&+\mathbf{1}_{\{i_1=i_5\neq 0, j_1=j_5, i_2=i_7\neq 0, j_2=j_7, i_3=i_6\neq 0, j_3=j_6\}} + \mathbf{1}_{\{i_6=i_1\neq 0, j_6=j_1, i_2=i_3\neq 0, j_2=j_3, i_5=i_7\neq 0, j_5=j_7\}}\\
&+\mathbf{1}_{\{i_6=i_1\neq 0, j_6=j_1, i_2=i_5\neq 0, j_2=j_5, i_3=i_7\neq 0, j_3=j_7\}} + \mathbf{1}_{\{i_6=i_1\neq 0, j_6=j_1, i_2=i_7\neq 0, j_2=j_7, i_3=i_5\neq 0, j_3=j_5\}}\\
&+\mathbf{1}_{\{i_7=i_1\neq 0, j_7=j_1, i_2=i_3\neq 0, j_2=j_3, i_5=i_6\neq 0, j_5=j_6\}} + \mathbf{1}_{\{i_7=i_1\neq 0, j_7=j_1, i_2=i_5\neq 0, j_2=j_5, i_3=i_6\neq 0, j_3=j_6\}}\\
&\qquad\qquad +\mathbf{1}_{\{i_7=i_1\neq 0, j_7=j_1, i_2=i_6\neq 0, j_2=j_6, i_3=i_5\neq 0, j_3=j_5\}}\Big)\, \zeta_{j_4}^{(i_4)} -\\
&\Big(\mathbf{1}_{\{i_1=i_2\neq 0, j_1=j_2, i_3=i_4\neq 0, j_3=j_4, i_6=i_7\neq 0, j_6=j_7\}} + \mathbf{1}_{\{i_1=i_2\neq 0, j_1=j_2, i_3=i_6\neq 0, j_3=j_6, i_4=i_7\neq 0, j_4=j_7\}}\\
&+\mathbf{1}_{\{i_1=i_2\neq 0, j_1=j_2, i_3=i_7\neq 0, j_3=j_7, i_4=i_6\neq 0, j_4=j_6\}} + \mathbf{1}_{\{i_1=i_3\neq 0, j_1=j_3, i_2=i_4\neq 0, j_2=j_4, i_6=i_7\neq 0, j_6=j_7\}}\\
&+\mathbf{1}_{\{i_1=i_3\neq 0, j_1=j_3, i_2=i_6\neq 0, j_2=j_6, i_4=i_7\neq 0, j_4=j_7\}} + \mathbf{1}_{\{i_1=i_3\neq 0, j_1=j_3, i_2=i_7\neq 0, j_2=j_7, i_4=i_6\neq 0, j_4=j_6\}}\\
&+\mathbf{1}_{\{i_1=i_4\neq 0, j_1=j_4, i_2=i_3\neq 0, j_2=j_3, i_6=i_7\neq 0, j_6=j_7\}} + \mathbf{1}_{\{i_1=i_4\neq 0, j_1=j_4, i_2=i_6\neq 0, j_2=j_6, i_3=i_7\neq 0, j_3=j_7\}}\\
&+\mathbf{1}_{\{i_1=i_4\neq 0, j_1=j_4, i_2=i_7\neq 0, j_2=j_7, i_3=i_6\neq 0, j_3=j_6\}} + \mathbf{1}_{\{i_6=i_1\neq 0, j_6=j_1, i_2=i_3\neq 0, j_2=j_3, i_4=i_7\neq 0, j_4=j_7\}}\\
&+\mathbf{1}_{\{i_6=i_1\neq 0, j_6=j_1, i_2=i_4\neq 0, j_2=j_4, i_3=i_7\neq 0, j_3=j_7\}} + \mathbf{1}_{\{i_6=i_1\neq 0, j_6=j_1, i_2=i_7\neq 0, j_2=j_7, i_3=i_4\neq 0, j_3=j_4\}}\\
&+\mathbf{1}_{\{i_1=i_7\neq 0, j_1=j_7, i_2=i_3\neq 0, j_2=j_3, i_4=i_6\neq 0, j_4=j_6\}} + \mathbf{1}_{\{i_1=i_7\neq 0, j_1=j_7, i_2=i_4\neq 0, j_2=j_4, i_3=i_6\neq 0, j_3=j_6\}}\\
&\qquad\qquad +\mathbf{1}_{\{i_7=i_1\neq 0, j_7=j_1, i_2=i_6\neq 0, j_2=j_6, i_3=i_4\neq 0, j_3=j_4\}}\Big)\, \zeta_{j_5}^{(i_5)} -\\
&\Big(\mathbf{1}_{\{i_1=i_2\neq 0, j_1=j_2, i_3=i_4\neq 0, j_3=j_4, i_5=i_7\neq 0, j_5=j_7\}} + \mathbf{1}_{\{i_1=i_2\neq 0, j_1=j_2, i_3=i_5\neq 0, j_3=j_5, i_4=i_7\neq 0, j_4=j_7\}}\\
&+\mathbf{1}_{\{i_1=i_2\neq 0, j_1=j_2, i_3=i_7\neq 0, j_3=j_7, i_4=i_5\neq 0, j_4=j_5\}} + \mathbf{1}_{\{i_1=i_3\neq 0, j_1=j_3, i_2=i_4\neq 0, j_2=j_4, i_5=i_7\neq 0, j_5=j_7\}}\\
&+\mathbf{1}_{\{i_1=i_3\neq 0, j_1=j_3, i_2=i_5\neq 0, j_2=j_5, i_4=i_7\neq 0, j_4=j_7\}} + \mathbf{1}_{\{i_1=i_3\neq 0, j_1=j_3, i_2=i_7\neq 0, j_2=j_7, i_4=i_5\neq 0, j_4=j_5\}}\\
&+\mathbf{1}_{\{i_1=i_4\neq 0, j_1=j_4, i_2=i_3\neq 0, j_2=j_3, i_5=i_7\neq 0, j_5=j_7\}} + \mathbf{1}_{\{i_1=i_4\neq 0, j_1=j_4, i_2=i_5\neq 0, j_2=j_5, i_3=i_7\neq 0, j_3=j_7\}}\\
&+\mathbf{1}_{\{i_1=i_4\neq 0, j_1=j_4, i_2=i_7\neq 0, j_2=j_7, i_3=i_5\neq 0, j_3=j_5\}} + \mathbf{1}_{\{i_1=i_5\neq 0, j_1=j_5, i_2=i_3\neq 0, j_2=j_3, i_4=i_7\neq 0, j_4=j_7\}}\\
&+\mathbf{1}_{\{i_1=i_5\neq 0, j_1=j_5, i_2=i_4\neq 0, j_2=j_4, i_3=i_7\neq 0, j_3=j_7\}} + \mathbf{1}_{\{i_1=i_5\neq 0, j_1=j_5, i_2=i_7\neq 0, j_2=j_7, i_3=i_4\neq 0, j_3=j_4\}}\\
&+\mathbf{1}_{\{i_7=i_1\neq 0, j_7=j_1, i_2=i_3\neq 0, j_2=j_3, i_4=i_5\neq 0, j_4=j_5\}} + \mathbf{1}_{\{i_7=i_1\neq 0, j_7=j_1, i_2=i_4\neq 0, j_2=j_4, i_3=i_5\neq 0, j_3=j_5\}}\\
&\qquad\qquad +\mathbf{1}_{\{i_7=i_1\neq 0, j_7=j_1, i_2=i_5\neq 0, j_2=j_5, i_3=i_4\neq 0, j_3=j_4\}}\Big)\, \zeta_{j_6}^{(i_6)} -\\
&\Big(\mathbf{1}_{\{i_1=i_2\neq 0, j_1=j_2, i_3=i_4\neq 0, j_3=j_4, i_5=i_6\neq 0, j_5=j_6\}} + \mathbf{1}_{\{i_1=i_2\neq 0, j_1=j_2, i_3=i_5\neq 0, j_3=j_5, i_4=i_6\neq 0, j_4=j_6\}}\\
&+\mathbf{1}_{\{i_1=i_2\neq 0, j_1=j_2, i_3=i_6\neq 0, j_3=j_6, i_4=i_5\neq 0, j_4=j_5\}} + \mathbf{1}_{\{i_1=i_3\neq 0, j_1=j_3, i_2=i_4\neq 0, j_2=j_4, i_5=i_6\neq 0, j_5=j_6\}}\\
&+\mathbf{1}_{\{i_1=i_3\neq 0, j_1=j_3, i_2=i_5\neq 0, j_2=j_5, i_4=i_6\neq 0, j_4=j_6\}} + \mathbf{1}_{\{i_1=i_3\neq 0, j_1=j_3, i_2=i_6\neq 0, j_2=j_6, i_4=i_5\neq 0, j_4=j_5\}}\\
&+\mathbf{1}_{\{i_4=i_1\neq 0, j_4=j_1, i_2=i_3\neq 0, j_2=j_3, i_5=i_6\neq 0, j_5=j_6\}} + \mathbf{1}_{\{i_4=i_1\neq 0, j_4=j_1, i_2=i_5\neq 0, j_2=j_5, i_3=i_6\neq 0, j_3=j_6\}}\\
&+\mathbf{1}_{\{i_4=i_1\neq 0, j_4=j_1, i_2=i_6\neq 0, j_2=j_6, i_3=i_5\neq 0, j_3=j_5\}} + \mathbf{1}_{\{i_5=i_1\neq 0, j_5=j_1, i_2=i_3\neq 0, j_2=j_3, i_4=i_6\neq 0, j_4=j_6\}}\\
&+\mathbf{1}_{\{i_5=i_1\neq 0, j_5=j_1, i_2=i_4\neq 0, j_2=j_4, i_3=i_6\neq 0, j_3=j_6\}} + \mathbf{1}_{\{i_5=i_1\neq 0, j_5=j_1, i_2=i_6\neq 0, j_2=j_6, i_3=i_4\neq 0, j_3=j_4\}}\\
&+\mathbf{1}_{\{i_6=i_1\neq 0, j_6=j_1, i_2=i_3\neq 0, j_2=j_3, i_4=i_5\neq 0, j_4=j_5\}} + \mathbf{1}_{\{i_6=i_1\neq 0, j_6=j_1, i_2=i_4\neq 0, j_2=j_4, i_3=i_5\neq 0, j_3=j_5\}}\\
&\qquad\qquad +\mathbf{1}_{\{i_6=i_1\neq 0, j_6=j_1, i_2=i_5\neq 0, j_2=j_5, i_3=i_4\neq 0, j_3=j_4\}}\Big)\, \zeta_{j_7}^{(i_7)}\Bigg),
\end{aligned}
\tag{1.30}
$$

где $\mathbf{1}_A$ — индикатор множества A ($\mathbf{1}_A = 1$, если условие A выполнено и $\mathbf{1}_A = 0$ в противном случае).

1.4 Разложение повторных стохастических интегралов Ито произвольной кратности k

Обобщим формулы (1.24) – (1.30) на случай произвольной кратности повторного стохастического интеграла Ито. Для этого введем ряд обозначений.

Рассмотрим неупорядоченный набор $\{1,2,\ldots,k\}$ и разобъем его на две части: первая часть пусть состоит из r неупорядоченных пар (порядок следования этих пар также неважен), а вторая — из неупорядоченного набора оставшихся $k-2r$ чисел. Таким образом мы имеем:

$$(\{\underbrace{\{g_1,g_2\},\ldots,\{g_{2r-1},g_{2r}\}}_{\text{1 часть}}\},\{\underbrace{q_1,\ldots,q_{k-2r}}_{\text{2 часть}}\}), \tag{1.31}$$

где $\{g_1,g_2,\ldots,g_{2r-1},g_{2r},q_1,\ldots,q_{k-2r}\}=\{1,2,\ldots,k\}$, фигурные скобки подчеркивают неупорядоченность взятого в них множества, а круглые — упорядоченность.

Назовем (1.31) разбиением и рассмотрим сумму по всевозможным разбиениям;

$$\sum_{\substack{(\{\{g_1,g_2\},\ldots,\{g_{2r-1},g_{2r}\}\},\{q_1,\ldots,q_{k-2r}\})\\ \{g_1,g_2,\ldots,g_{2r-1},g_{2r},q_1,\ldots,q_{k-2r}\}=\{1,2,\ldots,k\}}} a_{g_1g_2,\ldots,g_{2r-1}g_{2r},q_1\ldots q_{k-2r}}. \tag{1.32}$$

Договоримся, что

$$\sum_{\substack{(\{q_1,\ldots,q_k\})\\ \{q_1,\ldots,q_k\}=\{1,2,\ldots,k\}}} a_{q_1\ldots q_k}=a_{12\ldots k}\ (r=0).$$

Приведем примеры сумм вида (1.32):

$$\sum_{\substack{(\{g_1,g_2\})\\ \{g_1,g_2\}=\{1,2\}}} a_{g_1g_2}=a_{12},$$

$$\sum_{\substack{(\{\{g_1,g_2\},\{g_3,g_4\}\})\\ \{g_1,g_2,g_3,g_4\}=\{1,2,3,4\}}} a_{g_1g_2g_3g_4}=a_{1234}+a_{1324}+a_{2314},$$

$$\sum_{\substack{(\{g_1,g_2\},\{q_1,q_2\})\\ \{g_1,g_2,q_1,q_2\}=\{1,2,3,4\}}} a_{g_1g_2,q_1q_2}=a_{12,34}+a_{13,24}+a_{14,23}+$$

$$+a_{23,14}+a_{24,13}+a_{34,12},$$

$$\sum_{\substack{(\{g_1,g_2\},\{q_1,q_2,q_3\})\\ \{g_1,g_2,q_1,q_2,q_3\}=\{1,2,3,4,5\}}} a_{g_1g_2,q_1q_2q_3}=a_{12,345}+a_{13,245}+a_{14,235}+$$

$$+a_{15,234}+a_{23,145}+a_{24,135}+a_{25,134}+a_{34,125}+a_{35,124}+a_{45,123},$$

$$\sum_{\substack{(\{\{g_1,g_2\},\{g_3,g_4\}\},\{q_1\})\\ \{g_1,g_2,g_3,g_4,q_1\}=\{1,2,3,4,5\}}} a_{g_1g_2,g_3g_4,q_1}=a_{12,34,5}+a_{13,24,5}+a_{14,23,5}+$$

$$+a_{12,35,4}+a_{13,25,4}+a_{15,23,4}+a_{12,54,3}+a_{15,24,3}+a_{14,25,3}+$$

$$+a_{15,34,2}+a_{13,54,2}+a_{14,53,2}+a_{52,34,1}+a_{53,24,1}+a_{54,23,1}.$$

Теперь можно сформулировать основной результат теоремы 1 (формулу (1.5)) в несколько ином, но более удобном виде.

Теорема 2. *В условиях теоремы* 1 *справедливо следующее, сходящееся в среднеквадратическом смысле, разложение повторного стохастического интеграла Ито произвольной кратности*:

$$J[\psi^{(k)}]_{T,t}=\sum_{j_1,\ldots,j_k=0}^{\infty}C_{j_k\ldots j_1}\Biggl(\prod_{l=1}^{k}\zeta_{j_l}^{(i_l)}+$$

$$+\sum_{r=1}^{[\frac{k}{2}]}(-1)^r\cdot\sum_{\substack{(\{\{g_1,g_2\},\ldots,\{g_{2r-1},g_{2r}\}\},\{q_1,\ldots,q_{k-2r}\})\\ \{g_1,g_2,\ldots,g_{2r-1},g_{2r},q_1,\ldots,q_{k-2r}\}=\{1,2,\ldots,k\}}}\prod_{s=1}^{r}\mathbf{1}_{\{i_{g_{2s-1}}=\ i_{g_{2s}}\neq 0\}}\times$$

$$\times\mathbf{1}_{\{j_{g_{2s-1}}=\ j_{g_{2s}}\}}\prod_{l=1}^{k-2r}\zeta_{j_{q_l}}^{(i_{q_l})}\Biggr). \qquad (1.33)$$

В частности, из (1.33) при $k=5$ получаем:

$$J[\psi^{(5)}]_{T,t}=\sum_{j_1,\ldots,j_5=0}^{\infty}C_{j_5\ldots j_1}\Biggl(\prod_{l=1}^{5}\zeta_{j_l}^{(i_l)}-$$

$$-\sum_{\substack{(\{g_1,g_2\},\{q_1,q_2,q_3\})\\ \{g_1,g_2,q_1,q_2,q_3\}=\{1,2,3,4,5\}}}\mathbf{1}_{\{i_{g_1}=\ i_{g_2}\neq 0\}}\mathbf{1}_{\{j_{g_1}=\ j_{g_2}\}}\prod_{l=1}^{3}\zeta_{j_{q_l}}^{(i_{q_l})}+$$

$$+\sum_{\substack{(\{\{g_1,g_2\},\{g_3,g_4\}\},\{q_1\})\\ \{g_1,g_2,g_3,g_4,q_1\}=\{1,2,3,4,5\}}} \mathbf{1}_{\{i_{g_1}=\,i_{g_2}\neq 0\}}\mathbf{1}_{\{j_{g_1}=\,j_{g_2}\}}\times$$

$$\times\mathbf{1}_{\{i_{g_3}=\,i_{g_4}\neq 0\}}\mathbf{1}_{\{j_{g_3}=\,j_{g_4}\}}\zeta_{j_{q_1}}^{(i_{q_1})}\Biggr).$$

Последнее равенство, очевидно совпадает с (1.28).

1.5 Сравнение теоремы 2 с представлениями повторных стохастических интегралов Ито, основанных на многочленах Эрмита

Отметим, что справедливость формул (1.24) – (1.30) косвенно подтверждается тем, что при $i_1=\ldots=i_7=i=1,\ldots,m$ и $\psi_1(s),\ldots,\psi_7(s)\equiv\psi(s)$ из них можно вывести следующие справедливые с в.1 равенства:

$$J[\psi^{(1)}]_{T,t}=\frac{1}{1!}\delta_{T,t},\ \ J[\psi^{(2)}]_{T,t}=\frac{1}{2!}\left(\delta_{T,t}^2-\Delta_{T,t}\right),$$

$$J[\psi^{(3)}]_{T,t}=\frac{1}{3!}\left(\delta_{T,t}^3-3\delta_{T,t}\Delta_{T,t}\right),\ \ J[\psi^{(4)}]_{T,t}=\frac{1}{4!}\left(\delta_{T,t}^4-6\delta_{T,t}^2\Delta_{T,t}+3\Delta_{T,t}^2\right),$$

$$J[\psi^{(5)}]_{T,t}=\frac{1}{5!}\left(\delta_{T,t}^5-10\delta_{T,t}^3\Delta_{T,t}+15\delta_{T,t}\Delta_{T,t}^2\right),$$

$$J[\psi^{(6)}]_{T,t}=\frac{1}{6!}\left(\delta_{T,t}^6-15\delta_{T,t}^4\Delta_{T,t}+45\delta_{T,t}^2\Delta_{T,t}^2-15\Delta_{T,t}^3\right),$$

$$J[\psi^{(7)}]_{T,t}=\frac{1}{7!}\left(\delta_{T,t}^7-21\delta_{T,t}^5\Delta_{T,t}+105\delta_{T,t}^3\Delta_{T,t}^2-105\delta_{T,t}\Delta_{T,t}^3\right),$$

где $\delta_{T,t}=\int\limits_t^T\psi(s)d\mathbf{f}_s^{(i)}$, $\Delta_{T,t}=\int\limits_t^T\psi^2(s)ds$, которые могут быть независимо получены с помощью формулы Ито (см. разд. 6.2).

При $k=1$ все очевидно. Рассмотрим случаи $k=2,\ 3$. При $k=2$:

$$J[\psi^{(2)}]_{T,t}=\underset{p\to\infty}{\text{l.i.m.}}\left(\sum_{j_1,j_2=0}^{p}C_{j_2j_1}\zeta_{j_1}^{(i)}\zeta_{j_2}^{(i)}-\sum_{j_1=0}^{p}C_{j_1j_1}\right)=$$

$$=\underset{p\to\infty}{\text{l.i.m.}}\left(\sum_{j_1=0}^{p}\sum_{j_2=0}^{j_1-1}\left(C_{j_2j_1}+C_{j_1j_2}\right)\zeta_{j_1}^{(i)}\zeta_{j_2}^{(i)}+\sum_{j_1=0}^{p}C_{j_1j_1}\left(\left(\zeta_{j_1}^{(i)}\right)^2-1\right)\right)=$$

$$=\underset{p\to\infty}{\text{l.i.m.}}\left(\sum_{j_1=0}^{p}\sum_{j_2=0}^{j_1-1}C_{j_1}C_{j_2}\zeta_{j_1}^{(i)}\zeta_{j_2}^{(i)}+\frac{1}{2}\sum_{j_1=0}^{p}C_{j_1}^2\left(\left(\zeta_{j_1}^{(i)}\right)^2-1\right)\right)=$$

$$
= \underset{p\to\infty}{\text{l.i.m.}} \left(\frac{1}{2}\sum_{\substack{j_1,j_2=0\\ j_1\ne j_2}}^{p} C_{j_1}C_{j_2}\zeta_{j_1}^{(i)}\zeta_{j_2}^{(i)} + \frac{1}{2}\sum_{j_1=0}^{p} C_{j_1}^2\left(\left(\zeta_{j_1}^{(i)}\right)^2 - 1\right)\right) =
$$

$$
= \underset{p\to\infty}{\text{l.i.m.}} \left(\frac{1}{2}\left(\sum_{j_1=0}^{p} C_{j_1}\zeta_{j_1}^{(i)}\right)^2 - \frac{1}{2}\sum_{j_1=0}^{p} C_{j_1}^2\right) = \frac{1}{2!}\left(\delta_{T,t}^2 - \Delta_{T,t}\right). \tag{1.34}
$$

Поясним подробнее последний переход в (1.34). Для стохастических интегралов Ито справедлива известная оценка [5]

$$
\mathsf{M}\left\{\left|\int_t^T \xi_\tau df_\tau\right|^q\right\} \le K_q \mathsf{M}\left\{\left(\int_t^T |\xi_\tau|^2 d\tau\right)^{\frac{q}{2}}\right\}, \tag{1.35}
$$

где $q > 0$ — фиксированное число; f_τ — скалярный стандартный винеровский процесс; $\xi_\tau \in \mathrm{M}_2([t, T])$ (см. разд. 7.1); K_q — постоянная, зависящая только от q; $\int_t^T |\xi_\tau|^2 d\tau < \infty$ с в. 1; $\mathsf{M}\left\{\left(\int_t^T |\xi_\tau|^2 d\tau\right)^{\frac{q}{2}}\right\} < \infty$.

Поскольку $\delta_{T,t} - \sum_{j_1=0}^{p} C_{j_1}\zeta_{j_1}^{(i)} = \int_t^T \Bigl(\psi(s) - \sum_{j_1=0}^{p} C_{j_1}\phi_{j_1}(s)\Bigr) d\mathbf{f}_s^{(i)}$, то применяя оценку (1.35) к правой части этого выражения и учитывая, что $\int_t^T \Bigl(\psi(s) - \sum_{j_1=0}^{p} C_{j_1}\phi_{j_1}(s)\Bigr)^2 ds \ \to 0$ при $p \to \infty$ получаем

$$
\int_t^T \psi(s) d\mathbf{f}_s^{(i)} = q\text{ -}\underset{p\to\infty}{\text{l.i.m.}} \sum_{j_1=0}^{p} C_{j_1}\zeta_{j_1}^{(i)},\ q > 0. \tag{1.36}
$$

Отсюда при $q = 4$ нетрудно вывести, что $\underset{p\to\infty}{\text{l.i.m.}} \left(\sum_{j_1=0}^{p} C_{j_1}\zeta_{j_1}^{(i)}\right)^2 = \delta_{T,t}^2$. Это равенство и использовалось в последнем переходе формулы (1.34).

При $k = 3$:

$$
J[\psi^{(3)}]_{T,t} = \underset{p\to\infty}{\text{l.i.m.}} \left(\sum_{j_1,j_2,j_3=0}^{p} C_{j_3j_2j_1}\zeta_{j_1}^{(i)}\zeta_{j_2}^{(i)}\zeta_{j_3}^{(i)} - \sum_{j_1,j_3=0}^{p} C_{j_3j_1j_1}\zeta_{j_3}^{(i)} - \right.
$$

$$
\left. - \sum_{j_1,j_2=0}^{p} C_{j_2j_2j_1}\zeta_{j_1}^{(i)} - \sum_{j_1,j_2=0}^{p} C_{j_1j_2j_1}\zeta_{j_2}^{(i)}\right) =
$$

$$
= \underset{p\to\infty}{\text{l.i.m.}} \left(\sum_{j_1,j_2,j_3=0}^{p} C_{j_3j_2j_1}\zeta_{j_1}^{(i)}\zeta_{j_2}^{(i)}\zeta_{j_3}^{(i)} - \sum_{j_1,j_3=0}^{p} \left(C_{j_3j_1j_1} + C_{j_1j_1j_3} + C_{j_1j_3j_1}\right)\zeta_{j_3}^{(i)}\right)
$$

$$
= \underset{p\to\infty}{\text{l.i.m.}} \left(\sum_{j_1=0}^{p}\sum_{j_2=0}^{j_1-1}\sum_{j_3=0}^{j_2-1} \left(C_{j_3j_2j_1} + C_{j_3j_1j_2} + C_{j_2j_1j_3} + C_{j_2j_3j_1} + \right.\right.
$$

$$+C_{j_1j_2j_3}+C_{j_1j_3j_2}\right)\zeta_{j_1}^{(i)}\zeta_{j_2}^{(i)}\zeta_{j_3}^{(i)}+$$

$$+\sum_{j_1=0}^{p}\sum_{j_3=0}^{j_1-1}\left(C_{j_3j_1j_3}+C_{j_1j_3j_3}+C_{j_3j_3j_1}\right)\left(\zeta_{j_3}^{(i)}\right)^2\zeta_{j_1}^{(i)}+$$

$$+\sum_{j_1=0}^{p}\sum_{j_3=0}^{j_1-1}\left(C_{j_3j_1j_1}+C_{j_1j_1j_3}+C_{j_1j_3j_1}\right)\left(\zeta_{j_1}^{(i)}\right)^2\zeta_{j_3}^{(i)}+\sum_{j_1=0}^{p}C_{j_1j_1j_1}\left(\zeta_{j_1}^{(i)}\right)^3-$$

$$-\sum_{j_1,j_3=0}^{p}\left(C_{j_3j_1j_1}+C_{j_1j_1j_3}+C_{j_1j_3j_1}\right)\zeta_{j_3}^{(i)}\Biggr)=$$

$$=\underset{p\to\infty}{\text{l.i.m.}}\left(\sum_{j_1=0}^{p}\sum_{j_2=0}^{j_1-1}\sum_{j_3=0}^{j_2-1}C_{j_1}C_{j_2}C_{j_3}\zeta_{j_1}^{(i)}\zeta_{j_2}^{(i)}\zeta_{j_3}^{(i)}+\right.$$

$$+\frac{1}{2}\sum_{j_1=0}^{p}\sum_{j_3=0}^{j_1-1}C_{j_3}^2C_{j_1}\left(\zeta_{j_3}^{(i)}\right)^2\zeta_{j_1}^{(i)}+\frac{1}{2}\sum_{j_1=0}^{p}\sum_{j_3=0}^{j_1-1}C_{j_1}^2C_{j_3}\left(\zeta_{j_1}^{(i)}\right)^2\zeta_{j_3}^{(i)}+$$

$$\left.+\frac{1}{6}\sum_{j_1=0}^{p}C_{j_1}^3\left(\zeta_{j_1}^{(i)}\right)^3-\frac{1}{2}\sum_{j_1,j_3=0}^{p}C_{j_1}^2C_{j_3}\zeta_{j_3}^{(i)}\right)=$$

$$=\underset{p\to\infty}{\text{l.i.m.}}\left(\frac{1}{6}\sum_{\substack{j_1,j_2,j_3=0\\ j_1\ne j_2,j_2\ne j_3,j_1\ne j_3}}^{p}C_{j_1}C_{j_2}C_{j_3}\zeta_{j_1}^{(i)}\zeta_{j_2}^{(i)}\zeta_{j_3}^{(i)}+\right.$$

$$+\frac{1}{2}\sum_{j_1=0}^{p}\sum_{j_3=0}^{j_1-1}C_{j_3}^2C_{j_1}\left(\zeta_{j_3}^{(i)}\right)^2\zeta_{j_1}^{(i)}+\frac{1}{2}\sum_{j_1=0}^{p}\sum_{j_3=0}^{j_1-1}C_{j_1}^2C_{j_3}\left(\zeta_{j_1}^{(i)}\right)^2\zeta_{j_3}^{(i)}+$$

$$\left.+\frac{1}{6}\sum_{j_1=0}^{p}C_{j_1}^3\left(\zeta_{j_1}^{(i)}\right)^3-\frac{1}{2}\sum_{j_1,j_3=0}^{p}C_{j_1}^2C_{j_3}\zeta_{j_3}^{(i)}\right)=\underset{p\to\infty}{\text{l.i.m.}}\left(\frac{1}{6}\sum_{j_1,j_2,j_3=0}^{p}C_{j_1}C_{j_2}C_{j_3}\zeta_{j_1}^{(i)}\zeta_{j_2}^{(i)}\zeta_{j_3}^{(i)}\right.$$

$$-\frac{1}{6}\left(3\sum_{j_1=0}^{p}\sum_{j_3=0}^{j_1-1}C_{j_3}^2C_{j_1}\left(\zeta_{j_3}^{(i)}\right)^2\zeta_{j_1}^{(i)}+3\sum_{j_1=0}^{p}\sum_{j_3=0}^{j_1-1}C_{j_1}^2C_{j_3}\left(\zeta_{j_1}^{(i)}\right)^2\zeta_{j_3}^{(i)}+\sum_{j_1=0}^{p}C_{j_1}^3\left(\zeta_{j_1}^{(i)}\right)^3\right)$$

$$+\frac{1}{2}\sum_{j_1=0}^{p}\sum_{j_3=0}^{j_1-1}C_{j_3}^2C_{j_1}\left(\zeta_{j_3}^{(i)}\right)^2\zeta_{j_1}^{(i)}+\frac{1}{2}\sum_{j_1=0}^{p}\sum_{j_3=0}^{j_1-1}C_{j_1}^2C_{j_3}\left(\zeta_{j_1}^{(i)}\right)^2\zeta_{j_3}^{(i)}+$$

$$\left.+\frac{1}{6}\sum_{j_1=0}^{p}C_{j_1}^3\left(\zeta_{j_1}^{(i)}\right)^3-\frac{1}{2}\sum_{j_1,j_3=0}^{p}C_{j_1}^2C_{j_3}\zeta_{j_3}^{(i)}\right)=$$

$$=\underset{p\to\infty}{\text{l.i.m.}}\left(\frac{1}{6}\left(\sum_{j_1=0}^{p}C_{j_1}\zeta_{j_1}^{(i)}\right)^3-\frac{1}{2}\sum_{j_1=0}^{p}C_{j_1}^2\sum_{j_3=0}^{p}C_{j_3}\zeta_{j_3}^{(i)}\right)=\frac{1}{3!}\left(\delta_{T,t}^3-3\delta_{T,t}\Delta_{T,t}\right).\quad(1.37)$$

Последний шаг в (1.37) следует из равенства $\underset{p\to\infty}{\text{l.i.m.}}\left(\sum_{j_1=0}^{p}C_{j_1}\zeta_{j_1}^{(i)}\right)^3=\delta_{T,t}^3$, которое несложно получить при $q=8$ из (1.36).

Также мы использовали для рассматриваемого случая следующие соотношения между коэффициентами Фурье: $C_{j_1j_2}+C_{j_2j_1}=C_{j_1}C_{j_2},\ 2C_{j_1j_1}=C_{j_1}^2,\ C_{j_1j_2j_3}+C_{j_1j_3j_2}+C_{j_2j_3j_1}+C_{j_2j_1j_3}+C_{j_3j_2j_1}+C_{j_3j_1j_2}=C_{j_1}C_{j_2}C_{j_3},$ $2\left(C_{j_1j_1j_3}+C_{j_1j_3j_1}+C_{j_3j_1j_1}\right)=C_{j_1}^2C_{j_3},\ 6C_{j_1j_1j_1}=C_{j_1}^3$ и формулу (2.162) при $k=2,\ 3$.

Случаи $k=4,\ 5,\ 6,\ 7$ могут быть рассмотрены аналогично с привлечением формулы (2.162) при $k=4,\ 5,\ 6,\ 7$.

1.6 О применении полных ортонормированных разрывных систем функций в теореме 1

При анализе доказательства теоремы 1 возникает естественный вопрос: можно ли ослабить условие непрерывности функций $\phi_j(x);\ j=1,\ 2,\ldots$?

Будем говорить, что функция $f(x):[t,T]\to\Re^1$ удовлетворяет условию $(\star)$, если она непрерывна на отрезке $[t,T]$ за исключением может быть конечного числа точек конечного разрыва, а также непрерывна справа на отрезке $[t,T]$.

Далее предположим, что $\{\phi_j(x)\}_{j=0}^{\infty}$ — полная ортонормированная в пространсве $L_2([t,T])$ система функций, причем $\phi_j(x),\ j<\infty$ удовлетворяет условию $(\star)$.

Нетрудно видеть, что непрерывность функций $\phi_j(x)$ существенно использовалась при доказательстве теоремы 1 в двух местах: лемма 3 и формула (1.13).

Ясно, что без ущерба общности разбиение $\{\tau_j\}_{j=0}^{N}$ отрезка $[t,T]$ в лемме 3 и формуле (1.13) можно взять столь "мелким", что среди узлов τ_j этого разбиения окажутся все точки разрыва функций $\varphi_1(\tau)=\phi_{j_1}(\tau)$, $\ldots,\varphi_k(\tau)=\phi_{j_k}(\tau);\ j_1,\ldots,j_k<\infty$ и среди точек $(\tau_{j_1},\ldots,\tau_{j_k});\ 0\le j_1<\ldots<j_k\le N-1$ окажутся все точки разрыва функции $\Phi(t_1,\ldots,t_k)$, в которую также входят функции $\phi_{j_1}(t_1),\ldots,\phi_{j_k}(t_k)$ при обращении к формуле (1.13) в концовке доказательства теоремы 1.

Покажем, как следует модифицировать доказательства леммы 3 и формулы (1.13) в том случае, когда $\{\phi_j(x)\}_{j=0}^{\infty}$ — полная ортонормированная в пространсве $L_2([t,T])$ система функций, причем $\phi_j(x),\ j<\infty$ удовлетворяет условию $(\star)$.

Сначала обратимся к лемме 3. В процессе доказательства этой леммы были получены соотношения:

$$
\mathsf{M}\left\{\left|\sum_{j=0}^{N-1} J[\Delta\varphi_l]_{\tau_{j+1},\tau_j}\right|^4\right\} = \sum_{j=0}^{N-1} \mathsf{M}\left\{\left|J[\Delta\varphi_l]_{\tau_{j+1},\tau_j}\right|^4\right\} +
$$

$$
+6\sum_{j=0}^{N-1} \mathsf{M}\left\{\left|J[\Delta\varphi_l]_{\tau_{j+1},\tau_j}\right|^2\right\} \sum_{q=0}^{j-1} \mathsf{M}\left\{\left|J[\Delta\varphi_l]_{\tau_{q+1},\tau_q}\right|^2\right\}, \tag{1.38}
$$

$$
\mathsf{M}\left\{\left|J[\Delta\varphi_l]_{\tau_{j+1},\tau_j}\right|^2\right\} = \int\limits_{\tau_j}^{\tau_{j+1}} (\varphi_l(\tau_j) - \varphi_l(s))^2 ds, \tag{1.39}
$$

$$
\mathsf{M}\left\{\left|J[\Delta\varphi_l]_{\tau_{j+1},\tau_j}\right|^4\right\} = 3\left(\int\limits_{\tau_j}^{\tau_{j+1}} (\varphi_l(\tau_j) - \varphi_l(s))^2 ds\right)^2. \tag{1.40}
$$

Предположим, что функции $\varphi_l(s)$; $l = 1,\ldots,k$ удовлетворяют условию $(\star)$, а разбиение $\{\tau_j\}_{j=0}^{N-1}$ содержит среди своих узлов все точки разрыва функций $\varphi_l(s)$; $l = 1,\ldots,k$. Это означает, что для интеграла $\int\limits_{\tau_j}^{\tau_{j+1}}(\varphi_l(\tau_j) - \varphi_l(s))^2 ds$ подынтегральная функция непрерывна при $[\tau_j,\ \tau_{j+1})$ и возможно терпит конечный разрыв в точке τ_{j+1}.

Пусть $\mu \in (0,\ \Delta\tau_j)$ и фиксировано, тогда в силу непрерывности, а значит и равномерной непрерывности функций $\varphi_l(s)$; $l = 1,\ldots,k$ на отрезке $[\tau_j,\ \tau_{j+1} - \mu]$ имеем:

$$
\int\limits_{\tau_j}^{\tau_{j+1}} (\varphi_l(\tau_j) - \varphi_l(s))^2 ds = \int\limits_{\tau_j}^{\tau_{j+1}-\mu} (\varphi_l(\tau_j) - \varphi_l(s))^2 ds +
$$

$$
+\int\limits_{\tau_{j+1}-\mu}^{\tau_{j+1}} (\varphi_l(\tau_j) - \varphi_l(s))^2 ds < \varepsilon^2(\Delta\tau_j - \mu) + M^2\mu. \tag{1.41}
$$

При получении неравенства (1.41) предполагалось, что $\Delta\tau_j < \delta$; $j = 0,\ 1,\ldots,N-1$ ($\delta > 0$ найдено по любому $\varepsilon > 0$ и не зависит от s); $|\varphi_l(\tau_j) - \varphi_l(s)| < \varepsilon$ при $s \in [\tau_j,\ \tau_{j+1}-\mu]$ (в силу равномерной непрерывности функций $\varphi_l(s)$; $l = 1,\ldots,k$); $|\varphi_l(\tau_j) - \varphi_l(s)| < M$ при $s \in [\tau_{j+1} - \mu,\ \tau_{j+1}]$, M — постоянная; потенциальная точка разрыва функции $\varphi_l(s)$ предполагается в узле τ_{j+1}.

Осуществляя предельный переход в неравенстве (1.41) при $\mu \to +0$, получаем следующую оценку:

$$
\int\limits_{\tau_j}^{\tau_{j+1}} (\varphi_l(\tau_j) - \varphi_l(s))^2 ds \le \varepsilon^2\Delta\tau_j.
$$

Используя эту оценку для оценки правой части (1.38), получаем

$$\mathsf{M}\left\{\left|\sum_{j=0}^{N-1} J[\Delta\varphi_l]_{\tau_{j+1},\tau_j}\right|^4\right\} \le \varepsilon^4\left(3\sum_{j=0}^{N-1}(\Delta\tau_j)^2 + 6\sum_{j=0}^{N-1}\Delta\tau_j\sum_{q=0}^{j-1}\Delta\tau_q\right) <$$

$$< 3\varepsilon^4\left(\delta(T-t)+(T-t)^2\right). \tag{1.42}$$

Отсюда следует, что $\mathsf{M}\left\{\left|\sum\limits_{j=0}^{N-1} J[\Delta\varphi_l]_{\tau_{j+1},\tau_j}\right|^4\right\} \to 0$ при $N\to\infty$ и лемма 3 остается справедливой.

Теперь приведем пояснения по поводу справедливости формулы (1.13), когда $\{\phi_j(x)\}_{j=0}^{\infty}$ — полная ортонормированная в пространсве $L_2([t,T])$ система функций, причем $\phi_j(x)$, $j<\infty$ удовлетворяет условию $(\star)$.

Рассмотрим случай $k=3$ и представление (1.15). Покажем, что в рассматриваемом случае первый предел в правой части (1.15) равен нулю (аналогично показывается, что второй предел в правой части (1.15) равен нулю; доказательство равенства нулю второго предела в правой части (1.14) такое же, как и для случая непрерывных функций $\phi_j(x)$; $j=0,\ 1,\ldots$).

Второй момент допредельного выражения первого предела в правой части (1.15) имеет вид

$$\sum_{j_3=0}^{N-1}\sum_{j_2=0}^{j_3-1}\sum_{j_1=0}^{j_2-1}\int\limits_{\tau_{j_2}}^{\tau_{j_2+1}}\int\limits_{\tau_{j_1}}^{\tau_{j_1+1}}\left(\Phi(t_1,t_2,\tau_{j_3})-\Phi(t_1,\tau_{j_2},\tau_{j_3})\right)^2 dt_1dt_2\Delta\tau_{j_3}.$$

Далее для фиксированных $\mu\in(0,\ \Delta\tau_{j_2})$ и $\rho\in(0,\ \Delta\tau_{j_1})$ имеем

$$\int\limits_{\tau_{j_2}}^{\tau_{j_2+1}}\int\limits_{\tau_{j_1}}^{\tau_{j_1+1}}\left(\Phi(t_1,t_2,\tau_{j_3})-\Phi(t_1,\tau_{j_2},\tau_{j_3})\right)^2 dt_1dt_2 =$$

$$= \left(\int\limits_{\tau_{j_2}}^{\tau_{j_2+1}-\mu} + \int\limits_{\tau_{j_2+1}-\mu}^{\tau_{j_2+1}}\right)\left(\int\limits_{\tau_{j_1}}^{\tau_{j_1+1}-\rho} + \int\limits_{\tau_{j_1+1}-\rho}^{\tau_{j_1+1}}\right)\left(\Phi(t_1,t_2,\tau_{j_3})-\Phi(t_1,\tau_{j_2},\tau_{j_3})\right)^2 dt_1dt_2$$

$$= \left(\int\limits_{\tau_{j_2}}^{\tau_{j_2+1}-\mu}\int\limits_{\tau_{j_1}}^{\tau_{j_1+1}-\rho} + \int\limits_{\tau_{j_2}}^{\tau_{j_2+1}-\mu}\int\limits_{\tau_{j_1+1}-\rho}^{\tau_{j_1+1}} + \int\limits_{\tau_{j_2+1}-\mu}^{\tau_{j_2+1}}\int\limits_{\tau_{j_1}}^{\tau_{j_1+1}-\rho} + \int\limits_{\tau_{j_2+1}-\mu}^{\tau_{j_2+1}}\int\limits_{\tau_{j_1+1}-\rho}^{\tau_{j_1+1}}\right)\times$$

$$\times\left(\Phi(t_1,t_2,\tau_{j_3})-\Phi(t_1,\tau_{j_2},\tau_{j_3})\right)^2 dt_1dt_2 <$$

$$< \varepsilon^2\left(\Delta\tau_{j_2}-\mu\right)\left(\Delta\tau_{j_1}-\rho\right) + M^2\rho\left(\Delta\tau_{j_2}-\mu\right) + M^2\mu\left(\Delta\tau_{j_1}-\rho\right) + M^2\mu\rho, \tag{1.43}$$

где M — постоянная; $\Delta\tau_j<\delta$; $j=0,\ 1,\ldots,N-1$ ($\delta>0$ найдено по любому $\varepsilon>0$ и не зависит от точек (t_1,t_2,τ_{j_3}), $(t_1,\tau_{j_2},\tau_{j_3})$); предполагается также, что разбиение $\{\tau_j\}_{j=0}^{N-1}$ содержит среди своих узлов все точки разрыва функции $\Phi(t_1, t_2, t_3)$ по каждой переменной; потенциальные точки разрыва указанной функции по каждой переменной при получении (1.43) предполагаются в узлах $\tau_{j_1+1}, \tau_{j_2+1}, \tau_{j_3+1}$.

Поясним более подробно, как мы получили неравенство (1.43). Поскольку функция $\Phi(t_1, t_2, t_3)$ непрерывна на замкнутом ограниченном множестве $Q_3 = \{(t_1, t_2, t_3) : t_1 \in [\tau_{j_1}, \tau_{j_1+1} - \rho], t_2 \in [\tau_{j_2}, \tau_{j_2+1} - \mu], t_3 \in [\tau_{j_3}, \tau_{j_3+1} - \nu],\}$, где ρ, μ, ν — фиксированные малые положительные числа ($\nu \in (0,\ \Delta\tau_{j_3})$, $\mu \in (0,\ \Delta\tau_{j_2})$, $\rho \in (0,\ \Delta\tau_{j_1})$), то она и равномерно непрерывна на этом множестве, а также ограничена на замкнутом множестве D_3.

Так как расстояние между точками (t_1, t_2, τ_{j_3}), $(t_1, \tau_{j_2}, \tau_{j_3}) \in Q_3$ очевидно меньше δ при $\Delta\tau_j < \delta$; $j = 0,\ 1, \ldots, N-1$, то $|\Phi(t_1, t_2, \tau_{j_3}) - \Phi(t_1, \tau_{j_2}, \tau_{j_3})| < \varepsilon$. Это неравенство использовалось при оценке первого двойного интеграла в (1.43). При оценке трех оставшихся двойных интегралов использовалось свойство ограниченности функции $\Phi(t_1, t_2, t_3)$ в виде неравенства $|\Phi(t_1, t_2, \tau_{j_3}) - \Phi(t_1, \tau_{j_2}, \tau_{j_3})| < M$.

Осуществляя предельный переход в неравенстве (1.43) при $\mu, \rho \to +0$ получаем оценку

$$\int\limits_{\tau_{j_2}}^{\tau_{j_2+1}} \int\limits_{\tau_{j_1}}^{\tau_{j_1+1}} \left(\Phi(t_1, t_2, \tau_{j_3}) - \Phi(t_1, \tau_{j_2}, \tau_{j_3})\right)^2 dt_1 dt_2 \le \varepsilon^2 \Delta\tau_{j_2} \Delta\tau_{j_1}.$$

Использование этой оценки дает

$$\sum_{j_3=0}^{N-1} \sum_{j_2=0}^{j_3-1} \sum_{j_1=0}^{j_2-1} \int\limits_{\tau_{j_2}}^{\tau_{j_2+1}} \int\limits_{\tau_{j_1}}^{\tau_{j_1+1}} \left(\Phi(t_1, t_2, \tau_{j_3}) - \Phi(t_1, \tau_{j_2}, \tau_{j_3})\right)^2 dt_1 dt_2 \Delta\tau_{j_3} \le$$

$$\le \varepsilon^2 \sum_{j_3=0}^{N-1} \sum_{j_2=0}^{j_3-1} \sum_{j_1=0}^{j_2-1} \Delta\tau_{j_1} \Delta\tau_{j_2} \Delta\tau_{j_3} < \varepsilon^2 \frac{(T-t)^3}{6}.$$

Последняя оценка означает, что в рассматриваемом случае первый предел в правой части (1.15) равен нулю (аналогично показывается, что второй предел в правой части (1.15) равен нулю).

Таким образом формула (1.13) справедлива при $k = 3$ в рассмотренном случае. Аналогично проводится обоснование и при $k = 2$ или $k > 3$.

Таким образом, в теореме 1 можно использовать полные ортонормированные в пространстве $L_2([t, T])$ системы функций $\{\phi_j(x)\}_{j=0}^{\infty}$, для которых $\phi_j(x)$, $j < \infty$ удовлетворяет условию $(\star)$.

Примером такой системы функций может служить полная ортонормированная в пространстве $L_2([t,T])$ система функций Хаара:

$$\phi_0(x)=\frac{1}{\sqrt{T-t}},\ \phi_{nj}(x)=\frac{1}{\sqrt{T-t}}\varphi_{nj}\left(\frac{x-t}{T-t}\right),$$

где $n=0,\ 1,\ldots;\ j=1,\ 2,\ldots,2^n$, а функции $\varphi_{nj}(x)$ имеют вид:

$$\varphi_{nj}(x)=\begin{cases}2^{\frac{n}{2}},\ x\in\left[\frac{j-1}{2^n},\ \frac{j-1}{2^n}+\frac{1}{2^{n+1}}\right)\\ -2^{\frac{n}{2}},\ x\in\left[\frac{j-1}{2^n}+\frac{1}{2^{n+1}},\ \frac{j}{2^n}\right)\\ 0\ \text{иначе}\end{cases};$$

$n=0,\ 1,\ldots;\ j=1,\ 2,\ldots,\ 2^n$ (мы выбираем значения функций Хаара в точках разрыва так, чтобы они были непрерывны справа).

Другим примером подобной системы функций служит полная ортонормированная в пространстве $L_2([t,T])$ система функций Радемахера–Уолша:

$$\phi_0(x)=\frac{1}{\sqrt{T-t}},\ \phi_{m_1\ldots m_k}(x)=\frac{1}{\sqrt{T-t}}\varphi_{m_1}\left(\frac{x-t}{T-t}\right)\ldots\varphi_{m_k}\left(\frac{x-t}{T-t}\right),$$

где $0<m_1<\ldots<m_k;\ m_1,\ldots,m_k=1,\ 2,\ldots;\ k=1,\ 2,\ldots;\ \varphi_m(x)=(-1)^{[2^m x]};\ x\in[0,1];\ m=1,\ 2,\ldots;\ [y]$ — целая часть y.

1.7 Замечание о применении полных ортонормированных систем функций в теореме 1

Отметим, что, вообще говоря, функции $\phi_j(s)$ полной ортонормированной системы функций $\{\phi_j(s)\}_{j=0}^{\infty}$ в пространстве $L_2([t,T])$ зависят не только от s, но и от $t,\ T$.

Например, полные ортонормированные системы полиномов Лежандра и тригонометрических функций в пространстве $L_2([t,T])$ имеют соответственно следующий вид:

$$\phi_j(s,t,T)=\sqrt{\frac{2j+1}{T-t}}P_j\left(\left(s-\frac{T+t}{2}\right)\frac{2}{T-t}\right),$$

$P_j(s)$ — полином Лежандра;

$$\phi_j(s,t,T)=\frac{1}{\sqrt{T-t}}\begin{cases}1 & \text{при } j=0\\ \sqrt{2}\sin\frac{2\pi r(s-t)}{T-t} & \text{при } j=2r-1\\ \sqrt{2}\cos\frac{2\pi r(s-t)}{T-t} & \text{при } j=2r\end{cases};$$

$r = 1,\ 2, \ldots .$

Отметим, что указанные системы функций будут применяются в контексте реализации численных методов для стохастических дифференциальных уравнений Ито для последовательностей временных отрезков вида: $[T_0, T_1],\ [T_1, T_2],\ [T_2, T_3], \ldots,$ т.е. в простраствах $L_2([T_0, T_1]),\ L_2([T_1, T_2]),$ $L_2([T_2, T_3]), \ldots .$

Поясним, что зависимость функций $\phi_j(s, t, T)$ от $t,\ T$ (в дальнейшем эти постоянные будут иметь смысл фиксированных моментов времени) не повлияет на основные свойства независимости случайных величин $\zeta_{(j_l)T,t}^{(i_l)} = \int\limits_t^T \phi_{j_l}(s, t, T) d\mathbf{w}_s^{(i_l)};\ i_l \neq 0;\ l = 1, \ldots, k.$

Действительно, при фиксированных $t,\ T$, в силу ортонормированности приведенных систем функций, имеем:

$$\mathsf{M}\left\{\zeta_{(j_l)T,t}^{(i_l)} \zeta_{(j_r)T,t}^{(i_r)}\right\} = \mathbf{1}_{\{i_l = i_r \neq 0\}} \mathbf{1}_{\{j_l = j_r\}},$$

где $\zeta_{(j_l)T,t}^{(i_l)} = \int\limits_t^T \phi_{j_l}(s, t, T) d\mathbf{w}_s^{(i_l)};\ i_l \neq 0;\ l,\ r = 1, \ldots, k.$

С другой стороны случайные величины $\zeta_{(j_l)T_1,t_1}^{(i_l)} = \int\limits_{t_1}^{T_1} \phi_{j_l}(s, t_1, T_1) d\mathbf{w}_s^{(i_l)}$ и $\zeta_{(j_l)T_2,t_2}^{(i_l)} = \int\limits_{t_2}^{T_2} \phi_{j_l}(s, t_2, T_2) d\mathbf{w}_s^{(i_l)}$ являются независимыми при $[t_1, T_1] \cap [t_2, T_2] = \emptyset$ (возможен случай $T_1 = t_2$) по свойству стохастического интеграла Ито.

Таким образом два важных свойства независимости случайных величин $\zeta_{(j_l)T,t}^{(i_l)}$, которые являются основным мотивом их использования, сохранены.

В дальнейшем, также как и раньше, вместо $\phi_j(s, t, T)$ мы будем для краткости писать $\phi_j(s)$.

1.8 Сходимость в среднем степени $2n$ разложений повторных стохастических интегралов Ито из теоремы 1

При построении разложений стохастических интегралов Ито из теоремы 1 мы сохранили всю информацию об этих интегралах, поэтому естественно ожидать, что указанные разложения будут сходиться не только в среднеквадратическом, но и в более сильных вероятностных смыслах.

Получим общую оценку, которая доказывает сходимость в среднем степени $2n$, $n \in N$ аппроксимаций из теоремы 1.

Согласно обозначениям теоремы 1:

$$R_{T,t}^{p_1,\ldots,p_k} = \sum_{(t_1,\ldots,t_k)} \int\limits_t^T \ldots \int\limits_t^{t_2} R_{p_1\ldots p_k}(t_1,\ldots,t_k) d\mathbf{f}_{t_1}^{(i_1)} \ldots d\mathbf{f}_{t_k}^{(i_k)}, \tag{1.44}$$

$$R_{p_1\ldots p_k}(t_1,\ldots,t_k) \stackrel{\rm def}{=} K(t_1,\ldots,t_k) - \sum_{j_1=0}^{p_1} \ldots \sum_{j_k=0}^{p_k} C_{j_k\ldots j_1} \prod_{l=1}^{k} \phi_{j_l}(t_l).$$

Для определенности будем считать, что $i_1,\ldots,i_k = 1,\ldots,m$ (этого очевидно вполне достаточно для унифицированных разложений Тейлора–Ито см. разд. 7.9), а расшифровку остальных обозначений данного раздела см. по тексту доказательства теоремы 1.

Отметим, что при доказательстве теоремы 1 было установлено, что

$$\mathsf{M}\{(R_{T,t}^{p_1,\ldots,p_k})^2\} \le C_k \sum_{(t_1,\ldots,t_k)} \int\limits_t^T \ldots \int\limits_t^{t_2} R_{p_1\ldots p_k}^2(t_1,\ldots,t_k) dt_1 \ldots dt_k =$$

$$= C_k \int\limits_{[t,T]^k} R_{p_1\ldots p_k}^2(t_1,\ldots,t_k) dt_1 \ldots dt_k,\ C_k < \infty.$$

Положим

$$\eta_{t_l,t}^{(l-1)} \stackrel{\rm def}{=} \int\limits_t^{t_l} \ldots \int\limits_t^{t_2} R_{p_1\ldots p_k}(t_1,\ldots,t_k) d\mathbf{f}_{t_1}^{(i_1)} \ldots d\mathbf{f}_{t_{l-1}}^{(i_{l-1})};\ l = 2,\ 3,\ldots,k+1,$$

$$\eta_{t_{k+1},t}^{(k)} \stackrel{\rm def}{=} \eta_{T,t}^{(k)};\ \eta_{T,t}^{(k)} \stackrel{\rm def}{=} \int\limits_t^{T} \ldots \int\limits_t^{t_2} R_{p_1\ldots p_k}(t_1,\ldots,t_k) d\mathbf{f}_{t_1}^{(i_1)} \ldots d\mathbf{f}_{t_k}^{(i_k)}.$$

С помощью формулы Ито (см. разд. 7.3) нетрудно показать, что

$$\mathsf{M}\left\{\left(\int\limits_{t_0}^{t} \xi_\tau df_\tau\right)^{2n}\right\} = n(2n-1)\int\limits_{t_0}^{t} \mathsf{M}\left\{\left(\int\limits_{t_0}^{s} \xi_u df_u\right)^{2n-2} \xi_s^2\right\} ds.$$

Применив в правой части под знаком интеграла неравенство Гельдера при $p = n/(n-1)$, $q = n$ и воспользовавшись возрастанием величины $\mathsf{M}\left\{\left(\int\limits_{t_0}^{t} \xi_\tau df_\tau\right)^{2n}\right\}$ с ростом t, получим:

$$\mathsf{M}\left\{\left(\int\limits_{t_0}^{t} \xi_\tau df_\tau\right)^{2n}\right\} \le n(2n-1)\left(\mathsf{M}\left\{\left(\int\limits_{t_0}^{t} \xi_\tau df_\tau\right)^{2n}\right\}\right)^{\frac{n-1}{n}} \int\limits_{t_0}^{t} (\mathsf{M}\{\xi_s^{2n}\})^{\frac{1}{n}} ds.$$

Возводя полученное неравенство в степень n и сокращая затем на $\left(\mathsf{M}\left\{\left(\int\limits_{t_0}^{t} \xi_\tau df_\tau\right)^{2n}\right\}\right)^{n-1}$ получаем следующую модификацию (7.3)

$$\mathsf{M}\left\{\left(\int\limits_{t_0}^{t} \xi_\tau df_\tau\right)^{2n}\right\} \le (n(2n-1))^n\left(\int\limits_{t_0}^{t} (\mathsf{M}\{\xi_s^{2n}\})^{\frac{1}{n}} ds\right)^n. \qquad (1.45)$$

Используя оценку (1.45) имеем

$$\mathsf{M}\{(\eta_{T,t}^{(k)})^{2n}\} \le (n(2n-1))^n\left(\int\limits_{t}^{T} (\mathsf{M}\{(\eta_{t_k,t}^{(k-1)})^{2n}\})^{\frac{1}{n}} dt_k\right)^n \le$$

$$\le (n(2n-1))^n\left[\int\limits_{t}^{T}\left((n(2n-1))^n\left(\int\limits_{t}^{t_k} (\mathsf{M}\{(\eta_{t_{k-1},t}^{(k-2)})^{2n}\})^{\frac{1}{n}} dt_{k-1}\right)^n\right)^{\frac{1}{n}} dt_k\right]^n =$$

$$= (n(2n-1))^{2n}\left(\int\limits_{t}^{T}\int\limits_{t}^{t_k} (\mathsf{M}\{(\eta_{t_{k-1},t}^{(k-2)})^{2n}\})^{\frac{1}{n}} dt_{k-1}dt_k\right)^n \le \ldots$$

$$\ldots \le (n(2n-1))^{n(k-1)}\left(\int\limits_{t}^{T}\int\limits_{t}^{t_k}\ldots\int\limits_{t}^{t_3} (\mathsf{M}\{(\eta_{t_2,t}^{(1)})^{2n}\})^{\frac{1}{n}} dt_3\ldots dt_{k-1}dt_k\right)^n =$$

$$= (n(2n-1))^{n(k-1)}(2n-1)!!\left(\int\limits_{t}^{T}\ldots\int\limits_{t}^{t_2} R_{p_1\ldots p_k}^2(t_1,\ldots,t_k)dt_1\ldots dt_k\right)^n \le$$

$$\le (n(2n-1))^{n(k-1)}(2n-1)!!\left(\int\limits_{[t,T]^k} R_{p_1\ldots p_k}^2(t_1,\ldots,t_k)dt_1\ldots dt_k\right)^n.$$

Предпоследний переход получен с помощью формулы $\mathsf{M}\{(\eta_{t_2,t}^{(1)})^{2n}\} = (2n-1)!!\left(\int\limits_{t}^{t_2} R_{p_1\ldots p_k}^2(t_1,\ldots,t_k)dt_1\right)^n$, которая вытекает из гауссовости $\eta_{t_2,t}^{(1)} = \int\limits_{t}^{t_2} R_{p_1\ldots p_k}(t_1,\ldots,t_k)d\mathbf{f}_{t_1}^{(i_1)}$.

Аналогичным образом оценивается каждое слагаемое в правой части (1.44). Тогда из (1.44) с помощью неравенства Минковского окончательно получаем

$$\mathsf{M}\{(R_{T,t}^{p_1,\ldots,p_k})^{2n}\} \le$$

$$\le \left(k!\left((n(2n-1))^{n(k-1)}(2n-1)!!\left(\int\limits_{[t,T]^k} R_{p_1\ldots p_k}^2(t_1,\ldots,t_k)dt_1\ldots dt_k\right)^n\right)^{\frac{1}{2n}}\right)^{2n}$$

$$= (k!)^{2n}(n(2n-1))^{n(k-1)}(2n-1)!!\left(\int\limits_{[t,T]^k} R_{p_1\ldots p_k}^2(t_1,\ldots,t_k)dt_1\ldots dt_k\right)^n. \quad (1.46)$$

Неравенство (1.46) означает, что аппроксимации повторных стохастических интегралов Ито, полученные по теореме 1, сходятся в среднем степени $2n$, $n \in N$, поскольку, согласно этой теореме, $\int\limits_{[t,T]^k} R^2_{p_1 \ldots p_k}(t_1, \ldots, t_k) dt_1 \ldots dt_k \to 0$ при $p_1, \ldots, p_k \to \infty$.

Глава 2

Разложения повторных стохастических интегралов Стратоновича, основанные на обобщенных кратных и повторных рядах Фурье

2.1 Разложения повторных стохастических интегралов Стратоновича 1 и 2 кратности

Пусть $\psi_1(\tau),\ \psi_2(\tau)$ — непрерывно дифференцируемые на промежутке $[t, T]$ функции.

Для случая $k=1$ очевидно имеем

$$\int\limits_t^{*T}\psi_1(t_1)d\mathbf{f}_{t_1}^{(i_1)}=\sum_{j_1=0}^{\infty}C_{j_1}\zeta_{j_1}^{(i_1)},$$

где ряд сходится в среднеквадратическом смысле;

$$C_{j_1}=\int\limits_t^T\psi_1(t_1)\phi_{j_1}(t_1)dt_1;\ \zeta_{j_1}^{(i_1)}=\int\limits_t^T\phi_{j_1}(t_1)d\mathbf{f}_{t_1}^{(i_1)};\ i_1=1,\ldots,m.$$

Согласно стандартной связи стохастических интегралов Стратоновича и Ито с вероятностью 1 имеем

$$J^*[\psi^{(2)}]_{T,t}=J[\psi^{(2)}]_{T,t}+\frac{1}{2}\mathbf{1}_{\{i_1=i_2\neq 0\}}\int\limits_t^T\psi_1(t_1)\psi_2(t_1)dt_1,$$

где

$$J[\psi^{(2)}]_{T,t}=\int\limits_t^T\psi_2(t_2)\int\limits_t^{t_2}\psi_1(t_1)d\mathbf{f}_{t_1}^{(i_1)}d\mathbf{f}_{t_2}^{(i_2)},$$

$$J^*[\psi^{(2)}]_{T,t}=\int\limits_t^{*T}\psi_2(t_2)\int\limits_t^{*t_2}\psi_1(t_1)d\mathbf{f}_{t_1}^{(i_1)}d\mathbf{f}_{t_2}^{(i_2)}.$$

С другой стороны по теореме 1

$$\int\limits_t^T\psi_2(t_2)\int\limits_t^{t_2}\psi_1(t_1)d\mathbf{f}_{t_1}^{(i_1)}d\mathbf{f}_{t_2}^{(i_2)}=\sum_{j_1,j_2=0}^{\infty}C_{j_2j_1}\left(\zeta_{j_1}^{(i_1)}\zeta_{j_2}^{(i_2)}-\mathbf{1}_{\{i_1=i_2\neq 0\}}\mathbf{1}_{\{j_1=j_2\}}\right)=$$

$$=\sum_{j_1,j_2=0}^{\infty}C_{j_2j_1}\zeta_{j_1}^{(i_1)}\zeta_{j_2}^{(i_2)}-\mathbf{1}_{\{i_1=i_2\neq 0\}}\sum_{j_1=0}^{\infty}C_{j_1j_1}.$$

Возникают естественные вопросы: законно ли разбиение предела на два предела в последней формуле и справедливо ли равенство (оно и обосновывает возможность такого разбиения):

$$\frac{1}{2}\int\limits_t^T\psi_1(t_1)\psi_2(t_1)dt_1=\sum_{j_1=0}^{\infty}C_{j_1j_1}. \tag{2.1}$$

Поскольку при $\psi_1(s)\equiv\psi_2(s)$ выполняется равенство $C_{j_1j_1}=\frac{1}{2}C_{j_1}^2$, то в этом случае равенство (2.1) является следствием равенства Парсеваля.

Для проверки равенства (2.1) в общем случае достаточно показать, что

$$\sum_{j_1,j_2=0}^{\infty}C_{j_2j_1}\phi_{j_1}(t_1)\phi_{j_2}(t_1)=\frac{1}{2}\psi_1(t_1)\psi_2(t_1), \tag{2.2}$$

где кратный ряд сходится равномерно по t_1 на отрезке $[t,T]$.

Очевидно, проинтегировав равенство (2.2) и воспользовавшись ортонормированностью функций $\phi_j(\tau)$ мы получим равенство (2.1), что в свою очередь уже будет означать, что

$$J^*[\psi^{(2)}]_{T,t}=\sum_{j_1,j_2=0}^{\infty}C_{j_2j_1}\zeta_{j_1}^{(i_1)}\zeta_{j_2}^{(i_2)}, \tag{2.3}$$

где ряд сходится в среднеквадратическом смысле.

Для доказательства (2.2) нам придется обратиться к сведениям из теории кратных рядов Фурье, суммируемых по Принсгейму.

Для каждого $\delta>0$ назовем модулем непрерывности функции $f(\mathbf{t})$ $(\mathbf{t}=(t_1,\ldots,t_k))$ в k-мерной области D $(k\geq 1)$ точную верхнюю грань *разности* $|f(\mathbf{t}')-f(\mathbf{t}'')|$ *на множестве всех точек* $\mathbf{t}'$, $\mathbf{t}''$, *которые принадлежат области* D, *причем расстояние* $\rho(\mathbf{t}',\mathbf{t}'')<\delta$.

Будем говорить, что функция k $(k\ge 1)$ *переменных* $f(\mathbf{t})$ $(\mathbf{t}=(t_1,\ldots,t_k))$ *принадлежит в области* D *классу Гельдера с показателем* 1 $(f(\mathbf{t})\in C^1(D))$, *если модуль непрерывности функции* $f(\mathbf{t})$ $(\mathbf{t}=(t_1,\ldots,t_k))$ *в области* D *имеет порядок* $O(\delta)$.

Рассмотрим полную ортонормированную систему $\{\phi_j(x)\}_{j=0}^{\infty}$ на отрезке $[t,T]$.

Будем говорить, что эта система удовлетворяет условию $(\star\star)$, если система $\{\phi_j(x)\}_{j=0}^{\infty}$ такова, что для всякой функции k переменных, которая непрерывна на $[t,T]^k$ и принадлежит классу $C^1([t,T]^k)$ ее кратный ряд Фурье (суммируемый методом прямоугольных сумм) на $[t,T]^k$, построенный по системе функций $\{\phi_j(x)\}_{j=0}^{\infty}$, сходится равномерно к этой функции в $[t,T]^k$ и сходится на границе $[t,T]^k$.

В 1967г. Л.В. Жижиашвили установил, что прямоугольные суммы кратного тригонометрического ряда Фурье в гиперкубе $[t,T]^k$ функции k переменных сходятся равномерно в гиперкубе к этой функции, если она принадлежит $C^\alpha([t,T]^k)$; $\alpha>0$ (определение класса Гельдера с показателем $\alpha>0$ можно найти в известных руководствах по математическому анализу).

Известно также, что для справедливости аналогичного утверждения для рядов Фурье–Хаара, по крайней мере для двумерного случая, достаточно одной непрерывности функции двух переменных в квадрате $[t,T]^2$.

Автор полагает, что для двойных рядов Фурье–Лежандра аналогичная формулировка будет верной, если функция двух переменных принадлежит $C^1([t,T]^2)$. Если же этого условия недостаточно, то по крайней мере результат будет верным, если функция постоянна в $[t,T]^2$ (это соответствует $\psi_i(\tau)\equiv 1$; $i=1,2,3$ в дальнейших рассуждениях).

Отметим также, что согласно (5.35), (5.36) формула (2.1) верна по крайней мере и при $\psi_1(\tau)\equiv t-\tau$, $\psi_2(\tau)\equiv 1$; $\psi_1(\tau)\equiv 1$, $\psi_2(\tau)\equiv t-\tau$; $\psi_1(\tau)$, $\psi_2(\tau)\equiv t-\tau$; $\psi_1(\tau)\equiv (t-\tau)^2$, $\psi_2(\tau)\equiv 1$; $\psi_1(\tau)\equiv 1$, $\psi_2(\tau)\equiv (t-\tau)^2$; $\tau\in[t,T]$.

Рассмотрим вспомогательную функцию:

$$K'(t_1,t_2)=\begin{cases}\psi_2(t_1)\psi_1(t_2),\ t_1\ge t_2\\ \psi_1(t_1)\psi_2(t_2),\ t_1\le t_2\end{cases},\ t_1,t_2\in[t,T]$$

и покажем, что она принадлежит $C^1([t,T]^2)$.

Рассмотрим приращение: $\Delta K' = K'(t_1,t_2) - K'(t_1^*,t_2^*)$, где

$$\sqrt{(t_1-t_1^*)^2+(t_2-t_2^*)^2}<\delta,\ (t_1,t_2),\ (t_1^*,t_2^*)\in[t,T]^2.$$

По формуле Лагранжа для $\psi_1(t_1^*)$, $\psi_2(t_1^*)$ на $[\min\{t_1,t_1^*\},\max\{t_1,t_1^*\}]$ и для $\psi_1(t_2^*)$, $\psi_2(t_2^*)$ на $[\min\{t_2,t_2^*\},\max\{t_2,t_2^*\}]$ придем к представлению:

$$\Delta K' = \begin{cases}\psi_2(t_1)\psi_1(t_2),\ t_1\ge t_2\\ \psi_1(t_1)\psi_2(t_2),\ t_1\le t_2\end{cases} - \begin{cases}\psi_2(t_1)\psi_1(t_2),\ t_1^*\ge t_2^*\\ \psi_1(t_1)\psi_2(t_2),\ t_1^*\le t_2^*\end{cases} + O(\delta).$$

Далее понятно, что разность, стоящая в правой части последнего равенства отлична от нуля и равна

$$\pm(\psi_1(t_1)\psi_2(t_2)-\psi_1(t_2)\psi_2(t_1))+O(\delta) \tag{2.4}$$

на множестве: $\mathrm{M}=\{(t_1,t_2):\min\{t_1,t_1+\varepsilon\}\le t_2\le\max\{t_1,t_1+\varepsilon\};\ t_1\in[t,T]\}$, где $\varepsilon=(t_1^*-t_1)-(t_2^*-t_2)=O(\delta)$.

Поскольку на множестве M : $|t_2-t_1|=O(\delta)$, то применяя формулу Лагранжа к $\psi_2(t_2)$, $\psi_1(t_2)$ на отрезке $[\min\{t_1,t_2\},\ \max\{t_1,t_2\}]$ и подставляя результат в (2.4), получим, что $K'(t_1,t_2)\in C^1([t,T]^2)$.

Разложим функцию $K'(t_1,t_2)$ в квадрате $[t,T]^2$ в кратный ряд Фурье, суммируемый методом прямоугольных сумм, т.е.

$$K'(t_1,t_2)=\lim_{n_1,n_2\to\infty}\sum_{j_1=0}^{n_1}\sum_{j_2=0}^{n_2}\int\limits_t^T\int\limits_t^T K'(t_1,t_2)\phi_{j_1}(t_1)\phi_{j_2}(t_2)dt_1dt_2\cdot\phi_{j_1}(t_1)\phi_{j_2}(t_2)=$$

$$=\lim_{n_1,n_2\to\infty}\sum_{j_1=0}^{n_1}\sum_{j_2=0}^{n_2}\left(\int\limits_t^T\psi_2(t_2)\phi_{j_2}(t_2)\left(\int\limits_t^{t_2}\psi_1(t_1)\phi_{j_1}(t_1)dt_1\right)dt_2+\right.$$

$$\left.+\int\limits_t^T\psi_1(t_2)\phi_{j_2}(t_2)\left(\int\limits_{t_2}^T\psi_2(t_1)\phi_{j_1}(t_1)dt_1\right)dt_2\right)\phi_{j_1}(t_1)\phi_{j_2}(t_2)=$$

$$=\lim_{n_1,n_2\to\infty}\sum_{j_1=0}^{n_1}\sum_{j_2=0}^{n_2}\left(C_{j_2j_1}+C_{j_1j_2}\right)\phi_{j_1}(t_1)\phi_{j_2}(t_2). \tag{2.5}$$

При получении (2.5) мы заменили порядок интегрирования во втором повторном интеграле.

Нетрудно видеть, что положив $t_1=t_2$ в (2.5), разбив предел в правой части полученного равенства на два предела и переобозначив j_1 на j_2, j_2 на j_1, n_1 на n_2 и n_2 на n_1 во втором пределе, получим

$$\psi_1(t_1)\psi_2(t_1)=2\lim_{n_1,n_2\to\infty}\sum_{j_1=0}^{n_1}\sum_{j_2=0}^{n_2}C_{j_2j_1}\phi_{j_1}(t_1)\phi_{j_2}(t_1).$$

Требуемое равенство получено.

Таким образом справедлива

Теорема 3. *Пусть выполнены следующие условия:*

1. $\psi_1(\tau), \psi_2(\tau)$ — *непрерывно дифференцируемые на промежутке* $[t, T]$ *функции;*

2. $\{\phi_j(x)\}_{j=0}^{\infty}$ — *полная ортонормированная на отрезке* $[t, T]$ *система функций, которая удовлетворяет при* $k = 2$ *условию* $(\star\star)$, *причем каждая ее функция при конечном* j *удовлетворяет условию* $(\star)$.

Тогда повторный стохастический интеграл Стратоновича второй кратности

$$J^*[\psi^{(2)}]_{T,t} = \int\limits_t^{*T} \psi_2(t_2) \int\limits_t^{*t_2} \psi_1(t_1) d\mathbf{f}_{t_1}^{(i_1)} d\mathbf{f}_{t_2}^{(i_2)} \ (i_1, i_2 = 1, \ldots, m)$$

разлагается в сходящийся в среднеквадратическом смысле кратный ряд

$$J^*[\psi^{(2)}]_{T,t} = \sum_{j_1, j_2 = 0}^{\infty} C_{j_2 j_1} \zeta_{j_1}^{(i_1)} \zeta_{j_2}^{(i_2)},$$

где сохранен смысл обозначений, введенных в формулировках теорем 1 *и* 2.

Приведем разложения повторных стохастических интегралов Стратоновича первой и второй кратностей с помощью теоремы 3 и полиномов Лежандра, тригонометрических функций, функций Хаара и функций Радемахера–Уолша.

С помощью полиномов Лежандра:

$$\int\limits_t^{*T} d\mathbf{f}_\tau^{(i_1)} = \sqrt{T-t}\,\zeta_0^{(i_1)},$$

$$\int\limits_t^{*T} (t-\tau) d\mathbf{f}_\tau^{(i_1)} = -\frac{(T-t)^{3/2}}{2} \left(\zeta_0^{(i_1)} + \frac{1}{\sqrt{3}} \zeta_1^{(i_1)} \right),$$

$$\int\limits_t^{*T} \int\limits_t^{*s} d\mathbf{f}_\tau^{(i_1)} d\mathbf{f}_s^{(i_2)} = \frac{T-t}{2} \left[\zeta_0^{(i_1)} \zeta_0^{(i_2)} + \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{4i^2-1}} \left\{ \zeta_{i-1}^{(i_1)} \zeta_i^{(i_2)} - \zeta_i^{(i_1)} \zeta_{i-1}^{(i_2)} \right\} \right].$$

Для системы тригонометрических функций:

$$\int\limits_t^{*T} d\mathbf{f}_\tau^{(i_1)} = \sqrt{T-t}\,\zeta_0^{(i_1)},$$

$$\int\limits_t^{*T}(t-\tau)d\mathbf{f}_\tau^{(i_1)}=-\frac{(T-t)^{\frac{3}{2}}}{2}\Bigl[\zeta_0^{(i_1)}-\frac{\sqrt{2}}{\pi}\sum_{r=1}^{\infty}\frac{1}{r}\zeta_{2r-1}^{(i_1)}\Bigr],$$

$$\int\limits_t^{*T}\int\limits_t^{*s}d\mathbf{f}_\tau^{(i_1)}d\mathbf{f}_s^{(i_2)}=\frac{1}{2}(T-t)\Bigl[\zeta_0^{(i_1)}\zeta_0^{(i_2)}+\frac{1}{\pi}\sum_{r=1}^{\infty}\frac{1}{r}\left\{\zeta_{2r}^{(i_1)}\zeta_{2r-1}^{(i_2)}-\zeta_{2r-1}^{(i_1)}\zeta_{2r}^{(i_2)}+\right.$$

$$\left.+\sqrt{2}\left(\zeta_{2r-1}^{(i_1)}\zeta_0^{(i_2)}-\zeta_0^{(i_1)}\zeta_{2r-1}^{(i_2)}\right)\right\}\Bigr].$$

С помощью системы функций Хаара:

$$\int\limits_t^{*T}d\mathbf{f}_\tau^{(i_1)}=\sqrt{T-t}\zeta_0^{(i_1)},$$

$$\int\limits_t^{*T}(t-\tau)d\mathbf{f}_\tau^{(i_1)}=-\frac{(T-t)^{\frac{3}{2}}}{2}\left(\zeta_0^{(i_1)}+\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{j=1}^{2^n}\bar{C}_{nj}\zeta_{nj}^{(i_1)}\right),$$

$$\int\limits_t^{*T}\int\limits_t^{*s}d\mathbf{f}_\tau^{(i_1)}d\mathbf{f}_s^{(i_2)}=\frac{T-t}{2}\left(\zeta_0^{(i_1)}\zeta_0^{(i_2)}+\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{j=1}^{2^n}\bar{C}_{nj}(\zeta_{nj}^{(i_2)}\zeta_0^{(i_1)}-\zeta_{nj}^{(i_1)}\zeta_0^{(i_2)})+\right.$$

$$\left.+\sum_{n_1,n_2=0}^{\infty}\sum_{j_1=1}^{2^{n_1}}\sum_{j_2=1}^{2^{n_2}}\bar{C}_{n_2j_2,n_1j_1}\zeta_{n_2j_2}^{(i_2)}\zeta_{n_1j_1}^{(i_1)}\right),$$

где

$$\bar{C}_{nj}=2^{\frac{n}{2}}\left(2\left(\frac{j-1}{2^n}+\frac{1}{2^{n+1}}\right)^2-\left(\frac{j-1}{2^n}\right)^2-\left(\frac{j}{2^n}\right)^2\right),$$

$$\bar{C}_{n_2j_2,n_1j_1}=2^{\frac{n_1+n_2}{2}}\left(\left(\left(\min\left\{\frac{j_2-1}{2^{n_2}}+\frac{1}{2^{n_2+1}},\ \frac{j_1-1}{2^{n_1}}+\frac{1}{2^{n_1+1}}\right\}-\frac{j_1-1}{2^{n_1}}\right)^2\right.\right.$$

$$\left.-\left(\max\left\{\frac{j_2-1}{2^{n_2}},\ \frac{j_1-1}{2^{n_1}}\right\}-\frac{j_1-1}{2^{n_1}}\right)^2\right)\times$$

$$\times\mathbf{1}_{\left\{\max\left\{\frac{j_2-1}{2^{n_2}},\ \frac{j_1-1}{2^{n_1}}\right\}<\min\left\{\frac{j_2-1}{2^{n_2}}+\frac{1}{2^{n_2+1}},\ \frac{j_1-1}{2^{n_1}}+\frac{1}{2^{n_1+1}}\right\}\right\}}-$$

$$-\left(\left(\min\left\{\frac{j_2}{2^{n_2}},\ \frac{j_1-1}{2^{n_1}}+\frac{1}{2^{n_1+1}}\right\}-\frac{j_1-1}{2^{n_1}}\right)^2-\right.$$

$$\left.-\left(\max\left\{\frac{j_2-1}{2^{n_2}}+\frac{1}{2^{n_2+1}},\ \frac{j_1-1}{2^{n_1}}\right\}-\frac{j_1-1}{2^{n_1}}\right)^2\right)\times$$

$$\times\mathbf{1}_{\left\{\max\left\{\frac{j_2-1}{2^{n_2}}+\frac{1}{2^{n_2+1}},\ \frac{j_1-1}{2^{n_1}}\right\}<\min\left\{\frac{j_2}{2^{n_2}},\ \frac{j_1-1}{2^{n_1}}+\frac{1}{2^{n_1+1}}\right\}\right\}}+$$

$$+\left(\left(\min\left\{\frac{j_2}{2^{n_2}},\ \frac{j_1}{2^{n_1}}\right\}-\frac{j_1}{2^{n_1}}\right)^2-\right.$$

$$\left.-\left(\max\left\{\frac{j_2-1}{2^{n_2}}+\frac{1}{2^{n_2+1}},\ \frac{j_1-1}{2^{n_1}}+\frac{1}{2^{n_1+1}}\right\}-\frac{j_1}{2^{n_1}}\right)^2\right)\times$$

$$
\times\mathbf{1}_{\left\{\max\left\{\frac{j_2-1}{2^{n_2}}+\frac{1}{2^{n_2+1}},\ \frac{j_1-1}{2^{n_1}}+\frac{1}{2^{n_1+1}}\right\}<\min\left\{\frac{j_2}{2^{n_2}},\ \frac{j_1}{2^{n_1}}\right\}\right\}}-
$$

$$
-\left(\left(\min\left\{\frac{j_2-1}{2^{n_2}}+\frac{1}{2^{n_2+1}},\ \frac{j_1}{2^{n_1}}\right\}-\frac{j_1}{2^{n_1}}\right)^2-\right.
$$

$$
\left.-\left(\max\left\{\frac{j_2-1}{2^{n_2}},\ \frac{j_1-1}{2^{n_1}}+\frac{1}{2^{n_1+1}}\right\}-\frac{j_1}{2^{n_1}}\right)^2\right)\times
$$

$$
\left.\times\mathbf{1}_{\left\{\max\left\{\frac{j_2-1}{2^{n_2}},\ \frac{j_1-1}{2^{n_1}}+\frac{1}{2^{n_1+1}}\right\}<\min\left\{\frac{j_2-1}{2^{n_2}}+\frac{1}{2^{n_2+1}},\ \frac{j_1}{2^{n_1}}\right\}\right\}}\right);
$$

$\zeta_0^{(i)}=\int\limits_t^T\phi_0(\tau)d\mathbf{f}_\tau^{(i)},\ \zeta_{nj}^{(l)}=\int\limits_t^T\phi_{nj}(\tau)d\mathbf{f}_\tau^{(l)};\ n=0,\ 1,\ldots;\ j=1,\ 2,\ldots,\ 2^n$ — независимые в совокупности по нижним индексам или при $i\ne l$ $(i,\ l=1,\ldots,m)$ стандартные гауссовские случайные величины; $i_1,\ i_2=1,\ldots,m.$

Для системы функций Радемахера–Уолша:

$$
\int\limits_t^{*T}d\mathbf{f}_\tau^{(i_1)}=\sqrt{T-t}\zeta_0^{(i_1)},
$$

$$
\int\limits_t^{*T}(t-\tau)d\mathbf{f}_\tau^{(i_1)}=-\frac{(T-t)^{\frac{3}{2}}}{2}\left(\zeta_0^{(i_1)}+\sum_{\substack{1\le m_1<\ldots<m_k\le\infty\\ 1\le k\le\infty}}\bar C_{m_1\ldots m_k}\zeta_{m_1\ldots m_k}^{(i_1)}\right),
$$

$$
\int\limits_t^{*T}\int\limits_t^{*s}d\mathbf{f}_\tau^{(i_1)}d\mathbf{f}_s^{(i_2)}=\frac{T-t}{2}\left(\zeta_0^{(i_1)}\zeta_0^{(i_2)}+\right.
$$

$$
+\sum_{\substack{1\le m_1<\ldots<m_k\le\infty\\ 1\le k\le\infty}}\bar C_{m_1\ldots m_k}(\zeta_{m_1\ldots m_k}^{(i_2)}\zeta_0^{(i_1)}-\zeta_{m_1\ldots m_k}^{(i_1)}\zeta_0^{(i_2)})+
$$

$$
\left.+\sum_{\substack{1\le n_1<\ldots<n_{k_1}\le\infty\\ 1\le m_1<\ldots<m_{k_2}\le\infty\\ 1\le k_1,k_2\le\infty}}\bar C_{n_1\ldots n_{k_2},m_1\ldots m_{k_1}}\zeta_{n_1\ldots n_{k_2}}^{(i_2)}\zeta_{m_1\ldots m_{k_1}}^{(i_1)}\right),
$$

где

$$
\bar C_{m_1\ldots m_k}=\sum_{s_1=0}^{2^{m_1}-1}(-1)^{s_1}\ldots\sum_{s_k=0}^{2^{m_k}-1}(-1)^{s_k}\times
$$

$$
\times\mathbf{1}_{\left\{\max\left\{\frac{s_1}{2^{m_1}},\ldots,\frac{s_k}{2^{m_k}}\right\}<\min\left\{\frac{s_1+1}{2^{m_1}},\ldots,\frac{s_k+1}{2^{m_k}}\right\}\right\}}\times
$$

$$
\times\left(\left(\min\left\{\frac{s_1+1}{2^{m_1}},\ldots,\frac{s_k+1}{2^{m_k}}\right\}\right)^2-\left(\max\left\{\frac{s_1}{2^{m_1}},\ldots,\frac{s_k}{2^{m_k}}\right\}\right)^2\right),
$$

$$
\bar{C}_{n_1\ldots n_{k_2},m_1\ldots m_{k_1}} = \sum_{s_1=0}^{2^{m_1}-1}(-1)^{s_1}\ldots\sum_{s_{k_1}=0}^{2^{m_{k_1}}-1}(-1)^{s_{k_1}}\sum_{q_1=0}^{2^{n_1}-1}(-1)^{q_1}\ldots\sum_{q_{k_2}=0}^{2^{n_{k_2}}-1}(-1)^{q_{k_2}}\times
$$

$$
\times\mathbf{1}_{\left\{\max\left\{\frac{s_1}{2^{m_1}},\ldots,\frac{s_{k_1}}{2^{m_{k_1}}}\right\}<\min\left\{\frac{s_1+1}{2^{m_1}},\ldots,\frac{s_{k_1}+1}{2^{m_{k_1}}}\right\}\right\}}\mathbf{1}_{\left\{\max\left\{\frac{q_1}{2^{n_1}},\ldots,\frac{q_{k_2}}{2^{n_{k_2}}}\right\}<\min\left\{\frac{q_1+1}{2^{n_1}},\ldots,\frac{q_{k_2}+1}{2^{n_{k_2}}}\right\}\right\}}\times
$$

$$
\times\mathbf{1}_{\left\{\max\left\{\max\left\{\frac{q_1}{2^{n_1}},\ldots,\frac{q_{k_2}}{2^{n_{k_2}}}\right\},\max\left\{\frac{s_1}{2^{m_1}},\ldots,\frac{s_{k_1}}{2^{m_{k_1}}}\right\}\right\}<\min\left\{\min\left\{\frac{q_1+1}{2^{n_1}},\ldots,\frac{q_{k_2}+1}{2^{n_{k_2}}}\right\},\min\left\{\frac{s_1+1}{2^{m_1}},\ldots,\frac{s_{k_1}+1}{2^{m_{k_1}}}\right\}\right\}\right\}}
$$

$$
\times\Biggl(\Biggl(\min\left\{\min\left\{\frac{q_1+1}{2^{n_1}},\ldots,\frac{q_{k_2}+1}{2^{n_{k_2}}}\right\},\min\left\{\frac{s_1+1}{2^{m_1}},\ldots,\frac{s_{k_1}+1}{2^{m_{k_1}}}\right\}\right\}-
$$

$$
-\max\left\{\frac{s_1}{2^{m_1}},\ldots,\frac{s_{k_1}}{2^{m_{k_1}}}\right\}\Biggr)^2-
$$

$$
-\Biggl(\max\left\{\max\left\{\frac{q_1}{2^{n_1}},\ldots,\frac{q_{k_2}}{2^{n_{k_2}}}\right\},\max\left\{\frac{s_1}{2^{m_1}},\ldots,\frac{s_{k_1}}{2^{m_{k_1}}}\right\}\right\}-
$$

$$
-\max\left\{\frac{s_1}{2^{m_1}},\ldots,\frac{s_{k_1}}{2^{m_{k_1}}}\right\}\Biggr)^2\Biggr)+
$$

$$
+2\cdot\mathbf{1}_{\left\{\max\left\{\max\left\{\frac{q_1}{2^{n_1}},\ldots,\frac{q_{k_2}}{2^{n_{k_2}}}\right\},\min\left\{\frac{s_1+1}{2^{m_1}},\ldots,\frac{s_{k_1}+1}{2^{m_{k_1}}}\right\}\right\}<\min\left\{\min\left\{\frac{q_1+1}{2^{n_1}},\ldots,\frac{q_{k_2}+1}{2^{n_{k_2}}}\right\},\ 1\right\}\right\}}
$$

$$
\times\left(\min\left\{\frac{s_1+1}{2^{m_1}},\ldots,\frac{s_{k_1}+1}{2^{m_{k_1}}}\right\}-\max\left\{\frac{s_1}{2^{m_1}},\ldots,\frac{s_{k_1}}{2^{m_{k_1}}}\right\}\right)\times
$$

$$
\times\Biggl(\min\left\{\min\left\{\frac{q_1+1}{2^{n_1}},\ldots,\frac{q_{k_2}+1}{2^{n_{k_2}}}\right\},\ 1\right\}-
$$

$$
-\max\left\{\max\left\{\frac{q_1}{2^{n_1}},\ldots,\frac{q_{k_2}}{2^{n_{k_2}}}\right\},\min\left\{\frac{s_1+1}{2^{m_1}},\ldots,\frac{s_{k_1}+1}{2^{m_{k_1}}}\right\}\right\}\Biggr);
$$

$\zeta_0^{(p)} = \int\limits_t^T \phi_0(\tau)d\mathbf{f}_\tau^{(p)}$, $\zeta_{m_1\ldots m_k}^{(g)} = \int\limits_t^T \phi_{m_1\ldots m_k}(\tau)d\mathbf{f}_\tau^{(g)}$; $0 < m_1 < \ldots < m_k$; $k,\ m_1,\ldots,\ m_k = 1,\ 2,\ldots$ — независимые в совокупности по нижним индексам или при $p\ne g$ $(p,\ g=1,\ldots,m)$ стандартные гауссовские случайные величины; $i_1,\ i_2=1,\ldots,m$.

По-видимому, из-за своей сложности (по сравнению с разложениями по полиномам Лежандра и тригонометрическим функциям), приведенные разложения с помощью систем Хаара и Радемахера–Уолша представляют скорее теоретический, нежели практический интерес.

Сделаем еще некоторые замечания в рамках рассматриваемого вопроса.

Заметим, что верно следующее утверждение.

Пусть $\xi_{n,m},\ \mu_m,\ \rho_n;\ n,\ m=0,\ 1,\ 2,\ldots$ — *последовательности случайных величин, причем*

$$
\underset{n,m\to\infty}{\text{l.i.m.}}\ \xi_{n,m}=\zeta,\ \underset{n\to\infty}{\text{l.i.m.}}\ \xi_{n,m}=\mu_m,\ \underset{m\to\infty}{\text{l.i.m.}}\ \xi_{n,m}=\rho_n,
$$

где ζ — случайная величина. Тогда

$$\lim_{n\to\infty}\lim_{m\to\infty}\mathsf{M}\{(\xi_{n,m}-\zeta)^2\}=\lim_{m\to\infty}\lim_{n\to\infty}\mathsf{M}\{(\xi_{n,m}-\zeta)^2\}=0.$$

Обоснование этого факта проводится также, как и в детерминированном случае с использованием неравенства: $\mathsf{M}\{(x-y)^2\}\le 2\mathsf{M}\{(x-z)^2\}+2\mathsf{M}\{(z-y)^2\}$ вместо неравенства: $|x-y|\le|x-z|+|z-y|$.

Положим

$$\xi_{n,m}=\sum_{j_1=0}^{n}\sum_{j_2=0}^{m}C_{j_2j_1}\zeta_{j_1}^{(i_1)}\zeta_{j_2}^{(i_2)},\ \zeta=J^*[\psi^{(2)}]_{T,t}.$$

В качестве μ_m и ρ_n можно взять

$$\sum_{j_2=0}^{m}\left(\sum_{j_1=0}^{\infty}C_{j_2j_1}\zeta_{j_1}^{(i_1)}\right)\zeta_{j_2}^{(i_2)}\ \text{и}\ \sum_{j_1=0}^{n}\left(\sum_{j_2=0}^{\infty}C_{j_2j_1}\zeta_{j_2}^{(i_2)}\right)\zeta_{j_1}^{(i_1)}$$

соответственно.

Действительно, поскольку

$$\mathsf{M}\{(\xi_{n,m}-\mu_m)^2\}=\sum_{j_2=0}^{m}\sum_{j_1=n+1}^{\infty}C_{j_2j_1}^2;\ \mathsf{M}\{(\xi_{n,m}-\rho_n)^2\}=\sum_{j_1=0}^{n}\sum_{j_2=m+1}^{\infty}C_{j_2j_1}^2;$$

$$\sum_{j_1=0}^{n}C_{j_2j_1}^2\le\sum_{j_1,j_2=0}^{\infty}C_{j_2j_1}^2;\ \sum_{j_2=0}^{m}C_{j_2j_1}^2\le\sum_{j_1,j_2=0}^{\infty}C_{j_2j_1}^2;$$

$$\sum_{j_1,j_2=0}^{\infty}C_{j_2j_1}^2=\int\limits_{[t,T]^2}K^2(t_1,t_2)dt_1dt_2<\infty,$$

то

$$\underset{n\to\infty}{\text{l.i.m.}}\ \xi_{n,m}=\mu_m,\ \underset{m\to\infty}{\text{l.i.m.}}\ \xi_{n,m}=\rho_n.$$

Тогда, воспользовавшись приведенным выше утверждением, получим

$$J^*[\psi^{(2)}]_{T,t}=\sum_{j_1=0}^{\infty}\sum_{j_2=0}^{\infty}C_{j_2j_1}\zeta_{j_1}^{(i_1)}\zeta_{j_2}^{(i_2)},\ J^*[\psi^{(2)}]_{T,t}=\sum_{j_2=0}^{\infty}\sum_{j_1=0}^{\infty}C_{j_2j_1}\zeta_{j_1}^{(i_1)}\zeta_{j_2}^{(i_2)},$$

где ряды сходятся в среднеквадратическом смысле, т.е., например, для первого случая

$$\lim_{n\to\infty}\lim_{m\to\infty}\mathsf{M}\left\{\left(J^*[\psi^{(2)}]_{T,t}-\sum_{j_1=0}^{n}\sum_{j_2=0}^{m}C_{j_2j_1}\zeta_{j_1}^{(i_1)}\zeta_{j_2}^{(i_2)}\right)^2\right\}=0.$$

Кажется вполне естественной возможность обобщения теоремы 3 на случай повторных стохастических интегралов Стратоновича произвольной кратности. Однако, данный вопрос, как показано в следующем разделе, оказался весьма непростым.

2.2 О разложении повторных стохастических интегралов Стратоновича 3 кратности. Некоторые соотношения для случая весовых функций общего вида

Исследуя вопрос о возможности обобщения теоремы 3 на случай повторных стохастических интегралов Стратоновича 3 кратности, автор не получил общих результатов. Однако, им был замечен ряд интересных и полезных для практики фактов.

В частности, в данной главе, будет показано, что в случае $\psi_1(\tau)$, $\psi_2(\tau)$, $\psi_3(\tau) \equiv 1$; $i_1, i_2, i_3 = 1, \ldots, m$ и системы полиномов Лежандра или системы тригонометрических функций обобщение теоремы 3 для стохастических интегралов Стратоновича 3 кратности является верным.

Более того, будет показано, что для некоторых сочетаний индексов i_1, i_2, i_3 и функций $\psi_1(\tau)$, $\psi_2(\tau)$, $\psi_3(\tau)$ полиномиального вида обобщение теоремы 3 (случай полиномов Лежандра) для стохастических интегралов Стратоновича 3 кратности также является верным.

Будет также рассмотрена более общая ситуация, для которой, с помощью полученных в данном разделе формул, возможно сформулировать достаточные условия справедливости обобщения теоремы 3 для стохастических интегралов Стратоновича 3 кратности в более общем случае в терминах сходимости числовых рядов.

На протяжении последующих разделов данной главы под $\{\phi_j(x)\}_{j=0}^{\infty}$ будем понимать полные ортонормированные на отрезке $[t,T]$ системы полиномов Лежандра или тригонометрических функций.

В указанных разделах будем также обращать внимание на следующие общеизвестные факты относительно этих двух систем функций.

Пусть $f(x)$ — ограниченная на отрезке $[t,T]$ и кусочно-гладкая на открытом интервале (t,T) функция. Тогда ряд Фурье $\sum\limits_{j=0}^{\infty} C_j\phi_j(x)$; $C_j = \int\limits_t^T f(x)\phi_j(x)dx$ сходится во всякой внутренней точке x промежутка $[t,T]$ к величине $\frac{1}{2}\left(f(x-0)+f(x+0)\right)$ и сходится равномерно к $f(x)$ в любом замкнутом интервале непрерывности $f(x)$, лежащем внутри $[t,T]$. При этом ряд Фурье по полиномам Лежандра сходится при $x=t$ и $x=T$ к $f(t+0)$ и $f(T-0)$ соответственно, а тригонометрический ряд Фурье схо-

дится при $x = t$ *и* $x = T$ *к* $\frac{1}{2}\left(f(t+0) + f(T-0)\right)$ *в случае периодического продолжения функции* $f(x)$.

Итак, попытаемся развить подход, изложенный в предыдущем разделе для повторных стохастических интегралов Стратоновича 3 кратности.

Запишем соотношение, связывающее с в.1 упомянутые интегралы третьей кратности:

$$J^*[\psi^{(3)}]_{T,t} = J[\psi^{(3)}]_{T,t} + \frac{1}{2}\mathbf{1}_{\{i_1=i_2\neq 0\}}\int\limits_t^T \psi_3(t_3)\int\limits_t^{t_3}\psi_2(t_2)\psi_1(t_2)dt_2 d\mathbf{f}_{t_3}^{(i_3)} +$$

$$+\frac{1}{2}\mathbf{1}_{\{i_2=i_3\neq 0\}}\int\limits_t^T \psi_3(t_3)\psi_2(t_3)\int\limits_t^{t_3}\psi_1(t_1)d\mathbf{f}_{t_1}^{(i_1)}dt_3, \qquad (2.6)$$

где $\psi_1(\tau)$, $\psi_2(\tau)$, $\psi_3(\tau)$ — непрерывно дифференцируемые на промежутке $[t,T]$ функции.

Отсюда видно, что имеются следующие частные случаи: 1. i_1, i_2, i_3 попарно различны; 2. $i_1 = i_2 \neq i_3$; 3. $i_1 \neq i_2 = i_3$; 4. $i_1 = i_3 \neq i_2$; 5. $i_1 = i_2 = i_3$. Здесь предполагается, что $i_1, i_2, i_3 = 1, \ldots, m$.

Ясно, что в первом случае повторные стохастические интегралы Стратоновича и Ито просто совпадают (это же касается и произвольной кратности k), поэтому к этим интегралам применима теорема 1.

Перейдем к рассмотрению второго частного случая.

Из теоремы 1 при $i_1 = i_2 \neq i_3$ следует, что

$$J[\psi^{(3)}]_{T,t} = \sum_{j_1,j_2,j_3=0}^{\infty} C_{j_3j_2j_1}\left(\zeta_{j_1}^{(i_1)}\zeta_{j_2}^{(i_1)}\zeta_{j_3}^{(i_3)} - \mathbf{1}_{\{j_1=j_2\}}\zeta_{j_3}^{(i_3)}\right).$$

Если бы последнее равенство можно было переписать в виде

$$J[\psi^{(3)}]_{T,t} = \sum_{j_1,j_2,j_3=0}^{\infty} C_{j_3j_2j_1}\zeta_{j_1}^{(i_1)}\zeta_{j_2}^{(i_1)}\zeta_{j_3}^{(i_3)} - \sum_{j_1,j_3=0}^{\infty} C_{j_3j_1j_1}\zeta_{j_3}^{(i_3)}$$

и удалось бы показать, что в среднеквадратическом смысле

$$\sum_{j_1,j_3=0}^{\infty} C_{j_3j_1j_1}\zeta_{j_3}^{(i_3)} = \frac{1}{2}\int\limits_t^T \psi_3(t_3)\int\limits_t^{t_3}\psi_2(t_1)\psi_1(t_1)dt_1 d\mathbf{f}_{t_3}^{(i_3)}, \qquad (2.7)$$

то мы тогда получили бы

$$J^*[\psi^{(3)}]_{T,t} = \sum_{j_1,j_2,j_3=0}^{\infty} C_{j_3j_2j_1}\prod_{l=1}^{3}\zeta_{j_l}^{(i_l)}\ (i_1 = i_2 \neq i_3), \qquad (2.8)$$

где ряд сходится в среднеквадратическом смысле.

Автор не располагает доказательством равенства (2.7) в общем случае (забегая вперед отметим, что данное равенство выполняется в некоторых практически важных случаях). Покажем лишь, что

$$\sum_{j_3=0}^{\infty}\sum_{j_1=0}^{\infty} C_{j_3j_1j_1}\zeta_{j_3}^{(i_3)} = \frac{1}{2}\int\limits_t^T \psi_3(t_3)\int\limits_t^{t_3}\psi_2(t_1)\psi_1(t_1)dt_1 d\mathbf{f}_{t_3}^{(i_3)}, \tag{2.9}$$

где ряд $\sum\limits_{j_3=0}^{\infty}$ сходится в среднеквадратическом смысле, а ряд $\sum\limits_{j_1=0}^{\infty}$ сходится в обычном смысле.

Согласно формуле Ито последнее равенство можно переписать в виде

$$\sum_{j_3=0}^{\infty}\sum_{j_1=0}^{\infty} C_{j_3j_1j_1}\zeta_{j_3}^{(i_3)} = \frac{1}{2}\int\limits_t^T \psi_1(t_1)\psi_2(t_1)\int\limits_{t_1}^{T}\psi_3(t_3)d\mathbf{f}_{t_3}^{(i_3)}dt_1.$$

Покажем, что

$$K_2(t_1,t_3) = \begin{cases} \frac{1}{2}\psi_3(t_3)\psi_1(t_1)\psi_2(t_1), & t_1 < t_3 \\ 0, & t_1 > t_3 \\ \frac{1}{6}\psi_3(t_1)\psi_1(t_1)\psi_2(t_1), & t_1 = t_3 \end{cases} =$$

$$= \sum_{j_3=0}^{\infty}\sum_{j_2,j_1=0}^{\infty} C_{j_3j_2j_1}\phi_{j_1}(t_1)\phi_{j_2}(t_1)\phi_{j_3}(t_3), \tag{2.10}$$

где $t_1, t_3 \in [t,T]$ и сходимость рядов по t_1 и t_3 равномерная на интервалах непрерывности разлагаемых функций.

Рассмотрим вспомогательную функцию

$$K_2'(t_1,t_2,t_3) = \begin{cases} \psi_3(t_3)\psi_2(t_2)\psi_1(t_1), & t_1 \le t_2 < t_3 \\ \psi_3(t_3)\psi_1(t_2)\psi_2(t_1), & t_2 \le t_1 < t_3 \\ 0, & \text{иначе} \end{cases}, \quad t_1,t_2,t_3 \in [t,T].$$

Зафиксируем t_1, t_2 и разложим функцию $K_2'(t_1,t_2,t_3)$ по переменной t_3 на отрезке $[t,T]$ в ряд Фурье.

$$K_2'(t_1,t_2,t_3) = \sum_{j_3=0}^{\infty}\Biggl(\psi_1(t_1)\psi_2(t_2)\int\limits_{t_2}^{T}\psi_3(t_3)\phi_{j_3}(t_3)dt_3\mathbf{1}_{\{t_1<t_2\}} +$$

$$+\psi_1(t_1)\psi_2(t_2)\int\limits_{t_2}^{T}\psi_3(t_3)\phi_{j_3}(t_3)dt_3\mathbf{1}_{\{t_1=t_2\}} +$$

$$+\psi_1(t_2)\psi_2(t_1)\int\limits_{t_1}^{T}\psi_3(t_3)\phi_{j_3}(t_3)dt_3\mathbf{1}_{\{t_2<t_1\}}\Bigr)\phi_{j_3}(t_3)\quad (t_3\ne t_1,\ t_2). \tag{2.11}$$

Нетрудно видеть, что функция, стоящая в скобках, имеет вид

$$\tilde{K}_{j_3}(t_1,t_2)=\begin{cases}\psi_1(t_1)\Psi_{j_3}(t_2),\ t_1\le t_2\\ \psi_1(t_2)\Psi_{j_3}(t_1),\ t_2\le t_1\end{cases};\ \Psi_{j_3}(s)=\psi_2(s)\int\limits_{s}^{T}\psi_3(t_3)\phi_{j_3}(t_3)dt_3.$$

Поэтому эта функция принадлежит классу Гельдера $C^1([t,T]^2)$ (см. предыдущий раздел). Разложим ее в квадрате $[t,T]^2$ в кратный ряд Фурье, суммируемый по Принсгейму и подставим результат в (2.11):

$$K_2'(t_1,t_2,t_3)=\sum_{j_3=0}^{\infty}\lim_{p_1,p_2\to\infty}\ \sum_{j_1=0}^{p_1}\sum_{j_2=0}^{p_2}\left(C_{j_3j_2j_1}+C_{j_3j_1j_2}\right)\phi_{j_1}(t_1)\phi_{j_2}(t_2)\phi_{j_3}(t_3).$$

Полагая в этом равенстве (оно верно при $t_3\ne t_1,\ t_2$) $t_1=t_2$ получаем (см. предыдущий раздел)

$$\frac{1}{2}K_2'(t_1,t_1,t_3)=\sum_{j_3=0}^{\infty}\sum_{j_2,j_1=0}^{\infty}C_{j_3j_2j_1}\phi_{j_1}(t_1)\phi_{j_2}(t_1)\phi_{j_3}(t_3)\quad (t_3\ne t_1).$$

Рассмотрим вспомогательную функцию

$$K_4(t_1,t_2,t_3)=\begin{cases}\psi_3(t_3)\psi_2(t_2)\psi_1(t_1),\ t_1\le t_2\le t_3\\ \psi_3(t_3)\psi_1(t_2)\psi_2(t_1),\ t_2\le t_1\le t_3\\ \psi_1(t_3)\psi_3(t_2)\psi_2(t_1),\ t_3\le t_1\le t_2\\ \psi_2(t_3)\psi_3(t_2)\psi_1(t_1),\ t_1\le t_3\le t_2\\ \psi_1(t_3)\psi_2(t_2)\psi_3(t_1),\ t_3\le t_2\le t_1\\ \psi_2(t_3)\psi_1(t_2)\psi_3(t_1),\ t_2\le t_3\le t_1\end{cases},\ t_1,t_2,t_3\in[t,T].$$

Разложим эту функцию в кубе $[t,T]^3$ в кратный ряд Фурье, суммируемый по Принсгейму:

$$K_4(t_1,t_2,t_3)=\lim_{n_1,n_2,n_3\to\infty}\sum_{j_1=0}^{n_1}\sum_{j_2=0}^{n_2}\sum_{j_3=0}^{n_3}C_{j_3j_2j_1}^{(1)}\prod_{l=1}^{3}\phi_{j_l}(t_l), \tag{2.12}$$

где

$$C_{j_3j_2j_1}^{(1)}=\int\limits_{[t,T]^3}K_4(t_1,t_2,t_3)\prod_{l=1}^{3}\phi_{j_l}(t_l)dt_1dt_2dt_3.$$

Функция $K_4(t_1,t_2,t_3)$ подобрана так, чтобы после использования свойства аддитивности римановых интегралов и использования замены порядка интегрирования в этих интегралах мы пришли к равенству:

$$C_{j_3j_2j_1}^{(1)}=C_{j_3j_2j_1}+C_{j_3j_1j_2}+C_{j_2j_1j_3}+C_{j_2j_3j_1}+C_{j_1j_2j_3}+C_{j_1j_3j_2}. \tag{2.13}$$

Подставляя (2.13) в (2.12), полагая в полученном равенстве $t_1 = t_2 = t_3$ и разбивая предел в правой части полученного равенства на 6 пределов получаем

$$\frac{1}{6}\psi_1(t_1)\psi_2(t_1)\psi_3(t_1) = \sum_{j_1,j_2,j_3=0}^{\infty} C_{j_3j_2j_1}\phi_{j_1}(t_1)\phi_{j_2}(t_1)\phi_{j_3}(t_1).$$

В силу того, что

$$\sum_{j_1,j_2=0}^{\infty} C_{j_3j_2j_1}\phi_{j_1}(t_1)\phi_{j_2}(t_1) = \frac{1}{2}\tilde{K}_{j_3}(t_1,t_1) = \psi_1(t_1)\psi_2(t_1)\int\limits_{t_1}^{T}\psi_3(s)\phi_{j_3}(s)ds$$

и, в силу известного утверждения о сведении предела к повторному, приходим к (2.10).

Равенство (2.10) доказано.

Рассмотрим

$$\mathsf{M}\left\{\left(\frac{1}{2}\psi_1(t_1)\psi_2(t_1)\int\limits_{t_1}^{T}\psi_3(t_3)d\mathbf{f}_{t_3}^{(i_3)} - \sum_{j_3=0}^{n}\zeta_{j_3}^{(i_3)}\sum_{j_1,j_2=0}^{\infty} C_{j_3j_2j_1}\phi_{j_1}(t_1)\phi_{j_2}(t_1)\right)^2\right\} =$$

$$= \mathsf{M}\left\{\left(\int\limits_{t}^{T}\left(K_2(t_1,t_3) - \sum_{j_3=0}^{n}\phi_{j_3}(t_3)\sum_{j_1,j_2=0}^{\infty} C_{j_3j_2j_1}\phi_{j_1}(t_1)\phi_{j_2}(t_1)\right)d\mathbf{f}_{t_3}^{(i_3)}\right)^2\right\} =$$

$$= \int\limits_{t}^{T}\left(K_2(t_1,t_3) - \sum_{j_3=0}^{n}\phi_{j_3}(t_3)\sum_{j_1,j_2=0}^{\infty} C_{j_3j_2j_1}\phi_{j_1}(t_1)\phi_{j_2}(t_1)\right)^2 dt_3.$$

Правая часть последнего равенства стремится к нулю при $n \to \infty$ в силу равномерной сходимости ряда по $t_3 \in (t,T)$ при $t_3 \neq t_1$ (t_1 фиксировано).

Таким образом, в среднеквадратическом смысле

$$\sum_{j_3=0}^{\infty}\zeta_{j_3}^{(i_3)}\sum_{j_1,j_2=0}^{\infty} C_{j_3j_2j_1}\phi_{j_1}(t_1)\phi_{j_2}(t_1) = \frac{1}{2}\psi_1(t_1)\psi_2(t_1)\int\limits_{t_1}^{T}\psi_3(t_3)d\mathbf{f}_{t_3}^{(i_3)}.$$

С учетом равенства Парсеваля имеем

$$\mathsf{M}\left\{\left(\int\limits_{t}^{T}\sum_{j_3=0}^{\infty}\zeta_{j_3}^{(i_3)}\sum_{j_1,j_2=0}^{\infty} C_{j_3j_2j_1}\phi_{j_1}(t_1)\phi_{j_2}(t_1)dt_1 - \right.\right.$$

$$\left.\left. - \int\limits_{t}^{T}\sum_{j_3=0}^{n}\zeta_{j_3}^{(i_3)}\sum_{j_1,j_2=0}^{\infty} C_{j_3j_2j_1}\phi_{j_1}(t_1)\phi_{j_2}(t_1)dt_1\right)^2\right\} \leq$$

$$\leq L\int\limits_t^T \sum_{j_3=n+1}^{\infty}\left(\sum_{j_1,j_2=0}^{\infty} C_{j_3j_2j_1}\phi_{j_1}(t_1)\phi_{j_2}(t_1)\right)^2 dt_1 =$$

$$= L\int\limits_t^T \left(\frac{1}{4}\psi_1^2(t_1)\psi_2^2(t_1)\int\limits_{t_1}^T \psi_3^2(t_3)dt_3 - \sum_{j_3=0}^{n}\left(\sum_{j_1,j_2=0}^{\infty} C_{j_3j_2j_1}\phi_{j_1}(t_1)\phi_{j_2}(t_1)\right)^2\right)dt_1,$$

где L — постоянная.

В силу непрерывности (здесь $\phi_j(\tau)$ предполагаются непрерывными) и неубывания членов функциональной последовательности

$$u_n(t_1) = \sum_{j_3=0}^{n}\left(\sum_{j_1,j_2=0}^{\infty} C_{j_3j_2j_1}\phi_{j_1}(t_1)\phi_{j_2}(t_1)\right)^2,$$

а также в силу свойства непрерывности предельной функции $u(t_1) = \frac{1}{4}\psi_1^2(t_1)\psi_2^2(t_1)\int\limits_{t_1}^T \psi_3^2(t_3)dt_3$ по признаку Дини имеем равномерную сходимость $u_n(t_1)$ к $u(t_1)$ на отрезке $[t, T]$. Поэтому, осуществляя предельный переход под знаком интеграла в последнем равенстве, получаем, что в среднеквадратическом смысле

$$\sum_{j_3=0}^{\infty}\zeta_{j_3}^{(i_3)}\int\limits_t^T \sum_{j_1,j_2=0}^{\infty} C_{j_3j_2j_1}\phi_{j_1}(t_1)\phi_{j_2}(t_1)dt_1 = \frac{1}{2}\int\limits_t^T \psi_1(t_1)\psi_2(t_1)\int\limits_{t_1}^T \psi_3(t_3)d\mathbf{f}_{t_3}^{(i_3)}dt_1.$$

Меняя в левой части этого равенства знак интеграла и знак правого ряда, что возможно в силу равномерной сходимости последнего по t_1 на отрезке $[t, T]$, и учитывая ортонормированность функций $\phi_j(\tau)$, приходим к (2.9).

Перейдем к рассмотрению третьего частного случая.

Из теоремы 1 при $i_1 \neq i_2 = i_3$ следует, что

$$J[\psi^{(3)}]_{T,t} = \sum_{j_1,j_2,j_3=0}^{\infty} C_{j_3j_2j_1}\left(\zeta_{j_1}^{(i_1)}\zeta_{j_2}^{(i_1)}\zeta_{j_3}^{(i_3)} - \mathbf{1}_{\{j_2=j_3\}}\zeta_{j_1}^{(i_1)}\right).$$

Опять таки, если бы можно было записать

$$J[\psi^{(3)}]_{T,t} = \sum_{j_1,j_2,j_3=0}^{\infty} C_{j_3j_2j_1}\zeta_{j_1}^{(i_1)}\zeta_{j_2}^{(i_1)}\zeta_{j_3}^{(i_3)} - \sum_{j_1,j_3=0}^{\infty} C_{j_3j_3j_1}\zeta_{j_1}^{(i_1)}$$

и удалось бы показать, что в среднеквадратическом смысле

$$\sum_{j_1,j_3=0}^{\infty} C_{j_3j_3j_1}\zeta_{j_1}^{(i_1)} = \frac{1}{2}\int\limits_t^T \psi_3(t_3)\psi_2(t_3)\int\limits_t^{t_3} \psi_1(t_1)d\mathbf{f}_{t_1}^{(i_1)}dt_3, \tag{2.14}$$

то в силу связи стохастических интегралов Ито и Стратоновича мы получили бы:

$$J^*[\psi^{(3)}]_{T,t} = \sum_{j_1,j_2,j_3=0}^{\infty} C_{j_3j_2j_1} \prod_{l=1}^{3} \zeta_{j_l}^{(i_l)} \ (i_1 \neq i_2 = i_3),$$

где ряд сходится в среднеквадратическом смысле.

Покажем лишь, что в среднеквадратическом смысле

$$\sum_{j_1=0}^{\infty} \sum_{j_3=0}^{\infty} C_{j_3j_3j_1} \zeta_{j_1}^{(i_1)} = \frac{1}{2} \int\limits_t^T \psi_3(t_3)\psi_2(t_3) \int\limits_t^{t_3} \psi_1(t_1) d\mathbf{f}_{t_1}^{(i_1)} dt_3, \tag{2.15}$$

где ряд $\sum\limits_{j_1=0}^{\infty}$ сходится в среднеквадратическом смысле, а ряд $\sum\limits_{j_3=0}^{\infty}$ сходится в обычном смысле.

Покажем, что

$$K_3(t_1,t_3) = \begin{cases} \frac{1}{2}\psi_3(t_3)\psi_2(t_3)\psi_1(t_1), & t_1 < t_3 \\ 0, & t_1 > t_3 \\ \frac{1}{6}\psi_3(t_1)\psi_1(t_1)\psi_2(t_1), & t_1 = t_3 \end{cases} =$$

$$= \sum_{j_1=0}^{\infty} \sum_{j_2,j_3=0}^{\infty} C_{j_3j_2j_1} \phi_{j_1}(t_1)\phi_{j_2}(t_3)\phi_{j_3}(t_3), \tag{2.16}$$

где $t_1, t_3 \in [t,T]$ и ряды сходятся равномерно по t_1 и t_3 на интервалах непрерывности разлагаемых функций.

Рассмотрим вспомогательную функцию

$$K_3'(t_1,t_2,t_3) = \begin{cases} \psi_3(t_3)\psi_2(t_2)\psi_1(t_1), & t_1 < t_2 \leq t_3 \\ \psi_3(t_2)\psi_2(t_3)\psi_1(t_1), & t_1 < t_3 \leq t_2 \\ 0, & \text{иначе} \end{cases}, \ t_1,t_2,t_3 \in [t,T].$$

Зафиксируем t_2, t_3 и разложим функцию $K_3'(t_1,t_2,t_3)$ по переменной t_1 на отрезке $[t,T]$ в ряд Фурье.

$$K_3'(t_1,t_2,t_3) = \sum_{j_1=0}^{\infty} \Biggl(\psi_2(t_2)\psi_3(t_3) \int\limits_t^{t_2} \psi_1(t_1)\phi_{j_1}(t_1) dt_1 \mathbf{1}_{\{t_2<t_3\}} +$$

$$+\psi_2(t_2)\psi_3(t_3) \int\limits_t^{t_2} \psi_1(t_1)\phi_{j_1}(t_1) dt_1 \mathbf{1}_{\{t_2=t_3\}} +$$

$$+\psi_3(t_2)\psi_2(t_3) \int\limits_t^{t_3} \psi_1(t_1)\phi_{j_1}(t_1) dt_1 \mathbf{1}_{\{t_3<t_2\}} \Biggr) \phi_{j_1}(t_1) \quad (t_1 \neq t_2, \ t_3). \tag{2.17}$$

Нетрудно видеть, что функция, стоящая в скобках, имеет вид

$$\begin{cases} \psi_3(t_3)\Psi_{j_1}(t_2), \ t_2 \le t_3 \\ \psi_3(t_2)\Psi_{j_1}(t_3), \ t_3 \le t_2 \end{cases} ; \ \Psi_{j_1}(s) = \psi_2(s) \int\limits_t^s \psi_1(t_1)\phi_{j_1}(t_1)dt_1.$$

Поэтому эта функция принадлежит классу Гельдера $C^1([t,T]^2)$ (см. предыдущий раздел). Разложим ее в квадрате $[t,T]^2$ в кратный ряд Фурье, суммируемый по Принсгейму и подставим результат в (2.17):

$$K_3'(t_1,t_2,t_3) = \sum_{j_1=0}^{\infty} \lim_{p_2,p_3\to\infty} \ \sum_{j_2=0}^{p_2}\sum_{j_3=0}^{p_3} \left(C_{j_3j_2j_1} + C_{j_2j_3j_1}\right)\phi_{j_1}(t_1)\phi_{j_2}(t_2)\phi_{j_3}(t_3).$$

Полагая в этом равенстве (оно верно при $t_1 \ne t_2, \ t_3$) $t_2 = t_3$ получаем (см. предыдущий раздел)

$$\frac{1}{2}K_3'(t_1,t_3,t_3) = \sum_{j_1=0}^{\infty}\sum_{j_2,j_3=0}^{\infty} C_{j_3j_2j_1}\phi_{j_1}(t_1)\phi_{j_2}(t_3)\phi_{j_3}(t_3) \quad (t_1 \ne t_3).$$

Равенство (2.16) доказано. Дальнейшее доказательство соотношения (2.15) аналогично уже рассмотренному случаю.

В четвертом частном случае рассматриваемые стохастические интегралы Ито и Стратоновича с в.1 совпадут, но как следует из теоремы 1 ряд $\sum\limits_{j_3,j_2,j_1=0}^{\infty} C_{j_3\ldots j_1}\prod\limits_{l=1}^{3}\zeta_{j_l}^{(i_l)}$, вообще говоря, может не сходиться к стохастическому интегралу Стратоновича $J^*[\psi^{(3)}]_{T,t}$ при $i_1 = i_3 \ne i_2$. В этом случае придется воспользоваться теоремой 1 и формулой (2.6) при $i_1 = i_3 \ne i_2$.

Тем не менее тесная связь формул (2.7) и (2.9), а также формул (2.14) и (2.15) неслучайна. В частности, в последующих разделах покажем, что для случая $\psi_1(\tau), \psi_2(\tau), \psi_3(\tau) \equiv 1$ и системы полиномов Лежандра или системы тригонометрических функций формулы (2.7) и (2.14) переходят в формулы (2.9) и (2.15) соответственно. Более того, покажем, что в рамках указанного случая верно обобщение теоремы 3 для повторных стохастических интегралов Стратоновича 3 кратности.

2.3 Разложения повторных стохастических интегралов Стратоновича 3 кратности, основанные на теореме 1. Случай полиномов Лежандра

2.3.1 Случай $\psi_1(\tau),\ \psi_2(\tau),\ \psi_3(\tau) \equiv 1;\ i_1, i_2, i_3 = 1, \ldots, m$

Пусть $\psi_1(\tau),\ \psi_2(\tau),\ \psi_3(\tau) \equiv 1$ и $\{\phi_j(x)\}_{j=0}^{\infty}$ полная ортонормированная система полиномов Лежандра на отрезке $[t, T]$.

В данном разделе докажем следующее разложение для повторных стохастических интегралов Стратоновича 3 кратности:

$$\int\limits_t^{*T}\int\limits_t^{*t_3}\int\limits_t^{*t_2} d\mathbf{f}_{t_1}^{(i_1)} d\mathbf{f}_{t_2}^{(i_2)} d\mathbf{f}_{t_3}^{(i_3)} = \sum_{j_1,j_2,j_3=0}^{\infty} C_{j_3 j_2 j_1} \zeta_{j_1}^{(i_1)} \zeta_{j_2}^{(i_2)} \zeta_{j_3}^{(i_3)}, \tag{2.18}$$

где ряд сходится в среднеквадратическом смысле, его коэффициенты имеют вид:

$$C_{j_3 j_2 j_1} = \int\limits_t^T \phi_{j_3}(s) \int\limits_t^s \phi_{j_2}(s_1) \int\limits_t^{s_1} \phi_{j_1}(s_2) ds_2 ds_1 ds$$

и $i_1, i_2, i_3 = 1, \ldots, m$.

Если мы докажем следующие формулы:

$$\underset{p_1,p_3\to\infty}{\text{l.i.m.}} \sum_{j_1=0}^{p_1}\sum_{j_3=0}^{p_3} C_{j_3 j_1 j_1} \zeta_{j_3}^{(i_3)} \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{j_1,j_3=0}^{\infty} C_{j_3 j_1 j_1} \zeta_{j_3}^{(i_3)} = \frac{1}{4}(T-t)^{\frac{3}{2}} \left(\zeta_0^{(i_3)} + \frac{1}{\sqrt{3}}\zeta_1^{(i_3)}\right), \tag{2.19}$$

$$\underset{p_1,p_3\to\infty}{\text{l.i.m.}} \sum_{j_1=0}^{p_1}\sum_{j_3=0}^{p_3} C_{j_3 j_3 j_1} \zeta_{j_1}^{(i_1)} \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{j_1,j_3=0}^{\infty} C_{j_3 j_3 j_1} \zeta_{j_1}^{(i_1)} = \frac{1}{4}(T-t)^{\frac{3}{2}} \left(\zeta_0^{(i_1)} - \frac{1}{\sqrt{3}}\zeta_1^{(i_1)}\right), \tag{2.20}$$

$$\underset{p_1,p_3\to\infty}{\text{l.i.m.}} \sum_{j_1=0}^{p_1}\sum_{j_3=0}^{p_3} C_{j_1 j_3 j_1} \zeta_{j_3}^{(i_2)} \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{j_1,j_3=0}^{\infty} C_{j_1 j_3 j_1} \zeta_{j_3}^{(i_2)} = 0, \tag{2.21}$$

то согласно теореме 1, формулам (2.19) – (2.21), стандартным соотношениям между повторными стохастическими интегралами Стратоновича и Ито, а также согласно формулам (они также следуют из теоремы 1):

$$\frac{1}{2}\int\limits_t^T\int\limits_t^{\tau} ds d\mathbf{f}_{\tau}^{(i_3)} = \frac{1}{4}(T-t)^{\frac{3}{2}} \left(\zeta_0^{(i_3)} + \frac{1}{\sqrt{3}}\zeta_1^{(i_3)}\right) \text{ с. в. } 1,$$

$$\frac{1}{2}\int\limits_t^T\int\limits_t^{\tau} d\mathbf{f}_{s}^{(i_1)} d\tau = \frac{1}{4}(T-t)^{\frac{3}{2}} \left(\zeta_0^{(i_1)} - \frac{1}{\sqrt{3}}\zeta_1^{(i_1)}\right) \text{ с. в. } 1$$

мы будем иметь

$$\int\limits_t^T\int\limits_t^{t_3}\int\limits_t^{t_2} d\mathbf{f}_{t_1}^{(i_1)}d\mathbf{f}_{t_2}^{(i_2)}d\mathbf{f}_{t_3}^{(i_3)} = \sum_{j_1,j_2,j_3=0}^{\infty} C_{j_3j_2j_1}\zeta_{j_1}^{(i_1)}\zeta_{j_2}^{(i_2)}\zeta_{j_3}^{(i_3)}-$$

$$-\mathbf{1}_{\{i_1=i_2\}}\frac{1}{2}\int\limits_t^T\int\limits_t^{\tau} ds d\mathbf{f}_{\tau}^{(i_3)} - \mathbf{1}_{\{i_2=i_3\}}\frac{1}{2}\int\limits_t^T\int\limits_t^{\tau} d\mathbf{f}_{s}^{(i_1)}d\tau.$$

Это означает, что разложение (2.18) будет доказано.

Для начала заметим, что из формул (2.9), (2.15) вытекают следующие соотношения

$$\sum_{j_3=0}^{\infty}\sum_{j_1=0}^{\infty} C_{j_3j_1j_1}\zeta_{j_3}^{(i_3)} = \frac{1}{2}\int\limits_t^T(\tau-t)d\mathbf{f}_{\tau}^{(i_3)} = \frac{1}{4}(T-t)^{\frac{3}{2}}\left(\zeta_0^{(i_3)}+\frac{1}{\sqrt{3}}\zeta_1^{(i_3)}\right), \tag{2.22}$$

$$\sum_{j_1=0}^{\infty}\sum_{j_3=0}^{\infty} C_{j_3j_3j_1}\zeta_{j_1}^{(i_1)} = \frac{1}{2}\int\limits_t^T\int\limits_t^{\tau} d\mathbf{f}_{s}^{(i_1)}d\tau = \frac{1}{2}\int\limits_t^T(T-s)d\mathbf{f}_{s}^{(i_1)} =$$

$$=\frac{1}{2}\left((T-t)\int\limits_t^T d\mathbf{f}_{s}^{(i_1)}+\int\limits_t^T(t-s)d\mathbf{f}_{s}^{(i_1)}\right) = \frac{1}{2}(T-t)^{\frac{3}{2}}\left(\zeta_0^{(i_1)}-\frac{1}{2}\zeta_0^{(i_1)}-\frac{1}{2\sqrt{3}}\zeta_1^{(i_1)}\right) =$$

$$=\frac{1}{4}(T-t)^{\frac{3}{2}}\left(\zeta_0^{(i_1)}-\frac{1}{\sqrt{3}}\zeta_1^{(i_1)}\right). \tag{2.23}$$

Ряд $\sum\limits_{j_3=0}^{\infty}$ в левой части (2.22) и ряд $\sum\limits_{j_1=0}^{\infty}$ в левой части (2.23) сходятся в среднеквадратическом смысле. Числовой ряд $\sum\limits_{j_1=0}^{\infty}$ в левой части (2.22) и числовой ряд $\sum\limits_{j_3=0}^{\infty}$ в левой части (2.23) сходятся в обычном смысле.

Рассмотрим (2.22). Из (2.22) следует, что

$$\sum_{j_1=0}^{\infty} C_{0j_1j_1} = \frac{1}{4}(T-t)^{\frac{3}{2}}, \tag{2.24}$$

$$\sum_{j_1=0}^{\infty} C_{1j_1j_1} = \frac{1}{4\sqrt{3}}(T-t)^{\frac{3}{2}}, \tag{2.25}$$

$$\sum_{j_1=0}^{\infty} C_{j_3j_1j_1},\ j_3\ge 2. \tag{2.26}$$

Проверим формулы (2.24) – (2.26) путем прямого вычисления.

Рассмотрим (2.24). Имеем

$$C_{000} = \frac{(t-t)^{\frac{3}{2}}}{6};$$

$$C_{0j_1j_1} = \int\limits_t^T \phi_0(s) \int\limits_t^s \phi_{j_1}(s_1) \int\limits_t^{s_1} \phi_{j_1}(s_2) ds_2 ds_1 ds =$$

$$= \frac{1}{2} \int\limits_t^T \phi_0(s) \left(\int\limits_t^s \phi_{j_1}(s_1) ds_1 \right)^2 ds; \; j_1 \geq 1. \qquad (2.27)$$

Здесь $\phi_j(s)$ имеет вид:

$$\phi_j(x) = \sqrt{\frac{2j+1}{T-t}} P_j \left(\left(s - \frac{T+t}{2} \right) \frac{2}{T-t} \right); \; j \geq 0, \qquad (2.28)$$

где $P_j(x)$ — полином Лежандра.

Подставим (2.28) в (2.27) и вычислим $C_{0j_1j_1}$; $j \geq 1$:

$$C_{0j_1j_1} = \frac{2j_1+1}{2(T-t)^{\frac{3}{2}}} \int\limits_t^T \left(\int\limits_{-1}^{\left(s - \frac{T+t}{2}\right)\frac{2}{T-t}} P_{j_1}(y) \frac{T-t}{2} dy \right)^2 ds =$$

$$= \frac{(2j_1+1)\sqrt{T-t}}{8} \int\limits_t^T \left(\int\limits_{-1}^{\left(s - \frac{T+t}{2}\right)\frac{2}{T-t}} \frac{1}{2j_1+1} \left(P^{'}_{j_1+1}(y) - P^{'}_{j_1-1}(y) \right) dy \right)^2 ds =$$

$$= \frac{\sqrt{T-t}}{8(2j_1+1)} \times$$

$$\times \int\limits_t^T \left(P_{j_1+1} \left(\left(s - \frac{T+t}{2} \right) \frac{2}{T-t} \right) - P_{j_1-1} \left(\left(s - \frac{T+t}{2} \right) \frac{2}{T-t} \right) \right)^2 ds, \qquad (2.29)$$

где мы использовали следующие хорошо известные свойства полиномов Лежандра:

$$P_j(y) = \frac{1}{2j+1} \left(P^{'}_{j+1}(y) - P^{'}_{j-1}(y) \right); \; j \geq 1,$$

$$P_j(-1) = (-1)^j; \; j \geq 1.$$

Также мы обозначили $\frac{dP_j}{dy}(y) \stackrel{\text{def}}{=} P^{'}_j(y)$.

Из (2.29) с помощью свойства ортогональности полиномов Лежандра получаем следующее соотношение:

$$C_{0j_1j_1} = \frac{(T-t)^{\frac{3}{2}}}{16(2j_1+1)}\int\limits_{-1}^{1}\left(P_{j_1+1}^2(y)+P_{j_1-1}^2(y)\right)dy =$$

$$= \frac{(T-t)^{\frac{3}{2}}}{8(2j_1+1)}\left(\frac{1}{2j_1+3}+\frac{1}{2j_1-1}\right),$$

где мы использовали соотношение

$$\int\limits_{-1}^{1} P_j^2(y)dy = \frac{2}{2j+1}.$$

Тогда

$$\sum_{j_1=0}^{\infty} C_{0j_1j_1} = \frac{(T-t)^{\frac{3}{2}}}{6}+$$

$$+\frac{(T-t)^{\frac{3}{2}}}{8}\left(\sum_{j_1=1}^{\infty}\frac{1}{(2j_1+1)(2j_1+3)}+\sum_{j_1=1}^{\infty}\frac{1}{4j_1^2-1}\right)=$$

$$= \frac{(T-t)^{\frac{3}{2}}}{6}+\frac{(T-t)^{\frac{3}{2}}}{8}\left(\sum_{j_1=1}^{\infty}\frac{1}{4j_1^2-1}-\frac{1}{3}+\sum_{j_1=1}^{\infty}\frac{1}{4j_1^2-1}\right)=$$

$$= \frac{(T-t)^{\frac{3}{2}}}{6}+\frac{(T-t)^{\frac{3}{2}}}{8}\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\frac{1}{2}\right)=\frac{(T-t)^{\frac{3}{2}}}{4}.$$

Соотношение (2.24) доказано.

Проверим справедливость (2.25). Представим $C_{1j_1j_1}$ в форме:

$$C_{1j_1j_1} = \frac{1}{2}\int\limits_{t}^{T}\phi_1(s)\left(\int\limits_{t}^{s}\phi_{j_1}(s_1)ds_1\right)^2 ds =$$

$$= \frac{(T-t)^{\frac{3}{2}}(2j_1+1)\sqrt{3}}{16}\int\limits_{-1}^{1}P_1(y)\left(\int\limits_{-1}^{y}P_{j_1}(y_1)dy_1\right)^2 dy;\ \ j_1\ge 1.$$

Поскольку функции $\left(\int\limits_{-1}^{y}P_{j_1}(y_1)dy_1\right)^2$; $j_1\ge 1$ являются четными, то соотвественно функции $P_1(y)\left(\int\limits_{-1}^{y}P_{j_1}(y_1)dy_1\right)^2 dy$; $j_1\ge 1$ являются нечетными. Это означает, что $C_{1j_1j_1}=0$; $j_1\ge 1$.

Более того

$$C_{100} = \frac{\sqrt{3}(T-t)^{\frac{3}{2}}}{16}\int\limits_{-1}^{1} y(y+1)^2 dy = \frac{(T-t)^{\frac{3}{2}}}{4\sqrt{3}}.$$

Тогда

$$\sum_{j_1=0}^{\infty} C_{1j_1j_1} = C_{100} + \sum_{j_1=1}^{\infty} C_{1j_1j_1} = \frac{(T-t)^{\frac{3}{2}}}{4\sqrt{3}}.$$

Соотношение (2.25) доказано.

Проверим формулу (2.26). Имеем

$$\sum_{j_1=0}^{\infty} C_{j_3j_1j_1} = \sum_{j_1=0}^{\infty} \frac{1}{2}\int\limits_t^T \phi_{j_3}(s)\left(\int\limits_t^s \phi_{j_1}(s_1)ds_1\right)^2 ds;\ \ j_3 \geq 2. \tag{2.30}$$

Нетрудно видеть, что интеграл $\int\limits_t^s \phi_{j_1}(s_1)ds_1$ является коэффициентом Фурье для функции

$$K(s_1, s) = \begin{cases} 1, & s_1 < s \\ 0, & \text{иначе} \end{cases};\ \ s_1, s \in [t, T].$$

Тогда равенство Парсеваля имеет в данном случае следующий вид:

$$\sum_{j_1=0}^{\infty}\left(\int\limits_t^s \phi_{j_1}(s_1)ds_1\right)^2 = \int\limits_t^T K^2(s_1, s)ds = \int\limits_t^s ds_1 = s - t. \tag{2.31}$$

Принимая во внимание неубывание функциональной последовательности

$$u_n(s) = \sum_{j_1=0}^{n}\left(\int\limits_t^s \phi_{j_1}(s_1)ds_1\right)^2,$$

непрерывность ее членов, а также непрерывность предельной функции $u(s) = s - t$ на отрезке $[t, T]$ мы имеем по признаку Дини равномерную сходимость функциональной последовательности $u_n(s)$ к предельной функции $u(s) = s - t$ на отрезке $[t, T]$.

Тогда из (2.30) и (2.31) с помощью равномерной сходимости функциональной последовательности $u_n(s)$ к предельной функции $u(s)$ на отрезке $[t, T]$ имеем

$$\sum_{j_1=0}^{\infty} C_{j_3j_1j_1} = \frac{1}{2}\int\limits_t^T \phi_{j_3}(s)\sum_{j_1=0}^{\infty}\left(\int\limits_t^s \phi_{j_1}(s_1)ds_1\right)^2 ds =$$

$$=\frac{1}{2}\int\limits_t^T \phi_{j_3}(s)(s-t)ds=0;\ \ j_3\ge 2. \tag{2.32}$$

При получениии (2.32) мы использовали известное свойство полиномов Лежандра:

$$\int\limits_{-1}^{1} P_j(y)y^k dy=0;\ \ j>k. \tag{2.33}$$

Соотношение (2.26) доказано.

Докажем равенство (2.19). Используя (2.25) получаем

$$\sum_{j_1=0}^{p_1}\sum_{j_3=0}^{p_3} C_{j_3j_1j_1}\zeta_{j_3}^{(i_3)}=\sum_{j_1=0}^{p_1} C_{0j_1j_1}\zeta_0^{(i_3)}+\frac{(T-t)^{\frac{3}{2}}}{4\sqrt{3}}\zeta_1^{(i_3)}+\sum_{j_1=0}^{p_1}\sum_{j_3=2}^{p_3} C_{j_3j_1j_1}\zeta_{j_3}^{(i_3)}=$$

$$=\sum_{j_1=0}^{p_1} C_{0j_1j_1}\zeta_0^{(i_3)}+\frac{(T-t)^{\frac{3}{2}}}{4\sqrt{3}}\zeta_1^{(i_3)}+\sum_{j_1=0}^{p_1}\sum_{j_3=2,j_3-\text{четное}}^{2j_1+2} C_{j_3j_1j_1}\zeta_{j_3}^{(i_3)}. \tag{2.34}$$

Поскольку

$$C_{j_3j_1j_1}=\frac{(T-t)^{\frac{3}{2}}(2j_1+1)\sqrt{2j_3+1}}{16}\int\limits_{-1}^{1} P_{j_3}(y)\left(\int\limits_{-1}^{y} P_{j_1}(y_1)dy_1\right)^2 dy$$

и степень полинома $\left(\int\limits_{-1}^{y} P_{j_1}(y_1)dy_1\right)^2$ равна $2j_1+2$, то используя (2.33) получаем: $C_{j_3j_1j_1}=0$ при $j_3>2j_1+2$. Это объясняет то обстоятельство, что мы положили $2j_1+2$ вместо p_3 в правой части (2.34).

Более того, функция $\left(\int\limits_{-1}^{y} P_{j_1}(y_1)dy_1\right)^2$ является четной, значит функция $P_{j_3}(y)\left(\int\limits_{-1}^{y} P_{j_1}(y_1)dy_1\right)^2$ является нечетной для нечетного j_3. Это значит, что $C_{j_3j_1j_1}=0$ для нечетных j_3. Именно поэтому мы суммируем по четным j_3 в правой части (2.34).

Далее имеем

$$\sum_{j_1=0}^{p_1}\sum_{j_3=2,j_3-\text{четное}}^{2j_1+2} C_{j_3j_1j_1}\zeta_{j_3}^{(i_3)}=\sum_{j_3=2,j_3-\text{четное}}^{2p_1+2}\ \sum_{j_1=\frac{j_3-2}{2}}^{p_1} C_{j_3j_1j_1}\zeta_{j_3}^{(i_3)}=$$

$$=\sum_{j_3=2,j_3-\text{четное}}^{2p_1+2}\ \sum_{j_1=0}^{p_1} C_{j_3j_1j_1}\zeta_{j_3}^{(i_3)}. \tag{2.35}$$

Мы заменили $\frac{j_3-2}{2}$ на ноль в правой части (2.35), поскольку $C_{j_3j_1j_1}=0$ для $0\le j_1<\frac{j_3-2}{2}$.

Подставим (2.35) в (2.34):

$$\sum_{j_1=0}^{p_1}\sum_{j_3=0}^{p_3}C_{j_3j_1j_1}\zeta_{j_3}^{(i_3)}=\sum_{j_1=0}^{p_1}C_{0j_1j_1}\zeta_0^{(i_3)}+\frac{(T-t)^{\frac{3}{2}}}{4\sqrt{3}}\zeta_1^{(i_3)}+\sum_{j_1=0}^{p_1}\sum_{j_3=2}^{p_3}C_{j_3j_1j_1}\zeta_{j_3}^{(i_3)}=$$

$$=\sum_{j_1=0}^{p_1}C_{0j_1j_1}\zeta_0^{(i_3)}+\frac{(T-t)^{\frac{3}{2}}}{4\sqrt{3}}\zeta_1^{(i_3)}+\sum_{j_3=2,j_3-\text{четное}}^{2p_1+2}\sum_{j_1=0}^{p_1}C_{j_3j_1j_1}\zeta_{j_3}^{(i_3)}. \qquad (2.36)$$

Нетрудно видеть, что правая часть (2.36) не зависит от p_3.

Если мы докажем, что

$$\lim_{p_1\to\infty}\mathrm{M}\left\{\left(\sum_{j_1=0}^{p_1}\sum_{j_3=0}^{p_3}C_{j_3j_1j_1}\zeta_{j_3}^{(i_3)}-\frac{1}{4}(T-t)^{\frac{3}{2}}\left(\zeta_0^{(i_3)}+\frac{1}{\sqrt{3}}\zeta_1^{(i_3)}\right)\right)^2\right\}=0, \qquad (2.37)$$

то (2.19) будет доказано.

С помощью (2.36) и (2.24) мы можем переписать левую часть (2.37) в виде:

$$\lim_{p_1\to\infty}\mathrm{M}\left\{\left(\left(\sum_{j_1=0}^{p_1}C_{0j_1j_1}-\frac{(T-t)^{\frac{3}{2}}}{4}\right)\zeta_0^{(i_3)}+\sum_{j_3=2,j_3-\text{четное}}^{2p_1+2}\sum_{j_1=0}^{p_1}C_{j_3j_1j_1}\zeta_{j_3}^{(i_3)}\right)^2\right\}=$$

$$=\lim_{p_1\to\infty}\left(\sum_{j_1=0}^{p_1}C_{0j_1j_1}-\frac{(T-t)^{\frac{3}{2}}}{4}\right)^2+\lim_{p_1\to\infty}\sum_{j_3=2,j_3-\text{четное}}^{2p_1+2}\left(\sum_{j_1=0}^{p_1}C_{j_3j_1j_1}\right)^2=$$

$$=\lim_{p_1\to\infty}\sum_{j_3=2,j_3-\text{четное}}^{2p_1+2}\left(\sum_{j_1=0}^{p_1}C_{j_3j_1j_1}\right)^2. \qquad (2.38)$$

Если мы докажем, что

$$\lim_{p_1\to\infty}\sum_{j_3=2,j_3-\text{четное}}^{2p_1+2}\left(\sum_{j_1=0}^{p_1}C_{j_3j_1j_1}\right)^2=0, \qquad (2.39)$$

тогда соотношение (2.19) будет доказано.

Имеем

$$\sum_{j_3=2,j_3-\text{четное}}^{2p_1+2}\left(\sum_{j_1=0}^{p_1}C_{j_3j_1j_1}\right)^2=$$

$$=\frac{1}{4}\sum_{j_3=2,j_3-\text{четное}}^{2p_1+2}\left(\int\limits_t^T\phi_{j_3}(s)\sum_{j_1=0}^{p_1}\left(\int\limits_t^s\phi_{j_1}(s_1)ds_1\right)^2ds\right)^2=$$

$$
=\frac{1}{4}\sum_{j_3=2,j_3-\text{четное}}^{2p_1+2}\left(\int\limits_t^T\phi_{j_3}(s)\left((s-t)-\sum_{j_1=p_1+1}^{\infty}\left(\int\limits_t^s\phi_{j_1}(s_1)ds_1\right)^2\right)ds\right)^2=
$$

$$
=\frac{1}{4}\sum_{j_3=2,j_3-\text{четное}}^{2p_1+2}\left(\int\limits_t^T\phi_{j_3}(s)\sum_{j_1=p_1+1}^{\infty}\left(\int\limits_t^s\phi_{j_1}(s_1)ds_1\right)^2 ds\right)^2\le
$$

$$
\le\frac{1}{4}\sum_{j_3=2,j_3-\text{четное}}^{2p_1+2}\left(\int\limits_t^T\mid\phi_{j_3}(s)\mid\sum_{j_1=p_1+1}^{\infty}\left(\int\limits_t^s\phi_{j_1}(s_1)ds_1\right)^2 ds\right)^2. \qquad (2.40)
$$

При получении (2.40) мы использовали соотношения (2.31), (2.32).

Далее имеем

$$
\left(\int\limits_t^s\phi_{j_1}(s_1)ds_1\right)^2=\frac{(T-t)(2j_1+1)}{4}\left(\int\limits_{-1}^{\left(s-\frac{T+t}{2}\right)\frac{2}{T-t}}P_{j_1}(y)dy\right)^2=
$$

$$
=\frac{T-t}{4(2j_1+1)}\left(\int\limits_{-1}^{\left(s-\frac{T+t}{2}\right)\frac{2}{T-t}}\left(P_{j_1+1}^{'}(y)-P_{j_1-1}^{'}(y)\right)dy\right)^2=
$$

$$
=\frac{T-t}{4(2j_1+1)}\times
$$

$$
\times\left(P_{j_1+1}\left(\left(s-\frac{T+t}{2}\right)\frac{2}{T-t}\right)-P_{j_1-1}\left(\left(s-\frac{T+t}{2}\right)\frac{2}{T-t}\right)\right)^2\le
$$

$$
\le\frac{T-t}{2(2j_1+1)}\left(P_{j_1+1}^2\left(\left(s-\frac{T+t}{2}\right)\frac{2}{T-t}\right)+P_{j_1-1}^2\left(\left(s-\frac{T+t}{2}\right)\frac{2}{T-t}\right)\right). \qquad (2.41)
$$

Для полиномов Лежандра справедлива следующая хорошо известная оценка [29]:

$$
\mid P_n(y)\mid<\frac{K}{\sqrt{n+1}(1-y^2)^{\frac{1}{4}}};\ y\in(-1,1);\ n\in N, \qquad (2.42)
$$

где постоянная K не зависит от y и n.

Оценка (2.42) может быть переписана для функции $\phi_n(s)$ в следующей форме:

$$
\mid\phi_n(s)\mid<\sqrt{\frac{2n+1}{n+1}}\frac{K}{\sqrt{T-t}}\frac{1}{\left(1-\left(\left(s-\frac{T+t}{2}\right)\frac{2}{T-t}\right)^2\right)^{\frac{1}{4}}}<
$$

$$
< \frac{K_1}{\sqrt{T-t}} \frac{1}{\left(1 - \left(\left(s - \frac{T+t}{2}\right)\frac{2}{T-t}\right)^2\right)^{\frac{1}{4}}};\ K_1 = K\sqrt{2};\ s \in (t, T). \qquad (2.43)
$$

Оценим правую часть (2.41) с помощью оценки (2.42):

$$
\left(\int\limits_t^s \phi_{j_1}(s_1)ds_1\right)^2 < \frac{T-t}{2(2j_1+1)}\left(\frac{K^2}{j_1+2} + \frac{K^2}{j_1}\right)\frac{1}{\left(1 - \left(\left(s - \frac{T+t}{2}\right)\frac{2}{T-t}\right)^2\right)^{\frac{1}{2}}} <
$$

$$
< \frac{(T-t)K^2}{2j_1^2}\frac{1}{\left(1 - \left(\left(s - \frac{T+t}{2}\right)\frac{2}{T-t}\right)^2\right)^{\frac{1}{2}}};\ s \in (t, T). \qquad (2.44)
$$

Подставляя оценку (2.44) в соотношение (2.40) и используя в (2.40) оценку (2.43) для $\mid \phi_{j_3}(s) \mid$ получаем:

$$
\sum_{j_3=2, j_3-\text{четное}}^{2p_1+2} \left(\sum_{j_1=0}^{p_1} C_{j_3 j_1 j_1}\right)^2 <
$$

$$
< \frac{(T-t)K^4K_1^2}{16} \sum_{j_3=2, j_3-\text{четное}}^{2p_1+2} \left(\int\limits_t^T \frac{ds}{\left(1 - \left(\left(s - \frac{T+t}{2}\right)\frac{2}{T-t}\right)^2\right)^{\frac{3}{4}}} \sum_{j_1=p_1+1}^{\infty}\frac{1}{j_1^2}\right)^2 =
$$

$$
= \frac{(T-t)^3K^4K_1^2(p_1+1)}{64}\left(\int\limits_{-1}^1 \frac{dy}{(1-y^2)^{\frac{3}{4}}}\right)^2\left(\sum_{j_1=p_1+1}^{\infty}\frac{1}{j_1^2}\right)^2. \qquad (2.45)
$$

Поскольку

$$
\int\limits_{-1}^1 \frac{dy}{(1-y^2)^{\frac{3}{4}}} < \infty \qquad (2.46)
$$

и

$$
\sum_{j_1=p_1+1}^{\infty}\frac{1}{j_1^2} \le \int\limits_{p_1}^{\infty}\frac{dx}{x^2} = \frac{1}{p_1}, \qquad (2.47)
$$

то из (2.45) находим:

$$
\sum_{j_3=2, j_3-\text{четное}}^{2p_1+2} \left(\sum_{j_1=0}^{p_1} C_{j_3 j_1 j_1}\right)^2 < \frac{C(T-t)^3(p_1+1)}{p_1^2} \to 0 \text{ при } p_1 \to \infty, \qquad (2.48)
$$

где постоянная C не зависит от p_1 и $T-t$.

Из (2.48) следует (2.39), а из (2.39) следует (2.19).

Рассмотрим доказательство равенства (2.20). Из (2.23) получим

$$\sum_{j_3=0}^{\infty} C_{j_3j_30} = \frac{1}{4}(T-t)^{\frac{3}{2}}, \tag{2.49}$$

$$\sum_{j_3=0}^{\infty} C_{j_3j_3j_1} = -\frac{1}{4\sqrt{3}}(T-t)^{\frac{3}{2}}, \tag{2.50}$$

$$\sum_{j_3=0}^{\infty} C_{j_3j_3j_1},\ j_1 \ge 2. \tag{2.51}$$

Проверим формулы (2.49) – (2.51) путем прямого вычисления.

Рассмотрим (2.49). Имеем

$$\sum_{j_3=0}^{\infty} C_{j_3j_30} = C_{000} + \sum_{j_3=1}^{\infty} C_{j_3j_30};$$

$$C_{000} = \frac{(t-t)^{\frac{3}{2}}}{6};$$

$$C_{j_3j_30} = \frac{(T-t)^{\frac{3}{2}}}{16(2j_3+1)} \int\limits_{-1}^{1} \left(P_{j_3+1}^2(y) + P_{j_3-1}^2(y)\right) dy =$$

$$= \frac{(T-t)^{\frac{3}{2}}}{8(2j_3+1)} \left(\frac{1}{2j_3+3} + \frac{1}{2j_3-1}\right);\ j_3 \ge 1.$$

Тогда

$$\sum_{j_3=0}^{\infty} C_{j_3j_30} = \frac{(T-t)^{\frac{3}{2}}}{6} +$$

$$+\frac{(T-t)^{\frac{3}{2}}}{8} \left(\sum_{j_3=1}^{\infty} \frac{1}{(2j_3+1)(2j_3+3)} + \sum_{j_3=1}^{\infty} \frac{1}{4j_3^2-1}\right) =$$

$$= \frac{(T-t)^{\frac{3}{2}}}{6} + \frac{(T-t)^{\frac{3}{2}}}{8} \left(\sum_{j_3=1}^{\infty} \frac{1}{4j_3^2-1} - \frac{1}{3} + \sum_{j_3=1}^{\infty} \frac{1}{4j_3^2-1}\right) =$$

$$= \frac{(T-t)^{\frac{3}{2}}}{6} + \frac{(T-t)^{\frac{3}{2}}}{8} \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{2}\right) = \frac{(T-t)^{\frac{3}{2}}}{4}.$$

Соотношение (2.49) доказано.

Проверим равенство (2.50). Имеем

$$C_{j_3j_3j_1} = \int\limits_t^T \phi_{j_3}(s) \int\limits_t^s \phi_{j_3}(s_1) \int\limits_t^{s_1} \phi_{j_1}(s_2) ds_2 ds_1 ds =$$

$$= \int\limits_t^T \phi_{j_1}(s_2)ds_2 \int\limits_{s_2}^T \phi_{j_3}(s_1)ds_1 \int\limits_{s_1}^T \phi_{j_3}(s)ds =$$

$$= \frac{1}{2}\int\limits_t^T \phi_{j_1}(s_2)\left(\int\limits_{s_2}^T \phi_{j_3}(s_1)ds_1\right)^2 ds_2 =$$

$$= \frac{(T-t)^{\frac{3}{2}}(2j_3+1)\sqrt{2j_1+1}}{16}\int\limits_{-1}^1 P_{j_1}(y)\left(\int\limits_y^1 P_{j_3}(y_1)dy_1\right)^2 dy;\ j_3 \ge 1. \qquad (2.52)$$

Поскольку функции $\left(\int\limits_y^1 P_{j_3}(y_1)dy_1\right)^2$; $j_3 \ge 1$ являются четными, то функции $P_1(y)\left(\int\limits_y^1 P_{j_3}(y_1)dy_1\right)^2 dy$; $j_3 \ge 1$ являются нечетными. Это значит, что $C_{j_3 j_3 1} = 0$; $j_3 \ge 1$.

Более того

$$C_{001} = \frac{\sqrt{3}(T-t)^{\frac{3}{2}}}{16}\int\limits_{-1}^1 y(1-y)^2 dy = -\frac{(T-t)^{\frac{3}{2}}}{4\sqrt{3}}.$$

Тогда

$$\sum_{j_3=0}^{\infty} C_{j_3 j_3 1} = C_{001} + \sum_{j_3=1}^{\infty} C_{j_3 j_3 1} = -\frac{(T-t)^{\frac{3}{2}}}{4\sqrt{3}}.$$

Соотношение (2.50) доказано.

Равенство (2.51) может быть доказано аналогично (2.26). Имеем

$$\sum_{j_3=0}^{\infty} C_{j_3 j_3 j_1} = \sum_{j_3=0}^{\infty} \frac{1}{2}\int\limits_t^T \phi_{j_1}(s_2)\left(\int\limits_{s_2}^T \phi_{j_3}(s_1)ds_1\right)^2 ds_2 =$$

$$= \frac{1}{2}\int\limits_t^T \phi_{j_1}(s_2)\sum_{j_3=0}^{\infty}\left(\int\limits_{s_2}^T \phi_{j_3}(s_1)ds_1\right)^2 ds_2 =$$

$$= \frac{1}{2}\int\limits_t^T \phi_{j_1}(s_2)(T-s_2)ds_2 = 0;\ j_1 \ge 2, \qquad (2.53)$$

где мы использовали равенство Парсеваля в следующем виде

$$\sum_{j_3=0}^{\infty}\left(\int\limits_{s_2}^T \phi_{j_3}(s_1)ds_1\right)^2 = \int\limits_t^T K^2(s_1,s_2)ds_1 = \int\limits_{s_2}^T ds_1 = T - s_2, \qquad (2.54)$$

$$K(s_1,s_2) = \begin{cases} 1, & s_2 < s_1 \\ 0, & \text{иначе} \end{cases};\ s_1, s_2 \in [t,T],$$

причем ряд в левой части (2.54) сходится равномерно по признаку Дини. Соотношение (2.51) доказано.

Используя полученные результаты мы имеем:

$$\sum_{j_1=0}^{p_1}\sum_{j_3=0}^{p_3} C_{j_3j_3j_1}\zeta_{j_1}^{(i_1)} = \sum_{j_3=0}^{p_3} C_{j_3j_30}\zeta_0^{(i_1)} - \frac{(T-t)^{\frac{3}{2}}}{4\sqrt{3}}\zeta_1^{(i_1)} + \sum_{j_3=0}^{p_3}\sum_{j_1=2}^{p_1} C_{j_3j_3j_1}\zeta_{j_1}^{(i_1)} =$$

$$= \sum_{j_3=0}^{p_3} C_{j_3j_30}\zeta_0^{(i_1)} - \frac{(T-t)^{\frac{3}{2}}}{4\sqrt{3}}\zeta_1^{(i_1)} + \sum_{j_3=0}^{p_3}\sum_{j_1=2, j_1-\text{четное}}^{2j_3+2} C_{j_3j_3j_1}\zeta_{j_1}^{(i_1)}. \qquad (2.55)$$

Поскольку

$$C_{j_3j_3j_1} = \frac{(T-t)^{\frac{3}{2}}(2j_3+1)\sqrt{2j_1+1}}{16}\int\limits_{-1}^{1} P_{j_1}(y)\left(\int\limits_{y}^{1} P_{j_3}(y_1)dy_1\right)^2 dy;\ \ j_3\ge 1,$$

и степень полинома $\left(\int\limits_{y}^{1} P_{j_3}(y_1)dy_1\right)^2$ равна $2j_3+2$, то по (2.33) получаем $C_{j_3j_3j_1}=0$ для $j_1>2j_3+2$. Это объясняет то обстоятельство, что мы положили $2j_3+2$ вместо p_1 в правой части (2.55).

Более того, функция $\left(\int\limits_{y}^{1} P_{j_3}(y_1)dy_1\right)^2$ является четной, тогда функция $P_{j_1}(y)\left(\int\limits_{y}^{1} P_{j_3}(y_1)dy_1\right)^2$ является нечетной для нечетного j_1. Это означает, что $C_{j_3j_3j_1}=0$ для нечетного j_1. В этом заключается объяснение суммирования только по четным j_1 в правой части (2.55).

Далее имеем

$$\sum_{j_3=0}^{p_3}\sum_{j_1=2, j_1-\text{четное}}^{2j_3+2} C_{j_3j_3j_1}\zeta_{j_1}^{(i_1)} = \sum_{j_1=2, j_1-\text{четное}}^{2p_3+2}\ \sum_{j_3=\frac{j_1-2}{2}}^{p_3} C_{j_3j_3j_1}\zeta_{j_1}^{(i_1)} =$$

$$= \sum_{j_1=2, j_1-\text{четное}}^{2p_3+2}\ \sum_{j_3=0}^{p_3} C_{j_3j_3j_1}\zeta_{j_1}^{(i_1)}. \qquad (2.56)$$

Мы заменили $\frac{j_1-2}{2}$ на ноль в правой части (2.56), поскольку $C_{j_3j_3j_1}=0$ для $0\le j_3<\frac{j_1-2}{2}$.

Подставим (2.56) в (2.55):

$$\sum_{j_1=0}^{p_1}\sum_{j_3=0}^{p_3} C_{j_3j_3j_1}\zeta_{j_1}^{(i_1)} = \sum_{j_3=0}^{p_3} C_{j_3j_30}\zeta_0^{(i_1)} - \frac{(T-t)^{\frac{3}{2}}}{4\sqrt{3}}\zeta_1^{(i_1)} +$$

$$+ \sum_{j_1=2, j_1-\text{четное}}^{2p_3+2}\ \sum_{j_3=0}^{p_3} C_{j_3j_3j_1}\zeta_{j_1}^{(i_1)}. \qquad (2.57)$$

Нетрудно видеть, что правая часть (2.57) не зависит от p_1.

Если мы докажем, что

$$\lim_{p_3\to\infty} \mathrm{M}\left\{\left(\sum_{j_1=0}^{p_1}\sum_{j_3=0}^{p_3} C_{j_3j_3j_1}\zeta_{j_1}^{(i_1)} - \frac{1}{4}(T-t)^{\frac{3}{2}}\left(\zeta_0^{(i_1)} - \frac{1}{\sqrt{3}}\zeta_1^{(i_1)}\right)\right)^2\right\} = 0, \qquad (2.58)$$

то (2.20) будет доказано.

С помощью (2.57) и (2.49) перепишем левую часть (2.58) в виде:

$$\lim_{p_3\to\infty} \mathrm{M}\left\{\left(\left(\sum_{j_3=0}^{p_3} C_{j_3j_30} - \frac{(T-t)^{\frac{3}{2}}}{4}\right)\zeta_0^{(i_1)} + \sum_{j_1=2, j_1-\text{четное}}^{2p_3+2}\sum_{j_3=0}^{p_3} C_{j_3j_3j_1}\zeta_{j_1}^{(i_1)}\right)^2\right\} =$$

$$= \lim_{p_3\to\infty}\left(\sum_{j_3=0}^{p_1} C_{j_3j_30} - \frac{(T-t)^{\frac{3}{2}}}{4}\right)^2 + \lim_{p_3\to\infty}\sum_{j_1=2, j_1-\text{четное}}^{2p_3+2}\left(\sum_{j_3=0}^{p_3} C_{j_3j_3j_1}\right)^2 =$$

$$= \lim_{p_3\to\infty}\sum_{j_1=2, j_1-\text{четное}}^{2p_3+2}\left(\sum_{j_3=0}^{p_3} C_{j_3j_3j_1}\right)^2.$$

Если мы докажем, что

$$\lim_{p_3\to\infty}\sum_{j_1=2, j_1-\text{четное}}^{2p_3+2}\left(\sum_{j_3=0}^{p_3} C_{j_3j_3j_1}\right)^2 = 0, \qquad (2.59)$$

то соотношение (2.20) будет доказано.

Из (2.52) получаем

$$\sum_{j_1=2, j_1-\text{четное}}^{2p_3+2}\left(\sum_{j_3=0}^{p_3} C_{j_3j_3j_1}\right)^2 =$$

$$= \frac{1}{4}\sum_{j_1=2, j_1-\text{четное}}^{2p_3+2}\left(\int\limits_t^T \phi_{j_1}(s_2)\sum_{j_3=0}^{p_3}\left(\int\limits_{s_2}^T \phi_{j_3}(s_1)ds_1\right)^2 ds_2\right)^2 =$$

$$= \frac{1}{4}\sum_{j_1=2, j_1-\text{четное}}^{2p_3+2}\left(\int\limits_t^T \phi_{j_1}(s_2)\left((T-s_2) - \sum_{j_3=p_3+1}^{\infty}\left(\int\limits_{s_2}^T \phi_{j_3}(s_1)ds_1\right)^2\right) ds_2\right)^2 =$$

$$= \frac{1}{4}\sum_{j_1=2, j_1-\text{четное}}^{2p_3+2}\left(\int\limits_t^T \phi_{j_1}(s_2)\sum_{j_3=p_3+1}^{\infty}\left(\int\limits_{s_2}^T \phi_{j_3}(s_1)ds_1\right)^2 ds_2\right)^2 \le$$

$$\le \frac{1}{4}\sum_{j_1=2, j_1-\text{четное}}^{2p_3+2}\left(\int\limits_t^T \mid\phi_{j_1}(s_2)\mid\sum_{j_3=p_3+1}^{\infty}\left(\int\limits_{s_2}^T \phi_{j_3}(s_1)ds_1\right)^2 ds_2\right)^2. \qquad (2.60)$$

Для получения (2.60) мы использовали равенство Парсеваля (2.54) и соотношение (2.53).

Далее имеем

$$\left(\int\limits_{s_2}^{T}\phi_{j_3}(s_1)ds_1\right)^2=\frac{(T-t)}{4(2j_3+1)}\times$$

$$\times\left(P_{j_3+1}\left(\left(s_2-\frac{T+t}{2}\right)\frac{2}{T-t}\right)-P_{j_3-1}\left(\left(s_2-\frac{T+t}{2}\right)\frac{2}{T-t}\right)\right)^2\le$$

$$\le\frac{T-t}{2(2j_3+1)}\times$$

$$\times\left(P_{j_3+1}^2\left(\left(s_2-\frac{T+t}{2}\right)\frac{2}{T-t}\right)+P_{j_3-1}^2\left(\left(s_2-\frac{T+t}{2}\right)\frac{2}{T-t}\right)\right)<$$

$$<\frac{T-t}{2(2j_3+1)}\left(\frac{K^2}{j_3+2}+\frac{K^2}{j_3}\right)\frac{1}{\left(1-\left(\left(s_2-\frac{T+t}{2}\right)\frac{2}{T-t}\right)^2\right)^{\frac{1}{2}}}<$$

$$<\frac{(T-t)K^2}{2j_3^2}\frac{1}{\left(1-\left(\left(s_2-\frac{T+t}{2}\right)\frac{2}{T-t}\right)^2\right)^{\frac{1}{2}}};\ s\in(t,T). \qquad (2.61)$$

Для получения (2.61) мы использовали оценку (2.42).

Подставляя оценку (2.61) в соотношение (2.60) и используя в (2.60) оценку (2.43) для $|\ \phi_{j_1}(s_2)\ |$ мы получим:

$$\sum_{j_1=2,j_1-\text{четное}}^{2p_3+2}\left(\sum_{j_3=0}^{p_3}C_{j_3j_3j_1}\right)^2<$$

$$<\frac{(T-t)K^4K_1^2}{16}\sum_{j_1=2,j_1-\text{четное}}^{2p_3+2}\left(\int\limits_t^T\frac{ds}{\left(1-\left(\left(s_2-\frac{T+t}{2}\right)\frac{2}{T-t}\right)^2\right)^{\frac{3}{4}}}\sum_{j_3=p_3+1}^{\infty}\frac{1}{j_3^2}\right)^2=$$

$$=\frac{(T-t)^3K^4K_1^2(p_3+1)}{64}\left(\int\limits_{-1}^{1}\frac{dy}{(1-y^2)^{\frac{3}{4}}}\right)^2\left(\sum_{j_3=p_3+1}^{\infty}\frac{1}{j_3^2}\right)^2. \qquad (2.62)$$

С помощью (2.46) и (2.47) из (2.62) находим:

$$\sum_{j_1=2,j_1-\text{четное}}^{2p_3+2}\left(\sum_{j_3=0}^{p_3}C_{j_3j_3j_1}\right)^2<\frac{C(T-t)^3(p_3+1)}{p_3^2}\to 0 \text{ при } p_3\to\infty, \qquad (2.63)$$

где постоянная C не зависит от p_3 и $T-t$.

Из (2.63) следует (2.59), а из (2.59) следует (2.20). Соотношение (2.20) доказано.

Докажем равенство (2.21).

Поскольку $\psi_1(\tau),\ \psi_2(\tau),\ \psi_3(\tau) \equiv 1$, то справедливо следующее соотношение для коэффициентов Фурье:

$$C_{j_1 j_1 j_3} + C_{j_1 j_3 j_1} + C_{j_3 j_1 j_1} = \frac{1}{2} C_{j_1}^2 C_{j_3},$$

где $C_j = 0$ для $j \geq 1$ и $C_0 = \sqrt{T-t}$.

Тогда

$$\sum_{j_1,j_3=0}^{\infty} C_{j_1 j_3 j_1} \zeta_{j_3}^{(i_2)} = \sum_{j_1,j_3=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2} C_{j_1}^2 C_{j_3} - C_{j_1 j_1 j_3} - C_{j_3 j_1 j_1}\right) \zeta_{j_3}^{(i_2)}. \qquad (2.64)$$

Поэтому, принимая во внимание (2.19) и (2.20) мы можем записать:

$$\sum_{j_1,j_3=0}^{\infty} C_{j_1 j_3 j_1} \zeta_{j_3}^{(i_2)} = \frac{1}{2} C_0^3 \zeta_0^{(i_2)} - \sum_{j_1,j_3=0}^{\infty} C_{j_1 j_1 j_3} \zeta_{j_3}^{(i_2)} - \sum_{j_1,j_3=0}^{\infty} C_{j_3 j_1 j_1} \zeta_{j_3}^{(i_2)} =$$

$$= \frac{1}{2}(T-t)^{\frac{3}{2}} \zeta_0^{(i_2)} - \frac{1}{4}(T-t)^{\frac{3}{2}} \left(\zeta_0^{(i_2)} - \frac{1}{\sqrt{3}} \zeta_1^{(i_2)}\right) -$$

$$-\frac{1}{4}(T-t)^{\frac{3}{2}} \left(\zeta_0^{(i_2)} + \frac{1}{\sqrt{3}} \zeta_1^{(i_2)}\right) = 0. \qquad (2.65)$$

Соотношение (2.21) доказано. Таким образом доказано следующее разложение для повторных стохастических интегралов Стратоновича 3 кратности для случая полиномов Лежандра:

$$\int\limits_t^{*T} \int\limits_t^{*t_3} \int\limits_t^{*t_2} d\mathbf{f}_{t_1}^{(i_1)} d\mathbf{f}_{t_2}^{(i_2)} d\mathbf{f}_{t_3}^{(i_3)} = \sum_{j_1,j_2,j_3=0}^{\infty} C_{j_3 j_2 j_1} \zeta_{j_1}^{(i_1)} \zeta_{j_2}^{(i_2)} \zeta_{j_3}^{(i_3)}, \qquad (2.66)$$

где ряд сходится в среднеквадратическом смысле,

$$C_{j_3 j_2 j_1} = \int\limits_t^T \phi_{j_3}(s) \int\limits_t^s \phi_{j_2}(s_1) \int\limits_t^{s_1} \phi_{j_1}(s_2) ds_2 ds_1 ds$$

и $i_1, i_2, i_3 = 1, \ldots, m$.

Нетрудно видеть, что формула (2.66) может быть доказана для случая $i_1 = i_2 = i_3$ с помощью формулы Ито (см. также разд. 6.3):

$$\int\limits_t^{*T} \int\limits_t^{*t_3} \int\limits_t^{*t_2} d\mathbf{f}_{t_1}^{(i_1)} d\mathbf{f}_{t_2}^{(i_1)} d\mathbf{f}_{t_3}^{(i_1)} = \frac{1}{6} \left(\int\limits_t^T d\mathbf{f}_s^{(i_1)}\right)^3 = \frac{1}{6} \left(C_0 \zeta_0^{(i_1)}\right)^3 = C_{000} \zeta_0^{(i_1)} \zeta_0^{(i_1)} \zeta_0^{(i_1)},$$

где равенство выполняется с в. 1.

Рассмотрим разложения конкретных повторных стохастических интегралов Стратоновича и Ито с использованием полученных результатов и системы полиномов Лежандра.

Пусть

$$I_{l_1\ldots l_k T,t}^{(i_1\ldots i_k)}=\int\limits_t^T(t-t_k)^{l_k}\ldots\int\limits_t^{t_2}(t-t_1)^{l_1}d\mathbf{f}_{t_1}^{(i_1)}\ldots d\mathbf{f}_{t_k}^{(i_k)}, \tag{2.67}$$

$$I_{l_1\ldots l_k T,t}^{*(i_1\ldots i_k)}=\int\limits_t^{*T}(t-t_k)^{l_k}\ldots\int\limits_t^{*t_2}(t-t_1)^{l_1}d\mathbf{f}_{t_1}^{(i_1)}\ldots d\mathbf{f}_{t_k}^{(i_k)},$$

где $i_1,\ldots,i_k=1,\ldots,m;\ l_1,\ldots,l_k=0,\ 1,\ldots.$

Прямое вычисление по теореме 1 дает:

$$I_{000_{T,t}}^{(i_1i_2i_3)}=-\frac{1}{T-t}\left(I_{0_{T,t}}^{(i_3)}I_{10_{T,t}}^{*(i_2i_1)}+I_{0_{T,t}}^{(i_1)}I_{10_{T,t}}^{*(i_2i_3)}\right)+$$

$$+\frac{1}{2}I_{0_{T,t}}^{(i_3)}\left(I_{00_{T,t}}^{*(i_1i_2)}-I_{00_{T,t}}^{*(i_2i_1)}\right)-$$

$$-(T-t)^{\frac{3}{2}}\left[\frac{1}{6}\zeta_0^{(i_1)}\zeta_0^{(i_3)}\left(\zeta_0^{(i_2)}+\sqrt{3}\zeta_1^{(i_2)}-\frac{1}{\sqrt{5}}\zeta_2^{(i_2)}\right)+\right.$$

$$+\frac{1}{4}\mathbf{1}_{\{i_1=i_2\}}\left(\zeta_0^{(i_3)}+\frac{1}{\sqrt{3}}\zeta_1^{(i_3)}+\frac{1}{3\sqrt{5}}\zeta_2^{(i_3)}+G_{T,t}^{(i_3)}\right)+$$

$$+\frac{1}{4}\mathbf{1}_{\{i_2=i_3\}}\left(\zeta_0^{(i_1)}-\frac{1}{\sqrt{3}}\zeta_1^{(i_1)}+\frac{1}{3\sqrt{5}}\zeta_2^{(i_1)}+G_{T,t}^{(i_1)}\right)+$$

$$\left.+\frac{1}{6}\mathbf{1}_{\{i_1=i_3\}}\left(\zeta_0^{(i_2)}-\frac{1}{\sqrt{5}}\zeta_2^{(i_2)}+Q_{T,t}^{(i_2)}\right)+\frac{1}{4}D_{T,t}^{(i_1i_2i_3)}\right],$$

$$I_{0_{T,t}}^{(i_1)}=\sqrt{T-t}\zeta_0^{(i_1)},$$

$$I_{00_{T,t}}^{*(i_1i_2)}=\frac{T-t}{2}\left[\zeta_0^{(i_1)}\zeta_0^{(i_2)}+\sum_{i=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{4i^2-1}}\left\{\zeta_{i-1}^{(i_1)}\zeta_i^{(i_2)}-\zeta_i^{(i_1)}\zeta_{i-1}^{(i_2)}\right\}\right],$$

$$I_{10_{T,t}}^{*(i_1i_2)}=-\frac{T-t}{2}I_{00_{T,t}}^{*(i_1i_2)}-\frac{(T-t)^2}{4}\left[\frac{1}{\sqrt{3}}\zeta_0^{(i_2)}\zeta_1^{(i_1)}+\right.$$

$$\left.+\sum_{i=0}^{\infty}\left(\frac{(i+1)\zeta_{i+2}^{(i_2)}\zeta_i^{(i_1)}-(i+2)\zeta_i^{(i_2)}\zeta_{i+2}^{(i_1)}}{\sqrt{(2i+1)(2i+5)(2i+3)}}+\frac{\zeta_i^{(i_1)}\zeta_i^{(i_2)}}{(2i-1)(2i+3)}\right)\right],$$

$$D_{T,t}^{(i_1 i_2 i_3)} = \sum_{\substack{i=1,j=0,k=i \\ 2i\ge k+i-j\ge -2;\ k+i-j\ -\ \text{четное}}}^{\infty} N_{ijk} K_{i+1,k+1,\frac{k+i-j}{2}+1} \zeta_i^{(i_1)} \zeta_j^{(i_2)} \zeta_k^{(i_3)} +$$

$$+ \sum_{\substack{i=1,j=0 \\ 2k\ge k+i-j\ge -2;\ k+i-j\ -\ \text{четное}}}^{\infty} \sum_{k=1}^{i-1} N_{ijk} K_{k+1,i+1,\frac{k+i-j}{2}+1} \zeta_i^{(i_1)} \zeta_j^{(i_2)} \zeta_k^{(i_3)} -$$

$$- \sum_{\substack{i=1,j=0,k=i+2 \\ 2i+2\ge k+i-j\ge 0;\ k+i-j\ -\ \text{четное}}}^{\infty} N_{ijk} K_{i+1,k-1,\frac{k+i-j}{2}} \zeta_i^{(i_1)} \zeta_j^{(i_2)} \zeta_k^{(i_3)} -$$

$$- \sum_{\substack{i=1,j=0 \\ 2k-2\ge k+i-j\ge 0;\ k+i-j\ -\ \text{четное}}}^{\infty} \sum_{k=1}^{i+1} N_{ijk} K_{k-1,i+1,\frac{k+i-j}{2}} \zeta_i^{(i_1)} \zeta_j^{(i_2)} \zeta_k^{(i_3)} -$$

$$- \sum_{\substack{i=1,j=0,k=i-2,k\ge 1 \\ 2i-2\ge k+i-j\ge 0;\ k+i-j\ -\ \text{четное}}}^{\infty} N_{ijk} K_{i-1,k+1,\frac{k+i-j}{2}} \zeta_i^{(i_1)} \zeta_j^{(i_2)} \zeta_k^{(i_3)} -$$

$$- \sum_{\substack{i=1,j=0 \\ 2k+2\ge k+i-j\ge 0;\ k+i-j\ -\ \text{четное}}}^{\infty} \sum_{k=1}^{i-3} N_{ijk} K_{k+1,i-1,\frac{k+i-j}{2}} \zeta_i^{(i_1)} \zeta_j^{(i_2)} \zeta_k^{(i_3)} +$$

$$+ \sum_{\substack{i=1,j=0,k=i \\ 2i\ge k+i-j\ge 2;\ k+i-j\ -\ \text{четное}}}^{\infty} N_{ijk} K_{i-1,k-1,\frac{k+i-j}{2}-1} \zeta_i^{(i_1)} \zeta_j^{(i_2)} \zeta_k^{(i_3)} +$$

$$+ \sum_{\substack{i=1,j=0 \\ 2k\ge k+i-j\ge 2;\ k+i-j\ -\ \text{четное}}}^{\infty} \sum_{k=1}^{i-1} N_{ijk} K_{k-1,i-1,\frac{k+i-j}{2}-1} \zeta_i^{(i_1)} \zeta_j^{(i_2)} \zeta_k^{(i_3)},$$

$$G_{T,t}^{(i_3)} = -\sum_{j=1}^{\infty} \left\{ \sum_{k=j,\ k\ -\ \text{четное}}^{2j} N_{jjk} K_{j+1,k+1,\frac{k}{2}+1} \zeta_k^{(i_3)} + \right.$$

$$+ \sum_{k=1,\ k\ -\ \text{четное}}^{j-1} N_{jjk} K_{k+1,j+1,\frac{k}{2}+1} \zeta_k^{(i_3)} -$$

$$- \sum_{k=j-2,\ k\ge 1,\ k\ -\ \text{четное}}^{2j-2} N_{jjk} K_{j-1,k+1,\frac{k}{2}} \zeta_k^{(i_3)} -$$

$$- \sum_{k=1,\ k\ -\ \text{четное}}^{j-3} N_{jjk} K_{k+1,j-1,\frac{k}{2}} \zeta_k^{(i_3)} -$$

$$-\sum_{k=j+2,\ k\ -\ \text{четное}}^{2j+2} N_{jjk}K_{j+1,k-1,\frac{k}{2}}\zeta_k^{(i_3)}-$$

$$-\sum_{k=1,\ k\ -\ \text{четное}}^{j+1} N_{jjk}K_{k-1,j+1,\frac{k}{2}}\zeta_k^{(i_3)}+$$

$$+\sum_{k=j,\ k\ -\ \text{четное}}^{2j} N_{jjk}K_{j-1,k-1,\frac{k}{2}-1}\zeta_k^{(i_3)}+$$

$$\left.+\sum_{k=1,\ k\ -\ \text{четное}}^{j-1} N_{jjk}K_{k-1,j-1,\frac{k}{2}-1}\zeta_k^{(i_3)}\right\},$$

$$Q_{T,t}^{(i_2)}=-\frac{3}{2}\sum_{i=1}^{\infty}\left\{\sum_{j=0,\ j\ -\ \text{четное}}^{2i+2} N_{iji}K_{i+1,i+1,i+1-\frac{j}{2}}\zeta_j^{(i_2)}-\right.$$

$$-2\sum_{j=2,\ j\ -\ \text{четное}}^{2i} N_{iji}K_{i-1,i-1,i-\frac{j}{2}}\zeta_j^{(i_2)}+$$

$$\left.+\sum_{j=0,\ j\ -\ \text{четное}}^{2i-2} N_{iji}K_{i-1,i-1,i-1-\frac{j}{2}}\zeta_j^{(i_2)}\right\},$$

где

$$N_{ijk}=\sqrt{\frac{1}{(2k+1)(2j+1)(2i+1)}},$$

$$K_{m,n,k}=\frac{a_{m-k}a_k a_{n-k}}{a_{m+n-k}}\cdot\frac{2n+2m-4k+1}{2n+2m-2k+1};\ a_k=\frac{(2k-1)!!}{k!};\ m\le n.$$

С другой стороны, согласно (2.66) мы можем использовать гораздо более компактные выражения:

$$I_{000_{T,t}}^{*(i_1i_2i_3)}=-\frac{1}{T-t}\left(I_{0_{T,t}}^{(i_3)}I_{10_{T,t}}^{*(i_2i_1)}+I_{0_{T,t}}^{(i_1)}I_{10_{T,t}}^{*(i_2i_3)}\right)+$$

$$+\frac{1}{2}I_{0_{T,t}}^{(i_3)}\left(I_{00_{T,t}}^{*(i_1i_2)}-I_{00_{T,t}}^{*(i_2i_1)}\right)-$$

$$-(T-t)^{\frac{3}{2}}\left[\frac{1}{6}\zeta_0^{(i_1)}\zeta_0^{(i_3)}\left(\zeta_0^{(i_2)}+\sqrt{3}\zeta_1^{(i_2)}-\frac{1}{\sqrt{5}}\zeta_2^{(i_2)}\right)+\frac{1}{4}D_{T,t}^{(i_1i_2i_3)}\right]$$

или

$$I_{000_{T,t}}^{(i_1i_2i_3)}=-\frac{1}{T-t}\left(I_{0_{T,t}}^{(i_3)}I_{10_{T,t}}^{*(i_2i_1)}+I_{0_{T,t}}^{(i_1)}I_{10_{T,t}}^{*(i_2i_3)}\right)+$$

$$+\frac{1}{2}I_{0_{T,t}}^{(i_3)}\left(I_{00_{T,t}}^{*(i_1i_2)}-I_{00_{T,t}}^{*(i_2i_1)}\right)-$$

$$-(T-t)^{\frac{3}{2}}\left[\frac{1}{6}\zeta_0^{(i_1)}\zeta_0^{(i_3)}\left(\zeta_0^{(i_2)}+\sqrt{3}\zeta_1^{(i_2)}-\frac{1}{\sqrt{5}}\zeta_2^{(i_2)}\right)+\frac{1}{4}D_{T,t}^{(i_1i_2i_3)}\right]+$$

$$+\mathbf{1}_{\{i_1=i_2\}}\frac{1}{2}I_{1_{T,t}}^{(i_3)}-\mathbf{1}_{\{i_2=i_3\}}\frac{1}{2}\left((T-t)I_{0_{T,t}}^{(i_1)}+I_{1_{T,t}}^{(i_1)}\right),$$

где

$$I_{1_{T,t}}^{(i)}=-\frac{1}{2}(T-t)^{\frac{3}{2}}\left(\zeta_0^{(i)}+\frac{1}{\sqrt{3}}\zeta_1^{(i)}\right),$$

$\zeta_j^{(i)}=\int\limits_t^T\phi_j(s)d\mathbf{f}_s^{(i)}$; $\{\phi_j(x)\}_{j=0}^{\infty}$ — полная ортонормированная система полиномов Лежандра на промежутке $[t,T]$.

Докажем некоторые обобщения разложения (2.66) для ситуации, когда $\psi_i(\tau)\equiv(t-\tau)^{l_i}$; $l_i=0,\ 1,\ 2,\ldots$; $i=1,\ 2,\ 3$.

2.3.2 Случай $\psi_1(\tau),\psi_2(\tau)\equiv(t-\tau)^l$, $\psi_3(\tau)\equiv(t-\tau)^{l_3}$; $i_1=i_2\neq i_3$

В данном разделе мы докажем следующее разложение для повторных стохастических интегралов Стратоновича 3 кратности:

$$\int\limits_t^{*T}(t-s)^{l_3}\int\limits_t^{*s}(t-s_1)^l\int\limits_t^{*s_1}(t-s_2)^l d\mathbf{f}_{s_2}^{(i_1)}d\mathbf{f}_{s_1}^{(i_2)}d\mathbf{f}_s^{(i_3)}=$$

$$=\sum_{j_1,j_2,j_3=0}^{\infty}C_{j_3j_2j_1}\zeta_{j_1}^{(i_1)}\zeta_{j_2}^{(i_2)}\zeta_{j_3}^{(i_3)};\ (i_1=i_2\neq i_3;\ i_1,i_2,i_3=1,\ldots,m),\qquad(2.68)$$

где ряд сходится в среднеквадратическом смысле $l,l_3=0,\ 1,\ 2,\ldots$ и

$$C_{j_3j_2j_1}=\int\limits_t^T\phi_{j_3}(s)(t-s)^{l_3}\int\limits_t^s(t-s_1)^l\phi_{j_2}(s_1)\int\limits_t^{s_1}(t-s_2)^l\phi_{j_1}(s_2)ds_2ds_1ds.\qquad(2.69)$$

Если мы докажем формулу:

$$\sum_{j_1,j_3=0}^{\infty}C_{j_3j_1j_1}\zeta_{j_3}^{(i_3)}=\frac{1}{2}\int\limits_t^T(t-s)^{l_3}\int\limits_t^s(t-s_1)^{2l}ds_1d\mathbf{f}_s^{(i_3)},\qquad(2.70)$$

где ряд сходится в среднеквадратическом смысле и коэффициенты $C_{j_3j_1j_1}$ имеют вид (2.69), то с помощью теоремы 1 и стандартных соотношений между повторными стохастическими интегралами Ито и Стратоновича мы получим разложение (2.68).

С помощью теоремы 1 можно записать:

$$\frac{1}{2}\int\limits_t^T(t-s)^{l_3}\int\limits_t^s(t-s_1)^{2l}ds_1d\mathbf{f}_s^{(i_3)}=\frac{1}{2}\sum_{j_3=0}^{2l+l_3+1}\tilde{C}_{j_3}\zeta_{j_3}^{(i_3)}\ \text{с. в. 1},$$

где

$$\tilde{C}_{j_3} = \int\limits_t^T \phi_{j_3}(s)(t-s)^{l_3} \int\limits_t^s (t-s_1)^{2l} ds_1 ds.$$

Тогда

$$\sum_{j_3=0}^{p_3} \sum_{j_1=0}^{p_1} C_{j_3 j_1 j_1} \zeta_{j_3}^{(i_3)} - \frac{1}{2} \sum_{j_3=0}^{2l+l_3+1} \tilde{C}_{j_3} \zeta_{j_3}^{(i_3)} =$$

$$= \sum_{j_3=0}^{2l+l_3+1} \left(\sum_{j_1=0}^{p_1} C_{j_3 j_1 j_1} - \frac{1}{2} \tilde{C}_{j_3} \right) \zeta_{j_3}^{(i_3)} + \sum_{j_3=2l+l_3+2}^{p_3} \sum_{j_1=0}^{p_1} C_{j_3 j_1 j_1} \zeta_{j_3}^{(i_3)}.$$

Поэтому

$$\lim_{p_1, p_3 \to \infty} \mathrm{M} \left\{ \left(\sum_{j_3=0}^{p_3} \sum_{j_1=0}^{p_1} C_{j_3 j_1 j_1} \zeta_{j_3}^{(i_3)} - \frac{1}{2} \int\limits_t^T (t-s)^{l_3} \int\limits_t^s (t-s_1)^{2l} ds_1 d\mathbf{f}_s^{(i_3)} \right)^2 \right\} =$$

$$= \lim_{p_1 \to \infty} \sum_{j_3=0}^{2l+l_3+1} \left(\sum_{j_1=0}^{p_1} C_{j_3 j_1 j_1} - \frac{1}{2} \tilde{C}_{j_3} \right)^2 +$$

$$+ \lim_{p_1, p_3 \to \infty} \mathrm{M} \left\{ \left(\sum_{j_3=2l+l_3+2}^{p_3} \sum_{j_1=0}^{p_1} C_{j_3 j_1 j_1} \zeta_{j_3}^{(i_3)} \right)^2 \right\}. \qquad (2.71)$$

Докажем, что

$$\lim_{p_1 \to \infty} \left(\sum_{j_1=0}^{p_1} C_{j_3 j_1 j_1} - \frac{1}{2} \tilde{C}_{j_3} \right)^2 = 0. \qquad (2.72)$$

Имеем

$$\left(\sum_{j_1=0}^{p_1} C_{j_3 j_1 j_1} - \frac{1}{2} \tilde{C}_{j_3} \right)^2 =$$

$$= \left(\frac{1}{2} \sum_{j_1=0}^{p_1} \int\limits_t^T \phi_{j_3}(s)(t-s)^{l_3} \left(\int\limits_t^s \phi_{j_1}(s_1)(t-s_1)^l ds_1 \right)^2 ds - \right.$$

$$\left. - \frac{1}{2} \int\limits_t^T \phi_{j_3}(s)(t-s)^{l_3} \int\limits_t^s (t-s_1)^{2l} ds_1 ds \right)^2 =$$

$$= \frac{1}{4} \left(\int\limits_t^T \phi_{j_3}(s)(t-s)^{l_3} \left(\sum_{j_1=0}^{p_1} \left(\int\limits_t^s \phi_{j_1}(s_1)(t-s_1)^l ds_1 \right)^2 - \right. \right.$$

$$\left. \left. - \int\limits_t^s (t-s_1)^{2l} ds_1 \right) ds \right)^2 =$$

$$= \frac{1}{4}\left(\int\limits_t^T \phi_{j_3}(s)(t-s)^{l_3}\left(\int\limits_t^s (t-s_1)^{2l}ds_1 - \right.\right.$$

$$\left.\left. - \sum_{j_1=p_1+1}^{\infty}\left(\int\limits_t^s \phi_{j_1}(s_1)(t-s_1)^l ds_1\right)^2 - \int\limits_t^s (t-s_1)^{2l}ds_1\right) ds\right)^2 =$$

$$= \frac{1}{4}\left(\int\limits_t^T \phi_{j_3}(s)(t-s)^{l_3}\sum_{j_1=p_1+1}^{\infty}\left(\int\limits_t^s \phi_{j_1}(s_1)(t-s_1)^l ds_1\right)^2 ds\right)^2. \qquad (2.73)$$

Для получения (2.73) мы использовали равенство Парсеваля, которое в данном случае имеет вид:

$$\sum_{j_1=0}^{\infty}\left(\int\limits_t^s \phi_{j_1}(s_1)(t-s_1)^l ds_1\right)^2 = \int\limits_t^T K^2(s,s_1)ds_1, \qquad (2.74)$$

где

$$K(s,s_1) = \begin{cases}(t-s_1)^l, \ s_1 < s\\ 0, \ \text{иначе}\end{cases}; \ s, s_1 \in [t,T].$$

Принимая во внимание неубывание функциональной последовательности

$$u_n(s) = \sum_{j_1=0}^{n}\left(\int\limits_t^s \phi_{j_1}(s_1)(t-s_1)^l ds_1\right)^2,$$

непрерывность ее членов и непрерывность предельной функции $u(s) = \int\limits_t^s (t-s_1)^{2l}ds_1$ на отрезке $[t,T]$ по признаку Дини имеем равномерную сходимость функциональной последовательности $u_n(s)$ к предельной функции $u(s)$ на отрезке $[t,T]$.

Из (2.73) с помощью неравенства Коши-Буняковского получаем:

$$\left(\sum_{j_1=0}^{p_1} C_{j_3 j_1 j_1} - \frac{1}{2}\tilde{C}_{j_3}\right)^2 \le$$

$$\le \frac{1}{4}\int\limits_t^T \phi_{j_3}^2(s)(t-s)^{2l_3}ds\int\limits_t^T\left(\sum_{j_1=p_1+1}^{\infty}\left(\int\limits_t^s \phi_{j_1}(s_1)(t-s_1)^l ds_1\right)^2\right)^2 ds \le$$

$$\le \frac{1}{4}\varepsilon^2(T-t)^{2l_3}\int\limits_t^T \phi_{j_3}^2(s)ds(T-t) = \frac{1}{4}(T-t)^{2l_3+1}\varepsilon^2 \qquad (2.75)$$

при $p_1 > N(\varepsilon)$, где $N(\varepsilon)$ найдено по любому $\varepsilon > 0$.

Из (2.75) следует (2.72).

Далее

$$\sum_{j_1=0}^{p_1}\sum_{j_3=2l+l_3+2}^{p_3} C_{j_3j_1j_1}\zeta_{j_3}^{(i_3)} = \sum_{j_1=0}^{p_1}\sum_{j_3=2l+l_3+2}^{2(j_1+l+1)+l_3} C_{j_3j_1j_1}\zeta_{j_3}^{(i_3)}. \qquad (2.76)$$

Мы положили $2(j_1+l+1)+l_3$ вместо p_3, поскольку $C_{j_3j_1j_1} = 0$ для $j_3 > 2(j_1+l+1)+l_3$. Это заключение следует из соотношения:

$$C_{j_3j_1j_1} = \frac{1}{2}\int\limits_t^T \phi_{j_3}(s)(t-s)^{l_3}\left(\int\limits_t^s \phi_{j_1}(s_1)(t-s_1)^l ds_1\right)^2 ds =$$

$$= \frac{1}{2}\int\limits_t^T \phi_{j_3}(s) Q_{2(j_1+l+1)+l_3}(s)ds,$$

где $Q_{2(j_1+l+1)+l_3}(s)$ — многочлен степени $2(j_1+l+1)+l_3$.

Нетрудно видеть, что

$$\sum_{j_1=0}^{p_1}\sum_{j_3=2l+l_3+2}^{2(j_1+l+1)+l_3} C_{j_3j_1j_1}\zeta_{j_3}^{(i_3)} = \sum_{j_3=2l+l_3+2}^{2(p_1+l+1)+l_3}\sum_{j_1=0}^{p_1} C_{j_3j_1j_1}\zeta_{j_3}^{(i_3)}. \qquad (2.77)$$

Заметим, что мы включили в сумму $\sum\limits_{j_1=0}^{p_1}$ некоторые коэффициенты $C_{j_3j_1j_1}$, которые равны нулю.

Из (2.76) и (2.77) мы получаем:

$$\mathrm{M}\left\{\left(\sum_{j_1=0}^{p_1}\sum_{j_3=2l+l_3+2}^{p_3} C_{j_3j_1j_1}\zeta_{j_3}^{(i_3)}\right)^2\right\} = \mathrm{M}\left\{\left(\sum_{j_3=2l+l_3+2}^{2(p_1+l+1)+l_3}\sum_{j_1=0}^{p_1} C_{j_3j_1j_1}\zeta_{j_3}^{(i_3)}\right)^2\right\} =$$

$$= \sum_{j_3=2l+l_3+2}^{2(p_1+l+1)+l_3}\left(\sum_{j_1=0}^{p_1} C_{j_3j_1j_1}\right)^2 =$$

$$= \sum_{j_3=2l+l_3+2}^{2(p_1+l+1)+l_3}\left(\frac{1}{2}\sum_{j_1=0}^{p_1}\int\limits_t^T \phi_{j_3}(s)(t-s)^{l_3}\left(\int\limits_t^s \phi_{j_1}(s_1)(t-s_1)^l ds_1\right)^2 ds\right)^2 =$$

$$= \frac{1}{4}\sum_{j_3=2l+l_3+2}^{2(p_1+l+1)+l_3}\left(\int\limits_t^T \phi_{j_3}(s)(t-s)^{l_3}\sum_{j_1=0}^{p_1}\left(\int\limits_t^s \phi_{j_1}(s_1)(t-s_1)^l ds_1\right)^2 ds\right)^2 =$$

$$= \frac{1}{4}\sum_{j_3=2l+l_3+2}^{2(p_1+l+1)+l_3}\left(\int\limits_t^T \phi_{j_3}(s)(t-s)^{l_3}\left(\int\limits_t^s (t-s_1)^{2l}ds_1 - \right.\right.$$

$$
-\sum_{j_1=p_1+1}^{\infty}\left(\int\limits_t^s \phi_{j_1}(s_1)(t-s_1)^l ds_1\right)^2\Biggr) ds\Biggr)^2 =
$$

$$
=\frac{1}{4}\sum_{j_3=2l+l_3+2}^{2(p_1+l+1)+l_3}\left(\int\limits_t^T \phi_{j_3}(s)(t-s)^{l_3}\sum_{j_1=p_1+1}^{\infty}\left(\int\limits_t^s \phi_{j_1}(s_1)(t-s_1)^l ds_1\right)^2 ds\right)^2. \quad (2.78)
$$

Для получения (2.78) мы использовали равенство Парсеваля вида (2.74) и соотношение:

$$
\int\limits_t^T \phi_{j_3}(s)Q_{2l+1+l_3}(s)ds=0;\ j_3>2l+1+l_3,
$$

где $Q_{2l+1+l_3}(s)$ — многочлен степени $2l+1+l_3$.

Далее имеем

$$
\left(\int\limits_t^s \phi_{j_1}(s_1)(t-s_1)^l ds_1\right)^2 =
$$

$$
=\frac{(T-t)^{2l+1}(2j_1+1)}{2^{2l+2}}\left(\int\limits_{-1}^{\left(s-\frac{T+t}{2}\right)\frac{2}{T-t}} P_{j_1}(y)(1+y)^l dy\right)^2 =
$$

$$
=\frac{(T-t)^{2l+1}}{2^{2l+2}(2j_1+1)}\times
$$

$$
\times\Biggl(\left(1+\left(s-\frac{T+t}{2}\right)\frac{2}{T-t}\right)^l\left(P_{j_1+1}\left(\left(s-\frac{T+t}{2}\right)\frac{2}{T-t}\right)-\right.
$$

$$
\left.-P_{j_1-1}\left(\left(s-\frac{T+t}{2}\right)\frac{2}{T-t}\right)\right)-
$$

$$
-l\int\limits_{-1}^{\left(s-\frac{T+t}{2}\right)\frac{2}{T-t}}\left(P_{j_1+1}(y)-P_{j_1-1}(y)\right)(1+y)^{l-1}dy\Biggr)^2 \le
$$

$$
\le\frac{(T-t)^{2l+1}2}{2^{2l+2}(2j_1+1)}\Biggl(\left(\frac{2(s-t)}{T-t}\right)^{2l}\left(P_{j_1+1}\left(\left(s-\frac{T+t}{2}\right)\frac{2}{T-t}\right)-\right.
$$

$$
\left.-P_{j_1-1}\left(\left(s-\frac{T+t}{2}\right)\frac{2}{T-t}\right)\right)^2+
$$

$$
+l^2\left(\int\limits_{-1}^{\left(s-\frac{T+t}{2}\right)\frac{2}{T-t}}\left(P_{j_1+1}(y)-P_{j_1-1}(y)\right)(1+y)^{l-1}dy\right)^2\Biggr)\le
$$

$$
\leq \frac{(T-t)^{2l+1}}{2^{2l+1}(2j_1+1)}\Biggl(2^{2l+1}\left(P_{j_1+1}^2\left(\left(s-\frac{T+t}{2}\right)\frac{2}{T-t}\right)+\right.
$$

$$
\left.+P_{j_1-1}^2\left(\left(s-\frac{T+t}{2}\right)\frac{2}{T-t}\right)\right)+
$$

$$
\left.+l^2\int\limits_{-1}^{\left(s-\frac{T+t}{2}\right)\frac{2}{T-t}}(1+y)^{2l-2}dy\int\limits_{-1}^{\left(s-\frac{T+t}{2}\right)\frac{2}{T-t}}\left(P_{j_1+1}(y)-P_{j_1-1}(y)\right)^2dy\right)\leq
$$

$$
\leq \frac{(T-t)^{2l+1}}{2^{2l+1}(2j_1+1)}\Biggl(2^{2l+1}\left(P_{j_1+1}^2\left(\left(s-\frac{T+t}{2}\right)\frac{2}{T-t}\right)+\right.
$$

$$
\left.+P_{j_1-1}^2\left(\left(s-\frac{T+t}{2}\right)\frac{2}{T-t}\right)\right)+
$$

$$
\left.+\frac{2l^2}{2l-1}\left(\frac{2(s-t)}{T-t}\right)^{2l-1}\int\limits_{-1}^{\left(s-\frac{T+t}{2}\right)\frac{2}{T-t}}\left(P_{j_1+1}^2(y)+P_{j_1-1}^2(y)\right)dy\right)\leq
$$

$$
\leq \frac{(T-t)^{2l+1}}{2(2j_1+1)}\Biggl(2\left(P_{j_1+1}^2\left(\left(s-\frac{T+t}{2}\right)\frac{2}{T-t}\right)+\right.
$$

$$
\left.+P_{j_1-1}^2\left(\left(s-\frac{T+t}{2}\right)\frac{2}{T-t}\right)\right)+
$$

$$
\left.+\frac{l^2}{2l-1}\int\limits_{-1}^{\left(s-\frac{T+t}{2}\right)\frac{2}{T-t}}\left(P_{j_1+1}^2(y)+P_{j_1-1}^2(y)\right)dy\right). \tag{2.79}
$$

Оценим правую часть (2.79) с помощью (2.42):

$$
\left(\int\limits_t^s\phi_{j_1}(s_1)(t-s_1)^l ds_1\right)^2<\frac{(T-t)^{2l+1}}{2(2j_1+1)}\left(\frac{K^2}{j_1+2}+\frac{K^2}{j_1}\right)\times
$$

$$
\times\left(\frac{2}{\left(1-\left(\left(s-\frac{T+t}{2}\right)\frac{2}{T-t}\right)^2\right)^{\frac{1}{2}}}+\frac{l^2}{2l-1}\int\limits_{-1}^{\left(s-\frac{T+t}{2}\right)\frac{2}{T-t}}\frac{dy}{\left(1-y^2\right)^{\frac{1}{2}}}\right)<
$$

$$
<\frac{(T-t)^{2l+1}K^2}{2j_1^2}\left(\frac{2}{\left(1-\left(\left(s-\frac{T+t}{2}\right)\frac{2}{T-t}\right)^2\right)^{\frac{1}{2}}}+\frac{l^2\pi}{2l-1}\right);\ s\in(t,T). \tag{2.80}
$$

Из (2.78) и (2.80) мы получаем:

$$
\mathrm{M}\left\{\left(\sum_{j_1=0}^{p_1}\sum_{j_3=2l+l_3+2}^{p_3}C_{j_3j_1j_1}\zeta_{j_3}^{(i_3)}\right)^2\right\}\leq
$$

$$\leq \frac{1}{4}\sum_{j_3=2l+l_3+2}^{2(p_1+l+1)+l_3}\left(\int\limits_t^T \mid \phi_{j_3}(s)\mid (t-s)^{l_3}\sum_{j_1=p_1+1}^{\infty}\left(\int\limits_t^s \phi_{j_1}(s_1)(t-s_1)^l ds_1\right)^2 ds\right)^2 \leq$$

$$\leq \frac{1}{4}(T-t)^{2l_3}\sum_{j_3=2l+l_3+2}^{2(p_1+l+1)+l_3}\left(\int\limits_t^T \mid \phi_{j_3}(s)\mid \sum_{j_1=p_1+1}^{\infty}\left(\int\limits_t^s \phi_{j_1}(s_1)(t-s_1)^l ds_1\right)^2 ds\right)^2 <$$

$$< \frac{(T-t)^{4l+2l_3+1}K^4K_1^2}{16}\sum_{j_3=2l+l_3+2}^{2(p_1+l+1)+l_3}\left(\left(\int\limits_t^T \frac{2ds}{\left(1-\left(\left(s-\frac{T+t}{2}\right)\frac{2}{T-t}\right)^2\right)^{\frac{3}{4}}}+\right.\right.$$

$$\left.\left.+\frac{l^2\pi}{2l-1}\int\limits_t^T \frac{ds}{\left(1-\left(\left(s-\frac{T+t}{2}\right)\frac{2}{T-t}\right)^2\right)^{\frac{1}{4}}}\right)\sum_{j_1=p_1+1}^{\infty}\frac{1}{j_1^2}\right)^2 \leq$$

$$\leq \frac{(T-t)^{4l+2l_3+3}K^4K_1^2}{64}\cdot\frac{2p_1+2}{p_1^2}\left(\int\limits_{-1}^1 \frac{2dy}{(1-y^2)^{\frac{3}{4}}}+\frac{l^2\pi}{2l-1}\int\limits_{-1}^1 \frac{dy}{(1-y^2)^{\frac{1}{4}}}\right)^2 \leq$$

$$\leq (T-t)^{4l+2l_3+3}C\frac{p_1+1}{p_1^2}\to 0 \text{ при } p_1\to\infty, \qquad (2.81)$$

где постоянная C не зависит от p_1 и $T-t$.

Из (2.71), (2.72) и (2.81) следует (2.70), а из (2.70) следует разложение (2.68).

2.3.3 Случай $\psi_3(\tau),\psi_2(\tau)\equiv(t-\tau)^l$, $\psi_1(\tau)\equiv(t-\tau)^{l_1}$; $i_3=i_2\neq i_1$

В данном разделе мы докажем следующее разложение для повторных стохастических интегралов Стратоновича 3 кратности:

$$\int\limits_t^{*T}(t-s)^l\int\limits_t^{*s}(t-s_1)^l\int\limits_t^{*s_1}(t-s_2)^{l_1}d\mathbf{f}_{s_2}^{(i_1)}d\mathbf{f}_{s_1}^{(i_2)}d\mathbf{f}_{s}^{(i_3)} =$$

$$=\sum_{j_1,j_2,j_3=0}^{\infty}C_{j_3j_2j_1}\zeta_{j_1}^{(i_1)}\zeta_{j_2}^{(i_2)}\zeta_{j_3}^{(i_3)};\ (i_3=i_2\neq i_1;\ i_1,i_2,i_3=1,\ldots,m), \qquad (2.82)$$

где ряд сходится в среднеквадратическом смысле; $l,l_1=0,\ 1,\ 2,\ldots$ и

$$C_{j_3j_2j_1}=\int\limits_t^T\phi_{j_3}(s)(t-s)^l\int\limits_t^s(t-s_1)^l\phi_{j_2}(s_1)\int\limits_t^{s_1}(t-s_2)^{l_1}\phi_{j_1}(s_2)ds_2ds_1ds. \qquad (2.83)$$

Если мы докажем формулу:

$$\sum_{j_1,j_3=0}^{\infty} C_{j_3j_3j_1}\zeta_{j_1}^{(i_1)} = \frac{1}{2}\int\limits_t^T (t-s)^{2l}\int\limits_t^s (t-s_1)^{l_1} d\mathbf{f}_{s_1}^{(i_1)} ds, \qquad (2.84)$$

где ряд сходится в среднеквадратическом смысле и коэффициенты $C_{j_3j_3j_1}$ имеют вид (2.83), то с помощью теоремы 1 и стандартных соотношений между повторными стохастическими интегралами Стратоновича и Ито мы получим разложение (2.82).

С помощью теоремы 1 мы можем записать:

$$\frac{1}{2}\int\limits_t^T (t-s)^{2l}\int\limits_t^s (t-s_1)^{l_1} d\mathbf{f}_{s_1}^{(i_1)} ds =$$

$$= \frac{1}{2}\int\limits_t^T (t-s_1)^{l_1}\int\limits_{s_1}^T (t-s)^{2l} ds d\mathbf{f}_{s_1}^{(i_1)} =$$

$$= \frac{1}{2}\sum_{j_1=0}^{2l+l_1+1} \tilde{C}_{j_1}\zeta_{j_1}^{(i_1)} \ \text{с. в. } 1,$$

где

$$\tilde{C}_{j_1} = \int\limits_t^T \phi_{j_1}(s_1)(t-s_1)^{l_1}\int\limits_{s_1}^T (t-s)^{2l} ds ds_1.$$

Тогда

$$\sum_{j_1=0}^{p_1}\sum_{j_3=0}^{p_3} C_{j_3j_3j_1}\zeta_{j_1}^{(i_1)} - \frac{1}{2}\sum_{j_1=0}^{2l+l_1+1}\tilde{C}_{j_1}\zeta_{j_1}^{(i_1)} =$$

$$= \sum_{j_1=0}^{2l+l_1+1}\left(\sum_{j_3=0}^{p_3} C_{j_3j_3j_1} - \frac{1}{2}\tilde{C}_{j_1}\right)\zeta_{j_1}^{(i_1)} + \sum_{j_1=2l+l_1+2}^{p_1}\sum_{j_3=0}^{p_3} C_{j_3j_3j_1}\zeta_{j_1}^{(i_1)}.$$

Поэтому

$$\lim_{p_1,p_3\to\infty} \mathrm{M}\left\{\left(\sum_{j_1=0}^{p_1}\sum_{j_3=0}^{p_3} C_{j_3j_3j_1}\zeta_{j_1}^{(i_1)} - \frac{1}{2}\int\limits_t^T (t-s)^{2l}\int\limits_t^s (t-s_1)^{l_1} d\mathbf{f}_{s_1}^{(i_1)} ds\right)^2\right\} =$$

$$= \lim_{p_3\to\infty}\sum_{j_1=0}^{2l+l_1+1}\left(\sum_{j_3=0}^{p_3} C_{j_3j_3j_1} - \frac{1}{2}\tilde{C}_{j_1}\right)^2 +$$

$$+ \lim_{p_1,p_3\to\infty} \mathrm{M}\left\{\left(\sum_{j_1=2l+l_1+2}^{p_1}\sum_{j_3=0}^{p_3} C_{j_3j_3j_1}\zeta_{j_1}^{(i_1)}\right)^2\right\}. \qquad (2.85)$$

Докажем, что

$$\lim_{p_3\to\infty}\left(\sum_{j_3=0}^{p_3} C_{j_3j_3j_1}-\frac{1}{2}\tilde{C}_{j_1}\right)^2=0. \tag{2.86}$$

Имеем

$$\left(\sum_{j_3=0}^{p_3} C_{j_3j_3j_1}-\frac{1}{2}\tilde{C}_{j_1}\right)^2=$$

$$=\left(\sum_{j_3=0}^{p_3}\int\limits_t^T\phi_{j_1}(s_2)(t-s_2)^{l_1}ds_2\int\limits_{s_2}^T\phi_{j_3}(s_1)(t-s_1)^{l}ds_1\int\limits_{s_1}^T\phi_{j_3}(s)(t-s)^{l}ds-\right.$$

$$\left.-\frac{1}{2}\int\limits_t^T\phi_{j_1}(s_1)(t-s_1)^{l_1}\int\limits_{s_1}^T(t-s)^{2l}dsds_1\right)^2=$$

$$=\left(\frac{1}{2}\sum_{j_3=0}^{p_3}\int\limits_t^T\phi_{j_1}(s_2)(t-s_2)^{l_1}\left(\int\limits_{s_2}^T\phi_{j_3}(s_1)(t-s_1)^{l}ds_1\right)^2ds_2-\right.$$

$$\left.-\frac{1}{2}\int\limits_t^T\phi_{j_1}(s_1)(t-s_1)^{l_1}\int\limits_{s_1}^T(t-s)^{2l}dsds_1\right)^2=$$

$$=\frac{1}{4}\left(\int\limits_t^T\phi_{j_1}(s_1)(t-s_1)^{l_1}\left(\sum_{j_3=0}^{p_3}\left(\int\limits_{s_1}^T\phi_{j_3}(s)(t-s)^{l}ds\right)^2-\int\limits_{s_1}^T(t-s)^{2l}ds\right)ds_1\right)^2=$$

$$=\frac{1}{4}\left(\int\limits_t^T\phi_{j_1}(s_1)(t-s_1)^{l_1}\left(\int\limits_{s_1}^T(t-s)^{2l}ds-\right.\right.$$

$$\left.\left.-\sum_{j_3=p_3+1}^{\infty}\left(\int\limits_{s_1}^T\phi_{j_3}(s)(t-s)^{l}ds\right)^2-\int\limits_{s_1}^T(t-s)^{2l}ds\right)ds_1\right)^2=$$

$$=\frac{1}{4}\left(\int\limits_t^T\phi_{j_1}(s_1)(t-s_1)^{l_1}\sum_{j_3=p_3+1}^{\infty}\left(\int\limits_{s_1}^T\phi_{j_3}(s)(t-s)^{l}ds\right)^2ds_1\right)^2. \tag{2.87}$$

Для получения (2.87) мы использовали равенство Парсеваля, которое в данном случае имеет вид:

$$\sum_{j_3=0}^{\infty}\left(\int\limits_{s_1}^T\phi_{j_3}(s)(t-s)^{l}ds\right)^2=\int\limits_t^T K^2(s,s_1)ds, \tag{2.88}$$

где

$$K(s,s_1)=\begin{cases}(t-s)^l,\ s_1<s\\ 0,\ \text{иначе}\end{cases};\ s,s_1\in[t,T].$$

Принимая во внимание неубывание функциональной последовательности

$$u_n(s_1) = \sum_{j_3=0}^{n} \left(\int\limits_{s_1}^{T} \phi_{j_3}(s)(t-s)^l ds \right)^2,$$

непрерывность ее членов и непрерывнось предельной функции $u(s_1) = \int\limits_{s_1}^{T} (t-s)^{2l} ds$ на отрезке $[t, T]$, по признаку Дини мы имеем равномерную сходимость функциональной последовательности $u_n(s_1)$ к предельной функции $u(s_1)$ на отрезке $[t, T]$.

Из (2.87) с помощью неравенства Коши–Буняковского получаем:

$$\left(\sum_{j_3=0}^{p_3} C_{j_3 j_3 j_1} - \frac{1}{2}\tilde{C}_{j_1} \right)^2 \le$$

$$\le \frac{1}{4} \int\limits_{t}^{T} \phi_{j_1}^2(s_1)(t-s_1)^{2l_1} ds_1 \int\limits_{t}^{T} \left(\sum_{j_3=p_3+1}^{\infty} \left(\int\limits_{s_1}^{T} \phi_{j_3}(s)(t-s)^l ds \right)^2 \right)^2 ds_1 \le$$

$$\le \frac{1}{4}\varepsilon^2 (T-t)^{2l_1} \int\limits_{t}^{T} \phi_{j_1}^2(s_1) ds_1 (T-t) = \frac{1}{4}(T-t)^{2l_1+1}\varepsilon^2 \qquad (2.89)$$

при $p_3 > N(\varepsilon)$, где $N(\varepsilon)$ найдено по любому $\varepsilon > 0$.

Из (2.89) следует (2.86).

Имеем

$$\sum_{j_3=0}^{p_3} \sum_{j_1=2l+l_1+2}^{p_1} C_{j_3 j_3 j_1} \zeta_{j_1}^{(i_1)} = \sum_{j_3=0}^{p_3} \sum_{j_1=2l+l_1+2}^{2(j_3+l+1)+l_1} C_{j_3 j_3 j_1} \zeta_{j_1}^{(i_1)}. \qquad (2.90)$$

Мы положили $2(j_3 + l + 1) + l_1$ вместо p_1, поскольку $C_{j_3 j_3 j_1} = 0$ при $j_1 > 2(j_3 + l + 1) + l_1$. Это следует из соотношения:

$$C_{j_3 j_3 j_1} = \frac{1}{2} \int\limits_{t}^{T} \phi_{j_1}(s_2)(t-s_2)^{l_1} \left(\int\limits_{s_2}^{T} \phi_{j_3}(s_1)(t-s_1)^l ds_1 \right)^2 ds_2 =$$

$$= \frac{1}{2} \int\limits_{t}^{T} \phi_{j_1}(s_2) Q_{2(j_3+l+1)+l_1}(s_2) ds_2,$$

где $Q_{2(j_3+l+1)+l_1}(s)$ — полином степени $2(j_3 + l + 1) + l_1$.

Нетрудно видеть, что

$$\sum_{j_3=0}^{p_3} \sum_{j_1=2l+l_1+2}^{2(j_3+l+1)+l_1} C_{j_3 j_3 j_1} \zeta_{j_1}^{(i_1)} = \sum_{j_1=2l+l_1+2}^{2(p_3+l+1)+l_1} \sum_{j_3=0}^{p_3} C_{j_3 j_3 j_1} \zeta_{j_1}^{(i_1)}. \qquad (2.91)$$

Отметим, что мы включили в сумму $\sum\limits_{j_3=0}^{p_3}$ некоторые коэффиуиенты $C_{j_3j_3j_1}$, которые равны нулю.

Из (2.90) и (2.91) получим:

$$\mathrm{M}\left\{\left(\sum_{j_3=0}^{p_3}\sum_{j_1=2l+l_1+2}^{p_1} C_{j_3j_3j_1}\zeta_{j_1}^{(i_1)}\right)^2\right\} = \mathrm{M}\left\{\left(\sum_{j_1=2l+l_1+2}^{2(p_3+l+1)+l_1}\sum_{j_3=0}^{p_3} C_{j_3j_3j_1}\zeta_{j_1}^{(i_1)}\right)^2\right\} =$$

$$= \sum_{j_1=2l+l_1+2}^{2(p_3+l+1)+l_1}\left(\sum_{j_3=0}^{p_3} C_{j_3j_3j_1}\right)^2 =$$

$$= \sum_{j_1=2l+l_1+2}^{2(p_3+l+1)+l_1}\left(\frac{1}{2}\sum_{j_3=0}^{p_3}\int\limits_t^T \phi_{j_1}(s_2)(t-s_2)^{l_1}\left(\int\limits_{s_2}^T \phi_{j_3}(s_1)(t-s_1)^l ds_1\right)^2 ds_2\right)^2 =$$

$$= \frac{1}{4}\sum_{j_1=2l+l_1+2}^{2(p_3+l+1)+l_1}\left(\int\limits_t^T \phi_{j_1}(s_2)(t-s_2)^{l_1}\sum_{j_3=0}^{p_3}\left(\int\limits_{s_2}^T \phi_{j_3}(s_1)(t-s_1)^l ds_1\right)^2 ds_2\right)^2 =$$

$$= \frac{1}{4}\sum_{j_1=2l+l_1+2}^{2(p_3+l+1)+l_1}\left(\int\limits_t^T \phi_{j_1}(s_2)(t-s_2)^{l_1}\left(\int\limits_{s_2}^T (t-s_1)^{2l} ds_1 - \right.\right.$$

$$\left.\left. - \sum_{j_3=p_3+1}^{\infty}\left(\int\limits_{s_2}^T \phi_{j_3}(s_1)(t-s_1)^l ds_1\right)^2\right) ds_2\right)^2 =$$

$$= \frac{1}{4}\sum_{j_1=2l+l_1+2}^{2(p_3+l+1)+l_1}\left(\int\limits_t^T \phi_{j_1}(s_2)(t-s_2)^{l_1}\sum_{j_3=p_3+1}^{\infty}\left(\int\limits_{s_2}^T \phi_{j_3}(s_1)(t-s_1)^l ds_1\right)^2 ds_2\right)^2. \tag{2.92}$$

Для получения (2.92) мы использовали равенство Парсеваля вида (2.88) и соотношение:

$$\int\limits_t^T \phi_{j_1}(s) Q_{2l+1+l_1}(s) ds = 0;\ \ j_1 > 2l+1+l_1,$$

где $Q_{2l+1+l_1}(s)$ — полином степени $2l+1+l_1$.

Далее имеем

$$\left(\int\limits_{s_2}^T \phi_{j_3}(s_1)(t-s_1)^l ds_1\right)^2 =$$

$$
= \frac{(T-t)^{2l+1}(2j_3+1)}{2^{2l+2}} \left(\int\limits_{\left(s_2-\frac{T+t}{2}\right)\frac{2}{T-t}}^{1} P_{j_3}(y)(1+y)^l dy \right)^2 =
$$

$$
= \frac{(T-t)^{2l+1}}{2^{2l+2}(2j_3+1)} \times
$$

$$
\times \Biggl(\left(1+\left(s_2-\frac{T+t}{2}\right)\frac{2}{T-t}\right)^l \left(P_{j_3-1}\left(\left(s_2-\frac{T+t}{2}\right)\frac{2}{T-t}\right) - \right.
$$

$$
\left. - P_{j_3+1}\left(\left(s_2-\frac{T+t}{2}\right)\frac{2}{T-t}\right)\right) -
$$

$$
-l \int\limits_{\left(s_2-\frac{T+t}{2}\right)\frac{2}{T-t}}^{1} \left(P_{j_3+1}(y)-P_{j_3-1}(y)\right)(1+y)^{l-1}dy \Biggr)^2 \le
$$

$$
\le \frac{(T-t)^{2l+1}2}{2^{2l+2}(2j_3+1)} \Biggl(\left(\frac{2(s_2-t)}{T-t}\right)^{2l} \left(P_{j_3+1}\left(\left(s_2-\frac{T+t}{2}\right)\frac{2}{T-t}\right) - \right.
$$

$$
\left. - P_{j_3-1}\left(\left(s_2-\frac{T+t}{2}\right)\frac{2}{T-t}\right)\right)^2 +
$$

$$
+ l^2 \left(\int\limits_{\left(s_2-\frac{T+t}{2}\right)\frac{2}{T-t}}^{1} \left(P_{j_3+1}(y)-P_{j_3-1}(y)\right)(1+y)^{l-1}dy \right)^2 \Biggr) \le
$$

$$
\le \frac{(T-t)^{2l+1}}{2^{2l+1}(2j_3+1)} \Biggl(2^{2l+1} \left(P_{j_3+1}^2\left(\left(s_2-\frac{T+t}{2}\right)\frac{2}{T-t}\right) + \right.
$$

$$
\left. + P_{j_3-1}^2\left(\left(s_2-\frac{T+t}{2}\right)\frac{2}{T-t}\right)\right) +
$$

$$
+ l^2 \int\limits_{\left(s_2-\frac{T+t}{2}\right)\frac{2}{T-t}}^{1} (1+y)^{2l-2}dy \int\limits_{\left(s_2-\frac{T+t}{2}\right)\frac{2}{T-t}}^{1} \left(P_{j_3+1}(y)-P_{j_3-1}(y)\right)^2 dy \Biggr) \le
$$

$$
\le \frac{(T-t)^{2l+1}}{2^{2l+1}(2j_3+1)} \Biggl(2^{2l+1} \left(P_{j_3+1}^2\left(\left(s_2-\frac{T+t}{2}\right)\frac{2}{T-t}\right) + \right.
$$

$$
\left. + P_{j_3-1}^2\left(\left(s_2-\frac{T+t}{2}\right)\frac{2}{T-t}\right)\right) +
$$

$$
+ \frac{2^{2l}l^2}{2l-1}\left(1-\left(\frac{(s_2-t)}{T-t}\right)^{2l-1}\right) \int\limits_{\left(s_2-\frac{T+t}{2}\right)\frac{2}{T-t}}^{1} \left(P_{j_3+1}^2(y)+P_{j_3-1}^2(y)\right)dy \Biggr) \le
$$

$$
\leq \frac{(T-t)^{2l+1}}{2(2j_3+1)}\Biggl(2\left(P_{j_3+1}^2\left(\left(s_2-\frac{T+t}{2}\right)\frac{2}{T-t}\right)+\right.
$$

$$
\left.+P_{j_3-1}^2\left(\left(s_2-\frac{T+t}{2}\right)\frac{2}{T-t}\right)\right)+
$$

$$
+\frac{l^2}{2l-1}\int\limits_{\left(s_2-\frac{T+t}{2}\right)\frac{2}{T-t}}^{1}\left(P_{j_3+1}^2(y)+P_{j_3-1}^2(y)\right)dy\Biggr). \tag{2.93}
$$

Оценим правую часть (2.93) с помощью (2.42):

$$
\left(\int\limits_{s_2}^{T}\phi_{j_3}(s_1)(t-s_1)^l ds_1\right)^2<\frac{(T-t)^{2l+1}}{2(2j_3+1)}\left(\frac{K^2}{j_3+2}+\frac{K^2}{j_3}\right)\times
$$

$$
\times\left(\frac{2}{\left(1-\left(\left(s_2-\frac{T+t}{2}\right)\frac{2}{T-t}\right)^2\right)^{\frac{1}{2}}}+\frac{l^2}{2l-1}\int\limits_{\left(s_2-\frac{T+t}{2}\right)\frac{2}{T-t}}^{1}\frac{dy}{(1-y^2)^{\frac{1}{2}}}\right)<
$$

$$
<\frac{(T-t)^{2l+1}K^2}{2j_3^2}\left(\frac{2}{\left(1-\left(\left(s_2-\frac{T+t}{2}\right)\frac{2}{T-t}\right)^2\right)^{\frac{1}{2}}}+\frac{l^2\pi}{2l-1}\right);\ s\in(t,T). \tag{2.94}
$$

Из (2.92) и (2.94) получаем:

$$
\mathrm{M}\left\{\left(\sum_{j_3=0}^{p_3}\sum_{j_1=2l+l_1+2}^{p_1}C_{j_3j_3j_1}\zeta_{j_1}^{(i_1)}\right)^2\right\}\leq
$$

$$
\leq\frac{1}{4}\sum_{j_1=2l+l_1+2}^{2(p_3+l+1)+l_1}\left(\int\limits_t^T\mid\phi_{j_1}(s_2)\mid(t-s_2)^{l_1}\sum_{j_3=p_3+1}^{\infty}\left(\int\limits_{s_2}^{T}\phi_{j_3}(s_1)(t-s_1)^l ds_1\right)^2 ds_2\right)^2
$$

$$
\leq\frac{1}{4}(T-t)^{2l_1}\sum_{j_1=2l+l_1+2}^{2(p_3+l+1)+l_1}\left(\int\limits_t^T\mid\phi_{j_1}(s_2)\mid\sum_{j_3=p_3+1}^{\infty}\left(\int\limits_{s_2}^{T}\phi_{j_3}(s_1)(t-s_1)^l ds_1\right)^2 ds_2\right)^2
$$

$$
<\frac{(T-t)^{4l+2l_1+1}K^4K_1^2}{16}\sum_{j_1=2l+l_1+2}^{2(p_3+l+1)+l_1}\Biggl(\Biggl(\int\limits_t^T\frac{2ds_2}{\left(1-\left(\left(s_2-\frac{T+t}{2}\right)\frac{2}{T-t}\right)^2\right)^{\frac{3}{4}}}+
$$

$$
+\frac{l^2\pi}{2l-1}\int\limits_t^T\frac{ds_2}{\left(1-\left(\left(s_2-\frac{T+t}{2}\right)\frac{2}{T-t}\right)^2\right)^{\frac{1}{4}}}\Biggr)\sum_{j_3=p_3+1}^{\infty}\frac{1}{j_3^2}\Biggr)^2\leq
$$

$$\le \frac{(T-t)^{4l+2l_1+3}K^4K_1^2}{64}\cdot\frac{2p_3+2}{p_3^2}\left(\int\limits_{-1}^{1}\frac{2dy}{(1-y^2)^{\frac{3}{4}}}+\frac{l^2\pi}{2l-1}\int\limits_{-1}^{1}\frac{dy}{(1-y^2)^{\frac{1}{4}}}\right)^2\le$$

$$\le (T-t)^{4l+2l_1+3}C\frac{p_3+1}{p_3^2}\to 0 \text{ при } p_3\to\infty, \qquad (2.95)$$

где постоянная C не зависит от p_3 и $T-t$.

Из (2.85), (2.86) и (2.95) следует (2.84), а из (2.84) следует разложение (2.82).

2.3.4 Случай $\psi_1(\tau),\psi_2(\tau),\psi_3(\tau)\equiv(t-\tau)^l;\ i_1,i_2,i_3=1,\ldots,m$

В данном разделе мы докажем следующее разложение для повторных стохастических интегралов Стратоновича 3 кратности:

$$\int\limits_t^{*T}(t-s)^l\int\limits_t^{*s}(t-s_1)^l\int\limits_t^{*s_1}(t-s_2)^l d\mathbf{f}_{s_2}^{(i_1)}d\mathbf{f}_{s_1}^{(i_2)}d\mathbf{f}_{s}^{(i_3)}=$$

$$=\sum_{j_1,j_2,j_3=0}^{\infty}C_{j_3j_2j_1}\zeta_{j_1}^{(i_1)}\zeta_{j_2}^{(i_2)}\zeta_{j_3}^{(i_3)}\ (i_1,i_2,i_3=1,\ldots,m), \qquad (2.96)$$

где ряд сходится в среднеквадратическом смысле; $l=0,\ 1,\ 2,\ldots$ и

$$C_{j_3j_2j_1}=\int\limits_t^T\phi_{j_3}(s)(t-s)^l\int\limits_t^s(t-s_1)^l\phi_{j_2}(s_1)\int\limits_t^{s_1}(t-s_2)^l\phi_{j_1}(s_2)ds_2ds_1ds. \qquad (2.97)$$

Если мы докажем формулу:

$$\sum_{j_1,j_3=0}^{\infty}C_{j_1j_3j_1}\zeta_{j_3}^{(i_2)}=0, \qquad (2.98)$$

где ряд сходится в среднеквадратическом смысле и коэффициенты $C_{j_1j_3j_1}$ имеют вид (2.97), то с помощью теоремы 1, соотношений (2.70), (2.84) при $l_1=l_3=l$ и стандартных соотношений между повторными стохастическими интегралами Стратоновича и Ито мы будем иметь разложение (2.96).

Поскольку при $\psi_1(s),\ \psi_2(s),\ \psi_3(s)\equiv(t-s)^l$ имеет место следующее соотношение для коэффициентов Фурье

$$C_{j_1j_1j_3}+C_{j_1j_3j_1}+C_{j_3j_1j_1}=\frac{1}{2}C_{j_1}^2C_{j_3},$$

где $C_{j_3j_2j_1}$ имеет вид (2.97) и

$$C_{j_1}=\int\limits_t^T\phi_{j_1}(s)(t-s)^l ds,$$

то

$$\sum_{j_1,j_3=0}^{\infty}C_{j_1j_3j_1}\zeta_{j_3}^{(i_2)}=\sum_{j_1,j_3=0}^{\infty}\left(\frac{1}{2}C_{j_1}^2C_{j_3}-C_{j_1j_1j_3}-C_{j_3j_1j_1}\right)\zeta_{j_3}^{(i_2)}. \qquad (2.99)$$

Принимая во внимание (2.70) и (2.84) при $l_3=l_1=l$, с помощью формулы Ито с вероятностью 1 имеем:

$$\sum_{j_1,j_3=0}^{\infty}C_{j_1j_3j_1}\zeta_{j_3}^{(i_2)}=\frac{1}{2}\sum_{j_1=0}^{l}C_{j_1}^2\sum_{j_3=0}^{l}C_{j_3}\zeta_{j_3}^{(i_2)}-\sum_{j_1,j_3=0}^{\infty}C_{j_1j_1j_3}\zeta_{j_3}^{(i_2)}-$$

$$-\sum_{j_1,j_3=0}^{\infty}C_{j_3j_1j_1}\zeta_{j_3}^{(i_2)}=$$

$$=\frac{1}{2}\sum_{j_1=0}^{l}C_{j_1}^2\int\limits_t^T(t-s)^l d\mathbf{f}_s^{(i_2)}-\frac{1}{2}\int\limits_t^T(t-s)^l\int\limits_t^s(t-s_1)^{2l}ds_1 d\mathbf{f}_s^{(i_2)}-$$

$$-\frac{1}{2}\int\limits_t^T(t-s)^{2l}\int\limits_t^s(t-s_1)^l d\mathbf{f}_{s_1}^{(i_2)}ds=$$

$$=\frac{1}{2}\sum_{j_1=0}^{l}C_{j_1}^2\int\limits_t^T(t-s)^l d\mathbf{f}_s^{(i_2)}+\frac{1}{2(2l+1)}\int\limits_t^T(t-s)^{3l+1}d\mathbf{f}_s^{(i_2)}-$$

$$-\frac{1}{2}\int\limits_t^T(t-s_1)^l\int\limits_{s_1}^T(t-s)^{2l}ds d\mathbf{f}_{s_1}^{(i_2)}=$$

$$=\frac{1}{2}\sum_{j_1=0}^{l}C_{j_1}^2\int\limits_t^T(t-s)^l d\mathbf{f}_s^{(i_2)}+\frac{1}{2(2l+1)}\int\limits_t^T(t-s)^{3l+1}d\mathbf{f}_s^{(i_2)}-$$

$$-\frac{1}{2(2l+1)}\left((T-t)^{2l+1}\int\limits_t^T(t-s)^l d\mathbf{f}_s^{(i_2)}+\int\limits_t^T(t-s)^{3l+1}d\mathbf{f}_s^{(i_2)}\right)=$$

$$=\frac{1}{2}\sum_{j_1=0}^{l}C_{j_1}^2\int\limits_t^T(t-s)^l d\mathbf{f}_s^{(i_2)}-\frac{(T-t)^{2l+1}}{2(2l+1)}\int\limits_t^T(t-s)^l d\mathbf{f}_s^{(i_2)}=$$

$$=\frac{1}{2}\left(\sum_{j_1=0}^{l}C_{j_1}^2-\int\limits_t^T(t-s)^{2l}ds\right)\int\limits_t^T(t-s)^l d\mathbf{f}_s^{(i_2)}=0.$$

Здесь равенство Парсеваля имеет вид:

$$\sum_{j_1=0}^{\infty} C_{j_1}^2 = \sum_{j_1=0}^{l} C_{j_1}^2 = \int_t^T (t-s)^{2l} ds = \frac{(T-t)^{2l+1}}{2l+1}$$

и

$$\int_t^T (t-s)^l d\mathbf{f}_s^{(i_2)} = \sum_{j_3=0}^{l} C_{j_3}\zeta_{j_3}^{(i_2)} \text{ с. в. } 1.$$

Разложение (2.96) доказано.

Нетрудно видеть, что по формуле Ито (см. разд. 6.3) при $i_1 = i_2 = i_3$:

$$\int_t^{*T}(t-s)^l \int_t^{*s}(t-s_1)^l \int_t^{*s_1}(t-s_2)^l d\mathbf{f}_{s_2}^{(i_1)} d\mathbf{f}_{s_1}^{(i_1)} d\mathbf{f}_{s}^{(i_1)} =$$

$$= \frac{1}{6}\left(\int_t^T (t-s)^l d\mathbf{f}_s^{(i_1)}\right)^3 = \frac{1}{6}\left(\sum_{j_1=0}^{l} C_{j_1}\zeta_{j_1}^{(i_1)}\right)^3 =$$

$$= \sum_{j_1,j_2,j_3=0}^{l} C_{j_3j_2j_1}\zeta_{j_1}^{(i_1)}\zeta_{j_2}^{(i_1)}\zeta_{j_3}^{(i_1)} \text{ с. в. } 1. \tag{2.100}$$

Последний шаг в (2.100) сделан на основании вывода формулы (1.37).

2.3.5 Теорема о разложении повторных стохастических интегралов Стратоновича 3 кратности, основанном на теореме 1. Случай полиномов Лежандра

Объединим с одно утверждение результаты, полученные в предыдущих разделах.

Теорема 4. *Пусть $\{\phi_j(x)\}_{j=0}^{\infty}$ — полная ортонормированная система полиномов Лежандра на отрезке $[t,T]$. Тогда для повторного стохастического интеграла Стратоновича 3 кратности вида*

$$I_{l_1l_2l_3T,t}^{*(i_1i_2i_3)} = \int_t^{*T} (t-t_3)^{l_3} \int_t^{*t_3} (t-t_2)^{l_2} \int_t^{*t_2} (t-t_1)^{l_1} d\mathbf{f}_{t_1}^{(i_1)} d\mathbf{f}_{t_2}^{(i_2)} d\mathbf{f}_{t_3}^{(i_3)}$$

$(i_1,i_2,i_3 = 1,\ldots,m)$ *справедливо следующее, сходящееся в среднеквадратическом смысле, разложение*

$$I_{l_1l_2l_3T,t}^{*(i_1i_2i_3)} = \sum_{j_1,j_2,j_3=0}^{\infty} C_{j_3j_2j_1}\zeta_{j_1}^{(i_1)}\zeta_{j_2}^{(i_2)}\zeta_{j_3}^{(i_3)} \tag{2.101}$$

для каждого из следующих случаев:

1. $i_1 \neq i_2,\ i_2 \neq i_3,\ i_1 \neq i_3$ *и* $l_1,\ l_2,\ l_3 = 0,\ 1,\ 2, \ldots;$
2. $i_1 = i_2 \neq i_3;\ l_1 = l_2 \neq l_3$ *и* $l_1,\ l_2,\ l_3 = 0,\ 1,\ 2, \ldots;$
3. $i_1 \neq i_2 = i_3;\ l_1 \neq l_2 = l_3$ *и* $l_1,\ l_2,\ l_3 = 0,\ 1,\ 2, \ldots;$
4. $i_1, i_2, i_3 = 1, \ldots, m;\ l_1 = l_2 = l_3 = l$ *и* $l = 0,\ 1,\ 2, \ldots.$

Отметим, что для разложения повторных стохастических интегралов Стратоновича 2 и 3 кратности окажутся полезными теоремы 3 и 4. Для случая более высоких кратностей рекомендуется использовать теорему 2 и стандартные соотношения между повторными стохастическими интегралами Стратоновича и Ито.

2.4 Разложения повторных стохастических интегралов Стратоновича 3 кратности, основанные на теореме 1. Тригонометрический случай

В данном разделе мы докажем следующее разложение повторных стохастических интегралов Стратоновича 3 кратности:

$$\int\limits_t^{*T}\int\limits_t^{*t_3}\int\limits_t^{*t_2} d\mathbf{f}_{t_1}^{(i_1)} d\mathbf{f}_{t_2}^{(i_2)} d\mathbf{f}_{t_3}^{(i_3)} = \sum_{j_1,j_2,j_3=0}^{\infty} C_{j_3 j_2 j_1} \zeta_{j_1}^{(i_1)} \zeta_{j_2}^{(i_2)} \zeta_{j_3}^{(i_3)} (i_1, i_2, i_3 = 1, \ldots, m), \tag{2.102}$$

где ряд сходится в среднеквадратическом смысле,

$$C_{j_3 j_2 j_1} = \int\limits_t^T \phi_{j_3}(s) \int\limits_t^s \phi_{j_2}(s_1) \int\limits_t^{s_1} \phi_{j_1}(s_2) ds_2 ds_1 ds$$

и $\{\phi_j(x)\}_{j=0}^{\infty}$ — полная ортонормированная система тригонометрических функций на отрезке $[t, T]$.

Если мы докажем следующие соотношения:

$$\underset{p_1,p_3\to\infty}{\text{l.i.m.}} \sum_{j_1=0}^{p_1}\sum_{j_3=0}^{p_3} C_{j_3 j_1 j_1} \zeta_{j_3}^{(i_3)} \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{j_1,j_3=0}^{\infty} C_{j_3 j_1 j_1} \zeta_{j_3}^{(i_3)} = \frac{1}{2}\int\limits_t^T\int\limits_t^{\tau} ds d\mathbf{f}_{\tau}^{(i_3)}, \tag{2.103}$$

$$\underset{p_1,p_3\to\infty}{\text{l.i.m.}} \sum_{j_1=0}^{p_1}\sum_{j_3=0}^{p_3} C_{j_3 j_3 j_1} \zeta_{j_1}^{(i_1)} \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{j_1,j_3=0}^{\infty} C_{j_3 j_3 j_1} \zeta_{j_1}^{(i_1)} = \frac{1}{2}\int\limits_t^T\int\limits_t^{\tau} d\mathbf{f}_{s}^{(i_1)} d\tau, \tag{2.104}$$

$$\underset{p_1,p_3\to\infty}{\text{l.i.m.}} \sum_{j_1=0}^{p_1}\sum_{j_3=0}^{p_3} C_{j_1 j_3 j_1} \zeta_{j_3}^{(i_2)} \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{j_1,j_3=0}^{\infty} C_{j_1 j_3 j_1} \zeta_{j_3}^{(i_2)} = 0. \tag{2.105}$$

то из теоремы 1, формул (2.103) – (2.105) и стандартных соотношений между повторными стохастическими интегралами Стратоновича и Ито будет следовать разложение (2.102).

Имеем

$$\sum_{j_3=0}^{p_3}\sum_{j_1=0}^{p_1} C_{j_3j_1j_1}\zeta_{j_3}^{(i_3)} = \frac{(T-t)^{\frac{3}{2}}}{6} + \sum_{j_1=1}^{p_1} C_{0,2j_1,2j_1}\zeta_0^{(i_3)} + \sum_{j_1=1}^{p_1} C_{0,2j_1-1,2j_1-1}\zeta_0^{(i_3)} +$$

$$+\sum_{j_3=1}^{p_1} C_{2j_3,0,0}\zeta_{2j_3}^{(i_3)} + \sum_{j_3=1}^{p_3}\sum_{j_1=1}^{p_1} C_{2j_3,2j_1,2j_1}\zeta_{2j_3}^{(i_3)} +$$

$$+\sum_{j_3=1}^{p_3}\sum_{j_1=1}^{p_1} C_{2j_3,2j_1-1,2j_1-1}\zeta_{2j_3}^{(i_3)} + \sum_{j_3=1}^{p_3} C_{2j_3-1,0,0}\zeta_{2j_3-1}^{(i_3)} +$$

$$+\sum_{j_3=1}^{p_3}\sum_{j_1=1}^{p_1} C_{2j_3-1,2j_1,2j_1}\zeta_{2j_3-1}^{(i_3)} + \sum_{j_3=1}^{p_3}\sum_{j_1=1}^{p_1} C_{2j_3-1,2j_1-1,2j_1-1}\zeta_{2j_3-1}^{(i_3)}, \qquad (2.106)$$

где сумирование обрывается, когда $2j_1,\ 2j_1-1>p_1$ или $2j_3,\ 2j_3-1>p_3$ и

$$C_{0,2l,2l} = \frac{(T-t)^{\frac{3}{2}}}{8\pi^2 l^2},\ C_{0,2l-1,2l-1} = \frac{3(T-t)^{\frac{3}{2}}}{8\pi^2 l^2},\ C_{2l,0,0} = \frac{\sqrt{2}(T-t)^{\frac{3}{2}}}{4\pi^2 l^2}; \qquad (2.107)$$

$$C_{2r-1,2l,2l} = 0, C_{2l-1,0,0} = -\frac{\sqrt{2}(T-t)^{\frac{3}{2}}}{4\pi l}, C_{2r-1,2l-1,2l-1} = 0; \qquad (2.108)$$

$$C_{2r,2l,2l} = \begin{cases} -\frac{\sqrt{2}(T-t)^{\frac{3}{2}}}{16\pi^2 l^2},\ r=2l \\ 0,\ r\ne 2l \end{cases},\ C_{2r,2l-1,2l-1} = \begin{cases} \frac{\sqrt{2}(T-t)^{\frac{3}{2}}}{16\pi^2 l^2},\ r=2l \\ -\frac{\sqrt{2}(T-t)^{\frac{3}{2}}}{4\pi^2 l^2},\ r=l\ \cdot \\ 0,\ r\ne l,\ r\ne 2l \end{cases} \qquad (2.109)$$

После подстановки (2.107) – (2.109) в (2.106) получаем:

$$\sum_{j_3=0}^{p_3}\sum_{j_1=0}^{p_1} C_{j_3j_1j_1}\zeta_{j_3}^{(i_3)} = (T-t)^{\frac{3}{2}}\left(\left(\frac{1}{6} + \frac{1}{2\pi^2}\sum_{j_1=1}^{p_1}\frac{1}{j_1^2}\right)\zeta_0^{(i_3)} - \right.$$

$$\left. -\frac{\sqrt{2}}{4\pi}\sum_{j_3=1}^{p_3}\frac{1}{j_3}\zeta_{2j_3-1}^{(i_3)}\right). \qquad (2.110)$$

С помощью теоремы 1 и системы тригонометрических функций находим

$$\frac{1}{2}\int_t^T\int_t^s ds_1 d\mathbf{f}_s^{(i_3)} = \frac{1}{2}\int_t^T (s-t)d\mathbf{f}_s^{(i_3)} =$$

$$
=\frac{1}{4}(T-t)^{\frac{3}{2}}\left(\zeta_0^{(i_3)}-\frac{\sqrt{2}}{\pi}\sum_{r=1}^{\infty}\frac{1}{r}\zeta_{2r-1}^{(i_3)}\right). \qquad (2.111)
$$

Из (2.110) и (2.111) следует

$$
\underset{p_1,p_3\to\infty}{\text{l.i.m.}}\ \text{M}\left\{\left(\sum_{j_3=0}^{p_3}\sum_{j_1=0}^{p_1}C_{j_3j_1j_1}\zeta_{j_3}^{(i_3)}-\frac{1}{2}\int\limits_t^T\int\limits_t^s ds_1 d\mathbf{f}_s^{(i_3)}\right)^2\right\}=
$$

$$
=\underset{p_1,p_3\to\infty}{\text{l.i.m.}}\ (T-t)^3\left(\left(\frac{1}{6}+\frac{1}{2\pi^2}\sum_{j_1=1}^{p_1}\frac{1}{j_1^2}-\frac{1}{4}\right)^2+\right.
$$

$$
\left.+\frac{1}{8\pi^2}\left(\frac{\pi^2}{6}-\sum_{j_3=1}^{p_3}\frac{1}{j_3^2}\right)\right)=0.
$$

Таким образом соотношение (2.103) выполнено для случая тригонометрической системы функций.

Докажем соотношение (2.104). Имеем

$$
\sum_{j_1=0}^{p_1}\sum_{j_3=0}^{p_3}C_{j_3j_3j_1}\zeta_{j_1}^{(i_1)}=\frac{(T-t)^{\frac{3}{2}}}{6}+\sum_{j_3=1}^{p_3}C_{2j_3,2j_3,0}\zeta_0^{(i_1)}+\sum_{j_3=1}^{p_3}C_{2j_3-1,2j_3-1,0}\zeta_0^{(i_1)}+
$$

$$
+\sum_{j_1=1}^{p_1}\sum_{j_3=1}^{p_3}C_{2j_3,2j_3,2j_1-1}\zeta_{2j_1-1}^{(i_1)}+\sum_{j_1=1}^{p_1}\sum_{j_3=1}^{p_3}C_{2j_3-1,2j_3-1,2j_1-1}\zeta_{2j_1-1}^{(i_1)}+
$$

$$
+\sum_{j_1=1}^{p_1}C_{0,0,2j_1-1}\zeta_{2j_1-1}^{(i_1)}+\sum_{j_1=1}^{p_1}\sum_{j_3=1}^{p_3}C_{2j_3,2j_3,2j_1}\zeta_{2j_1}^{(i_1)}+
$$

$$
+\sum_{j_1=1}^{p_1}\sum_{j_3=1}^{p_3}C_{2j_3-1,2j_3-1,2j_1}\zeta_{2j_1}^{(i_1)}+\sum_{j_1=1}^{p_1}C_{0,0,2j_1}\zeta_{2j_1}^{(i_1)}, \qquad (2.112)
$$

где суммирование обрывается, когда $2j_3,\ 2j_3-1>p_3$ или $2j_1,\ 2j_1-1>p_1$ и

$$
C_{2l,2l,0}=\frac{(T-t)^{\frac{3}{2}}}{8\pi^2l^2},\ C_{2l-1,2l-1,0}=\frac{3(T-t)^{\frac{3}{2}}}{8\pi^2l^2},\ C_{0,0,2r}=\frac{\sqrt{2}(T-t)^{\frac{3}{2}}}{4\pi^2r^2}; \qquad (2.113)
$$

$$
C_{2l-1,2l-1,2r-1}=0, C_{0,0,2r-1}=\frac{\sqrt{2}(T-t)^{\frac{3}{2}}}{4\pi r}, C_{2l,2l,2r-1}=0; \qquad (2.114)
$$

$$
C_{2l,2l,2r}=\begin{cases}-\frac{\sqrt{2}(T-t)^{\frac{3}{2}}}{16\pi^2l^2},\ r=2l\\ \\ 0,\ r\neq 2l\end{cases},\ C_{2l-1,2l-1,2r}=\begin{cases}-\frac{\sqrt{2}(T-t)^{\frac{3}{2}}}{16\pi^2l^2},\ r=2l\\ \\ \frac{\sqrt{2}(T-t)^{\frac{3}{2}}}{4\pi^2l^2},\ r=l\\ \\ 0,\ r\neq l,\ r\neq 2l\end{cases}. \qquad (2.115)
$$

После подстановки (2.113) – (2.115) в (2.112) получаем

$$\sum_{j_1=0}^{p_1}\sum_{j_3=0}^{p_3} C_{j_3j_3j_1}\zeta_{j_1}^{(i_1)} = (T-t)^{\frac{3}{2}}\left(\left(\frac{1}{6}+\frac{1}{2\pi^2}\sum_{j_3=1}^{p_3}\frac{1}{j_3^2}\right)\zeta_0^{(i_1)}+\right.$$

$$\left.+\frac{\sqrt{2}}{4\pi}\sum_{j_1=1}^{p_1}\frac{1}{j_1}\zeta_{2j_1-1}^{(i_1)}\right). \qquad (2.116)$$

С помощью формулы Ито, теоремы 1 и системы тригонометрических функций находим

$$\frac{1}{2}\int\limits_t^T\int\limits_t^s d\mathbf{f}_{s_1}^{(i_1)}ds = \frac{1}{2}\left((T-t)\int\limits_t^T d\mathbf{f}_s^{(i_1)}+\int\limits_t^T(t-s)d\mathbf{f}_s^{(i_1)}\right)=$$

$$=\frac{1}{4}(T-t)^{\frac{3}{2}}\left(\zeta_0^{(i_1)}+\frac{\sqrt{2}}{\pi}\sum_{r=1}^{\infty}\frac{1}{r}\zeta_{2r-1}^{(i_1)}\right). \qquad (2.117)$$

Из (2.116) и (2.117) следует

$$\underset{p_1,p_3\to\infty}{\text{l.i.m.}}\ \mathsf{M}\left\{\left(\sum_{j_1=0}^{p_1}\sum_{j_3=0}^{p_3}C_{j_3j_3j_1}\zeta_{j_1}^{(i_1)}-\frac{1}{2}\int\limits_t^T\int\limits_t^s d\mathbf{f}_{s_1}^{(i_1)}ds\right)^2\right\}=$$

$$=\underset{p_1,p_3\to\infty}{\text{l.i.m.}}\ (T-t)^3\left(\left(\frac{1}{6}+\frac{1}{2\pi^2}\sum_{j_3=1}^{p_3}\frac{1}{j_3^2}-\frac{1}{4}\right)^2+\right.$$

$$\left.+\frac{1}{8\pi^2}\left(\frac{\pi^2}{6}-\sum_{j_1=1}^{p_1}\frac{1}{j_1^2}\right)\right)=0.$$

Таким образом соотношение (2.104) также верно для случая тригонометрической системы функций.

Докажем равенство (2.105).

Поскольку $\psi_1(\tau),\ \psi_2(\tau),\ \psi_3(\tau)\equiv 1$, то выполняется следующее соотношение для коэффициентов Фурье:

$$C_{j_1j_1j_3}+C_{j_1j_3j_1}+C_{j_3j_1j_1}=\frac{1}{2}C_{j_1}^2C_{j_3}.$$

Тогда

$$\sum_{j_1,j_3=0}^{\infty}C_{j_1j_3j_1}\zeta_{j_3}^{(i_2)}=\sum_{j_1,j_3=0}^{\infty}\left(\frac{1}{2}C_{j_1}^2C_{j_3}-C_{j_1j_1j_3}-C_{j_3j_1j_1}\right)\zeta_{j_3}^{(i_2)}. \qquad (2.118)$$

Принимая во внимание (2.103) и (2.104) запишем:

$$\sum_{j_1,j_3=0}^{\infty} C_{j_1 j_3 j_1}\zeta_{j_3}^{(i_2)} = \frac{1}{2}C_0^3\zeta_0^{(i_2)} - \sum_{j_1,j_3=0}^{\infty} C_{j_1 j_1 j_3}\zeta_{j_3}^{(i_2)} - \sum_{j_1,j_3=0}^{\infty} C_{j_3 j_1 j_1}\zeta_{j_3}^{(i_2)} =$$

$$= \frac{1}{2}(T-t)^{\frac{3}{2}}\zeta_0^{(i_2)} - \frac{1}{4}(T-t)^{\frac{3}{2}}\Bigl[\zeta_0^{(i_2)} + \frac{\sqrt{2}}{\pi}\sum_{r=1}^{\infty}\frac{1}{r}\zeta_{2r-1}^{(i_2)}\Bigr] -$$

$$-\frac{1}{4}(T-t)^{\frac{3}{2}}\Bigl[\zeta_0^{(i_2)} - \frac{\sqrt{2}}{\pi}\sum_{r=1}^{\infty}\frac{1}{r}\zeta_{2r-1}^{(i_2)}\Bigr] = 0.$$

Из (2.103) – (2.105) и теоремы 1 мы получаем разложение (2.102).

Разложение (2.102) может быть получено и путем прямых вычислений по теореме 1:

$$\int\limits_t^T\int\limits_t^{t_3}\int\limits_t^{t_2} d\mathbf{f}_{t_1}^{(i_3)} d\mathbf{f}_{t_2}^{(i_2)} d\mathbf{f}_{t_3}^{(i_1)} = \sum_{j_1,j_2,j_3=0}^{\infty} C_{j_3 j_2 j_1}\zeta_{j_1}^{(i_3)}\zeta_{j_2}^{(i_2)}\zeta_{j_3}^{(i_1)} -$$

$$-\mathbf{1}_{\{i_1=i_2\}}\Biggl(-\frac{1}{4}(T-t)^{\frac{3}{2}}\Bigl[\zeta_0^{(i_3)} - \frac{\sqrt{2}}{\pi}\sum_{r=1}^{\infty}\frac{1}{r}\zeta_{2r-1}^{(i_3)}\Bigr] +$$

$$+\frac{1}{2}(T-t)^{\frac{3}{2}}\zeta_0^{(i_3)} + \frac{1}{2\pi^2}(T-t)^{\frac{3}{2}}\left(\sum_{r=1}^{\infty}\frac{1}{r^2} - \frac{\pi^2}{6}\right)\zeta_0^{(i_3)}\Biggr) -$$

$$-\mathbf{1}_{\{i_2=i_3\}}\Biggl(\frac{1}{4}(T-t)^{\frac{3}{2}}\Bigl[\zeta_0^{(i_1)} - \frac{\sqrt{2}}{\pi}\sum_{r=1}^{\infty}\frac{1}{r}\zeta_{2r-1}^{(i_1)}\Bigr] +$$

$$+\frac{1}{2\pi^2}(T-t)^{\frac{3}{2}}\left(\sum_{r=1}^{\infty}\frac{1}{r^2} - \frac{\pi^2}{6}\right)\zeta_0^{(i_1)}\Biggr) +$$

$$+\mathbf{1}_{\{i_1=i_3\}}\frac{1}{\pi^2}(T-t)^{\frac{3}{2}}\left(\sum_{r=1}^{\infty}\frac{1}{r^2} - \frac{\pi^2}{6}\right)\zeta_0^{(i_2)}, \qquad (2.119)$$

где

$$\sum_{j_1,j_2,j_3=0}^{\infty} C_{j_3 j_2 j_1}\zeta_{j_1}^{(i_3)}\zeta_{j_2}^{(i_2)}\zeta_{j_3}^{(i_1)} = (T-t)^{\frac{3}{2}}\Biggl(\frac{1}{6}\zeta_0^{(i_1)}\zeta_0^{(i_2)}\zeta_0^{(i_3)} +$$

$$+\frac{1}{2\sqrt{2}}\sum_{r=1}^{\infty}\left[\frac{1}{\pi r}\left\{\zeta_{2r-1}^{(i_3)}\zeta_0^{(i_2)}\zeta_0^{(i_1)} - \zeta_{2r-1}^{(i_1)}\zeta_0^{(i_2)}\zeta_0^{(i_3)}\right\} +\right.$$

$$\left.+\frac{1}{\pi^2 r^2}\left\{\zeta_{2r}^{(i_1)}\zeta_0^{(i_2)}\zeta_0^{(i_3)} - 2\zeta_{2r}^{(i_2)}\zeta_0^{(i_3)}\zeta_0^{(i_1)} + \zeta_{2r}^{(i_3)}\zeta_0^{(i_2)}\zeta_0^{(i_1)}\right\}\right] +$$

$$+\frac{1}{2\pi^2}\sum_{\substack{r,l=1\\ r\neq l}}^{\infty}\left[\frac{1}{r^2-l^2}\Bigl\{\zeta_{2r}^{(i_1)}\zeta_{2l}^{(i_2)}\zeta_0^{(i_3)} - \zeta_{2r}^{(i_2)}\zeta_0^{(i_1)}\zeta_{2l}^{(i_3)} +\right.$$

$$+\frac{r}{l}\zeta_{2r-1}^{(i_1)}\zeta_{2l-1}^{(i_2)}\zeta_{0}^{(i_3)}-\frac{l}{r}\zeta_{0}^{(i_1)}\zeta_{2r-1}^{(i_2)}\zeta_{2l-1}^{(i_3)}\Bigr\}-\frac{1}{rl}\zeta_{2r-1}^{(i_1)}\zeta_{0}^{(i_2)}\zeta_{2l-1}^{(i_3)}\Biggr]$$

$$+\sum_{r=1}^{\infty}\Biggl[\frac{1}{4\pi r}\Bigl\{\zeta_{2r}^{(i_1)}\zeta_{2r-1}^{(i_2)}\zeta_{0}^{(i_3)}-\zeta_{2r-1}^{(i_1)}\zeta_{2r}^{(i_2)}\zeta_{0}^{(i_3)}-\zeta_{2r-1}^{(i_2)}\zeta_{2r}^{(i_3)}\zeta_{0}^{(i_1)}+\ \zeta_{2r-1}^{(i_3)}\zeta_{2r}^{(i_2)}\zeta_{0}^{(i_1)}\Bigr\}$$

$$+\frac{1}{8\pi^2r^2}\Bigl\{3\zeta_{2r-1}^{(i_1)}\zeta_{2r-1}^{(i_2)}\zeta_{0}^{(i_3)}+\zeta_{2r}^{(i_1)}\zeta_{2r}^{(i_2)}\zeta_{0}^{(i_3)}-6\zeta_{2r-1}^{(i_1)}\zeta_{2r-1}^{(i_3)}\zeta_{0}^{(i_2)}+$$

$$+3\zeta_{2r-1}^{(i_2)}\zeta_{2r-1}^{(i_3)}\zeta_{0}^{(i_1)}-2\zeta_{2r}^{(i_1)}\zeta_{2r}^{(i_3)}\zeta_{0}^{(i_2)}+\zeta_{2r}^{(i_3)}\zeta_{2r}^{(i_2)}\zeta_{0}^{(i_1)}\Bigr\}\Biggr]+$$

$$+\frac{1}{4\sqrt{2}\pi^2}\Biggl\{\sum_{r,m=1}^{\infty}\Biggl[\frac{2}{rm}\Bigl[-\zeta_{2r-1}^{(i_1)}\zeta_{2m-1}^{(i_2)}\zeta_{2m}^{(i_3)}+\zeta_{2r-1}^{(i_1)}\zeta_{2r}^{(i_2)}\zeta_{2m-1}^{(i_3)}+$$

$$+\zeta_{2r-1}^{(i_1)}\zeta_{2m}^{(i_2)}\zeta_{2m-1}^{(i_3)}-\zeta_{2r}^{(i_1)}\zeta_{2r-1}^{(i_2)}\zeta_{2m-1}^{(i_3)}\Bigr]+$$

$$+\frac{1}{m(r+m)}\Bigl[-\zeta_{2(m+r)}^{(i_1)}\zeta_{2r}^{(i_2)}\zeta_{2m}^{(i_3)}-\zeta_{2(m+r)-1}^{(i_1)}\zeta_{2r-1}^{(i_2)}\zeta_{2m}^{(i_3)}-$$

$$-\zeta_{2(m+r)-1}^{(i_1)}\zeta_{2r}^{(i_2)}\zeta_{2m-1}^{(i_3)}+\zeta_{2(m+r)}^{(i_1)}\zeta_{2r-1}^{(i_2)}\zeta_{2m-1}^{(i_3)}\Bigr]\Biggr]+$$

$$+\sum_{m=1,l=m+1}^{\infty}\Biggl[\frac{1}{m(l-m)}\Bigl[\zeta_{2(l-m)}^{(i_1)}\zeta_{2l}^{(i_2)}\zeta_{2m}^{(i_3)}+\zeta_{2(l-m)-1}^{(i_1)}\zeta_{2l-1}^{(i_2)}\zeta_{2m}^{(i_3)}-$$

$$-\zeta_{2(l-m)-1}^{(i_1)}\zeta_{2l}^{(i_2)}\zeta_{2m-1}^{(i_3)}+\zeta_{2(l-m)}^{(i_1)}\zeta_{2l-1}^{(i_2)}\zeta_{2m-1}^{(i_3)}\Bigr]+$$

$$+\frac{1}{l(l-m)}\Bigl[-\zeta_{2(l-m)}^{(i_1)}\zeta_{2m}^{(i_2)}\zeta_{2l}^{(i_3)}+\zeta_{2(l-m)-1}^{(i_1)}\zeta_{2m-1}^{(i_2)}\zeta_{2l}^{(i_3)}-$$

$$-\zeta_{2(l-m)-1}^{(i_1)}\zeta_{2m}^{(i_2)}\zeta_{2l-1}^{(i_3)}-\zeta_{2(l-m)}^{(i_1)}\zeta_{2m-1}^{(i_2)}\zeta_{2l-1}^{(i_3)}\Bigr]\Biggr]\Biggr\}\Biggr).$$

Поскольку $\sum\limits_{r=1}^{\infty}\frac{1}{r^2}=\frac{\pi^2}{6}$ и по теореме 1:

$$\int\limits_t^T(t-\tau)d\mathbf{f}_\tau^{(i)}=-\frac{1}{2}(T-t)^{\frac{3}{2}}\Biggl[\zeta_0^{(i)}-\frac{\sqrt{2}}{\pi}\sum_{r=1}^{\infty}\frac{1}{r}\zeta_{2r-1}^{(i)}\Biggr],$$

то из (2.119) мы получаем искомое разложение:

$$\sum_{j_1,j_2,j_3=0}^{\infty}C_{j_3j_2j_1}\zeta_{j_1}^{(i_3)}\zeta_{j_2}^{(i_2)}\zeta_{j_3}^{(i_1)}=\int\limits_t^T\int\limits_t^{t_3}\int\limits_t^{t_2}d\mathbf{f}_{t_1}^{(i_3)}d\mathbf{f}_{t_2}^{(i_2)}d\mathbf{f}_{t_3}^{(i_1)}+\mathbf{1}_{\{i_1=i_2\}}\frac{1}{2}\int\limits_t^T\int\limits_t^{\tau}d\mathbf{f}_s^{(i_3)}d\tau+$$

$$+\mathbf{1}_{\{i_2=i_3\}}\frac{1}{2}\int\limits_t^T\int\limits_t^{\tau}dsd\mathbf{f}_\tau^{(i_1)}=\int\limits_t^{*T}\int\limits_t^{*t_3}\int\limits_t^{*t_2}d\mathbf{f}_{t_1}^{(i_3)}d\mathbf{f}_{t_2}^{(i_2)}d\mathbf{f}_{t_3}^{(i_1)}.$$

2.5 Разложение повторных стохастических интегралов Стратоновича произвольной кратности, основанное на обобщенных повторных рядах Фурье

2.5.1 Случай интегралов 2 кратности

Рассмотрим, на примере повторных стохастических интегралов Стратоновича второй кратности, подход к разложению повторных стохастических интералов, который отличается от рассмотренных ранее подходов.

Итак, пусть рассматривается повторный стохастический интеграл Стратоновича вида:

$$J^*[\psi^{(2)}]_{T,t}=\int\limits_t^{*T}\psi_2(t_2)\int\limits_t^{*t_2}\psi_1(t_1)d\mathbf{f}_{t_1}^{(i_1)}d\mathbf{f}_{t_2}^{(i_2)};\ i_1,i_2=1,\ldots,m,$$

где $\mathbf{f}_\tau^{(i)};\ i=1,\ldots,m$ — независимые стандартные винеровские процессы, а $\psi_1(\tau)$ и $\psi_2(\tau)$ — непрерывно дифференцируемые на промежутке $[t,T]$ функции.

Рассмотрим функцию

$$K^*(t_1,t_2)=K(t_1,t_2)+\frac{1}{2}\mathbf{1}_{\{t_1=t_2\}}\psi_1(t_1)\psi_2(t_1),$$

где $t_1,t_2\in[t,T]$, а $K(t_1,t_2)$ имеет вид:

$$K(t_1,t_2)=\begin{cases}\psi_1(t_1)\psi_2(t_2),\ t_1<t_2\\ 0,\ \text{иначе}\end{cases};\ t_1,t_2\in[t,T].$$

В силу доказанных в главе 1 лемм и формулы

$$J^*[\psi^{(2)}]_{T,t}=\int\limits_t^T\psi_2(t_2)\int\limits_t^{t_2}\psi_1(t_1)d\mathbf{f}_{t_1}^{(i_1)}d\mathbf{f}_{t_2}^{(i_2)}+\frac{1}{2}\mathbf{1}_{\{i_1=i_2\}}\int\limits_t^T\psi_2(t_2)\psi_1(t_2)dt_2$$

с в. 1, имеем:

$$J^*[\psi^{(2)}]_{T,t}=\underset{N\to\infty}{\text{l.i.m.}}\sum_{l_1=0}^{N-1}\sum_{l_2=0}^{N-1}K^*(\tau_{l_1},\tau_{l_2})\Delta\mathbf{f}_{\tau_{l_1}}^{(i_1)}\Delta\mathbf{f}_{\tau_{l_2}}^{(i_2)},\qquad(2.120)$$

где сохранен смысл обозначений формулы (1.8).

Разложим функцию $K^*(t_1,t_2)$ по переменной t_1, при фиксированном t_2, в ряд Фурье на интервале (t,T) :

$$K^*(t_1,t_2)=\sum_{j_1=0}^{\infty}C_{j_1}(t_2)\phi_{j_1}(t_1)\quad(t_1\neq t,T),\qquad(2.121)$$

где

$$C_{j_1}(t_2)=\int\limits_t^T K^*(t_1,t_2)\phi_{j_1}(t_1)dt_1=\int\limits_t^T K(t_1,t_2)\phi_{j_1}(t_1)dt_1=$$

$$=\psi_2(t_2)\int\limits_t^{t_2}\psi_1(t_1)\phi_{j_1}(t_1)dt_1,$$

$\{\phi_j(x)\}_{j=0}^{\infty}$ — полная ортонормированная на отрезке $[t,T]$ система непрерывных функций.

Равенство (2.121) выполняется поточечно в каждой точке интервала (t,T) по переменной t_1, при фиксированном $t_2\in[t,T]$, в силу кусочной гладкости функции $K^*(t_1,t_2)$ по переменной $t_1\in[t,T]$ (t_2 — фиксировано). Отметим также, что в силу известных свойств рядов Фурье, ряд (2.121) сходится при $t_1=t,T$ (не обязательно к функции $K^*(t_1,t_2)$).

При получении (2.121) мы также использовали то, что правая часть (2.121) сходится при $t_1=t_2$ (точка конечного разрыва функции $K(t_1,t_2)$) к величине

$$\frac{1}{2}\left(K(t_2-0,t_2)+K(t_2+0,t_2)\right)=\frac{1}{2}\psi_1(t_2)\psi_2(t_2)=K^*(t_2,t_2).$$

Функция $C_{j_1}(t_2)$ является непрерывно дифференцируемой на отрезке $[t,T]$. Разложим ее на интервале (t,T) в ряд Фурье:

$$C_{j_1}(t_2)=\sum_{j_2=0}^{\infty}C_{j_2j_1}\phi_{j_2}(t_2)\quad(t_2\ne t,T),\tag{2.122}$$

где

$$C_{j_2j_1}=\int\limits_t^T C_{j_1}(t_2)\phi_{j_2}(t_2)dt_2=\int\limits_t^T\psi_2(t_2)\phi_{j_2}(t_2)\int\limits_t^{t_2}\psi_1(t_1)\phi_{j_1}(t_1)dt_1dt_2,$$

а равенство (2.122) выполняется поточечно в любой точке интервала (t,T), причем правая часть (2.122) сходится при $t_2=t,T$ (не обязательно к $C_{j_1}(t_2)$).

Подставим (2.122) в (2.121):

$$K^*(t_1,t_2)=\sum_{j_1=0}^{\infty}\sum_{j_2=0}^{\infty}C_{j_2j_1}\phi_{j_1}(t_1)\phi_{j_2}(t_2);\quad(t_1,t_2)\in(t,T)^2,\tag{2.123}$$

причем ряд в правой части (2.123) сходится на границе квадрата $[t,T]^2$ (не обязательно к $K^*(t_1,t_2)$).

Далее, используя схему доказательства теоремы 1 и (2.120), получаем:

$$J^*[\psi^{(2)}]_{T,t} = \sum_{j_1=0}^{p_1}\sum_{j_2=0}^{p_2} C_{j_2j_1}\zeta_{j_1}^{(i_1)}\zeta_{j_2}^{(i_2)} + R_{T,t}^{p_1p_2}, \qquad (2.124)$$

где

$$R_{T,t}^{p_1p_2} = \int_t^T\int_t^{t_2} G_{p_1p_2}(t_1,t_2)d\mathbf{f}_{t_1}^{(i_1)}d\mathbf{f}_{t_2}^{(i_2)} + \int_t^T\int_t^{t_1} G_{p_1p_2}(t_1,t_2)d\mathbf{f}_{t_2}^{(i_2)}d\mathbf{f}_{t_1}^{(i_1)}+$$

$$+\mathbf{1}_{\{i_1=i_2\}}\int_t^T G_{p_1p_2}(t_1,t_1)dt_1;$$

$$G_{p_1p_2}(t_1,t_2) \stackrel{\text{def}}{=} K^*(t_1,t_2) - \sum_{j_1=0}^{p_1}\sum_{j_2=0}^{p_2} C_{j_2j_1}\phi_{j_1}(t_1)\phi_{j_2}(t_2);$$

$p_1,\ p_2 < \infty$.

Используя стандартные оценки (7.3), (7.4) моментов стохастических интегралов, имеем

$$\mathsf{M}\left\{\left(R_{T,t}^{p_1p_2}\right)^{2n}\right\} \le C_n\biggl(\int_t^T\int_t^{t_2}\left(G_{p_1p_2}(t_1,t_2)\right)^{2n}dt_1dt_2+$$

$$+\int_t^T\int_t^{t_1}\left(G_{p_1p_2}(t_1,t_2)\right)^{2n}dt_2dt_1 + \mathbf{1}_{\{i_1=i_2\}}\int_t^T\left(G_{p_1p_2}(t_1,t_1)\right)^{2n}dt_1\biggr), \qquad (2.125)$$

где $C_n < \infty$ — постоянная, которая зависит от n и $T-t$; $n = 1,\ 2,\ldots$

Отметим, что в силу выдвинутых ранее предположений, функция $G_{p_1p_2}(t_1,t_2)$ непрерывна в областях интегрирования интегралов в правой части (2.125) и ограничена на границе квадрата $[t,T]^2$.

Оценим первый интеграл в правой части (2.125):

$$0 \le \int_t^T\int_t^{t_2}\left(G_{p_1p_2}(t_1,t_2)\right)^{2n}dt_1dt_2 = \left(\int_{D_\varepsilon} + \int_{\Gamma_\varepsilon}\right)\left(G_{p_1p_2}(t_1,t_2)\right)^{2n}dt_1dt_2 \le$$

$$\le \sum_{i=0}^{N-1}\sum_{j=0}^{i}\max_{(t_1,t_2)\in[\tau_i,\tau_{i+1}]\times[\tau_j,\tau_{j+1}]}\left(G_{p_1p_2}(t_1,t_2)\right)^{2n}\Delta\tau_i\Delta\tau_j + MS_{\Gamma_\varepsilon} \le$$

$$\le \sum_{i=0}^{N-1}\sum_{j=0}^{i}\left(G_{p_1p_2}(\tau_i,\tau_j)\right)^{2n}\Delta\tau_i\Delta\tau_j+$$

$$+\sum_{i=0}^{N-1}\sum_{j=0}^{i}\left|\left(G_{p_1p_2}(t_i^{(p_1p_2)},t_j^{(p_1p_2)})\right)^{2n} - \left(G_{p_1p_2}(\tau_i,\tau_j)\right)^{2n}\right|\Delta\tau_i\Delta\tau_j + MS_{\Gamma_\varepsilon} \le$$

$$\leq \sum_{i=0}^{N-1}\sum_{j=0}^{i}\left(G_{p_1p_2}(\tau_i,\tau_j)\right)^{2n}\Delta\tau_i\Delta\tau_j+\varepsilon_1\frac{1}{2}(T-t-3\varepsilon)^2\left(1+\frac{1}{N}\right)+MS_{\Gamma_\varepsilon}, \quad (2.126)$$

где $D_\varepsilon = \{(t_1,t_2) : t_2 \in [t+2\varepsilon, T-\varepsilon], t_1 \in [t+\varepsilon, t_2-\varepsilon]\}$; $\Gamma_\varepsilon = D\backslash D_\varepsilon$; $D = \{(t_1,t_2) : t_2 \in [t,T], t_1 \in [t,t_2]\}$; ε — достаточно малое положительное число; S_{Γ_ε} — площадь Γ_ε; $M > 0$ — постоянная, ограничивающая $\left(G_{p_1p_2}(t_1,t_2)\right)^{2n}$; $(t_i^{(p_1p_2)}, t_j^{(p_1p_2)})$ — точка максимума этой функции при $(t_1,t_2) \in [\tau_i,\tau_{i+1}]\text{x}[\tau_j,\tau_{j+1}]$; $\tau_i = t+2\varepsilon+i\Delta$ $(i=0,1,\ldots,N)$; $\tau_N = T-\varepsilon$; $\Delta = (T-t-3\varepsilon)/N$; $\Delta < \varepsilon$; $\varepsilon_1 > 0$ — сколь угодно малое положительное число.

При получении (2.126) мы использовали известные свойства интегралов, первую и вторую теорему Вейерштрасса для функции двух переменных, а также непрерывность и, как следствие, равномерную непрерывность функции $\left(G_{p_1p_2}(t_1,t_2)\right)^{2n}$ в D_ε $(\forall\varepsilon_1 > 0\ \exists\delta(\varepsilon_1) > 0$, которое не зависит от t_1, t_2, p_1, p_2 и такое, что при $\sqrt{2}\Delta < \delta$ имеет место неравенство: $\left|\left(G_{p_1p_2}(t_i^{(p_1p_2)}, t_j^{(p_1p_2)})\right)^{2n} - \left(G_{p_1p_2}(\tau_i,\tau_j)\right)^{2n}\right| < \varepsilon_1)$.

Учитывая (2.123) запишем:

$$\lim_{p_1\to\infty}\lim_{p_2\to\infty}\left(G_{p_1p_2}(t_1,t_2)\right)^{2n} = 0 \text{ при } (t_1,t_2)\in D_\varepsilon$$

и осуществим повторный предельный переход $\lim\limits_{\varepsilon\to+0}\lim\limits_{p_1\to\infty}\lim\limits_{p_2\to\infty}$ в неравенстве (2.126). Тогда, в силу произвольности ε_1, имеем

$$\lim_{p_1\to\infty}\lim_{p_2\to\infty}\int_t^T\int_t^{t_2}\left(G_{p_1p_2}(t_1,t_2)\right)^{2n}dt_1dt_2 = 0. \quad (2.127)$$

Аналогично приведенным выше рассуждениям имеем:

$$\lim_{p_1\to\infty}\lim_{p_2\to\infty}\int_t^T\int_t^{t_1}\left(G_{p_1p_2}(t_1,t_2)\right)^{2n}dt_2dt_1 = 0, \quad (2.128)$$

$$\lim_{p_1\to\infty}\lim_{p_2\to\infty}\int_t^T\left(G_{p_1p_2}(t_1,t_1)\right)^{2n}dt_1 = 0. \quad (2.129)$$

Из (2.125), (2.127) – (2.129) получаем, что

$$\lim_{p_1\to\infty}\lim_{p_2\to\infty}\mathsf{M}\left\{\left(R_{T,t}^{p_1p_2}\right)^{2n}\right\} = 0;\ n\in N.$$

Последнее равенство и (2.124) позволяют записать

$$J^*[\psi^{(2)}]_{T,t} = \sum_{j_1=0}^{\infty}\sum_{j_2=0}^{\infty}C_{j_2j_1}\zeta_{j_1}^{(i_1)}\zeta_{j_2}^{(i_2)},$$

где сходимость повторного ряда понимается в среднем степени $2n$; $n \in N$.

Нетрудно заметить, что если функцию $K^*(t_1, t_2)$ разложить в ряд Фурье на интервале (t, T) сначала по переменной t_2 (t_1 фиксировано), а затем коэффициент Фурье $\psi_1(t_1) \int\limits_{t_1}^{T} \psi_2(t_2)\phi_{j_2}(t_2)dt_2$ полученного ряда разложить в ряд Фурье на интервале (t, T) по переменной t_1, то учтя, что

$$\int\limits_t^T \psi_1(t_1)\phi_{j_1}(t_1) \int\limits_{t_1}^T \psi_2(t_2)\phi_{j_2}(t_2)dt_2dt_1 = C_{j_2j_1},$$

придем к следующей формуле разложения повторного стохастического интеграла Стратоновича второй кратности:

$$J^*[\psi^{(2)}]_{T,t} = \sum_{j_2=0}^{\infty}\sum_{j_1=0}^{\infty} C_{j_2j_1}\zeta_{j_1}^{(i_1)}\zeta_{j_2}^{(i_2)}.$$

2.5.2 Случай интегралов 3 и 4 кратности

В предыдущем разделе нами было рассмотрено следующее равенство:

$$\psi_1(t_1)\left(\mathbf{1}_{\{t_1<t_2\}} + \frac{1}{2}\mathbf{1}_{\{t_1=t_2\}}\right) = \sum_{j_1=0}^{\infty}\int\limits_t^{t_2}\psi_1(t_1)\phi_{j_1}(t_1)dt_1\phi_{j_1}(t_1), \qquad (2.130)$$

которое выполняется поточечно на интервале (t, T), причем ряд в правой части (2.130) сходится при $t_1 = t,\ T$.

Используя (2.130) получаем:

$$\sum_{j_1=0}^{\infty}\sum_{j_2=0}^{\infty}\psi_3(t_3)\int\limits_t^{t_3}\psi_2(t_2)\phi_{j_2}(t_2)\int\limits_t^{t_2}\psi_1(t_1)\phi_{j_1}(t_1)dt_1dt_2\phi_{j_2}(t_2)\phi_{j_1}(t_1) =$$

$$= \sum_{j_1=0}^{\infty}\psi_3(t_3)\psi_2(t_2)\int\limits_t^{t_2}\psi_1(t_1)\phi_{j_1}(t_1)dt_1\left(\mathbf{1}_{\{t_2<t_3\}} + \frac{1}{2}\mathbf{1}_{\{t_2=t_3\}}\right)\phi_{j_1}(t_1) =$$

$$= \psi_1(t_1)\psi_2(t_2)\psi_3(t_3)\left(\mathbf{1}_{\{t_1<t_2\}} + \frac{1}{2}\mathbf{1}_{\{t_1=t_2\}}\right)\left(\mathbf{1}_{\{t_2<t_3\}} + \frac{1}{2}\mathbf{1}_{\{t_2=t_3\}}\right). \qquad (2.131)$$

С другой стороны левая часть (2.131) может быть путем разложения функции

$$\psi_3(t_3)\int\limits_t^{t_3}\psi_2(t_2)\phi_{j_2}(t_2)\int\limits_t^{t_2}\psi_1(t_1)\phi_{j_1}(t_1)dt_1dt_2$$

в ряд Фурье на интервале $(t,\ T)$ представлена в виде:

$$\sum_{j_1=0}^{\infty}\sum_{j_2=0}^{\infty}\sum_{j_3=0}^{\infty} C_{j_3j_2j_1}\phi_{j_1}(t_1)\phi_{j_2}(t_2)\phi_{j_3}(t_3), \tag{2.132}$$

где

$$C_{j_3j_2j_1}=\int\limits_t^T \psi_3(t_3)\phi_{j_3}(t_3)\int\limits_t^{t_3}\psi_2(t_2)\phi_{j_2}(t_2)\int\limits_t^{t_2}\psi_1(t_1)\phi_{j_1}(t_1)dt_1dt_2dt_3.$$

Таким образом получаем равенство:

$$\sum_{j_1=0}^{\infty}\sum_{j_2=0}^{\infty}\sum_{j_3=0}^{\infty} C_{j_3j_2j_1}\phi_{j_1}(t_1)\phi_{j_2}(t_2)\phi_{j_3}(t_3)=$$

$$=\psi_1(t_1)\psi_2(t_2)\psi_3(t_3)\left(\mathbf{1}_{\{t_1<t_2\}}+\frac{1}{2}\mathbf{1}_{\{t_1=t_2\}}\right)\left(\mathbf{1}_{\{t_2<t_3\}}+\frac{1}{2}\mathbf{1}_{\{t_2=t_3\}}\right)=$$

$$=\prod_{l=1}^{3}\psi_l(t_l)\left(\mathbf{1}_{\{t_1<t_2\}}\mathbf{1}_{\{t_2<t_3\}}+\frac{1}{2}\mathbf{1}_{\{t_1=t_2\}}\mathbf{1}_{\{t_2<t_3\}}+\right.$$

$$\left.+\frac{1}{2}\mathbf{1}_{\{t_1<t_2\}}\mathbf{1}_{\{t_2=t_3\}}+\frac{1}{4}\mathbf{1}_{\{t_1=t_2\}}\mathbf{1}_{\{t_2=t_3\}}\right)\stackrel{\mathsf{def}}{=}K^*(t_1,t_2,t_3), \tag{2.133}$$

которое выполняется поточечно в открытом кубе $(t,T)^3$, причем ряд (2.132) сходится на границе куба $[t,T]^3$.

Используя (2.130) и (2.133) имеем:

$$\sum_{j_1=0}^{\infty}\sum_{j_2=0}^{\infty}\sum_{j_3=0}^{\infty}\psi_4(t_4)\int\limits_t^{t_4}\psi_3(t_3)\phi_{j_3}(t_3)\int\limits_t^{t_3}\psi_2(t_2)\phi_{j_2}(t_2)\int\limits_t^{t_2}\psi_1(t_1)\phi_{j_1}(t_1)dt_1dt_2dt_3\times$$

$$\times\prod_{l=1}^{3}\phi_{j_l}(t_l)=$$

$$=\sum_{j_1=0}^{\infty}\sum_{j_2=0}^{\infty}\psi_4(t_4)\left(\mathbf{1}_{\{t_3<t_4\}}+\frac{1}{2}\mathbf{1}_{\{t_3=t_4\}}\right)\times$$

$$\times\psi_3(t_3)\int\limits_t^{t_3}\psi_2(t_2)\phi_{j_2}(t_2)\int\limits_t^{t_2}\psi_1(t_1)\phi_{j_1}(t_1)dt_1dt_2\phi_{j_2}(t_2)\phi_{j_1}(t_1)=$$

$$=\psi_4(t_4)\left(\mathbf{1}_{\{t_3<t_4\}}+\frac{1}{2}\mathbf{1}_{\{t_3=t_4\}}\right)\times$$

$$\times\sum_{j_1=0}^{\infty}\sum_{j_2=0}^{\infty}\psi_3(t_3)\int\limits_t^{t_3}\psi_2(t_2)\phi_{j_2}(t_2)\int\limits_t^{t_2}\psi_1(t_1)\phi_{j_1}(t_1)dt_1dt_2\phi_{j_2}(t_2)\phi_{j_1}(t_1)=$$

$$=\psi_4(t_4)\left(\mathbf{1}_{\{t_3<t_4\}}+\frac{1}{2}\mathbf{1}_{\{t_3=t_4\}}\right)\prod_{l=1}^{3}\psi_l(t_l)\prod_{l=1}^{2}\left(\mathbf{1}_{\{t_l<t_{l+1}\}}+\frac{1}{2}\mathbf{1}_{\{t_l=t_{l+1}\}}\right)=$$

$$=\prod_{l=1}^{4}\psi_l(t_l)\prod_{l=1}^{3}\left(\mathbf{1}_{\{t_l<t_{l+1}\}}+\frac{1}{2}\mathbf{1}_{\{t_l=t_{l+1}\}}\right). \tag{2.134}$$

Левая часть (2.134) путем разложения функции

$$\psi_4(t_4)\int\limits_t^{t_4}\psi_3(t_3)\phi_{j_3}(t_3)\int\limits_t^{t_3}\psi_2(t_2)\phi_{j_2}(t_2)\int\limits_t^{t_2}\psi_1(t_1)\phi_{j_1}(t_1)dt_1dt_2dt_3$$

в ряд Фурье на интервале (t,T) может быть приведена к виду:

$$\sum_{j_1=0}^{\infty}\sum_{j_2=0}^{\infty}\sum_{j_3=0}^{\infty}\sum_{j_4=0}^{\infty}C_{j_4j_3j_2j_1}\prod_{l=1}^{4}\phi_{j_l}(t_l), \tag{2.135}$$

где $C_{j_4j_3j_2j_1}$ определяется формулой (1.6).

В результате получаем равенство:

$$\sum_{j_1=0}^{\infty}\sum_{j_2=0}^{\infty}\sum_{j_3=0}^{\infty}\sum_{j_4=0}^{\infty}C_{j_4j_3j_2j_1}\prod_{l=1}^{4}\phi_{j_l}(t_l)=\prod_{l=1}^{4}\psi_l(t_l)\prod_{l=1}^{3}\left(\mathbf{1}_{\{t_l<t_{l+1}\}}+\frac{1}{2}\mathbf{1}_{\{t_l=t_{l+1}\}}\right)\stackrel{\mathsf{def}}{=}$$

$$\stackrel{\mathsf{def}}{=}K^*(t_1,t_2,t_3,t_4), \tag{2.136}$$

которое выполняется поточечно в открытом гиперкубе $(t,T)^4$, причем ряд в левой части (2.136) сходится на границе гиперкуба $[t,T]^4$.

В силу леммы 1, замечания 1 и формулы связи повторных стохастических интегралов Стратоновича и Ито:

$$J^*[\psi^{(3)}]=\int\limits_t^{T}\psi_3(t_3)\int\limits_t^{t_3}\psi_2(t_2)\int\limits_t^{t_2}\psi_1(t_1)d\mathbf{w}_{t_1}^{(i_1)}d\mathbf{w}_{t_2}^{(i_2)}d\mathbf{w}_{t_3}^{(i_3)}+$$

$$+\frac{1}{2}\mathbf{1}_{\{i_1=i_2\neq 0\}}\int\limits_t^{T}\psi_3(t_3)\int\limits_t^{t_3}\psi_2(t_2)\psi_1(t_2)dt_2d\mathbf{w}_{t_3}^{(i_3)}+$$

$$+\frac{1}{2}\mathbf{1}_{\{i_2=i_3\neq 0\}}\int\limits_t^{T}\psi_3(t_3)\psi_2(t_3)\int\limits_t^{t_3}\psi_1(t_1)d\mathbf{w}_{t_1}^{(i_1)}dt_3 \ \text{с в. 1},$$

получаем:

$$J^*[\psi^{(3)}]_{T,t}=\underset{N\to\infty}{\text{l.i.m.}}\sum_{l_3=0}^{N-1}\sum_{l_2=0}^{N-1}\sum_{l_1=0}^{N-1}K^*(\tau_{l_1},\tau_{l_2},\tau_{l_3})\Delta\mathbf{w}_{\tau_{l_1}}^{(i_1)}\Delta\mathbf{w}_{\tau_{l_2}}^{(i_2)}\Delta\mathbf{w}_{\tau_{l_3}}^{(i_3)}, \tag{2.137}$$

где равенство выполняется с вероятностью 1.

Далее, используя схему доказательства теоремы 1 и (2.137), получаем:

$$J^*[\psi^{(3)}]_{T,t}=\sum_{j_1=0}^{p_1}\sum_{j_2=0}^{p_2}\sum_{j_3=0}^{p_3}C_{j_3j_2j_1}\zeta_{j_1}^{(i_1)}\zeta_{j_2}^{(i_2)}\zeta_{j_3}^{(i_3)}+R_{T,t}^{p_1p_2p_3}, \tag{2.138}$$

где

$$R_{T,t}^{p_1p_2p_3} = \underset{N\to\infty}{\text{l.i.m.}} \sum_{l_3=0}^{N-1}\sum_{l_2=0}^{N-1}\sum_{l_1=0}^{N-1} G_{p_1p_2p_3}(\tau_{l_1},\tau_{l_2},\tau_{l_3})\Delta\mathbf{w}_{\tau_{l_1}}^{(i_1)}\Delta\mathbf{w}_{\tau_{l_2}}^{(i_2)}\Delta\mathbf{w}_{\tau_{l_3}}^{(i_3)},$$

$$G_{p_1p_2p_3}(t_1,t_2,t_3) \stackrel{\mathsf{def}}{=} K^*(t_1,t_2,t_3) - \sum_{j_1=0}^{p_1}\sum_{j_2=0}^{p_2}\sum_{j_3=0}^{p_3} C_{j_3j_2j_1}\phi_{j_1}(t_1)\phi_{j_2}(t_2)\phi_{j_3}(t_3).$$

Воспользовавшись формулой (2.163) для кратной суммы, получим

$$R_{T,t}^{p_1p_2p_3} = \underset{N\to\infty}{\text{l.i.m.}} \sum_{l_3=0}^{N-1}\sum_{l_2=0}^{N-1}\sum_{l_1=0}^{N-1} G_{p_1p_2p_3}(\tau_{l_1},\tau_{l_2},\tau_{l_3})\Delta\mathbf{w}_{\tau_{l_1}}^{(i_1)}\Delta\mathbf{w}_{\tau_{l_2}}^{(i_2)}\Delta\mathbf{w}_{\tau_{l_3}}^{(i_3)} =$$

$$= \underset{N\to\infty}{\text{l.i.m.}} \sum_{l_3=0}^{N-1}\sum_{l_2=0}^{l_3-1}\sum_{l_1=0}^{l_2-1} \Biggl(G_{p_1p_2p_3}(\tau_{l_1},\tau_{l_2},\tau_{l_3})\Delta\mathbf{w}_{\tau_{l_1}}^{(i_1)}\Delta\mathbf{w}_{\tau_{l_2}}^{(i_2)}\Delta\mathbf{w}_{\tau_{l_3}}^{(i_3)} +$$

$$+G_{p_1p_2p_3}(\tau_{l_1},\tau_{l_3},\tau_{l_2})\Delta\mathbf{w}_{\tau_{l_1}}^{(i_1)}\Delta\mathbf{w}_{\tau_{l_3}}^{(i_2)}\Delta\mathbf{w}_{\tau_{l_2}}^{(i_3)} +$$

$$+G_{p_1p_2p_3}(\tau_{l_2},\tau_{l_1},\tau_{l_3})\Delta\mathbf{w}_{\tau_{l_2}}^{(i_1)}\Delta\mathbf{w}_{\tau_{l_1}}^{(i_2)}\Delta\mathbf{w}_{\tau_{l_3}}^{(i_3)} +$$

$$+G_{p_1p_2p_3}(\tau_{l_2},\tau_{l_3},\tau_{l_1})\Delta\mathbf{w}_{\tau_{l_2}}^{(i_1)}\Delta\mathbf{w}_{\tau_{l_3}}^{(i_2)}\Delta\mathbf{w}_{\tau_{l_1}}^{(i_3)} +$$

$$+G_{p_1p_2p_3}(\tau_{l_3},\tau_{l_2},\tau_{l_1})\Delta\mathbf{w}_{\tau_{l_3}}^{(i_1)}\Delta\mathbf{w}_{\tau_{l_2}}^{(i_2)}\Delta\mathbf{w}_{\tau_{l_1}}^{(i_3)} +$$

$$+G_{p_1p_2p_3}(\tau_{l_3},\tau_{l_1},\tau_{l_2})\Delta\mathbf{w}_{\tau_{l_3}}^{(i_1)}\Delta\mathbf{w}_{\tau_{l_1}}^{(i_2)}\Delta\mathbf{w}_{\tau_{l_2}}^{(i_3)}\Biggr) +$$

$$+\underset{N\to\infty}{\text{l.i.m.}} \sum_{l_3=0}^{N-1}\sum_{l_2=0}^{l_3-1} \Biggl(G_{p_1p_2p_3}(\tau_{l_2},\tau_{l_2},\tau_{l_3})\Delta\mathbf{w}_{\tau_{l_2}}^{(i_1)}\Delta\mathbf{w}_{\tau_{l_2}}^{(i_2)}\Delta\mathbf{w}_{\tau_{l_3}}^{(i_3)} +$$

$$+G_{p_1p_2p_3}(\tau_{l_2},\tau_{l_3},\tau_{l_2})\Delta\mathbf{w}_{\tau_{l_2}}^{(i_1)}\Delta\mathbf{w}_{\tau_{l_3}}^{(i_2)}\Delta\mathbf{w}_{\tau_{l_2}}^{(i_3)} +$$

$$+G_{p_1p_2p_3}(\tau_{l_3},\tau_{l_2},\tau_{l_2})\Delta\mathbf{w}_{\tau_{l_3}}^{(i_1)}\Delta\mathbf{w}_{\tau_{l_2}}^{(i_2)}\Delta\mathbf{w}_{\tau_{l_2}}^{(i_3)}\Biggr) +$$

$$+\underset{N\to\infty}{\text{l.i.m.}} \sum_{l_3=0}^{N-1}\sum_{l_1=0}^{l_3-1} \Biggl(G_{p_1p_2p_3}(\tau_{l_1},\tau_{l_3},\tau_{l_3})\Delta\mathbf{w}_{\tau_{l_1}}^{(i_1)}\Delta\mathbf{w}_{\tau_{l_3}}^{(i_2)}\Delta\mathbf{w}_{\tau_{l_3}}^{(i_3)} +$$

$$+G_{p_1p_2p_3}(\tau_{l_3},\tau_{l_1},\tau_{l_3})\Delta\mathbf{w}_{\tau_{l_3}}^{(i_1)}\Delta\mathbf{w}_{\tau_{l_1}}^{(i_2)}\Delta\mathbf{w}_{\tau_{l_3}}^{(i_3)} +$$

$$+G_{p_1p_2p_3}(\tau_{l_3},\tau_{l_3},\tau_{l_1})\Delta\mathbf{w}_{\tau_{l_3}}^{(i_1)}\Delta\mathbf{w}_{\tau_{l_3}}^{(i_2)}\Delta\mathbf{w}_{\tau_{l_1}}^{(i_3)}\Biggr) +$$

$$+\underset{N\to\infty}{\text{l.i.m.}} \sum_{l_3=0}^{N-1} G_{p_1p_2p_3}(\tau_{l_3},\tau_{l_3},\tau_{l_3})\Delta\mathbf{w}_{\tau_{l_3}}^{(i_1)}\Delta\mathbf{w}_{\tau_{l_3}}^{(i_2)}\Delta\mathbf{w}_{\tau_{l_3}}^{(i_3)} =$$

$$= \int_t^T\int_t^{t_3}\int_t^{t_2} G_{p_1p_2p_3}(t_1,t_2,t_3)d\mathbf{w}_{t_1}^{(i_1)}d\mathbf{w}_{t_2}^{(i_2)}d\mathbf{w}_{t_3}^{(i_3)} +$$

$$+\int\limits_t^T\int\limits_t^{t_3}\int\limits_t^{t_2} G_{p_1p_2p_3}(t_1,t_3,t_2)d\mathbf{w}_{t_1}^{(i_1)}d\mathbf{w}_{t_2}^{(i_3)}d\mathbf{w}_{t_3}^{(i_2)}+$$

$$+\int\limits_t^T\int\limits_t^{t_3}\int\limits_t^{t_2} G_{p_1p_2p_3}(t_2,t_1,t_3)d\mathbf{w}_{t_1}^{(i_2)}d\mathbf{w}_{t_2}^{(i_1)}d\mathbf{w}_{t_3}^{(i_3)}+$$

$$+\int\limits_t^T\int\limits_t^{t_3}\int\limits_t^{t_2} G_{p_1p_2p_3}(t_2,t_3,t_1)d\mathbf{w}_{t_1}^{(i_3)}d\mathbf{w}_{t_2}^{(i_1)}d\mathbf{w}_{t_3}^{(i_2)}+$$

$$+\int\limits_t^T\int\limits_t^{t_3}\int\limits_t^{t_2} G_{p_1p_2p_3}(t_3,t_2,t_1)d\mathbf{w}_{t_1}^{(i_3)}d\mathbf{w}_{t_2}^{(i_2)}d\mathbf{w}_{t_3}^{(i_1)}+$$

$$+\int\limits_t^T\int\limits_t^{t_3}\int\limits_t^{t_2} G_{p_1p_2p_3}(t_3,t_1,t_2)d\mathbf{w}_{t_1}^{(i_2)}d\mathbf{w}_{t_2}^{(i_3)}d\mathbf{w}_{t_3}^{(i_1)}+$$

$$+\mathbf{1}_{\{i_1=i_2\ne 0\}}\int\limits_t^T\int\limits_t^{t_3} G_{p_1p_2p_3}(t_2,t_2,t_3)dt_2d\mathbf{w}_{t_3}^{(i_3)}+$$

$$+\mathbf{1}_{\{i_1=i_3\ne 0\}}\int\limits_t^T\int\limits_t^{t_3} G_{p_1p_2p_3}(t_2,t_3,t_2)dt_2d\mathbf{w}_{t_3}^{(i_2)}+$$

$$+\mathbf{1}_{\{i_2=i_3\ne 0\}}\int\limits_t^T\int\limits_t^{t_3} G_{p_1p_2p_3}(t_3,t_2,t_2)dt_2d\mathbf{w}_{t_3}^{(i_1)}+$$

$$+\mathbf{1}_{\{i_2=i_3\ne 0\}}\int\limits_t^T\int\limits_t^{t_3} G_{p_1p_2p_3}(t_1,t_3,t_3)d\mathbf{w}_{t_1}^{(i_1)}dt_3+$$

$$+\mathbf{1}_{\{i_1=i_3\ne 0\}}\int\limits_t^T\int\limits_t^{t_3} G_{p_1p_2p_3}(t_3,t_1,t_3)d\mathbf{w}_{t_1}^{(i_2)}dt_3+$$

$$+\mathbf{1}_{\{i_1=i_2\ne 0\}}\int\limits_t^T\int\limits_t^{t_3} G_{p_1p_2p_3}(t_3,t_3,t_1)d\mathbf{w}_{t_1}^{(i_3)}dt_3.$$

Теперь, применяя стандартные оценки для моментов стохастических интегралов, придем к следующему неравенству:

$$\mathsf{M}\left\{\left(R_{T,t}^{p_1p_2p_3}\right)^{2n}\right\}\le C_n\Biggl(\int\limits_t^T\int\limits_t^{t_3}\int\limits_t^{t_2}\Bigl(\left(G_{p_1p_2p_3}(t_1,t_2,t_3)\right)^{2n}+\left(G_{p_1p_2p_3}(t_1,t_3,t_2)\right)^{2n}+$$

$$+\left(G_{p_1p_2p_3}(t_2,t_1,t_3)\right)^{2n}+\left(G_{p_1p_2p_3}(t_2,t_3,t_1)\right)^{2n}+\left(G_{p_1p_2p_3}(t_3,t_2,t_1)\right)^{2n}+$$

$$+\left(G_{p_1p_2p_3}(t_3,t_1,t_2)\right)^{2n}\Bigr)dt_1dt_2dt_3+$$

$$+\int\limits_t^T\int\limits_t^{t_3}\Biggl(\mathbf{1}_{\{i_1=i_2\ne 0\}}\Bigl(\left(G_{p_1p_2p_3}(t_2,t_2,t_3)\right)^{2n}+\left(G_{p_1p_2p_3}(t_3,t_3,t_2)\right)^{2n}\Bigr)+$$

$$+\mathbf{1}_{\{i_1=i_3\ne 0\}}\Bigl(\left(G_{p_1p_2p_3}(t_2,t_3,t_2)\right)^{2n}+\left(G_{p_1p_2p_3}(t_3,t_2,t_3)\right)^{2n}\Bigr)+$$

$$+\mathbf{1}_{\{i_2=i_3\ne 0\}}\Bigl(\left(G_{p_1p_2p_3}(t_3,t_2,t_2)\right)^{2n}+\left(G_{p_1p_2p_3}(t_2,t_3,t_3)\right)^{2n}\Bigr)\Biggr)dt_2dt_3. \qquad (2.139)$$

Важным является то, что подынтегральные функции в правой части (2.139) непрерывны в областях интегрирования повторных интегралов и, согласно комментарию к формуле (2.133), ограничены на границах этих областей, причем всюду в $(t,T)^3$ имеет место:

$$\lim_{p_1\to\infty}\lim_{p_2\to\infty}\lim_{p_3\to\infty} G_{p_1p_2p_3}(t_1,t_2,t_3)=0. \qquad (2.140)$$

Далее аналогично (2.126) осуществляем повторный предельный переход $\lim\limits_{p_1\to\infty}\lim\limits_{p_2\to\infty}\lim\limits_{p_3\to\infty}$ под знаками интегралов в правой части (2.139) и получаем:

$$\lim_{p_1\to\infty}\lim_{p_2\to\infty}\lim_{p_3\to\infty} \mathsf{M}\left\{\left(R_{T,t}^{p_1p_2p_3}\right)^{2n}\right\}=0.$$

Последнее, в свою очередь, означает, что

$$J^*[\psi^{(3)}]_{T,t}=\sum_{j_1=0}^{\infty}\sum_{j_2=0}^{\infty}\sum_{j_3=0}^{\infty} C_{j_3j_2j_1}\zeta_{j_1}^{(i_1)}\zeta_{j_2}^{(i_2)}\zeta_{j_3}^{(i_3)}, \qquad (2.141)$$

где повторный ряд сходится в среднем степени $2n$, n – натуральное, т.е.

$$\lim_{p_1\to\infty}\lim_{p_2\to\infty}\lim_{p_3\to\infty} \mathsf{M}\Biggl\{\Biggl(J^*[\psi^{(3)}]_{T,t}-\sum_{j_1=0}^{p_1}\sum_{j_2=0}^{p_2}\sum_{j_3=0}^{p_3} C_{j_3j_2j_1}\zeta_{j_1}^{(i_1)}\zeta_{j_2}^{(i_2)}\zeta_{j_3}^{(i_3)}\Biggr)^{2n}\Biggr\}=0.$$

2.5.3 Случай интегралов произвольной кратности

В настоящем разделе будет сформулирована и доказана теорема о разложении повторных стохастических интегралов Стратоновича произвольной кратности вида (1.2), основанном на повторных рядах Фурье по системе полиномов Лежандра или системе тригонометрических функций. Данная теорема позволяет представлять повторный стохастический интеграл Стратоновича в виде повторного ряда из произведений стандартных гауссовских случайных величин.

Определим на гиперкубе $[t,T]^k$ функцию

$$K(t_1,\ldots,t_k)=\prod_{l=1}^{k}\psi_l(t_l)\prod_{l=1}^{k-1}\mathbf{1}_{\{t_l<t_{l+1}\}},\ k\ge 2. \qquad (2.142)$$

Сформулируем следующее утверждение.

Теорема 5. *Пусть выполнены условия:*

1. $\psi_i(\tau);\ i=1,\ldots,k$ — *непрерывно дифференцируемые на промежутке* $[t,T]$ *функции.*

2. $\{\phi_j(x)\}_{j=0}^{\infty}$ — *полная ортонормированная система полиномов Лежандра или тригонометрических функций на отрезке* $[t,T]$.

Тогда повторный стохастический интеграл $J^*[\psi^{(k)}]_{T,t}$ *вида* (1.2) *разлагается в сходящийся в среднем степени* $n;\ n\in N$, *повторный ряд*

$$J^*[\psi^{(k)}]_{T,t}=\sum_{j_1=0}^{\infty}\ldots\sum_{j_k=0}^{\infty}C_{j_k\ldots j_1}\prod_{l=1}^{k}\zeta_{(j_l)T,t}^{(i_l)}, \qquad (2.143)$$

где $\zeta_{(j_l)T,t}^{(i_l)}=\int\limits_t^T\phi_{j_l}(s)d\mathbf{w}_s^{(i_l)}$ — *независимые стандартные гауссовские случайные величины при различных* i_l *или* j_l *(если* $i_l\neq 0$*);*

$$C_{j_k\ldots j_1}=\int\limits_{[t,T]^k}K(t_1,\ldots,t_k)\prod_{l=1}^{k}\phi_{j_l}(t_l)dt_1\ldots dt_k. \qquad (2.144)$$

Д о к а з а т е л ь с т в о теоремы будет состоять из нескольких частей.

Определим функцию $K^*(t_1,\ldots,t_k)$ на гиперкубе $[t,T]^k$ следующим образом:

$$K^*(t_1,\ldots,t_k)=\prod_{l=1}^{k}\psi_l(t_l)\prod_{l=1}^{k-1}\left(\mathbf{1}_{\{t_l<t_{l+1}\}}+\frac{1}{2}\mathbf{1}_{\{t_l=t_{l+1}\}}\right)=$$

$$=\prod_{l=1}^{k}\psi_l(t_l)\left(\prod_{l=1}^{k-1}\mathbf{1}_{\{t_l<t_{l+1}\}}+\sum_{r=1}^{k-1}\frac{1}{2^r}\sum_{\substack{s_r,\ldots,s_1=1\\ s_r>\ldots>s_1}}^{k-1}\prod_{l=1}^{r}\mathbf{1}_{\{t_{s_l}=t_{s_l+1}\}}\prod_{\substack{l=1\\ l\neq s_1,\ldots,s_r}}^{k-1}\mathbf{1}_{\{t_l<t_{l+1}\}}\right). \qquad (2.145)$$

Частные случаи (2.145) при $k=2,\ 3,\ 4$ были подробно рассмотрены ранее.

Теорема 6. *В условиях теоремы* 5 *функция* $K^*(t_1,\ldots,t_k)$ *представляется в любой внутренней точке гиперкуба* $[t,T]^k$ *повторным рядом Фурье*

$$K^*(t_1,\ldots,t_k)=\sum_{j_1=0}^{\infty}\ldots\sum_{j_k=0}^{\infty}C_{j_k\ldots j_1}\prod_{l=1}^{k}\phi_{j_l}(t_l), \qquad (2.146)$$

где $C_{j_k\ldots j_1}$ *имеет вид* (2.144)*. При этом повторный ряд* (2.146) *сходится на границе гиперкуба* $[t,T]^k$.

Д о к а з а т е л ь с т в о проведем по индукции. Данная теорема для случаев $k=2,\ 3$ и 4 уже доказана ранее.

Введем предположение индукции:

$$\sum_{j_1=0}^{\infty}\sum_{j_2=0}^{\infty}\ldots\sum_{j_{k-2}=0}^{\infty}\psi_{k-1}(t_{k-1})\int\limits_t^{t_{k-1}}\psi_{k-2}(t_{k-2})\phi_{j_{k-2}}(t_{k-2})\ldots$$

$$\ldots\int\limits_t^{t_2}\psi_1(t_1)\phi_{j_1}(t_1)dt_1\ldots dt_{k-2}\prod_{l=1}^{k-2}\phi_{j_l}(t_l)=$$

$$=\prod_{l=1}^{k-1}\psi_l(t_l)\prod_{l=1}^{k-2}\left(\mathbf{1}_{\{t_l<t_{l+1}\}}+\frac{1}{2}\mathbf{1}_{\{t_l=t_{l+1}\}}\right). \qquad (2.147)$$

Тогда

$$\sum_{j_1=0}^{\infty}\sum_{j_2=0}^{\infty}\ldots\sum_{j_{k-1}=0}^{\infty}\psi_k(t_k)\int\limits_t^{t_k}\psi_{k-1}(t_{k-1})\phi_{j_{k-1}}(t_{k-1})\ldots$$

$$\ldots\int\limits_t^{t_2}\psi_1(t_1)\phi_{j_1}(t_1)dt_1\ldots dt_{k-1}\prod_{l=1}^{k-1}\phi_{j_l}(t_l)=$$

$$=\sum_{j_1=0}^{\infty}\sum_{j_2=0}^{\infty}\ldots\sum_{j_{k-2}=0}^{\infty}\psi_k(t_k)\left(\mathbf{1}_{\{t_{k-1}<t_k\}}+\frac{1}{2}\mathbf{1}_{\{t_{k-1}=t_k\}}\right)\psi_{k-1}(t_{k-1})\times$$

$$\times\int\limits_t^{t_{k-1}}\psi_{k-2}(t_{k-2})\phi_{j_{k-2}}(t_{k-2})\ldots\int\limits_t^{t_2}\psi_1(t_1)\phi_{j_1}(t_1)dt_1\ldots dt_{k-2}\prod_{l=1}^{k-2}\phi_{j_l}(t_l)=$$

$$=\psi_k(t_k)\left(\mathbf{1}_{\{t_{k-1}<t_k\}}+\frac{1}{2}\mathbf{1}_{\{t_{k-1}=t_k\}}\right)\sum_{j_1=0}^{\infty}\sum_{j_2=0}^{\infty}\ldots\sum_{j_{k-2}=0}^{\infty}\psi_{k-1}(t_{k-1})\times$$

$$\times\int\limits_t^{t_{k-1}}\psi_{k-2}(t_{k-2})\phi_{j_{k-2}}(t_{k-2})\ldots\int\limits_t^{t_2}\psi_1(t_1)\phi_{j_1}(t_1)dt_1\ldots dt_{k-2}\prod_{l=1}^{k-2}\phi_{j_l}(t_l)=$$

$$=\psi_k(t_k)\left(\mathbf{1}_{\{t_{k-1}<t_k\}}+\frac{1}{2}\mathbf{1}_{\{t_{k-1}=t_k\}}\right)\prod_{l=1}^{k-1}\psi_l(t_l)\prod_{l=1}^{k-2}\left(\mathbf{1}_{\{t_l<t_{l+1}\}}+\frac{1}{2}\mathbf{1}_{\{t_l=t_{l+1}\}}\right)=$$

$$=\prod_{l=1}^{k}\psi_l(t_l)\prod_{l=1}^{k-1}\left(\mathbf{1}_{\{t_l<t_{l+1}\}}+\frac{1}{2}\mathbf{1}_{\{t_l=t_{l+1}\}}\right). \qquad (2.148)$$

С другой стороны, левая часть (2.148) путем разложения функции

$$\psi_k(t_k)\int\limits_t^{t_k}\psi_{k-1}(t_{k-1})\phi_{j_{k-1}}(t_{k-1})\ldots\int\limits_t^{t_2}\psi_1(t_1)\phi_{j_1}(t_1)dt_1\ldots dt_{k-1}$$

на интервале (t,T) в ряд Фурье по переменной t_k может быть приведена к виду:

$$\sum_{j_1=0}^{\infty}\ldots\sum_{j_k=0}^{\infty}C_{j_k\ldots j_1}\prod_{l=1}^{k}\phi_{j_l}(t_l).$$

Теорема 6 доказана $\square$.

Введем следующие обозначения:

$$J[\psi^{(k)}]_{T,t}^{s_l,\ldots,s_1} \stackrel{\rm def}{=} \prod_{p=1}^{l} \mathbf{1}_{\{i_{s_p}=i_{s_p+1}\neq 0\}}\times$$

$$\times \int\limits_t^T \psi_k(t_k)\ldots \int\limits_t^{t_{s_l+3}} \psi_{s_l+2}(t_{s_l+2}) \int\limits_t^{t_{s_l+2}} \psi_{s_l}(t_{s_l+1})\psi_{s_l+1}(t_{s_l+1})\times$$

$$\times \int\limits_t^{t_{s_l+1}} \psi_{s_l-1}(t_{s_l-1})\ldots \int\limits_t^{t_{s_1+3}} \psi_{s_1+2}(t_{s_1+2}) \int\limits_t^{t_{s_1+2}} \psi_{s_1}(t_{s_1+1})\psi_{s_1+1}(t_{s_1+1})\times$$

$$\times \int\limits_t^{t_{s_1+1}} \psi_{s_1-1}(t_{s_1-1})\ldots \int\limits_t^{t_2} \psi_1(t_1)d\mathbf{w}_{t_1}^{(i_1)}\ldots d\mathbf{w}_{t_{s_1-1}}^{(i_{s_1-1})}dt_{s_1+1}d\mathbf{w}_{t_{s_1+2}}^{(i_{s_1+2})}\ldots$$

$$\ldots d\mathbf{w}_{t_{s_l-1}}^{(i_{s_l-1})}dt_{s_l+1}d\mathbf{w}_{t_{s_l+2}}^{(i_{s_l+2})}\ldots d\mathbf{w}_{t_k}^{(i_k)}, \qquad (2.149)$$

$$J^*[\psi^{(k)}]_{T,t} = \int\limits_t^{*T} \psi_k(t_k)\ldots \int\limits_t^{*t_2} \psi_1(t_1)d\mathbf{w}_{t_1}^{(i_1)}\ldots d\mathbf{w}_{t_k}^{(i_k)}, \qquad (2.150)$$

$$J[\psi^{(k)}]_{T,t} = \int\limits_t^{T} \psi_k(t_k)\ldots \int\limits_t^{t_2} \psi_1(t_1)d\mathbf{w}_{t_1}^{(i_1)}\ldots d\mathbf{w}_{t_k}^{(i_k)}, \qquad (2.151)$$

где в (2.149)–(2.151) $\psi^{(k)} \stackrel{\rm def}{=} (\psi_k,\ldots,\psi_1)$, $\psi^{(1)} \stackrel{\rm def}{=} \psi_1$,

$$\mathcal{A}_{k,l} = \{(s_l,\ldots,s_1):\ s_l > s_{l-1}+1,\ldots,s_2 > s_1+1;$$

$$s_l,\ldots,s_1 = 1,\ldots,k-1\}, \qquad (2.152)$$

$(s_l,\ldots,s_1)\in\mathcal{A}_{k,l}$; $l=1,\ldots,\left[\frac{k}{2}\right]$; $i_s = 0,\ 1,\ldots,m$; $s=1,\ldots,k$; $[x]$ — целая часть числа x; $\mathbf{1}_A$ — индикатор множества A ($\mathbf{1}_A = 1$, если условие A выполнено и $\mathbf{1}_A = 0$ в противном случае).

Сформулируем теорему о связи повторных стохастических интегралов Ито и Стратоновича $J[\psi^{(k)}]_{T,t}$, $J^*[\psi^{(k)}]_{T,t}$ произвольной фиксированной кратности k.

Теорема 7. *Пусть* $\psi_i(\tau)$; $i=1,\ldots,k$ *— непрерывно дифференцируемые на промежутке* $[t,T]$ *функции. Тогда справедливо следующее соотношение между повторными стохастическими интегралами Ито и Стратоновича:*

$$J^*[\psi^{(k)}]_{T,t} = J[\psi^{(k)}]_{T,t} + \sum_{r=1}^{\left[\frac{k}{2}\right]} \frac{1}{2^r} \sum_{(s_r,\ldots,s_1)\in\mathcal{A}_{k,r}} J[\psi^{(k)}]_{T,t}^{s_r,\ldots,s_1}\ \ \textit{с в. 1}, \qquad (2.153)$$

где $\sum\limits_{\emptyset}$ *полагается равной нулю.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Докажем равенство (2.153) по индукции. Случай $k=1$ очевиден.

При $k=2$ из (2.153) получаем

$$J^*[\psi^{(2)}]_{T,t}=J[\psi^{(2)}]_{T,t}+\frac{1}{2}J[\psi^{(2)}]^1_{T,t}. \tag{2.154}$$

Покажем, что равенство (2.154) справедливо с вероятностью 1. Для этого рассмотрим процесс $\eta_{t_2,t}=\psi_2(t_2)J[\psi_1]_{t_2,t}$, $t_2\in[t,T]$, и найдем с помощью формулы Ито его стохастический дифференциал:

$$d\eta_{t_2,t}=J[\psi_1]_{t_2,t}d\psi_2(t_2)+\psi_1(t_2)\psi_2(t_2)d\mathbf{w}^{(i_1)}_{t_2}. \tag{2.155}$$

Из равенства (2.155) следует, что диффузионный коэффициент процесса $\eta_{t_2,t}, t_2\in[t,T]$, равен $\mathbf{1}_{\{i_1\ne 0\}}\psi_1(t_2)\psi_2(t_2)$. Далее по стандартному соотношению между стохастическими интегралами Стратоновича и Ито (см. разд. 7.2) с вероятностью 1 выводим соотношение (2.154). Таким образом, утверждение теоремы доказано при $k=1,\ 2$.

Предположим, что утверждение теоремы справедливо при некотором $k>2$, и докажем его справедливость при значении k, на единицу большем. В предположении индукции с вероятностью 1 имеем

$$J^*[\psi^{(k+1)}]_{T,t}=$$

$$=\int\limits_t^{*T}\psi_{k+1}(\tau)\Biggl\{J[\psi^k]_{\tau,t}+\sum_{r=1}^{\left[\frac{k}{2}\right]}\frac{1}{2^r}\sum_{(s_r,\ldots,s_1)\in\mathcal{A}_{k,r}}J[\psi^{(k)}]^{s_r,\ldots,s_1}_{\tau,t}\Biggr\}d\mathbf{w}^{(i_{k+1})}_{\tau}=$$

$$=\int\limits_t^{*T}\psi_{k+1}(\tau)J[\psi^{(k)}]_{\tau,t}d\mathbf{w}^{(i_{k+1})}_{\tau}+$$

$$+\sum_{r=1}^{\left[\frac{k}{2}\right]}\frac{1}{2^r}\sum_{(s_r,\ldots,s_1)\in\mathcal{A}_{k,r}}\int\limits_t^{*T}\psi_{k+1}(\tau)J[\psi^{(k)}]^{s_r,\ldots,s_1}_{\tau,t}d\mathbf{w}^{(i_{k+1})}_{\tau}. \tag{2.156}$$

Используя формулу Ито и стандартную связь стохастических интегралов Стратоновича и Ито, с вероятностью 1 получаем

$$\int\limits_t^{*T}\psi_{k+1}(\tau)J[\psi^{(k)}]_{\tau,t}d\mathbf{w}^{(i_{k+1})}_{\tau}=J[\psi^{(k+1)}]_{T,t}+\frac{1}{2}J[\psi^{(k+1)}]^k_{T,t}, \tag{2.157}$$

$$\int\limits_t^{*T} \psi_{k+1}(\tau) J[\psi^{(k)}]_{\tau,t}^{s_r,\ldots,s_1} d\mathbf{w}_\tau^{(i_{k+1})} =$$

$$= \begin{cases} J[\psi^{(k+1)}]_{T,t}^{s_r,\ldots,s_1} & \text{при } s_r = k-1, \\ J[\psi^{(k+1)}]_{T,t}^{s_r,\ldots,s_1} + \frac{1}{2} J[\psi^{(k+1)}]_{T,t}^{k,s_r,\ldots,s_1} & \text{при } s_r < k-1. \end{cases} \tag{2.158}$$

После подстановки (2.157) и (2.158) в (2.156) и перегруппировки слагаемых приходим к справедливым с вероятностью 1 соотношениям

$$J^*[\psi^{(k+1)}]_{T,t} = J[\psi^{(k+1)}]_{T,t} + \sum_{r=1}^{\left[\frac{k}{2}\right]} \frac{1}{2^r} \sum_{(s_r,\ldots,s_1)\in\mathcal{A}_{k+1,r}} J[\psi^{(k+1)}]_{T,t}^{s_r,\ldots,s_1} \tag{2.159}$$

при четном k и

$$J^*[\psi^{(k'+1)}]_{T,t} = J[\psi^{(k'+1)}]_{T,t} + \sum_{r=1}^{\left[\frac{k'}{2}\right]+1} \frac{1}{2^r} \sum_{(s_r,\ldots,s_1)\in\mathcal{A}_{k'+1,r}} J[\psi^{(k'+1)}]_{T,t}^{s_r,\ldots,s_1} \tag{2.160}$$

при $k' = k+1$ нечетном. Из (2.159) и (2.160) с вероятностью 1 имеем

$$J^*[\psi^{(k+1)}]_{T,t} = J[\psi^{(k+1)}]_{T,t} + \sum_{r=1}^{\left[\frac{k+1}{2}\right]} \frac{1}{2^r} \sum_{(s_r,\ldots,s_1)\in\mathcal{A}_{k+1,r}} J[\psi^{(k+1)}]_{T,t}^{s_r,\ldots,s_1}. \tag{2.161}$$

Соотношение (2.161) завершает доказательство теоремы. □

Рассмотрим стохастический интеграл вида (1.12) и найдем для него удобное для дальнейших рассуждений представление.

С этой целью введем ряд обозначений. Пусть

$$S_N^{(k)}(a) = \sum_{j_k=0}^{N-1} \ldots \sum_{j_1=0}^{j_2-1} \sum_{(j_1,\ldots,j_k)} a_{(j_1,\ldots,j_k)},$$

$$\mathcal{C}_{s_r}\ldots\mathcal{C}_{s_1} S_N^{(k)}(a) = \sum_{j_k=0}^{N-1} \ldots \sum_{j_{s_r+1}=0}^{j_{s_r+2}-1} \sum_{j_{s_r-1}=0}^{j_{s_r+1}-1} \ldots \sum_{j_{s_1+1}=0}^{j_{s_1+2}-1} \sum_{j_{s_1-1}=0}^{j_{s_1+1}-1} \ldots \sum_{j_1=0}^{j_2-1} \times$$

$$\times \sum_{\prod\limits_{l=1}^{r} \mathbf{I}_{j_{s_l},j_{s_l+1}}(j_1,\ldots,j_k)} a_{\prod\limits_{l=1}^{r} \mathbf{I}_{j_{s_l},j_{s_l+1}}(j_1,\ldots,j_k)},$$

где

$$\prod_{l=1}^{r} \mathbf{I}_{j_{s_l},j_{s_l+1}}(j_1,\ldots,j_k) \stackrel{\text{def}}{=} \mathbf{I}_{j_{s_r},j_{s_r+1}} \ldots \mathbf{I}_{j_{s_1},j_{s_1+1}}(j_1,\ldots,j_k),$$

$$\mathcal{C}_{s_0}\ldots\mathcal{C}_{s_1}S_N^{(k)}(a)=S_N^{(k)}(a);\ \prod_{l=1}^{0}\mathbf{I}_{j_{s_l},j_{s_l+1}}(j_1,\ldots,j_k)=(j_1,\ldots,j_k);$$

$$\mathbf{I}_{j_l,j_{l+1}}(j_{q_1},\ldots,j_{q_2},j_l,j_{q_3},\ldots,j_{q_{k-2}},j_l,j_{q_{k-1}},\ldots,j_{q_k})\stackrel{\rm def}{=}$$
$$\stackrel{\rm def}{=}(j_{q_1},\ldots,j_{q_2},j_{l+1},j_{q_3},\ldots,j_{q_{k-2}},j_{l+1},j_{q_{k-1}},\ldots,j_{g_k});$$

здесь $l=1,\ 2,\ldots;\ l\ne q_1,\ldots,q_2,q_3,\ldots,q_{k-2},q_{k-1},\ldots,q_k=1,\ 2,\ldots;$ $s_1,\ldots,s_r=1,\ldots,k-1;\ s_r>\ldots>s_1;\ a_{(j_{q_1},\ldots,j_{q_k})}$ — скаляры; $q_1,\ldots,q_k=1,\ldots,k$; выражение $\sum\limits_{(j_{q_1},\ldots,j_{q_k})}$ означает сумму по всевозможным перестановкам $(j_{q_1},\ldots,j_{q_k})$.

По индукции нетрудно доказать следующее равенство:

$$\sum_{j_k=0}^{N-1}\ldots\sum_{j_1=0}^{N-1}a_{(j_1,\ldots,j_k)}=\sum_{r=0}^{k-1}\sum_{\substack{s_r,\ldots,s_1=1\\ s_r>\ldots>s_1}}^{k-1}\mathcal{C}_{s_r}\ldots\mathcal{C}_{s_1}S_N^{(k)}(a),\qquad(2.162)$$

где $k=1,\ 2,\ldots$; сумма по пустому множеству полагается равной 1.

В дальнейшем мы будем отождествлять следующие записи:

$$a_{(j_1,\ldots,j_k)}=a_{(j_1\ldots j_k)}=a_{j_1\ldots j_k}.$$

В частности, из (2.162) при $k=2,\ 3,\ 4$ получим следующие формулы

$$\sum_{j_2=0}^{N-1}\sum_{j_1=0}^{N-1}a_{(j_1,j_2)}=S_N^{(2)}(a)+\mathcal{C}_1S_N^{(2)}(a)=$$
$$=\sum_{j_2=0}^{N-1}\sum_{j_1=0}^{j_2-1}\sum_{(j_1,j_2)}a_{(j_1j_2)}+\sum_{j_2=0}^{N-1}a_{(j_2j_2)}=$$
$$=\sum_{j_2=0}^{N-1}\sum_{j_1=0}^{j_2-1}(a_{j_1j_2}+a_{j_2j_1})+\sum_{j_2=0}^{N-1}a_{j_2j_2};$$

$$\sum_{j_3=0}^{N-1}\sum_{j_2=0}^{N-1}\sum_{j_1=0}^{N-1}a_{(j_1,j_2,j_3)}=S_N^{(3)}(a)+\mathcal{C}_1S_N^{(3)}(a)+$$
$$+\mathcal{C}_2S_N^{(3)}(a)+\mathcal{C}_2\mathcal{C}_1S_N^{(3)}(a)=$$
$$=\sum_{j_3=0}^{N-1}\sum_{j_2=0}^{j_3-1}\sum_{j_1=0}^{j_2-1}\sum_{(j_1,j_2,j_3)}a_{(j_1j_2j_3)}+\sum_{j_3=0}^{N-1}\sum_{j_2=0}^{j_3-1}\sum_{(j_2,j_2,j_3)}a_{(j_2j_2j_3)}+$$
$$+\sum_{j_3=0}^{N-1}\sum_{j_1=0}^{j_3-1}\sum_{(j_1,j_3,j_3)}a_{(j_1j_3j_3)}+\sum_{j_3=0}^{N-1}a_{(j_3j_3j_3)}=$$

$$= \sum_{j_3=0}^{N-1}\sum_{j_2=0}^{j_3-1}\sum_{j_1=0}^{j_2-1}\left(a_{j_1j_2j_3}+a_{j_1j_3j_2}+a_{j_2j_1j_3}+a_{j_2j_3j_1}+a_{j_3j_2j_1}+a_{j_3j_1j_2}\right)+$$

$$+\sum_{j_3=0}^{N-1}\sum_{j_2=0}^{j_3-1}\left(a_{j_2j_2j_3}+a_{j_2j_3j_2}+a_{j_3j_2j_2}\right)+$$

$$+\sum_{j_3=0}^{N-1}\sum_{j_1=0}^{j_3-1}\left(a_{j_1j_3j_3}+a_{j_3j_1j_3}+a_{j_3j_3j_1}\right)+$$

$$+\sum_{j_3=0}^{N-1}a_{j_3j_3j_3}. \qquad (2.163)$$

$$\sum_{j_4=0}^{N-1}\sum_{j_3=0}^{N-1}\sum_{j_2=0}^{N-1}\sum_{j_1=0}^{N-1}a_{(j_1,j_2,j_3,j_4)} = S_N^{(4)}(a)+\mathcal{C}_1S_N^{(4)}(a)+\mathcal{C}_2S_N^{(4)}(a)+$$

$$+\mathcal{C}_3S_N^{(4)}(a)+\mathcal{C}_2\mathcal{C}_1S_N^{(4)}(a)+\mathcal{C}_3\mathcal{C}_1S_N^{(4)}(a)+\mathcal{C}_3\mathcal{C}_2S_N^{(4)}(a)+\mathcal{C}_3\mathcal{C}_2\mathcal{C}_1S_N^{(4)}(a)=$$

$$=\sum_{j_4=0}^{N-1}\sum_{j_3=0}^{j_4-1}\sum_{j_2=0}^{j_3-1}\sum_{j_1=0}^{j_2-1}\sum_{(j_1,j_2,j_3,j_4)}a_{(j_1j_2j_3j_4)}+\sum_{j_4=0}^{N-1}\sum_{j_3=0}^{j_4-1}\sum_{j_2=0}^{j_3-1}\sum_{(j_2,j_2,j_3,j_4)}a_{(j_2j_2j_3j_4)}+$$

$$+\sum_{j_4=0}^{N-1}\sum_{j_3=0}^{j_4-1}\sum_{j_1=0}^{j_3-1}\sum_{(j_1,j_3,j_3,j_4)}a_{(j_1j_3j_3j_4)}+\sum_{j_4=0}^{N-1}\sum_{j_2=0}^{j_4-1}\sum_{j_1=0}^{j_2-1}\sum_{(j_1,j_2,j_4,j_4)}a_{(j_1j_2j_4j_4)}+$$

$$+\sum_{j_4=0}^{N-1}\sum_{j_3=0}^{j_4-1}\sum_{(j_3,j_3,j_3,j_4)}a_{(j_3j_3j_3j_4)}+\sum_{j_4=0}^{N-1}\sum_{j_2=0}^{j_4-1}\sum_{(j_2,j_2,j_4,j_4)}a_{(j_2j_2j_4j_4)}+$$

$$+\sum_{j_4=0}^{N-1}\sum_{j_1=0}^{j_4-1}\sum_{(j_1,j_4,j_4,j_4)}a_{(j_1j_4j_4j_4)}+\sum_{j_4=0}^{N-1}a_{j_4j_4j_4j_4}=$$

$$=\sum_{j_4=0}^{N-1}\sum_{j_3=0}^{j_4-1}\sum_{j_2=0}^{j_3-1}\sum_{j_1=0}^{j_2-1}\left(a_{j_1j_2j_3j_4}+a_{j_1j_2j_4j_3}+a_{j_1j_3j_2j_4}+a_{j_1j_3j_4j_2}+\right.$$

$$+a_{j_1j_4j_3j_2}+a_{j_1j_4j_2j_3}+a_{j_2j_1j_3j_4}+a_{j_2j_1j_4j_3}+a_{j_2j_4j_1j_3}+a_{j_2j_4j_3j_1}+a_{j_2j_3j_1j_4}+$$

$$+a_{j_2j_3j_4j_1}+a_{j_3j_1j_2j_4}+a_{j_3j_1j_4j_2}+a_{j_3j_2j_1j_4}+a_{j_3j_2j_4j_1}+a_{j_3j_4j_1j_2}+a_{j_3j_4j_2j_1}+$$

$$\left.+a_{j_4j_1j_2j_3}+a_{j_4j_1j_3j_2}+a_{j_4j_2j_1j_3}+a_{j_4j_2j_3j_1}+a_{j_4j_3j_1j_2}+a_{j_4j_3j_2j_1}\right)+$$

$$+\sum_{j_4=0}^{N-1}\sum_{j_3=0}^{j_4-1}\sum_{j_2=0}^{j_3-1}\left(a_{j_2j_2j_3j_4}+a_{j_2j_2j_4j_3}+a_{j_2j_3j_2j_4}+a_{j_2j_4j_2j_3}+a_{j_2j_3j_4j_2}+a_{j_2j_4j_3j_2}+\right.$$

$$\left.+a_{j_3j_2j_2j_4}+a_{j_4j_2j_2j_3}+a_{j_3j_2j_4j_2}+a_{j_4j_2j_3j_2}+a_{j_4j_3j_2j_2}+a_{j_3j_4j_2j_2}\right)+$$

$$+\sum_{j_4=0}^{N-1}\sum_{j_3=0}^{j_4-1}\sum_{j_1=0}^{j_3-1}\left(a_{j_3j_3j_1j_4}+a_{j_3j_3j_4j_1}+a_{j_3j_1j_3j_4}+a_{j_3j_4j_3j_1}+a_{j_3j_4j_1j_3}+a_{j_3j_1j_4j_3}+\right.$$

$$\left.+a_{j_1j_3j_3j_4}+a_{j_4j_3j_3j_1}+a_{j_4j_3j_1j_3}+a_{j_1j_3j_4j_3}+a_{j_1j_4j_3j_3}+a_{j_4j_1j_3j_3}\right)+$$

$$+\sum_{j_4=0}^{N-1}\sum_{j_2=0}^{j_4-1}\sum_{j_1=0}^{j_2-1}\left(a_{j_4j_4j_1j_2}+a_{j_4j_4j_2j_1}+a_{j_4j_1j_4j_2}+a_{j_4j_2j_4j_1}+a_{j_4j_2j_1j_4}+a_{j_4j_1j_2j_4}+\right.$$

$$\left.+a_{j_1j_4j_4j_2}+a_{j_2j_4j_4j_1}+a_{j_2j_4j_1j_4}+a_{j_1j_4j_2j_4}+a_{j_1j_2j_4j_4}+a_{j_2j_1j_4j_4}\right)+$$

$$+\sum_{j_4=0}^{N-1}\sum_{j_3=0}^{j_4-1}\left(a_{j_3j_3j_3j_4}+a_{j_3j_3j_4j_3}+a_{j_3j_4j_3j_3}+a_{j_4j_3j_3j_3}\right)+$$

$$+\sum_{j_4=0}^{N-1}\sum_{j_2=0}^{j_4-1}\left(a_{j_2j_2j_4j_4}+a_{j_2j_4j_2j_4}+a_{j_2j_4j_4j_2}+a_{j_4j_2j_2j_4}+a_{j_4j_2j_4j_2}+a_{j_4j_4j_2j_2}\right)+$$

$$+\sum_{j_4=0}^{N-1}\sum_{j_1=0}^{j_4-1}\left(a_{j_1j_4j_4j_4}+a_{j_4j_1j_4j_4}+a_{j_4j_4j_1j_4}+a_{j_4j_4j_4j_1}\right)+$$

$$+\sum_{j_4=0}^{N-1}a_{j_4j_4j_4j_4}.$$

Возможно формула (2.162) при произвольном k впервые замечена автором. Соотношение (2.162) будет часто использоваться в дальнейшем.

Положим $a_{(j_1,\ldots,j_k)}=\Phi\left(\tau_{j_1},\ldots,\tau_{j_k}\right)\prod\limits_{l=1}^{k}\Delta\mathbf{w}_{\tau_{j_l}}^{(i_l)}$. Тогда из (1.12) и (2.162) имеем

$$J[\Phi]_{T,t}^{(k)}=\sum_{r=0}^{k-1}\sum_{(s_r,\ldots,s_1)\in\mathcal{A}_{k,r}}\times$$

$$\times \underset{N\to\infty}{\text{l.i.m.}}\sum_{j_k=0}^{N-1}\ldots\sum_{j_{s_r+1}=0}^{j_{s_r+2}-1}\sum_{j_{s_r-1}=0}^{j_{s_r+1}-1}\ldots\sum_{j_{s_1+1}=0}^{j_{s_1+2}-1}\sum_{j_{s_1-1}=0}^{j_{s_1+1}-1}\ldots\sum_{j_1=0}^{j_2-1}\sum_{\prod\limits_{l=1}^{r}\mathbf{I}_{j_{s_l},j_{s_l+1}}(j_1,\ldots,j_k)}\times$$

$$\times\Bigl[\Phi\left(\tau_{j_1},\ldots,\tau_{j_{s_1-1}},\tau_{j_{s_1+1}},\tau_{j_{s_1+1}},\ldots,\tau_{j_{s_r-1}},\tau_{j_{s_r+1}},\tau_{j_{s_r+1}},\ldots,\tau_{j_k}\right)\times$$

$$\times\Delta\mathbf{w}_{\tau_{j_1}}^{(i_1)}\ldots\Delta\mathbf{w}_{\tau_{j_{s_1-1}}}^{(i_{s_1-1})}\Delta\mathbf{w}_{\tau_{j_{s_1+1}}}^{(i_{s_1})}\Delta\mathbf{w}_{\tau_{j_{s_1+1}}}^{(i_{s_1+1})}\ldots$$

$$\ldots\Delta\mathbf{w}_{\tau_{j_{s_r-1}}}^{(i_{s_r-1})}\Delta\mathbf{w}_{\tau_{j_{s_r+1}}}^{(i_{s_r})}\Delta\mathbf{w}_{\tau_{j_{s_r+1}}}^{(i_{s_r+1})}\ldots\Delta\mathbf{w}_{\tau_{j_k}}^{(i_k)}\Bigr]=$$

$$=\sum_{r=0}^{k-1}\sum_{(s_r,\ldots,s_1)\in\mathcal{A}_{k,r}}I[\Phi]_{T,t}^{(k)s_1,\ldots,s_r}\ \text{с в.1,}\qquad(2.164)$$

где

$$I[\Phi]_{T,t}^{(k)s_1,\ldots,s_r}=\int\limits_t^T\ldots\int\limits_t^{t_{s_r+3}}\int\limits_t^{t_{s_r+2}}\int\limits_t^{t_{s_r}}\ldots\int\limits_t^{t_{s_1+3}}\int\limits_t^{t_{s_1+2}}\int\limits_t^{t_{s_1}}\ldots\int\limits_t^{t_2}\sum_{\prod\limits_{l=1}^{r}\mathbf{I}_{t_{s_l},t_{s_l+1}}(t_1,\ldots,t_k)}\times$$

$$\times\Bigl[\Phi\left(t_1,\ldots,t_{s_1-1},t_{s_1+1},t_{s_1+1},\ldots,t_{s_r-1},t_{s_r+1},t_{s_r+1},\ldots,t_k\right)\times$$

$$\times d\mathbf{w}_{t_1}^{(i_1)}\ldots d\mathbf{w}_{t_{s_1-1}}^{(i_{s_1-1})}d\mathbf{w}_{t_{s_1+1}}^{(i_{s_1})}d\mathbf{w}_{t_{s_1+1}}^{(i_{s_1+1})}d\mathbf{w}_{t_{s_1+2}}^{(i_{s_1+2})}\ldots$$

$$\ldots d\mathbf{w}_{t_{s_r-1}}^{(i_{s_r-1})}d\mathbf{w}_{t_{s_r+1}}^{(i_{s_r})}d\mathbf{w}_{t_{s_r+1}}^{(i_{s_r+1})}d\mathbf{w}_{t_{s_r+2}}^{(i_{s_r+2})}\ldots d\mathbf{w}_{t_k}^{(i_k)}\Bigr], \qquad (2.165)$$

и $\sum\limits_{\emptyset}\stackrel{\rm def}{=}1,\ k\geq 2$; множество $\mathcal{A}_{k,r}$ определяется в теореме 7.

З а м е ч а н и е 3. *Слагаемые в правой части* (2.165) *следует понимать так: для каждой перестановки из набора* $\prod\limits_{l=1}^{r}\mathbf{I}_{t_{s_l},t_{s_l+1}}(t_1,\ldots,t_k)$ *следует осуществить замену в правой части* (2.165) *всех пар* (*их ровно* r) *дифференциалов с одинаковыми нижними индексами вида* $d\mathbf{w}_{t_p}^{(i)}d\mathbf{w}_{t_p}^{(j)}$ *на величины* $\mathbf{1}_{\{i=j\neq 0\}}dt_p$.

Используя стандартные оценки для моментов стохастических интегралов, получаем:

$$\mathsf{M}\left\{\left|J[\Phi]_{T,t}^{(k)}\right|^{2n}\right\}\leq C_{nk}\sum_{r=0}^{k-1}\ \sum_{(s_r,\ldots,s_1)\in\mathcal{A}_{k,r}}\mathsf{M}\left\{\left|I[\Phi]_{T,t}^{(k)s_1,\ldots,s_r}\right|^{2n}\right\}, \qquad (2.166)$$

$$\mathsf{M}\left\{\left|I[\Phi]_{T,t}^{(k)s_1,\ldots,s_r}\right|^{2n}\right\}\leq$$

$$\leq C_{nk}^{s_1\ldots s_r}\int\limits_t^T\ldots\int\limits_t^{t_{s_r+3}}\int\limits_t^{t_{s_r+2}}\int\limits_t^{t_{s_r}}\ldots\int\limits_t^{t_{s_1+3}}\int\limits_t^{t_{s_1+2}}\int\limits_t^{t_{s_1}}\ldots\int\limits_t^{t_2}\ \sum_{\prod\limits_{l=1}^{r}\mathbf{I}_{t_{s_l},t_{s_l+1}}(t_1,\ldots,t_k)}\times$$

$$\times\Phi^{2n}\left(t_1,\ldots,t_{s_1-1},t_{s_1+1},t_{s_1+1},\ldots,t_{s_r-1},t_{s_r+1},t_{s_r+1},\ldots,t_k\right)\times$$

$$\times dt_1\ldots dt_{s_1-1}dt_{s_1+1}dt_{s_1+2}\ldots dt_{s_r-1}dt_{s_r+1}dt_{s_r+2}\ldots dt_k, \qquad (2.167)$$

где перестановки при суммировании в (2.167) осуществляются только в $\Phi^{2n}(\ldots)$; $C_{nk},\ C_{nk}^{s_1\ldots s_r}<\infty$.

Лемма 4. *В условиях теоремы* 5

$$J[K^*]_{T,t}^{(k)}=J^*[\psi^{(k)}]_{T,t}\ \text{ с в.1.} \qquad (2.168)$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Подставляя (2.145) в (1.12), используя лемму 1 и замечание 1, нетрудно увидеть, что с вероятностью 1

$$J[K^*]_{T,t}^{(k)}=J[\psi^{(k)}]_{T,t}+\sum_{r=1}^{\left[\frac{k}{2}\right]}\frac{1}{2^r}\sum_{(s_r,\ldots,s_1)\in\mathcal{A}_{k,r}}J[\psi^{(k)}]_{T,t}^{s_r,\ldots,s_1}, \qquad (2.169)$$

где сохранен смысл обозначений теоремы 7. Из (2.169) согласно теореме 7 вытекает утверждение леммы. □.

Воспользовавшись леммами из доказательства теоремы 1, получаем:

$$J^*[\psi^{(k)}]_{T,t} = \sum_{j_1=0}^{p_1} \ldots \sum_{j_k=0}^{p_k} C_{j_k \ldots j_1} \prod_{l=1}^{k} \zeta_{(j_l)T,t}^{(i_l)} + J[R_{p_1 \ldots p_k}]_{T,t}^{(k)} \text{ с в.1},$$

где $J[R_{p_1 \ldots p_k}]_{T,t}^{(k)}$ определен в соответствии с (1.12) и

$$R_{p_1 \ldots p_k}(t_1, \ldots, t_k) = K^*(t_1, \ldots, t_k) - \sum_{j_1=0}^{p_1} \ldots \sum_{j_k=0}^{p_k} C_{j_k \ldots j_1} \prod_{l=1}^{k} \phi_{j_l}(t_l), \tag{2.170}$$

$\zeta_{(j_l)T,t}^{(i_l)} = \int\limits_t^T \phi_{j_l}(s) d\mathbf{w}_s^{(i_l)},\ p_1, \ldots, p_k < \infty.$

При этом согласно теореме 6 поточечно в $(t, T)^k$ выполняется следующее равенство:

$$\lim_{p_1 \to \infty} \ldots \lim_{p_k \to \infty} R_{p_1 \ldots p_k}(t_1, \ldots, t_k) = 0. \tag{2.171}$$

Лемма 5. *В условиях теоремы* 5

$$\lim_{p_1 \to \infty} \ldots \lim_{p_k \to \infty} \mathsf{M} \left\{ \left| J[R_{p_1 \ldots p_k}]_{T,t}^{(k)} \right|^{2n} \right\} = 0,\ n \in N.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Согласно (2.145) и (2.170) во всех внутренних точках гиперкуба $[t, T]^k$ имеем

$$R_{p_1 \ldots p_k}(t_1, \ldots, t_k) =$$

$$= \prod_{l=1}^{k} \psi_l(t_l) \Bigg(\prod_{l=1}^{k-1} \mathbf{1}_{\{t_l < t_{l+1}\}} + \sum_{r=1}^{k-1} \frac{1}{2^r} \sum_{\substack{s_r, \ldots, s_1 = 1 \\ s_r > \ldots > s_1}}^{k-1} \prod_{l=1}^{r} \mathbf{1}_{\{t_{s_l} = t_{s_l + 1}\}} \prod_{\substack{l=1 \\ l \neq s_1, \ldots, s_r}}^{k-1} \mathbf{1}_{\{t_l < t_{l+1}\}} \Bigg) -$$

$$- \sum_{j_1=0}^{p_1} \ldots \sum_{j_k=0}^{p_k} C_{j_k \ldots j_1} \prod_{l=1}^{k} \phi_{j_l}(t_l). \tag{2.172}$$

В силу (2.172) функция $R_{p_1 \ldots p_k}(t_1, \ldots, t_k)$ непрерывна в областях интегрирования стохастических интегралов в правой части (2.164) и ограничена на границах этих областей (напомним, что повторный ряд

$$\sum_{j_1=0}^{\infty} \ldots \sum_{j_k=0}^{\infty} C_{j_k \ldots j_1} \prod_{l=1}^{k} \phi_{j_l}(t_l)$$

сходится на границе гиперкуба $[t, T]^k$). Тогда, беря $R_{p_1 \ldots p_k}(t_1, \ldots, t_k)$ вместо $\Phi(t_1, \ldots, t_k)$ в (2.166), (2.167) и осуществляя повторный предельный переход

$\lim\limits_{p_1 \to \infty} \ldots \lim\limits_{p_k \to \infty}$ под знаками интегралов в этих оценках (подобно тому, как это сделано в двумерном случае), с учетом (2.171), получаем требуемое. Лемма 5, а вместе с ней и теорема 5 доказаны. □

Отметим, что согласно теореме 5 можно аппроксимировать повторный стохастический интеграл Стратоновича $J^*[\psi^{(k)}]_{T,t}$ представлением вида:

$$J^*[\psi^{(k)}]_{T,t}^{p_1 \ldots p_k} = \sum_{j_1=0}^{p_1} \ldots \sum_{j_k=0}^{p_k} C_{j_k \ldots j_1} \prod_{l=1}^{k} \zeta_{(j_l)T,t}^{(i_l)};\ p_1, \ldots, p_k < \infty. \qquad (2.173)$$

Глава 3

Разложения повторных стохастических интегралов других типов, основанные на обобщенных кратных рядах Фурье

3.1 Разложение повторных стохастических интегралов по мартингальным пуассоновским мерам

Введем в рассмотрение следующий повторный стохастический интеграл

$$
P[\chi^{(k)}]_{T,t} = \int\limits_{t}^{T}\int\limits_{X} \chi_k(t_k, \mathbf{y}_k) \ldots \int\limits_{t}^{t_2}\int\limits_{X} \chi_1(t_1, \mathbf{y}_1) \tilde{\nu}^{(i_1)}(dt_1, d\mathbf{y}_1) \ldots \tilde{\nu}^{(i_k)}(dt_k, d\mathbf{y}_k), \tag{3.1}
$$

где $\Re^n \stackrel{\rm def}{=} X$; $i_1, \ldots, i_k = 0,\ 1, \ldots, m$; $\nu^{(i)}(dt, d\mathbf{y})$ — независимые пуассоновские меры, заданные в $[0, T] \times X$ (см. разд. 7.6); $\tilde{\nu}^{(i)}(dt, d\mathbf{y}) = \nu^{(i)}(dt, d\mathbf{y}) - \Pi(d\mathbf{y})dt$ — мартингальные пуассоновские меры; $i = 1, \ldots, m$; $\tilde{\nu}^{(0)}(dt, d\mathbf{y}) \stackrel{\rm def}{=} \Pi(d\mathbf{y})dt$; $\chi_l(\tau, \mathbf{y}) = \psi_l(\tau)\varphi_l(\mathbf{y})$; $\psi_l(\tau) : [t, T] \to \Re^1$; $\varphi_l(\mathbf{y}) : X \to \Re^1$; $\chi_l(s, \mathbf{y}) \in H_2(\Pi, [t, T])$, $l = 1, \ldots, k$; определение класса $H_2(\Pi, [t, T])$ приводится в разд. 7.6.

Теорема 8. *Пусть выполнены следующие условия:*

1. $\psi_i(\tau)$; $i = 1,\ 2, \ldots, k$ *— непрерывные на промежутке* $[t, T]$ *функции.*

2. $\{\phi_j(x)\}_{j=0}^{\infty}$ *— полная ортонормированная система функций в пространстве* $L_2([t, T])$, *каждая функция которой при конечном* j *удовлетворяет условию* $(\star)$.

3. $\int\limits_X |\varphi_l(\mathbf{y})|^s \Pi(dy) < \infty;\ l = 1, \ldots, k;\ s = 1, 2, \ldots, 2^{k+1}.$

Тогда повторный стохастический интеграл по мартингальным пуассоновским мерам $P[\chi^{(k)}]_{T,t}$ разлагается в сходящийся в среднеквадратическом смысле кратный ряд

$$P[\chi^{(k)}]_{T,t} = \sum_{j_1,\ldots,j_k=0}^{\infty} C_{j_k\ldots j_1}\Biggl(\prod_{l=1}^{k}\pi^{(l,i_l)}_{(j_l)T,t} -$$

$$-\underset{N\to\infty}{\text{l.i.m.}} \sum_{(l_1,\ldots,l_k)\in\mathcal{G}_k}\prod_{r=1}^{k}\phi_{j_r}(\tau_{l_r})\int\limits_X \varphi_r(\mathbf{y})\tilde{\nu}^{(i_r)}([\tau_{l_r},\tau_{l_r+1}), d\mathbf{y})\Biggr), \tag{3.2}$$

где $\mathcal{G}_k = \mathcal{H}_k\backslash\mathcal{L}_k;\ \mathcal{H}_k = \{(l_1,\ldots,l_k):\ l_1,\ldots,l_k = 0,\ 1,\ldots,N-1\},$

$$\mathcal{L}_k = \Bigl\{(l_1,\ldots,l_k):\ l_1,\ldots,l_k = 0,\ 1,\ldots,N-1;$$
$$l_g \neq l_r (g \neq r);\ g, r = 1,\ldots,k\Bigr\};$$

$\pi^{(l,i_l)}_{(j)T,t} = \int\limits_t^T\int\limits_X \phi_j(\tau)\varphi_l(\mathbf{y})\tilde{\nu}^{(i_l)}(d\tau, d\mathbf{y})$ — *независимые при различных* $i_l \neq 0$ *и некорелированные при различных* j *случайные величины;*

$$C_{j_k\ldots j_1} = \int\limits_{[t,T]^k} K(t_1,\ldots,t_k)\prod_{l=1}^{k}\phi_{j_l}(t_l)dt_1\ldots dt_k;$$

$$K(t_1,\ldots,t_k) = \begin{cases}\psi_1(t_1)\ldots\psi_k(t_k),\ t_1<\ldots<t_k\\ 0,\ \textit{иначе}\end{cases};\ t_1,\ldots,t_k \in [t,T].$$

Данная теорема доказывается также, как и теорема 1. Небольшие отличия будут лишь в установлении аналогов лемм 1 – 3 для рассматриваемого случая.

Лемма 6. *Пусть* $\psi_l(\tau)$ — *непрерывные на промежутке* $[t,T]$ *функции, а функции* $\varphi_l(\mathbf{y})$ *таковы, что* $\int\limits_X |\varphi_l(\mathbf{y})|^p \Pi(d\mathbf{y}) < \infty;\ p = 1,\ 2;\ l = 1,\ldots,k.$ *Тогда с вероятностью 1*

$$P[\bar{\chi}^{(k)}]_{T,t} = \underset{N\to\infty}{\text{l.i.m.}}\sum_{j_k=0}^{N-1}\ldots\sum_{j_1=0}^{j_2-1}\prod_{l=1}^{k}\int\limits_X \chi_l(\tau_{j_l},\mathbf{y})\bar{\nu}^{(i_l)}([\tau_{j_l},\tau_{j_l+1}), d\mathbf{y}), \tag{3.3}$$

где $\{\tau_{j_l}\}_{j_l=0}^{N-1}$ — *разбиение промежутка* $[t,T]$, *которое удовлетворяет условию (1.7),* $\bar{\nu}^{(i)}([\tau,s), d\mathbf{y}) = \tilde{\nu}^{(i)}([\tau,s), d\mathbf{y})$ *или* $\nu^{(i)}([\tau,s), d\mathbf{y})$; *интеграл* $P[\bar{\chi}^{(k)}]_{T,t}$ *отличается от интеграла* $P[\chi^{(k)}]_{T,t}$ *тем, что в* $P[\bar{\chi}^{(k)}]_{T,t}$ *вместо* $\tilde{\nu}^{(i_l)}(dt_l, d\mathbf{y}_l)$ *стоят* $\bar{\nu}^{(i_l)}(dt_l, d\mathbf{y}_l)$; $l = 1,\ldots,k.$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Используя оценки моментов стохастических интегралов по пуассоновским мерам (см. разд. 7.7), а также условия леммы 6, нетрудно заметить, что интегральная сумма интеграла $P[\bar{\chi}^{(k)}]_{T,t}$ в условиях леммы 6 может быть представлена в виде допредельного выражения из правой части (3.3) и величины, которая стремится в среднеквадратическом смысле к нулю при $N\to\infty$. □

Введем в рассмотрение следующие повторные стохастические интегралы:

$$\underset{N\to\infty}{\text{l.i.m.}}\ \sum_{j_1,\ldots,j_k=0}^{N-1}\Phi(\tau_{j_1},\ldots,\tau_{j_k})\prod_{l=1}^{k}\int\limits_{X}\varphi_l(\mathbf{y})\tilde{\nu}^{(i_l)}([\tau_{j_l},\tau_{j_l+1}),d\mathbf{y})\stackrel{\text{def}}{=}P[\Phi]_{T,t}^{(k)},$$

$$\int\limits_{t}^{T}\ldots\int\limits_{t}^{t_2}\Phi(t_1,\ldots,t_k)\int\limits_{X}\varphi_1(\mathbf{y})\tilde{\nu}^{(i_1)}(dt_1,d\mathbf{y})\ldots\int\limits_{X}\varphi_k(\mathbf{y})\tilde{\nu}^{(i_k)}(dt_k,d\mathbf{y})\stackrel{\text{def}}{=}$$
$$\stackrel{\text{def}}{=}\hat{P}[\Phi]_{T,t}^{(k)},$$

где сохранен смысл обозначений, входящих в (3.3); $\Phi(t_1,\ldots,t_k):[t,T]^k\to\Re^1$ — ограниченная неслучайная функция.

Заметим, что если функции $\varphi_l(\mathbf{y})$; $l=1,\ldots,k$ удовлетворяют условиям леммы 6, а функция $\Phi(t_1,\ldots,t_k)$ непрерывна, то для интеграла $\hat{P}[\Phi]_{T,t}^{(k)}$ справедливо с вероятностью 1 равенство типа (3.3).

Лемма 7. *Пусть для* $l=1,\ldots,k$ *выполнены условия:* $g_l(\tau,\mathbf{y})=h_l(\tau)\varphi_l(\mathbf{y})$; *функции* $h_l(\tau):[t,T]\to\Re^1$ — *удовлетворяют условию* ($\star$), *а функции* $\varphi_l(\mathbf{y}):X\to\Re^1$ *удовлетворяют условию* $\int\limits_X|\varphi_l(\mathbf{y})|^p\,\Pi(d\mathbf{y})<\infty$; $p=1,2,3,\ldots,2^{k+1}$. *Тогда*

$$\prod_{l=1}^{k}\int\limits_{t}^{T}\int\limits_{X}g_l(s,\mathbf{y})\bar{\nu}^{(i_l)}(ds,d\mathbf{y})=P[\Phi]_{T,t}^{(k)}\ \text{с в.1},\ \ \Phi(t_1,\ldots,t_k)=\prod_{l=1}^{k}h_l(t_l).$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Введем обозначения:

$$J[\bar{g}_l]_N\stackrel{\text{def}}{=}\sum_{j=0}^{N-1}\int\limits_{X}g_l(\tau_j,\mathbf{y})\bar{\nu}^{(i_l)}([\tau_j,\tau_{j+1}),d\mathbf{y}),\ \ J[\bar{g}_l]_{T,t}\stackrel{\text{def}}{=}\int\limits_{t}^{T}\int\limits_{X}g_l(s,\mathbf{y})\bar{\nu}^{(i_l)}(ds,d\mathbf{y}).$$

Заметим, что

$$\prod_{l=1}^{k}J[\bar{g}_l]_N-\prod_{l=1}^{k}J[\bar{g}_l]_{T,t}=\sum_{l=1}^{k}\left(\prod_{q=1}^{l-1}J[\bar{g}_q]_{T,t}\right)\left(J[\bar{g}_l]_N-J[\bar{g}_l]_{T,t}\right)\left(\prod_{q=l+1}^{k}J[\bar{g}_q]_N\right).$$

Используя неравенства Минковского и Коши–Буняковского, вместе с оценками из разд. 7.7 и условиями леммы 7, получаем

$$\left(\mathsf{M}\left\{\left|\prod_{l=1}^{k} J[\bar{g}_l]_N - \prod_{l=1}^{k} J[\bar{g}_l]_{T,t}\right|^2\right\}\right)^{\frac{1}{2}} \le C_k \sum_{l=1}^{k} \left(\mathsf{M}\left\{\left|J[\bar{g}_l]_N - J[\bar{g}_l]_{T,t}\right|^4\right\}\right)^{\frac{1}{4}}, \qquad (3.4)$$

где $C_k < \infty$. Поскольку ясно, что

$$J[\bar{g}_l]_N - J[\bar{g}_l]_{T,t} = \sum_{q=0}^{N-1} J[\Delta\bar{g}_l]_{\tau_{q+1},\tau_q},$$

$$J[\Delta\bar{g}_l]_{\tau_{q+1},\tau_q} = \int\limits_{\tau_q}^{\tau_{q+1}} \int\limits_{X} \left(g_l(\tau_q,\mathbf{y}) - g_l(s,\mathbf{y})\right) \bar{\nu}^{(i_l)}(ds,d\mathbf{y}),$$

то в силу независимости $J[\Delta\bar{g}_l]_{\tau_{q+1},\tau_q}$ при различных q имеем [28]

$$\mathsf{M}\left\{\left|\sum_{j=0}^{N-1} J[\Delta\bar{g}_l]_{\tau_{j+1},\tau_j}\right|^4\right\} = \sum_{j=0}^{N-1} \mathsf{M}\left\{\left|J[\Delta\bar{g}_l]_{\tau_{j+1},\tau_j}\right|^4\right\} +$$

$$+6\sum_{j=0}^{N-1} \mathsf{M}\left\{\left|J[\Delta\bar{g}_l]_{\tau_{j+1},\tau_j}\right|^2\right\} \sum_{q=0}^{j-1} \mathsf{M}\left\{\left|J[\Delta\bar{g}_l]_{\tau_{q+1},\tau_q}\right|^2\right\}. \qquad (3.5)$$

Далее, используя оценки моментов стохастических интегралов по пуассоновским мерам (см. разд. 7.7) и условия леммы 7, получаем, что правая часть (3.5) стремится к нулю при $N \to \infty$. Учитывая этот факт и (3.4), приходим к утверждению леммы. □

Продолжая доказательство теоремы 8 по схеме доказательства теоремы 1, с использованием лемм 6, 7 и оценок из разд. 7.7, получаем:

$$\mathsf{M}\left\{\left(R_{T,t}^{p_1,\ldots,p_k}\right)^2\right\} \le C_k \prod_{l=1}^{k} \int\limits_{X} \varphi_l^2(\mathbf{y})\Pi(\mathbf{y})\times$$

$$\times \int\limits_{[t,T]^k} \left(K(t_1,\ldots,t_k) - \sum_{j_1=0}^{p_1} \ldots \sum_{j_k=0}^{p_k} C_{j_k\ldots j_1} \prod_{l=1}^{k} \phi_{j_l}(t_l)\right)^2 dt_1\ldots dt_k \le$$

$$\le \bar{C}_k \int\limits_{[t,T]^k} \left(K(t_1,\ldots,t_k) - \sum_{j_1=0}^{p_1} \ldots \sum_{j_k=0}^{p_k} C_{j_k\ldots j_1} \prod_{l=1}^{k} \phi_{j_l}(t_l)\right)^2 dt_1\ldots dt_k \to 0$$

при $p_1,\ldots,p_k \to \infty$, где постоянная $\bar{C}_k$ зависит только от k (кратность повторного стохастического интеграла по мартингальной пуассоновской мере) и

$$R_{T,t}^{p_1,\ldots,p_k} = P[\chi^{(k)}]_{T,t} - \sum_{j_1=0}^{p_1} \ldots \sum_{j_k=0}^{p_k} C_{j_k\ldots j_1} \Biggl(\prod_{l=1}^{k} \pi_{(j_l)T,t}^{(l,i_l)} -$$

$$
-\underset{N\to\infty}{\text{l.i.m.}} \sum_{(l_1,\ldots,l_k)\in \mathrm{G}_k} \prod_{r=1}^{k} \phi_{j_r}(\tau_{l_r}) \int\limits_X \varphi_r(\mathbf{y})\tilde{\nu}^{(i_r)}([\tau_{l_r},\tau_{l_r+1}),d\mathbf{y})\Biggr).
$$

Теорема 8 доказана. □

Приведем пример на применение теоремы 8.

При $i_1\neq i_2,\ i_1,i_2=1,\ldots,m$ по теореме 8 с использованием системы полиномов Лежандра получаем

$$
\int\limits_t^T\int\limits_X \varphi_2(\mathbf{y}_1)\int\limits_t^{t_1}\int\limits_X \varphi_1(\mathbf{y}_2)\tilde{\nu}^{(i_2)}(dt_2,d\mathbf{y}_2)\tilde{\nu}^{(i_1)}(dt_1,d\mathbf{y}_1)=
$$

$$
=\frac{T-t}{2}\left(\pi^{(1,i_1)}_{(0)T,t}\pi^{(2,i_2)}_{(0)T,t}+\sum_{i=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{4i^2-1}}\left(\pi^{(2,i_2)}_{(i-1)T,t}\pi^{(1,i_1)}_{(i)T,t}-\pi^{(1,i_1)}_{(i-1)T,t}\pi^{(2,i_2)}_{(i)T,t}\right)\right),
$$

$$
\int\limits_t^T\int\limits_X \varphi_1(\mathbf{y}_1)\tilde{\nu}^{(i_1)}(dt_1,d\mathbf{y}_1)=\sqrt{T-t}\,\pi^{(1,i_1)}_{(0)T,t},
$$

где $\pi^{(l,i_l)}_{(j)T,t}=\int\limits_t^T\int\limits_X \phi_j(\tau)\varphi_l(\mathbf{y})\tilde{\nu}^{(i_l)}(d\tau,d\mathbf{y});\ l=1,\ 2;\ \{\phi_j(\tau)\}_{j=0}^{\infty}$ — полная ортонормированная в пространстве $L_2([t,T])$ система полиномов Лежандра.

3.2 Разложение повторных стохастических интегралов по мартингалам

Пусть задано фиксированное вероятностное пространство $(\Omega,\mathcal{F},\mathsf{P})$ и пусть $\{\mathcal{F}_t,t\in[0,T]\}$ — неубывающая совокупность σ-подалгебр $\mathcal{F}$. Через $\mathrm{M}_2(\rho,[0,T])$ будем обозначать класс $\mathcal{F}_t$-измеримых при каждом $t\in[0,T]$ мартингалов M_t, удовлетворяющих условиям $\mathsf{M}\left\{(M_s-M_t)^2\right\}=\int\limits_t^s\rho(\tau)d\tau$, $\mathsf{M}\left\{|M_s-M_t|^p\right\}\le C_p|s-t|$, где $0\le t<s\le T$; $\rho(\tau)$ — неотрицательная непрерывно дифференцируемая на промежутке $[0,T]$ неслучайная функция; $C_p<\infty$ — постоянная; $p=3,4,\ldots$.

Очевидно, что мартингал из класса $\mathrm{M}_2(\rho,[0,T])$ является D-мартингалом [2].

Пусть $\{\tau_j\}_{j=0}^{N}$ — разбиение промежутка $[0,T]$, для которого

$$
0=\tau_0<\tau_1<\ldots<\tau_N=T,\ \max_{0\le j\le N-1}|\tau_{j+1}-\tau_j|\to 0 \text{ при } N\to\infty. \tag{3.6}
$$

В соответствии со свойствами функции $\rho(\tau)$ условие принадлежности

$\mathcal{F}_t$-измеримого при каждом $t \in [0,T]$ случайного процесса $\xi_t, t \in [0,T]$, классу $H_2(\rho,[0,T])$ (см. разд. 7.5) запишем в виде $\int\limits_0^T \mathsf{M}\{|\xi_t|^2\}\rho(t)dt < \infty$.

Определим на разбиении $\{\tau_j\}_{j=0}^N$ ступенчатую случайную функцию $\xi_t^{(N)}$ следующим образом: $\xi_t^{(N)} = \xi_{\tau_{j-1}}$ с вероятностью 1 при $t \in [\tau_{j-1},\tau_j)$; $j=1,\ldots,N$. В разд. 7.5 (см. также [2]) определен стохастический интеграл от процесса $\xi_t \in H_2(\rho,[0,T])$ по мартингалу. В соответствии с этим стохастический интеграл по мартингалу $M_t \in \mathrm{M}_2(\rho,[0,T])$ определяется равенством

$$\underset{N\to\infty}{\text{l.i.m.}} \sum_{j=0}^{N-1} \xi_{\tau_j}^{(N)}\left(M_{\tau_{j+1}} - M_{\tau_j}\right) \stackrel{\text{def}}{=} \int\limits_0^T \xi_t dM_t, \tag{3.7}$$

где $\{\tau_j\}_{j=0}^N$ — разбиение промежутка $[0,T]$, удовлетворяющее условию (3.6); $\xi_t^{(N)}$ — произвольная последовательность ступенчатых функций из $H_2(\rho,[0,T])$, для которой $\int\limits_0^T \mathsf{M}\{|\xi_t^{(N)} - \xi_t|^2\}\rho(t)dt \to 0$ при $N\to\infty$.

Обозначим через $Q_4(\rho,[0,T])$ подкласс $\mathrm{M}_2(\rho,[0,T])$ мартингалов $M_t, t \in [0,T]$, для которых при некотором $\alpha > 0$ справедлива оценка:

$$\mathsf{M}\left\{\left|\int\limits_\theta^\tau g(s)dM_s\right|^4\right\} \le K_4 \int\limits_\theta^\tau |g(s)|^\alpha ds,$$

где $0 \le \theta < \tau \le T$; $g(s)$ — ограниченная на промежутке $[0,T]$ неслучайная функция; $K_4 < \infty$ — постоянная.

Через $G_n(\rho,[0,T])$ обозначим подкласс $\mathrm{M}_2(\rho,[0,T])$ мартингалов $M_t, t \in [0,T]$, для которых

$$\mathsf{M}\left\{\left|\int\limits_\theta^\tau g(s)dM_s\right|^n\right\} < \infty,$$

где $0 \le \theta < \tau \le T$; $n \in N$; $g(s)$ — такая же функция, как в определении $Q_4(\rho,[0,T])$.

Напомним (см. разд. 7.1), что если $(\xi_t)^n \in H_2(\rho,[0,T])$ при $\rho(t)\equiv 1$, то справедлива оценка [2]:

$$\mathsf{M}\left\{\left|\int\limits_\theta^\tau \xi_t dt\right|^{2n}\right\} \le (\tau-\theta)^{2n-1}\int\limits_\theta^\tau \mathsf{M}\{|\xi_t|^{2n}\}dt,\ 0 \le \theta < \tau \le T. \tag{3.8}$$

Положим

$$J[\psi^{(k)}]_{T,t}^M \stackrel{\text{def}}{=} \int\limits_t^T \psi_k(t_k)\ldots\int\limits_t^{t_2}\psi_1(t_1)dM_{t_1}^{(1,i_1)}\ldots dM_{t_k}^{(k,i_k)};\, i_1,\ldots,i_k = 0,1,\ldots,m.$$

Докажем следующую теорему.

Теорема 9. *Пусть выполнены условия:*

1. $M_\tau^{(l,i_l)} \in Q_4(\rho,[t,T])$, $G_n(\rho,[t,T])$; $n=2,4,\ldots,2^k$; $k\in N$; $i_l=1,\ldots,m$; $l=1,\ldots,k$.

2. $\{\phi_j(x)\}_{j=0}^{\infty}$ *— полная ортонормированная система функций в пространстве* $L_2([t,T])$, *каждая функция которой при конечном* j *удовлетворяет условию* $(\star)$.

3. $\psi_i(\tau)$; $i=1,\ 2,\ldots,k$ *— непрерывные на отрезке* $[t,T]$ *функции.*

Тогда повторный стохастический интеграл $J[\psi^{(k)}]_{T,t}^M$ *разлагается в сходящийся в среднеквадратическом смысле кратный ряд*

$$J[\psi^{(k)}]_{T,t}^M=\sum_{j_1,\ldots,j_k=0}^{\infty}C_{j_k\ldots j_1}\Biggl(\prod_{l=1}^{k}\xi_{j_l}^{(l,i_l)}-$$

$$-\underset{N\to\infty}{\text{l.i.m.}}\sum_{(l_1,\ldots,l_k)\in\mathcal{G}_k}\phi_{j_{l_1}}(\tau_{l_1})\Delta M_{\tau_{l_1}}^{(1,i_1)}\ldots\phi_{j_{l_k}}(\tau_{l_k})\Delta M_{\tau_{l_k}}^{(k,i_k)}\Biggr),$$

где $\mathcal{G}_k=\mathcal{H}_k\backslash\mathcal{L}_k$; $\mathcal{H}_k=\{(l_1,\ldots,l_k):\ l_1,\ldots,l_k=0,\ 1,\ldots,N-1\}$,

$$\mathcal{L}_k=\Bigl\{(l_1,\ldots,l_k):\ l_1,\ldots,l_k=0,\ 1,\ldots,N-1;$$

$$l_g\ne l_r (g\ne r);\ g,r=1,\ldots,k\Bigr\};$$

$\xi_{(j_l)T,t}^{(l,i_l)}=\int\limits_t^T\phi_{j_l}(s)dM_s^{(l,i_l)}$ *— независимые при различных* $i_l=1,\ldots,m$; $l=1,\ldots,k$ *и некоррелированные при различных* j_l *(если* $\rho(\tau)$ *— постоянная,* $i_l\ne 0$*) случайные величины;*

$$C_{j_k\ldots j_1}=\int\limits_{[t,T]^k}K(t_1,\ldots,t_k)\prod_{l=1}^{k}\phi_{j_l}(t_l)dt_1\ldots dt_k;$$

$$K(t_1,\ldots,t_k)=\begin{cases}\psi_1(t_1)\ldots\psi_k(t_k),\ t_1<\ldots<t_k\\ 0,\ \text{иначе}\end{cases};\ t_1,\ldots,t_k\in[t,T].$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Для доказательства теоремы 9 рассмотрим ряд лемм.

Лемма 8. *Пусть* $M_\tau^{(l,i_l)}\in \mathrm{M}_2(\rho,[t,T])$; $i_l=1,\ldots,m$; $l=1,\ldots,k$, *а* $\psi_i(\tau)$; $i=1,\ 2,\ldots,k$ *— непрерывные на промежутке* $[t,T]$ *функции. Тогда*

$$J[\psi^{(k)}]_{T,t}^M=\underset{N\to\infty}{\text{l.i.m.}}\sum_{j_k=0}^{N-1}\ldots\sum_{j_1=0}^{j_2-1}\prod_{l=1}^{k}\psi_l(\tau_{j_l})\Delta M_{\tau_{j_l}}^{(l,i_l)}\ \text{с в.1},\qquad(3.9)$$

где $\{\tau_j\}_{j=0}^{N}$ *— разбиение промежутка* $[0,T]$, *удовлетворяющее условию типа* (3.6).

Д о к а з а т е л ь с т в о. Поскольку (см. главу 7)

$$\mathsf{M}\left\{\left(\int\limits_{\theta}^{\tau}\xi_s dM_s^{(l,i_l)}\right)^2\right\}=\int\limits_{\theta}^{\tau}\mathsf{M}\{|\xi_s|^2\}\rho(s)ds,$$

$$\mathsf{M}\left\{\left(\int\limits_{\theta}^{\tau}\xi_s ds\right)^2\right\}\le(\tau-\theta)\int\limits_{\theta}^{\tau}\mathsf{M}\{|\xi_s|^2\}ds,$$

где $\xi_t\in H_2(\rho,[0,T])$; $t\le\theta<\tau\le T$; $i_l=1,\ldots,m$; $l=1,\ldots,k$, то интегральная сумма интеграла $J[\psi^{(k)}]_{T,t}^{M}$ в условиях леммы 8 может быть представлена в виде допредельного выражения из правой части (3.9) и величины, которая стремится в среднеквадратическом смысле к нулю при $N\to\infty$. □

Положим

$$\underset{N\to\infty}{\text{l.i.m.}}\sum_{j_1,\ldots,j_k=0}^{N-1}\Phi(\tau_{j_1},\ldots,\tau_{j_k})\prod_{l=1}^{k}\Delta M_{\tau_{j_l}}^{(l,i_l)}\stackrel{\text{def}}{=}I[\Phi]_{T,t}^{(k)},\qquad(3.10)$$

где $\{\tau_j\}_{j=0}^{N}$ — разбиение промежутка $[0,T]$, удовлетворяющее условию типа (3.6).

Лемма 9. *Пусть* $M_s^{(l,i_l)}\in Q_4(\rho,[t,T]),\ G_r(\rho,[t,T])$; $r=2,4,\ldots,2^k$; $i_l=1,\ldots,m$; $l=1,\ldots,k$, *а* $g_1(s),\ldots,g_k(s)$ *— удовлетворяющие условию* $(\star)$ *функции. Тогда*

$$\prod_{l=1}^{k}\int\limits_{t}^{T}g_l(s)dM_s^{(l,i_l)}=I[\Phi]_{T,t}^{(k)}\ \text{с в.1},\ \ \Phi(t_1,\ldots,t_k)=\prod_{l=1}^{k}g_l(t_l).$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Обозначим

$$I[g_l]_N\stackrel{\text{def}}{=}\sum_{j=0}^{N-1}g_l(\tau_j)\Delta M_{\tau_j}^{(l,i_l)},\ \ I[g_l]_{T,t}\stackrel{\text{def}}{=}\int\limits_{t}^{T}g_l(s)dM_s^{(l,i_l)}.$$

Заметим, что

$$\prod_{l=1}^{k}I[g_l]_N-\prod_{l=1}^{k}I[g_l]_{T,t}=\sum_{l=1}^{k}\left(\prod_{q=1}^{l-1}I[g_q]_{T,t}\right)\left(I[g_l]_N-I[g_l]_{T,t}\right)\left(\prod_{q=l+1}^{k}I[g_q]_N\right).$$

Используя неравенства Минковского и Коши–Буняковского, а также условия леммы 9, получаем

$$\left(\mathsf{M}\left\{\left|\prod_{l=1}^{k}I[g_l]_N-\prod_{l=1}^{k}I[g_l]_{T,t}\right|^2\right\}\right)^{\frac{1}{2}}\le C_k\sum_{l=1}^{k}\left(\mathsf{M}\left\{\left|I[g_l]_N-I[g_l]_{T,t}\right|^4\right\}\right)^{\frac{1}{4}},\qquad(3.11)$$

где $C_k < \infty$ — постоянная. Поскольку

$$I[g_l]_N - I[g_l]_{T,t} = \sum_{q=0}^{N-1} I[\Delta g_l]_{\tau_{q+1},\tau_q},\ I[\Delta g_l]_{\tau_{q+1},\tau_q} = \int\limits_{\tau_q}^{\tau_{q+1}} (g_l(\tau_q) - g_l(s))\, dM_s^{(l,i_l)},$$

то в силу независимости $I[\Delta g_l]_{\tau_{q+1},\tau_q}$ при различных q имеем [28]

$$\mathsf{M}\left\{\left|\sum_{j=0}^{N-1} I[\Delta g_l]_{\tau_{j+1},\tau_j}\right|^4\right\} = \sum_{j=0}^{N-1} \mathsf{M}\left\{\left|I[\Delta g_l]_{\tau_{j+1},\tau_j}\right|^4\right\} +$$

$$+6\sum_{j=0}^{N-1} \mathsf{M}\left\{\left|I[\Delta g_l]_{\tau_{j+1},\tau_j}\right|^2\right\}\sum_{q=0}^{j-1} \mathsf{M}\left\{\left|I[\Delta g_l]_{\tau_{q+1},\tau_q}\right|^2\right\}. \qquad (3.12)$$

Далее, используя условия леммы 9, получаем, что правая часть (3.12) стремится к нулю при $N \to \infty$. Учитывая этот факт и (3.11), приходим к утверждению леммы. □

Далее воспользовавшись доказанными леммами и повторяя с соответствующими изменениями доказательство теоремы 1 получаем:

$$\mathsf{M}\left\{\left(R_{T,t}^{p_1,\ldots,p_k}\right)^2\right\} \le C_k \int\limits_{[t,T]^k} \Biggl(K(t_1,\ldots,t_k) -$$

$$- \sum_{j_1=0}^{p_1} \ldots \sum_{j_k=0}^{p_k} C_{j_k\ldots j_1} \prod_{l=1}^{k} \phi_{j_l}(t_l)\Biggr)^2 \rho(t_1)dt_1\ldots\rho(t_k)dt_k \le$$

$$\le \bar{C}_k \int\limits_{[t,T]^k} \Biggl(K(t_1,\ldots,t_k) - \sum_{j_1=0}^{p_1} \ldots \sum_{j_k=0}^{p_k} C_{j_k\ldots j_1} \prod_{l=1}^{k} \phi_{j_l}(t_l)\Biggr)^2 dt_1\ldots dt_k \to 0$$

при $p_1,\ldots,p_k \to \infty$, где постоянная $\bar{C}_k$ зависит только от k (кратность повторного стохастического интеграла по мартингалам) и

$$R_{T,t}^{p_1,\ldots,p_k} = J[\psi^{(k)}]_{T,t}^M - \sum_{j_1=0}^{p_1} \ldots \sum_{j_k=0}^{p_k} C_{j_k\ldots j_1} \Biggl(\prod_{l=1}^{k} \xi_{j_l}^{(l,i_l)} -$$

$$- \underset{N\to\infty}{\text{l.i.m.}} \sum_{(l_1,\ldots,l_k)\in \mathrm{G}_k} \phi_{j_{l_1}}(\tau_{l_1})\Delta M_{\tau_{l_1}}^{(1,i_1)} \ldots \phi_{j_{l_k}}(\tau_{l_k})\Delta M_{\tau_{l_k}}^{(k,i_k)}\Biggr).$$

Теорема 9 доказана. □

3.3 Замечание о полных ортонормированных с весом системах функций в пространстве $L_2([t, T])$

Отметим, что в теореме 9 могут использоваться полные ортонормированные не только с весом 1, но и с некоторым другим весом в пространстве $L_2([t, T])$ системы функций.

Рассмотрим краевую задачу вида:

$$(p(x)\Phi'(x))' + q(x)\Phi(x) = -\lambda r(x)\Phi(x),$$

$$\alpha\Phi(a) + \beta\Phi'(a) = 0,\ \ \gamma\Phi(a) + \delta\Phi'(a) = 0,$$

где функции $p(x), q(x), r(x)$ удовлетворяют известным условиям, а α, β, γ, δ, λ — вещественные числа.

Известно (В.А. Стеклов), что собственные функции $\Phi_0(x)$, $\Phi_1(x), \ldots$ данной краевой задачи образуют полную ортонормированную с весом $r(x)$ систему функций в пространстве $L_2([a, b])$, а также, что ряд Фурье функции $\sqrt{r(x)}f(x) \in L_2([a, b])$ по системе функций $\sqrt{r(x)}\Phi_0(x)$, $\sqrt{r(x)}\Phi_1(x), \ldots$ сходится в среднем к этой функции на данном отрезке, причем коэффициенты Фурье определяются по формуле

$$C_j = \int\limits_a^b r(x)f(x)\Phi_j(x)dx. \tag{3.13}$$

Отметим, что если разлагать в ряд Фурье функцию $f(x) \in L_2([a, b])$ по системе функций $\Phi_0(x)$, $\Phi_1(x), \ldots$, то коэффициенты разложения также будут определяться формулой (3.13) и будет иметь место сходимость ряда Фурье в среднем с весом $r(x)$ к функции $f(x)$ на отрезке $[a, b]$.

Известно, что при рассмотрении задачи о колебаниях круглой мембраны (общий случай) возникает краевая задача для уравнения Эйлера-Бесселя с параметром λ и целым индексом n :

$$r^2R''(r) + rR'(r) + \left(\lambda^2r^2 - n^2\right)R(r) = 0. \tag{3.14}$$

Собственными функциями данной задачи, с учетом специфических граничных условий, являются функции

$$J_n\Bigl(\mu_j\frac{r}{L}\Bigr), \tag{3.15}$$

где $r \in [0, L]$, μ_j; $j = 0,\ 1,\ 2, \ldots$ — упорядоченные в порядке возрастания положительные корни функции Бесселя $J_n(\mu)$; $n = 0,\ 1,\ 2, \ldots$.

В задаче о радиальных колебаниях круглой мембраны возникает краевая задача для уравнения (3.14) при $n = 0$, собственными функциями которой соответственно являются функции (3.15) при $n = 0$.

Рассмотрим систему функций

$$\Psi_j(\tau) = \frac{\sqrt{2}}{TJ_{n+1}(\mu_j)} J_n\Bigl(\frac{\mu_j}{T}\tau\Bigr);\ j = 0,\ 1,\ 2, \ldots, \tag{3.16}$$

где $J_n(x) = \sum\limits_{m=0}^{\infty}(-1)^m \left(\frac{x}{2}\right)^{n+2m} (\Gamma(m+1)\Gamma(m+n+1))^{-1}$ — функция Бесселя первого рода, а $\Gamma(z) = \int\limits_0^{\infty} e^{-x}x^{z-1}dx$ — гамма-функция; μ_j — пронумерованные в порядке возрастания положительные корни функции $J_n(x)$, n — натуральное или ноль.

В силу сказанного, а также в силу известных свойств бесселевых функций система $\{\Psi_j(\tau)\}_{j=0}^{\infty}$ является полной ортонормированной с весом τ в пространстве $L_2([0, T])$ системой непрерывных функций.

Применим систему функций (3.16) в теореме 9.

Рассмотрим повторный стохастический интеграл $\int\limits_0^T\int\limits_0^s dM_\tau^{(1)}dM_s^{(2)}$; где $M_s^{(i)} = \int\limits_0^s \sqrt{\tau}d\mathbf{f}_\tau^{(i)}$, $\mathbf{f}_\tau^{(i)}$ $(i = 1, 2)$ — независимые стандартные винеровские процессы, $0 \le s \le T$. $M_s^{(i)}$ — мартингал (см. разд. 7.5), причем $\rho(\tau) = \tau$. Кроме того, $M_s^{(i)}$ имеет гауссовское распределение. Очевидно, что условия теоремы 9 при $k = 2$ выполнены.

Повторяя доказательство теоремы 9 при $k = 2$ для системы функций (3.16), получаем

$$\int\limits_0^T\int\limits_0^s dM_\tau^{(1)}dM_s^{(2)} = \sum_{j_1,j_2=0}^{\infty} C_{j_2j_1}\zeta_{j_1}^{(1)}\zeta_{j_2}^{(2)},$$

где кратный ряд сходится в среднеквадратическом смысле и $\zeta_j^{(i)} = \int\limits_0^T \Psi_j(\tau)dM_\tau^{(i)}$ — стандартные гауссовские случайные величины; $j = 0, 1, 2, \ldots,\ i = 1, 2$; $\mathsf{M}\{\zeta_{j_1}^{(1)}\zeta_{j_2}^{(2)}\} = 0$;

$$C_{j_2j_1} = \int\limits_0^T s\Psi_{j_2}(s)\int\limits_0^s \tau\Psi_{j_1}(\tau)d\tau ds.$$

Очевидно, что к этому же результату можно было бы прийти по-другому: применить теорему 1 к повторному стохастическому интегралу

Ито $\int\limits_0^T \sqrt{s} \int\limits_0^s \sqrt{\tau} d\mathbf{f}_\tau^{(1)} d\mathbf{f}_s^{(2)}$, а в качестве системы функций $\{\phi_j(s)\}_{j=0}^\infty$ в теореме 1 взять $\phi_j(s) = \frac{\sqrt{2s}}{TJ_{n+1}(\mu_j)} J_n\left(\frac{\mu_j}{T}s\right);\ j = 0, 1, 2, \ldots$.

В результате мы получили бы

$$\int\limits_0^T \sqrt{s} \int\limits_0^s \sqrt{\tau} d\mathbf{f}_\tau^{(1)} d\mathbf{f}_s^{(2)} = \sum_{j_1, j_2 = 0}^{\infty} C_{j_2 j_1} \zeta_{j_1}^{(1)} \zeta_{j_2}^{(2)},$$

где кратный ряд сходится в среднеквадратическом смысле и $\zeta_j^{(i)} = \int\limits_0^T \phi_j(\tau) d\mathbf{f}_\tau^{(i)}$ — стандартные гауссовские случайные величины; $j = 0, 1, 2, \ldots$; $i = 1, 2$; $\mathsf{M}\{\zeta_{j_1}^{(1)} \zeta_{j_2}^{(2)}\} = 0$;

$$C_{j_2 j_1} = \int\limits_0^T \sqrt{s} \phi_{j_2}(s) \int\limits_0^s \sqrt{\tau} \phi_{j_1}(\tau) d\tau ds.$$

Простой подсчет показывает, что $\tilde{\phi}_j(s) = \frac{\sqrt{2(s-t)}}{(T-t)J_{n+1}(\mu_j)} J_n\left(\frac{\mu_j}{T-t}(s-t)\right)$; $j = 0, 1, 2, \ldots$ — полная ортонормированная система функций в пространстве $L_2([t, T])$.

Тогда по теореме 1 получаем

$$\int\limits_t^T \sqrt{s-t} \int\limits_t^s \sqrt{\tau - t} d\mathbf{f}_\tau^{(1)} d\mathbf{f}_s^{(2)} = \sum_{j_1, j_2 = 0}^{\infty} \tilde{C}_{j_2 j_1} \tilde{\zeta}_{j_1}^{(1)} \tilde{\zeta}_{j_2}^{(2)},$$

где кратный ряд сходится в среднеквадратическом смысле и $\tilde{\zeta}_j^{(i)} = \int\limits_t^T \tilde{\phi}_j(\tau) d\mathbf{f}_\tau^{(i)}$ — стандартные гауссовские случайные величины; $j = 0, 1, 2, \ldots$; $i = 1, 2$; $\mathsf{M}\{\tilde{\zeta}_{j_1}^{(1)} \tilde{\zeta}_{j_2}^{(2)}\} = 0$;

$$\tilde{C}_{j_2 j_1} = \int\limits_t^T \sqrt{s-t} \tilde{\phi}_{j_2}(s) \int\limits_t^s \sqrt{\tau - t} \tilde{\phi}_{j_1}(\tau) d\tau ds.$$

Глава 4

Точное вычисление среднеквадратических погрешностей аппроксимаций повторных стохастических интегралов Ито

4.1 Случай произвольного k и попарно различных $i_1,\ldots,i_k=1,\ldots,m$

Сначала будем строить среднеквадратические аппроксимации повторных стохастических интегралов Ито $J[\psi^{(k)}]_{T,t}$ вида (1.1) при попарно различных $i_1,\ldots,i_k=1,\ldots,m$ (в этом случае они совпадают с соответствующими стохастическими интегралами Стратоновича) в виде усеченных кратных рядов, в которые они разлагаются согласно подходу, основанному на кратных рядах Фурье, сходящихся в среднем (теорема 1).

Пусть $J[\psi^{(k)}]_{T,t}^{q_1,\ldots,q_k}$ — аппроксимация повторного стохастического интеграла Ито $J[\psi^{(k)}]_{T,t}$ при попарно различных $i_1,\ldots,i_k=1,\ldots,m$, которая имеет вид

$$J[\psi^{(k)}]_{T,t}^{q_1,\ldots,q_k}=\sum_{j_1=0}^{q_1}\ldots\sum_{j_k=0}^{q_k}C_{j_k\ldots j_1}\prod_{l=1}^{k}\zeta_{(j_l)T,t}^{(i_l)}, \tag{4.1}$$

где числа $q_i<\infty$ удовлетворяют следующему условию на среднеквадратическую точность аппроксимации:

$$\mathsf{M}\left\{\left(J[\psi^{(k)}]_{T,t}^{q_1,\ldots,q_k}-J[\psi^{(k)}]_{T,t}\right)^2\right\}\le\varepsilon, \tag{4.2}$$

ε — заданное малое положительное число.

Теорема 1 дает возможность точно вычислить среднеквадратическую погрешность аппроксимации повторного стохастического интеграла Ито произвольной кратности.

Начнем рассмотрение со случая попарно различных $i_1, \ldots, i_k = 1, \ldots, m$.

Лемма 10. *Пусть* $i_1, \ldots, i_k = 1, \ldots, m$ *и попарно различны. Тогда среднеквадратическая погрешность аппроксимации* (4.1) *повторного стохастического интеграла Ито* $J[\psi^{(k)}]_{T,t}$ *определяется формулой*

$$\mathsf{M}\left\{\left(J[\psi^{(k)}]_{T,t}^{q_1,\ldots,q_k} - J[\psi^{(k)}]_{T,t}\right)^2\right\} = \int\limits_{[t,T]^k} K^2(t_1,\ldots,t_k)dt_1\ldots dt_k -$$

$$- \sum_{j_1=0}^{q_1} \ldots \sum_{j_k=0}^{q_k} C_{j_k\ldots j_1}^2; \tag{4.3}$$

сходимость в (4.3) *имеет место смысле предела при* $q_1, \ldots, q_k \to \infty$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Имеем

$$\mathsf{M}\left\{\left(J[\psi^{(k)}]_{T,t}\right)^2\right\} = \int\limits_t^T \psi_k^2(t_k)\ldots\int\limits_t^{t_2}\psi_1^2(t_1)dt_1\ldots dt_k =$$

$$= \int\limits_{[t,T]^k} K^2(t_1,\ldots,t_k)dt_1\ldots dt_k. \tag{4.4}$$

Равенство Парсеваля в нашем случае имеет вид

$$\int\limits_{[t,T]^k} K^2(t_1,\ldots,t_k)dt_1\ldots dt_k = \lim_{q_1,\ldots,q_k\to\infty} \sum_{j_1=0}^{q_1} \ldots \sum_{j_k=0}^{q_k} C_{j_k\ldots j_1}^2.$$

Далее

$$\mathsf{M}\left\{\left(J[\psi^{(k)}]_{T,t} - J[\psi^{(k)}]_{T,t}^{q_1,\ldots,q_k}\right)^2\right\} = \mathsf{M}\left\{\left(J[\psi^{(k)}]_{T,t}\right)^2\right\} -$$

$$-2\mathsf{M}\left\{J[\psi^{(k)}]_{T,t}J[\psi^{(k)}]_{T,t}^{q_1,\ldots,q_k}\right\} + \mathsf{M}\left\{\left(J[\psi^{(k)}]_{T,t}^{q_1,\ldots,q_k}\right)^2\right\}. \tag{4.5}$$

Поскольку согласно теореме 1

$$J[\psi^{(k)}]_{T,t} = \left\{\sum_{j_1,\ldots,j_k=0}^{\infty} - \sum_{j_1=0}^{q_1}\ldots\sum_{j_k=0}^{q_k}\right\} C_{j_k\ldots j_1}\prod_{l=1}^k \zeta_{(j_l)T,t}^{(i_l)} + J[\psi^{(k)}]_{T,t}^{q_1,\ldots,q_k},$$

то

$$\mathsf{M}\left\{J[\psi^{(k)}]_{T,t}J[\psi^{(k)}]_{T,t}^{q_1,\ldots,q_k}\right\} = \mathsf{M}\left\{\left(J[\psi^{(k)}]_{T,t}^{q_1,\ldots,q_k}\right)^2\right\}. \tag{4.6}$$

Подставляя (4.4) и (4.6) в (4.5), получаем

$$\mathsf{M}\left\{\left(J[\psi^{(k)}]_{T,t} - J[\psi^{(k)}]_{T,t}^{q_1,\ldots,q_k}\right)^2\right\} = \int\limits_{[t,T]^k} K^2(t_1,\ldots,t_k)dt_1\ldots dt_k -$$

$$-\mathsf{M}\left\{\left(J[\psi^{(k)}]_{T,t}^{q_1,\ldots,q_k}\right)^2\right\}. \tag{4.7}$$

Учитывая (4.7) и соотношение

$$\mathsf{M}\left\{\left(J[\psi^{(k)}]_{T,t}^{q_1,\ldots,q_k}\right)^2\right\} = \sum_{j_1=0}^{q_1}\ldots\sum_{j_k=0}^{q_k} C_{j_k\ldots j_1}^2,$$

которое справедливо для попарно различных $i_1,\ldots,i_k = 1,\ldots,m$, приходим к утверждению леммы 10. Лемма доказана. □

4.2 Случай не попарно различных $i_1,\ldots,i_k = 1,\ldots,m$

В процессе доказательства леммы 10 мы фактически установили следующую формулу при произвольных $i_1,\ldots,i_k = 1,\ldots,m$:

$$\mathsf{M}\left\{\left(J[\psi^{(k)}]_{T,t}^{q_1,\ldots,q_k} - J[\psi^{(k)}]_{T,t}\right)^2\right\} = \int\limits_{[t,T]^k} K^2(t_1,\ldots,t_k)dt_1\ldots dt_k +$$

$$+2\left(\mathsf{M}\left\{J[\psi^{(k)}]_{T,t}^{q_1,\ldots,q_k}\right\}\right)^2 - \mathsf{M}\left\{\left(J[\psi^{(k)}]_{T,t}^{q_1,\ldots,q_k}\right)^2\right\}. \tag{4.8}$$

В дальнейшем при вычислении среднеквадратической погрешности аппроксимации повторных стохастических интегралов Ито нам потребуется вычислять математические ожидания от кратных сумм случайных величин со сложными многоиндексными коэффициентами. Всвязи с этим будет полезна формула (2.162).

Покажем систематически, на примере повторных стохастических интегралов Ито 1, 2, 3 и 4 кратностей, что нет технических проблем для получения аналога (4.3) при произвольных $i_1,\ldots,i_k = 1,\ldots,m$ (для простоты далее полагаем $q_i = p$; $\zeta_{(j)T,t}^{(i)} = \zeta_j^{(i)}$).

4.2.1 Случай $k = 1$

В этом случае согласно лемме 10 сразу получаем

$$\mathsf{M}\left\{\left(J[\psi^{(1)}]_{T,t}^{q} - J[\psi^{(1)}]_{T,t}\right)^2\right\} = \int\limits_{[t,T]^1} K^2(t_1)dt_1 - \sum_{j_1=0}^{q} C_{j_1}^2.$$

4.2.2 Случай $k = 2$ и произвольных $i_1, i_2 = 1, \ldots, m$

При $i_1 \neq i_2$ требуемая формула получается из леммы 10.

Пусть $i_1 = i_2 = i = 1, \ldots, m$. Имеем

$$\mathsf{M}\left\{\left(J[\psi^{(2)}]_{T,t}\right)^2\right\} = \int\limits_t^T \psi_2^2(t_2) \int\limits_t^{t_2} \psi_1^2(t_1) dt_1 dt_2 = \int\limits_{[t,T]^2} K^2(t_1, t_2) dt_1 dt_2.$$

Поскольку

$$\mathsf{M}\left\{J[\psi^{(2)}]_{T,t}^p\right\} = 0,$$

где

$$J[\psi^{(2)}]_{T,t}^p = \sum_{j_1, j_2 = 0}^p C_{j_2 j_1} \zeta_{j_1}^{(i_1)} \zeta_{j_2}^{(i_1)} - \sum_{j_1=0}^p C_{j_1 j_1},$$

то, согласно (4.8), получаем:

$$\mathsf{M}\left\{\left(J[\psi^{(2)}]_{T,t}^p - J[\psi^{(2)}]_{T,t}\right)^2\right\} = \int\limits_{[t,T]^2} K^2(t_1, t_2) dt_1 dt_2 - \mathsf{M}\left\{\left(J[\psi^{(2)}]_{T,t}^p\right)^2\right\}. \quad (4.9)$$

Далее с использованием (2.162) имеем

$$\mathsf{M}\left\{\left(J[\psi^{(2)}]_{T,t}^p\right)^2\right\} = \mathsf{M}\left\{\left(\sum_{j_1, j_2 = 0}^p C_{j_2 j_1} \zeta_{j_1}^{(i_1)} \zeta_{j_2}^{(i_1)} - \sum_{j_1=0}^p C_{j_1 j_1}\right)^2\right\} =$$

$$= \mathsf{M}\left\{\sum_{j_1, j_1', j_2, j_2' = 0}^q C_{j_2 j_1} C_{j_2' j_1'} \zeta_{j_1}^{(i)} \zeta_{j_1'}^{(i)} \zeta_{j_2}^{(i)} \zeta_{j_2'}^{(i)}\right\} -$$

$$-2\left(\sum_{j_1=0}^p C_{j_1 j_1}\right)^2 + \left(\sum_{j_1=0}^p C_{j_1 j_1}\right)^2 = 3\sum_{j_1=0}^p C_{j_1 j_1}^2 +$$

$$+ \sum_{j_2=0}^p \sum_{j_1=0}^{j_2-1} \left(C_{j_2 j_1}^2 + C_{j_1 j_2}^2 + 2C_{j_1 j_1} C_{j_2 j_2} + 2C_{j_2 j_1} C_{j_1 j_2}\right) - \left(\sum_{j_1=0}^p C_{j_1 j_1}\right)^2. \quad (4.10)$$

Подставляя (4.10) в (4.9) и учитывая, что

$$\sum_{j_1=0}^p C_{j_1 j_1}^2 + \sum_{j_2=0}^p \sum_{j_1=0}^{j_2-1} \left(C_{j_2 j_1}^2 + C_{j_1 j_2}^2\right) = \sum_{j_1, j_2 = 0}^p C_{j_2 j_1}^2,$$

$$\sum_{j_1=0}^p C_{j_1 j_1}^2 + 2\sum_{j_2=0}^p \sum_{j_1=0}^{j_2-1} C_{j_1 j_1} C_{j_2 j_2} = \sum_{j_1, j_2 = 0}^p C_{j_1 j_1} C_{j_2 j_2} = \left(\sum_{j_1=0}^p C_{j_1 j_1}\right)^2,$$

$$\sum_{j_1=0}^p C_{j_1 j_1}^2 + 2\sum_{j_2=0}^p \sum_{j_1=0}^{j_2-1} C_{j_1 j_2} C_{j_2 j_1} = \sum_{j_1, j_2 = 0}^p C_{j_1 j_2} C_{j_2 j_1},$$

окончательно получаем

$$\mathsf{M}\left\{\left(J[\psi^{(2)}]_{T,t}^{p}-J[\psi^{(2)}]_{T,t}\right)^{2}\right\}=\int\limits_{[t,T]^{2}}K^{2}(t_{1},t_{2})dt_{1}dt_{2}-\sum_{j_{1},j_{2}=0}^{p}C_{j_{2}j_{1}}^{2}-$$

$$-\sum_{j_{1},j_{2}=0}^{p}C_{j_{1}j_{2}}C_{j_{2}j_{1}}. \qquad (4.11)$$

4.2.3 Случай $k=3$ и произвольных $i_1,i_2,i_3=1,\ldots,m$

Случай попарно различных i_1,i_2,i_3 рассмотрен в лемме 10, поэтому остается рассмотреть 4 случая (предполагается, что $i_1,i_2,i_3=1,\ldots,m$): 1. $i_1=i_2\neq i_3$; 2. $i_1\neq i_2=i_3$; 3. $i_1=i_3\neq i_2$; 4. $i_1=i_2=i_3$.

Начнем с первого случая:

$$\mathsf{M}\left\{\left(J[\psi^{(3)}]_{T,t}\right)^{2}\right\}=\int\limits_{[t,T]^{3}}K^{2}(t_{1},t_{2},t_{3})dt_{1}dt_{2}dt_{3};\ \mathsf{M}\left\{J[\psi^{(3)}]_{T,t}^{p}\right\}=0,$$

где

$$J[\psi^{(3)}]_{T,t}^{p}=\sum_{j_{1},j_{2},j_{3}=0}^{p}C_{j_{3}j_{2}j_{1}}\left(\zeta_{j_{1}}^{(i_{1})}\zeta_{j_{2}}^{(i_{1})}\zeta_{j_{3}}^{(i_{3})}-\mathbf{1}_{\{j_{1}=j_{2}\}}\zeta_{j_{3}}^{(i_{3})}\right).$$

Значит в нашем случае

$$\mathsf{M}\left\{\left(J[\psi^{(3)}]_{T,t}-J[\psi^{(3)}]_{T,t}^{p}\right)^{2}\right\}=\int\limits_{[t,T]^{3}}K^{2}(t_{1},t_{2},t_{3})dt_{1}dt_{2}dt_{3}-\mathsf{M}\left\{\left(J[\psi^{(3)}]_{T,t}^{p}\right)^{2}\right\}. \qquad (4.12)$$

Далее с использованием (2.162) имеем

$$\mathsf{M}\left\{\left(J[\psi^{(3)}]_{T,t}^{p}\right)^{2}\right\}=\mathsf{M}\Biggl\{\sum_{j_{3},j_{3}',j_{2},j_{2}',j_{1},j_{1}'=0}^{p}C_{j_{3}j_{2}j_{1}}C_{j_{3}'j_{2}'j_{1}'}\left(\zeta_{j_{1}}^{(i_{1})}\zeta_{j_{2}}^{(i_{1})}-\mathbf{1}_{\{j_{1}=j_{2}\}}\right)\times$$

$$\times\left(\zeta_{j_{1}'}^{(i_{1})}\zeta_{j_{2}'}^{(i_{1})}-\mathbf{1}_{\{j_{1}'=j_{2}'\}}\right)\zeta_{j_{3}}^{(i_{3})}\zeta_{j_{3}'}^{(i_{3})}\Biggr\}=$$

$$=\mathsf{M}\Biggl\{\sum_{j_{3}=0}^{p}\sum_{j_{2},j_{2}',j_{1},j_{1}'=0}^{p}C_{j_{3}j_{2}j_{1}}C_{j_{3}j_{2}'j_{1}'}\zeta_{j_{1}}^{(i_{1})}\zeta_{j_{1}'}^{(i_{1})}\zeta_{j_{2}}^{(i_{1})}\zeta_{j_{2}'}^{(i_{1})}\Biggr\}-$$

$$-2\sum_{j_{3}=0}^{p}\left(\sum_{j_{1}=0}^{p}C_{j_{3}j_{1}j_{1}}\right)^{2}+\sum_{j_{3}=0}^{p}\left(\sum_{j_{1}=0}^{p}C_{j_{3}j_{1}j_{1}}\right)^{2}=$$

$$=3\sum_{j_{3}=0}^{p}\sum_{j_{1}=0}^{p}\left(C_{j_{3}j_{1}j_{1}}\right)^{2}+\sum_{j_{3}=0}^{p}\sum_{j_{2}=0}^{p}\sum_{j_{1}=0}^{j_{2}-1}\Bigl(C_{j_{3}j_{2}j_{1}}^{2}+C_{j_{3}j_{1}j_{2}}^{2}+$$

$$+2C_{j_3j_1j_1}C_{j_3j_2j_2}+2C_{j_3j_2j_1}C_{j_3j_1j_2})-\sum_{j_3=0}^{p}\left(\sum_{j_1=0}^{p}C_{j_3j_1j_1}\right)^2. \qquad (4.13)$$

Подставляя (4.13) в (4.12) и учитывая, что

$$\sum_{j_3,j_1=0}^{p}C^2_{j_3j_1j_1}+\sum_{j_3,j_2=0}^{p}\sum_{j_1=0}^{j_2-1}\left(C^2_{j_3j_2j_1}+C^2_{j_3j_1j_2}\right)=\sum_{j_3,j_2,j_1=0}^{p}C^2_{j_3j_2j_1},$$

$$\sum_{j_3,j_1=0}^{p}C^2_{j_3j_1j_1}+2\sum_{j_3,j_2=0}^{p}\sum_{j_1=0}^{j_2-1}C_{j_3j_1j_1}C_{j_3j_2j_2}=\sum_{j_3,j_2,j_1=0}^{p}C_{j_3j_1j_1}C_{j_3j_2j_2}=$$

$$=\sum_{j_3=0}^{p}\left(\sum_{j_1=0}^{p}C_{j_3j_1j_1}\right)^2,$$

$$\sum_{j_3,j_1=0}^{p}C^2_{j_3j_1j_1}+2\sum_{j_3,j_2=0}^{p}\sum_{j_1=0}^{j_2-1}C_{j_3j_1j_2}C_{j_3j_2j_1}=\sum_{j_3,j_2,j_1=0}^{p}C_{j_3j_1j_2}C_{j_3j_2j_1},$$

окончательно получаем

$$\mathsf{M}\left\{\left(J[\psi^{(3)}]^p_{T,t}-J[\psi^{(3)}]_{T,t}\right)^2\right\}=\int\limits_{[t,T]^3}K^2(t_1,t_2,t_3)dt_1dt_2dt_3-\sum_{j_3,j_2,j_1=0}^{p}C^2_{j_3j_2j_1}-$$

$$-\sum_{j_3,j_2,j_1=0}^{p}C_{j_3j_1j_2}C_{j_3j_2j_1}\ (i_1=i_2\neq i_3).$$

Во 2 и 3 случае, в полной аналогии с предыдущими рассуждениями, соответственно получаем

$$\mathsf{M}\left\{\left(J[\psi^{(3)}]^p_{T,t}-J[\psi^{(3)}]_{T,t}\right)^2\right\}=\int\limits_{[t,T]^3}K^2(t_1,t_2,t_3)dt_1dt_2dt_3-\sum_{j_3,j_2,j_1=0}^{p}C^2_{j_3j_2j_1}-$$

$$-\sum_{j_3,j_2,j_1=0}^{p}C_{j_2j_3j_1}C_{j_3j_2j_1}\ (i_1\neq i_2=i_3).$$

$$\mathsf{M}\left\{\left(J[\psi^{(3)}]^p_{T,t}-J[\psi^{(3)}]_{T,t}\right)^2\right\}=\int\limits_{[t,T]^3}K^2(t_1,t_2,t_3)dt_1dt_2dt_3-\sum_{j_3,j_2,j_1=0}^{p}C^2_{j_3j_2j_1}-$$

$$-\sum_{j_3,j_2,j_1=0}^{p}C_{j_3j_2j_1}C_{j_1j_2j_3}\ (i_1=i_3\neq i_2).$$

В 4 частном случае при $\psi_1(s),\psi_2(s),\psi_3(s)\equiv 1$ с в.1 имеем (см. разд. 6.2):

$$I^{(i_1i_1i_1)}_{000_{T,t}}=\frac{1}{6}(T-t)^{\frac{3}{2}}\left(\left(\zeta_0^{(i_1)}\right)^3-3\zeta_0^{(i_1)}\right).$$

В более общем случае, когда $\psi_1(s), \psi_2(s), \psi_3(s) \equiv (t-s)^l$; l — фиксированное натуральное число или ноль, с в. 1 можем записать (см. разд. 6.2):

$$I_{lll_{T,t}}^{(i_1i_1i_1)} = \frac{1}{6}\left(\left(I_{l_{T,t}}^{(i_1)}\right)^3 - 3I_{l_{T,t}}^{(i_1)}\Delta_{l_{T,t}}\right),$$

$$I_{lll_{T,t}}^{*(i_1i_1i_1)} = \frac{1}{6}(T-t)^{\frac{3}{2}}\left(I_{l_{T,t}}^{(i_1)}\right)^3,\ I_{l_{T,t}}^{(i_1)} = \sum_{j=0}^{l} C_j\zeta_j^{(i_1)},$$

где $\Delta_{l_{T,t}} = \int\limits_t^T (t-s)^{2l}ds$, $C_j = \int\limits_t^T (t-s)^l\phi_j(s)ds$; $\{\phi_j(s)\}_{j=0}^{\infty}$ — полная ортонормированная на отрезке $[t, T]$ система полиномов Лежандра.

Если же в 4 частном случае функции $\psi_1(s), \ldots, \psi_3(s)$ различны, то вычисление величины $\mathsf{M}\left\{\left(J[\psi^{(3)}]_{T,t}^p - J[\psi^{(3)}]_{T,t}\right)^2\right\}$ становится резко сложнее, чем во всех рассмотренных ранее случаях. Несмотря на это мы вычислим точно указанную среднеквадратическую ошибку аппроксимации.

Согласно теореме 1 при $k=3$ и $i_1 = i_2 = i_3 = 1, \ldots, m$ имеем:

$$J[\psi^{(3)}]_{T,t} = \sum_{j_1,j_2,j_3=0}^{\infty} C_{j_3j_2j_1}\Bigl(\zeta_{j_1}\zeta_{j_2}\zeta_{j_3} - \mathbf{1}_{\{j_1=j_2\}}\zeta_{j_3} - \mathbf{1}_{\{j_2=j_3\}}\zeta_{j_1} - \mathbf{1}_{\{j_1=j_3\}}\zeta_{j_2}\Bigr)$$

и, соответственно

$$J[\psi^{(3)}]_{T,t}^p = \sum_{j_1,j_2,j_3=0}^{p} C_{j_3j_2j_1}\Bigl(\zeta_{j_1}\zeta_{j_2}\zeta_{j_3} - \mathbf{1}_{\{j_1=j_2\}}\zeta_{j_3} - \mathbf{1}_{\{j_2=j_3\}}\zeta_{j_1} - \mathbf{1}_{\{j_1=j_3\}}\zeta_{j_2}\Bigr),$$

где для простоты мы положили $\zeta_j^{(i)} = \zeta_j$.

Согласно (4.8) достаточно вычислить лишь $\mathsf{M}\left\{\left(J[\psi^{(3)}]_{T,t}^p\right)^2\right\}$. Имеем

$$\mathsf{M}\left\{\left(J[\psi^{(3)}]_{T,t}^p\right)^2\right\} = \mathsf{M}\Biggl\{\sum_{j_1,j_1',j_2,j_2',j_3,j_3'=0}^{p} C_{j_3j_2j_1}C_{j_3'j_2'j_1'}\zeta_{j_1}\zeta_{j_1'}\zeta_{j_2}\zeta_{j_2'}\zeta_{j_3}\zeta_{j_3'}\Biggr\} -$$

$$-2\sum_{j_2'=0}^{p}\mathsf{M}\Biggl\{\sum_{j_1,j_2,j_3,j_3'=0}^{p} C_{j_3j_2j_1}C_{j_3'j_2'j_2'}\zeta_{j_1}\zeta_{j_2}\zeta_{j_3}\zeta_{j_3'}\Biggr\} -$$

$$-2\sum_{j_3'=0}^{p}\mathsf{M}\Biggl\{\sum_{j_1,j_2,j_3,j_1'=0}^{p} C_{j_3j_2j_1}C_{j_3'j_3'j_1'}\zeta_{j_1}\zeta_{j_2}\zeta_{j_3}\zeta_{j_1'}\Biggr\} -$$

$$-2\sum_{j_3'=0}^{p}\mathsf{M}\Biggl\{\sum_{j_1,j_2,j_3,j_2'=0}^{p} C_{j_3j_2j_1}C_{j_3'j_2'j_3'}\zeta_{j_1}\zeta_{j_2}\zeta_{j_3}\zeta_{j_2'}\Biggr\} +$$

$$+\sum_{j_1,j_2,j_3=0}^{p}(C_{j_3j_2j_2}C_{j_3j_1j_1} + C_{j_3j_3j_1}C_{j_2j_2j_1} + C_{j_3j_2j_3}C_{j_1j_2j_1} +$$

$$+2C_{j_3j_2j_2}C_{j_1j_1j_3}+2C_{j_3j_2j_2}C_{j_1j_3j_1}+2C_{j_3j_3j_1}C_{j_2j_1j_2}\Big).$$

Согласно (2.162) при $k=4$ и $k=6$ имеем:

$$\mathsf{M}\left\{\sum_{j_1,j_1',j_2,j_2',j_3,j_3'=0}^{p}C_{j_3j_2j_1}C_{j_3'j_2'j_1'}\zeta_{j_1}\zeta_{j_1'}\zeta_{j_2}\zeta_{j_2'}\zeta_{j_3}\zeta_{j_3'}\right\}=$$

$$=15\sum_{j_3=0}^{p}C_{j_3j_3j_3}^2+\sum_{j_3=0}^{p}\sum_{j_2=0}^{j_3-1}\sum_{j_1=0}^{j_2-1}\sum_{(j_1,j_1,j_2,j_2,j_3,j_3)}C_{(j_3j_2j_1}C_{j_3j_2j_1)}+$$

$$+3\sum_{j_3=0}^{p}\sum_{j_1=0}^{j_3-1}\sum_{(j_1,j_1,j_3,j_3,j_3,j_3)}C_{(j_3j_3j_1}C_{j_3j_3j_1)}+$$

$$+3\sum_{j_3=0}^{p}\sum_{j_1=0}^{j_3-1}\sum_{(j_1,j_1,j_1,j_1,j_3,j_3)}C_{(j_3j_1j_1}C_{j_3j_1j_1)};$$

$$\mathsf{M}\left\{\sum_{j_1,j_2,j_3,j_3'=0}^{p}C_{j_3j_2j_1}C_{j_3'j_2'j_2'}\zeta_{j_1}\zeta_{j_2}\zeta_{j_3}\zeta_{j_3'}\right\}=$$

$$=3\sum_{j_3=0}^{p}C_{j_3j_3j_3}C_{j_3j_2'j_2'}+\sum_{j_3=0}^{p}\sum_{j_1=0}^{j_3-1}\sum_{(j_1,j_1,j_3,j_3)}C_{(j_3j_1j_1}C_{j_3j_2'j_2')};$$

$$\mathsf{M}\left\{\sum_{j_1,j_2,j_3,j_1'=0}^{p}C_{j_3j_2j_1}C_{j_3'j_3'j_1'}\zeta_{j_1}\zeta_{j_2}\zeta_{j_3}\zeta_{j_1'}\right\}=$$

$$=3\sum_{j_3=0}^{p}C_{j_3j_3j_3}C_{j_3'j_3'j_3}+\sum_{j_3=0}^{p}\sum_{j_1=0}^{j_3-1}\sum_{(j_1,j_1,j_3,j_3)}C_{(j_3j_3j_1}C_{j_3'j_3'j_1)};$$

$$\mathsf{M}\left\{\sum_{j_1,j_2,j_3,j_2'=0}^{p}C_{j_3j_2j_1}C_{j_3'j_2'j_3'}\zeta_{j_1}\zeta_{j_2}\zeta_{j_3}\zeta_{j_2'}\right\}=$$

$$=3\sum_{j_3=0}^{p}C_{j_3j_3j_3}C_{j_3'j_3j_3'}+\sum_{j_3=0}^{p}\sum_{j_1=0}^{j_3-1}\sum_{(j_1,j_1,j_3,j_3)}C_{(j_3j_3j_1}C_{j_3'j_1j_3')},$$

где как обычно $\sum\limits_{(j_1,\ldots,j_k)}$ — сумма по всем возможным перестановкам $(j_1,\ldots,j_k)$, а новое обозначение вида $C_{(j_1\ldots j_l}C_{j_{l+1}\ldots j_k)}$ означает, что при осуществлении перестановок индексом величины $C_{(j_1\ldots j_l}C_{j_{l+1}\ldots j_k)}$ является $(j_1\ldots j_lj_{l+1}\ldots j_k)=(j_1\ldots,j_k)$, как, если бы в (2.162) мы положили бы $a_{(j_1\ldots j_k)}=C_{(j_1\ldots j_l}C_{j_{l+1}\ldots j_k)}$.

В принципе, интересующая нас среднеквадратическая погрешность может уже считаться найденной по формуле

$$\mathsf{M}\left\{\left(J[\psi^{(3)}]^p_{T,t}-J[\psi^{(3)}]_{T,t}\right)^2\right\}=\int\limits_{[t,T]^3}K^2(t_1,t_2,t_3)dt_1dt_2dt_3-\mathsf{M}\left\{\left(J[\psi^{(3)}]^p_{T,t}\right)^2\right\},$$

поскольку величина $\mathsf{M}\left\{\left(J[\psi^{(3)}]^p_{T,t}\right)^2\right\}$ вычислена. Во избежание недоразумений выпишем в развернутом виде ряд сумм, входящих в полученные формулы:

$$\sum_{(j_1,j_1,j_3,j_3)} C_{(j_3j_1j_1}C_{j_3j_2'j_2')}=C_{j_3j_1j_1}C_{j_3j_2'j_2'}+C_{j_3j_1j_3}C_{j_1j_2'j_2'}+$$
$$+C_{j_3j_3j_1}C_{j_1j_2'j_2'}+C_{j_1j_3j_3}C_{j_1j_2'j_2'}+C_{j_1j_3j_1}C_{j_3j_2'j_2'}+C_{j_1j_1j_3}C_{j_3j_2'j_2'};$$

$$\sum_{(j_1,j_1,j_3,j_3)} C_{(j_3j_1j_1}C_{j_3'j_3'j_1)}=C_{j_3j_3j_1}C_{j_3'j_3'j_1}+C_{j_3j_1j_3}C_{j_3'j_3'j_1}+$$
$$+C_{j_3j_1j_1}C_{j_3'j_3'j_3}+C_{j_1j_3j_3}C_{j_3'j_3'j_1}+C_{j_1j_3j_1}C_{j_3'j_3'j_3}+C_{j_1j_1j_3}C_{j_3'j_3'j_3};$$
$$\sum_{(j_1,j_1,j_3,j_3)} C_{(j_3j_3j_1}C_{j_3'j_1j_3')}=C_{j_3j_3j_1}C_{j_3'j_1j_3'}+C_{j_3j_1j_3}C_{j_3'j_1j_3'}+$$
$$+C_{j_3j_1j_1}C_{j_3'j_3j_3'}+C_{j_1j_3j_3}C_{j_3'j_1j_3'}+C_{j_1j_3j_1}C_{j_3'j_1j_3'}+C_{j_1j_1j_3}C_{j_3'j_3j_3'};$$

$$\sum_{(j_1,j_1,j_3,j_3,j_3,j_3)} C_{(j_3j_3j_1}C_{j_3j_3j_1)}=2C_{j_1j_1j_3}C_{j_3j_3j_3}+2C_{j_1j_3j_1}C_{j_3j_3j_3}+$$
$$+C^2_{j_1j_3j_3}+2C_{j_1j_3j_3}C_{j_3j_1j_3}+2C_{j_3j_1j_1}C_{j_3j_3j_3}+C^2_{j_3j_1j_3}+$$
$$+C^2_{j_3j_3j_1}+2C_{j_1j_3j_3}C_{j_3j_3j_1}+2C_{j_3j_1j_3}C_{j_3j_3j_1};$$

$$\sum_{(j_1,j_1,j_1,j_1,j_3,j_3)} C_{(j_3j_1j_1}C_{j_3j_1j_1)}=2C_{j_3j_3j_1}C_{j_1j_1j_1}+2C_{j_3j_1j_3}C_{j_1j_1j_1}+$$
$$+C^2_{j_3j_1j_1}+2C_{j_3j_1j_1}C_{j_1j_3j_1}+2C_{j_3j_1j_1}C_{j_1j_1j_3}+2C_{j_1j_3j_3}C_{j_1j_1j_1}+$$
$$+C^2_{j_1j_3j_1}+2C_{j_1j_3j_1}C_{j_1j_1j_3}+C^2_{j_1j_1j_3};$$

$$\sum_{(j_1,j_1,j_2,j_2,j_3,j_3)} C_{(j_3j_2j_1}C_{j_3j_2j_1)}=2C_{j_1j_1j_2}C_{j_2j_3j_3}+2C_{j_1j_1j_2}C_{j_3j_2j_3}+$$
$$+2C_{j_1j_1j_2}C_{j_3j_3j_2}+2C_{j_1j_1j_3}C_{j_2j_2j_3}+2C_{j_1j_1j_3}C_{j_2j_3j_2}+2C_{j_1j_1j_3}C_{j_3j_2j_2}+$$

$$
+2C_{j_1j_2j_1}C_{j_2j_3j_3}+2C_{j_1j_2j_1}C_{j_3j_2j_3}+2C_{j_1j_2j_1}C_{j_3j_3j_2}+2C_{j_1j_3j_1}C_{j_3j_2j_2}+
$$
$$
+2C_{j_2j_3j_2}C_{j_1j_3j_1}+2C_{j_1j_3j_1}C_{j_2j_2j_3}+2C_{j_1j_2j_2}C_{j_1j_3j_3}+2C_{j_1j_2j_3}C_{j_1j_3j_2}+
$$
$$
+2C_{j_1j_2j_2}C_{j_3j_1j_3}+2C_{j_1j_2j_3}C_{j_2j_1j_3}+2C_{j_1j_3j_2}C_{j_2j_1j_3}+2C_{j_1j_3j_3}C_{j_2j_1j_2}+
$$
$$
+2C_{j_1j_3j_2}C_{j_3j_1j_2}+2C_{j_1j_2j_3}C_{j_3j_1j_2}+2C_{j_1j_2j_2}C_{j_3j_3j_1}+2C_{j_1j_2j_3}C_{j_2j_3j_1}+
$$
$$
+2C_{j_1j_3j_2}C_{j_2j_3j_1}+2C_{j_1j_3j_3}C_{j_2j_2j_1}+2C_{j_1j_3j_2}C_{j_3j_2j_1}+2C_{j_1j_2j_3}C_{j_3j_2j_1}+
$$
$$
+2C_{j_2j_1j_1}C_{j_2j_3j_3}+2C_{j_2j_1j_1}C_{j_3j_2j_3}+2C_{j_2j_1j_1}C_{j_3j_3j_2}+2C_{j_3j_1j_1}C_{j_3j_2j_2}+
$$
$$
+2C_{j_3j_1j_1}C_{j_2j_3j_2}+2C_{j_3j_1j_1}C_{j_2j_2j_3}+2C_{j_2j_1j_2}C_{j_3j_1j_3}+2C_{j_2j_1j_3}C_{j_3j_1j_2}+
$$
$$
+2C_{j_2j_1j_2}C_{j_3j_3j_1}+2C_{j_2j_1j_3}C_{j_2j_3j_1}+2C_{j_2j_1j_3}C_{j_3j_2j_1}+2C_{j_3j_1j_2}C_{j_3j_2j_1}+
$$
$$
+2C_{j_3j_1j_3}C_{j_2j_2j_1}+2C_{j_3j_1j_2}C_{j_2j_3j_1}+2C_{j_3j_3j_1}C_{j_2j_2j_1}+2C_{j_2j_3j_1}C_{j_3j_2j_1}+
$$
$$
+C^2_{j_1j_3j_2}+C^2_{j_1j_2j_3}+C^2_{j_2j_3j_1}+C^2_{j_2j_1j_3}+C^2_{j_3j_2j_1}+C^2_{j_3j_1j_2}.
$$

Сделаем одно замечание по-поводу вычисления среднеквадратической погрешности аппроксимации повторного стохастического интеграла Стратоновича 3 кратности вида

$$
\int\limits_t^{*T}\int\limits_t^{*t_3}\int\limits_t^{*t_2} d\mathbf{f}_{t_1}^{(i_1)}d\mathbf{f}_{t_2}^{(i_2)}d\mathbf{f}_{t_3}^{(i_3)} \stackrel{\rm def}{=} I_{000_{T,t}}^{*(i_1i_2i_3)};\ i_1,i_2,i_3=1,\ldots,m.
$$

Поскольку

$$
I_{000_{T,t}}^{*(i_1i_2i_3)}=I_{000_{T,t}}^{(i_1i_2i_3)}+\frac{1}{2}\mathbf{1}_{\{i_1=i_2\}}\int\limits_t^{T}\int\limits_t^{\tau} ds d\mathbf{f}_{\tau}^{(i_3)}+\frac{1}{2}\mathbf{1}_{\{i_2=i_3\}}\int\limits_t^{T}\int\limits_t^{\tau} d\mathbf{f}_{s}^{(i_1)}d\tau=
$$
$$
=I_{000_{T,t}}^{(i_1i_2i_3)}+\frac{1}{4}\mathbf{1}_{\{i_1=i_2\}}(T-t)^{\frac{3}{2}}\left(\zeta_0^{(i_3)}+\frac{1}{\sqrt{3}}\zeta_1^{(i_3)}\right)+
$$
$$
+\frac{1}{4}\mathbf{1}_{\{i_2=i_3\}}(T-t)^{\frac{3}{2}}\left(\zeta_0^{(i_1)}-\frac{1}{\sqrt{3}}\zeta_1^{(i_1)}\right), \qquad (4.14)
$$

где $\zeta_j^{(i)}=\int\limits_t^T\phi_j(s)d\mathbf{f}_s^{(i)}$; $\{\phi_j(x)\}_{j=0}^{\infty}$ — полная ортонормированная на отрезке $[t,\ T]$ система полиномов Лежандра, то

$$
I_{000_{T,t}}^{*(i_1i_2i_3)p}=I_{000_{T,t}}^{(i_1i_2i_3)p}+\frac{1}{4}\mathbf{1}_{\{i_1=i_2\}}(T-t)^{\frac{3}{2}}\left(\zeta_0^{(i_3)}+\frac{1}{\sqrt{3}}\zeta_1^{(i_3)}\right)+
$$
$$
+\frac{1}{4}\mathbf{1}_{\{i_2=i_3\}}(T-t)^{\frac{3}{2}}\left(\zeta_0^{(i_1)}-\frac{1}{\sqrt{3}}\zeta_1^{(i_1)}\right), \qquad (4.15)
$$

где $I_{000_{T,t}}^{(i_1i_2i_3)p}$ — аппроксимация повторного стохастического интеграла Ито $I_{000_{T,t}}^{(i_1i_2i_3)}$, которая имеет вид:

$$I_{000_{T,t}}^{(i_1i_2i_3)p} = \sum_{j_1,j_2,j_3=0}^{p} C_{j_3j_2j_1}\Biggl(\zeta_{j_1}^{(i_1)}\zeta_{j_2}^{(i_2)}\zeta_{j_3}^{(i_3)} - \mathbf{1}_{\{i_1=i_2\}}\mathbf{1}_{\{j_1=j_2\}}\zeta_{j_3}^{(i_3)} -$$

$$-\mathbf{1}_{\{i_2=i_3\}}\mathbf{1}_{\{j_2=j_3\}}\zeta_{j_1}^{(i_1)} - \mathbf{1}_{\{i_1=i_3\}}\mathbf{1}_{\{j_1=j_3\}}\zeta_{j_2}^{(i_2)}\Biggr).$$

Из (4.14) и (4.15) окончательно получаем:

$$\mathsf{M}\left\{\left(I_{000_{T,t}}^{*(i_3i_2i_1)} - I_{000_{T,t}}^{*(i_3i_2i_1)p}\right)^2\right\} = \mathsf{M}\left\{\left(I_{000_{T,t}}^{(i_3i_2i_1)} - I_{000_{T,t}}^{(i_3i_2i_1)p}\right)^2\right\}. \qquad (4.16)$$

Очевидно, что формула (4.16) будет верна и для тригонометрической системы функций.

4.2.4 Случай $k = 4$ и произвольных $i_1, i_2, i_3, i_4 = 1, \ldots, m$

Случай попарно различных $i_1, \ldots, i_4$ рассмотрен в лемме 10, поэтому остается рассмотреть следующие частные случаи: 1. $i_1 = i_2 \neq i_3, i_4$; $i_3 \neq i_4$; 2. $i_1 = i_3 \neq i_2, i_4$; $i_2 \neq i_4$; 3. $i_1 = i_4 \neq i_2, i_3$; $i_2 \neq i_3$; 4. $i_2 = i_3 \neq i_1, i_4$; $i_1 \neq i_4$; 5. $i_2 = i_4 \neq i_1, i_3$; $i_1 \neq i_3$; 6. $i_3 = i_4 \neq i_1, i_2$; $i_1 \neq i_2$; 7. $i_1 = i_2 = i_3 \neq i_4$; 8. $i_2 = i_3 = i_4 \neq i_1$; 9. $i_1 = i_2 = i_4 \neq i_3$; 10. $i_1 = i_3 = i_4 \neq i_2$; 11. $i_1 = i_2 = i_3 = i_4$; 12. $i_1 = i_2 \neq i_3 = i_4$; 13. $i_1 = i_3 \neq i_2 = i_4$; 14. $i_1 = i_4 \neq i_2 = i_3$.

Начнем с 1 частного случая. Согласно теореме 1 имеем:

$$J[\psi^{(4)}]_{T,t} = \sum_{j_1,j_2,j_3,j_4=0}^{\infty} C_{j_4j_3j_2j_1}\left(\zeta_{j_1}^{(i_1)}\zeta_{j_2}^{(i_1)}\zeta_{j_3}^{(i_3)}\zeta_{j_4}^{(i_4)} - \mathbf{1}_{\{j_1=j_2\}}\zeta_{j_3}^{(i_3)}\zeta_{j_4}^{(i_4)}\right),$$

$$J[\psi^{(4)}]_{T,t}^{p} = \sum_{j_1,j_2,j_3,j_4=0}^{p} C_{j_4j_3j_2j_1}\left(\zeta_{j_1}^{(i_1)}\zeta_{j_2}^{(i_1)}\zeta_{j_3}^{(i_3)}\zeta_{j_4}^{(i_4)} - \mathbf{1}_{\{j_1=j_2\}}\zeta_{j_3}^{(i_3)}\zeta_{j_4}^{(i_4)}\right).$$

Поскольку $\mathsf{M}\left\{J[\psi^{(4)}]_{T,t}^{p}\right\} = 0$, то согласно (4.8) для вычисления среднеквадратической погрешности $\mathsf{M}\left\{\left(J[\psi^{(4)}]_{T,t}^{p} - J[\psi^{(4)}]_{T,t}\right)^2\right\}$ остается вычислить $\mathsf{M}\left\{\left(J[\psi^{(4)}]_{T,t}^{p}\right)^2\right\}$.

Используя (2.162) при $k = 4$ имеем:

$$
\mathsf{M}\left\{\left(J[\psi^{(4)}]_{T,t}^{p}\right)^{2}\right\}=
$$

$$
=\sum_{j_3,j_4=0}^{p}\mathsf{M}\Biggl\{\sum_{j_1,j_1',j_2,j_2'=0}^{q}C_{j_4j_3j_2j_1}C_{j_4j_3j_2'j_1'}\zeta_{(j_1)T,t}^{(i_1)}\zeta_{(j_1')T,t}^{(i_1)}\zeta_{(j_2)T,t}^{(i_1)}\zeta_{(j_2')T,t}^{(i_1)}\Biggr\}-
$$

$$
-\sum_{j_2,j_3,j_4,j_1'=0}^{q}C_{j_4j_3j_2j_2}C_{j_4j_3j_1'j_1'}-\sum_{j_2,j_3,j_4,j_2'=0}^{q}C_{j_4j_3j_2j_2}C_{j_4j_3j_2'j_2'}+
$$

$$
+\sum_{j_2,j_3,j_4,j_2'=0}^{q}C_{j_4j_3j_2j_2}C_{j_4j_3j_2'j_2'}=
$$

$$
=\sum_{j_3,j_4=0}^{p}\Biggl(\mathsf{M}\Biggl\{\sum_{j_1,j_1',j_2,j_2'=0}^{q}C_{j_4j_3j_2j_1}C_{j_4j_3j_2'j_1'}\zeta_{(j_1)T,t}^{(i_1)}\zeta_{(j_1')T,t}^{(i_1)}\zeta_{(j_2)T,t}^{(i_1)}\zeta_{(j_2')T,t}^{(i_1)}\Biggr\}-
$$

$$
-\Biggl(\sum_{j_2=0}^{p}C_{j_4j_3j_2j_2}\Biggr)^{2}\Biggr)=
$$

$$
=\sum_{j_3,j_4=0}^{p}\Biggl(3\sum_{j_1=0}^{p}C_{j_4j_3j_1j_1}^{2}+\sum_{j_2=0}^{p}\sum_{j_1=0}^{j_2-1}\Bigl(C_{j_4j_3j_2j_1}^{2}+C_{j_4j_3j_1j_2}^{2}+
$$

$$
+2C_{j_4j_3j_1j_1}C_{j_4j_3j_2j_2}+2C_{j_4j_3j_2j_1}C_{j_4j_3j_1j_2}\Bigr)-\Biggl(\sum_{j_2=0}^{p}C_{j_4j_3j_2j_2}\Biggr)^{2}\Biggr)=
$$

$$
=\sum_{j_1,j_2,j_3,j_4=0}^{p}C_{j_4j_3j_2j_1}^{2}+\sum_{j_1,j_2,j_3,j_4=0}^{p}C_{j_4j_3j_1j_2}C_{j_4j_3j_2j_1}.
$$

Поэтому

$$
\mathsf{M}\left\{\left(J[\psi^{(4)}]_{T,t}^{p}-J[\psi^{(4)}]_{T,t}\right)^{2}\right\}=\int\limits_{[t,T]^4}K^2(t_1,\ldots,t_4)dt_1\ldots dt_4-
$$

$$
-\sum_{j_4,j_3,j_2,j_1=0}^{p}C_{j_4j_3j_2j_1}^{2}-\sum_{j_4,j_3,j_2,j_1=0}^{p}C_{j_4j_3j_1j_2}C_{j_4j_3j_2j_1}\ (i_1=i_2\ne i_3,i_4;\ i_3\ne i_4).
$$

Для 2–6 частных случаев в полной аналогии получаем:

$$
\mathsf{M}\left\{\left(J[\psi^{(4)}]_{T,t}^{p}-J[\psi^{(4)}]_{T,t}\right)^{2}\right\}=\int\limits_{[t,T]^4}K^2(t_1,\ldots,t_4)dt_1\ldots dt_4-
$$

$$
-\sum_{j_4,j_3,j_2,j_1=0}^{p}C_{j_4j_3j_2j_1}^{2}-\sum_{j_4,j_3,j_2,j_1=0}^{p}C_{j_4j_3j_2j_1}C_{j_4j_1j_2j_3}\ (i_1=i_3\ne i_2,i_4;\ i_2\ne i_4);
$$

$$
\mathsf{M}\left\{\left(J[\psi^{(4)}]_{T,t}^{p}-J[\psi^{(4)}]_{T,t}\right)^{2}\right\}=\int\limits_{[t,T]^4}K^2(t_1,\ldots,t_4)dt_1\ldots dt_4-
$$

$$-\sum_{j_4,j_3,j_2,j_1=0}^{p} C_{j_4j_3j_2j_1}^2-\sum_{j_4,j_3,j_2,j_1=0}^{p} C_{j_4j_3j_2j_1}C_{j_1j_3j_2j_4}\ (i_1=i_4\ne i_2,i_3;\ i_2\ne i_3);$$

$$\mathsf{M}\left\{\left(J[\psi^{(4)}]_{T,t}^p-J[\psi^{(4)}]_{T,t}\right)^2\right\}=\int\limits_{[t,T]^4} K^2(t_1,\ldots,t_4)dt_1\ldots dt_4-$$

$$-\sum_{j_4,j_3,j_2,j_1=0}^{p} C_{j_4j_3j_2j_1}^2-\sum_{j_4,j_3,j_2,j_1=0}^{p} C_{j_4j_3j_2j_1}C_{j_4j_2j_3j_1}\ (i_2=i_3\ne i_1,i_4;\ i_1\ne i_4);$$

$$\mathsf{M}\left\{\left(J[\psi^{(4)}]_{T,t}^p-J[\psi^{(4)}]_{T,t}\right)^2\right\}=\int\limits_{[t,T]^4} K^2(t_1,\ldots,t_4)dt_1\ldots dt_4-$$

$$-\sum_{j_4,j_3,j_2,j_1=0}^{p} C_{j_4j_3j_2j_1}^2-\sum_{j_4,j_3,j_2,j_1=0}^{p} C_{j_4j_3j_2j_1}C_{j_2j_3j_4j_1}\ (i_2=i_4\ne i_1,i_3;\ i_1\ne i_3);$$

$$\mathsf{M}\left\{\left(J[\psi^{(4)}]_{T,t}^p-J[\psi^{(4)}]_{T,t}\right)^2\right\}=\int\limits_{[t,T]^4} K^2(t_1,\ldots,t_4)dt_1\ldots dt_4-$$

$$-\sum_{j_4,j_3,j_2,j_1=0}^{p} C_{j_4j_3j_2j_1}^2-\sum_{j_4,j_3,j_2,j_1=0}^{p} C_{j_4j_3j_2j_1}C_{j_3j_4j_2j_1}\ (i_3=i_4\ne i_1,i_2;\ i_1\ne i_2).$$

Для 7 частного случая $(i_1=i_2=i_3\ne i_4)$ имеем:

$$J[\psi^{(4)}]_{T,t}^p=\sum_{j_1,j_2,j_3,j_4=0}^{p} C_{j_4j_3j_2j_1}\Bigl(\zeta_{j_1}\zeta_{j_2}\zeta_{j_3}\tilde{\zeta}_{j_4}-\mathbf{1}_{\{j_1=j_2\}}\zeta_{j_3}\tilde{\zeta}_{j_4}-$$

$$-\mathbf{1}_{\{j_1=j_3\}}\zeta_{j_2}\tilde{\zeta}_{j_4}-\mathbf{1}_{\{j_2=j_3\}}\zeta_{j_1}\tilde{\zeta}_{j_4}\Bigr),$$

где $\zeta_j^{(i_1)}=\zeta_j^{(i_2)}=\zeta_j^{(i_3)}=\zeta_j$, $\zeta_j^{(i_4)}=\tilde{\zeta}_j$;

$$\mathsf{M}\left\{\left(J[\psi^{(4)}]_{T,t}^p\right)^2\right\}=\sum_{j_4=0}^{p}\mathsf{M}\Biggl\{\sum_{j_1,j_1',j_2,j_2',j_3,j_3'=0}^{p} C_{j_4j_3j_2j_1}C_{j_4j_3'j_2'j_1'}\zeta_{j_1}\zeta_{j_1'}\zeta_{j_2}\zeta_{j_2'}\zeta_{j_3}\zeta_{j_3'}\Biggr\}-$$

$$-2\sum_{j_2',j_4=0}^{p}\mathsf{M}\Biggl\{\sum_{j_1,j_2,j_3,j_3'=0}^{p} C_{j_4j_3j_2j_1}C_{j_4j_3'j_2'j_2'}\zeta_{j_1}\zeta_{j_2}\zeta_{j_3}\zeta_{j_3'}\Biggr\}-$$

$$-2\sum_{j_3',j_4=0}^{p}\mathsf{M}\Biggl\{\sum_{j_1,j_2,j_3,j_2'=0}^{p} C_{j_4j_3j_2j_1}C_{j_4j_3'j_2'j_3'}\zeta_{j_1}\zeta_{j_2}\zeta_{j_3}\zeta_{j_2'}\Biggr\}-$$

$$-2\sum_{j_3',j_4=0}^{p}\mathsf{M}\Biggl\{\sum_{j_1,j_2,j_3,j_1'=0}^{p} C_{j_4j_3j_2j_1}C_{j_4j_3'j_3'j_1'}\zeta_{j_1}\zeta_{j_2}\zeta_{j_3}\zeta_{j_1'}\Biggr\}+$$

$$+\sum_{j_1,j_2,j_3,j_4=0}^{p}\left(C_{j_4j_3j_2j_2}C_{j_4j_3j_1j_1}+C_{j_4j_3j_2j_3}C_{j_4j_1j_2j_1}+C_{j_4j_3j_3j_1}C_{j_4j_2j_2j_1}+\right.$$
$$\left.+2C_{j_4j_3j_2j_2}C_{j_4j_1j_3j_1}+2C_{j_4j_3j_2j_2}C_{j_4j_1j_1j_3}+2C_{j_4j_3j_2j_3}C_{j_4j_1j_1j_2}\right);$$

Далее, согласно (2.162) при $k=6$ и $k=4$ имеем:

$$\mathsf{M}\left\{\sum_{j_1,j_1',j_2,j_2',j_3,j_3'=0}^{p}C_{j_4j_3j_2j_1}C_{j_4j_3'j_2'j_1'}\zeta_{j_1}\zeta_{j_1'}\zeta_{j_2}\zeta_{j_2'}\zeta_{j_3}\zeta_{j_3'}\right\}=$$
$$=15\sum_{j_3=0}^{p}C^2_{j_4j_3j_3j_3}+\sum_{j_3=0}^{p}\sum_{j_2=0}^{j_3-1}\sum_{j_1=0}^{j_2-1}\sum_{(j_1,j_1,j_2,j_2,j_3,j_3)}C_{(j_4j_3j_2j_1}C_{j_4j_3j_2j_1)}+$$
$$+3\sum_{j_3=0}^{p}\sum_{j_1=0}^{j_3-1}\sum_{(j_1,j_1,j_3,j_3,j_3,j_3)}C_{(j_4j_3j_3j_1}C_{j_4j_3j_3j_1)}+$$
$$+3\sum_{j_3=0}^{p}\sum_{j_1=0}^{j_3-1}\sum_{(j_1,j_1,j_1,j_1,j_3,j_3)}C_{(j_4j_3j_1j_1}C_{j_4j_3j_1j_1)};$$

$$\mathsf{M}\left\{\sum_{j_1,j_2,j_3,j_3'=0}^{p}C_{j_4j_3j_2j_1}C_{j_4j_3'j_2'j_2'}\zeta_{j_1}\zeta_{j_2}\zeta_{j_3}\zeta_{j_3'}\right\}=$$
$$=3\sum_{j_3=0}^{p}C_{j_4j_3j_3j_3}C_{j_4j_3j_2'j_2'}+\sum_{j_3=0}^{p}\sum_{j_1=0}^{j_3-1}\sum_{(j_1,j_1,j_3,j_3)}C_{(j_4j_3j_1j_1}C_{j_4j_3j_2'j_2')};$$

$$\mathsf{M}\left\{\sum_{j_1,j_2,j_3,j_2'=0}^{p}C_{j_4j_3j_2j_1}C_{j_4j_3'j_2'j_3'}\zeta_{j_1}\zeta_{j_2}\zeta_{j_3}\zeta_{j_2'}\right\}=$$
$$=3\sum_{j_3=0}^{p}C_{j_4j_3j_3j_3}C_{j_4j_3'j_3j_3'}+\sum_{j_3=0}^{p}\sum_{j_1=0}^{j_3-1}\sum_{(j_1,j_1,j_3,j_3)}C_{(j_4j_3j_3j_1}C_{j_4j_3'j_1j_3')};$$

$$\mathsf{M}\left\{\sum_{j_1,j_2,j_3,j_1'=0}^{p}C_{j_4j_3j_2j_1}C_{j_4j_3'j_3'j_1'}\zeta_{j_1}\zeta_{j_2}\zeta_{j_3}\zeta_{j_1'}\right\}=$$
$$=3\sum_{j_3=0}^{p}C_{j_4j_3j_3j_3}C_{j_4j_3'j_3'j_3}+\sum_{j_3=0}^{p}\sum_{j_1=0}^{j_3-1}\sum_{(j_1,j_1,j_3,j_3)}C_{(j_4j_3j_3j_1}C_{j_4j_3'j_3'j_1)}.$$

Комбинируя полученные равенства вычисляем интересующую нас среднеквадратическую погрешность аппроксимации по формуле:

$$\mathsf{M}\left\{\left(J[\psi^{(4)}]^p_{T,t}-J[\psi^{(4)}]_{T,t}\right)^2\right\}=\int\limits_{[t,T]^4}K^2(t_1,\ldots,t_4)dt_1\ldots dt_4-$$

$$-\mathsf{M}\left\{\left(J[\psi^{(4)}]_{T,t}^{p}\right)^2\right\}. \tag{4.17}$$

Для 8 частного случая ($i_2 = i_3 = i_4 \neq i_1$) имеем:

$$J[\psi^{(4)}]_{T,t}^{p} = \sum_{j_1,j_2,j_3,j_4=0}^{p} C_{j_4j_3j_2j_1}\Biggl(\zeta_{j_2}\zeta_{j_3}\zeta_{j_4}\tilde{\zeta}_{j_1} - \mathbf{1}_{\{j_2=j_3\}}\zeta_{j_4}\tilde{\zeta}_{j_1} -$$

$$-\mathbf{1}_{\{j_2=j_4\}}\zeta_{j_3}\tilde{\zeta}_{j_1} - \mathbf{1}_{\{j_3=j_4\}}\zeta_{j_2}\tilde{\zeta}_{j_1}\Biggr),$$

где $\zeta_j^{(i_2)} = \zeta_j^{(i_3)} = \zeta_j^{(i_4)} = \zeta_j$, $\zeta_j^{(i_1)} = \tilde{\zeta}_j$;

$$\mathsf{M}\left\{\left(J[\psi^{(4)}]_{T,t}^{p}\right)^2\right\} = \sum_{j_1=0}^{p} \mathsf{M}\Biggl\{\sum_{j_2,j_2',j_3,j_3',j_4,j_4'=0}^{p} C_{j_4j_3j_2j_1}C_{j_4'j_3'j_2'j_1}\zeta_{j_2}\zeta_{j_2'}\zeta_{j_3}\zeta_{j_3'}\zeta_{j_4}\zeta_{j_4'}\Biggr\} -$$

$$-2\sum_{j_3',j_1=0}^{p} \mathsf{M}\Biggl\{\sum_{j_2,j_3,j_4,j_4'=0}^{p} C_{j_4j_3j_2j_1}C_{j_4'j_3'j_3'j_1}\zeta_{j_2}\zeta_{j_3}\zeta_{j_4}\zeta_{j_4'}\Biggr\} -$$

$$-2\sum_{j_1,j_4'=0}^{p} \mathsf{M}\Biggl\{\sum_{j_2,j_3,j_4,j_3'=0}^{p} C_{j_4j_3j_2j_1}C_{j_4'j_3'j_4'j_1}\zeta_{j_2}\zeta_{j_3}\zeta_{j_4}\zeta_{j_3'}\Biggr\} -$$

$$-2\sum_{j_4',j_1=0}^{p} \mathsf{M}\Biggl\{\sum_{j_2,j_3,j_4,j_2'=0}^{p} C_{j_4j_3j_2j_1}C_{j_4'j_4'j_2'j_1}\zeta_{j_2}\zeta_{j_3}\zeta_{j_4}\zeta_{j_2'}\Biggr\} +$$

$$+\sum_{j_1,j_2,j_3,j_4=0}^{p}\left(C_{j_4j_2j_2j_1}C_{j_4j_3j_3j_1} + C_{j_4j_3j_4j_1}C_{j_2j_3j_2j_1} + C_{j_4j_4j_2j_1}C_{j_3j_3j_2j_1} +\right.$$

$$\left.+2C_{j_4j_3j_4j_1}C_{j_3j_2j_2j_1} + 2C_{j_4j_4j_2j_1}C_{j_2j_3j_3j_1} + 2C_{j_4j_4j_2j_1}C_{j_3j_2j_3j_1}\right).$$

Далее, согласно (2.162) при $k = 6$ и $k = 4$ имеем:

$$\mathsf{M}\Biggl\{\sum_{j_2,j_2',j_3,j_3',j_4,j_4'=0}^{p} C_{j_4j_3j_2j_1}C_{j_4'j_3'j_2'j_1}\zeta_{j_2}\zeta_{j_2'}\zeta_{j_3}\zeta_{j_3'}\zeta_{j_4}\zeta_{j_4'}\Biggr\} =$$

$$= 15\sum_{j_4=0}^{p} C_{j_4j_4j_4j_1}^2 + \sum_{j_4=0}^{p}\sum_{j_3=0}^{j_4-1}\sum_{j_2=0}^{j_3-1}\sum_{(j_2,j_2,j_3,j_3,j_4,j_4)} C_{(j_4j_3j_2j_1}C_{j_4j_3j_2j_1)} +$$

$$+3\sum_{j_4=0}^{p}\sum_{j_2=0}^{j_4-1}\sum_{(j_2,j_2,j_4,j_4,j_4,j_4)} C_{(j_4j_4j_2j_1}C_{j_4j_4j_2j_1)} +$$

$$+3\sum_{j_4=0}^{p}\sum_{j_2=0}^{j_4-1}\sum_{(j_2,j_2,j_2,j_2,j_4,j_4)} C_{(j_4j_2j_2j_1}C_{j_4j_2j_2j_1)};$$

$$
\mathsf{M}\left\{\sum_{j_2,j_3,j_4,j_4'=0}^{p} C_{j_4j_3j_2j_1}C_{j_4'j_3'j_3'j_1}\zeta_{j_2}\zeta_{j_3}\zeta_{j_4}\zeta_{j_4'}\right\}=
$$

$$
=3\sum_{j_4=0}^{p} C_{j_4j_4j_4j_1}C_{j_4j_3'j_3'j_1}+\sum_{j_4=0}^{p}\sum_{j_2=0}^{j_4-1}\sum_{(j_2,j_2,j_4,j_4)} C_{(j_4j_2j_2j_1}C_{j_4j_3'j_3'j_1)};
$$

$$
\mathsf{M}\left\{\sum_{j_2,j_3,j_3',j_4=0}^{p} C_{j_4j_3j_2j_1}C_{j_4'j_3'j_4'j_1}\zeta_{j_2}\zeta_{j_3}\zeta_{j_4}\zeta_{j_3'}\right\}=
$$

$$
=3\sum_{j_4=0}^{p} C_{j_4j_4j_4j_1}C_{j_4'j_4j_4'j_1}+\sum_{j_4=0}^{p}\sum_{j_2=0}^{j_4-1}\sum_{(j_2,j_2,j_4,j_4)} C_{(j_4j_2j_2j_1}C_{j_4'j_4j_4'j_1)};
$$

$$
\mathsf{M}\left\{\sum_{j_2,j_2',j_3,j_4=0}^{p} C_{j_4j_3j_2j_1}C_{j_4'j_4'j_2'j_1}\zeta_{j_2}\zeta_{j_3}\zeta_{j_4}\zeta_{j_2'}\right\}=
$$

$$
=3\sum_{j_4=0}^{p} C_{j_4j_4j_4j_1}C_{j_4'j_4'j_4j_1}+\sum_{j_4=0}^{p}\sum_{j_2=0}^{j_4-1}\sum_{(j_2,j_2,j_4,j_4)} C_{(j_4j_4j_2j_1}C_{j_4'j_4'j_2j_1)}.
$$

Объединяя полученные равенства и используя (4.17), получим интересующую нас среднеквадратическую погрешность аппроксимации.

Рассмотрим по аналогии 9 частный случай $(i_1=i_2=i_4\neq i_3)$:

$$
J[\psi^{(4)}]_{T,t}^{p}=\sum_{j_1,j_2,j_3,j_4=0}^{p} C_{j_4j_3j_2j_1}\Biggl(\zeta_{j_1}\zeta_{j_2}\zeta_{j_4}\tilde{\zeta}_{j_3}-\mathbf{1}_{\{j_1=j_2\}}\zeta_{j_4}\tilde{\zeta}_{j_3}-
$$

$$
-\mathbf{1}_{\{j_1=j_4\}}\zeta_{j_2}\tilde{\zeta}_{j_3}-\mathbf{1}_{\{j_2=j_4\}}\zeta_{j_1}\tilde{\zeta}_{j_3}\Biggr),
$$

где $\zeta_j^{(i_1)}=\zeta_j^{(i_2)}=\zeta_j^{(i_4)}=\zeta_j$, $\zeta_j^{(i_3)}=\tilde{\zeta}_j$;

$$
\mathsf{M}\left\{\left(J[\psi^{(4)}]_{T,t}^{p}\right)^2\right\}=\sum_{j_3=0}^{p}\mathsf{M}\left\{\sum_{j_1,j_1',j_2,j_2',j_4,j_4'=0}^{p} C_{j_4j_3j_2j_1}C_{j_4'j_3j_2'j_1'}\zeta_{j_1}\zeta_{j_2}\zeta_{j_4}\zeta_{j_1'}\zeta_{j_2'}\zeta_{j_4'}\right\}-
$$

$$
-2\sum_{j_3,j_2'=0}^{p}\mathsf{M}\left\{\sum_{j_4,j_2,j_1,j_4'=0}^{p} C_{j_4j_3j_2j_1}C_{j_4'j_3j_2'j_2'}\zeta_{j_1}\zeta_{j_2}\zeta_{j_4}\zeta_{j_4'}\right\}-
$$

$$
-2\sum_{j_3,j_4'=0}^{p}\mathsf{M}\left\{\sum_{j_1,j_2,j_4,j_2'=0}^{p} C_{j_4j_3j_2j_1}C_{j_4'j_3j_2'j_4'}\zeta_{j_1}\zeta_{j_2}\zeta_{j_4}\zeta_{j_2'}\right\}-
$$

$$
-2\sum_{j_4',j_3=0}^{p}\mathsf{M}\left\{\sum_{j_1,j_2,j_4,j_1'=0}^{p} C_{j_4j_3j_2j_1}C_{j_4'j_3j_4'j_1'}\zeta_{j_1}\zeta_{j_2}\zeta_{j_4}\zeta_{j_1'}\right\}+
$$

$$+\sum_{j_1,j_2,j_3,j_4=0}^{p}(C_{j_4j_3j_2j_2}C_{j_4j_3j_1j_1}+C_{j_4j_3j_2j_4}C_{j_1j_3j_2j_1}+C_{j_4j_3j_4j_1}C_{j_2j_3j_2j_1}+$$
$$+2C_{j_4j_3j_2j_4}C_{j_2j_3j_1j_1}+2C_{j_4j_3j_4j_1}C_{j_1j_3j_2j_2}+2C_{j_4j_3j_4j_1}C_{j_2j_3j_1j_2});$$

$$\mathsf{M}\left\{\sum_{j_1,j_1',j_2,j_2',j_4,j_4'=0}^{p}C_{j_4j_3j_2j_1}C_{j_4'j_3j_2'j_1'}\zeta_{j_1}\zeta_{j_2}\zeta_{j_4}\zeta_{j_1'}\zeta_{j_2'}\zeta_{j_4'}\right\}=$$
$$=15\sum_{j_4=0}^{p}C^2_{j_4j_3j_4j_4}+\sum_{j_4=0}^{p}\sum_{j_2=0}^{j_4-1}\sum_{j_1=0}^{j_2-1}\sum_{(j_1,j_1,j_2,j_2,j_4,j_4)}C_{(j_4j_3j_2j_1}C_{j_4j_3j_2j_1)}+$$
$$+3\sum_{j_4=0}^{p}\sum_{j_1=0}^{j_4-1}\sum_{(j_1,j_1,j_4,j_4,j_4,j_4)}C_{(j_4j_3j_4j_1}C_{j_4j_3j_4j_1)}+$$
$$+3\sum_{j_4=0}^{p}\sum_{j_1=0}^{j_4-1}\sum_{(j_1,j_1,j_1,j_1,j_4,j_4)}C_{(j_4j_3j_1j_1}C_{j_4j_3j_1j_1)};$$

$$\mathsf{M}\left\{\sum_{j_1,j_2,j_4,j_4'=0}^{p}C_{j_4j_3j_2j_1}C_{j_4'j_3j_2'j_2'}\zeta_{j_1}\zeta_{j_2}\zeta_{j_4}\zeta_{j_4'}\right\}=$$
$$=3\sum_{j_4=0}^{p}C_{j_4j_3j_4j_4}C_{j_4j_3j_2'j_2'}+\sum_{j_4=0}^{p}\sum_{j_1=0}^{j_4-1}\sum_{(j_1,j_1,j_4,j_4)}C_{(j_4j_3j_1j_1}C_{j_4j_3j_2'j_2')};$$

$$\mathsf{M}\left\{\sum_{j_1,j_2,j_4,j_2'=0}^{p}C_{j_4j_3j_2j_1}C_{j_4'j_3j_2'j_4'}\zeta_{j_1}\zeta_{j_2}\zeta_{j_4}\zeta_{j_2'}\right\}=$$
$$=3\sum_{j_4=0}^{p}C_{j_4j_3j_4j_4}C_{j_4'j_3j_4j_4'}+\sum_{j_4=0}^{p}\sum_{j_1=0}^{j_4-1}\sum_{(j_1,j_1,j_4,j_4)}C_{(j_4j_3j_1j_1}C_{j_4'j_3j_4j_4')};$$

$$\mathsf{M}\left\{\sum_{j_1,j_2,j_4,j_1'=0}^{p}C_{j_4j_3j_2j_1}C_{j_4'j_3j_4'j_1'}\zeta_{j_1}\zeta_{j_2}\zeta_{j_4}\zeta_{j_1'}\right\}=$$
$$=3\sum_{j_4=0}^{p}C_{j_4j_3j_4j_4}C_{j_4'j_3j_4'j_4}+\sum_{j_4=0}^{p}\sum_{j_1=0}^{j_4-1}\sum_{(j_1,j_1,j_4,j_4)}C_{(j_4j_3j_1j_1}C_{j_4'j_3j_4'j_4)}.$$

Аналогично в 10 частном случае $(i_1=i_3=i_4\neq i_2)$ имеем:

$$J[\psi^{(4)}]^p_{T,t}=\sum_{j_1,j_2,j_3,j_4=0}^{p}C_{j_4j_3j_2j_1}\Bigl(\zeta_{j_1}\zeta_{j_3}\zeta_{j_4}\tilde{\zeta}_{j_2}-\mathbf{1}_{\{j_1=j_3\}}\zeta_{j_4}\tilde{\zeta}_{j_2}-$$
$$-\mathbf{1}_{\{j_1=j_4\}}\zeta_{j_3}\tilde{\zeta}_{j_2}-\mathbf{1}_{\{j_3=j_4\}}\zeta_{j_1}\tilde{\zeta}_{j_2}\Bigr),$$

где $\zeta_j^{(i_1)}=\zeta_j^{(i_3)}=\zeta_j^{(i_4)}=\zeta_j,\ \zeta_j^{(i_2)}=\tilde{\zeta}_j$;

$$
\begin{aligned}
\mathsf{M}\left\{\left(J[\psi^{(4)}]_{T,t}^{p}\right)^2\right\}=\sum_{j_2=0}^{p}\mathsf{M}\Biggl\{\sum_{j_1,j_1',j_3,j_3',j_4,j_4'=0}^{p}C_{j_4j_3j_2j_1}C_{j_4'j_3'j_2j_1'}\zeta_{j_1}\zeta_{j_1'}\zeta_{j_3}\zeta_{j_3'}\zeta_{j_4}\zeta_{j_4'}\Biggr\}-\\
-2\sum_{j_3',j_2=0}^{p}\mathsf{M}\Biggl\{\sum_{j_1,j_3,j_4,j_4'=0}^{p}C_{j_4j_3j_2j_1}C_{j_4'j_3'j_2j_3'}\zeta_{j_1}\zeta_{j_3}\zeta_{j_4}\zeta_{j_4'}\Biggr\}-\\
-2\sum_{j_2,j_4'=0}^{p}\mathsf{M}\Biggl\{\sum_{j_1,j_3,j_4,j_3'=0}^{p}C_{j_4j_3j_2j_1}C_{j_4'j_3'j_2j_4'}\zeta_{j_1}\zeta_{j_3}\zeta_{j_4}\zeta_{j_3'}\Biggr\}-\\
-2\sum_{j_4',j_2=0}^{p}\mathsf{M}\Biggl\{\sum_{j_1,j_3,j_4,j_1'=0}^{p}C_{j_4j_3j_2j_1}C_{j_4'j_4'j_2j_1'}\zeta_{j_1}\zeta_{j_3}\zeta_{j_4}\zeta_{j_1'}\Biggr\}+\\
+\sum_{j_1,j_2,j_3,j_4=0}^{p}\bigl(C_{j_4j_3j_2j_3}C_{j_4j_1j_2j_1}+C_{j_4j_3j_2j_4}C_{j_1j_3j_2j_1}+C_{j_4j_4j_2j_1}C_{j_3j_3j_2j_1}+\\
+2C_{j_4j_3j_2j_4}C_{j_3j_1j_2j_1}+2C_{j_4j_4j_2j_1}C_{j_1j_3j_2j_3}+2C_{j_4j_4j_2j_1}C_{j_3j_1j_2j_3}\bigr)\,;
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\mathsf{M}\Biggl\{\sum_{j_1,j_1',j_3,j_3',j_4,j_4'=0}^{p}C_{j_4j_3j_2j_1}C_{j_4'j_3'j_2j_1'}\zeta_{j_1}\zeta_{j_1'}\zeta_{j_3}\zeta_{j_3'}\zeta_{j_4}\zeta_{j_4'}\Biggr\}=\\
=15\sum_{j_4=0}^{p}C_{j_4j_4j_2j_4}^2+\sum_{j_4=0}^{p}\sum_{j_3=0}^{j_4-1}\sum_{j_1=0}^{j_3-1}\sum_{(j_1,j_1,j_3,j_3,j_4,j_4)}C_{(j_4j_3j_2j_1}C_{j_4j_3j_2j_1)}+\\
+3\sum_{j_4=0}^{p}\sum_{j_1=0}^{j_4-1}\sum_{(j_1,j_1,j_4,j_4,j_4,j_4)}C_{(j_4j_4j_2j_1}C_{j_4j_4j_2j_1)}+\\
+3\sum_{j_4=0}^{p}\sum_{j_1=0}^{j_4-1}\sum_{(j_1,j_1,j_1,j_1,j_4,j_4)}C_{(j_4j_1j_2j_1}C_{j_4j_1j_2j_1)};
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\mathsf{M}\Biggl\{\sum_{j_1,j_3,j_4,j_4'=0}^{p}C_{j_4j_3j_2j_1}C_{j_4'j_3'j_2j_3'}\zeta_{j_1}\zeta_{j_3}\zeta_{j_4}\zeta_{j_4'}\Biggr\}=\\
=3\sum_{j_4=0}^{p}C_{j_4j_4j_2j_4}C_{j_4j_3'j_2j_3'}+\sum_{j_4=0}^{p}\sum_{j_1=0}^{j_4-1}\sum_{(j_1,j_1,j_4,j_4)}C_{(j_4j_1j_2j_1}C_{j_4j_3'j_2j_3')};
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\mathsf{M}\Biggl\{\sum_{j_1,j_3,j_4,j_3'=0}^{p}C_{j_4j_3j_2j_1}C_{j_4'j_3'j_2j_4'}\zeta_{j_1}\zeta_{j_3}\zeta_{j_4}\zeta_{j_3'}\Biggr\}=\\
=3\sum_{j_4=0}^{p}C_{j_4j_4j_2j_4}C_{j_4'j_4j_2j_4'}+\sum_{j_4=0}^{p}\sum_{j_1=0}^{j_4-1}\sum_{(j_1,j_1,j_4,j_4)}C_{(j_4j_4j_2j_1}C_{j_4'j_1j_2j_4')};
\end{aligned}
$$

$$\mathsf{M}\left\{\sum_{j_1,j_3,j_4,j_1'=0}^{p} C_{j_4j_3j_2j_1}C_{j_4'j_4'j_2j_1'}\zeta_{j_1}\zeta_{j_3}\zeta_{j_4}\zeta_{j_1'}\right\}=$$

$$=3\sum_{j_4=0}^{p} C_{j_4j_4j_2j_4}C_{j_4'j_4'j_2j_4}+\sum_{j_4=0}^{p}\sum_{j_1=0}^{j_4-1}\sum_{(j_1,j_1,j_4,j_4)} C_{(j_4j_4j_2j_1}C_{j_4'j_4'j_2j_1)}.$$

Перейдем к 11 – 14 частным случаям. Используя теорему 1, выпишем выражения для аппроксимаций в этих случаях.

Для 11 частного случая $(i_1=i_2=i_3=i_4)$:

$$J[\psi^{(4)}]_{T,t}^{p}=\sum_{j_1,j_2,j_3,j_4=0}^{p} C_{j_4j_3j_2j_1}\Biggl(\prod_{l=1}^{4}\zeta_{j_l}-\mathbf{1}_{\{j_1=j_2\}}\zeta_{j_3}\zeta_{j_4}-\mathbf{1}_{\{j_1=j_3\}}\zeta_{j_2}\zeta_{j_4}-$$

$$-\mathbf{1}_{\{j_1=j_4\}}\zeta_{j_2}\zeta_{j_3}-\mathbf{1}_{\{j_2=j_3\}}\zeta_{j_1}\zeta_{j_4}-\mathbf{1}_{\{j_2=j_4\}}\zeta_{j_1}\zeta_{j_3}-\mathbf{1}_{\{j_3=j_4\}}\zeta_{j_1}\zeta_{j_2}+$$

$$+\mathbf{1}_{\{j_1=j_2\}}\mathbf{1}_{\{j_3=j_4\}}+\mathbf{1}_{\{j_1=j_3\}}\mathbf{1}_{\{j_2=j_4\}}+\mathbf{1}_{\{j_1=j_4\}}\mathbf{1}_{\{j_2=j_3\}}\Biggr), \tag{4.18}$$

где $\zeta_j^{(i_1)}=\zeta_j^{(i_2)}=\zeta_j^{(i_3)}=\zeta_j^{(i_4)}=\zeta_j$.

Для 12 частного случая $(i_1=i_2\neq i_3=i_4)$:

$$J[\psi^{(4)}]_{T,t}^{p}=\sum_{j_1,j_2,j_3,j_4=0}^{p} C_{j_4j_3j_2j_1}\Biggl(\zeta_{j_1}^{(i_1)}\zeta_{j_2}^{(i_1)}\zeta_{j_3}^{(i_3)}\zeta_{j_4}^{(i_3)}-\mathbf{1}_{\{j_1=j_2\}}\zeta_{j_3}^{(i_3)}\zeta_{j_4}^{(i_3)}-$$

$$-\mathbf{1}_{\{j_3=j_4\}}\zeta_{j_1}^{(i_1)}\zeta_{j_2}^{(i_1)}+\mathbf{1}_{\{j_1=j_2\}}\mathbf{1}_{\{j_3=j_4\}}\Biggr).$$

Для 13 частного случая $(i_1=i_3\neq i_2=i_4)$:

$$J[\psi^{(4)}]_{T,t}^{p}=\sum_{j_1,j_2,j_3,j_4=0}^{p} C_{j_4j_3j_2j_1}\Biggl(\zeta_{j_1}^{(i_1)}\zeta_{j_3}^{(i_1)}\zeta_{j_2}^{(i_2)}\zeta_{j_4}^{(i_2)}-\mathbf{1}_{\{j_1=j_3\}}\zeta_{j_2}^{(i_2)}\zeta_{j_4}^{(i_2)}-$$

$$-\mathbf{1}_{\{j_2=j_4\}}\zeta_{j_1}^{(i_1)}\zeta_{j_3}^{(i_1)}+\mathbf{1}_{\{j_1=j_3\}}\mathbf{1}_{\{j_2=j_4\}}\Biggr).$$

Для 14 частного случая $(i_1=i_4\neq i_2=i_3)$:

$$J[\psi^{(4)}]_{T,t}^{p}=\sum_{j_1,j_2,j_3,j_4=0}^{p} C_{j_4j_3j_2j_1}\Biggl(\zeta_{j_1}^{(i_1)}\zeta_{j_4}^{(i_1)}\zeta_{j_2}^{(i_2)}\zeta_{j_3}^{(i_2)}-\mathbf{1}_{\{j_1=j_4\}}\zeta_{j_2}^{(i_2)}\zeta_{j_3}^{(i_2)}-$$

$$-\mathbf{1}_{\{j_2=j_3\}}\zeta_{j_1}^{(i_1)}\zeta_{j_4}^{(i_1)}+\mathbf{1}_{\{j_1=j_4\}}\mathbf{1}_{\{j_2=j_3\}}\Biggr).$$

В силу некоторой громоздкости мы не будем подробно изучать данные частные случаи, а сделаем лишь некоторые замечания (принципиальной сложности при рассмотрении частных случаев 11 – 14 по сравнению с предыдущими очевидно нет).

Нетрудно видеть, что в 11 – 14 частных случаях выполняется:

$$\mathsf{M}\left\{J[\psi^{(4)}]_{T,t}^{p}\right\}=0.$$

В рамках 11 частного случая при $\psi_1(s),\ldots,\psi_4(s)\equiv 1$, как уже отмечалось ранее, с в.1 справедлива формула (см. разд. 6.2):

$$J[\psi^{(4)}]_{T,t}=I_{0000_{T,t}}^{(i_1i_1i_1i_1)}=\frac{(T-t)^2}{24}\left(\left(\zeta_0^{(i_1)}\right)^4-6\left(\zeta_0^{(i_1)}\right)^2+3\right).$$

В более общем случае, когда $\psi_1(s),\ldots,\psi_4(s)\equiv(t-s)^l$; l — фиксированное натуральное число или ноль, с в. 1 также можем записать (см. разд. 6.2):

$$J[\psi^{(4)}]_{T,t}=I_{llll_{T,t}}^{(i_1i_1i_1i_1)}=\frac{1}{24}\left(\left(I_{l_{T,t}}^{(i_1)}\right)^4-6\left(I_{l_{T,t}}^{(i_1)}\right)^2\Delta_{l_{T,t}}+3\left(\Delta_{l_{T,t}}\right)^2\right),$$

$$J^*[\psi^{(4)}]_{T,t}=I_{llll_{T,t}}^{*(i_1i_1i_1i_1)}=\frac{1}{24}\left(I_{l_{T,t}}^{(i_1)}\right)^4,$$

$$I_{l_{T,t}}^{(i)}=\sum_{j=0}^{l}C_j\zeta_j^{(i_1)},\ \ \Delta_{l_{T,t}}=\int\limits_t^T(t-s)^{2l}ds,$$

где в предпоследней формуле предполагается, что разложение стохастического интеграла осуществляется с помощью полиномов Лежандра.

Очевидно, что основная трудность, которая встретится в 11 – 14 частных случаях при вычислении $\mathsf{M}\left\{\left(J[\psi^{(4)}]_{T,t}^{p}-J[\psi^{(4)}]_{T,t}\right)^2\right\}$ или, согласно формуле (4.17), при вычислении $\mathsf{M}\left\{\left(J[\psi^{(4)}]_{T,t}^{p}\right)^2\right\}$, будет связана с вычислением следующего математического ожидания (11 частный случай):

$$\mathsf{M}\Biggl\{\sum_{j_1,j_1',j_2,j_2',j_3,j_3',j_4,j_4'=0}^{p}C_{j_4j_3j_2j_1}C_{j_4'j_3'j_2'j_1'}\zeta_{j_1}\zeta_{j_1'}\zeta_{j_2}\zeta_{j_2'}\zeta_{j_3}\zeta_{j_3'}\zeta_{j_4}\zeta_{j_4'}\Biggr\}.$$

Согласно (2.162) при $k=8$ имеем:

$$\mathsf{M}\Biggl\{\sum_{j_1,j_1',j_2,j_2',j_3,j_3',j_4,j_4'=0}^{p}C_{j_4j_3j_2j_1}C_{j_4'j_3'j_2'j_1'}\zeta_{j_1}\zeta_{j_1'}\zeta_{j_2}\zeta_{j_2'}\zeta_{j_3}\zeta_{j_3'}\zeta_{j_4}\zeta_{j_4'}\Biggr\}=$$

$$=105\sum_{j_4=0}^{p}C_{j_4j_4j_4j_4}^2+15\sum_{j_4=0}^{p}\sum_{j_1=0}^{j_4-1}\sum_{(j_1,j_1,j_4,j_4,j_4,j_4,j_4,j_4)}C_{(j_4j_4j_4j_1}C_{j_4j_4j_4j_1)}+$$

$$+15\sum_{j_4=0}^{p}\sum_{j_1=0}^{j_4-1}\sum_{(j_1,j_1,j_1,j_1,j_1,j_1,j_4,j_4)} C_{(j_4j_1j_1j_1}C_{j_4j_1j_1j_1)}+$$

$$+9\sum_{j_4=0}^{p}\sum_{j_1=0}^{j_4-1}\sum_{(j_1,j_1,j_1,j_1,j_4,j_4,j_4,j_4)} C_{(j_4j_4j_1j_1}C_{j_4j_4j_1j_1)}+$$

$$+3\sum_{j_4=0}^{p}\sum_{j_2=0}^{j_4-1}\sum_{j_1=0}^{j_2-1}\sum_{(j_1,j_1,j_2,j_2,j_4,j_4,j_4,j_4)} C_{(j_4j_4j_2j_1}C_{j_4j_4j_2j_1)}+$$

$$+3\sum_{j_4=0}^{p}\sum_{j_2=0}^{j_4-1}\sum_{j_1=0}^{j_2-1}\sum_{(j_1,j_1,j_2,j_2,j_2,j_2,j_4,j_4)} C_{(j_4j_2j_2j_1}C_{j_4j_2j_2j_1)}+$$

$$+3\sum_{j_4=0}^{p}\sum_{j_3=0}^{j_4-1}\sum_{j_1=0}^{j_3-1}\sum_{(j_1,j_1,j_1,j_1,j_3,j_3,j_4,j_4)} C_{(j_4j_3j_1j_1}C_{j_4j_3j_1j_1)}+$$

$$+\sum_{j_4=0}^{p}\sum_{j_3=0}^{j_4-1}\sum_{j_2=0}^{j_3-1}\sum_{j_1=0}^{j_2-1}\sum_{(j_1,j_1,j_2,j_2,j_3,j_3,j_4,j_4)} C_{(j_4j_3j_2j_1}C_{j_4j_3j_2j_1)}.$$

По предложенной выше схеме можно методически повышая кратность k повторного стохастического интеграла Ито и, разделяя различные частные случаи, которые соответствуют различным сочетаниям индексов $i_1,\ldots,i_k = 1,\ldots,m$ вычислять точно среднеквадратические погрешности аппроксимаций повторных стохастических интегралов, полученные в соответствии с теоремой 1.

4.3 Некоторые особенности вычисления среднеквадратической погрешности аппроксимации для систем полиномиальных и тригонометрических функций

Покажем на примере, что для случая тригонометрической системы функций аппроксимация на основе формулы (4.1) может быть усовершенствована таким образом, что ошибка $\mathsf{M}\left\{\left(J[\psi^{(2)}]_{T,t}^{q}-J[\psi^{(2)}]_{T,t}\right)^2\right\}$ $(i_1\neq i_2)$ окажется значительно меньше, чем правая часть (4.3).

Пусть в качестве системы функций $\{\phi_j(s)\}_{j=0}^{\infty}$ взята тригонометрическая система функций

$$\phi_j(s)=\frac{1}{\sqrt{T-t}}\begin{cases}1 & \text{при } j=0\\ \sqrt{2}\sin\frac{2\pi r(s-t)}{T-t} & \text{при } j=2r-1\\ \sqrt{2}\cos\frac{2\pi r(s-t)}{T-t} & \text{при } j=2r\end{cases}, \tag{4.19}$$

где $r = 1,\ 2, \ldots$

Применяя (4.1) для системы функций (4.19) к повторному стохастическому интегралу Ито вида

$$I_{00_{T,t}}^{(i_2 i_1)} = \int\limits_t^T \int\limits_t^s d\mathbf{f}_\tau^{(i_2)} d\mathbf{f}_s^{(i_1)},\ i_1, i_2 = 1, \ldots, m;\ i_1 \neq i_2,$$

получаем

$$I_{00_{T,t}}^{(i_2 i_1)} = \frac{1}{2}(T-t)\Biggl[\zeta_0^{(i_1)}\zeta_0^{(i_2)} + \frac{1}{\pi}\sum_{r=1}^{\infty}\frac{1}{r}\left\{\zeta_{2r}^{(i_1)}\zeta_{2r-1}^{(i_2)} - \zeta_{2r-1}^{(i_1)}\zeta_{2r}^{(i_2)} + \right.$$

$$\left. + \sqrt{2}\left(\zeta_{2r-1}^{(i_1)}\zeta_0^{(i_2)} - \zeta_0^{(i_1)}\zeta_{2r-1}^{(i_2)}\right)\right\}\Biggr], \tag{4.20}$$

где $\zeta_j^{(i)} \stackrel{\text{def}}{=} \int\limits_t^T \phi_j(s) d\mathbf{f}_s^{(i)}$; $\mathbf{f}_s^{(i)}$ $(i = 1, \ldots, m)$ — независимые стандартные винеровские процессы. При этом ряд (4.20) сходится в среднеквадратическом смысле.

Согласно (4.1) следует записать

$$I_{00_{T,t}}^{(i_2 i_1)q} = \frac{1}{2}(T-t)\Biggl[\zeta_0^{(i_1)}\zeta_0^{(i_2)} + \frac{1}{\pi}\sum_{r=1}^{q}\frac{1}{r}\left\{\zeta_{2r}^{(i_1)}\zeta_{2r-1}^{(i_2)} - \zeta_{2r-1}^{(i_1)}\zeta_{2r}^{(i_2)} + \right.$$

$$\left. + \sqrt{2}\left(\zeta_{2r-1}^{(i_1)}\zeta_0^{(i_2)} - \zeta_0^{(i_1)}\zeta_{2r-1}^{(i_2)}\right)\right\}\Biggr]. \tag{4.21}$$

Из (4.20) и (4.21) при $i_1 \neq i_2$ имеем

$$\mathsf{M}\left\{\left(I_{00_{T,t}}^{(i_2 i_1)} - I_{00_{T,t}}^{(i_2 i_1)q}\right)^2\right\} = \frac{3(T-t)^2}{2\pi^2}\left(\frac{\pi^2}{6} - \sum_{r=1}^{q}\frac{1}{r^2}\right). \tag{4.22}$$

Нетрудно видеть, что правую часть (4.22) можно уменьшить в три раза, если вместо аппроксимации вида (4.21) взять следующую аппроксимацию [24]:

$$I_{00_{T,t}}^{(i_2 i_1)q} = \frac{1}{2}(T-t)\Biggl[\zeta_0^{(i_1)}\zeta_0^{(i_2)} + \frac{1}{\pi}\sum_{r=1}^{q}\frac{1}{r}\left\{\zeta_{2r}^{(i_1)}\zeta_{2r-1}^{(i_2)} - \zeta_{2r-1}^{(i_1)}\zeta_{2r}^{(i_2)} + \right.$$

$$\left. + \sqrt{2}\left(\zeta_{2r-1}^{(i_1)}\zeta_0^{(i_2)} - \zeta_0^{(i_1)}\zeta_{2r-1}^{(i_2)}\right)\right\} + \frac{\sqrt{2}}{\pi}\sqrt{\alpha_q}\left(\xi_q^{(i_1)}\zeta_0^{(i_2)} - \zeta_0^{(i_1)}\xi_q^{(i_2)}\right)\Biggr], \tag{4.23}$$

где

$$\xi_q^{(i)} = \frac{1}{\sqrt{\alpha_q}}\sum_{r=q+1}^{\infty}\frac{1}{r}\,\zeta_{2r-1}^{(i)} \sim \mathrm{N}(0,1);\ \alpha_q = \frac{\pi^2}{6} - \sum_{r=1}^{q}\frac{1}{r^2}.$$

При этом гауссовские случайные величины $\zeta_0^{(i)}$, $\zeta_{2r}^{(i)}$, $\zeta_{2r-1}^{(i)}$, $\xi_q^{(i)}$; $r = 1, \ldots, q$; $i = 1, \ldots, m$ независимы в совокупности.

Из (4.20) и (4.23) при $i_1 \neq i_2$ получаем

$$\mathsf{M}\left\{\left(I_{00_{T,t}}^{(i_2 i_1)} - I_{00_{T,t}}^{(i_2 i_1)q}\right)^2\right\} = \frac{(T-t)^2}{2\pi^2}\left(\frac{\pi^2}{6} - \sum_{r=1}^{q}\frac{1}{r^2}\right), \tag{4.24}$$

т. е. правая часть равенства (4.24) в три раза меньше, чем правая часть равенства (4.22).

Приведенный способ усовершенствования аппроксимаций повторных стохастических интегралов [24] обобщен на случай интегралов третьей кратности в [25]. По-видимому, при рассмотрении стохастических интегралов более высокой кратности, чем третья, нельзя предложить универсальный способ ввода дополнительных случайных величин так, как это сделано в (4.23). В результате в каждом случае приходится действовать индивидуально.

Этого не приходится однако делать при выборе в качестве системы функций $\{\phi_j(s)\}_{j=0}^{\infty}$ полной ортонормированной в пространстве $L_2([t,T])$ системы полиномов Лежандра.

Напомним, что в главе 2, с использованием системы полиномов Лежандра, для $i_1 \neq i_2$ было получено следующее разложение:

$$I_{00_{T,t}}^{(i_1 i_2)} = \frac{T-t}{2}\left[\zeta_0^{(i_1)}\zeta_0^{(i_2)} + \sum_{i=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{4i^2-1}}\left\{\zeta_{i-1}^{(i_1)}\zeta_i^{(i_2)} - \zeta_i^{(i_1)}\zeta_{i-1}^{(i_2)}\right\}\right],$$

которое не требует усовершенствования, как в случае тригонометрической системы функций.

Нетрудно проверить, что

$$\mathsf{M}\left\{\left(I_{00_{T,t}}^{(i_1 i_2)} - I_{00_{T,t}}^{(i_1 i_2)q}\right)^2\right\} = \frac{(T-t)^2}{2}\left(\frac{1}{2} - \sum_{i=1}^{q}\frac{1}{4i^2-1}\right). \tag{4.25}$$

Из (4.24) и (4.25) получаем:

$$\mathsf{M}\left\{\left(I_{00_{T,t}}^{(i_2 i_1)} - I_{00_{T,t}}^{(i_2 i_1)q}\right)^2\right\} = \frac{(T-t)^2}{2\pi^2}\sum_{r=q+1}^{\infty}\frac{1}{r^2} \leq$$

$$\leq \frac{(T-t)^2}{2\pi^2}\int_{q}^{\infty}\frac{dx}{x^2} = \frac{(T-t)^2}{2\pi^2 q} \leq C_1\frac{(T-t)^2}{q} \tag{4.26}$$

и

$$\mathsf{M}\left\{\left(I_{00_{T,t}}^{(i_1 i_2)}-I_{00_{T,t}}^{(i_1 i_2)q}\right)^2\right\}=\frac{(T-t)^2}{2}\sum_{i=q+1}^{\infty}\frac{1}{4i^2-1}\le$$

$$\le\frac{(T-t)^2}{2}\int\limits_q^{\infty}\frac{1}{4x^2-1}dx=-\frac{(T-t)^2}{8}\ln\left|1-\frac{2}{2q+1}\right|\le C_2\frac{(T-t)^2}{q}\qquad(4.27)$$

соответственно, где $C_1,\ C_2$ — постоянные.

Поскольку величина $T-t$ играет роль шага интегрирования в численных методах для стохастических дифференциальных уравнений Ито, то эта величина достаточно мала.

Принимая во внимание это обстоятельство, нетрудно заметить, что существует такая постоянная C_3, что

$$\mathsf{M}\left\{\left(I_{l_1\ldots l_{k}T,t}^{(i_1\ldots i_k)}-I_{l_1\ldots l_{k}T,t}^{(i_1\ldots i_k)q}\right)^2\right\}\le C_3\mathsf{M}\left\{\left(I_{00_{T,t}}^{(i_1 i_2)}-I_{00_{T,t}}^{(i_1 i_2)q}\right)^2\right\},\qquad(4.28)$$

где $I_{l_1\ldots l_{k}T,t}^{(i_1\ldots i_k)q}$ аппроксимация повторного стохастического интеграла $I_{l_1\ldots l_{k}T,t}^{(i_1\ldots i_k)}$ из семейства (2.67), которая имеет вид (4.1) для $q_1=\ldots=q_k=q$ и $i_1,\ldots,i_k=1,\ldots,m;\ k\ge 2.$

Из (4.26), (4.27) и (4.28) мы окончательно получаем:

$$\mathsf{M}\left\{\left(I_{l_1\ldots l_{k}T,t}^{(i_1\ldots i_k)}-I_{l_1\ldots l_{k}T,t}^{(i_1\ldots i_k)q}\right)^2\right\}\le C\frac{(T-t)^2}{q},\qquad(4.29)$$

где C — постоянная.

Отметим, что оценка (4.29) достаточно общая, но в тоже время и достаточно грубая. Существенная часть настоящей главы была как раз посвящена получению точных выражений для левой части (4.29) при $k=1,\ldots,4$. Эти точные выражения позволяют минимизировать длину последовательности стандартных гауссовских случайных величин, требуемую для совместной аппроксимации повторных стохастических интегралов.

Глава 5

Аппроксимация конкретных повторных стохастических интегралов Стратоновича и Ито

5.1 Аппроксимация конкретных повторных стохастических интегралов кратностей 1–5 с помощью полиномов Лежандра

В настоящей главе приводится большой практический материал (основанный на теоремах 1 – 4) о разложениях повторных стохастических интегралов Ито и Стратоновича вида

$$I_{l_1\ldots l_k T,t}^{(i_1\ldots i_k)}=\int\limits_t^T(t-t_k)^{l_k}\ldots\int\limits_t^{t_2}(t-t_1)^{l_1}d\mathbf{f}_{t_1}^{(i_1)}\ldots d\mathbf{f}_{t_k}^{(i_k)},$$

$$I_{l_1\ldots l_k T,t}^{*(i_1\ldots i_k)}=\int\limits_t^{*T}(t-t_k)^{l_k}\ldots\int\limits_t^{*t_2}(t-t_1)^{l_1}d\mathbf{f}_{t_1}^{(i_1)}\ldots d\mathbf{f}_{t_k}^{(i_k)},$$

где $i_1,\ldots,i_k=1,\ldots,m;\ l_1,\ldots,l_k=0,\ 1,\ldots.$

Полная ортонормированная система полиномов Лежандра в пространстве $L_2([t,T])$ имеет вид

$$\{\phi_j(x)\}_{j=0}^{\infty},\ \phi_j(x)=\sqrt{\frac{2j+1}{T-t}}P_j\left(\left(x-\frac{T+t}{2}\right)\frac{2}{T-t}\right),\tag{5.1}$$

где $P_j(x)$ — полином Лежандра. Известно [29], что полином $P_j(x)$ представим, например, в виде

$$P_j(x)=\frac{1}{2^j j!}\frac{d^j}{dx^j}\left(x^2-1\right)^j.$$

Это выражение, как известно, называется формулой Родрига. Отметим некоторые хорошо известные свойства полиномов $P_j(x)$:

$$P_j(1)=1;\ P_{j+1}(-1)=-P_j(-1);\ j=0,\ 1,\ 2,\ \ldots,$$

$$\frac{dP_{j+1}(x)}{dx}-\frac{dP_{j-1}(x)}{dx}=(2j+1)P_j(x);\ j=1,\ 2,\ldots,$$

$$\int\limits_{-1}^{1}x^kP_j(x)dx=0;\ k=0,\ 1,\ 2,\ldots,j-1,$$

$$\int\limits_{-1}^{1}P_k(x)P_j(x)dx=\begin{cases}0 & \text{при } k\neq j\\ \frac{2}{2j+1} & \text{при } k=j\end{cases},$$

$$xP_j(x)=\frac{(j+1)P_{j+1}(x)+jP_{j-1}(x)}{2j+1};\ j=1,\ 2,\ldots,$$

$$P_n(x)P_m(x)=\sum_{k=0}^{m}K_{m,n,k}P_{n+m-2k}(x),$$

где

$$K_{m,n,k}=\frac{a_{m-k}a_ka_{n-k}}{a_{m+n-k}}\cdot\frac{2n+2m-4k+1}{2n+2m-2k+1};\ a_k=\frac{(2k-1)!!}{k!};\ m\leq n.$$

Учитывая эти свойства и используя систему функций (5.1), с использованием результатов глав 1 и 2 (теоремы 1 – 4), получаем следующие разложения повторных стохастических интегралов Ито и Стратоновича:

$$I_{0_{T,t}}^{(i_1)}=\sqrt{T-t}\zeta_0^{(i_1)},\tag{5.2}$$

$$I_{1_{T,t}}^{(i_1)}=-\frac{(T-t)^{3/2}}{2}\left(\zeta_0^{(i_1)}+\frac{1}{\sqrt{3}}\zeta_1^{(i_1)}\right),\tag{5.3}$$

$$I_{2_{T,t}}^{(i_1)}=\frac{(T-t)^{5/2}}{3}\left(\zeta_0^{(i_1)}+\frac{\sqrt{3}}{2}\zeta_1^{(i_1)}+\frac{1}{2\sqrt{5}}\zeta_2^{(i_1)}\right),\tag{5.4}$$

$$I_{00_{T,t}}^{*(i_1i_2)}=\frac{T-t}{2}\left[\zeta_0^{(i_1)}\zeta_0^{(i_2)}+\sum_{i=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{4i^2-1}}\left\{\zeta_{i-1}^{(i_1)}\zeta_i^{(i_2)}-\zeta_i^{(i_1)}\zeta_{i-1}^{(i_2)}\right\}\right],\tag{5.5}$$

$$I_{01_{T,t}}^{*(i_1i_2)}=-\frac{T-t}{2}I_{00_{T,t}}^{*(i_1i_2)}-\frac{(T-t)^2}{4}\Biggl[\frac{1}{\sqrt{3}}\zeta_0^{(i_1)}\zeta_1^{(i_2)}+$$

$$
+\sum_{i=0}^{\infty}\Biggl(\frac{(i+2)\zeta_i^{(i_1)}\zeta_{i+2}^{(i_2)}-(i+1)\zeta_{i+2}^{(i_1)}\zeta_i^{(i_2)}}{\sqrt{(2i+1)(2i+5)}(2i+3)}-\frac{\zeta_i^{(i_1)}\zeta_i^{(i_2)}}{(2i-1)(2i+3)}\Biggr)\Biggr], \qquad (5.6)
$$

$$
I_{10_{T,t}}^{*(i_1i_2)}=-\frac{T-t}{2}I_{00_{T,t}}^{*(i_1i_2)}-\frac{(T-t)^2}{4}\Biggl[\frac{1}{\sqrt{3}}\zeta_0^{(i_2)}\zeta_1^{(i_1)}+
$$

$$
+\sum_{i=0}^{\infty}\Biggl(\frac{(i+1)\zeta_{i+2}^{(i_2)}\zeta_i^{(i_1)}-(i+2)\zeta_i^{(i_2)}\zeta_{i+2}^{(i_1)}}{\sqrt{(2i+1)(2i+5)}(2i+3)}+\frac{\zeta_i^{(i_1)}\zeta_i^{(i_2)}}{(2i-1)(2i+3)}\Biggr)\Biggr], \qquad (5.7)
$$

$$
I_{10_{T,t}}^{(i_1i_2)}=I_{10_{T,t}}^{*(i_1i_2)}+\frac{1}{4}\mathbf{1}_{\{i_1=i_2\}}(T-t)^2;\ I_{01_{T,t}}^{(i_1i_2)}=I_{01_{T,t}}^{*(i_1i_2)}+\frac{1}{4}\mathbf{1}_{\{i_1=i_2\}}(T-t)^2, \qquad (5.8)
$$

$$
I_{000_{T,t}}^{*(i_1i_2i_3)}=-\frac{1}{T-t}\left(I_{0_{T,t}}^{(i_3)}I_{10_{T,t}}^{*(i_2i_1)}+I_{0_{T,t}}^{(i_1)}I_{10_{T,t}}^{*(i_2i_3)}\right)+
$$

$$
+\frac{1}{2}I_{0_{T,t}}^{(i_3)}\left(I_{00_{T,t}}^{*(i_1i_2)}-I_{00_{T,t}}^{*(i_2i_1)}\right)-
$$

$$
-(T-t)^{\frac{3}{2}}\left[\frac{1}{6}\zeta_0^{(i_1)}\zeta_0^{(i_3)}\left(\zeta_0^{(i_2)}+\sqrt{3}\zeta_1^{(i_2)}-\frac{1}{\sqrt{5}}\zeta_2^{(i_2)}\right)+\right.
$$

$$
\left.+\frac{1}{4}D_{T,t}^{(i_1i_2i_3)}\right], \qquad (5.9)
$$

$$
I_{000_{T,t}}^{(i_1i_2i_3)}=I_{000_{T,t}}^{*(i_1i_2i_3)}+\mathbf{1}_{\{i_1=i_2\}}\frac{1}{2}I_{1_{T,t}}^{(i_3)}-\mathbf{1}_{\{i_2=i_3\}}\frac{1}{2}\left((T-t)I_{0_{T,t}}^{(i_1)}+I_{1_{T,t}}^{(i_1)}\right),
$$

$$
I_{02_{T,t}}^{*(i_1i_2)}=-\frac{(T-t)^2}{4}I_{00_{T,t}}^{*(i_1i_2)}-(T-t)I_{01_{T,t}}^{*(i_1i_2)}+\frac{(T-t)^3}{8}\Biggl[\frac{2}{3\sqrt{5}}\zeta_2^{(i_2)}\zeta_0^{(i_1)}+
$$

$$
+\frac{1}{3}\zeta_0^{(i_1)}\zeta_0^{(i_2)}+\sum_{i=0}^{\infty}\Biggl(\frac{(i+2)(i+3)\zeta_{i+3}^{(i_2)}\zeta_i^{(i_1)}-(i+1)(i+2)\zeta_i^{(i_2)}\zeta_{i+3}^{(i_1)}}{\sqrt{(2i+1)(2i+7)}(2i+3)(2i+5)}+
$$

$$
+\frac{(i^2+i-3)\zeta_{i+1}^{(i_2)}\zeta_i^{(i_1)}-(i^2+3i-1)\zeta_i^{(i_2)}\zeta_{i+1}^{(i_1)}}{\sqrt{(2i+1)(2i+3)}(2i-1)(2i+5)}\Biggr)\Biggr], \qquad (5.10)
$$

$$
I_{20_{T,t}}^{*(i_1i_2)}=-\frac{(T-t)^2}{4}I_{00_{T,t}}^{*(i_1i_2)}-(T-t)I_{10_{T,t}}^{*(i_1i_2)}+\frac{(T-t)^3}{8}\Biggl[\frac{2}{3\sqrt{5}}\zeta_0^{(i_2)}\zeta_2^{(i_1)}+
$$

$$+\frac{1}{3}\zeta_0^{(i_1)}\zeta_0^{(i_2)}+\sum_{i=0}^{\infty}\Biggl(\frac{(i+1)(i+2)\zeta_{i+3}^{(i_2)}\zeta_i^{(i_1)}-(i+2)(i+3)\zeta_i^{(i_2)}\zeta_{i+3}^{(i_1)}}{\sqrt{(2i+1)(2i+7)}(2i+3)(2i+5)}+$$

$$+\frac{(i^2+3i-1)\zeta_{i+1}^{(i_2)}\zeta_i^{(i_1)}-(i^2+i-3)\zeta_i^{(i_2)}\zeta_{i+1}^{(i_1)}}{\sqrt{(2i+1)(2i+3)}(2i-1)(2i+5)}\Biggr)\Biggr], \tag{5.11}$$

$$I_{11_{T,t}}^{*(i_1i_2)}=-\frac{(T-t)^2}{4}I_{00_{T,t}}^{*(i_1i_2)}-\frac{(T-t)}{2}\left(I_{10_{T,t}}^{*(i_1i_2)}+I_{01_{T,t}}^{*(i_1i_2)}\right)+\frac{(T-t)^3}{8}\Biggl[\frac{1}{3}\zeta_1^{(i_1)}\zeta_1^{(i_2)}+$$

$$+\sum_{i=0}^{\infty}\Biggl(\frac{(i+1)(i+3)\left(\zeta_{i+3}^{(i_2)}\zeta_i^{(i_1)}-\zeta_i^{(i_2)}\zeta_{i+3}^{(i_1)}\right)}{\sqrt{(2i+1)(2i+7)}(2i+3)(2i+5)}+$$

$$+\frac{(i+1)^2\left(\zeta_{i+1}^{(i_2)}\zeta_i^{(i_1)}-\zeta_i^{(i_2)}\zeta_{i+1}^{(i_1)}\right)}{\sqrt{(2i+1)(2i+3)}(2i-1)(2i+5)}\Biggr)\Biggr], \tag{5.12}$$

$$I_{02_{T,t}}^{(i_1i_2)}=I_{02_{T,t}}^{*(i_1i_2)}-\frac{1}{6}\mathbf{1}_{\{i_1=i_2\}}(T-t)^3;\ I_{20_{T,t}}^{(i_1i_2)}=I_{20_{T,t}}^{*(i_1i_2)}-\frac{1}{6}\mathbf{1}_{\{i_1=i_2\}}(T-t)^3, \tag{5.13}$$

$$I_{11_{T,t}}^{(i_1i_2)}=I_{11_{T,t}}^{*(i_1i_2)}-\frac{1}{6}\mathbf{1}_{\{i_1=i_2\}}(T-t)^3, \tag{5.14}$$

$$I_{3_{T,t}}^{(i_1)}=-\frac{(T-t)^{7/2}}{4}\left(\zeta_0^{(i_1)}+\frac{3\sqrt{3}}{5}\zeta_1^{(i_1)}+\frac{1}{\sqrt{5}}\zeta_2^{(i_1)}+\frac{1}{5\sqrt{7}}\zeta_3^{(i_1)}\right), \tag{5.15}$$

$$D_{T,t}^{(i_1i_2i_3)}=\sum_{\substack{i=1,j=0,k=i\\ 2i\ge k+i-j\ge -2;\ k+i-j\ -\ \text{четное}}}^{\infty} N_{ijk}K_{i+1,k+1,\frac{k+i-j}{2}+1}\zeta_i^{(i_1)}\zeta_j^{(i_2)}\zeta_k^{(i_3)}+$$

$$+\sum_{\substack{i=1,j=0\\ 2k\ge k+i-j\ge -2;\ k+i-j\ -\ \text{четное}}}^{\infty}\ \sum_{k=1}^{i-1} N_{ijk}K_{k+1,i+1,\frac{k+i-j}{2}+1}\zeta_i^{(i_1)}\zeta_j^{(i_2)}\zeta_k^{(i_3)}-$$

$$-\sum_{\substack{i=1,j=0,k=i+2\\ 2i+2\ge k+i-j\ge 0;\ k+i-j\ -\ \text{четное}}}^{\infty} N_{ijk}K_{i+1,k-1,\frac{k+i-j}{2}}\zeta_i^{(i_1)}\zeta_j^{(i_2)}\zeta_k^{(i_3)}-$$

$$-\sum_{\substack{i=1,j=0\\ 2k-2\ge k+i-j\ge 0;\ k+i-j\ -\ \text{четное}}}^{\infty}\ \sum_{k=1}^{i+1} N_{ijk}K_{k-1,i+1,\frac{k+i-j}{2}}\zeta_i^{(i_1)}\zeta_j^{(i_2)}\zeta_k^{(i_3)}-$$

$$-\sum_{\substack{i=1,j=0,k=i-2,k\geq 1\\ 2i-2\geq k+i-j\geq 0;\ k+i-j\ -\ \text{четное}}}^{\infty} N_{ijk}K_{i-1,k+1,\frac{k+i-j}{2}}\zeta_i^{(i_1)}\zeta_j^{(i_2)}\zeta_k^{(i_3)}-$$

$$-\sum_{\substack{i=1,j=0\\ 2k+2\geq k+i-j\geq 0;\ k+i-j\ -\ \text{четное}}}^{\infty}\sum_{k=1}^{i-3} N_{ijk}K_{k+1,i-1,\frac{k+i-j}{2}}\zeta_i^{(i_1)}\zeta_j^{(i_2)}\zeta_k^{(i_3)}+$$

$$+\sum_{\substack{i=1,j=0,k=i\\ 2i\geq k+i-j\geq 2;\ k+i-j\ -\ \text{четное}}}^{\infty} N_{ijk}K_{i-1,k-1,\frac{k+i-j}{2}-1}\zeta_i^{(i_1)}\zeta_j^{(i_2)}\zeta_k^{(i_3)}+$$

$$+\sum_{\substack{i=1,j=0\\ 2k\geq k+i-j\geq 2;\ k+i-j\ -\ \text{четное}}}^{\infty}\sum_{k=1}^{i-1} N_{ijk}K_{k-1,i-1,\frac{k+i-j}{2}-1}\zeta_i^{(i_1)}\zeta_j^{(i_2)}\zeta_k^{(i_3)}, \tag{5.16}$$

где

$$N_{ijk}=\sqrt{\frac{1}{(2k+1)(2j+1)(2i+1)}},$$

$$K_{m,n,k}=\frac{a_{m-k}a_k a_{n-k}}{a_{m+n-k}}\cdot\frac{2n+2m-4k+1}{2n+2m-2k+1};\ a_k=\frac{(2k-1)!!}{k!};\ m\leq n.$$

Рассмотрим аппроксимацию $I_{00_{T,t}}^{*(i_1i_2)q}$ повторного стохастического интеграла $I_{00_{T,t}}^{*(i_1i_2)}$, полученную из (5.5) путем замены ∞ на q.

Можно показать, что

$$\mathsf{M}\left\{\left(I_{00_{T,t}}^{*(i_1i_2)}-I_{00_{T,t}}^{*(i_1i_2)q}\right)^2\right\}=\frac{(T-t)^2}{2}\left(\frac{1}{2}-\sum_{i=1}^{q}\frac{1}{4i^2-1}\right). \tag{5.17}$$

В частности, из (1.46) и (5.17) получаем

$$\mathsf{M}\left\{\left(I_{00_{T,t}}^{*(i_1i_2)}-I_{00_{T,t}}^{*(i_1i_2)q}\right)^8\right\}\leq 16522\cdot 10^6\left(\frac{(T-t)^2}{2}\left(\frac{1}{2}-\sum_{i=1}^{q}\frac{1}{4i^2-1}\right)\right)^4.$$

Далее, с использованием леммы 10 получаем

$$\mathsf{M}\left\{\left(I_{10_{T,t}}^{*(i_1i_2)}-I_{10_{T,t}}^{*(i_1i_2)q}\right)^2\right\}=\mathsf{M}\left\{\left(I_{01_{T,t}}^{*(i_1i_2)}-I_{01_{T,t}}^{*(i_1i_2)q}\right)^2\right\}=$$

$$=\frac{(T-t)^4}{16}\left(\frac{5}{9}-2\sum_{i=2}^{q}\frac{1}{4i^2-1}-\sum_{i=1}^{q}\frac{1}{(2i-1)^2(2i+3)^2}-\right.$$

$$\left.-\sum_{i=0}^{q}\frac{(i+2)^2+(i+1)^2}{(2i+1)(2i+5)(2i+3)^2}\right). \tag{5.18}$$

В формулах (5.17), (5.18) предполагалось $i_1 \neq i_2$. Рассмотрим (5.6), (5.7) при $i_1 = i_2$:

$$I_{01_{T,t}}^{*(i_1 i_1)} = -\frac{(T-t)^2}{4}\left[\left(\zeta_0^{(i_1)}\right)^2 + \frac{1}{\sqrt{3}}\zeta_0^{(i_1)}\zeta_1^{(i_1)} + \right.$$

$$\left. + \sum_{i=0}^{\infty}\left\{\frac{1}{\sqrt{(2i+1)(2i+5)}(2i+3)}\zeta_i^{(i_1)}\zeta_{i+2}^{(i_1)} - \frac{1}{(2i-1)(2i+3)}\left(\zeta_i^{(i_1)}\right)^2\right\}\right], \quad (5.19)$$

$$I_{10_{T,t}}^{*(i_1 i_1)} = -\frac{(T-t)^2}{4}\left[\left(\zeta_0^{(i_1)}\right)^2 + \frac{1}{\sqrt{3}}\zeta_0^{(i_1)}\zeta_1^{(i_1)} + \right.$$

$$\left. + \sum_{i=0}^{\infty}\left\{-\frac{1}{\sqrt{(2i+1)(2i+5)}(2i+3)}\zeta_i^{(i_1)}\zeta_{i+2}^{(i_1)} + \frac{1}{(2i-1)(2i+3)}\left(\zeta_i^{(i_1)}\right)^2\right\}\right], \quad (5.20)$$

откуда, с учетом (5.2) и (5.3), имеем:

$$I_{10_{T,t}}^{*(i_1 i_1)} + I_{01_{T,t}}^{*(i_1 i_1)} = -\frac{(T-t)^2}{2}\left(\left(\zeta_0^{(i_1)}\right)^2 + \frac{1}{\sqrt{3}}\zeta_0^{(i_1)}\zeta_1^{(i_1)}\right) = I_{0_{T,t}}^{(i_1)} I_{1_{T,t}}^{(i_1)} \text{ с в. 1.} \quad (5.21)$$

При получении (5.21) мы предполагали, что равенства (5.6), (5.7) выполняются с в. 1. Строгое обоснование этого факта будет приведено в дальнейшем в настоящей главе.

Отметим, что равенство (5.21) также нетрудно получить с помощью формулы Ито и формул связи повторных стохастических интегралов Ито и Стратоновича.

Прямое вычисление с помощью (5.19), (5.20) дает:

$$\mathsf{M}\left\{\left(I_{10_{T,t}}^{*(i_1 i_1)} - I_{10_{T,t}}^{*(i_1 i_1)q}\right)^2\right\} = \mathsf{M}\left\{\left(I_{01_{T,t}}^{*(i_1 i_1)} - I_{01_{T,t}}^{*(i_1 i_1)q}\right)^2\right\} =$$

$$= \frac{(T-t)^4}{16}\left[\sum_{i=q+1}^{\infty}\frac{1}{(2i+1)(2i+5)(2i+3)^2} + \sum_{i=q+1}^{\infty}\frac{2}{(2i-1)^2(2i+3)^2} + \right.$$

$$\left. + \left(\sum_{i=q+1}^{\infty}\frac{1}{(2i-1)(2i+3)}\right)^2\right],$$

где $I_{01_{T,t}}^{*(i_1 i_1)q}$, $I_{10_{T,t}}^{*(i_1 i_1)q}$ определяются из (5.19), (5.20) путем замены ∞ на q.

С другой стороны формула (4.11) дает возможность получить более удобные с точки зрения практики выражения, но уже для повторных стохастических интегралов Ито:

$$\mathsf{M}\left\{\left(I_{10_{T,t}}^{(i_1 i_1)} - I_{10_{T,t}}^{(i_1 i_1)q}\right)^2\right\} = \mathsf{M}\left\{\left(I_{01_{T,t}}^{(i_1 i_1)} - I_{01_{T,t}}^{(i_1 i_1)q}\right)^2\right\} =$$

$$= \frac{(T-t)^4}{16}\left(\frac{1}{9} - \sum_{i=0}^{q}\frac{1}{(2i+1)(2i+5)(2i+3)^2} - 2\sum_{i=1}^{q}\frac{1}{(2i-1)^2(2i+3)^2}\right). \tag{5.22}$$

В таблицах 5.1 – 5.3 приведены расчеты по формулам (5.17), (5.18), (5.22) при различных значениях q. В указанных таблицах ε означает правые части этих формул.

Из (6.36) следует, что

$$I_{11_{T,t}}^{*(i_1 i_1)} = \frac{\left(I_{1_{T,t}}^{(i_1)}\right)^2}{2} \text{ с в. 1.} \tag{5.23}$$

Кроме того, с помощью формулы Ито имеем

$$I_{20_{T,t}}^{(i_1 i_1)} + I_{02_{T,t}}^{(i_1 i_1)} = I_{0_{T,t}}^{(i_1)} I_{2_{T,t}}^{(i_1)} - \frac{(T-t)^3}{3} \text{ с в. 1,}$$

откуда, с учетом формул (5.13), получаем:

$$I_{20_{T,t}}^{*(i_1 i_1)} + I_{02_{T,t}}^{*(i_1 i_1)} = I_{0_{T,t}}^{(i_1)} I_{2_{T,t}}^{(i_1)} \text{ с в. 1.} \tag{5.24}$$

Проверим, следуют ли формулы (5.23), (5.24) из (5.10) – (5.12), если в последних положить $i_1 = i_2$.

Из (5.10) – (5.12) при $i_1 = i_2$ получаем:

$$I_{20_{T,t}}^{*(i_1 i_1)} + I_{02_{T,t}}^{*(i_1 i_1)} = -\frac{(T-t)^2}{2} I_{00_{T,t}}^{*(i_1 i_1)} - (T-t)\left(I_{10_{T,t}}^{*(i_1 i_1)} + I_{01_{T,t}}^{*(i_1 i_1)}\right) +$$

$$+\frac{(T-t)^3}{4}\left(\frac{1}{3}\left(\zeta_0^{(i_1)}\right)^2 + \frac{2}{3\sqrt{5}}\zeta_2^{(i_1)}\zeta_0^{(i_1)}\right), \tag{5.25}$$

$$I_{11_{T,t}}^{*(i_1 i_1)} = -\frac{(T-t)^2}{4} I_{00_{T,t}}^{*(i_1 i_1)} - \frac{T-t}{2}\left(I_{10_{T,t}}^{*(i_1 i_1)} + I_{01_{T,t}}^{*(i_1 i_1)}\right) +$$

$$+\frac{(T-t)^3}{24}\left(\zeta_1^{(i_1)}\right)^2. \tag{5.26}$$

Нетрудно видеть, что из (5.25) и (5.26), с учетом (5.21) и (5.2) – (5.5), действительно получаются равенства (5.23) и (5.24), что косвенно подтверждает правильность формул (5.10) – (5.12).

На основе приведенных разложений повторных стохастических интегралов видно, что повышение кратностей этих интегралов или показателей степеней их весовых функций ведет к заметному усложнению формул для указанных разложений. Однако, увеличение упомянутых параметров приводит к увеличению порядков малости по $T-t$ в среднеквадратическом смысле для повторных стохастических интегралов, что в свою очередь ведет к резкому уменьшению количеств членов в разложениях повторных стохастических интегралов, требуемых для достижения приемлемых точностей аппроксимаций. Всвязи с этим рассмотрим подход к аппроксимации повторных стохастических интергралов, который позволяет получать среднеквадратические аппроксимации требуемой точности без использования общих разложений типа (5.9).

Рассмотрим следующую аппроксимацию:

$$I_{000_{T,t}}^{(i_1 i_2 i_3)q_1}=\sum_{i,j,k=0}^{q_1} C_{kji}\Biggl(\zeta_i^{(i_1)}\zeta_j^{(i_2)}\zeta_k^{(i_3)}-$$

$$-\mathbf{1}_{\{i_1=i_2\}}\mathbf{1}_{\{i=j\}}\zeta_k^{(i_3)}-\mathbf{1}_{\{i_2=i_3\}}\mathbf{1}_{\{j=k\}}\zeta_i^{(i_1)}-\mathbf{1}_{\{i_1=i_3\}}\mathbf{1}_{\{i=k\}}\zeta_j^{(i_2)}\Biggr), \tag{5.27}$$

где $i_1, i_2, i_3 = 1, \ldots, m$ и

$$C_{kji}=\int\limits_t^T \phi_k(z)\int\limits_t^z \phi_j(y)\int\limits_t^y \phi_i(x)dxdydz=$$

$$=\frac{\sqrt{(2i+1)(2j+1)(2k+1)}}{8}(T-t)^{3/2}\bar{C}_{kji};$$

$$\bar{C}_{kji}=\int\limits_{-1}^1 P_k(z)\int\limits_{-1}^z P_j(y)\int\limits_{-1}^y P_i(x)dxdydz;$$

$P_i(x);\ i=0,\ 1,\ 2,\ldots$ – полиномы Лежандра.

В частности, из (5.27) при $i_1\ne i_2,\ i_2\ne i_3,\ i_1\ne i_3$ получаем:

$$I_{000_{T,t}}^{(i_1 i_2 i_3)q_1}=\sum_{i,j,k=0}^{q_1} C_{kji}\zeta_i^{(i_1)}\zeta_j^{(i_2)}\zeta_k^{(i_3)}. \tag{5.28}$$

Отметим, что в силу результатов главы 2 правая часть формулы (5.28) определяет аппроксимацию $I_{000_{T,t}}^{*(i_1 i_2 i_3)q_1}$ повторного стохастического интеграла Стратоновича $I_{000_{T,t}}^{*(i_1 i_2 i_3)}$, но уже для произвольных $i_1, i_2, i_3 = 1, \ldots, m$.

Напомним, полученные в начале главы 4, формулы для среднеквадратических погрешностей аппроксимаций вида (5.27) при различных сочетаниях i_1, i_2, i_3 :

$$\mathsf{M}\left\{\left(I_{000_{T,t}}^{(i_1 i_2 i_3)}-I_{000_{T,t}}^{(i_1 i_2 i_3)q_1}\right)^2\right\}=\frac{(T-t)^3}{6}-\sum_{i,j,k=0}^{q_1} C_{kji}^2\ (i_1\ne i_2, i_1\ne i_3, i_2\ne i_3), \tag{5.29}$$

$$\mathsf{M}\left\{\left(I_{000_{T,t}}^{(i_1i_2i_3)}-I_{000_{T,t}}^{(i_1i_2i_3)q_1}\right)^2\right\}=\frac{(T-t)^3}{6}-\sum_{i,j,k=0}^{q_1}C_{kji}^2-$$

$$-\sum_{i,j,k=0}^{q_1}C_{jki}C_{kji}\ (i_1\ne i_2=i_3), \tag{5.30}$$

$$\mathsf{M}\left\{\left(I_{000_{T,t}}^{(i_1i_2i_3)}-I_{000_{T,t}}^{(i_1i_2i_3)q_1}\right)^2\right\}=\frac{(T-t)^3}{6}-\sum_{i,j,k=0}^{q_1}C_{kji}^2-$$

$$-\sum_{i,j,k=0}^{q_1}C_{kji}C_{ijk}\ (i_1=i_3\ne i_2), \tag{5.31}$$

$$\mathsf{M}\left\{\left(I_{000_{T,t}}^{(i_1i_2i_3)}-I_{000_{T,t}}^{(i_1i_2i_3)q_1}\right)^2\right\}=\frac{(T-t)^3}{6}-\sum_{i,j,k=0}^{q_1}C_{kji}^2-$$

$$-\sum_{i,j,k=0}^{q_1}C_{kij}C_{kji}\ (i_1=i_2\ne i_3). \tag{5.32}$$

Для случая $i_1=i_2=i_3=i$ удобно использовать следующие формулы:

$$I_{000_{T,t}}^{*(iii)}=\frac{1}{6}(T-t)^{\frac{3}{2}}\left(\zeta_0^{(i)}\right)^3, I_{000_{T,t}}^{(iii)}=\frac{1}{6}(T-t)^{\frac{3}{2}}\left(\left(\zeta_0^{(i)}\right)^3-3\zeta_0^{(i)}\right)\ \text{с в. 1.} \tag{5.33}$$

В более общем случае, когда $\psi_1(s),\psi_2(s),\psi_3(s)\equiv(t-s)^l$; l — фиксированное натуральное число или ноль, с в. 1 можем записать:

$$I_{lll_{T,t}}^{(i_1i_1i_1)}=\frac{1}{6}\left(\left(I_{l_{T,t}}^{(i_1)}\right)^3-3I_{l_{T,t}}^{(i_1)}\Delta_{l_{T,t}}\right),$$

$$I_{lll_{T,t}}^{*(i_1i_1i_1)}=\frac{1}{6}(T-t)^{\frac{3}{2}}\left(I_{l_{T,t}}^{(i_1)}\right)^3,\ I_{l_{T,t}}^{(i_1)}=\sum_{j=0}^{l}C_j\zeta_j^{(i_1)},$$

где $\Delta_{l_{T,t}}=\int\limits_t^T(t-s)^{2l}ds$, $C_j=\int\limits_t^T(t-s)^l\phi_j(s)ds$; $\{\phi_j(s)\}_{j=0}^{\infty}$ — полная ортонормированная на отрезке $[t,T]$ система полиномов Лежандра.

Теперь становится понятно, что для аппроксимации стохастического интеграла $I_{000_{T,t}}^{(i_1i_2i_3)}$ можно использовать формулы (5.27) – (5.33) вместо сложного разложения (5.9). Также можно поступить и с более сложными повторными стохастическими интегралами. Например, для аппроксимации стохастического интеграла $I_{0000_{T,t}}^{(i_1i_2i_3i_4)}$, согласно теореме 1, можем записать:

$$I_{0000_{T,t}}^{(i_1i_2i_3i_4)q_2}=\sum_{i,j,k,l=0}^{q_2}C_{lkji}\Bigl(\zeta_i^{(i_1)}\zeta_j^{(i_2)}\zeta_k^{(i_3)}\zeta_l^{(i_4)}-$$

Таблица 5.1. Проверка формулы (5.17)

$2\varepsilon/(T-t)^2$	0.1667	0.0238	0.0025	$2.4988\cdot 10^{-4}$	$2.4999\cdot 10^{-5}$
q	1	10	100	1000	10000

Таблица 5.2. Проверка формулы (5.18)

$16\varepsilon/(T-t)^4$	0.3797	0.0581	0.0062	$6.2450\cdot 10^{-4}$	$6.2495\cdot 10^{-5}$
q	1	10	100	1000	10000

$$
-\mathbf{1}_{\{i_1=i_2\}}\mathbf{1}_{\{i=j\}}\zeta_k^{(i_3)}\zeta_l^{(i_4)}-\mathbf{1}_{\{i_1=i_3\}}\mathbf{1}_{\{i=k\}}\zeta_j^{(i_2)}\zeta_l^{(i_4)}-
$$

$$
-\mathbf{1}_{\{i_1=i_4\}}\mathbf{1}_{\{i=l\}}\zeta_j^{(i_2)}\zeta_k^{(i_3)}-\mathbf{1}_{\{i_2=i_3\}}\mathbf{1}_{\{j=k\}}\zeta_i^{(i_1)}\zeta_l^{(i_4)}-
$$

$$
-\mathbf{1}_{\{i_2=i_4\}}\mathbf{1}_{\{j=l\}}\zeta_i^{(i_1)}\zeta_k^{(i_3)}-\mathbf{1}_{\{i_3=i_4\}}\mathbf{1}_{\{k=l\}}\zeta_i^{(i_1)}\zeta_j^{(i_2)}+
$$

$$
+\mathbf{1}_{\{i_1=i_2\}}\mathbf{1}_{\{i=j\}}\mathbf{1}_{\{i_3=i_4\}}\mathbf{1}_{\{k=l\}}+\mathbf{1}_{\{i_1=i_3\}}\mathbf{1}_{\{i=k\}}\mathbf{1}_{\{i_2=i_4\}}\mathbf{1}_{\{j=l\}}+
$$

$$
\left.+\mathbf{1}_{\{i_1=i_4\}}\mathbf{1}_{\{i=l\}}\mathbf{1}_{\{j_2=j_3\}}\mathbf{1}_{\{j=k\}}\right),
$$

где

$$
C_{lkji}=\int\limits_t^T\phi_l(u)\int\limits_t^u\phi_k(z)\int\limits_t^z\phi_j(y)\int\limits_t^y\phi_i(x)dxdydzdu=
$$

$$
=\frac{\sqrt{(2i+1)(2j+1)(2k+1)(2l+1)}}{16}(T-t)^2\bar{C}_{lkji};
$$

$$
\bar{C}_{lkji}=\int\limits_{-1}^{1}P_l(u)\int\limits_{-1}^{u}P_k(z)\int\limits_{-1}^{z}P_j(y)\int\limits_{-1}^{y}P_i(x)dxdydzdu.
$$

В главе 4 получены точные формулы для среднеквадратической погрешности аппроксимации $\mathsf{M}\left\{\left(J[\psi^{(4)}]_{T,t}^{q_2}-J[\psi^{(4)}]_{T,t}\right)^2\right\}$ при различных сочетаниях индексов i_1,i_2,i_3,i_4. Полагая в этих формулах $\psi_1(\tau),\ldots,\psi_4(\tau)\equiv 1$, получим соответствующие формулы для $\mathsf{M}\left\{\left(I_{0000_{T,t}}^{(i_1i_2i_3i_4)q_2}-I_{0000_{T,t}}^{(i_1i_2i_3i_4)}\right)^2\right\}$. Случай $i_1=\ldots=i_4=i$ в главе 4 разобран неполностью, однако в этом случае существуют следующие представления:

$$
I_{0000_{T,t}}^{(iiii)}=\frac{(T-t)^2}{24}\left(\left(\zeta_0^{(i)}\right)^4-6\left(\zeta_0^{(i)}\right)^2+3\right),\ I_{0000_{T,t}}^{*(iiii)}=\frac{(T-t)^2}{24}\left(\zeta_0^{(i)}\right)^4\ \text{ с в. 1.}
$$

Таблица 5.3. Проверка формулы (5.22)

$16\varepsilon/(T-t)^4$	0.0070	$4.3551 \cdot 10^{-5}$	$6.0076 \cdot 10^{-8}$	$6.2251 \cdot 10^{-11}$	$6.3178 \cdot 10^{-14}$
q	1	10	100	1000	10000

Таблица 5.4. Коэффициенты $\bar{C}_{0jk}$

$j \backslash k$	0	1	2	3	4	5	6
0	4/3	−2/3	2/15	0	0	0	0
1	0	2/15	−2/15	4/105	0	0	0
2	−4/15	2/15	2/105	−2/35	2/105	0	0
3	0	−2/35	2/35	2/315	−2/63	8/693	0
4	0	0	−8/315	2/63	2/693	−2/99	10/1287
5	0	0	0	−10/693	2/99	2/1287	−2/143
6	0	0	0	0	−4/429	2/143	2/2145

В более общем случае, когда $\psi_1(s),\ldots,\psi_4(s)\equiv(t-s)^l$; l — фиксированное натуральное число или ноль, с в. 1 также можем записать:

$$I_{llll_{T,t}}^{(iiii)}=\frac{1}{24}\left(\left(I_{l_{T,t}}^{(i)}\right)^4-6\left(I_{l_{T,t}}^{(i)}\right)^2\Delta_{l_{T,t}}+3\left(\Delta_{l_{T,t}}\right)^2\right),$$

$$I_{llll_{T,t}}^{*(iiii)}=\frac{1}{24}\left(I_{l_{T,t}}^{(i)}\right)^4,$$

$$I_{l_{T,t}}^{(i)}=\sum_{j=0}^{l}C_j\zeta_j^{(i)},\ \ \Delta_{l_{T,t}}=\int\limits_t^T(t-s)^{2l}ds,$$

где в предпоследней формуле предполагается, что разложение стохастического интеграла осуществляется с помощью полиномов Лежандра.

Положим $q_1=6$. В табл. 5.4–5.10 приведены точные значения коэффициентов $\bar{C}_{kji}$ при $i,j,k=0,1,\ldots,6$.

Вычисляя значение выражения (5.29) при $q_1=6$, $i_1\neq i_2$, $i_1\neq i_3$, $i_3\neq i_2$ получаем следующее приближенное равенство:

$$\mathsf{M}\left\{\left(I_{000_{T,t}}^{(i_1i_2i_3)}-I_{000_{T,t}}^{(i_1i_2i_3)q_1}\right)^2\right\}\approx 0.01956(T-t)^3.$$

Выберем, например, $q_2=2$. В табл. 5.11–5.19 приведены точные значения коэффициентов $\bar{C}_{lkji}$; $i,j,k,l=0,1,2$.

Таблица 5.5. Коэффициенты $\bar{C}_{1jk}$

$j \backslash k$	0	1	2	3	4	5	6
0	$2/3$	$-4/15$	0	$2/105$	0	0	0
1	$2/15$	0	$-4/105$	0	$2/315$	0	0
2	$-2/15$	$8/105$	0	$-2/105$	0	$4/1155$	0
3	$-2/35$	0	$8/315$	0	$-38/3465$	0	$20/9009$
4	0	$-4/315$	0	$46/3465$	0	$-64/9009$	0
5	0	0	$-4/693$	0	$74/9009$	0	$-32/6435$
6	0	0	0	$-10/3003$	0	$4/715$	0

Таблица 5.6. Коэффициенты $\bar{C}_{2jk}$

$j \backslash k$	0	1	2	3	4	5	6
0	$2/15$	0	$-4/105$	0	$2/315$	0	0
1	$2/15$	$-4/105$	0	$-2/315$	0	$8/3465$	0
2	$2/105$	0	0	0	$-2/495$	0	$4/3003$
3	$-2/35$	$8/315$	0	$-2/3465$	0	$-116/45045$	0
4	$-8/315$	0	$4/495$	0	$-2/6435$	0	$-16/9009$
5	0	$-4/693$	0	$38/9009$	0	$-8/45045$	0
6	0	0	$-8/3003$	0	$-118/45045$	0	$-4/36465$

Таблица 5.7. Коэффициенты $\bar{C}_{3jk}$

$j \backslash k$	0	1	2	3	4	5	6
0	0	$2/105$	0	$-4/315$	0	$2/693$	0
1	$4/105$	0	$-2/315$	0	$-8/3465$	0	$10/9009$
2	$2/35$	$-2/105$	0	$4/3465$	0	$-74/45045$	0
3	$2/315$	0	$-2/3465$	0	$16/45045$	0	$-10/9009$
4	$-2/63$	$46/3465$	0	$-32/45045$	0	$2/9009$	0
5	$-10/693$	0	$38/9009$	0	$-4/9009$	0	$122/765765$
6	0	$-10/3003$	0	$20/9009$	0	$-226/765765$	0

Таблица 5.8. Коэффициенты $\bar{C}_{4jk}$

$_j{}^k$	0	1	2	3	4	5	6
0	0	0	2/315	0	−4/693	0	2/1287
1	0	2/315	0	−8/3465	0	−10/9009	0
2	2/105	0	−2/495	0	4/6435	0	−38/45045
3	2/63	−38/3465	0	16/45045	0	2/9009	0
4	2/693	0	−2/6435	0	0	0	2/13923
5	−2/99	74/9009	0	−4/9009	0	−2/153153	0
6	−4/429	0	118/45045	0	−4/13923	0	−2/188955

Таблица 5.9. Коэффициенты $\bar{C}_{5jk}$

$_j{}^k$	0	1	2	3	4	5	6
0	0	0	0	2/693	0	−4/1287	0
1	0	0	8/3465	0	−10/9009	0	−4/6435
2	0	4/1155	0	−74/45045	0	16/45045	0
3	8/693	0	−116/45045	0	2/9009	0	8/58905
4	2/99	−64/9009	0	2/9009	0	4/153153	0
5	2/1287	0	−8/45045	0	−2/153153	0	4/415701
6	−2/143	4/715	0	−226/765765	0	−8/415701	0

Таблица 5.10. Коэффициенты $\bar{C}_{6jk}$

$_j{}^k$	0	1	2	3	4	5	6
0	0	0	0	0	2/1287	0	−4/2145
1	0	0	0	10/9009	0	−4/6435	0
2	0	0	4/3003	0	−38/45045	0	8/36465
3	0	20/9009	0	−10/9009	0	8/58905	0
4	10/1287	0	−16/9009	0	2/13923	0	4/188955
5	2/143	−32/6435	0	122/765765	0	4/415701	0
6	2/2145	0	−4/36465	0	−2/188955	0	0

Таблица 5.11. Коэффициенты $\bar{C}_{00kl}$

$k \backslash l$	0	1	2
0	$2/3$	$-2/5$	$2/15$
1	$-2/15$	$2/15$	$-2/21$
2	$-2/15$	$2/35$	$2/105$

Таблица 5.12. Коэффициенты $\bar{C}_{10kl}$

$k \backslash l$	0	1	2
0	$2/5$	$-2/9$	$2/35$
1	$-2/45$	$2/35$	$-2/45$
2	$-2/21$	$2/45$	$2/315$

Таблица 5.13. Коэффициенты $\bar{C}_{02kl}$

$k \backslash l$	0	1	2
0	$-2/15$	$2/21$	$-4/105$
1	$2/35$	$-4/105$	$2/105$
2	$4/105$	$-2/105$	0

Таблица 5.14. Коэффициенты $\bar{C}_{01kl}$

$k \backslash l$	0	1	2
0	$2/15$	$-2/45$	$-2/105$
1	$2/45$	$-2/105$	$2/315$
2	$-2/35$	$2/63$	$-2/315$

Таблица 5.15. Коэффициенты $\bar{C}_{11kl}$

$k \backslash l$	0	1	2
0	$2/15$	$-2/35$	0
1	$2/105$	0	$-2/315$
2	$-4/105$	$2/105$	0

Таблица 5.16. Коэффициенты $\bar{C}_{20kl}$

$k \backslash l$	0	1	2
0	2/15	−2/35	0
1	2/105	0	−2/315
2	−4/105	2/105	0

Таблица 5.17. Коэффициенты $\bar{C}_{21kl}$

$k \backslash l$	0	1	2
0	2/21	−2/45	2/315
1	2/315	2/315	−2/225
2	−2/105	2/225	2/1155

Таблица 5.18. Коэффициенты $\bar{C}_{12kl}$

$k \backslash l$	0	1	2
0	−2/35	2/45	−2/105
1	2/63	−2/105	2/225
2	2/105	−2/225	−2/3465

При попарно различных i_1, i_2, i_3, i_4 имеем следующее равенство:

$$\mathsf{M}\left\{\left(I_{0000_{T,t}}^{(i_1 i_2 i_3 i_4)} - I_{0000_{T,t}}^{(i_1 i_2 i_3 i_4)q_2}\right)^2\right\} = \frac{(T-t)^4}{24} - \sum_{i,j,k,l=0}^{2} C_{lkji}^2. \qquad (5.34)$$

Вычисляя по значениям, приведенным в табл. 5.11–5.19, правую часть (5.34), получаем

$$\mathsf{M}\left\{\left(I_{0000_{T,t}}^{(i_1 i_2 i_3 i_4)} - I_{0000_{T,t}}^{(i_1 i_2 i_3 i_4)q_2}\right)^2\right\} \approx 0.0236084(T-t)^4.$$

Заметим, что нетрудно проверить справедливость следующих равенств:

$$\sum_{j=0}^{\infty} C_{jj}^{10} = \sum_{j=0}^{\infty} C_{jj}^{01} = -\frac{(T-t)^2}{4}, \qquad (5.35)$$

$$\sum_{j=0}^{\infty} C_{jj}^{20} = \sum_{j=0}^{\infty} C_{jj}^{11} = \sum_{j=0}^{\infty} C_{jj}^{02} = \frac{(T-t)^3}{6}, \qquad (5.36)$$

где

$$C_{jj}^{10} = \int_t^T \phi_j(x) \int_t^x \phi_j(y)(t-y)dydx,$$

$$C_{jj}^{01} = \int_t^T \phi_j(x)(t-x) \int_t^x \phi_j(y)dydx,$$

$$C_{jj}^{11} = \int_t^T \phi_j(x)(t-x) \int_t^x \phi_j(y)(t-y)dydx,$$

$$C_{jj}^{20} = \int_t^T \phi_j(x) \int_t^x \phi_j(y)(t-y)^2dydx,$$

$$C_{jj}^{02} = \int_t^T \phi_j(x)(t-x)^2 \int_t^x \phi_j(y)dydx,$$

$\{\phi_j(x)\}_{j=0}^{\infty}$ — полная ортонормированная в пространстве $L_2([t,T])$ система полиномов Лежандра.

Заметим, что равенства (5.35) и (5.36) вместе с теоремой 1 при $k=2$ и формулами (5.8), (5.13), (5.14) подтверждают формулу (2.3) для повторных стохастических интегралов Стратоновича $I_{10_{T,t}}^{*(i_1 i_2)}$, $I_{01_{T,t}}^{*(i_1 i_2)}$, $I_{20_{T,t}}^{*(i_1 i_2)}$, $I_{11_{T,t}}^{*(i_1 i_2)}$, $I_{02_{T,t}}^{*(i_1 i_2)}$; $i_1, i_2 = 1, \ldots, m$.

Рассмотрим аппроксимации еще четырех повторных стохастических интегралов Ито:

$$I_{001_{T,t}}^{(i_1 i_2 i_3)q_3} = \sum_{i,j,k=0}^{q_3} C_{kji}^{001} \Biggl(\zeta_i^{(i_1)} \zeta_j^{(i_2)} \zeta_k^{(i_3)} -$$

$$-\mathbf{1}_{\{i_1=i_2\}} \mathbf{1}_{\{i=j\}} \zeta_k^{(i_3)} - \mathbf{1}_{\{i_2=i_3\}} \mathbf{1}_{\{j=k\}} \zeta_i^{(i_1)} - \mathbf{1}_{\{i_1=i_3\}} \mathbf{1}_{\{i=k\}} \zeta_j^{(i_2)} \Biggr),$$

$$I_{010_{T,t}}^{(i_1 i_2 i_3)q_4} = \sum_{i,j,k=0}^{q_4} C_{kji}^{010} \Biggl(\zeta_i^{(i_1)} \zeta_j^{(i_2)} \zeta_k^{(i_3)} -$$

$$-\mathbf{1}_{\{i_1=i_2\}} \mathbf{1}_{\{i=j\}} \zeta_k^{(i_3)} - \mathbf{1}_{\{i_2=i_3\}} \mathbf{1}_{\{j=k\}} \zeta_i^{(i_1)} - \mathbf{1}_{\{i_1=i_3\}} \mathbf{1}_{\{i=k\}} \zeta_j^{(i_2)} \Biggr),$$

$$I_{100_{T,t}}^{(i_1 i_2 i_3)q_5} = \sum_{i,j,k=0}^{q_5} C_{kji}^{100} \Biggl(\zeta_i^{(i_1)} \zeta_j^{(i_2)} \zeta_k^{(i_3)} -$$

$$-\mathbf{1}_{\{i_1=i_2\}} \mathbf{1}_{\{i=j\}} \zeta_k^{(i_3)} - \mathbf{1}_{\{i_2=i_3\}} \mathbf{1}_{\{j=k\}} \zeta_i^{(i_1)} - \mathbf{1}_{\{i_1=i_3\}} \mathbf{1}_{\{i=k\}} \zeta_j^{(i_2)} \Biggr),$$

$$I_{00000_{T,t}}^{(i_1 i_2 i_3 i_4 i_5)q_6} = \sum_{i,j,k,l,r=0}^{q_6} C_{rlkji} \Biggl(\zeta_r^{(i_5)} \zeta_l^{(i_4)} \zeta_k^{(i_3)} \zeta_j^{(i_2)} \zeta_i^{(i_1)} -$$

$$-\mathbf{1}_{\{i_1=i_2\}} \mathbf{1}_{\{i=j\}} \zeta_k^{(i_3)} \zeta_l^{(i_4)} \zeta_r^{(i_5)} - \mathbf{1}_{\{i_1=i_3\}} \mathbf{1}_{\{i=k\}} \zeta_j^{(i_2)} \zeta_l^{(i_4)} \zeta_r^{(i_5)} -$$

$$-\mathbf{1}_{\{i_1=i_4\}} \mathbf{1}_{\{i=l\}} \zeta_j^{(i_2)} \zeta_k^{(i_3)} \zeta_r^{(i_5)} - \mathbf{1}_{\{i_1=i_5\}} \mathbf{1}_{\{i=r\}} \zeta_j^{(i_2)} \zeta_k^{(i_3)} \zeta_l^{(i_4)} -$$

$$-\mathbf{1}_{\{i_2=i_3\}} \mathbf{1}_{\{j=k\}} \zeta_i^{(i_1)} \zeta_l^{(i_4)} \zeta_r^{(i_5)} - \mathbf{1}_{\{i_2=i_4\}} \mathbf{1}_{\{j=l\}} \zeta_i^{(i_1)} \zeta_k^{(i_3)} \zeta_r^{(i_5)} -$$

$$-\mathbf{1}_{\{i_2=i_5\}} \mathbf{1}_{\{j=r\}} \zeta_i^{(i_1)} \zeta_k^{(i_3)} \zeta_l^{(i_4)} - \mathbf{1}_{\{i_3=i_4\}} \mathbf{1}_{\{k=l\}} \zeta_i^{(i_1)} \zeta_j^{(i_2)} \zeta_r^{(i_5)} -$$

$$-\mathbf{1}_{\{i_3=i_5\}} \mathbf{1}_{\{k=r\}} \zeta_i^{(i_1)} \zeta_j^{(i_2)} \zeta_l^{(i_4)} - \mathbf{1}_{\{i_4=i_5\}} \mathbf{1}_{\{l=r\}} \zeta_i^{(i_1)} \zeta_j^{(i_2)} \zeta_k^{(i_3)} +$$

$$+\mathbf{1}_{\{i_1=i_2\}} \mathbf{1}_{\{i=j\}} \mathbf{1}_{\{i_3=i_4\}} \mathbf{1}_{\{k=l\}} \zeta_r^{(i_5)} + \mathbf{1}_{\{i_1=i_2\}} \mathbf{1}_{\{i=j\}} \mathbf{1}_{\{i_3=i_5\}} \mathbf{1}_{\{k=r\}} \zeta_l^{(i_4)} +$$

$$+\mathbf{1}_{\{i_1=i_2\}} \mathbf{1}_{\{i=j\}} \mathbf{1}_{\{i_4=i_5\}} \mathbf{1}_{\{l=r\}} \zeta_k^{(i_3)} + \mathbf{1}_{\{i_1=i_3\}} \mathbf{1}_{\{i=k\}} \mathbf{1}_{\{i_2=i_4\}} \mathbf{1}_{\{j=l\}} \zeta_r^{(i_5)} +$$

$$+\mathbf{1}_{\{i_1=i_3\}} \mathbf{1}_{\{i=k\}} \mathbf{1}_{\{i_2=i_5\}} \mathbf{1}_{\{j=r\}} \zeta_l^{(i_4)} + \mathbf{1}_{\{i_1=i_3\}} \mathbf{1}_{\{i=k\}} \mathbf{1}_{\{i_4=i_5\}} \mathbf{1}_{\{l=r\}} \zeta_j^{(i_2)} +$$

$$+\mathbf{1}_{\{i_1=i_4\}} \mathbf{1}_{\{i=l\}} \mathbf{1}_{\{i_2=i_3\}} \mathbf{1}_{\{j=k\}} \zeta_r^{(i_5)} + \mathbf{1}_{\{i_1=i_4\}} \mathbf{1}_{\{i=l\}} \mathbf{1}_{\{i_2=i_5\}} \mathbf{1}_{\{j=r\}} \zeta_k^{(i_3)} +$$

$$+\mathbf{1}_{\{i_1=i_4\}} \mathbf{1}_{\{i=l\}} \mathbf{1}_{\{i_3=i_5\}} \mathbf{1}_{\{k=r\}} \zeta_j^{(i_2)} + \mathbf{1}_{\{i_1=i_5\}} \mathbf{1}_{\{i=r\}} \mathbf{1}_{\{i_2=i_3\}} \mathbf{1}_{\{j=k\}} \zeta_l^{(i_4)} +$$

$$+\mathbf{1}_{\{i_1=i_5\}}\mathbf{1}_{\{i=r\}}\mathbf{1}_{\{i_2=i_4\}}\mathbf{1}_{\{j=l\}}\zeta_k^{(i_3)}+\mathbf{1}_{\{i_1=i_5\}}\mathbf{1}_{\{i=r\}}\mathbf{1}_{\{i_3=i_4\}}\mathbf{1}_{\{k=l\}}\zeta_j^{(i_2)}+$$

$$+\mathbf{1}_{\{i_2=i_3\}}\mathbf{1}_{\{j=k\}}\mathbf{1}_{\{i_4=i_5\}}\mathbf{1}_{\{l=r\}}\zeta_i^{(i_1)}+\mathbf{1}_{\{i_2=i_4\}}\mathbf{1}_{\{j=l\}}\mathbf{1}_{\{i_3=i_5\}}\mathbf{1}_{\{k=r\}}\zeta_i^{(i_1)}+$$

$$\left.+\mathbf{1}_{\{i_2=i_5\}}\mathbf{1}_{\{j=r\}}\mathbf{1}_{\{i_3=i_4\}}\mathbf{1}_{\{k=l\}}\zeta_i^{(i_1)}\right),$$

где

$$C_{kji}^{001}=\int\limits_t^T(t-z)\phi_k(z)\int\limits_t^z\phi_j(y)\int\limits_t^y\phi_i(x)dxdydz=$$

$$=\frac{\sqrt{(2i+1)(2j+1)(2k+1)}}{16}(T-t)^{\frac{5}{2}}\bar{C}_{kji}^{001};$$

$$C_{kji}^{010}=\int\limits_t^T\phi_k(z)\int\limits_t^z(t-y)\phi_j(y)\int\limits_t^y\phi_i(x)dxdydz=$$

$$=\frac{\sqrt{(2i+1)(2j+1)(2k+1)}}{16}(T-t)^{\frac{5}{2}}\bar{C}_{kji}^{010};$$

$$C_{kji}^{100}=\int\limits_t^T\phi_k(z)\int\limits_t^z\phi_j(y)\int\limits_t^y(t-x)\phi_i(x)dxdydz=$$

$$=\frac{\sqrt{(2i+1)(2j+1)(2k+1)}}{16}(T-t)^{\frac{5}{2}}\bar{C}_{kji}^{100};$$

$$C_{rlkji}=\int\limits_t^T\phi_r(v)\int\limits_t^v\phi_l(u)\int\limits_t^u\phi_k(z)\int\limits_t^z\phi_j(y)\int\limits_t^y\phi_i(x)dxdydzdudv=$$

$$=\frac{\sqrt{(2i+1)(2j+1)(2k+1)(2l+1)(2r+1)}}{32}(T-t)^{\frac{5}{2}}\bar{C}_{rlkji},$$

где

$$\bar{C}_{kji}^{100}=-\int\limits_{-1}^1P_k(z)\int\limits_{-1}^zP_j(y)\int\limits_{-1}^yP_i(x)(x+1)dxdydz;$$

$$\bar{C}_{kji}^{010}=-\int\limits_{-1}^1P_k(z)\int\limits_{-1}^zP_j(y)(y+1)\int\limits_{-1}^yP_i(x)dxdydz;$$

$$\bar{C}_{kji}^{001}=-\int\limits_{-1}^1P_k(z)(z+1)\int\limits_{-1}^zP_j(y)\int\limits_{-1}^yP_i(x)dxdydz;$$

$$\bar{C}_{rlkji}=\int\limits_{-1}^1P_r(v)\int\limits_{-1}^vP_l(u)\int\limits_{-1}^uP_k(z)\int\limits_{-1}^zP_j(y)\int\limits_{-1}^yP_i(x)dxdydzdudv.$$

Таблица 5.19. Коэффициенты $\bar{C}_{22kl}$

$_k{}^l$	0	1	2
0	$2/105$	$-2/315$	0
1	$2/315$	0	$-2/1155$
2	0	$2/3465$	0

Таблица 5.20. Коэффициенты $\bar{C}^{001}_{0jk}$

$_j{}^k$	0	1	2
0	-2	$14/15$	$-2/15$
1	$-2/15$	$-2/15$	$6/35$
2	$2/5$	$-22/105$	$-2/105$

Таблица 5.21. Коэффициенты $\bar{C}^{001}_{1jk}$

$_j{}^k$	0	1	2
0	$-6/5$	$22/45$	$-2/105$
1	$-2/9$	$-2/105$	$26/315$
2	$22/105$	$-38/315$	$-2/315$

Таблица 5.22. Коэффициенты $\bar{C}^{001}_{2jk}$

$_j{}^k$	0	1	2
0	$-2/5$	$2/21$	$4/105$
1	$-22/105$	$4/105$	$2/105$
2	0	$-2/105$	0

Таблица 5.23. Коэффициенты $\bar{C}^{100}_{0jk}$

$_j{}^k$	0	1	2
0	$-2/3$	$2/15$	$2/15$
1	$-2/15$	$-2/45$	$2/35$
2	$2/15$	$-2/35$	$-4/105$

Таблица 5.24. Коэффициенты $\bar{C}_{1jk}^{100}$

$_j{}^k$	0	1	2
0	$-2/5$	$2/45$	$2/21$
1	$-2/15$	$-2/105$	$4/105$
2	$2/35$	$-2/63$	$-2/105$

Таблица 5.25. Коэффициенты $\bar{C}_{2jk}^{100}$

$_j{}^k$	0	1	2
0	$-2/15$	$-2/105$	$4/105$
1	$-2/21$	$-2/315$	$2/105$
2	$-2/105$	$-2/315$	0

Таблица 5.26. Коэффициенты $\bar{C}_{0jk}^{010}$

$_j{}^k$	0	1	2
0	$-4/3$	$8/15$	0
1	$-4/15$	0	$8/105$
2	$4/15$	$-16/105$	0

Таблица 5.27. Коэффициенты $\bar{C}_{1jk}^{010}$

$_j{}^k$	0	1	2
0	$-4/5$	$4/15$	$4/105$
1	$-4/15$	$4/105$	$4/105$
2	$4/35$	$-8/105$	0

Таблица 5.28. Коэффициенты $\bar{C}_{2jk}^{010}$

$_j{}^k$	0	1	2
0	$-4/15$	$4/105$	$4/105$
1	$-4/21$	$4/105$	$4/315$
2	$-4/105$	0	0

Таблица 5.29. Коэффициенты $\bar{C}_{000lr}$

l^r	0	1
0	$4/15$	$-8/45$
1	$-4/45$	$8/105$

Таблица 5.30. Коэффициенты $\bar{C}_{010lr}$

l^r	0	1
0	$4/45$	$-16/315$
1	$-4/315$	$4/315$

Таблица 5.31. Коэффициенты $\bar{C}_{110lr}$

l^r	0	1
0	$8/105$	$-2/45$
1	$-4/315$	$4/315$

Таблица 5.32. Коэффициенты $\bar{C}_{011lr}$

l^r	0	1
0	$8/315$	$-4/315$
1	0	$2/945$

Таблица 5.33. Коэффициенты $\bar{C}_{001lr}$

l^r	0	1
0	0	$4/315$
1	$8/315$	$-2/105$

Таблица 5.34. Коэффициенты $\bar{C}_{100lr}$

l^r	0	1
0	$8/45$	$-4/35$
1	$-16/315$	$2/45$

Таблица 5.35. Коэффициенты $\bar{C}_{101lr}$

l \ r	0	1
0	4/315	0
1	4/315	−8/945

Таблица 5.36. Коэффициенты $\bar{C}_{111lr}$

l \ r	0	1
0	2/105	−8/945
1	2/945	0

Пусть $q_3 = q_4 = q_5 = 2$, $q_6 = 1$. В табл. 5.20–5.36 приведены точные значения коэффициентов $\bar{C}_{kji}^{001}$, $\bar{C}_{kji}^{010}$, $\bar{C}_{kji}^{001}$; $i,j,k = 0,1,2$; $\bar{C}_{rlkji}$; $i,j,k,l,r = 0,1$.

В случае попарно различных $i_1,\ldots,i_5$ из табл. 5.20–5.36 имеем

$$\mathsf{M}\left\{\left(I_{100_{T,t}}^{(i_1i_2i_3)} - I_{100_{T,t}}^{(i_1i_2i_3)q_3}\right)^2\right\} = \frac{(T-t)^5}{60} - \sum_{i,j,k=0}^{q_3}\left(C_{kji}^{100}\right)^2 \approx$$

$$\approx 0.00815429(T-t)^5,$$

$$\mathsf{M}\left\{\left(I_{010_{T,t}}^{(i_1i_2i_3)} - I_{010_{T,t}}^{(i_1i_2i_3)q_4}\right)^2\right\} = \frac{(T-t)^5}{20} - \sum_{i,j,k=0}^{q_4}\left(C_{kji}^{010}\right)^2 \approx$$

$$\approx 0.0173903(T-t)^5,$$

$$\mathsf{M}\left\{\left(I_{001_{T,t}}^{(i_1i_2i_3)} - I_{001_{T,t}}^{(i_1i_2i_3)q_5}\right)^2\right\} = \frac{(T-t)^5}{10} - \sum_{i,j,k=0}^{q_5}\left(C_{kji}^{001}\right)^2 \approx$$

$$\approx 0.0252801(T-t)^5,$$

$$\mathsf{M}\left\{\left(I_{00000_{T,t}}^{(i_1i_2i_3i_4i_5)} - I_{00000_{T,t}}^{(i_1i_2i_3i_4i_5)q_6}\right)^2\right\} = \frac{(T-t)^5}{120} - \sum_{i,j,k,l,r=0}^{q_6} C_{rlkji}^2 \approx$$

$$\approx 0.00759105(T-t)^5.$$

5.2 О коэффициентах Фурье–Лежандра

Как следует из результатов данной главы, основная по трудоемкости работа при построении аппроксимаций повторных стохастических интегралов связана с вычислением коэффициентов

$$C_{j_k\ldots j_1}=\int\limits_{[t,T]^k} K(t_1,\ldots,t_k)\prod_{l=1}^{k}\phi_{j_l}(t_l)dt_1\ldots dt_k; \tag{5.37}$$

$$K(t_1,\ldots,t_k)=\begin{cases}\prod\limits_{l=1}^{k}\psi_l(t_l)\prod\limits_{l=1}^{k-1}\mathbf{1}_{\{t_l<t_{l+1}\}} & \text{при } k\ge 2\\ \psi_1(t_1) & \text{при } k=1\end{cases},$$

здесь $(t_1,\ldots,t_k)\in[t,T]^k$; $\{\phi_j(x)\}_{j=0}^{\infty}$ — полная ортонормированная система функций в пространстве $L_2([t,T])$.

Цель данного раздела — выявить некоторые особенности вычисления коэффициентов Фурье $C_{j_k\ldots j_1}$ (k — произвольное) разложений повторных стохастических интегралов из стохастических разложений Тейлора–Ито и Тейлора–Стратоновича (см. разд. 7.8) при использовании системы полиномов Лежандра.

Для классических разложений Тейлора–Ито (см. разд. 7.8) в (5.37) надо положить $\psi_1(s),\ldots,\psi_k(s)\equiv 1$, а для унифицированных разложений Тейлора–Ито (см. разд. 7.9) — $\psi_q(s)\equiv(t-s)^{l_q}$; $q=1,\ldots,k$; $l_q=0,\ 1,\ 2,\ldots$.

Таким образом мы будем вычислять интегралы

$$\bar{C}_{j_k\ldots j_1}=\int\limits_t^T\phi_{j_k}(t_k)\int\limits_t^{t_k}\phi_{j_{k-1}}(t_{k-1})\ldots\int\limits_t^{t_2}\phi_{j_1}(t_1)dt_1\ldots dt_{k-1}dt_k;$$

$$\hat{C}_{j_k\ldots j_1}^{l_1\ldots l_k}=\int\limits_t^T(t-t_k)^{l_k}\phi_{j_k}(t_k)\ldots\int\limits_t^{t_2}(t-t_1)^{l_1}\phi_{j_1}(t_1)dt_1\ldots dt_k,$$

где $\{\phi_j(x)\}_{j=0}^{\infty}$ — полная ортонормированная система полиномов Лежандра в пространстве $L_2([t,T])$.

Имеем

$$\bar{C}_{j_k\ldots j_1}=\frac{(T-t)^{\frac{k}{2}}}{2^k}\prod_{l=1}^{k}\sqrt{2j_l+1}\cdot A_{j_k\ldots j_1},$$

где

$$A_{j_k\ldots j_1}=\int\limits_{-1}^{1}P_{j_k}(t_k)\int\limits_{-1}^{t_k}P_{j_{k-1}}(t_{k-1})\ldots\int\limits_{-1}^{t_2}P_{j_1}(t_1)dt_1\ldots dt_{k-1}dt_k; \tag{5.38}$$

$\{P_n(x)\}_{n=0}^{\infty}$ — полная ортонормированная система полиномов Лежандра в пространстве $L_2([-1,1])$:

$$P_n(x)=\frac{1}{2^n}\sum_{q=0}^{[\frac{n}{2}]}\frac{(-1)^q(2n-2q)!}{q!(n-q)!(n-2q)!}x^{n-2q}. \tag{5.39}$$

Подставляя (5.39) в (5.38) получаем

$$A_{j_k\ldots j_1}=\frac{1}{2^{j_1+\ldots+j_k}}\sum_{q_1=0}^{[\frac{j_1}{2}]}\ldots\sum_{q_k=0}^{[\frac{j_k}{2}]}\prod_{l=1}^{k}\frac{(-1)^{q_l}(2j_l-2q_l)!}{q_l!(j_l-q_l)!(j_l-2q_l)!}\times$$

$$\times\int\limits_{-1}^{1}(t_k)^{j_k-2q_k}\ldots\int\limits_{-1}^{t_2}(t_1)^{j_1-2q_1}dt_1\ldots dt_k.$$

Таким образом вычисление $\bar{C}_{j_k\ldots j_1}$ свелось к вычислению интеграла

$$I_{p_k\ldots p_1}=\int\limits_{-1}^{1}(t_k)^{p_k}\ldots\int\limits_{-1}^{t_2}(t_1)^{p_1}dt_1\ldots dt_k;\ p_1,\ldots,p_k=0,\ 1,\ 2,\ldots. \tag{5.40}$$

Рассмотрим теперь вычисление $\hat{C}_{j_k\ldots j_1}^{l_1\ldots l_k}$. Имеем

$$\hat{C}_{j_k\ldots j_1}^{l_1\ldots l_k}=\frac{(T-t)^{\frac{k}{2}}}{2^k}\prod_{l=1}^{k}\sqrt{2j_l+1}\cdot\left(\frac{(-1)(T-t)}{2}\right)^{l_1+\ldots+l_k}I_{j_k\ldots j_1}^{l_1\ldots l_k},$$

где

$$I_{j_k\ldots j_1}^{l_1\ldots l_k}=\int\limits_{-1}^{1}(1+t_k)^{l_k}P_{j_k}(t_k)\ldots\int\limits_{-1}^{t_2}(1+t_1)^{l_1}P_{j_1}(t_1)dt_1\ldots dt_k=$$

$$=\sum_{s_k=0}^{l_k}\ldots\sum_{s_1=0}^{l_1}C_{l_k}^{s_k}\ldots C_{l_1}^{s_1}\int\limits_{-1}^{1}(t_k)^{s_k}P_{j_k}(t_k)\ldots\int\limits_{-1}^{t_2}(t_1)^{s_1}P_{j_1}(t_1)dt_1\ldots dt_k,$$

где C_n^k — биномиальный коэффициент.

Далее

$$\int\limits_{-1}^{1}(t_k)^{s_k}P_{j_k}(t_k)\ldots\int\limits_{-1}^{t_2}(t_1)^{s_1}P_{j_1}(t_1)dt_1\ldots dt_k=$$

$$=\frac{1}{2^{j_1+\ldots+j_k}}\sum_{q_1=0}^{[\frac{j_1}{2}]}\ldots\sum_{q_k=0}^{[\frac{j_k}{2}]}\prod_{l=1}^{k}\frac{(-1)^{q_l}(2j_l-2q_l)!}{q_l!(j_l-q_l)!(j_l-2q_l)!}\times$$

$$\times\int\limits_{-1}^{1}(t_k)^{j_k-2q_k+s_k}\ldots\int\limits_{-1}^{t_2}(t_1)^{j_1-2q_1+s_1}dt_1\ldots dt_k.$$

Таким образом вычисление $\hat{C}_{j_k\ldots j_1}^{l_1\ldots l_k}$ опять таки свелось к вычислению интеграла (5.40).

Вычисление интеграла (5.40) не является проблемой:

$$I_{p_1}=\frac{1}{p_1+1}\left(1-(-1)^{p_1+1}\right);$$

$$I_{p_2p_1}=\frac{1}{p_1+1}\left(\frac{1}{p_1+p_2+2}\left(1-(-1)^{p_1+p_2+2}\right)-\frac{(-1)^{p_1+1}}{p_2+1}\left(1-(-1)^{p_2+1}\right)\right);$$

$$I_{p_3p_2p_1}=\frac{1}{p_1+1}\left(\frac{1}{p_1+p_2+2}\left(\frac{1}{p_1+p_2+p_3+3}\left(1-(-1)^{p_1+p_2+p_3+3}\right)-\right.\right.$$
$$\left.-\frac{(-1)^{p_1+p_2+2}}{p_3+1}\left(1-(-1)^{p_3+1}\right)\right)-$$
$$-\frac{(-1)^{p_1+1}}{p_2+1}\left(\frac{1}{p_3+p_2+2}\left(1-(-1)^{p_3+p_2+2}\right)-\right.$$
$$\left.\left.-\frac{(-1)^{p_2+1}}{p_3+1}\left(1-(-1)^{p_3+1}\right)\right)\right)$$

и т.д.

Вообще говоря, интеграл типа $I_{p_k\ldots p_1}$ может быть вычислен при различных значениях k с помощью компьютерных пакетов символьных преобразований типа DERIVE или MAPLE.

Совсем не так просто будет обстоять дело, если мы будем использовать вместо полиномов Лежандра тригонометрические функции. Это связано с тем, что интегралы

$$\bar{C}_{j_k\ldots j_1}=\int\limits_t^T\phi_{j_k}(t_k)\int\limits_t^{t_k}\phi_{j_{k-1}}(t_{k-1})\ldots\int\limits_t^{t_2}\phi_{j_1}(t_1)dt_1\ldots dt_{k-1}dt_k;$$

$$\hat{C}_{j_k\ldots j_1}^{l_1\ldots l_k}=\int\limits_t^T(t-t_k)^{l_k}\phi_{j_k}(t_k)\ldots\int\limits_t^{t_2}(t-t_1)^{l_1}\phi_{j_1}(t_1)dt_1\ldots dt_k,$$

где $\{\phi_j(x)\}_{j=0}^{\infty}$ — полная ортонормированная система тригонометрических функций в пространстве $L_2([t,T])$:

$$\phi_j(s)=\frac{1}{\sqrt{T-t}}\begin{cases}1 & \text{при } j=0\\ \sqrt{2}\sin\frac{2\pi r(s-t)}{T-t} & \text{при } j=2r-1\\ \sqrt{2}\cos\frac{2\pi r(s-t)}{T-t} & \text{при } j=2r\end{cases};$$

$r = 1,\ 2, \ldots$ "сильно ветвятся" для различных сочетаний индексов $j_1, \ldots, j_k$, т.е. при различных сочетаниях индексов $j_1, \ldots, j_k$ указанные интегралы вычисляются по существенно различным формулам, причем количество этих формул резко растет с ростом кратности стохастического интеграла. Объективно, уже при $k = 4$ вычисления становятся крайне сложными.

Поясним сказанное на примере. При использовании тригонометрических функций, например, может потребоваться интегрирование произведения, скажем вида: $\sin\frac{2\pi r(s-t)}{T-t}\sin\frac{2\pi q(s-t)}{T-t}$ $(r, q \ \geq \ 0)$, которое равно $\frac{1}{2}\left(-\cos\frac{2\pi(r+q)(s-t)}{T-t} + \cos\frac{2\pi(r-q)q(s-t)}{T-t}\right)$.

Понятно, что при интегрировании последнего выражения уже возникнут следующие случаи: 1. $r + q \neq 0$ и $r - q \neq 0$; 2. $r + q \neq 0$ и $r - q = 0$; 3. $r + q = 0$ и $r - q = 0$.

В каждом из трех случаев первообразная будет вычисляться по "своей формуле".

Ничего подобного не просходит с многочленами Лежандра, поскольку произведение двух многочленов есть многочлен, и при интегрировании многочленов мы фактически пользуемся только формулой первообразной от степенной функции с целым неотрицательным показателем.

5.3 Аппроксимация конкретных повторных стохастических интегралов кратностей 1–3 с помощью тригонометрической системы функций

Рассмотрим аппроксимации некоторых повторных стохастических интегралов вида

$$I_{l_1\ldots l_k T,t}^{(i_1\ldots i_k)} = \int\limits_t^T (t - t_k)^{l_k} \ldots \int\limits_t^{t_2} (t - t_1)^{l_1} d\mathbf{f}_{t_1}^{(i_1)} \ldots d\mathbf{f}_{t_k}^{(i_k)},$$

$$I_{l_1\ldots l_k T,t}^{*(i_1\ldots i_k)} = \int\limits_t^{*T} (t - t_k)^{l_k} \ldots \int\limits_t^{*t_2} (t - t_1)^{l_1} d\mathbf{f}_{t_1}^{(i_1)} \ldots d\mathbf{f}_{t_k}^{(i_k)},$$

полученные с использованием теорем 1 – 4 с применением тригонометрической системы функций:

$$I_{0_{T,t}}^{(i_1)} = \sqrt{T - t}\zeta_0^{(i_1)}, \tag{5.41}$$

$$I_{1_{T,t}}^{(i_1)q}=-\frac{(T-t)^{\frac{3}{2}}}{2}\Biggl[\zeta_0^{(i_1)}-\frac{\sqrt{2}}{\pi}\Biggl(\sum_{r=1}^{q}\frac{1}{r}\zeta_{2r-1}^{(i_1)}+\sqrt{\alpha_q}\xi_q^{(i_1)}\Biggr)\Biggr], \qquad (5.42)$$

$$I_{00_{T,t}}^{*(i_2i_1)q}=\frac{1}{2}(T-t)\Biggl[\zeta_0^{(i_1)}\zeta_0^{(i_2)}+\frac{1}{\pi}\sum_{r=1}^{q}\frac{1}{r}\left\{\zeta_{2r}^{(i_1)}\zeta_{2r-1}^{(i_2)}-\zeta_{2r-1}^{(i_1)}\zeta_{2r}^{(i_2)}+\right.$$

$$\left.+\sqrt{2}\left(\zeta_{2r-1}^{(i_1)}\zeta_0^{(i_2)}-\zeta_0^{(i_1)}\zeta_{2r-1}^{(i_2)}\right)\right\}+\frac{\sqrt{2}}{\pi}\sqrt{\alpha_q}\left(\xi_q^{(i_1)}\zeta_0^{(i_2)}-\zeta_0^{(i_1)}\xi_q^{(i_2)}\right)\Biggr], \qquad (5.43)$$

$$I_{000_{T,t}}^{*(i_3i_2i_1)q}=(T-t)^{\frac{3}{2}}\Biggl(\frac{1}{6}\zeta_0^{(i_1)}\zeta_0^{(i_2)}\zeta_0^{(i_3)}+\frac{\sqrt{\alpha_q}}{2\sqrt{2}\pi}\left(\xi_q^{(i_1)}\zeta_0^{(i_2)}\zeta_0^{(i_3)}-\xi_q^{(i_3)}\zeta_0^{(i_2)}\zeta_0^{(i_1)}\right)$$

$$+\frac{1}{2\sqrt{2}\pi^2}\sqrt{\beta_q}\left(\mu_q^{(i_1)}\zeta_0^{(i_2)}\zeta_0^{(i_3)}-2\mu_q^{(i_2)}\zeta_0^{(i_1)}\zeta_0^{(i_3)}+\mu_q^{(i_3)}\zeta_0^{(i_1)}\zeta_0^{(i_2)}\right)+$$

$$+\frac{1}{2\sqrt{2}}\sum_{r=1}^{q}\left[\frac{1}{\pi r}\left\{\zeta_{2r-1}^{(i_3)}\zeta_0^{(i_2)}\zeta_0^{(i_1)}-\zeta_{2r-1}^{(i_1)}\zeta_0^{(i_2)}\zeta_0^{(i_3)}\right\}+\right.$$

$$\left.+\frac{1}{\pi^2r^2}\left\{\zeta_{2r}^{(i_1)}\zeta_0^{(i_2)}\zeta_0^{(i_3)}-2\zeta_{2r}^{(i_2)}\zeta_0^{(i_3)}\zeta_0^{(i_1)}+\zeta_{2r}^{(i_3)}\zeta_0^{(i_2)}\zeta_0^{(i_1)}\right\}\right]+$$

$$+\frac{1}{2\pi^2}\sum_{\substack{r,l=1\\ r\ne l}}^{q}\left[\frac{1}{r^2-l^2}\left\{\zeta_{2r}^{(i_1)}\zeta_{2l}^{(i_2)}\zeta_0^{(i_3)}-\zeta_{2r}^{(i_2)}\zeta_0^{(i_1)}\zeta_{2l}^{(i_3)}+\right.\right.$$

$$\left.\left.+\frac{r}{l}\zeta_{2r-1}^{(i_1)}\zeta_{2l-1}^{(i_2)}\zeta_0^{(i_3)}-\frac{l}{r}\zeta_0^{(i_1)}\zeta_{2r-1}^{(i_2)}\zeta_{2l-1}^{(i_3)}\right\}-\frac{1}{rl}\zeta_{2r-1}^{(i_1)}\zeta_0^{(i_2)}\zeta_{2l-1}^{(i_3)}\right]$$

$$+\sum_{r=1}^{q}\left[\frac{1}{4\pi r}\left\{\zeta_{2r}^{(i_1)}\zeta_{2r-1}^{(i_2)}\zeta_0^{(i_3)}-\zeta_{2r-1}^{(i_1)}\zeta_{2r}^{(i_2)}\zeta_0^{(i_3)}-\zeta_{2r-1}^{(i_2)}\zeta_{2r}^{(i_3)}\zeta_0^{(i_1)}+\zeta_{2r-1}^{(i_3)}\zeta_{2r}^{(i_2)}\zeta_0^{(i_1)}\right\}\right.$$

$$+\frac{1}{8\pi^2r^2}\left\{3\zeta_{2r-1}^{(i_1)}\zeta_{2r-1}^{(i_2)}\zeta_0^{(i_3)}+\zeta_{2r}^{(i_1)}\zeta_{2r}^{(i_2)}\zeta_0^{(i_3)}-6\zeta_{2r-1}^{(i_1)}\zeta_{2r-1}^{(i_3)}\zeta_0^{(i_2)}+\right.$$

$$\left.\left.+3\zeta_{2r-1}^{(i_2)}\zeta_{2r-1}^{(i_3)}\zeta_0^{(i_1)}-2\zeta_{2r}^{(i_1)}\zeta_{2r}^{(i_3)}\zeta_0^{(i_2)}+\zeta_{2r}^{(i_3)}\zeta_{2r}^{(i_2)}\zeta_0^{(i_1)}\right\}\right]+$$

$$+\frac{1}{4\sqrt{2}\pi^2}\left\{\sum_{r,m=1}^{q}\left[\frac{2}{rm}\left[-\zeta_{2r-1}^{(i_1)}\zeta_{2m-1}^{(i_2)}\zeta_{2m}^{(i_3)}+\zeta_{2r-1}^{(i_1)}\zeta_{2r}^{(i_2)}\zeta_{2m-1}^{(i_3)}+\right.\right.\right.$$

$$\left.+\zeta_{2r-1}^{(i_1)}\zeta_{2m}^{(i_2)}\zeta_{2m-1}^{(i_3)}-\zeta_{2r}^{(i_1)}\zeta_{2r-1}^{(i_2)}\zeta_{2m-1}^{(i_3)}\right]+$$

$$+\frac{1}{m(r+m)}\left[-\zeta_{2(m+r)}^{(i_1)}\zeta_{2r}^{(i_2)}\zeta_{2m}^{(i_3)}-\zeta_{2(m+r)-1}^{(i_1)}\zeta_{2r-1}^{(i_2)}\zeta_{2m}^{(i_3)}-\right.$$

$$\left.\left.-\zeta_{2(m+r)-1}^{(i_1)}\zeta_{2r}^{(i_2)}\zeta_{2m-1}^{(i_3)}+\zeta_{2(m+r)}^{(i_1)}\zeta_{2r-1}^{(i_2)}\zeta_{2m-1}^{(i_3)}\right]\right]+$$

$$+\sum_{m=1}^{q}\sum_{l=m+1}^{q}\Biggl[\frac{1}{m(l-m)}\left[\zeta_{2(l-m)}^{(i_1)}\zeta_{2l}^{(i_2)}\zeta_{2m}^{(i_3)}+\zeta_{2(l-m)-1}^{(i_1)}\zeta_{2l-1}^{(i_2)}\zeta_{2m}^{(i_3)}-\right.$$

$$\left.-\zeta_{2(l-m)-1}^{(i_1)}\zeta_{2l}^{(i_2)}\zeta_{2m-1}^{(i_3)}+\zeta_{2(l-m)}^{(i_1)}\zeta_{2l-1}^{(i_2)}\zeta_{2m-1}^{(i_3)}\right]+$$

$$+\frac{1}{l(l-m)}\left[-\zeta_{2(l-m)}^{(i_1)}\zeta_{2m}^{(i_2)}\zeta_{2l}^{(i_3)}+\zeta_{2(l-m)-1}^{(i_1)}\zeta_{2m-1}^{(i_2)}\zeta_{2l}^{(i_3)}-\right.$$

$$\left.\left.\left.-\zeta_{2(l-m)-1}^{(i_1)}\zeta_{2m}^{(i_2)}\zeta_{2l-1}^{(i_3)}-\zeta_{2(l-m)}^{(i_1)}\zeta_{2m-1}^{(i_2)}\zeta_{2l-1}^{(i_3)}\right]\Biggr]\right\}\right), \qquad (5.44)$$

$$I_{10_{T,t}}^{*(i_2i_1)q}=(T-t)^2\Biggl(-\frac{1}{6}\zeta_0^{(i_1)}\zeta_0^{(i_2)}-\frac{1}{2\sqrt{2}\pi}\sqrt{\alpha_q}\xi_q^{(i_1)}\zeta_0^{(i_2)}+$$

$$+\frac{1}{2\sqrt{2}\pi^2}\sqrt{\beta_q}\left(2\mu_q^{(i_2)}\zeta_0^{(i_1)}-\mu_q^{(i_1)}\zeta_0^{(i_2)}\right)+$$

$$+\frac{1}{2\sqrt{2}}\sum_{r=1}^{q}\Biggl[-\frac{1}{\pi r}\left\{\zeta_{2r-1}^{(i_1)}\zeta_0^{(i_2)}-\frac{1}{\sqrt{2}}\zeta_{2r-1}^{(i_1)}\zeta_{2r}^{(i_2)}+\frac{1}{\sqrt{2}}\zeta_{2r}^{(i_1)}\zeta_{2r-1}^{(i_2)}\right\}+$$

$$+\frac{1}{\pi^2r^2}\left(-\zeta_{2r}^{(i_1)}\zeta_0^{(i_2)}+2\zeta_0^{(i_1)}\zeta_{2r}^{(i_2)}-\frac{3}{2\sqrt{2}}\zeta_{2r-1}^{(i_1)}\zeta_{2r-1}^{(i_2)}-\frac{1}{2\sqrt{2}}\zeta_{2r}^{(i_1)}\zeta_{2r}^{(i_2)}\right)\Biggr]+$$

$$+\frac{1}{2\pi^2}\sum_{\substack{k,l=1\\k\neq l}}^{q}\frac{1}{l^2-k^2}\left[\zeta_{2k}^{(i_1)}\zeta_{2l}^{(i_2)}-\frac{k}{l}\zeta_{2k-1}^{(i_1)}\zeta_{2l-1}^{(i_2)}\right]\Biggr), \qquad (5.45)$$

$$I_{01_{T,t}}^{*(i_2i_1)q}=(T-t)^2\Biggl(-\frac{1}{3}\zeta_0^{(i_1)}\zeta_0^{(i_2)}+\frac{1}{\sqrt{2}\pi}\sqrt{\alpha_q}\left(\frac{1}{2}\xi_q^{(i_2)}\zeta_0^{(i_1)}-\xi_q^{(i_1)}\zeta_0^{(i_2)}\right)+$$

$$+\frac{1}{\sqrt{2}\pi^2}\sqrt{\beta_q}\left(\frac{1}{2}\mu_q^{(i_2)}\zeta_0^{(i_1)}-\mu_q^{(i_1)}\zeta_0^{(i_2)}\right)+$$

$$+\frac{1}{\sqrt{2}}\sum_{r=1}^{q}\Biggl[\frac{1}{\pi r}\left\{\frac{1}{2}\zeta_0^{(i_1)}\zeta_{2r-1}^{(i_2)}-\zeta_{2r-1}^{(i_1)}\zeta_0^{(i_2)}+\frac{1}{2\sqrt{2}}\left\{\zeta_{2r-1}^{(i_1)}\zeta_{2r}^{(i_2)}-\zeta_{2r}^{(i_1)}\zeta_{2r-1}^{(i_2)}\right\}\right\}+$$

$$+\frac{1}{\pi^2r^2}\left(\frac{1}{2}\zeta_0^{(i_1)}\zeta_{2r}^{(i_2)}-\zeta_{2r}^{(i_1)}\zeta_0^{(i_2)}+\frac{3}{4\sqrt{2}}\zeta_{2r-1}^{(i_1)}\zeta_{2r-1}^{(i_2)}+\frac{1}{4\sqrt{2}}\zeta_{2r}^{(i_1)}\zeta_{2r}^{(i_2)}\right)\Biggr]+$$

$$+\frac{1}{2\pi^2}\sum_{\substack{k,l=1\\k\neq l}}^{q}\frac{1}{l^2-k^2}\left[\frac{l}{k}\zeta_{2k-1}^{(i_1)}\zeta_{2l-1}^{(i_2)}+\zeta_{2k}^{(i_1)}\zeta_{2l}^{(i_2)}\right]\Biggr), \qquad (5.46)$$

$$I_{2_{T,t}}^{(i_1)}=(T-t)^{\frac{5}{2}}\Biggl[\frac{1}{3}\zeta_0^{(i_1)}+\frac{1}{\sqrt{2}\pi^2}\left(\sum_{r=1}^{q}\frac{1}{r^2}\zeta_{2r}^{(i_1)}+\sqrt{\beta_q}\mu_q^{(i_1)}\right)+$$

$$+\frac{1}{\sqrt{2}\pi}\Biggl(\sum_{r=1}^{q}\frac{1}{r}\zeta_{2r-1}^{(i_1)}+\sqrt{\alpha_q}\xi_q^{(i_1)}\Biggr)\Biggr], \tag{5.47}$$

где

$$\xi_q^{(i)}=\frac{1}{\sqrt{\alpha_q}}\sum_{r=q+1}^{\infty}\frac{1}{r}\,\zeta_{2r-1}^{(i)};\ \alpha_q=\frac{\pi^2}{6}-\sum_{r=1}^{q}\frac{1}{r^2};\ \mu_q^{(i)}=\frac{1}{\sqrt{\beta_q}}\sum_{r=q+1}^{\infty}\frac{1}{r^2}\,\zeta_{2r}^{(i)};$$

$$\beta_q=\frac{\pi^4}{90}-\sum_{r=1}^{q}\frac{1}{r^4};\ \zeta_j^{(i)}=\int\limits_t^T\phi_j(s)d\mathbf{f}_s^{(i)};$$

$\phi_j(s)$ имеет вид (4.19); $\zeta_0^{(i)}$, $\zeta_{2r}^{(i)}$, $\zeta_{2r-1}^{(i)}$, $\xi_q^{(i)}$, $\mu_q^{(i)}$; $r=1,\ldots,q$; $i=1,\ldots,m$ — независимые в совокупности стандартные гауссовские случайные величины; $i_1,\ i_2,\ i_3=1,\ldots,m$.

Рассмотрим среднеквадратические погрешности аппроксимаций (5.43)–(5.46). Из соотношений (5.43)–(5.46) при $i_1\ne i_2,\ i_2\ne i_3,\ i_1\ne i_3$ получаем

$$\mathsf{M}\left\{\left(I_{00_{T,t}}^{*(i_2i_1)}-I_{00_{T,t}}^{*(i_2i_1)q}\right)^2\right\}=\frac{(T-t)^2}{2\pi^2}\Biggl(\frac{\pi^2}{6}-\sum_{r=1}^{q}\frac{1}{r^2}\Biggr), \tag{5.48}$$

$$\mathsf{M}\left\{\left(I_{000_{T,t}}^{(i_3i_2i_1)}-I_{000_{T,t}}^{(i_3i_2i_1)q}\right)^2\right\}=$$

$$=(T-t)^3\Biggl\{\frac{1}{4\pi^2}\Biggl(\frac{\pi^2}{6}-\sum_{r=1}^{q}\frac{1}{r^2}\Biggr)+\frac{55}{32\pi^4}\Biggl(\frac{\pi^4}{90}-\sum_{r=1}^{q}\frac{1}{r^4}\Biggr)+$$

$$+\frac{1}{4\pi^4}\left(\sum_{\substack{r,l=1\\ r\ne l}}^{\infty}-\sum_{\substack{r,l=1\\ r\ne l}}^{q}\right)\frac{5l^4+4r^4-3l^2r^2}{r^2l^2(r^2-l^2)^2}\Biggr\}, \tag{5.49}$$

$$\mathsf{M}\left\{\left(I_{01_{T,t}}^{*(i_1)}-I_{01_{T,t}}^{*(i_1)q}\right)^2\right\}=(T-t)^4\Biggl\{\frac{1}{8\pi^2}\Biggl(\frac{\pi^2}{6}-\sum_{r=1}^{q}\frac{1}{r^2}\Biggr)+$$

$$+\frac{5}{32\pi^4}\Biggl(\frac{\pi^4}{90}-\sum_{r=1}^{q}\frac{1}{r^4}\Biggr)+\frac{1}{4\pi^4}\left(\sum_{\substack{k,l=1\\ k\ne l}}^{\infty}-\sum_{\substack{k,l=1\\ k\ne l}}^{q}\right)\frac{l^2+k^2}{k^2(l^2-k^2)^2}\Biggr\}, \tag{5.50}$$

$$\mathsf{M}\left\{\left(I_{10_{T,t}}^{*(i_2i_1)}-I_{10_{T,t}}^{*(i_2i_1)q}\right)^2\right\}=(T-t)^4\Biggl\{\frac{1}{8\pi^2}\Biggl(\frac{\pi^2}{6}-\sum_{r=1}^{q}\frac{1}{r^2}\Biggr)+$$

$$+\frac{5}{32\pi^4}\Biggl(\frac{\pi^4}{90}-\sum_{r=1}^{q}\frac{1}{r^4}\Biggr)+\frac{1}{4\pi^4}\left(\sum_{\substack{k,l=1\\ k\ne l}}^{\infty}-\sum_{\substack{k,l=1\\ k\ne l}}^{q}\right)\frac{l^2+k^2}{l^2(l^2-k^2)^2}\Biggr\}. \tag{5.51}$$

Нетрудно показать, что соотношения (5.49), (5.50) и (5.51) могут быть представлены с помощью леммы 10 в следующем виде:

$$\mathsf{M}\left\{\left(I_{000_{T,t}}^{(i_3i_2i_1)}-I_{000_{T,t}}^{(i_3i_2i_1)q}\right)^2\right\}=(T-t)^3\left\{\frac{4}{45}-\frac{1}{4\pi^2}\sum_{r=1}^{q}\frac{1}{r^2}-\right.$$

$$\left.-\frac{55}{32\pi^4}\sum_{r=1}^{q}\frac{1}{r^4}-\frac{1}{4\pi^4}\sum_{\substack{r,l=1\\ r\neq l}}^{q}\frac{5l^4+4r^4-3r^2l^2}{r^2l^2\left(r^2-l^2\right)^2}\right\}, \tag{5.52}$$

$$\mathsf{M}\left\{\left(I_{10_{T,t}}^{*(i_2i_1)}-I_{10_{T,t}}^{*(i_2i_1)q}\right)^2\right\}=\frac{(T-t)^4}{4}\left\{\frac{1}{9}-\frac{1}{2\pi^2}\sum_{r=1}^{q}\frac{1}{r^2}-\right.$$

$$\left.-\frac{5}{8\pi^4}\sum_{r=1}^{q}\frac{1}{r^4}-\frac{1}{\pi^4}\sum_{\substack{k,l=1\\ k\neq l}}^{q}\frac{k^2+l^2}{l^2\left(l^2-k^2\right)^2}\right\}, \tag{5.53}$$

$$\mathsf{M}\left\{\left(I_{01_{T,t}}^{*(i_2i_1)}-I_{01_{T,t}}^{*(i_2i_1)q}\right)^2\right\}=\frac{(T-t)^4}{4}\left\{\frac{1}{9}-\frac{1}{2\pi^2}\sum_{r=1}^{q}\frac{1}{r^2}-\right.$$

$$\left.-\frac{5}{8\pi^4}\sum_{r=1}^{q}\frac{1}{r^4}-\frac{1}{\pi^4}\sum_{\substack{k,l=1\\ k\neq l}}^{q}\frac{l^2+k^2}{k^2\left(l^2-k^2\right)^2}\right\}. \tag{5.54}$$

Сопоставив (5.52)–(5.54) и (5.49)–(5.51), заметим, что

$$\sum_{\substack{k,l=1\\ k\neq l}}^{\infty}\frac{l^2+k^2}{k^2\left(l^2-k^2\right)^2}=\sum_{\substack{k,l=1\\ k\neq l}}^{\infty}\frac{l^2+k^2}{l^2\left(l^2-k^2\right)^2}=\frac{\pi^4}{48}, \tag{5.55}$$

$$\sum_{\substack{r,l=1\\ r\neq l}}^{\infty}\frac{5l^4+4r^4-3r^2l^2}{r^2l^2\left(r^2-l^2\right)^2}=\frac{9\pi^4}{80}. \tag{5.56}$$

Приведем аппроксимации стохастических интегралов $I_{10_{T,t}}^{*(i_1i_1)}$, $I_{01_{T,t}}^{*(i_1i_1)}$ и условия выбора числа q с использованием тригонометрической системы функций:

$$I_{10_{T,t}}^{*(i_1i_1)q}=(T-t)^2\left(-\frac{1}{6}\left(\zeta_0^{(i_1)}\right)^2-\frac{1}{2\sqrt{2}\pi}\sqrt{\alpha_q}\xi_q^{(i_1)}\zeta_0^{(i_1)}+\frac{1}{2\sqrt{2}\pi^2}\sqrt{\beta_q}\mu_q^{(i_1)}\zeta_0^{(i_1)}+\right.$$

$$+\frac{1}{2\sqrt{2}}\sum_{r=1}^{q}\left[\frac{1}{\pi^2r^2}\left(\zeta_{2r}^{(i_1)}\zeta_0^{(i_1)}-\frac{3}{2\sqrt{2}}\left(\zeta_{2r-1}^{(i_1)}\right)^2-\frac{1}{2\sqrt{2}}\left(\zeta_{2r}^{(i_1)}\right)^2\right)-\frac{1}{\pi r}\zeta_{2r-1}^{(i_1)}\zeta_0^{(i_1)}\right]+$$

$$\left.+\frac{1}{2\pi^2}\sum_{\substack{k,l=1\\ k\neq l}}^{q}\frac{1}{l^2-k^2}\left[\zeta_{2k}^{(i_1)}\zeta_{2l}^{(i_1)}-\frac{k}{l}\zeta_{2k-1}^{(i_1)}\zeta_{2l-1}^{(i_1)}\right]\right),$$

Таблица 5.37. Проверка формулы (5.52)

$\varepsilon/(T-t)^3$	0.0459	0.0072	$7.5722 \cdot 10^{-4}$	$7.5973 \cdot 10^{-5}$	$7.5990 \cdot 10^{-6}$
q	1	10	100	1000	10000

$$
I_{01_{T,t}}^{*(i_1i_1)q} = (T-t)^2\Biggl(-\frac{1}{3}\left(\zeta_0^{(i_1)}\right)^2 - \frac{1}{2\sqrt{2}\pi}\sqrt{\alpha_q}\xi_q^{(i_1)}\zeta_0^{(i_1)} - \frac{1}{2\sqrt{2}\pi^2}\sqrt{\beta_q}\mu_q^{(i_1)}\zeta_0^{(i_1)} +
$$

$$
+\frac{1}{2\sqrt{2}}\sum_{r=1}^{q}\left[\frac{1}{\pi^2 r^2}\left(\frac{3}{2\sqrt{2}}\left(\zeta_{2r-1}^{(i_1)}\right)^2 + \frac{1}{2\sqrt{2}}\left(\zeta_{2r}^{(i_1)}\right)^2 - \zeta_{2r}^{(i_1)}\zeta_0^{(i_1)}\right) - \frac{1}{\pi r}\zeta_{2r-1}^{(i_1)}\zeta_0^{(i_1)}\right] +
$$

$$
+\frac{1}{2\pi^2}\sum_{\substack{k,l=1\\k\neq l}}^{q}\frac{1}{l^2-k^2}\left[\frac{l}{k}\zeta_{2k-1}^{(i_1)}\zeta_{2l-1}^{(i_1)} + \zeta_{2k}^{(i_1)}\zeta_{2l}^{(i_1)}\right]\Biggr).
$$

Далее получим

$$
\mathsf{M}\left\{\left(I_{01_{T,t}}^{*(i_1i_1)} - I_{01_{T,t}}^{*(i_1i_1)q}\right)^2\right\} = \mathsf{M}\left\{\left(I_{10_{T,t}}^{*(i_1i_1)} - I_{10_{T,t}}^{*(i_1i_1)q}\right)^2\right\} =
$$

$$
= \frac{(T-t)^4}{4}\Biggl[\frac{2}{\pi^4}\left(\frac{\pi^4}{90} - \sum_{r=1}^{q}\frac{1}{r^4}\right) + \frac{1}{\pi^4}\left(\frac{\pi^2}{6} - \sum_{r=1}^{q}\frac{1}{r^2}\right)^2 +
$$

$$
+\frac{1}{\pi^4}\left(\sum_{\substack{k,l=1\\k\neq l}}^{\infty} - \sum_{\substack{k,l=1\\k\neq l}}^{q}\right)\frac{l^2+k^2}{k^2(l^2-k^2)^2}\Biggr]. \tag{5.57}
$$

С учетом (5.55) перепишем соотношение (5.57) в виде

$$
\mathsf{M}\left\{\left(I_{01_{T,t}}^{*(i_1i_1)} - I_{01_{T,t}}^{*(i_1i_1)q}\right)^2\right\} = \mathsf{M}\left\{\left(I_{10_{T,t}}^{*(i_1i_1)} - I_{10_{T,t}}^{*(i_1i_1)q}\right)^2\right\} =
$$

$$
= \frac{(T-t)^4}{4}\Biggl[\frac{17}{240} - \frac{1}{3\pi^2}\sum_{r=1}^{q}\frac{1}{r^2} - \frac{2}{\pi^4}\sum_{r=1}^{q}\frac{1}{r^4} +
$$

$$
+\frac{1}{\pi^4}\left(\sum_{r=1}^{q}\frac{1}{r^2}\right)^2 - \frac{1}{\pi^4}\sum_{\substack{k,l=1\\k\neq l}}^{q}\frac{l^2+k^2}{k^2(l^2-k^2)^2}\Biggr]. \tag{5.58}
$$

В таблицах 5.37 – 5.39 численно осуществлена проверка формул (5.52) – (5.54), (5.58) при различных значениях q. В таблицах 5.37 – 5.39 ε означает правые части указанных формул.

Таблица 5.38. Проверка формул (5.53), (5.54)

$4\varepsilon/(T-t)^4$	0.0540	0.0082	$8.4261\cdot 10^{-4}$	$8.4429\cdot 10^{-5}$	$8.4435\cdot 10^{-6}$
q	1	10	100	1000	10000

Таблица 5.39. Проверка формулы (5.58)

$4\varepsilon/(T-t)^4$	0.0268	0.0034	$3.3955\cdot 10^{-4}$	$3.3804\cdot 10^{-5}$	$3.3778\cdot 10^{-6}$
q	1	10	100	1000	10000

Формулы (5.55), (5.56) представляются весьма интересными. Подтвердим численно их правильность (таблицы 5.40, 5.41; ε_p — абсолютное отклонение кратных частичных сумм с верхним пределом суммирования p для рядов (5.55), (5.56) от правых частей формул (5.55), (5.56); сходимость кратных рядов понимается здесь при $p_1=p_2=p\to\infty$, что допустимо согласно теореме 1).

Рассмотрим, с использованием тригонометрической системы функций, аппроксимации повторных стохастических интегралов вида

$$J^{*(i_k\ldots i_1)}_{(\lambda_k\ldots\lambda_1)s,t}=\int\limits_t^{*s}\ldots\int\limits_t^{*\tau_2}d\mathbf{w}^{(i_k)}_{\tau_1}\ldots d\mathbf{w}^{(i_1)}_{\tau_k},$$

где $\mathbf{w}^{(i)}_{\tau_l}=\mathbf{f}^{(i)}_{\tau_l};\ i=1,\ldots,m$ при $\lambda_l=1$ и $\mathbf{w}^{(0)}_{\tau_l}=\tau$ при $\lambda_l=0$.

Нетрудно видеть, что аппроксимации $J^{*(i_2i_1)q}_{(\lambda_2\lambda_1)T,t},\ J^{*(i_3i_2i_1)q}_{(\lambda_3\lambda_2\lambda_1)T,t}$ стохастических интегралов $J^{*(i_2i_1)}_{(\lambda_2\lambda_1)T,t},\ J^{*(i_3i_2i_1)}_{(\lambda_3\lambda_2\lambda_1)T,t}$ определяются правыми частями формул (5.43), (5.44), в которых следует взять $\zeta^{(i)}_j=\int\limits_t^T\phi_j(s)d\mathbf{w}^{(i)}_s;\ i_1,\ i_2,\ i_3=0,\ 1,\ldots,m.$

Поскольку $\int\limits_t^T\phi_j(s)d\mathbf{w}^{(0)}_s=\begin{cases}\sqrt{T-t} & \text{при } j=0\\ 0 & \text{при } j\ne 0\end{cases}$, то нетрудно получить из (5.43) и (5.44), считая, что в этих равенствах $\zeta^{(i)}_j=\int\limits_t^T\phi_j(s)d\mathbf{w}^{(i)}_s;$

Таблица 5.40. Проверка формулы (5.55)

ε_p	2.0294	0.3241	0.0330	0.0033	$3.2902\cdot 10^{-4}$
p	1	10	100	1000	10000

Таблица 5.41. Проверка формулы (5.56)

ε_p	10.9585	1.8836	0.1968	0.0197	0.0020
p	1	10	100	1000	10000

$i_1,\ i_2,\ i_3 = 0,\ 1,\ldots,m$, следующее семейство формул:

$$J_{(10)T,t}^{*(i_2 0)q} = \frac{1}{2}(T-t)^{\frac{3}{2}}\Biggl[\zeta_0^{(i_2)} + \frac{\sqrt{2}}{\pi}\Biggl(\sum_{r=1}^{q}\frac{1}{r}\zeta_{2r-1}^{(i_2)} + \sqrt{\alpha_q}\xi_q^{(i_2)}\Biggr)\Biggr],$$

$$J_{(01)T,t}^{*(0 i_1)q} = \frac{1}{2}(T-t)^{\frac{3}{2}}\Biggl[\zeta_0^{(i_1)} - \frac{\sqrt{2}}{\pi}\Biggl(\sum_{r=1}^{q}\frac{1}{r}\zeta_{2r-1}^{(i_1)} + \sqrt{\alpha_q}\xi_q^{(i_2)}\Biggr)\Biggr],$$

$$J_{(001)T,t}^{*(00 i_1)q} = (T-t)^{\frac{5}{2}}\Biggl[\frac{1}{6}\zeta_0^{(i_1)} + \frac{1}{2\sqrt{2}\pi^2}\Biggl(\sum_{r=1}^{q}\frac{1}{r^2}\zeta_{2r}^{(i_1)} + \sqrt{\beta_q}\mu_q^{(i_1)}\Biggr) +$$

$$+\frac{1}{2\sqrt{2}\pi}\Biggl(\sum_{r=1}^{q}\frac{1}{r}\zeta_{2r-1}^{(i_1)} + \sqrt{\alpha_q}\xi_q^{(i_1)}\Biggr)\Biggr],$$

$$J_{(010)T,t}^{*(0 i_2 0)q} = (T-t)^{\frac{5}{2}}\Biggl[\frac{1}{6}\zeta_0^{(i_2)} - \frac{1}{\sqrt{2}\pi^2}\Biggl(\sum_{r=1}^{q}\frac{1}{r^2}\zeta_{2r}^{(i_2)} + \sqrt{\beta_q}\mu_q^{(i_2)}\Biggr)\Biggr],$$

$$J_{(100)T,t}^{*(i_3 00)q} = (T-t)^{\frac{5}{2}}\Biggl[\frac{1}{6}\zeta_0^{(i_3)} + \frac{1}{2\sqrt{2}\pi^2}\Biggl(\sum_{r=1}^{q}\frac{1}{r^2}\zeta_{2r}^{(i_3)} + \sqrt{\beta_q}\mu_q^{(i_3)}\Biggr) -$$

$$-\frac{1}{2\sqrt{2}\pi}\Biggl(\sum_{r=1}^{q}\frac{1}{r}\zeta_{2r-1}^{(i_3)} + \sqrt{\alpha_q}\xi_q^{(i_3)}\Biggr)\Biggr],$$

$$J_{(011)T,t}^{*(0 i_2 i_1)q} = (T-t)^{2}\Biggl(\frac{1}{6}\zeta_0^{(i_1)}\zeta_0^{(i_2)} + \frac{1}{2\sqrt{2}\pi}\sqrt{\alpha_q}\xi_q^{(i_1)}\zeta_0^{(i_2)} +$$

$$+\frac{1}{2\sqrt{2}\pi^2}\sqrt{\beta_q}\Bigl(\mu_q^{(i_1)}\zeta_0^{(i_2)} - 2\mu_q^{(i_2)}\zeta_0^{(i_1)}\Bigr) +$$

$$+\frac{1}{2\sqrt{2}}\sum_{r=1}^{q}\Biggl[\frac{1}{\pi r}\zeta_{2r-1}^{(i_1)}\zeta_0^{(i_2)} + \frac{1}{\pi^2 r^2}\Bigl\{\zeta_{2r}^{(i_1)}\zeta_0^{(i_2)} - 2\zeta_{2r}^{(i_2)}\zeta_0^{(i_1)}\Bigr\}\Biggr] +$$

$$+\frac{1}{2\pi^2}\sum_{\substack{r,l=1\\ r\ne l}}^{q}\frac{1}{r^2-l^2}\Biggl[\zeta_{2r}^{(i_1)}\zeta_{2l}^{(i_2)} + \frac{r}{l}\zeta_{2r-1}^{(i_1)}\zeta_{2l-1}^{(i_2)}\Biggr] +$$

$$+\sum_{r=1}^{q}\Biggl[\frac{1}{4\pi r}\Bigl\{\zeta_{2r}^{(i_1)}\zeta_{2r-1}^{(i_2)} - \zeta_{2r-1}^{(i_1)}\zeta_{2r}^{(i_2)}\Bigr\} +$$

$$
+\frac{1}{8\pi^2r^2}\left\{3\zeta_{2r-1}^{(i_1)}\zeta_{2r-1}^{(i_2)}+\zeta_{2r}^{(i_1)}\zeta_{2r}^{(i_2)}\right\}\Biggr]\Biggr),
$$

$$
J_{(110)T,t}^{*(i_3i_20)q}=(T-t)^2\Biggl(\frac{1}{6}\zeta_0^{(i_3)}\zeta_0^{(i_2)}-\frac{1}{2\sqrt{2}\pi}\sqrt{\alpha_q}\xi_q^{(i_3)}\zeta_0^{(i_2)}+
$$

$$
+\frac{1}{2\sqrt{2}\pi^2}\sqrt{\beta_q}\Biggl(\mu_q^{(i_3)}\zeta_0^{(i_2)}-2\mu_q^{(i_2)}\zeta_0^{(i_3)}\Biggr)+
$$

$$
+\frac{1}{2\sqrt{2}}\sum_{r=1}^{q}\Biggl[-\frac{1}{\pi r}\zeta_{2r-1}^{(i_3)}\zeta_0^{(i_2)}+\frac{1}{\pi^2r^2}\left\{-2\zeta_{2r}^{(i_2)}\zeta_0^{(i_3)}+\zeta_{2r}^{(i_3)}\zeta_0^{(i_2)}\right\}\Biggr]+
$$

$$
+\frac{1}{2\pi^2}\sum_{\substack{r,l=1\\ r\ne l}}^{q}\frac{1}{l^2-r^2}\Biggl[\frac{l}{r}\zeta_{2r-1}^{(i_2)}\zeta_{2l-1}^{(i_3)}+\zeta_{2r}^{(i_2)}\zeta_{2l}^{(i_3)}\Biggr]+
$$

$$
+\sum_{r=1}^{q}\Biggl[\frac{1}{4\pi r}\left\{-\zeta_{2r-1}^{(i_2)}\zeta_{2r}^{(i_3)}+\zeta_{2r-1}^{(i_3)}\zeta_{2r}^{(i_2)}\right\}+
$$

$$
+\frac{1}{8\pi^2r^2}\left\{3\zeta_{2r-1}^{(i_2)}\zeta_{2r-1}^{(i_3)}+\zeta_{2r}^{(i_3)}\zeta_{2r}^{(i_2)}\right\}\Biggr]\Biggr),
$$

$$
J_{(101)T,t}^{*(i_30i_1)q}=(T-t)^2\Biggl(\frac{1}{6}\zeta_0^{(i_1)}\zeta_0^{(i_3)}+\frac{1}{2\sqrt{2}\pi}\sqrt{\alpha_q}\left(\xi_q^{(i_1)}\zeta_0^{(i_3)}-\xi_q^{(i_3)}\zeta_0^{(i_1)}\right)+
$$

$$
+\frac{1}{2\sqrt{2}\pi^2}\sqrt{\beta_q}\left(\mu_q^{(i_1)}\zeta_0^{(i_3)}+\mu_q^{(i_3)}\zeta_0^{(i_1)}\right)+
$$

$$
+\frac{1}{2\sqrt{2}}\sum_{r=1}^{q}\Biggl[\frac{1}{\pi r}\left\{\zeta_{2r-1}^{(i_1)}\zeta_0^{(i_3)}-\zeta_{2r-1}^{(i_3)}\zeta_0^{(i_1)}\right\}+
$$

$$
+\frac{1}{\pi^2r^2}\left\{\zeta_{2r}^{(i_1)}\zeta_0^{(i_3)}+\zeta_{2r}^{(i_3)}\zeta_0^{(i_1)}\right\}\Biggr]-\frac{1}{2\pi^2}\sum_{\substack{r,l=1\\ r\ne l}}^{q}\frac{1}{rl}\zeta_{2r-1}^{(i_1)}\zeta_{2l-1}^{(i_3)}-
$$

$$
-\sum_{r=1}^{q}\frac{1}{4\pi^2r^2}\left\{3\zeta_{2r-1}^{(i_1)}\zeta_{2r-1}^{(i_3)}+\zeta_{2r}^{(i_1)}\zeta_{2r}^{(i_3)}\right\}\Biggr).
$$

5.4 Сходимость с вероятностью 1 разложений некоторых конкретных повторных стохастических интегралов

Обратимся теперь к сходимости с вероятностью 1. Подробно рассмотрим повторный стохастический интеграл вида:

$$
I_{00_{T,t}}^{*(i_1i_2)}=\frac{T-t}{2}\Biggl[\zeta_0^{(i_1)}\zeta_0^{(i_2)}+\sum_{i=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{4i^2-1}}\left\{\zeta_{i-1}^{(i_1)}\zeta_i^{(i_2)}-\zeta_i^{(i_1)}\zeta_{i-1}^{(i_2)}\right\}\Biggr]. \qquad (5.59)
$$

При $i_1 = i_2$ из (5.59) получаем равенство: $I_{00_{T,t}}^{*(i_1 i_1)} = \frac{1}{2}(T-t)\left(\zeta_0^{(i_1)}\right)^2$, которое справедливо с вероятностью 1 и может быть получено с помощью формулы Ито.

Рассмотрим случай $i_1 \neq i_2$. Сначала отметим известный факт.

Утверждение 1. *Если для последовательности случайных величин ξ_n при некотором $p > 0$ сходится числовой ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \mathsf{M}\{|\xi_n|^p\}$, то последовательность ξ_n сходится к нулю с вероятностью* 1.

В нашем конкретном случае:

$$I_{00_{T,t}}^{*(i_1 i_2)} = \frac{T-t}{2}\left[\zeta_0^{(i_1)}\zeta_0^{(i_2)} + \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{4i^2-1}}\left\{\zeta_{i-1}^{(i_1)}\zeta_i^{(i_2)} - \zeta_i^{(i_1)}\zeta_{i-1}^{(i_2)}\right\}\right] + \xi_n,$$

$$\xi_n = \frac{T-t}{2}\sum_{i=n+1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{4i^2-1}}\left\{\zeta_{i-1}^{(i_1)}\zeta_i^{(i_2)} - \zeta_i^{(i_1)}\zeta_{i-1}^{(i_2)}\right\},$$

$$\mathsf{M}\{|\xi_n|^2\} = \int\limits_{[t,T]^2} R_n^2(t_1,t_2)dt_1dt_2 = \frac{(T-t)^2}{2}\sum_{i=n+1}^{\infty} \frac{1}{4i^2-1}, \tag{5.60}$$

$$\sum_{i=n+1}^{\infty} \frac{1}{4i^2-1} \leq \int\limits_{n}^{\infty} \frac{1}{4x^2-1}dx = -\frac{1}{4}\ln\left|1 - \frac{2}{2n+1}\right| \leq \frac{C_0}{n};\ C_0 < \infty, \tag{5.61}$$

$$\xi_n \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{(t_1,t_2)} \int\limits_{t}^{T}\int\limits_{t}^{t_2} R_n(t_1,t_2)d\mathbf{f}_{t_1}^{(i_1)}d\mathbf{f}_{t_2}^{(i_2)} = \int\limits_{[t,T]^2} R_n(t_1,t_2)d\mathbf{f}_{t_1}^{(i_1)}d\mathbf{f}_{t_2}^{(i_2)}; R_n(t_1,t_1) \equiv 0.$$

Поэтому, взяв $p = 2$ в утверждении 1, мы не сможем доказать сходимость ξ_n к нулю с вероятностью 1, поскольку ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \mathsf{M}\{|\xi_n|^2\}$ будет мажорироваться расходящимся рядом Дирихле с показателем 1. Возьмем $p = 4$ и оценим $\mathsf{M}\{|\xi_n|^4\}$.

Согласно (1.46) при $k = 2$ и $n = 2$, (5.60), (5.61) найдутся такие C, $C_1 < \infty$, что

$$\mathsf{M}\{|\xi_n|^4\} \leq C\left(\int\limits_{[t,T]^2} R_n^2(t_1,t_2)dt_1dt_2\right)^2 \leq \frac{C_1}{n^2} \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \mathsf{M}\{|\xi_n|^4\} \leq C_1\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}. \tag{5.62}$$

Поскольку ряд в (5.62) сходится, то по утверждению 1 имеем $\xi_n \to 0$ при $n \to \infty$ с в. 1 $\Rightarrow I_{00_{T,t}}^{*(i_1 i_2)n} \to I_{00_{T,t}}^{*(i_1 i_2)}$ при $n \to \infty$ с в. 1.

Перейдем к рассмотрению стохастических интегралов $I_{01_{T,t}}^{*(i_1 i_2)}$, $I_{10_{T,t}}^{*(i_1 i_2)}$, разложения которых имеют вид (5.6), (5.7). Очевидно, что случай $i_1 \neq i_2$

рассматривается абсолютно аналогично вышеизложенным рассуждениям. При $i_1 = i_2$ из разложений (5.6), (5.7) видно, что $\mathsf{M}\{|\xi_n|^2\} \le C_2/n^2$, т.е. при доказательстве сходимости с вероятностью 1 достаточно будет в утверждении 1 взять $p = 2$. Разложения (5.2)–(5.4), (5.15) для интегралов $I_{0_{T,t}}^{(i_1)}$, $I_{1_{T,t}}^{(i_1)}$, $I_{2_{T,t}}^{(i_1)}$, $I_{3_{T,t}}^{(i_1)}$ изначально справедливы с вероятностью 1 (они содержат 1, 2, 3 и 4 слагаемых соответственно). По-видимому по предложенной схеме можно доказать сходимость с вероятностью 1 повторных стохастических интегралов кратности $k > 2$.

5.5 О структуре функций $K(t_1,\ldots,t_k)$, используемых в приложениях

В стохастические разложения Тейлора (унифицированные и классические), рассмотренные в главе 7, входят системы повторных стохастических интегралов (7.26) – (7.29), (7.16), (7.20). Всвязи с теоремами 1 – 4 особый интерес представляют системы (7.26), (7.27), (7.16) при $k = 1,\ 2,\ 3,\ldots$, системы (7.28), (7.29), (7.20) при $k = 1,\ 2$, а также стохастические интегралы вида (7.28) и (7.29) при $k = 3$.

Функции $K(t_1,\ldots,t_k)$, входящие в формулировку теоремы 1, для семейства (7.26) имеют вид:

$$K(t_1,\ldots,t_k) = \begin{cases} (t-t_k)^{l_k}\ldots(t-t_1)^{l_1},\ t_1<\ldots<t_k \\ 0,\ \text{иначе} \end{cases};\ t_1,\ldots,t_k \in [t,T]. \tag{5.63}$$

В частности, для стохастических интегралов $I_{1_{T,t}}^{(i_1)}$, $I_{2_{T,t}}^{(i_1)}$, $I_{00_{T,t}}^{(i_1i_2)}$, $I_{000_{T,t}}^{(i_1i_2i_3)}$, $I_{01_{T,t}}^{(i_1i_2)}$, $I_{10_{T,t}}^{(i_1i_2)}$, $I_{0000_{T,t}}^{(i_1\ldots i_4)}$, $I_{20_{T,t}}^{(i_1i_2)}$, $I_{11_{T,t}}^{(i_1i_2)}$, $I_{02_{T,t}}^{(i_1i_2)}$; $i_1,\ldots,i_4 = 1,\ldots,m$ функции $K(t_1,\ldots,t_k)$ вида (5.63) имеют соответственно следующий вид:

$$K_1(t_1) = t-t_1,\ K_2(t_1) = (t-t_1)^2, \tag{5.64}$$

$$K_{00}(t_1,t_2) = \begin{cases} 1,\ t_1<t_2 \\ 0,\ \text{иначе} \end{cases},\ K_{000}(t_1,t_2,t_3) = \begin{cases} 1,\ t_1<t_2<t_3 \\ 0,\ \text{иначе} \end{cases}, \tag{5.65}$$

$$K_{01}(t_1,t_2) = \begin{cases} t-t_2,\ t_1<t_2 \\ 0,\ \text{иначе} \end{cases},\ K_{10}(t_1,t_2) = \begin{cases} t-t_1,\ t_1<t_2 \\ 0,\ \text{иначе} \end{cases}, \tag{5.66}$$

$$K_{0000}(t_1,t_2) = \begin{cases} 1,\ t_1<t_2<t_3<t_4 \\ 0,\ \text{иначе} \end{cases},\ K_{20}(t_1,t_2) = \begin{cases} (t-t_1)^2,\ t_1<t_2 \\ 0,\ \text{иначе} \end{cases}, \tag{5.67}$$

$$K_{11}(t_1,t_2) = \begin{cases} (t-t_1)(t-t_2),\ t_1<t_2 \\ 0,\ \text{иначе} \end{cases},\ K_{02}(t_1,t_2) = \begin{cases} (t-t_2)^2,\ t_1<t_2 \\ 0,\ \text{иначе} \end{cases}, \tag{5.68}$$

где $t_1, \ldots, t_4 \in [t, T]$.

Очевидно, что наиболее простым (имеющим конечное число слагаемых) разложением в ряд Фурье по полной ортонормированной в пространстве $L_2([t, T])$ системе функций для полинома конечной степени будет его разложение по системе полиномов Лежандра. Полиномиальные функции входят в функции (5.64) – (5.68) как их составные части, поэтому логично ожидать, что наиболее простыми разложениями в кратные ряды Фурье для функций (5.64) – (5.68) будут их разложения в кратные ряды Фурье–Лежандра при $l_1^2 + \ldots + l_k^2 > 0$. Если же $l_1 = \ldots = l_k = 0$ (см. функции $K_{00}(t_1, t_2)$, $K_{000}(t_1, t_2, t_3)$, $K_{0000}(t_1, \ldots, t_4)$), то можно ожидать, что в этом случае разложения указанных функций в кратные ряды Фурье по тригонометрическим функциям и полиномам Лежандра будут иметь примерно одинаковую сложность.

Отметим, что приведенные предположения полностью подтверждаются (сравни формулы (5.3), (5.4), (5.6), (5.7) с формулами (5.42), (5.47), (5.46), (5.45) соответственно).

Таким образом, применение полиномов Лежандра в рассматриваемой области является несомненным шагом вперед.

Глава 6

Другие методы сильной аппроксимации повторных стохастических интегралов Стратоновича и Ито

6.1 Метод Г.Н. Мильштейна сильной аппроксимации повторных стохастических интегралов

6.1.1 Введение

Г.Н. Мильштейном в [24] предложен метод разложения повторных стохастических интегралов, основанный на разложении процесса броуновского моста в тригонометрический ряд Фурье со случайными коэффициентами.

Рассмотрим процесс броуновского моста

$$\mathbf{f}_t - \frac{t}{\Delta}\mathbf{f}_\Delta,\ t \in [0, \Delta],\ \Delta > 0, \tag{6.1}$$

где $\mathbf{f}_t \in \Re^m$ — стандартный векторный винеровский процесс с независимыми компонентами $\mathbf{f}_t^{(i)};\ i = 1, \ldots, m$.

Рассмотрим также сходящееся в среднеквадратическом смысле покомпонентное разложение процесса (6.1) в тригонометрический ряд Фурье:

$$\mathbf{f}_t^{(i)} - \frac{t}{\Delta}\mathbf{f}_\Delta^{(i)} = \frac{1}{2}a_{i,0} + \sum_{r=1}^{\infty}\left(a_{i,r}\cos\frac{2\pi rt}{\Delta} + b_{i,r}\sin\frac{2\pi rt}{\Delta}\right), \tag{6.2}$$

где

$$a_{i,r} = \frac{2}{\Delta}\int\limits_0^\Delta \left(\mathbf{f}_s^{(i)} - \frac{s}{\Delta}\mathbf{f}_\Delta^{(i)}\right)\cos\frac{2\pi rs}{\Delta}ds,\ b_{i,r} = \frac{2}{\Delta}\int\limits_0^\Delta \left(\mathbf{f}_s^{(i)} - \frac{s}{\Delta}\mathbf{f}_\Delta^{(i)}\right)\sin\frac{2\pi rs}{\Delta}ds;$$

$r = 0,\ 1, \ldots;\ i = 1, \ldots, m.$

Нетрудно показать [24], что случайные величины $a_{i,r}, b_{i,r}$ гауссовские и удовлетворяют следующим соотношениям:

$$\mathsf{M}\left\{a_{i,r}b_{i,r}\right\} = \mathsf{M}\left\{a_{i,r}b_{i,k}\right\} = 0,\ \mathsf{M}\left\{a_{i,r}a_{i,k}\right\} = \mathsf{M}\left\{b_{i,r}b_{i,k}\right\} = 0,$$

$$\mathsf{M}\left\{a_{i_1,r}a_{i_2,r}\right\} = \mathsf{M}\left\{b_{i_1,r}b_{i_2,r}\right\} = 0,\ \mathsf{M}\left\{a_{i,r}^2\right\} = \mathsf{M}\left\{b_{i,r}^2\right\} = \frac{\Delta}{2\pi^2 r^2},$$

где $i,\ i_1,\ i_2 = 1, \ldots, m;\ r \neq k;\ i_1 \neq i_2.$

Согласно (6.2) имеем

$$\mathbf{f}_t^{(i)} = \mathbf{f}_\Delta^{(i)} \frac{t}{\Delta} + \frac{1}{2} a_{i,0} + \sum_{r=1}^{\infty} \left(a_{i,r} \cos \frac{2\pi r t}{\Delta} + b_{i,r} \sin \frac{2\pi r t}{\Delta} \right), \tag{6.3}$$

где ряд сходится в среднеквадратическом смысле.

6.1.2 Аппроксимация повторных стохастических интегралов первой и второй кратности

Используя соотношение (6.3), нетрудно получить следующие сходящиеся в среднеквадратическом смысле разложения [24], [25]:

$$\int\limits_0^{*t} d\mathbf{f}_t^{(i)} = \frac{t}{\Delta}\mathbf{f}_\Delta^{(i)} + \frac{1}{2} a_{i,0} + \sum_{r=1}^{\infty} \left(a_{i,r} \cos \frac{2\pi r t}{\Delta} + b_{i,r} \sin \frac{2\pi r t}{\Delta} \right), \tag{6.4}$$

$$\int\limits_0^{*t} \int\limits_0^{*\tau} d\mathbf{f}_{\tau_1}^{(i)} d\tau = \frac{t^2}{2\Delta}\mathbf{f}_\Delta^{(i)} + \frac{t}{2} a_{i,0} + \frac{\Delta}{2\pi} \sum_{r=1}^{\infty} \frac{1}{r} \left\{ a_{i,r} \sin \frac{2\pi r t}{\Delta} - b_{i,r} \left(\cos \frac{2\pi r t}{\Delta} - 1 \right) \right\}, \tag{6.5}$$

$$\int\limits_0^{*t} \int\limits_0^{*\tau} d\tau_1 d\mathbf{f}_\tau^{(i)} = t \int\limits_0^{*t} d\mathbf{f}_t^{(i)} - \int\limits_0^{*t} \int\limits_0^{*\tau} d\mathbf{f}_{\tau_1}^{(i)} d\tau = \frac{t^2}{2\Delta}\mathbf{f}_\Delta^{(i)} + t \sum_{r=1}^{\infty} \left\{ a_{i,r} \cos \frac{2\pi r t}{\Delta} + \right.$$

$$\left. + b_{i,r} \sin \frac{2\pi r t}{\Delta} \right\} - \frac{\Delta}{2\pi} \sum_{r=1}^{\infty} \frac{1}{r} \left\{ a_{i,r} \sin \frac{2\pi r t}{\Delta} - b_{i,r} \left(\cos \frac{2\pi r t}{\Delta} - 1 \right) \right\}, \tag{6.6}$$

$$\int\limits_0^{*t} \int\limits_0^{*\tau} d\mathbf{f}_{\tau_1}^{(i_1)} d\mathbf{f}_\tau^{(i_2)} = \frac{1}{\Delta}\mathbf{f}_\Delta^{(i_1)} \int\limits_0^{*t} \int\limits_0^{*\tau} d\tau_1 d\mathbf{f}_\tau^{(i_2)} + \frac{1}{2} a_{i_1,0} \int\limits_0^{*t} d\mathbf{f}_t^{(i_2)} + \frac{t\pi}{\Delta} \sum_{r=1}^{\infty} r \left(a_{i_1,r} b_{i_2,r} - \right.$$

$$
-b_{i_1,r}a_{i_2,r}) + \frac{1}{4}\sum_{r=1}^{\infty}\Biggl\{(a_{i_1,r}a_{i_2,r} - b_{i_1,r}b_{i_2,r})\left(1-\cos\frac{4\pi rt}{\Delta}\right) + (a_{i_1,r}b_{i_2,r}+
$$

$$
+b_{i_1,r}a_{i_2,r})\sin\frac{4\pi rt}{\Delta} + \frac{2}{\pi r}\mathbf{f}_{\Delta}^{(i_2)}\left(a_{i_1,r}\sin\frac{2\pi rt}{\Delta} + b_{i_1,r}\left(\cos\frac{2\pi rt}{\Delta} - 1\right)\right)\Biggr\} +
$$

$$
+\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{r=1(r\ne k)}^{\infty} k\Biggl\{a_{i_1,r}a_{i_2,k}\left[\frac{\cos\left(\frac{2\pi(k+r)t}{\Delta}\right)}{2(k+r)} + \frac{\cos\left(\frac{2\pi(k-r)t}{\Delta}\right)}{2(k-r)} - \frac{k}{k^2-r^2}\right] +
$$

$$
+a_{i_1,r}b_{i_2,k}\left[\frac{\sin\left(\frac{2\pi(k+r)t}{\Delta}\right)}{2(k+r)} + \frac{\sin\left(\frac{2\pi(k-r)t}{\Delta}\right)}{2(k-r)}\right] +
$$

$$
+b_{i_1,r}b_{i_2,k}\left[\frac{\cos\left(\frac{2\pi(k-r)t}{\Delta}\right)}{2(k-r)} - \frac{\cos\left(\frac{2\pi(k+r)t}{\Delta}\right)}{2(k+r)} - \frac{r}{k^2-r^2}\right] +
$$

$$
+\frac{\Delta}{2\pi}b_{i_1,r}a_{i_2,k}\left[\frac{\sin\left(\frac{2\pi(k+r)t}{\Delta}\right)}{2(k+r)} - \frac{\sin\left(\frac{2\pi(k-r)t}{\Delta}\right)}{2(k-r)}\right]\Biggr\}. \tag{6.7}
$$

Следует обратить особое внимание на то обстоятельство, что двойной ряд в (6.7) следует понимать как повторный, а не как кратный (теорема 1), т.е. как повторный предел соответствующей последовательности двойных частичных сумм. Это связано с тем, что итеративная подстановка разложений винеровских процессов в повторный стохастический интеграл приводит именно к повторному взятию операции предельного перехода.

Заметим, что кратный ряд гораздо предпочтительнее повторного при его приближенном представлении повторной частичной суммой, поскольку сходимость таких приближений обеспечивается при любом способе одновременного стремления к бесконечности верхних пределов суммирования повторной частичной суммы (для определенности обозначим их $p_1,\ldots,p_k$; см. теорему 1), в частности, в наиболее простом случае можно положить $p_1=\ldots=p_k=p\to\infty$. Однако последнее условие, строго говоря, вовсе не гарантирует сходимости повторного ряда с такой же частичной суммой, как и у рассматриваемого кратного ряда.

Далее мы увидим, что применение метода Г.Н. Мильштейна к аппроксимации повторных стохастических интегралов, по меньшей мере третьей кратности, как раз связано с описанной выше проблемой. Отметим, что в [25] тем не менее не вполне обоснованно используется именно условие: $p_1=p_2=p_3=p\to\infty$ [25] (с. 202, 204).

Положим в соотношениях (6.4)–(6.7) $t = \Delta$ (при этом двойные частичные суммы повторного ряда в (6.7) обратятся в ноль).

В результате получим следующие сходящиеся в среднеквадратическом смысле разложения:

$$\int\limits_0^{*\Delta} d\mathbf{f}_t^{(i)} = \mathbf{f}_\Delta^{(i)}, \tag{6.8}$$

$$\int\limits_0^{*\Delta} \int\limits_0^{*\tau} d\mathbf{f}_{\tau_1}^{(i)} d\tau = \frac{1}{2}\Delta \left(\mathbf{f}_\Delta^{(i)} + a_{i,0}\right), \tag{6.9}$$

$$\int\limits_0^{*\Delta} \int\limits_0^{*\tau} d\tau_1 d\mathbf{f}_\tau^{(i)} = \frac{1}{2}\Delta \left(\mathbf{f}_\Delta^{(i)} - a_{i,0}\right), \tag{6.10}$$

$$\int\limits_0^{*\Delta} \int\limits_0^{*\tau} d\mathbf{f}_{\tau_1}^{(i_1)} d\mathbf{f}_\tau^{(i_2)} = \frac{1}{2}\mathbf{f}_\Delta^{(i_1)}\mathbf{f}_\Delta^{(i_2)} - \frac{1}{2}\left(a_{i_2,0}\mathbf{f}_\Delta^{(i_1)} - a_{i_1,0}\mathbf{f}_\Delta^{(i_2)}\right) +$$

$$+\pi \sum_{r=1}^{\infty} r \left(a_{i_1,r} b_{i_2,r} - b_{i_1,r} a_{i_2,r}\right). \tag{6.11}$$

При выводе (6.8)–(6.11) использовалось соотношение

$$a_{i,0} = -2 \sum_{r=1}^{\infty} a_{i,r}, \tag{6.12}$$

которое следует из (6.2) при $t = \Delta$.

Объяснение того, что полученные разложения сходятся именно к соответствующим стохастическим интегралам Стратоновича приводится в [25].

6.1.3 Сравнение с методом, основанным на кратных рядах Фурье

Произведем сравнение разложений некоторых повторных стохастических интегралов Стратоновича 1 и 2 кратностей (здесь имеется ввиду, что интегрирование по винерорвским процессам в повторных стохастических интегралах осуществляется не более, чем два раза), полученных методом Г.Н. Мильштейна, и методом, основанным на кратных рядах Фурье по тригонометрической системе функций.

Введем в рассмотрение следующие независимые стандартные гауссовские случайные величины:

$$\xi_i = \frac{\mathbf{f}_{\Delta}^{(i)}}{\sqrt{\Delta}}, \quad \rho_{i,r} = \sqrt{\frac{2}{\Delta}}\pi r a_{i,r}, \quad \eta_{i,r} = \sqrt{\frac{2}{\Delta}}\pi r b_{i,r}, \tag{6.13}$$

где $i = 1, \ldots, m;\ r = 1,\ 2, \ldots$. В силу (6.12) имеем

$$a_{i,0} = -\sqrt{2\Delta}\sum_{r=1}^{\infty}\frac{1}{\pi r}\rho_{i,r}. \tag{6.14}$$

Подставляя соотношения (6.13) и (6.14) в (6.8)–(6.11), получаем следующие сходящиеся в среднеквадратическом смысле разложения:

$$\int\limits_0^{*\Delta} d\mathbf{f}_t^{(i)} = \sqrt{\Delta}\xi_i, \tag{6.15}$$

$$\int\limits_0^{*\Delta}\int\limits_0^{*\tau} d\mathbf{f}_{\tau_1}^{(i)} d\tau = \frac{1}{2}\Delta^{\frac{3}{2}}\left(\xi_i - \frac{\sqrt{2}}{\pi}\sum_{r=1}^{\infty}\frac{1}{r}\rho_{i,r}\right), \tag{6.16}$$

$$\int\limits_0^{*\Delta}\int\limits_0^{*\tau} d\tau_1 d\mathbf{f}_{\tau}^{(i)} = \frac{1}{2}\Delta^{\frac{3}{2}}\left(\xi_i + \frac{\sqrt{2}}{\pi}\sum_{r=1}^{\infty}\frac{1}{r}\rho_{i,r}\right), \tag{6.17}$$

$$\int\limits_0^{*\Delta}\int\limits_0^{*\tau} d\mathbf{f}_{\tau_1}^{(i_1)} d\mathbf{f}_{\tau}^{(i_2)} = \frac{\Delta}{2}\Bigg[\xi_{i_1}\xi_{i_2} + \frac{1}{\pi}\sum_{r=1}^{\infty}\frac{1}{r}\Bigg(\rho_{i_1,r}\eta_{i_2,r} - \eta_{i_1,r}\rho_{i_2,r} +$$

$$+\sqrt{2}\left(\rho_{i_2,r}\xi_{i_1} - \rho_{i_1,r}\xi_{i_2}\right)\Bigg)\Bigg]. \tag{6.18}$$

Учитывая принятые нами ранее обозначения для повторных стохастических интегралов, можно записать

$$\int\limits_0^{*\Delta} d\mathbf{f}_t^{(i)} = I_{0_{\Delta,0}}^{*(i)}, \tag{6.19}$$

$$\int\limits_0^{*\Delta}\int\limits_0^{*\tau} d\mathbf{f}_{\tau_1}^{(i)} d\tau = \Delta I_{0_{\Delta,0}}^{*(i)} + I_{1_{\Delta,0}}^{*(i)}, \tag{6.20}$$

$$\int\limits_0^{*\Delta}\int\limits_0^{*\tau} d\tau_1 d\mathbf{f}_{\tau}^{(i)} = -I_{1_{\Delta,0}}^{*(i)}, \tag{6.21}$$

$$\int\limits_0^{*\Delta}\int\limits_0^{*\tau} d\mathbf{f}_{\tau_1}^{(i_1)} d\mathbf{f}_{\tau}^{(i_2)} = I_{00_{\Delta,0}}^{*(i_1 i_2)}. \tag{6.22}$$

Подставляя разложения интегралов $I_{0_{\Delta,0}}^{*(i)}$, $I_{1_{\Delta,0}}^{*(i)}$, $I_{00_{\Delta,0}}^{*(i_2 i_1)}$, полученные ранее с помощью метода, основанного на кратных рядах Фурье по тригонометрической системе функций, в представления (6.19)–(6.22), с точностью до обозначений получаем разложения (6.15)–(6.18). Это свидетельствует о том, что по крайней мере для рассмотренных повторных стохастических интегралов Стратоновича и тригонометрической системы функций метод Г.Н. Мильштейна и метод, основанный на кратных рядах Фурье, дают один и тот же результат (это интересный факт, хотя и вполне ожидаемый).

В следующем разделе обсудим применение метода Г.Н. Мильштейна к повторным стохастическим интегралам 3 кратности.

6.1.4 О проблемах метода Г.Н. Мильштейна применительно к повторным стохастическим интегралам кратностей выше второй

Ранее уже отмечалось, что технические особенности метода Г.Н. Мильштейна таковы, что он может приводить к повторным рядам (в противоположность кратным рядам из теоремы 1) из произведений независимых стандартных гауссовских случайных величин. В случае наиболее простого повторного стохастического интеграла 2 кратности эту проблему удалось, как мы видели в предыдущем разделе, избежать. Однако, уже для простейших стохастических интегралов третьей кратности это оказалось не так.

Приведем, полученное в [25] методом Г.Н.Мильштейна, разложение повторного стохастического интеграла Стратоновича 3 кратности:

$$J_{(111)\Delta,0}^{*(i_1 i_2 i_3)} = \frac{1}{\Delta} J_{(1)\Delta,0}^{*(i_1)} J_{(011)\Delta,0}^{*(i_2 i_3)} + \frac{1}{2} a_{i_1,0} J_{(11)\Delta,0}^{*(i_2 i_3)} + \frac{1}{2\pi} b_{i_1} J_{(1)\Delta,0}^{(i_2)} J_{(1)\Delta,0}^{*(i_3)} -$$

$$-\Delta J_{(1)\Delta,0}^{*(i_2)} B_{i_1 i_3} + \Delta J_{(1)\Delta,0}^{*(i_3)} \left(\frac{1}{2} A_{i_1 i_2} - C_{i_2 i_1} \right) + \Delta^{\frac{3}{2}} D_{i_1 i_2 i_3}, \qquad (6.23)$$

где

$$J_{(011)\Delta,0}^{*(i_2 i_3)} = \frac{1}{6} J_{(1)\Delta,0}^{*(i_2)} J_{(1)\Delta,0}^{*(i_3)} - \frac{1}{\pi} \Delta J_{(1)\Delta,0}^{*(i_3)} b_{i_2} +$$

$$+\Delta^2 B_{i_2 i_3} - \frac{1}{4} \Delta a_{i_3,0} J_{(1)\Delta,0}^{*(i_2)} + \frac{1}{2\pi} \Delta b_{i_3} J_{(1)\Delta,0}^{*(i_2)} + \Delta^2 C_{i_2 i_3} + \frac{1}{2} \Delta^2 A_{i_2 i_3},$$

$$A_{i_2 i_3} = \frac{\pi}{\Delta} \sum_{r=1}^{\infty} r \left(a_{i_2,r} b_{i_3,r} - b_{i_2,r} a_{i_3,r} \right),$$

$$C_{i_2 i_3} = -\frac{1}{\Delta} \sum_{l=1}^{\infty} \sum_{r=1 (r \neq l)}^{\infty} \frac{r}{r^2 - l^2} \left(r a_{i_2,r} a_{i_3,l} + l b_{i_2,r} b_{i_3,l} \right),$$

$$B_{i_2 i_3} = \frac{1}{2\Delta} \sum_{r=1}^{\infty} \left(a_{i_2,r} a_{i_3,r} + b_{i_2,r} b_{i_3,r} \right), \ b_i = \sum_{r=1}^{\infty} \frac{1}{r} b_{i,r},$$

$$D_{i_1 i_2 i_3} =$$

$$-\frac{\pi}{2\Delta^{\frac{3}{2}}} \sum_{l=1}^{\infty} \sum_{r=1}^{\infty} l \Big(a_{i_2,l} \left(a_{i_3,l+r} b_{i_1,r} - a_{i_1,r} b_{i_3,l+r} \right) + b_{i_2,l} \left(a_{i_1,r} a_{i_3,r+l} + b_{i_1,r} b_{i_3,l+r} \right) \Big)$$

$$+\frac{\pi}{2\Delta^{\frac{3}{2}}} \sum_{l=1}^{\infty} \sum_{r=1}^{l-1} l \Big(a_{i_2,l} \left(a_{i_1,r} b_{i_3,l-r} + a_{i_3,l-r} b_{i_1,r} \right) - b_{i_2,l} \left(a_{i_1,r} a_{i_3,l-r} - b_{i_1,r} b_{i_3,l-r} \right) \Big)$$

$$+\frac{\pi}{2\Delta^{\frac{3}{2}}} \sum_{l=1}^{\infty} \sum_{r=l+1}^{\infty} l \Big(a_{i_2,l} \left(a_{i_3,r-l} b_{i_1,r} - a_{i_1,r} b_{i_3,r-l} \right) + b_{i_2,l} \left(a_{i_1,r} a_{i_3,r-l} + b_{i_1,r} b_{i_3,r-l} \right) \Big);$$

остальные обозначения встречались в предыдущем разделе.

Из вида разложения (6.23) и разложения для $J^{*(i_2 i_3)}_{(011)\Delta,0}$ можно заключить, что они содержат повторные ряды. Далее, при аппроксимации рассмотренных стохастических интегралов в [25] предлагается положить верхние пределы суммирования равными p, что, согласно приведенным выше рассуждениям, некорректно.

Этой и ряда других проблем (см. предисловие к книге) можно избежать при использовании метода, основанного на теореме 1.

Если предположить, что члены разложения (6.23) совпадают с членами его аналога, полученного с помощью теоремы 1 и формул связи стохастических интегралов Ито и Стратоновича (это, как мы видели в предыдущем разделе, действительно так для простейших стохастических интегралов первой и второй кратности), то повторные ряды в (6.23) будет можно, согласно теореме 1, заменить на кратные, как формально и сделано в [25]. Однако, это требует отдельного и весьма непростого обоснования.

6.2 Представление повторных стохастических интегралов Ито с помощью полиномов Эрмита

В предыдущих разделах данной главы рассматривалась общая теория аппроксимации повторных стохастических интегралов Ито и Стратоновича. Однако в некоторых частных случаях можно получить точные представления повторных стохастических интегралов Ито и Стратоновича в виде полиномов конечных степеней от одной стандартной гауссовской случайной величины. Этому вопросу будут посвящены настоящий и следующий разделы. Результаты, излагаемые в них, можно встретить, например, в [30], [24], [25].

Рассмотрим семейство производящих многочленов $H_n(x,y);\ n = 0,\ 1,\ldots$ вида

$$H_n(x,y)=\frac{d^n}{d\alpha^n}e^{\alpha x-\frac{1}{2}\alpha^2 y}\Bigg|_{\alpha=0}.$$

Известно, что многочлены $H_n(x,y)$ связаны с многочленами Эрмита $h_n(x)$ формулой $H_n(x,y) = \left(\frac{y}{2}\right)^{\frac{n}{2}} h_n\left(\frac{x}{\sqrt{2y}}\right)$. Используя рекуррентные формулы [30]:

$$\frac{dh_n}{dz}(z)=2nh_{n-1}(z);\ n=1,\ 2,\ldots,$$

$$h_n(z)=2zh_{n-1}(z)-2(n-1)h_{n-2}(z);\ n=2,\ 3,\ldots,$$

нетрудно получить следующие рекуррентные соотношения для многочленов $H_n(x,y)$:

$$\frac{\partial H_n}{\partial x}(x,y)=nH_{n-1}(x,y);\ n=1,\ 2,\ldots, \tag{6.24}$$

$$\frac{\partial H_n}{\partial y}(x,y)=\frac{n}{2y}H_n(x,y)-\frac{nx}{2y}H_{n-1}(x,y);\ n=1,\ 2,\ldots, \tag{6.25}$$

$$\frac{\partial H_n}{\partial y}(x,y)=-\frac{n(n-1)}{2}H_{n-2}(x,y);\ n=2,\ 3,\ldots \tag{6.26}$$

Из (6.24)–(6.26) следует, что

$$\frac{\partial H_n}{\partial y}(x,y)+\frac{1}{2}\frac{\partial^2 H_n}{\partial x^2}(x,y)=0;\ n=2,\ 3,\ldots \tag{6.27}$$

По формуле Ито с вероятностью 1 имеем

$$H_n(f_t,t)-H_n(0,0)=\int\limits_0^t\frac{\partial H_n}{\partial x}(f_s,s)df_s+\int\limits_0^t\left(\frac{\partial H_n}{\partial y}(f_s,s)+\frac{1}{2}\frac{\partial^2 H_n}{\partial x^2}(f_s,s)\right)ds, \tag{6.28}$$

где $f_t\in\Re^1$ — стандартный скалярный винеровский процесс. С учетом (6.27) и того, что $H_n(0,0)=0;\ n=2,\ 3,\ldots$ из (6.28) с вероятностью 1 находим

$$H_n(f_t,t)=\int\limits_0^t nH_{n-1}(f_s,s)df_s;\ n=2,\ 3,\ldots$$

Далее по индукции нетрудно получить с вероятностью 1 следующее соотношение:

$$I_t^{(n)} \stackrel{\rm def}{=} \int\limits_0^t \ldots \int\limits_0^{t_2} df_{t_1} \ldots df_{t_n} = \frac{1}{n!} H_n(f_t, t);\ n = 1,\ 2, \ldots \qquad (6.29)$$

Рассмотрим одно из обобщений [30] формулы (6.29):

$$J_t^{(n)} \stackrel{\rm def}{=} \int\limits_0^t \psi_{t_n} \ldots \int\limits_0^{t_2} \psi_{t_1} df_{t_1} \ldots df_{t_n} = \frac{1}{n!} H_n(\delta_t, \Delta_t);\ n = 1,\ 2, \ldots, \qquad (6.30)$$

где $\delta_t \stackrel{\rm def}{=} \int\limits_0^t \psi_s df_s$; $\Delta_t \stackrel{\rm def}{=} \int\limits_0^t \psi_s^2 ds$; $\psi_t \in {\rm M}_2([0, T])$ (см. разд. 7.1).

Нетрудно проверить, что первые восемь формул из семейства (6.30) имеют вид

$$J_t^{(1)} = \frac{1}{1!}\delta_t,\ J_t^{(2)} = \frac{1}{2!}\left(\delta_t^2 - \Delta_t\right),\ J_t^{(3)} = \frac{1}{3!}\left(\delta_t^3 - 3\delta_t\Delta_t\right),$$

$$J_t^{(4)} = \frac{1}{4!}\left(\delta_t^4 - 6\delta_t^2\Delta_t + 3\Delta_t^2\right),\ J_t^{(5)} = \frac{1}{5!}\left(\delta_t^5 - 10\delta_t^3\Delta_t + 15\delta_t\Delta_t^2\right),$$

$$J_t^{(6)} = \frac{1}{6!}\left(\delta_t^6 - 15\delta_t^4\Delta_t + 45\delta_t^2\Delta_t^2 - 15\Delta_t^3\right),$$

$$J_t^{(7)} = \frac{1}{7!}\left(\delta_t^7 - 21\delta_t^5\Delta_t + 105\delta_t^3\Delta_t^2 - 105\delta_t\Delta_t^3\right),$$

$$J_t^{(8)} = \frac{1}{8!}\left(\delta_t^8 - 28\delta_t^6\Delta_t + 210\delta_t^4\Delta_t^2 - 420\delta_t^2\Delta_t^3 + 105\Delta_t^4\right),$$

где равенства справедливы с вероятностью 1.

6.3 Одна формула для повторных стохастических интегралов Стратоновича

Докажем с вероятностью 1 следующее соотношение для повторных стохастических интегралов Стратоновича [25]:

$$I_t^{*(n)} = \frac{1}{n!} f_t^n,\ I_t^{*(n)} \stackrel{\rm def}{=} \int\limits_0^{*t} \ldots \int\limits_0^{*t_2} df_{t_1} \ldots df_{t_n}. \qquad (6.31)$$

Сначала рассмотрим случай $n = 2$. По теореме 7

$$I_t^{*(2)} = I_t^{(2)} + \frac{1}{2}\int\limits_0^t dt_1 \text{ с в.1.} \qquad (6.32)$$

Из соотношения (6.29) при $n = 2$ следует, что с вероятностью 1

$$I_t^{(2)} = \frac{1}{2}f_t^2 - \frac{1}{2}\int\limits_0^t dt_1. \tag{6.33}$$

Подставляя (6.33) в (6.32), с вероятностью 1 имеем $I_t^{*(2)} = f_t^2/2!$. Таким образом, формула (6.31) справедлива при $n = 2$. Предположим, что формула (6.31) справедлива при $n = k$, т. е. с вероятностью 1: $I_t^{*(k)} = f_t^k/k!$, и рассмотрим $\int\limits_0^{*t} I_\tau^{*(k)} df_\tau \stackrel{\rm def}{=} I_t^{*(k+1)}$. Из разд. 7.2 и предположения индукции с вероятностью 1 получим

$$I_t^{*(k+1)} = \int\limits_0^t \frac{f_\tau^k}{k!} df_\tau + \frac{1}{2}\int\limits_0^t \frac{f_\tau^{k-1}}{(k-1)!} d\tau. \tag{6.34}$$

Введем случайный процесс ξ_t вида $\xi_t = f_t^{k+1}/(k+1)!$ и найдем с помощью формулы Ито его стохастический дифференциал:

$$d\xi_t = \frac{1}{2}\frac{f_t^{k-1}}{(k-1)!}dt + \frac{f_t^k}{k!}df_t. \tag{6.35}$$

Поскольку $\xi_0 = 0$, то из (6.34) и (6.35) следует, что $I_t^{*(k+1)} = f_t^{k+1}/(k+1)!$ с вероятностью 1. Таким образом, соотношение (6.31) доказано по индукции.

Нетрудно видеть, что формула (6.31) допускает следующее обобщение:

$$J_t^{*(n)} = \frac{1}{n!}\delta_t^n, \tag{6.36}$$

где $J_t^{*(n)} \stackrel{\rm def}{=} \int\limits_0^{*t} \psi(t_n) \ldots \int\limits_0^{*t_2} \psi(t_1) df_{t_1} \ldots df_{t_n}$; $\delta_t = \int\limits_0^t \psi(s) df_s$, а $\psi(s) : [0, t] \to \Re^1$ — некоторая непрерывно дифференцируемая функция.

6.4 Использование кратных интегральных сумм для аппроксимации повторных стохастических интегралов Ито

В предисловии уже отмечалось, что в свете современного состояния вопроса об аппроксимации повторных стохастических интегралов рассматриваемый ниже метод вряд ли имеет сколь какую-нибудь практическую ценность. Однако для получения общей картины мы все же его рассмотрим.

Отметим, что в ряде работ (см., например, [24]) предлагалось использовать различные варианты интегральных сумм для аппроксимации повторных стохастических интегралов. В данном разделе рассмотрим одну из простейших модификаций метода интегральных сумм.

Пусть функции $\psi_l(\tau);\ l = 1, \ldots, k$ удовлетворяют на промежутке $[t, T]$ условиям Липшица с постоянными C_l, т. е.

$$|\psi_l(\tau_1) - \psi_l(\tau_2)| \le C_l|\tau_1 - \tau_2| \ \text{при всех}\ \tau_1, \tau_2 \in [t, T]. \tag{6.37}$$

Тогда согласно лемме 1 с вероятностью 1 справедливо равенство

$$J[\psi^{(k)}]_{T,t} = \underset{N\to\infty}{\text{l.i.m.}} \sum_{j_k=0}^{N-1} \ldots \sum_{j_1=0}^{j_2-1} \prod_{l=1}^{k} \psi_l(\tau_{j_l}) \Delta \mathbf{w}_{\tau_{j_l}}^{(i_l)}.$$

Здесь сохранен смысл обозначений, входящих в формулу (1.8).

Будем представлять аппроксимацию повторного стохастического интеграла Ито $J[\psi^{(k)}]_{T,t}$ в виде

$$J[\psi^{(k)}]_{T,t}^{N} = \sum_{j_k=0}^{N-1} \ldots \sum_{j_1=0}^{j_2-1} \prod_{l=1}^{k} \psi_l(\tau_{j_l}) \Delta \mathbf{w}_{\tau_{j_l}}^{(i_l)}. \tag{6.38}$$

Соотношение (6.38) может быть переписано в следующей форме:

$$J[\psi^{(k)}]_{T,t}^{N} = \sum_{j_k=0}^{N-1} \ldots \sum_{j_1=0}^{j_2-1} \prod_{l=1}^{k} (\Delta\tau_{j_l})^{\frac{1}{2}} \psi_l(\tau_{j_l}) \mathbf{u}_{j_l}^{(i_l)}, \tag{6.39}$$

где $\mathbf{u}_j^{(i)} \stackrel{\text{def}}{=} (\mathbf{w}_{\tau_{j+1}}^{(i)} - \mathbf{w}_{\tau_j}^{(i)})/(\Delta\tau_j)^{\frac{1}{2}};\ i = 1, \ldots, m$ — независимые при $i \ne 0$ и различных j стандартные гауссовские случайные величины; $\mathbf{u}_j^{(0)} = (\Delta\tau_j)^{\frac{1}{2}}$. Пусть

$$\tau_j = t + j\Delta;\ j = 0, 1, \ldots, N;\ \tau_N = T,\ \Delta > 0. \tag{6.40}$$

Тогда формула (6.39) примет вид

$$J[\psi^{(k)}]_{T,t}^{N} = \Delta^{\frac{k}{2}} \sum_{j_k=0}^{N-1} \ldots \sum_{j_1=0}^{j_2-1} \prod_{l=1}^{k} \psi_l(t + j_l\Delta) \mathbf{u}_{j_l}^{(i_l)}, \tag{6.41}$$

где $\mathbf{u}_j^{(i)} \stackrel{\text{def}}{=} (\mathbf{w}_{t+(j+1)\Delta}^{(i)} - \mathbf{w}_{t+j\Delta}^{(i)})/\sqrt{\Delta};\ i = 1, \ldots, m.$

Теорема 10. *Пусть функции* $\psi_l(\tau);\ l = 1, \ldots, k$ *удовлетворяют условию Липшица* (6.37), *а* $\{\tau_j\}_{j=0}^{N-1}$ *— разбиение промежутка* $[t, T]$ *вида* (6.40).

Тогда при достаточно малой величине $T-t$ существует такая постоянная $H_k<\infty$, что выполняется следующая оценка:

$$\mathsf{M}\left\{\left(J[\psi^{(k)}]_{T,t}-J[\psi^{(k)}]_{T,t}^N\right)^2\right\}\le\frac{H_k(T-t)^2}{N}.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Нетрудно видеть, что при достаточно малой величине $T-t$ найдется такая постоянная C_k, что

$$\mathsf{M}\left\{\left(J[\psi^{(k)}]_{T,t}-J[\psi^{(k)}]_{T,t}^N\right)^2\right\}\le C_k\mathsf{M}\left\{\left(J[\psi^{(2)}]_{T,t}-J[\psi^{(2)}]_{T,t}^N\right)^2\right\}.$$

Заметим, что

$$J[\psi^{(2)}]_{T,t}-J[\psi^{(2)}]_{T,t}^N=\sum_{j=1}^{3}S_j^N,$$

где

$$S_1^N=\sum_{j_1=0}^{N-1}\int\limits_{\tau_{j_1}}^{\tau_{j_1+1}}\psi_2(t_2)\int\limits_{\tau_{j_1}}^{t_2}\psi_1(t_1)d\mathbf{w}_{t_1}^{(i_1)}d\mathbf{w}_{t_2}^{(i_2)};$$

$$S_2^N=\sum_{j_1=0}^{N-1}\int\limits_{\tau_{j_1}}^{\tau_{j_1+1}}\left(\psi_2(t_2)-\psi_2(\tau_{j_1})\right)d\mathbf{w}_{t_2}^{(i_2)}\sum_{j_2=0}^{j_1-1}\int\limits_{\tau_{j_2}}^{\tau_{j_2+1}}\psi_1(t_1)d\mathbf{w}_{t_1}^{(i_1)};$$

$$S_3^N=\sum_{j_1=0}^{N-1}\psi_2(\tau_{j_1})\Delta\mathbf{w}_{\tau_{j_1}}^{(i_2)}\sum_{j_2=0}^{j_1-1}\int\limits_{\tau_{j_2}}^{\tau_{j_2+1}}\left(\psi_1(t_1)-\psi_1(\tau_{j_2})\right)d\mathbf{w}_{t_1}^{(i_1)}.$$

Поэтому, согласно неравенству Минковского, имеем:

$$\left(\mathsf{M}\left\{\left(J[\psi^{(2)}]_{T,t}-J[\psi^{(2)}]_{T,t}^N\right)^2\right\}\right)^{\frac{1}{2}}\le\sum_{j=1}^{3}\left(\mathsf{M}\left\{\left(S_j^N\right)^2\right\}\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Оценим с помощью моментных свойств стохастических интегралов (см. главу 7) величины $\mathsf{M}\left\{\left(S_i^N\right)^2\right\}$; $i=1,2,3$. Для этого рассмотрим четыре случая.

1. $i_1,\ i_2\ne 0:$

$$\mathsf{M}\left\{\left(S_1^N\right)^2\right\}\le\frac{\Delta}{2}(T-t)\sup_{s\in[t,T]}\left\{\psi_2^2(s)\psi_1^2(s)\right\},$$
$$\mathsf{M}\left\{\left(S_2^N\right)^2\right\}\le\frac{\Delta^2}{6}(T-t)^2\left(C_2\right)^2\sup_{s\in[t,T]}\left\{\psi_1^2(s)\right\},$$
$$\mathsf{M}\left\{\left(S_3^N\right)^2\right\}\le\frac{\Delta^2}{6}(T-t)^2\left(C_1\right)^2\sup_{s\in[t,T]}\left\{\psi_2^2(s)\right\}.$$

2. $i_1 \neq 0,\ i_2 = 0:$

$$\mathsf{M}\left\{\left(S_1^N\right)^2\right\} \le \frac{\Delta}{2}(T-t)^2 \sup_{s\in[t,T]}\left\{\psi_2^2(s)\psi_1^2(s)\right\},$$
$$\mathsf{M}\left\{\left(S_2^N\right)^2\right\} \le \frac{\Delta^2}{3}(T-t)^3\left(C_2\right)^2 \sup_{s\in[t,T]}\left\{\psi_1^2(s)\right\},$$
$$\mathsf{M}\left\{\left(S_3^N\right)^2\right\} \le \frac{\Delta^2}{3}(T-t)^3\left(C_1\right)^2 \sup_{s\in[t,T]}\left\{\psi_2^2(s)\right\}.$$

3. $i_2 \neq 0,\ i_1 = 0:$

$$\mathsf{M}\left\{\left(S_1^N\right)^2\right\} \le \frac{\Delta^2}{3}(T-t) \sup_{s\in[t,T]}\left\{\psi_2^2(s)\psi_1^2(s)\right\},$$
$$\mathsf{M}\left\{\left(S_2^N\right)^2\right\} \le \frac{\Delta^2}{3}(T-t)^3\left(C_2\right)^2 \sup_{s\in[t,T]}\left\{\psi_1^2(s)\right\},$$
$$\mathsf{M}\left\{\left(S_3^N\right)^2\right\} \le \frac{\Delta^2}{8}(T-t)^3\left(C_1\right)^2 \sup_{s\in[t,T]}\left\{\psi_2^2(s)\right\}.$$

4. $i_1 = i_2 = 0:$

$$\mathsf{M}\left\{\left(S_1^N\right)^2\right\} \le \frac{\Delta^2}{4}(T-t)^2 \sup_{s\in[t,T]}\left\{\psi_2^2(s)\psi_1^2(s)\right\},$$
$$\mathsf{M}\left\{\left(S_2^N\right)^2\right\} \le \frac{\Delta^2}{4}(T-t)^4\left(C_2\right)^2 \sup_{s\in[t,T]}\left\{\psi_1^2(s)\right\},$$
$$\mathsf{M}\left\{\left(S_3^N\right)^2\right\} \le \frac{\Delta^2}{16}(T-t)^4\left(C_1\right)^2 \sup_{s\in[t,T]}\left\{\psi_2^2(s)\right\}.$$

Согласно полученным оценкам и условию (6.37) имеем

$$\mathsf{M}\left\{\left(J[\psi^{(k)}]_{T,t} - J[\psi^{(k)}]_{T,t}^N\right)^2\right\} \le H_k(T-t)\Delta = \frac{H_k(T-t)^2}{N},$$

где $H_k < \infty$. Теорема доказана. $\square$

Нетрудно проверить, что справедливо следующее соотношение:

$$\mathsf{M}\left\{\left(I_{00_{T,t}}^{(i_2 i_1)} - I_{00_{T,t}}^{(i_2 i_1)N}\right)^2\right\} = \frac{(T-t)^2}{2N}, \qquad (6.42)$$

где $i_1, i_2 = 1, \ldots, m$, а $I_{00_{T,t}}^{(i_2 i_1)N}$ — аппроксимация стохастического интеграла $I_{00_{T,t}}^{(i_2 i_1)}$ из семейства (2.67), полученная по формуле (6.41).

Отметим, что метод, основанный на кратных интегральных суммах, сходится в среднеквадратическом смысле гораздо медленнее, чем метод, основанный на кратных рядах Фурье (см. (6.42), (5.17), (5.48) и табл. 6.1, 6.4).

Таблица 6.1. Значения q_{trig}, q_{pol}, T^*_{trig}, T^*_{pol}.

$T-t$	2^{-5}	2^{-6}	2^{-7}	2^{-8}	2^{-9}	2^{-10}
q_{trig}	3	4	7	14	27	53
q_{pol}	5	9	17	33	65	129
T^*_{trig}, с	4	5	7	10	16	30
T^*_{pol}, с	3	4	7	13	23	45

6.5 Сравнение эффективности рядов Фурье–Лежандра, тригонометрических рядов Фурье и интегральных сумм при аппроксимации стохастических интегралов

В данном разделе сравним эффективность применения полиномиальных и тригонометрических функций при аппроксимации повторных стохастических интегралов. Кроме того, сравним эффективность использования методов, основанных на кратных рядах Фурье и кратных интегральных суммах.

Рассмотрим стохастические интегралы $I^{(1)}_{0_{T,t}}$, $I^{(21)}_{00_{T,t}}$, которые могут встретиться, например, при реализации сильного численного метода порядка точности 1.0 для стохастического дифференциального уравнения Ито [24], [25], [48]. Аппроксимируем их сначала с помощью тригонометрической системы функций (формулы (5.41), (5.43)), а затем с помощью полиномов Лежандра (формулы (5.2), (5.5)). Число $q=q_{\text{trig}}$ в первом случае выберем из условия

$$\frac{(T-t)^2}{2\pi^2}\left(\frac{\pi^2}{6}-\sum_{r=1}^{q_{\text{trig}}}\frac{1}{r^2}\right)\le\varepsilon, \tag{6.43}$$

а число $q=q_{\text{pol}}$ во втором случае — из условия

$$\frac{(T-t)^2}{2}\left(\frac{1}{2}-\sum_{i=1}^{q_{\text{pol}}}\frac{1}{4i^2-1}\right)\le\varepsilon, \tag{6.44}$$

где q_{trig} и q_{pol} — минимальные натуральные числа, удовлетворяющие условиям (6.43) и (6.44) соответственно.

В табл. 6.1 приведены значения q_{trig}, q_{pol} при $\varepsilon=(T-t)^3$, $T-t=2^{-j}$; $j=5,6,\ldots,10$. Значения T^*_{trig}, T^*_{pol} соответствуют компьютерному времени, затраченному на 200 независимых моделирований интегралов $I^{(1)}_{0_{T,t}}$, $I^{(21)}_{00_{T,t}}$ по формулам (5.41), (5.43) при $q=q_{\text{trig}}$ и по формулам (5.2), (5.5) при $q=$

$q_{\rm pol}$. При этом каждое фиксированное моделирование по формулам (5.41), (5.43) и (5.2), (5.5) отвечает одной и той же реализации последовательности независимых стандартных гауссовских случайных величин.

Отметим, что формула (5.43) использовалась здесь без слагаемого

$$\frac{1}{2}(T-t)\frac{\sqrt{2}}{\pi}\sqrt{\alpha_q}\left(\xi_q^{(i_1)}\zeta_0^{(i_2)}-\zeta_0^{(i_1)}\xi_q^{(i_2)}\right),$$

на численное моделирование которого очевидно требуется определенное компьютерное время.

Из результатов, приведенных в табл. 6.1, видно, что при $T-t>2^{-7}$ полиномиальная система оказывается чуть лучше тригонометрической по затратам компьютерного времени. Однако уже при $T-t\le 2^{-8}$ использование тригонометрической системы дает незначительный выигрыш.

Картина кардинально меняется при рассмотрении совокупностей более сложных стохастических интегралов.

Рассмотрим стохастические интегралы

$$I_{0_{T,t}}^{(i_1)},\ I_{1_{T,t}}^{(i_1)},\ I_{00_{T,t}}^{(i_2i_1)},\ I_{000_{T,t}}^{(i_3i_2i_1)};\ i_1,i_2,i_3=1,\ldots,m, \tag{6.45}$$

которые могут встретиться, например, при реализации сильного численного метода порядка точности 1.5 для стохастического дифференциального уравнения Ито [24], [25], [48].

Приведем численный результат, который позволяет видеть, что при моделировании набора стохастических интегралов, необходимого для реализации сильного численного метода порядка точности 1.5 для стохастического дифференциального уравнения Ито [24], [25], [48], полиномиальная система функций дает выигрыш более чем в 2 раза в компьютерном времени в сравнении с тригонометрической системой функций, по крайней мере, при не очень малых $T-t$ (заметим, что в данном разделе также будет рассмотрена достаточно общая ситуация, в которой полиномиальная система функций даст выигыш в 3 раза по сравнению с тригонометрической в рамках рассматриваемого вопроса).

Сначала рассмотрим упрощенный, по сравнению с (6.45), набор стохастических интегралов $I_{00_{T,t}}^{(21)}, I_{000_{T,t}}^{(321)}$. В случае полиномиальной системы функций будем искать числа q, q_1 в аппроксимациях $I_{00_{T,t}}^{(21)q}$, $I_{000_{T,t}}^{(321)q_1}$, определяемых формулами (5.5), (5.27), исходя из следующих условий:

$$\frac{(T-t)^2}{2}\left(\frac{1}{2}-\sum_{i=1}^{q}\frac{1}{4i^2-1}\right)\le (T-t)^4, \tag{6.46}$$

Таблица 6.2. Значения q, q_1, T^*_{100}, $\tilde{T}^*_{100}$ (полиномиальная система).

$T-t$	0.08222	0.05020	0.02310	0.01956
q	19	51	235	328
q_1	1	2	5	6
T^*_{100}, c	5	12	52	73
$\tilde{T}^*_{100}$, c	13.5	36	181	225

$$(T-t)^3\left(\frac{1}{6}-\sum_{i,j,k=0}^{q_1}\frac{(C_{kji})^2}{(T-t)^3}\right)\le (T-t)^4, \tag{6.47}$$

где

$$C_{kji}=\frac{\sqrt{(2i+1)(2j+1)(2k+1)}}{8}(T-t)^{3/2}\bar{C}_{kji};$$

$$\bar{C}_{kji}=\int\limits_{-1}^{1}P_k(z)\int\limits_{-1}^{z}P_j(y)\int\limits_{-1}^{y}P_i(x)dxdydz;$$

$P_i(x)$ — полином Лежандра.

В случае тригонометрической системы функций воспользуемся формулами (5.43), (5.44) при $i_3=3$, $i_2=2$, $i_1=1$, а числа q, q_1 будем искать из условий:

$$\mathsf{M}\left\{\left(I_{00_{T,t}}^{(i_2i_1)}-I_{00_{T,t}}^{(i_2i_1)q}\right)^2\right\}=\frac{(T-t)^2}{2\pi^2}\left(\frac{\pi^2}{6}-\sum_{r=1}^{q}\frac{1}{r^2}\right)\le\varepsilon, \tag{6.48}$$

$$\mathsf{M}\left\{\left(I_{000_{T,t}}^{(i_3i_2i_1)}-I_{000_{T,t}}^{(i_3i_2i_1)q_1}\right)^2\right\}=(T-t)^3\left\{\frac{4}{45}-\frac{1}{4\pi^2}\sum_{r=1}^{q_1}\frac{1}{r^2}-\right.$$

$$\left.-\frac{55}{32\pi^4}\sum_{r=1}^{q_1}\frac{1}{r^4}-\frac{1}{4\pi^4}\sum_{\substack{r,l=1\\ r\ne l}}^{q_1}\frac{5l^4+4r^4-3r^2l^2}{r^2l^2\left(r^2-l^2\right)^2}\right\}\le\varepsilon. \tag{6.49}$$

В табл. 6.2 приведены минимальные значения чисел q, q_1, удовлетворяющие условиям (6.46), (6.47) при различных значениях $T-t$. В табл. 6.3 даны значения тех же чисел для условий (6.48), (6.49) при $\varepsilon=(T-t)^4$.

Смоделируем независимо по 100 раз для различных значений $T-t$ набор стохастических интегралов $I_{00_{T,t}}^{(21)}$, $I_{000_{T,t}}^{(321)}$, определяемых с помощью формул (5.5), (5.27), полученных с применением полиномиальной системы функций. В табл. 6.2 приведены значения компьютерного времени T^*_{100}, затраченного

Таблица 6.3. Значения q, q_1, T^*_{100}, $\tilde{T}^*_{100}$ (тригонометрическая система).

$T-t$	0.08222	0.05020	0.02310	0.01956
q	8	21	96	133
q_1	1	1	3	4
T^*_{100}, с	12	24.5	105	148
$\tilde{T}^*_{100}$, с	44	88	411	660

на решение данной задачи при различных значениях $T-t$. Повторим данный численный эксперимент для аппроксимаций (5.43), (5.44) при $i_3=3$, $i_2=2$, $i_1=1$, полученных с помощью тригонометрической системы функций. Его результаты помещены в табл. 6.3.

Отметим, что здесь и далее в настоящем разделе формулы (5.43) и (5.44) использовались без слагаемых

$$\frac{1}{2}(T-t)\frac{\sqrt{2}}{\pi}\sqrt{\alpha_q}\left(\xi_q^{(i_1)}\zeta_0^{(i_2)}-\zeta_0^{(i_1)}\xi_q^{(i_2)}\right)$$

и

$$(T-t)^{\frac{3}{2}}\Biggl(\frac{1}{2\sqrt{2}\pi}\sqrt{\alpha_q}\left(\xi_q^{(i_1)}\zeta_0^{(i_2)}\zeta_0^{(i_3)}-\xi_q^{(i_3)}\zeta_0^{(i_2)}\zeta_0^{(i_1)}\right)+$$

$$+\frac{1}{2\sqrt{2}\pi^2}\sqrt{\beta_q}\left(\mu_q^{(i_1)}\zeta_0^{(i_2)}\zeta_0^{(i_3)}-2\mu_q^{(i_2)}\zeta_0^{(i_1)}\zeta_0^{(i_3)}+\mu_q^{(i_3)}\zeta_0^{(i_1)}\zeta_0^{(i_2)}\right)\Biggr)$$

соответственно, что подкрепляет отмеченные в табл. 6.2 и 6.3 численные результаты.

Сравнивая полученные результаты, приходим к выводу, что в рамках численного эксперимента при моделировании соответствующей совокупности стохастических интегралов полиномиальная система функций дает выигрыш в два раза по компьютерному времени в сравнении с тригонометрической системой функций.

Выпишем в явном виде аппроксимации $I_{000_{T,t}}^{(123)q}$ (5.28) при $q=1,2,5,6$, учитывая их практическую важность (теореме 4 приведенные ниже формулы соответствуют аппроксимациям $I_{000_{T,t}}^{*(i_1i_2i_3)q}$ при произвольных $i_1,i_2,i_3=1,\ldots,m$ и $q=1,2,5,6$ при замене в них верхнего индекса (123) на индекс $(i_1i_2i_3)$ и верхних индексов $(1),(2),(3)$ на индексы $(i_1),(i_2),(i_3)$ соответственно):

$$I_{000_{T,t}}^{(123)1}=(T-t)^{\frac{3}{2}}\left[\left(\left(\frac{1}{6}\zeta_0^{(1)}-\frac{1}{4\sqrt{3}}\zeta_1^{(1)}\right)\zeta_0^{(2)}+\frac{1}{20}\zeta_1^{(1)}\zeta_1^{(2)}\right)\zeta_0^{(3)}+\right.$$

$$+\left(\left(\frac{1}{4\sqrt{3}}\zeta_0^{(1)}-\frac{1}{10}\zeta_1^{(1)}\right)\zeta_0^{(2)}+\frac{1}{20}\zeta_0^{(1)}\zeta_1^{(2)}\right)\zeta_1^{(3)}\Bigg],$$

$$I_{000_{T,t}}^{(123)2}=(T-t)^{\frac{3}{2}}\Bigg[\Bigg\{\left(\left(\frac{1}{6}\zeta_0^{(1)}-\frac{1}{4\sqrt{3}}\zeta_1^{(1)}+\frac{1}{12\sqrt{5}}\zeta_2^{(1)}\right)\zeta_0^{(2)}+\right.$$

$$+\left(\frac{1}{20}\zeta_1^{(1)}-\frac{1}{4\sqrt{15}}\zeta_2^{(1)}\right)\zeta_1^{(2)}+\left(-\frac{1}{6\sqrt{5}}\zeta_0^{(1)}+\frac{1}{4\sqrt{15}}\zeta_1^{(1)}+\frac{1}{84}\zeta_2^{(1)}\right)\zeta_2^{(2)}\Bigg\}\zeta_0^{(3)}+$$

$$+\Bigg\{\left(\frac{1}{4\sqrt{3}}\zeta_0^{(1)}-\frac{1}{10}\zeta_1^{(1)}\right)\zeta_0^{(2)}+\left(\frac{1}{20}\zeta_0^{(1)}-\frac{1}{14\sqrt{5}}\zeta_2^{(1)}\right)\zeta_1^{(2)}+$$

$$+\left(-\frac{1}{4\sqrt{15}}\zeta_0^{(1)}+\frac{1}{7\sqrt{5}}\zeta_1^{(1)}\right)\zeta_2^{(2)}\Bigg\}\zeta_1^{(3)}+$$

$$+\Bigg\{\left(\frac{1}{12\sqrt{5}}\zeta_0^{(1)}-\frac{1}{42}\zeta_2^{(1)}\right)\zeta_0^{(2)}+\left(\frac{1}{4\sqrt{15}}\zeta_0^{(1)}-\frac{1}{14\sqrt{5}}\zeta_1^{(1)}\right)\zeta_1^{(2)}+$$

$$+\frac{1}{84}\zeta_0^{(1)}\zeta_2^{(2)}\Bigg\}\zeta_2^{(3)}\Bigg],$$

$$I_{000_{T,t}}^{(123)5}=I_{000_{T,t}}^{(123)2}+(T-t)^{\frac{3}{2}}\Bigg[\Bigg\{\frac{1}{10\sqrt{21}}\zeta_3^{(1)}\zeta_1^{(2)}+\left(-\frac{1}{4\sqrt{35}}\zeta_3^{(1)}+\frac{1}{28\sqrt{5}}\zeta_4^{(1)}\right)\zeta_2^{(2)}+$$

$$+\left(-\frac{\sqrt{3}}{20\sqrt{7}}\zeta_1^{(1)}+\frac{1}{4\sqrt{35}}\zeta_2^{(1)}+\frac{1}{180}\zeta_3^{(1)}-\frac{1}{12\sqrt{7}}\zeta_4^{(1)}+\frac{1}{9\sqrt{77}}\zeta_5^{(1)}\right)\zeta_3^{(2)}+$$

$$+\left(-\frac{1}{21\sqrt{5}}\zeta_2^{(1)}+\frac{1}{12\sqrt{7}}\zeta_3^{(1)}+\frac{1}{308}\zeta_4^{(1)}-\frac{1}{12\sqrt{11}}\zeta_5^{(1)}\right)\zeta_4^{(2)}+$$

$$+\left(-\frac{5}{36\sqrt{77}}\zeta_3^{(1)}+\frac{1}{12\sqrt{11}}\zeta_4^{(1)}+\frac{1}{468}\zeta_5^{(1)}\right)\zeta_5^{(2)}\Bigg\}\zeta_0^{(3)}+$$

$$+\Bigg\{\frac{1}{20\sqrt{21}}\zeta_3^{(1)}\zeta_0^{(2)}+\frac{1}{140}\zeta_4^{(1)}\zeta_1^{(2)}+\left(-\frac{1}{12\sqrt{5}}\zeta_3^{(1)}+\frac{1}{14\sqrt{165}}\zeta_5^{(1)}\right)\zeta_2^{(2)}+$$

$$+\left(\frac{\sqrt{3}}{20\sqrt{7}}\zeta_0^{(1)}+\frac{1}{3\sqrt{105}}\zeta_2^{(1)}-\frac{19}{220\sqrt{21}}\zeta_4^{(1)}\right)\zeta_3^{(2)}+$$

$$+\left(-\frac{1}{70}\zeta_1^{(1)}+\frac{23}{220\sqrt{21}}\zeta_3^{(1)}-\frac{8}{91\sqrt{33}}\zeta_5^{(1)}\right)\zeta_4^{(2)}+$$

$$+\left(-\frac{\sqrt{5}}{42\sqrt{33}}\zeta_2^{(1)}+\frac{37}{364\sqrt{33}}\zeta_4^{(1)}\right)\zeta_5^{(2)}\Bigg\}\zeta_1^{(3)}+$$

$$+\Bigg\{\left(\frac{1}{84\sqrt{5}}\zeta_2^{(1)}-\frac{1}{154}\zeta_4^{(1)}\right)\zeta_0^{(2)}+\left(\frac{1}{180}\zeta_1^{(1)}-\frac{1}{55\sqrt{21}}\zeta_3^{(1)}-\frac{5\sqrt{3}}{364}\zeta_5^{(1)}\right)\zeta_1^{(2)}+$$

$$+\left(\frac{1}{28\sqrt{5}}\zeta_0^{(1)}-\frac{1}{132}\zeta_2^{(1)}+\frac{1}{286\sqrt{5}}\zeta_4^{(1)}\right)\zeta_2^{(2)}+$$

$$+\left(\frac{1}{12\sqrt{7}}\zeta_0^{(1)}-\frac{19}{220\sqrt{21}}\zeta_1^{(1)}+\frac{2}{2145}\zeta_3^{(1)}+\frac{1}{156\sqrt{77}}\zeta_5^{(1)}\right)\zeta_3^{(2)}+$$

$$+\left(\frac{1}{308}\zeta_0^{(1)}-\frac{1}{572\sqrt{5}}\zeta_2^{(1)}\right)\zeta_4^{(2)}+$$

$$+\left(-\frac{1}{12\sqrt{11}}\zeta_0^{(1)}+\frac{37}{364\sqrt{33}}\zeta_1^{(1)}-\frac{1}{78\sqrt{77}}\zeta_3^{(1)}-\frac{1}{18564}\zeta_5^{(1)}\right)\zeta_5^{(2)}\Bigg\}\zeta_4^{(3)}+$$

$$+\Bigg\{\left(\frac{1}{36\sqrt{77}}\zeta_3^{(1)}-\frac{1}{234}\zeta_5^{(1)}\right)\zeta_0^{(2)}+\left(\frac{1}{21\sqrt{165}}\zeta_2^{(1)}-\frac{5}{364\sqrt{33}}\zeta_4^{(1)}\right)\zeta_1^{(2)}+$$

$$+\left(\frac{1}{14\sqrt{165}}\zeta_1^{(1)}-\frac{37}{468\sqrt{385}}\zeta_3^{(1)}+\frac{2}{819\sqrt{5}}\zeta_5^{(1)}\right)\zeta_2^{(2)}+$$

$$+\left(\frac{1}{9\sqrt{77}}\zeta_0^{(1)}-\frac{29}{234\sqrt{385}}\zeta_2^{(1)}+\frac{1}{156\sqrt{77}}\zeta_4^{(1)}\right)\zeta_3^{(2)}+$$

$$+\left(\frac{1}{12\sqrt{11}}\zeta_0^{(1)}-\frac{8}{91\sqrt{33}}\zeta_1^{(1)}+\frac{1}{156\sqrt{77}}\zeta_3^{(1)}+\frac{1}{9282}\zeta_5^{(1)}\right)\zeta_4^{(2)}+$$

$$+\left(\frac{1}{468}\zeta_0^{(1)}-\frac{1}{819\sqrt{5}}\zeta_2^{(1)}-\frac{1}{18564}\zeta_4^{(1)}\right)\zeta_5^{(2)}\Bigg\}\zeta_5^{(3)}+$$

$$+\Bigg\{\left(\frac{1}{20\sqrt{21}}\zeta_1^{(1)}-\frac{1}{90}\zeta_3^{(1)}+\frac{1}{36\sqrt{77}}\zeta_5^{(1)}\right)\zeta_0^{(2)}+$$

$$+\left(\frac{1}{10\sqrt{21}}\zeta_0^{(1)}-\frac{1}{12\sqrt{105}}\zeta_2^{(1)}-\frac{1}{55\sqrt{21}}\zeta_4^{(1)}\right)\zeta_1^{(2)}+$$

$$+\left(\frac{1}{4\sqrt{35}}\zeta_0^{(1)}-\frac{1}{12\sqrt{5}}\zeta_1^{(1)}+\frac{1}{186\sqrt{5}}\zeta_3^{(1)}-\frac{37}{468\sqrt{385}}\zeta_5^{(1)}\right)\zeta_2^{(2)}+$$

$$+\left(\frac{1}{180}\zeta_0^{(1)}-\frac{1}{372\sqrt{5}}\zeta_2^{(1)}+\frac{2}{2145}\zeta_4^{(1)}\right)\zeta_3^{(2)}+$$

$$+\left(-\frac{1}{12\sqrt{7}}\zeta_0^{(1)}+\frac{23}{220\sqrt{21}}\zeta_1^{(1)}-\frac{4}{2145}\zeta_3^{(1)}+\frac{1}{156\sqrt{77}}\zeta_5^{(1)}\right)\zeta_4^{(2)}+$$

$$+\left(-\frac{5}{36\sqrt{77}}\zeta_0^{(1)}+\frac{19\sqrt{5}}{468\sqrt{77}}\zeta_2^{(1)}-\frac{1}{78\sqrt{77}}\zeta_4^{(1)}\right)\zeta_5^{(2)}\Bigg\}\zeta_3^{(3)}+$$

$$+\Bigg\{\frac{1}{84\sqrt{5}}\zeta_4^{(1)}\zeta_0^{(2)}+\left(-\frac{1}{12\sqrt{105}}\zeta_3^{(1)}+\frac{1}{21\sqrt{165}}\zeta_5^{(1)}\right)\zeta_1^{(2)}-\frac{1}{132}\zeta_4^{(1)}\zeta_2^{(2)}+$$

$$+\left(-\frac{1}{4\sqrt{35}}\zeta_0^{(1)}+\frac{1}{3\sqrt{105}}\zeta_1^{(1)}-\frac{1}{372\sqrt{5}}\zeta_3^{(1)}-\frac{29}{234\sqrt{385}}\zeta_5^{(1)}\right)\zeta_3^{(2)}$$

$$
+\left(-\frac{1}{21\sqrt{5}}\zeta_0^{(1)}+\frac{1}{66}\zeta_2^{(1)}-\frac{1}{572\sqrt{5}}\zeta_4^{(1)}\right)\zeta_4^{(2)}+
$$

$$
+\left(-\frac{\sqrt{5}}{42\sqrt{33}}\zeta_1^{(1)}+\frac{19\sqrt{5}}{468\sqrt{77}}\zeta_3^{(1)}-\frac{1}{819\sqrt{5}}\zeta_5^{(1)}\right)\zeta_5^{(2)}\Biggr\}\zeta_2^{(3)}\Biggr],
$$

$$
I_{000_{T,t}}^{(123)6}=I_{000_{T,t}}^{(123)5}+(T-t)^{\frac{3}{2}}\Biggl[\Biggl\{\left(\frac{1}{132\sqrt{13}}\zeta_4^{(1)}-\frac{1}{330}\zeta_6^{(1)}\right)\zeta_0^{(2)}+
$$

$$
+\left(\frac{5}{132\sqrt{273}}\zeta_3^{(1)}-\frac{1}{30\sqrt{429}}\zeta_5^{(1)}\right)\zeta_1^{(2)}+
$$

$$
+\left(\frac{5}{462\sqrt{13}}\zeta_2^{(1)}-\frac{19}{924\sqrt{65}}\zeta_4^{(1)}+\frac{1}{561\sqrt{5}}\zeta_6^{(1)}\right)\zeta_2^{(2)}+
$$

$$
+\left(\frac{5}{66\sqrt{273}}\zeta_1^{(1)}-\frac{5}{396\sqrt{13}}\zeta_3^{(1)}+\frac{\sqrt{143}}{8415\sqrt{7}}\zeta_5^{(1)}\right)\zeta_3^{(2)}+
$$

$$
+\left(\frac{5}{132\sqrt{13}}\zeta_0^{(1)}-\frac{2\sqrt{5}}{231\sqrt{13}}\zeta_2^{(1)}+\frac{1}{476\sqrt{13}}\zeta_4^{(1)}+\frac{1}{9690}\zeta_6^{(1)}\right)\zeta_4^{(2)}+
$$

$$
+\left(\frac{1}{4\sqrt{143}}\zeta_0^{(1)}-\frac{4}{15\sqrt{429}}\zeta_1^{(1)}+\frac{1}{510\sqrt{1001}}\zeta_3^{(1)}+\frac{1}{5814\sqrt{13}}\zeta_5^{(1)}\right)\zeta_5^{(2)}+
$$

$$
+\left(\frac{1}{660}\zeta_0^{(1)}+\frac{1}{1122\sqrt{5}}\zeta_2^{(1)}-\frac{1}{19380}\zeta_4^{(1)}\right)\zeta_6^{(2)}\Biggr\}\zeta_6^{(3)}+
$$

$$
+\Biggl\{\left(-\frac{1}{22\sqrt{13}}\zeta_4^{(1)}+\frac{1}{4\sqrt{143}}\zeta_5^{(1)}+\frac{1}{660}\zeta_6^{(1)}\right)\zeta_6^{(2)}+
$$

$$
+\left(\frac{5}{132\sqrt{13}}\zeta_4^{(2)}-\frac{1}{4\sqrt{143}}\zeta_5^{(2)}\right)\zeta_6^{(1)}\Biggr\}\zeta_0^{(3)}+
$$

$$
+\Biggl\{\left(-\frac{5}{44\sqrt{273}}\zeta_1^{(1)}+\frac{5}{198\sqrt{13}}\zeta_3^{(1)}-\frac{113}{3060\sqrt{1001}}\zeta_5^{(1)}\right)\zeta_6^{(2)}+
$$

$$
+\left(\frac{5}{2132\sqrt{273}}\zeta_1^{(2)}-\frac{5}{396\sqrt{13}}\zeta_3^{(2)}+\frac{61}{3060\sqrt{1001}}\zeta_5^{(2)}\right)\zeta_6^{(1)}\Biggr\}\zeta_3^{(3)}+
$$

$$
+\Biggl\{\left(-\frac{1}{22\sqrt{13}}\zeta_0^{(1)}+\frac{59}{924\sqrt{65}}\zeta_2^{(1)}-\frac{1}{238\sqrt{13}}\zeta_4^{(1)}-\frac{1}{19380}\zeta_6^{(1)}\right)\zeta_6^{(2)}+
$$

$$
+\left(\frac{1}{132\sqrt{13}}\zeta_0^{(2)}-\frac{19}{924\sqrt{65}}\zeta_2^{(2)}+\frac{1}{476\sqrt{13}}\zeta_4^{(2)}\right)\zeta_6^{(1)}\Biggr\}\zeta_4^{(3)}+
$$

$$
+\Biggl\{\left(-\frac{5}{44\sqrt{273}}\zeta_3^{(1)}+\frac{\sqrt{3}}{10\sqrt{143}}\zeta_5^{(1)}\right)\zeta_6^{(2)}+
$$

$$+\left(\frac{5}{66\sqrt{273}}\zeta_3^{(2)}-\frac{4}{15\sqrt{429}}\zeta_5^{(2)}\right)\zeta_6^{(1)}\Bigg\}\zeta_1^{(3)}+$$

$$+\Bigg\{\left(-\frac{5}{231\sqrt{13}}\zeta_2^{(1)}+\frac{59}{924\sqrt{65}}\zeta_4^{(1)}-\frac{1}{1122\sqrt{5}}\zeta_6^{(1)}\right)\zeta_6^{(2)}+$$

$$+\left(\frac{5}{462\sqrt{13}}\zeta_2^{(2)}-\frac{2\sqrt{5}}{231\sqrt{13}}\zeta_4^{(2)}\right)\zeta_6^{(1)}\Bigg\}\zeta_2^{(3)}+$$

$$+\Bigg\{\left(-\frac{1}{4\sqrt{143}}\zeta_0^{(1)}+\frac{\sqrt{3}}{10\sqrt{143}}\zeta_1^{(1)}-\frac{113}{3060\sqrt{1001}}\zeta_3^{(1)}-\frac{1}{2907\sqrt{13}}\zeta_5^{(1)}\right)\zeta_6^{(2)}+$$

$$+\left(\frac{1}{30\sqrt{429}}\zeta_1^{(2)}+\frac{\sqrt{143}}{8415\sqrt{7}}\zeta_3^{(2)}+\frac{1}{5814\sqrt{13}}\zeta_5^{(2)}\right)\zeta_6^{(1)}\Bigg\}\zeta_5^{(3)}\Bigg].$$

Покажем, что на практике в некоторых ситуациях преимущество полиномиальной системы функций перед тригонометрической по компьютерному времени на моделирование совокупностей повторных стохастических интегралов оказывается еще более выразительным.

Дело в том, что при решении практических задач часто приходится на каждом шаге интегрирования моделировать по несколько однотипных стохастических интегралов, взятых при различных сочетаниях верхних индексов. При этом полезно "сокращать" общее число моделируемых интегралов с помощью соотношений

$$I_{00_{T,t}}^{(i_1i_2)}+I_{00_{T,t}}^{(i_2i_1)}=I_{0_{T,t}}^{(i_1)}I_{0_{T,t}}^{(i_2)}\ \text{с в.1},$$

$$I_{000_{T,t}}^{(i_1i_2i_3)}+I_{000_{T,t}}^{(i_1i_3i_2)}+I_{000_{T,t}}^{(i_2i_1i_3)}+I_{000_{T,t}}^{(i_2i_3i_1)}+I_{000_{T,t}}^{(i_3i_2i_1)}+I_{000_{T,t}}^{(i_3i_1i_2)}=I_{0_{T,t}}^{(i_1)}I_{0_{T,t}}^{(i_2)}I_{0_{T,t}}^{(i_3)}\ \text{с в.1},$$

где i_1, i_2, i_3 — попарно различны; $i_1, i_2, i_3\in\{1,\ldots,m\}$.

В соответствии со сказанным рассмотрим следующую совокупность стохастических интегралов:

$$I_{0_{T,t}}^{(i)},\ I_{1_{T,t}}^{(i)},\ I_{00_{T,t}}^{(12)},\ I_{00_{T,t}}^{(13)},\ I_{00_{T,t}}^{(23)},\ I_{000_{T,t}}^{(123)},\ I_{000_{T,t}}^{(132)},\ I_{000_{T,t}}^{(213)},\ I_{000_{T,t}}^{(231)},\ I_{000_{T,t}}^{(312)},\qquad(6.50)$$

где $i=1,\ 2,\ 3$.

Смоделируем независимо по 100 раз при различных значениях $T-t$ набор стохастических интегралов (6.50) с использованием формул (5.2), (5.3), (5.5), (5.27). В табл. 6.2 приведены значения времени $\tilde{T}_{100}^{*}$, затраченного на решение данной задачи при различных значениях $T-t$. Повторим данный численный эксперимент с помощью аппроксимаций (5.41)–(5.44). Его результаты помещены в табл. 6.3.

Сравнивая полученные численные результаты можно заметить, что в данном случае полиномиальная система функций дает выигрыш в 3 раза по компьютерному времени при моделировании совокупности повторных стохастических интегралов.

Отметим, что в набор (6.45), вообще говоря, входит $m^3 + m^2 + 2m$ различных повторных стохастических интегралов. При $m > 3$ число $m^3 + m^2 + 2m$ может оказаться существенно большим, чем в случае (6.50) (в (6.50) $m = 3$ и также не учтены повторные стохастические интегралы с двумя совпадающими верхними индексами из трех) и, по предположению автора, преимущество полиномиальной системы функций окажется еще более существенным. Этот же эффект можно ожидать при рассмотрении более сложных, чем (6.45), совокупностей повторных стохастических интегралов, необходимых для построения более точных сильных численных методов для стохастических дифференциальных уравнений Ито [24], [25], [48].

По-видимому, отмеченная тенденция связана с тем, что полиномиальная система функций имеет существенное преимущество перед тригонометрической при аппроксимации повторных стохастических интегралов, в которых не все весовые функции вида $\psi(\tau) \equiv (t-\tau)^l;\ l = 0,\ 1,\ 2, \ldots$ тождественно равны 1, что соответствует $l \geq 1$ в приведенном представлении. Для понимания этого достаточно сравнить формулы (5.3), (5.4), (5.6), (5.7), полученные с помощью полиномов Лежандра, с их аналогами (5.42), (5.47), (5.46), (5.45), полученными с помощью тригонометрической системы функций.

В заключение покажем, что по вычислительным затратам на моделирование совокупности повторных стохастических интегралов метод, основанный на кратных рядах Фурье, вне конкуренции перед методом, основанным на кратных интегральных суммах.

Рассмотрим аппроксимации повторных стохастических интегралов Ито, полученные с помощью метода, основанного на кратных интегральных суммах:

$$I_{0_{T,t}}^{(1)q} = \sqrt{\Delta} \sum_{j=0}^{q-1} \xi_j^{(1)}, \tag{6.51}$$

$$I_{00_{T,t}}^{(21)q} = \Delta \sum_{j=0}^{q-1} \xi_j^{(2)} \sum_{i=0}^{j-1} \xi_i^{(1)}, \tag{6.52}$$

где $\xi_j^{(i)} = (\mathbf{f}_{t+(j+1)\Delta}^{(i)} - \mathbf{f}_{t+j\Delta}^{(i)})/\sqrt{\Delta};\ i = 1, 2$ — независимые стандартные гаус-

Таблица 6.4. Значения q и T^*_{sum} (метод интегральных сумм).

$T-t$	2^{-5}	2^{-6}	2^{-7}
q	16	32	64
T^*_{sum}, с	26	93	391

совские случайные величины; $\Delta=(T-t)/q$; $I^{(21)q}_{00_{T,t}}$, $I^{(1)q}_{0_{T,t}}$ — аппроксимации интегралов $I^{(21)}_{00_{T,t}}$, $I^{(1)}_{0_{T,t}}$. Число q, входящее в (6.51), (6.52), выбираем из условия

$$\mathsf{M}\left\{\left(I^{(21)}_{00_{T,t}}-I^{(21)q}_{00_{T,t}}\right)^2\right\}=\frac{(T-t)^2}{2q}\le(T-t)^3.$$

Выполним по 200 независимых моделирований совокупности стохастических интегралов $I^{(21)}_{00_{T,t}}$, $I^{(1)}_{0_{T,t}}$ с помощью формул (6.51), (6.52) при $T-t=2^{-j}$; $j=5,6,7$. В табл. 6.4 приведено время T^*_{sum}, которое потребовалось для выполнения данной задачи.

Сравнивая табл. 6.1 и 6.4 приходим к выводу, что метод, основанный на кратных интегральных суммах, уже при $T-t=2^{-7}$ более, чем в 50 раз хуже по компьютерному времени на моделирование совокупности стохастических интегралов $I^{(21)}_{00_{T,t}}$, $I^{(1)}_{0_{T,t}}$, чем метод, основанный на кратных рядах Фурье.

Приведенные численные эксперименты позволяют получить лишь некоторое поверхностное представление о "хороших" и "плохих" численных методах, однако вырисовывается вполне определенная картина.

6.6 Повторные стохастические интегралы как решения систем линейных стохастических дифференциальных уравнений

Г.Н. Мильштейном [24] предложен подход к численному моделированию повторных стохастических интегралов, основанный на их представлении в виде систем линейных стохастических дифференциальных уравнений. Рассмотрим данный подход на примере совокупности повторных стохастических интегралов Ито вида

$$I^{(i_1)}_{0_{s,t}}=\int\limits_t^s d\mathbf{f}^{(i_1)}_\tau,\ \ I^{(i_1i_2)}_{00_{s,t}}=\int\limits_t^s\int\limits_t^\tau d\mathbf{f}^{(i_1)}_\theta d\mathbf{f}^{(i_2)}_\tau, \tag{6.53}$$

где $i_1, i_2 = 1, \ldots, m$; $0 \leq t < s \leq T$; $\mathbf{f}_\tau^{(i)}$; $i = 1, \ldots, m$ — независимые стандартные винеровские процессы.

Далее имеем следующее представление:

$$d\begin{pmatrix} I_{0_{s,t}}^{(i_1)} \\ I_{00_{s,t}}^{(i_1 i_2)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} I_{0_{s,t}}^{(i_1)} \\ I_{00_{s,t}}^{(i_1 i_2)} \end{pmatrix} d\mathbf{f}_s^{(i_2)} + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} d\begin{pmatrix} \mathbf{f}_s^{(i_1)} \\ \mathbf{f}_s^{(i_2)} \end{pmatrix}. \tag{6.54}$$

Известно [24], [25], что решение системы (6.54) может быть представлено в следующей интегральной форме:

$$\begin{pmatrix} I_{0_{s,t}}^{(i_1)} \\ I_{00_{s,t}}^{(i_1 i_2)} \end{pmatrix} = \int\limits_t^s e^{\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\left(\mathbf{f}_s^{(i_2)} - \mathbf{f}_\theta^{(i_2)}\right)} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} d\begin{pmatrix} \mathbf{f}_\theta^{(i_1)} \\ \mathbf{f}_\theta^{(i_2)} \end{pmatrix}, \tag{6.55}$$

где e^A — матричная экспонента: $e^A \stackrel{\rm def}{=} \sum\limits_{k=0}^{\infty} A^k/k!$; A — квадратная матрица; $A^0 \stackrel{\rm def}{=} I$ — единичная матрица.

Численное моделирование правой части (6.55) является едва ли более простой задачей, чем совместное численное моделирование совокупности стохастических интегралов (6.53). Поэтому численное моделирование совокупности (6.53) приходится осуществлять в рамках данного подхода путем численного интегрирования системы линейных стохастических дифференциальных уравнений (6.54). Эту процедуру можно реализовать, например, с помощью метода Эйлера [24], [25]. Отметим, что выражения более точных численных методов для системы (6.54) [24], [25], [48] содержат повторные стохастические интегралы, численному моделированию которых и посвящен рассматриваемый подход.

Пусть $\{\tau_j\}_{j=0}^N$ — разбиение промежутка $[t, s]$, для которого $\tau_j = t + j\Delta$; $j = 0, 1, \ldots, N$; $\tau_N = s$. Запишем метод Эйлера [24], [25] для системы линейных стохастических дифференциальных уравнений (6.54):

$$\begin{pmatrix} \mathbf{y}_{p+1}^{(i_1)} \\ \mathbf{y}_{p+1}^{(i_1 i_2)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{y}_p^{(i_1)} \\ \mathbf{y}_p^{(i_1 i_2)} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \Delta\mathbf{f}_{\tau_p}^{(i_1)} \\ \mathbf{y}_p^{(i_1)}\Delta\mathbf{f}_{\tau_p}^{(i_2)} \end{pmatrix}, \mathbf{y}_0^{(i_1)} = 0, \mathbf{y}_0^{(i_1 i_2)} = 0, \tag{6.56}$$

где $\mathbf{y}_{\tau_p}^{(i_1)} \stackrel{\rm def}{=} \mathbf{y}_p^{(i_1)}$; $\mathbf{y}_{\tau_p}^{(i_1 i_2)} \stackrel{\rm def}{=} \mathbf{y}_p^{(i_1 i_2)}$ — аппроксимации повторных стохастических интегралов $I_{0_{\tau_p,t}}^{(i_1)}$, $I_{00_{\tau_p,t}}^{(i_1 i_2)}$, полученные с помощью численной схемы (6.56); $\Delta\mathbf{f}_{\tau_p}^{(i)} = \mathbf{f}_{\tau_{p+1}}^{(i)} - \mathbf{f}_{\tau_p}^{(i)}$; $i = 1, \ldots, m$.

Итерируя выражение (6.56), имеем

$$\mathbf{y}_N^{(i_1)} = \sum_{l=0}^{N-1} \Delta\mathbf{f}_{\tau_l}^{(i_1)}, \ \mathbf{y}_N^{(i_1 i_2)} = \sum_{q=0}^{N-1}\sum_{l=0}^{q-1} \Delta\mathbf{f}_{\tau_l}^{(i_1)}\Delta\mathbf{f}_{\tau_q}^{(i_2)}, \tag{6.57}$$

где $\sum\limits_{\emptyset} \stackrel{\rm def}{=} 0$. Формулы (6.57) являются не чем иным, как формулами для аппроксимаций повторных стохастических интегралов (6.53), полученными с помощью метода, основанного на кратных интегральных суммах.

Таким образом, эффективность методов аппроксимации повторных стохастических интегралов, основанных на кратных интегральных суммах и численном интегрировании систем линейных стохастических дифференциальных уравнений методом Эйлера, оказывается одинаковой.

6.7 Комбинированный метод аппроксимации повторных стохастических интегралов

В данном разделе строится "гибрид" методов аппроксимации повторных стохастических интегралов, основанных на кратных рядах Фурье (теорема 1) и кратных интегральных суммах (далее комбинированный метод). Показывается, что при сохранении определенного соотношения влияния одного метода на другой, удается добиться некоторых преимуществ перед "чистым" применением метода, основанного на кратных рядах Фурье. А именно, выяснено, что комбинированный метод аппроксимации повторных стохастических интегралов позволяет заметно снизить общее количество коэффициентов кратных рядов Фурье, необходимых для аппроксимации рассматриваемого повторного стохастического интеграла. Однако, при этом несколько возрастают вычислительные затраты непосредственно на аппоксимацию указанного стохастического интеграла.

6.7.1 Основные соотношения

Используя свойство аддитивности стохастического интеграла Ито можно записать:

$$I_{0_{T,t}}^{(i_1)}=\sqrt{\Delta}\sum_{k=0}^{N-1}\zeta_{0,k}^{(i_1)}\ \text{с в. 1}, \tag{6.58}$$

$$I_{1_{T,t}}^{(i_1)}=\sum_{k=0}^{N-1}\left(I_{1_{\tau_{k+1},\tau_k}}^{(i_1)}-\Delta^{3/2}k\zeta_{0,k}^{(i_1)}\right)\ \text{с в. 1}, \tag{6.59}$$

$$I_{00_{T,t}}^{(i_1i_2)}=\Delta\sum_{k=0}^{N-1}\sum_{l=0}^{k-1}\zeta_{0,k}^{(i_2)}\zeta_{0,l}^{(i_1)}+\sum_{k=0}^{N-1}I_{00_{\tau_{k+1},\tau_k}}^{(i_1i_2)}\ \text{с в. 1}, \tag{6.60}$$

$$I_{000_{T,t}}^{(i_1 i_2 i_3)} = \Delta^{3/2} \sum_{k=0}^{N-1} \sum_{l=0}^{k-1} \sum_{q=0}^{l-1} \zeta_{0,k}^{(i_3)} \zeta_{0,l}^{(i_2)} \zeta_{0,q}^{(i_1)} +$$

$$+\sqrt{\Delta} \sum_{k=0}^{N-1} \sum_{l=0}^{k-1} \left(\zeta_{0,k}^{(i_3)} I_{00_{\tau_{l+1},\tau_l}}^{(i_1 i_2)} + \zeta_{0,l}^{(i_1)} I_{00_{\tau_{k+1},\tau_k}}^{(i_2 i_3)} \right) + \sum_{k=0}^{N-1} I_{000_{\tau_{k+1},\tau_k}}^{(i_1 i_2 i_3)} \text{ с в. 1}; \qquad (6.61)$$

$i_1, \ldots, i_k = 1, \ldots, m$; $T - t = N\Delta$; $\tau_k = t + k\Delta$; $\zeta_{0,k}^{(i)} \stackrel{\text{def}}{=} \Delta^{-1/2} \int\limits_{\tau_k}^{\tau_{k+1}} d\mathbf{w}_s^{(i)}$; $k = 0, 1, \ldots, N-1$; $N < \infty$; сумма по пустому множеству считается равной нулю.

В приведенных выше формулах рассматриваются стохастические интегралы Ито из семейства (2.67).

Подставляя в (6.59) соотношение

$$I_{1_{\tau_{k+1},\tau_k}}^{(i_1)} = -\frac{\Delta^{3/2}}{2} \left(\zeta_{0,k}^{(i_1)} + \frac{1}{\sqrt{3}} \zeta_{1,k}^{(i_1)} \right) \text{ с в.1},$$

где $\zeta_{0,k}^{(i_1)}$, $\zeta_{1,k}^{(i_1)}$ – независимые стандартные гауссовские случайные величины, получаем:

$$I_{1_{T,t}}^{(i_1)} = -\Delta^{3/2} \sum_{k=0}^{N-1} \left(\left(\frac{1}{2} + k \right) \zeta_{0,k}^{(i_1)} + \frac{1}{2\sqrt{3}} \zeta_{1,k}^{(i_1)} \right) \text{ с в. 1}. \qquad (6.62)$$

Аппроксимируем с помощью метода кратных рядов Фурье по полиномам Лежандра интегралы $I_{00_{\tau_{k+1},\tau_k}}^{(i_1 i_2)}$, $I_{00_{\tau_{k+1},\tau_k}}^{(i_2 i_3)}$, $I_{000_{\tau_{k+1},\tau_k}}^{(i_1 i_2 i_3)}$, входящие в правые части (6.60), (6.61).

В результате получим

$$I_{00_{T,t}}^{(i_1 i_2)N,q} = \Delta \sum_{k=0}^{N-1} \sum_{l=0}^{k-1} \zeta_{0,k}^{(i_2)} \zeta_{0,l}^{(i_1)} + \sum_{k=0}^{N-1} I_{00_{\tau_{k+1},\tau_k}}^{(i_1 i_2)q}, \qquad (6.63)$$

$$I_{000_{T,t}}^{(i_1 i_2 i_3)N,q_1,q_2} = \Delta^{3/2} \sum_{k=0}^{N-1} \sum_{l=0}^{k-1} \sum_{q=0}^{l-1} \zeta_{0,k}^{(i_3)} \zeta_{0,l}^{(i_2)} \zeta_{0,q}^{(i_1)} +$$

$$+\sqrt{\Delta} \sum_{k=0}^{N-1} \sum_{l=0}^{k-1} \left(\zeta_{0,k}^{(i_3)} I_{00_{\tau_{l+1},\tau_l}}^{(i_1 i_2)q_1} + \zeta_{0,l}^{(i_1)} I_{00_{\tau_{k+1},\tau_k}}^{(i_2 i_3)q_1} \right) + \sum_{k=0}^{N-1} I_{000_{\tau_{k+1},\tau_k}}^{(i_1 i_2 i_3)q_2}, \qquad (6.64)$$

где аппроксимации $I_{00_{\tau_{k+1},\tau_k}}^{(i_1 i_2)q}$, $I_{000_{\tau_{k+1},\tau_k}}^{(i_1 i_2 i_3)q_2}$ получены методом кратных рядов Фурье (теорема 1) по полиномам Лежандра.

В частности, при $N = 2$ формулы (6.58), (6.62)–(6.64) преобретут следующий вид:

$$I_{0_{T,t}}^{(i_1)} = \sqrt{\Delta} \left(\zeta_{0,0}^{(i_1)} + \zeta_{0,1}^{(i_1)} \right) \text{ с в. 1}, \qquad (6.65)$$

$$I_{1_{T,t}}^{(i_1)} = -\Delta^{3/2}\left(\frac{1}{2}\zeta_{0,0}^{(i_1)} + \frac{3}{2}\zeta_{0,1}^{(i_1)} + \frac{1}{2\sqrt{3}}\left(\zeta_{1,0}^{(i_1)} + \zeta_{1,1}^{(i_1)}\right)\right) \text{ с в. } 1, \tag{6.66}$$

$$I_{00_{T,t}}^{(i_1 i_2)2,q} = \Delta\left(\zeta_{0,1}^{(i_2)}\zeta_{0,0}^{(i_1)} + I_{00_{\tau_1,\tau_0}}^{(i_1 i_2)q} + I_{00_{\tau_2,\tau_1}}^{(i_1 i_2)q}\right), \tag{6.67}$$

$$I_{000_{T,t}}^{(i_1 i_2 i_3)2,q_1,q_2} = \sqrt{\Delta}\left(\zeta_{0,1}^{(i_3)} I_{00_{\tau_1,\tau_0}}^{(i_1 i_2)q_1} + \zeta_{0,0}^{(i_1)} I_{00_{\tau_2,\tau_1}}^{(i_2 i_3)q_1}\right) + I_{000_{\tau_1,\tau_0}}^{(i_1 i_2 i_3)q_2} + I_{000_{\tau_2,\tau_1}}^{(i_1 i_2 i_3)q_2}, \tag{6.68}$$

где $\Delta = (T-t)/2$; $\tau_k = t + k\Delta$; $k = 0, 1, 2$.

Отметим, что (6.58), (6.62)-(6.64) при $N = 1$ переходят в формулы для численного моделирования указанных стохастических интегралов по методу кратных рядов Фурье. Таким образом можно утверждать, что метод кратных рядов Фурье является частным случаем комбинированного метода при $N = 1$.

Отметим, что далее будет показано, что моделирование повторных стохастических интегралов $I_{0_{T,t}}^{(i_1)}$, $I_{1_{T,t}}^{(i_1)}$, $I_{00_{T,t}}^{(i_1 i_2)}$, $I_{000_{T,t}}^{(i_1 i_2 i_3)}$ по формулам (6.65) – (6.68) приводит к резкому уменьшению общего числа коэффициентов Фурье, необходимых для аппроксимации этих интегралов методом, основанным на теореме 1. Однако, платой за это является то, что в правые части формул (6.67), (6.68) входят по 2 аппроксимации повторных стохастических интегралов 2 и 3 кратности, каждая из которых должна быть получена методом, основанным на теореме 1. Очевидно это ведет к увеличению вычислительных затрат на аппроксимацию.

6.7.2 Вычисление среднеквадратической погрешности

Вычислим среднеквадратические погрешности аппроксимаций, определяемых формулами (6.63), (6.64).

Имеем:

$$\varepsilon_{N,q} \stackrel{\text{def}}{=} \mathsf{M}\left\{\left(I_{00_{T,t}}^{(i_1 i_2)} - I_{00_{T,t}}^{(i_1 i_2)N,q}\right)^2\right\} = \sum_{k=0}^{N-1}\mathsf{M}\left\{\left(I_{00_{\tau_{k+1},\tau_k}}^{(i_1 i_2)} - I_{00_{\tau_{k+1},\tau_k}}^{(i_1 i_2)q}\right)^2\right\} =$$

$$= N\frac{\Delta^2}{2}\left(\frac{1}{2} - \sum_{l=1}^{q}\frac{1}{4l^2-1}\right) = \frac{(T-t)^2}{2N}\left(\frac{1}{2} - \sum_{l=1}^{q}\frac{1}{4l^2-1}\right); \tag{6.69}$$

$$\varepsilon_{N,q_1,q_2} \stackrel{\text{def}}{=} \mathsf{M}\left\{\left(I_{000_{T,t}}^{(i_1 i_2 i_3)} - I_{000_{T,t}}^{(i_1 i_2 i_3)N,q_1,q_2}\right)^2\right\} =$$

$$= \mathsf{M}\Biggl\{\Biggl(\sum_{k=0}^{N-1}\Biggl(\sqrt{\Delta}\sum_{l=0}^{k-1}\Biggl(\zeta_{0,k}^{(i_3)}\left(I_{00_{\tau_{l+1},\tau_l}}^{(i_1 i_2)} - I_{00_{\tau_{l+1},\tau_l}}^{(i_1 i_2)q_1}\right) +$$

$$
+\zeta_{0,l}^{(i_1)}\left(I_{00_{\tau_{k+1},\tau_k}}^{(i_2i_3)}-I_{00_{\tau_{k+1},\tau_k}}^{(i_2i_3)q_1}\right)\Biggr)+I_{000_{\tau_{k+1},\tau_k}}^{(i_1i_2i_3)}-I_{000_{\tau_{k+1},\tau_k}}^{(i_1i_2i_3)q_2}\Biggr)\Biggr)^2\Biggr\}=
$$

$$
=\sum_{k=0}^{N-1}\mathsf{M}\Biggl\{\Biggl(\sqrt{\Delta}\sum_{l=0}^{k-1}\Biggl(\zeta_{0,k}^{(i_3)}\left(I_{00_{\tau_{l+1},\tau_l}}^{(i_1i_2)}-I_{00_{\tau_{l+1},\tau_l}}^{(i_1i_2)q_1}\right)+
$$

$$
+\zeta_{0,l}^{(i_1)}\left(I_{00_{\tau_{k+1},\tau_k}}^{(i_2i_3)}-I_{00_{\tau_{k+1},\tau_k}}^{(i_2i_3)q_1}\right)\Biggr)+I_{000_{\tau_{k+1},\tau_k}}^{(i_1i_2i_3)}-I_{000_{\tau_{k+1},\tau_k}}^{(i_1i_2i_3)q_2}\Biggr)^2\Biggr\}=
$$

$$
=\sum_{k=0}^{N-1}\Biggl(\Delta\mathsf{M}\Biggl\{\Biggl(\zeta_{0,k}^{(i_3)}\sum_{l=0}^{k-1}\left(I_{00_{\tau_{l+1},\tau_l}}^{(i_1i_2)}-I_{00_{\tau_{l+1},\tau_l}}^{(i_1i_2)q_1}\right)\Biggr)^2\Biggr\}+
$$

$$
+\Delta\mathsf{M}\Biggl\{\Biggl(\left(I_{00_{\tau_{k+1},\tau_k}}^{(i_2i_3)}-I_{00_{\tau_{k+1},\tau_k}}^{(i_2i_3)q_1}\right)\sum_{l=0}^{k-1}\zeta_{0,l}^{(i_1)}\Biggr)^2\Biggr\}+\delta_{k,q_2}^{(i_1i_2i_3)}\Biggr)=
$$

$$
=\sum_{k=0}^{N-1}\Biggl(\Delta\sum_{l=0}^{k-1}\mathsf{M}\Biggl\{\left(I_{00_{\tau_{l+1},\tau_l}}^{(i_1i_2)}-I_{00_{\tau_{l+1},\tau_l}}^{(i_1i_2)q_1}\right)^2\Biggr\}+
$$

$$
+k\Delta\mathsf{M}\Biggl\{\left(I_{00_{\tau_{k+1},\tau_k}}^{(i_2i_3)}-I_{00_{\tau_{k+1},\tau_k}}^{(i_2i_3)q_1}\right)^2\Biggr\}+\delta_{k,q_2}^{(i_1i_2i_3)}\Biggr)=
$$

$$
=\sum_{k=0}^{N-1}\Biggl(2k\Delta\mathsf{M}\Biggl\{\left(I_{00_{\tau_{k+1},\tau_k}}^{(i_1i_2)}-I_{00_{\tau_{k+1},\tau_k}}^{(i_1i_2)q_1}\right)^2\Biggr\}+\delta_{k,q_2}^{(i_1i_2i_3)}\Biggr)=
$$

$$
=\sum_{k=0}^{N-1}\Biggl(2k\Delta\frac{\Delta^2}{2}\left(\frac{1}{2}-\sum_{l=1}^{q_1}\frac{1}{4l^2-1}\right)+\delta_{k,q_2}^{(i_1i_2i_3)}\Biggr)=
$$

$$
=\Delta^3\frac{N(N-1)}{2}\left(\frac{1}{2}-\sum_{l=1}^{q_1}\frac{1}{4l^2-1}\right)+\sum_{k=0}^{N-1}\delta_{k,q_2}^{(i_1i_2i_3)}=
$$

$$
=\frac{1}{2}(T-t)^3\left(\frac{1}{N}-\frac{1}{N^2}\right)\left(\frac{1}{2}-\sum_{l=1}^{q_1}\frac{1}{4l^2-1}\right)+\sum_{k=0}^{N-1}\delta_{k,q_2}^{(i_1i_2i_3)}, \tag{6.70}
$$

где

$$
\delta_{k,q_2}^{(i_1i_2i_3)}=\mathsf{M}\Biggl\{\left(I_{000_{\tau_{k+1},\tau_k}}^{(i_1i_2i_3)}-I_{000_{\tau_{k+1},\tau_k}}^{(i_1i_2i_3)q_2}\right)^2\Biggr\};
$$

$i_1\ne i_2$ в (6.69) и не все индексы i_1,i_2,i_3 в (6.70) одинаковы (в противном случае для моделирования интегралов $I_{00_{T,t}}^{(i_1i_2)}$, $I_{000_{T,t}}^{(i_1i_2i_3)}$ существуют точные соотношения).

Пусть для определенности i_1,i_2,i_3 в (6.70) попарно различны. Тогда

$$
\delta_{k,q_2}^{(i_1i_2i_3)}=\Delta^3\left(\frac{1}{6}-\sum_{i,j,l=0}^{q_2}\frac{C_{lji}^2}{\Delta^3}\right), \tag{6.71}
$$

где

$$C_{lji} = \frac{\sqrt{(2i+1)(2j+1)(2l+1)}}{8}\Delta^{3/2}\bar{C}_{lji},$$

$$\bar{C}_{lji} = \int\limits_{-1}^{1} P_l(z) \int\limits_{-1}^{z} P_j(y) \int\limits_{-1}^{y} P_i(x)dxdydz;$$

$P_i(x)$ – полином Лежандра.

Подставляя (6.71) в (6.70) получаем

$$\varepsilon_{N,q_1,q_2} = \frac{1}{2}(T-t)^3\left(\frac{1}{N}-\frac{1}{N^2}\right)\left(\frac{1}{2}-\sum_{l=1}^{q_1}\frac{1}{4l^2-1}\right)+$$

$$+\frac{(T-t)^3}{N^2}\left(\frac{1}{6}-\sum_{i,j,l=0}^{q_2}\frac{(2i+1)(2j+1)(2l+1)}{64}\bar{C}_{lji}^2\right). \qquad (6.72)$$

Отметим, что при $N=1$ формулы (6.69), (6.72) переходят в соответствующие формулы для среднеквадратических погрешностей аппроксимаций интегралов $I_{00_{T,t}}^{(i_1i_2)}$, $I_{000_{T,t}}^{(i_1i_2i_3)}$, полученных методом кратных рядов Фурье по полиномам Лежандра.

6.7.3 Численные эксперименты

Рассмотрим моделирование интегралов $I_{0_{T,t}}^{(i_1)}$, $I_{00_{T,t}}^{(i_1i_2)}$. С этой целью можно воспользоваться соотношениями (6.58), (6.63). При этом погрешность аппроксимации интеграла $I_{00_{T,t}}^{(i_1i_2)}$ определяется формулой (6.69) при использовании полиномов Лежандра. Вычислим величину $\varepsilon_{N,q}$ при различных значениях N и q :

$$\varepsilon_{3,2} \approx 0.0167(T-t)^2,\ \varepsilon_{2,3} \approx 0.0179(T-t)^2, \qquad (6.73)$$

$$\varepsilon_{1,6} \approx 0.0192(T-t)^2. \qquad (6.74)$$

Отметим, что комбинированный метод (формулы (6.73)) требует вычисления существенно меньшего числа коэффициентов Фурье, чем метод кратных рядов Фурье (формула (6.74)).

Пусть среднеквадратическая точность аппроксимации интегралов $I_{00_{T,t}}^{(i_1i_2)}$, $I_{000_{T,t}}^{(i_1i_2i_3)}$ равна $(T-t)^4$. В табл. 6.5–6.7 приведены значения N, q, q_1, q_2, которые удовлетворяют системе неравенств:

Таблица 6.5. $T - t = 0.1$.

N	q	q_1	q_2	M
1	13	–	1	21
2	6	0	0	7
3	4	0	0	5

Таблица 6.6. $T - t = 0.05$.

N	q	q_1	q_2	M
1	50	–	2	77
2	25	2	0	26
3	17	1	0	18

$$\begin{cases} \varepsilon_{N,q} \le (T-t)^4 \\ \varepsilon_{N,q_1,q_2} \le (T-t)^4 \end{cases} \tag{6.75}$$

и общее число M коэффициентов Фурье, требуемых для аппроксимации интегралов $I_{00_{T,t}}^{(i_1 i_2)}$, $I_{000_{T,t}}^{(i_1 i_2 i_3)}$ при $T - t = 0.1, 0.05, 0.02$ (числа q, q_1, q_2 брались так, чтобы число M было наименьшим).

Из табл. 6.5–6.7 видно, что комбинированный метод при малых N ($N = 2$) позволяет существенно снизить общее число коэффициентов Фурье, требуемых для аппроксимации интегралов $I_{00_{T,t}}^{(i_1 i_2)}$, $I_{000_{T,t}}^{(i_1 i_2 i_3)}$ по сравнению с методом кратных рядов Фурье ($N = 1$). Однако, как отмечалось ранее, платой за это является увеличение вычислительных затрат на аппроксимацию. Точность аппроксимации стохастических интегралов для комбинированного метода и метода кратных рядов Фурье бралась одинаковой и равной $(T - t)^4$.

Таблица 6.7. $T - t = 0.02$.

N	q	q_1	q_2	M
1	312	–	6	655
2	156	4	2	183
3	104	6	0	105

Глава 7

Дополнение: стохастические интегралы и стохастические дифференциальные уравнения

7.1 Стохастический интеграл Ито

Пусть $(\Omega, \mathrm{F}, \mathsf{P})$ — фиксированное вероятностное пространство, а f_t, $t \in [0, T]$ — стандартный винеровский процесс, определенный на $(\Omega, \mathrm{F}, \mathsf{P})$. Рассмотрим совокупность σ-алгебр $\{\mathrm{F}_t,\ t \in [0, T]\}$, определенную на $(\Omega, \mathrm{F}, \mathsf{P})$ и связанную с процессом f_t так, что:

1. $\mathrm{F}_s \subset \mathrm{F}_t \subset \mathrm{F}$ для $s < t$.

2. Процесс f_t является F_t-измеримым для всех $t \in [0, T]$.

3. Процесс $f_{t+\Delta} - f_\Delta$ для всех $\Delta \geq 0,\ t > 0$ независим с событиями σ-алгебры F_Δ.

Рассмотрим класс $\mathrm{M}_2([0, T])$ функций $\xi\ :\ \ [0, T] \times \Omega \to \Re^1$, которые удовлетворяют условиям:

1. Функция $\xi(t, \omega)$ является измеримыми по совокупности переменных (t, ω);

2. Функция $\xi(t, \omega)$ является F_t-измеримой для всех $t \in [0, T]$ и $\xi(\tau, \omega)$ независима с приращениями $f_{t+\Delta} - f_\Delta$ для $\Delta \geq \tau,\ t > 0$;

3. $\int\limits_0^T \mathsf{M}\left\{(\xi(t, \omega))^2\right\} dt < \infty$;

4. $\mathsf{M}\left\{(\xi(t, \omega))^2\right\} < \infty$ для всех $t \in [0, T]$.

Для любого разбиения $\{\tau_j\}_{j=0}^N$ отрезка $[0, T]$ такого, что $0 = \tau_0 < \tau_1 < \ldots < \tau_N = T$ определим последовательность ступенчатых функций $\xi^{(N)}(t,\omega)$: $\xi^{(N)}(t,\omega) = \xi(\tau_j^{(N)},\omega)$ с. в .1 для $t \in [\tau_j^{(N)}, \tau_{j+1}^{(N)})$, где $j = 0,\ 1, \ldots, N-1$; $N = 1,\ 2, \ldots$.

Определим стохастический интеграл Ито для $\xi_t \in \mathrm{M}_2([0,T])$ как следующий среднеквадратический предел

$$\underset{N\to\infty}{\text{l.i.m.}} \sum_{j=0}^{N-1} \xi^{(N)}(\tau_j^{(N)},\omega) \left(f(\tau_{j+1}^{(N)},\omega) - f(\tau_j^{(N)},\omega)\right) \stackrel{\text{def}}{=} \int_0^T \xi_\tau df_\tau, \tag{7.1}$$

где $\xi^{(N)}(t,\omega)$ — любая ступенчатая функция, которая сходится к функции $\xi(t,\omega)$ в следующем смысле

$$\lim_{N\to\infty} \int_0^T \mathsf{M}\left\{\left|\xi^{(N)}(t,\omega) - \xi(t,\omega)\right|^2\right\} dt = 0. \tag{7.2}$$

Хорошо извесно [2], что стохастический интеграл Ито существует, не зависит от выбора последовательности $\xi^{(N)}(t,\omega)$ и обладает свойствами:

1. $\mathsf{M}\left\{\int_0^T \xi_\tau df_\tau\right\} = 0.$
2. $\mathsf{M}\left\{\left(\int_0^T \xi_\tau df_\tau\right)^2\right\} = \int_0^T \mathsf{M}\{\xi_\tau^2\} d\tau.$
3. $\int_0^T (\alpha\xi_\tau + \beta\eta_\tau)\, df_\tau = \alpha \int_0^T \xi_\tau df_\tau + \beta \int_0^T \eta_\tau df_\tau$ с. в. 1.
4. $\mathsf{M}\left\{\int_0^T \xi_\tau df_\tau \int_0^T \eta_\tau df_\tau\right\} = \int_0^T \mathsf{M}\left\{\xi_\tau \eta_\tau\right\} d\tau.$

Также

$$\int_0^T \xi_\tau \mathbf{1}_{[t_0,t_1]}(\tau) df_\tau \stackrel{\text{def}}{=} \int_{t_0}^{t_1} \xi_\tau df_\tau,$$

где $\mathbf{1}_{[t_0,t_1]}(\tau) = 1$ для $\tau \in [t_0, t_1]$ и $\mathbf{1}_{[t_0,t_1]}(\tau) = 0$ в противном случае.

Используя свойство 3 к $\xi_\tau \mathbf{1}_{[t_0,t]}(\tau) = \xi_\tau \mathbf{1}_{[t_0,t_1]}(\tau) + \xi_\tau \mathbf{1}_{[t_1,t]}(\tau)$, $\tau \neq t_1$, мы получим

$$\int_{t_0}^{t_1} \xi_s df_s + \int_{t_1}^{t} \xi_s df_s = \int_{t_0}^{t} \xi_s df_s \text{ с. в. } 1,$$

где $0 \le t_0 \le t_1 \le t \le T$.

Определим стохастический интеграл для $\xi \in \mathrm{M}_2([0,T])$ как следующий среднеквадратический предел

$$\underset{N\to\infty}{\text{l.i.m.}} \sum_{j=0}^{N-1} \xi^{(N)} \left(\tau_j^{(N)},\omega\right) \left(\tau_{j+1}^{(N)} - \tau_j^{(N)}\right) \stackrel{\text{def}}{=} \int_0^T \xi_\tau d\tau,$$

где $\xi^{(N)}(t,\omega)$ — любая ступенчатая функция из класса $\mathrm{M}_2([0,T])$, которая сходится в смысле соотношения (7.2) к функции $\xi(t,\omega)$.

Рассмотрим хорошо известные свойства стохастического интеграла $\int\limits_0^T \xi_\tau d\tau$:

1. $\mathsf{M}\left\{\int\limits_0^T \xi_\tau d\tau\right\} = \int\limits_0^T \mathsf{M}\left\{\xi_\tau\right\} d\tau,$

2. $\mathsf{M}\left\{\left(\int\limits_0^T \xi_\tau d\tau\right)^2\right\} \le T\int\limits_0^T \mathsf{M}\left\{\xi_\tau^2\right\} d\tau,$

3. $\int\limits_0^T \left(\alpha\xi_\tau + \beta\eta_\tau\right) d\tau = \alpha\int\limits_0^T \xi_\tau d\tau + \beta\int\limits_0^T \eta_\tau d\tau$ с. в. 1 $\forall\alpha,\ \beta \in \Re^1.$

Свойство аддитивности может быть рассмотрено также, как и для стохастического интеграла Ито.

Отметим также, что

$$\mathsf{M}\left\{\left|\int\limits_{t_0}^{t} \xi_\tau df_\tau\right|^{2n}\right\} \le (t-t_0)^{n-1}\left(n(2n-1)\right)^n \int\limits_{t_0}^{t} \mathsf{M}\left\{|\xi_\tau|^{2n}\right\} d\tau, \qquad (7.3)$$

$$\mathsf{M}\left\{\left|\int\limits_{t_0}^{t} \xi_\tau d\tau\right|^{2n}\right\} \le (t-t_0)^{2n-1} \int\limits_{t_0}^{t} \mathsf{M}\left\{|\xi_\tau|^{2n}\right\} d\tau, \qquad (7.4)$$

где $(\xi_\tau)^n \in \mathrm{M}_2([t_0,t])$.

7.2 Стохастический интеграл Стратоновича

Рассмотрим класс $Q_{2m}([t,T])$ процессов Ито $\eta_\tau \in \Re^1$; $\tau \in [t,T]$ таких, что

$$\eta_\tau = \eta_t + \int\limits_t^\tau a_s ds + \int\limits_t^\tau b_s df_s, \qquad (7.5)$$

где $f_s \in \Re^1$ — F_s-измеримый для всех $s \in [t,T]$ стандартный винеровский процесс и

(AI) $(a_s)^m,\ (b_s)^m \in \mathrm{M}_2([t,T])$.

(AII) Для всех $s,\ \tau \in [t,T]$ и некоторых положительных постоянных $C,\ \gamma < \infty$: $\mathsf{M}\{|b_s - b_\tau|^4\} \le C|s-\tau|^\gamma$.

Пусть $C_2(\Re^1,[t,T])$ — пространство функций $F(x,\tau) : \Re^1 \times [t,T] \to \Re^1$, которые дважды непрерывно дифференцируемы по переменной x и эти производные равномерно ограничены для $x \in \Re^1$, $\tau \in [t,T]$.

Определим стохастический интеграл Стратоновича для процесса $F(\eta_\tau,\tau);\ \tau\in[t,T]\ (F(x,\tau)\in C_2(\Re^1,[t,T]))$ как следующий среднеквадратический предел

$$\underset{N\to\infty}{\text{l.i.m}}\sum_{j=0}^{N-1}F\left(\frac{1}{2}\left(\eta_{\tau_j^{(N)}}+\eta_{\tau_{j+1}^{(N)}}\right),\tau_j^{(N)}\right)\left(f_{\tau_{j+1}^{(N)}}-f_{\tau_j^{(N)}}\right)\stackrel{\text{def}}{=}\int\limits_t^{*T}F(\eta_\tau,\tau)df_\tau, \qquad (7.6)$$

где мы сохранили смысл обозначений формулы (7.1).

Нетрудно показать, что если $\eta_\tau\in Q_8([t,T])$, $F(\eta_\tau,\tau)\in \mathrm{M}_2([t,T])$, где $F(x,\tau)\in C_2(\Re^1,[t,T])$, то справедливо следующее соотношение между стохастическими интегралами Стратоновича и Ито

$$\int\limits_t^{*T}F(\eta_\tau,\tau)df_\tau=\int\limits_t^{T}F(\eta_\tau,\tau)df_\tau+\frac{1}{2}\int\limits_t^{T}\frac{\partial F}{\partial x}(\eta_\tau,\tau)b_\tau d\tau \ \text{ с. в. 1.} \qquad (7.7)$$

Если винеровские процессы в (7.5) и (7.7) являются независимыми, то с. в. 1

$$\int\limits_t^{*T}F(\eta_\tau,\tau)df_\tau=\int\limits_t^{T}F(\eta_\tau,\tau)df_\tau.$$

Также, если $\eta_\tau^{(i)}\in Q_4([t,T]);\ i=1,\ 2$, то

$$\int\limits_t^{*T}\eta_\tau^{(i)}d\mathbf{f}_\tau^{(j)}=\int\limits_t^{T}\eta_\tau^{(i)}d\mathbf{f}_\tau^{(j)}+\frac{1}{2}\mathbf{1}_{\{i=j\}}\int\limits_t^{T}b_\tau d\tau \ \text{ с. в.1},$$

где процесс $\eta_\tau^{(i)}$ имеет вид

$$\eta_\tau^{(i)}=\eta_t^{(i)}+\int\limits_t^{\tau}a_s ds+\int\limits_t^{\tau}b_s d\mathbf{f}_s^{(i)}.$$

Здесь $\mathbf{f}_\tau^{(j)}\in\Re^1;\ j=1,\ 2$ — независимые стандартные винеровские процессы; $\mathbf{1}_A$ — индикатор множества A.

7.3 Формула Ито

Пусть $(\Omega,\mathrm{F},\mathsf{P})$ — фиксированное вероятностное пространство, а $\mathbf{f}_t\in\Re^m$ — F_t-измеримый для всех $t\in[0,T]$ векторный винеровский процесс с независимыми компонентами $\mathbf{f}_t^{(i)};\ i=1,\ldots,m$. Пусть случайные процессы $\mathbf{a}_s^{(i)}$ и $B_s^{(ij)}$, $i=1,\ldots,n;\ j=1,\ldots,m$ таковы, что $\mathbf{a}_s^{(i)},\ B_s^{(ij)}\in\mathrm{M}_2([0,T])$ для всех $i=1,\ldots,n;\ j=1,\ldots,m$.

Рассмотрим векторный процесс Ито $\mathbf{x}_t \in \Re^n, t \in [0,T]$ вида

$$\mathbf{x}_t = \mathbf{x}_s + \int\limits_s^t \mathbf{a}_\tau d\tau + \int\limits_s^t B_\tau d\mathbf{f}_\tau \text{ с. в. } 1, \qquad (7.8)$$

где $0 \le s \le t \le T$.

Пусть функция $R(\mathbf{x},t):\ \Re^n \times [0,T] \to \Re^1$ имеет непрерывные частные производные

$$\frac{\partial R}{\partial t},\ \frac{\partial R}{\partial \mathbf{x}^{(i)}},\ \frac{\partial^2 R}{\partial \mathbf{x}^{(i)}\partial \mathbf{x}^{(j)}};$$

$i, j = 1, \ldots, n$.

В рамках рассмотренных предположений для всех s, t таких, что $0 \le s \le t \le T$, с. в. 1 имеет место формула Ито:

$$R(\mathbf{x}_t, t) = R(\mathbf{x}_s, s) + \int\limits_s^t \Bigg(\frac{\partial R}{\partial t}(\mathbf{x}_\tau, \tau) + \sum_{i=1}^n \mathbf{a}_\tau^{(i)} \frac{\partial R}{\partial \mathbf{x}^{(i)}}(\mathbf{x}_\tau, \tau) +$$

$$+\frac{1}{2}\sum_{j=1}^m \sum_{i,k=1}^n B_\tau^{(ij)} B_\tau^{(kj)} \frac{\partial^2 R}{\partial \mathbf{x}^{(i)}\partial \mathbf{x}^{(k)}}(\mathbf{x}_\tau, \tau)\Bigg) d\tau + \sum_{j=1}^m \sum_{i=1}^n \int\limits_s^t B_\tau^{(ij)} \frac{\partial R}{\partial \mathbf{x}^{(i)}}(\mathbf{x}_\tau, \tau) d\mathbf{f}_\tau^{(j)}.$$

7.4 Стохастическое дифференциальное уравнение Ито

Пусть $(\Omega, \mathrm{F}, \mathsf{P})$ — фиксированное вероятностное пространство и $\mathbf{f}_t \in \Re^m$ — F_t-измеримый для всех $t \in [0,T]$ векторный винеровский процесс с независимыми компонентами $\mathbf{f}_t^{(i)};\ i = 1, \ldots, m$.

Рассмотрим стохастическое дифференциальное уравнение Ито:

$$\mathbf{x}_t = \mathbf{x}_0 + \int\limits_0^t \mathbf{a}(\mathbf{x}_\tau, \tau) d\tau + \int\limits_0^t B(\mathbf{x}_\tau, \tau) d\mathbf{f}_\tau,\ \mathbf{x}_0 = \mathbf{x}(0, \omega), \qquad (7.9)$$

где случайный процесс $\mathbf{x}_t \in \Re^n$ — решение уравнеия (7.9); $\mathbf{a}: \Re^n \times [0,T] \to \Re^n$, $B: \Re^n \times [0,T] \to \Re^{n\times m}$; $\mathbf{x}_0$ — векторное начальное условие; $\mathbf{x}_0$ и $\mathbf{f}_t - \mathbf{f}_0$ независимы при $t > 0$.

Случайный процесс $\mathbf{x}_t \in \Re^n$ называется сильным решением (далее просто решением) стохастического дифференциального уравнения Ито (7.9), если любая компонента $\mathbf{x}_t$ — F_t-измерима для всех $t \in [0,T]$, интегралы в правой части (7.9) существуют и равенство (7.9) выполняется для всех $t \in [0,T]$ с. в. 1.

Хорошо известно [2], что существует единственное (в смысле стохастической эквивалентности) непрерывное с. в. 1 решение стохастического дифференциального уравнеия Ито, если выполнены следующие 3 условия:

1. Функции $\mathbf{a}(\mathbf{x},t), B_k(\mathbf{x},t) : \Re^n \times [0,T] \to \Re^n;\ k=1,\ldots,m$ являются измеримыми по совокупности переменных $(\mathbf{x},t) \in \Re^n \times [0,T]$; $B_k(\mathbf{x}_\tau,\tau)$ — k-й столбец матрицы $B(\mathbf{x}_\tau,\tau)$.

2. Для всех $\mathbf{x},\ \mathbf{y} \in \Re^n$ существует такая постоянная $K<\infty$, что

$$|\mathbf{a}(\mathbf{x},t)-\mathbf{a}(\mathbf{y},t)| + \sum_{k=1}^{m} |B_k(\mathbf{x},t)-B_k(\mathbf{y},t)| \leq K|\mathbf{x}-\mathbf{y}|,$$

$$|\mathbf{a}(\mathbf{x},t)|^2 + \sum_{k=1}^{m} |B_k(\mathbf{x},t)|^2 \leq K^2\left(1+|\mathbf{x}|^2\right).$$

3. Случайная величина $\mathbf{x}_0$ — F_0-измерима и $\mathsf{M}\left\{|\mathbf{x}_0|^2\right\}<\infty$.

7.5 Стохастический интеграл по мартингалу

Пусть $(\Omega,\mathrm{F},\mathsf{P})$ — фиксированное вероятностное пространство, а $\{\mathrm{F}_t, t \in [0,t]\}$ — неубывающая совокупность σ-алгебр, определенных на $(\Omega,\mathrm{F},\mathsf{P})$. Пусть $M_t,\ t\in[0,T]$ — F_t-измеримый для всех $t\in[0,T]$ мартингал, который удовлетворяет условию $\mathsf{M}\{|M_t|\}<\infty$ и для всех $t\in[0,T]$ существует F_t-измеримый и неотрицательный с в. 1 случайный процесс $\rho_t,\ t\in[0,T]$ такой, что

$$\mathsf{M}\{(M_s-M_t)^2|\mathrm{F}_t\} = \mathsf{M}\left\{\int_t^s \rho_\tau d\tau|\mathrm{F}_t\right\} \text{ с в. 1},$$

где $0\leq t<s\leq T$.

Рассмотрим класс $H_2(\rho,[0,T])$ случайных процессов $\varphi_t,\ t\in[0,T]$, которые F_t-измеримы для всех $t\in[0,T]$ и удовлетворяют условию $\mathsf{M}\left\{\int_0^T \varphi_t^2\rho_t dt\right\}<\infty$.

Рассмотрим разбиение $\{\tau_j\}_{j=0}^N$ отрезка $[0,T]$ такое, что

$$0=\tau_0^{(N)}<\tau_1^{(N)}<\ldots<\tau_N^{(N)}=T,\ \Delta_N=\max_{0\leq j\leq N-1}\left|\tau_{j+1}^{(N)}-\tau_j^{(N)}\right|\to 0$$

при $N\to\infty$.

Определим такую последовательность ступенчатых функций $\varphi_t^{(N)}$, что: $\varphi_t^{(N)}=\varphi_{\tau_j^{(N)}}$ с в. 1 для $t\in[\tau_j^{(N)},\tau_{j+1}^{(N)})$; $j=0,\ 1,\ldots,N-1$; $N=1,\ 2,\ldots$.

Определим стохастический интеграл по мартингалу от процесса $\varphi_t \in H_2(\rho, [0, T])$ как следующий среднеквадратический предел

$$\underset{N\to\infty}{\text{l.i.m.}} \sum_{j=0}^{N-1} \varphi^{(N)}_{\tau_j^{(N)}} \left(M_{\tau_{j+1}^{(N)}} - M_{\tau_j^{(N)}} \right) \stackrel{\text{def}}{=} \int\limits_0^T \varphi_t dM_t, \tag{7.10}$$

где $\varphi_t^{(N)}$ — любая последовательность ступенчатых функций из класса $H_2(\rho, [0, T])$, которая сходится к φ_t в следующем смысле

$$\underset{N\to\infty}{\text{l.i.m.}}\ \mathsf{M}\left\{\int\limits_0^T \left(\varphi_t - \varphi_t^{(N)}\right)^2 \rho_t dt\right\} = 0.$$

Хорошо известно [2], что стохастический интеграл $\int\limits_0^T \varphi_t dM_t$ существует, не зависит от выбора последовательности $\varphi_t^{(N)}$ и удовлетворяет с в. 1 следующим условиям:

1. $\mathsf{M}\left\{\int\limits_0^T \varphi_t dM_t | \mathrm{F}_0\right\} = 0.$
2. $\mathsf{M}\left\{\left|\int\limits_0^T \varphi_t dM_t\right|^2 | \mathrm{F}_0\right\} = \mathsf{M}\left\{\int\limits_0^T \varphi_t^2 \rho_t dt | \mathrm{F}_0\right\}.$
3. $\int\limits_0^T (\alpha\varphi_t + \beta\psi_t) dM_t = \alpha \int\limits_0^T \varphi_t dM_t + \beta \int\limits_0^T \psi_t dM_t.$
4. $\mathsf{M}\left\{\int\limits_0^T \varphi_t dM_t \int\limits_0^T \psi_t dM_t | \mathrm{F}_0\right\} = \mathsf{M}\left\{\int\limits_0^T \varphi_t \psi_t \rho_t dt | \mathrm{F}_0\right\}.$

7.6 Стохастический интеграл по пуассоновской случайной мере

Рассмотрим пуассоновскую случайную меру в пространстве $[0, T] \times \mathbf{Y}$ ($\Re^n \stackrel{\text{def}}{=} \mathbf{Y}$). Значения меры на множестве $\Delta \times A$ ($\Delta \subseteq [0, T]$, $A \subset \mathbf{Y}$) обозначим через $\nu(\Delta, A)$. Предположим, что $\mathsf{M}\{\nu(\Delta, A)\} = |\Delta|\Pi(A)$, где $|\Delta|$ — мера Лебега Δ, $\Pi(A)$ — мера на σ-алгебре B борелевских множеств $\mathbf{Y}$, а B_0 — подалгебра B, состоящая из множеств $A \subset \mathrm{B}$, которые удовлетворяют условию $\Pi(A) < \infty$.

Рассмотрим мартингальную меру $\tilde{\nu}(\Delta, A) = \nu(\Delta, A) - |\Delta|\Pi(A)$.

Пусть $(\Omega, \mathrm{F}, \mathsf{P})$ — фиксированное вероятностное пространство и $\{\mathrm{F}_t,\ t \in [0, T]\}$ — неубывающее семейство σ-алгебр $\mathrm{F}_t \subset \mathrm{F}$.

Предположим, что

1. Случайные величины $\nu([0,t),A)$ — F_t-измеримы для всех $A \subseteq \mathrm{B}_0$.

2. Случайные величины $\nu([t,t+h),A)$, $A \subseteq \mathrm{B}_0$, $h > 0$, не зависят от σ-алгебры F_t.

Определим класс $H_l(\Pi,[0,T])$ случайных функций $\varphi : [0,T] \times \mathbf{Y} \times \Omega \to \Re^1$, которые для всех $t \in [0,T]$, $\mathbf{y} \in \mathbf{Y}$ — F_t-измеримы и удовлетворяют следующему условию

$$\int\limits_0^T \int\limits_{\mathbf{Y}} \mathsf{M}\{|\varphi(t,\mathbf{y})|^l\}\Pi(d\mathbf{y})dt < \infty.$$

Рассмотрим разбиение $\{\tau_j\}_{j=0}^N$ отрезка $[0,T]$, которое удовлетворяет таким же условиям, как в определении стохастического интеграла Ито.

Для $\varphi(t,\mathbf{y}) \in H_2(\Pi,[0,T])$ определим стохастический интеграл по мартингальной пуассоновской мере как следующий среднеквадратический предел [2]:

$$\int\limits_0^T \int\limits_{\mathbf{Y}} \varphi(t,\mathbf{y})\tilde{\nu}(dt,d\mathbf{y}) \stackrel{\mathrm{def}}{=} \underset{N\to\infty}{\mathrm{l.i.m.}} \int\limits_0^T \int\limits_{\mathbf{Y}} \varphi^{(N)}(t,\mathbf{y})\tilde{\nu}(dt,d\mathbf{y}), \qquad (7.11)$$

где $\varphi^{(N)}(t,\mathbf{y})$ — любая последовательность ступенчатых функций из класса $H_2(\Pi,[0,T])$ такая, что

$$\lim_{N\to\infty} \int\limits_0^T \int\limits_{\mathbf{Y}} \mathsf{M}\{|\varphi(t,\mathbf{y}) - \varphi^{(N)}(t,\mathbf{y})|^2\}\Pi(d\mathbf{y})dt \to 0.$$

Хорошо известно [2], что стохастический интеграл (7.11) существует, не зависит от выбора последовательности $\varphi^{(N)}(t,\mathbf{y})$ и удовлетворяет с в. 1 следующим условиям:

1. $\mathsf{M}\left\{\int\limits_0^T \int\limits_{\mathbf{Y}} \varphi(t,\mathbf{y})\tilde{\nu}(dt,d\mathbf{y})|\mathrm{F}_0\right\} = 0.$

2. $\int\limits_0^T \int\limits_{\mathbf{Y}} (\alpha\varphi_1(t,\mathbf{y}) + \beta\varphi_2(t,\mathbf{y}))\tilde{\nu}(dt,d\mathbf{y}) = \alpha \int\limits_0^T \int\limits_{\mathbf{Y}} \varphi_1(t,\mathbf{y})\tilde{\nu}(dt,d\mathbf{y}) +$

$$+\beta \int\limits_0^T \int\limits_{\mathbf{Y}} \varphi_2(t,\mathbf{y})\tilde{\nu}(dt,d\mathbf{y}).$$

3. $\mathsf{M}\left\{\left|\int\limits_0^T \int\limits_{\mathbf{Y}} \varphi(t,\mathbf{y})\tilde{\nu}(dt,d\mathbf{y})\right|^2 |\mathrm{F}_0\right\} = \int\limits_0^T \int\limits_{\mathbf{Y}} \mathsf{M}\left\{|\varphi(t,\mathbf{y})|^2|\mathrm{F}_0\right\}\Pi(d\mathbf{y})dt,$

где α, β — некоторые постоянные; $\varphi_1(t,\mathbf{y})$, $\varphi_2(t,\mathbf{y})$, $\varphi(t,\mathbf{y})$ из класса $H_2(\Pi,[0,T])$.

Стохастический интеграл

$$\int\limits_0^T\int\limits_{\mathbf{Y}}\varphi(t,\mathbf{y})\nu(dt,d\mathbf{y})$$

по пуассоновской мере определим следующим образом

$$\int\limits_0^T\int\limits_{\mathbf{Y}}\varphi(t,\mathbf{y})\nu(dt,d\mathbf{y})=\int\limits_0^T\int\limits_{\mathbf{Y}}\varphi(t,\mathbf{y})\tilde{\nu}(dt,d\mathbf{y})+\int\limits_0^T\int\limits_{\mathbf{Y}}\varphi(t,\mathbf{y})\Pi(d\mathbf{y})dt,$$

где мы предполагаем, что правая часть последнего соотношения существует.

7.7 Моментные оценки для стохастических интегралов по пуассоновским мерам

По формуле Ито для процесса Ито со скачкообразной компонентой [2] с в. 1 получаем

$$(z_t)^r=\int\limits_0^t\int\limits_{\mathbf{Y}}\left((z_{\tau-}+\gamma(\tau,\mathbf{y}))^r-(z_{\tau-})^r\right)\nu(d\tau,d\mathbf{y}), \tag{7.12}$$

где

$$z_t=\int\limits_0^t\int\limits_{\mathbf{Y}}\gamma(\tau,\mathbf{y})\nu(d\tau,d\mathbf{y}).$$

Мы предполагаем, что функция $\gamma(\tau,\mathbf{y})$ удовлетворяет известным условиям существования правой части (7.12).

Рассмотрим [2] полезную оценку моментов стохастического интеграла по пуассоновской мере:

$$a_r(T)\le\max_{j\in\{r,1\}}\left\{\left(\int\limits_0^T\int\limits_{\mathbf{Y}}\left(\left((b_r(\tau,\mathbf{y}))^{\frac{1}{r}}+1\right)^r-1\right)\Pi(d\mathbf{y})d\tau\right)^j\right\}, \tag{7.13}$$

где

$$a_r(t)=\sup_{0\le\tau\le t}\mathsf{M}\left\{|z_\tau|^r\right\},\ b_r(\tau,\mathbf{y})=\mathsf{M}\left\{|\gamma(\tau,\mathbf{y})|^r\right\}.$$

Мы предполагаем, что правая часть (7.13) существует.

Поскольку $\tilde{\nu}(dt,d\mathbf{y})=\nu(dt,d\mathbf{y})-\Pi(d\mathbf{y})dt$, то согласно неравенству Минковского

$$\left(\mathsf{M}\left\{|\tilde{z}_t|^{2r}\right\}\right)^{\frac{1}{2r}}\le\left(\mathsf{M}\left\{|z_t|^{2r}\right\}\right)^{\frac{1}{2r}}+\left(\mathsf{M}\left\{|\hat{z}_t|^{2r}\right\}\right)^{\frac{1}{2r}}, \tag{7.14}$$

где

$$\hat{z}_t \stackrel{\text{def}}{=} \int\limits_0^t \int\limits_{\mathbf{Y}} \gamma(\tau, \mathbf{y}) \Pi(d\mathbf{y}) d\tau; \; \tilde{z}_t = \int\limits_0^t \int\limits_{\mathbf{Y}} \gamma(\tau, \mathbf{y}) \tilde{\nu}(d\tau, d\mathbf{y}).$$

Величина $\mathsf{M}\{|\hat{z}_\tau|^{2r}\}$ может быть оценена с помощью неравенства (7.4):

$$\mathsf{M}\left\{|\hat{z}_t|^{2r}\right\} \leq t^{2r-1} \int\limits_0^t \mathsf{M}\left\{\left|\int\limits_{\mathbf{Y}} \varphi(\tau, \mathbf{y}) \Pi(d\mathbf{y})\right|^{2r}\right\} d\tau,$$

где мы предполагаем, что

$$\int\limits_0^t \mathsf{M}\left\{\left|\int\limits_{\mathbf{Y}} \gamma(\tau, \mathbf{y}) \Pi(d\mathbf{y})\right|^{2r}\right\} d\tau < \infty.$$

7.8 Разложения Тейлора–Ито и Тейлора–Стратоновича

Пусть L — множество функций $R(\mathbf{x}, s) : \Re^n \times [0, T] \to \Re^1$, которые для всех $t \in [0, T]$, $\mathbf{x} \in \Re^n$ имеют непрерывные частные производные:

$$\frac{\partial R}{\partial t}(\mathbf{x}, t), \; \frac{\partial R}{\partial \mathbf{x}^{(i)}}(\mathbf{x}, t), \; \frac{\partial^2 R}{\partial \mathbf{x}^{(i)} \partial \mathbf{x}^{(j)}}(\mathbf{x}, t); \; i, j = 1, 2, \ldots, n$$

и $\mathrm{G}_0 \subset \mathrm{L}$ — множество функций $R(\mathbf{x}, s) : \Re^n \times [0, T] \to \Re^1$, которые для всех $t \in [0, T]$, $\mathbf{x} \in \Re^n$ имеют непрерывные частные производные:

$$\frac{\partial R}{\partial \mathbf{x}^{(i)}}(\mathbf{x}, t); \; i = 1, 2, \ldots, n.$$

Определим на множествах L и G_0 следующие операторы:

$$LR(\mathbf{x}, t) = \frac{\partial R}{\partial t}(\mathbf{x}, t) + \sum_{i=1}^n \mathbf{a}^{(i)}(\mathbf{x}, t) \frac{\partial R}{\partial \mathbf{x}^{(i)}}(\mathbf{x}, t) +$$

$$+ \frac{1}{2} \sum_{j=1}^m \sum_{l,i=1}^n \Sigma^{(lj)}(\mathbf{x}, t) \Sigma^{(ij)}(\mathbf{x}, t) \frac{\partial^2 R}{\partial \mathbf{x}^{(l)} \partial \mathbf{x}^{(i)}}(\mathbf{x}, t),$$

$$G_0^{(i)} R(\mathbf{x}, t) = \sum_{j=1}^n \Sigma^{(ji)}(\mathbf{x}, t) \frac{\partial R}{\partial \mathbf{x}^{(j)}}(\mathbf{x}, t); \; i = 1, \ldots, m.$$

Рассмотрим случайный процессс $\eta_s = R(\mathbf{x}_s, s)$, где $R(\mathbf{x}, s) : \Re^n \times [0, T] \to \Re^1$ или $\Re^n \times [0, T] \to \Re^n$ и $\mathbf{x}_t$ — решение стохастического дифференциального уравнения Ито (7.9).

Пусть выполнены достаточные условия существования решения стохастического дифференциального уравнения Ито (7.9) и $R(\mathbf{x},t) \in \mathrm{L}$; $LR(\mathbf{x}_t,t)$, $G_0^{(i)}R(\mathbf{x}_t,t) \in \mathrm{M}_2([0,T])$, $i=1,\ldots,m$. Тогда по формуле Ито для всех $s,t \in [0,T]$ таких, что $s \geq t$ с в. 1

$$R(\mathbf{x}_s,s) = R(\mathbf{x}_t,t) + \int\limits_t^s LR(\mathbf{x}_\tau,\tau)d\tau + \sum_{i=1}^m \int\limits_t^s G_0^{(i)}R(\mathbf{x}_\tau,\tau)d\mathbf{f}_\tau^{(i)}. \tag{7.15}$$

Стохастическая формула Тейлора (разложение Тейлора-Ито) может быть получена путем итеративного применения формулы (7.15) к случайному процессу $R(\mathbf{x}_s,s)$.

Обозначим

$$\mathrm{G}_{rk} = \{(\lambda_k,\ldots,\lambda_1) : r+1 \leq 2k-\lambda_1-\ldots-\lambda_k \leq 2r;$$

$$\lambda_l = 1 \text{ или } \lambda_l = 0; l=1,\ldots,k\},$$

$$\mathrm{E}_{qk} = \{(\lambda_k,\ldots,\lambda_1) :\ 2k-\lambda_1-\ldots-\lambda_k = q;$$

$$\lambda_l = 1 \text{ или } \lambda_l = 0; l=1,\ldots,k\},$$

$$\mathrm{M}_k = \{(\lambda_k,\ldots,\lambda_1) : \lambda_l = 1 \text{ или } \lambda_l = 0; l=1,\ldots,k\}.$$

$$J_{(\lambda_k\ldots\lambda_1)s,t}^{(i_k\ldots i_1)} = \int\limits_t^s \ldots \int\limits_t^{\tau_2} d\mathbf{w}_{\tau_1}^{(i_k)} \ldots d\mathbf{w}_{\tau_k}^{(i_1)} \tag{7.16}$$

для $k \geq 1$ и $J_{(\lambda_0\ldots\lambda_1)s,t}^{(i_0\ldots i_1)} \stackrel{\rm def}{=} 1$, где $\mathbf{w}_\tau^{(i)} = \mathbf{f}_\tau^{(i)}$ при $i=1,\ldots,m$ и $\mathbf{w}_\tau^{(0)} = \tau$.

Предположим, что функции $\mathbf{a}(\mathbf{x},t)\ :\ \Re^n \times [0,T] \to \Re^n$, $B(\mathbf{x},t)\ :\ \Re^n \times [0,T] \to \Re^{n\times m}$, $R(\mathbf{x},t)\ :\ \Re^n \times [0,T] \to \Re^1$ имеют гладкие частные производные любого фиксированного порядка.

Тогда для всех s,t таких, что $s>t$ с в. 1 [25]

$$R(\mathbf{x}_s,s) = R(\mathbf{x}_t,t) +$$

$$+\sum_{k=1}^r \sum_{(\lambda_k,\ldots,\lambda_1)\in\mathrm{M}_k} \sum_{i_1=\lambda_1}^{m\lambda_1} \ldots \sum_{i_k=\lambda_k}^{m\lambda_k} Q_{\lambda_l}^{(i_k)} \ldots Q_{\lambda_1}^{(i_1)} R(\mathbf{x}_t,t) \cdot J_{(\lambda_k\ldots\lambda_1)s,t}^{(i_k\ldots i_1)} + D_{r+1_{s,t}}, \tag{7.17}$$

где $D_{r+1_{s,t}}$ — остаточный член в интегральной форме [25], правая часть (7.17) существует в среднеквадратическом смысле, $\lambda_l = 1$ или $\lambda_l = 0$; $Q_{\lambda_l}^{(i_l)} = L$ и $i_l = 0$ для $\lambda_l = 0$; $Q_{\lambda_l}^{(i_l)} = G_0^{(i_l)}$ и $i_l = 1,\ldots,m$ при $\lambda_l = 1$; $l=1,\ldots,N$.

Если мы упорядочим члены разложения Тейлора–Ито по порядкам малости в среднеквадратическом смысле при $s \to t$, то с в. 1

$$R(\mathbf{x}_s,s) = R(\mathbf{x}_t,t) +$$

$$+\sum_{q,k=1}^{r}\sum_{(\lambda_k,\ldots,\lambda_1)\in \mathrm{E}_{qk}}\sum_{i_1=\lambda_1}^{m\lambda_1}\ldots\sum_{i_k=\lambda_k}^{m\lambda_k}Q_{\lambda_l}^{(i_k)}\ldots Q_{\lambda_1}^{(i_1)}R(\mathbf{x}_t,t)\cdot J_{(\lambda_k\ldots\lambda_1)s,t}^{(i_k\ldots i_1)}+H_{r+1_{s,t}}, \quad (7.18)$$

где

$$H_{r+1_{s,t}}=\sum_{k=1}^{r}\sum_{(\lambda_k,\ldots,\lambda_1)\in \mathrm{G}_{rk}}\sum_{i_1=\lambda_1}^{m\lambda_1}\ldots\sum_{i_k=\lambda_k}^{m\lambda_k}Q_{\lambda_l}^{(i_k)}\ldots Q_{\lambda_1}^{(i_1)}R(\mathbf{x}_t,t)\cdot J_{(\lambda_k\ldots\lambda_1)s,t}^{(i_k\ldots i_1)}+$$

$$+D_{r+1_{s,t}}.$$

Используя стандартные соотношения между стохастическими интегралами Стратоновича и Ито можно переписать разложение Тейлора–Ито в терминах повторных стохастических интегралов Стратоновича [23], [25]. В этом случае стохастическая формула Тейлора называется разложением Тейлора–Стратоновича.

Предположим, что функции $\mathbf{a}(\mathbf{x},t)\ :\ \Re^n\times[0,T]\rightarrow\Re^n$, $B(\mathbf{x},t)\ :\ \Re^n\times[0,T]\rightarrow\Re^{n\times m}$, $R(\mathbf{x},t)\ :\ \Re^n\times[0,T]\rightarrow\Re^1$ имеют гладкие частные производные любого фиксированного порядка.

Тогда для всех s,t таких, что $s>t$ с в. 1 [23], [25]

$$R(\mathbf{x}_s,s)=R(\mathbf{x}_t,t)+$$

$$+\sum_{k=1}^{r}\sum_{(\lambda_k,\ldots,\lambda_1)\in \mathrm{M}_k}\sum_{i_1=\lambda_1}^{m\lambda_1}\ldots\sum_{i_k=\lambda_k}^{m\lambda_k}D_{\lambda_l}^{(i_k)}\ldots D_{\lambda_1}^{(i_1)}R(\mathbf{x}_t,t)\cdot J_{(\lambda_k\ldots\lambda_1)s,t}^{*(i_k\ldots i_1)}+D_{r+1_{s,t}}, \quad (7.19)$$

где $D_{r+1_{s,t}}$ — остаточный член в интегральной форме [23], [25], правая часть (7.19) существует в среднеквадратическом смысле, $\lambda_l=1$ или $\lambda_l=0$; $D_{\lambda_l}^{(i_l)}=L-\frac{1}{2}\sum\limits_{j=1}^{m}G_0^{(j)}G_0^{(j)}$ и $i_l=0$ для $\lambda_l=0$; $D_{\lambda_l}^{(i_l)}=G_0^{(i_l)}$ и $i_l=1,\ldots,m$ при $\lambda_l=1$; $l=1,\ldots,N$;

$$J_{(\lambda_k\ldots\lambda_1)s,t}^{*(i_k\ldots i_1)}=\int\limits_t^{*s}\ldots\int\limits_t^{*\tau_2}d\mathbf{w}_{\tau_1}^{(i_k)}\ldots d\mathbf{w}_{\tau_k}^{(i_1)} \text{ при } k\ge 1, \quad (7.20)$$

$\mathbf{w}_\tau^{(i)}=\mathbf{f}_\tau^{(i)}$ при $i=1,\ldots,m$ и $\mathbf{w}_\tau^{(0)}=\tau$.

Если мы упорядочим члены разложения Тейлора–Стратоновича по порядкам малости в среднеквадратическом смысле при $s\rightarrow t$, то с в. 1

$$R(\mathbf{x}_s,s)=R(\mathbf{x}_t,t)+$$

$$+\sum_{q,k=1}^{r}\sum_{(\lambda_k,\ldots,\lambda_1)\in \mathrm{E}_{qk}}\sum_{i_1=\lambda_1}^{m\lambda_1}\ldots\sum_{i_k=\lambda_k}^{m\lambda_k}D_{\lambda_l}^{(i_k)}\ldots D_{\lambda_1}^{(i_1)}R(\mathbf{x}_t,t)\cdot J_{(\lambda_k\ldots\lambda_1)s,t}^{*(i_k\ldots i_1)}+H_{r+1_{s,t}}, \quad (7.21)$$

где

$$H_{r+1_{s,t}} = \sum_{k=1}^{r} \sum_{(\lambda_k,\ldots,\lambda_1)\in\mathrm{G}_{rk}} \sum_{i_1=\lambda_1}^{m\lambda_1} \ldots \sum_{i_k=\lambda_k}^{m\lambda_k} D_{\lambda_l}^{(i_k)} \ldots D_{\lambda_1}^{(i_1)} R(\mathbf{x}_t, t) \cdot J^{*(i_k\ldots i_1)}_{(\lambda_k\ldots\lambda_1)s,t} +$$

$$+ D_{r+1_{s,t}}.$$

7.9 Унифицированные разложения Тейлора–Ито и Тейлора–Стратоновича

Рассмотрим стохастическое дифференциальное уравнение Ито (7.9) и предположим, что выполнены условия существования его решения.

Пусть функции $\mathbf{a}(\mathbf{x}, t) : \ \Re^n \times [0, T] \to \Re^n$, $B(\mathbf{x}, t) : \ \Re^n \times [0, T] \to \Re^{n\times m}$, $R(\mathbf{x}, t) : \ \Re^n \times [0, T] \to \Re^1$ имеют гладкие частные производные любого фиксированного порядка.

С помощью итеративного применения формулы Ито к процессу $R(\mathbf{x}_t, t)$, где $\mathbf{x}_t$ — решение уравнения (7.9), и специальных преобразований, основанных на замене порядка интегрирования в повторных стохастических интегралах Ито [32], [33], [43], [48] в [43], [44], [47] – [49] получены следующие унифицированные разложения Тйлора–Ито и Тейлора–Стратоновича (для получения унифицированных разложений Тейлора–Стратоновича в [44], [48] также использовались стандартные соотношения между повторными стохастическими интегралами Ито и Стратоновича):

$$R(\mathbf{x}_s, s) = R(\mathbf{x}_t, t) + \sum_{q=1}^{r} \sum_{(k,j,l_1,\ldots,l_k)\in\mathrm{A}_q} \frac{(s-t)^j}{j!} \times$$

$$\times \sum_{i_1,\ldots,i_k=1}^{m} L^j G_{l_1}^{(i_1)} \ldots G_{l_k}^{(i_k)} R(\mathbf{x}_t, t) J^{(i_1\ldots i_k)}_{l_1\ldots l_{k\,s,t}} + D_{r+1_{s,t}} \tag{7.22}$$

(первое унифицированное разложение Тейлора–Ито),

$$R(\mathbf{x}_s, s) = R(\mathbf{x}_t, t) + \sum_{q=1}^{r} \sum_{(k,j,l_1,\ldots,l_k)\in\mathrm{A}_q} \frac{(s-t)^j}{j!} \times$$

$$\times \sum_{i_1,\ldots,i_k=1}^{m} G_{l_1}^{(i_1)} \ldots G_{l_k}^{(i_k)} L^j R(\mathbf{x}_t, t) I^{(i_1\ldots i_k)}_{l_1\ldots l_{k\,s,t}} + D_{r+1_{s,t}} \tag{7.23}$$

(второе унифицированное разложение Тейлора–Ито),

$$R(\mathbf{x}_s, s) = R(\mathbf{x}_t, t) + \sum_{q=1}^{r} \sum_{(k,j,l_1,\ldots,l_k)\in\mathrm{A}_q} \frac{(s-t)^j}{j!} \times$$

$$\times \sum_{i_1,\ldots,i_k=1}^{m} \bar{G}_{l_1}^{(i_1)} \ldots \bar{G}_{l_k}^{(i_k)} \bar{L}^j R(\mathbf{x}_t,t) I^{*(i_1\ldots i_k)}_{l_1\ldots l_k s,t} + D_{r+1_{s,t}} \tag{7.24}$$

(первое унифицированное разложение Тейлора–Стратоновича),

$$R(\mathbf{x}_s,s) = R(\mathbf{x}_t,t) + \sum_{q=1}^{r} \sum_{(k,j,l_1,\ldots,l_k)\in \mathrm{A}_q} \frac{(s-t)^j}{j!} \times$$

$$\times \sum_{i_1,\ldots,i_k=1}^{m} \bar{L}^j \bar{G}_{l_1}^{(i_1)} \ldots \bar{G}_{l_k}^{(i_k)} R(\mathbf{x}_t,t) J^{*(i_1\ldots i_k)}_{l_1\ldots l_k s,t} + D_{r+1_{s,t}} \tag{7.25}$$

(второе унифицированное разложение Тейлора–Стратоновича),

где

$$I^{(i_1\ldots i_k)}_{l_1\ldots l_k s,t} = \int\limits_t^s (t-t_k)^{l_k} \ldots \int\limits_t^{t_2} (t-t_1)^{l_1} d\mathbf{f}^{(i_1)}_{t_1} \ldots d\mathbf{f}^{(i_k)}_{t_k}, \tag{7.26}$$

$$J^{(i_1\ldots i_k)}_{l_1\ldots l_k s,t} = \int\limits_t^s (s-t_k)^{l_k} \ldots \int\limits_t^{t_2} (s-t_1)^{l_1} d\mathbf{f}^{(i_1)}_{t_1} \ldots d\mathbf{f}^{(i_k)}_{t_k}, \tag{7.27}$$

$$I^{*(i_1\ldots i_k)}_{l_1\ldots l_k s,t} = \int\limits_t^{*s} (t-t_k)^{l_k} \ldots \int\limits_t^{*t_2} (t-t_1)^{l_1} d\mathbf{f}^{(i_1)}_{t_1} \ldots d\mathbf{f}^{(i_k)}_{t_k}, \tag{7.28}$$

$$J^{*(i_1\ldots i_k)}_{l_1\ldots l_k s,t} = \int\limits_t^{*s} (s-t_k)^{l_k} \ldots \int\limits_t^{*t_2} (s-t_1)^{l_1} d\mathbf{f}^{(i_1)}_{t_1} \ldots d\mathbf{f}^{(i_k)}_{t_k}; \tag{7.29}$$

$l_1,\ldots,l_k = 0,\ 1,\ldots;\ k=1,\ 2,\ldots;\ i_1,\ldots,i_k = 1,\ldots,m$; эти интегралы при $k=0$ полагаются равными 1;

$$\mathrm{A}_q = \left\{(k,j,l_1,\ldots,l_k) : k+j+\sum_{p=1}^{k} l_p = q;\ k,j,l_1,\ldots,l_k = 0,1,\ldots\right\},$$

$$L^j \stackrel{\text{def}}{=} \begin{cases} \underbrace{L\ldots L}_{j} & \text{при } j=1,2,\ldots \\ \cdot & \text{при } j=0 \end{cases},\ \bar{L}^j \stackrel{\text{def}}{=} \begin{cases} \underbrace{\bar{L}\ldots \bar{L}}_{j} & \text{при } j=1,2,\ldots \\ \cdot & \text{при } j=0 \end{cases},$$

$$G_p^{(i)} \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{p}\left(G_{p-1}^{(i)} L - L G_{p-1}^{(i)}\right),\ \bar{G}_p^{(i)} \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{p}\left(\bar{G}_{p-1}^{(i)} \bar{L} - \bar{L} \bar{G}_{p-1}^{(i)}\right);$$

$p=1,2,\ldots; i=1,\ldots,m$; $\bar{L} = L - \frac{1}{2}\sum\limits_{i=1}^{m} G_0^{(i)} G_0^{(i)},\ \bar{G}_0^{(i)} = G_0^{(i)}$; операторы L и $G_0^{(i)}$; $i=1,\ldots,m$ определены в предыдущем разделе; $D_{r+1_{s,t}}$ — остаточный член в интегральной форме [43] – [45], [48], [49].

В [43] – [45], [48], [49] также рассмотрены упорядоченные по порядкам малости в среднеквадратическом смысле при $t \to s$ унифицированные разложения Тейлора–Ито и Тейлора–Стратоновича В этом случае суммирование в унифицированных разложениях Тейлора–Ито и Тейлора–Стратоновича ведется по множестам

$$\mathrm{D}_q = \{(k, j, l_1, \ldots, l_k) : k + 2(j + l_1 + \ldots + l_k) = q;\ k, j, l_1, \ldots, l_k = 0, 1, \ldots\},$$

вместо множеств

$$\mathrm{A}_q = \{(k, j, l_1, \ldots, l_k) : k + j + \sum_{p=1}^{k} l_p = q;\ k, j, l_1, \ldots, l_k = 0, 1, \ldots\}.$$

Заметим, что усеченные унифицированные разложения Тейлора–Ито и Тейлора–Стратоновича содержат меньшее количество различных повторных стохастических интегралов (притом большая их часть имеет меньшую кратность) в сравнении с классическими разложениями Тейлора–Ито и Тейлора–Стратоновича [23].

Нетрудно заметить, что стохастические интегралы из семейства (7.16) связаны между собой линейными соотношениями Тоже самое можно отметить и для семейства (7.20)).

Однако, стохастические интегралы из семейств (7.26)–(7.29) не могут быть связаны между собой линейными соотношениями. Поэтому мы называем семейства (7.26)–(7.29) *стохастическими базисами.*

Будем называть *рангами стохастических базисов* (7.26)–(7.29) числа $\mathrm{rank}_{\mathrm{A}}(r)$ и $\mathrm{rank}_{\mathrm{D}}(r)$ различных повторных стохастических интегралов, которые входят в семейсва (7.26)–(7.29), когда суммирование в стохастических разложениях ведется по множествам A_q; $q = 1, \ldots, r$ и D_q; $q = 1, \ldots, r$ соответственно; здесь r — фиксированное натуральное число.

Для начала рассмотрим несколько примеров.

Пусть суммирование в унифицированных разложениях Тейлора–Ито и Тейлора–Стратоновича ведется с помощью множеств

$$\mathrm{D}_q = \{(k, j, l_1, \ldots, l_k) : k + 2(j + l_1 + \ldots + l_k) = q;\ k, j, l_1, \ldots, l_k = 0, 1, \ldots\}.$$

Нетрудно видеть, что усеченные унифицированные разложения Тейлора–Ито, в которых суммирование ведется по множествам D_q при $r = 3$ содержит 4 ($\mathrm{rank}_{\mathrm{D}}(3) = 4$) различных повторных стохастических интегралов: $I_{0_{s,t}}^{(i_1)}$, $I_{00_{s,t}}^{(i_2 i_1)}$, $I_{1_{s,t}}^{(i_1)}$, $I_{000_{s,t}}^{(i_3 i_2 i_1)}$. Аналогичное усеченное классическое разложение Тейлора–Ито [25] содержит 5 различных повторных стохастических интегралов: $J_{(1)s,t}^{(i_1)}$, $J_{(11)s,t}^{(i_2 i_1)}$, $J_{(10)s,t}^{(i_2 0)}$, $J_{(01)s,t}^{(0 i_1)}$, $J_{(111)s,t}^{(i_3 i_2 i_1)}$. Для $r = 4$ мы имеем 7 ($\mathrm{rank}_{\mathrm{D}}(4) = 7$) интегралов: $I_{0_{s,t}}^{(i_1)}$, $I_{00_{s,t}}^{(i_2 i_1)}$, $I_{1_{s,t}}^{(i_1)}$, $I_{000_{s,t}}^{(i_3 i_2 i_1)}$, $I_{01_{s,t}}^{(i_2 i_1)}$, $I_{10_{s,t}}^{(i_2 i_1)}$, $I_{0000_{s,t}}^{(i_4 i_3 i_2 i_1)}$

Таблица 7.1. Числа $\operatorname{rank}_{\mathcal{A}}(r)$, $n_{\mathcal{M}}(r)$, $f(r) = n_{\mathcal{M}}(r)/\operatorname{rank}_{\mathcal{A}}(r)$

r	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$\operatorname{rank}_{\mathcal{A}}(r)$	1	3	7	15	31	63	127	255	511	1023
$n_{\mathcal{M}}(r)$	1	4	11	26	57	120	247	502	1013	2036
$f(r)$	1	1.3333	1.5714	1.7333	1.8387	1.9048	1.9449	1.9686	1.9824	1.9902

против 9 интегралов: $J_{(1)s,t}^{(i_1)}$, $J_{(11)s,t}^{(i_2 i_1)}$, $J_{(10)s,t}^{(i_2 0)}$, $J_{(01)s,t}^{(0 i_1)}$, $J_{(111)s,t}^{(i_3 i_2 i_1)}$, $J_{(101)s,t}^{(i_3 0 i_1)}$, $J_{(110)s,t}^{(i_3 i_2 0)}$, $J_{(011)s,t}^{(0 i_2 i_1)}$, $J_{(1111)s,t}^{(i_4 i_3 i_2 i_1)}$. Для $r = 5$ ($\operatorname{rank}_{\mathrm{D}}(5) = 12$) мы получаем 12 интегралов против 17 интегралов, а для $r = 6$ и $r = 7$ мы имеем 20 против 29 и 33 против 50 интегралов соответственно.

Аналогичные результаты мы получим при сравнении унифицированных разложений Тейлора–Стратоновича с их классическими аналогами [25].

Отметим, что суммирование по множествам D_q обычно используется при конструировании сильных (построенных в соответствии со среднеквадратическим критерием сходимости) численных методов для стохастических дифференциальных уравнений Ито [24], [25], [48].

Суммирование по множествам A_q обычно применяется при построении слабых (построенных в соответствии со слабым критерием сходимости) численных методов для стохастических дифференциальных уравнений Ито [24], [25].

Например, $\operatorname{rank}_{\mathrm{A}}(4) = 15$, в то время, как общее число различных повторных стохастических интегралов, входящих в классические разложения Тейлора–Ито [23] при $r = 4$, равно 26.

Нетрудно проверить, что $\operatorname{rank}_{\mathrm{A}}(r) = 2^r - 1$ [48].

Обозначим через $n_{\mathrm{M}}(r)$ общее число различных повторных стохастических интегралов, входящих в классическое разложение Тейлора–Ито (7.17), где суммирование ведется по множеству $\bigcup\limits_{k=1}^{r} \mathrm{M}_k$.

Можно показать [47], что $n_{\mathrm{M}}(r) = 2(2^r - 1) - r$.

Это означает, что $\lim\limits_{r\to\infty} n_{\mathrm{M}}(r)/\operatorname{rank}_{\mathrm{A}}(r) = 2$.

В таблице 7.1 содержатся числа $\operatorname{rank}_{\mathrm{A}}(r)$, $n_{\mathrm{M}}(r)$, $f(r) = n_{\mathrm{M}}(r)/\operatorname{rank}_{\mathrm{A}}(r)$ для различных значений r.

Таблица 7.2. Числа $\mathrm{rank}_{\mathcal{D}}(r)$, $n_{\mathcal{E}}(r)$, $g(r) = n_{\mathcal{E}}(r)/\mathrm{rank}_{\mathcal{D}}(r)$

r	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$\mathrm{rank}_{\mathcal{D}}(r)$	1	2	4	7	12	20	33	54	88	143
$n_{\mathcal{E}}(r)$	1	2	5	9	17	29	50	83	138	261
$g(r)$	1	1	1.2500	1.2857	1.4167	1.4500	1.5152	1.5370	1.5682	1.8252

В [47] доказано, что

$$\mathrm{rank}_{\mathrm{D}}(r) = \left[\begin{array}{ll} \sum\limits_{s=0}^{r-1} \sum\limits_{l=s}^{\frac{r-1}{2}+[\frac{s}{2}]} C_l^s & \text{при } r = 1,\ 3,\ 5,\dots \\ \sum\limits_{s=0}^{r-1} \sum\limits_{l=s}^{\frac{r}{2}-1+[\frac{s+1}{2}]} C_l^s & \text{при } r = 2,\ 4,\ 6,\dots \end{array}\right.,$$

где $[x]$ — целая часть числа x, а C_n^m — биномиальный коэффициент.

Обозначим через $n_{\mathrm{E}}(r)$ число различных повторных стохастических интегралов, входящих в классическое разложение Тейлора–Ито (7.18) [23], где суммирование ведется по множеству $\bigcup\limits_{q,k=1}^{r} \mathrm{E}_{qk}$.

В [45] доказано, что

$$n_{\mathrm{E}}(r) = \sum_{s=1}^{r} \sum_{l=0}^{[\frac{r-s}{2}]} C^s_{[\frac{r-s}{2}]+s-l}, \tag{7.30}$$

где $[x]$ — целая часть числа x, а C_n^m — биномиальный коэффициент.

В таблице 7.2 содержатся числа $\mathrm{rank}_{\mathrm{D}}(r)$, $n_{\mathrm{E}}(r)$, $g(r) = n_{\mathrm{E}}(r)/\mathrm{rank}_{\mathrm{D}}(r)$ для различных значений r.

Библиография

[1] *Гихман И.И., Скороход А.В.* Введение в теорию случайных процессов. М.: Наука, 1977. 660 с.

[2] *Гихман И.И., Скороход А.В.* Стохастические дифференциальные уравнения. Киев: Наукова думка, 1968. 354 с.

[3] *Гихман И.И., Скороход А.В.* Теория случайных процессов. Т.3. М.: Наука, 1975. 469 с.

[4] *Гихман И.И., Скороход А.В.* Стохастические дифференциальные уравнения и их приложения. Киев.: Наукова думка, 1982. 612 с.

[5] *Королюк В.С., Портенко Н.И., Скороход А.В., Турбин А.Ф.* Справочник по теории вероятностей и математической статистике. М.: Наука, 1985. 640 с.

[6] *Ермаков С.М., Михайлов Г.А.* Курс статистического моделирования. М.: Наука, 1976. 320 с.

[7] *Ширяев А.Н.* Основы стохастической финансовой математики: В 2-х т. М.: Фазис, 1998. Т. 1. 512 с. Т. 2. 544 с.

[8] *Merton R.C.* Option pricing when underlying stock returns and discontinuous // J. Financial Economics. 1976. N 3. P. 125–144.

[9] *Merton R.C.* Continuous-time finance. Oxford; N.Y.: Blackwell, 1990. 453 p.

[10] *Hull J.* Options, futures and other derivatives securities. N. Y.: J.Willey and Sons, 1993. 368 p.

[11] *Bachelier L.* Théorie de la spéculation // Ann. Sci. Ecol. Norm. Sup. Ser.3. 1900. Vol. 17. P. 21–86.

[12] *Arato M.* Linear stochastic systems with constant coefficients. A statistical approach. Berlin; Heidelberg; N. Y.: Springer-Verlag, 1982. 289 p.

[13] *Орлов А.* Служба Широты. М: Изд-во АН СССР, 1958. 126 с.

[14] *Lotka A.J.* Undamped oscillations derived from the law of mass action // J. Amer. Chem. Soc. 1920. Vol. 42. N 8. P. 1595–1599.

[15] *Вольтерра В.* Математическая теория борьбы за существование. М: Наука, 1976. 286 с.

[16] *Белоусов Б.П.* Периодически действующая реакция и ее механизм // Сб. рефератов по радиационной медицине. М: Медгиз, 1959. С. 145–148.

[17] *Жаботинский А.М.* Концентрационные автоколебания. М: Наука, 1974. 178 с.

[18] *Романовский Ю.М., Степанова Н.В., Чернавский Д.С.* Математическая биофизика. М: Наука, 1984. 304 с.

[19] *Obuhov A.M.* Description of turbulence in Lagrangian variables // Adv. Geophis. 1959. N 3. P. 113–115.

[20] *Wolf J.R.* Neue Untersuchungen über die Periode der Sonnenflecken und ihre Bedeutung // Mit. Naturforsch. Ges. Bern. 1852. Bd 255. S. 249–270.

[21] *Слуцкий Е.Е.* О 11-летней периодичности солнечных пятен // Докл. АН СССР. 1935. Т. 4. N 9. Вып.1–2. С. 35–38.

[22] *Ватанабэ С., Икэда Н.* Стохастические дифференциальные уравнения и диффузионные процессы. М.: Наука, 1986. 445 с.

[23] *Kloeden P.E., Platen E.* The Stratonovich and Ito–Taylor expansions // Math. Nachr. 1991. Bd 151. S. 33–50.

[24] *Мильштейн Г.Н.* Численное интегрирование стохастических дифференциальных уравнений. Свердловск: Изд-во Уральск. ун-та, 1988. 225 с.

[25] *Kloeden P.E., Platen E.* Numerical solution of stochastic differential equations. Berlin: Springer-Verlag, 1992. 632 p.

[26] *Milstein G.N., Tretyakov M.V.* Stochastic numerics for mathematical physics. Berlin: Springer-Verlag, 2004. 596 p.;

[27] *Kloeden P.E., Platen E., Wright I.W.* The approximation of multiple stochastic integrals // Stoch. Anal. Appl. 1992. Vol. 10. N 4. P. 431–441.

[28] *Скороход А.В.* Случайные процессы с независимыми приращениями. М.: Наука, 1964. 280 с.

[29] *Гобсон Е.В.* Теория сферических и эллипсоидальных функций. М.: ИЛ, 1952. 476 с.

[30] *Chung K.L., Williams R.J.* Introduction to stochastic integration. Progress in probubility and stochastics. Vol. 4 / Ed. P. Huber, M. Rosenblatt. Boston; Basel; Stuttgart: Birkhäuser. 1983. 152 p.

[31] *Аверина Т.А., Артемьев С.С.* Новое семейство численных методов для решения стохастических дифференциальных уравнений // Докл. АН СССР. 1986. Т. 288. N 4. С. 777–780.

[32] *Кузнецов Д.Ф.* Теоремы о замене порядка интегрирования в повторных стохастических интегралах. 1997. 31 с. Деп. в ВИНИТИ. 3607-В97. 10.12.97.

[33] *Кузнецов Д.Ф.* Некоторые вопросы теории численного решения стохастических дифференциальных уравнений Ито. СПб.: Изд-во СПбГТУ. 1998. 203 с.

[34] *Кузнецов Д.Ф.* Применение методов аппроксимации повторных стохастических интегралов Стратоновича и Ито к численному моделированию управляемых стохастических систем // Проблемы управления и информатики. 1999. N 4. С. 91–108.

[35] *Кузнецов Д.Ф.* Разложение повторных стохастических интегралов Стратоновича, основанное на кратных рядах Фурье // Зап. науч. сем. ПОМИ им. В. А. Стеклова. 1999. Т. 260. С. 164–185.

[36] *Кузнецов Д.Ф.* К проблеме численного моделирования стохастических систем // Вестн. молодых ученых. Сер. прикл. мат. и мех. 1999. N 1. С. 20–32.

[37] *Кузнецов Д.Ф.* Применение полиномов Лежандра к среднеквадратической аппроксимации решений стохастических дифференциальных уравнений // Проблемы управления и информатики. 2000. N 5. С. 84–104.

[38] *Кузнецов Д.Ф.* Численное моделирование стохастических дифференциальных уравнений и стохастических интегралов. СПб.: Наука, 1999. 459 с.

[39] *Кузнецов Д.Ф.* Численное интегрирование стохастических дифференциальных уравнений. СПб.: Издательство С. - Петербургского государственного университета, 2001. 712 с.

[40] *Кузнецов Д.Ф.* Новые представления явных одношаговых численных методов для стохастических дифференциальных уравнений со скачкообразной компонентой // Журнал вычислительной математики и математической физики. Т.41. N6. 2001. С.922–937.

[41] *Кузнецов Д.Ф.* Новые представления разложения Тейлора-Стратоновича // Зап. науч. сем. ПОМИ им. В. А. Стеклова. 2001. Т. 278. С. 141–158.

[42] *Кузнецов Д.Ф.* Комбинированный метод сильной аппроксимации повторных стохастических интегралов // Проблемы управления и информатики. 2002. N 4. С. 141–147.

[43] *Кузнецов Д.Ф.* Численное интегрирование стохастических дифференциальных уравнений. 2. СПб.: Издательство Политехнического университета, 2006. 764 с.

[44] *Кузнецов Д.Ф.* Новые представления разложения Тейлора-Стратоновича // Зап. науч. сем. ПОМИ им. В. А. Стеклова. 2001. Т. 278. С. 141–158.

[45] *Кузнецов Д.Ф.* Стохастические дифференциальные уравнения: теория и практика численного решения. СПб.: Издательство Политехнического университета, 2007. 777 с. (первое издание).

[46] *Кузнецов Д.Ф.* Стохастические дифференциальные уравнения: теория и практика численного решения. СПб.: Издательство Политехнического университета, 2007. 800 с. (второе издание).

[47] *Кузнецов Д.Ф.* Стохастические дифференциальные уравнения: теория и практика численного решения. СПб.: Издательство Политехнического университета, 2009. 800 с. (третье издание).

[48] *Кузнецов Д.Ф.* Стохастические дифференциальные уравнения: теория и практика численного решения. СПб.: Издательство Политехнического университета, 2010. 816 с. (четвертое издание).

[49] *Кульчицкий О.Ю., Кузнецов Д.Ф.* Унифицированное разложение Тейлора–Ито // Зап. науч. сем. ПОМИ им. В. А. Стеклова. 1997. Т. 244. С. 186–204.

[50] *Кульчицкий О.Ю., Кузнецов Д.Ф.* Аппроксимация кратных стохастических интегралов Ито. 1994. Деп. в ВИНИТИ. 1678-В94.