

Министерство общего и профессионального образования
Российской Федерации

САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКИЙ
ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ

МЕХАНИКА И ПРОЦЕССЫ УПРАВЛЕНИЯ

Труды СПбГТУ

№ 467

Санкт-Петербург
Издательство СПбГТУ
1997

Д.Г.КИРЬЯН, Г.В.КИРЬЯН

РЕЗОНАНСНЫЙ МЕТОД В ИССЛЕДОВАНИИ ВРЕМЕННЫХ РЯДОВ

Рассматривается новый метод высокоточного спектрального анализа и его свойства. Эта статья является развитием исследований, изложенных в работе "Резонансный метод исследования нерегулярных n -мерных числовых последовательностей" [1], [2]. Предлагаемый метод спектрального анализа обладает высокой разрешающей способностью по частоте при конечном объеме выборки, позволяет определять начальные фазы и амплитуды гармонических составляющих с заданной наперед точностью, позволяет выявлять и исключать ложные спектральные линии (духи).

Что такое временной ряд? Это не что иное, как последовательность наблюдений некоторого объекта или явления, повторяющихся с некоторым интервалом времени, выраженных в числовой форме. Временной интервал может быть регулярным и нерегулярным. В первом случае регулярность определяется точностью прибора измеряющего временные интервалы. Во втором случае наблюдатель или регистрирующая аппаратура ведут регистрацию с неравными интервалами времени.

Какую информацию можно получить, исследуя временной ряд? Среди главных задач можно отметить следующие: выявление периодичностей; интерполяция или восстановление пропущенных наблюдений на основе всей имеющейся информации (построение модели с учетом фидики явления); экстраполяция (прогноз) за пределы интервала наблюдений.

Обработка и анализ временных рядов имеют долгую историю. Авторы не ставят перед собой задачу проследить историю развития методов и алгоритмов анализа временных рядов. Отметим лишь некоторые шаги в этой области и то, что эта задача до сих пор не решена до конца.

Впервые ряд, который сейчас носит имя Фурье, появился в работах J. Fourier (1807), посвященных исследованию задач теплопроводности. Он предложил представлять функцию $f(x)$, заданной на $(0, 2\pi)$, тригонометрическим рядом:

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos kx + b_k \sin kx)$$

с коэффициентами

$$a_k = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \cos kx \, dx ; \quad b_k = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \sin kx \, dx ;$$

В 1965 году опубликован алгоритм быстрого преобразования Фурье (БПФ), разработку которого обычно связывают с именами Cooley J.W. и Tukey J.W.

В дальнейшем появилось множество различных методов и процедур, основанных на статистических оценках, на выборе оптимальных окон, на поиске передаточных функций и так далее. Современные методы спектрального анализа основаны на построении модели, адекватной исследуемому временному ряду. Общая тенденция улучшения характеристик методов проявляется в улучшении разрешения по частоте и в уменьшении влияния боковых лепестков. Однако для существующих сегодня методов спектрального анализа характерны следующие ограничения: невозможность анализа нерегулярных рядов; низкая разрешающая способность по частоте при конечном объеме выборки; привязка к длине исследуемого ряда; невозможность определения истинной амплитуды и начальной фазы гармонических составляющих. К недостатку методов также можно отнести некорректность спектрального анализа (разложение по гармоникам) рядов, отражающих негармонические процессы (почти периодические, а также процессы с нечеткими периодами).

Без точного знания начальных фаз, частот и амплитуд гармонических составляющих исследуемого процесса невозможно решить задачу прогноза и идентификации. Указанные выше ограничения методов анализа послужили толчком для выработки концепции нового метода спектрального анализа, а затем и разработку алгоритма. Авторы назвали этот метод: *"резонансный метод спектрального анализа"*. В основе его используется явление резонанса. С помощью эталонного временного ряда (по аналогии с камертоном) проводится зондирование исследуемого временного ряда. Перебирая частоты эталонного ряда, мы следим за величиной отклика исследуемого ряда, пока не будет найдена максимальная величина. Предлагаемый метод свободен от недостатков и ограничений, присущих классическим методам спектрального анализа. Искомые частоты могут быть произвольными и некратными между собой. Частотное разрешение может быть сколь угодно высоким и не зависеть от длины исследуемого временного ряда. На базисные функции не накладываются требования ортогональности. Эти функции выбираются в зависимости от особенностей природы исследуемого явления, информация о котором отображена во временном ряду. Исследуемый ряд, который в большинстве случаев представляет собой нерегулярную по времени последовательность измерений, может теперь анализироваться без применения методов регуляризации. Кроме того, этот метод позволяет выявлять и исключать ложные спектральные линии (духи).

Основные соотношения

Рассмотрим алгоритм резонансного метода, построенного на простейших базисных функциях, например $\sin(\omega t)$. Предполагаем, что

реальный исследуемый процесс (временной ряд) можно представить в виде тригонометрического ряда, состоящего из n гармоник:

$$f(t) = \sum_{i=1}^n A_i \sin(\omega_i t + \varphi_i), \quad \omega_i = 2\pi/T_i, \quad (1)$$

здесь n — число гармоник; A_i — амплитуда i -й гармоники; T_i — период i -й гармоники; ω_i — частота i -й гармоники; φ_i — начальная фаза i -й гармоники.

Частоты ω_i считаем заданными, и начальные значения этих частот не имеют принципиального значения, главное — чтобы $\omega_i \neq \omega_j$ для любых комбинаций i и j .

Для определения неизвестных параметров A_i и φ_i , соответствующих заданному набору частот ω_i , строим функционал

$$J = \sum_{k=1}^m \left(f(t_k) - f_k \right)^2, \quad (2)$$

где f_k , $k = \overline{1, m}$ — значения отсчетов исследуемого временного ряда. Функционал (2) с учетом (1) принимает вид

$$J = \sum_{k=1}^m \left[\sum_{i=1}^n \left(a_i \sin(\omega_i t_k) + b_i \cos(\omega_i t_k) \right) - f_k \right]^2, \quad (3)$$

где $a_i = A_i \cos \varphi_i$; $b_i = A_i \sin \varphi_i$. Тогда требование минимальности функционала

сводится к решению системы линейных алгебраических уравнений размерности $2n$ относительно переменных a_i, b_i :

$$\sum_{i=1}^n H_{ij} \cdot \begin{bmatrix} a_i \\ b_i \end{bmatrix} = F_j, \quad j = \overline{1, n}, \quad (5)$$

где

$$H_{ij} = \begin{bmatrix} h_{11}(i, j) & h_{12}(i, j) \\ h_{21}(i, j) & h_{22}(i, j) \end{bmatrix}, \quad (6)$$

$$h_{11}(i, j) = \sum_{k=1}^m \sin \omega_i t_k \sin \omega_j t_k, \quad h_{12}(i, j) = \sum_{k=1}^m \cos \omega_i t_k \sin \omega_j t_k, \quad (7)$$

$$h_{21}(i, j) = \sum_{k=1}^m \sin \omega_i t_k \cos \omega_j t_k, \quad h_{22}(i, j) = \sum_{k=1}^m \cos \omega_i t_k \cos \omega_j t_k.$$

$$h_{12}(i, j) \neq h_{21}(i, j), \quad (8)$$

$$F_j = \begin{bmatrix} \sum_{k=1}^m f_k \sin \omega_j t_k \\ \sum_{k=1}^m f_k \cos \omega_j t_k \end{bmatrix} \quad (9)$$

Решая (5), получаем $a_i, b_i, i = \overline{1, n}$ и далее определяем амплитуды A_i и начальные фазы φ_i при заданном наборе частот (периодов).

Используя метод наименьших квадратов, получаем недостающие параметры для построения пробного или зондирующего ряда. Построив пробный ряд, мы должны оценить, насколько точно он соответствует реальному временному ряду. Необходимую оценку дает коэффициент корреляции между двумя рядами – пробным и исследуемым:

$$R_{\{x,y\}} = \frac{\sum_{i=1}^m x_i y_i - m \bar{x} \bar{y}}{\sqrt{\left(\sum_{i=1}^m x_i^2 - m \bar{x}^2 \right) \left(\sum_{i=1}^m y_i^2 - m \bar{y}^2 \right)}}, \quad (10)$$

$$\bar{x} = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m x_i, \quad \bar{y} = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m y_i,$$

где x_i — i -й элемент пробного ряда, а y_i — i -й элемент исследуемого ряда. Следует отметить, что коэффициент корреляции независимых величин равен нулю. Если он отличен от нуля, то своей величиной характеризует не только наличие, но и силу связи между x и y . Чем больше абсолютная величина коэффициента корреляции, тем сильнее связь между x и y . Максимальная корреляция соответствует значениям $R = \pm 1$. Это возможно только в том случае, если между величинами существует строгая функциональная связь. Если коэффициент корреляции $R > 0$, то исследуемые величины x и y с точностью до случайных погрешностей одновременно возрастают или убывают, если же $R < 0$, то с возрастанием одной величины убывает другая.

Таким образом, величина коэффициента корреляции может служить критерием отбора частот. Итак, построен функционал, значение которого зависит от выбора вектора частот $\omega_i, i = \overline{1, n}$. Поэтому поиск параметров гармонических составляющих в исследуемом временном ряду эквивалентен нахождению максимума функционала:

$$R_{\{x,y\}} = R(\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n) = \max_{\{\omega_i, i=\overline{1,n}\}} \quad (11)$$

Этот функционал n переменных описывает $(n + 1)$ -мерную поверхность. Глобальный максимум функционала (11) соответствует решению нашей задачи, т. е. поиску частот и их сопутствующих параметров (амплитуда и начальная фаза). Для поиска экстремума используется метод координатного спуска, который заключается в поочередном поиске максимума по координате ω_1 , затем по ω_2 и так далее. Поиск ведется в простейшем случае с одинаковым шагом (возможно использование более сложных адаптивных алгоритмов выбора шага), который

Уменьшается после нахождения всех значений ω_i , $i = \overline{1, n}$. Процесс повторяется до тех пор, пока не будет выполнен критерий остановки. В качестве критерия можно выбирать величину ошибки по периоду, амплитуде или начальной фазе гармоник.

Предлагаемый резонансный метод высокоточного спектрального анализа позволяет анализировать и обрабатывать нерегулярные одномерные и двумерные числовые последовательности для выявления периодических или квазипериодических процессов (динамика механических систем, метеорология, геофизика, геодинамика, медицина и так далее). Метод позволяет делать прогноз (экстраполяцию) при достаточном количестве и качестве исходной информации об исследуемом процессе. Резонансный метод может быть использован в алгоритмах сжатия информации (цифровых изображений).

Примеры

Рассмотрим некоторые из основных свойств резонансного метода спектрального анализа. В качестве примера исследуемого временного ряда возьмем n значений G_k , определяемых в некоторые моменты времени t_k по формуле

$$G(t_k) = \sum_{i=1}^n a_i \sin(\omega_i t_k + \varphi_i), \quad \omega_i = 2\pi/p_i, \quad t_k = (T/d) \cdot k, \quad k = \overline{1, n}, \quad (12)$$

где n — число гармоник; a_i — амплитуда i -й гармоники; ω_i — частота i -й гармоники; p_i — период i -й гармоники; φ_i — начальная фаза i -й гармоники; T — временной интервал, на котором строится $G(t)$; d — число интервалов, на которое делится T .

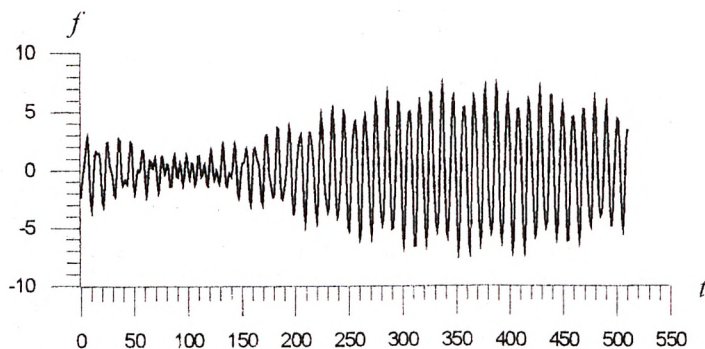
1. Разрешение периодов, отстоящих на 1%

Демонстрирует способность метода *разрешать* близкоотстоящие периоды, с высокой точностью определять значения периодов, фаз и амплитуд. Приводится сопоставление результатов анализа временного ряда резонансным методом и методом на основе БПФ. Генерируется ряд с параметрами ($n = 4$, $d = 512$, $T = 512$)

i	период (p_i)	амплитуда (a_i)	фаза (φ_i)
1	10.33	3	241
2	10.10	2	-51
3	10.21	1.5	73
4	5.70	1	25

Резонансный метод (РМ) дает следующие результаты

i	период	амплитуда	фаза
1	10.330 (0.004%)	2.979 (0.684%)	241.611 (0.253%)
2	10.100 (0.007%)	2.034 (1.714%)	309.785 (0.254%)
3	10.212 (0.024%)	1.486 (0.894%)	76.244 (4.444%)
4	5.700 (0.000%)	0.999 (0.003%)	24.998 (0.006%)



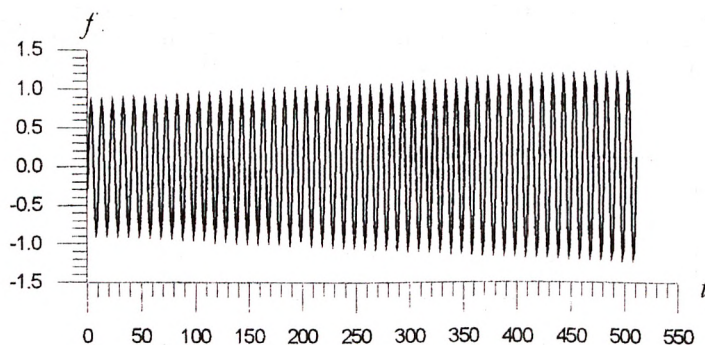
С использованием БПФ получаем

i	512 точек	4096 точек
1	10.24 (?%)	10.29 (?%)
2	5.68 (0.35%)	5.70 (0.08%)

2. Разрешение периодов, отстоящих на 0.1%

Демонстрирует способность метода разрешать близкостоящие периоды, с высокой точностью определять значения периодов, фаз и амплитуд. Приводится сопоставление результатов анализа временного ряда резонансным методом и методом на основе БПФ ($N = 3$, $d = 512$, $T = 512$).

i	период (p_i)	амплитуда (a_i)	фаза (φ_i)
1	10.01	1.1	337
2	10.02	0.9	283
3	10.03	1.1	113



Резонансный метод (РМ) выявил:

i	период	амплитуда	фаза
1	10.010 (0.000%)	1.097 (0.197%)	337.407 (0.120%)
2	10.019 (0.004%)	0.858 (4.660%)	282.457 (0.191%)
3	10.030 (0.001%)	1.050 (4.522%)	113.180 (0.159%)

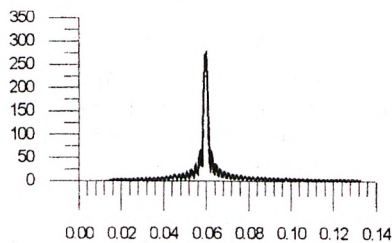
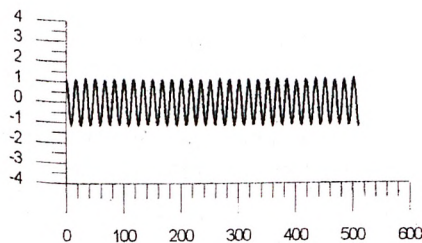
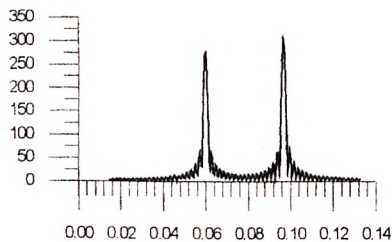
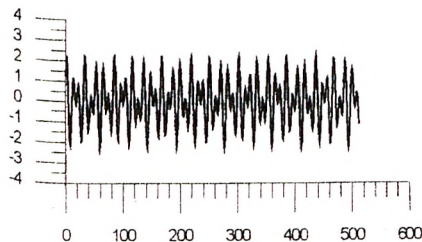
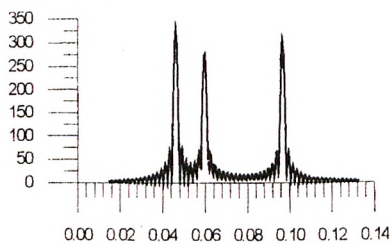
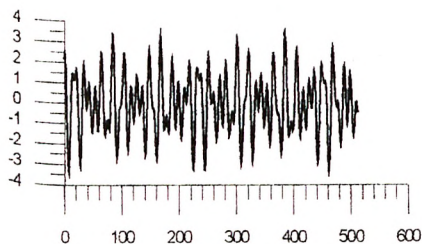
Быстрое преобразование Фурье (БПФ) дало:

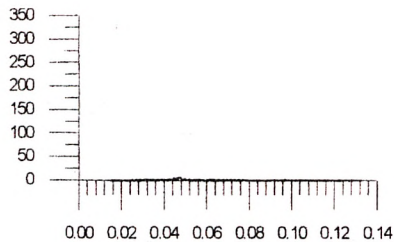
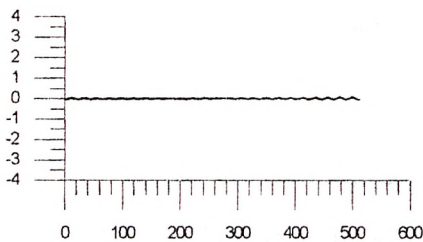
i	512 точек	4096 точек
1	10.039 (%)	10.014 (%)

3. Фильтрация

Демонстрирует вариант реализации алгоритма фильтрации (последовательного вычитания обнаруживаемых периодических составляющих). Исходная числовая последовательность содержит три гармонические составляющие, после их последовательного выявления и вычитания остается малозначимый остаток, который можно сделать меньше наперед заданной величины ($N = 3, d = 512, T = 512$),

i	период (p_i)	амплитуда (a_i)	фаза (φ_i)
1	21.57	1.3	141
2	10.33	1.2	13
3	16.71	1.1	77

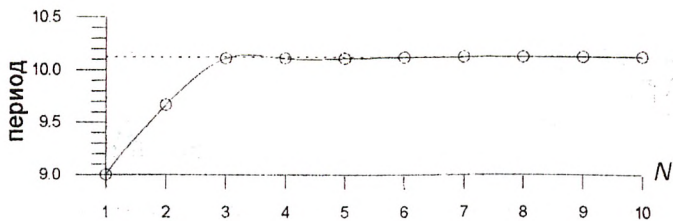
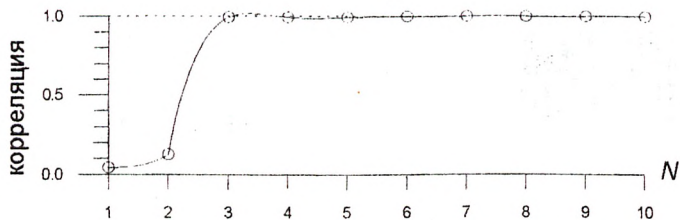




4. Сходимость

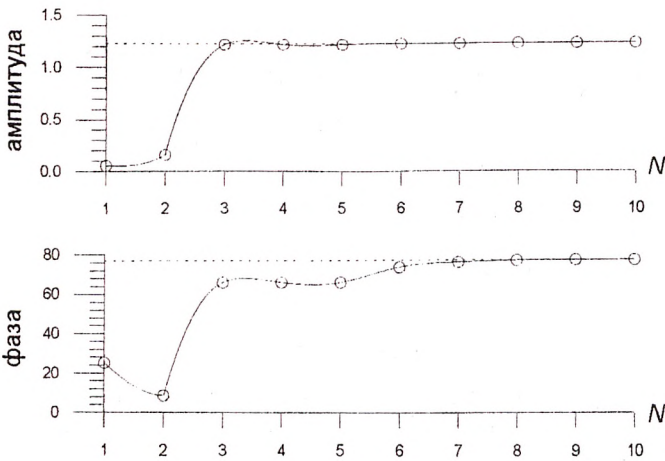
Показывает сходимость процессов вычисления периода, амплитуды и фазы, а также коэффициента корреляции в зависимости от числа проведенных итераций. Здесь N — итерации (циклы смены шага). Пунктиром обозначено точное значение величин ($N = 1, d = 512, T = 512$),

i	период (p_i)	амплитуда (a_i)	фаза (φ_i)
1	10.12345	1.23	77.13



5. Анализ нерегулярного временного ряда

Демонстрирует способность резонансного метода анализировать нерегулярные числовые последовательности. Из приведенных таблиц видно, что результаты анализа регулярного и нерегулярного рядов, образованных из одной числовой последовательности, практически совпадают. Возможность спектральной обработки нерегулярных числовых массивов без применения методов регуляризации весьма важна для обработки экспериментальной и наблюдательной информации ($N = 3, d = 512, T = 512$).



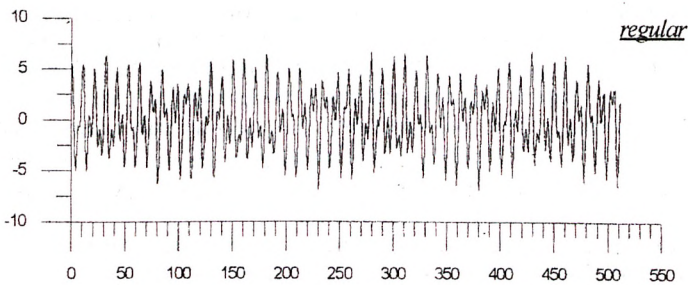
i	период (p_i)	амплитуда (a_i)	фаза (φ_i)
1	10.73	3.3	113
2	5.16	2.7	47.3
3	7.5	1	14

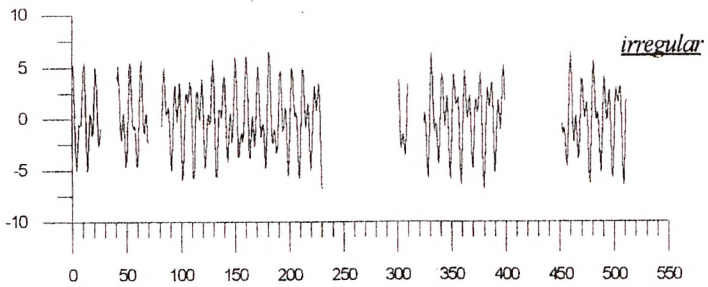
Результаты спектрального анализа на базе RM
для регулярного временного ряда — А

i	период	амплитуда	фаза
1	10.730 (0.002%)	3.299 (0.002%)	113.178 (0.158%)
2	5.160 (0.001%)	2.699 (0.001%)	47.427 (0.269%)
3	7.500 (0.003%)	1.000 (0.000%)	14.378 (2.702%)

для нерегулярного временного ряда — В

i	период	амплитуда	фаза
1	10.730 (0.002%)	3.299 (0.002%)	113.178 (0.153%)
2	5.160 (0.001%)	2.699 (0.001%)	47.427 (0.251%)
3	7.500 (0.003%)	1.000 (0.000%)	14.378 (2.603%)





СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Dmitri G. Kirian, Resonance Method of The Spectral Analysis (RMSA)// International Congress on Industrial and Applied Mathematics, ICIAM'95, July 3-7, 1995, TU Hamburg, Regensburg.
2. Dmitri G. Kirian, Resonance Method and its Properties // Second ECCOMAS conference on numerical method in engineering, ECCOMAS'96, Paris, September 9-13, 1996. Submitted for publication.